



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura

Generalização do GSVATM para Vigas de Betão Armado em Caixão Sujeitas à Torção

Ana Natacha Silva Vaz

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Luís Almeida Bernardo

Covilhã, Outubro de 2014

Dedicatória

À minha querida Avó Ana Luísa
Sem a qual era impossível chegar até aqui.
Por tudo o que me ensinou e transmitiu,
Por toda a ajuda e apoio,
Por tudo o que sou,
Muito Obrigada Avó

Agradecimentos

Em primeiro lugar, um muito obrigada ao Professor Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, orientador científico desta dissertação, pela constante disponibilidade e atenção, por todo o conhecimento transmitido e pelo apoio demonstrados ao longo da execução deste trabalho.

Quero deixar também um agradecimento especial ao Professor Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade, autor do software TORQUE, pela sua disponibilidade em implementar as modificações necessárias e em explicar a utilização do software.

Quero agradecer também ao meu pai Francisco, o apoio e a orientação dados sempre que necessitei, um muito obrigada.

Ao meu namorado, Duarte, por toda a força e apoio, o meu especial agradecimento.

A toda a minha família mais próxima e a todos os amigos que de alguma forma contribuíram nas mais diversas formas para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho é estudado o comportamento de vigas de betão armado com secção transversal retangular vazada sujeitas à torção pura. O estudo realizado tem por objetivo incorporar num modelo já existente, o GSVATM, as necessárias modificações para este tipo de vigas uma vez que este mesmo se encontra apenas calibrado para vigas de secção retangular cheia.

A incorporação das modificações e estudo das vigas de secção vazada através do GSVATM é realizada tendo por base as modificações efetuadas num outro modelo, o SMMT, para o qual foram observados bons resultados. Uma série de investigações, quer experimentais quer teóricas, foram realizadas na Tailândia por Jeng em 2014, que lhe permitiram estender o seu modelo SMMT a vigas de secção vazada. A extensão do seu modelo, de forma resumida, consistiu essencialmente na calibração de alguns parâmetros que intervêm nas relações constitutivas do betão implementadas no modelo, com vista a incorporar o comportamento específico das vigas de secção vazada. Para a referida calibração, houve também a necessidade de estabelecer uma nova classificação para as vigas de secção vazada: vigas de “parede fina” e vigas de “parede espessa”.

O estudo realizado ao longo deste trabalho consiste principalmente na validação das alterações realizadas no SMMT quando incorporadas no GSVATM, de forma a que este último modelo possa constituir um modelo unificado, permitindo o estudo das vigas de betão armado com secção retangular e sujeitas à torção, quer com secção cheia quer com secção vazada. Para tal, é efetuada uma análise comparativa tendo por base os resultados experimentais de 32 vigas encontradas na literatura científica. Tal estudo permitiu, no geral, validar o GSVATM modificado na previsão do comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção com secção retangular vazada.

Palavras-chave

Torção, Viga, Betão armado, Secção transversal vazada, modelação teórica, GSVATM.

Abstract

In this investigation the behavior of reinforced concrete beams with rectangular hollow cross-section subjected to pure torsion is studied. The study aims to incorporate in an existing model, the GSVATM, some necessary modifications in order to incorporate the behavior of hollow beams, since this model is presently calibrated only for beams with plain rectangular section.

The incorporation of the modifications and the study of the hollow beams with GSVATM is performed based on the modifications made in another model, the SMMT, for which good results were observed. A series of investigations, both experimental and theoretical, have been carried out in Thailand by Jeng in 2014, which enabled him to extend his SMMT model for hollow beams. The extent of the SMMT essentially consisted in the calibration of some parameters involved in the constitutive relationships for concrete that are implemented in the model, in order to incorporate the specific behavior of hollow beams. For such calibration, there was also a need to establish a new classification for hollow beams: "thin wall" beams and "thick wall" beams.

The study in this work mainly aimed to validate the same modifications into the SMMT, when incorporated into the GSVATM, so that this latter model can provide a unified model, allowing the theoretical study of reinforced concrete beams with rectangular section subjected to torsion, either with plain section or with hollow section. For this purpose, a comparison analysis is performed based on the experimental results of 32 hollow beams found in the scientific literature.

This study validate the modified GSVATM in order to predict the global behavior of reinforced concrete beams subjected to torsion with rectangular hollow section.

Keywords

Torsion, Beam, Reinforced concrete, Hollow cross section, Theoretical modelling, GSVATM.

Índice

Capítulo 1 - Enquadramento do Tema.....	1
1.1. Introdução ao estudo da Torção.....	1
1.1.1 Considerações históricas.....	1
1.1.2. Exemplos de situações com esforço de torção.....	5
1.1.3. Noção de Torção de Compatibilidade e Torção de Equilíbrio.....	9
1.1.4. Noção de Torção de Saint Venant e Torção de Empenamento.....	11
1.1.5. Comportamento de uma viga de betão armado á torção.....	13
1.2. Justificação do tema do trabalho.....	15
1.2.1. Evolução dos modelos para o estudo de vigas sujeitas à torção.....	15
1.2.2. Modificação do GSVATM para a incorporação de vigas de betão armado com secção vazada.....	22
1.3. Objetivos do trabalho.....	23
1.4. Organização do documento.....	24
Capítulo 2 - Generalização do Modelo de Treliza Espacial com Ângulo Variável - GSVATM.....	25
2.1. Breve introdução.....	25
2.2. VATM - Modelo de Treliza com Ângulo Variável.....	26
2.2.1. Algumas Considerações.....	26
2.2.2. Modelo de Treliza Plana.....	27
2.2.3. Esforço de Torção em Vigas de Secção Vazada.....	29
2.2.4. Relações constitutivas utilizadas.....	31
2.3. GSVATM em vigas de betão armado.....	34
2.3.1. Vigas sob ação do esforço transversal.....	34
2.3.2. Esforço de Torção em Vigas de Secção Vazada.....	39
2.3.3. Influência da flexão nas escoras e tirantes de betão.....	42
2.3.4. Espessura Efetiva da Parede.....	44
2.3.5. Equações para o Cálculo da Curva Teórica $T - \theta$	45
2.3.5.1. Equações de Equilíbrio.....	46
2.3.5.2. Equações de Compatibilidade.....	47
2.3.6. Relação $\sigma - \varepsilon$ dos Materiais.....	50

2.3.7. Algoritmo de cálculo do GSVATM para a construção da Curva $T - \theta$	52
2.4. Notas finais.....	54
Capítulo 3 - Modificação do GSVATM para vigas de betão armado com secção retangular vazada	55
3.1. Introdução	55
3.2. Justificação da metodologia escolhida para a incorporação das vigas com secção vazada	55
3.3. Modificação do procedimento de cálculo do GSVATM	57
3.3.1. Espessura da zona de fluxo de corte	57
3.3.2. Relações constitutivas do betão.....	58
3.3.3. Alteração do algoritmo de cálculo do GSVATM.....	61
3.4. Breve descrição da Utilização do Programa TORQUE 2.0.....	63
3.4.1. Considerações gerais.....	63
3.4.2. Funcionamento geral do TORQUE 2.0	63
3.4.3. TORQUE 2.0 adaptado a vigas de secção vazada	63
3.5. Notas Finais.....	66
Capítulo 4 - Validação da modificação do GSVATM.....	67
4.1. Introdução	67
4.2. Caracterização das vigas de referência utilizadas neste estudo	67
4.3. Notas Finais.....	91
Capítulo 5 - Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros.....	93
5.1. Introdução	93
5.2. Conclusões.....	93
5.3. Propostas de Trabalhos Futuros.....	95

Lista de Figuras

Figura 1 - Ponte Waterloo em Londres, vista geral [3].....	2
Figura 2 - Vista inferior da ponte [4].....	2
Figura 3 - Secção transversal [5].....	2
Figura 4 - Royal Festival Hall [6].....	3
Figura 5 - Viga caixão triangular [5].....	3
Figura 6 - Fissuração e rotura frágil por efeito de torção [5].....	4
Figura 7 (a) - Corte transversal de uma laje de cobertura contínua em consola [10].....	6
Figura 7(b) - Laje de cobertura isolada em consola [11].....	6
Figura 8- Vigas com desenvolvimento curvo [11].....	6
Figura 9- Viga com mudança de direção [11].....	7
Figura 10 - Viga de canto com desenvolvimento parcial curvo [5].....	7
Figura 11- Vigas de suporte com carregamento excêntrico [12].....	7
Figura 12- Momento torsor em vigas de extremidade e de continuidade [5].....	8
Figura 13 b) - Secção transversal da viga contínua em caixão.....	9
Figura 14- Ponte rodoviária sobre o Rio Douro com a respetiva secção transversal da viga[5]..	9
Figura 15 - Torção de compatibilidade [12].....	10
Figura 16 - Torção de equilíbrio [12].....	10
Figura 17- Formação de rótula plástica no caso da torção de compatibilidade [12].....	11
Figura 18- Formação de rótula plástica no caso da torção de equilíbrio [12].....	11
Figura 19- Torção de St Venant e Torção com empenamento [12].....	12
Figura 20 - Curva típica torção - rotação [14].....	13
Figura 21- Exemplo de uma viga caixão para o tabuleiro de uma ponte [5].....	15
Figura 22- Exemplo de Curva T - θ teórica e experimental tendo por base o VATM de Hsu e Mo [17].....	16
Figura 23- Exemplos de Curvas T- θ segundo o modelo de Bernardo e Lopes de 2008 [18].....	17
Figura 24 - Exemplos de Curvas T- θ tendo por base o MVATM de Bernardo et al. [20].....	18
Figura 25- Exemplos de Curvas T- θ obtidas tendo por base o SMMT de Jeng e Hsu [21].....	20
Figura 26- Exemplos de Curvas T- θ obtidas tendo por base o GSVATM de Bernardo et al. [23].....	21
Figura 27- Análise de uma viga de betão armado com base no modelo de treliça plana [23] .	27
Figura 28- Elemento A do modelo de treliça plana ilustrado na Figura 27 [14].....	27
Figura 29- Tensão nas escoras [14].....	28
Figura 30- Secção do elemento A [14].....	29
Figura 31- viga de secção retangular oca sujeita à torção [14].....	29
Figura 32- Relação σ - ϵ do betão à compressão [14].....	32
Figura 33- Curva σ - ϵ para as armaduras ordinárias tracionadas [14].....	33

Figura 34 - Forças de equilíbrio do elemento A da viga quando $\alpha+\beta\leq 90^\circ$ [23]	35
Figura 35 - Equilíbrio de forças no elemento A sofrido de um corte horizontal à altura y [23]	36
Figura 36- Equilíbrio do elemento A quando $\alpha+\beta>90^\circ$ [23].....	38
Figura 37- Equilíbrio do corpo do elemento A para $\alpha+\beta>90^\circ$ [23]	39
Figura 38- Flexão de uma escora e de um tirante de betão na parede de uma viga caixão [23]	42
Figura 39- Distribuição das tensões e extensões na escora e no tirante [23]	43
Figura 40- Círculo de Mohr para as deformações apresentado por Vecchio e Collins em 1981 [30].....	48
Figura 41- Curva $\sigma-\epsilon$ do betão à tração proposta por Jeng e Hsu em 2009 [21]	51
Figura 42 - Fluxograma do algoritmo de cálculo do GSVATM	53
Figura 43- Viga de secção cheia submetida à torção [25]	57
Figura 44 - Comparação da Análise 0 ($\lambda=\mu=1.15$) com a Análise 1 ($\lambda=\mu=0.975$) [25].....	59
Figura 45- Comparação da Análise 1 ($\lambda=\mu=0.975$) com a Análise 2 ($\lambda=\mu=0.93$) [25].....	60
Figura 46- Regressão linear para vigas de secção vazada de parede fina [25]	60
Figura 47- Fluxograma do algoritmo proposto para a incorporação de vigas de secção vazada no GSVATM	62
Figura 48- Exemplo de utilização do TORQUE 2.0	64
Figura 49- Exemplo de utilização do TORQUE 2.0	65
Figura 50- Exemplo de utilização do TORQUE 2.0	65
Figura 51- Exemplo de utilização do TORQUE 2.0	66
Figura 52- Exemplo de viga de secção vazada [14]	68
Figura 53- Comparação das curvas T- θ da viga A095c de Jeng [25]	69
Figura 54- Comparação das curvas T- θ da viga A120c de Jeng [25]	69
Figura 55- Comparação das curvas T- θ da viga B065b de Jeng [25]	70
Figura 56- Comparação das curvas T- θ da viga B080a de Jeng [25]	70
Figura 57- Comparação das curvas T- θ da viga B110a de Jeng [25]	71
Figura 58- Comparação das curvas T- θ da viga C065a de Jeng [25]	71
Figura 59- Comparação das curvas T- θ da viga C100a de Jeng [25]	72
Figura 60- Comparação das curvas T- θ da viga D075a de Jeng [25]	72
Figura 61- Comparação das curvas T- θ da viga D090a de Jeng [25]	73
Figura 62- Comparação das curvas T- θ para a viga A1 de Bernardo [5].....	77
Figura 63- Comparação das curvas T- θ para a viga A2 de Bernardo [5].....	77
Figura 64- Comparação das curvas T- θ para a viga A3 de Bernardo [5].....	78
Figura 65- Comparação das curvas T- θ para a viga A4 de Bernardo [5].....	78
Figura 66- Comparação das curvas T- θ para a viga A5 de Bernardo [5].....	79
Figura 67- Comparação das curvas T- θ para a viga B2 de Bernardo [5].....	79
Figura 68- Comparação das curvas T- θ para a viga B3 de Bernardo [5].....	80
Figura 69- Comparação das curvas T- θ para a viga B4 de Bernardo [5].....	80
Figura 70- Comparação das curvas T- θ para a viga B5 de Bernardo [5].....	81

Figura 71- Comparação das curvas T- θ para a viga C1 de Bernardo [5]	81
Figura 72- Comparação das curvas T- θ para a viga C2 de Bernardo [5]	82
Figura 73- Comparação das curvas T- θ para a viga C3 de Bernardo [5]	82
Figura 74- Comparação das curvas T- θ para a viga C4 de Bernardo [5]	83
Figura 75- Comparação das curvas T- θ para a viga C5 de Bernardo [5]	83
Figura 76- Comparação das curvas T- θ para a viga C6 de Bernardo [5]	84
Figura 77- Comparação das curvas T- θ para a viga D3 de Hsu [25]	84
Figura 78- Comparação das curvas T- θ para a viga D4 de Hsu [25]	85
Figura 79- Comparação das curvas T- θ para a viga T0 de Lampert e Thurlimann [33]	85
Figura 80- Comparação das curvas T- θ para a viga T1 de Lampert e Thurlimann [33]	86
Figura 81- Comparação das curvas T- θ para a viga T2 de Lampert e Thurlimann [33]	86
Figura 82- Comparação das curvas T- θ para a viga T5 de Lampert e Thurlimann [33]	87
Figura 83- Comparação das curvas T- θ para a viga VH1 de Leonhardt e Schelling [50]	87
Figura 84- Comparação das curvas T- θ para a viga VH2 de Leonhardt e Schelling [50]	88

Lista de Tabelas

Tabela 1- Características das vigas estudadas por Jeng [25]	68
Tabela 2(a)- Comparação dos valores obtidos pelas curvas T- θ estudadas por Jeng [25]	74
Tabela 2(b)- Comparação dos valores obtidos pelas curvas T- θ estudadas por Jeng [25]	74
Tabela 3(a) - Características das vigas estudadas	76
Tabela 3(b) - Características das vigas estudadas	76
Tabela 4(a)- Comparação dos valores obtidos pelas curvas T- θ estudadas.....	89
Tabela 4(b)- Comparação dos valores obtidos pelas curvas T- θ estudadas.....	90

Simbologia

A_c	Área da secção efetiva de betão
A_0	Área limitada pela linha média do fluxo de corte
A_{sl}	Área de armadura longitudinal
A_{st}	Área de um varão de armadura transversal
C	Força de compressão nas escoras de betão
E_c	Módulo de elasticidade do betão
E_s	Módulo de elasticidade do aço
F_H	Força Horizontal
F_V	Força vertical
G	Módulo de distorção
M	Momento fletor
M_T	Momento torsor
N	Força absorvida pela armadura longitudinal
N_b	Força na corda inferior da treliça plana
N_t	Força na corda superior da treliça plana
R	Resultante das forças de compressão e tração
T	Força de tração nos tirantes de betão
T_{cr}	Momento torsor de fissuração
$T_{máx}$	Momento torsor máximo
T_y	Momento torsor de cedência
V	Esforço transversal
f'_c	Resistência à compressão uniaxial do betão
f_{cm}	Tensão média à compressão uniaxial do betão
f_{cr}	Tensão de fissuração
f_{ly}	Tensão de cedência da armadura longitudinal
f_{ty}	Tensão de cedência da armadura transversal
K'	Rigidez de torção em estado não fissurado
K''	Rigidez de torção em estado fissurado
k_1^c	Quociente entre a tensão média e o pico de tensão no tirante de betão
k_2^c	Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão
n	Número de varões da amostragem
n_v	Força na armadura transversal por unidade de comprimento
p_0	Perímetro da linha média de fluxo de corte
q	Fluxo de corte
s	Espaçamento longitudinal da armadura transversal
t	Espessura da secção transversal
t_c	Espessura da escora diagonal de betão
t_t	Espessura do tirante diagonal de betão
t_d	Espessura efetiva da parede
$t_{d,solid}$	Valor de t_c para secções cheias segundo GSVATM original
w	Deslocamento
x	Largura da secção transversal
x_1	Largura de uma cinta transversal
y	Altura da secção transversal
y_1	Altura de uma cinta transversal

α	Amplitude de uma fissura diagonal em relação ao eixo longitudinal da viga
β	Amplitude da resultante R e a força de compressão C
β_σ	Coefficiente de redução da tensão que contabiliza o <i>softening effect</i>
β_ε	Coefficiente de redução da extensão correspondente à tensão máxima (<i>soft. effect</i>)
γ	Amplitude entre a resultante R e o eixo longitudinal da viga/ Distorção
ΔN	Força total nas barras longitudinais
ε	Extensão
ε_{cr}	Extensão de fissuração
ε_{cu}	Extensão última para o betão à compressão
ε_1^c	Extensão média de tração
ε_2^c	Extensão média de compressão
ε_0	Extensão correspondente ao pico de tensão f_c'
ε_{sl}	Extensão na armadura longitudinal
ε_{su}	Extensão última para a armadura
θ	Rotação transversal da secção
θ_{cr}^I	Rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado I
θ_{cr}^{II}	Rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado II
$\theta_{máx}$	Rotação de torção correspondente a $T_{máx}$
θ_n	Direção das armaduras T_y
θ_y	Rotação de torção correspondente a
λ	Fator de correção do módulo de elasticidade do betão à tração
ξ	Fator de redução
μ	Fator de correção da extensão de fissuração do betão à tração
ρ_l	Taxa de armadura ordinária longitudinal
ρ_t	Taxa de armadura ordinária transversal
σ	Tensão
σ_1^c	Tensão de tração no tirante de betão
σ_2^c	Tensão de compressão na escora de betão
ϕ	Diâmetro dos varões das armaduras
ν	Fator de correção da tensão média do betão à compressão e à tração
φ	Curvatura do tirante de betão
ψ	Curvatura da escora de betão

Lista de Acrónimos

ACI	American Concrete Institute
ATE	Analogia de Treliça Espacial
CEB	Comité Européen du Béton
EC2	Eurocode 2
GSVATM	Generalized Softened Variable Angle Truss-Model
MC	Model Code
MVATM	Modified Variable Angle Truss-Model
SMM	Softened Membrane Model
SMMT	Softened Membrane Model of Torsion
SMMT-H	Softened Membrane Model of Torsion including Hollow section beams
VATM	Variable Angle Truss-Model

Capítulo 1 - Enquadramento do Tema

1.1. Introdução ao estudo da Torção

1.1.1 Considerações históricas

Ao longo de muitos anos os esforços de torção não foram contabilizados para efeitos de dimensionamento de estruturas de betão armado. Isto acontecia porque se acreditava que os esforços de torção eram resistidos indiretamente por redistribuições internas de esforços e por reservas de resistência garantidas pelos então elevados fatores de segurança aplicados. No entanto, em meados do século passado percebeu-se que a torção desempenhava um esforço de grande importância em algumas estruturas e foi reconhecida a falta de documentação relativa ao dimensionamento de elementos em betão armado sujeitas a torção.

Dois exemplos de situações demonstrativas da necessidade de incorporar os efeitos torsionais no dimensionamento são referenciados por Armstrong em 1956 [1], situações estas relativas aos projetos da Ponte de Waterloo e do Royal Festival Hall, ambos em Londres.

A Ponte de Waterloo, indicada na Figura 1, é uma ponte rodoviária e pedestre que atravessa o rio Tamisa e é composta por duas grandes vigas caixão, uma de cada lado da ponte, sendo estas unidas por vigas transversais onde assenta o tabuleiro da ponte (Figura 2). Cada uma destas vigas caixão é constituída por três células, conforme a Figura 3. Devido à ausência ou à quase inexistência de documentação sobre o dimensionamento de peças sujeitas a torção, Cuerel, o principal autor do projeto, em 1948, viu-se obrigado a realizar ensaios experimentais [2] para determinar a capacidade resistente à torção de vigas caixão com as mesmas características que as projetadas. Esta necessidade adveio da concentração de cargas excêntricas que provocariam elevados momentos torsores nas vigas caixão. Para além disso, estes ensaios permitiram também confirmar que o fator de forma para a rigidez à torção de uma viga retangular oca ou de secção cheia é praticamente o mesmo que o fornecido pela Teoria de St. Venant. O referido autor averiguou ainda que a tensão tangencial máxima era atingida na parede de menor espessura.

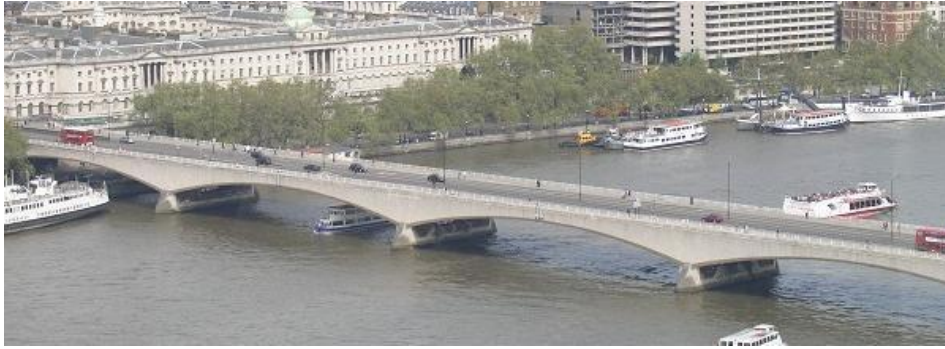


Figura 1 - Ponte Waterloo em Londres, vista geral [3]



Figura 2 - Vista inferior da ponte [4]

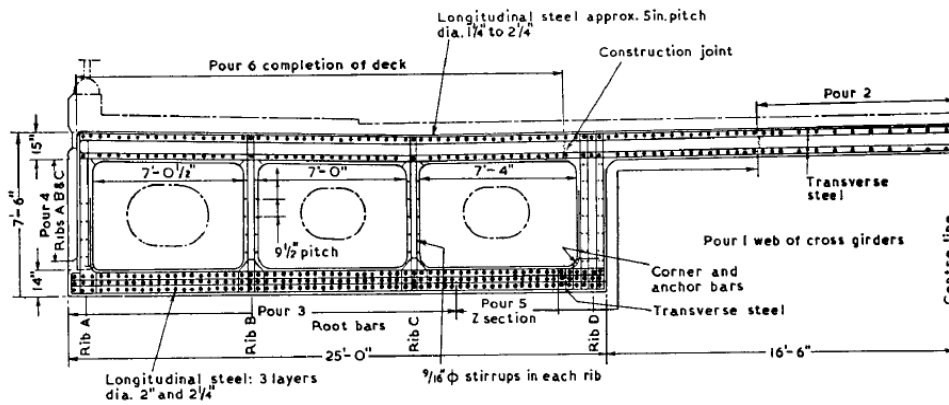


Figura 3 - Secção transversal [5]

Outro exemplo é o do Royal Festival Hall, desenhado pelo arquiteto Hugh Casson na década de 40. Na conceção da bancada era vital a consideração do efeito do momento torsor, uma vez que a viga triangular em caixão suportaria uma laje em consola. O carregamento desta laje provoca elevados momentos torsores na viga que teriam de ser contabilizados no seu dimensionamento.



Figura 4 - Royal Festival Hall [6]

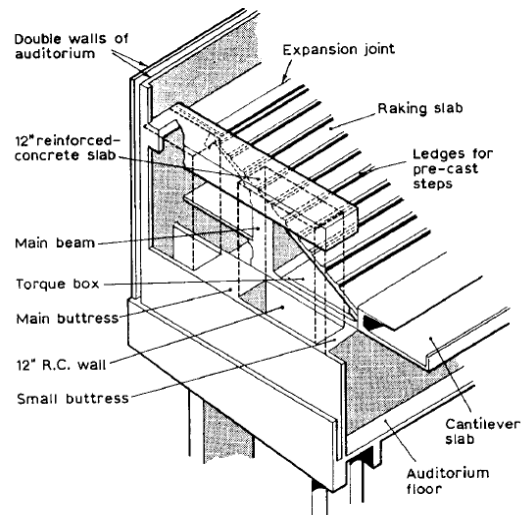


Figura 5 - Viga caixão triangular [5]

Com a evolução da arquitetura a partir da década de 40 do século passado, evoluíram também os métodos de dimensionamento das estruturas de betão armado, uma vez que estas passaram a ser mais arrojadas e mais complexas. Através de uma análise estrutural mais precisa e rigorosa foi possível reduzir os coeficientes de segurança, que por consequência reduziram também a reserva de resistência contabilizada pelos projetistas para absorver os esforços de torção. Conforme ilustrado na Figura 6, a consideração destes esforços nas estruturas é fundamental pois a sua fissuração helicoidal e as deformações excessivas em vigas, para além de comprometerem a estética, também podem afetar a sua durabilidade e segurança estrutural.



Figura 6 - Fissuração e rotura frágil por efeito de torção [5]

De acordo com a bibliografia consultada e Bernardo em 2003 [5], os casos documentados de insuficiência de resistência aos esforços de torção não são frequentes, no entanto se existir um deficiente dimensionamento a rotura do elemento será evidente sendo esta do tipo frágil como ilustrado na Figura 6 (rotura por falta de amadura de torção). Um exemplo documentado foi o que sucedeu num parque de estacionamento na Flórida (EUA) [7], em que uma das vigas apresentou uma fissura helicoidal denunciando a evidente falta de armadura específica capaz de absorver os esforços de torção. Outro exemplo é o das vigas que servem de apoio a varandas muito pesadas em consola [7].

O primeiro documento normativo com procedimentos específicos para o dimensionamento de peças à torção surgiu nos Estados Unidos da América no ano de 1971, com o código ACI 318-71 [8]. A partir desta altura, passava a ser exigida a consideração do esforço de torção como um efeito principal, e não secundário como era encarado até então. Entre 1972 e 1977 o Comité Européen du Béton (CEB) desenvolveu procedimentos de dimensionamento à torção tendo por base o trabalho realizado pela comissão V “Esforço transversal - Torção” e que culminou, em 1978, com a edição do código europeu (MC 78 [9]).

No entanto, a interação da torção com vários esforços constitui ainda um problema, uma vez que as normas existentes prescrevem, em geral, o dimensionamento para os diversos esforços separadamente seguida da sobreposição das armaduras resultantes com uma verificação adicional da interação em alguns dos esforços que compõem o problema. Para além disso, e no que se refere à torção, as normas apenas incluem métodos de verificação direta ao Estado Limite Último de resistência à torção, não sendo explícitas quanto ao comportamento em serviço, principalmente no estado fissurado. Nos últimos anos, o dimensionamento de vigas à torção tem vindo a ser dificultada devido à utilização de betões não convencionais, como por exemplo a utilização de betões de alta resistência, betões com agregados leves ou com fibras e também pela generalização da utilização do pré-esforço bem como a utilização de sistemas de reforço.

As mudanças nos documentos normativos têm sido lentas, tornando-se por isso indispensável o desenvolvimento de mais estudos sobre o comportamento de elementos de betão estrutural sujeitos à torção, com vista à proposta de modelos de dimensionamento fiáveis e de regras práticas para projeto, para que os elementos estruturais sujeitos a esforços de torção primários possam ser utilizados com toda a confiança e segurança no domínio da construção.

1.1.2. Exemplos de situações com esforço de torção

Em termos de dimensionamento, quando o esforço de torção é de equilíbrio os elementos estruturais deverão de ser dotados de armadura específica para a resistência à torção. Quando os momentos torsores puderem ser considerados um esforço secundário (torção de compatibilidade), as normas geralmente apenas prescrevem a necessidade da adoção de uma armadura mínima constituída por varões longitudinais e transversais com disposições construtivas adequadas.

Na seguinte Figura 7, distinguem-se dois tipos de laje de cobertura que produzem sobre as vigas de apoio esforços de torção mas com graus de importância diferentes. A Figura 7 (a) retrata uma laje de cobertura contínua apoiada numa viga alta e a Figura 7 (b) uma laje de cobertura isolada em consola com uma das extremidades assente numa viga de apoio entre dois pilares. Em ambas as situações os esforços de torção devem-se às condições de assimetria que existem de ambos os lados da viga de apoio. Na Figura 7 (a) tais condições podem estar relacionadas com rigidezes e carregamentos. Na Figura 7 (b) tais condições relacionam-se com a não continuidade da laje (laje em consola isolada). Assim sendo, a situação observada Figura 7 a) não é tão gravosa como na segunda, pois a não consideração dos momentos torsores na viga de apoio para dimensionamento, devido ao desequilíbrio dos momentos fletores das lajes à esquerda e à direita, pode ser compensada através de uma redistribuição interna dos esforços pelos diversos elementos estruturais em causa. Trata-se portanto de um exemplo de torção de compatibilidade. Na Figura 7 b), a viga de apoio deve obrigatoriamente equilibrar os momentos torsores pois o mecanismo de compensação anteriormente referido não é aqui possível. Trata-se portanto de uma situação com torção de equilíbrio, devendo a referida viga ser obrigatoriamente dimensionada para os momentos torsores resultantes do balanço da laje em consola.

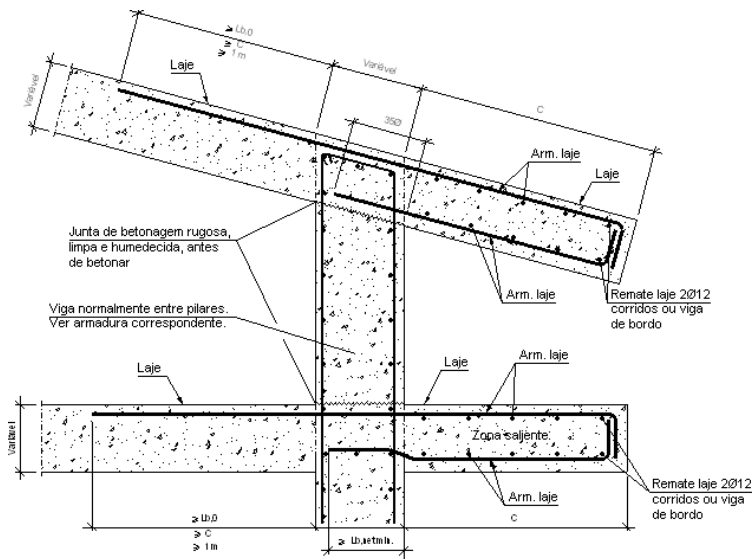


Figura 7 (a) - Corte transversal de uma laje de cobertura contínua em consola [10]

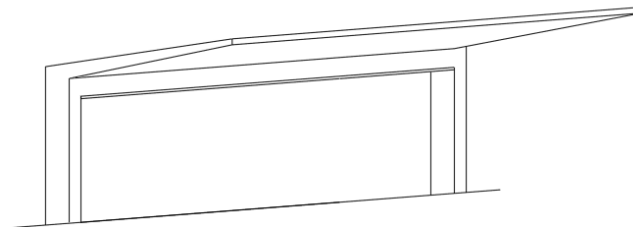


Figura 7(b) - Laje de cobertura isolada em consola [11]

Outro exemplo também importante de esforços de torção de equilíbrio é o encontrado nas vigas com desenvolvimento curvo. Se estas se encontrarem restringidas transversalmente nos apoios de extremidade (condição requerida para a estabilidade e controlo das deformações) então o carregamento ao longo do eixo das vigas irá provocar o aparecimento de esforços de torção. O mesmo ocorre com vigas que apresentem mudanças bruscas de direção ao longo do vão, pois o carregamento num dos lados do ponto angularo gera esforços de torção de equilíbrio ao longo de toda a viga que terão de ser contabilizados no processo de dimensionamento. As seguintes figuras, Figuras 8 a 10, ilustram estes tipos de vigas.



Figura 8- Vigas com desenvolvimento curvo [11]

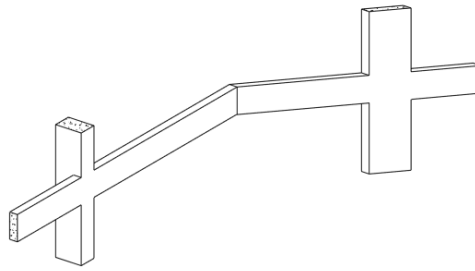


Figura 9- Viga com mudança de direção [11]



Figura 10 - Viga de canto com desenvolvimento parcial curvo [5]

Outro exemplo de esforços de torção de equilíbrio em vigas é o caso de carregamentos transmitidos excêntricamente por meio, por exemplo, de banzos que funcionam como consolas curtas conforme ilustra a Figura 11. Na Figura 11 a), as cargas suspensas exercidas no banzo, F_1 e F_2 , são absorvidas pela armadura transversal e encaminhadas até à parte superior da viga, a partir da qual são distribuídas para os apoios propriamente ditos da viga de suporte. Neste caso, o momento torsor surge quando as forças F_1 e F_2 são de valores diferentes. Na Figura 11 b), o esforço de torção estará sempre presente uma vez que a parede de alvenaria exerce um carregamento excêntrico na viga de apoio.

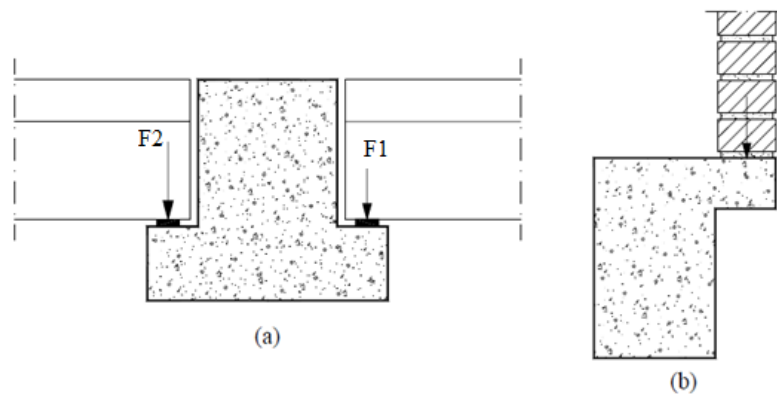


Figura 11- Vigas de suporte com carregamento excêntrico [12]

A Figura 12 ilustra dois exemplos suplementares da ocorrência de esforços de torção e que dizem respeito a uma laje vigada de pavimento sujeita a um carregamento uniforme. As situações a seguir ilustradas são, de certa forma, semelhantes às ilustradas na Figura 7. A Figura 12 (a) cinge-se apenas ao que acontece a uma viga de apoio de extremidade, que se encontra sujeita a esforços de torção devido a esta restringir a deformação da laje. Analisando o diagrama de momentos fletores M na laje, existe um momento de extremidade “ M ” que é absorvido pela rigidez de torção da viga, justificando assim a ocorrência de momentos torsores nesta. A Figura 12 (b) representa o que acontece na viga de apoio de continuidade intermédia quando não existe simetrias nas lajes de pavimento, quer a nível de carregamento quer a nível de vão. Analisando o diagrama de momentos fletores na laje observa-se um diferencial de momentos Δm , que tal como na situação anterior será absorvido pela rigidez de torção da viga, justificando novamente a ocorrência de momentos torsores. As situações ilustradas na Figura 12 correspondem a torção de compatibilidade.

