



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Método dos Elementos Finitos para Problemas com Fronteiras Livres

José Carlos Matos Duque

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Matemática
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Stanislav Nikolaevich Antontsev
Co-orientador: Prof. Doutor Rui Manuel Pires Almeida

Covilhã, novembro de 2013

Dedicado à minha filha Matilde.

Agradecimentos

Finda esta etapa, desejo manifestar o meu sincero agradecimento a todas as pessoas que, de algum modo, contribuíram para a sua realização, nomeadamente:

- à minha esposa Ana e à minha filha Matilde pela compreensão das minhas ausências e também por sempre me apoiarem e encorajarem, especialmente nos momentos mais difíceis;
- aos meus pais por me incentivarem a seguir esta área e por me terem dado condições para iniciar os meus estudos académicos superiores;
- a todos os meus familiares pelo apoio que manifestaram, nomeadamente à Madalena Gonçalves pelas correções de Português;
- ao meu co-orientador, Prof. Dr. Rui Almeida pela orientação, permanente disponibilidade e pelos valiosos conselhos, críticas e correções;
- ao meu orientador, Prof. Dr. Stanislav Antontsev pela orientação, ensinamentos, enorme disponibilidade e, principalmente, pela imensa paciência perante as minhas lacunas;
- a todos os meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior, especialmente ao meu colega Prof. Rui Robalo pelas longas conversas construtivas e instrutivas e à Prof.^a Dr. Isabel Mendes pelas inúmeras correções de Inglês;
- ao Prof. Dr. Sergey Shmarev, da Universidade de Oviedo, pelo tempo disponibilizado e pelos importantes comentários e sugestões que permitiram melhorar o meu trabalho;
- ao Prof. Dr. Jorge Ferreira, da Universidade de Pernambuco, pela colaboração e por ter dado um novo ânimo ao trabalho numa fase crítica.

A todos um Bem-Haja.

Este trabalho foi parcialmente suportado pelos projectos PEst-OE/MAT/UI0212/2011 e PEst-PTDC/MAT/110613/2009, financiados pelo FEDER através do - Programa Operacional Factores de Competitividade, FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Resumo

Neste trabalho pretende-se fazer um estudo sobre a aplicação do método dos elementos finitos a diversos problemas de reação-difusão com fronteiras livres. Para se obter estimativas do erro e simulações representativas é necessário obter alguns resultados teóricos sobre regularidade e algumas propriedades físicas das soluções. Neste sentido, o outro objetivo deste trabalho é o estabelecimento de resultados teóricos relativos a problemas em aberto.

O primeiro problema a ser estudado é a equação parabólica seguinte:

$$u_t = \operatorname{div}(|u|^{\gamma(\mathbf{x},t)} \nabla u) + f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, t \in]0, T].$$

Como o problema pode ser degenerado, utiliza-se um problema aproximado, regularizado através da introdução de um parâmetro ε . Demonstra-se, sob algumas condições em γ e f que a solução fraca do problema aproximado converge para a solução fraca do problema inicial, quando o parâmetro ε tende para zero. São calculadas soluções discretas utilizando o método dos elementos finitos contínuo no espaço e descontínuo no tempo e é provada a convergência destas soluções para a solução fraca do problema inicial.

Estuda-se também a aplicação do método da malha móvel a esta equação considerando-a num domínio livre em \mathbb{R}^2 . É desenvolvido um conjunto de subrotinas em Matlab que permitem calcular e representar graficamente soluções aproximadas de vários problemas de reacção-difusão com fronteiras livres. A discretização espacial é definida por uma partição do domínio em triângulos. Em cada elemento finito, a solução é aproximada por uma função seccionalmente polinomial de grau $r \geq 1$ utilizando polinómios interpoladores de Lagrange em coordenadas de área. Os vértices dos triângulos podem mover-se segundo um sistema de equações diferenciais parciais que é adicionado ao problema. Posteriormente, deduz-se uma equação para mover os vértices da fronteira. O sistema resultante é convertido num sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo, que é resolvido utilizando um integrador apropriado. Os integrais que surgem são calculados utilizando a quadratura de Gauss. Finalmente, são apresentados alguns resultados de aplicação.

O outro problema estudado é o sistema não linear da forma

$$\begin{cases} u_t = a_1(l_1(u), l_2(v))\Delta u + \lambda_1|u|^{p-2}u + f_1(\mathbf{x}, t) \\ v_t = a_2(l_1(u), l_2(v))\Delta v + \lambda_2|v|^{p-2}v + f_2(\mathbf{x}, t) \end{cases}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, t \in]0, T],$$

onde a_1 e a_2 são funções positivas e Lipschitz-contínuas, l_1 e l_2 são formas lineares contínuas, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $p \geq 2$. Prova-se a existência e unicidade de soluções fortes, assim como, algumas propriedades de localização, nomeadamente a existência de tempo de espera e a localização estável. Demonstra-se, impondo algumas condições em p e f_i , que as soluções deste sistema podem decair de forma exponencial ou polinomial ou até extinguirem-se em tempo finito. O sistema é discretizado utilizando o método dos elementos finitos de Galerkin no espaço e um método de Euler linearizado no tempo. Prova-se a convergência das soluções discretas e obtém-se a ordem de convergência em função dos parâmetros da discretização. No final, o método é implementado em ambiente Matlab e são apresentados alguns resultados numéricos.

Palavras-chave

Método dos elementos finitos, equação de meios porosos, expoente variável, malha móvel, fronteira livre, termo difusivo não local, efeitos de localização, comportamento assintótico.

Abstract

The aim of this work is to study the application of the finite element method to various reaction-diffusion problems with free boundaries. To obtain error estimates and representative simulations, it is necessary to obtain some theoretical results on regularity and some physical properties of the solutions. In this sense, the other goal of this work is to establish theoretical results concerning open problems.

The first problem to be studied is the following parabolic equation:

$$u_t = \operatorname{div}(|u|^{\gamma(\mathbf{x},t)} \nabla u) + f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, t \in]0, T].$$

Since the problem may be of degenerate type, an approximate problem is used, regularized by introducing a parameter ε . It is proved, under certain conditions on γ and f , that the weak solution of the approximate problem converges to the weak solution of the initial problem, when the parameter ε tends to zero. Discrete solutions are built using the continuous in space and discontinuous in time finite element method, and the convergence of these to the weak solution of the initial problem is proved.

The application of the moving mesh method to this problem, considering it a free boundary problem is also studied. A set of subroutines in Matlab, that can calculate and graphically represent approximate solutions of various reaction-diffusion problems with free boundaries, is developed. The spatial discretization is defined by a triangulation of the domain. In each finite element, the solution is approximated by a piecewise polynomial function of degree $r \geq 1$, using Lagrange interpolating polynomials in area coordinates. The vertices of the triangles move according to a system of differential equations which is added to the equations of the problem. The resulting system is converted into a system of ordinary differential equations in time variable, which is solved using a suitable integrator. The integrals that arise in the system of ordinary differential equations are calculated using the Gaussian quadrature. Finally, some numerical results of application are presented.

The other problem to be studied is the nonlinear nonlocal reaction-diffusion coupled system

$$\begin{cases} u_t = a_1(l_1(u), l_2(v))\Delta u + \lambda_1|u|^{p-2}u + f_1(\mathbf{x}, t) \\ v_t = a_2(l_1(u), l_2(v))\Delta v + \lambda_2|v|^{p-2}v + f_2(\mathbf{x}, t) \end{cases}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, t \in]0, T],$$

where a_1 and a_2 are Lipschitz-continuous positive functions, l_1 and l_2 are continuous linear forms, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ and $p \geq 2$. The existence and uniqueness of weak and strong solutions to these systems and localization properties of the solutions, including the waiting time effect and stable localization, are proved. Moreover, important results on polynomial and exponential decay and the vanishing of the solutions in finite time, are also presented. The convergence of a linearized Euler-Galerkin finite element method is proved, and the optimal order of convergence is obtained. Finally, the presented method is implemented and simulated in Matlab environment.

Keywords

Finite element method, porous media equation, variable exponent, moving mesh, free boundary, non local diffusion term, localization effects, asymptotic behavior.

Índice

1	Introdução	1
2	Definições e Teoremas Fundamentais	15
2.1	Desigualdades elementares	15
2.2	Definições e conceitos básicos	16
2.3	Distribuições	19
2.4	Espaços de Lebesgue	20
2.5	Espaços de Sobolev	21
2.6	Imersões	22
2.7	Espaços de Bochner	23
2.8	Teoremas fundamentais	24
2.9	Discretização espacial	26
2.10	Discretização temporal	29
2.11	Cálculo das funções interpoladoras	31
2.12	Cálculo dos integrais	32
3	Equação Em Meios Porosos Com Expoente Variável	35
3.1	Problema em domínio fixo	35
3.1.1	Regularização do problema	36
3.1.2	Convergência do problema regularizado	41
3.1.3	Aproximação discreta	45
3.1.4	Aproximação numérica	52
3.1.5	Resultados numéricos	55
3.2	Problema em domínio livre	59
3.2.1	Formulação do problema	59
3.2.2	Construção da malha adaptável	61
3.2.3	Discretização espacial	63
3.2.4	Movimento da fronteira	65
3.2.5	Resultados numéricos	66
4	Sistema Não Linear Com Termo De Difusão Não Local	73
4.1	Formulação do problema	73
4.2	Existência e unicidade de soluções fortes	74
4.3	Propriedades de localização	80
4.4	Comportamento assintótico	85
4.5	Solução semidiscreta	89
4.6	Solução totalmente discreta	92
4.7	Resultados numéricos	96
5	Conclusão e Trabalho Futuro	105
	Bibliografia	107

Lista de Figuras

2.1	Elemento finito de referência e numeração local dos nós.	31
2.2	Função Φ_k	33
3.1	Malha espacial para $h = 0.1$ usada no problema com o segundo membro artificial.	56
3.2	Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com o segundo membro artificial.	56
3.3	Erro da aproximação obtida no problema com o segundo membro artificial em função de h e de δ	57
3.4	Erro da aproximação obtida no problema com o segundo membro artificial em função de ε	57
3.5	Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com suporte não convexo.	58
3.6	Malha espacial para $h = 1/15$ usada no problema com absorção.	59
3.7	Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com absorção.	59
3.8	Cálculo do vetor normal	66
3.9	Domínio computacional e malha inicial usados no problema com expoente constante.	67
3.10	Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com expoente constante.	67
3.11	Evolução no tempo da malha obtida no problema com expoente constante.	67
3.12	Erro das aproximações da solução e da fronteira, obtidas no problema com expoente constante, em função do número de triângulos.	68
3.13	Domínio computacional e malha inicial usados no problema com suporte não convexo.	68
3.14	Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com suporte não convexo.	69
3.15	Evolução no tempo da malha obtida no problema com suporte não convexo.	69
3.16	Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com absorção e expoente constante.	70
3.17	Evolução no tempo da malha obtida no problema com absorção e expoente constante.	70
3.18	Erro das aproximações da solução e da fronteira, obtidas no problema com absorção e expoente constante, em função do número de triângulos.	70
3.19	Domínio computacional e malha inicial usados no problema com absorção e expoente variável.	71
3.20	Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com absorção e expoente variável.	71
3.21	Evolução no tempo da malha obtida no problema com absorção e expoente variável.	72
4.1	Evolução no tempo da aproximação de u obtida no problema da localização da solução.	97
4.2	Evolução no tempo da aproximação de v obtida no problema da localização da solução.	98
4.3	Malha espacial para $h = 0.05$ usada no problema da localização da solução.	98
4.4	Função de energia $b(t)$ no problema da localização da solução.	98
4.5	Evolução no tempo da aproximação de u obtida no problema com extinção em tempo finito e decaimento polinomial.	99

4.6	Evolução no tempo da aproximação de v obtida no problema com extinção em tempo finito e decaimento polinomial.	100
4.7	Malha espacial para $h = 0.025$ no problema com extinção em tempo finito e decaimento polinomial.	100
4.8	Função de energia $b(t)$ no problema com extinção em tempo finito e decaimento polinomial.	100
4.9	Evolução no tempo da aproximação de u obtida no problema com fontes externas ilimitadas.	102
4.10	Evolução no tempo da aproximação de v obtida no problema com fontes externas ilimitadas.	103

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, foram utilizadas várias equações para descrever alguns sistemas físicos, químicos, biológicos e ecológicos. Uma das mais bem sucedidas e cruciais é a equação de reação-difusão que é uma equação diferencial parcial parabólica do tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(a\nabla u) - f = 0, \quad (1.1)$$

onde f e a são funções possivelmente não lineares e dependentes de u chamadas termo de reação e difusão, respetivamente.

As equações diferenciais são extremamente úteis em muitas áreas da ciência, mas a maioria dos problemas reais envolve mais de uma função incógnita. Neste caso, tem-se o sistema de reação-difusão

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \text{div}(\mathbf{a}\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{f} = 0, \quad (1.2)$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{ne})$ é o vetor das incógnitas, \mathbf{f} uma função vetorial e \mathbf{a} uma matriz $ne \times ne$ de funções.

Em grande parte dos processos de difusão, é usual admitir que o fluxo, \mathcal{J} , num dado ponto, \mathbf{x} , é dada pela lei de Fick (ou lei de Darcy),

$$\mathcal{J} = -a\nabla u(\mathbf{x}),$$

onde u é, por exemplo, a temperatura ou a densidade da população e a é uma constante dependente do meio onde o processo ocorre. A suposição de a ser constante é obviamente uma aproximação da realidade, pois se as constantes são características do meio, é natural que elas dependam do seu estado. Este trabalho debruça-se sobre alguns casos particulares onde a não é constante.

Um dos objetivos deste trabalho é estudar a aplicação do método dos elementos finitos, tanto em domínio fixo como em domínio livre, a diversos problemas de reação-difusão com fronteiras livres. As estimativas do erro para aproximações discretas geralmente dependem da regularidade das soluções exatas. Assim, outro objetivo é o estabelecimento destes resultados teóricos relativos a problemas em aberto. Para se obter simulações representativas, é necessário conhecer algumas propriedades físicas das soluções.

O método dos elementos finitos de Galerkin (MEFG) é mais difícil de programar que os métodos das diferenças finitas, mas, em alguns casos, obtém melhores resultados com menos esforço computacional. Outra vantagem do método de Galerkin é a forma como os dados finais são devolvidos. Na maior parte dos casos, a solução obtida é uma função regular polinomial por partes. Isto resulta numa fácil representação dos dados e também permite integrar e derivar os resultados analiticamente. O MEFG aproxima o problema por outro problema, chamado problema discreto, definido num espaço de dimensão finita. Obtém-se então uma aproximação discreta $u(\mathbf{x}, t) \approx U(\mathbf{x}, t)$. Se o problema é do tipo parabólico, a obtenção de U implica a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Para resolver este sistema, existem numerosos integradores. O mais simples é o método de Euler que calcula U em alguns instantes

$t_n \in]0, T]$. A solução final obtida pode então ser $U_n(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}, t_n)$ ou a interpolação linear definida, em cada intervalo de tempo $]t_{n-1}, t_n]$, por $U(\mathbf{x}, t) = \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}U_n(\mathbf{x}) - \frac{t-t_n}{t_n-t_{n-1}}U_{n-1}(\mathbf{x})$. No caso mais simples, todos os intervalos têm a mesma amplitude δ . Se a solução exata tiver pouca regularidade em t , um método viável para integrar no tempo é o método dos elementos finitos descontínuo que aproxima a solução em cada intervalo de tempo por um polinómio, mas não obriga a que a solução seja contínua nos instantes $t_n \in]0, T]$. Para problemas mais difíceis recorre-se frequentemente a integradores mais eficientes. Geralmente, estes integradores utilizam diversas fórmulas e intervalos de amplitude variável, para poderem controlar o erro das estimativas, em cada instante t_n . Um exemplo deste tipo de integradores é o “ode15s”, implementado em ambiente Matlab.

O primeiro problema de fronteira livre a tratar neste trabalho surge ao estudar o movimento de um gás ideal barotrópico num meio poroso. Se se supuser que a pressão p depende explicitamente da densidade u e da temperatura θ da forma

$$p = p(u, \theta) = \tilde{k}|u|^{\tilde{\gamma}(\theta(\mathbf{x}, t))},$$

então, pela lei da conservação da massa e pela lei de Darcy, obtém-se uma equação do tipo (1.1) com um termo de difusão

$$a = k|u|^{\gamma(\mathbf{x}, t)}.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz-contínua e $\Omega_T = \Omega \times]0, T]$ um cilindro de altura $T < \infty$. Considere-se o seguinte problema de Cauchy: encontrar a função u que satisfaça as condições:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|u|^{\gamma(\mathbf{x}, t)} \nabla u) = f(\mathbf{x}, t, u) & \text{em } \Omega_T \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \Gamma_T = \partial\Omega \times]0, T] \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{cases}, \quad (1.3)$$

onde γ é uma função limitada definida em Ω_T , tal que:

$$-1 < \gamma^- \leq \gamma(\mathbf{x}, t) \leq \gamma^+ < \infty, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \bar{\Omega} \times]0, T], \quad (1.4)$$

com γ^- e γ^+ constantes conhecidas. O problema (1.3) é um problema de Cauchy para uma equação diferencial parabólica não linear e degenerada com expoente de não linearidade dependente de \mathbf{x} e t .

O comportamento das equações da forma (1.3) pode ser bem diferente do caso não degenerado do tipo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a(\mathbf{x}, t, u) \nabla u) + f(\mathbf{x}, t, u) & \text{em } \Omega_T \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \Gamma_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{cases}, \quad (1.5)$$

com

$$0 < a^- \leq a \leq a^+ < \infty, \quad \left| \frac{\partial a}{\partial u} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \leq C, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \bar{\Omega} \times]0, T], \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Se os dados iniciais forem suficientemente regulares, então o problema (1.5) admite soluções fracas únicas e estas mantêm-se regulares (ver [52]). É conhecido que dados iniciais em L_2 ou distribuições produzem soluções regulares.

Aplicando o MEFM a problemas do tipo (1.5) conseguem-se erros de ordem ótima. Em [72],

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

exigindo $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_t \in L_2(\Omega)$ e usando o esquema numérico

$$\frac{1}{\delta}(U_n - U_{n-1}, \chi) + (a(U_n)\nabla U_n, \nabla \chi) = (f_n, \chi), \quad \chi \in S_h$$

prova-se que:

$$\|U_n - u(t_n)\|_{L_2(\Omega)} \leq C(h^2 + \delta), \quad n \geq 1.$$

(u, v) denota o produto interno em $L_2(\Omega)$ definido por $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$.

Se γ é constante em (1.3) e se apenas se procuram soluções não negativas, então temos o problema de Cauchy para a equação em meios porosos clássica, da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta(u^m) + f & \text{em } \Omega_T \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \Gamma_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \geq 0 & \text{em } \Omega \end{cases}, \quad (1.6)$$

com

$$c = \frac{1}{\gamma + 1} \quad \text{e} \quad m = \gamma + 1.$$

O coeficiente c não é essencial e, sem perda de generalidade, pode considerar-se $c = 1$. Se se considerar $f = f(\mathbf{x}, t)$, o problema (1.6), em geral, não admite soluções clássicas. A existência e unicidade de soluções fracas para este tipo de problemas foi demonstrada em dimensão um por Oleřnik, Kalařinkov e Čřou ([61]) e para dimensões superiores a um, por Lions ([55]). Lions provou que se $f \in L_{\frac{m+1}{m}}(\Omega_T)$ e $u_0 \in L_2(\Omega)$, então existe uma única solução do problema (1.6) pertencente a $L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))$. Provou ainda que $|u|^{\frac{m-1}{2}}u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $u_t \in L_{\frac{m+1}{m}}(0, T; W^{-1, \frac{m+1}{m}}(\Omega))$.

Uma diferença deste tipo de equações para as não degeneradas é que soluções iniciais suaves, ou até mesmo analíticas, não produzem necessariamente soluções suaves. Foi demonstrado em [46] que, para $m \geq 2$, dados iniciais suaves e com suporte compacto nunca produzem soluções em C^1 . A derivada espacial torna-se descontínua em algum instante finito.

Aronson ([6]) provou que se u_0^{m-1} é Lipschitz-contínua em x , então u^{m-1} também é Lipschitz-contínua e u Hölder-contínua em x com expoente $\min\{1, \frac{1}{m-1}\}$ e em t com expoente $\min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2m-1}\}$. Provou ainda que $(u^m)_x$ existe e é contínua em x e se $1 < m < 2$, então u_x também existe e é contínua em x .

Oleřnik, Kalařinkov e Čřou provaram também que se u_0 tem suporte compacto, então u tem suporte compacto para qualquer tempo positivo. Esta propriedade é usualmente denotada por propagação com velocidade finita (“finite speed of propagation”). Kalařinkov [46] estudou então o caso em que u_0 satisfaz as condições:

$$u_0 > 0 \text{ em }]a_1, a_2[, \quad u_0 = 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus]a_1, a_2[,$$

e provou que para $m > 0$ o conjunto

$$\Omega(t) = \{(x, t) \in \Omega_T : u(x, t) > 0\}$$

é limitado por duas curvas $x = \Gamma_1(t)$ e $x = \Gamma_2(t)$, onde $\Gamma_1(t)$ é contínua, monótona não crescente e contém o ponto $(a_1, 0)$ e $\Gamma_2(t)$ é contínua, monótona não decrescente e contém o ponto $(a_2, 0)$. Às curvas $\Gamma_1(t)$ e $\Gamma_2(t)$, geralmente, chamamos interfaces ou fronteiras livres.

As questões interessantes sobre a regularidade aparecem junto à interface que é melhor

descrita em termos da função

$$\nu(x, t) = -\frac{m}{m-1}u^{m-1}.$$

Oleřnik, Kalařinkov e Čřou provaram que:

$$|u|^m u_x \in L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega)).$$

Em 1970, Aronson ([7]) demonstrou que:

$$|u|^{m-1}u_x \in L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega)).$$

Mais tarde, Knerr ([49]) provou que Γ_1 e Γ_2 são de Lipschitz e que a derivada lateral de Γ_i existe e satisfaz

$$\Gamma'_i(t) = -\nu_x(\Gamma_i(t), t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.7)$$

A equařão (1.7) deve ser entendida como o limite quando $x \rightarrow \Gamma_i(t)$. Knerr provou tambřm que se $\nu_0(x) \geq (a_2 - x)^\varpi$, para $a_2 - \epsilon \leq x \leq a_2$ com $0 < \epsilon < 1$ e $\varpi < 2$, então $\nu(a_2, t) > 0$, $t > 0$ e que se $\nu_0(x) \leq (x - a_2)^2$, para $a_2 - \epsilon < x < a_2$ e $\epsilon > 0$, então existe uma constante t_w tal que $\Gamma_2(t) = a_2$, para $0 \leq t \leq t_w$. Este resultado ficou conhecido por tempo de espera (“ waiting time effect ”) e, grosso modo, indica que a interface pode comeęar instantaneamente a mover-se ou pode haver um intervalo de tempo finito $[0, t_w]$ no qual a fronteira permanece estacionária e passado esse tempo comeęa a mover-se com velocidade finita.

Em 1987, Aronson e Vazquez ([8]) provaram que Γ_i é uma curva C^∞ no intervalo $]t_w, +\infty[$. No caso $t_w = 0$, a interface é $C^\infty(\mathbb{R}^+)$. Se $t_w > 0$, esta regularidade só não é verificada em $t = t_w$, pois $\Gamma_i(t) = a_i$, $t \in [0, t_w]$.

Angenent ([2]) melhorou estes resultados mostrando que no intervalo $]t_w, +\infty[$, Γ_i é uma funęão analítica.

Para dimensões superiores a um, Caffarelli e Friedman ([14]) provaram que a superfície $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$ é Hölder-contínua e Caffarelli e Wolanski ([15]) provaram que, impondo algumas condięões em ν , existe $0 < \kappa < 1$ tal que $\Gamma(t)$ é de classe $C^{1, \kappa}$.

Daskalopoulos e Hamilton ([23]) provaram que existe um intervalo $]0, T[$ no qual Γ é uma superfície de classe C^∞ , mas as condięões são: ν_0 , $D\nu_0$ e $dD^2\nu_0$ se puderem estender continuamente até à fronteira por funęões Hölder-contínuas de classe C^κ , $\kappa > 0$, $D\nu_0 \neq 0$ em Γ e $\nu_0 > 0$. d denota a distância à fronteira do domínio. A condięão $D\nu_0 \neq 0$ em Γ garante que a interface comeęa a mover-se em $t = 0$.

Ko ([51]) estendeu este resultado para $t > T$ no caso de a soluęão ter simetria radial.

Para $f = f(u)$ e γ constante os casos em que $f(u) = -u^p$ são os mais usuais, obtendo-se o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta(u^m) - u^p & \text{em } \Omega_T \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \Gamma_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \geq 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

Kalařinkov ([47]) provou que existe soluęão fraca e que é única se $p \geq 1$ e u_0^m é Lipschitz-contínua e que $(u^{m-1})_x$ é limitada para $t > 0$. Destes resultados, conclui-se que u é Hölder-contínua em Ω_T relativamente a x com expoente $\frac{1}{m}$ e, conseqüentemente, relativamente a t com expoente $\frac{1}{2m+1}$. Tal como no caso da PME, a soluęão tem as derivadas u_t , u_x e u_{xx} , limitadas no conjunto $\Omega(t)$, e as questões principais de regularidade surgem na fronteira desse conjunto.

Em [47], provou-se que no caso $p > 1$ a soluęão possui a propriedade de propagaęão com velocidade finita. Se $1 < p < m$, então $\Omega(t)$ é limitado para $t \geq 0$ e no caso $p > m$, $\Omega(t)$ expande

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

infinitamente.

Knerr ([50]) provou que $\Omega(t)$ é um intervalo $]\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)[$ e que $\Gamma_i(t) \in C^0([0, +\infty[) \cap C^{0,1}(]0, +\infty[)$, no caso $m > 1$ e $p \geq 1$. Com base nestes resultados, Herrero e Vazquez ([42]) deram condições para a existência de tempo de espera t_w e provaram que $\Gamma_i(t) \in C^1(]t_w, +\infty[)$. Demonstraram também que $\Gamma_i(t)$ satisfaz a equação (1.7), no caso $p \geq m$. Shmarev e Vazquez ([69]) provaram que a equação (1.7) também é válida para $1 < p \leq m$.

Se $0 < p < 1$, a equação (1.7) deixa de ser válida, pois o suporte da solução encolhe com o tempo e a solução extingue-se num intervalo de tempo finito, ou seja, existe $t_e > 0$ tal que $\Omega(t) \neq \emptyset$, $t < t_e$ e $\Omega(t) = \emptyset$, $t \geq t_e$. A esta propriedade chamamos extinção em tempo finito (“finite time extinction”). Em ([38]), provou-se que para $p < 1$ e $m + p > 2$, $\Gamma_i(t)$ satisfaz (1.7) quando o domínio expande e satisfaz a equação:

$$\Gamma'_i(t) = \frac{1-p}{(u^{1-p})_x(\Gamma_i(t), t)}, \quad t \in [0, T] \quad (1.9)$$

quando o domínio contrai. Provou-se também que Γ_i é Lipschitz-contínua.

No caso limite $m + p = 2$, em ([40]) provou-se que Γ_i satisfaz a equação:

$$\Gamma'_i(t) = -\nu_x(\Gamma_i(t), t) + \frac{1-p}{(u^{1-p})_x(\Gamma_i(t), t)}$$

e que o domínio expande até um determinado instante e depois contrai até se extinguir num tempo finito. Neste caso, provou-se que a fronteira é analítica.

O caso mais curioso surge quando $m > 1$, $0 < p < 1$ e $0 < m + p < 2$ onde se prova ([39]) que a fronteira segue a equação:

$$\Gamma'_i(t) = \frac{1}{\kappa(1+\beta)} \left(\left((\alpha - (u^{(m-p)/2})_x)^{1/\beta} \right)_x \right)^\beta (\Gamma_i(t), t),$$

$$(u^{(m-p)/2})_x(\Gamma_i(t), t) = \alpha$$

com as constantes

$$\alpha = \frac{m-p}{\sqrt{2m(m+p)}}, \quad \kappa = \frac{(m-p)^2}{2m(1-p)(m+p+2)} \left(\alpha \frac{m-p}{2m} \right)^{\frac{2-m-p}{m-p}}, \quad \beta = \frac{2-m-p}{m-p}.$$

Para dimensões superiores a um, Shmarev ([67, 68]) provou que se $m > 1$, $p > 0$ e $m + p \geq 2$, a velocidade da fronteira $\Gamma(t)$ é dada por

$$\nu = \Gamma'(t) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \Gamma} \left(-\frac{m}{m-1} \nabla u^{m-1} + \nabla \Upsilon \right),$$

onde Υ é solução do problema elíptico seguinte, com t como parâmetro:

$$\operatorname{div}(u \nabla \Upsilon) = u^p, \quad \Upsilon = 0 \text{ em } \Gamma$$

e provou que u e Γ são funções analíticas em t e preservam a regularidade inicial nas variáveis espaciais. A regularidade de ν em relação às variáveis espaciais é melhor que no instante inicial.

A procura de soluções na forma explícita é uma área importante no estudo de equações diferenciais. Em 1952, Barenblat ([13]) deduziu e estudou uma solução de (1.6), com $c = 1$ e

$f = 0$, que simula a libertação de calor partindo de um ponto. A solução tem a forma

$$u(\mathbf{x}, t) = t^{-\alpha} \left[C - \kappa \|\mathbf{x}\|^2 t^{-\frac{2\alpha}{d}} \right]_{+}^{\frac{1}{m-1}},$$

onde as constantes são:

$$\alpha = \frac{d}{d(m-1)+2}, \kappa = \frac{\alpha(m-1)}{2md},$$

$\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana de \mathbb{R}^d e $[\cdot]_{+}$ a parte positiva. Esta solução é usualmente rotulada de “solução do tipo fonte” (“source-type solution”) pelo facto de utilizar como dados iniciais a função de Dirac. O estudo desta função mostra muitas das propriedades de que temos estado a falar. A solução tem suporte compacto em cada instante fixo. A fronteira é analítica, dada implicitamente pela equação:

$$t = c \|\mathbf{x}\|^{d(m-1)+2}$$

e move-se com velocidade finita.

Se fizermos uma transformação adequada no tempo e no espaço em u , a nova função, também denotada por u , ainda é solução do problema [73]. Deste modo, obtém-se uma solução da forma

$$u(x, t) = (T-t)^{-\alpha} \left[C + \kappa \|\mathbf{x}\|^2 (T-t)^{-\frac{2\alpha}{d}} \right]_{+}^{\frac{1}{m-1}},$$

com propriedades diferentes. Esta solução não é limitada, tende para infinito quando $t \rightarrow T^-$.

Para o problema (1.8) em dimensão um, Kersner ([48]) encontrou uma solução explícita para $m > 1$, $0 < p < 1$ e $m + p = 2$ da forma:

$$u(x, t) = \left(\frac{m-1}{2m(m+1)t} \left[Ct^{\frac{2}{m+1}} - (m+1)^2 t^2 - x^2 \right]_{+} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Para dimensões superiores a um, e no caso $m = 2$, $p = 1$, é possível obter soluções explícitas para o problema (1.8) da forma:

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[2 (6(e^{2t} - 1)e^t)^{-\frac{2}{3}} - \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{3(e^{2t} - 1)} \right]_{+}^{\frac{1}{2}}.$$

Um problema do tipo (1.3) foi primeiro estudado por Antontsev e Shmarev [4], para γ dependente das variáveis espaciais e do tempo. Nesse artigo foi tratado o problema com $f = f(\mathbf{x}, t)$ e $-1 < \gamma^- \leq \gamma(\mathbf{x}, t) \leq \gamma^+ < \infty$. Provaram que se

$$\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + \int_0^T \|f\|_{L_\infty(\Omega)} dt \leq \infty,$$

então o problema (1.3) tem pelo menos uma solução pertencente a $L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega))$ tal que $|u|^{\frac{\gamma}{2}} \nabla u \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ e $u_t \in L_2(0, T; H_0^{-1}(\Omega))$. No caso $\gamma^- > 0$, os autores conseguiram provar que se $\sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |\nabla \gamma| \in L_2(]0, T])$, então a solução é única e no caso $\gamma^+ \leq 0$, tem-se que $\|\nabla u\|_{L_2(\Omega_T)} \leq C$. Antontsev e Shmarev estudaram também as propriedades físicas das soluções deste tipo de problemas. Concluíram que se γ é contínuo e positivo, então u possui a propriedade de propagação com velocidade finita. Estabeleceram ainda condições a impor a u_0 e f suficientes para que exista tempo de espera. Eles provaram que se $\gamma^+ < 0$, então u tem a propriedade de extinção em tempo finito. Mais tarde, em [5], Antontsev e Shmarev demonstraram a existência e unicidade de solução fraca para um problema mais geral considerando $f = b|u|^{\gamma(x,t)/2} \nabla u - c|u|^{\sigma(x,t)-2} u + d$.

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Em 2006, Henriques e Urbano ([41]) provaram que as soluções de (1.3), com $\gamma^- > 0$, são localmente contínuas demonstrando que é possível definir uma sequência de cilindros encaixados Q_n e uma sequência w_n convergente para zero tais que:

$$\operatorname{ess\,sup}_{Q_n} u - \operatorname{ess\,inf}_{Q_n} u \leq w_n,$$

o que implica a continuidade local.

Tomando por base o trabalho de Antontsev e Shmarev [4], Lian, Gao, Cao e Yuan ([54]) estudaram o problema (1.3) com $f = g(\mathbf{x}, t) - |u|^{\sigma(\mathbf{x}, t)-1}u$, $-1 < \gamma^- \leq \gamma(\mathbf{x}, t) \leq \gamma^+ < \infty$ e $0 < \sigma^- \leq \sigma(\mathbf{x}, t) \leq \sigma^+ < \infty$ e provaram que, neste caso, se mantêm os resultados de existência, unicidade e regularidade das soluções fracas obtidos em [4], mas só demonstraram a unicidade no caso $\sigma^- > 1$. Concluíram também que se $\sigma^+ < 1$, $g = 0$, $u_0 \geq 0$ e $\sup_{\bar{\Omega}_T} |\nabla \gamma| \leq C$, então as soluções têm a propriedade de extinção em tempo finito.

Para as equações do tipo degenerado, muitas das técnicas dos elementos finitos existentes não funcionam bem. As estimativas do erro e da ordem de convergência são geralmente inferiores ao ótimo e, muitas vezes, a ordem de convergência tende para zero para alguns valores de certos parâmetros (por exemplo $m \rightarrow \infty$). Além disso, há discrepâncias entre a regularidade exigida para se obter os majorantes e a regularidade máxima conhecida para os respectivos dados iniciais.

A primeira estimativa do erro, para um esquema completamente discreto aplicado à PME

$$u_t = \operatorname{div}(|u|^m \nabla u), \quad m \geq 1,$$

foi obtida por Rose ([64]) que utilizou um esquema regularizado, substituindo o coeficiente de difusão $|u|^m$ por um novo coeficiente da forma $a_\varepsilon(u)$ que satisfaz as condições:

$$\begin{cases} a_\varepsilon(\alpha) \in C^4(\mathbb{R}), & \varepsilon \in]0, 1] \\ a_\varepsilon(\alpha) = |\alpha|^m, & \alpha \geq \varepsilon \\ a_\varepsilon(\alpha) \geq \varepsilon/2, & \alpha \geq 0 \\ a'_\varepsilon(\alpha) \geq 0, & \alpha \geq 0 \\ a_\varepsilon(-\alpha) = a_\varepsilon(\alpha), & \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Rose aplicou, ao problema regularizado, o método dos elementos finitos de Galerkin contínuo com aproximações lineares no espaço e o método de Euler regressivo no tempo. Escolhendo $0 < \varepsilon \leq Ch^{\frac{2}{m+1}}$, conseguiu provar uma estimativa da forma

$$\left(\delta \sum_n \|u(t_n) - U_n\|_{L^{m+2}(\Omega)}^{m+2} \right)^{\frac{1}{m+2}} \leq C(\delta^{\frac{1}{m+1}} + (\ln(1/h))^{\frac{\kappa}{(m+1)(m+2)}} h^{\frac{2}{m+1}}),$$

para dimensões 1, 2 e 3, supondo que $u_t \in L^{\frac{m+2}{m+1}}(0, T; L^{\frac{m+2}{m+1}}(\Omega))$ e que a triangulação é quase uniforme. Para dimensão 1, $\kappa = 0$, para dimensão 2 e 3, $\kappa = 1$.

Nochetto e Verdi ([59]) estudaram a equação:

$$u_t = \Delta v, \quad u \in k(v) = v^{\frac{1}{m}}$$

e utilizaram um esquema regularizado totalmente discreto da forma

$$\frac{1}{\delta}(U_n - U_{n-1}, \chi) + (\nabla V_n, \nabla \chi) = 0 \quad \chi \in S_h, \quad n \geq 1,$$

$$U_n = \Pi_h k_\varepsilon(V_n), \quad k_\varepsilon(s) = \begin{cases} \min(s/\varepsilon, k(s)), & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ \max(s/\varepsilon, k(s)), & s < 0 \end{cases}.$$

Para $\delta = Ch^{\frac{4m}{3m-1}}$ e $\varepsilon = Ch^{\frac{2m-2}{3m-1}}$ provaram a estimativa:

$$\|u - U\|_{L_{m+2}(\Omega_T)} \leq Ch^{\frac{4m}{(m+1)(3m-1)}},$$

que é uma melhoria em relação ao trabalho de Rose.

A equação:

$$u_t = \Delta v + f, \quad u \in k(v) = v^{\frac{1}{m}}$$

foi estudada em [65], por Rulla e Walkington, onde se utilizou o esquema:

$$\frac{1}{\delta}(U_n - U_{n-1}, \chi) + (\nabla V_n, \nabla \chi) = (f^{n/2}, \chi) \quad \chi \in S_h,$$

$$U_n = \Pi_h k_\varepsilon(V_n), \quad n \geq 1.$$

Nesse artigo, provou-se a estimativa:

$$\|u - U\|_{L_\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|v - V\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \leq C(\delta + (\ln(1/h))^\alpha h).$$

Esta estimativa é ótima em relação a δ , mas a regularidade exigida é u ser Lipschitz-contínua.

Utilizando o mesmo esquema que Nochetto e Verdi e usando uma propriedade de não degenerescência na fronteira, Ebmeyer [34] provou uma estimativa do tipo

$$\|u - U\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \leq Ch^{\frac{m^2+6m+8}{6m^2+2m}},$$

escolhendo $\delta \leq Ch^{\frac{5m^2+4m-1}{3m^2+m}}$. É de salientar que esta estimativa é limitada inferiormente por $\frac{1}{6}$, ao contrário das anteriores que tendiam para zero quando m tendia para infinito.

Em [75], Wei e Lefton utilizaram o esquema totalmente discreto:

$$\frac{1}{\delta}(U_n - U_{n-1}, \chi) + \frac{1}{m}(\nabla(|U_n|^{m-1}U_n), \nabla \chi) = (f_n, \chi) \quad \chi \in S_h, \quad n \geq 1,$$

para aproximar as soluções da equação

$$u_t = \operatorname{div}(|u|^{m-1}\nabla u) + f, \quad m \geq 0$$

e provaram para domínios espaciais de dimensão d , a estimativa:

$$\|u - U\|_{L_{m+1}(0,T;L_{m+1}(\Omega))} \leq C \left(\delta^{\frac{1}{2}} + h + h^{\frac{1}{m}}(d^{\frac{m-1}{2m+2}} + 1) \right)^{\frac{1}{m+1}},$$

quando $m \geq 1$.

Mais recentemente, Ebmeyer e Liu ([35]) definiram uma nova seminorma e utilizaram o esquema:

$$\frac{1}{\delta}(U_n - U_{n-1}, \chi) + (\nabla V_n, \nabla \chi) = 0 \quad \chi \in S_h, \quad n \geq 1.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Fazendo uso de novos resultados sobre a regularidade, provaram que:

$$\left(\int_0^T \int_{\Omega} |u - U| |v - V| dx dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left\| \int_0^T v - V dt \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\delta + h),$$

onde $v = |u|^{m-1}u$.

Contudo, ainda não se fez um estudo sobre a convergência, análise do erro e efeitos numéricos para o método dos elementos finitos, quando aplicado a equações do tipo (1.3) com expoente variável.

Antontsev e Shmarev [4] provaram que as soluções do problema (1.3) têm a propriedade de propagação com velocidade finita. Se a solução inicial tiver suporte compacto, então origina-se uma fronteira livre que delimita o suporte da solução. Assim, podemos tratar o problema como um problema de fronteira livre. Surge então o problema de calcular o domínio $\Omega(t)$ e a função u .

Para abordar o problema em domínio livre é necessário mover a fronteira de um modo adequado. Desta forma, é particularmente útil utilizar um método onde a malha se possa mover com a fronteira, mas também que se adapte à solução obtida no interior.

O Método dos Elementos Finitos com malha adaptativa é amplamente utilizado para resolver equações diferenciais, em domínios fixos, que têm soluções com grandes variações no domínio. Ficou já evidente que podem ser obtidos resultados mais precisos se a malha concentrar pontos em regiões onde a solução precisa de maior definição. Se houver a garantia de que o número de elementos finitos é suficiente para descrever bem as variações da solução e o movimento dos nós é adequado, então obtém-se um método extremamente eficiente. A principal dificuldade reside na escolha do movimento dos nós de modo a que não ocorram singularidades.

O Método dos Elementos Finitos Móveis (MEFM) de Miller e Miller [58] é uma extensão natural do método das linhas para malhas fixas. O método foi aplicado a equações do tipo:

$$u_t = L(u),$$

com L um operador onde apenas surgem as derivadas espaciais. A solução procurada é da forma

$$U = U(x(t), t) = \sum_j U_j(t) \psi_j(x(t)),$$

onde $x(t)$ é o interpolador linear da posição dos nós da malha $\{X_j(t)\}$ e ψ_j é a função básica de Lagrange de grau um associada ao nó X_j . A solução e a posição dos nós são obtidos através da minimização da norma $L_2(\Omega)$ do resíduo

$$\Lambda = U_t - L(U).$$

Após aplicar a regra da cadeia e da minimização em relação a $\frac{\partial U_j}{\partial t}$ e $\frac{\partial X_j}{\partial t}$, resultam as equações:

$$\int_{\Omega} \psi_i \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \nabla U \right) dx = \int_{\Omega} \psi_i L(U) dx$$

e

$$\int_{\Omega} (\psi_i \nabla U) \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \nabla U \right) dx = \int_{\Omega} \psi_i \nabla U L(U) dx.$$

Estas equações formam um sistema de equações diferenciais ordinárias que tem de ser integrado no tempo considerando como valores iniciais $U(0)$ e a posição inicial da malha. Obtemos,

deste modo, em cada instante, a solução do problema e a posição da malha. Em princípio, este método é ótimo na norma L_2 , pois minimiza o resíduo. No entanto, o problema pode tornar-se degenerado se alguma das componentes de ∇U for contínua em algum nó e também é possível que a malha mude de topologia, pois a medida de algum dos elementos finitos pode tornar-se zero ou negativa. Para evitar isto, é necessário adicionar um termo de penalização que vai tornar o sistema de equações diferenciais ordinárias bastante rígido (“stiff”) e obrigar ao uso de um integrador mais robusto para manter a eficiência.

Mais tarde, Carlson e Miller ([16, 17]) introduziram uma função peso da forma

$$\mathcal{W} = \frac{1}{1 + |\nabla U|^2},$$

às equações do sistema diferencial ordinário, ficando

$$\int_{\Omega} \psi_i \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \nabla U \right) \mathcal{W} dx = \int_{\Omega} \psi_i L(U) \mathcal{W} dx$$

e

$$\int_{\Omega} (\psi_i \nabla U) \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \nabla U \right) \mathcal{W} dx = \int_{\Omega} \psi_i \nabla U L(U) \mathcal{W} dx,$$

tornando o método mais robusto e versátil.

Em 2007, Wachter e Sobey ([74]) generalizaram este método para sistemas de equações diferenciais parciais do tipo parabólico e denominaram-no “string gradient weighted”.

Outra variante deste método foi estudada por Coimbra, Sereno e Rodrigues ([26]) onde utilizaram funções base de grau superior a um. Mais tarde, esta variante foi aplicada a problemas com fronteiras móveis por Robalo, Coimbra e Rodrigues ([63]).

Cada uma das técnicas anteriores lida com a degenerescência através de uma penalização diferente.

Em dimensão um, o método é, geralmente, eficiente devolvendo soluções numéricas precisas, mas em dimensões maiores, o custo computacional pode retirar alguma eficiência.

O princípio de equidistributividade introduzido por de Boor [24] já demonstrou ser um bom meio para deduzir equações para o movimento da malha. Este princípio implica selecionar os pontos da malha de modo que uma determinada função, dependente da solução (geralmente uma medida do erro), seja igualmente distribuída por todos os elementos finitos.

O método da Malha Móvel para equações diferenciais parciais (MMPDE) deduzido por Huang, Ren e Russell [43] utiliza este princípio para deduzir vários métodos, introduzindo uma função monitor para definir o movimento da malha em domínios com fronteira fixa. Destes, destaca-se o MMPDE5, onde o movimento da malha é calculado resolvendo a equação:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(m \frac{\partial x}{\partial \xi} \right), \quad (1.10)$$

com condições iniciais e na fronteira adequadas. τ é um parâmetro positivo e m uma matriz definida positiva ou escalar positivo, geralmente dependente de u (chamada matriz ou função monitor). Em 1999, Huang e Russel ([44]) estenderam o método a duas dimensões. Para isso, utilizaram as equações de descida máxima resultantes da minimização do funcional

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \nabla x^T m \nabla x + \nabla y^T m \nabla y d\xi$$

e consideram \mathbf{x} como uma aplicação entre dois domínios. Os autores provaram que a solução

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

existe e é regular desde que os dados iniciais e a fronteira sejam regulares. A aplicação é não singular, mas a malha pode tornar-se bastante distorcida (“skewed”). A solução do problema inicial e a posição dos nós são calculados separadamente em cada intervalo $]t_{n-1} - t_n]$. Foram simulados diversos problemas com diferentes funções monitor, mas revelou-se difícil encontrar uma função, no caso geral, que satisfaça todas as necessidade de adaptação.

O método de Baines, Hubbard e Jimack ([11, 10, 12]) utiliza a lei da conservação geométrica, na sua forma integral, para calcular as velocidades. A malha é acoplada com a solução e é movida, em cada instante, de forma a procurar conservar no tempo o integral de uma função monitor igualmente distribuído pelos elementos finitos. A equação diferencial parcial é utilizada com a versão euleriana da equação da conservação para gerar o campo de velocidades, que depois é usado para mover a malha na versão lagrangeana. Nos casos mais simples, a solução da equação diferencial parcial pode ser reconstruída, *à posteriori*, através da versão lagrangeana da lei de conservação. Nos casos mais complexos, pode-se utilizar a versão lagrangeana da equação diferencial parcial. Este método foi aplicado com sucesso a equações com fronteiras móveis e livres obtendo-se resultados precisos tanto para a solução como para a posição da fronteira. Recentemente, Marlow, Hubbard e Jimack ([57]) aplicaram o método a problemas com fronteira móvel e utilizaram, para mover os pontos na fronteira, uma função monitor que podia ser diferente da função monitor utilizada para mover os pontos interiores.

Neste trabalho, estendem-se os resultados de Rose para o caso do expoente depender das variáveis espaciais e os resultados de Baines, Hubbard e Jimack para o caso de problemas em domínios com fronteira livre.

O segundo problema com fronteira livre a ser estudado aqui surge da biologia. Pretende-se estudar a difusão de uma população (por exemplo de bactérias). Neste caso, é razoável supor que a mobilidade no meio depende do quanto populoso ele está. Este problema pode ser modelado pela equação (1.1) onde a depende do total da população nesse domínio Ω , isto é,

$$a = a(l(u)), \text{ com } l(u) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x},$$

ou da população numa região específica $\Omega' \subset \Omega$. Ou seja, os movimentos são guiados considerando o estado global do meio. O problema é não local, no sentido em que o termo de difusão é determinado por uma quantidade global.

Considere-se um sistema não linear do tipo reação-difusão, num domínio limitado e com termos de difusão não lineares aplicados a funcionais lineares l_i , da forma

$$\begin{cases} u_t - a_1(l_1(u), l_2(v))\Delta u + \lambda_1|u|^{p-2}u = f_1(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \times]0, T] \\ v_t - a_2(l_1(u), l_2(v))\Delta v + \lambda_2|v|^{p-2}v = f_2(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \times]0, T] \end{cases} \quad (1.11)$$

Neste caso, u e v podem descrever a densidade de duas populações que interagem através das funções a_1 e a_2 . Supõe-se que a taxa de mortalidade na espécie u é proporcional a $|u|^{p-2}u$ com o factor $\lambda_1 \geq 0$ e, na espécie v , é proporcional a $|v|^{p-2}v$ com o fator $\lambda_2 \geq 0$. É assumido que $p \geq 1$. f_1 e f_2 representam as influências por fontes externas.

Este tipo de termo de difusão foi proposto por Chipot e Rodrigues em 1992 [20] para problemas elípticos. Nesse trabalho os autores provaram a existência de soluções fracas e que a unicidade não se verifica no caso geral.

Mais tarde, Chipot e Lovat [18, 19] estudaram a existência e unicidade de soluções para

problemas não locais da forma

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u = f(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega_T \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \Gamma_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{cases}, \quad (1.12)$$

onde Ω é um subconjunto, aberto e limitado, de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, com fronteira suave $\partial\Omega$; T é um instante de tempo arbitrário e a é uma função de \mathbb{R} em $]0, +\infty[$. No problema (1.12), a e f são funções contínuas, $l : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear contínua e a é Lipschitz-contínua. Chipot e Lovat estudaram também o comportamento assintótico das soluções.

Em 2004, Corrêa, Menezes e Ferreira [22] estenderam os resultados obtidos por Chipot e Lovat, considerando $a = a(l(u))$ e $f = f(\mathbf{x}, u)$ funções contínuas. De facto, em [22], os autores melhoraram os resultados dos trabalhos [20, 18, 19] considerando tanto o caso estacionário como o caso evolutivo onde a não linearidade aparece, não só no operador $u \rightarrow a(l(u))\Delta u$, mas também na função não linear f do segundo membro.

No caso dos sistemas, a maioria dos autores assume que a matriz \mathbf{a} de difusão é diagonal, ficando o acoplamento entre as equações apenas no termo reativo f . No entanto, a difusão cruzada pode existir, veja-se por exemplo Oliveira [25] e as respectivas referências. Oliveira considerou um sistema de reação-difusão onde \mathbf{a} é uma matriz real $ne \times ne$ não diagonalizável e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{ne} \rightarrow \mathbb{R}^{ne}$ é uma função de classe C^2 .

Raposo et al. [62], em 2008, estudaram o sistema de reação-difusão da forma

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + f(u - v) = \alpha(u - v) & \text{em } \Omega \times]0, T] \\ v_t - a(l(v))\Delta v - f(u - v) = \alpha(v - u) & \text{em } \Omega \times]0, T] \end{cases},$$

com $a(l) > 0$, f funções Lipschitz-contínuas, l uma forma linear contínua e α uma constante positiva e provaram a existência, unicidade e decaimento exponencial das soluções fracas.

Recentemente, Simsen e Ferreira [71] estudaram o problema de reação-difusão da forma

$$\begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u + |u|^{p-2}u = f(u) & \text{em } \Omega \times]0, T] \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times]0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases},$$

com $p \geq 2$. Os autores investigaram a existência, unicidade e continuidade em relação aos dados iniciais das soluções fracas e provaram a estabilidade exponencial, a continuidade conjunta das soluções fracas e apresentaram um importante resultado sobre a existência de um atrator global.

Há poucos estudos sobre a aproximação numérica de problemas não locais e os que existem são bastante restritos a condições de fronteira não locais ou termos de reação não locais.

Yin e Xu [76] aplicaram o método dos volumes finitos para aproximar soluções de um problema não local em escoamentos reativos em meios porosos e deduziram ordens de convergência ótimas na norma L_2 .

Sidi Ammi e Torres [70] propuseram a aplicação do método dos elementos finitos no espaço e os métodos de Euler ou Crank-Nicolson no tempo para uma discretização completa de um problema não local resultante do estudo da temperatura num termistor. Os autores provaram ordens de convergência ótimas na norma L_2 .

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Em 2000, Ackleh e Ke [1] estudaram o problema:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{a(\int_{\Omega} u \, dx)} \Delta u + f(u) & \text{em } \Omega \times]0, T] \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times]0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \bar{\Omega} \end{cases},$$

com $a(l) > 0$ para todo $l \neq 0$, $a(0) \geq 0$ e f Lipschitz-contínua satisfazendo $f(0) = 0$ e provaram a existência e unicidade de soluções fracas. Deram também condições em u_0 para a extinção em tempo finito ou persistência no tempo e propuseram um esquema de diferenças finitas para estudarem o comportamento das soluções.

Em [62], os autores também realizaram simulações numéricas para comparar o comportamento das soluções do problema com coeficiente de difusão constante, com o comportamento das soluções do problema não local, e este último com o de Ackleh e Ke [1]. Utilizaram um esquema implícito de diferenças finitas em dimensão um e de volumes finitos ([37]) em dimensão dois, nas variáveis espaciais.

Até à data ainda não foi feito um estudo da convergência do método dos elementos finitos de Euler-Galerkin quando aplicado ao sistema (1.11). Uma vez que o problema ainda não foi estudado por outros autores, também não foram provadas a existência, unicidade e propriedades físicas das soluções globais deste tipo de sistemas.

Os resultados apresentados neste trabalho estendem os de Chipot e Lovart, Corrêa, Menezes e Ferreira, Raposo et al. e Simsen e Ferreira para sistemas não locais e provam novos resultados sobre as propriedades das soluções.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2, são definidos alguns conceitos básicos e notações e enunciados alguns resultados conhecidos que irão ser utilizados nos capítulos seguintes. É também lembrado o método dos elementos finitos de Galerkin e as suas principais propriedades. No capítulo 3, estuda-se a equação em meios porosos com expoente variável. Em domínio fixo, define-se um problema regularizado introduzindo um parâmetro ε . Demonstram-se estimativas para a solução do problema regularizado em função de ε e prova-se a convergência deste para o problema inicial quando ε tende para zero. Neste capítulo, também é deduzida a ordem de convergência do método dos elementos finitos de Galerkin quando aplicado ao problema regularizado. São ainda apresentados exemplos de implementação, em Matlab, do método. No domínio livre, o problema é abordado numa nova formulação onde se deduz uma equação para o movimento da fronteira. Para a malha evoluir com o domínio, constrói-se uma malha adaptável e discretizam-se a equação do problema e a equação do movimento da fronteira nessa malha. Para testar o método, são apresentados exemplos da sua aplicação a problemas concretos. O sistema não linear com termo de difusão não local é tratado no capítulo 4 onde se formula o problema e as hipóteses sobre os dados do problema; se prova a existência e unicidade de soluções fortes globais no tempo; se estudam também as propriedades de localização e comportamento assintótico das soluções; se discretiza o problema no espaço e tempo e se provam estimativas do erro e ordem de convergência para as soluções discretas. O capítulo termina com a apresentação de exemplos de implementação do método em Matlab.

Alguns dos resultados obtidos, no estudo feito para a elaboração desta tese, foram apresentados pelo autor em vários seminários e workshops na Universidade da Beira Interior e no Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da Universidade de Lisboa. O autor participou também nos congressos internacionais: “International Conference on Engineering UBI2011” que teve lugar na Covilhã, Portugal, em 2011; “6th Workshop on Statistics, Mathematics and

Computation” realizado na Covilhã, Portugal, em 2012 e “ 5th International Conference on approximation Methods and Numerical Modeling in Environment and Natural Resources” realizado em Granada, Espanha, em 2013, onde fez apresentações orais, que posteriormente foram publicadas nos respectivos livros de resumos [27, 28, 31]. Foram ainda submetidos para publicação em revistas da área as pré-publicações [30, 29, 32, 33], sendo que [29] já foi aceite, após revisão, e aguarda publicação na revista SIAM Journal on Numerical Analysis.

Capítulo 2

Definições e Teoremas Fundamentais

Neste capítulo introduzem-se as noções matemáticas e as notações usadas ao longo do trabalho. São incluídos resultados clássicos bem conhecidos da Análise. No entanto, ao enunciá-los aqui, torna a leitura do trabalho mais confortável. Os resultados são apenas enunciados, pois as demonstrações estão em grande parte dos manuais de Análise Matemática e Análise Funcional (ver resumos em [36] e [60], por exemplo).

Apresentam-se, também, alguns dos aspetos mais relevantes do MEF e sua aplicação a uma EDP colocada na formulação fraca sobre um espaço S . O MEF aproxima o problema por outro problema, chamado problema discreto, definido num espaço de dimensão finita $S_{hr}^{\delta s} \subset S$. Neste capítulo, constrói-se o espaço $S_{hr}^{\delta s}$ e deduzem-se algumas propriedades dos elementos que o compõem (ver [21] e [72] para mais detalhes).

Para finalizar, relembra-se a quadratura de Gauss-Legendre para triângulos, que vai ser utilizada para calcular os integrais que surgem na implementação dos métodos.

2.1 Desigualdades elementares

De seguida, apresentam-se algumas desigualdades fundamentais que são muitas vezes usadas nas demonstrações. Ao longo deste trabalho, denotam-se as constantes simplesmente por C , independentemente do seu valor.

Lema 2.1 (Cauchy) *Sejam $a, b \geq 0$ e $\epsilon > 0$ números reais, então*

$$ab \leq \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon}.$$

Lema 2.2 (Young) *Sejam $a, b \geq 0$, $1 < p, p' < +\infty$ e $\epsilon > 0$ números reais, então*

$$ab \leq \frac{\epsilon a^p}{p} + \frac{\epsilon^{1-p'} b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Lema 2.3 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ e $n > 0$, então*

$$\frac{|a|^n a - |b|^n b}{a - b} \geq C|a - b|^n,$$

onde C depende apenas de n .

Demonstração

Suponha-se que $a > b$, então

$$\begin{aligned} |a|^n a - |b|^n b &= (n+1) \int_b^a |\xi|^n d\xi = (n+1) \int_{-\frac{a-b}{2}}^{\frac{a-b}{2}} \left| \eta + \frac{a+b}{2} \right|^n d\eta \geq (n+1) \int_{-\frac{a-b}{2}}^{\frac{a-b}{2}} |\eta|^n d\eta = \\ &= 2(n+1) \int_0^{\frac{a-b}{2}} |\eta|^n d\eta = 2(n+1) \left| \frac{a-b}{2} \right|^n \frac{a-b}{2} = \frac{n+1}{2^n} |a-b|^n (a-b). \end{aligned}$$

Para o caso $b > a$ obtém-se

$$|a|^n a - |b|^n b \leq \frac{n+1}{2^n} |a-b|^n (a-b).$$

Em ambos os casos, obtém-se o pretendido dividindo ambos os membros da desigualdade por $a-b$. ■

Lema 2.4 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$, então existe uma constante $C > 0$, apenas dependente de p , tal que*

$$\left| |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y \right| \leq C (|x| + |y|)^{p-2} |x - y|.$$

Demonstração

Para $p \geq 2$, a função $g(z) = |z|^{p-2} z$ é contínua e diferenciável em \mathbb{R} , com $g'(z) = (p-1)|z|^{p-2}$. Pelo teorema do valor médio de Lagrange, existe ϑ entre a e b tal que

$$g(x) - g(y) = g'(\vartheta)(x - y) \Leftrightarrow |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y = (p-1)|\vartheta|^{p-2}(x - y). \quad (2.1)$$

Se se escrever $\vartheta = x + \epsilon(y - x)$ com $\epsilon \in [0, 1]$, então

$$|\vartheta|^{p-2} \leq (|x| + \epsilon|y - x|)^{p-2} \leq 2^{p-2} (|x| + |y|)^{p-2}.$$

Substituindo esta desigualdade no módulo de (2.1), obtém-se a estimativa desejada com $C = (p-1)2^{p-2} > 0$. ■

2.2 Definições e conceitos básicos

Se A e B são dois conjuntos e f é uma função definida em A , com valores em B , então escreve-se $f: A \rightarrow B$. Se $M \subset A$, $f|_M$ denota a restrição de f em M . A composição de funções é representada por $f \circ g$ e definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Definição 2.5 (Conjunto limitado) *Um conjunto $M \subset X$ é limitado se existirem $x \in X$ e $r > 0$ tais que $M \subset B_r(x)$*

Definição 2.6 (Sucessão limitada) *Uma sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ é limitada se existir $K > 0$ tal que $\|x_n\| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$*

Definição 2.7 (Interior) *Um ponto $a \in M$ é ponto interior se existir $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset M$. O conjunto dos pontos interiores de M diz-se o interior de M e denota-se por $\text{int}(M)$. O conjunto M é aberto se $M = \text{int}(M)$.*

Definição 2.8 (Convergência forte) *Uma sucessão $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge (fortemente) para $x \in X$, quando k tende para ∞ , se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_X = 0.$$

Neste caso, escreve-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, \text{ ou simplesmente } x_k \rightarrow x.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Definição 2.9 (Fecho) O fecho do conjunto $M \subset X$ é o conjunto \bar{M} definido por:

$$\bar{M} = \{x \in X : \text{existe uma sucessão } \{x_k\} \subset M \text{ tal que } x_k \rightarrow x\}.$$

O conjunto M é fechado se $M = \bar{M}$.

Definição 2.10 (Fronteira) O conjunto

$$\partial M = \bar{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$$

é chamado a fronteira de M .

Definição 2.11 (Conjunto conexo) Um conjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^d$ é dito conexo se dois quaisquer pontos de Ω poderem ser unidos por uma linha poligonal totalmente contida em Ω .

Definição 2.12 (Domínio) Um domínio é um conjunto aberto e conexo.

Definição 2.13 (Continuidade forte) Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$\|x - a\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

Definição 2.14 (Hölder-continuidade, Lipschitz-continuidade) Uma função $f : X \rightarrow Y$, é Hölder-continua com expoente $\mu \in]0, 1]$ se existir uma constante C , tal que:

$$\|f(a) - f(b)\|_Y \leq C \|a - b\|_X^\mu, \quad a, b \in X.$$

Se $\mu = 1$ diz-se que f é Lipschitz-continua.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é aberto, então $C^{k,\mu}(\Omega)$ denota o conjunto das funções de $C^k(\Omega)$ cuja derivada de ordem k é Hölder-continua em Ω , com expoente μ .

Definição 2.15 (Derivada forte (clássica)) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em x , então define-se derivada parcial de f em relação à coordenada i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}.$$

Definição 2.16 ($C^k(\Omega)$) Para $k \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $C^k(\Omega)$ representa o conjunto de todas as funções definidas em Ω e que têm todas as derivadas até à ordem k contínuas em Ω .

Definição 2.17 (Conjunto convexo) O conjunto M é dito convexo se dois quaisquer pontos do conjunto poderem ser unidos por um segmento totalmente contido no conjunto, ou seja,

$$a, b \in M, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda a + (1 - \lambda)b \in M.$$

Definição 2.18 (Função convexa) Seja Ω um conjunto convexo, uma função f definida em Ω é dita convexa se

$$f(a + \tau(b - a)) \leq f(a) + \tau(f(b) - f(a)), \quad \forall a, b \in \Omega, \tau \in [0, 1]$$

e diz-se estritamente convexa se

$$f(a + \tau(b - a)) < f(a) + \tau(f(b) - f(a)), \quad \forall a, b \in \Omega, \tau \in [0, 1].$$

Um funcional linear contínuo definido num espaço linear normado X é uma aplicação linear contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Para denotar o valor de f em $u \in X$ utiliza-se a notação $f(u)$ ou $\langle f, u \rangle$.

Definição 2.19 (Dual) O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos em X é chamado dual de X e denotado por X^* .

Proposição 2.20 O conjunto X^* , com a norma

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X = 1}} |\langle f, u \rangle|, \quad f \in X^*,$$

é um espaço de Banach.

Definição 2.21 (Espaço reflexivo) Um espaço de Banach X diz-se reflexivo se $(X^*)^* = X$.

Definição 2.22 (Convergência fraca) Seja X um espaço linear normado e $\{u_n\} \in X$, diz-se que $\{u_n\}$ converge fracamente para $u \in X$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u), \quad \forall f \in X^*.$$

Neste caso, escreve-se $u_n \rightharpoonup u$.

Teorema 2.23 Se $u_n \rightarrow u$ em X , então $u_n \rightharpoonup u$ em X .

Teorema 2.24 Se X é um espaço de Banach e $\{u_n\} \in X$ converge fracamente para $u \in X$, então $\{u_n\}$ é limitada.

Definição 2.25 (Operador compacto) Um operador linear limitado $A : X \rightarrow Y$ é dito compacto se para cada sucessão limitada $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ existe uma subsucessão $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$, tal que $\{A(u_{n_k})\}$ converge fortemente em Y .

Observação 2.26 Um operador compacto também pode ser denominado operador linear completamente contínuo.

Definição 2.27 (Convergência fraca *) Seja X um espaço linear normado, X^* o dual de X e $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$. Diz-se que f_n converge fracamente-*, e escreve-se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = f(u), \quad \forall u \in X.$$

Definição 2.28 (Fronteira Lipschitz-contínua) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado. A fronteira de Ω , $\partial\Omega$ é dita Lipschitz-contínua se existirem constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$, um número finito de sistemas de coordenadas locais x_1^k, \dots, x_d^k e funções Lipschitz-contínuas

$$g_k : \mathcal{M}_k = \{\hat{x}^k = (x_2^k, \dots, x_d^k) \in \mathbb{R}^{d-1} : \|\hat{x}^k\| < \alpha\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, K$$

tais que:

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^K \Lambda_k,$$

$$\Lambda_k = \{(x_1^k, \hat{x}^k) : x_1^k = g_k(\hat{x}^k), \|\hat{x}^k\| < \alpha\},$$

$$\{(x_1^k, \hat{x}^k) : g_k(\hat{x}^k) - \beta < x_1^k < g_k(\hat{x}^k) + \beta, \|\hat{x}^k\| < \alpha\} \subset \Omega, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\{(x_1^k, \hat{x}^k) : g_k(\hat{x}^k) - \beta < x_1^k < g_k(\hat{x}^k), \|\hat{x}^k\| < \alpha\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Observação 2.29 Por vezes, refere-se um domínio com fronteira Lipschitz-contínua apenas por domínio Lipschitz.

Se $g_k \in C^\vartheta$, para todo $k = 1, \dots, K$, então diz-se que $\partial\Omega \in C^\vartheta$.

2.3 Distribuições

Seja Ω um domínio de \mathbb{R}^d .

Definição 2.30 ($C_0^\infty(\Omega)$) *Define-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço linear das funções $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ cujo suporte*

$$\text{supp } v = \overline{\{x : v(x) \neq 0\}}$$

é um conjunto compacto de Ω .

Denota-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o dual de $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 2.31 (Distribuição) *Os elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ são chamados funções generalizadas ou distribuições.*

Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, considera-se $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Definição 2.32 (Derivada distributiva) *Uma distribuição $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é dita derivada distributiva (ou generalizada) de ordem α da distribuição $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle D^\alpha f, v \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 2.33 *Toda a distribuição tem derivada de qualquer ordem.*

Observação 2.34 *As derivadas distributivas, até à ordem k , de uma função $f \in C^k(\bar{\Omega})$ são iguais às derivadas clássicas de f , por isso denotar-se-á por*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

tanto a derivada distributiva como a derivada clássica.

O estudo costuma ser feito num conjunto $\Omega(t)$ e num intervalo de tempo $]t_0, T]$, $T > t_0$. A função u está então definida em

$$\Omega_T = \{(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \in \Omega(t), t \in]t_0, T]\} \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

(se $\Omega(t) = \Omega$ é independente do tempo, t , então $\Omega_T = \Omega \times]t_0, T[$).

Considere-se a função $u = u(\mathbf{x}, t)$ definida no conjunto Ω_T , então as derivadas parciais (no sentido clássico ou generalizado) de 1ª ordem são denotadas por $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$. Se $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}$ são as derivadas parciais em relação às variáveis espaciais então, denota-se por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$$

o vetor gradiente e por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$$

o operador gradiente.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

denota o laplaciano de f , onde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ é a derivada de segunda ordem de f em relação a x_i .

Se $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d)$, então o divergente de \mathbf{f} é definido por

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

2.4 Espaços de Lebesgue

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável à Lebesgue. Denota-se por $|A| = \operatorname{meas}(A)$ a medida de Lebesgue de A .

Diz-se que duas funções, f_1 e f_2 , mensuráveis definidas em A , são equivalentes se diferirem num conjunto de medida nula. Neste caso, escreve-se $f_1 = f_2$ qtp (quase em toda a parte) em A ou $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$ pqt (para quase todo) $\mathbf{x} \in A$.

Definição 2.35 (Espaço L_p) Para $p \in [1, +\infty[$, $L_p(A)$ é o espaço linear de todas as (classes de equivalência das) funções u mensuráveis em A para as quais

$$\int_A |u|^p d\mathbf{x} < \infty.$$

Proposição 2.36 O espaço $L_p(A)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L_p(A)} = \left(\int_A |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

é um espaço de Banach.

Definição 2.37 (Espaço L_∞) $L_\infty(A)$ é o espaço linear de todas as (classes de equivalência das) funções u mensuráveis em A para as quais:

$$\operatorname{ess\,sup}(u) = \inf \left\{ \sup_{x \in A \setminus Z} |u(x)| : Z \subset A, \operatorname{meas}(Z) = 0 \right\} < \infty.$$

Proposição 2.38 O espaço $L_\infty(A)$, equipado com a norma:

$$\|u\|_{L_\infty(A)} = \operatorname{ess\,sup}(u),$$

é um espaço de Banach.

Proposição 2.39 Os espaços $L_p(X)$ têm as seguintes propriedades:

1. Se $\Omega \subset X$ é um domínio, então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

2. (Desigualdade de Minkowski)

$$\|u + v\|_{L_p(X)} \leq \|u\|_{L_p(X)} + \|v\|_{L_p(X)}, \quad \forall u, v \in L_p(X), 1 \leq p \leq +\infty.$$

3. (Desigualdade de Hölder)

$$\int_G |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L_p(X)} \|v\|_{L_{p'}(X)}, \quad 1 \leq p, p' \leq +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \forall u \in L_p(X), v \in L_{p'}(X).$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

4. O espaço $L_2(X)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v) = \int_X uv \, dx, \quad u, v \in L_2(X).$$

5. Se $meas(X) < \infty$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $L_q(X) \subset L_p(X)$ e

$$\|u\|_{L_p(X)} \leq (meas(X))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L_q(X)}, \quad \forall u \in L_p(X).$$

6. Sejam $1 \leq p \leq r \leq q \leq +\infty$ e $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, e $u \in L_p(X) \cap L_q(X)$ então $u \in L_r(X)$ e

$$\|u\|_{L_r(X)} \leq \|u\|_{L_p(X)}^\alpha \|u\|_{L_q(X)}^{1-\alpha}.$$

Definição 2.40 Diz-se que $u \in L_p^{loc}(X)$ se $u|_A \in L_p(A)$ para todo o conjunto limitado $A \subset X$, tal que $\bar{A} \subset X$.

Teorema 2.41 Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $u_n \rightarrow u$ em $L_p(X)$, então existe uma subsucessão $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ pqt $x \in X$.

Lema 2.42 Seja A um aberto limitado de \mathbb{R}^d , g_k e g funções de $L_q(A)$, $1 < q < \infty$ tais que:

$$\|g_k\|_{L_q(A)} \leq C, \quad g_k \rightarrow g, \quad \text{qtp em } A,$$

então $g_k \rightarrow g$ em $L_q(A)$.

2.5 Espaços de Sobolev

Definição 2.43 ($W^{k,p}(\Omega)$) Seja $k \geq 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Denota-se por $W^{k,p}(\Omega)$ o espaço de todas as funções $u \in L_p(\Omega)$, tais que as suas derivadas distributivas até à ordem k são também elementos de $L_p(\Omega)$, ou seja,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L_p(\Omega), \quad |\alpha| = 0, \dots, k\}.$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ pode ser equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^k \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u|.$$

Define-se também em $W^{k,p}(\Omega)$ a seminorma

$$|u|_{W^{k,p,j}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty, \text{ e } 0 \leq j \leq k.$$

Proposição 2.44 Os espaços $W^{k,p}$ têm as seguintes propriedades:

1. Para $1 \leq p \leq \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

2. O espaço $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=0}^k D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx.$$

3. Para $1 \leq p < \infty$, $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.

Definição 2.45 ($W_0^{k,p}(\Omega)$)

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)} \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Neste trabalho, interpreta-se $W_0^{k,p}(\Omega)$ como o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que $D^{\alpha} u = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $|\alpha| \leq k - 1$. Denota-se também $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$

Observação 2.46 $\|\cdot\|_{W^{k,p,k}(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{k,p}(\Omega)$. Em particular, denota-se

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 2.47

$$L_p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) \supset W^{1,p}(\Omega) \supset W^{2,p}(\Omega) \supset \dots$$

Definição 2.48 ($W^{-k,p'}(\Omega)$) Se $1 \leq p < \infty$, denota-se por $W^{-k,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e por $H_0^{-k}(\Omega)$ o dual de $H^k(\Omega)$.

2.6 Imersões

Definição 2.49 Sejam $X \subset Y$ dois espaços lineares normados, com as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ respetivamente. Define-se o operador identidade por:

$$\begin{aligned} I : X &\rightarrow Y \\ u &\mapsto I(u) = u \end{aligned}$$

Definição 2.50 (Imersão contínua) Se I é contínuo, então diz-se que é uma imersão contínua de X em Y e escreve-se $X \hookrightarrow Y$.

Proposição 2.51 A continuidade da imersão I é equivalente à existência de uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X, \forall u \in X.$$

Definição 2.52 (Imersão compacta) Se I é completamente contínuo, então diz-se que I é uma imersão compacta e escreve-se $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Teorema 2.53 Sejam X e Y dois espaços lineares normados, então

$$X \hookrightarrow Y \Rightarrow Y^* \hookrightarrow X^*$$

e

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \Rightarrow Y^* \hookrightarrow\hookrightarrow X^*.$$

Teorema 2.54 Sejam $k \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e Ω um domínio de Lipschitz e limitado.

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Se $k < \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$.

Se $k = \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega) \forall q \in [1, \infty[$.

Se $\frac{d}{p} < k < \frac{d}{p} + 1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,k-d/p}(\bar{\Omega})$.

Se $k = \frac{d}{p} + 1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \forall \alpha \in]0, 1[$.

Se $k > \frac{d}{p} + 1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\bar{\Omega})$.

Teorema 2.55 *Sejam $k > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e Ω um domínio de Lipschitz e limitado.*

Se $k < \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_q(\Omega) \forall q \in [1, p^*[$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$.

Se $k = \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_q(\Omega) \forall q \in [1, \infty[$.

Se $k > \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$.

Teorema 2.56 (Desigualdade de Poincaré) *Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então*

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)},$$

onde C depende apenas de Ω .

2.7 Espaços de Bochner

As funções que descrevem problemas evolutivos são, geralmente, da forma $u = u(\mathbf{x}, t)$, onde $t > t_0$ é o tempo e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ é o espaço. Por vezes, é conveniente separar as variáveis considerando u uma função que depende do tempo e tem valores num espaço de Banach. Então, se $u = u(\mathbf{x}, t)$, considere-se a função $u(t) = u(\cdot, t)$ que a cada t faz corresponder o valor $u(t)$ que é uma função de x que pertence a um determinado espaço de funções.

Definição 2.57 ($L_p(a, b; X)$) *Seja X um espaço de Banach. Para $1 \leq p \leq \infty$ define-se $L_p(a, b; X)$ como sendo o espaço das funções $u : [a, b] \rightarrow X$, tais que:*

$$\|u\|_{L_p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ para } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{L_\infty(a,b;X)} = \text{ess sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Proposição 2.58 *O espaço $L_p(a, b; X)$ é um espaço de Banach.*

Definição 2.59 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$. Diz-se que a função $u : [a, b] \rightarrow X$ é contínua num ponto $t_0 \in [a, b]$ se*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in [a,b]}} \|u(t) - u(t_0)\|_X = 0.$$

Denota-se por $C^0([a, b], X)$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e com valores em X .

Proposição 2.60 O espaço $C^0([a, b]; X)$, equipado com a norma

$$\|u\|_{C^0([a,b];X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach.

Definição 2.61 Diz-se que a função $u : [a, b] \rightarrow X$ é diferenciável no ponto $t_0 \in [a, b]$ se existir $w \in X$ tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} - w \right\|_X = 0.$$

Neste caso, $\frac{du}{dt}(t_0) = u_t(t_0)$ é chamada derivada forte de u em t_0 .

Definição 2.62 Uma função $f \in L_1(a, b; X)$ tem derivada generalizada se existir uma função $g \in L_1(a, b, X)$ tal que:

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{dt}(t) f(t) dt = - \int_a^b \varphi(t) g(t) dt, \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b).$$

Neste caso, escreve-se $\frac{df}{dt} = f_t = g$.

Definição 2.63 ($W^{k,p}(a, b; X)$) Seja X um espaço de Banach. Para $k = 1, 2, \dots$ e $p \in [1, \infty]$, define-se

$$W^{k,p}(a, b; X) = \{f \in L_p(a, b; X) : \frac{d^j f}{dt^j} \in L_p(a, b; X), j = 1, \dots, k\}.$$

Em $W^{k,p}(a, b; X)$ pode definir-se a norma:

$$\|f\|_{W^{k,p}(a,b;X)} = \left(\sum_{j=1}^k \left\| \frac{d^j f}{dt^j} \right\|_{L_p(a,b;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Estes espaços têm as mesmas propriedades que foram enunciadas para os espaços L_p .

De uma forma semelhante, podem definir-se os espaços $C^k([a, b]; X)$ das funções contínuas e diferenciáveis, em t , até à ordem k , no intervalo $[a, b]$ e com valores em X .

Definição 2.64

$$C^k([a, b]; X) = \{f \in C^0([a, b]; X) : \frac{d^j f}{dt^j} \in C^0([a, b]; X), j = 1, \dots, k\}.$$

Teorema 2.65 Se $u \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $u_t \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ então $u \in C^0([0, T]; L_2(\Omega))$.

2.8 Teoremas fundamentais

Nesta secção enunciam-se alguns teoremas que são necessários nas demonstrações, mas não se enquadram nas secções anteriores.

Teorema 2.66 (Banach-Alaoglu) Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha-se que a sucessão $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in X$ é limitada. Então existe uma subsucessão $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty \in \{u_n\}_{n=1}^\infty \in X$ e $u \in X$ tais que:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Teorema 2.67 (Banach-Alaoglu) *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha-se que a sucessão $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in X^*$ é limitada. Então existe uma subsucessão $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in X^*$ e $f \in X^*$ tais que:*

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f.$$

Teorema 2.68 (Brouwer) *Se $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua na bola fechada $\overline{B}_\rho(\mathbf{x})$ e $f(\overline{B}_\rho(\mathbf{x})) \subset \overline{B}_\rho(\mathbf{x})$, então existe $\mathbf{x}^* \in \overline{B}_\rho(\mathbf{x})$ tal que: $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$.*

Corolário 2.69 (Brouwer) *Seja $f : \overline{B}_\rho(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua e $(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \partial \overline{B}_\rho(\mathbf{x})$. Então, f tem um zero.*

O teorema seguinte é uma generalização do teorema de Brouwer.

Teorema 2.70 (Schauder) *Seja X um espaço de Banach, $M \subset X$ um conjunto não vazio, limitado, fechado e convexo e seja $F : M \rightarrow M$ um operador compacto. Então existe, pelo menos, um ponto fixo $u \in M$ de F .*

Teorema 2.71 (Green) *Seja Ω um conjunto conexo limitado com fronteira Lipschitz-contínua e sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx,$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior à fronteira de Ω .

Teorema 2.72 (Gronwall) *O teorema tem duas formas de ser apresentado.*

Forma diferencial *Suponha-se que h e r são integráveis em $]a, b[$ e não negativas qtp em $]a, b[$.*

Se $y \in C([a, b])$, $y_t \in L_1(]a, b[)$ e a desigualdade seguinte é satisfeita:

$$y_t(t) \leq h(t) + r(t)y(t) \text{ pqt } t \in]a, b[,$$

então:

$$y(t) \leq \left(y(a) + \int_a^t h(s) e^{-\int_a^s r(\tau) \, d\tau} \, ds \right) e^{\int_a^t r(s) \, ds}.$$

Forma integral *Suponha-se que h é contínua em $[a, b]$, r integrável em $]a, b[$ e $h, r \geq 0$ q.t.p. em $]a, b[$. Se y é uma função contínua em $[a, b]$ e satisfaz a inequação:*

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t r(s)y(s) \, ds, \quad t \in [a, b],$$

então

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)r(s)e^{\int_s^t r(\tau) \, d\tau} \, ds, \quad t \in [a, b].$$

Lema 2.73 (Aubin-Lions) *Sejam B_0, B e B_1 três espaços de Banach tais que B_0 e B_1 são reflexivos de modo que $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$. Seja*

$$W = \{w : w \in L_{p_0}(0, T; B_0) \text{ e } w_t \in L_{p_1}(0, T; B_1)\}$$

o espaço de Banach equipado com a norma

$$\|w\| = \|w\|_{L_{p_0}(0, T; B_0)} + \|w_t\|_{L_{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Se $p_0, p_1 < \infty$, então $W \hookrightarrow L_{p_0}(0, T; B)$.

2.9 Discretização espacial

O primeiro aspeto a abordar é a construção da malha \mathcal{T}_h sobre o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ou seja, o conjunto Ω é dividido num número finito de subconjuntos T_k , $k = 1, \dots, nt$, chamados elementos finitos, de tal modo que as condições seguintes sejam satisfeitas:

- $\Omega = \cup_{k=1}^{nt} T_k$;
- $int(T_k) \neq \emptyset, \forall T_k \in \mathcal{T}_h$;
- $int(T_i) \cap int(T_j) = \emptyset, \forall T_i, T_j \in \mathcal{T}_h, j \neq i$;
- cada lado de T_k ou pertence à fronteira de Ω ou é lado de outro $T_i \in \mathcal{T}_h$;
- cada T_k tem fronteira Lipchitz-contínua .

Neste trabalho, utilizam-se malhas triangulares, ou seja, cada T_k é um triângulo.

Suponha-se que se tem uma malha \mathcal{T}_h sobre o conjunto Ω . Considere-se $h_k = diam(T_k) = \max_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in T_k} d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ = comprimento do maior lado de T_k e

$$h = \max\{h_k, k = 1, \dots, nt\}.$$

Seja $q_k = \sup\{diam(\mathbf{B}), \mathbf{B} \text{ é uma bola contida em } T_k\}$.

Definição 2.74 Uma família \mathcal{T}_h é dita regular se forem satisfeitas simultaneamente as duas condições:

1. existir uma constante σ tal que $\frac{h_k}{q_k} \leq \sigma, \forall k \geq 1$,
2. $h \rightarrow 0$.

Uma vez estabelecida a malha \mathcal{T}_h , define-se o espaço dos elementos finitos S_{hr} .

Primeiro, define-se um espaço linear de dimensão finita Q_{kr} da forma

$$Q_{kr} = \{v_h|_{T_k} : v_h \in S_{hr}\}.$$

Neste trabalho, considera-se Q_{kr} o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a r em x e y e exige-se que v_h seja contínua em Ω e se anule na fronteira de Ω . Resumindo, define-se

$$S_{hr} = \{w = w_h(\mathbf{x}) \in C_0^0(\bar{\Omega}) | w_h|_{T_k} \text{ é um polinómio de grau } r \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}.$$

Teorema 2.75 Se $Q_{kr} \subset H^1(T_k), \forall T_k \in \mathcal{T}_h$ e $S_{hr} \subset C^0(\bar{\Omega})$, então

$$S_{hr} \subset H_0^1(\Omega).$$

Este teorema permite que, na resolução dos problemas, se possa considerar S_{hr} , pois $S_{hr} \subset S$. A inclusão anterior não é verificada no caso da fronteira de Ω ser uma curva que não pode ser exatamente descrita por triângulos.

Finalmente, tem de se encontrar um conjunto Σ_k de condições linearmente independentes que permitam determinar, de forma unívoca, cada elemento de Q_{kr} . Um polinómio de grau menor ou igual a r em x e y fica perfeitamente definido pelos valores em $nk = (r+1)(r+2)/2$ pontos distintos. Sejam a_1, \dots, a_{nk} pontos distintos igualmente espaçados em T_k , então pode-se

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

definir $p_r \in Q_{kr}$ pelos valores $p_r(a_i), i = 1, \dots, nk$. De forma simbólica escreve-se:

$$\Sigma_{kr} = \{p_r(a_i), i = 1, \dots, nk\}.$$

O espaço S_{hr} descrito desta forma tem uma base canónica $\varphi_1, \dots, \varphi_{nk}$ definida por $\varphi_j(a_i) = \delta_{ij}$, sendo δ_{ij} a função delta de Kronecker. Assim, cada elemento finito é definido pelo terno $(T_k, Q_{kr}, \Sigma_{kr})$.

Suponha-se que $(T_k, Q_{kr}, \Sigma_{kr})$ é um elemento finito onde T_k é um triângulo de vértices a_1, a_2 e a_3 e seja \hat{T}_k um outro triângulo de vértices \hat{a}_1, \hat{a}_2 e \hat{a}_3 . Existe uma única aplicação afim:

$$\begin{aligned} \Phi_k : \hat{T}_k &\rightarrow T_k \\ \hat{x} &\rightarrow x = B_k \hat{x} + b_k, \end{aligned}$$

tal que B_k é uma matriz 2×2 invertível, b_k um vetor de \mathbb{R}^2 e $\Phi_k(\hat{a}_i) = a_i$. Pode então construir-se:

$$Q_{kr}^* = \{p_r : T_k \rightarrow \mathbb{R} \mid p_r = \hat{p}_r \circ \Phi_k^{-1}, \hat{p}_r \in \hat{Q}_{kr}\}.$$

Como Φ_k é afim, $Q_{kr}^* = Q_{kr}$. Em particular, após, se necessário, uma renumeração, as funções base satisfazem

$$\varphi_i = \hat{\varphi}_i \circ \Phi_k^{-1}, \quad i = 1, \dots, nk.$$

Definição 2.76 *Dois elementos finitos $(T_k, Q_{kr}, \Sigma_{kr})$ e $(\hat{T}_k, \hat{Q}_{kr}, \hat{\Sigma}_{kr})$ dizem-se afim-equivalentes se existir uma aplicação afim invertível Φ_k , tal que:*

$$T_k = \Phi_k(\hat{T}_k) \tag{2.2}$$

$$Q_{kr} = \{p_r : T_k \rightarrow \mathbb{R} \mid p_r = \hat{p}_r \circ \Phi_k^{-1}, \hat{p}_r \in \hat{Q}_{kr}\} \tag{2.3}$$

$$\Sigma_{kr} = \{p_r(\Phi_k(\hat{a}_i))\}. \tag{2.4}$$

Uma família \mathcal{T}_h de elementos finitos é dita família afim se todos os elementos finitos que a constituem são afim-equivalentes a um único elemento finito, que se irá chamar elemento finito de referência $(T_R, Q_{Rr}, \Sigma_{Rr})$.