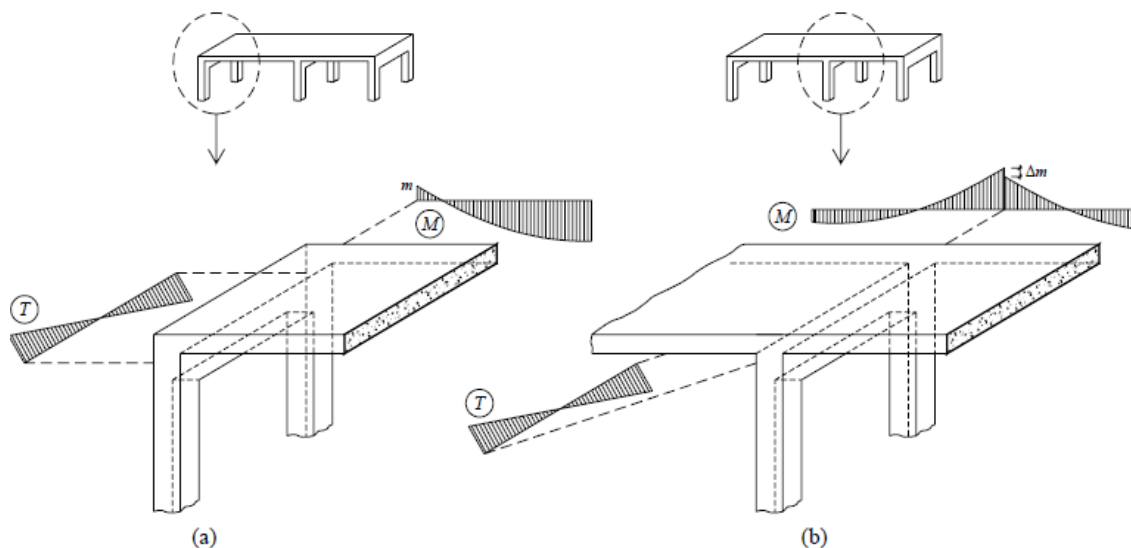


Figura 12- Momento torsor em vigas de extremidade e de continuidade [5]

Outro exemplo é apresentado na Figura 13. Trata-se do Viaduto rodoviário de Linn Cove na Carolina de Norte (EUA), concluído em 1984. O tabuleiro desta ponte é constituído por uma viga contínua em caixão [5].



Figura 13 a) - Vista geral da ponte



Figura 13 b) - Secção transversal da viga contínua em caixão

O desenvolvimento bastante curvo desta viga, cuja rotação transversal da secção se encontra restringida nos apoios, origina que qualquer carregamento vertical, mesmo que simétrico em relação à secção transversal, dê origem ao aparecimento de elevados momentos torsores de equilíbrio. O mesmo se verifica para a seguinte Figura 14, relativa à Ponte Rodoviária sobre o Rio Douro:

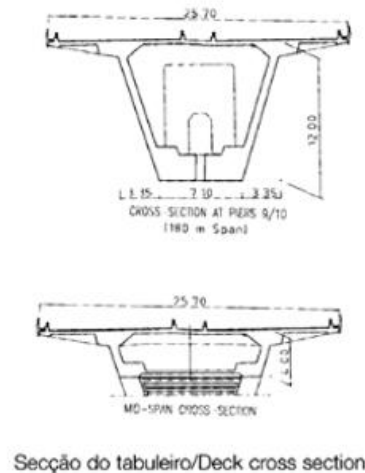


Figura 14- Ponte rodoviária sobre o Rio Douro com a respetiva secção transversal da viga

1.1.3. Noção de Torção de Compatibilidade e Torção de Equilíbrio

Para melhor se compreender a distinção entre torção de compatibilidade e torção de equilíbrio, proceder-se-á de seguida à análise das situações ilustradas nas Figuras 15 e 16, designadamente no que se refere às ligações entre as vigas V1 (viga de apoio principal) e V2 (viga secundária e apoiada na viga V1) e entre as vigas V3 (viga de apoio principal) e V4 (viga em consola encastrada na viga V3):

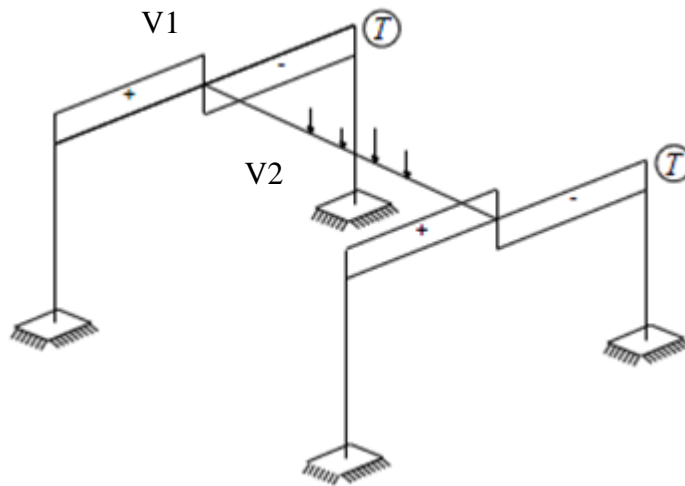


Figura 15 - Torção de compatibilidade [12]

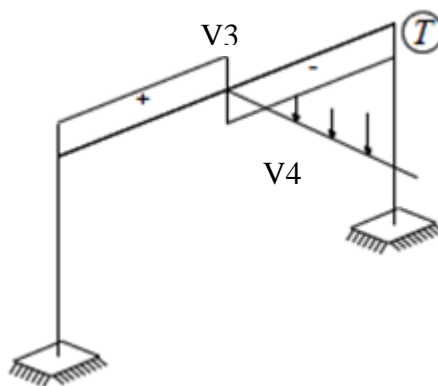


Figura 16 - Torção de equilíbrio [12]

Neste tipo de situações com ligações monolíticas, ocorre uma transferência dos momentos fletores negativos das vigas apoiadas (V2 e V4) para as vigas de apoio (V1 e V3), originando a ocorrência de momentos torsores nestas últimas em ambos os pórticos. O momento torsor que aparece na viga V1 ocorre devido à ligação rígida (encastramento parcial) da viga V2 na primeira. No caso limite de considerar essa ligação como rotulada (Figura 17), a viga V2 já não apresentará nenhum momento fletor negativo no apoio e portanto a viga V1 não sofrerá momentos torsores. No entanto, toda a estrutura, incluindo a viga V2 continuará em equilíbrio, e deste modo pode afirmar-se que o encastramento parcial da viga V2 na viga V1 provoca nesta última uma torção de compatibilidade. Tal torção não é necessária ao equilíbrio da estrutura, uma vez que se for desprezada nos cálculos, a estrutura continua em equilíbrio. Deve no entanto ser prevista uma armadura mínima convenientemente disposta na zona de ligação entre as vigas para controlo da eventual fissuração resultante de se desprezar a transmissão dos momentos negativos para a viga de apoio (que tem geralmente como consequência a ocorrência de fissuração).

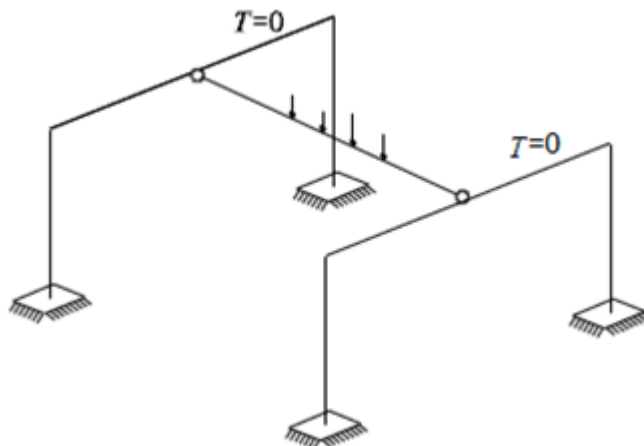


Figura 17- Formação de rótula plástica no caso da torção de compatibilidade [12]

Já no caso da viga V4 sobre a viga V3, devido à viga V4 ser uma viga em consola, o encastramento na viga V3 é necessário ao equilíbrio deste elemento estrutural. De facto, na situação limite de se considerar uma rótula na zona de ligação (Figura 18) forma-se um mecanismo local, apesar da estrutural global continuar a ter ligações redundantes. Neste caso, existe portanto uma situação de torção de equilíbrio a ser contabilizada para o dimensionamento da viga de apoio para que esta garanta o encastramento necessário para o equilíbrio global da estrutura.

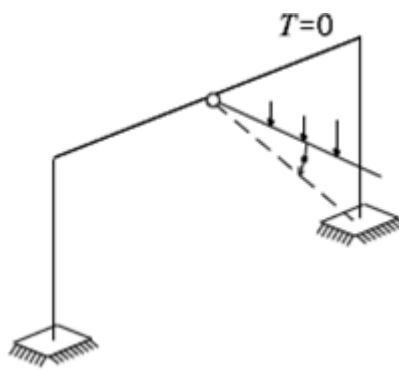


Figura 18- Formação de rótula plástica no caso da torção de equilíbrio [12]

A utilidade desta diferenciação da torção, em torção de compatibilidade e torção de equilíbrio, é que quando existe uma torção de compatibilidade, esta pode ser desprezada em termos de dimensionamento, sendo no entanto necessário garantir as quantidades mínimas de armadura para o controlo da fissuração como recomendado, por exemplo, pelo Eurocódigo 2, EN 1992-1-1 [13].

1.1.4. Noção de Torção de Saint Venant e Torção de Empenamento

Para além das condições em que surge a torção como estudado na secção anterior, a forma da secção transversal é também condicionante no que diz respeito à absorção deste esforço. Tal condiciona a forma como o momento torsor externo é internamente equilibrado pela secção. Nos elementos retangulares com secções cheias e vazadas, os momentos torsores são

essencialmente resistidos através de um fluxo de tensões circulatorio, conforme ilustrado na Figura 19 (a), a qual é denominada de Torção circulatoria ou Torção de Saint Venant. Nos elementos com secções abertas, particularmente com paredes finas, os momentos torsores são resistidos essencialmente por momentos transversais adicionais que surgem nas paredes, sendo esta situação denominada por Torção com empenamento, conforme a Figura 19 (b).

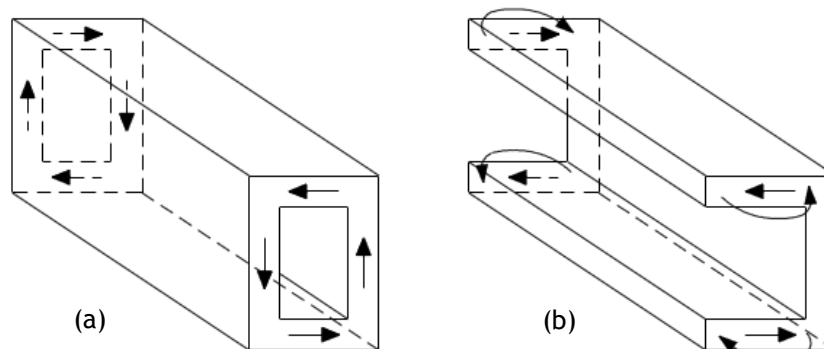


Figura 19- Torção de St Venant e Torção com empenamento [12]

A ação do esforço de torção num dado elemento provoca extensões longitudinais nas fibras ao longo da secção desse mesmo elemento. Quando existem restrições não uniformes às deformações longitudinais, o efeito de empenamento pode tornar-se importante. Em secções abertas, como do tipo em “I”, “U” ou em “L”, o empenamento geralmente dá origem a esforços de flexão secundários que têm que ser levados em consideração no processo de dimensionamento. Nas restantes secções, como as secções retangulares cheias ou vazadas o empenamento torna-se pouco relevante, gerando apenas uns pequenos acréscimos de tensões localizados (nas zona das restrições) e que tendem a desaparecer quando o elemento fissura, não afetando notavelmente a capacidade resistente do elemento à torção. Neste tipo de secções, os efeitos do empenamento das secções podem em geral ser desprezados.

Deve referir-se que apenas as secções circulares estão livres do empenamento. A torção com empenamento não se encontra explicitamente contemplada nos documentos normativos, no entanto existe alguma bibliografia específica que trata do assunto como é o caso de Wlassow em 1964, Grob em 1975 e Kovács em 1995 [5].

Deve referir-se também que no caso de vigas com secção retangular cheia ou vazada, a absorção dos esforços torsionais pelo fluxo de tensões circulatorias é válido para o estado pré-fissurado, sendo que após a fissuração do betão, a resistência aos esforços torsionais deixa de ser unicamente da responsabilidade da seção transversal mas inclui o comportamento da viga ao longo do seu eixo longitudinal.

1.1.5. Comportamento de uma viga de betão armado à torção

Quando uma viga é submetida ao esforço de torção, o seu comportamento pode ser caracterizado mediante o traçado da curva comportamental momento torsor (T) - rotação (θ), onde é possível observar o estado evolutivo da viga ao longo de todo o historial de carga até à rotura. Uma forma tipificada desta curva encontra-se ilustrada na Figura 20, onde se podem identificar três zonas correspondentes a fases comportamentais distintas:

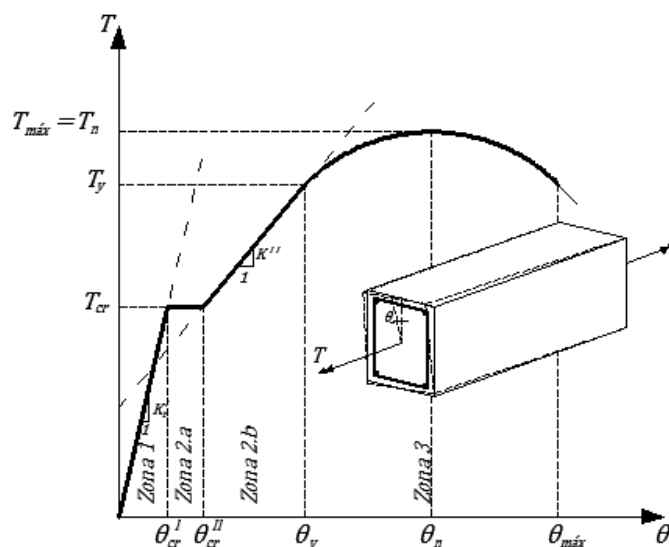


Figura 20 - Curva típica torção - rotação [14]

A Zona 1 corresponde ao Estado I ou ao estado não fissurado, pois é correspondente ao comportamento da viga antes de esta atingir o momento torsor de fissuração. Nesta zona, pode utilizar-se a Teoria de Saint Venant para calcular a rigidez de torção da viga, pois como se pode observar no gráfico, a viga apresenta um comportamento elástico linear. Esta opção corresponde a uma aproximação dado que o que acontece na realidade é que um pouco antes de se atingir o momento torsor de fissuração, a viga apresenta uma ligeira perda de rigidez. Desta forma, o declive da curva $T - \theta$ perde ligeiramente o seu carácter linear imediatamente antes da viga fissurar efetivamente. No entanto, este efeito é bastante pequeno, podendo-se considerar que a curva pode ser aproximada a uma reta em todo o intervalo de carregamento correspondente ao Estado I. Também o facto de, nesta fase comportamental, as rotações transversais serem bastante pequenas permite-se desprezar a não linearidade final da curva $T - \theta$ no estado I. A armadura de torção presente na viga, nesta fase comportamental, apenas contribui para o ligeiro aumento do momento torsor de fissuração, pois a sua influencia na rigidez da viga é negligenciável. Este aumento do momento torsor de fissuração é diretamente proporcional à quantidade de armadura de torção, tal como observado por Bernardo em 2003 [5].

A partir do momento em que é atingido o momento torsor de fissuração, entra-se na Zona 2, que equivale ao Estado II ou estado fissurado. Em vigas com secção cheia observa-se,

experimentalmente nesta fase para o valor do momento torsor de fissuração (T_{cr}), um súbito aumento da rotação conforme ilustrado na Figura 20, zona esta identificada por Zona 2.a. A partir deste ponto, volta a observar-se para a curva $T - \theta$ um desenvolvimento quase linear até se atingir um determinado valor de momento torsor. Nesta fase comportamental, designada por Zona 2.b na Figura 20, a rigidez de torção da viga em estado fissurado (K'') é representada pelo declive da reta.

Para as vigas com secção vazada, a Zona 2.a não é, em geral, experimentalmente observada. Segundo Bernardo em 2003 [5], uma possível explicação desta diferença no que respeita à transição do estado não fissurado para o estado fissurado, tem a ver com a capacidade de redistribuição transversal de tensões tangenciais. Nas secções cheias esta redistribuição ocorre devido à existência do núcleo de betão. Nas secções vazadas, principalmente quando se trata de paredes finas, esta capacidade de redistribuição é muito limitada e as armaduras são mais rapidamente mobilizadas no estado fissurado.

Assim que se inicia o estado fissurado, o comportamento da viga poderá ser idealizado com base numa análise elástico-linear em regime fissurado. O modelo de treliça espacial com ângulo constante a 45° é um dos modelos adequados para caracterizar o comportamento da viga na Zona 2.b, considerando relações constitutivas lineares para os materiais. Conforme averiguado por Bernardo em 2003 [15] [16], este modelo é considerado válido até que a curva $T - \theta$ comece a evidenciar um pronunciado comportamento não linear, correspondendo ao início da Zona 3 (Figura 20). Esta perda de linearidade pode ser justificada pela entrada em cedência de, pelo menos, umas das armaduras de torção, longitudinal ou transversal. Pode ainda dever-se ao nível elevado de tensões instaladas no betão comprimido nas escoras, no caso das vigas com elevadas taxas de armadura, o qual conduz a uma resposta não linear do betão comprimido.

Para caracterizar o comportamento da viga na Zona 3, um modelo eficaz é o modelo de treliça espacial com ângulo variável (*Variable Angle Truss Model* - VATM). Esta fase termina assim que a viga atinge a rotura, ou por esmagamento do betão comprimido ou por rotura das armaduras tracionadas.

As vigas de secção vazada, atualmente, possuem uma ampla utilização principalmente em estruturas de grandes dimensões pois permitem ganhos importantes de economia devido à substancial redução do peso próprio estrutural e uma maior eficiência à flexão devido ao aumento do braço resistente interno das forças. A Figura 21 ilustra uma secção em caixão tipo utilizada frequentemente em pontes de grande vão. Os tabuleiros em vigas caixão, quando comparados com soluções com tabuleiros em laje vigada, possuem uma maior rigidez e resistência aos momentos fletores e torsores, tornando bastante adequada a utilização da viga caixão em situações em que os esforços de torção assumem um papel vital no processo de verificação da segurança. As secções vazadas são as mais eficazes na resistência à torção

uma vez que conduzem a um maior aproveitamento do material, dado que o fluxo de tensões tangenciais gerado é praticamente absorvido pela periferia da secção.

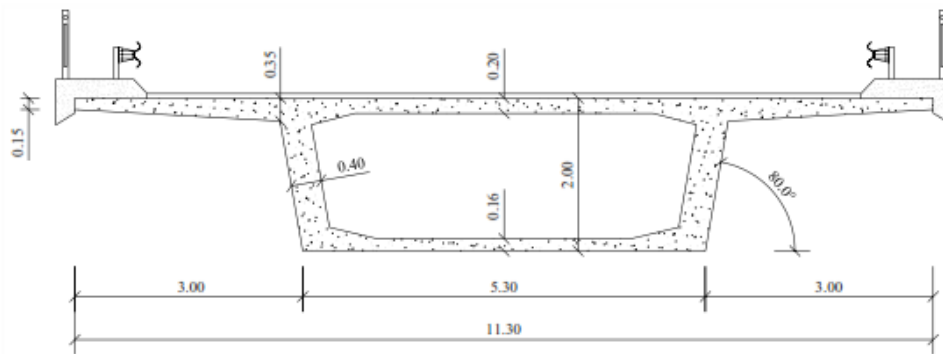


Figura 21- Exemplo de uma viga caixão para o tabuleiro de uma ponte [5]

1.2. Justificação do tema do trabalho

1.2.1. Evolução dos modelos para o estudo de vigas sujeitas à torção

Nesta secção pretende-se, numa primeira fase, apresentar alguma informação sobre modelos recentes para o estudos de vigas de betão armado sujeitas à torção e, numa segunda fase, enquadrar e justificar o tema do presente trabalho.

Em 1985, Hsu e Mo [17] propuseram um modelo baseado na Analogia da Trelíça Espacial (ATE) para simular o comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção. O referido modelo, designado neste trabalho por VATM (*Variable Angle Truss Model*) permite prever, para todo o historial de carga, a resposta da viga através do cálculo da curva $T - \theta$. Tal encontra-se ilustrado na Figura 22 para uma das vigas com secção retangular cheia de betão armado e de resistência normal ensaiadas no ACI (*American Concrete Institute*) por Hsu em 1969 [17]. Um dos grandes avanços do modelo, comparativamente a modelos anteriores também baseados na ATE é o caráter não linear do mesmo através da incorporação de uma relação constitutiva não linear do betão à compressão por forma a contabilizar o *softening effect*. Como pode ser observado através da Figura 22, apesar das previsões para elevados níveis de carregamento (comportamento último) serem bastante aceitáveis, observa-se também que, para níveis de carregamento baixos o modelo não prevê adequadamente o comportamento da viga. Tal deve-se essencialmente ao facto do modelo assumir que a viga se encontra totalmente fissurada desde o início do carregamento e também desprezar totalmente a influência do núcleo de betão para secções cheias. Este comportamento é geralmente observado para todas as vigas de referência utilizadas por Hsu e outros autores em estudos posteriores. Tais estudos mostraram que o VATM pode ser considerado um modelo fidedigno para a previsão do momento torsor resistente e respetiva deformação (rotação transversal) de vigas de betão armado com secção retangular cheia ou vazada, de resistência normal ou de alta resistência, inclusive para vigas com pré-esforço longitudinal centrado.

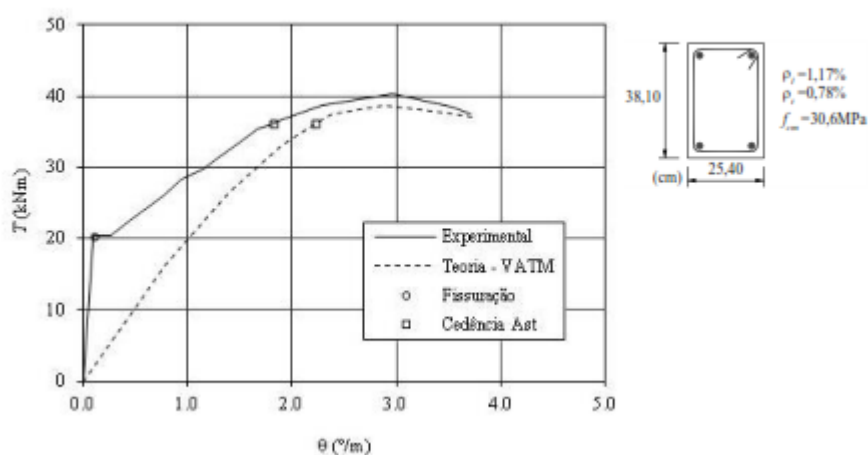


Figura 22 - Exemplo de Curva $T - \theta$ teórica e experimental tendo por base o VATM de Hsu e Mo [17]

Bernardo e Lopes em 2008 [15] e em 2011 [16] propuseram um modelo para prever o comportamento global de uma viga de betão armado submetida à torção, por meio do traçado da Curva $T - \theta$, para todos os estados comportamentais observados experimentalmente para a viga. Tal modelo, considerado misto, incorporava a junção de diferentes modelos teóricos para cada fase comportamental em estudo. A Figura 23, a seguir apresentada, ilustra algumas curvas $T - \theta$ obtidas a partir do referido modelo para 4 vigas de referência, incluindo vigas com secção retangular cheia e vazada, bem como vigas de alta resistência.

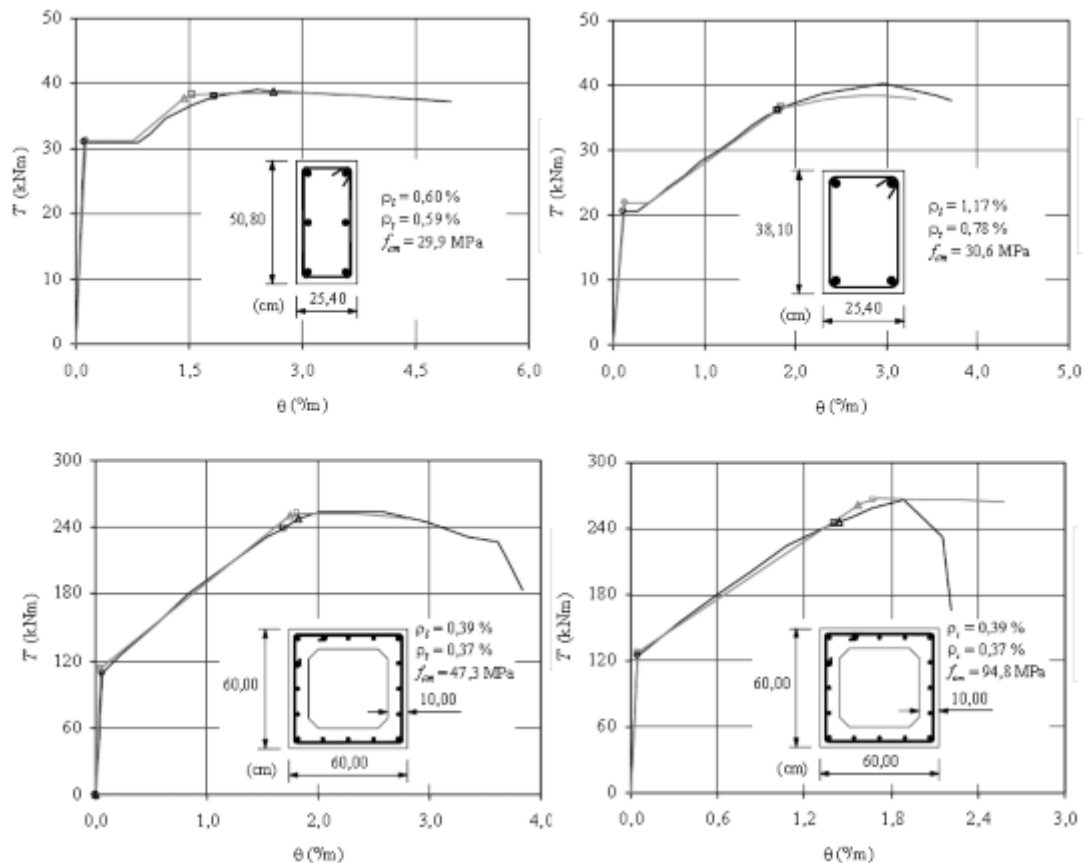


Figura 23 - Exemplos de Curvas $T - \theta$ segundo o modelo de Bernardo e Lopes de 2008 [18]

Com base nos gráficos ilustrados na Figura 23, pode observar-se a grande proximidade entre as curvas teóricas e experimentais, incluindo para baixos níveis de carregamento. No entanto, segundo Bernardo e Lopes, existem dois aspetos que tornam o modelo proposto não totalmente satisfatório. Em primeiro lugar, o modelo não fornece uma informação rigorosa relativa ao estado interno de tensões e extensões nos materiais para baixos níveis de carregamento. Por exemplo, o conhecimento da tensão e extensão nas armaduras é importante quando se pretende verificar o desempenho da viga para os Estados Limites de Serviço. Em segundo lugar, para modelar as três fases comportamentais da curva $T - \theta$ foram utilizadas três teorias diferentes, com formulações próprias para cada fase de comportamento da viga, o que tornou necessária a adoção de critérios semi-empíricos para realizar a transição entre as diferentes fases comportamentais.

Dadas as limitações do modelo anteriormente referido, Bernardo *et al.* em 2012 [20], modificaram o VATM com vista a torná-lo mais generalista de forma a poder prever o comportamento global de vigas sujeitas à torção tendo por base unicamente uma teoria. Este desenvolvimento do VATM, tendo por base o VATM original de Hsu e Mo [17], envolveu essencialmente a incorporação do estado pré-fissurado do betão através da modificação das condições de equilíbrio nas direções longitudinal e transversal por forma a considerar a participação do betão tracionado bem como a influência do núcleo de betão. Este modelo

passou a designar-se MVATM, (*Modified Variable Angle Truss Model*). Esta nova versão do modelo incorpora ainda relações constitutivas atualizadas para o betão à compressão e para as armaduras à tração, por forma a contabilizar o *softening effect* e o *stiffening effect*.

Este novo modelo constitui um avanço na modelação comportamental de vigas sujeitas à torção pois, à semelhança do modelo anteriormente referido e proposto por Bernardo e Lopes em 2008 e 2011 [15] [23], consegue prever adequadamente o comportamento das vigas para baixos níveis de carregamento. A vantagem deste novo modelo é que o mesmo é essencialmente baseado numa modificação do VATM, sendo por isso um modelo teoricamente mais consistente. Os resultados obtidos com MVATM estão ilustrados na Figura 24 para diversas vigas de referência.

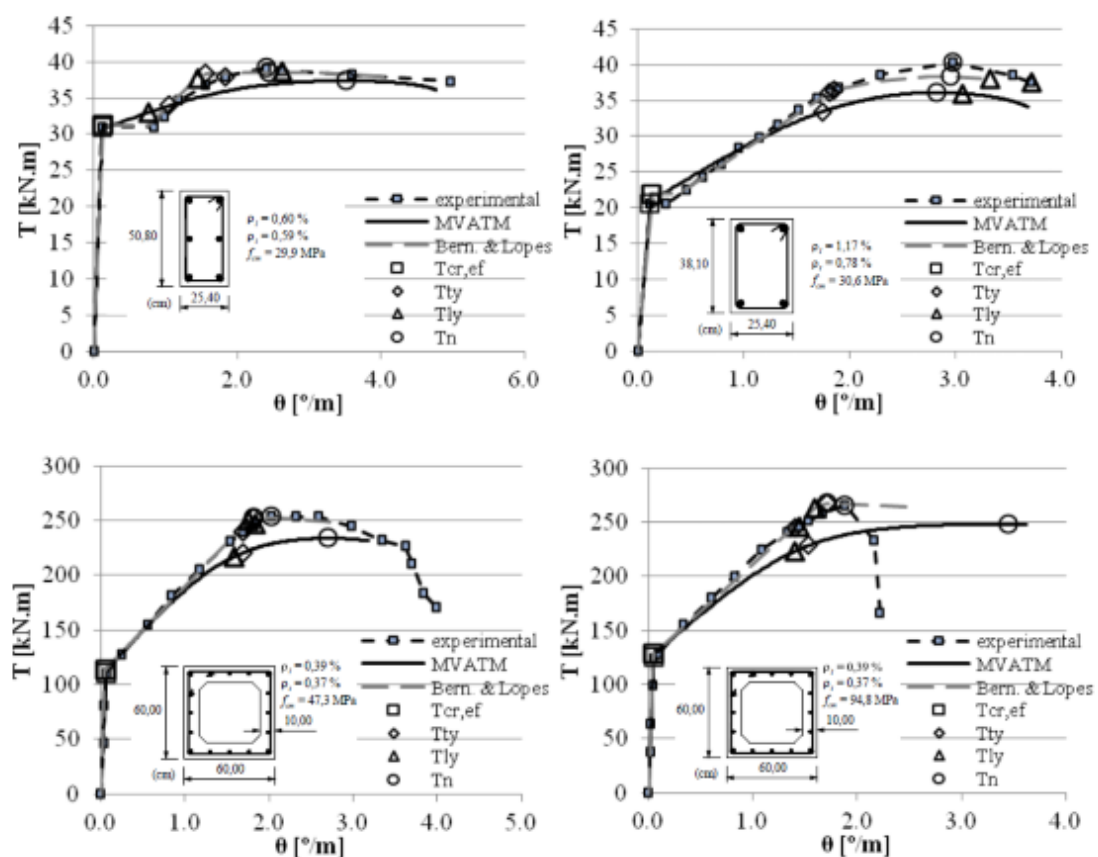


Figura 24 - Exemplos de Curvas $T - \theta$ tendo por base o MVATM de Bernardo et al. [20]

Apesar dos bons resultados obtidos com o MVATM, é necessário referir que o modelo não consegue, por si só, calcular o momento torsor de fissuração, sendo necessário o recurso à utilização de uma expressão baseada na Teoria do Tubo Fino de Bredt (teoria diferente do VATM) para calcular o limite entre o estado não fissurado e fissurado. Além disso, a necessidade de realizar um pequeno ajustamento da Curva $T - \theta$ à direita do ponto de fissuração, por forma a garantir a continuidade da curva para vigas com secção cheia, leva a que o estado interno de tensão e deformação previsto para os materiais para a fase pós

fissuração e para baixos níveis de carregamento, não possa ser considerado completamente fidedigno.

Em 2009 Jeng e Hsu [21] propuseram um novo modelo teórico que se baseia na adaptação de um modelo de membrana que foi inicialmente proposto para estudar o comportamento de placas de betão armado sujeitas ao corte, *SMM - Softened Membrane Model*. Este modelo consiste essencialmente numa extensão da teoria elástica de membrana para membranas de betão armado sujeitas ao corte, incluindo o estado fissurado. Este modelo foi adaptado para prever o comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção. Para tal, o modelo foi conjugado com a Teoria do Tubo Fino de Bredt que define a geometria para o fluxo de tensões de corte em peças lineares sujeitas à torção. O novo modelo passou a designar-se *SMMT - Softened Membrane Model for Torsion*. Um aspeto inovador deste modelo foi a incorporação, na sua formulação, das relações constitutivas do betão à tração e ao corte, para além da relação constitutiva do betão à compressão tendo em conta o *softening effect*. Desta forma, o modelo considera diretamente a contribuição do betão à tração na forma de um tirante perpendicular à escora (betão comprimido), bem como o efeito da distorção, resultado do estado de corte instalado.

De forma a ser possível a contabilização do efeito do gradiente de extensões nas escoras de betão, a adaptação do SMM para o SMMT passa pela incrementação em 45% da rigidez de pré-fissuração e da extensão para o pico de tensão relativa na relação constitutiva do betão à tração (a relação utilizada foi a proposta por Belarbi e Hsu, 1994 [22]). Tal correção permitiu calibrar o modelo na fase pré-fissuração. Para calibrar a última fase de comportamento à torção foi também necessário adotar 80% do valor utilizado para o designado coeficiente de Hsu/Zhu para os painéis de corte (adaptação do coeficiente de Poisson para o estado fissurado dos painéis). As referidas calibrações foram realizadas tendo por base numerosos resultados experimentais de vigas de betão armado com secção cheia encontradas na literatura. O SMMT consegue prever, por si só, as curvas $T - \theta$ de vigas de betão armado sujeitas à torção em todas as suas fases comportamentais, inclusive para as fases pré-fissuração e pós-fissuração (incluindo o momento torsor de fissuração). Por isso, pode afirmar-se que o SMMT constitui um modelo bastante aceitável do ponto de vista teórico e físico.

A Figura 25 apresenta alguns exemplos de curvas $T - \theta$ teóricas e experimentais para algumas vigas de referência (vigas de betão armado com secção cheia). As curvas teóricas estão indicadas a tracejado e as experimentais estão indicadas a linha contínua.

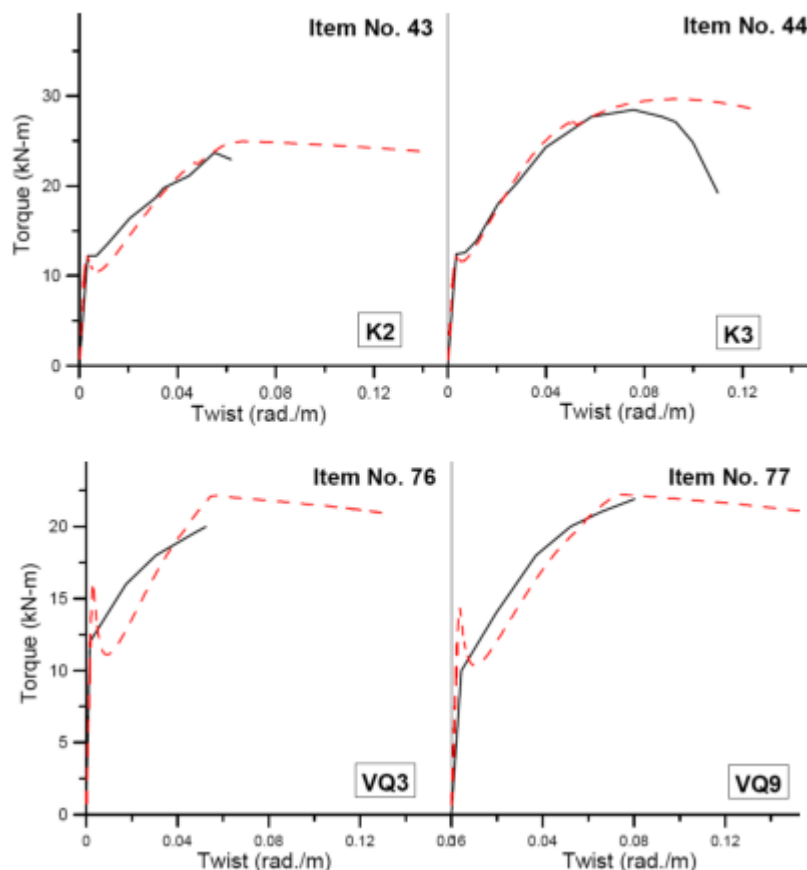


Figura 25 - Exemplos de Curvas $T - \theta$ obtidas tendo por base o SMMT de Jeng e Hsu [21]

Quando se analisam os gráficos ilustrados na Figura 25, pode observar-se uma diminuição acentuada do momento torsor na passagem da fase não fissurada para a fase fissurada, o que não acontece nas curvas experimentais. Assim sendo, a previsão da rigidez pós-fissuração tende a ser sobrestimada principalmente para vigas com menores taxas de armaduras. Além disso, deve novamente ser referido que o SMMT foi apenas calibrado para vigas de betão armado com secção retangular cheia. Os autores Jeng e Hsu justificaram esta opção pelo facto de, em primeiro lugar, o número de resultados experimentais associados a vigas com secção vazada sujeitas à torção ser ainda bastante inferior aos correspondentes a vigas com secção cheia. Além disso, os autores referem também que o mecanismo de passagem do estado não fissuração para o estado fissurado é ligeiramente diferente para vigas com secção cheia e vazada.