Proposição 2.77 *Qualquer elemento de uma família afim \mathcal{T}_h , ou da sua imagem por uma aplicação afim invertível, pode ser escolhido como elemento de referência.*

Pela proposição, pode verificar-se que T_R não tem de pertencer à família e que até pode ser escolhido de uma forma bastante livre. Neste trabalho, considera-se

$$T_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}.$$

Seja $\Pi_{\mathbb{P}_r(T_k)}$ o operador interpolador que a cada função v definida em T_k faz corresponder o polinómio, p_r , interpolador de Lagrange, de grau menor ou igual a r , que interpola v nos pontos $a_i, i = 1, \dots, nk$. É óbvio que $p_r \in Q_{kr}$ e pela definição da base $\varphi_1, \dots, \varphi_{nk}$ pode definir-se $\Pi_{\mathbb{P}_r(T_k)}$ por

$$\Pi_{\mathbb{P}_r(T_k)}(v) = \sum_{i=1}^{nk} \varphi_i v(a_i).$$

Sejam \mathcal{P}_h e \mathcal{E}_h o conjunto dos vértices e dos lados dos triângulos, respetivamente. Retirando as repetições e introduzindo uma ordenação em \mathcal{P}_h e \mathcal{E}_h fica-se com $\mathcal{P}_h = \{P_1, \dots, P_{nv}\}$ e

$$\mathcal{E}_h = \{e_1, \dots, e_{n_l}\}.$$

Se $e_k \in \partial\Omega$, denota-se por \vec{n}_k o vetor normal exterior a e_k .

Definição 2.78 *Seja $v \in L_2(\Omega)$. $\tilde{v} \in S_{hr}$ é a projeção ortogonal de v sobre S_{hr} denotado por $\tilde{v} = \Pi_{S_{hr}} v$ se satisfaz a condição*

$$\int_{\Omega} \tilde{v} \chi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_{hr}.$$

Lema 2.79 *Se $v \in W^{r+1,p}(\Omega)$, então*

$$|\Pi_{S_{hr}} v - v|_{W^{m,p'}(\Omega)} \leq Ch^{r+1-m} |v|_{W^{r+1,p}(\Omega)},$$

para $0 \leq m \leq r$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

O resultado anterior também é válido para $\Pi_{\mathbb{P}_r}$.

Definição 2.80 (Ordem de convergência) *Suponha-se que $\lim_{h \rightarrow 0^+} v_h = v$. Diz-se que a ordem de convergência é $p > 0$ se*

$$\|v_h - v\|_X \leq Ch^p, \quad \forall h > 0, \quad (2.5)$$

onde C é uma constante positiva que não depende de h . No caso de $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$, diz-se que a ordem de convergência é $p > 0$ se

$$\|v_n - v\|_X \leq Cn^{-p}, \quad \forall n > 0, \quad (2.6)$$

onde C é uma constante positiva que não depende de n .

Quanto maior for p , maior é a velocidade com que a aproximação converge para o valor exato. Aplicando o logaritmo em (2.5), obtém-se

$$\log(\|v_h - v\|_X) \leq \log(C) + p \log(h),$$

o que significa que se se representa graficamente $\log(\|v_h - v\|_X)$ em função de $\log(h)$, o gráfico deverá estar abaixo da reta que passa por $(0, \log(C))$ e tem declive p . Este processo revela-se útil na estimação numérica da ordem de convergência. Para (2.6) o raciocínio é o mesmo.

Teorema 2.81 *Se $v_h \in S_{hr}$, então*

$$\|\nabla v_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{-1} \|v_h\|_{L_2(\Omega)},$$

onde C não depende de h e r .

Definição 2.82 *No espaço S_{hr} define-se o laplaciano discreto $\Delta_h : S_{hr} \rightarrow S_{hr}$ da forma*

$$\int_{\Omega} (\Delta_h u) \chi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall u, \chi \in S_{hr}.$$

Definição 2.83 (Projeção de Ritz com peso) *A projeção de Ritz com peso $\rho_h = R_h \rho \in S_{hr}$ é definida por*

$$\int_{\Omega} A \nabla \rho_h \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} A \nabla \rho \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_{hr}.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Lema 2.84 Se $\rho \in H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $1 \leq k \leq r + 1$, então

$$\|R_h \rho - \rho\|_{L_2(\Omega)} + h \|\nabla(R_h \rho - \rho)\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^k \|\rho\|_{H^k(\Omega)}.$$

2.10 Discretização temporal

Para discretizar a equação no tempo existem numerosos métodos chamados de integradores. O mais simples é o método de Euler que aproxima a derivada temporal $u_t(\mathbf{x}, t_n)$ em cada instante t_n por uma diferença finita. Por exemplo, o método de Euler regressivo aproxima a derivada $u_t(\mathbf{x}, t_n)$ por

$$\bar{\partial}u(\mathbf{x}, t_n) = \frac{u(\mathbf{x}, t_n) - u(\mathbf{x}, t_{n-1})}{\delta}, \quad t_n = t_{n-1} + \delta.$$

A solução final obtida pode então ser $U_n(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}, t_n)$ ou a interpolação linear definida, em cada intervalo de tempo $]t_{n-1}, t_n]$, por $U(\mathbf{x}, t) = \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}U_n(\mathbf{x}) - \frac{t-t_n}{t_n-t_{n-1}}U_{n-1}(\mathbf{x})$. Para simplificar, pode considerar-se que todos os intervalos têm a mesma amplitude δ . Por vezes, ao valor δ chama-se passo do método. Considere-se $\delta > 0$ e a partição

$$]0, T] = \bigcup_{n=0}^{ni-1} I_n, \quad I_n =]t_n, t_{n+1}], \quad t_{n+1} = t_n + \delta.$$

No caso da solução exata ter pouca regularidade em t , um método mais adequado é o método dos elementos finitos descontínuo que aproxima a solução em cada intervalo de tempo por um polinómio. Para isso, define-se o espaço das funções seccionalmente polinomiais em relação ao tempo com coeficientes em S_{hr} como sendo

$$S^{\delta s} = \{\mathcal{W} : [0, +\infty[\rightarrow H \mid \mathcal{W}|_{I_n} = \sum_{j=0}^s t^j \chi_j, \chi_j \in H\}.$$

As funções de $S^{\delta s}$ podem ser descontínuas nos instantes t_n , mas são contínuas à esquerda de t_n . Denota-se $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}(t_n)$ e $\mathcal{W}_n^+ = \lim_{t \rightarrow t_n^+} \mathcal{W}(t)$.

Para deduzir estimativas de erros, utilizam-se algumas projeções. Define-se a projeção no tempo $\Pi_{S^{\delta s}}$. $\tilde{v} = \Pi_{S^{\delta s}} v$ é obtido pelas condições:

$$\tilde{v}(t_{n+1}) = v(t_{n+1}), \quad n = 0, \dots, ni - 1,$$

$$\int_{I_n} (\tilde{v} - v, \mathcal{W}) dt = 0, \quad \forall \mathcal{W} \in S^{\delta s-1}, \quad n = 0, \dots, ni - 1.$$

Para provar que está bem definido, ver [72] na página 207. No caso $H = S_{hr}$ obtém-se o espaço $S_{hr}^{\delta s}$.

Define-se também a projeção no espaço e tempo $\Pi_{S_{hr}^{\delta s}}$. $\tilde{V} = \Pi_{S_{hr}^{\delta s}} v$ é solução de

$$\int_{\Omega} \tilde{V} \chi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \tilde{v} \chi d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_{hr}, \forall t \in I_n,$$

ou seja, $\tilde{V} = \Pi_{S_{hr}}(\Pi_{S^{\delta s}} v) = \Pi_{S_{hr}} \tilde{v}$.

Pela forma como está definida a projeção $\Pi_{S_{hr}^{\delta s}}$, pode deduzir-se imediatamente que:

$$\int_{I_n} (\tilde{V} - v, \mathcal{W}) dt = \int_{I_n} (\tilde{v} - v, \mathcal{W}) - (v, \mathcal{W}) dt = 0, \quad \forall \mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta s-1}$$

e

$$(\tilde{V}(t_n) - v(t_n), \chi) = (\tilde{v}(t_n), \chi) - (v(t_n), \chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_{hr}.$$

Teorema 2.85 *Seja $v \in W^{s+1;\infty}(I_n; L_2(\Omega))$ e \tilde{v} a projeção de v em $S^{\delta s}$, então*

$$\|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C\delta^{s+1}|v|_{W^{s+1,\infty}(I_n; L_2(\Omega))}, \quad \forall t \in I_n$$

e

$$|v(t) - \tilde{v}(t)|_{H^1(\Omega)} \leq C\delta^{s+1}|v|_{W^{s+1,\infty}(I_n; H^1(\Omega))}, \quad \forall t \in I_n.$$

Demonstração

Pelo teorema 12.1 em [72], tem-se que

$$|v(t) - \tilde{v}(t)|_{H^k(\Omega)}^2 \leq C\delta^{2s+1} \int_{I_n} |v^{(s+1)}(t)|_{H^k(\Omega)}^2 dt, \quad k = 0, 1.$$

Utilizando a desigualdade

$$\int_{I_n} \|v^{(s+1)}(t)\|_{H^k(\Omega)}^2 dt \leq \delta |v|_{W^{s+1,\infty}(I_n; H^k(\Omega))}^2,$$

obtém-se o pretendido.

■

Teorema 2.86 *Seja $v \in L_\infty(I_n; H^{r+1}(\Omega)) \cap W^{s+1,\infty}(I_n; L_2(\Omega))$ e \tilde{V} a projeção de v em $S_{hr}^{\delta s}$, então:*

$$\|v(t) - \tilde{V}(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^{r+1}|v|_{L_\infty(I_n; H^{r+1}(\Omega))} + C\delta^{s+1}|v|_{W^{s+1,\infty}(I_n; L_2(\Omega))}.$$

Demonstração

Pela desigualdade triangular, obtém-se

$$\begin{aligned} \|v(t) - \tilde{V}(t)\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|v(t) - \Pi_{S_{hr}} v(t)\| + \|\Pi_{S_{hr}} v(t) - \Pi_{S_{hr}} \tilde{v}(t)\| \\ &\leq Ch^{r+1}|v|_{H^{r+1}(\Omega)} + \|v(t) - \tilde{v}(t)\| \\ &\leq Ch^{r+1}|v|_{L_\infty(I_n; H^{r+1}(\Omega))} + C\delta^{s+1}|v|_{W^{s+1,\infty}(I_n; L_2(\Omega))}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para problemas mais complicados, existem integradores mais robustos, por exemplo, o *ode15s* [66] que é uma subrotina do Matlab e que aproxima numericamente a solução de equações e sistemas EDO da forma $M(t, y)y' = F(t, y)$. Este integrador utiliza um método de ordem variável (de 1 a 5) baseado nas fórmulas de diferenciação numérica (NDFs). Opcionalmente, utiliza o método de Gear (BDFs). Começa no instante inicial e calcula a aproximação no instante seguinte, usando um determinado passo. Se o erro da aproximação satisfizer a tolerância desejada, então é considerado um sucesso e passa para o instante seguinte, com o mesmo passo. Se não satisfizer a tolerância, é considerado um passo falhado e é calculada uma nova estimativa com o tamanho do passo reduzido a metade. Este processo continua desta forma até conseguir um sucesso ou o tamanho do passo ser muito pequeno.

2.11 Cálculo das funções interpoladoras

Nesta secção, calculam-se explicitamente as funções $\varphi_1, \dots, \varphi_{nk}$. Uma vez que as aproximações pretendidas são polinómios de grau superior a 1 e os vértices do triângulos podem mover-se, é vantajoso definir as funções φ em cada T_k utilizando coordenadas triangulares.

Para se obter um polinómio interpolador de grau r em cada triângulo, é necessário definir nk pontos nesse triângulo. Segundo [9], estes pontos são definidos criando uma malha uniforme como mostra a figura 2.1. Seja $T_k \in \mathcal{T}$ um elemento qualquer. Considere-se que as coordenadas

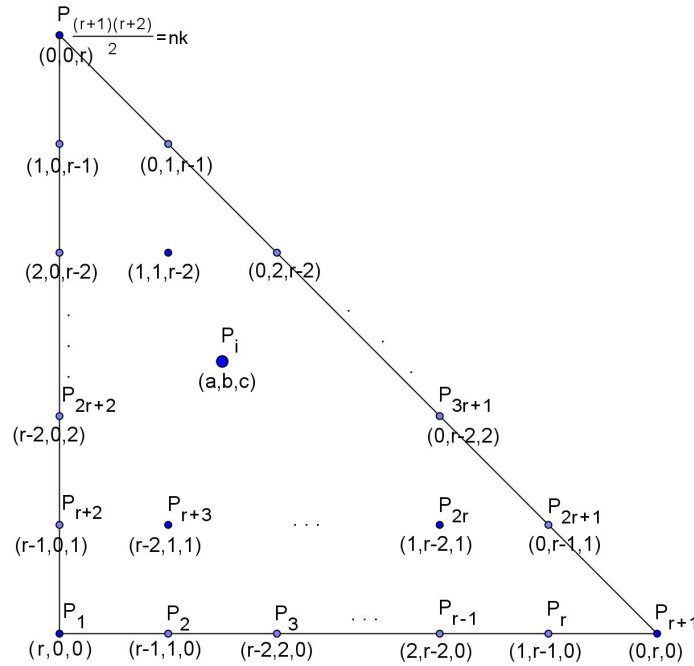


Figura 2.1: Elemento finito de referência e numeração local dos nós.

dos vértices de T_k são (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) . As funções interpoladoras de Lagrange de grau 1 associadas a estes pontos são, respetivamente,

$$\psi_1(x, y) = \frac{X_2 Y_3 - X_3 Y_2 + (Y_2 - Y_3)x + (X_3 - X_2)y}{2\Delta},$$

$$\psi_2(x, y) = \frac{X_3 Y_1 - X_1 Y_3 + (Y_3 - Y_1)x + (X_1 - X_3)y}{2\Delta},$$

$$\psi_3(x, y) = \frac{X_1 Y_2 - X_2 Y_1 + (Y_1 - Y_2)x + (X_2 - X_1)y}{2\Delta},$$

onde

$$\Delta = \frac{X_1(Y_2 - Y_3) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_1 - Y_2)}{2}.$$

Por vezes, às funções ψ chamam-se funções pirâmide, pois ψ_j é linear e toma valor 1 em (X_j, Y_j) e zero nos outros pontos. Para a aproximação com polinómios de grau r , o polinómio interpolador associado ao ponto P_i é construído à custa das funções interpoladoras de Lagrange de grau 1 da forma:

$$\varphi_i(x, y) = \bar{f}_a(\psi_1(x, y))\bar{f}_b(\psi_2(x, y))\bar{f}_c(\psi_3(x, y)),$$

onde

$$\bar{f}_k(\psi_j) = \begin{cases} \prod_{i=1}^k \frac{1}{i} (r\psi_j - i + 1), & 1 \leq k \leq r \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

e os índices são da forma como mostra a figura 2.1.

É necessário também calcular as derivadas destas funções. As derivadas de φ_i são:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \bar{f}_b \bar{f}_c + \bar{f}_a \frac{\partial \bar{f}_b}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \bar{f}_c + \bar{f}_a \bar{f}_b \frac{\partial \bar{f}_c}{\partial \psi_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial \psi_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \bar{f}_b \bar{f}_c + \bar{f}_a \frac{\partial \bar{f}_b}{\partial \psi_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \bar{f}_c + \bar{f}_a \bar{f}_b \frac{\partial \bar{f}_c}{\partial \psi_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} = -\psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_j} = -\psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial y},$$

com

$$\frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \psi_j} = \begin{cases} \sum_{m=1}^k \frac{r}{m} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k \frac{1}{i} (r\psi_j - i + 1), & 2 \leq k \leq r \\ r, & k = 1 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{Y_2 - Y_3}{2\Delta}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \frac{Y_3 - Y_1}{2\Delta}, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \frac{Y_1 - Y_2}{2\Delta},$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{X_3 - X_2}{2\Delta}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \frac{X_1 - X_3}{2\Delta}, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = \frac{X_2 - X_1}{2\Delta}.$$

2.12 Cálculo dos integrais

Embora os integrais envolvendo apenas as funções interpoladoras possam ser calculados exatamente, não é prático o cálculo exato dos integrais que envolvem outras funções do problema, possivelmente não lineares.

Neste trabalho, todos os integrais são calculados numericamente utilizando a quadratura de Gauss-Legendre [56]. Os pontos e os pesos de quadratura são calculados num triângulo de referência T_R e considera-se $\Phi_k : T_R \rightarrow T_k$ onde cada elemento T_k da partição é imagem do triângulo de referência T_R . Sejam (α, β) as coordenadas locais no triângulo T_k e (x, y) as coordenadas locais do triângulo T_R , então

$$\mathcal{I} = \int_{T_k} h(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \int_{T_R} (h \circ \Phi_k)(x, y) |J_{\Phi_k}| dx dy.$$

Se se considerar T_R o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, então pretende-se calcular

$$\mathcal{I} = \int_{T_R} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = (1 + \xi)/2$, $y = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$, passa-se para o quadrado

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

$[-1, 1]^2$ e obtém-se:

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f\left(\frac{1+\xi}{2}, \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}\right) \left(\frac{1-\xi}{8}\right) d\xi d\eta.$$

Aplicando a quadratura de Gauss-Legendre fica:

$$\mathcal{I} \approx \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{1-\xi_i}{8}\right) w_i w_j f\left(\frac{1+\xi_i}{2}, \frac{(1-\xi_i)(1-\eta_j)}{4}\right),$$

onde $\xi_k = \eta_k$ e w_k , $k = 1, \dots, n_i$ são os nós e os respectivos pesos da quadratura de Gauss-Legendre no intervalo $[-1, 1]$. Se T_k tem os vértices (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) , então Φ_k pode ser representado na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$J_{\Phi_k} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 \end{bmatrix} \text{ e } |J_{\Phi_k}| = 2\Delta.$$

Sejam $Wx_i = \left(\frac{1-\xi_i}{8}\right) w_i$, $Wy_j = w_j$, $Cx_{ij} = \frac{1-\xi_i}{2}$ e $Cy_{ij} = \frac{(1-\xi_i)(1-\eta_j)}{4}$, $i, j = 1 \dots m$, então

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Wx_i Wy_j (h \circ \Phi_k)(Cx_{ij}, Cy_{i,j}) 2\Delta.$$

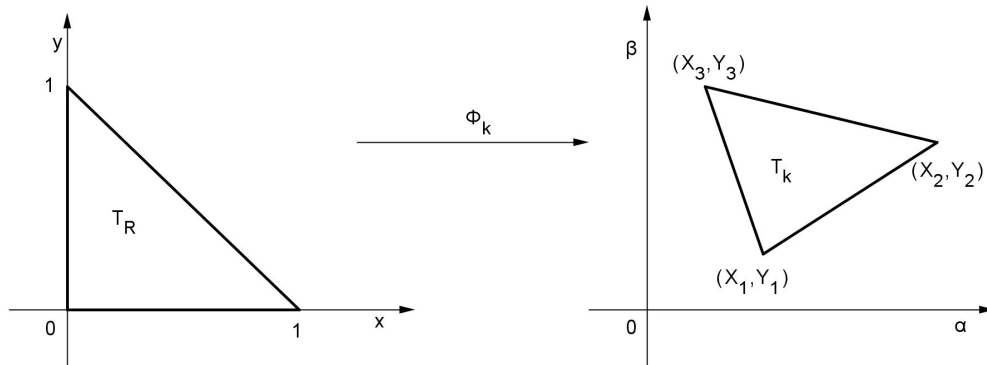


Figura 2.2: Função Φ_k .

Capítulo 3

Equação Em Meios Porosos Com Expoente Variável

3.1 Problema em domínio fixo

Nesta secção, faz-se um estudo teórico da convergência do Método dos Elementos Finitos (MEF) quando aplicado a um caso particular do problema (1.3), onde o expoente γ não depende do tempo. Uma vez que o problema pode ser degenerado, utiliza-se um problema aproximado regularizado, introduzindo um parâmetro ε . Demonstram-se alguns teoremas sobre a influência de ε na regularidade das soluções do problema regularizado. Prova-se, sobre algumas condições em γ e f , que a solução fraca do problema aproximado converge para a solução fraca do problema inicial, quando o parâmetro ε tende para zero. São construídas soluções discretas utilizando o MEF e prova-se a convergência destas para a solução fraca do problema aproximado e consequentemente para o problema original. No final, são apresentados alguns resultados numéricos da implementação, em Matlab, do método.

Considere-se então o problema de encontrar a função u que satisfaça as condições:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|u|^{\gamma(\mathbf{x})} \nabla u) = f(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega_T \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde γ é uma função limitada definida em Ω_T , tal que:

$$1 < \gamma^- \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq \gamma^+ < \infty, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3.2)$$

com γ^- e γ^+ constantes conhecidas.

Antes de mais, tem de se definir o que se entende como solução fraca do problema.

Definição 3.1 (Solução fraca) Uma função $u(\mathbf{x}, t)$ é dita solução fraca do problema (3.1) se

(i) $u \in L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega))$, $|u|^{\frac{\gamma}{2}} \nabla u \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, $u_t \in L_2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))$,

(ii) $u = 0$ em Γ_T ,

(iii) para qualquer função de teste $\zeta(\mathbf{x}, t)$ que satisfaz as condições

$$\zeta \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega)), \quad \zeta_t \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$$

e para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ a seguinte identidade é verdadeira

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} -u \zeta_t \, d\mathbf{x} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u|^{\gamma} \nabla u \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f \zeta \, d\mathbf{x} dt = - \int_{\Omega} u \zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t_1}^{t_2},$$

(iv) e $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$ em Ω .

Em [4], Antontsev e Shmarev provaram que o problema (3.1) tem solução fraca segundo a definição 3.1.

3.1.1 Regularização do problema

Uma das principais dificuldades em obter estimativas de erro para problemas parabólicos degenerados reside na regularidade das soluções. Para se obter um problema parabólico com solução regular deve perturbar-se ligeiramente o problema (3.1). Esta regularização pode ser feita de diversas formas. Neste trabalho, considera-se um problema da forma

$$\begin{cases} v_t - \text{div}(a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)\nabla v) = f & \text{em } \Omega_T \\ v = 0 & \text{em } \Gamma_T \\ v(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

onde o termo difusivo é aproximado por

$$\varepsilon^{\gamma^+} \leq a_\varepsilon(\mathbf{x}, v) = (v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma(\mathbf{x})}{2}}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (3.4)$$

A definição de solução fraca deste problema é semelhante à do problema inicial.

Definição 3.2 (Solução fraca) Uma função $v(\mathbf{x}, t)$ é dita solução fraca do problema (3.3) se

- (i) $v \in L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega))$, $a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)^{\frac{1}{2}}\nabla v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, $v_t \in L_2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))$,
- (ii) $v = 0$ em Γ_T ,
- (iii) para qualquer função de teste $\zeta(\mathbf{x}, t)$ que satisfaz as condições

$$\zeta \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega)), \quad \zeta_t \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$$

e para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ a seguinte equação é verdadeira

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega -v \zeta_t \, d\mathbf{x}dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)\nabla v \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega f \zeta \, d\mathbf{x}dt = - \int_\Omega v \zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t_1}^{t_2},$$

- (iv) e $v(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$ em Ω .

Segundo a teoria clássica, para cada $\varepsilon > 0$, o problema (3.3) tem solução fraca que satisfaz esta definição e o sistema (3.3). Além disso, se $\nabla \gamma \in L_2(\Omega_T)$, então $v_t, \Delta v \in L_2(\Omega_T)$. Uma vez que a influência do parâmetro ε na regularidade das soluções do problema regularizado não é evidente, demonstram-se alguns resultados sobre a regularidade das soluções.

Começa-se por obter estimativas para as soluções do problema aproximado.

Teorema 3.3 Seja γ uma função mensurável em Ω que satisfaz a condição (3.2). Se

$$\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + \int_0^T \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \, dt < C, \quad (3.5)$$

então a solução v do problema (3.3) satisfaz

$$\|v(\mathbf{x}, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|u_0(\mathbf{x})\|_{L_\infty(\Omega)} + \int_0^T \|f(\mathbf{x}, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \, dt < C, \quad \forall t \in]0, T]. \quad (3.6)$$

Demonstração

Multiplicando (3.3) por v^{2k-1} e integrando em Ω , obtém-se

$$\int_\Omega v_t v^{2k-1} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \text{div}(a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)\nabla v)v^{2k-1} \, d\mathbf{x} = \int_\Omega f v^{2k-1} \, d\mathbf{x}.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

O que resulta em

$$\frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \|v\|_{L_{2k}(\Omega)}^{2k} + (2k-1) \int_{\Omega} v^{2k-2} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) |\nabla v|^2 dx \leq \|f\|_{L_{2k}(\Omega)} \|v\|_{L_{2k}(\Omega)}^{2k-1}.$$

após aplicar o teorema de Green e a desigualdade de Hölder. Se se ignorar o termo do meio, pois é não negativo, e se se simplificar o fator $\|v\|_{L_{2k}(\Omega)}^{2k-1}$, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{L_{2k}(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{2k}(\Omega)}.$$

Integrando em t fica

$$\|v(\mathbf{x}, t)\|_{L_{2k}(\Omega)} \leq \|v(\mathbf{x}, 0)\|_{L_{2k}(\Omega)} + \int_0^T \|f\|_{L_{2k}(\Omega)} dt.$$

Se se fizer $k \rightarrow \infty$, obtém-se o pretendido. ■

No resto deste capítulo, supõe-se que a condição (3.5) é satisfeita com C independente de ε .

Lema 3.4 Se γ satisfaz (3.2) e a é definido por (3.4) com v solução de (3.3), então

$$a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) \leq C,$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Segue imediatamente de (3.4) e de (3.6). ■

Teorema 3.5 Suponha-se que v é solução de (3.3), com $\gamma \in H^1(\Omega)$ e a condição (3.5) é válida, então

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt \leq C \varepsilon^{-\gamma^+},$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Da mesma forma como a demonstração anterior, multiplicando (3.3) por v e integrando em Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} v_t v dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) \nabla v) v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

O que resulta em

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) |\nabla v|^2 dx \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)},$$

após aplicar o teorema de Green e a desigualdade de Hölder. Integrando em ordem a t , obtém-se

$$\frac{1}{2} \|v(\mathbf{x}, T)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) |\nabla v|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \|v(\mathbf{x}, 0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} dt.$$

Por (3.6), conclui-se que

$$\int_0^T \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) |\nabla v|^2 dx dt \leq C.$$

Atendendo a (3.4), fica

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx dt \leq C \varepsilon^{-\gamma^+}.$$

■

Lema 3.6 Se $\gamma \in H^1(\Omega)$ satisfaz (3.2) e a é definido por (3.4) com v solução de (3.3), então

$$\|\nabla a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)\|_{L_2(\Omega)} < C \varepsilon^{-\gamma^+},$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Segue imediatamente do teorema anterior, de (3.6) e de

$$\nabla a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) = \gamma v (v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2} - 1} \nabla v + (v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\nabla \gamma}{2} \ln(v^2 + \varepsilon^2).$$

■

Teorema 3.7 Suponha-se que $u_0 \in H^1(\Omega)$, $\gamma \in H^2(\Omega)$ e a condição (3.5) é válida. Se v é solução de (3.3), então

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 \, dx dt \leq C \varepsilon^{-8\gamma^+},$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Considere-se a seguinte função:

$$w(\mathbf{x}, t) = \int_0^{v(\mathbf{x}, t)} (\varsigma^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma(\mathbf{x})}{2}} \, d\varsigma = \int_0^v a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \, d\varsigma,$$

então $w_t = a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) v_t$ e

$$\nabla w = (v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \nabla v + \int_0^v \frac{\nabla \gamma}{2} (\varsigma^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln(\varsigma^2 + \varepsilon^2) \, d\varsigma = a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) \nabla v + \int_0^v \nabla a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \, d\varsigma,$$

ou seja,

$$v_t = \frac{1}{a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)} w_t \quad \text{e} \quad a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) \nabla v = \nabla w - \int_0^v \nabla a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \, d\varsigma.$$

Logo w satisfaz a equação

$$\frac{1}{a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)} w_t = \operatorname{div}(\nabla w - \int_0^v \nabla a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \, d\varsigma) + f,$$

ou de forma equivalente,

$$w_t = a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) \Delta w - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) g_1,$$

com

$$g_1 = (\nabla a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma)|_{\varsigma=v}) \cdot \nabla v + \int_0^v \frac{\Delta \gamma}{2} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \ln(\varsigma^2 + \varepsilon^2) \, d\varsigma + \int_0^v \frac{|\nabla \gamma|^2}{4} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \ln^2(\varsigma^2 + \varepsilon^2) \, d\varsigma - f.$$

Multiplicando por Δw e integrando em Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} w_t \Delta w \, dx = \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) (\Delta w)^2 \, dx - \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) g_1 \Delta w \, dx.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Aplicando o teorema de Green no primeiro termo, fica-se com

$$\int_{\Omega} \nabla w_t \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)(\Delta w)^2 \, dx = \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)g_1 \Delta w \, dx.$$

Note-se que o primeiro termo é uma derivada então integrando em t , obtém-se

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, T)|^2 \, dx + \int_{\Omega_T} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)(\Delta w)^2 \, dxdt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, 0)|^2 \, dx + \int_{\Omega_T} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)g_1 \Delta w \, dxdt.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, fica-se com

$$\int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, T)|^2 \, dx + \int_{\Omega_T} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)(\Delta w)^2 \, dxdt \leq \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, 0)|^2 \, dx + \int_{\Omega_T} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)g_1^2 \, dxdt.$$

Atendendo às estimativas de v e ∇v obtidas nos Teoremas 3.3 e 3.5, chega-se a

$$\int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, T)|^2 \, dx + \int_{\Omega_T} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)(\Delta w)^2 \, dxdt \leq C_0 + C_1 \varepsilon^{-\gamma^+} \leq C \varepsilon^{-\gamma^+}.$$

Em particular,

$$\int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, T)|^2 \, dx \leq C \varepsilon^{-\gamma^+} \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_T} (\Delta w)^2 \, dxdt \leq C \varepsilon^{-2\gamma^+}.$$

Por outro lado ([53], lema 4.5, pág. 63) tem-se que:

$$\int_{\Omega_T} |\nabla w|^4 \, dxdt \leq C \operatorname{ess\,sup}_{(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T} |w|^2 \int_{\Omega_T} (\Delta w)^2 \, dxdt \leq C \varepsilon^{-2\gamma^+}.$$

Volte-se agora à função v . Como

$$a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)\nabla v = \nabla w - \int_0^v \nabla a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \, d\varsigma,$$

então

$$|\nabla v| \leq C \varepsilon^{-\gamma^+} (|\nabla w| + 1).$$

Também derivando w , obtém-se

$$\Delta w = a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)\Delta v + a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v) \ln(v^2 + \varepsilon^2) \nabla \gamma \cdot \nabla v + \gamma(v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} v |\nabla v|^2 + g_2,$$

onde,

$$g_2 = \int_0^v \frac{\Delta \gamma}{2} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \ln(\varsigma^2 + \varepsilon^2) \, d\varsigma + \int_0^v \frac{|\nabla \gamma|^2}{4} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma) \ln^2(\varsigma^2 + \varepsilon^2) \, d\varsigma.$$

Finalmente,

$$\int_{\Omega_T} |\nabla v|^4 \, dxdt \leq C \varepsilon^{-6\gamma^+}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} (a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, v)\Delta v)^2 \, dxdt &\leq \int_{\Omega_T} (\Delta w)^2 \, dxdt + \int_{\Omega_T} \left(\gamma(v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} v |\nabla v|^2 \right)^2 \, dxdt + \\ &\quad + \int_{\Omega_T} a_{\varepsilon}^2(\mathbf{x}, v) \ln^2(v^2 + \varepsilon^2) (\nabla \gamma \cdot \nabla v)^2 \, dxdt + \int_{\Omega_T} g_2^2 \, dxdt \\ &\leq C \varepsilon^{-2\gamma^+} + C \varepsilon^{-6\gamma^+} + C \varepsilon^{-\gamma^+} + C \leq C \varepsilon^{-6\gamma^+}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega_T} (\Delta v)^2 dxdt \leq C\varepsilon^{-8\gamma^+}.$$

■

Teorema 3.8 *Suponha-se que $\gamma \in H^2(\Omega)$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, v é solução de (3.3) e a condição (3.5) é válida, então*

$$\int_0^T \int_{\Omega} v_t^2 dxdt \leq C\varepsilon^{-2\gamma^+},$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Da mesma forma que o teorema 3.7 seja

$$w = \int_0^v a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma) d\varsigma,$$

então

$$\nabla w = a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)\nabla v + \int_0^v \nabla a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma) d\varsigma$$

e

$$w_t = a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)v_t.$$

Multiplicando (3.3) por w_t e integrando em Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} v_t w_t dx + \int_{\Omega} \nabla w \nabla w_t dx = \int_{\Omega} f w_t dx + \int_{\Omega} \int_0^v \nabla a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma) d\varsigma \nabla w_t dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)} (w_t)^2 dx + \int_{\Omega} \nabla w \nabla w_t dx = \int_{\Omega} w_t f dx + \int_{\Omega} \int_0^v \nabla a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma) d\varsigma \nabla w_t dx.$$

Integrando por partes o último termo, tem-se que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)} (w_t)^2 dx + \int_{\Omega} \nabla w \nabla w_t dx = \int_{\Omega} f w_t dx - \int_{\Omega} w_t (\nabla a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma)|_{\varsigma=v}) \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} w_t g dx,$$

onde:

$$g = \int_0^v \frac{\Delta \gamma}{2} a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma) \ln(\varsigma^2 + \varepsilon^2) d\varsigma + \int_0^v \frac{|\nabla \gamma|^2}{4} a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma) \ln^2(\varsigma^2 + \varepsilon^2) d\varsigma.$$

Integrando esta equação em t resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \frac{1}{a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)} (w_t)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, T)|^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, 0)|^2 dx + \\ &+ \int_{\Omega_T} f w_t dxdt - \int_{\Omega_T} w_t (\nabla a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma)|_{\varsigma=v}) \cdot \nabla v dxdt - \int_{\Omega_T} w_t g dxdt. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy verifica-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_T} \frac{1}{a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)} (w_t)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, T)|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, 0)|^2 dx + C \int_{\Omega_T} a_\varepsilon(\mathbf{x}, v) f^2 dxdt + \\ &+ C \int_{\Omega_T} a_\varepsilon(\mathbf{x}, v) |(\nabla a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma)|_{\varsigma=v}) \cdot \nabla v|^2 dxdt + C \int_{\Omega_T} a_\varepsilon(\mathbf{x}, v) g^2 dxdt. \end{aligned}$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Atendendo às estimativas de v e ∇v , chega-se à desigualdade:

$$\int_{\Omega_T} \frac{1}{a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)} (w_t)^2 \, d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x}, T)|^2 \, d\mathbf{x} \leq C_0 + C_1 \varepsilon^{-\gamma^+} \leq C \varepsilon^{-\gamma^+}.$$

Como

$$|v_t| = \frac{1}{a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)} |w_t|,$$

segue-se que

$$\int_{\Omega_T} (v_t)^2 \, d\mathbf{x}dt \leq \varepsilon^{-\gamma^+} \int_{\Omega_T} \frac{1}{a_\varepsilon(\mathbf{x}, v)} (w_t)^2 \, d\mathbf{x}dt \leq \varepsilon^{-2\gamma^+}$$

e o resultado está provado. ■

Lema 3.9 Se γ satisfaz (3.2) e a é definido por (3.4) com v solução de (3.3), então

$$\|(a_\varepsilon(\mathbf{x}, v))_t\|_{L_2(\Omega)} < C \varepsilon^{-\gamma^+},$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Segue imediatamente do teorema anterior e de:

$$(a_\varepsilon(\mathbf{x}, v))_t = \gamma v_t (v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}.$$

■

3.1.2 Convergência do problema regularizado

Antes de se construir as soluções discretas, prova-se que as soluções do problema aproximado convergem, num determinado sentido, para as soluções do problema inicial, quando ε tende para zero. Antes de mais, precisa-se do lema seguinte.

Lema 3.10 Se γ satisfaz (3.2) e v é limitado, então para $0 < \varepsilon < 1$ a desigualdade seguinte é válida:

$$\|v|\gamma(\mathbf{x}) - (v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma(\mathbf{x})}{2}}\| \leq C\varepsilon,$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Aplica-se o teorema do valor médio de Lagrange à função $g(y) = (v^2 + y^2)^{\frac{\gamma}{2}}$ no intervalo $[0, \varepsilon]$ e conclui-se que, para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, existe $c \in [0, \varepsilon] \subset [0, 1]$, tal que:

$$g(\varepsilon) - g(0) = \gamma c (v^2 + c^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} \varepsilon \leq \gamma (v^2 + c^2)^{\frac{\gamma-1}{2}} \varepsilon,$$

logo

$$\|v|\gamma(\mathbf{x}) - (v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma(\mathbf{x})}{2}}\| \leq C\varepsilon.$$

■

Para demonstrar a convergência, seguem-se as ideias da demonstração do teorema de unicidade em [4] e suas referências. Primeiro, prova-se que a diferença entre as soluções dos dois problemas satisfaz um determinado problema de Cauchy. De seguida, obtêm-se estimativas para as soluções do problema auxiliar. Finalmente, estas estimativas são usadas para concluir a estimativa pretendida.

Lema 3.11 *Seja u solução fraca de (3.1) e v solução fraca de (3.3). A função $w = u - v$ satisfaz a equação*

$$\int_{\Omega_T} w(-\zeta_t - A\Delta\zeta + B\nabla\zeta) \, d\mathbf{x}dt = \int_{\Omega_T} (F[v] - F_\varepsilon[v])\Delta\zeta + (G[v] - G_\varepsilon[v])\nabla\zeta \, d\mathbf{x}dt \quad (3.7)$$

com

$$\zeta \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega)), \quad \zeta_t \in L_2(0, T; L_2(\Omega)), \quad \zeta(\mathbf{x}, T) = 0, \quad (3.8)$$

$$A = \frac{1}{\gamma + 1} \frac{u|u|^\gamma - v|v|^\gamma}{u - v}, \quad B = A\nabla\ln(\gamma + 1) - D,$$

$$D = \frac{\nabla\gamma}{2(\gamma + 1)} \left(\frac{u|u|^\gamma \ln(u^2) - v|v|^\gamma \ln(v^2)}{u - v} \right),$$

$$F(\mathbf{x}, t) = F[u(\mathbf{x}, t)] = \frac{u|u|^\gamma}{\gamma + 1},$$

$$F_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = F_\varepsilon[v(\mathbf{x}, t)] = \int_0^v (\varsigma^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \, d\varsigma,$$

$$G[v] = u|u|^\gamma \frac{\nabla\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{\ln(u^2)}{2} - \frac{1}{\gamma + 1} \right)$$

e

$$G_\varepsilon[v] = \int_0^v \frac{\nabla\gamma}{2} (\varsigma^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln(\varsigma^2 + \varepsilon^2) \, d\varsigma.$$

Demonstração

As funções F e F_ε satisfazem

$$\nabla F = |u|^\gamma \nabla u + u|u|^\gamma \frac{\nabla\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{\ln(u^2)}{2} - \frac{1}{\gamma + 1} \right)$$

e

$$\nabla F_\varepsilon = (v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \nabla v + \int_0^v \frac{\nabla\gamma}{2} (\varsigma^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln(\varsigma^2 + \varepsilon^2) \, d\varsigma.$$

Logo,

$$|u|^\gamma \nabla u = \nabla F[u] - u|u|^\gamma \frac{\nabla\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{\ln(u^2)}{2} - \frac{1}{\gamma + 1} \right) = \nabla F[u] - G[u]$$

e

$$(v^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \nabla v = \nabla F_\varepsilon - \int_0^v \frac{\nabla\gamma}{2} (\varsigma^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln(\varsigma^2 + \varepsilon^2) \, d\varsigma = \nabla F_\varepsilon[v] - G_\varepsilon[v].$$

Assim, pode reescrever-se as equações das definições:

$$-\int_{\Omega_T} u\zeta_t \, d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega_T} |u|^\gamma \nabla u \cdot \nabla\zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} f\zeta \, d\mathbf{x}dt = -\int_{\Omega} u\zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^T,$$

$$-\int_{\Omega_T} v\zeta_t \, d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega_T} a_\varepsilon(\mathbf{x}, v) \nabla v \cdot \nabla\zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} f\zeta \, d\mathbf{x}dt = -\int_{\Omega} v\zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^T$$

da forma

$$-\int_{\Omega_T} u\zeta_t \, d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega_T} \nabla F[u] \nabla\zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} G[u] \nabla\zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} f\zeta \, d\mathbf{x}dt = -\int_{\Omega} u\zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^T,$$

$$-\int_{\Omega_T} v\zeta_t \, d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega_T} \nabla F_\varepsilon[v] \nabla\zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} G_\varepsilon[v] \nabla\zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} f\zeta \, d\mathbf{x}dt = -\int_{\Omega} v\zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^T.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Como $u = v = 0$ em $\partial\Omega$, então $F[u] = F_\varepsilon[v] = 0$ em $\partial\Omega$. Aplicando o teorema de Green na 2ª parcela do 1ª membro, obtém-se

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_T} u \zeta_t \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} F[u] \Delta \zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} G[u] \nabla \zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} f \zeta \, d\mathbf{x}dt = - \int_{\Omega} u \zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^T, \\ & - \int_{\Omega_T} v \zeta_t \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} F_\varepsilon[v] \Delta \zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} G_\varepsilon[v] \nabla \zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega_T} f \zeta \, d\mathbf{x}dt = - \int_{\Omega} v \zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^T. \end{aligned}$$

Uma vez que $\zeta(\mathbf{x}, T) = 0$, $w = u - v$ satisfaz a equação

$$- \int_0^T \int_{\Omega} w \zeta_t \, d\mathbf{x}dt - \int_0^T \int_{\Omega} (F[u] - F_\varepsilon[v]) \Delta \zeta \, d\mathbf{x}dt = \int_0^T \int_{\Omega} (G[u] - G_\varepsilon[v]) \nabla \zeta \, d\mathbf{x}dt. \quad (3.9)$$

Considere-se

$$F[u] - F_\varepsilon[v] = (F[u] - F[v]) + (F[v] - F_\varepsilon[v]) \text{ e } G[u] - G_\varepsilon[v] = (G[u] - G[v]) + (G[v] - G_\varepsilon[v]).$$

Pode escrever-se $F[u] - F[v] = Aw$ e $G[u] - G[v] = -Bw$, com A e B definidos em (3.8). Então, a equação (3.9) pode ser reescrita da forma (3.7), como pretendido. ■

Lema 3.12 Seja $\eta(\mathbf{x}, t)$ a solução do seguinte problema parabólico:

$$\begin{cases} \eta_t - (A + \epsilon)\Delta\eta + B\nabla\eta = \phi & \text{em } \Omega_T \\ \eta(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega \\ \eta(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \Gamma_T \end{cases}, \quad (3.10)$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, $\phi \in L_2(\Omega_T)$ uma função arbitrária e A e B estão definidas em (3.8). Se

$$\frac{\phi^2}{A + \epsilon} \leq C, \quad (3.11)$$

então

$$\int_{\Omega} |\nabla\eta|^2 \, d\mathbf{x} + \int_0^t \int_{\Omega} (A + \epsilon)(\Delta\eta)^2 \, d\mathbf{x}dt \leq C.$$

Demonstração

Demonstra-se facilmente que

$$0 \leq A \leq C, \quad |D| \leq C, \quad |B| \leq C, \quad \frac{|B|^2}{A} \leq C,$$

com C dependente simplesmente de γ^- , $\nabla\gamma$, $\text{ess sup } u$ e $\text{ess sup } v$.