Finalmente, deve também ser referido que, apesar dos notáveis resultados gerais obtidos com o SMMT, este modelo apresenta formulações matemáticas complexas e os critérios de convergência são algo difíceis de implementar. A formulação do VATM, por seu lado, é mais simples, e permite melhor entender a mecânica do funcionamento de uma viga de betão armado à torção.

Como foi anteriormente referido, um dos aspetos inovadores do SMMT é a consideração direta da contribuição do betão à tração na direção perpendicular às escoras. Tendo por base esta ideia inovadora, Bernardo *et al.* em 2013 [23] reformularam o modelo original VATM e propuseram um novo modelo que inclui um “tirante” adicional na direção perpendicular às escoras do betão comprimido. Este novo modelo, *Generalized Softened Variable Angle Truss Model* (GSVATM), constitui, à semelhança do SMMT, um modelo global que considera diretamente a contribuição do betão à tração na direção perpendicular às escoras para o cálculo da resposta das vigas. No entanto, o GSVATM constitui uma extensão da ATE, enquanto o SMMT constitui uma extensão do modelo de membrana, sendo por isso modelos diferentes na sua base. Desta forma, o VATM constitui um caso particular do GSVATM quando a contribuição direta do betão à tração é desprezada. A Figura 26 apresenta alguns exemplos de curvas $T - \theta$ teóricas e experimentais para algumas vigas de referência (vigas de betão armado com secção cheia). As curvas teóricas estão indicadas a tracejado e as experimentais estão indicadas a linha contínua.

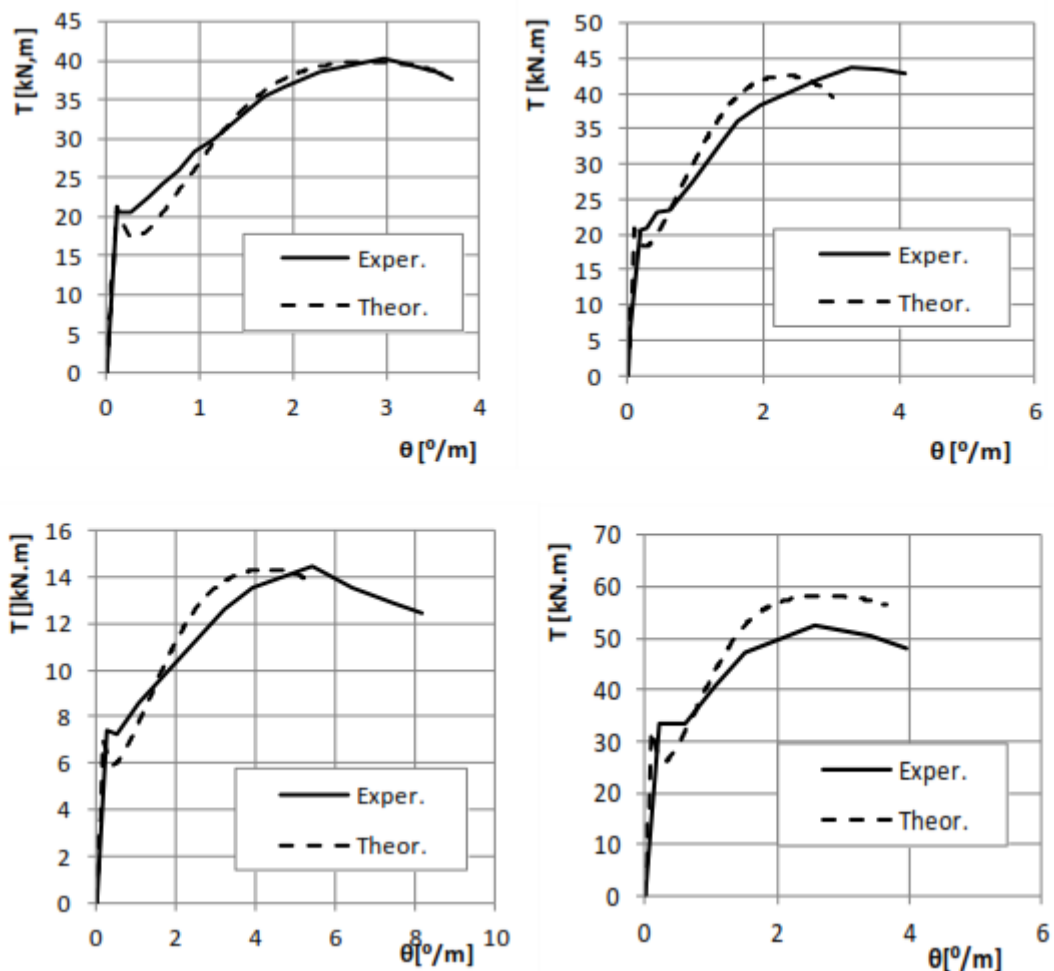


Figura 26 - Exemplos de Curvas $T - \theta$ obtidas tendo por base o GSVATM de Bernardo et al. [23]

Comparando os resultados ilustrados na Figura 26 com os da Figura 25, verifica-se que os resultados são semelhantes. Observa-se também, tal como no SMMT, uma diminuição do momento torsor logo após a fissuração sobretudo para as vigas com menores taxas de armaduras. Este comportamento do modelo poderá, conforme explicado por Bernardo *et al.* [24], dever-se à própria “forma” da lei constitutiva do betão à tração usada no modelo. Esta curva demonstra uma redução brusca da tensão após a tensão resistente à tração ser atingida. Com exceção deste pormenor, Bernardo *et al.* [23] mostraram que a fiabilidade do GSVATM para a previsão dos pontos das curvas $T - \theta$ correspondentes aos momentos torsores resistente e de fissuração é bastante semelhante à do SMMT. Conclui-se portanto que o GSVATM constitui um modelo válido e alternativo ao SMMT. Realça-se novamente que o GSVATM apresenta uma formulação mais simples, que facilita a implementação computacional do modelo e proporciona uma interpretação mais simples dos resultados obtidos.

Por estas razões, o GSVATM é o modelo utilizado no presente trabalho.

1.2.2. Modificação do GSVATM para a incorporação de vigas de betão armado com secção vazada

Como foi referido na secção anterior, tanto o SMMT como o GSVATM foram apenas calibrados e validados para vigas de betão armado com secção cheia. Bernardo *et al.* em 2013 [24] e 2014 [23] confirmaram a dificuldade em validar e calibrar adequadamente tanto o SMMT como o GSVATM para vigas com secção vazada. Por este motivo, justifica-se a necessidade de mais estudos teóricos e experimentais sobre vigas com secção vazada sujeitas à torção.

Uma das razões que justifica o SMMT não ter sido verificado para vigas com secção vazada, segundo Jeng e Hsu em 2009 e Jeng *et al.* em 2010 para o SMMT, prende-se com o facto das vigas com seção vazada apresentarem momentos torsores de fissuração e respetivas rotações mais baixas do que as vigas com secção cheia. A apoiar esta explicação, Bernardo *et al.* em 2014 [23] sugeriram que, para além do gradiente das extensões, o núcleo de betão das secções cheias também influencia certamente o comportamento da viga no estado pré-fissurado. Outra razão prende-se com o facto do número de resultados experimentais encontrados na literatura e associados a vigas com secção vazada ser notavelmente inferior comparativamente aos resultados encontrados para vigas com secção cheia. Além disso, os resultados experimentais associados ao momento torsor de fissuração e respetiva rotação costumam apresentar uma dispersão notável, provavelmente devido a uma maior dificuldade em registar experimentalmente o instante exato em que surge a primeira fissura e a respetiva rotação que, para os níveis de carregamento correspondentes, apresenta uma magnitude muito baixa. Desta forma, o menor número de resultados experimentais associados a vigas com secção vazada torna difícil a validação e calibração dos modelos de cálculo para baixos níveis de carregamento.

Bernardo *et al.* em 2013 [24] avaliaram o SMMT para a resposta torsional de vigas com secção vazada sujeitas à torção, incluindo vigas com pré-esforço longitudinal centrado. Os referidos autores confirmaram que o SMMT não fornece boas previsões para este tipo de vigas, em especial na passagem do estado não fissurado para o estado fissurado. O principal motivo reside na correção empírica realizada por Jeng e Hsu em 2009 [21] sobre a lei constitutiva do betão à tração para a fase pré-fissurada das vigas. Tal correção foi calibrada para vigas com secção cheia, não podendo ser considerada válida para secções vazadas. Ainda assim, Bernardo *et al.* em 2013 [24] ainda propuseram parâmetros de correção alternativos, calibrados tendo por base o número reduzido de resultados experimentais disponíveis. Para vigas com secção cheia, os referidos autores sugeriram que, na lei constitutiva do betão à tração, a rigidez da fase de pré-fissuração e a extensão para o pico de tensão deveriam ser incrementadas apenas em 24%. Desta forma, os resultados para vigas betão armado mostraram ser aceitáveis. Numa via alternativa para tentar generalizar o SMMT para vigas de betão armado com secção vazada, Jeng 2014 [25] realizou ensaios experimentais adicionais com vigas com secção vazada com dois objetivos principais. Primeiro, incrementar o número de resultados experimentais disponíveis. Segundo, realizar os ensaios de forma especialmente controlada para medir com rigor a fase comportamental das vigas anterior à fissuração, bem como o momento torsor de fissuração e respetiva rotação. O objetivo do autor era conseguir obter resultados experimentais fidedignos para calibrar adequadamente as leis constitutivas do betão à tração e à compressão para o SMMT, por forma a englobar também as vigas com secção vazada. Com base neste trabalho, Jeng em 2014 [25] propôs um procedimento de cálculo modificado que deu origem ao SMMT unificado, válido tanto para vigas de secção vazada como para vigas de secção cheia.

Como foi referido na secção anterior, os resultados teóricos obtidos através do SMMT e do GSVATM são bastante similares quando os modelos são utilizados para vigas com secção cheia. Por isso, os resultados recentes obtidos por Jeng em 2014 [25] para obter um SMMT unificado poderão também servir para obter um GSVATM unificado válido tanto para vigas de secção vazada como para vigas de secção cheia.

Tendo por base o referido no parágrafo anterior, é objetivo deste trabalho aproveitar os referidos resultados de Jeng em 2014 [25] para o SMMT e sua metodologia aplicada, por forma a modificar o procedimento de cálculo do GSVATM com vista a ser possível incluir também as vigas de secção vazada.

1.3. Objetivos do trabalho

O trabalho apresentado tem como principal objetivo a extensão do modelo GSVATM por forma a incluir e prever teoricamente o comportamento global de vigas de betão armado com secção transversal vazada sujeitas à torção. O procedimento de cálculo do GSVATM modificado seguirá a estrutura original da formulação global do GSVATM original. Uma vez

que a utilização do modelo pode tornar-se um pouco complexa e morosa se os cálculos forem realizados manualmente, o modelo proposto será implementado num programa auxiliar de cálculo designado TORQUE 2.0.

Efetuada as alterações necessárias, realizar-se-á uma análise comparativa de forma a comprovar a validade das alterações realizadas. Este estudo comparativo é dividido em duas partes. Primeiramente procede-se ao estudo de nove vigas com base nas quais foram propostas as alterações do modelo, e seguidamente procede-se à verificação da extensão das alterações efetuadas para mais 23 vigas com secção vazada disponíveis na literatura.

1.4. Organização do documento

Apresenta-se seguidamente a organização da dissertação com uma descrição muito resumida do conteúdo dos diversos capítulos.

No Capítulo 1 é apresentado o tema, enquadrando-o no âmbito da prática e enfatizando os aspetos que tornam este estudo importante e necessário.

No Capítulo 2 é apresentada a descrição do modelo teórico GSVATM que permite a obtenção teórica do comportamento global de uma viga de betão armado sujeita à torção pura para todo o historial de carga. São ainda apresentadas as leis constitutivas das materiais (aço e betão) incorporadas no modelo.

No Capítulo 3 o procedimento de cálculo do modelo teórico GSVATM é modificado, de forma justificada, com vista a torná-lo apto a prever o comportamento global de vigas com secção vazada. Para tal, o GSVATM modificado foi implementado num programa auxiliar de cálculo também modificado, o TORQUE 2.0. Na parte final apresenta-se uma proposta de alteração do algoritmo subjacente ao funcionamento do TORQUE 2.0.

No Capítulo 4 é apresentada uma análise comparativa com os resultados experimentais de 32 vigas, com a finalidade de avaliar o desempenho do GSVATM modificado na previsão comportamental das vigas de secção vazada sujeitas à torção. Esta comparação foi realizada com o auxílio do programa TORQUE 2.0.

Finalmente, no Capítulo 5 resumem-se as principais conclusões do estudo realizado e apresentam-se indicações e recomendações para futuros desenvolvimentos do trabalho.

Para facilitar a leitura da dissertação, são apresentados no início o índice geral, a lista de figuras e de tabelas e a simbologia, e no final do texto são listadas as referências bibliográficas.

Capítulo 2 - Generalização do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável - GSVATM

2.1. Breve introdução

A proposta de um modelo de treliça para a simulação do comportamento de um elemento de betão armado teve origem em 1899 com Ritter [26] e posteriormente em 1902 com Morsh [27]. Segundo os referidos autores, quando uma viga de betão armado é submetida a esforço transversal, existe fissuração diagonal que reparte o betão numa série de escoras. Aquando do carregamento, a viga é idealizada como uma treliça plana, em que as barras longitudinais, superior e inferior, constituem as cordas da treliça e as barras transversais e as escoras são os elementos de equilíbrio da alma da viga. De modo a simplificar o modelo, a inclinação das escoras de betão inicialmente adotada pelos autores é constante e igual a 45° , sendo por isso designado Modelo de Treliça a 45° de Ritter e Morsh. Este modelo permitia assim a obtenção de três equações de equilíbrio, a partir das quais se poderiam calcular as tensões na armadura transversal, longitudinal e nas escoras de betão e permitiam também o cálculo da resistência última ao esforço transversal.

Através da generalização do Modelo de Treliça a 45° para o esforço de torção, Rausch em 1929 [28] propôs a primeira teoria capaz de prever a resistência última de vigas de betão armado à torção. Para tal, Rausch assumiu a fissuração de uma viga de betão armado como um tubo de parede fina, pelo que o estado de tensão interna da secção corresponde a um fluxo circulatório de tensões de corte em torno do eixo de torção da viga, de acordo com o previsto pela Teoria do Tubo de Fino de Bredt. Este tubular comporta-se como uma treliça espacial. Rausch realizou uma conjugação bastante inteligente entre a teoria do tubo fino de Bredt e a analogia de treliça plana utilizada para a análise da ação do esforço transversal. Apesar da notável evolução do modelo então proposto, observaram-se grandes discrepâncias entre as previsões e as resistências efetivas das vigas à torção. Tal foi justificado pela não contabilização da resistência ao corte da escora, da resistência ao corte por meio do “efeito de ferrolho” nas barras longitudinais e transversais, da contribuição do núcleo de betão (em menor grau) e da resistência do betão à tração [5].

Ao longo das últimas décadas foram desenvolvidas três aproximações com o objetivo de melhorar a exatidão do modelo de Rausch. Uma delas, e que foi assumida pelo código americano de 1971 [29] a 1995 [30], foi a consideração da armadura como parcialmente eficiente, conforme proposto por Andersen em 1935 [31] e Cowan em 1950 [32]. A outra aproximação consistiu na redução da área limitada pela linha média do fluxo de corte para a área limitada por uma linha fechada que liga os centros dos varões longitudinais segundo

Lampert e Thurlimann em 1969 [33] e adotada pelo código europeu de 1978 [34]. A última aproximação, proposta por Collins e Mitchell em 1980 [35] também envolvia uma redução da área, mas assumindo que a linha média do fluxo de tensões de corte coincidia com a linha média do bloco equivalente das tensões de compressão nas escoras, sendo esta ainda hoje adotada no código canadiano [36]. No entanto, esta última hipótese não é rigorosa no cálculo da profundidade do bloco equivalente das tensões de compressão, pois não tem em conta o *softening effect*. Uma vez que a resistência da escora é fortemente reduzida quando há fissuração diagonal (Hsu e Mo em 1985 [17]), a resistência à compressão da escora não é igual à resistência do betão medida em corpos de prova cilíndricos submetidos a ensaios de compressão uniaxial.

2.2. VATM - Modelo de Treliça com Ângulo Variável

2.2.1. Algumas Considerações

As três aproximações anteriormente referidas, mesmo tendo melhorado as equações de Rausch, careciam de fundamentação teórica. O aspeto mais importante residia nas aproximações calibradas que eram apenas válidas para uma estrutura específica, e que portanto não se poderia aplicar para todos casos.

Surgiu assim a necessidade de uma nova aproximação que permitisse a aplicação da mesma para qualquer tipo de viga, com pequenas ou grandes secções, ou mesmo em vigas pré-esforçadas. Foram assim realizados diversos estudos que permitiram reformular o modelo inicialmente proposto por Rausch. Tais modelos desenvolvidos são designados por VATM (*Variable Angle Truss Model*) ou Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável.

Lampert e Thurlimann em 1969 [33] ao assumirem a variabilidade do ângulo das escoras de betão e ao incorporarem a teoria da plasticidade, tornaram possível explicar por que razão as armaduras, longitudinal e transversal, entravam ambas em cedência inclusive quando estas não respeitavam o princípio da igualdade de volume (armaduras não equilibradas). Os autores também observaram que as superfícies de uma viga plana, quando sujeita à torção, tornavam-se hiperbólicas, o que permitiu concluir que as escoras do betão para além de se encontrarem comprimidas também sofriam flexão.

Hsu e Mo em 1985 [17] [37] incorporaram com sucesso o *softening effect* no VATM, que permitiu a obtenção de previsões da resistência à torção muito semelhantes às verificadas experimentalmente.

Ao longo deste capítulo é descrito detalhadamente o modelo VATM proposto por Hsu e Mo [17] [37] e a sua formulação. A opção pela descrição detalhada do referido modelo justifica-se visto que o modelo utilizado no presente trabalho (GSVATM), e descrito mais adiante neste capítulo, constitui uma generalização do VATM.

2.2.2. Modelo de Treliça Plana

Na Figura 27 a seguir apresentada, é ilustrado o modelo de treliça plana considerado por Hsu e Mo [17] utilizado para uma viga simplesmente apoiada com vão L e com uma carga concentrada a meio vão. A viga encontra-se sujeita à ação do esforço transversal e da flexão ao longo do seu vão. A distância entre a armadura longitudinal superior e inferior é designada por d_v . A largura da secção da viga é considerada igual a t .

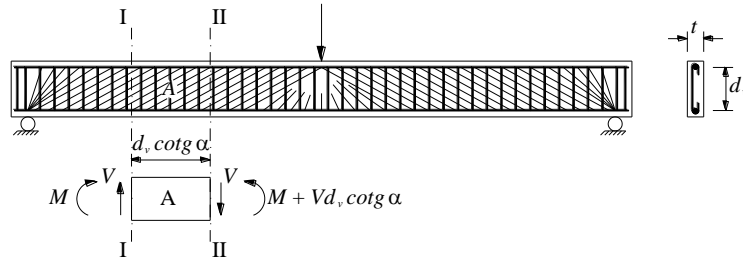


Figura 27- Análise de uma viga de betão armado com base no modelo de treliça plana [23]

O elemento A da viga tem um comprimento $d_v \cot(\alpha)$ (que é o comprimento em projeção horizontal de uma fissura com ângulo α em relação ao eixo da viga), e está sujeito a um esforço transversal V constante. Em relação ao momento fletor M , o da face direita sofre um incremento de $V d_v \cot(\alpha)$ devido ao esforço transversal. Conforme ilustrado na Figura 28, a força de corte V da face esquerda decompõe-se em duas componentes, N e D , em que N é absorvida pelas armaduras longitudinais, superior e inferior, e D pelas escoras de betão.

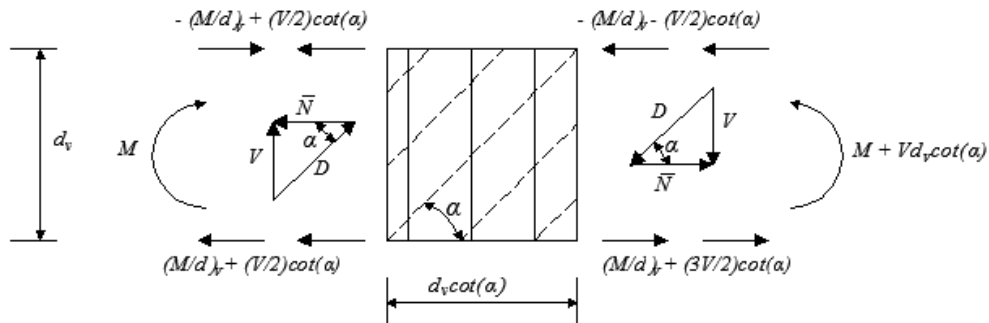


Figura 28 - Elemento A do modelo de treliça plana ilustrado na Figura 27 [14]

Pelas relações trigonométricas, facilmente se obtém:

$$V = D \times \text{sen } \alpha \leftrightarrow D = \frac{V}{\text{sen } \alpha} \quad (1-1)$$

$$N = V \cot(\alpha) \quad (1-2)$$

Por isso, para cada armadura longitudinal (inferior e superior):

$$\frac{N}{2} = \frac{V}{2} \cot(\alpha) \quad (1-3)$$

A tensão nas escoras de betão é obtida a partir da relação entre a força D e a área da secção transversal das escoras:

$$\sigma_d = \frac{D}{t d_v \cos(\alpha)} \quad (1-4)$$

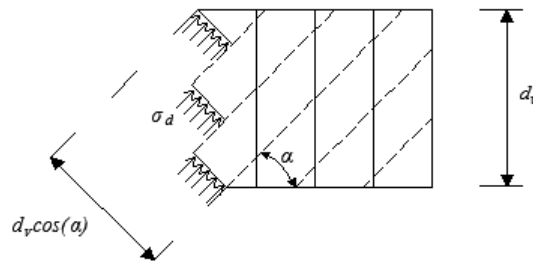


Figura 29 - Tensão nas escoras [14]

Nas cordas longitudinais, à força $N/2$ adiciona-se ainda o efeito provocado pelo momento fletor, existindo assim na face esquerda $\pm M/d_v$. A força total na corda superior N_t é dada por:

$$N_t = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot(\alpha) \quad (1-5)$$

Na corda inferior N_b , a força total é dada por:

$$N_b = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot(\alpha) \quad (1-6)$$

Relativamente à face direita adiciona-se também o valor correspondente à força devido ao momento fletor $M + V d_v \cot(\alpha)$:

$$N_t = -\frac{M + V d_v \cot(\alpha)}{d_v} + \frac{V}{2} \cot(\alpha) = -\frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot(\alpha)}{2} - \cot(\alpha) \right) \quad (1-7)$$

$$N_b = \frac{M + V d_v \cot(\alpha)}{d_v} + \frac{V}{2} \cot(\alpha) = \frac{M}{d_v} + \frac{3}{2} V \cot(\alpha) \quad (1-8)$$

Para haver equilíbrio a força horizontal $V \cot(\alpha)$ decompõe-se em D e $n_v d_v \cot(\alpha)$, em que D é absorvida pelas escoras diagonais e a outra força representa uma força uniforme na armadura transversal por unidade de comprimento. A Figura 30 ilustra a decomposição de forças anteriormente descrita, através de corte horizontal no elemento A da Figura 29.

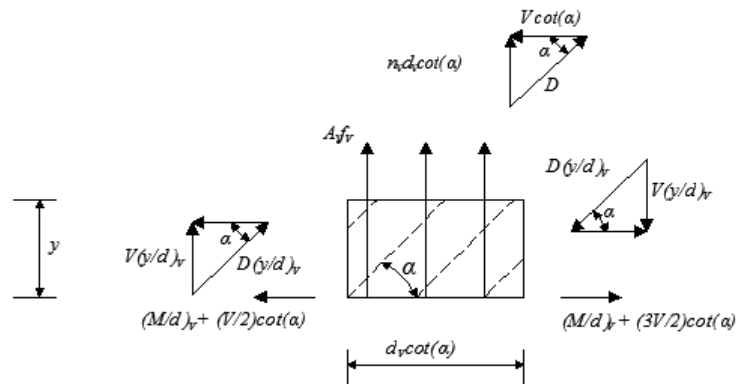


Figura 30- Secção do elemento A [14]

Define-se n_v como sendo a força nas armaduras transversais por unidade de comprimento,

$$n_v = \frac{A_v f_v}{s} \quad (1-9)$$

De acordo com o triângulo superior ilustrado na Figura 30, a força distribuída na armadura transversal vem:

$$n_v d_v = V \tan(\alpha) \leftrightarrow A_v f_v = \frac{V s \tan(\alpha)}{d_v} \quad (1-10)$$

2.2.3. Esforço de Torção em Vigas de Secção Vazada

Na Figura 31 é apresentada uma viga de secção retangular vazada armada com um varão longitudinal em cada canto e cintas uniformemente espaçadas (espaçamento s). São também ilustradas as escoras inclinadas (entre fissuras) de um ângulo α relativamente ao eixo longitudinal da viga [5]:

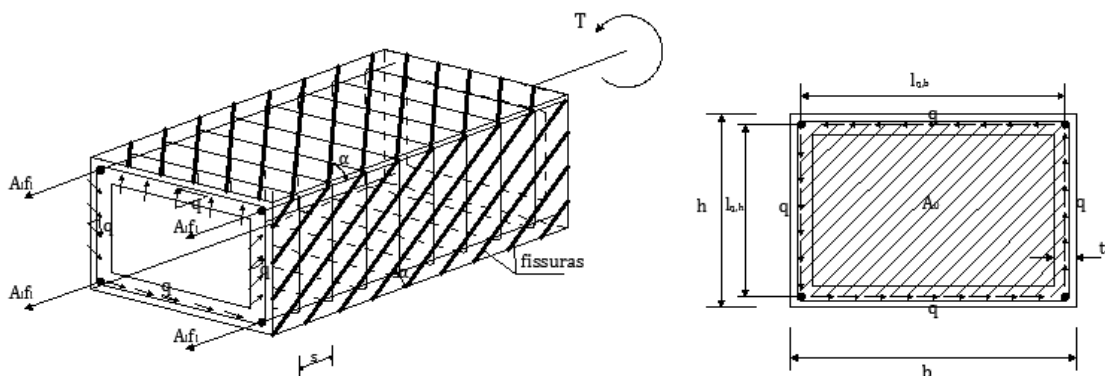


Figura 31- viga de secção retangular oca sujeita à torção [14]

A força resultante entre as forças nas barras longitudinais, $A_i f_i$ e as forças nas escoras diagonais de betão inclinadas com um ângulo α , constitui o fluxo de corte, q , que atua na secção transversal conforme indicado na Figura 31.

Para a análise desta viga pode utilizar-se a Teoria do Tubo Fino de Bredt, em que o fluxo de corte circulatório nas paredes do tubo é dado por:

$$q = \frac{T}{2A_0} \quad (1-11)$$

Em que A_0 refere-se à área limitada pela linha média do fluxo de corte, tal como ilustra a Figura 31 acima indicada no lado direito, que é assumida como a linha média das paredes de espessura t . O comprimento da secção transversal onde o fluxo de corte se desenvolve é l_q , e portanto a força de corte equivalente ao fluxo de corte numa parede é:

$$V = ql_q \quad (1-12)$$

A força na armadura longitudinal é obtida pela equação (1-2) e é dada por:

$$N = ql_q \cot(\alpha) \quad (1-13)$$

A força total nas armaduras longitudinais é dada por $\Delta N = A_l f_l$, em que A_l , é a área total de armadura longitudinal e f_l , a tensão dessa armadura. Define-se ainda $p_0 = \sum l_q$ como o perímetro da linha média do fluxo de corte. Assim, a força total nas armaduras longitudinais pode ser expressa como:

$$\Delta N = \sum N = qp_0 \cot(\alpha) = A_l f_l \quad (1-14)$$

Considerando a equação (1-11):

$$A_l f_l = \frac{Tp_0}{2A_0} \cot(\alpha) \quad (1-15)$$

Para a armadura transversal utiliza-se a equação (1-10) e tendo em conta que $q = V/d_v$, vindo

$$A_t f_t = qs \tan(\alpha) \quad (1-16)$$

Em que A_t é a área de armadura transversal e f_t representa a tensão numa barra transversal. Substituindo o fluxo de corte, q , na equação (1-16), vem:

$$A_t f_t = \frac{Ts}{2A_0} \tan(\alpha) \quad (1-17)$$

A tensão nas escoras de betão, através da equação (1-4), é dada por:

$$\sigma_d = \frac{q}{t \sin(\alpha) \cos(\alpha)} \quad (1-18)$$

Utilizando a equação (1-11), vem:

$$\sigma_d = \frac{T}{2A_0 t \sin(\alpha) \cos(\alpha)} \quad (1-19)$$

Encontram-se então justificadas as quatro equações básicas de equilíbrio para a torção segundo o VATM, sendo estas as equações (1-11), (1-15), (1-17) e (1-19).

Em conclusão, como a resistência última de uma viga de secção vazada é praticamente igual à de uma viga com secção cheia, quando apresenta as mesmas características (dimensões exteriores, tipo de betão, quantidade e disposição de armaduras), as referidas equações são consideradas válidas também para vigas de secção cheia.

2.2.4. Relações constitutivas utilizadas

Geralmente a relação tensão (σ) - extensão (ε) para o betão à compressão é obtida por ensaios de compressão uniaxiais e representada por uma curva parabólica. Em 1952, Hognestad [38] foi um dos primeiros autores a propor uma relação constitutiva para o betão à compressão com base em ensaios experimentais de compressão uniaxial. Como já referido anteriormente, esta relação não pode ser usada na sua forma original para estudar o comportamento de elementos sujeitos à torção, pois não leva em conta o *softening effect* (existência de extensões transversais de tração). Esta situação levou vários autores a realizarem diversos estudos experimentais com o objetivo de encontrar novas relações constitutivas que se aproximassem o mais possível do comportamento real do betão comprimido quando este se encontra sujeito a um estado biaxial de tensão.

Num estudo realizado recentemente por Bernardo *et al.* em 2012 [39] foi feita uma exaustiva análise comparativa, tendo por base 21 relações $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido de vários autores, entre as previsões para o momento torsor resistente e respetiva rotação obtidas a partir do VATM e dos dados obtidos experimentalmente. Os autores concluíram que um dos modelos teóricos mais adequados era aquele que incorporava a relações $\sigma - \varepsilon$ proposta por Belarbi e Hsu em 1991 [40] juntamente com os fatores de redução propostos por Hsu e Zhang em 1998 [41], para contabilizar o *softening effect*.

A tensão na escora diagonal de betão σ_2^c é definida como a tensão média de um diagrama não uniforme (Figura 39 (b)):

$$\sigma_2^c = k_2^c \beta_\sigma f_c' \quad (1-20)$$

Conforme apresentado na seguinte Figura 30, a curva $\sigma - \varepsilon$ apresenta dois troços, um ascendente em que $\varepsilon_2^c \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0$ e um descendente em que $\varepsilon_2^c > \beta_\varepsilon \varepsilon_0$. O troço ascendente é descrito pela equação:

$$\sigma_2^c = \beta_\sigma f_c' \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (1-21)$$

O troço descendente é descrito pela equação:

$$\sigma_2^c = \beta_\sigma f_c' \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_2^c - \beta_\varepsilon \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 - \beta_\varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (1-22)$$

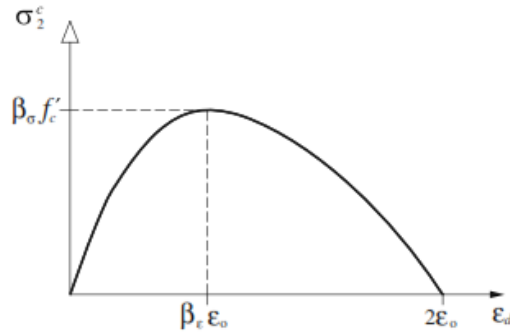


Figura 32- Relação σ - ε do betão à compressão [14]

Na equação (1-20) β_σ é um coeficiente de redução da tensão que contabiliza o *softening effect*. Este coeficiente é expresso em função da tensão de resistência à compressão do betão f_c' e da respetiva extensão ε_0 , da extensão de tração ε_1^c na direção perpendicular às escoras, da taxa de armaduras longitudinal e transversal, ρ_l e ρ_t respetivamente e da tensão nas armaduras longitudinal e transversal f_{ly} e f_{ty} respetivamente, conforme mostra a seguinte equação:

$$\beta = \beta_\sigma = \beta_\varepsilon = \frac{R(f_c')}{\sqrt{1 + \frac{400\varepsilon_1^c}{\eta'}}} \eta = \frac{\rho_l f_{ly}}{\rho_t f_{ty}} \quad (1-23)$$

Onde:

$$R(f_c') = \frac{5.8}{\sqrt{f_c'(\text{MPa})}} \leq 0.9 \quad (1-24)$$

$$\begin{cases} \eta \leq 1 \rightarrow \eta' = \eta \\ \eta > 1 \rightarrow \eta' = 1/\eta \end{cases} \quad (1-25)$$

Quanto ao parâmetro k_2^c que representa a tensão média nas escoras de betão é obtida integrando as equações (1-21) e (1-22) obtendo-se:

$$k_2^c = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{\beta_\varepsilon \varepsilon_0} - \frac{(\varepsilon_{2s}^c)^2}{3(\beta_\varepsilon \varepsilon_0)^2} \quad \text{se } \varepsilon_{2s}^c \leq \beta_\varepsilon \varepsilon_0 \quad (1-26)$$

$$k_2^c = 1 - \frac{\beta_\varepsilon \varepsilon_0}{3\varepsilon_{2s}^c} - \frac{(\varepsilon_{2s}^c - \beta_\varepsilon \varepsilon_0)^3}{3\varepsilon_{2s}^c (2\varepsilon_0 - \beta_\varepsilon \varepsilon_0)^2} \quad \text{se } \varepsilon_{2s}^c > \beta_\varepsilon \varepsilon_0 \quad (1-27)$$

O parâmetro β_ε é um coeficiente de redução da extensão correspondente à tensão máxima contabilizando o *softening effect*.

Quanto às relações $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias à tração também devem ser adotadas relações adequadas que traduzam o comportamento das armaduras inseridas em betão, pelo que não devem ser usadas as relações que resultem de ensaios uniaxiais à tração, pois estas relações não incluem o *stiffening effect* (participação do betão tracionado entre fissuras). A contabilização do *stiffening effect* é importante pois parte da tração é suportada pelo betão não fissurado (zonas entre fissuras), sendo a tração transferida das armaduras para o betão por aderência. Bernardo *et al.* em 2012 [39] também compararam os resultados dos diferentes modelos para as relações $\sigma - \varepsilon$ propostas para as armaduras ordinárias tracionadas. Os autores chegaram à conclusão que a Curva $\sigma - \varepsilon$ de Belarbi e Hsu proposta em 1994 [22] era a mais adequada para exprimir o comportamento das armaduras em vigas de betão armado sujeitas a torção. Tal relação $\sigma - \varepsilon$ encontra-se ilustrada na Figura 31, sendo expressa pela equação (1-28). A curva $\sigma - \varepsilon$ pode ser dividida em três troços: o primeiro troço da curva apresenta um declive igual ao módulo de elasticidade, E_s , classificando-se este troço como de comportamento elástico-linear; o segundo apresenta um traçado curvo de transição; o último troço da curva é retilíneo apresentando um declive igual ao módulo de elasticidade plástico E_p .

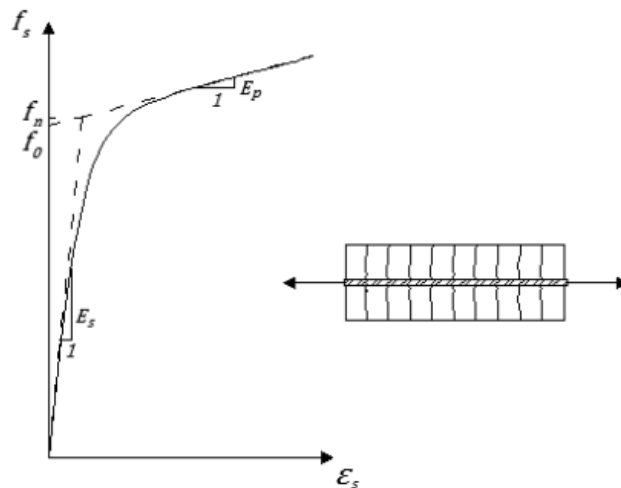


Figura 33 - Curva σ - ε para as armaduras ordinárias tracionadas [14]

De acordo com Belarbi e Hsu, a curva ilustrada na Figura 33, pode ser expressa por:

$$f_s = \frac{0.975E_s\varepsilon_s}{\left[1 + \left(\frac{1.1E_s\varepsilon_s}{f_{sy}}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}} + 0.025E_s\varepsilon_s \quad (1-28)$$

Onde f_n corresponde à tensão onde as retas assintóticas se intersectam, assumindo valores da ordem de 91% do valor da tensão de cedência das armaduras f_{sy} . A equação (1-28) acima referida encontra-se também definida em função de m que corresponde à forma do troço curvo, que por sua vez é função da resistência à tração do betão, f_{cr} , da tensão de cedência do aço f_{sy} e da taxa de armadura ρ :

$$m = \frac{1}{9B - 0.2} \leq 25 \quad (1-29)$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}} \right)^{1.5} \quad (1-30)$$

$$f_{cr} = 3.75 \sqrt{f'_c (\text{psi})} \quad (1-31)$$

2.3. GSVATM em vigas de betão armado

2.3.1. Vigas sob ação do esforço transversal

De forma a introduzir no VATM o comportamento do betão à tração, Bernardo *et al.* em 2013 [23] incorporaram um “tirante” perpendicular à escora de betão. Tal como no VATM, é considerado o equilíbrio de uma viga de betão de armado de alma fina simplesmente apoiada e sujeita a uma carga concentrada a meio vão, da qual resultam os seguintes esforços internos: esforço transversal e flexão, conforme a Figura 26. O equilíbrio do elemento A da Figura 26 está ilustrado na Figura 32, onde, na face direita, a tensão de corte q , provocada pela ação do esforço transversal V , se admite uniforme ao longo de toda a altura da secção, sendo:

$$q = \frac{V}{d_v} \quad (1-32)$$

Na face esquerda, a força de compressão C é absorvida pelas escoras diagonais de betão que fazem um ângulo α com a direção longitudinal da viga. A tensão de compressão σ_2^c (o índice inferior 2 é relativo à direção principal de compressão e o índice superior c é relativo ao material, que neste caso é o betão - *concrete*), está associada à força de compressão C e atua numa secção transversal da viga na direção perpendicular às escoras com largura t e altura $d_v \cos \alpha$.

A inovação neste modelo consistiu na contabilização de um tirante diagonal de betão perpendicular à escora, conforme ilustrado na Figura 34, introduzindo-se desta forma um estado biaxial de tensão através da força de tração T perpendicular à força de compressão C e a atuar em simultâneo. Quanto à tensão de tração, esta é representada por σ_1^t (o índice inferior 1 está relacionado com a direção principal de tração, sendo esta perpendicular à direção principal de compressão), e está associada à força de tração T , que atua numa seção transversal da viga na direção perpendicular aos tirantes com largura t e altura $d_v \sin \alpha$. Na Figura 34, a força longitudinal N representa a força longitudinal total absorvida pela armadura longitudinal.

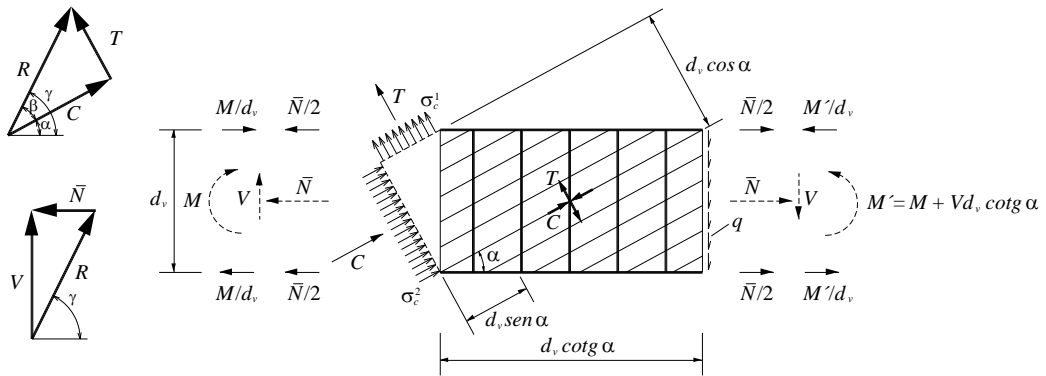


Figura 34 - Forças de equilíbrio do elemento A da viga quando $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ [23]

No triângulo de forças apresentado na parte superior da Figura 34, a força R é a força resultante das forças de compressão C e de tração T , em que o seu ângulo β em relação à força C e o seu ângulo γ , em relação ao eixo longitudinal da viga podem ser obtidos a partir de:

$$R = \sqrt{C^2 + T^2} \quad (1-33)$$

$$\beta = \arctg \left(\frac{T}{C} \right) \quad (1-34)$$

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (1-35)$$

Uma vez que neste modelo o ângulo $\alpha + \beta$ é um ângulo variável, na Figura 34 acima referida é estabelecida a hipótese $\alpha + \beta \leq 90^\circ$. No entanto, segundo Bernardo *et al.* em 2014 [23] as primeiras simulações do GSVATM revelaram que somente para níveis de momentos torsores muito baixos (inferiores ao momento torsor de fissuração) se verificava geralmente a condição $\alpha + \beta \leq 90^\circ$. Para o restante intervalo de carregamento prevalece a condição $\alpha + \beta > 90^\circ$. Por isso, daqui em frente opta-se primeiramente por apresentar a derivação da formulação para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e posteriormente apresentar as mudanças a incorporar quando $\alpha + \beta > 90^\circ$.

Quando $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, o esforço transversal V que atua na face esquerda é decomposto nas forças N e R , conforme se observa no triângulo de forças inferior da Figura 34, podendo escrever-se:

$$N = V \cotg \gamma \quad (1-36)$$

$$R = \frac{V}{\text{Sen } \gamma} \quad (1-37)$$

A tensão nas escoras diagonais de betão, σ_2^c uma vez que C atua numa secção com uma área t por $d_v \cos \alpha$, é dada por:

$$\sigma_2^c = \frac{C}{td_v \cos \alpha} \quad (1-38)$$

De forma análoga, a tensão nos tirantes diagonais de betão, σ_1^c é obtida por:

$$\sigma_1^c = \frac{T}{td_v \sin \alpha} \quad (1-39)$$

Relativamente ao cálculo da força nas armaduras longitudinais, à semelhança do ocorrido na Secção 2.2.2., terá de se contabilizar a força $\pm M/d_v$ na face esquerda e a força $\pm(M + Vd_v \cot \alpha)/d_v$ na face direita do elemento A (Figura 28), ambas provenientes da ação do momento M . Estas duas forças são assim adicionadas à força $N/2$ provocada pela força de corte V na corda superior e inferior. As forças na corda superior e inferior, N_t e N_b respetivamente, são dadas por:

$$N_t^{esq} = -\frac{M}{d_v} + \frac{N}{2} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma \quad (1-40)$$

$$N_b^{esq} = \frac{M}{d_v} + \frac{N}{2} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma \quad (1-41)$$

$$N_t^{dir} = -\frac{M'}{d_v} + \frac{N}{2} = -\frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} - \cot \alpha \right) \quad (1-42)$$

$$N_b^{dir} = \frac{M'}{d_v} + \frac{N}{2} = \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} + \cot \alpha \right) \quad (1-43)$$

Quanto à armadura transversal, realizando um corte no elemento A conforme indicado na Figura 35, a força pode ser obtida:

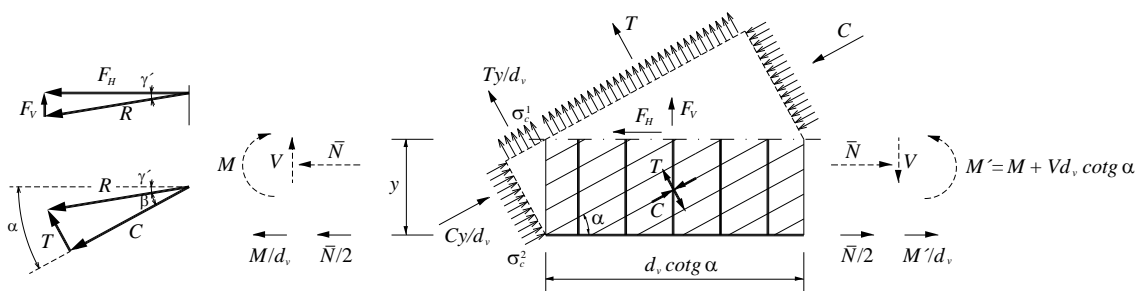


Figura 35 - Equilíbrio de forças no elemento A sofrido de um corte horizontal à altura y [23]

Para que o subelemento esteja em equilíbrio, é necessária a existência da força horizontal F_H junto à superfície de corte, que pode ser obtida através do equilíbrio de forças:

$$F_H + \left(\frac{M}{d_v} + \frac{N}{2}\right) - \left(\frac{M'}{d_v} + \frac{N'}{2}\right) = 0 \leftrightarrow F_H \quad (1-44)$$

$$= -\frac{M}{d_v} - \frac{V}{2} \cotg \gamma + \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cotg \gamma}{2} + \cotg \alpha\right) \leftrightarrow \leftrightarrow F_H = V \cotg \alpha$$

Por unidade de comprimento, a força na armadura transversal, n_v é :

$$n_v = \frac{A_{st} f_{st}}{s} \quad (1-45)$$

onde :

A_{st} = área de um varão da armadura transversal;

f_{st} = tensão existente na armadura transversal;

s = espaçamento da armadura transversal.

Em toda a superfície de corte, a força vertical resistida pela armadura vertical é:

$$F_v = n_v d_v \cotg \alpha \quad (1-46)$$

Conforme ilustrado no triângulo de forças inferior da Figura 35, a resultante R entre as forças de compressão C e de tração T , perfaz um ângulo γ' relativamente ao eixo longitudinal da viga. Atendendo à equação (1-35) e à Figura 35:

$$\gamma' = \alpha - \beta = \gamma - 2\beta \quad (1-47)$$

Tendo em conta o triângulo de forças superior da Figura 35 e através das equações (1-44) e (1-46) obtém-se:

$$\cotg \gamma' = \frac{F_H}{F_v} = \frac{V \cotg \alpha}{n_v d_v \cotg \alpha} \leftrightarrow n_v d_v = V \tg \gamma' \quad (1-48)$$

Utilizando esta equação e introduzindo-a na equação (1-45), é obtida a força distribuída na armadura transversal:

$$A_{st} f_{st} = \frac{V s \tg \gamma'}{d_v} \quad (1-49)$$

Para a condição $\alpha + \beta > 90^\circ$ o equilíbrio do elemento A da viga tendo em conta a relação entre as forças C e T encontra-se ilustrado na Figura 36.

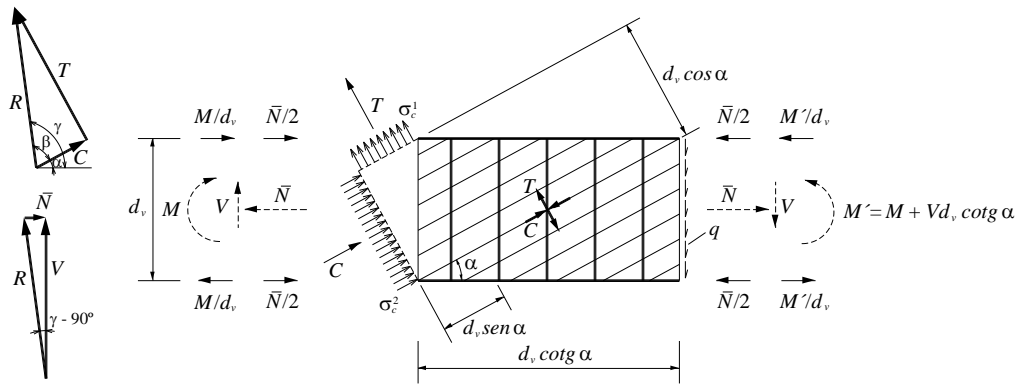


Figura 36- Equilíbrio do elemento A quando $\alpha + \beta > 90^\circ$ [23]

Para haver equilíbrio e para que haja concordância entre as Figuras 36 e 34 a soma vetorial $V = R + N$ terá que se manter. Neste caso, a força longitudinal (N) deverá apontar para dentro, o que teoricamente indica que as armaduras longitudinais se encontrem em compressão conforme ilustrado no triângulo inferior da Figura 36 . Mas uma vez que esta situação apenas é prevista ocorrer para carregamentos muito baixos torna-se irrelevante para o estudo realizado.

As tensões de corte q , a resultante R das forças de compressão e de tração e o ângulo γ mantêm-se inalterados para $\alpha + \beta > 90^\circ$. A resultante R das forças C e T pode ser calculada da seguinte forma:

$$tg(\gamma - 90^\circ) = \frac{N}{V} \leftrightarrow N = -tg(90^\circ - \gamma)V \leftrightarrow N = -Vcotg \gamma \quad (1-50)$$

$$\cos(\gamma - 90^\circ) = \frac{V}{R} \leftrightarrow R = \frac{V}{\cos(90^\circ - \gamma)} \leftrightarrow R = \frac{V}{\sen \gamma} \quad (1-51)$$

As tensões nas escoras e nos tirantes diagonais de betão, σ_2^c e σ_1^t respectivamente, mantêm-se inalteradas.

À semelhança do cálculo realizado para a obtenção das forças nas armaduras longitudinais para a condição $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e atendendo ao sinal negativo que afeta a equação (1-43), o cálculo das forças nas armaduras longitudinais nas cordas superior e inferior, respectivamente N_t e N_b , em cada face é dado por:

$$N_t^{esq} = -\frac{M}{d_v} - \frac{N}{2} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2}cotg \gamma \quad (1-52)$$

$$N_b^{esq} = \frac{M}{d_v} - \frac{N}{2} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2}cotg \gamma \quad (1-53)$$

$$N_t^{dir} = -\frac{M'}{d_v} - \frac{N}{2} = -\frac{M}{d_v} + V \left(\frac{cotg \gamma}{2} - cotg \alpha \right) \quad (1-54)$$

$$N_b^{dir} = \frac{M}{d_v} - \frac{N}{2} = \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot g \gamma}{2} + \cot g \alpha \right) \quad (1-55)$$

O novo equilíbrio do corpo do elemento A relativo à relação entre as forças C e T é ilustrado na Figura 37, a seguir apresentada:

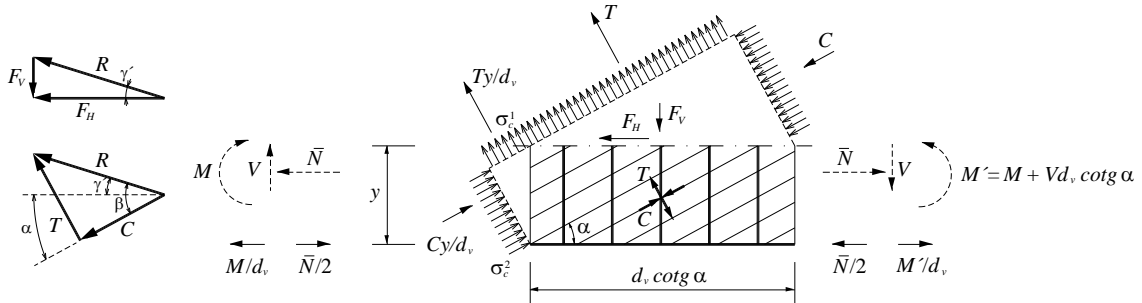


Figura 37- Equilíbrio do corpo do elemento A para $\alpha + \beta > 90^\circ$ [23]

As equações (1-38) a (1-43), à exceção da equação (1-41), permanecem inalteradas. Considerando o triângulo de forças inferior da Figura 37, vem que:

$$\gamma' = \beta - \alpha = 2\beta - \gamma \quad (1-56)$$

Tal como o referido anteriormente, é necessário que a soma que relaciona as forças F_H , R e F_V : $F_H = R + F_V$, se mantenha para haver concordância entre as Figuras 36 e 34. Dessa forma a força vertical F_V deve estar virada para baixo, o que sugere teoricamente que as armaduras transversais se encontram em compressão.

2.3.2. Esforço de Torção em Vigas de Secção Vazada

À semelhança do observado na secção 2.2.3. para o VATM, e tendo por base a Figura 31, numa secção transversal interior são observadas duas forças distintas: as forças provenientes das barras longitudinais de canto e as forças nas escoras diagonais de betão inclinadas de um ângulo α com o eixo longitudinal da viga. A generalização do modelo de treliça espacial com ângulo variável (GSVATM) considera, para além das forças nas escoras diagonais, as forças nos tirantes diagonais perpendiculares às escoras. Deverá então proceder-se previamente à definição da resultante das forças nas escoras e nos tirantes, tornando-se agora o fluxo de corte q constituído pela resultante destas forças e da força nas barras longitudinais de canto.

Tal como apresentado anteriormente, a formulação do GSVATM é obtida para duas condições relativas à magnitude do ângulo $\alpha + \beta$, sendo a primeira condição relativa a $\alpha + \beta \leq 90^\circ$.

Sabendo que a força de corte corresponde à resultante do fluxo de corte ao longo da altura da parede, tal como apresentado anteriormente, vem:

$$V = ql_q \quad (1-12)$$

Utilizando a equação (1-36) e substituindo a força de corte V na equação anterior, a força longitudinal na armadura da parede, N , é dada por:

$$N = ql_q \cotg \gamma \quad (1-57)$$

Efetuada a substituição da equação (1-11) na anterior, a força N poderá ser escrita em função do momento torsor M_T :

$$N = \frac{M_T l_q}{2A_0} \cotg \gamma \quad (1-58)$$

A partir desta equação e considerando $P_0 = \sum l_q$, que representa o perímetro da linha média do fluxo de corte, e definindo a força total nas barras longitudinais como $\Delta N = A_{sl} f_{sl}$, a força total na armadura longitudinal pode ser calculada da seguinte forma:

$$\Delta N = \sum N = \frac{M_T}{2A_0} \sum l_q \cotg \gamma = \frac{M_T P_0}{2A_0} \cotg \gamma \leftrightarrow A_{sl} f_{sl} = \frac{M_T P_0}{2A_0} \cotg \gamma \quad (1-59)$$

Da equação (1-49) é obtida a força distribuída na armadura transversal, substituindo a força de corte V primeiramente pela equação (1-32) e de seguida q pela equação (1-11), obtém-se:

$$A_{st} f_{st} = \frac{Vs \operatorname{tg} \gamma'}{d_v} = \frac{q d_v s \operatorname{tg} \gamma'}{d_v} = \frac{M_T s}{2A_0} \operatorname{tg} \gamma' \quad (1-60)$$

A área e a tensão de uma barra transversal são designadas respetivamente por A_{st} e f_{st} .

Para o cálculo das tensões na escora e no tirante diagonal de betão, é necessário obter a equação que permite o cálculo da resultante R entre as forças de compressão C e de tração T . A equação (1-11) é substituída na equação (1-32) e esta resolve-se em ordem a V , obtendo-se:

$$V = \frac{M_T d_v}{2A_0} \quad (1-61)$$

Substituindo esta equação na equação (1-31), vem:

$$R = \frac{M_T d_v}{2A_0 \operatorname{sen} \gamma} \quad (1-62)$$

A força de compressão na escora diagonal é obtida considerando o triângulo de forças superior da Figura 34 e a equação (1-62), vindo:

$$C = R \cos \beta = \frac{M_T d_v \cos \beta}{2A_0 \operatorname{sen} \gamma} \quad (1-63)$$

A tensão na escora diagonal de betão obtém-se a partir da equação (1-38), substituindo a equação (1-63):

$$\sigma_2^c = \frac{M_T}{2A_0 t_c} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (1-64)$$

Nesta equação (1-64) o parâmetro t_c representa a espessura da escora diagonal.

A força de tração no tirante diagonal obtém-se a partir do mesmo triângulo de forças da Figura 32 e também na equação (1-62), vindo:

$$T = R \sin \beta = \frac{M_T d_v \sin \beta}{2A_0 \sin \gamma} \quad (1-65)$$

A tensão no tirante diagonal de betão obtém-se a partir da equação (1-39) e substituindo a equação (1-65):

$$\sigma_1^c = \frac{M_T}{2A_0 t_c} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (1-66)$$

Perante a situação particular em que nas vigas sujeitas à torção $\alpha + \beta > 90^\circ$, a nova formulação é a seguir apresentada. Primeiramente, substitui-se a força de corte V obtida na equação (1-50) na equação (1-12), e obtém-se a força longitudinal N na armadura da parede:

$$N = -ql_q \cotg \gamma \quad (1-67)$$

Substituindo a equação (1-11) na equação anterior (1-67), N é calculada em ordem a M_T :

$$N = -\frac{M_T l_q}{2A_0} \cotg \gamma \quad (1-68)$$

A partir da equação anterior (1-68) e redefinindo $p_0 = \sum l_q$ e $\Delta N = A_{sl} f_{sl}$, a força total na armadura longitudinal é dada por:

$$\Delta N = -\frac{M_T p_0}{2A_0} \cotg \gamma \leftrightarrow A_{sl} f_{sl} = -\frac{M_T p_0}{2A_0} \cotg \gamma \quad (1-69)$$

A força distribuída na armadura transversal da parede é obtida de forma análoga a partir da equação (1-60). Os restantes parâmetros como a resultante R , as forças C e T e as tensões σ_2^c e σ_1^c são obtidos pelas mesmas equações (1-62), (1-63), (1-64), (1-65) e (1-66) respetivamente.

As equações (1-11), (1-59), (1-60), (1-64) e (1-66) constituem as cinco equações básicas de equilíbrio do GSVATM. No caso das armaduras longitudinal e transversal entrarem em cedência, as equações (1-59) e (1-60) assumem o equilíbrio da treliça para o momento torsor resistente último.

Hsu em 1968 [42] observou que a resistência última experimental de uma viga com secção cheia é idêntica ao de uma viga com secção vazada com as mesmas características, e portanto as equações anteriormente citadas são também válidas para secções cheias. O núcleo de betão não influencia significativamente a rigidez de torção da viga quando a rotura está prestes a ocorrer, sendo o momento torsor atuante suportado essencialmente pela

“casca exterior” do elemento. No entanto, Andrade em 2011 [51], relativamente a baixos níveis de carregamento no estado não fissurado e no estado imediatamente após a fissuração, concluiu que de facto existe uma influência real do núcleo de betão de vigas com secção cheia na rigidez de torção das mesmas e também no momento torsor de fissuração.

2.3.3. Influência da flexão nas escoras e tirantes de betão

Quando uma viga é sujeita à torção, esta sofre uma deformação que origina um esforço de flexão tanto nas escoras como nos tirantes de betão.

Ao longo desta secção, primeiramente proceder-se-á à apresentação da derivação detalhada das equações básicas de compatibilidade relativas às escoras de betão, e de seguida, de forma análoga apresentar-se-ão as mesmas equações para os tirantes de betão. Para tal, segue-se a mesma linha de raciocínio apresentada por Bernardo *et al.* 2014 [23].

A Figura 38 ilustra a deformação resultante da flexão de uma escora e de um tirante de betão, na parede superior de uma viga vazada quando é sujeita à torção. Esta viga apresenta um comprimento $l_q \cotg \alpha$, que corresponde ao comprimento de uma escora OB com ângulo α segundo a direção longitudinal da viga. Na Figura 38 é possível observar que a parede superior é limitada pela superfície plana OABC e que, quanto ao sistema de coordenadas, o eixo x representa a direção longitudinal e o eixo y , a direção transversal da viga.

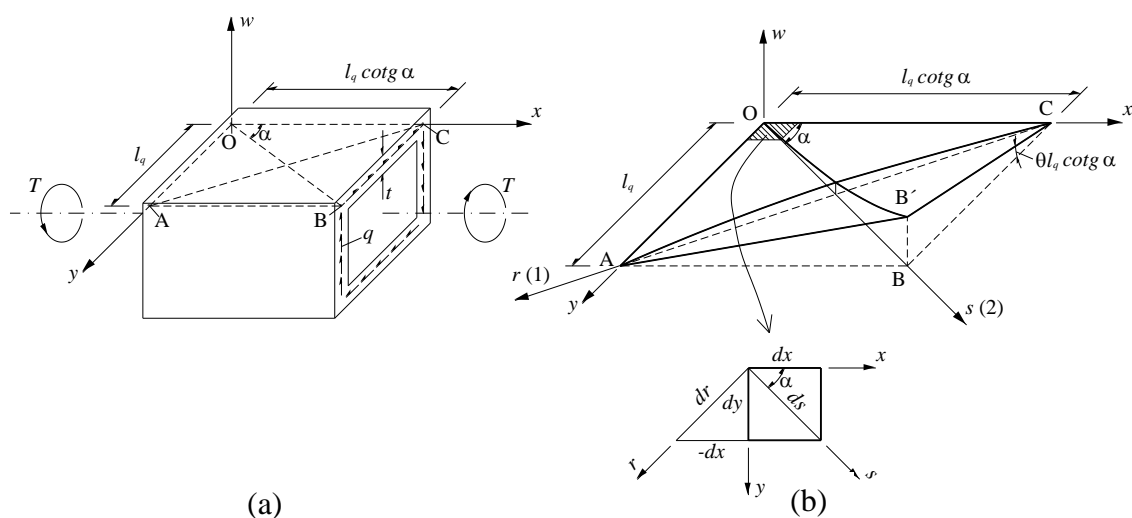


Figura 38 - Flexão de uma escora e de um tirante de betão na parede de uma viga caixão [23]

Quando é imposto um ângulo de torção θ à viga, o troço reto CB roda para a posição CB' com um ângulo $\theta l_q \cotg \alpha$ como é ilustrado na Figura 38 (b). A nova superfície OAB'C', resultante da rotação, perfaz um paraboloide hiperbólico, onde a escora de betão OB e o tirante AC ficam com um desenvolvimento curvo. Esta superfície é definida pela seguinte equação do deslocamento w perpendicular ao plano $x - y$:

$$w = \theta xy \quad (1-70)$$

O declive da escora de betão é obtido derivando a equação acima referida, em ordem ao eixo coordenado s , que é coincidente com o eixo 2 da direção principal de compressão e que é definido segundo a direção da escora diagonal de betão. Assim sendo, vem:

$$w' = \frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds} = (\theta y) \cos \alpha + (\theta x) \operatorname{sen} \alpha \quad (1-71)$$

Para se obter a equação da curvatura da escora de betão, Ψ , procede-se à segunda derivada de w em ordem a s :

$$\Psi = \frac{d^2w}{ds^2} = \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{dy}{ds} = (\theta \operatorname{sen} \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha = \theta \operatorname{sen} (2\alpha) \quad (1-72)$$

De forma semelhante ao realizado para a escora de betão, o declive do tirante de betão é obtido derivando a equação (1-70) mas agora em ordem ao eixo coordenado r , que é coincidente com o eixo 1 da direção principal de tração e é definido segundo a direção do tirante diagonal de betão. Assim sendo, e de acordo com a Figura 38 (b), vem:

$$w' = \frac{dw}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dr} = (\theta y) \operatorname{sen} \alpha + (\theta x) \cos \alpha \quad (1-73)$$

A curvatura do tirante de betão, φ , resulta então da segunda derivada de w em ordem a r :

$$\varphi = \frac{d^2w}{dr^2} = \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{dy}{dr} = (\theta \cos \alpha) (-\operatorname{sen} \alpha) + (-\theta \operatorname{sen} \alpha) \cos \alpha = -\theta \operatorname{sen} (2\alpha) \quad (1-74)$$

Com base nas equações (1-74) e (1-72), conclui-se que as curvaturas, do tirante e da escora, são iguais à exceção do sinal.

Analise-se agora a Figura 39 a seguir ilustrada, onde se considera um elemento quadrado, com lados unitários retirado e isolado a partir da parede superior da viga de espessura t , com largura unitária:

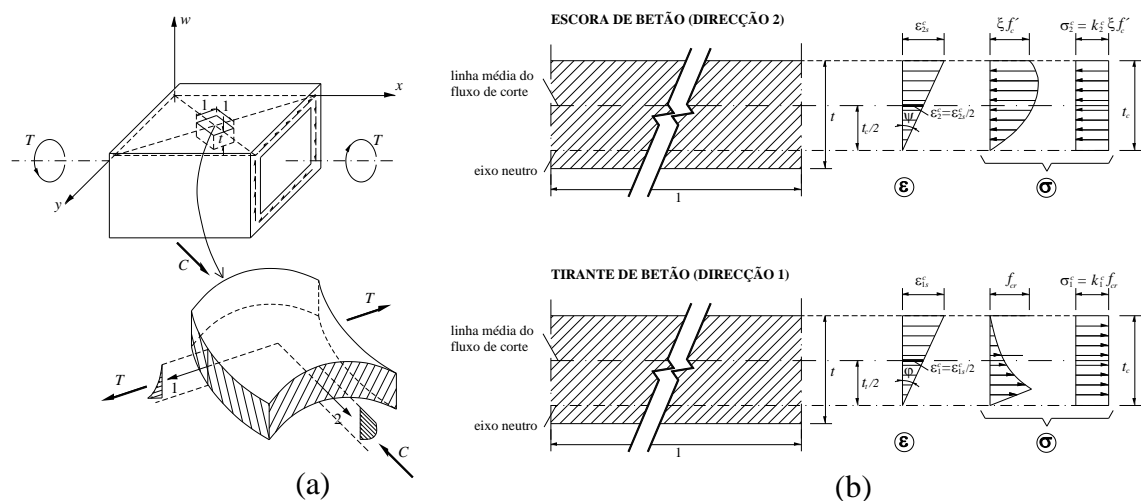


Figura 39- Distribuição das tensões e extensões na escora e no tirante [23]

Os lados do quadrado em estudo, cuja normal é o eixo coordenado 2, em que a direção principal é de compressão, correspondem à secção da escora de betão (largura unitária). Os lados cuja normal é o eixo coordenado 1, em que a direção principal é de tração, correspondem à secção do tirante de betão (largura unitária). Este elemento quadrado encontra-se, por isso, sujeito a um estado biaxial de tensão plano com flexão, que é responsável pela criação da superfície parabolóide hiperbólica referida anteriormente.

Como resultado da flexão nas escoras de betão pode, efetivamente, verificar-se na sua secção transversal junto à fibra inferior uma pequena área à tração. No entanto, para elevados níveis de carregamento, esta área é desprezada, conforme as hipóteses formuladas no GSVATM. Relativamente aos baixos níveis de carregamento, prevê-se que tal área seja inexistente ou tão pequena que se possa desprezar a sua participação no cálculo. Desta forma, a área de compressão é considerada efetiva ao longo de uma profundidade t_c , correspondente à espessura das escoras de betão. Se se considerar a distribuição das extensões linear, então a extensão máxima de compressão à superfície, ε_{2s}^c , pode ser calculada com base na curvatura Ψ da escora de betão:

$$\varepsilon_{2s}^c = \Psi t_c \quad (1-75)$$

Através do valor da extensão máxima de compressão, poder-se-á facilmente deduzir o valor da extensão média de compressão ε_2^c :

$$\varepsilon_2^c = \varepsilon_{2s}^c / 2 \quad (1-76)$$

As equações (1-72) e (1-75) são as duas equações básicas de compatibilidade relativas à flexão das escoras de betão, para uma viga sujeita à torção.

Tal como para as escoras de betão, uma pequena área junto à fibra inferior dos tirantes de betão pode estar à compressão (Figura 39 (b)). Para elevados níveis de carregamento a contribuição dos tirantes deixa de ser relevante e portanto essa pequena área poderá ser desprezada. Para baixos níveis de carregamento, é esperado que a área de compressão seja inexistente ou tão pequena que possa ser também desprezada. Apenas a área que se encontra à tração ao longo de uma profundidade t_t , é considerada efetiva. A partir da Figura 39 (b), a extensão máxima de tração à superfície ε_{1s}^c pode ser obtida:

$$\varepsilon_{1s}^c = \Psi t_t \quad (1-77)$$

Sendo que o valor da extensão média de tração é:

$$\varepsilon_1^c = \varepsilon_{1s}^c / 2 \quad (1-78)$$

2.3.4. Espessura Efetiva da Parede

No modelo de membrana apresentado por Jeng e Hsu em 2009 [21] é assumida, por uma questão de simplificação, a mesma profundidade quer referente à direção principal de tração quer à direção principal de compressão, ou seja $t_t = t_c$. Além de diminuir a quantidade de cálculos a efetuar visto apenas ser introduzida uma variável correspondente à espessura

efetiva, esta simplificação, permite também evitar contradições que surjam com a introdução de duas espessuras diferentes. Jeng e Hsu [21], com a simplificação introduzida, verificaram que o modelo fornecia excelentes previsões do comportamento global de vigas sujeitas à torção.

Bernardo *et al.* em 2014 [23] também adotaram a simplificação anteriormente referida para o GSVATM. Assim sendo, o cálculo da espessura efetiva, designada por t_c , é realizado tendo em conta as tensões instaladas na escora de betão. Este valor pode ser assim obtido a partir da equação (1-64) substituindo σ_2^c pelos parâmetros indicados na Figura 37 (b), e resolvendo em ordem a t_c :

$$t_c = \frac{M_T}{2A_0 k_2^c \xi f_c'} \frac{\cos \beta}{\text{sen } \gamma \cos \alpha} \quad (1-79)$$

Como já mencionado, no GSVATM é assumido que a linha média do fluxo de corte se encontra geralmente a meio do diagrama de tensões (Figura 38). Perante uma secção retangular, o perímetro da linha média do fluxo de corte p_0 e a área A_0 limitada por essa linha, podem ser calculados por:

$$p_0 = 2(x - t_c) + 2(y - t_c) = p_c - 4t_c \quad (1-80)$$

$$A_0 = (x - t_c)(y - t_c) = A_c - (t_c/2)p_c \quad (1-81)$$

Onde:

x = menor dimensão exterior da secção transversal retangular;

y = maior dimensão exterior da secção transversal retangular;

p_c = perímetro exterior da secção transversal de betão ($2x + 2y$);

A_c = área da secção transversal limitada pelo perímetro exterior de betão (xy).

A partir do acima mencionado e a partir das equações (1-38) e (1-39), a força de compressão C e a força de tração T são escritas da seguinte forma:

$$C = \sigma_2^c t_c d_v \cos \alpha \quad (1-82)$$

$$T = \sigma_1^c t_c d_v \text{sen } \alpha \quad (1-83)$$

2.3.5. Equações para o Cálculo da Curva Teórica $T - \theta$

Para a obtenção do valor da resistência última das vigas à torção assim como da evolução dos vários parâmetros que caracterizam o estado das vigas (momento torsor, deformação angular, tensões e extensões nas armaduras e no betão, etc.) para todo o historial de carga, é necessário recorrer-se a um procedimento iterativo de cálculo. Isto deve-se ao facto de o modelo apresentar um carácter não linear e utilizar variáveis inicialmente desconhecidas e interdependentes.

O cálculo da curva teórica $T - \theta$ requer equações de equilíbrio, equações de compatibilidade e também relações constitutivas para os materiais. Ao longo desta secção serão apresentadas as equações de equilíbrio e de compatibilidade, na sua forma final, para a previsão comportamental de uma viga de betão armado à torção, designadamente através do cálculo e traçado da curva teórica $T - \theta$.

2.3.5.1. Equações de Equilíbrio

A curva teórica $T - \theta$ baseada no GSVATM requer três equações de equilíbrio para determinar o momento torsor M_T , a espessura efetiva t_c e o ângulo α das escoras de betão, a partir do qual fica conhecida também a orientação dos tirantes.

O momento torsor M_T pode ser calculado a partir da equação (1-52) resolvida em ordem a M_T :

$$M_T = \frac{2A_0 R \operatorname{sen} \gamma}{d_v} \quad (1-84)$$

Esta última equação (1-84) é válida tanto para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ como para $\alpha + \beta > 90^\circ$.