Segundo [52], para qualquer $\epsilon > 0$ e $\phi \in L_2(\Omega_T)$ o problema tem uma única solução forte contínua η tal que $\eta_t, \Delta\eta \in L_2(\Omega_T)$.

De seguida, encontram-se estimativas para η e respetivas derivadas.

Multiplicando (3.10) por $\Delta\eta$ e integrando em Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} \eta_t \Delta\eta \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (A + \epsilon)(\Delta\eta)^2 \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} B\nabla\eta \Delta\eta \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \phi \Delta\eta \, d\mathbf{x}.$$

Se se aplicar o teorema de Green no primeiro termo e se se multiplicar por -1 , conclui-se que

$$\int_{\Omega} \nabla\eta_t \nabla\eta \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (A + \epsilon)(\Delta\eta)^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} B\nabla\eta \Delta\eta \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \phi \Delta\eta \, d\mathbf{x} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

Tem-se que

$$|\mathcal{I}_1| \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} (A + \epsilon)(\Delta\eta)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|B|^2}{A + \epsilon} |\nabla\eta|^2 dx$$

e

$$|\mathcal{I}_2| \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} (A + \epsilon)(\Delta\eta)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{A + \epsilon} dx.$$

Juntando as estimativas calculadas, obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla\eta|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (A + \epsilon)(\Delta\eta)^2 dx \leq \int_{\Omega} \frac{|B|^2}{A + \epsilon} (\nabla\eta)^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{A + \epsilon} dx.$$

Já se provou que

$$\frac{|B|^2}{A + \epsilon} \leq \frac{|B|^2}{A} \leq C |\nabla\gamma|^2 \leq C.$$

Pela hipótese (3.11) e pelo teorema de Gronwall, obtém-se o pretendido. ■

Teorema 3.13 *Seja u solução fraca de (3.1) e v solução fraca de (3.3). Se*

$$0 < \gamma^- \leq \gamma(\mathbf{x}) \leq \gamma^+ \text{ em } \bar{\Omega} \text{ e } \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |\nabla\gamma| \leq C < \infty,$$

então

$$\|u - v\|_{L^{\frac{\gamma^+}{2}+1}(\Omega_T)} \leq C \epsilon^{\frac{1}{2}},$$

onde C não depende de ϵ .

Demonstração

Seja $w = u - v$, então satisfaz a equação (3.7). Escolhendo $\zeta(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{x}, T - t)$ solução de (3.10) vem que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} w\phi dxdt &= \int_{\Omega_T} (w \epsilon \Delta\eta + (F[v] - F_{\epsilon}[v])\Delta\eta + (G[v] - G_{\epsilon}[v])\nabla\eta) dxdt = \\ &= \mathcal{I}_3 + \mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_5. \end{aligned}$$

Tem-se que

$$F[v] - F_{\epsilon}[v] = \frac{v|v|^{\gamma}}{\gamma+1} - \int_0^v (\zeta^2 + \epsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} d\zeta = \int_0^v |\zeta|^{\gamma} d\zeta - \int_0^v (\zeta^2 + \epsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} d\zeta = \int_0^v |\zeta|^{\gamma} - (\zeta^2 + \epsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} d\zeta,$$

então

$$|F[v] - F_{\epsilon}[v]| \leq C \sup |v| \epsilon$$

e

$$\begin{aligned} G[v] - G_{\epsilon}[v] &= u|u|^{\gamma} \frac{\nabla\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{\ln(u^2)}{2} - \frac{1}{\gamma+1} \right) - \int_0^v \frac{\nabla\gamma}{2} (\zeta^2 + \epsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln(\zeta^2 + \epsilon^2) d\zeta \\ &= \int_0^v |\zeta|^{\gamma} \nabla\gamma \ln(|\zeta|) d\zeta - \int_0^v \frac{\nabla\gamma}{2} (\zeta^2 + \epsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln(\zeta^2 + \epsilon^2) d\zeta \\ &= \int_0^v |\zeta|^{\gamma} \nabla\gamma \ln(|\zeta|) - \frac{\nabla\gamma}{2} (\zeta^2 + \epsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln(\zeta^2 + \epsilon^2) d\zeta, \end{aligned}$$

logo

$$|G[v] - G_{\epsilon}[v]| \leq C \sup |v| \epsilon.$$

Pela desigualdade de Schwarz e pelas estimativas calculadas no lema anterior, demonstra-se que

$$|\mathcal{I}_3| \leq \sup(|w|) \epsilon^{\frac{1}{2}} \sqrt{T \text{meas}(\Omega)} \left(\int_{\Omega_T} \epsilon (\Delta\eta)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \epsilon^{\frac{1}{2}},$$

$$|\mathcal{I}_4| \leq \sup(|F[v] - F_{\epsilon}[v]|) \epsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{T \text{meas}(\Omega)} \left(\int_{\Omega_T} \epsilon (\Delta\eta)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \epsilon \epsilon^{-\frac{1}{2}}$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

e

$$|\mathcal{I}_5| \leq \sup(|G[v] - G_\varepsilon[v]|) \sqrt{T \text{meas}(\Omega)} \left(\int_{\Omega_T} (\nabla \eta)^2 \, d\mathbf{x}dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\varepsilon.$$

Logo,

$$\left| \int_{\Omega_T} w\phi \, d\mathbf{x}dt \right| \leq C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon).$$

Se se considerar $\varepsilon = \varepsilon$, então

$$\left| \int_{\Omega_T} w\phi \, d\mathbf{x}dt \right| \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Ao considerar $\phi = |w|^\kappa \text{sign}(w)$, com κ uma constante positiva, pode deduzir-se que

$$\|w\|_{L^{\kappa+1}(\Omega_T)}^{\kappa+1} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \text{ ou seja, } \|u - v\|_{L^{\kappa+1}(\Omega_T)}^{\kappa+1} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

De facto, se $\phi = |u - v|^\kappa \text{sign}(u - v)$, então (3.11) é verdadeira, pois

$$\frac{\phi^2}{A + \varepsilon} \leq \frac{\phi^2}{A} = \frac{|u - v|^{2\kappa}}{\frac{u|u|^\gamma - v|v|^\gamma}{(\gamma+1)(u-v)}} \leq C,$$

desde que $\gamma \leq 2\kappa$.

Considerando $\kappa = \frac{\gamma^+}{2}$, obtém-se o pretendido. ■

3.1.3 Aproximação discreta

Nesta secção, segue-se [72] e aplica-se o método de Galerkin, contínuo no espaço e descontínuo no tempo, para obter soluções aproximadas do problema regularizado. Sempre que não houver perigo de confusão, deixar-se-á de explicitar a dependência de a em relação a \mathbf{x} .

Seja $h > 0$, \mathcal{T}_h uma partição de Ω e S_{hr} o espaço de elementos finitos

$$S_{hr} = \{\chi = \chi(\mathbf{x}) \in C_0^0(\bar{\Omega}) | \chi|_{T_k} \text{ é um polinómio de grau } r \, \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}.$$

Considere-se $\delta > 0$, a partição $]0, T] = \cup_{n=0}^{ni-1} I_n$, $I_n =]t_n, t_{n+1}]$, $t_{n+1} = t_n + \delta$ e o espaço

$$S_{hr}^{\delta s} = \{\mathcal{W} = \mathcal{W}_{h\delta} : [0, +\infty[\rightarrow S_h \mid \mathcal{W}|_{I_n} = \sum_{n=0}^s t^n \chi_n(\mathbf{x}), \chi_n \in S_{hr}\}.$$

Não se exige que $\mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta s}$ seja contínua nos pontos t_n , apenas que seja contínua à esquerda. Denote-se por \mathcal{W}_n e por \mathcal{W}_n^+ o valor de \mathcal{W} e do limite de \mathcal{W} à direita em t_n , respetivamente. O salto de \mathcal{W} em t_n será definido por $[\mathcal{W}]_n = \mathcal{W}_n^+ - \mathcal{W}_n$.

Procura-se uma aproximação discreta $v \approx V \in S_{hr}^{\delta s}$ que satisfaça a definição de solução fraca. Então,

$$\int_{\Omega_T} -V\zeta_t \, d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega_T} a_\varepsilon(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x}dt = \int_{\Omega_T} f\zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega} V\zeta d\mathbf{x} \Big|_0^T,$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} -V\zeta_t \, d\mathbf{x}dt + \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} a_\varepsilon(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x}dt = \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} f\zeta \, d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega} V\zeta d\mathbf{x} \Big|_0^T.$$

Aplicando a integração por partes no primeiro termo, utilizando a continuidade de ζ no tempo e supondo $\zeta(\mathbf{x}, T) = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} V_t \zeta \, d\mathbf{x} dt - \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{\Omega} V \zeta \, d\mathbf{x} \Big|_{t_n^+}^{t_{n+1}^+} + \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} dt = \\ = \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} f \zeta \, d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} V_0^+ \zeta_0 \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde V_t é o polinómio de grau $s - 1$ que interpola $\frac{\partial V}{\partial t}$ em I_n e t_n^+ representa o limite quando t tende para t_n por valores superiores. Considerando $[V]_n = V_n^+ - V_n$, conclui-se que

$$\sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} V_t \zeta \, d\mathbf{x} dt + \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} [V]_n \zeta \, d\mathbf{x} + \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} dt = \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} f \zeta \, d\mathbf{x} dt.$$

Escolhendo $S_{hr}^{\delta s}$ para espaço das funções teste, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} V_t \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt + \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} [V]_n \mathscr{W}_n \, d\mathbf{x} + \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt = \\ = \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} f \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Definição 3.14 Uma função $V \in S_{hr}^{\delta s}$ é dita solução discreta do problema regularizado (3.3) se $V = 0$ em $\partial\Omega$ e satisfizer a equação (3.12) para todo $\mathscr{W} \in S_{hr}^{\delta s}$.

Como \mathscr{W} pode não ser contínuo nos t_i , $i = 0, \dots, ni$ pode escolher-se \mathscr{W} de modo que se anule fora de I_n , $n = 0, \dots, ni - 1$. Neste caso, a equação (3.12) transforma-se em ni equações, uma para cada I_n . Assim, o problema discreto pode ser encontrar $V \in S_{hr}^{\delta s}$ de modo que

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\Omega} V_t \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} V_{n-1}^+ \mathscr{W}_{n-1}^+ \, d\mathbf{x} + \int_{I_n} \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt = \\ = \int_{I_n} \int_{\Omega} f \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} V_{n-1} \mathscr{W}_{n-1}^+ \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$\forall \mathscr{W} \in S_{hr}^{\delta s}, \forall n \in \{0, \dots, ni\}$.

Tem agora de se provar que este problema tem solução única. Note-se que para demonstrar a existência e unicidade de solução para o problema (3.12), é suficiente provar que, em cada intervalo I_n e com o valor de V_{n-1} fixo, existe uma única solução para a equação (3.13).

Teorema 3.15 Se $V_{n-1} \in L_2(\Omega)$ e $f \in L_2(\Omega \times I_n)$, então o problema (3.13) tem uma solução V .

Demonstração

Seja $n \geq 1$ fixo. Para cada $h, \delta > 0$, define-se a aplicação contínua $F : S_{hr}^{\delta s} \rightarrow S_{hr}^{\delta s}$ da forma

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\Omega} F(V) \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt = \int_{I_n} \int_{\Omega} V_t \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} V_{n-1}^+ \mathscr{W}_{n-1}^+ \, d\mathbf{x} + \\ + \int_{I_n} \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt - \int_{I_n} \int_{\Omega} f \mathscr{W} \, d\mathbf{x} dt - \int_{\Omega} V_{n-1} \mathscr{W}_{n-1}^+ \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathscr{W} \in S_{hr}^{\delta s}. \end{aligned}$$

escolhendo $\mathscr{W} = V$,

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\Omega} F(V) V \, dx dt &= \int_{I_n} \int_{\Omega} V_t V \, dx dt + \int_{\Omega} (V_{n-1}^+)^2 \, dx + \\ &+ \int_{I_n} \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V) |\nabla V|^2 \, dx dt - \int_{I_n} \int_{\Omega} f V \, dx dt - \int_{\Omega} V_{n-1} V_{n-1}^+ \, dx. \end{aligned}$$

Utilizando a majoração inferior de a e aplicando a desigualdade de Hölder, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\Omega} F(V) V \, dx dt &\geq \frac{1}{2} \int_{I_n} \frac{d}{dt} \|V\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt + \|V_{n-1}^+\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ \varepsilon^{\gamma^+} \int_{I_n} \|\nabla V\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt - \int_{I_n} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|V\|_{L_2(\Omega)} \, dt - \|V_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} \|V_{n-1}^+\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Integrando o primeiro termo em t e utilizando as desigualdades de Cauchy e Poincaré, chega-se a

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\Omega} F(V) V \, dx dt &\geq \frac{1}{2} \|V_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ C\varepsilon^{\gamma^+} \int_{I_n} \|V\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt - \int_{I_n} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|V\|_{L_2(\Omega)} \, dt - \frac{1}{2} \|V_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Aplicando de novo a desigualdade de Cauchy, conclui-se que

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\Omega} F(V) V \, dx dt &\geq \frac{1}{2} \|V_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ \frac{C\varepsilon^{\gamma^+}}{2} \int_{I_n} \|V\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt - \frac{1}{2C\varepsilon^{\gamma^+}} \int_{I_n} \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt - \frac{1}{2} \|V_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Se V pertencer a $\mathbf{B} = \{\mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta s} : \|\mathcal{W}\|_{L_2(\Omega \times I_n)} \leq \epsilon, \epsilon > \frac{1}{C\varepsilon^{\gamma^+}} \|V_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{(C\varepsilon^{\gamma^+})^2} \|f_n\|_{L_2(\Omega \times I_n)}\}$, então $\int_{\Omega} F(V) V \, dx \geq 0, \forall V \in \partial \mathbf{B}$. O corolário do teorema de ponto fixo de Brouwer implica a existência de um $V_* \in \mathbf{B}$ tal que $F(V_*) = 0$. O teorema está provado com $V = V_*$. ■

Se se utilizarem aproximações no tempo e grau zero, então a definição de \mathbf{B} não depende de ε .

Prova-se de seguida que a solução é única.

Teorema 3.16 Se $V_{n-1} \in L_2(\Omega)$ e $f \in L_2(\Omega \times I_n)$, então o problema (3.13) tem uma única solução V .

Demonstração

Sejam V_{n-1} e f duas funções conhecidas e V_1 e V_2 duas soluções de (3.13), então, para $\mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta s}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\Omega} (V_1)_t \mathcal{W} \, dx dt + \int_{\Omega} (V_1)_{n-1}^+ \mathcal{W}_{n-1}^+ \, dx + \int_{I_n} \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V_1) \nabla V_1 \cdot \nabla \mathcal{W} \, dx dt &= \\ &= \int_{I_n} \int_{\Omega} f \mathcal{W} \, dx dt + \int_{\Omega} V_{n-1} \mathcal{W}_{n-1}^+ \, dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \int_{\Omega} (V_2)_t \mathcal{W} \, dx dt + \int_{\Omega} (V_2)_{n-1}^+ \mathcal{W}_{n-1}^+ \, dx + \int_{I_n} \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V_2) \nabla V_2 \cdot \nabla \mathcal{W} \, dx dt &= \\ &= \int_{I_n} \int_{\Omega} f \mathcal{W} \, dx dt + \int_{\Omega} V_{n-1} \mathcal{W}_{n-1}^+ \, dx. \end{aligned}$$

Subtraindo estas duas igualdades e considerando $V = V_1 - V_2$, obtém-se

$$\int_{I_n} \int_{\Omega} V_t \mathcal{W} \, dxdt + \int_{\Omega} V_{n-1}^+ \mathcal{W}_{n-1}^+ \, dx + \int_{I_n} \int_{\Omega} (a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V_1) \nabla V_1 - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V_2) \nabla V_2) \cdot \nabla \mathcal{W} \, dxdt = 0. \quad (3.14)$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V_1) \nabla V_1 - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, V_2) \nabla V_2 &= \int_0^1 \frac{d}{d\varsigma} (a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma V_1 + (1-\varsigma)V_2) \nabla (\varsigma V_1 + (1-\varsigma)V_2)) \, d\varsigma = \\ &= \int_0^1 a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma V_1 + (1-\varsigma)V_2) \nabla V \, d\varsigma + \int_0^1 \gamma((\varsigma V_1 + (1-\varsigma)V_2)^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\varsigma V_1 + (1-\varsigma)V_2) (\varsigma \nabla V_1 + (1-\varsigma) \nabla V_2) V \, d\varsigma \\ &= A \nabla V + BV, \end{aligned}$$

com

$$A = \int_0^1 a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma V_1 + (1-\varsigma)V_2) \, d\varsigma$$

e

$$B = \int_0^1 \gamma((\varsigma V_1 + (1-\varsigma)V_2)^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\varsigma V_1 + (1-\varsigma)V_2) (\varsigma \nabla V_1 + (1-\varsigma) \nabla V_2) \, d\varsigma,$$

a igualdade (3.14) transforma-se em

$$\int_{I_n} \int_{\Omega} V_t \mathcal{W} \, dxdt + \int_{\Omega} V_{n-1}^+ \mathcal{W}_{n-1}^+ \, dx + \int_{I_n} \int_{\Omega} (A \nabla V + BV) \cdot \nabla \mathcal{W} \, dxdt = 0.$$

Integrando por partes o primeiro termo da última igualdade, fica-se com

$$- \int_{I_n} \int_{\Omega} V \mathcal{W}_t \, dxdt + \int_{\Omega} V_n \mathcal{W}_n \, dx + \int_{I_n} \int_{\Omega} (A \nabla V + BV) \cdot \nabla \mathcal{W} \, dxdt = 0. \quad (3.15)$$

Seja $\mathcal{W}(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{x}, t_{n-1} + t_n - t)$, com η a solução discreta do problema

$$\begin{cases} \eta_t - \operatorname{div}(A \nabla \eta) + B \nabla \eta = \phi & \text{em } \Omega \times \operatorname{int}(I_n) \\ \eta(\mathbf{x}, t_{n-1}) = 0 & \text{em } \Omega \\ \eta(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times \operatorname{int}(I_n) \end{cases}, \quad (3.16)$$

Neste problema ϕ é uma função arbitrária de $L_2(\Omega \times \operatorname{int}(I_n))$. Uma vez que $\varepsilon^{\gamma^+} \leq A \leq C$ e $|B| \leq C\varepsilon^{\gamma^+}$, o problema tem uma solução fraca em $S_{hr}^{\delta s}$. Então a equação (3.15) transforma-se em

$$\int_{I_n} \int_{\Omega} V \phi \, dxdt = 0, \quad (3.17)$$

pois $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}(\mathbf{x}, t_n) = \eta(\mathbf{x}, t_{n-1}) = 0$. Como (3.17) é válida para qualquer $\phi \in L_2(\Omega \times \operatorname{int}(I_n))$, conclui-se que $V = 0$ e, conseqüentemente, a solução é única. ■

O resto desta secção é dedicada à demonstração de uma estimativa do erro em termos dos parâmetros da discretização para a solução totalmente discreta do problema (3.12). Esta demonstração é muito semelhante à demonstração do teorema 3.13 e está também repartida em dois lemas e um teorema.

Lema 3.17 *Seja v solução fraca do problema aproximado e V a solução discreta, então a função $e = V - v$ satisfaz, para todo $\mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta s}$, a equação*

$$\int_I \int_{\Omega} (-e \mathcal{W}_t + A \nabla e \cdot \nabla \mathcal{W} + e B \cdot \nabla \mathcal{W}) \, dxdt = \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} e_n [\mathcal{W}]_n \, dx - \int_{\Omega} e_{ni} \mathcal{W}_{ni} \, dx, \quad \forall \mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta s} \quad (3.18)$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

com

$$A = \int_0^1 a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \xi)v) d\varsigma$$

e

$$B = \int_0^1 \gamma((\varsigma V + (1 - \varsigma)v)^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\varsigma V + (1 - \varsigma)v) (\varsigma \nabla V + (1 - \varsigma) \nabla v) d\varsigma.$$

Demonstração

A equação (3.12) pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} V \mathscr{W}_t d\mathbf{x}dt - \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} V_n [\mathscr{W}]_n d\mathbf{x} + \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} a_\varepsilon(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \mathscr{W} d\mathbf{x}dt = \\ & = \sum_{n=0}^{ni-1} \int_{I_n} \int_{\Omega} f \mathscr{W} d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega} V_{ni} \mathscr{W}_{ni} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Somando

$$- \int_I \int_{\Omega} V \mathscr{W}_t d\mathbf{x}dt - \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} V_n [\mathscr{W}]_n d\mathbf{x} + \int_I \int_{\Omega} a_\varepsilon(\mathbf{x}, V) \nabla V \cdot \nabla \mathscr{W} d\mathbf{x}dt = \int_I \int_{\Omega} f \mathscr{W} d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega} V_{ni} \mathscr{W}_{ni} d\mathbf{x}.$$

A solução fraca do problema satisfaz esta equação, ou seja,

$$- \int_I \int_{\Omega} v \mathscr{W}_t d\mathbf{x}dt - \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} v_n [\mathscr{W}]_n d\mathbf{x} + \int_I \int_{\Omega} a_\varepsilon(\mathbf{x}, v) \nabla v \cdot \nabla \mathscr{W} d\mathbf{x}dt = \int_I \int_{\Omega} f \mathscr{W} d\mathbf{x}dt - \int_{\Omega} v_{ni} \mathscr{W}_{ni} d\mathbf{x}.$$

Subtraindo estas duas equações, obtém-se

$$- \int_I \int_{\Omega} e \mathscr{W}_t d\mathbf{x}dt - \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} e_n [\mathscr{W}]_n d\mathbf{x} + \int_I \int_{\Omega} (a_\varepsilon(\mathbf{x}, V) \nabla V - a_\varepsilon(\mathbf{x}, v) \nabla v) \cdot \nabla \mathscr{W} d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega} e_{ni} \mathscr{W}_{ni} d\mathbf{x} = 0,$$

onde $e = V - v$ é o erro de V . Pode escrever-se

$$\begin{aligned} & a_\varepsilon(\mathbf{x}, V) \nabla V - a_\varepsilon(\mathbf{x}, v) \nabla v = \int_0^1 \frac{d}{d\varsigma} (a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \varsigma)v) \nabla (\varsigma V + (1 - \varsigma)v)) d\varsigma = \\ & = \int_0^1 a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \varsigma)v) \nabla e d\varsigma + \int_0^1 \gamma((\varsigma V + (1 - \varsigma)v)^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\varsigma V + (1 - \varsigma)v) (\varsigma \nabla V + (1 - \varsigma) \nabla v) e d\varsigma \\ & = A \nabla e + B e. \end{aligned}$$

Então,

$$- \int_I \int_{\Omega} e \mathscr{W}_t d\mathbf{x}dt - \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} e_n [\mathscr{W}]_n d\mathbf{x} + \int_I \int_{\Omega} A \nabla e \cdot \nabla \mathscr{W} d\mathbf{x}dt + \int_I \int_{\Omega} e B \cdot \nabla \mathscr{W} d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega} e_{ni} \mathscr{W}_{ni} d\mathbf{x} = 0.$$

Reorganizando os termos, obtém-se o pretendido. ■

Lema 3.18 Seja $\eta(\mathbf{x}, t)$ solução do problema parabólico seguinte:

$$\begin{cases} \eta_t - \operatorname{div}(A \nabla \eta) + B \nabla \eta = \phi & \text{em } \Omega_T \\ \eta(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega \\ \eta(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \Gamma_T \end{cases}, \quad (3.19)$$

com

$$A = \int_0^1 a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \varsigma)v) d\varsigma,$$

e

$$B = \int_0^1 \gamma((\varsigma V + (1 - \varsigma)v)^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\varsigma V + (1 - \varsigma)v) (\varsigma \nabla V + (1 - \varsigma) \nabla v) d\varsigma.$$

Se

$$\frac{\phi^2}{A} \leq C, \quad (3.20)$$

então

$$\int_\Omega |\nabla \eta|^2 d\mathbf{x} + \int_0^t \int_\Omega A(\Delta \eta)^2 d\mathbf{x} dt \leq C. \quad (3.21)$$

Demonstração

Tem-se que $\varepsilon^{\gamma^+} \leq A \leq C$ e $|B| \leq C\varepsilon^{\gamma^+}$, logo pela teoria clássica [52], para qualquer $\varepsilon > 0$ e $\phi \in L_2(\Omega_T)$ este problema tem uma única solução fraca contínua η tal que $\eta_t, \Delta \eta \in L_2(\Omega_T)$.

A seguir encontram-se estimativas para η e respetivas derivadas.

Multiplicando (3.19) por $\Delta \eta$ e integrando, obtém-se

$$\int_\Omega \eta_t \Delta \eta d\mathbf{x} - \int_\Omega A(\Delta \eta)^2 d\mathbf{x} = - \int_\Omega \tilde{B} \nabla \eta \Delta \eta d\mathbf{x} + \int_\Omega \phi \Delta \eta d\mathbf{x},$$

com

$$\tilde{B} = \int_0^1 \frac{\nabla \gamma}{2} a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \varsigma)v) \ln((\varsigma V + (1 - \varsigma)v)^2 + \varepsilon^2) d\varsigma.$$

Se se aplicar o teorema de Green no primeiro termo e se se multiplicar por -1 , chega-se á igualdade

$$\int_\Omega \nabla \eta_t \nabla \eta d\mathbf{x} + \int_\Omega A(\Delta \eta)^2 d\mathbf{x} = \int_\Omega \tilde{B} \nabla \eta \Delta \eta d\mathbf{x} - \int_\Omega \phi \Delta \eta d\mathbf{x} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

Tem-se que

$$|\mathcal{I}_1| \leq \frac{1}{4} \int_\Omega A(\Delta \eta)^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{|\tilde{B}|^2}{A} |\nabla \eta|^2 d\mathbf{x}$$

e

$$|\mathcal{I}_2| \leq \frac{1}{4} \int_\Omega A(\Delta \eta)^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{\phi^2}{A} d\mathbf{x}.$$

Juntando as estimativas calculadas, obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla \eta|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega A(\Delta \eta)^2 d\mathbf{x} \leq \int_\Omega \frac{|\tilde{B}|^2}{A} |\nabla \eta|^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{\phi^2}{A} d\mathbf{x}.$$

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{B}|^2}{A} &\leq \frac{\left(\int_0^1 \frac{\nabla \gamma}{2} a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \varsigma)v) \ln((\varsigma V + (1 - \varsigma)v)^2 + \varepsilon^2) d\varsigma \right)^2}{\int_0^1 a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \varsigma)v) d\varsigma} \leq \\ &\leq \frac{C \left(\int_0^1 a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \varsigma)v) d\varsigma \right)^2}{\int_0^1 a_\varepsilon(\mathbf{x}, \varsigma V + (1 - \varsigma)v) d\varsigma} \leq C. \end{aligned}$$

Pela hipótese (3.20) e pelo teorema de Gronwall, obtém-se a estimativa pretendida. ■

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Teorema 3.19 *Seja v solução fraca do problema aproximado e V a solução discreta, então*

$$\|V - v\|_{L^{\frac{\gamma^+}{2}+1}(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{-\gamma^+} (h^{r+1}\|v\|_{L^\infty(I, H^{r+1}(\Omega))} + \delta^{s+1}|v^{(s+1)}|_{W^{s+1, \infty}(I, L_2(\Omega))}),$$

onde C não depende de ε , h , r , δ nem de s .

Demonstração

Primeiro, define-se $\tilde{V} \in S_{hr}^{\delta s}$ em cada I_n por

$$\int_{\Omega} \tilde{V} \chi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \tilde{v} \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall t \in I_n, \chi \in S_{hr},$$

onde

$$\tilde{v}(t_n) = v(t_n), \quad n = 1, \dots, ni$$

e

$$\int_{I_n} \int_{\Omega} \tilde{v} \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt = \int_{I_n} \int_{\Omega} v \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt, \quad \forall \mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta, s-1}.$$

Para verificar que \tilde{V} está bem definido, pode consultar-se [72].

Pode então escrever-se $e = \theta + \rho$, onde $\theta = V - \tilde{V}$ e $\rho = \tilde{V} - v$.

Pelo teorema 2.86, obtêm-se as estimativas seguintes:

$$\|\rho\|_{L_2(\Omega)} \leq C(h^{r+1}\|v\|_{L^\infty(I_n; H^{r+1}(\Omega))} + \delta^{s+1}|v|_{W^{s+1, \infty}(I_n; L_2(\Omega))}), \quad \forall t \in]0, T].$$

Falta majorar θ . Para qualquer $\mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta s}$ a igualdade seguinte é verdadeira.

$$\begin{aligned} & - \int_I \int_{\Omega} \theta \mathcal{W}_t \, d\mathbf{x} dt - \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} \theta_n[\mathcal{W}]_n \, d\mathbf{x} - \int_I \int_{\Omega} A \nabla \theta \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt + \int_I \int_{\Omega} \theta B \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} \theta_{ni} \mathcal{W}_{ni} \, d\mathbf{x} = \\ & = \int_I \int_{\Omega} \rho \mathcal{W}_t \, d\mathbf{x} dt + \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} \rho_n[\mathcal{W}]_n \, d\mathbf{x} + \int_I \int_{\Omega} A \nabla \rho \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt + \int_I \int_{\Omega} \rho B \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} \rho_{ni} \mathcal{W}_{ni} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Seja \mathcal{W} a solução discreta do problema 3.19. A demonstração da existência desta solução é semelhante à demonstração do teorema 3.15. Então,

$$\int_I \int_{\Omega} \theta \phi \, d\mathbf{x} dt = \int_I \int_{\Omega} A \nabla \rho \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt - \int_I \int_{\Omega} \rho B \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2,$$

pois, devido à definição de \tilde{V} ,

$$\int_I \int_{\Omega} \rho \mathcal{W}_t \, d\mathbf{x} dt = 0, \quad \sum_{n=1}^{ni-1} \int_{\Omega} \rho_n[\mathcal{W}]_n \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \rho_{ni} \mathcal{W}_{ni} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Pelas estimativas calculadas e pelas propriedades de R_h e Δ_h , tem-se

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_1| &= \left| \int_I \int_{\Omega} A \nabla R_h \rho \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt \right| \\ &= \left| \int_I \int_{\Omega} A R_h \rho \cdot \Delta_h \mathcal{W} \, d\mathbf{x} dt \right| \\ &\leq \left(\int_I \int_{\Omega} (R_h \rho)^2 \, d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \int_{\Omega} (A \Delta_h \mathcal{W})^2 \, d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\varepsilon^{-\gamma^+} (h^{r+1}\|v\|_{L_\infty(I_n;H^{r+1}(\Omega))} + \delta^{s+1}|v|_{W^{s+1,\infty}(I_n;L_2(\Omega))}) \left(\int_I \int_\Omega A(\Delta_h \mathcal{W})^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\varepsilon^{-\gamma^+} (h^{r+1}\|v\|_{L_\infty(I_n;H^{r+1}(\Omega))} + \delta^{s+1}|v|_{W^{s+1,\infty}(I_n;L_2(\Omega))}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left(\int_I \int_\Omega \rho^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \int_\Omega (B \cdot \nabla \mathcal{W})^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(h^{r+1}\|v\|_{L_\infty(I_n;H^{r+1}(\Omega))} + \delta^{s+1}|v|_{W^{s+1,\infty}(I_n;L_2(\Omega))}) C\varepsilon^{-\gamma^+} \left(\int_I \int_\Omega (\nabla \mathcal{W})^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\varepsilon^{-\gamma^+} (h^{r+1}\|v\|_{L_\infty(I_n;H^{r+1}(\Omega))} + \delta^{s+1}|v|_{W^{s+1,\infty}(I_n;L_2(\Omega))}). \end{aligned}$$

Considerando $\phi = |\theta|^{\gamma^+/2} \text{sign}(\theta)$, obtém-se o resultado pretendido. ■

No caso de $s = 0$, as modificações são evidentes.

Juntando este teorema com o teorema 3.13 e as estimativas para as derivadas de v , pode-se estimar o erro entre u e V da forma

$$\|V - u\|_{L^{\frac{\gamma^+}{2}+1}_{\frac{\gamma^+}{2}+1}(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{-\alpha\gamma^+} h^{r+1} + C\varepsilon^{-\beta\gamma^+} \delta^{s+1} + C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Escolhendo de forma adequada r , s , h e δ , pode concluir-se que o erro se anula quando ε tende para zero. Por exemplo, para $r = 1$ e $s = 0$, tem-se a estimativa

$$\|u - V\|_{L^{\frac{\gamma^+}{2}+1}_{\frac{\gamma^+}{2}+1}(\Omega_T)} \leq C(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + h^2\varepsilon^{-9\gamma^+} + \delta\varepsilon^{-3\gamma^+}).$$

Escolhendo $h = \varepsilon^{\frac{1}{4} + \frac{9}{2}\gamma^+}$ e $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{2} + 3\gamma^+}$, obtém-se

$$\|u - V\|_{L^{\frac{\gamma^+}{2}+1}_{\frac{\gamma^+}{2}+1}(\Omega_T)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

3.1.4 Aproximação numérica

Devido às limitações de regularidade da solução, considera-se apenas polinómios de grau zero no tempo. Neste caso, $V_t = 0$, $V_{n-1}^+ = V_n$ e $\mathcal{W}_{n-1}^+ = \mathcal{W}_n$. Obtém-se então a equação

$$\int_\Omega V_n \mathcal{W}_n \, dx + \delta \int_\Omega a_\varepsilon(\mathbf{x}, V_n) \nabla V_n \cdot \nabla \mathcal{W}_n \, dxdt = \int_\Omega \int_{I_n} f \, dt \mathcal{W}_n \, dx + \int_\Omega V_{n-1} \mathcal{W}_n \, dx, \quad (3.22)$$

$\forall \mathcal{W}_n \in S_{hr}^{\delta 0}$, $n \in \{0, \dots, ni\}$. Denote-se $g_n(\mathbf{x}) = \int_{I_n} f \, dt$.

A equação (3.22) traduz-se num sistema não linear de equações algébricas que tem de ser resolvido em cada intervalo de tempo. Existem vários métodos possíveis de aplicar neste problema, por exemplo, os métodos de Newton e de Newton linearizados mas, neste trabalho, escolheu-se o método do ponto fixo, devido à sua eficiência e facilidade de implementação e análise. Descreve-se seguidamente a forma de calcular V_n dado V_{n-1} .

Algoritmo 3.20 Dados $V_{n-1} \in S_{hr}^{\delta 0}$ e $tol > 0$, define-se $k = 0$ e $\mathcal{W}_0 = V_{n-1}$.

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

1) Para $k \geq 1$, $\mathcal{W}_k \in S_{hr}^{\delta 0}$ é calculado de modo que para todo $\mathcal{W} \in S_{hr}^{\delta 0}$

$$\int_{\Omega} \mathcal{W}_k \mathcal{W} \, dx + \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_k \cdot \nabla \mathcal{W} \, dx = \int_{\Omega} g_n \mathcal{W} \, dx + \int_{\Omega} \mathcal{W}_0 \mathcal{W} \, dx, \quad \forall \mathcal{W} \in S_{hr}. \quad (3.23)$$

2) Se

$$\|\mathcal{W}_k - \mathcal{W}_{k-1}\|_{L_2(\Omega)} \geq tol,$$

avança-se para o k seguinte voltando para 1).

3) Se

$$\|\mathcal{W}_k - \mathcal{W}_{k-1}\|_{L_2(\Omega)} < tol,$$

define-se $V_n = \mathcal{W}_k$ e termina.

Prova-se, antes de mais, que todas as estimativas obtidas pelo algoritmo são limitadas.

Lema 3.21 *Supondo que $\|V_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} \leq C$, onde C não depende de n e que $g_n \in L_2(\Omega)$, então existe $0 < C' < \infty$ tal que*

$$\|\mathcal{W}_k\|_{L_2(\Omega)} \leq C', \quad \forall k > 0,$$

onde C' não depende de k ou n .

Demonstração

Seja $\mathcal{W} = \mathcal{W}_k$ em (3.23), então

$$\int_{\Omega} \mathcal{W}_k^2 \, dx + \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) (\nabla \mathcal{W}_k)^2 \, dx = \int_{\Omega} g_n \mathcal{W}_k \, dx + \int_{\Omega} \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_k \, dx,$$

ou seja,

$$\|\mathcal{W}_k\|_{L_2(\Omega)}^2 + \delta \int_{\Omega} (\mathcal{W}_{k-1}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \nabla \mathcal{W}_k \cdot \nabla \mathcal{W}_k \, dx = \int_{\Omega} g_n \mathcal{W}_k \, dx + \int_{\Omega} \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_k \, dx.$$

Como $\delta \int_{\Omega} (\mathcal{W}_{k-1}^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}} \nabla \mathcal{W}_k \cdot \nabla \mathcal{W}_k \, dx$ é não negativo,

$$\|\mathcal{W}_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} g_n \mathcal{W}_k \, dx + \int_{\Omega} \mathcal{W}_0 \mathcal{W}_k \, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtém-se

$$\|\mathcal{W}_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|g_n\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{W}_k\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{W}_0\|_{L_2(\Omega)} \|\mathcal{W}_k\|_{L_2(\Omega)}.$$

Simplificando

$$\|\mathcal{W}_k\|_{L_2(\Omega)} \leq \|g_n\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{W}_0\|_{L_2(\Omega)}.$$

O que prova o pretendido. ■

De seguida, há que provar que o algoritmo converge.

Teorema 3.22 *Seja $tol > 0$. Existe $C > 0$ tal que: $\delta < \frac{1}{C(h^{-2}\varepsilon^{-\gamma^+} + \varepsilon^{\gamma^+})}$ implica a existência de $k^* \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$\|\mathcal{W}_k - \mathcal{W}_{k-1}\|_{L_2(\Omega)} \leq tol, \quad \forall k > k^*.$$

Demonstração

Para provar a convergência, demonstra-se que

$$\|\mathcal{W}_k - \mathcal{W}_{k-1}\|_{L_2(\Omega)} < C_1 \|\mathcal{W}_{k-1} - \mathcal{W}_{k-2}\|_{L_2(\Omega)}, \quad C_1 < 1, \quad \forall k \geq 2.$$

Aplicando (3.23) para k e $k-1$, obtém-se

$$\int_{\Omega} \mathcal{W}_k \mathcal{W} \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_k \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_n \mathcal{W} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{W}_0 \mathcal{W} \, d\mathbf{x} \quad (3.24)$$

e

$$\int_{\Omega} \mathcal{W}_{k-1} \mathcal{W} \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-1} \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g_n \mathcal{W} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{W}_0 \mathcal{W} \, d\mathbf{x}. \quad (3.25)$$

Subtraindo (3.25) a (3.24) fica

$$\int_{\Omega} (\mathcal{W}_k - \mathcal{W}_{k-1}) \mathcal{W} \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} (a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_k - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-1}) \cdot \nabla \mathcal{W} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Considere-se

$$E_k = \mathcal{W}_k - \mathcal{W}_{k-1} \in S_h \text{ e } \mathcal{W} = E_k,$$

então

$$\int_{\Omega} E_k^2 \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} (a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_k - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-1}) \cdot \nabla E_k \, d\mathbf{x} = 0.$$

Escreve-se

$$\begin{aligned} & a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_k - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-1} = \\ & = a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_{k-1} - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_{k-1} + a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_k - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-2} + \\ & \quad + a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-2} - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-1} = \\ & = a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla E_k + a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_{k-1} - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla E_{k-1} - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} E_k^2 \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) |\nabla E_k|^2 \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} (a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_{k-1} - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-2}) \cdot \nabla E_k \, d\mathbf{x} = \\ & = \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla E_{k-1} \cdot \nabla E_k \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Volta a escrever-se

$$a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) \nabla \mathcal{W}_{k-1} - a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla \mathcal{W}_{k-2} = A \nabla E_{k-1} + B E_{k-1},$$

com

$$A = \int_0^1 a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \varsigma \mathcal{W}_{k-1} + (1-\varsigma) \mathcal{W}_{k-2}) \, d\varsigma$$

e

$$B = \int_0^1 \gamma((\varsigma \mathcal{W}_{k-1} + (1-\varsigma) \mathcal{W}_{k-2})^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} (\varsigma \mathcal{W}_{k-1} + (1-\varsigma) \mathcal{W}_{k-2}) (\varsigma \nabla \mathcal{W}_{k-1} + (1-\varsigma) \nabla \mathcal{W}_{k-2}) \, d\varsigma.$$

Tem-se que $\varepsilon^{\gamma^+} \leq A \leq C$ e $|B| \leq C \varepsilon^{\gamma^+}$. Então,

$$\int_{\Omega} E_k^2 \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) |\nabla E_k|^2 \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} A \nabla E_{k-1} \cdot \nabla E_k \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} B E_{k-1} \cdot \nabla E_k \, d\mathbf{x} =$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

$$= \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) \nabla E_{k-1} \cdot \nabla E_k \, d\mathbf{x},$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} E_k^2 \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-1}) |\nabla E_k|^2 \, d\mathbf{x} = \delta \int_{\Omega} (a_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathcal{W}_{k-2}) - A) \nabla E_{k-1} \cdot \nabla E_k \, d\mathbf{x} - \delta \int_{\Omega} B E_{k-1} \cdot \nabla E_k \, d\mathbf{x}.$$

Pode então concluir-se que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} E_k^2 \, d\mathbf{x} + \delta \int_{\Omega} \varepsilon^{\gamma^+} |\nabla E_k|^2 \, d\mathbf{x} \leq \\ & \leq \delta \left(C \frac{\varepsilon^{-\gamma^+}}{2} \|\nabla E_{k-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon^{\gamma^+}}{2} \|\nabla E_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + \delta \left(C \frac{\varepsilon^{\gamma^+}}{2} \|\nabla E_{k-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon^{\gamma^+}}{2} \|\nabla E_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\int_{\Omega} E_k^2 \, d\mathbf{x} \leq \frac{C\delta\varepsilon^{-\gamma^+}}{2} \|\nabla E_{k-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{C\delta\varepsilon^{\gamma^+}}{2} \|E_{k-1}\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Atendendo à desigualdade inversa $\|\nabla E_{k-1}\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch \|E_{k-1}\|_{L_2(\Omega)}$, obtém-se

$$\|E_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C\delta(h^{-2}\varepsilon^{-\gamma^+} + \varepsilon^{\gamma^+}) \|E_{k-1}\|_{L_2(\Omega)}^2$$

e aplicando a raiz quadrada, fica

$$\|E_k\|_{L_2(\Omega)} \leq (C\delta(h^{-2}\varepsilon^{-\gamma^+} + \varepsilon^{\gamma^+}))^{\frac{1}{2}} \|E_{k-1}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Se

$$\delta < \frac{1}{C(h^{-2}\varepsilon^{-\gamma^+} + \varepsilon^{\gamma^+})},$$

então obtém-se o pretendido, considerando $C_1 = (C\delta(h^{-2}\varepsilon^{-\gamma^+} + \varepsilon^{\gamma^+}))^{\frac{1}{2}} < 1$. ■

3.1.5 Resultados numéricos

3.1.5.1 Segundo membro artificial

Para testar o método, considera-se primeiro um problema com o segundo membro calculado de modo que o problema tenha solução exata.

Seja $\Omega_T =]-1, 1[\times]0, T[$ e considere-se o problema (3.1), onde

$$\gamma = 2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

e as funções f e u_0 são calculadas de modo que

$$u(x, y, t) = [(t + 0.1)^2 - x^2 - y^2]_+$$

seja solução do problema. Utilizou-se uma malha estruturada como mostra a figura 3.1.