Para o cálculo da espessura efetiva t_c , Bernardo *et al.* em 2004 [23] optaram por considerar a relação entre esta e a força instalada na armadura longitudinal, em vez de considerar a força na armadura transversal. Quando $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, substituindo M_T da equação (1-64) na equação (1-59) e resolvendo em ordem a t_c , resulta uma expressão que permite obter a espessura efetiva t_c em função da força na armadura longitudinal:

$$A_{sl} f_{sl} = \frac{2A_0 t_c \sigma_2^c p_0 \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha \cos \gamma}{2A_0 \cos \beta \operatorname{sen} \gamma} \leftrightarrow t_c = \frac{A_{sl} f_{sl} \cos \beta}{\sigma_2^c p_0 \cos \alpha \cos \gamma} \quad (1-85)$$

Quando $\alpha + \beta > 90^\circ$, substituindo a equação (1-64) na (1-69) obtém-se:

$$t_c = - \frac{A_{sl} f_{sl} \cos \beta}{\sigma_2^c p_0 \cos \alpha \cos \gamma} \quad (1-86)$$

Para o cálculo do ângulo α , substitui-se primeiramente M_T da equação (1-64) na equação (1-60) e resolve-se em ordem a $\cos \alpha$, que é função da força na armadura transversal:

$$\cos \alpha = \frac{A_{st} f_{st} \cos \beta}{t_c \sigma_2^c s \operatorname{sen} \gamma \operatorname{tg} \gamma'} \quad (1-87)$$

Quando $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, substitui-se novamente a equação (1-64) na (1-59) e resolvendo agora em ordem a $\cos \alpha$ obtém-se:

$$\cos \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl} \cos \beta}{t_c p_0 \sigma_2^c \cos \gamma} \quad (1-88)$$

Igualando as equações (1-88) e (1-87), obtém-se:

$$\frac{A_{sl}f_{sl}}{p_0 \cos \gamma} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \operatorname{sen} \gamma \operatorname{tg} \gamma'} \quad (1-89)$$

Uma vez que os ângulos γ e γ' , podem ser expressos em função de α e β , a partir das equações $\gamma = \alpha + \beta$ e $\gamma' = \alpha - \beta$, introduzindo tais relações na equação anterior (1-89), obtém-se:

$$\frac{A_{sl}f_{sl}}{p_0 \cos(\alpha + \beta)} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)} \leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{A_{st}f_{st}p_0}{A_{sl}f_{sl}s} = F \quad (1-90)$$

Resolvendo esta última equação em ordem a α , obtém-se:

$$\alpha = \pm \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{F^2(\operatorname{tg} \beta)^2 + F(\operatorname{tg} \beta)^4 + F + (\operatorname{tg} \beta)^2}}{F(\operatorname{tg} \beta)^2 + 1} \right) \quad (1-91)$$

De forma análoga, para o cálculo de α , quando $\alpha + \beta > 90^\circ$, substitui-se a equação (1-64) na (1-69) e resolvendo em ordem a $\cos \alpha$, obtém-se:

$$\cos \alpha = -\frac{A_{sl}f_{sl} \cos \beta}{t_c p_0 \sigma_2^c \cos \gamma} \quad (1-92)$$

Igualando as equações (1-92) e (1-87), obtém-se:

$$-\frac{A_{sl}f_{sl}}{p_0 \cos \gamma} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \operatorname{sen} \gamma \operatorname{tg} \gamma'} \quad (1-93)$$

Tal como já realizado anteriormente, exprimem-se os ângulos γ e γ' em função de α e β :

$$-\frac{A_{sl}f_{sl}}{p_0 \cos(\alpha + \beta)} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)} \leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = -\frac{A_{st}f_{st}p_0}{A_{sl}f_{sl}s} = -F \quad (1-94)$$

A equação (1-91) é igualmente solução desta última equação (1-94).

Desta forma obtém-se assim as três equações de equilíbrio do GSVATM: as equações (1-84), (1-85) ou (1-86), e (1-91).

2.3.5.2. Equações de Compatibilidade

O GSVATM requer também três equações de compatibilidade, sendo estas necessárias para o cálculo das extensões na armadura transversal (ε_{st}), na armadura longitudinal (ε_{sl}) e para o ângulo de torção (θ).

A partir do círculo de Mohr para as deformações apresentado na Figura 40, é possível obter as equações de compatibilidade para o GSVATM.

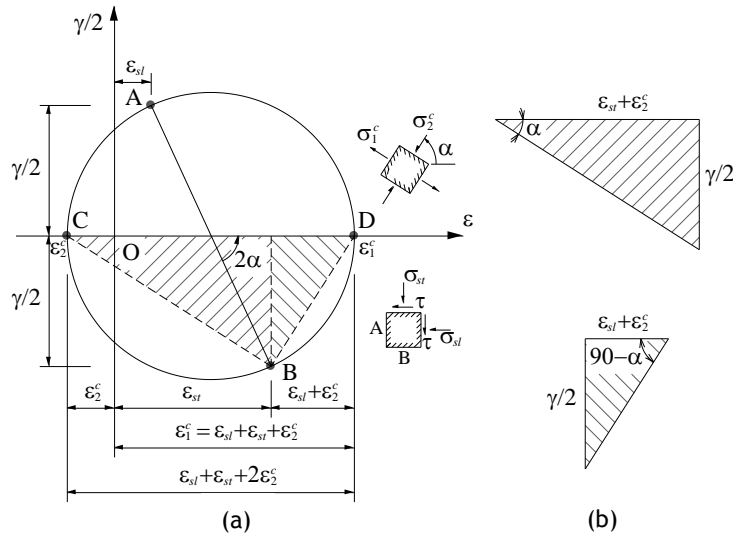


Figura 40- Círculo de Mohr para as deformações apresentado por Vecchio e Collins em 1981 [30]

Os pontos A e B referidos no círculo de Mohr correspondem ao estado de tensão nas faces A e B do elemento ilustrado na Figura 40 (a), e têm como coordenadas $(\epsilon_{sl}; \gamma/2)$ e $(\epsilon_{sl}; -\gamma/2)$ respectivamente, onde γ representa a distorção. Os pontos C e D correspondem, respectivamente, à extensão da escora e à extensão do tirante segundo as direções principais, tendo como coordenadas $(-\epsilon_2^c; 0)$ e $(\epsilon_1^c; 0)$.

A partir do triângulo inferior da Figura 40 (b), é possível obter a seguinte equação:

$$\operatorname{tg}(90 - \alpha) = \frac{\frac{\gamma}{2}}{\epsilon_{sl} + \epsilon_2^c} \leftrightarrow \frac{\gamma}{2} = (\epsilon_{sl} + \epsilon_2^c) \operatorname{cotg} \alpha \quad (1-95)$$

A partir do triângulo superior da mesma Figura 40 (b), obtém-se:

$$\frac{\gamma}{2} = (\epsilon_{sl} + \epsilon_2^c) \operatorname{tg} \alpha \quad (1-96)$$

Pela teoria do tubo fino de Bredt [44] sabe-se que:

$$\oint \tau ds = 2G\theta A \quad (1-97)$$

em que G representa o módulo de distorção, $\oint ds$ é igual a p_0 que por sua vez representa o perímetro da linha média do fluxo de corte e A é igual a A_0 que é a área limitada pela linha média do fluxo de corte. Adicionando a relação constitutiva $\gamma = \tau/G$ na equação (1-97), obtém-se:

$$\theta = \frac{p_0}{2A_0} \gamma \quad (1-98)$$

Substituindo a equação (1-96) nesta última (1-98), obtém-se:

$$\theta = \frac{p_0}{A_0} (\epsilon_{sl} + \epsilon_2^c) \operatorname{tg} \alpha \quad (1-99)$$

Substituindo novamente esta equação (1-99) na (1-72):

$$\Psi = \theta \operatorname{sen} (2\alpha) = \frac{p_0}{A_0} (\varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c) \operatorname{tg} \alpha (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) \quad (1-100)$$

Substituindo novamente esta equação (1-100) na (1-75):

$$\varepsilon_{2s}^c = \Psi t_c = \frac{2p_0 t_c}{A_0} (\varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (1-101)$$

Substituindo a equação (1-79) na (1-101), considerando $\varepsilon_2^c = \varepsilon_{2s}^c/2$ (equação (1-76)) e resolvendo em ordem à extensão na armadura transversal, ε_{st} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2s}^c &= \frac{2p_0}{A_0} \frac{M_T}{2A_0 k_2^c \xi f_c'} \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \gamma \cos \alpha} \left(\varepsilon_{st} + \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \dots \leftrightarrow \varepsilon_{st} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_2^c \operatorname{sen} \gamma}{p_0 M_T \cos \beta \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \end{aligned} \quad (1-102)$$

De forma semelhante ao procedimento descrito anteriormente, obtém-se também uma expressão que permite calcular a extensão na armadura longitudinal ε_{sl} .

Substituindo a equação (1-95) na (1-98), obtém-se:

$$\theta = \frac{p_0}{A_0} (\varepsilon_{sl} + \varepsilon_2^c) \operatorname{cotg} \alpha \quad (1-103)$$

Substituindo esta última equação (1-103) na (1-72) obtém-se:

$$\Psi = \theta \operatorname{sen} (2\alpha) = \frac{p_0}{A_0} (\varepsilon_{sl} + \varepsilon_2^c) \operatorname{cotg} \alpha (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) \quad (1-104)$$

Mais uma vez, substituindo esta última na equação (1-75), obtém-se:

$$\varepsilon_{2s}^c = \Psi t_c = \frac{2p_0 t_c}{A_0} (\varepsilon_{sl} + \varepsilon_2^c) \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (1-105)$$

Por último, substituindo a equação (1-79) na (1-105) tendo em atenção que $\varepsilon_2^c = \varepsilon_{2s}^c/2$ (equação (1-76)) e resolvendo em ordem a ε_{sl} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2s}^c &= \frac{2p_0}{A_0} \frac{M_T}{2A_0 k_2^c \xi f_c'} \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \gamma \cos \alpha} \left(\varepsilon_{sl} + \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \right) \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \dots \leftrightarrow \varepsilon_{sl} = \left(\frac{A_0^2 \sigma_2^c \operatorname{sen} \gamma}{p_0 M_T \cos \beta \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \end{aligned} \quad (1-106)$$

Finalmente a rotação θ é conseguida substituindo a equação (1-75) resolvida em ordem à curvatura Ψ , na equação (1-72):

$$\theta = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2t_c \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \quad (1-107)$$

As equações (1-102), (1-106) e (1-107) são as três equações de compatibilidade que compõem o GSVATM. Estas são válidas tanto para a condição $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ como para $\alpha + \beta > 90^\circ$.

É ainda possível calcular a extensão de tração no tirante ε_{1s}^c a partir das várias extensões definidas anteriormente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^c &= \varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c = \varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \frac{\varepsilon_2^c}{2} \\ \rightarrow \varepsilon_{1s}^c &= 2\varepsilon_1^c = 2\varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c\end{aligned}\tag{1-108}$$

2.3.6. Relação $\sigma - \varepsilon$ dos Materiais

Para caracterizar as escoras diagonais de betão comprimido, os tirantes diagonais do betão tracionado e as armaduras ordinárias à tração é necessário, à semelhança do adotado para o VATM, adotar relações $\sigma - \varepsilon$ para o betão à compressão que contabilizem o *softening effect* e relações $\sigma - \varepsilon$ para armaduras ordinárias à tração. No caso do GSVATM, também é necessário adotar relações $\sigma - \varepsilon$ para o betão a tração por forma a contabilizar, para além da influência do betão à tração, também o *stiffening effect*.

Como já mencionado anteriormente, em estudos anteriores realizados por Bernardo *et al.* [20] foram testadas várias relações constitutivas. Estudos estes baseados em várias simulações com a formulação do VATM para se calcular o comportamento último de vigas de betão armado sujeitas à torção. A partir de uma cuidadosa análise comparativa, algumas relações $\sigma - \varepsilon$ foram consideradas boas previsões teóricas do comportamento de vigas sob ação da torção, tendo-se destacado uma em particular que incorpora a relação $\sigma - \varepsilon$ para as escoras diagonais de betão comprimido, proposta por Belarbi e Hsu [40] que inclui os chamados *softening factors* (fatores de redução) tanto para o valor máximo de tensão no betão (β_σ) como para a extensão correspondente a esse valor máximo de tensão (β_ε) propostos por Zhang e Hsu [41]. De entre as relações $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias à tração também estudadas por Bernardo *et al.* [20], foi também destacada a proposta por Belarbi e Hsu [22]. Tais relações já foram apresentadas na Secção 2.2.4.

Quanto aos tirantes de betão, as características em termos do comportamento do betão à tração são definidas de forma semelhante à das escoras. Para a relação $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração, Nobre em 2013 [46] testou várias relações propostas por vários autores, e, tendo por base o GSVATM, comparou as previsões obtidas para o momento torsor de fissuração e respetiva rotação com os correspondentes valores experimentais de vigas de betão armado sujeitas à torção.

De entre as várias relações analisadas, a referida autora verificou que a relação $\sigma - \varepsilon$ modificada e proposta por Jeng e Hsu em 2009 [21], conforme mostra a seguinte Figura 41, era a que apresentava melhores resultados. A referida relação é descrita da seguinte forma:

$$\sigma_1^c = E_c \varepsilon_1^c \text{ se } \varepsilon_1^c \leq \varepsilon_{cr} \quad (1-109)$$

$$\sigma_1^c = f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1^c} \right)^{0.4} \text{ se } \varepsilon_1^c > \varepsilon_{cr} \quad (1-110)$$

Onde:

$$\varepsilon_{cr} = 0.00008K \quad (1-111)$$

$$E_c = 3875K \sqrt{f'_c (\text{MPa})} \quad (1-112)$$

$$K = 1.45 \text{ (secções cheias) [21]} \quad (1-113)$$

$$K = 1.24 \text{ (secções vazadas) [47]} \quad (1-114)$$

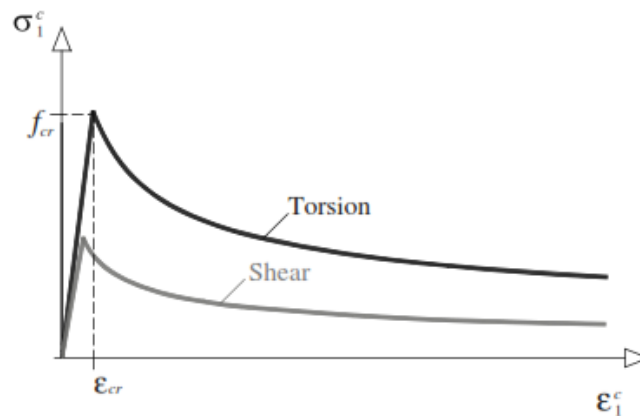


Figura 41- Curva σ - ε do betão à tração proposta por Jeng e Hsu em 2009 [21]

A tensão média nos tirantes diagonais de betão σ_1^c é dada por:

$$\sigma_1^c = k_1^c f_{cr} \quad (1-115)$$

Onde f_{cr} é a tensão de fissuração do betão e é expressa em função da respetiva extensão ε_{cr} , do Módulo de Elasticidade do betão E_c e da tensão de resistência do betão f'_c . A tensão média dos tirantes de betão k_1^c é obtida integrando as equações $\sigma_1^c = E_c \varepsilon_1^c$ se $\varepsilon_1^c \leq \varepsilon_{cr}$ e $\sigma_1^c = f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1^c} \right)^{0.4}$ se $\varepsilon_1^c > \varepsilon_{cr}$ que descrevem a curva da Figura 41.

O parâmetro k_1^c vem igual a:

$$k_1^c = \frac{\varepsilon_{1s}^c}{2\varepsilon_{cr}} \text{ se } \varepsilon_{1s}^c \leq \varepsilon_{cr} \quad (1-116)$$

$$k_1^c = \frac{\varepsilon_{cr}}{2\varepsilon_{1s}^c} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0.4}}{0.6\varepsilon_{1s}^c} [(\varepsilon_{1s}^c)^{0.6} - (\varepsilon_{cr})^{0.6}] \text{ se } \varepsilon_{1s}^c > \varepsilon_{cr} \quad (1-117)$$

2.3.7. Algoritmo de cálculo do GSVATM para a construção da Curva $T - \theta$

Uma vez que algumas variáveis são desconhecidas e interdependentes logo no início do procedimento de cálculo, tornou-se necessário o uso de um método computacional iterativo com base num algoritmo, que permitisse calcular todos os pontos da curva $T - \theta$ tendo por base o GSVATM. O fluxograma do algoritmo de cálculo utilizado neste estudo é o ilustrado na Figura 42. A verificação das variáveis inicialmente assumidas ($t_c, \alpha, \varepsilon_{1s}^c$ e ξ) foi otimizada de forma a requerer o mínimo de tempo exigido no procedimento de cálculo.

O ponto de rotura teórico é atingido por uma viga sujeita à torção quando esta atinge a sua máxima extensão de compressão ao nível da superfície das escoras, ε_{2s}^c (Figura 39), valor último convencional definido como ε_{cu} e definido, por exemplo, no EC2 [13], ou quando a extensão de tração máxima nas armaduras ordinárias atinge o valor último convencional ε_{su} (usualmente considerado igual a 0.01).

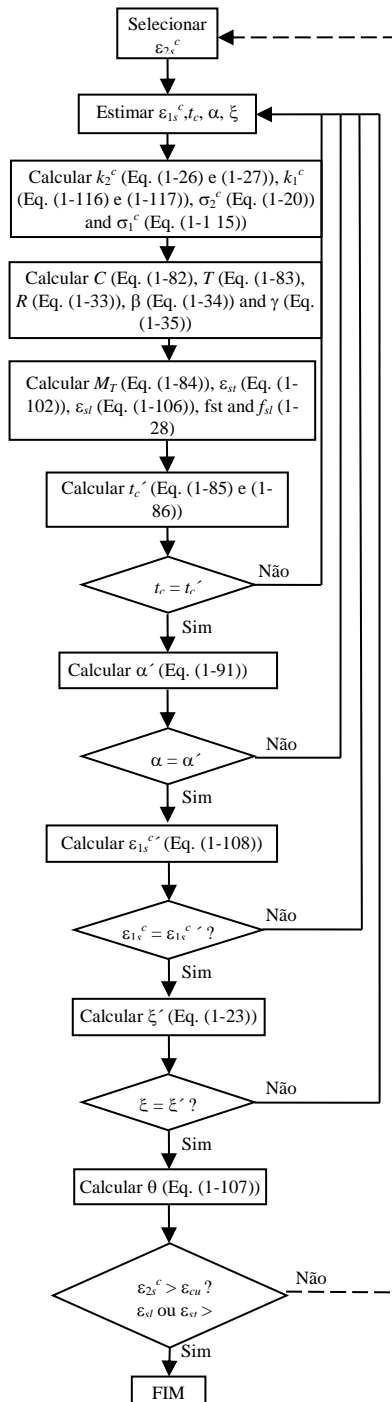


Figura 42 - Fluxograma do algoritmo de cálculo do GSVATM

2.4. Notas finais

Ao longo da Secção 2.3 foi apresentado o procedimento de cálculo do GSVATM e o respetivo algoritmo, a partir do qual é possível calcular a curva teórica $T - \theta$.

O GSVATM permite obter excelentes resultados relativos à evolução dos vários parâmetros caracterizadores do estado da viga, como estado de carga, deformação angular, extensões e tensões nas armaduras e no betão, etc., quer para altos níveis de carregamento quer para baixos níveis. Os resultados são bastante fidedignos, pois é contabilizada a resistência à tração do betão, por meio da incorporação de um tirante na direção perpendicular à escora, o que permite obter, para além do estado biaxial de tensão que realmente existe nas paredes das vigas sujeitas à torção, um amplo domínio comportamental de uma viga de betão armado sujeita à torção. Este modelo possibilita ainda obter um conceito claro de como uma viga de betão armado resiste à torção em todo o intervalo de carregamento, inclusive nas fases pré e pós fissuração.

No entanto, o GSVATM foi apenas verificado para vigas com secção retangular cheia (Bernardo et al. 2014 [23]). No próximo capítulo, o GSVATM será generalizado por forma a incluir também as vigas com secção retangular vazada.

Capítulo 3 - Modificação do GSVATM para vigas de betão armado com secção retangular vazada

3.1. Introdução

No presente Capítulo, o GSVATM apresentado e descrito no Capítulo 2 é modificado com vista a ser estendido a vigas de betão armado sujeitas à torção, com secção retangular vazada. Como referido anteriormente na Secção 1.2.2., o GSVATM apenas foi calibrado e validado para vigas de betão armado com secção retangular cheia. Além disso, Bernardo et al. em 2014 [23] observaram alguma dificuldade em calibrar o GSVATM para vigas de betão armado com secção retangular vazada, tendo por base apenas uma aproximação empírica (calibração tendo por base alguns resultados experimentais). Por isso, torna-se necessária uma nova abordagem com vista a modificar o GSVATM por forma a incluir vigas de betão armado com secção retangular vazada, tornando este modelo mais geral.

O GSVATM modificado é seguidamente descrito com base numa metodologia proposta recentemente por Jeng em 2014 [25] para generalizar o SMMT a vigas de betão armado sujeitas à torção, com secção retangular vazada.

3.2. Justificação da metodologia escolhida para a incorporação das vigas com secção vazada

A proposta de modificação apresentada neste trabalho para o GSVATM com o objetivo de estender este modelo também a vigas com secção vazada, resultou de uma proposta de modificação do SMMT por Jeng em 2014 [25] com vista a incorporar vigas com secção retangular vazada. Além disso, também foram utilizados resultados experimentais de vigas com esta tipologia sujeitas à torção, resultados estes existentes na literatura científica, por forma a viabilizar a proposta de alteração do GSVATM apresentada no presente trabalho (esta parte será apresentada no próximo capítulo).

De acordo com Jeng, assumindo o SMMT para vigas com secção cheia como uma referência precisa é possível desenvolver uma nova fórmula para a obtenção do momento torsor crítico, T_{cr} , para vigas com secção vazada. Este desenvolvimento foi baseado nos resultados experimentais de 38 vigas com parede de espessura fina existentes na literatura (Jeng et al. 2013 a) [43]).

O modelo utilizado por Jeng para estudar o comportamento das vigas à torção é baseado no modelo de membrana SMMT que, tal como já referido anteriormente, foi apenas calibrado

para vigas com secção cheia, observando-se algumas falhas quanto à previsão da inteira curva $T - \theta$ para elementos de secção vazada, sobretudo na zona de transição do estado não fissurado para o estado fissurado. Segundo Jeng, a dispersão encontrada para essa zona comportamental justificava-se pelo facto dos dispositivos de ensaio não terem sido concebidos para o registo rigoroso do momento torsor de fissuração e, sobretudo, da rotação associada. Nesse sentido foram realizados por Jeng novos estudos experimentais vocacionados para a referida zona comportamental de modo a obter resultados experimentais fidedignos que permitissem estender o SMMT também a vigas de secção vazada. Estes estudos foram realizados recentemente na *National Chi Nan University* (NCNU) na Tailândia [25], tendo sido concebido um novo dispositivo de ensaio que permitiu medir com extrema exatidão os pequenos ângulos de rotação antes, durante e após a fissuração.

Foram assim ensaiadas por Jeng nove vigas de betão armado com secção vazada, cinco com parede de espessura fina e quatro com parede espessa.

A partir dos resultados dos referidos estudos experimentais, Jeng modificou o modelo SMMT de duas formas: (1) delimitação da zona de fluxo de corte da espessura da parede de uma secção transversal oca (limitação da espessura da zona do fluxo de corte); (2) calibração das relações constitutivas do betão (à compressão e à tração) para vigas com secção retangular vazada.

Tendo por base as alterações anteriores, o SMMT foi então modificado e Jeng observou uma concordância quase perfeita entre as curvas $T - \theta$ experimentais das nove vigas ensaiadas e as correspondentes curvas $T - \theta$ teóricas do gráfico $T - \theta$, inclusive na zona comportamental correspondente à passagem do estado não fissurado para o estado fissurado. Para além das referidas nove vigas, Jeng também comparou os resultados obtidos com as já referidas trinta e oito vigas vazadas com parede de espessura fina existentes na literatura, tendo igualmente observado bons resultados.

Uma vez que as bases em que assentam o GSVATM e o SMMT são similares, pretende-se neste trabalho modificar o GSVATM tendo por base os resultados obtido por Jeng e que conduziram à modificação do SMMT por forma a incorporar também as vigas com secção vazada. A modificação do GSVATM, tendo por base a proposta de Jeng, é apresentada na seguinte secção.

3.3. Modificação do procedimento de cálculo do GSVATM

3.3.1. Espessura da zona de fluxo de corte

Quando se procede à análise do comportamento de uma viga à torção, está subjacente a bem conhecida analogia do tubo espacial, em que a espessura efetiva da parede t_d do tubo espacial é igual à espessura da zona do fluxo de corte, conforme indicado na Figura 43.

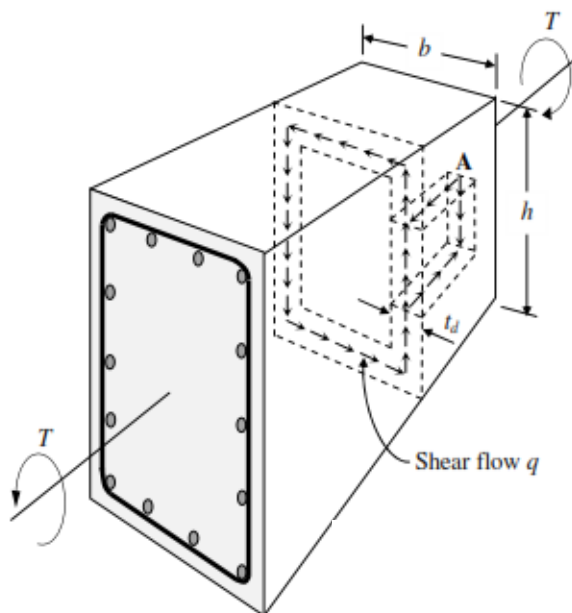


Figura 43 - Viga de secção cheia submetida à torção [25]

Imediatamente antes e após a fissuração de uma viga de betão armado sujeita à torção observa-se um grande decréscimo dos valores de t_d , permanecendo estes relativamente constantes nas fases antes e depois fissuração (Jeng 2010 [45]; Jeng 2012[47]). Os pequenos valores de t_d após a fissuração explicam o facto do comportamento das vigas de secção vazada, quando o valor da torção se aproxima da torção última, ser semelhante ao das vigas com secção cheia. De facto, quando o valor do momento torsor se aproxima do momento torsor último, a espessura t_d é em geral mais pequena que a espessura da parede t de uma viga com secção vazada. O que Jeng observou no SMMT, que apenas era válido para vigas com secção cheia, era que na fase pré-fissuração os valores de t_d eram tão elevados que excediam a espessura da parede t da maioria das vigas com secção vazada. Tal explicava em parte, segundo Jeng, as discrepâncias observadas entre as previsões teóricas e os resultados experimentais para este tipo de vigas.

Assim, em primeiro lugar, numa viga de secção vazada com uma espessura de parede $t \leq t_{d,solid}$ ($t_{d,solid}$ é o valor de t_c para secções cheias calculado utilizando o GSVATM não modificado para um dado nível de carga, (ver equações (1-85) e (1-86)) deve impor-se que a zona de fluxo de corte ocupa toda a espessura da parede, portanto, $t_d = t$.

Tendo por base o critério anteriormente exposto, a espessura efetiva t_d é assim limitada pela espessura da parede de uma secção transversal vazada, podendo ser assim formulado um algoritmo unificado válido tanto para as vigas de secção vazada como para as de secção cheia.

Em segundo lugar, torna-se também, segundo Jeng, necessário calibrar as leis constitutivas do betão. Para tal, é necessário classificar a secção vazada consoante a espessura da parede corresponda a uma “parede fina” ou a uma “parede espessa”. Esta distinção permite realizar melhor, segundo Jeng, as correções necessárias nas relações constitutivas do betão quer à tração, quer à compressão. Para tal, a viga de secção vazada começa por ser calculada como se fosse uma secção cheia equivalente (com materiais, dimensões exteriores e armaduras iguais) utilizando o procedimento não modificado do GSVATM até ao momento tursor de fissuração.

Após calculado o momento tursor de fissuração ($T_{cr,solid}$), ao qual corresponderá um determinado valor para a espessura da escora $t_{c,cr,solid}$, a classificação é realizada da seguinte forma:

- Se $t \leq 0.91(t_{c,cr,solid})$ a secção vazada é “de parede fina”;
- Se $t > 0.91(t_{c,cr,solid})$ a secção vazada é “de parede espessa”.

Em que t representa a espessura real da parede da secção vazada.

3.3.2. Relações constitutivas do betão

Tendo por base as relações constitutivas apresentadas no capítulo anterior, Jeng observou que o valor do momento tursor de fissuração T_{cr} obtido através do SMMT não modificado era bastante sobrestimado em vigas com secção vazada. Para retificar este problema, Jeng propôs uma correção das leis constitutivas para o betão à tração e para o betão à compressão introduzindo, para tal, três novos parâmetros: ν, μ e λ . Os valores destes novos parâmetros dependem do tipo de secção da viga (secção cheia, secção vazada de parede fina ou secção vazada de parede espessa) e são contabilizados nas seguintes expressões relativas às tensões médias do betão à compressão e à tração, à extensão de fissuração e ao módulo de elasticidade do betão à tração:

$$\bullet \quad \sigma_2^c = \nu k_2^c \beta_\sigma f_c' \quad (2-1)$$

que substitui a equação (1-20) do Capítulo 2 ($\sigma_2^c = k_2^c \beta_\sigma f_c'$);

$$\bullet \quad \sigma_1^c = \nu k_1^c f_{cr} \quad (2-2)$$

que substitui a equação (1-115) do Capítulo 2 ($\sigma_1^c = k_1^c f_{cr}$);

$$(2-3)$$

- $\varepsilon_{cr} = 0.00008\mu$

que substitui a equação (1-111) do Capítulo 2 para o betão à tração ($\varepsilon_{cr} = 0.00008K$);

- $E_c = 3875\lambda\sqrt{f'_c(MPa)}$ (2-4)

que substitui a equação (1-112) do Capítulo 2 para o betão à tração ($E_c = 3875K\sqrt{f'_c(MPa)}$).

Nas equações (2-3) e (2-4) os parâmetros E_c e ε_{cr} da lei constitutiva de Belarbi e Hsu (1994) são multiplicados pelos fatores λ e μ , respetivamente, onde já haviam sido quantificados previamente como $\lambda = \mu = 1.45$ para vigas de secção cheia (Jeng *et al.* 2011[48]; Jeng 2012 [47]).

Uma vez efetuada a distinção das vigas consoante incorporem uma secção cheia ou vazada, torna-se ainda necessário para este último caso a distinção da quantificação dos três parâmetros atrás mencionados consoante se trate de secções vazadas de “parede fina” ou de “parede espessa”. Assim sendo, abordar-se-á primeiramente a quantificação de ν, μ e λ para secções vazadas de “paredes finas” e posteriormente para as secções de “parede espessa”. Os ensaios experimentais de Jeng em 2014 [25] relativos às cinco vigas de “paredes finas” da NCNU permitiram calibrar os valores de λ e μ de forma a se atingir um valor para o momento torsor de fissuração T_{cr} mais próximo do valor de T_{cr} experimental. Para realizar essa calibração, Jeng experimentou diversos valores para λ e μ . Os resultados obtidos a partir dos diversos valores utilizados mostraram que a alteração dos valores de $\lambda = \mu = 1.15$ (inicialmente considerados por Jeng) para $\lambda = \mu = 0.975$ permitiram uma melhor aproximação para os valores de T_{cr} desejados, conforme ilustrado na Figura 44:

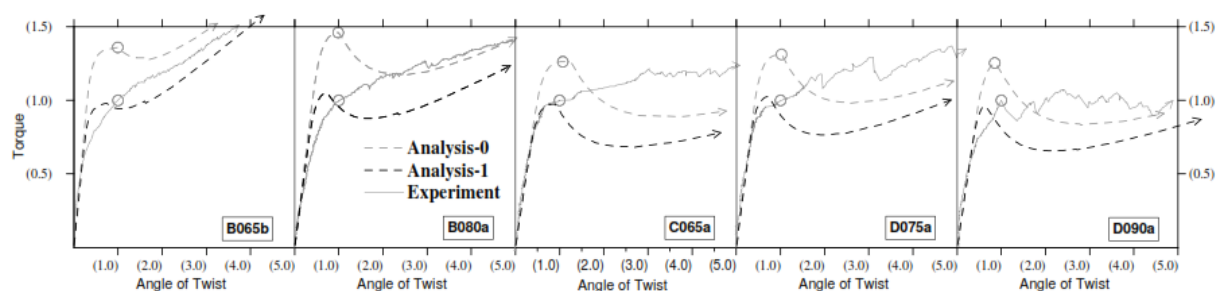


Figura 44 - Comparação da Análise 0 ($\lambda=\mu=1.15$) com a Análise 1 ($\lambda=\mu=0.975$) [25]

No entanto, tendo por base a Figura 44 e a e as curvas relativas à *Analysis-1*, Jeng observou ainda uma sobrestimação do valor do momento torsor perto do seu valor de fissuração. Assim, para reduzir esta ligeira sobrestimação, os valores experimentais relativos ao momento torsor de fissuração foram transferidos para o momento torsor máximo localizado no preciso ponto de viragem da curva *Analysis-1* (Jeng *et al.* 2013b[49]), como mostra a Figura 43. Tal modificação permitiu ajustar de novo os parâmetros para um valor otimizado $\lambda = \mu = 0.93$ (Análise 2 na Figura 45).

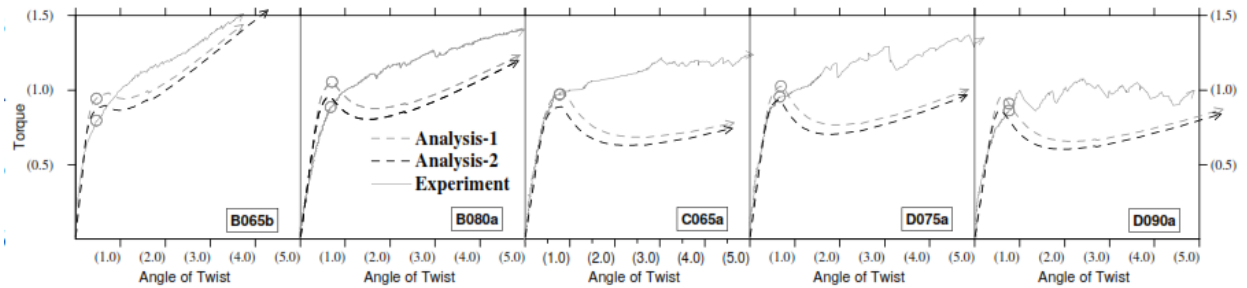


Figura 45- Comparação da Análise 1 ($\lambda=\mu=0.975$) com a Análise 2 ($\lambda=\mu=0.93$) [25]

Tendo por base os resultados das restantes 38 vigas com secção vazada existentes na literatura e analisando-as em conjunto através do gráfico apresentado na Figura 46, que relaciona o quociente entre os momentos torsores de fissuração (esperados e obtidos teoricamente) com os respetivos valores da resistência à compressão do betão $\sqrt{f'_c}$, Jeng observou uma tendência linear representada pela reta de regressão linear $y = (0.0331)x + (0.7311)$.

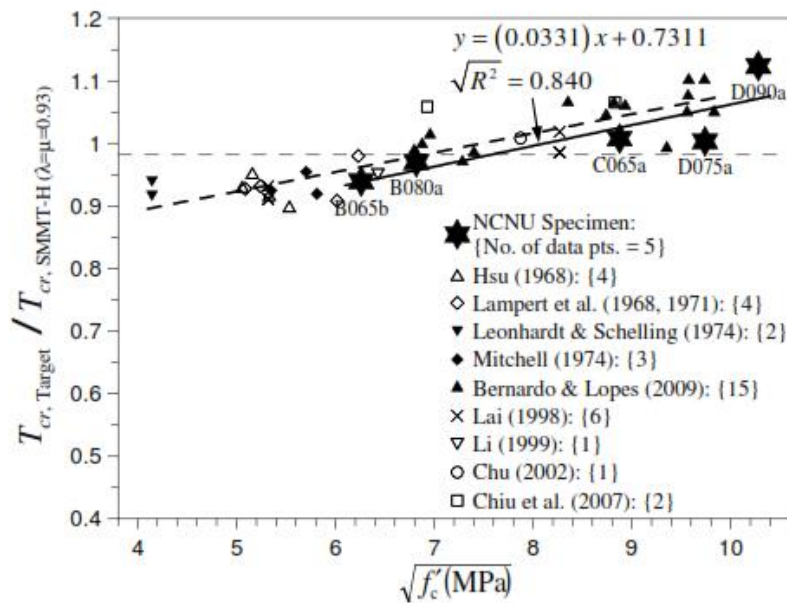


Figura 46- Regressão linear para vigas de secção vazada de parede fina [25]

Esta regressão linear permite obter assim o fator otimizado η que é traduzido da seguinte forma:

$$\eta = (0.033)\sqrt{f'_c \text{ MPa}} + 0.73 \quad (2-5)$$

Quanto às secções de “parede espessa”, devido à ausência de estudos deste tipo de vigas na literatura, Jeng em 2014 [25] procedeu ao ensaio experimental de 4 vigas com parede espessa. Para se quantificarem os fatores ν, μ e λ houve necessidade de ser definida uma função linear de $\sqrt{f'_c}$ com imposição de um limite superior. Assim, $f'_c = 47.85 \text{ MPa}$ foi assumido por Jeng como o valor que distingue um betão de resistência normal de um betão de

alta resistência, sendo que os fatores ν, μ e λ serão quantificados distintamente para quando $f'_c \leq 47.85 \text{ MPa}$ e para quando $f'_c > 47.85 \text{ MPa}$.

Para betões de resistência normal os casos analisados por Jeng em 2014 [25] mostram que $\lambda = \mu = 1.20$ oferece uma boa aproximação entre o valor previsto pelo modelo SMMT e o valor desejado do momento torsor de fissuração. Com estes valores de $\lambda = \mu = 1.20$ Jeng obteve uma tendência linear das vigas estudadas com a seguinte reta de regressão linear, cujo fator de correlação é $\sqrt{R^2} = 0.999$:

$$\eta = (0.0938)\sqrt{f'_c \text{ MPa}} + 0.43 \quad (2-6)$$

Para betões de alta resistência, a única viga experimental ensaiada na NCNU foi insuficiente para quantificar os três fatores λ, μ e η . Assim sendo, Jeng realizou um estudo teórico com duas vigas virtuais adicionais. Seguindo um procedimento bastante semelhante ao de betões de resistência normal, foram quantificados os três fatores da seguinte forma:

$$\lambda = \mu = 1.129 \text{ e } \eta = \frac{8.45}{\sqrt{f'_c \text{ MPa}}} + 0.017 \quad (2-7)$$

Quanto às secções cheias mantém-se:

$$\lambda = \mu = 1.45 \text{ e } \eta = 1$$

3.3.3. Alteração do algoritmo de cálculo do GSVATM

Tendo sido definidos todos os parâmetros de correção para as relações constitutivas do betão, a secção vazada começa por ser calculada como se se tratasse de uma secção cheia utilizando o procedimento não modificado do GSVATM (secções cheias). Chegando à parte do cálculo da espessura da escora t_c procede-se à verificação da condição $t_c > t$, ou seja, à verificação se a espessura real da parede t é inferior à espessura da escora. Em caso afirmativo assume-se $t_c = t$ e prossegue-se o cálculo. Caso contrário, o cálculo é efetuado normalmente com o procedimento de cálculo que era efetuado até então para secções cheias. A Figura 47 apresenta o algoritmo de cálculo alterado do GSVATM para incorporar as vigas de secção vazada, estando identificadas a vermelho as respetivas alterações relativamente ao algoritmo original.

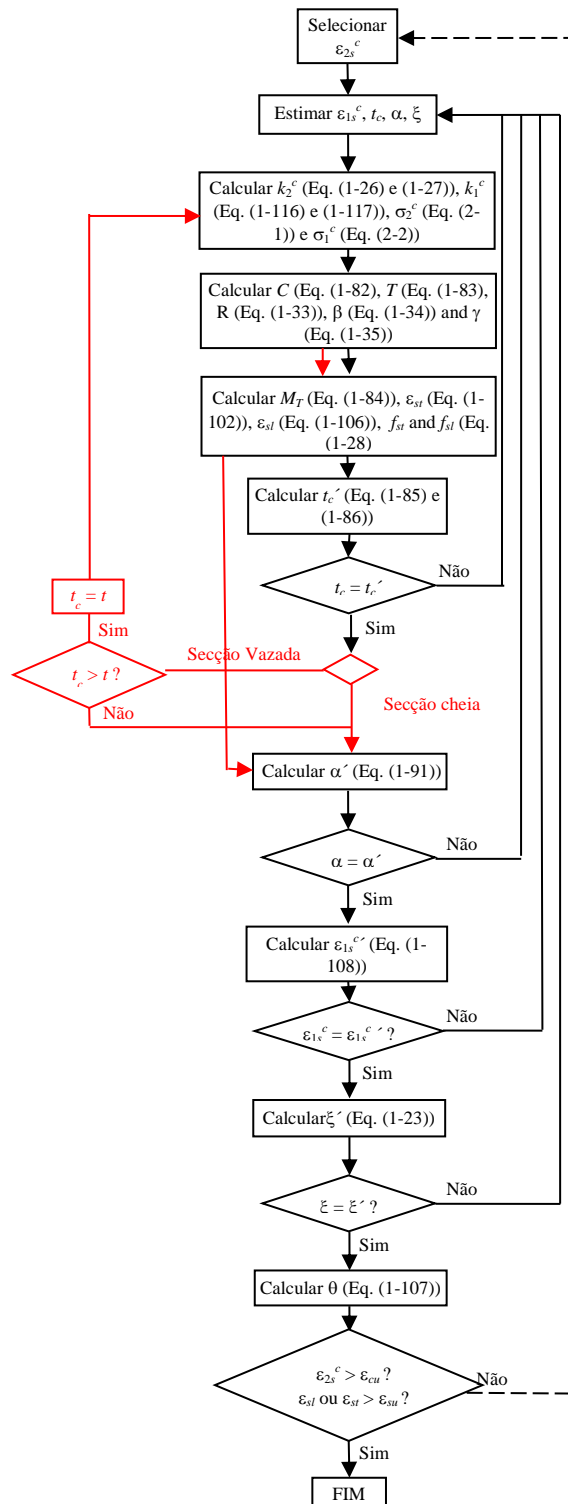


Figura 47- Fluxograma do algoritmo proposto para a incorporação de vigas de secção vazada no GSVATM

3.4. Breve descrição da Utilização do Programa TORQUE 2.0

3.4.1. Considerações gerais

Esta secção tem como objetivo apresentar, de uma forma resumida, o funcionamento do programa TORQUE 2.0.

Este programa TORQUE foi desenvolvido por Andrade em 2011 [51], utilizando a linguagem de programação Delphi. Para os propósitos do presente trabalho, uma nova versão do programa, designado de TORQUE 2.0, foi desenvolvido com vista a introduzir as modificações apresentadas na secção anterior. O TORQUE 2.0 tem assim como objetivo calcular o comportamento teórico de vigas de betão armado e pré-esforçado com secção cheia ou vazada, de alta resistência ou normal, sujeitas à torção. Permite calcular a evolução dos diversos parâmetros que caracterizam o comportamento de uma viga sob ação da torção, como a curva T (momento torsor) - θ (rotação), entre outros. O modelo de cálculo base é o GSVATM, descrito no Capítulo 2, utilizando as leis constitutivas que caracterizam o comportamento dos materiais (betão à tração, betão à compressão e armaduras ordinárias à tração) também descritas no Capítulo 2.

3.4.2. Funcionamento geral do TORQUE 2.0

O programa TORQUE 2.0 tem como objetivo realizar de forma automática o procedimento de cálculo iterativo apresentado no final da secção 3.3 para vigas de betão armado.

O modo de trabalhar deste programa é bastante simples consistindo nas seguintes etapas:

- 1) Abrir um ficheiro de dados que inclua as características geométricas e mecânicas da secção a calcular, que deverá ser previamente criado;
- 2) Na janela principal do programa deverá escolher-se o(s) modelo(s) (ou leis constitutivas) que definem o comportamento do betão à tração, à compressão e do aço à tração;
- 3) Escolher a opção que permite calcular a viga;
- 4) Abrir ficheiro de Excel (criado pelo TORQUE 2.0) com os resultados obtidos.

3.4.3. TORQUE 2.0 adaptado a vigas de secção vazada

De forma a sustentar as considerações realizadas ao longo deste trabalho, foi necessário requerer ao autor do programa TORQUE que introduzisse as modificações ao programa para torná-lo aplicável ao caso de vigas de betão armado com secção vazada. A nova versão do programa, TORQUE 2.0, foi baseada na metodologia exposta ao longo deste capítulo para incluir no GSVATM as vigas com secção vazada.

Nesta secção são descritos de forma resumida os aspetos referentes à utilização do programa TORQUE 2.0 após a introdução das alterações que permitem incluir o estudo das vigas de secção vazada.

O programa TORQUE 2.0 tem como modelo base o GSVATM modificado e mantém o mesmo objetivo do programa original que é calcular a curva do momento torsor (T) - rotação (θ), bem como a evolução dos parâmetros que caracterizam a evolução do comportamento de uma viga à torção.

A título exemplificativo da utilização do programa, é aqui utilizada a viga de referência A2 de Bernardo (2003) [5], com os modelos comportamentais descritos na secção 2.2.4 e 2.3.6.

Primeiramente, depois de aberto o programa, deve clicar-se em “Ler secções”, conforme a Figura 48.

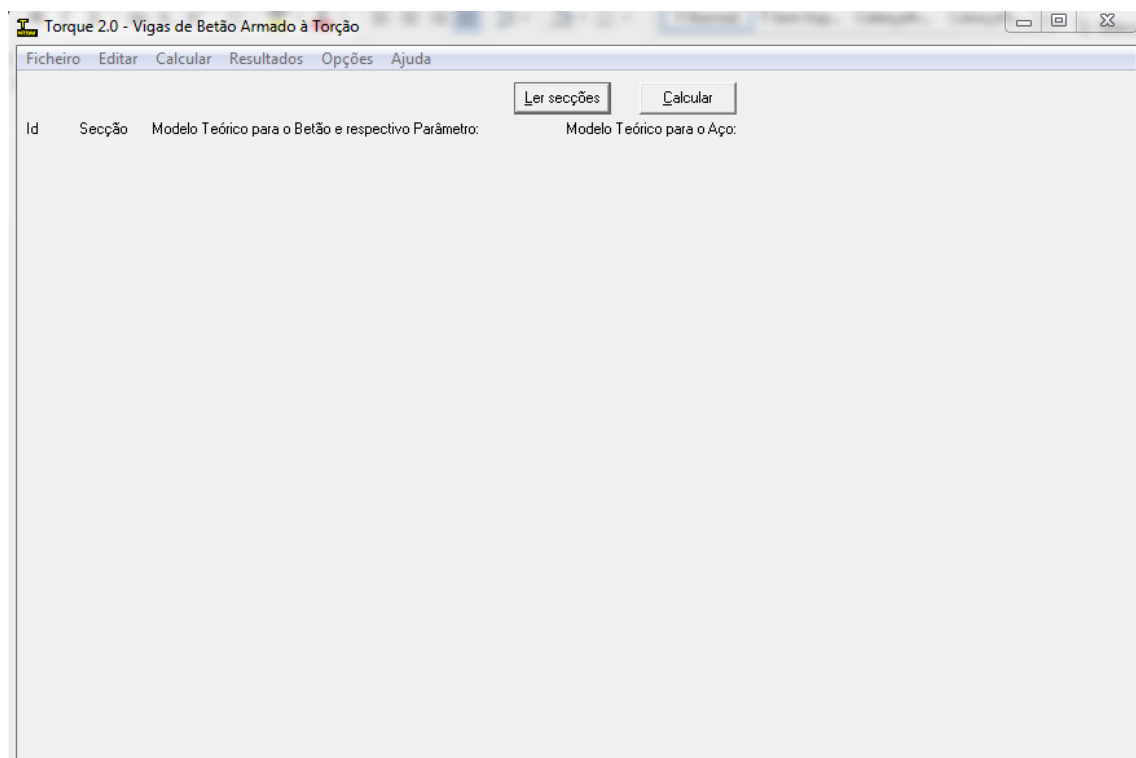


Figura 48- Exemplo de utilização do TORQUE 2.0

De seguida seleciona-se, no canto inferior direito, a opção “Todos os ficheiros (*.*)” e escolhe-se o que se pretende, conforme ilustra a Figura 49.

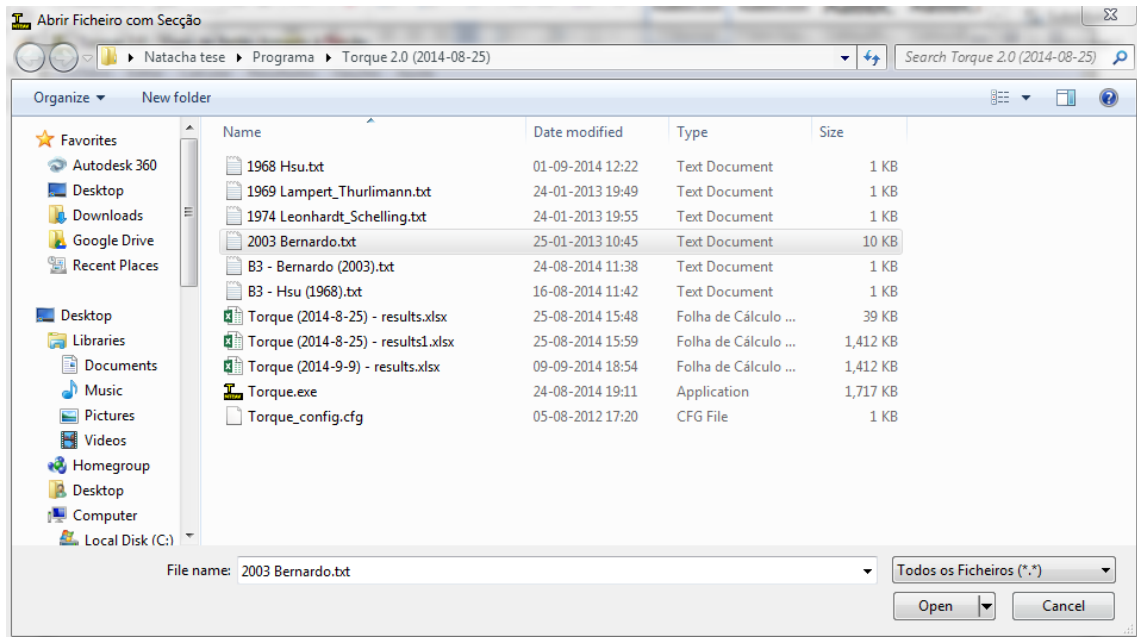


Figura 49- Exemplo de utilização do TORQUE 2.0

Quando se abre o ficheiro, aparecem todas as vigas que nele estão incluídas, assim como os respetivos modelos teóricos (ver Figura 50).

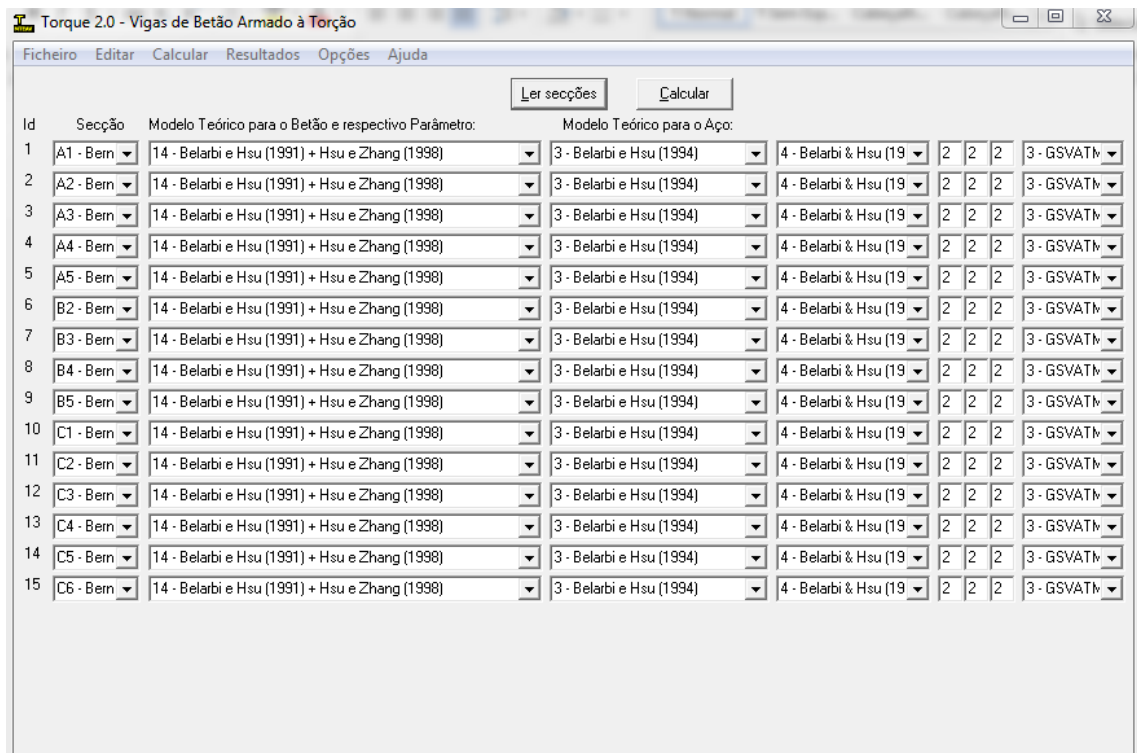


Figura 50- Exemplo de utilização do TORQUE 2.0

De seguida manda-se calcular e o próprio programa cria uma pasta Excel que contém toda a informação necessária relativa ao estudo do comportamento das vigas à torção, nomeadamente a curva $T - \theta$:

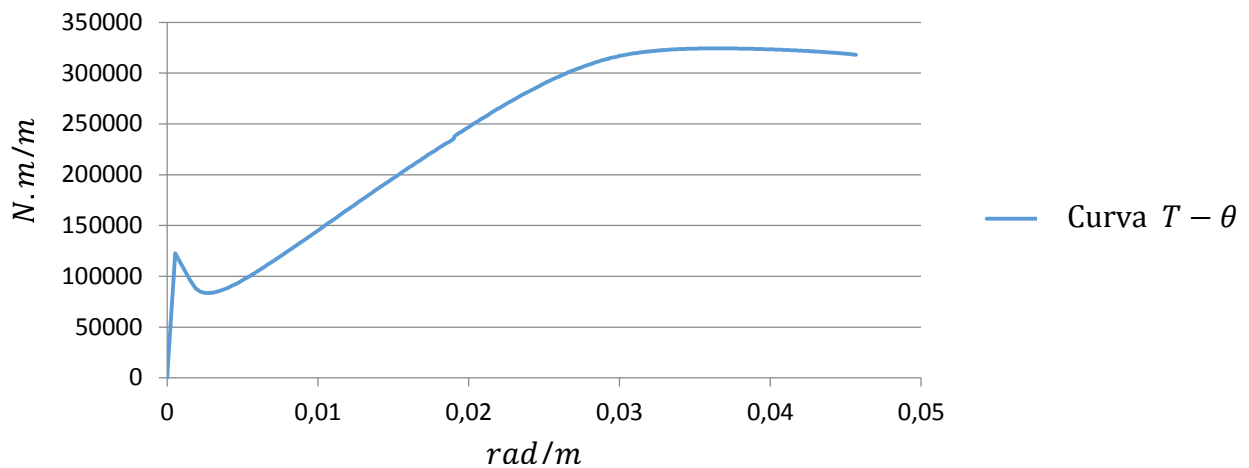


Figura 51- Exemplo de utilização do TORQUE 2.0

3.5. Notas Finais

No presente capítulo foi apresentada, de forma resumida, a alteração proposta a realizar no GSVATM com o objetivo de o estender a vigas de betão armado com secção retangular vazada.

Uma vez que a utilização do modelo apresentado é um tanto ou quanto complexa e morosa, se realizada manualmente, utilizou-se neste trabalho o programa de cálculo TORQUE 2.0, desenvolvido por Andrade em 2011, para realizar o cálculo de forma automática. Assim, o modelo do GSVATM modificado foi implementado numa nova versão do programa, TORQUE 2.0.

Capítulo 4 - Validação da modificação do GSVATM

4.1. Introdução

Este capítulo tem como objetivo validar o GSVATM modificado com vista a incorporar vigas de betão armado com secção vazada sujeitas à torção. Tal validação é realizada tendo como base a comparação das previsões do modelo teórico com resultados experimentais. Esta comparação inclui o estudo da forma da curva $T - \theta$ como também de alguns dos seus pontos-chave, nomeadamente o momento torsor resistente máximo e respetiva rotação e o momento torsor de fissuração e respetiva rotação. Os resultados globais obtidos com o GSVATM modificado são também comparados com os resultados obtidos por Jeng em 2014 [25] tendo por base o SMMT modificado.

4.2. Caracterização das vigas de referência utilizadas neste estudo

Primeiramente procedeu-se ao estudo das nove vigas ensaiadas experimentalmente por Jeng em 2014 [25], com base nas quais foi proposta a alteração do modelo SMMT para incorporar vigas com secção vazada, com a finalidade de comprovar a legitimidade da alteração. Foram assim estudadas as curvas $T - \theta$ das respetivas vigas, cujas características se encontram resumidas na Tabela 1. De seguida, estabelece-se a comparação entre as curvas obtidas experimentalmente e as obtidas teoricamente segundo o GSVATM modificado e o SMMT-H apresentadas nos gráficos das Figuras 53 a 61.

Após avaliar os resultados obtidos com as referidas vigas, resultados estes analisados na Tabela 2, procedeu-se ao estudo de mais 23 vigas de secção retangular vazada encontradas na literatura. Foram incluídos os estudos de vários autores conforme se poderá observar ao longo deste capítulo, onde as vigas apresentam uma secção transversal semelhante à secção da viga ilustrada na seguinte Figura 52.

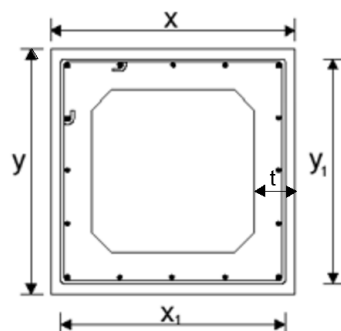


Figura 52- Exemplo de viga de seção vazada

Jeng em 2014 [25], conforme já mencionado, procedeu à análise de 9 vigas de seção vazada, realizando, para isso, ensaios experimentais. Os ensaios consistiram no estudo de 5 vigas de seção vazada com parede de espessura fina e 4 vigas de seção vazada com parede espessa. As cinco vigas de seção vazada com parede fina são as seguintes: B065b, B080a, C065a, D075a e D090a. As restantes vigas A095c, A120a, B110a e C100a são as de seção vazada com parede espessa. As características geométricas e mecânicas das vigas estudadas por Jeng são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1- Características das vigas estudadas por Jeng [25]

Viga	t (cm)	x (cm)	y (cm)	x ₁ (cm)	y ₁ (cm)	Armadura longitudinal	Armadura transversal	A _{sl} (cm ²)	A _{st} /s (cm ² /m)	ρ _l (%)	ρ _t (%)	f _{ly} (MPa)	f _{ty} (MPa)	f _{cm} (MPa)
A095c	14.5	49.7	71.1	43.7	65.1	4#5+6#4	#4@130	13.16	9.93	0.372	0.611	371	381	35.1
A120a	18.4	50.2	71.9	44.2	65.9	10#5	#4@170	20.00	7.59	0.554	0.463	464	380	27.6
B065b	9.2	50.3	71.0	44.3	65.0	10#8	#4@130	50.97	9.93	1.427	0.608	452	380	39.2
B080a	11.2	50.0	72.1	44.0	66.1	10#6	#4@100	28.39	12.90	0.787	0.788	454	392	46.5
B110a	15.5	49.8	71.0	43.8	65.0	10#5	#4@150	20.00	8.60	0.566	0.529	453	369	48.1
C065a	8.5	49.5	78.1	43.5	72.1	10#5	#4@130	20.00	9.93	0.517	0.594	338	376	78.8
C100a	12.7	49.9	72.3	43.9	66.3	10#6	#4@100	28.39	12.90	0.787	0.788	466	447	90.6
D075a	8.7	49.8	73.4	43.8	67.4	10#6	#4@100	28.39	12.90	0.777	0.785	469	381	94.9
D090a	10.5	50.1	72.2	44.1	66.2	10#6	#4@100	28.39	12.90	0.785	0.787	466	447	105.7

NOTA: as notações #4, #5, #6 e #8 correspondem aos diâmetros de 12,7 mm, 15,875 mm, 19,05 mm e 25,4 mm respetivamente.

Onde:

t - espessura da seção transversal (ver Figura 52);

x - largura da seção transversal (ver Figura 52);

y - altura da seção transversal (ver Figura 52);

x₁ - largura de uma cinta transversal (ver Figura 52);

y₁ - altura de uma cinta transversal (ver Figura 52);

A_{sl} - Área de armadura ordinária longitudinal;

A_{st} - Área de armadura ordinária transversal;

ρ_l - Taxa de armadura ordinária longitudinal (ρ_l = A_{sl}/A_c, onde A_c = xy);

ρ_t - Taxa de armadura ordinária transversal (ρ_t = A_{st}/A_c, onde A_c = xy);

f_{cm} - Tensão média à compressão uniaxial do betão;

f_{ly} - Tensão de cedência da armadura longitudinal;

f_{ty} - Tensão de cedência da armadura transversal.

A seguir são ilustradas as curvas $T - \theta$ experimentais obtidas por Jeng em 2014 [25] e as respectivas curvas $T - \theta$ teóricas obtidas tanto pelo SMMT-H como pelo GSVATM modificado com o auxílio do programa TORQUE 2.0.

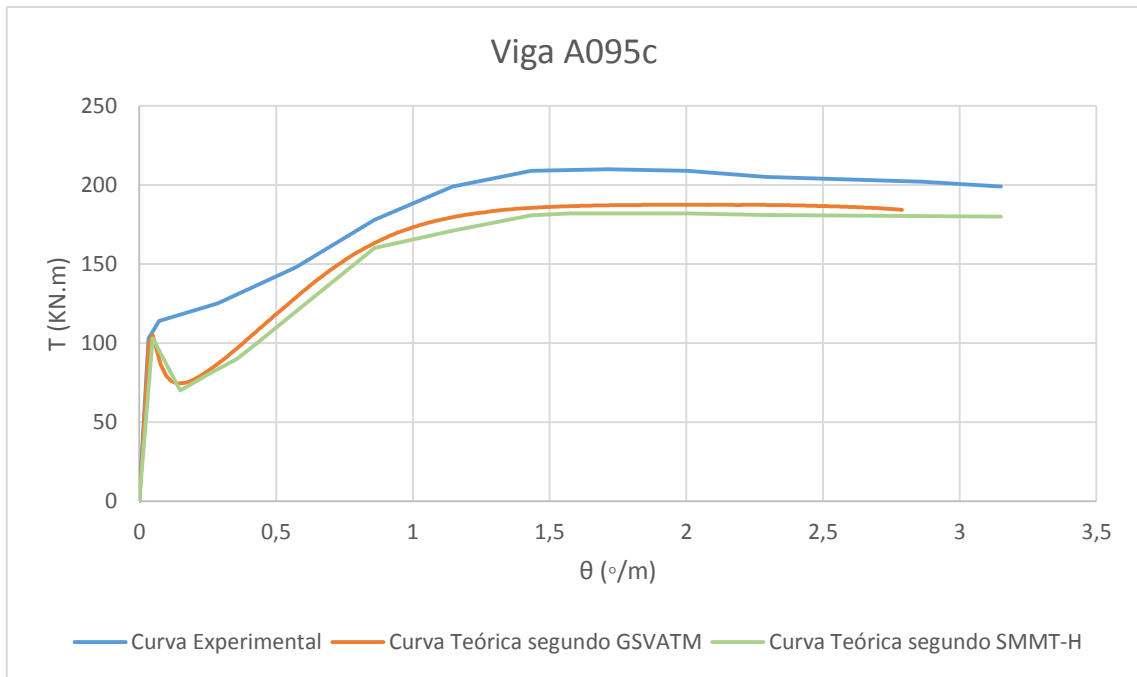


Figura 53- Comparação das curvas T- θ da viga A095c de Jeng [25]

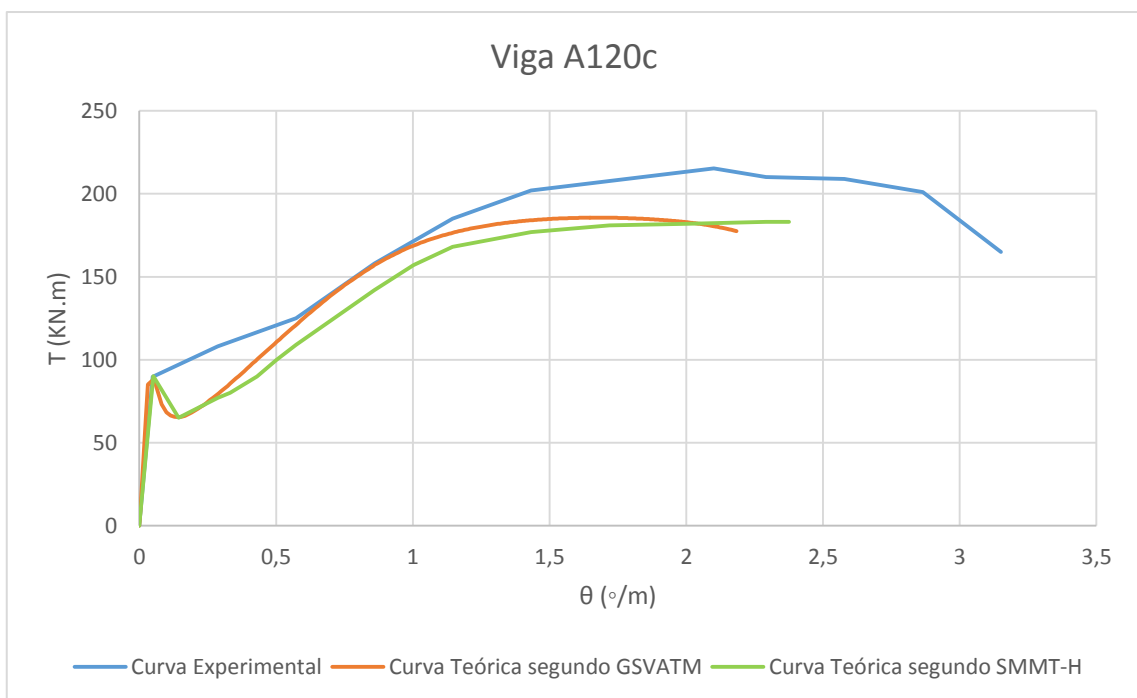


Figura 54- Comparação das curvas T- θ da viga A120c de Jeng [25]

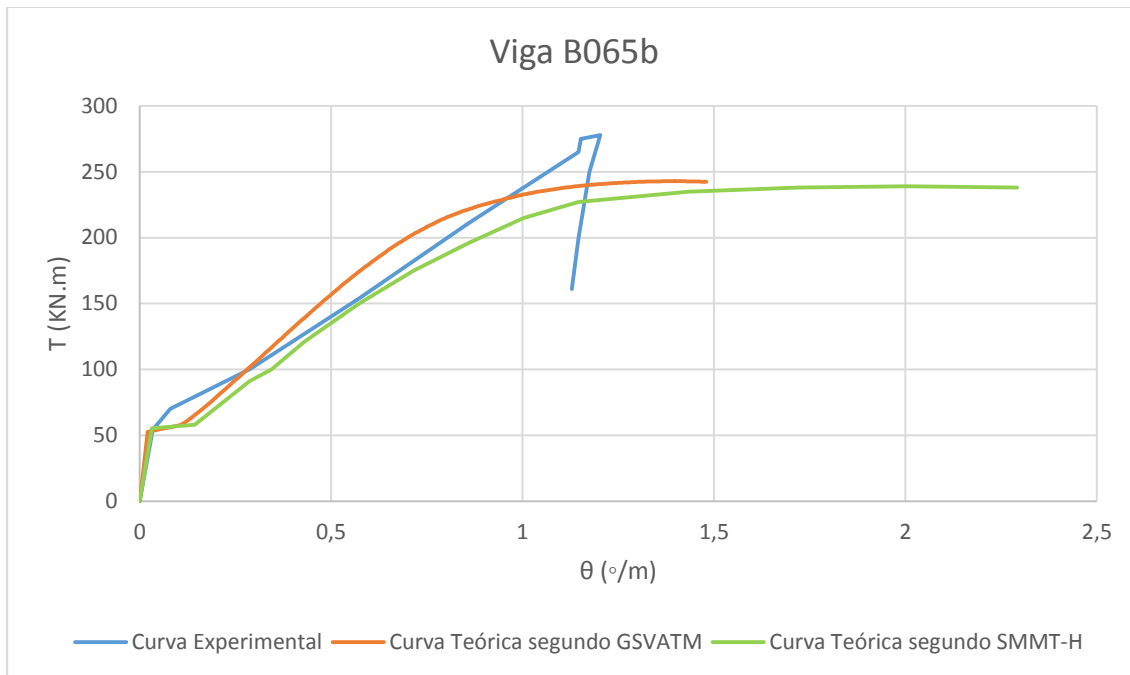


Figura 55- Comparação das curvas T- θ da viga B065b de Jeng [25]

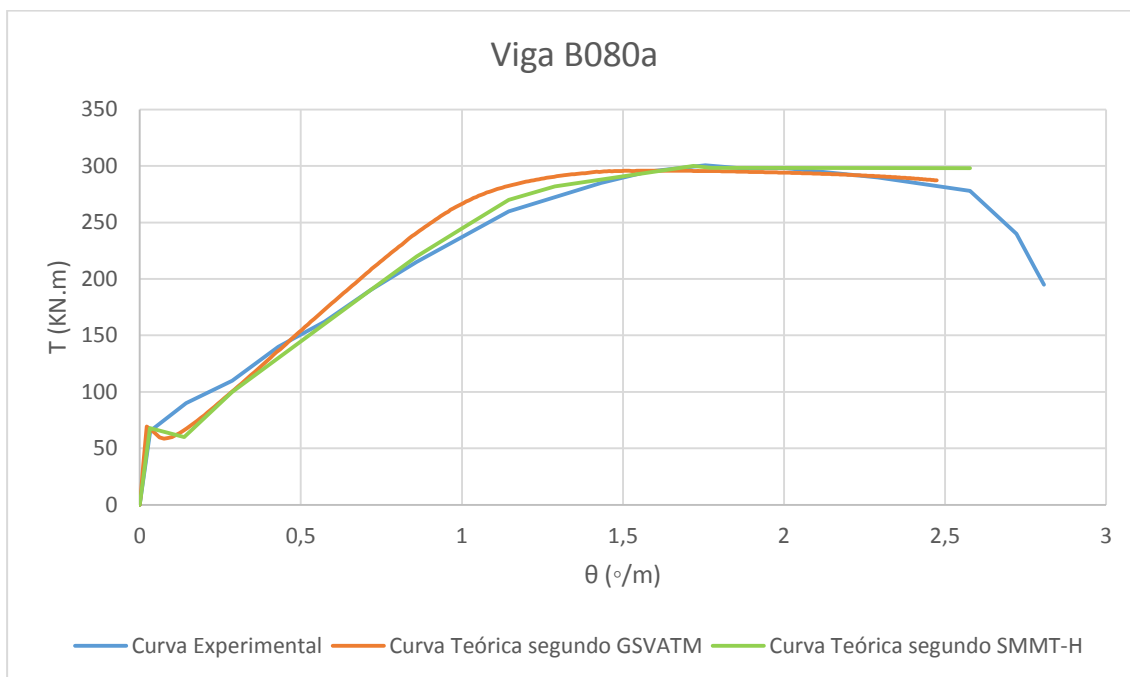


Figura 56- Comparação das curvas T- θ da viga B080a de Jeng [25]