A tolerância usada foi $tol = 10^{-10}$. Para aproximar a solução, foram utilizados polinómios de Lagrange de grau 1.

A figura 3.2, mostra a evolução da solução obtida com $\varepsilon = 10^{-8}$, $\delta = 10^{-3}$ e $h = 0.1$, em alguns valores de t . Observa-se que o comportamento é idêntico ao da solução exata.

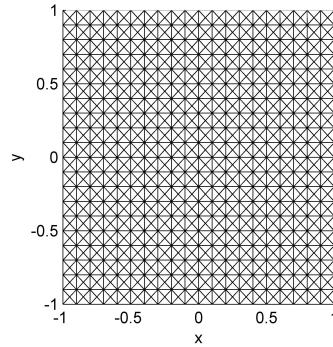


Figura 3.1: Malha espacial para $h = 0.1$ usada no problema com o segundo membro artificial.

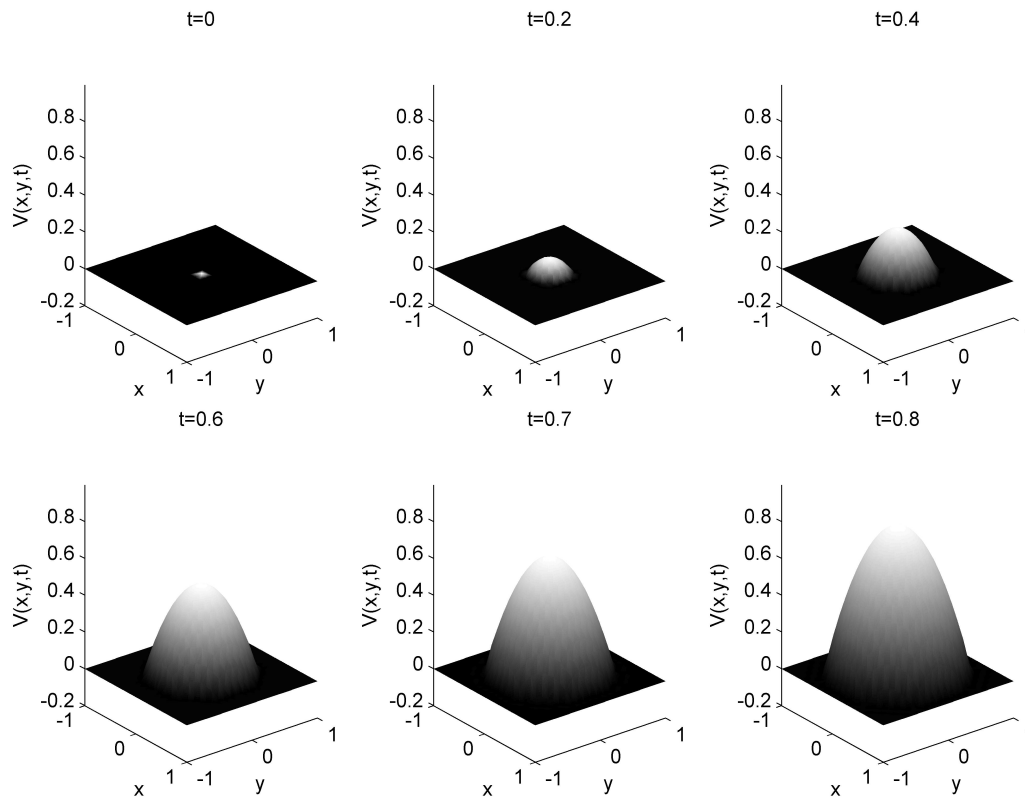


Figura 3.2: Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com o segundo membro artificial.

Com vista a analisar a convergência, fizeram-se várias simulações para diversas combinações de ε , h e δ . Na primeira imagem da figura 3.3, apresenta-se o logaritmo do erro da aproximação, na norma de $L_2(\Omega)$, em função do logaritmo de h para alguns valores de δ . Conclui-se que o erro diminui ao reduzir-se h e δ e que a ordem de convergência de h é aproximadamente 2.

A segunda imagem da figura 3.3 tem representado o logaritmo do erro da aproximação, na norma de $L_2(\Omega)$, em função do logaritmo de δ para alguns valores de h . Pode observar-se que o erro diminui ao reduzir-se h e δ e que a ordem de convergência de δ é aproximadamente 1.

A figura 3.4 tem representado o logaritmo do erro da aproximação, na norma de $L_2(\Omega)$, em função do logaritmo de ε para alguns valores de h e com $\delta = 10^{-3}$. O gráfico evidencia que o erro diminui ao reduzir-se ε e que a ordem de convergência é aproximadamente 1, melhor do que é demonstrado no teorema 3.13.

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

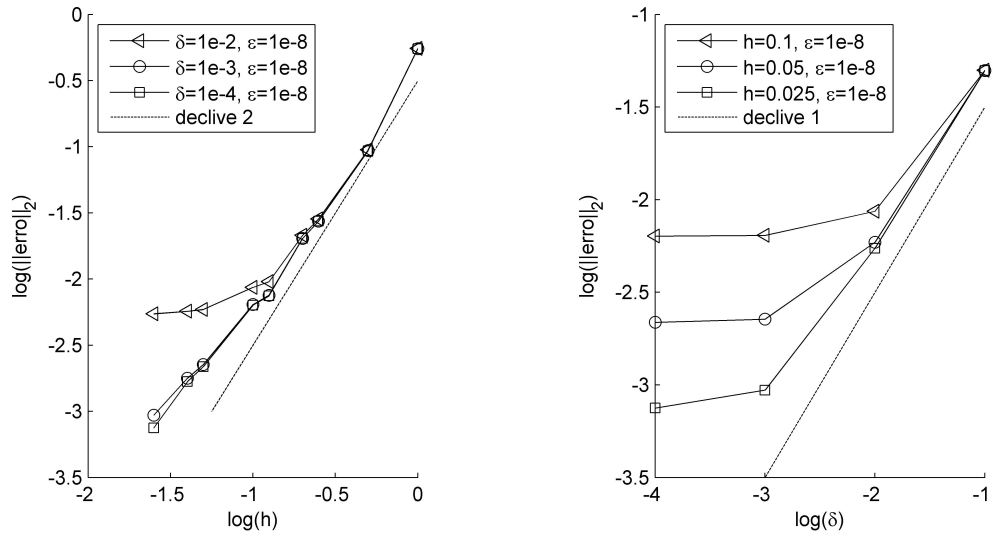


Figura 3.3: Erro da aproximação obtida no problema com o segundo membro artificial em função de h e de δ .

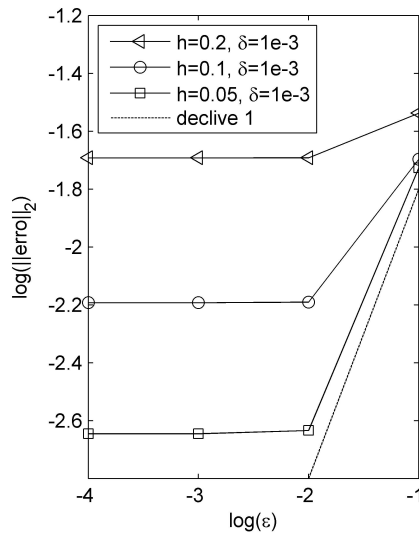


Figura 3.4: Erro da aproximação obtida no problema com o segundo membro artificial em função de ϵ .

3.1.5.2 Suporte não convexo

Considere-se agora um problema onde a solução inicial tem um buraco no suporte. Seja $\Omega_T =]-1.5, 1.5[^2 \times]0, T]$ e um problema do tipo (3.1) com

$$\gamma = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1.1.$$

A função f é considerada nula e u_0 é definida por

$$u_0 = \begin{cases} -\text{sen}(2\pi\sqrt{x^2+y^2}), & 0.5 < \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 0, & \text{restante domínio} \end{cases}.$$

Utilizou-se o mesmo tipo de malha estruturada que no exemplo anterior.

Na figura 3.5, mostra-se a evolução da solução obtida no tempo. O buraco do suporte

desaparece ao fim de um instante de tempo finito $t^* > 0$. Após esse instante, o suporte torna-se compacto e a solução comporta-se de um modo semelhante às soluções de Barenblat.

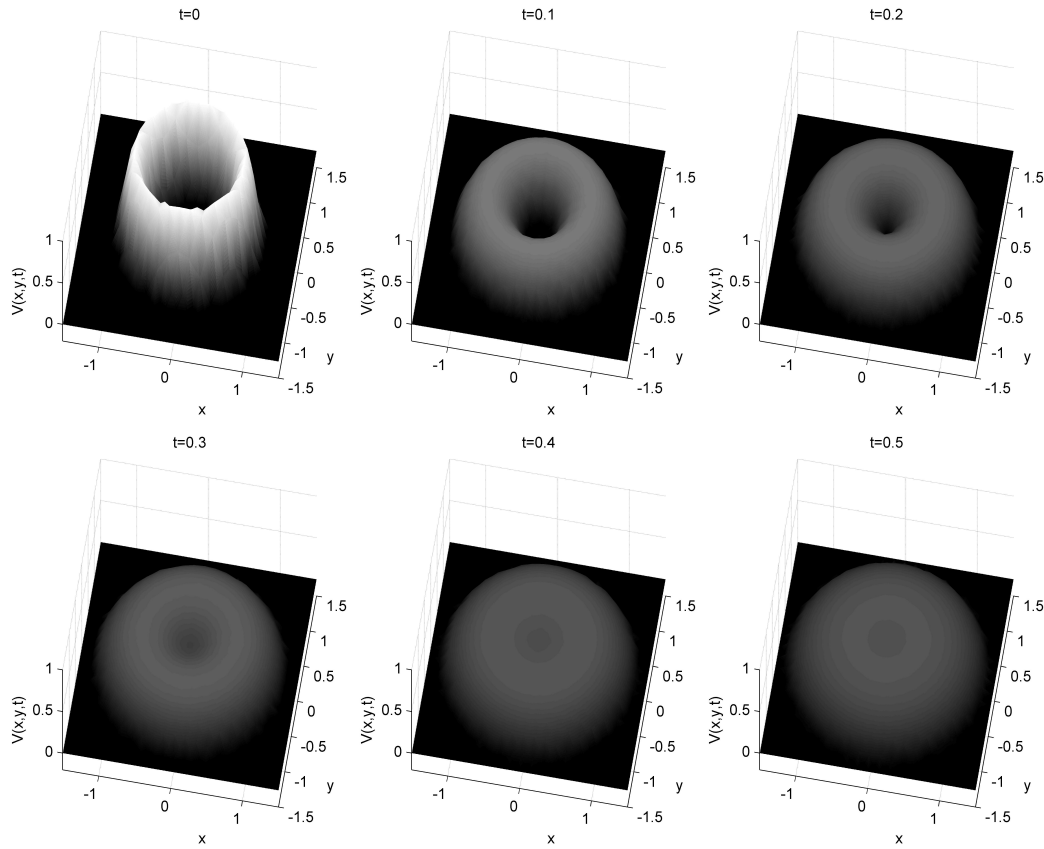


Figura 3.5: Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com suporte não convexo.

3.1.5.3 Problema com absorção

Para terminar, simula-se um problema com um termo de absorção com expoente variável da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(u^\gamma(\mathbf{x},t)\nabla u) - u^{\sigma(\mathbf{x},t)} & \text{em } \Omega_T \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{cases} .$$

Não foi provada a convergência para este tipo de problemas, mas as modificações não são muito significativas. Considere-se então os expoentes como sendo

$$\gamma = \frac{x^2 + y^2}{t^2 + 1} \text{ e } \sigma = x^2 + y^2 + 1 + e^{-t}.$$

Os valores iniciais considerados são

$$u_0 = \begin{cases} \cos(2\pi\sqrt{x^2 + y^2}), & \sqrt{x^2 + y^2} < 0.5 \\ 0 & \text{restante domínio} \end{cases} .$$

O domínio escolhido foi $\Omega =]-1, 1[^2$ e usou-se uma malha estruturada composta por 3600 triângulos, como mostra a figura 3.6. A solução foi aproximada por polinómios de grau 1 no espaço e grau zero no tempo. Terminou-se a simulação em $T = 0.1$. Na figura 3.7, está

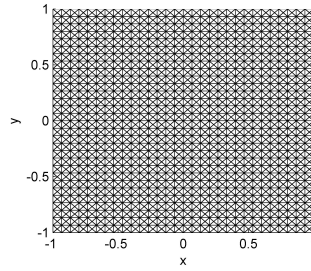


Figura 3.6: Malha espacial para $h = 1/15$ usada no problema com absorção.

representada a evolução no tempo da solução obtida.

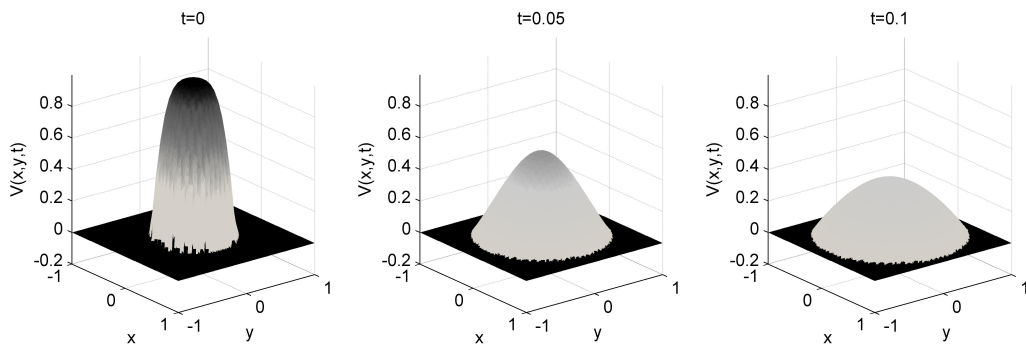


Figura 3.7: Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com absorção.

3.2 Problema em domínio livre

O objetivo desta secção é implementar, em Matlab, um método que permita encontrar soluções aproximadas para o problema (3.1), em domínios espaciais livres de duas dimensões. A técnica utiliza o método dos elementos finitos com uma malha móvel e aproximações de grau maior que um. O uso de funções base seccionalmente polinomiais de grau $r \geq 1$ vai permitir a redução do número de elementos finitos mantendo a precisão. É aplicado um sistema de EDP parabólicas que envolve a velocidade dos nós para mover a malha para certas regiões do domínio. As equações da malha e do problema físico são resolvidas simultaneamente.

3.2.1 Formulação do problema

A abordagem do problema num domínio livre exige uma nova formulação que contemple o movimento da fronteira. Nesta secção formula-se, de um modo exato, o problema num domínio livre de \mathbb{R}^2 e define-se o que se entende por solução fraca neste contexto.

Seja $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ e $]0, T]$ um intervalo de tempo finito. Considere-se o seguinte problema: encontrar a função u e o domínio $\Omega(t)$ que satisfaçam as condições

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(|u|^{\gamma(\mathbf{x},t)} \nabla u) = f(\mathbf{x}, t, u) & \text{em } \Omega(t) \times]0, T] \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega(t) \times [0, T] \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega(0) \end{cases}, \quad (3.26)$$

onde γ é uma função limitada definida em $\Omega(t) \times]0, T]$, tal que:

$$0 < \gamma^- \leq \gamma(\mathbf{x}, t) \leq \gamma^+ < \infty, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \bar{\Omega} \times]0, T]. \quad (3.27)$$

Para o problema ficar bem definido, tem de se obter uma equação para a velocidade da fronteira, $\nu = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t})$.

Pela lei da conservação da massa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\nu \cdot u) = 0, \quad (3.28)$$

e pela equação (3.26), pode concluir-se que

$$\nu = -\text{sign}(u)|u|^{\gamma-1}\nabla u. \quad (3.29)$$

A equação (3.29) indica a velocidade em cada $\mathbf{x} \in \Omega(t)$. Uma vez que a solução tem a propriedade de propagação com velocidade finita, é plausível assumir que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \Gamma} \nu$ existe e é finito. Mesmo assim, a equação (3.29) não se adequa muito ao cálculo numérico da velocidade da fronteira, pois na fronteira $u = 0$, logo, para que ela se mova, ∇u deve ser infinito, o que não é viável em termos numéricos. Tem então de se procurar uma nova equação para a velocidade normal da fronteira que se possa utilizar com o método dos elementos finitos. Como

$$\nabla |u|^\gamma = \text{sign}(u)\gamma|u|^{\gamma-1}\nabla u + |u|^\gamma \nabla \gamma \ln(|u|),$$

então

$$\nu = -\frac{\nabla |u|^\gamma}{\gamma} + \frac{\nabla \gamma}{\gamma} |u|^\gamma \ln(|u|).$$

Na fronteira, $u = 0$. Se $\gamma > 1$ e $\nabla \gamma$ é limitado em Ω , então $u \rightarrow 0$ implica que

$$\frac{\nabla \gamma}{\gamma} |u|^\gamma \ln(|u|) \rightarrow 0.$$

Logo, a velocidade na fronteira pode ser dada por $\nu = -\frac{1}{\gamma} \nabla |u|^\gamma$ e a velocidade normal por

$$\nu_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial |u|^\gamma}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.30)$$

Pelos mesmos argumentos, suponha-se que o limite existe e é finito.

Suponha-se que a fronteira de $\Omega(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : u(\mathbf{x}, t) > 0\}$ é definida pela condição $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$. O problema consiste em calcular a função $u(\mathbf{x}, t) > 0$ e a posição da fronteira $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ que satisfaçam as condições:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(u^\gamma \nabla u) & \text{em } \Omega(t) \times]0, T] \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega(t) \times [0, T] \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) > 0 & \text{em } \Omega(0) \\ \nu_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \mathbf{n}} & \text{em } \partial\Omega(t) \times [0, T] \end{cases}. \quad (3.31)$$

Define-se agora o que se entende por solução fraca para este problema. Seja ζ uma função teste. Se se multiplicar a equação (3.31) por ζ e se for integrada em $\Omega(t)$, obtém-se

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \zeta \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \text{div}(u^\gamma \nabla u) \zeta \, d\mathbf{x}.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Pelo teorema de Green e assumindo regularidade suficiente em ζ , chega-se a

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \zeta \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega(t)} u^\gamma \nabla u \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(t)} u^\gamma \frac{\partial u}{\partial n} \zeta \, d\mathbf{x}.$$

Escolhendo ζ de modo adequado, o último termo é nulo, pois na fronteira $u = 0$ e ν é limitada logo

$$\int_{\partial\Omega(t)} \zeta u^\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega(t)} \zeta u \nu \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Então, obtém-se

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \zeta \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega(t)} u^\gamma \nabla u \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x}. \quad (3.32)$$

Considere-se o seguinte subespaço:

$$H^u = \{\zeta(\mathbf{x}, t) : \zeta \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2), \forall t > 0\}.$$

Definição 3.23 Uma função $u(\mathbf{x}, t)$ é dita solução fraca do problema (3.31) se:

- (i) $u \in L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega(t)))$, $u^{\frac{\gamma}{2}} \nabla u \in L_2(0, T; L_2(\Omega(t)))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; W^{-1,2}(\Omega(t)))$,
- (ii) $u = 0$ em $\partial\Omega(t)$,
- (iii) para qualquer função de teste $\zeta \in H^u$ e para todo $0 < t \leq T$, a equação (3.32) é válida,
- (iv) $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$ em $\Omega(0)$,
- (v) $\nu_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \mathbf{n}}$ em $\partial\Omega(t)$.

A condição (v) não é comum na definição de solução fraca, pois surge implicitamente na equação (3.32), mas não existe nenhuma demonstração exata de que (3.29) é válido na fronteira. Por essa razão, decidiu-se impor (v) como uma condição na definição.

3.2.2 Construção da malha adaptável

Nesta secção, vai criar-se uma malha que evolua com o domínio e que se adapte ao problema concentrando-se em pontos onde a solução necessita de mais precisão. Para este fim, escolheu-se o MMPDE [43], onde a adaptação da malha é vista como uma transformação de coordenadas entre dois conjuntos.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o domínio onde o problema físico está definido e seja $\Omega_c \subset \mathbb{R}^2$ um domínio artificial que é utilizado para calcular a malha, em Ω , adaptada ao problema. De modo a distinguir os dois domínios, denotam-se por Ω_f o domínio do problema físico e Ω_c o domínio computacional. Considere-se $\mathbf{x} = (x, y)$ e $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ as coordenadas locais de Ω_f e Ω_c respetivamente.

Como se pretende que a malha se adapte com o tempo, para se definir a malha em Ω_f basta definirem-se as aplicações $x(\xi, \eta, t)$ e $y(\xi, \eta, t)$ de Ω_c para Ω_f . Desta forma, a malha em Ω_f , em cada instante, é a imagem por estas aplicações de uma malha fixa em Ω_c .

A transformação de coordenadas, \mathbf{x} , é determinada como sendo o minimizante de um funcional $\mathcal{F}(\mathbf{x})$. Diferentes métodos, em geral, utilizam funcionais diferentes. Neste trabalho, considera-se o funcional da forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \nabla x^T \mathbf{m} \nabla x + \nabla y^T \mathbf{m} \nabla y \, d\boldsymbol{\xi},$$

onde m é uma matriz quadrada ou um escalar que será chamada função monitor que, geralmente, depende de u e que será definida mais à frente.

As direções de descida máxima de \mathcal{F} são dadas pelos simétricos das derivadas parciais, então pode definir-se

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}.$$

Na prática, por vezes, é preferível utilizar direções descendentes diferentes da mais rápida, mas que permitam ajustar a descida. Então, utilizar-se-á uma modificação das equações anteriores

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial E}{\partial y},$$

com $\tau > 0$ (um parâmetro a definir pelo utilizador), que permite ajustar a velocidade com que a malha se ajusta. Desta forma, as aplicações $x(\xi, \eta, t)$ e $y(\xi, \eta, t)$ de Ω_c para Ω_f são calculadas resolvendo as equações

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \text{div}(m \nabla x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \text{div}(m \nabla y).$$

Para m adequado é possível adicionar condições iniciais e na fronteira de modo a que exista solução única.

Assim, obtém-se $\mathbf{x} = (x(\xi, \eta, t), y(\xi, \eta, t))$ resolvendo o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \text{div}(m \nabla x) & \text{em } \Omega_c \times]0, T] \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \text{div}(m \nabla y) & \text{em } \Omega_c \times]0, T] \\ \mathbf{x}(\xi, 0) = \mathbf{x}_0(\xi) & \text{em } \Omega_c \\ \mathbf{x}(\xi, t) = f^{\mathbf{x}}(\xi, t) & \text{em } \partial\Omega_c \end{array} \right. , \quad (3.33)$$

onde $f^{\mathbf{x}}(\xi, t)$ está relacionada com o movimento da fronteira. Se a fronteira é fixa, então $f^{\mathbf{x}}(\xi, t) = \mathbf{x}_0(\xi)$. Se a fronteira é móvel, então $f^{\mathbf{x}}(\xi, t)$ é definida pela linha poligonal obtida pela solução do sistema formado pelas equações (3.40) e (3.41). τ é um parâmetro positivo e m é a função monitor. Para o problema (3.33) ser do tipo parabólico, m deve ser uma função escalar positiva ou matriz de funções definida positiva. Foram realizadas diferentes simulações com diferentes funções monitor e escolheu-se

$$m = \sqrt{1 + 100 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 100 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2},$$

pois é conhecida por concentrar pontos onde o gradiente de u é elevado e por saber-se que o gradiente da solução é máximo próximo da fronteira, onde se quer mais definição. Para que a transformação \mathbf{x} seja aplicável à geração da malha, têm de garantir-se algumas propriedades. A existência, unicidade e invertibilidade são as indispensáveis, além disso, deve garantir-se adaptabilidade e suavidade.

Adicionando condições de Dirichlet adequadas, \mathbf{x} define uma aplicação harmónica de $\Omega_c \rightarrow \Omega_f$. Existência, unicidade e invertibilidade da aplicação harmónica são garantidas desde que a fronteira de Ω_f seja convexa [44]. A adaptabilidade depende da escolha de m e a suavidade depende de τ .

Seja ζ uma função de teste. Multiplicando por ζ e integrando em Ω_c a primeira equação de

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

(3.33), obtém-se

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial x}{\partial t} \zeta \, d\xi = \int_{\Omega_c} \frac{1}{\tau} \operatorname{div}(m \nabla x) \zeta \, d\xi.$$

Aplicando o teorema de Green e supondo que ζ se anula na fronteira e tem regularidade suficiente, obtém-se

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial x}{\partial t} \zeta \, d\xi = -\frac{1}{\tau} \int_{\Omega_c} m \nabla x \cdot \nabla \zeta \, d\xi.$$

Para y a construção é semelhante, chegando à definição seguinte.

Definição 3.24 Uma função $\mathbf{x} = (x(\xi, \eta, t), y(\xi, \eta, t))$ é dita solução fraca do problema (3.33) se

(i) $x, y \in L_\infty(0, T; W^{1,2}(\Omega_c))$, $\sqrt{m} \nabla x, \sqrt{m} \nabla y \in L_2(0, T; L_2(\Omega_c))$, $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \in L_2(0, T; W^{-1,2}(\Omega_v))$,

(ii) $\mathbf{x} = f^{\mathbf{x}}$ em $\partial\Omega_c$,

(iii) para $0 < t \leq T$ as seguintes equações são satisfeitas

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial x}{\partial t} \zeta \, d\xi = -\frac{1}{\tau} \int_{\Omega_c} m \nabla x \cdot \nabla \zeta \, d\xi, \quad \forall \zeta \in H_0^{\mathbf{x}}, \quad (3.34)$$

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial y}{\partial t} \zeta \, d\xi = -\frac{1}{\tau} \int_{\Omega_c} m \nabla y \cdot \nabla \zeta \, d\xi, \quad \forall \zeta \in H_0^{\mathbf{x}}, \quad (3.35)$$

(iv) $\mathbf{x}(\xi, 0) = x_0(\xi)$, em Ω_c ,

$$H_0^{\mathbf{x}} = \{\zeta(\xi, \eta, t) : \zeta \in W^{1,2}(\Omega_c), \forall t > 0, \zeta|_{\Gamma^c} = 0\},$$

3.2.3 Discretização espacial

Seja $h > 0$, \mathcal{T}_h uma partição em triângulos de Ω_c , denota-se na mesma por \mathcal{T}_h a correspondente partição de Ω_f . Para permitir maior definição na solução, é necessário definir dois espaços de elementos finitos, um para a solução constituído por polinómios de grau r e outro para o movimento da malha formado por polinómios de grau 1,

$$S_{hr}^u = \{u_h \in C_0^0(\bar{\Omega}) | u_h|_{T_k} \text{ é um polinómio de grau } r \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}$$

e

$$S_h^x = \{x_h \in C_0^0(\bar{\Omega}) | x_h|_{T_k} \text{ é um polinómio de grau } 1 \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}.$$

Como os vértices dos triângulos podem mover-se, considera-se a aproximação discreta U e as funções teste pertencendo a S_{hr}^u da forma

$$u \approx U = \sum_{j=1}^{np} U_j(t) \varphi_j, \quad \zeta = \sum_{i=1}^{np} \zeta_i(t) \varphi_j,$$

$$\text{com } \varphi_j = \varphi_j(x, y, X_1(t), \dots, X_{nv}(t), Y_1(t), \dots, Y_{nv}(t)),$$

onde $(X_k, Y_k) = P_k$ são as coordenadas do vértice k . Alguns valores de U_j são utilizados para satisfazer as condições da fronteira e os restantes valores são as incógnitas a determinar. Os valores de χ_i são conhecidos (arbitrários).

Calculando a derivada em relação a t e aplicando a regra da cadeia obtemos, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{np} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} \varphi_j + U_j \sum_{k=1}^{nv} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial t} + U_j \sum_{k=1}^{nv} \frac{\partial \varphi_j}{\partial Y_k} \frac{\partial Y_k}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{np} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} \varphi_j - U_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \sum_{k=1}^{nv} \psi_k \frac{\partial X_k}{\partial t} - U_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \sum_{k=1}^{nv} \psi_k \frac{\partial Y_k}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

onde ψ_k é o polinómio interpolador de Lagrange de grau 1 associado ao ponto k . A última igualdade foi provada em [45].

Substituindo na equação (3.32), pode deduzir-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \sum_{j=1}^{np} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} \varphi_j - U_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \sum_{k=1}^{nv} \psi_k \frac{\partial X_k}{\partial t} - U_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \sum_{k=1}^{nv} \psi_k \frac{\partial Y_k}{\partial t} \right) \sum_{i=1}^{np} \zeta_i \varphi_i \, d\mathbf{x} = \\ = - \int_{\Omega(t)} \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} U_j \zeta_i \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Uma vez que ζ_i são conhecidos (arbitrários), tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial U_j}{\partial t} \varphi_j - U_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \sum_{k=1}^{nv} \psi_k \frac{\partial X_k}{\partial t} - U_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \sum_{k=1}^{nv} \psi_k \frac{\partial Y_k}{\partial t} \right) \varphi_i \, d\mathbf{x} = \\ = - \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega(t)} U_j \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, np. \end{aligned}$$

Escrevendo de outra forma,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega(t)} \varphi_j \varphi_i \, d\mathbf{x} \frac{\partial U_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^{nv} \int_{\Omega(t)} \frac{\partial U}{\partial x} \varphi_i \psi_k \, d\mathbf{x} \frac{\partial X_k}{\partial t} - \sum_{k=1}^{nv} \int_{\Omega(t)} \frac{\partial U}{\partial y} \varphi_i \psi_k \, d\mathbf{x} \frac{\partial Y_k}{\partial t} = \\ = - \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega(t)} U_j \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x} U_j, \quad i = 1, \dots, np. \end{aligned} \quad (3.36)$$

De um modo semelhante, consideram-se as aproximações discretas X, Y e as funções teste pertencentes ao espaço S_h^x da forma

$$x \approx X = \sum_{j=1}^{nv} X_j(t) \psi_j(\xi, \eta), \quad y \approx Y = \sum_{j=1}^{nv} Y_j(t) \psi_j(\xi, \eta), \quad \zeta = \sum_{i=1}^{np} \zeta_i(t) \psi_i(\xi, \eta).$$

Substituindo nas equações (3.34), (3.35) e procedendo de modo análogo, obtém-se

$$\sum_{j=1}^{nv} \frac{\partial X_j}{\partial t} \int_{\Omega_c} \psi_j \psi_i \, d\xi = -\frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{nv} X_j \int_{\Omega_c} \mathbf{m} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, d\xi, \quad i = 1, \dots, nv \quad (3.37)$$

e

$$\sum_{j=1}^{nv} \frac{\partial Y_j}{\partial t} \int_{\Omega_c} \psi_j \psi_i \, d\xi = -\frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{nv} Y_j \int_{\Omega_c} \mathbf{m} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, d\xi, \quad i = 1, \dots, nv. \quad (3.38)$$

Juntando as equações (3.36), (3.37) e (3.38), tem-se o sistema ODE final com as incógnitas $\frac{\partial U_j}{\partial t}$, $\frac{\partial X_k}{\partial t}$ e $\frac{\partial Y_k}{\partial t}$. Este sistema pode ser escrito da forma matricial com

$$\begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ 0 & M^{22} & 0 \\ 0 & 0 & M^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

onde

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

$$\begin{aligned}
 M_{ij}^{11} &= \int_{\Omega_f} \varphi_i \varphi_j \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{nt} \int_{T_k^*} \varphi_i \varphi_j \, d\mathbf{x}, \\
 M_{ij}^{12} &= - \int_{\Omega_f} \varphi_i \psi_j \sum_{l=1}^{np} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} U_l \, d\mathbf{x} = - \sum_{k=1}^{nt} \int_{T_k^*} \varphi_i \psi_j \sum_{l=1}^{np} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} U_l \, d\mathbf{x}, \\
 M_{ij}^{13} &= - \int_{\Omega_f} \varphi_i \psi_j \sum_{l=1}^{np} \frac{\partial \varphi_l}{\partial y} U_l \, d\mathbf{x} = - \sum_{k=1}^{nt} \int_{T_k^*} \varphi_i \psi_j \sum_{l=1}^{np} \frac{\partial \varphi_l}{\partial y} U_l \, d\mathbf{x}, \\
 M_{ij}^{22} &= \int_{\Omega_c} \psi_i \psi_j \, d\xi = \sum_{k=1}^{nt} \int_{T_k} \psi_i \psi_j \, d\xi, \\
 M_{ij}^{33} &= \int_{\Omega_c} \psi_i \psi_j \, d\xi = \sum_{k=1}^{nt} \int_{T_k} \psi_i \psi_j \, d\xi, \\
 F_i^1 &= - \sum_{j=1}^{np} U_j \int_{\Omega_f} \left(\sum_{l=1}^{np} U_l \varphi_l \right)^\gamma \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_f} f \varphi_i \, d\mathbf{x} =, \\
 &= \sum_{k=1}^{nt} \left(- \sum_{j=1}^{np} \int_{T_k^*} \left(\sum_{l=1}^{np} U_l \varphi_l \right)^\gamma \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x} U_j + \int_{T_k^*} f \varphi_i \, d\mathbf{x} \right), \\
 F_i^2 &= - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{nv} \int_{\Omega_c} \mathbf{m} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, d\xi X_j = - \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{nt} \left(\sum_{j=1}^{nv} \int_{T_k} \mathbf{m} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, d\xi X_j \right), \\
 F_i^3 &= - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{nv} \int_{\Omega_c} \mathbf{m} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, d\xi Y_j = - \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{nt} \left(\sum_{j=1}^{nv} \int_{T_k} \mathbf{m} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, d\xi Y_j \right).
 \end{aligned}$$

De forma a satisfazer as condições específicas do problema, alguns destes elementos devem ser alterados. O sistema (3.39) vai ser resolvido utilizando o integrador ode15s [66], no intervalo $]0, T]$.

3.2.4 Movimento da fronteira

Para aplicar o método dos elementos finitos é necessário discretizar a equação (3.30). A fronteira é aproximada por uma linha poligonal. É necessário então calcular-se as derivadas parciais de u^γ e o vetor normal à curva $\phi(x, y, t) = 0$ em cada ponto da malha que pertença à fronteira móvel. Para obter as aproximações $\nu_h^x \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x}$ e $\nu_h^y \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u^\gamma}{\partial y}$, primeiro obtém-se o polinómio interpolador, Z_h , de u^γ no espaço S_{hr}^u . Então, pode escrever-se

$$Z_h = \sum_{j=1}^{np} Z_j \varphi_j.$$

O valor das derivadas parciais espaciais em cada ponto vértice é o resultado da média aritmética das derivadas em cada triângulo que contém este ponto, isto é,

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(P_m) = \frac{1}{\#\mathfrak{J}_m} \sum_{i \in \mathfrak{J}_m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \Big|_{T_i}(P_m),$$

$$\mathfrak{J}_m = \{ \text{índices dos triângulos que têm } P_m \text{ como vértice} \}.$$

Finalmente,

$$\nu_h^x(P_m) = - \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{np} Z_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(P_m) \text{ e } \nu_h^y(P_m) = - \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{np} Z_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(P_m).$$

O vetor normal em cada ponto da fronteira é a soma normalizada dos dois vectores normais aos dois segmentos que concorrem nesse ponto, como mostra a figura 3.8.

Suponha-se que no ponto P_m , pertencente à fronteira móvel, o vetor normal é $\mathbf{n} = (n^x, n^y)$,

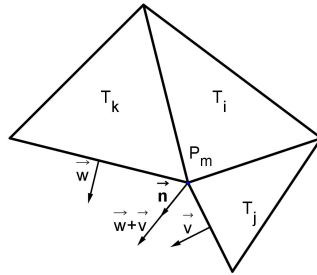


Figura 3.8: Cálculo do vetor normal

então a equação para a velocidade da fronteira em (3.31) pode ser discretizada da forma

$$n^x \frac{\partial X_m}{\partial t} + n^y \frac{\partial Y_m}{\partial t} = \nu_h^x(P_m)n^x + \nu_h^y(P_m)n^y. \quad (3.40)$$

Esta equação é adicionada às equações (3.36), (3.37) e (3.38) substituindo a equação relativa ao ponto X_m .

Como é preciso mais uma equação para o movimento da fronteira, impõe-se que os pontos fronteiros se movam segundo retas que passam na origem. Para o ponto P_m se mover segundo uma recta que passa na origem tem de satisfazer a equação

$$Y_m \frac{\partial X_m}{\partial t} - X_m \frac{\partial Y_m}{\partial t} = 0. \quad (3.41)$$

Esta equação também é adicionada às equações (3.36), (3.37) e (3.38) substituindo a equação relativa ao ponto Y_m .

3.2.5 Resultados numéricos

3.2.5.1 Expoente constante

Para testar o novo método, simula-se primeiro o caso em que γ é constante. Neste caso, são conhecidas soluções exatas, o que permite medir o erro. No caso $\gamma = 2$ e $f = 0$ a solução do problema (3.1) é

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\vartheta^2} \left[1 - \left(\frac{x^2 + y^2}{\varrho_0 \vartheta} \right)^2 \right]_+^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$\vartheta = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad t_0 = \frac{\varrho_0^2}{6}.$$

Iniciou-se a simulação com o raio inicial $\varrho_0 = 0.5$ e definiu-se o tempo $t = t - t_0$.

O domínio computacional é o suporte da solução inicial, ou seja, $\Omega_c = \Omega(0) = \text{supp}(u_0) =$ círculo de centro na origem e raio 0.5. Utilizaram-se aproximações de u de grau 3 e de \mathbf{x} de grau 1. O parâmetro de suavização foi $\tau = 0.1$. A malha inicial é uma malha estruturada com 512 triângulos, como mostra a figura 3.9.

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

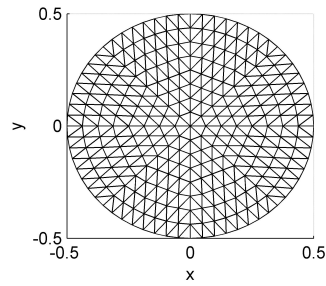


Figura 3.9: Domínio computacional e malha inicial usados no problema com expoente constante.

Na figura 3.10, está representada a solução obtida, para alguns valores de t . Pode observar-se que evolui da mesma forma que a solução exata.

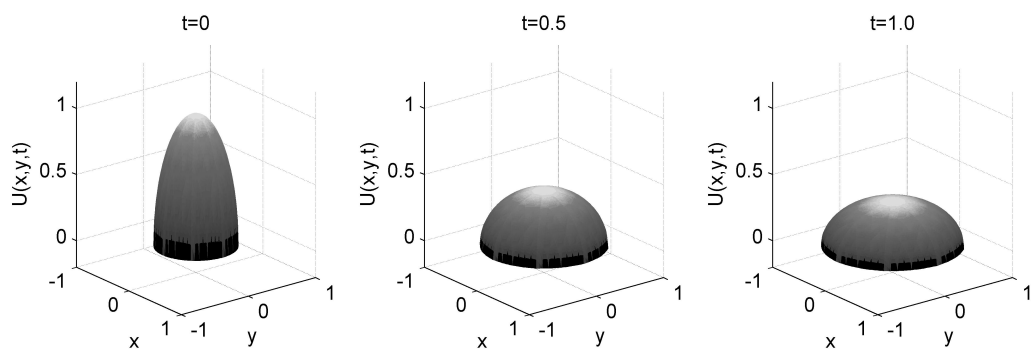


Figura 3.10: Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com expoente constante.

A figura 3.11 tem representada a malha em alguns instantes. A tracejado tem-se a posição exata da fronteira no respetivo instante. Verifica-se que a malha se adapta ao movimento da fronteira.

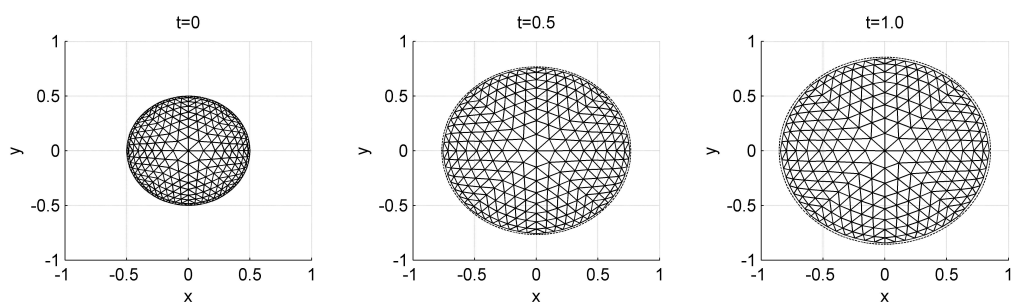


Figura 3.11: Evolução no tempo da malha obtida no problema com expoente constante.

Foram realizadas várias simulações para malhas iniciais diferentes. Em cada simulação, o número de triângulos foi dividido por quatro. Foi medido o erro da solução na norma $L_2(\Omega)$ e o erro da fronteira na norma L_∞ . Os resultados estão apresentados na figura 3.12.

A figura tem representado o logaritmo do erro em função do logaritmo do número de triângulos. Pode observar-se que tanto a solução como a fronteira convergem, mas a convergência é lenta.

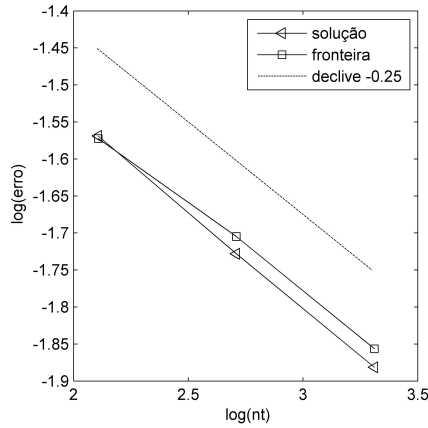


Figura 3.12: Erro das aproximações da solução e da fronteira, obtidas no problema com expoente constante, em função do número de triângulos.

3.2.5.2 Problema com suporte não convexo

Este exemplo é o mesmo do segundo exemplo simulado para a malha fixa, ou seja, com

$$\gamma = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1.1.$$

A função f é considerada nula e u_0 é definida por

$$u_0 = \begin{cases} -\sin(2\pi\sqrt{x^2+y^2}), & 0.5 < \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 0, & \text{restante domínio} \end{cases}.$$

Neste caso, o domínio computacional é $\Omega_c = \Omega(0) = \text{supp}(u_0) =$ coroa circular de raios 0.5 e 1.

Utilizaram-se aproximações de u de grau 2 e de x de grau 1. O parâmetro de suavização é o mesmo do exemplo anterior.

A malha inicial foi calculada utilizando o programa `initmesh` do Matlab, que utiliza a triangulação de Delaunay e está representada na figura 3.13. A malha é composta por 212 triângulos.

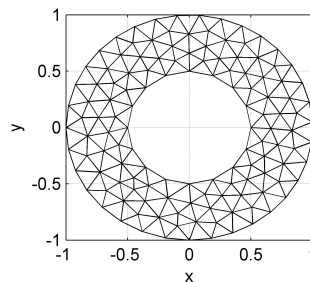


Figura 3.13: Domínio computacional e malha inicial usados no problema com suporte não convexo.

Na figura 3.14, pode observar-se que a solução obtida evolui da mesma forma que a solução obtida no caso de malha fixa. Não é possível simular a solução após o desaparecimento do buraco interior, pois, neste caso, todos os pontos da fronteira interior convergem para um ponto e o método torna-se degenerado. Para evitar que isso aconteça, para-se o algoritmo quando os pontos da fronteira estão muito próximos.

Na figura 3.15, está representada a evolução da malha. Nota-se que se adapta bem ao movimento da fronteira da solução obtida.