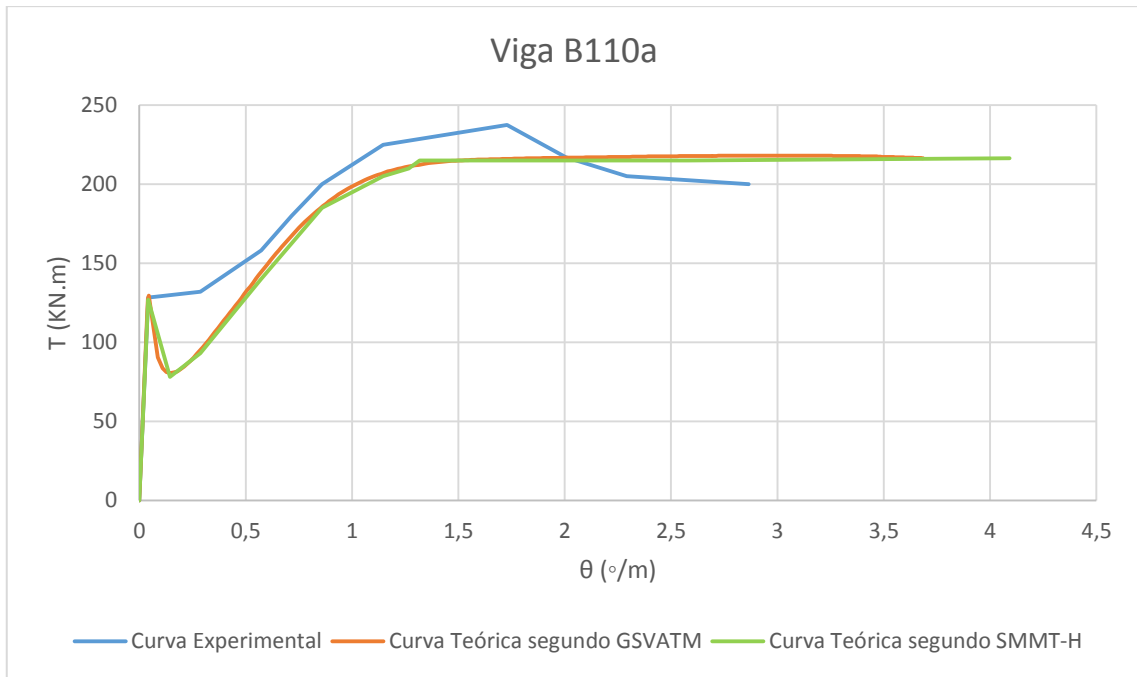


Figura 57- Comparação das curvas T- θ da viga B110a de Jeng [25]

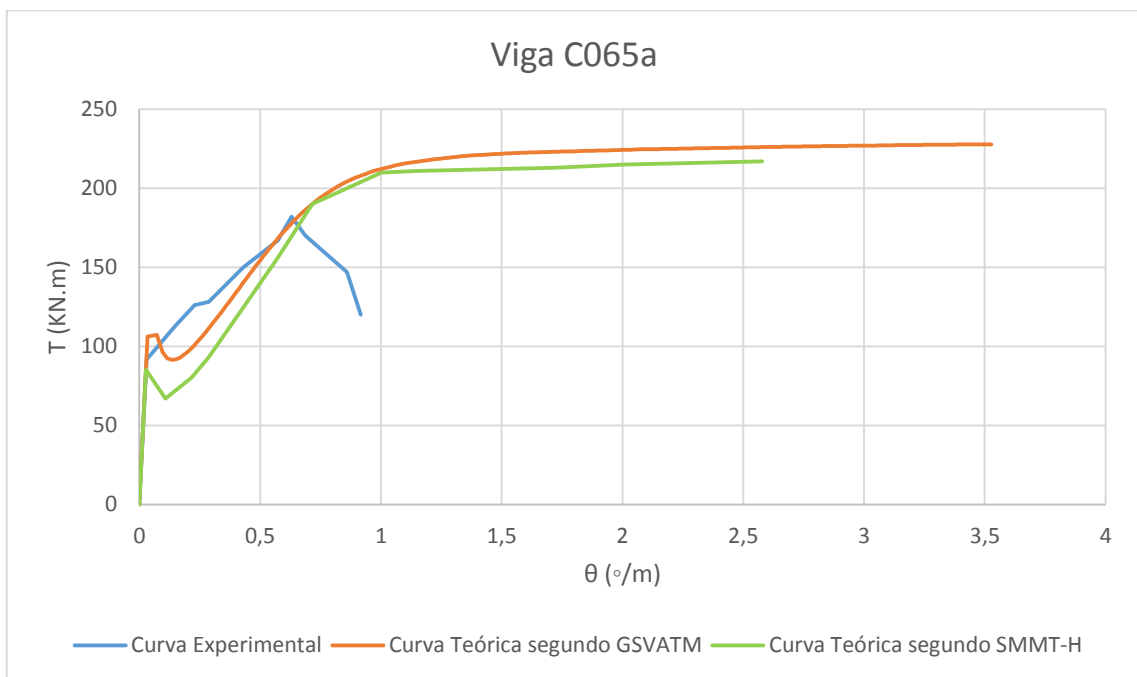


Figura 58 - Comparação das curvas T- θ da viga C065a de Jeng [25]

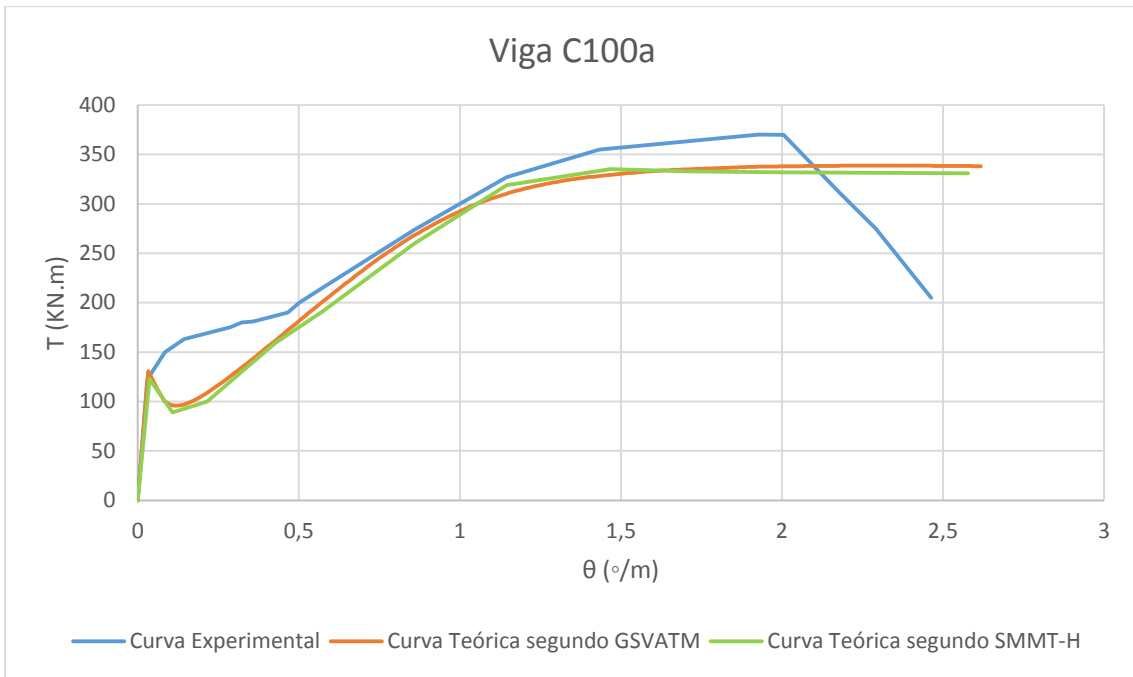


Figura 59 - Comparação das curvas T- θ da viga C100a de Jeng [25]

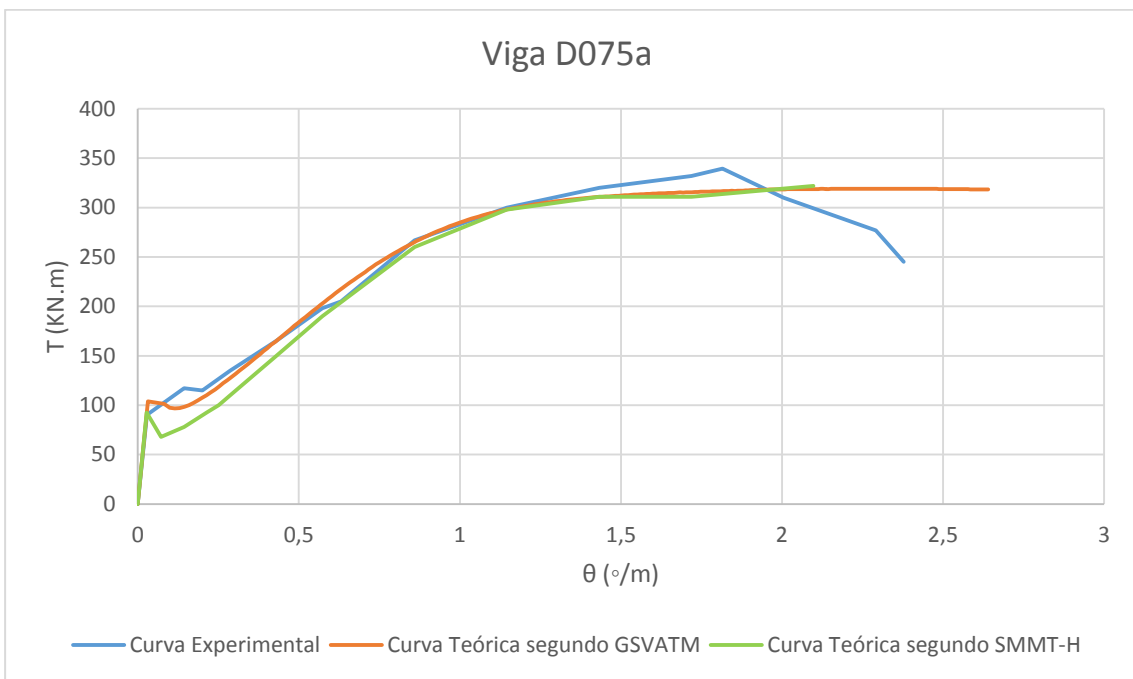


Figura 60 - Comparação das curvas T- θ da viga D075a de Jeng [25]

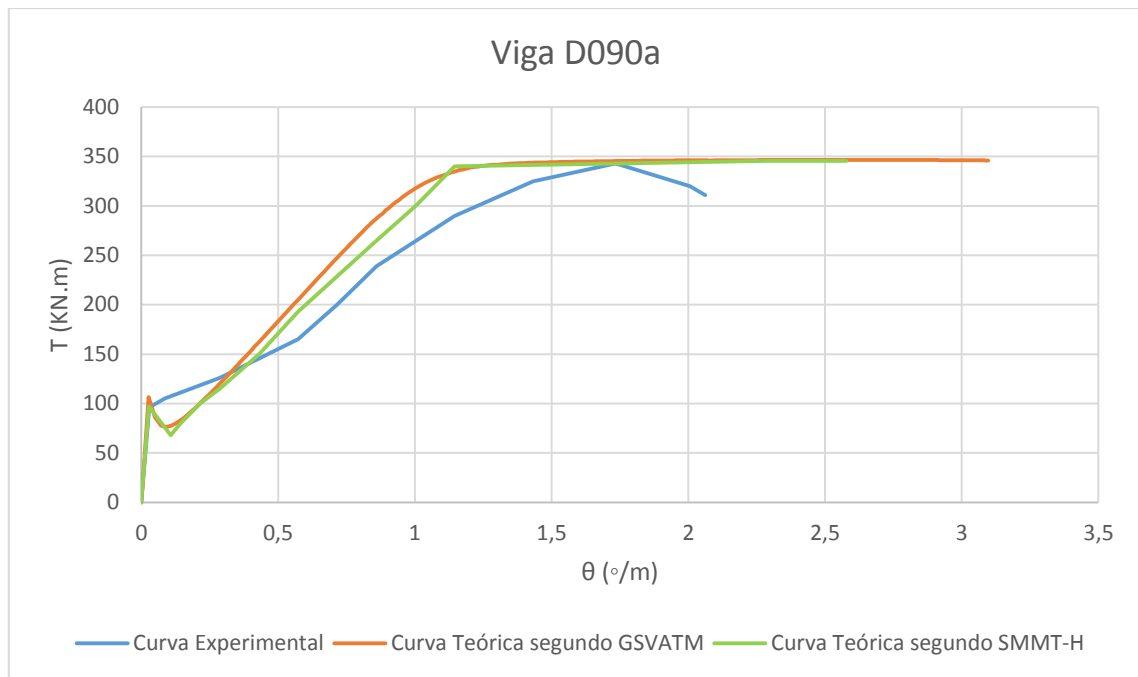


Figura 61- Comparação das curvas T-θ da viga D090a de Jeng [25]

Conforme observado, todas as vigas estudadas por Jeng [25] mostram, tendo por base o GSVATM modificado, uma proximidade bastante boa comparativamente às curvas $T-\theta$ experimentais e também às curvas teóricas obtidas por Jeng [25] tendo por base o SMMT-H. Mais particularmente, os resultados são bastantes bons ao nível do momento torsor de fissuração e do momento torsor último. É de salientar que os ensaios realizados por Jeng são de 2014, tendo sido especialmente realizados com equipamento bastante mais preciso para o registo do comportamento pré-fissuração das vigas, quando comparado com os métodos utilizados nas restantes 23 vigas analisadas mais adiante. Assim sendo, as curvas experimentais obtidas por Jeng, ao nível do rigor dos dados experimentais obtidos, fornecem resultados bastante mais precisos e reais para baixos níveis de carregamento.

A Tabela 2 (a) seguinte apresenta um resumo dos pontos mais importantes das curvas $T-\theta$ teóricas e experimentais, designadamente os relativos ao momento torsor de fissuração (T_{cr} e θ_{cr}) e ao momento torsor último (T_u e θ_u). Destaca-se a semelhança existente entre os dados obtidos experimentalmente e os teóricos através do SMMT-H e do GSVATM modificado. A tabela 2 (b) apresenta os quocientes entre os valores experimentais e teóricos dos vários parâmetros anteriormente referidos, bem como os valores médios, desvio padrão e coeficientes de correlação dos referidos quocientes.

Tabela 2(a) - Comparação dos valores obtidos pelas curvas T- θ estudadas por Jeng [25]

Viga	T_{cr} GSVATM (KN.m)	T_{cr} SMMT (KN.m)	T_{cr} exp. (KN.m)	θ_{cr} GSVATM (°/m)	θ_{cr} SMMT (°/m)	θ_{cr} exp. (°/m)	T_u GSVATM (KN.m)	T_u SMMT (KN.m)	T_u exp. (KN.m)	θ_u GSVATM (°/m)	θ_u SMMT (°/m)	θ_u exp. (°/m)
A095a	101.60	102.91	102.88	0.042	0.048	0.034	187.49	181.44	209.98	2.205	1.500	1.714
A120a	86.78	90.09	89.78	0.042	0.051	0.048	185.61	183.05	215.25	1.674	2.376	2.100
B065b	57.96	55.38	54.43	0.025	0.032	0.034	242.84	-	-	1.397	-	-
B080a	70.314	67.82	65.24	0.025	0.032	0.033	295.90	298.42	300.66	1.611	1.775	1.756
B110a	128.47	126.8	128.30	0.042	0.041	0.041	218.06	216.42	237.48	3.016	4.092	1.723
C065a	128.20	85.10	91.68	0.035	0.027	0.029	227.81	-	-	3.527	-	-
C100a	134.25	122.71	122.23	0.034	0.036	0.029	338.76	335.07	370.15	2.323	1.468	1.927
D075a	121.92	92.49	90.09	0.033	0.027	0.028	319.11	321.84	339.48	2.364	2.098	1.815
D090a	110.26	97.07	96.05	0.025	0.027	0.029	346.61	345.64	343.08	2.597	2.285	1.734

Tabela 2 (b) - Comparação dos valores obtidos pelas curvas T- θ estudadas por Jeng [25]

Viga	SMMT-H				GSVATM			
	$\frac{T_{cr,Exp}}{T_{cr,SMMT-H}}$	$\frac{\theta_{cr,Exp}}{\theta_{cr,SMMT-H}}$	$\frac{T_{u,Exp}}{T_{u,SMMT-H}}$	$\frac{\theta_{u,Exp}}{\theta_{u,SMMT-H}}$	$\frac{T_{cr,Exp}}{T_{cr,GSVATM}}$	$\frac{\theta_{cr,Exp}}{\theta_{cr,GSVATM}}$	$\frac{T_{u,Exp}}{T_{u,GSVATM}}$	$\frac{\theta_{u,Exp}}{\theta_{u,GSVATM}}$
	A095c	0.9997	0.7050	1.1573	1.1427	1.0126	0.8095	1.1200
A120a	0.9966	0.9434	1.1759	0.8838	1.0346	1.1429	1.1597	1.2545
B065b	0.9828	1.0598			0.9391	1.3600		
B080a	0.9620	1.0195	1.0075	0.9893	0.9278	1.3200	1.0161	1.0900
B110a	1.0118	1.0039	1.0973	0.4211	0.9987	0.9762	1.0891	0.5713
C065a	1.0773	1.0927			0.7151	0.8286		
C100a	0.9961	0.8530	1.1047	1.3127	0.9105	0.8529	1.0927	0.8295
D075a	0.9741	1.0472	1.0548	0.8651	0.7389	0.8485	1.0638	0.7678
D090a	0.9895	1.0759	0.9926	0.7589	0.8711	1.1600	0.9898	0.6677
Média	0.9989	0.9778	1.0843	0.9105	0.9054	1.0332	1.0759	0.8512
Desvio padrão (%)	0.03	0.13	0.07	0.59	0.11	0.22	0.06	0.24
Coef. De Variação (%)	3.29	12.93	6.46	65.29	12.57	21.06	5.44	28.16

Conforme se pode observar na Tabela 2 (b), os resultados obtidos são bastante aceitáveis. Relativamente à média obtida entre a relação do momento tissor de fissuração segundo o GSVATM modificado e o momento tissor de fissuração experimental, os valores obtidos são muito próximos, sendo a média de 0.9054. Verifica-se uma dispersão de 12.57% a qual é aceitável. Melhores resultados podem ser observados para o momento tissor último, sendo a média da discrepância entre as curvas teórica e experimental de 1.0759 e verificando-se uma dispersão de apenas 5.44%. Em relação aos momentos tissors analisados, os resultados obtidos tendo por base o GSVATM modificado são similares aos obtidos por Jeng [25] tendo por base o SMMT-H, com exceção do momento tissor de fissuração para o qual este último modelo fornece melhores resultados (com uma média muito próxima de 1 e uma dispersão de apenas 3.29%).

Quanto à rotação correspondente ao momento tissor de fissuração, pode verificar-se que, apesar do valor médio ser similar ao obtido com o SMMT-H, para o GSVATM observa-se uma dispersão maior (21.06%). Para a rotação correspondente ao momento tissor resistente, o GSVATM apresenta agora uma dispersão notavelmente inferior ao obtido com o SMMT-H. Os valores médios são similares.

Relativamente aos valores em falta nas Tabelas 2 (a) e (b), o autor dos ensaios, Jeng em 2014 [25], refere que as vigas B065b e C065a sofreram um colapso prematuro o que impossibilitou o autor de medir estes valores. Para tais vigas, o referido autor apenas apresenta uma curva experimental $T-\theta$ parcial.

Estendendo a modificação do modelo GSVATM também a outras vigas, para além das ensaiadas por Jeng [25], foram realizados então mais estudos comparativos com base nas vigas ensaiadas experimentalmente por vários outros autores. Bernardo em 2003 [5] realizou ensaios experimentais em quinze vigas de secção retangular vazada, semelhantes à secção da viga ilustrada na Figura 52, cujas características geométricas e mecânicas se encontram resumidas na Tabela 3. São também ilustradas as curvas $T-\theta$ de cada viga estudada por Bernardo [5] sendo exibidas também, para além das experimentais, as curva teóricas segundo o GSVATM modificado, com o auxílio do programa TORQUE 2.0, e segundo o SMMT-H, conforme pode ser observado nas Figuras 62 a 77.

Hsu em 1968 [42] também realizou ensaios experimentais em vigas de secção vazada obtendo as curvas $T-\theta$ experimentais apresentadas nas Figuras 78 e 79 para as vigas D3 e D4, respetivamente. Para testar a validade da alteração realizada ao GSVATM, com o auxílio do programa TORQUE 2.0 foi possível obter as curvas $T-\theta$ teóricas para as mesmas vigas, podendo assim proceder-se a uma análise comparativa. Foi introduzida ainda a curva teórica $T-\theta$ segundo o SMMT-H com a finalidade de comparar também a rigorosidade dos modelos. As características geométricas e mecânicas das vigas D3 e D4 são apresentadas de forma resumida na Tabela 3, sendo também apresentadas as respetivas curvas $T-\theta$ nas Figuras 78 e 79.

Também Lampert e Thurlimann em 1969 [33] realizaram ensaios experimentais em vigas de secção vazada, obtendo as respetivas curvas $T-\theta$ para as vigas T0, T1, T2 e T5 (Figuras 80 a 83). Encontram-se também indicadas as curvas $T-\theta$ teóricas segundo o GSVATM modificado e as curvas teóricas segundo o SMMT-H. As características geométricas e mecânicas encontram-se também na Tabela 3.

Leonhardt e Schelling em 1974 [50] obtiveram as curvas $T-\theta$ experimentais ilustradas nas Figuras 84 e 85, das vigas VH1 e VH2, que foram comparadas com as curvas $T-\theta$ teóricas fornecidas pelo TORQUE 2.0 segundo o GSVATM modificado e segundo também o SMMT-H. As suas características geométricas e mecânicas são apresentadas na seguinte Tabela 3.

Tabela 3(a) - Características das vigas estudadas

Viga	t (cm)	x (cm)	y (cm)	x ₁ (cm)	y ₁ (cm)	Armadura longitudinal	Armadura transversal	A _{sL} (cm ²)	A _{sT} /s (cm ² /m)
A1	9.81	60	60	53.65	54.65	16φ6+4φ8	φ6//0.09	6.534	3,141
A2	10.67	60	60	53.8	53.1	12φ10+4φ12	φ8//0.08	13.949	6.283
A3	10.9	60	60	54.0	53.5	16φ12	φ10//0.095	18.096	8.267
A4	10.43	60	60	52.0	52.5	20φ10+4φ16	φ10//0.07	23.750	11.220
A5	10.41	60	60	52.8	52.8	20φ12+4φ16	φ12//0.08	30.662	14.138
B2	10.8	60	60	53.25	53.4	20φ8+4φ12	φ8//0.075	14.577	6.702
B3	10.9	60	60	53.5	53.7	20φ10+4φ16	φ10//0.07	23.750	11.220
B4	11.23	60	60	52.25	53.55	16φ16	φ12//0.075	32.170	15.080
B5	11.67	60	60	51.8	51.8	20φ16	φ12//0.06	40.212	18.850
C1	9.9	60	60	54.0	54.9	16φ6+4φ8	φ6//0,09	6.534	3.141
C2	10.04	60	60	53.2	53.3	12φ10+4φ12	φ8//0,08	13.949	6.283
C3	10.25	60	60	54.5	54.0	20φ10+4φ16	φ10//0,075	23.750	10.472
C4	10.29	60	60	54.6	54.5	20φ12+4φ16	φ12//0,08	30.662	14.138
C5	10.38	60	60	54.0	54.3	4φ20+12φ16	φ12//0,065	36.694	17.400
C6	10.38	60	60	53.3	52.9	24φ16	φ12//0,05	48.254	22.620
D3	6.35	25.4	38.1	21.59	34.29	4#6	#4@0,127	11.355	10.160
D4	6.35	25.4	38.1	21.59	34.29	4#7	#4@0,0921	15.484	14.014
T0	8.0	50.0	50.0	43.0	43.0	16φ16	φ12//0,11	32.160	10.282
T1	8.0	50.0	50.0	45.4	45.4	16φ12	φ12//0,11	18.096	10.282
T2	8.0	50.0	50.0	43.0	43.0	16φ12	φ12//0,11	18.096	10.282
T5	8.0	80.0	40.0	73.0	33.0	20φ8	φ12//0,11	10.000	10.282
VH1	8.0	32.4	32.4	30.4	30.4	12φ6	φ6//0,10	3.456	2.880
VH2	8.0	32.4	32.4	30.4	30.4	24φ6	φ6//0,05	6.912	5.760

Tabela 3 (b) - Características das vigas estudadas por Bernardo [5]

Viga	ρ _t (%)	ρ _t (%)	f _{ly} (MPa)	f _{ty} (MPa)	f _{cm} (MPa)
A1	0,181	0,189	695,9	636,66	48,43
A2	0,387	0,373	672,42	695,9	47,34
A3	0,503	0,494	672,42	714,83	46,15
A4	0,660	0,651	723,89	714,83	54,78
A5	0,852	0,829	723,89	672,42	53,1
B2	0,405	0,397	672,42	695,9	69,78
B3	0,660	0,668	723,89	714,83	77,82
B4	0,894	0,886	723,89	672,42	79,8
B5	1,117	1,085	723,89	672,42	76,39
C1	0,181	0,190	695,9	636,66	91,74
C2	0,387	0,372	672,42	695,9	94,81
C3	0,660	0,631	723,89	714,83	91,57
C4	0,852	0,857	723,89	672,42	91,38
C5	1,019	1,047	723,89	672,42	96,68
C6	1,340	1,335	723,89	672,42	87,48
D3	1,173	1,173	341,379	333,103	28,414
D4	1,600	1,618	330,3448	333,1034	30,62069
T0	1,286	0,707	345,19	356,96	45,11
T1	0,724	0,747	356,72	356,72	35,28
T2	0,724	0,707	356,96	356,96	35,30
T5	0,313	0,681	528,58	512,89	47,07
VH1	0,329	0,334	447,2817	447,2817	17,16542

VH2	0,658	0,667	447,2817	447,2817	17,16542
-----	-------	-------	----------	----------	----------

As próximas Figuras 62 a 85 apresentam os gráficos teóricos e experimentais obtidos para o conjunto das referidas 23 vigas em análise.

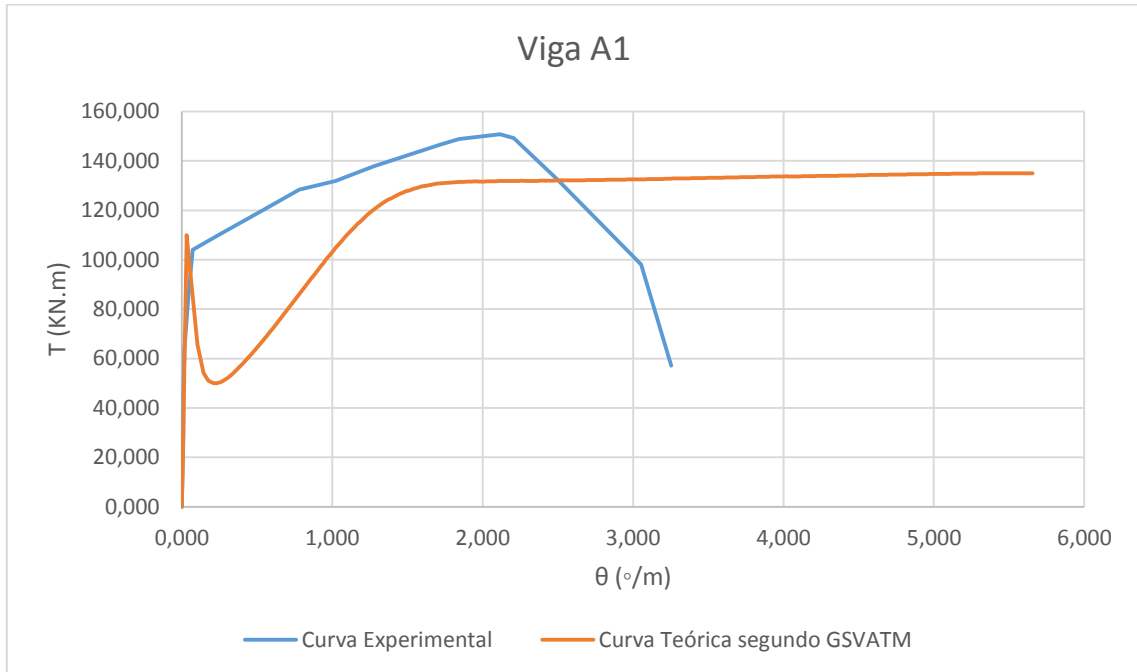


Figura 62- Comparação das curvas T- θ para a viga A1 de Bernardo [5]

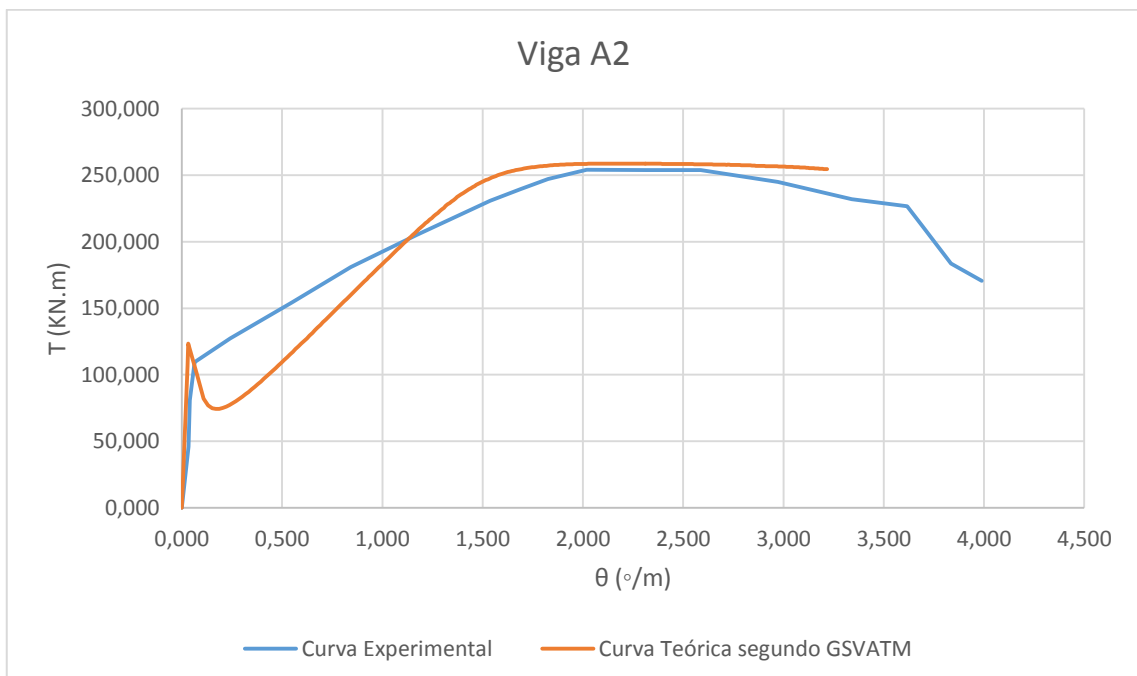


Figura 63- Comparação das curvas T- θ para a viga A2 de Bernardo [5]

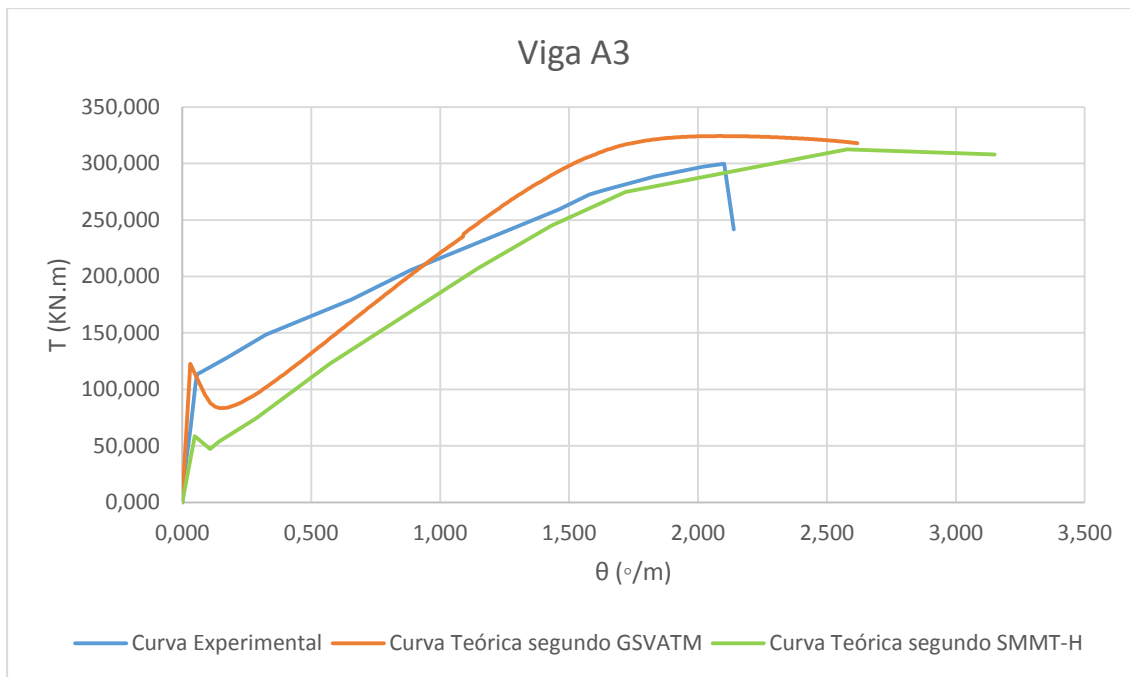


Figura 64- Comparação das curvas T- θ para a viga A3 de Bernardo [5]

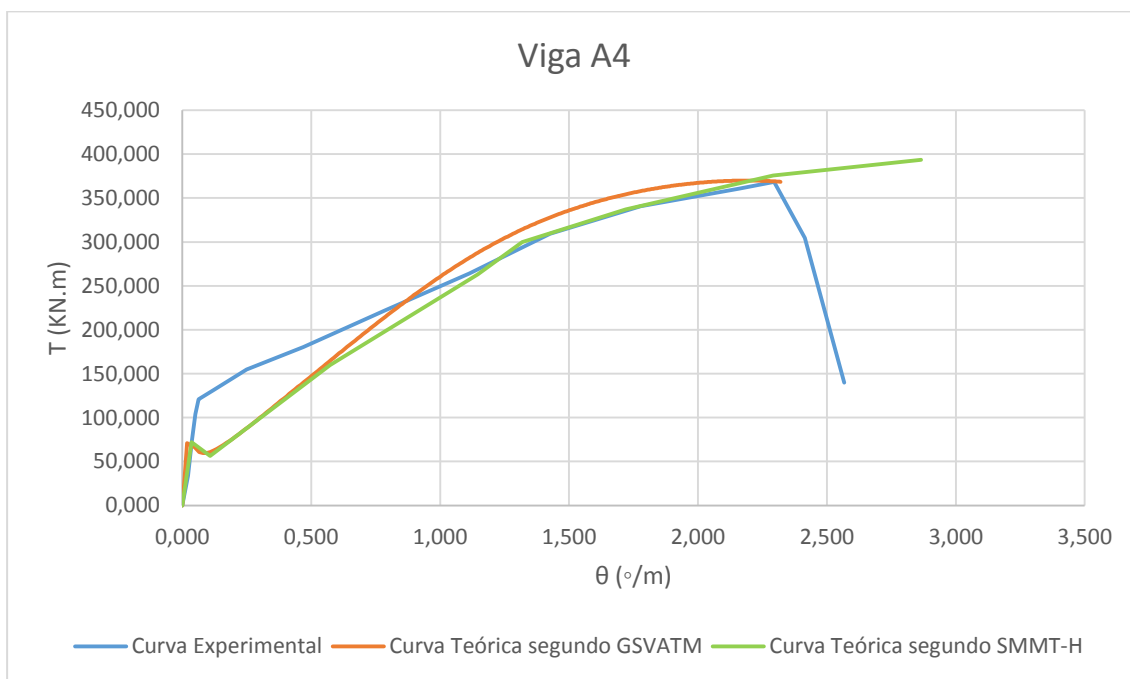


Figura 65- Comparação das curvas T- θ para a viga A4 de Bernardo [5]

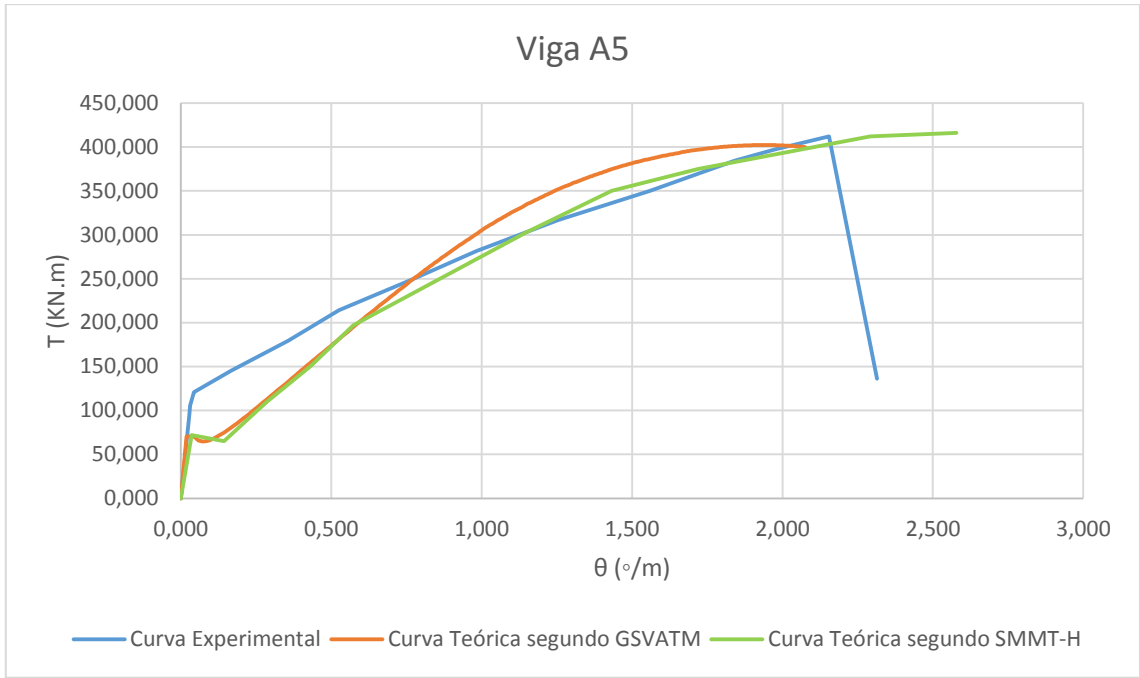


Figura 66- Comparação das curvas T- θ para a viga A5 de Bernardo [5]