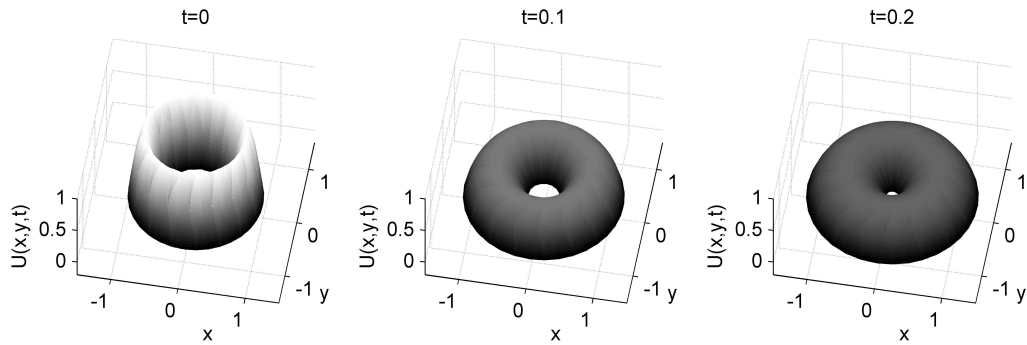


Figura 3.14: Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com suporte não convexo.

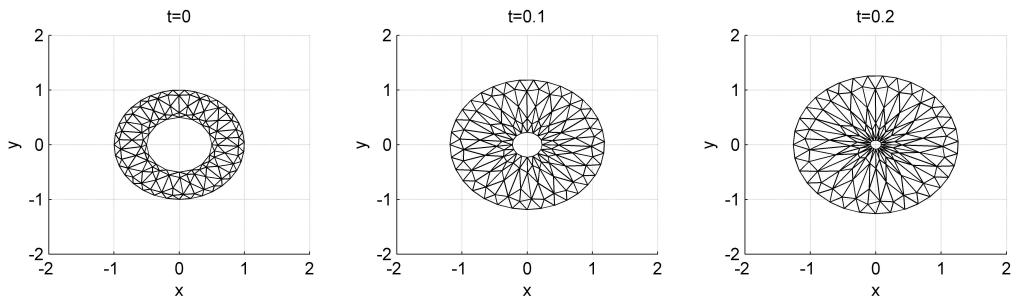


Figura 3.15: Evolução no tempo da malha obtida no problema com suporte não convexo.

3.2.5.3 Problema com absorção e expoente constante

Agora, simulam-se dois casos de problemas de equações em meios porosos mas com absorção.

Considere-se, então, o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(u^\gamma(\mathbf{x},t)\nabla u) - u^\sigma(\mathbf{x},t) & \text{em } \Omega_T \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_T \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{cases} .$$

No caso de expoentes constantes, são conhecidas explicitamente algumas soluções exatas o que permite analisar o erro. No caso limite de $\gamma = 2$, $\sigma = 1$, uma solução deste problema é

$$u(x, y, t) = \left[2 (6(e^{2t} - 1)e^t)^{-\frac{2}{3}} - \frac{x^2 + y^2}{3(e^{2t} - 1)} \right]_+^{\frac{1}{2}} .$$

Para estes valores dos expoentes, a velocidade da fronteira é conhecida e a expressão coincide com a expressão para o caso sem absorção. Iniciou-se a simulação em $t_0 = 0.01$ e normalizou-se o tempo da forma $t = t - t_0$. O domínio computacional é o suporte da solução inicial, isto é, $\Omega_c = \Omega(0) = \text{supp}(u_0)$ = círculo centrado na origem de raio 0.7.

Utilizou-se aproximações de U de grau 4 no espaço e grau zero no tempo. A malha computacional usada foi uma malha estruturada como mostra a figura 3.11.

Na figura 3.16, mostra-se a evolução da solução obtida com uma malha de 512 triângulos. Pode observar-se que o comportamento da solução aproximada é semelhante ao comportamento da solução exata.

Na figura 3.17, estão representadas as malhas obtidas em alguns instantes. A posição exata da fronteira é indicada por uma linha a tracejado. Observa-se que, mais uma vez, a malha se

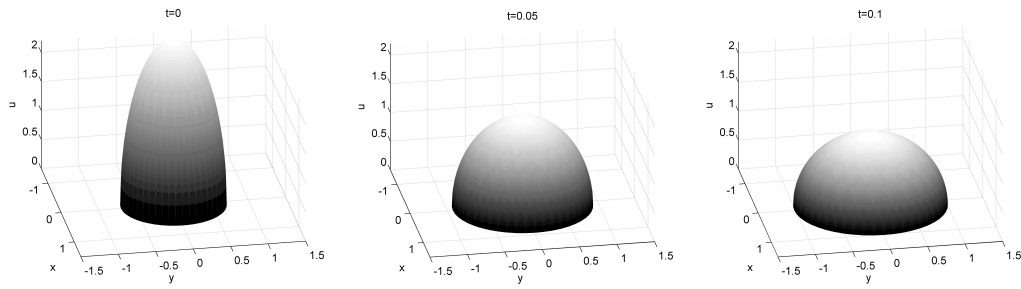


Figura 3.16: Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com absorção e expoente constante.

adapta bem ao movimento da fronteira.

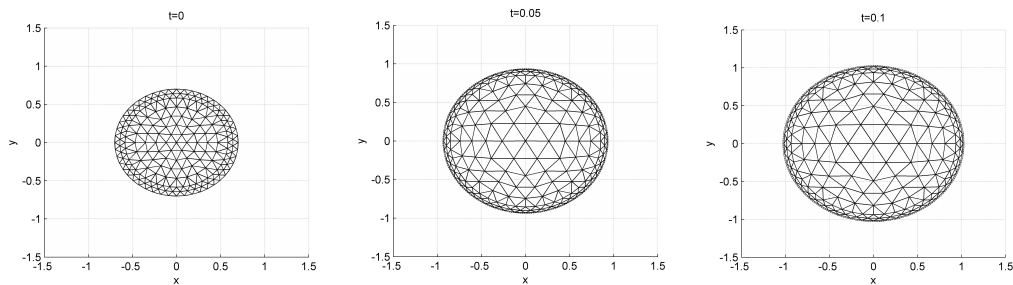


Figura 3.17: Evolução no tempo da malha obtida no problema com absorção e expoente constante.

O problema foi simulado para diferentes malhas com diferente número de triângulos e calculou-se o erro da solução e da fronteira em cada simulação. Os resultados obtidos do erro na norma $L_2(\Omega)$ para a solução e na norma $L_\infty(\Omega)$ na fronteira foram representados na figura 3.18. Para analisar a ordem de convergência, representou-se o logaritmo do erro em função do logaritmo do número de triângulos. Os resultados indicam que existe convergência tanto para solução como para a fronteira, mas essa convergência é lenta.

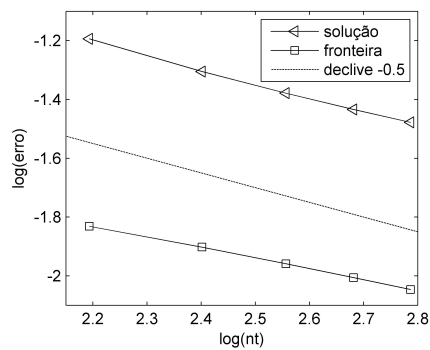


Figura 3.18: Erro das aproximações da solução e da fronteira, obtidas no problema com absorção e expoente constante, em função do número de triângulos.

3.2.5.4 Problema com absorção e expoente variável

Por fim, simula-se um problema com absorção onde ambos os expoentes são variáveis. Neste caso, não existe nenhum resultado teórico que indique o movimento da fronteira. Para expoentes constantes e para $\sigma \geq 1$ em dimensão um, o movimento da fronteira é dado pela mesma equação que o problema sem absorção. Em dimensões superiores a um, surge um termo que

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

pensa-se não ter muita influência para estes valores de σ e que pode ser desprezado. Neste sentido, supõe-se que a mesma equação é válida para expoentes variáveis e domínios em \mathbb{R}^2 . Para se poder validar as suposições, testa-se o mesmo exemplo simulado para malha fixa, ou seja, com os expoentes

$$\gamma = \frac{x^2 + y^2}{t^2 + 1} \text{ e } \sigma = x^2 + y^2 + 1 + e^{-t},$$

e valores iniciais u_0 definidos por

$$u_0 = \begin{cases} \cos(2\pi\sqrt{x^2 + y^2}), & \sqrt{x^2 + y^2} < 0.5 \\ 0, & \text{restante domínio} \end{cases}.$$

Como sempre, o domínio computacional é o suporte da solução inicial, ou seja, $\Omega_c = \Omega(0) = \text{supp}(u_0) =$ círculo centrado na origem e raio 0.5. Foram utilizadas aproximações de grau 2 e os mesmos parâmetros de adaptação que no exemplo anterior. A malha inicial está representada na figura 3.19 e é composta por 156 triângulos.

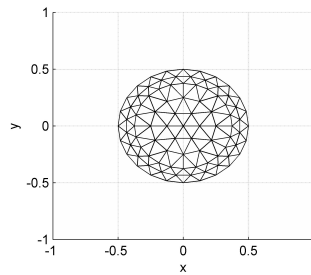


Figura 3.19: Domínio computacional e malha inicial usados no problema com absorção e expoente variável.

Na figura 3.20, pode observar-se que a solução evolui da mesma forma que a solução obtida em malha fixa.

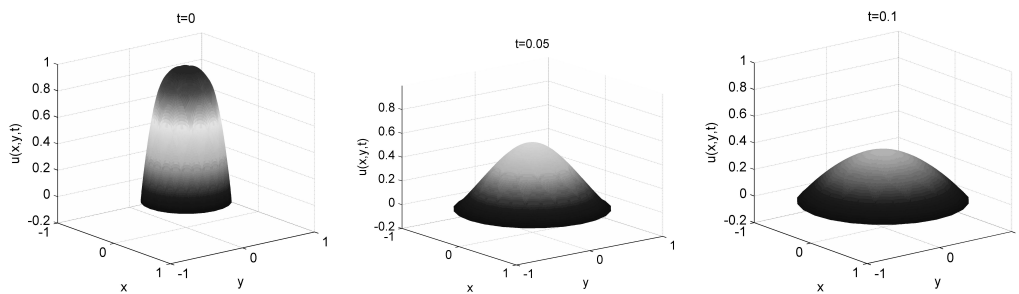


Figura 3.20: Evolução no tempo da aproximação obtida no problema com absorção e expoente variável.

Na figura 3.21, está representada a evolução da malha. Note-se que ela se comporta da mesma forma que a malha obtida para o caso de expoentes constantes.

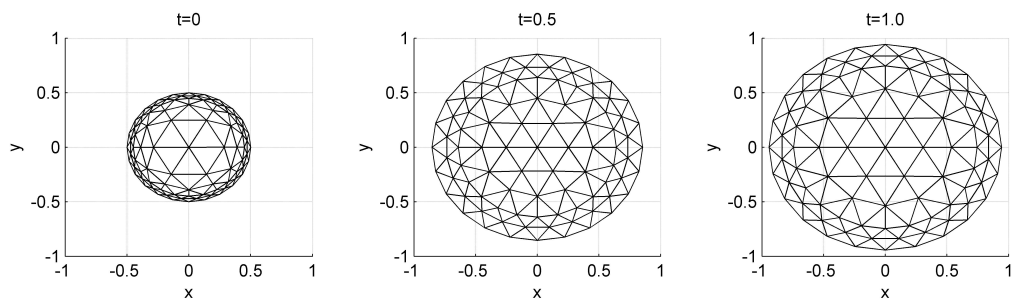


Figura 3.21: Evolução no tempo da malha obtida no problema com absorção e expoente variável.

Capítulo 4

Sistema Não Linear Com Termo De Difusão Não Local

Neste capítulo, estuda-se um sistema de equações parabólicas do tipo reação-difusão num domínio fixo com os termos de difusão não locais atuando em formas lineares l_i . Considere-se então o sistema

$$\begin{cases} u_t - a_1(l_1(u), l_2(v))\Delta u + \lambda_1|u|^{p-2}u = f_1(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \times]0, T] \\ v_t - a_2(l_1(u), l_2(v))\Delta v + \lambda_2|v|^{p-2}v = f_2(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \times]0, T] \end{cases} \quad (4.1)$$

As funções u e v podem descrever as densidades de duas populações que interagem através das funções a_1 e a_2 .

Este capítulo, diz respeito à prova da existência, unicidade e propriedades físicas das soluções globais regulares do sistema (4.1). O outro objetivo é provar a convergência de uma solução totalmente discreta com o método dos elementos finitos de Euler-Galerkin.

Na secção 1, formula-se o problema e as hipóteses sobre os dados. Na secção 2, prova-se a existência e unicidade de soluções globais fortes. Na secção 3, investigam-se as propriedades de localização de soluções locais. Na secção 4, apresenta-se um resultado sobre o comportamento assintótico da solução global do sistema. Na secção 5, discretiza-se o problema no espaço e prova-se a convergência da solução semidiscreta. A secção 6 é dedicada à discretização no tempo e à prova de convergência da solução totalmente discreta. Por fim, apresentam-se alguns exemplos da aplicação desta teoria, na secção 7.

4.1 Formulação do problema

De uma forma exata, seja Ω um domínio de \mathbb{R}^d com fronteira regular $\partial\Omega$. Considere-se o seguinte problema: encontrar o par (u, v) que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} u_t - a_1(l_1(u), l_2(v))\Delta u + \lambda_1|u|^{p-2}u = f_1(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \times]0, T] \\ v_t - a_2(l_1(u), l_2(v))\Delta v + \lambda_2|v|^{p-2}v = f_2(\mathbf{x}, t) & \text{em } \Omega \times]0, T] \\ u(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times]0, T] \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

onde λ_1, λ_2 são constantes não negativas e $p > 1$.

Durante este capítulo, supõe-se que se verificam as seguintes hipóteses:

H1: $v_0, u_0 \in L_2(\Omega)$,

H2: $a_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada com $0 < a^- \leq a_i(l_1, l_2) \leq a^+$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$,

H3: $a_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz-contínua com $|a_i(s_1, r_1) - a_i(s_2, r_2)| \leq A_i|s_1 - s_2| + B_i|r_1 - r_2|$, $s_1, s_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$,

H4: $l_i : L_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear contínua, isto é, existe $g_i \in L_2(\Omega)$, tal que:

$$l_i(u) = l_{g_i}(u) = \int_{\Omega} g_i(\mathbf{x})u(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \text{ para todo } u \in L_2(\Omega), i = 1, 2,$$

H5: $f_1, f_2 \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Definição 4.1 (Solução Fraca) Diz-se que o par (u, v) é uma solução fraca do problema (4.2) se

(i) $u, v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)) \cap C([0, T]; L_2(\Omega))$, $u_t, v_t \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$,

(ii) para todo $\zeta \in H_0^1(\Omega)$, as seguintes igualdades em $\mathcal{D}'(0, T)$ são verdadeiras:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u\zeta \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(u), l_2(v)) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^{p-2} u\zeta \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_1\zeta \, d\mathbf{x}, \quad (4.3)$$

e

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v\zeta \, d\mathbf{x} + a_2(l_1(u), l_2(v)) \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} |v|^{p-2} v\zeta \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_2\zeta \, d\mathbf{x}, \quad (4.4)$$

(iii) $u(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t) = 0$ em $\partial\Omega \times]0, T]$,

(iv) $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x})$ em Ω .

4.2 Existência e unicidade de soluções fortes

Esta secção é dedicada à prova da existência e unicidade de soluções fortes para o problema (4.2). Deve destacar-se que as principais ferramentas para provar a existência e a unicidade de solução para este sistema são o conhecido Método de Faedo-Galerkin e o Lema de Aubin-Lions.

Teorema 4.2 (Existência) *Seja $p > 1$ e $0 < T < +\infty$. Se as hipóteses H1-H5 forem satisfeitas, então existe uma solução fraca (u, v) do sistema (4.2) no sentido da definição 4.1.*

Demonstração

Sejam $\{\chi_n(\mathbf{x})\}_{n \in \mathbb{N}}$ a base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ e S_n o espaço gerado por $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$, $n = 1, 2, \dots$

Considere-se

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n U_{in}(t)\chi_i(\mathbf{x}) \text{ e } v_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n V_{in}(t)\chi_i(\mathbf{x}),$$

as soluções fracas do sistema aproximado correspondente a (4.2), onde $U_{in}(t)$ e $V_{in}(t)$ são as soluções do sistema ODE, não linear, na variável t , seguinte:

$$\int_{\Omega} (u_n)_t \chi \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_n|^{p-2} u_n \chi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_1 \chi \, d\mathbf{x} \quad \forall \chi \in S_n, \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} (v_n)_t \chi \, d\mathbf{x} + a_2(l_1(u_n), l_2(v_n)) \int_{\Omega} \nabla v_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} |v_n|^{p-2} v_n \chi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_2 \chi \, d\mathbf{x} \quad \forall \chi \in S_n, \quad (4.6)$$

com as condições iniciais

$$u_n(0) = u_{0n} = \sum_{i=1}^n U_{0in}\chi_i \rightarrow u_0 \text{ em } L_2(\Omega), \quad (4.7)$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

$$v_n(0) = v_{0n} = \sum_{i=1}^n V_{0in} \chi_i \rightarrow v_0 \text{ em } L_2(\Omega). \quad (4.8)$$

Como é bem sabido, o sistema (4.5)-(4.8) tem uma solução local $(u_n(t), v_n(t))$ em algum intervalo $[0, t_n[$, $0 < t_n < T$. Para provar que essa solução pode ser estendida a todo o intervalo $]0, T]$, para qualquer $T > 0$, usa-se a primeira estimativa à priori calculada abaixo.

Fazendo $\chi = u_n(\mathbf{x}, t)$ em (4.5), obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \lambda_1 \|u_n\|_{L_p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} f_1 u_n \, dx. \quad (4.9)$$

Utilizando as desigualdades de Poincaré e Hölder, transforma-se o segundo membro para

$$\int_{\Omega} |f_1 u_n| \, dx \leq C \|f_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{a^-}{2} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Pela H2, pode escrever-se a inequação (4.9) da forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{a^-}{2} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \lambda_1 \|u_n\|_{L_p(\Omega)}^p \leq C \|f_1\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Então, tem-se que

$$\frac{d}{dt} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^- \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 2\lambda_1 \|u_n\|_{L_p(\Omega)}^p \leq C \|f_1\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (4.10)$$

Integrando (4.10) em $[0, t]$ e usando o facto de $u_n(0) \rightarrow u_0$ fortemente em $L_2(\Omega)$, obtém-se

$$\|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^- \int_0^t \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \, dt + 2\lambda_1 \int_0^t \|u_n\|_{L_p(\Omega)}^p \, dt \leq \|u_n(\mathbf{x}, 0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|f_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt \leq C, \quad (4.11)$$

onde C é uma constante que não depende de t e n .

Da mesma forma, fazendo $\chi = v_n(\mathbf{x}, t)$ em (4.6), tem-se

$$\|v_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^- \int_0^t \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \, dt + 2\lambda_2 \int_0^t \|v_n\|_{L_p(\Omega)}^p \, dt \leq \|v_n(\mathbf{x}, 0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|f_2\|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt \leq C, \quad (4.12)$$

com C uma constante que não depende de t e n .

Por (4.11) e (4.12), conclui-se que

$$(u_n) \text{ e } (v_n) \text{ são limitadas em } L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega)), \quad (4.13)$$

$$(u_n) \text{ e } (v_n) \text{ são limitadas em } L_2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (4.14)$$

$$(u_n) \text{ e } (v_n) \text{ são limitadas em } L_p(0, T; L_p(\Omega)). \quad (4.15)$$

Então, pode estender-se a solução ao intervalo $]0, T]$. De seguida, passa-se ao limite quando $n \rightarrow \infty$. Tem-se que

$$(u_n)_t = a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \Delta u_n - \lambda_1 |u_n|^{p-2} u_n + f_1 \in H^{-1}(\Omega).$$

Note-se que $-a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \Delta u_n$ define um elemento de $H^{-1}(\Omega)$, dado por

$$\langle -a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \Delta u_n, \zeta \rangle = a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \zeta \, dx, \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega).$$

Então,

$$(u_n)_t \text{ e } (v_n)_t \text{ são limitadas em } L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (4.16)$$

Devido ao corolário do teorema de Banach-Alouglu, de (4.13), (4.14) e (4.16) podem extrair-se subsucessões (que são denotadas pelo mesmo símbolo) $u_{mk} = u_m$ e $v_{mk} = v_m$ tais que

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u, v_n \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad (4.17)$$

$$u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v \text{ em } L_2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (4.18)$$

$$(u_n)_t \rightharpoonup u_t, (v_n)_t \rightharpoonup v_t \text{ em } L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (4.19)$$

Por outro lado, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Juntando as convergências (4.18) e (4.19) e o lema de compacidade de Aubin-Lions, obtém-se

$$u_n \rightarrow u \text{ fortemente em } L_2(0, T; L_2(\Omega)), \quad (4.20)$$

logo, passando, se necessário a uma subsucessão, ainda denotada por (u_n) , tem-se

$$u_n \rightarrow u \text{ qtp em } \Omega \times]0, T].$$

Uma vez que $z \mapsto |z|^{p-2} z$ é uma função contínua, deduz-se

$$|u_n|^{p-2} u_n \rightarrow |u|^{p-2} u \text{ qtp em } \Omega \times]0, T]. \quad (4.21)$$

De (4.15) e observando que $p' = \frac{p}{p-1} > 1$ é o conjugado de $p > 1$ conclui-se que

$$(|u_n|^{p-2} u_n) \text{ é limitada em } L_{p'}(0, T; L_{p'}(\Omega)). \quad (4.22)$$

Além disso, de (4.21) e (4.22), infere-se que

$$|u_n|^{p-2} u_n \rightharpoonup |u|^{p-2} u \text{ em } L_{p'}(0, T; L_{p'}(\Omega)),$$

o que implica que

$$\int_0^T \int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n \chi \, dx dt \rightarrow \int_0^T \int_\Omega |u|^{p-2} u \chi \, dx dt, \forall \chi \in L_p(0, T; L_p(\Omega)).$$

Para concluir a demonstração só falta provar que

$$\int_0^T a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \chi \, dx dt \rightarrow \int_0^T a_1(l_1(u), l_2(v)) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \chi \, dx dt.$$

Para isso, é suficiente provar que

$$a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \rightarrow a_1(l_1(u), l_2(v)) \text{ em } L_2(0, T).$$

Como a é contínua, mostra-se apenas que

$$l_1(u_n) \rightarrow l_1(u) \text{ em } L_2(0, T).$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

De facto, tem-se que

$$\int_0^T |l_1(u_n) - l_1(u)|^2 dt = \int_0^T |l_1(u_n - u)|^2 dt \leq C \int_0^T \|u_n - u\|_{L_2(\Omega)}^2 dt.$$

Este último resultado é consequência da convergência (4.20).

Para a segunda equação, procede-se de modo idêntico.

Seguidamente verificam-se os dados iniciais. De facto, utilizando o resultado de regularidade do teorema 2.65, tem-se que

$$u \in C^0([0, T]; L_2(\Omega)).$$

Deste modo, faz sentido calcular $u(0)$. Seja $\vartheta \in C^1(0, T; \mathbb{R})$, com $\vartheta(0) = 1$ e $\vartheta(T) = 0$. Devido à convergência (4.19) tem-se que

$$\int_0^T (u'_n, \zeta) \vartheta dt \rightarrow \int_0^T (u', \zeta) \vartheta dt, \quad \zeta \in L_2(\Omega). \quad (4.23)$$

Integrando por partes (4.23), resulta

$$-(u_n(0), \zeta) - \int_0^T (u_n, \zeta) \vartheta' dt \rightarrow -(u(0), \zeta) - \int_0^T (u, \zeta) \vartheta' dt. \quad (4.24)$$

Utilizando a convergência (4.18) em (4.24), obtém-se que $(u_n(0), \zeta) \rightarrow (u(0), \zeta)$, para todo $\zeta \in H_0^1(\Omega)$. Mas $u_n(0)$ converge fortemente para u_0 em $L_2(\Omega)$, consequentemente, fracamente em $L_2(\Omega)$. Além disso, $(u_n(0), \zeta) \rightarrow (u_0, \zeta)$, para todo $\zeta \in H_0^1(\Omega)$. Pela unicidade do limite, tem-se que $(u(0), \zeta) \rightarrow (u_0, \zeta)$, para todo $\zeta \in H_0^1(\Omega)$. Logo $u(0) = u_0$. Da mesma forma, conclui-se que $v(0) = v_0$. Então, o problema (4.2) tem uma solução. ■

Neste momento, prova-se que a solução obtida é única.

Teorema 4.3 (Unicidade) *Seja $p > 1$ e $0 < T < +\infty$. Se as hipóteses H1-H5 forem satisfeitas, então o problema (4.2) tem, no máximo, uma solução.*

Demonstração

Sejam (u_1, v_1) e (u_2, v_2) duas soluções fracas do sistema (4.2), então

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_1 \zeta \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(u_1), l_2(v_1)) \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_1|^{p-2} u_1 \zeta \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_1 \zeta \, d\mathbf{x} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_1 \zeta \, d\mathbf{x} + a_2(l_1(u_1), l_2(v_1)) \int_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} |v_1|^{p-2} v_1 \zeta \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_2 \zeta \, d\mathbf{x} \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_2 \zeta \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(u_2), l_2(v_2)) \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_2|^{p-2} u_2 \zeta \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_1 \zeta \, d\mathbf{x} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_2 \zeta \, d\mathbf{x} + a_2(l_1(u_2), l_2(v_2)) \int_{\Omega} \nabla v_2 \cdot \nabla \zeta \, d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} |v_2|^{p-2} v_2 \zeta \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_2 \zeta \, d\mathbf{x} \end{array} \right. .$$

Subtraindo e escolhendo $\zeta_1 = u_1 - u_2$ na primeira equação e $\zeta_2 = v_1 - v_2$ na segunda, obtém-se

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + a_1(l_1(u_1), l_2(v_1)) \|\zeta_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \lambda_1(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2, u_1 - u_2) \leq \\ \leq |a_1(l_1(u_2), l_2(v_2)) - a_1(l_1(u_1), l_2(v_1))| \int \nabla u_2 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}^2 + a_2(l_1(u_1), l_2(v_1)) \|\zeta_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \lambda_2(|v_1|^{p-2}v_1 - |v_2|^{p-2}v_2, v_1 - v_2) \leq \\ \leq |a_2(l_1(u_2), l_2(v_2)) - a_2(l_1(u_1), l_2(v_1))| \int \nabla v_2 \cdot \nabla \zeta_2 \, dx \end{cases}.$$

Usou-se o facto de

$$\begin{aligned} & a_1(l_1(u_1), l_2(v_1)) \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx - a_1(l_1(u_2), l_2(v_2)) \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx = \\ & = a_1(l_1(u_1), l_2(v_1)) \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx - a_1(l_1(u_2), l_2(v_2)) \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx + \\ & \quad + a_1(l_1(u_1), l_2(v_1)) \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx - a_1(l_1(u_1), l_2(v_1)) \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx = \\ & = a_1(l_1(u_1), l_2(v_1)) \int_{\Omega} \nabla \zeta_1 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx - (a_1(l_1(u_2), l_2(v_2)) - a_1(l_1(u_1), l_2(v_1))) \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx. \end{aligned}$$

Somando e usando o facto de $(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2, u_1 - u_2) \geq 0$ e $(|v_1|^{p-2}v_1 - |v_2|^{p-2}v_2, v_1 - v_2) \geq 0$, deduz-se que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\zeta_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}^2) + a_1(l_1(u_1), l_2(v_1)) \|\zeta_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + a_2(l_1(u_1), l_2(v_1)) \|\zeta_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq |a_1(l_1(u_2), l_2(v_2)) - a_1(l_1(u_1), l_2(v_1))| \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla \zeta_1 \, dx + \\ & \quad + |a_2(l_1(u_2), l_2(v_2)) - a_2(l_1(u_1), l_2(v_1))| \int_{\Omega} \nabla v_2 \cdot \nabla \zeta_2 \, dx. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de a_i e l_i tem-se que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\zeta_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}^2) + a^- (\|\zeta_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\zeta_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \leq \\ & \leq (A_1|l_1(u_2) - l_1(u_1)| + B_1|l_2(v_2) - l_2(v_1)|) \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \|\zeta_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ & \quad + (A_2|l_1(u_2) - l_1(u_1)| + B_2|l_2(v_2) - l_2(v_1)|) \|v_2\|_{H_0^1(\Omega)} \|\zeta_2\|_{H_0^1(\Omega)} \\ & \leq (A_1|l_1(u_2 - u_1)| + B_1|l_2(v_2 - v_1)|) \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \|\zeta_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ & \quad + (A_2|l_1(u_2 - u_1)| + B_2|l_2(v_2 - v_1)|) \|v_2\|_{H_0^1(\Omega)} \|\zeta_2\|_{H_0^1(\Omega)} \\ & \leq C_1 (\|u_2 - u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|v_2 - v_1\|_{L_2(\Omega)}) \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \|\zeta_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ & \quad + C_2 (\|u_2 - u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|v_2 - v_1\|_{L_2(\Omega)}) \|v_2\|_{H_0^1(\Omega)} \|\zeta_2\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\zeta_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}^2) + \frac{a^-}{2} (\|\zeta_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\zeta_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \leq \frac{M(t)}{2} (\|\zeta_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}^2),$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

com

$$M(t) = \frac{C_1^2}{4a^-} \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{C_2^2}{4a^-} \|v_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \in L_1(0, T).$$

Definindo $z(t) = (\|\zeta_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}^2)$, tem-se que

$$\frac{dz}{dt} \leq M(t)z, \quad z(0) = 0.$$

Logo $z(t) = 0$ e, conseqüentemente, $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$. ■

A regularidade da solução (u, v) pode ser melhorada se se considerarem dados mais regulares.

Teorema 4.4 Se $u_0, v_0 \in L_\infty(\Omega)$ e $\int_0^t \|f\|_{L_\infty(\Omega)} dt \leq C$, então a solução fraca (u, v) do sistema (4.2) satisfaz

$$u, v \in L_\infty(0, T; L_\infty(\Omega)).$$

Demonstração

Seja $k > 0$, se se multiplicar a primeira equação do sistema (4.2) por u^{2k-1} e se for integrada em Ω , obtém-se

$$\frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{2k} dx + (2k-1)a_1(l_1(u), l_2(v)) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 u^{2(k-1)} dx + \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^{p+2k-2} dx = \int_{\Omega} f_1 u^{2k-1} dx.$$

Então,

$$\frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \|u\|_{L_{2k}(\Omega)}^{2k} \leq \|f\|_{L_{2k}(\Omega)} \|u\|_{L_{2k}(\Omega)}^{2k-1},$$

ou, de modo equivalente,

$$\|u\|_{L_{2k}(\Omega)}^{2k-1} \frac{d}{dt} \|u\|_{L_{2k}(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{2k}(\Omega)} \|u\|_{L_{2k}(\Omega)}^{2k-1}.$$

Simplificando o fator $\|u\|_{L_{2k}(\Omega)}^{2k-1}$ e integrando em t , vem

$$\|u\|_{L_{2k}(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L_{2k}(\Omega)} + \int_0^t \|f\|_{L_{2k}(\Omega)} dt.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ obtém-se a estimativa pretendida para u . Com o mesmo processo, prova-se a estimativa para v . ■

Na verdade, se as condições do último teorema forem válidas, então a solução é uma solução forte, no sentido de $u_t, \Delta u \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Teorema 4.5 Suponha-se que $u_0, v_0 \in L_\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\int_0^T \|f\|_{L_\infty(\Omega)} dt \leq C$, então o sistema (4.2) admite uma solução forte (u, v) .

Demonstração

Multiplicando a primeira equação do sistema (4.2) por Δu e integrando em Ω , resulta

$$\int_{\Omega} u_t \Delta u dx - \int_{\Omega} a_1(l_1(u), l_2(v)) (\Delta u)^2 dx + \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \Delta u dx = \int_{\Omega} f_1 \Delta u dx.$$

Aplicando o teorema de Green no primeiro e último termos do primeiro membro, obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla u_t \cdot \nabla u dx + \int_{\Omega} a_1(l_1(u), l_2(v)) (\Delta u)^2 dx + \lambda_1 (p-1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Omega} f_1 \Delta u dx,$$

por isso,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} a_1(l_1(u), l_2(v)) (\Delta u)^2 dx + \lambda_1(p-1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Omega} f_1 \Delta u dx.$$

A integração em $[0, T]$ leva a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x}, T)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} a_1(l_1(u), l_2(v)) (\Delta u)^2 dx dt + \\ + \lambda_1(p-1) \int_0^T \int_{\Omega} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \int_0^T \int_{\Omega} f_1 \Delta u dx dt. \end{aligned}$$

Pela desigualdade do Cauchy e pelo limite inferior de a_1 , conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x}, T)|^2 dx + a^- \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dt + \lambda_1(p-1) \int_0^T \int_{\Omega} |u|^{p-2} |\nabla u|^2 dx dt \leq \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + C \int_0^T \int_{\Omega} f_1^2 dx dt + \frac{a^-}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Simplificando

$$\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x}, T)|^2 dx + a^- \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx dt \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} f_1^2 dx dt \right).$$

Com os mesmos argumentos, mas aplicados à segunda equação, obtém-se

$$\int_{\Omega} |\nabla v(\mathbf{x}, T)|^2 dx + a^- \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx dt \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla v_0|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} f_2^2 dx dt \right).$$

Utilizando a hipótese do teorema, prova-se que $\Delta u, \Delta v \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$. Relembrando as duas primeiras equações de (4.2), deduz-se que

$$u_t = a_1(l_1(u), l_2(v)) \Delta u - \lambda_1 |u|^{p-2} u + f_1 \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$$

e

$$v_t = a_2(l_1(u), l_2(v)) \Delta v - \lambda_2 |v|^{p-2} v + f_2 \in L_2(0, T; L_2(\Omega)).$$

■

4.3 Propriedades de localização

De seguida, estudam-se alguns efeitos de localização das soluções deste tipo de sistemas. No decorrer desta secção, supõe-se sempre que as hipóteses dos teoremas de existência e unicidade são satisfeitas. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $\varrho_0 \in]0, \text{dist}(\mathbf{x}_0, \partial\Omega)]$, então define-se

$$\mathbf{B}_{\varrho} \equiv \mathbf{B}_{\varrho}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varrho\} \subset \Omega, \quad \text{e}$$

$$\Gamma_{\varrho} \equiv \Gamma_{\varrho}(\mathbf{x}_0) = \partial\mathbf{B}_{\varrho}(\mathbf{x}_0).$$

A primeira propriedade que se quer estudar é a localização estável (“stable localization”).

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Assume-se que

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ e } v(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ qtp em } \mathbf{B}_{\varrho_0}. \quad (4.25)$$

Definição 4.6 ([3], 119) A função $\varrho(t) : [0, t^*[\rightarrow [0, +\infty[$, $\varrho(0) \leq \varrho_0$, é dita uma taxa no ponto \mathbf{x}_0 se

$$\forall t \in [0, t^*[, u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ qtp em } \mathbf{B}_{\varrho(t)}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varrho(t)\} \subset \Omega.$$

Definição 4.7 ([3], 120) Diz-se que a função $u(\mathbf{x}, t)$ possui a propriedade de localização estável se para algum $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, existe uma taxa estritamente positiva $\varrho(t)$, no ponto \mathbf{x}_0 , definida no conjunto $[0, \infty[$ de tal modo que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) > 0.$$

Introduzem-se as funções de energia locais para u da forma

$$\begin{aligned} b_u(\varrho, t) &= \|u(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbf{B}_\varrho)}^2, & \bar{b}_u(\varrho) &= \sup_{0 \leq \varsigma \leq T} b_u(\varrho, \varsigma), \\ E_u(\varrho, t) &= \int_0^t \int_{\mathbf{B}_\varrho} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}d\varsigma, & \bar{E}_u(\varrho) &= \sup_{0 \leq \varsigma \leq T} E_u(\varrho, \varsigma), \\ D_u(\varrho, t) &= \int_0^t \int_{\mathbf{B}_\varrho} |u|^p \, d\mathbf{x}d\varsigma, \text{ e } & \bar{D}_u(\varrho) &= \sup_{0 \leq \varsigma \leq T} D_u(\varrho, \varsigma). \end{aligned}$$

As funções de energia locais para v são definidas de forma análoga. Por *sup* pretende dizer-se *ess sup*.

Define-se

$$\mathbf{b} = b_u + b_v, \quad \mathbf{E} = E_u + E_v \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = D_u + D_v.$$

Sem perda de generalidade, assume-se sempre que

$$\bar{b}_u(\varrho) + \bar{E}_u(\varrho) + \bar{D}_u(\varrho) + \bar{b}_v(\varrho) + \bar{E}_v(\varrho) + \bar{D}_v(\varrho) \leq C, \quad \varrho \leq \varrho_0, \quad t \leq T. \quad (4.26)$$

Por (4.11) e (4.12) a constante C em (4.26) só depende de u_0, v_0, f_1 e f_2 e pode ser calculada de uma forma construtiva. Alguns dos passos das demonstrações são semelhantes para ambas as funções. Nesses casos, e se não houver perigo de confusão, apresenta-se apenas a teoria para a função u e omite-se o índice u nas funções de energia. Uma vez que E e D são monótonas não decrescentes em ϱ e t , as seguintes derivadas existem no sentido fraco:

$$\begin{aligned} E_\varrho(\varrho, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} |\nabla u|^2 \, dsd\varsigma, & D_\varrho(\varrho, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} |u|^p \, dsd\varsigma, \\ E_t(\varrho, t) &= \int_{\mathbf{B}_\varrho} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}, & D_t(\varrho, t) &= \int_{\mathbf{B}_\varrho} |u|^p \, d\mathbf{x}, \\ E_{\varrho t}(\varrho, t) &= \int_{\Gamma_\varrho} |\nabla u|^2 \, ds, & D_{\varrho t}(\varrho, t) &= \int_{\Gamma_\varrho} |u|^p \, ds. \end{aligned}$$

Teorema 4.8 (Localização estável) Seja (u, v) solução fraca de (4.2) com $1 < p < 2$ em $\mathbf{B}_{\varrho_0} \times]0, T]$, $(\mathbf{B}_{\varrho_0} \subset \Omega)$ e suponha-se que

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad v(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad f_1(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad f_2(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{B}_{\varrho_0} \times [0, T]. \quad (4.27)$$

Então,

$$u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ e } v(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ qtp em } (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{B}_\varrho \times \mathbb{R}^+,$$

onde ϱ é definido pela equação (4.32).

Demonstração

Se se multiplicar a primeira equação de (4.2) por u e se se integrar em \mathbf{B}_ϱ para $\varrho \leq \varrho_0$, obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{B}_\varrho} u^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{B}_\varrho} a_1 |\nabla u|^2 + \lambda_1 |u|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_\varrho} a_1 u \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Integrando em $[0, t]$ e como se assume (4.25), pode concluir-se que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{B}_\varrho} u^2 \, d\mathbf{x} + \int_0^t \int_{\mathbf{B}_\varrho} a_1 |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} d\varsigma + \int_0^t \int_{\mathbf{B}_\varrho} \lambda_1 |u|^p \, d\mathbf{x} d\varsigma = \int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} a_1 u \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds d\varsigma.$$

Mudando a notação, tem-se que

$$\frac{1}{2} b(\varrho) + a^- E(\varrho, t) + \lambda_1 D(\varrho, t) \leq \mathcal{I}. \quad (4.28)$$

Agora, avalia-se \mathcal{I} da seguinte forma

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}| &\leq a^+ \int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} |\nabla u| |u| \, ds d\varsigma \\ &\leq a^+ \left(\int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} |\nabla u|^2 \, ds d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} |u|^2 \, ds d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq a^+ (E_\varrho)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} |u|^2 \, ds d\varsigma \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Depois, aplica-se a seguinte desigualdade multiplicativa

$$\|u\|_{L_2(\Gamma_\varrho)} \leq C (\|\nabla u\|_{L_2(\mathbf{B}_\varrho)} + \varrho^{-\varpi} \|u\|_{L_q(\mathbf{B}_\varrho)})^\vartheta \times (\|u\|_{L_q(\mathbf{B}_\varrho)})^{1-\vartheta}, \quad (4.30)$$

com

$$\vartheta = \frac{d(2-q) + q}{d(2-q) + 2q} < 1, \quad 1 < q < 2, \quad \varpi = - \left(1 + \frac{2-q}{2q} d \right),$$

e usa-se o facto de

$$\|u\|_{L_q(\mathbf{B}_\varrho)} \leq \|u\|_{L_2(\mathbf{B}_\varrho)}^{\frac{2(q-p)}{q(2-p)}} \|u\|_{L_p(\mathbf{B}_\varrho)}^{\frac{p(2-q)}{q(2-p)}} = \|u\|_{L_2(\mathbf{B}_\varrho)}^{\frac{2-p}{2}} \|u\|_{L_p(\mathbf{B}_\varrho)}^{\frac{p}{2}}, \quad p < q = \frac{4}{4-p} < 2.$$

Na nossa notação, tem-se

$$\|u\|_{L_q(\mathbf{B}_\varrho)} \leq b^{\frac{2-p}{4}} D_t^{\frac{1}{2}},$$

e (4.30) fica da forma

$$\|u\|_{L_2(\Gamma_\varrho)} \leq C \left(E_t^{\frac{1}{2}} + \varrho^{-\varpi} b^{\frac{2-p}{4}} D_t^{\frac{1}{2}} \right)^\vartheta \left(b^{\frac{2-p}{4}} D_t^{\frac{1}{2}} \right)^{1-\vartheta}. \quad (4.31)$$

Voltando a (4.29) tem-se sucessivamente que

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{I}| &\leq a^+ (E_\varrho)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} |u|^2 ds d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C (E_\varrho)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left(E_t^{\frac{1}{2}} + \varrho^{-\varpi} b^{\frac{2-p}{4}} D_t^{\frac{1}{2}} \right)^{2\vartheta} \left(b^{\frac{2-p}{4}} D_t^{\frac{1}{2}} \right)^{2(1-\vartheta)} d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \varrho^{-\varpi\vartheta} K_1 (E_\varrho)^{\frac{1}{2}} (\bar{b})^{\frac{(2-p)(1-\vartheta)}{4}} \left(\int_0^t (E_t + D_t)^{\vartheta} (D_t)^{(1-\vartheta)} d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \varrho^{-\varpi\vartheta} K_1 (E_\varrho)^{\frac{1}{2}} (\bar{b})^{\frac{(2-p)(1-\vartheta)}{4}} \left(\int_0^t (E_t + D_t) d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \varrho^{-\varpi\vartheta} K_1 (E_\varrho)^{\frac{1}{2}} (\bar{b})^{\frac{(2-p)(1-\vartheta)}{4}} (E + D)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \varrho^{-\varpi\vartheta} K_1 (E_\varrho)^{\frac{1}{2}} (\bar{b} + E + D)^{\frac{1}{2} + \frac{(2-p)(1-\vartheta)}{4}},
 \end{aligned}$$

com $K_1 = C \max(1, (\bar{b})^{\frac{(2-p)\vartheta}{4}} (\varrho_0)) \max(1, \varrho_0^{\varpi\vartheta})$. Substituindo a última desigualdade em (4.28), obtém-se

$$\bar{b} + \bar{E} + \bar{D} \leq \varrho^{-\varpi\vartheta} K_1 (\bar{E}_\varrho)^{\frac{1}{2}} (\bar{b} + \bar{E} + \bar{D})^{\frac{1}{2} + \frac{(2-p)(1-\vartheta)}{4}},$$

ou, de forma equivalente,

$$(\bar{b} + \bar{E} + \bar{D})^{\frac{1}{2} - \frac{(2-p)(1-\vartheta)}{4}} \leq \varrho^{-\varpi\vartheta} K_1 (\bar{E}_\varrho)^{\frac{1}{2}}.$$

Se se definir

$$\varphi = \frac{(2-p)(1-\vartheta)}{2} < 1,$$

então tem-se que

$$(\bar{E})^{1-\varphi} \leq \varrho^{-2\varpi\vartheta} K_1^2 \bar{E}_\varrho,$$

ou, numa notação mais completa,

$$(\bar{E}_u)^{1-\varphi} \leq \varrho^{-2\varpi\vartheta} K_1^2 (\bar{E}_u)_\varrho.$$

De modo semelhante,

$$(\bar{E}_v)^{1-\varphi} \leq \varrho^{-2\varpi\vartheta} K_2^2 (\bar{E}_v)_\varrho.$$

Somando estas duas desigualdades, obtém-se

$$(\bar{E}_u + \bar{E}_v)^{1-\varphi} \leq \varrho^{-2\varpi\vartheta} K_3 (\bar{E}_u + \bar{E}_v)_\varrho \Leftrightarrow (\bar{\mathbf{E}})^{1-\varphi} \leq \varrho^{-2\varpi\vartheta} K \bar{\mathbf{E}}_\varrho.$$

Integrando esta desigualdade em $]\varrho, \varrho_0[$ chega-se a

$$\varrho_0^\omega - \varrho^\omega \leq \frac{K\omega}{\varphi} \left((\bar{\mathbf{E}}(\varrho_0))^\varphi - (\bar{\mathbf{E}}(\varrho))^\varphi \right), \quad \omega = 1 + 2\varpi\vartheta.$$

Logo, $(\bar{\mathbf{E}}(\varrho))^\varphi = 0$ se a função $\varrho(t)$ satisfizer

$$\varrho^\omega(t) = \varrho_0^\omega - \frac{K\omega}{\varphi} (\bar{\mathbf{E}}(\varrho_0))^\varphi. \quad (4.32)$$

Este resultado implica que se a energia global

$$(\bar{b}_u(\varrho_0) + \bar{E}_u(\varrho_0) + \bar{D}_u(\varrho_0) + \bar{b}_v(\varrho_0) + \bar{E}_v(\varrho_0) + \bar{D}_v(\varrho_0))$$

não for muito elevada, então $\varrho(t) > 0$ e existe um cilindro $\mathbf{B}_\varrho \times \mathbb{R}^+$ onde u e v são nulas qtp.

■

Seguidamente, investiga-se o efeito de tempo de espera no sentido da definição seguinte.

Definição 4.9 ([3], 120) Dado $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, seja

$$\varrho_0 = \sup\{\varrho > 0 : u(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ qtp em } \mathbf{B}_\varrho(\mathbf{x}_0) \subset \Omega\}.$$

Diz-se que $u(\mathbf{x}, t)$ possui a propriedade de tempo de espera generalizada se para algum $t_w > 0$, a função $\varrho(t) \equiv \varrho_0$ é uma taxa no ponto \mathbf{x}_0 no intervalo $[0, t_w]$.

Assume-se que

$$\int_{\mathbf{B}_{\varrho_0}} |u_0|^2 d\mathbf{x} = 0, \int_{\mathbf{B}_{\varrho_0}} |v_0|^2 d\mathbf{x} = 0, f_1(\mathbf{x}, t) = 0, f_2(\mathbf{x}, t) = 0, (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{B}_{\varrho_0} \times [0, T], \quad (4.33)$$

$0 < \varrho_0 < R$ e ainda que

$$\left(\int_{\mathbf{B}_\varrho} |u_0|^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{B}_\varrho} |v_0|^2 d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\mathbf{B}_\varrho} |f_1|^{\frac{p}{p-1}} dx d\zeta + \int_0^T \int_{\mathbf{B}_\varrho} |f_2|^{\frac{p}{p-1}} dx d\zeta \right) \leq \epsilon [\varrho - \varrho_0]_+^{\frac{1}{\varphi}}, \quad (4.34)$$

onde φ é definido como no teorema anterior.

Suponha-se que

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbf{B}_R} |u|^2 + |v|^2 d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\mathbf{B}_R} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |u|^p + |v|^p dx dt \right) \leq C_R < \infty \quad (4.35)$$

e os parâmetros $C_R, \varphi, R, \varrho_0$ satisfazem

$$G = C_R - C_5 \left(\frac{C_R}{\varphi} \right)^{\frac{1}{1-\varphi}} (R - \varrho_0)^{-\frac{\varphi}{1-\varphi}} - C_6 \epsilon (R - \varrho_0)^{\frac{1}{\varphi}} = 0, \quad (4.36)$$

onde $C_5 = C_5(\bar{\mathbf{b}}(R))$ e $C_6(p, d)$ é a constante do teorema de imersão.

Teorema 4.10 (Efeito de tempo de espera) Seja (u, v) solução fraca de 4.2 com $1 \leq p < 2$ em $\mathbf{B}_R \times]0, T]$. Se (4.33)-(4.36) são satisfeitas então

$$u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ e } v(\mathbf{x}, t) = 0, (\mathbf{x}, t) \in \mathbf{B}_{\varrho_0} \times [0, T]. \quad (4.37)$$

Demonstração

Repetindo os primeiros passos da demonstração do teorema 4.8 para $\varrho_0 \leq \varrho \leq R$ chega-se às desigualdades

$$\bar{b}_u + E_u(\varrho, t) + D_u(\varrho, t) \leq C_1 (E_u)_\varrho^{\frac{1}{1-\varphi}} + C_2 \epsilon [\varrho - \varrho_0]_+^{\frac{1}{\varphi}} \quad (4.38)$$

e

$$\bar{b}_v + E_v(\varrho, t) + D_v(\varrho, t) \leq C_3 (E_v)_\varrho^{\frac{1}{1-\varphi}} + C_4 \epsilon [\varrho - \varrho_0]_+^{\frac{1}{\varphi}}. \quad (4.39)$$

Somando estas duas desigualdades, obtém-se

$$\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{E}(\varrho, t) + \mathbf{D}(\varrho, t) \leq C_5 \mathbf{E}_\varrho^{\frac{1}{1-\varphi}} + C_6 \epsilon [\varrho - \varrho_0]_+^{\frac{1}{\varphi}}. \quad (4.40)$$

Utilizando as propriedades

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\varrho &\leq \Psi_\varrho, & \Psi &= \mathbf{E} + \mathbf{D} = \int_0^t \int_{\mathbf{B}_\varrho} (|\nabla u^2| + |\nabla v^2| + |u|^p + |v|^p) \, d\mathbf{x}d\varsigma, \\ \sup_{\varsigma \in [0,t]} \frac{\partial}{\partial \varrho} \Psi_\varrho(\varrho, \varsigma) &= \sup_{\varsigma \in [0,t]} \left(\int_0^t \int_{\Gamma_\varrho} (|\nabla u^2| + |\nabla v^2| + |u|^p + |v|^p) \, dsd\varsigma \right) = \\ &= \left(\int_0^T \int_{\Gamma_\varrho} (|\nabla u^2| + |\nabla v^2| + |u|^p + |v|^p) \, dsdt \right) = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\sup_{\varsigma \in [0,t]} \Psi(\varrho, \varsigma) \right), \end{aligned}$$

pode rescrever-se (4.40) na forma (4.41)

$$\Xi(\varrho) \leq C_5 \Xi_\varrho^{\frac{1}{1-\varphi}} + C_6 \epsilon [\varrho - \varrho_0]_+^{\frac{1}{\varphi}}, \quad (4.41)$$

onde,

$$\Xi(\varrho) = \sup_{t \in [0,T]} \Psi(\varrho, t) = \int_0^T \int_{\mathbf{B}_\varrho} |\nabla u^2| + |\nabla v^2| + |u|^p + |v|^p \, d\mathbf{x}d\varsigma.$$

Considere-se o problema:

$$\phi(\varrho) = C_5 \phi_\varrho^{\frac{1}{1-\varphi}} + C_6 \epsilon [\varrho - \varrho_0]_+^{\frac{1}{\varphi}}, \quad \varrho_0 \leq \varrho \leq R. \quad (4.42)$$

Este problema tem uma solução na forma

$$\phi(\varrho) = C_R (R - \varrho_0)^{-\frac{1}{\varphi}} (\varrho - \varrho_0)^{\frac{1}{\varphi}}, \quad (4.43)$$

se os parâmetros $C_R, \varphi, R, \varrho_0$ satisfizerem

$$G = C_R - C_5 \left(\frac{C_R}{\varphi} \right)^{\frac{1}{1-\varphi}} (R - \varrho_0)^{-\frac{\varphi}{1-\varphi}} - C_6 \epsilon (R - \varrho_0)^{\frac{1}{\varphi}} = 0.$$

Para C_R, φ, ϱ_0 fixos, basta escolher R suficientemente grande e ϵ suficientemente pequeno.

É fácil verificar que $\phi(\varrho)$ é um majorante de $\Xi(\varrho)$. Como $\phi(\varrho_0) = 0$ e devido à monotonia em ϱ de Ξ , o teorema está provado. ■

4.4 Comportamento assintótico

Nesta secção, estuda-se o comportamento assintótico das soluções quando t tende para infinito. Introduce-se a função de energia global

$$\mathfrak{b}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 + v^2 \, d\mathbf{x},$$

com (u, v) solução de (4.2)

Teorema 4.11 (Decaimento exponencial) Se $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, então a função \mathfrak{b} satisfaz

$$\mathfrak{b}(t) \leq \mathfrak{b}(0) e^{-\vartheta t},$$

com ϑ uma constante positiva, que apenas depende de a^- e Ω .

Demonstração

Suponha-se que $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Multiplicando a primeira equação do sistema (4.2) por u , a segunda por v e integrando em Ω , obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_1(l_1(u), l_2(v)) |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} = 0$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_2(l_1(u), l_2(v)) |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} = 0.$$

Adicionando estas duas equações, resulta

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{b}(t) + \int_{\Omega} a_1(l_1(u), l_2(v)) |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_2(l_1(u), l_2(v)) |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} = 0.$$

Utilizando o limite inferior de a_i e aplicando a desigualdade de Poincaré, conclui-se que

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{b}(t) + 2Ca^{-} \mathfrak{b}(t) \leq 0$$

e

$$\mathfrak{b}(t) \leq \mathfrak{b}(0) e^{-2Ca^{-}t}.$$

Logo, o teorema está provado com $\vartheta = 2Ca^{-} > 0$. ■

Teorema 4.12 (Extinção em tempo finito) Suponha-se que $1 < p < 2$ e (u, v) é solução de (4.2).

i) Se $f_i \equiv 0$, $i = 1, 2$, então (u, v) extingue-se num tempo finito, ou seja,

$$u(\mathbf{x}, t) \equiv 0 \text{ e } v(\mathbf{x}, t) \equiv 0 \text{ em } \Omega \text{ para } t > t_e,$$

onde t_e depende apenas de $\|u_0\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_0\|_{L_2(\Omega)}$, p e Ω .

ii) Se $f_1 \not\equiv 0$ ou $f_2 \not\equiv 0$, então existem $\epsilon' > 0$ e $t' > t_e$, tais que

$$\|f_i\|_{L_2(\Omega)} \leq \epsilon \left[1 - \frac{t}{t_f} \right]_+^{\frac{2\vartheta-1}{2-2\vartheta}}, \quad i = 1, 2,$$

com $t_f \geq t'$, ϑ definidos por (4.45) e $0 < \epsilon < \epsilon'$, implica que (u, v) extingue-se num tempo finito.

Demonstração

Multiplicando a primeira equação de (4.2) por u e integrando em Ω , obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_1(l_1(u), l_2(v)) |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_1 u \, d\mathbf{x},$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} + C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_1 u \, d\mathbf{x}. \quad (4.44)$$

Pela desigualdade multiplicativa:

$$\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\vartheta} \left(\int_{\Omega} |u|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{2(1-\vartheta)}{p}} \leq$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

$$\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^p \, dx \right)^{\vartheta + \frac{2(1-\vartheta)}{p}}, \quad \vartheta \in]0, 1[$$

pode concluir-se que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^p \, dx \geq \left(\int_{\Omega} u^2 \, dx \right)^{\wp},$$

onde,

$$\wp = \frac{p}{p\vartheta + 2(1-\vartheta)} < 1. \quad (4.45)$$

Substituindo esta última desigualdade em (4.44), obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, dx + C \left(\int_{\Omega} u^2 \, dx \right)^{\wp} \leq \int_{\Omega} f_1 u \, dx. \quad (4.46)$$

Da mesma forma, pode provar-se que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 \, dx + C \left(\int_{\Omega} v^2 \, dx \right)^{\wp} \leq \int_{\Omega} f_2 v \, dx. \quad (4.47)$$

Se $f_i \equiv 0$, $i = 1, 2$, e somando estas duas desigualdades, chega-se à seguinte desigualdade diferencial para b ,

$$b' + Cb^{\wp} \leq 0.$$

Integrando em t , obtém-se

$$b^{1-\wp} \leq Ct(\wp - 1) + b(0)^{1-\wp}.$$

Logo,

$$b = 0 \text{ para } t \geq t_e = \frac{b(0)^{1-\wp}}{C(1-\wp)} < \infty$$

e o mesmo acontece para u e v .

Suponha-se agora que $f_1 \not\equiv 0$ ou $f_2 \not\equiv 0$. Neste caso, escreve-se (4.46) e (4.47) da forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, dx + C \left(\int_{\Omega} u^2 \, dx \right)^{\wp} \leq \left(\int_{\Omega} f_1^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.48)$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 \, dx + C \left(\int_{\Omega} v^2 \, dx \right)^{\wp} \leq \left(\int_{\Omega} f_2^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.49)$$

Somando (4.48) e (4.49), obtém-se a uma nova inequação diferencial para b ,

$$b' + C_1 b^{\wp} \leq C_2(t) b^{\frac{1}{2}},$$

onde $C_2(t) = C \max\{\|f_1\|_{L_2(\Omega)}, \|f_2\|_{L_2(\Omega)}\}$. Introduzindo a função $g(t) = b^{\frac{1}{2}}$, pode escrever-se esta desigualdade da forma

$$g' + \frac{C_1}{2} g^{2\wp-1} \leq C_2(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \left[1 - \frac{t}{t_f} \right]_+^{\frac{2\wp-1}{2-2\wp}}.$$

Considere-se agora a seguinte equação diferencial ordinária:

$$h' + \frac{C_1}{2} h^{2\wp-1} = \frac{\epsilon}{2} \left[1 - \frac{t}{t_f} \right]_+^{\frac{2\wp-1}{2-2\wp}}. \quad (4.50)$$

As soluções desta equação são majorantes das funções g . Verifica-se facilmente que se $h(0)$, ϵ e t_f satisfazem

$$\frac{C_1}{2} h(0)^{2\varphi-1} - \frac{h(0)}{2(1-\varphi)t_f} - \frac{\epsilon}{2} \geq 0, \quad (4.51)$$

então as funções

$$h = h(0) \left[1 - \frac{t}{t_f} \right]_+^{\frac{1}{2-2\varphi}}$$

são solução de (4.50).

Para cada $h(0)$ dada, podem sempre escolher-se ϵ e t_f tais que (4.51) é verificado. Logo, o teorema está provado. ■

Teorema 4.13 (Decaimento polinomial) Suponha-se agora que $p > 2$ e (u, v) é solução do problema (4.2). Se $f_1 \neq 0$ ou $f_2 \neq 0$, então existem $K > 0$ e $B > 0$, dependentes de d , p e Ω , tais que:

$$\|f_i\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{K}{(Bt+1)^{\frac{2\varphi-1}{2(\varphi-1)}}}, \quad i = 1, 2, \quad (4.52)$$

implica que b satisfaça

$$b(t) \leq \frac{b(0)}{(Bt+1)^{\frac{1}{\varphi-1}}}.$$

Demonstração

Multiplicando a primeira equação de (4.2) por u , e integrando em Ω , obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a_1(l_1(u), l_2(v)) |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |u|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_1 u \, d\mathbf{x}. \quad (4.53)$$

Pelo teorema de imersão, vem

$$\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \leq C \left(\int_{\Omega} |u|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Então,

$$\int_{\Omega} |u|^p \, d\mathbf{x} \geq C \left(\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\varphi},$$

onde $\varphi = \frac{p}{2} > 1$.

Substituindo esta desigualdade em (4.53) e ignorando o segundo termo resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} + C \left(\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\varphi} \leq \left| \int_{\Omega} f_1 u \, d\mathbf{x} \right|. \quad (4.54)$$

Com o mesmo raciocínio, conclui-se que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 \, d\mathbf{x} + C \left(\int_{\Omega} v^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\varphi} \leq \left| \int_{\Omega} f_2 v \, d\mathbf{x} \right|. \quad (4.55)$$

Agora, aplica-se a desigualdade de Hölder e escreve-se (4.54) e (4.55) da forma (4.56) e (4.57), respetivamente.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} + C \left(\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\varphi} \leq \left(\int_{\Omega} f_1^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.56)$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 \, d\mathbf{x} + C \left(\int_{\Omega} v^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\varphi} \leq \left(\int_{\Omega} f_2^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.57)$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Somando (4.56) e (4.57), obtém-se a inequação diferencial para b ,

$$b' + C_1 b^\varphi \leq C_2(t) b^{\frac{1}{2}},$$

com $C_2(t) = C \max\{\|f_1\|_{L_2(\Omega)}, \|f_2\|_{L_2(\Omega)}\}$.

Considerando mais uma vez a função $g(t) = b^{\frac{1}{2}}$ e utilizando a hipótese (4.52), pode escrever-se a última inequação da forma

$$g' + \frac{C_1}{2} g^{2\varphi-1} \leq \frac{K}{(Bt+1)^{\frac{2\varphi-1}{2(\varphi-1)}}}.$$

De seguida, estuda-se a equação diferencial ordinária

$$h' + \frac{C_1}{2} h^{2\varphi-1} = \frac{K}{(Bt+1)^{\frac{2\varphi-1}{2(\varphi-1)}}}. \quad (4.58)$$

Se as constantes satisfazem

$$K < C b(0)^{\frac{2\varphi-1}{2}}, \quad B = (b(0)^{\frac{2\varphi-1}{2}} - K)(\varphi - 1) b(0)^{-\frac{1}{2}},$$

então

$$h = \frac{b_0^{\frac{1}{2}}}{(Bt+1)^{\frac{1}{2(\varphi-1)}}}$$

são soluções desta equação e são majorantes das funções g . Voltando à função b , conclui-se a estimativa desejada. ■

4.5 Solução semidiscreta

Nesta secção, discretiza-se o problema no espaço e obtêm-se estimativas do erro para essa discretização. Neste problema, considera-se apenas polinómios de grau 1. Então, S_h irá denotar o conjunto das funções contínuas em $\bar{\Omega}$ que se anulam na fronteira $\partial\Omega$ e que são polinómio de grau 1, em cada triângulo, ou seja,

$$S_h = \{\chi \in C_0^0(\bar{\Omega}) \mid \chi|_{T_k} \text{ é um polinómio de grau 1 } \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}.$$

Seja $\{P_j\}_{j=1}^{np}$ o conjunto dos vértices interiores de \mathcal{T}_h , então qualquer função de S_h é unicamente definida pelo seu valor em cada ponto P_j . Seja $\psi_j \in S_h$ a função pirâmide que toma valor 1 no ponto P_j e que se anula em todos os outros vértices. $\{\psi_j\}_{j=1}^{np}$ forma uma base de S_h , então pode representar-se cada função $\chi \in S_h$ da forma

$$\chi = \sum_{j=1}^{np} \chi_j \psi_j.$$

O problema semidiscreto, baseado na definição 4.1, consiste em calcular as funções u_h, v_h ,

pertencentes a S_h para $t \geq 0$, tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (u_h)_t \chi \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(u_h), l_2(v_h)) \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_h|^{p-2} u_h \chi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_1 \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_h \\ \int_{\Omega} (v_h)_t \chi \, d\mathbf{x} + a_2(l_1(u_h), l_2(v_h)) \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} |v_h|^{p-2} v_h \chi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f_2 \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_h \\ u_h(\mathbf{x}, 0) = \Pi_{P_1(S_h)} u_0, \quad v_h(\mathbf{x}, 0) = \Pi_{P_1(S_h)} v_0 \end{array} \right. \quad (4.59)$$

Utilizando a base $\{\psi_j\}_{j=1}^{np}$, o problema semidiscreto também pode ser formulado da seguinte forma: calcular os coeficientes $\alpha_j(t), \beta_j(t)$ em

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{np} \alpha_j(t) \psi_j(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad v_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{np} \beta_j(t) \psi_j(\mathbf{x}),$$

tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{np} \alpha_j'(t) \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{np} a_1(l_1(\sum_{k=1}^{np} \alpha_k \psi_k), l_2(\sum_{k=1}^{np} \beta_k \psi_k)) \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{x} \alpha_j = \\ = -\lambda_1 \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} |\sum_{j=1}^{np} \alpha_j \psi_j|^{p-2} \sum_{j=1}^{np} \alpha_j \psi_j \psi_i \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \psi_i f_1 \, d\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, np \\ \sum_{j=1}^{np} \beta_j'(t) \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{np} a_2(l_1(\sum_{k=1}^{np} \alpha_k \psi_k), l_2(\sum_{k=1}^{np} \beta_k \psi_k)) \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{x} \beta_j = \\ = -\lambda_2 \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} |\sum_{j=1}^{np} \beta_j \psi_j|^{p-2} \sum_{j=1}^{np} \beta_j \psi_j \psi_i \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \psi_i f_2 \, d\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, np \\ \alpha_j(0) = \alpha_j^0 = u_0(P_j), \quad \beta_j(0) = \beta_j^0 = v_0(P_j), \quad j = 1, \dots, np \end{array} \right. \quad (4.60)$$

O sistema (4.60) pode ser escrito na forma matricial como

$$\mathcal{M}\omega' + \mathcal{A}(\omega)\omega = \mathcal{F}(\omega), \quad \omega(0) = \omega_0, \quad (4.61)$$

com $\omega = (\alpha_1, \dots, \alpha_{np}, \beta_1, \dots, \beta_{np})$, $\omega_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_{np}^0, \beta_1^0, \dots, \beta_{np}^0)$,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad M = [M_{ij}], \quad M_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \, d\mathbf{x},$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1(l_1(\sum_{k=1}^{np} \alpha_k \psi_k), l_2(\sum_{k=1}^{np} \beta_k \psi_k))A & 0 \\ 0 & a_2(l_1(\sum_{k=1}^{np} \alpha_k \psi_k), l_2(\sum_{k=1}^{np} \beta_k \psi_k))A \end{bmatrix},$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{x},$$

$$\mathcal{F} = (F^u, F^v), \quad F_i^u = -\lambda_1 \int_{\Omega} |\sum_{j=1}^{np} \alpha_j \psi_j|^{p-2} \sum_{j=1}^{np} \alpha_j \psi_j \psi_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \psi_i f_1 \, d\mathbf{x},$$

$$F_i^v = -\lambda_2 \int_{\Omega} |\sum_{j=1}^{np} \beta_j \psi_j|^{p-2} \sum_{j=1}^{np} \beta_j \psi_j \psi_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \psi_i f_2 \, d\mathbf{x}.$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

(4.61) é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A demonstração de existência de solução para este sistema resulta do teorema de Carathéodory. A demonstração da unicidade é semelhante à demonstração do teorema 4.3.

Teorema 4.14 *Seja $p \geq 2$. Se (u, v) é solução do problema (4.2) e (u_h, v_h) é solução do problema (4.59), supondo que u e v são suficientemente regulares, então*

$$\|u_h - u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_h - v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq Ch^4, \quad t \in]0, T],$$

onde C não depende de h .

Demonstração

Antes de mais, saliente-se que a solução (u, v) de (4.2) também satisfaz (4.59).

Escrevendo $u_h - u = u_h - R_h u + R_h u - u = \theta + \eta$ e $v_h - v = v_h - R_h v + R_h v - v = \rho + \mu$ e pelo lema 2.84, pode concluir-se que

$$\|\eta\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)} \text{ e } \|\mu\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2 |v|_{H^2(\Omega)}.$$

Então, só é preciso estimar θ e ρ .

Por simplicidade, denota-se $a_{1h} = a_1(l_1(u_h), l_2(v_h))$ e $a_1 = a_1(l_1(u), l_2(v))$.

Tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta_t \chi \, dx + a_{1h} \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla \chi \, dx &= \\ &= \int_{\Omega} (u_h)_t \chi \, dx + a_{1h} \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \chi \, dx - \int_{\Omega} (R_h u)_t \chi \, dx - a_{1h} \int_{\Omega} \nabla R_h u \cdot \nabla \chi \, dx = \\ &= -\lambda_1 \int_{\Omega} |u_h|^{p-2} u_h \chi \, dx + \int_{\Omega} \chi f_1 \, dx - \int_{\Omega} u_t \chi \, dx - a_1 \int_{\Omega} \nabla R_h u \cdot \nabla \chi \, dx - \int_{\Omega} \eta_t \chi \, dx + \\ &\quad + (a_1 - a_{1h}) \int_{\Omega} \nabla R_h u \cdot \nabla \chi \, dx = \\ &= -\lambda_1 \int_{\Omega} |u_h|^{p-2} u_h \chi \, dx + \int_{\Omega} \chi f_1 \, dx - \int_{\Omega} u_t \chi \, dx - a_1 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \chi \, dx - \int_{\Omega} \eta_t \chi \, dx + \\ &\quad + (a_1 - a_{1h}) \int_{\Omega} \nabla R_h u \cdot \nabla \chi \, dx = \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} (|u_h|^{p-2} u_h - |u|^{p-2} u) \chi \, dx - \int_{\Omega} \eta_t \chi \, dx + (a_1 - a_{1h}) \int_{\Omega} \nabla R_h u \cdot \nabla \chi \, dx. \end{aligned}$$

Se se considerar $\chi = \theta$, se utilizar o lema 2.4 e o facto de u e u_h serem limitadas, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^- \|\nabla \theta\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq C \int_{\Omega} |u_h - u| |\theta| \, dx + \int_{\Omega} |\eta_t| |\theta| \, dx + |a_1 - a_{1h}| \int_{\Omega} |\nabla R_h u| |\nabla \theta| \, dx \\ &\leq C(\|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2) + C\|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + C\|\eta_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + C\|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &\quad + C(\|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{L_2(\Omega)}^2) + a^- \|\nabla \theta\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, usam-se os resultados

$$\|\nabla R_h u\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq Cl_h \|u\|_{L_{\infty}(\Omega)}, \quad l_h = \max\{1, \log(1/h)\}$$

e

$$|a_1 - a_{1h}| \leq A_1 |l_1(u) - l_1(u_h)| + B_1 |l_2(v) - l_2(v_h)| = A_1 |l_1(u - u_h)| + B_1 |l_2(v - v_h)|$$

$$\leq C_1 \|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|v - v_h\|_{L_2(\Omega)}.$$

Simplificando, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C(\|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\eta_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{L_2(\Omega)}^2).$$

Utilizando os mesmos argumentos para ρ , pode concluir-se que

$$\frac{d}{dt} \|\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C(\|\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2).$$

Somando estas duas desigualdades, vem que

$$\frac{d}{dt} (\|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho\|_{L_2(\Omega)}^2) \leq C(\|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\eta_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu_t\|_{L_2(\Omega)}^2).$$

Integrando em t no intervalo $[0, T]$, obtém-se

$$\begin{aligned} & \|\theta(\mathbf{x}, T)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho(\mathbf{x}, T)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \|\theta(\mathbf{x}, 0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho(\mathbf{x}, 0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + C \int_0^T (\|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\eta_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu_t\|_{L_2(\Omega)}^2) dt. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.79, tem-se que $\|\theta(\mathbf{x}, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2|u_0|_{H^2(\Omega)}$ e $\|\rho(\mathbf{x}, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2|v_0|_{H^2(\Omega)}$.

Recordando as estimativas de η e μ e como $\|\eta_t\|_{L_2(\Omega)} = \|\Pi_{S_h} u_t - u_t\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2|u_t|_{H^2(\Omega)}$ e $\|\mu_t\|_{L_2(\Omega)} = \|R_h v_t - v_t\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2|v_t|_{H^2}$, pode inferir-se que

$$\|\theta\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq Ch^4,$$

o que termina a demonstração. ■

4.6 Solução totalmente discreta

Para finalizar o estudo teórico do problema, discretiza-se o mesmo também no tempo e procuram-se estimativas do erro para essa discretização.

Como se considera que não há possibilidade de confusão, para simplificar a notação, omite-se a dependência de h nesta secção. Seja $\delta > 0$ e considere-se a partição $]0, T] = \cup_{n=1}^{n_i} I_n$, $I_n =]t_{n-1}, t_n]$, com $t_n = t_{n-1} + \delta$. A discretização no tempo é feita utilizando o método de Euler regressivo. Neste método, a derivada temporal, $u_t(\mathbf{x}, t_n)$, é aproximada em cada instante t_n pela diferença finita

$$\bar{\partial}u(\mathbf{x}, t_n) = \frac{u(\mathbf{x}, t_n) - u(\mathbf{x}, t_{n-1})}{\delta}.$$

Sejam $U_n(\mathbf{x})$ a aproximação de $u(\mathbf{x}, t_n)$ e $V_n(\mathbf{x})$ a aproximação de $v(\mathbf{x}, t_n)$, no espaço S_h . Então, o problema totalmente discreto será, neste caso, calcular as funções U_n e V_n , pertencen-

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

centes a S_h , tais que se anulem na fronteira de Ω e satisfaçam

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \bar{\partial} U_n \chi \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(U_n), l_2(V_n)) \int_{\Omega} \nabla U_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |U_n|^{p-2} U_n \chi \, d\mathbf{x} = \\ \quad = \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t_n) \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_h, \quad n = 1, \dots, ni \\ \int_{\Omega} \bar{\partial} V_n \chi \, d\mathbf{x} + a_2(l_1(U_n), l_2(V_n)) \int_{\Omega} \nabla V_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} |V_n|^{p-2} V_n \chi \, d\mathbf{x} = \cdot \\ \quad = \int_{\Omega} f_2(\mathbf{x}, t_n) \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_h, \quad n = 1, \dots, ni \\ U_0 = \Pi_{\mathbb{P}_1(S_h)} u_0, \quad V_0 = \Pi_{\mathbb{P}_1(S_h)} v_0 \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Utilizando outra vez a base $\{\psi_j\}_{j=1}^{np}$ e definindo $U_n = \sum_{j=1}^{np} \alpha_j^n \psi_j$ e $V_n = \sum_{j=1}^{np} \beta_j^n \psi_j$, o sistema (4.62) pode ser escrito em forma matricial como

$$\mathcal{M}\omega_n + \delta\mathcal{A}(\omega_n)\omega_n = \delta\mathcal{F}(\omega_n) + \mathcal{M}\omega_{n-1}, \quad n = 1, \dots, ni, \quad (4.63)$$

com $\omega_n = (\alpha_1^n, \dots, \alpha_{np}^n, \beta_1^n, \dots, \beta_{np}^n)$, $n = 0, \dots, ni$.

O sistema de equações algébricas (4.63) é não linear e tem de ser resolvido em cada passo no tempo. A não linearidade está na presença de ω_n nos termos $\mathcal{A}(\omega_n)$ e $\mathcal{F}(\omega_n)$. Para se evitar a aplicação de um método iterativo, e conseqüente aumento do custo computacional e do erro, considera-se uma linearização do sistema substituindo ω_n por ω_{n-1} , nesses dois termos. Então, o problema totalmente discreto é calcular U_n e V_n , tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \bar{\partial} U_n \chi \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(U_{n-1}), l_2(V_{n-1})) \int_{\Omega} \nabla U_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} + \lambda_1 \int_{\Omega} |U_{n-1}|^{p-2} U_{n-1} \chi \, d\mathbf{x} = \\ \quad = \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t_n) \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_h, \quad n = 1, \dots, ni \\ \int_{\Omega} \bar{\partial} V_n \chi \, d\mathbf{x} + a_2(l_1(U_{n-1}), l_2(V_{n-1})) \int_{\Omega} \nabla V_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} + \lambda_2 \int_{\Omega} |V_{n-1}|^{p-2} V_{n-1} \chi \, d\mathbf{x} = \cdot \\ \quad = \int_{\Omega} f_2(\mathbf{x}, t_n) \chi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \chi \in S_h, \quad n = 1, \dots, ni \\ U_0 = \Pi_{\mathbb{P}_1(S_h)} u_0, \quad V_0 = \Pi_{\mathbb{P}_1(S_h)} v_0 \end{array} \right. \quad (4.64)$$

o que é equivalente a calcular o vetor $\omega_n = (\alpha_1^n, \dots, \alpha_{np}^n, \beta_1^n, \dots, \beta_{np}^n)$ solução do seguinte sistema linear:

$$(\mathcal{M} + \delta\mathcal{A}(\omega_{n-1}))\omega_n = \delta\mathcal{F}(\omega_{n-1}) + \mathcal{M}\omega_{n-1}, \quad n = 1, \dots, ni. \quad (4.65)$$

Este sistema possui sempre solução, uma vez que $\mathcal{M} + \delta\mathcal{A}(\omega_{n-1})$ é definida positiva. Esta secção termina com a estimativa do erro para a aproximação totalmente discreta da solução do problema inicial.

Teorema 4.15 *Seja $p \geq 2$. Se (u, v) é solução do problema (4.2) e (U_n, V_n) solução de (4.64),*

supondo que u e v são suficientemente regulares, então

$$\|U_n(x) - u(x, t_n)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|V_n(x) - v(x, t_n)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C(h^2 + \delta)^2, \quad n = 1, \dots, ni,$$

onde C não depende de h nem de δ .

Demonstração

Denote-se por $u_n = u(\mathbf{x}, t_n)$ e $v_n = v(\mathbf{x}, t_n)$. Da mesma forma como anteriormente, escreve-se

$$U_n - u_n = (U_n - R_h u_n) + (R_h u_n - u_n) = \theta_n + \eta_n$$

e

$$V_n - v_n = (V_n - R_h v_n) + (R_h v_n - v_n) = \rho_n + \mu_n.$$

De seguida, estima-se θ_n e ρ_n .

Aplicando as propriedades de R_h , tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\partial} \theta_n \chi \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(U_{n-1}), l_2(V_{n-1})) \int_{\Omega} \nabla \theta_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} = \\ & = \int_{\Omega} \bar{\partial} U_n \chi \, d\mathbf{x} + a_1(l_1(U_{n-1}), l_2(V_{n-1})) \int_{\Omega} \nabla U_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} - \\ & \quad - \int_{\Omega} \bar{\partial} R_h u_n \chi \, d\mathbf{x} - a_1(l_1(U_{n-1}), l_2(V_{n-1})) \int_{\Omega} \nabla R_h u_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} = \\ & = -\lambda_1 \int_{\Omega} |U_{n-1}|^{p-2} U_{n-1} \chi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}, t_n) \chi \, d\mathbf{x} - a_1(l_1(u_n), l_2(v_n)) \int_{\Omega} \nabla R_h u_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} - \\ & \quad - \int_{\Omega} (u_n)_t \chi \, d\mathbf{x} + (a_1(l_1(U_{n-1}), l_2(V_{n-1})) - a_1(l_1(u_n), l_2(v_n))) \int_{\Omega} \nabla R_h u_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x} - \\ & \quad - \int_{\Omega} (\bar{\partial} R_h u_n - (u_n)_t) \chi \, d\mathbf{x} = \\ & = \lambda_1 \int_{\Omega} (|u_n|^{p-2} u_n - |U_{n-1}|^{p-2} U_{n-1}) \chi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \bar{\partial} \eta_n \chi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\bar{\partial} u_n - (u_n)_t) \chi \, d\mathbf{x} + \\ & \quad + (a_1(l_1(U_{n-1}), l_2(V_{n-1})) - a_1(l_1(u_n), l_2(v_n))) \int_{\Omega} \nabla R_h u_n \cdot \nabla \chi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Fazendo $\chi = \theta_n$ e usando o lema 2.4, obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{\partial} \|\theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + a^- \|\nabla \theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |U_{n-1} - u_n| |\theta_n| \, d\mathbf{x} + C(\|U_{n-1} - u_n\|_{L_2(\Omega)} + \\ & \quad + \|V_{n-1} - v_n\|_{L_2(\Omega)}) \int_{\Omega} |\nabla \theta_n| \, d\mathbf{x} + (\|\bar{\partial} \eta_n\|_{L_2(\Omega)} + \|\bar{\partial} u_n - (u_n)_t\|_{L_2(\Omega)}) \|\theta_n\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq C(\|\theta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \|\eta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \delta \|\bar{\partial} u_n\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \|\mu_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \delta \|\bar{\partial} v_n\|_{L_2(\Omega)} + \\ & \quad + \|\bar{\partial} \eta_n\|_{L_2(\Omega)} + \|\bar{\partial} u_n - (u_n)_t\|_{L_2(\Omega)}) \|\nabla \theta_n\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Na desigualdade acima, usa-se a desigualdade de Poincaré $\|\theta_n\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\nabla \theta_n\|_{L_2(\Omega)}$ e as duas desigualdades seguintes:

$$\|U_{n-1} - u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\|\theta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \|\eta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \delta \|\bar{\partial} u_n\|_{L_2(\Omega)}),$$

$$\|V_{n-1} - v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\|\rho_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \|\mu_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \delta \|\bar{\partial} v_n\|_{L_2(\Omega)}).$$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

Então, após simplificar o termo $a^- \|\nabla\theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2$ com a desigualdade de Cauchy, chega-se a

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\|\theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq C\|\theta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + C(\|\eta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \delta\|\bar{\partial}u_n\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \|\mu_{n-1}\|_{L_2(\Omega)} + \\ &\quad + \delta\|\bar{\partial}v_n\|_{L_2(\Omega)} + \|\bar{\partial}\eta_n\|_{L_2(\Omega)} + \|\bar{\partial}u_n - (u_n)_t\|_{L_2(\Omega)})^2. \end{aligned}$$

Utilizando o lema 2.79, conclui-se que $\|\eta_n\|_{L_2(\Omega)} \leq C(u)h^2$ e $\|\mu_n\|_{L_2(\Omega)} \leq C(v)h^2$. Tem-se também que

$$\|\bar{\partial}\eta_n\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \delta^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\eta(\mathbf{x}, \varsigma))_t d\varsigma \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C(u)h^2$$

e

$$\|\bar{\partial}\mu_n\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \delta^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\mu(\mathbf{x}, \varsigma))_t d\varsigma \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C(v)h^2.$$

Por outro lado,

$$\|\bar{\partial}u_n - (u_n)_t\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \delta^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})u_{tt}(\varsigma) d\varsigma \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C(u)\delta$$

e

$$\|\bar{\partial}v_n - (v_n)_t\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \delta^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})v_{tt}(\varsigma) d\varsigma \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C(v)\delta.$$

Então, obtém-se

$$\bar{\partial}\|\theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C\|\theta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + C(h^2 + \delta)^2.$$

Da mesma forma, pode provar-se que

$$\bar{\partial}\|\rho_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C\|\rho_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + C(h^2 + \delta)^2.$$

Somando os resultados, vem

$$\bar{\partial}(\|\theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho_n\|_{L_2(\Omega)}^2) \leq C(\|\theta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2) + C(h^2 + \delta)^2.$$

Mostrou-se que

$$\|\theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq (1 + C\delta)(\|\theta_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho_{n-1}\|_{L_2(\Omega)}^2) + C\delta(h^2 + \delta)^2.$$

Iterando sucessivamente, chega-se a

$$\|\theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C(\|\theta_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho_0\|_{L_2(\Omega)}^2) + C(h^2 + \delta)^2.$$

Pelo Lema 2.79, conclui-se que

$$\|\theta_n\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\rho_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C(u, v)(h^2 + \delta)^2.$$

Adicionado as estimativas de $\|\eta_n\|_{L_2(\Omega)}$ e $\|\mu_n\|_{L_2(\Omega)}$, termina-se a demonstração. ■

4.7 Resultados numéricos

Para exemplificar e confirmar a teoria exposta anteriormente, apresentam-se exemplos da implementação, em Matlab, da solução do problema totalmente discreto. Uma vez que não conhecemos soluções explícitas para o problema em estudo, não é possível fazer um estudo numérico da convergência.

4.7.0.5 Localização da solução

Para testar o algoritmo numérico, simula-se um exemplo em que a solução inicial está localizada apenas em parte do domínio. Considere-se o sistema (4.2) em $\Omega =]0, 1[^2$ com $p = 3$ e

$$a_1(l_1, l_2) = 3 + \text{sen}(l_1) + \cos(l_2), \quad a_2(l_1, l_2) = 5 + \text{sen}(l_2) - \cos(l_1).$$

A hipótese H2 é satisfeita com $a^- = 1$ e $a^+ = 7$ e a hipótese H3 também é válida. Como antes, considera-se $l_1(w) = l_2(w) = \int_{\Omega} w \, dx$. As condições iniciais são

$$u_0 = 20(0.1 - (x - 0.2)^2 - (y - 0.2)^2) \text{ e } v_0 = 20(0.1 - (x - 0.8)^2 - (y - 0.8)^2).$$

Os coeficientes λ_1 e λ_2 são ambos iguais a um. As fontes externas são dadas por

$$f_1(x, y, t) = 0.1 \left(\frac{1}{(t+1)^{10}} \right) e^{-x-y} \text{ e } f_2(x, y, t) = 0.1(x-y) \left(\frac{1}{(t+1)^7} \right).$$

Os parâmetros do método dos elementos finitos são $h = 0.05$, $\delta = 10^{-3}$ e a malha está representada na figura 4.3.

Na figura 4.1, mostra-se a evolução no tempo para estimativa de u obtida e, na figura 4.2, mostra-se a evolução no tempo para a estimativa de v . A solução expande-se a todo o domínio e tende para zero. O decaimento é mais evidente na figura 4.4 onde se representa a função $b(t)$.

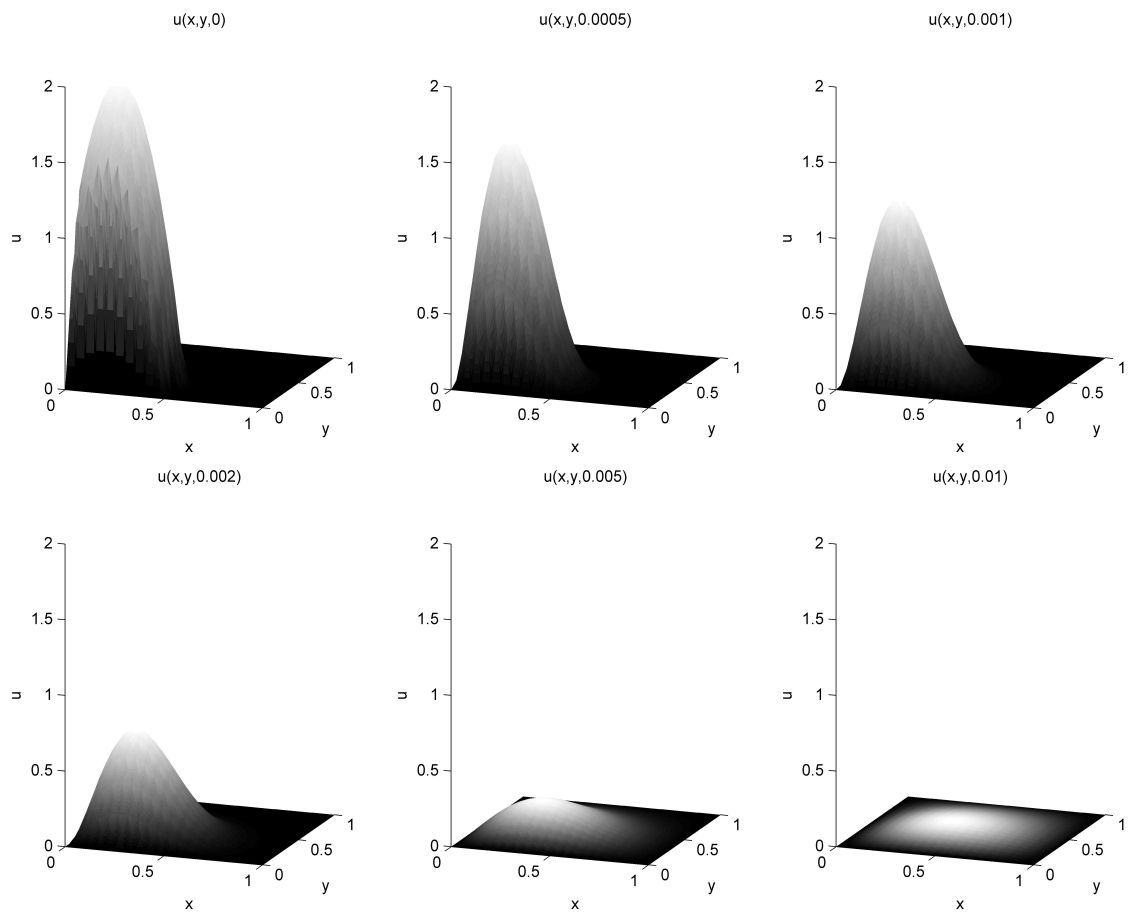


Figura 4.1: Evolução no tempo da aproximação de u obtida no problema da localização da solução.

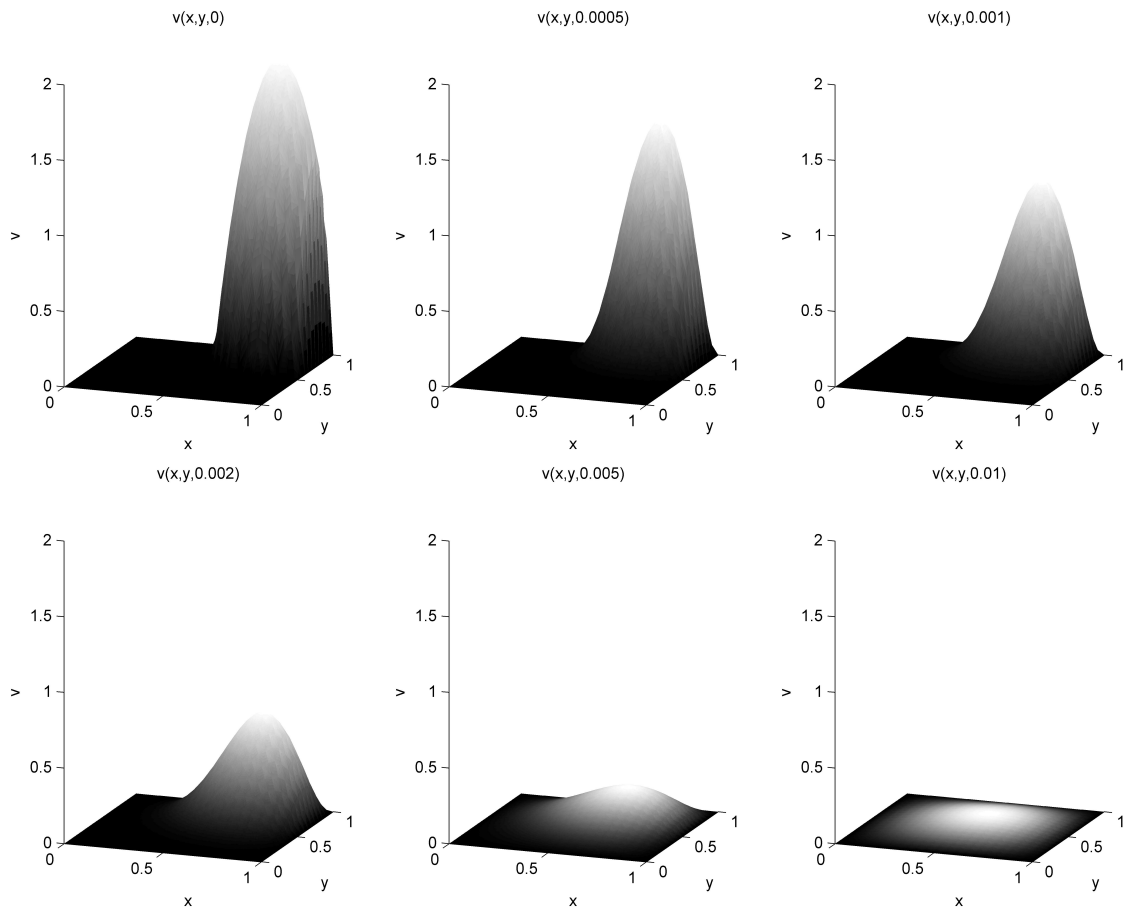


Figura 4.2: Evolução no tempo da aproximação de v obtida no problema da localização da solução.

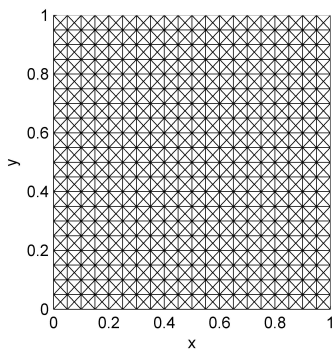


Figura 4.3: Malha espacial para $h = 0.05$ usada no problema da localização da solução.

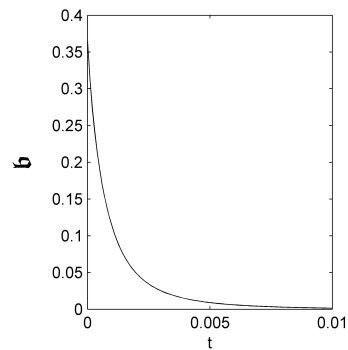


Figura 4.4: Função de energia $b(t)$ no problema da localização da solução.

4.7.0.6 Extinção em tempo finito e decaimento polinomial

Numa secção anterior, foi demonstrado que as soluções do sistema (4.2) com $1 < p < 2$ têm a propriedade da extinção em tempo finito se as funções f_i satisfizerem algumas condições e têm a propriedade de decaimento polinomial se $p \geq 2$ e f_i decaírem de forma adequada. No sentido de estudar estas propriedades, simula-se um exemplo com $p = 1.6$ e depois com $p = 3$ mantendo iguais todos os outros parâmetros. Embora não tenha sido provada a convergência para $p = 1.6$, os resultados estão de acordo com a teoria.

Considere-se o sistema (4.2) em $\Omega =]0, 1]^2$ com

$$a_1(l_1, l_2) = 3 + \text{sen}(l_1) + \cos(l_2), \quad a_2(l_1, l_2) = 5 + \text{sen}(l_2) - \cos(l_1).$$

A hipótese H2 é satisfeita com $a^- = 1$ e $a^+ = 7$. H3 é válida para $A_i, B_i \geq 2$. Considere-se $l_1(w) = l_2(w) = \int_{\Omega} w \, dx$ que satisfaz H4 com $g_i = 1$. As condições iniciais são

$$u_0 = 2(x - 1)(y - 1)xy \text{ e } v_0 = 0.5(x - 1)(y - 1)xy.$$

Então, H1 também está satisfeita.

Os coeficientes λ_1 e λ_2 são ambos iguais a um. As fontes externas são dadas por

$$f_1 = 0.01 \ln(x + y + 1)[0.1 - t]_+^6 \text{ e } f_2 = 0.01 \text{sen}(xy)[0.1 - t]_+^4.$$

Os parâmetros do método dos elementos finitos são $\delta = 10^{-5}$ e $h = 0.025$. O domínio é discretizado usando uma malha estruturada como mostra a figura 4.7.

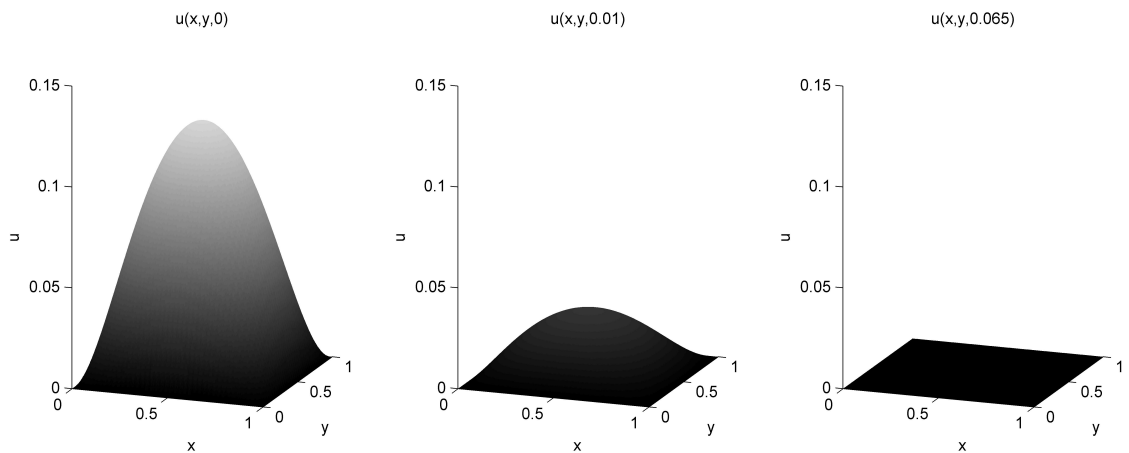


Figura 4.5: Evolução no tempo da aproximação de u obtida no problema com extinção em tempo finito e decaimento polinomial.

Na figura 4.5, mostra-se a evolução no tempo para a estimativa de u e na figura 4.6 mostra-se a evolução no tempo para a estimativa de v obtidas para $p = 1.6$. Como era de esperar, as funções u e v são zero para $t \geq 0.065$. O comportamento da solução para $p = 3$ é semelhante ao comportamento da solução com $p = 1.6$, excepto o facto de o valor de u e v ser pequeno para $t \geq 0.065$, mas não ser zero.

De forma a verificar o comportamento assintótico, representou-se na figura 4.8 a função de energia b , com uma escala logarítmica no eixo das ordenadas. Pela observação da figura torna-se evidente que b se extingue em $t \approx 0.065$ para $p = 1.6$ e, no caso $p = 3$, b tende para zero mas não se extingue.

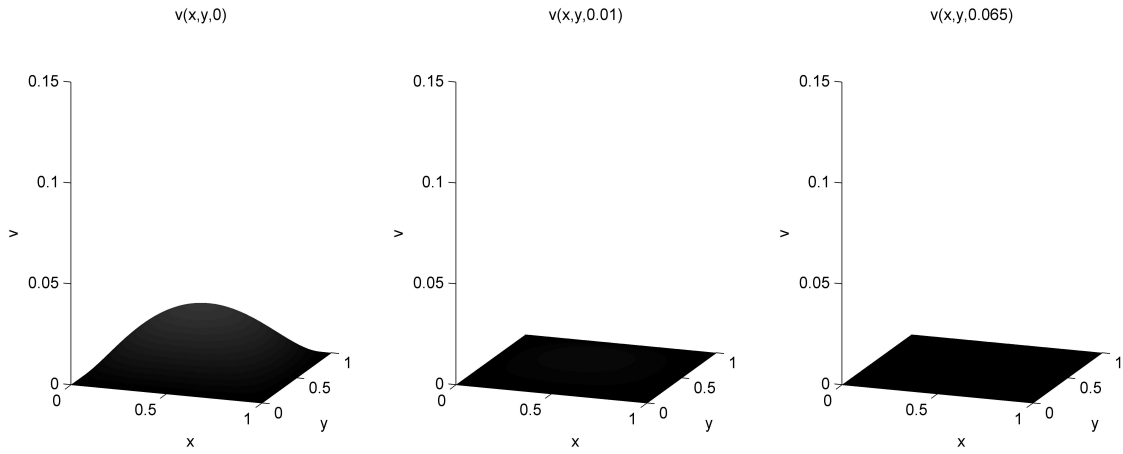


Figura 4.6: Evolução no tempo da aproximação de v obtida no problema com extinção em tempo finito e decaimento polinomial.

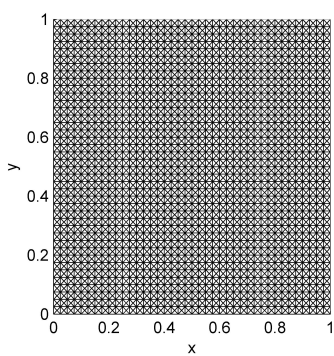


Figura 4.7: Malha espacial para $h = 0.025$ no problema com extinção em tempo finito e decaimento polinomial.

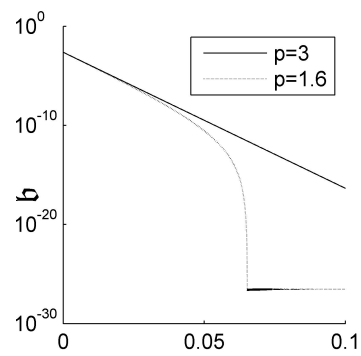


Figura 4.8: Função de energia $b(t)$ no problema com extinção em tempo finito e decaimento polinomial.

4.7.0.7 Fontes externas ilimitadas

Para último exemplo, considere-se o sistema (4.2) em $\Omega =]-1, 1[^2$ com $p = 3$, mas, neste caso, os termos de difusão são da forma

$$a_1(l_1, l_2) = 2 + \frac{1}{1+l_2^2} - \frac{1}{1+l_1^2}, \quad a_2(l_1, l_2) = 3 + \frac{2}{1+l_1^2} - \frac{1}{1+l_2^2}.$$

A hipótese H2 é satisfeita com $a^- = 1$ e $a^+ = 5$ e a hipótese H3 também é válida. Considere-se da mesma forma $l_1(w) = l_2(w) = \int_{\Omega} w \, dx$. As condições iniciais são

$$u_0 = 2(x^2 - 1)(y^2 - 1) \text{ e } v_0 = 3(0.04 - (x - 0.5)^2 - (y - 0.5)^2)_+.$$

Então, a hipótese H1 também é satisfeita. Os coeficientes λ_1 e λ_2 são 0.5 e 2, respetivamente.

Neste exemplo, consideram-se fontes externas da forma

$$f_1(x, y, t) = x^2 + y^2 + t \text{ e } f_2(x, y, t) = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 5t.$$

Estas funções não satisfazem as condições dos teoremas, mas é interessante ver o comportamento das soluções. Os parâmetros do método dos elementos finitos e malha são os mesmos do exemplo anterior.

Da mesma forma e como no exemplo anterior, na figura 4.9, mostra-se a evolução, no tempo, da estimativa obtida para u e, na figura 4.10, mostra-se a evolução da estimativa obtida para v nos mesmos instantes. Verifica-se que a solução u decresce e, uma vez que já estava inicialmente definida em todo o domínio, não se verifica nenhuma expansão. A solução v tem um comportamento completamente diferente. Inicialmente, expande-se a todo o domínio e decresce, mas, a partir de certo instante, começa a crescer indefinidamente. Este facto pode ser justificado pela expressão de f_2 que é crescente no tempo e o seu efeito começa ser dominante a partir de certo instante.

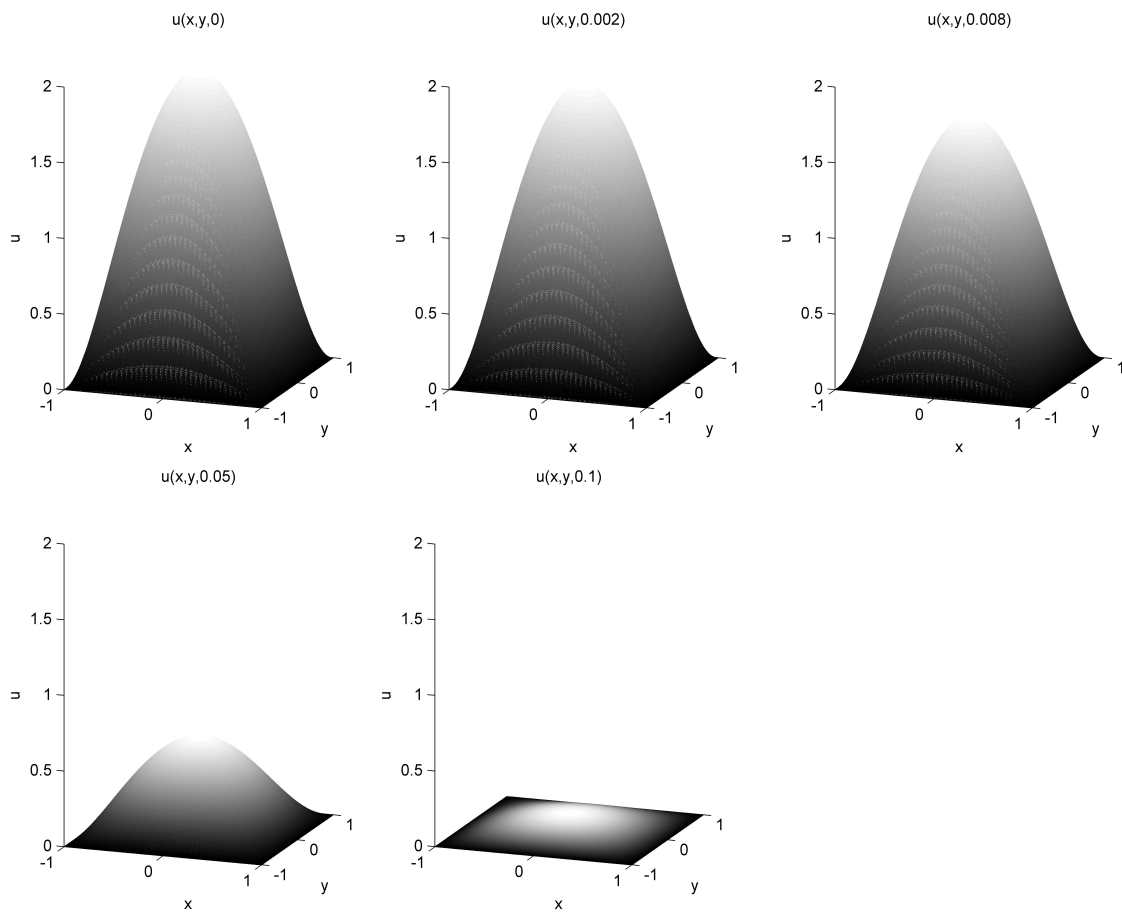


Figura 4.9: Evolução no tempo da aproximação de u obtida no problema com fontes externas ilimitadas.

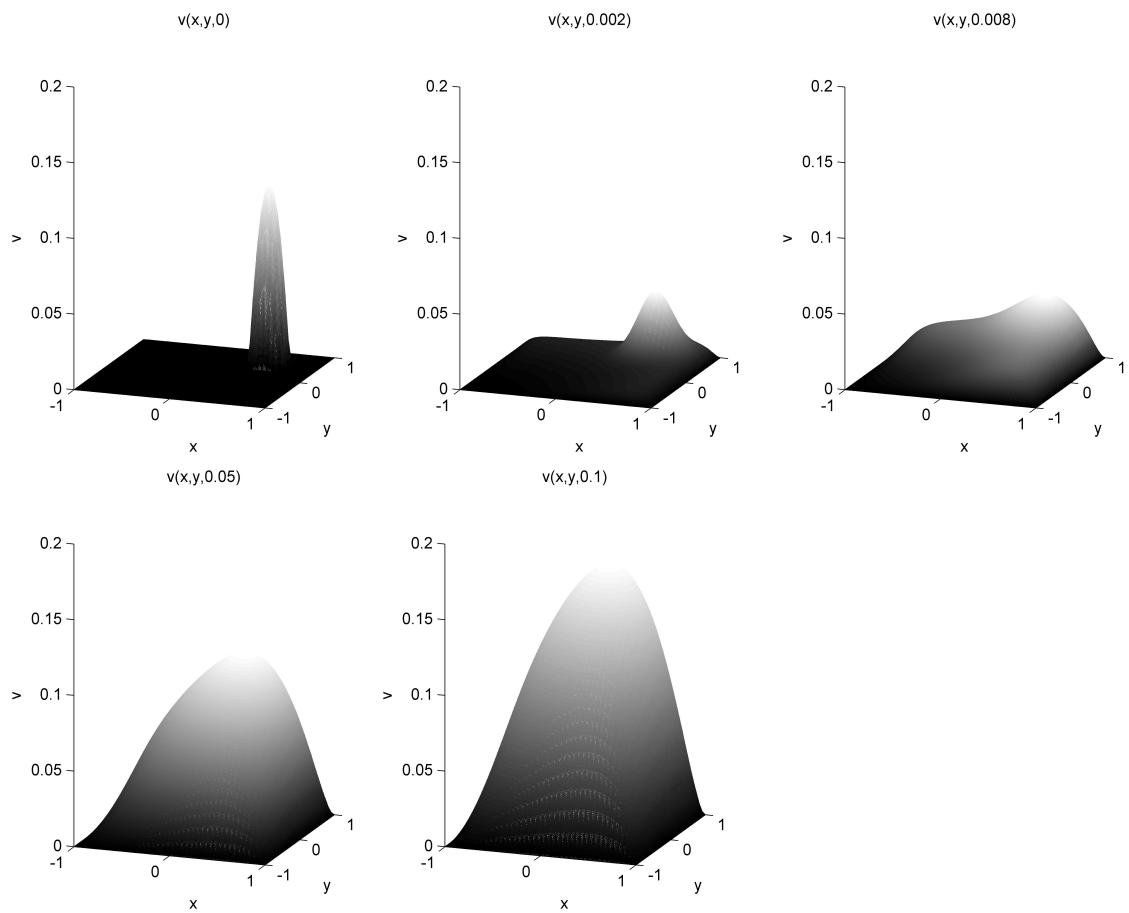


Figura 4.10: Evolução no tempo da aproximação de v obtida no problema com fontes externas ilimitadas.

Capítulo 5

Conclusão e Trabalho Futuro

Com este trabalho, foi demonstrada a convergência do método de elementos finitos de Galerkin para a equação de meios porosos com expoente γ dependente da variável espacial num domínio fixo. Os resultados numéricos apresentados estão em linha com a exposição teórica. Ainda estão em estudo, os casos em que γ também depende do tempo e onde γ é inferior a 1.

Foi também apresentado um método dos elementos finitos para resolver o problema, com γ dependente da variável espacial e temporal, num domínio com fronteiras livres. O programa resultante da implementação deste método, em Matlab, foi testado em alguns problemas. O estudo efetuado evidencia que o método permite estimar eficientemente a fronteira e a solução. O aumento do grau do polinómio interpolador permite obter melhores estimativas utilizando menos elementos finitos.

Nos exemplos simulados, o movimento da fronteira esteve de acordo com as suposições feitas nas deduções das respetivas equações. A demonstração exata dessas equações parece ser um problema aliciante para estudos futuros. Outro problema interessante de estudar, em trabalho futuro, é a obtenção de estimativas do erro e de ordens de convergência para as aproximações obtidas em domínios com fronteira livre.

No trabalho, demonstrou-se ainda a existência e unicidade de soluções fortes para um sistema de reação-difusão com coeficiente de difusão não local. Estabeleceram-se condições para a existência de tempo de espera e localização estável das soluções. Estudou-se o comportamento assintótico das soluções fracas obtendo-se condições para a extinção em tempo finito e decaimento polinomial ou exponencial. Provou-se a ordem de convergência ótima para um método de elementos finitos de Euler-Galerkin linearizado. Os resultados da implementação, em Matlab, do método estão em linha com os resultados teóricos.

A aplicação do método dos elementos finitos em domínios com fronteiras livres para o sistema não local está em fase de conclusão. Está também em estudo um sistema não local degenerado, considerando o caso em que uma das espécies se extingue tornando o termo difusivo nulo. Um problema de bastante interesse é o estudo numérico de equações e sistemas não locais onde o termo difusivo depende do integral do gradiente da solução.

Bibliografia

- [1] A. S. Ackleh and L. Ke. Existence-uniqueness and long time behavior for a class of non-local nonlinear parabolic evolution equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(12):3483-3492 (electronic), 2000. 13
- [2] S. Angenent. Analyticity of the interface of the porous media equation after the waiting time. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(2):329-336, 1988. 4
- [3] S. N. Antontsev, J. I. Díaz, and S. I. Shmarev. *Energy methods for free boundary problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 48. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. 81, 84
- [4] S. N. Antontsev and S. I. Shmarev. A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions. *Nonlinear Anal.*, 60(3):515-545, 2005. 6, 7, 9, 35, 41
- [5] S. N. Antontsev and S. I. Shmarev. Existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations with variable exponents of nonlinearity. *Fundam. Prikl. Mat.*, 12(4):3-19, 2006. 6
- [6] D. G. Aronson. Regularity properties of flows through porous media. *SIAM J. Appl. Math.*, 17:461-467, 1969. 3
- [7] D. G. Aronson. Regularity properties of flows through porous media: The interface. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 37:1-10, 1970. 4
- [8] D. G. Aronson and J. L. Vázquez. Eventual C^∞ -regularity and concavity for flows in one-dimensional porous media. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 99(4):329-348, 1987. 4
- [9] M. J. Baines. *Moving finite elements*. Monographs on Numerical Analysis. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications. 31
- [10] M. J. Baines, M. E. Hubbard, and P. K. Jimack. A moving mesh finite element algorithm for fluid flow problems with moving boundaries. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 47(10-11):1077-1083, 2005. 8th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics. Part 2. 11
- [11] M. J. Baines, M. E. Hubbard, and P. K. Jimack. A moving mesh finite element algorithm for the adaptive solution of time-dependent partial differential equations with moving boundaries. *Appl. Numer. Math.*, 54(3-4):450-469, 2005. 11
- [12] M. J. Baines, M. E. Hubbard, P. K. Jimack, and A. C. Jones. Scale-invariant moving finite elements for nonlinear partial differential equations in two dimensions. *Appl. Numer. Math.*, 56(2):230-252, 2006. 11
- [13] G. I. Barenblatt. On some unsteady motions of a liquid and gas in a porous medium. *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh.*, 16:67-78, 1952. 5
- [14] L. A. Caffarelli and A. Friedman. Regularity of the free boundary of a gas flow in an n -dimensional porous medium. *Indiana Univ. Math. J.*, 29(3):361-391, 1980. 4

- [15] L. A. Caffarelli and N. I. Wolanski. $C^{1,\alpha}$ regularity of the free boundary for the N -dimensional porous media equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(7):885-902, 1990. 4
- [16] N. N. Carlson and K. Miller. Design and application of a gradient-weighted moving finite element code. I. In one dimension. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(3):728-765, 1998. 10
- [17] N. N. Carlson and K. Miller. Design and application of a gradient-weighted moving finite element code. II. In two dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(3):766-798, 1998. 10
- [18] M. Chipot and B. Lovat. Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems. In *Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 7 (Athens, 1996)*, volume 30, pages 4619-4627, 1997. 11, 12
- [19] M. Chipot and B. Lovat. On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems. *Positivity*, 3(1):65-81, 1999. 11, 12
- [20] M. Chipot and J.-F. Rodrigues. On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 26(3):447-467, 1992. 11, 12
- [21] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Reprint of the 1978 original [North-Holland, Amsterdam; MR0520174 (58 #25001)]. 15
- [22] F. J. S. A. Corrêa, S. D. B. Menezes, and J. Ferreira. On a class of problems involving a nonlocal operator. *Appl. Math. Comput.*, 147(2):475-489, 2004. 12
- [23] P. Daskalopoulos and R. Hamilton. Regularity of the free boundary for the porous medium equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 11(4):899-965, 1998. 4
- [24] C. de Boor. Good approximation by splines with variable knots. II. In *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations (Univ. Dundee, Dundee, 1973)*, pages 12-20. Lecture Notes in Math., Vol. 363. Springer, Berlin, 1974. 10
- [25] L. A. F. de Oliveira. On reaction-diffusion systems. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 24, 10 pp. (electronic), 1998. 12
- [26] M. do Carmo Coimbra, C. Sereno, and A. E. Rodrigues. A moving finite element method for the solution of two-dimensional time-dependent models. *Appl. Numer. Math.*, 44(4):449-469, 2003. 10
- [27] J. C. M. Duque, R. M. P. Almeida, and S. N. Antontsev. Método dos elementos finitos móveis para equações parabólicas em duas dimensões. In *Proceedings of the International Conference on Engineering UBI2011*, November 2011. ISBN:978-989-654-079-1. 14
- [28] J. C. M. Duque, R. M. P. Almeida, and S. N. Antontsev. Convergence of the finite element method for the porous media equation in 2D with variable exponent. In *Book of Abstracts - 6th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation - 3rd Portuguese Polish Workshop on Biometry*, July 2012. ISBN:978-972-9473-62-3. 14
- [29] J. C. M. Duque, R. M. P. Almeida, and S. N. Antontsev. Convergence of the finite element method for the porous media equation in 2D with variable exponent. http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2012/Ant_Alm_Duq_pp2012_013_cmaf.pdf, 2012. 14

- [30] J. C. M. Duque, R. M. P. Almeida, and S. N. Antontsev. Um método dos elementos finitos móveis para equações parabólicas em duas dimensões. http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2012/Antontsev_pre004.pdf, 2012. 14
- [31] J. C. M. Duque, R. M. P. Almeida, and S. N. Antontsev. Application of the moving mesh method to the porous medium equation with variable exponent. In *Proceedings of the 5th International Conference on approximation Methods and Numerical Modeling in Environment and Natural Resources*, April 2013. ISBN:978-84-338-5505-3. 14
- [32] J. C. M. Duque, R. M. P. Almeida, S. N. Antontsev, and J. Ferreira. A reaction-diffusion model for the nonlinear coupled system: existence, uniqueness, long time behavior and localization properties of solutions. http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/preprint_2013_08_Antontsev.pdf, 2013. 14
- [33] J. C. M. Duque, R. M. P. Almeida, S. N. Antontsev, and Jorge Ferreira. The Euler-Galerkin finite element method for a nonlocal coupled system of reaction-diffusion type. http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/Duq_Ant_preprint_014_2013.pdf, 2013. 14
- [34] C. Ebmeyer. Error estimates for a class of degenerate parabolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(3):1095-1112 (electronic), 1998. 8
- [35] C. Ebmeyer and W. B. Liu. Finite element approximation of the fast diffusion and the porous medium equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(5):2393-2410, 2008. 8
- [36] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. 15
- [37] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, and A. Michel. Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations. *Numer. Math.*, 92(1):41-82, 2002. 13
- [38] V. A. Galaktionov, S. I. Shmarev, and J. L. Vazquez. Regularity of interfaces in diffusion processes under the influence of strong absorption. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 149(3):183-212, 1999. 5
- [39] V. A. Galaktionov, S. I. Shmarev, and J. L. Vazquez. Second-order interface equations for nonlinear diffusion with very strong absorption. *Commun. Contemp. Math.*, 1(1):51-64, 1999. 5
- [40] V. A. Galaktionov, S. I. Shmarev, and J. L. Vazquez. Behaviour of interfaces in a diffusion-absorption equation with critical exponents. *Interfaces Free Bound.*, 2(4):425-448, 2000. 5
- [41] E. Henriques and J. M. Urbano. Intrinsic scaling for PDE's with an exponential nonlinearity. *Indiana Univ. Math. J.*, 55(5):1701-1721, 2006. 7
- [42] M. A. Herrero and J. L. Vázquez. The one-dimensional nonlinear heat equation with absorption: regularity of solutions and interfaces. *SIAM J. Math. Anal.*, 18(1):149-167, 1987. 5
- [43] W. Huang, Y. Ren, and R. D. Russell. Moving mesh partial differential equations (MMPDES) based on the equidistribution principle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(3):709-730, 1994. 10, 61

- [44] W. Huang and R. D. Russell. Moving mesh strategy based on a gradient flow equation for two-dimensional problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(3):998-1015 (electronic), 1999. 10, 62
- [45] P. K. Jimack and A. J. Wathen. Temporal derivatives in the finite-element method on continuously deforming grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(4):990-1003, 1991. 64
- [46] A. S. Kalašinkov. The occurrence of singularities in solutions of the non-steady seepage equation. *{USSR} Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7(2):269-275, 1967. 3
- [47] A. S. Kalašinkov. The nature of the propagation of perturbations in problems of nonlinear heat conduction with absorption. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 14:891-905, 1075, 1974. 4
- [48] R. Kershner. The behavior of temperature fronts in media with nonlinear heat conductivity under absorption. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (5):44-51, 1978. 6
- [49] B. F. Knerr. The porous medium equation in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234(2):381-415, 1977. 4
- [50] B. F. Knerr. The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 249(2):409-424, 1979. 5
- [51] Y. Ko. Regularity of the interface for the porous medium equation. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 68, 12 pp. (electronic), 2000. 4
- [52] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, 1968. 2, 43, 50
- [53] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc. Translation editor: Leon Ehrenpreis. Academic Press, New York, 1968. 39
- [54] S. Lian, W. Gao, C. Cao, and H. Yuan. Study of the solutions to a model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity. *J. Math. Anal. Appl.*, 342(1):27-38, 2008. 7
- [55] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969. 3
- [56] J. N. Lyness and R. Cools. A survey of numerical cubature over triangles. In *Mathematics of Computation 1943-1993: a half-century of computational mathematics (Vancouver, BC, 1993)*, volume 48 of *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pages 127-150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. 32
- [57] R. Marlow, M. E. Hubbard, and P. K. Jimack. Moving mesh methods for solving parabolic partial differential equations. *Comput. & Fluids*, 46:353-361, 2011. 11
- [58] K. Miller and R. N. Miller. Moving finite elements. I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(6):1019-1032, 1981. 9
- [59] R. H. Nochetto and C. Verdi. Approximation of degenerate parabolic problems using numerical integration. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(4):784-814, 1988. 7

- [60] A. Novotný and I. Straškraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, volume 27 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2004. 15
- [61] O. A. Oleřnik, A. S. Kalařinkov, and Yuř-Lin' Āřou. The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of non-stationary filtration. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 22:667-704, 1958. 3
- [62] C. A. Raposo, M. Sepřlveda, O. V. Villagrán, D. C. Pereira, and M. L. Santos. Solution and asymptotic behaviour for a nonlocal coupled system of reaction-diffusion. *Acta Appl. Math.*, 102(1):37-56, 2008. 12, 13
- [63] R. Robalo, M. do Carmo Coimbra, and A. E. Rodrigues. Modelling time-dependent partial equations with moving boundaries by the moving finite element method. In C.A. Motosoares, J.A.C. Martins, H.C. Rodrigues, Jorge A.C. Ambrósio, C.A.B. Pina, C.M. Motosoares, E.B.R. Pereira, and J. Folgado, editors, *III European Conference on Computational Mechanics*, pages 47-47. Springer Netherlands, 2006. 10
- [64] M. E. Rose. Numerical methods for flows through porous media. I. *Math. Comp.*, 40(162):435-467, 1983. 7
- [65] J. Rulla and N. J. Walkington. Optimal rates of convergence for degenerate parabolic problems in two dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1):56-67, 1996. 8
- [66] L. F. Shampine and M. W. Reichelt. The MATLAB ODE suite. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(1):1-22, 1997. Dedicated to C. William Gear on the occasion of his 60th birthday. 30, 65
- [67] S. I. Shmarev. Interfaces in multidimensional diffusion equations with absorption terms. *Nonlinear Anal.*, 53(6):791-828, 2003. 5
- [68] S. I. Shmarev. Interfaces in solutions of diffusion-absorption equations in arbitrary space dimension. In *Trends in partial differential equations of mathematical physics*, volume 61 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 257-273. Birkhäuser, Basel, 2005. 5
- [69] S. I. Shmarev and J. L. Vazquez. The regularity of solutions of reaction-diffusion equations via Lagrangian coordinates. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 3(4):465-497, 1996. 5
- [70] M. R. Sidi Ammi and D. F. M. Torres. Numerical analysis of a nonlocal parabolic problem resulting from thermistor problem. *Math. Comput. Simulation*, 77(2-3):291-300, 2008. 12
- [71] J. Simsen and J. Ferreira. A global attractor for a nonlocal parabolic problem. http://ptmat.fc.ul.pt/arquivo/docs/preprints/pdf/2013/preprint_Jorge_Ferreira.pdf, March 2013. 12
- [72] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. 2, 15, 29, 30, 45, 51
- [73] J. L. Vázquez. *The porous medium equation*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2007. Mathematical theory. 6

- [74] A. Wachter and I. Sobey. String gradient weighted moving finite elements in multiple dimensions with applications in two dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(2):459-480 (electronic), 2007. 10
- [75] D. Wei and L. Lefton. A priori L^p error estimates for Galerkin approximations to porous medium and fast diffusion equations. *Math. Comp.*, 68(227):971-989, 1999. 8
- [76] Z. Yin and Q. Xu. A fully discrete symmetric finite volume element approximation of nonlocal reactive flows in porous media. *Math. Probl. Eng.*, pages Art. ID 175904, 7, 2013. 12

Índice de notações

Geral

\mathbf{n} denota o vetor normal unitário exterior à fronteira

\hookrightarrow denota uma imersão contínua

$\hookrightarrow\hookrightarrow$ denota uma imersão compacta

\rightarrow indica uma convergência

\rightharpoonup denota uma convergência fraca

\rightharpoonup^* denota uma convergência fraca estrela

$[g]_+ = \max\{g, 0\}$ representa a parte positiva de g

$[g]_n = \lim_{t \rightarrow t_n, t > t_n} g(t) - \lim_{t \rightarrow t_n, t < t_n} g(t)$ denota o salto de g em t_n

$\operatorname{ess\,sup}(u) = \inf_{x \in A} \{ \sup_{x \in A \setminus Z} |u(x)| : Z \subset A, \operatorname{meas}(Z) = 0 \}$

$\operatorname{supp} v = \overline{\{x : v(x) \neq 0\}}$ é o suporte de v

$p' = \frac{p}{p-1}$ é o conjugado de $p > 1$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$\operatorname{sign}(a)$ denota o sinal de a ($\operatorname{sign}(a) = 1$, se $a > 0$ e $\operatorname{sign}(a) = -1$, se $a < 0$).

Acrónimos

UBI Universidade da Beira Interior

MEF Método dos Elementos Finitos

MEFG Método dos Elementos Finitos de Galerkin

MMPDE Método da Malha Móvel para Equação Diferencial Parcial

EDO Equação Diferencial Ordinária

EDP Equação Diferencial com Derivadas Parciais

PME Equação de Meios Porosos

Conjuntos

$|\Omega| = meas(\Omega) =$ medida de Lebesgue de Ω

$\#A$ indica o número de elementos do conjunto A

$T_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ é o triângulo de referência

$int(\Omega)$ denota o interior de Ω

$\bar{\Omega}$ denota o fecho de Ω

$\Omega_T = \Omega \times]0, T]$

$\Gamma = \partial\Omega$ denota a fronteira de Ω

$\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$

$B_\varrho(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varrho(t)\}$ é a bola de centro \mathbf{x}_0 e raio ϱ

$g|_A$ denota a restrição de g ao conjunto A

Operadores

$D^\alpha u$ denota a derivada fraca de ordem α de u

$div \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ é o divergente de \mathbf{u}

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$ denota o vetor gradiente de u

$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o laplaciano de u

$\Delta_h u$ denota o laplaciano discreto de u

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ denota a derivada (fraca ou forte) de u em relação à variável temporal

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ denota a derivada forte de ordem α de u

$\bar{\partial} u(\mathbf{x}, t_n) = \frac{u(\mathbf{x}, t_n) - u(\mathbf{x}, t_{n-1})}{\delta}$ é a derivada temporal discreta

$R_h u$ é a projeção de Ritz de u

$\Pi_S u$ denota a projeção ortogonal de u sobre S

$\langle f, u \rangle$ aplicação do funcional f à função u

Normas e seminormas

$|x|$ denota o módulo de $x \in \mathbb{R}$

$\|\mathbf{x}\|$ denota a norma euclidiana de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$

$\|u\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u|$

$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^k \|D^{\alpha} u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$

$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^{\alpha} u|$

$\|u\|_{W^{k,p,j}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \|D^{\alpha} u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty \text{ e } 0 \leq j \leq k.$

$\|u\|_{C^0([a,b],X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X$

$\|u\|_{L_p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$

$\|u\|_{L_{\infty}(a,b;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X < \infty$

$\|u\|_{W^{k,p}(a,b;X)} = \left(\sum_{j=1}^k \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L_p(a,b;X)} \right)^{\frac{1}{p}}$

Espaços de funções

$L_p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{x} < \infty\}$

Método dos Elementos Finitos para problemas com Fronteiras Livres

$$L_\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \text{ess sup } |u| < \infty\}$$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha u \in L_p(\Omega), 0 \leq \alpha \leq k\}$$

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$$

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$$

$$C^{k,\mu}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in C^k(\Omega) \text{ e } D^k u \text{ é Hölder contínua com expoente } \mu\}$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) \mid \text{supp } v \text{ é um conjunto compacto}\}$$

$$L_p(a, b; X) = \{u :]a, b[\rightarrow X \mid u \text{ é mensurável e } \int_a^b \|u\|_X^p dt < \infty\}$$

$$W^{k,p}(a, b; X) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) \mid u \text{ é mensurável e } \int_a^b \|u\|_X^p dt < \infty\}$$

$$C^k([a, b]; X) = \{u : [a, b] \rightarrow X \mid u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$$

$$W^{-k,p'}(\Omega) \text{ é o espaço dual de } W_0^{k,p}(\Omega)$$

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$$

$$S_h = \{w \in C_0^0(\bar{\Omega}) \mid w|_{T_k} \text{ é um polinómio de grau } 1 \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}$$

$$S_{hr} = \{w \in C_0^0(\bar{\Omega}) \mid w|_{T_k} \text{ é um polinómio de grau } r \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}$$

$$S_{hr}^{\delta s} = \{\mathcal{W} : [0, +\infty[\rightarrow S_{hr} \mid \mathcal{W}|_{I_n} = \sum_{j=0}^s t^j \chi_j, \chi_j \in S_{hr}\}$$

\mathbb{P}_r é o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a r .

Índice Remissivo

- convergência
 - forte, 16
 - fraca, 18
 - fraca estrela, 18
- corolário
 - Brouwer, 25
- desigualdade
 - Cauchy, 15
 - Gronwall, 25
 - Hölder, 20
 - inversa, 55
 - Minkowski, 20
 - multiplicativa, 82, 86
 - Poincaré, 23
 - Young, 15
- domínio, 17
- equação
 - em meios porosos, 3
 - reação-difusão, 1
- espaço
 - de Bochner, 23
 - de elementos finitos, 26, 45, 63
 - de Lebesgue, 20
 - de Sobolev, 21
 - dual, 18
- fronteira
 - Lipschitz-contínua, 18
 - livre, 3
- função
 - de energia global, 85
 - de energia local, 81
 - Hölder-contínua, 17
 - Lipschitz-contínua, 17
 - monitor, 62
- integrador, 29
- interface, 3
- laplaciano, 20
 - discreto, 28
- lema
 - Aubin-Lions, 25
- método
 - dos elementos finitos de Galerkin, 1
 - elementos finitos descontínuo, 29
 - Euler, 29
 - Euler regressivo, 92
 - Faedo-Galerkin, 74
 - ponto fixo, 52
- malha, 26
 - regular, 26
- ordem de convergência, 28
- projeção
 - de Ritz, 28
 - no espaço e tempo, 29
 - no tempo, 29
 - ortogonal, 28
- propriedade
 - de extinção em tempo finito, 5
 - de localização estável, 81
 - de propagação com velocidade finita, 3
 - de tempo de espera, 4
- sistema
 - não local, 11
 - reação-difusão, 1
- solução
 - forte, 79
 - fraca, 35, 36, 61, 63, 74
 - semidiscreta, 89
 - totalmente discreta, 46, 92
- taxa, 81
- teorema
 - Banach-Alaoglu, 24
 - Brouwer, 25
 - do valor médio, 41
 - Green, 25
 - Gronwall, 25
- velocidade
 - normal, 60
- vetor normal, 28