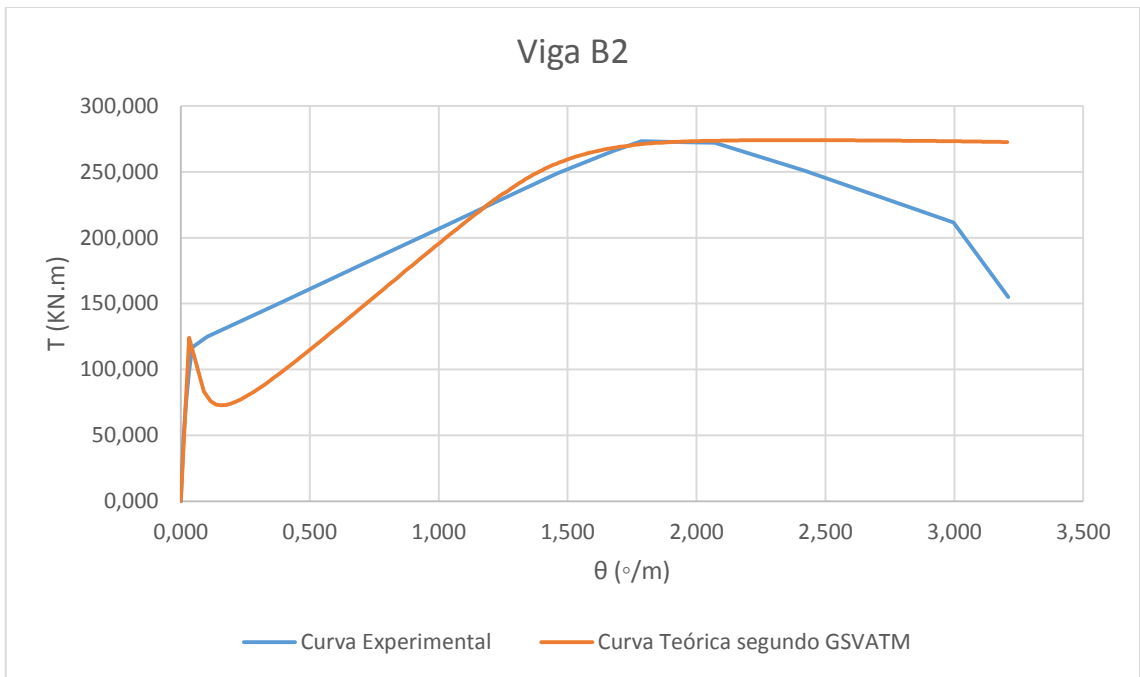


Figura 67- Comparação das curvas T- θ para a viga B2 de Bernardo [5]

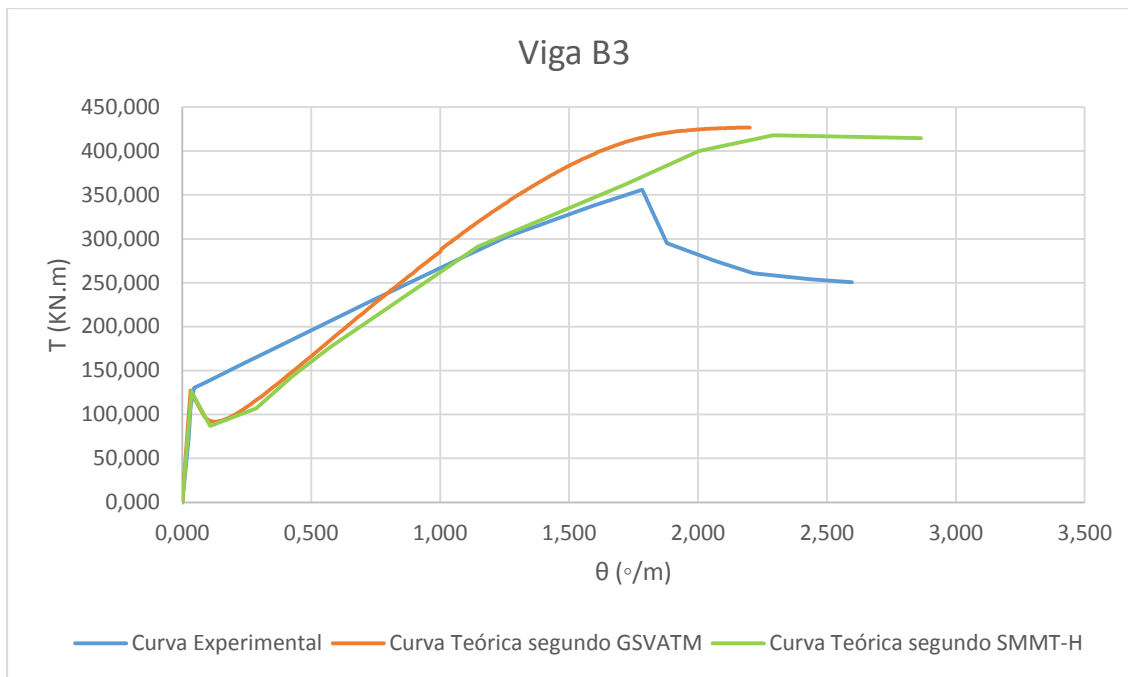


Figura 68- Comparação das curvas T-θ para a viga B3 de Bernardo [5]

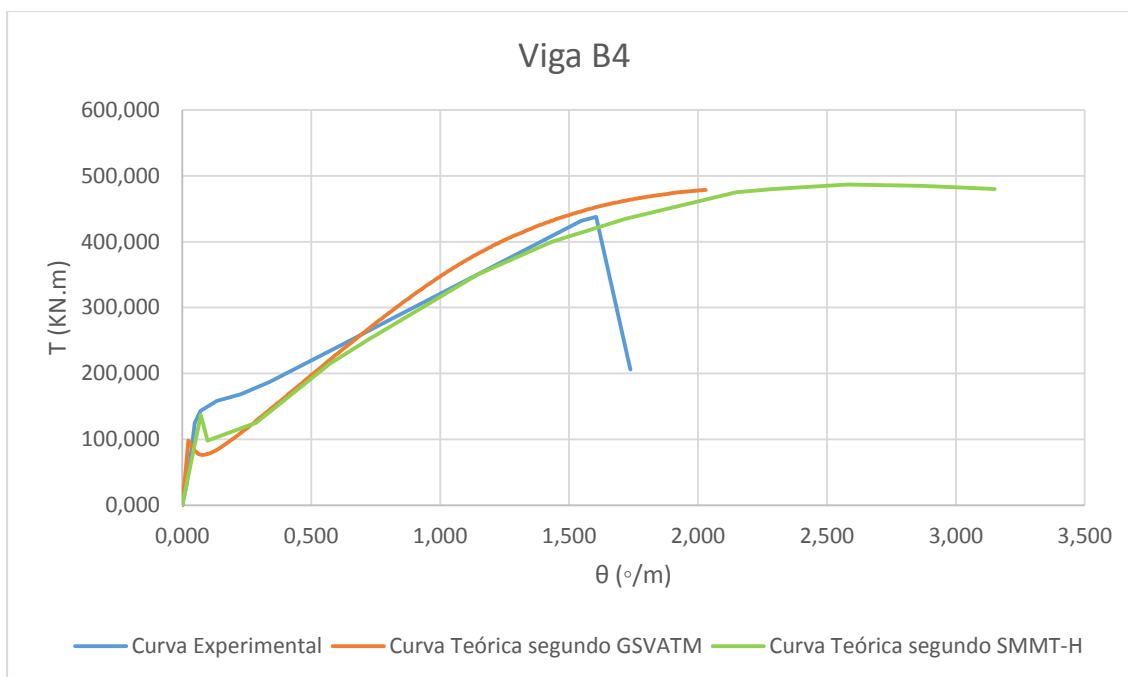


Figura 69- Comparação das curvas T-θ para a viga B4 de Bernardo [5]

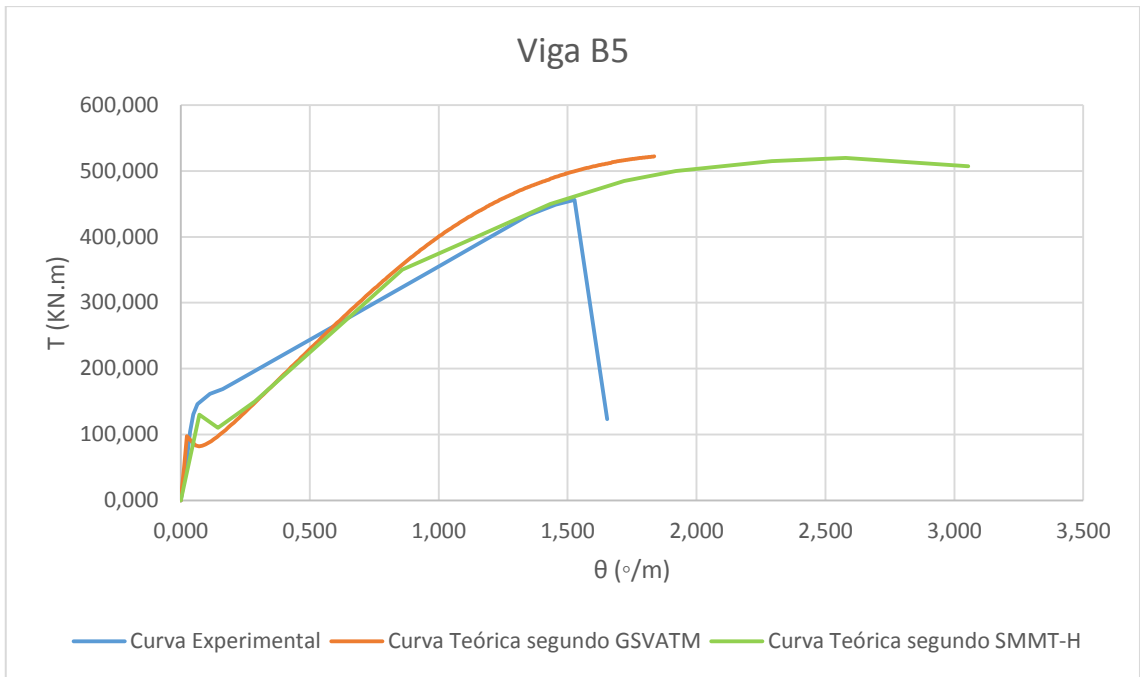


Figura 70- Comparação das curvas T- θ para a viga B5 de Bernardo [5]

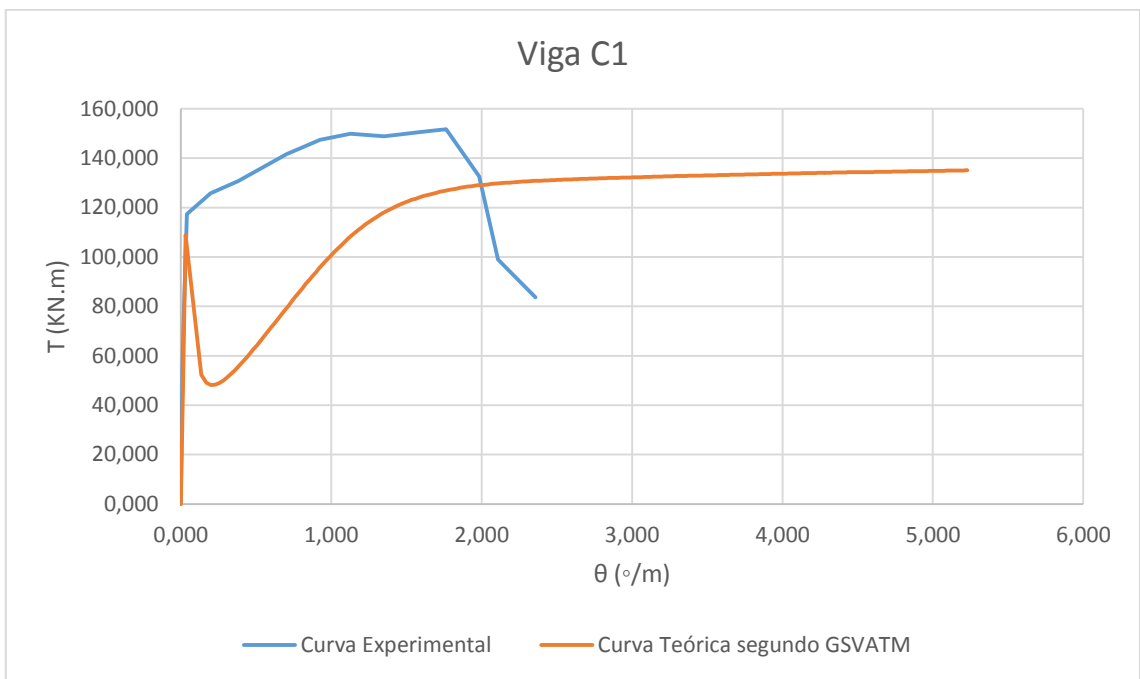


Figura 71- Comparação das curvas T- θ para a viga C1 de Bernardo [5]

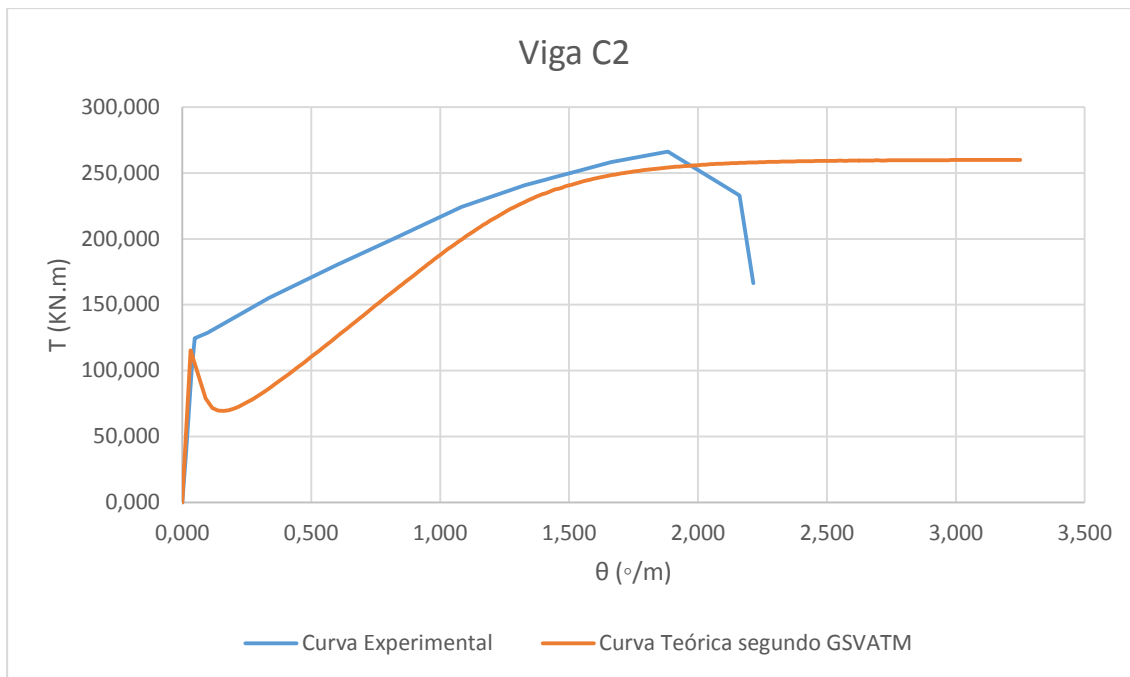


Figura 72- Comparação das curvas T- θ para a viga C2 de Bernardo [5]

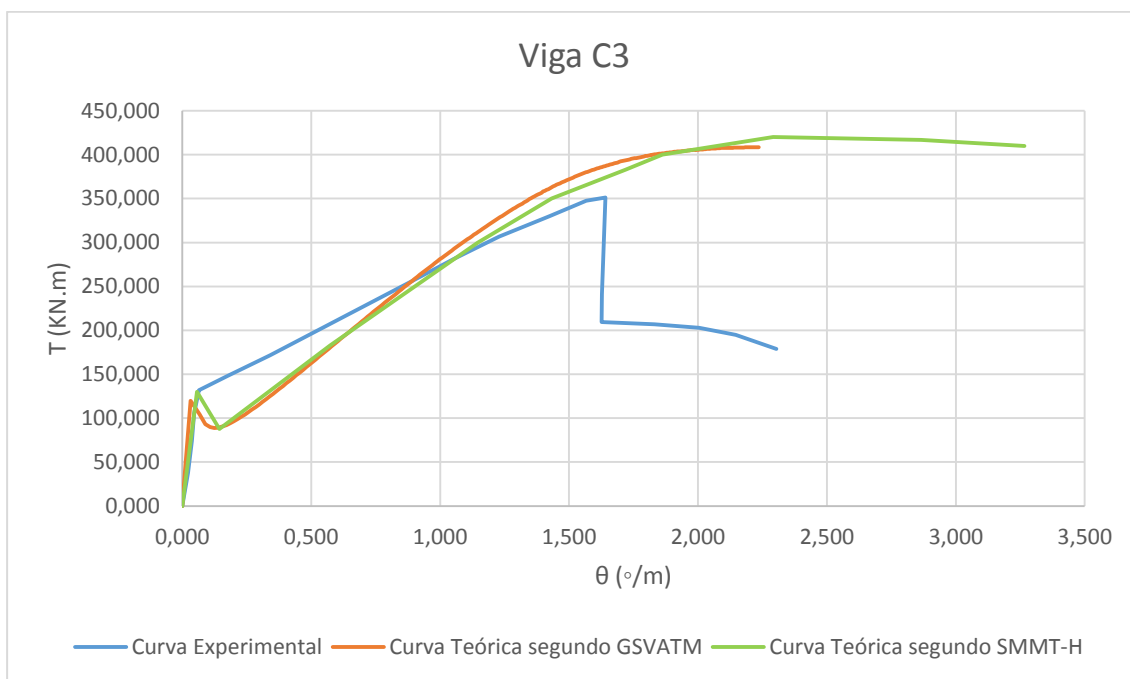


Figura 73- Comparação das curvas T- θ para a viga C3 de Bernardo [5]

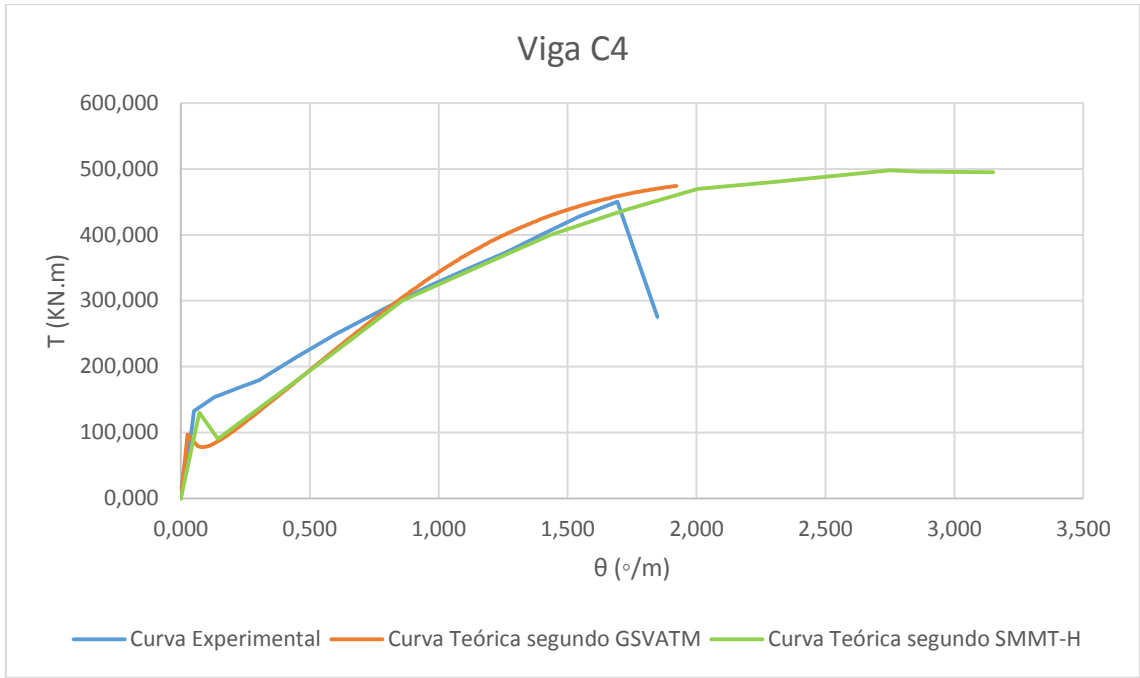


Figura 74- Comparação das curvas T- θ para a viga C4 de Bernardo [5]

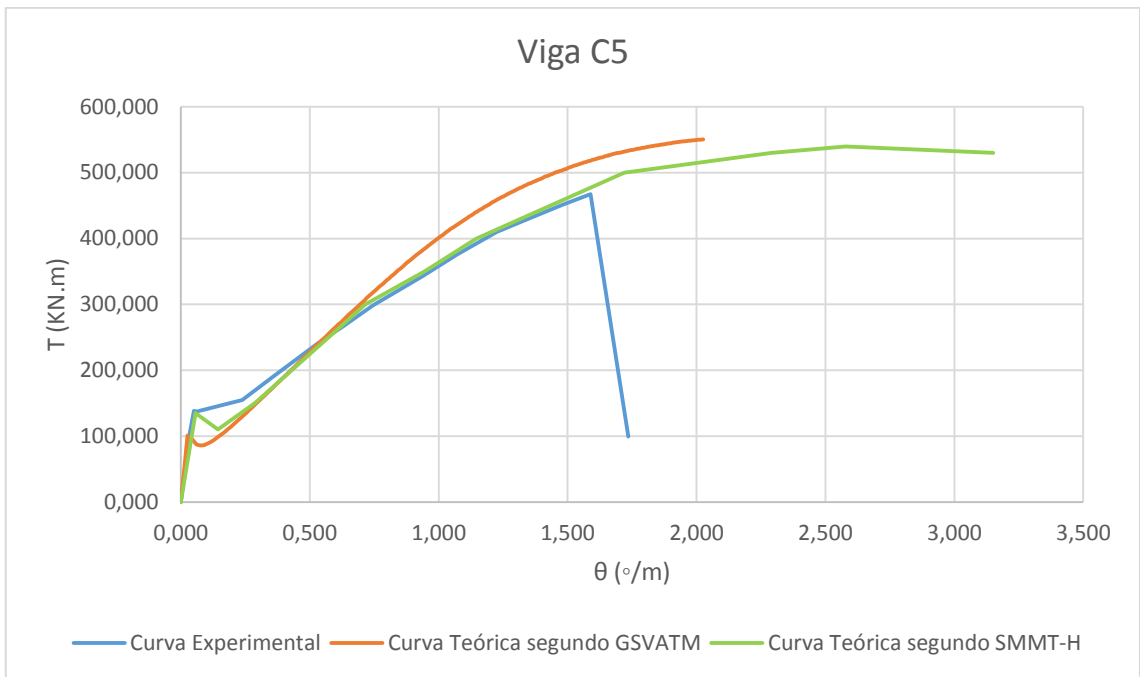


Figura 75- Comparação das curvas T- θ para a viga C5 de Bernardo [5]

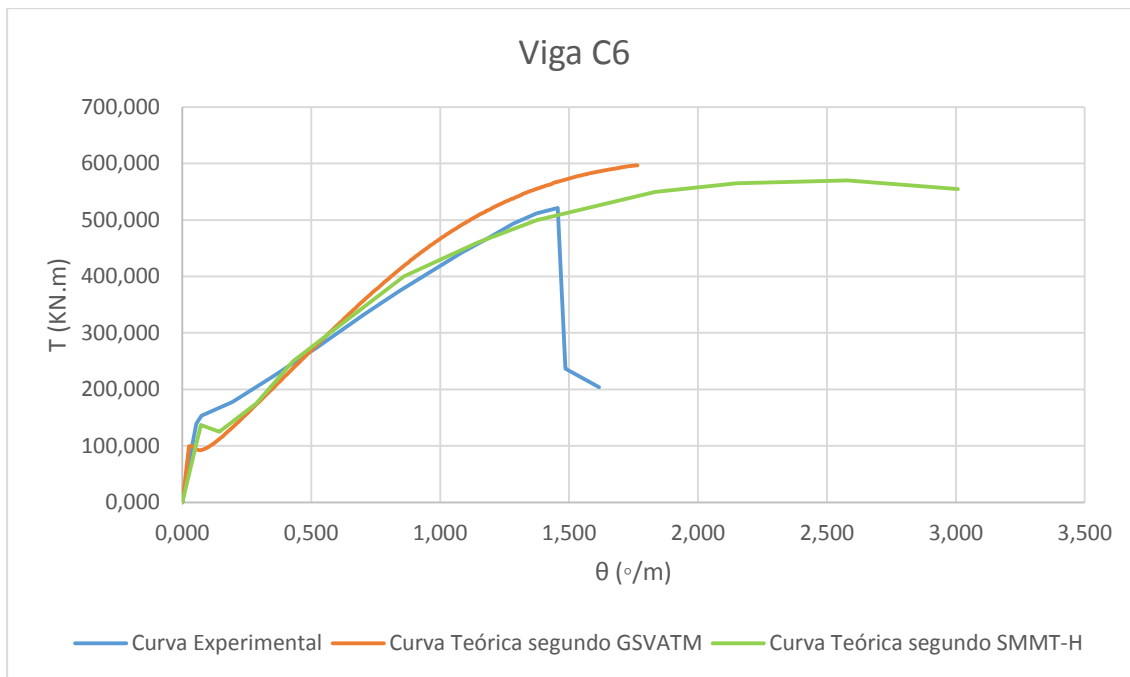


Figura 76- Comparação das curvas T- θ para a viga C6 de Bernardo [5]

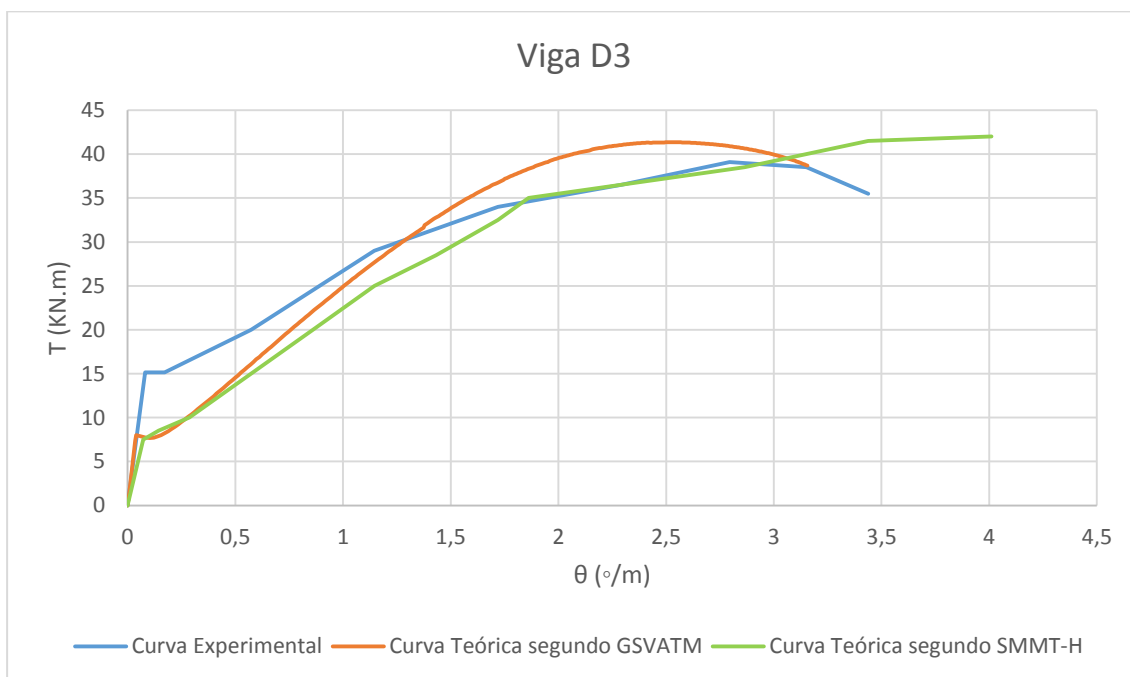


Figura 77- Comparação das curvas T- θ para a viga D3 de Hsu [25]

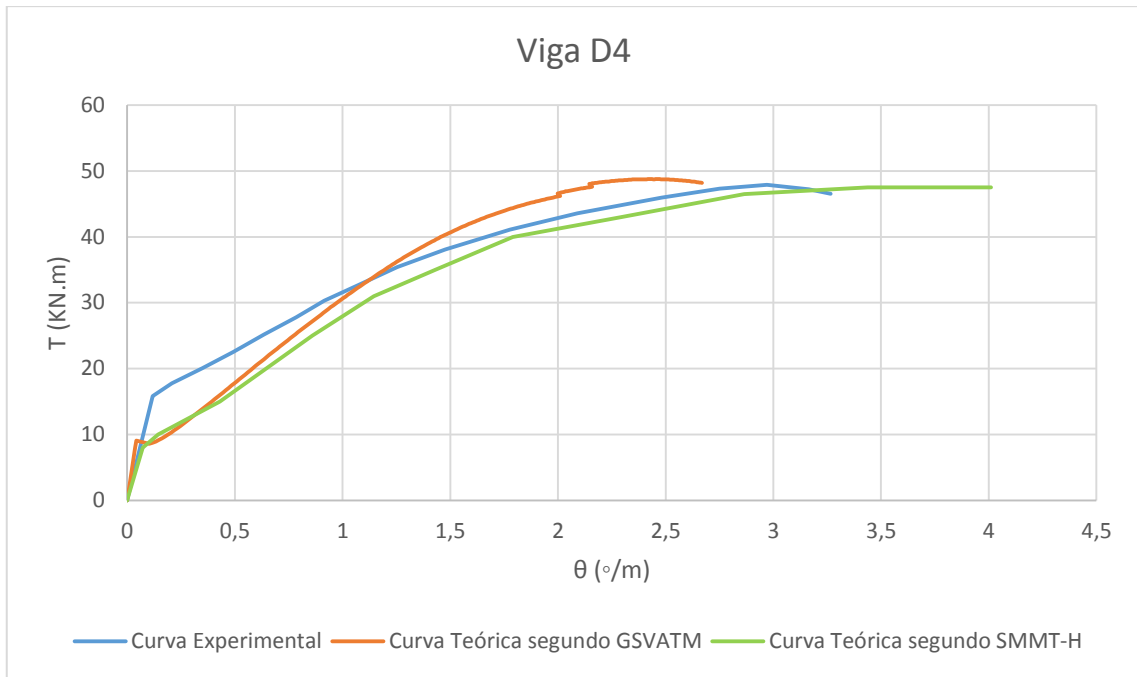


Figura 78- Comparação das curvas T- θ para a viga D4 de Hsu [25]

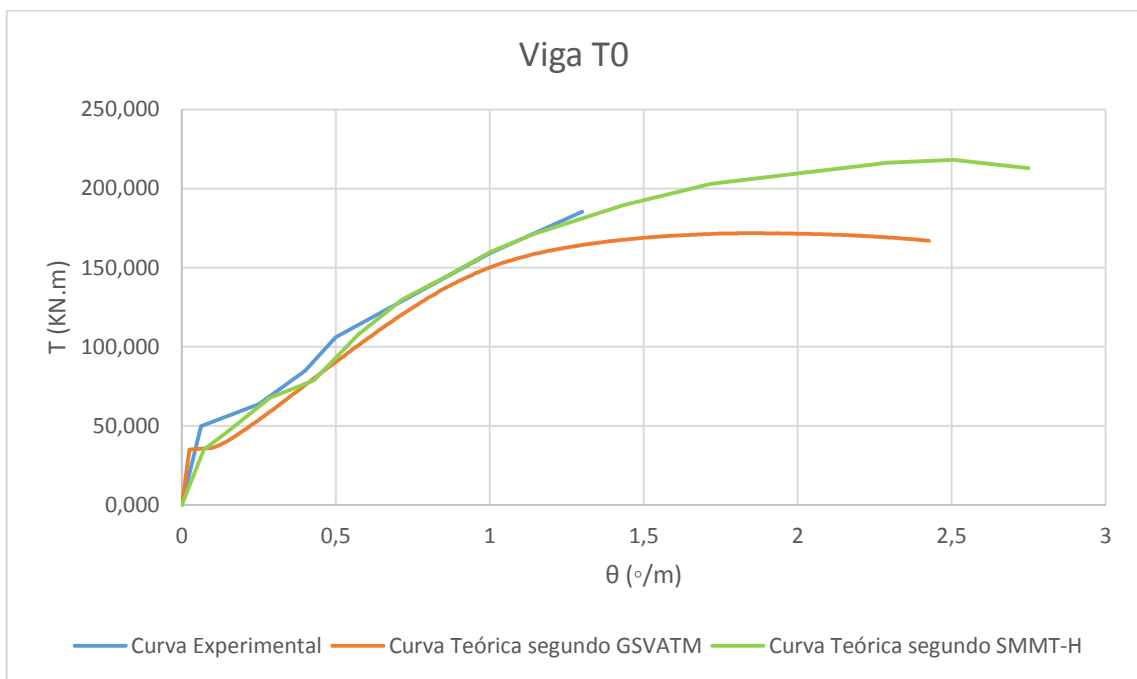


Figura 79- Comparação das curvas T- θ para a viga T0 de Lampert e Thurlimann [33]

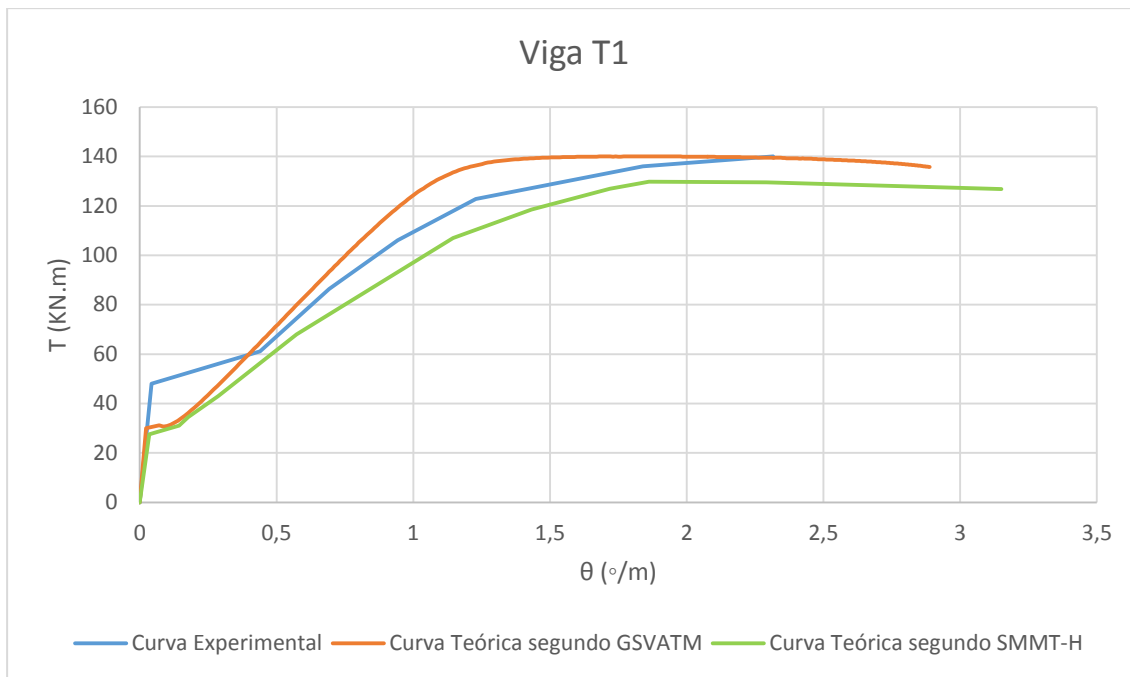


Figura 80- Comparação das curvas T- θ para a viga T1 de Lampert e Thurlimann [33]

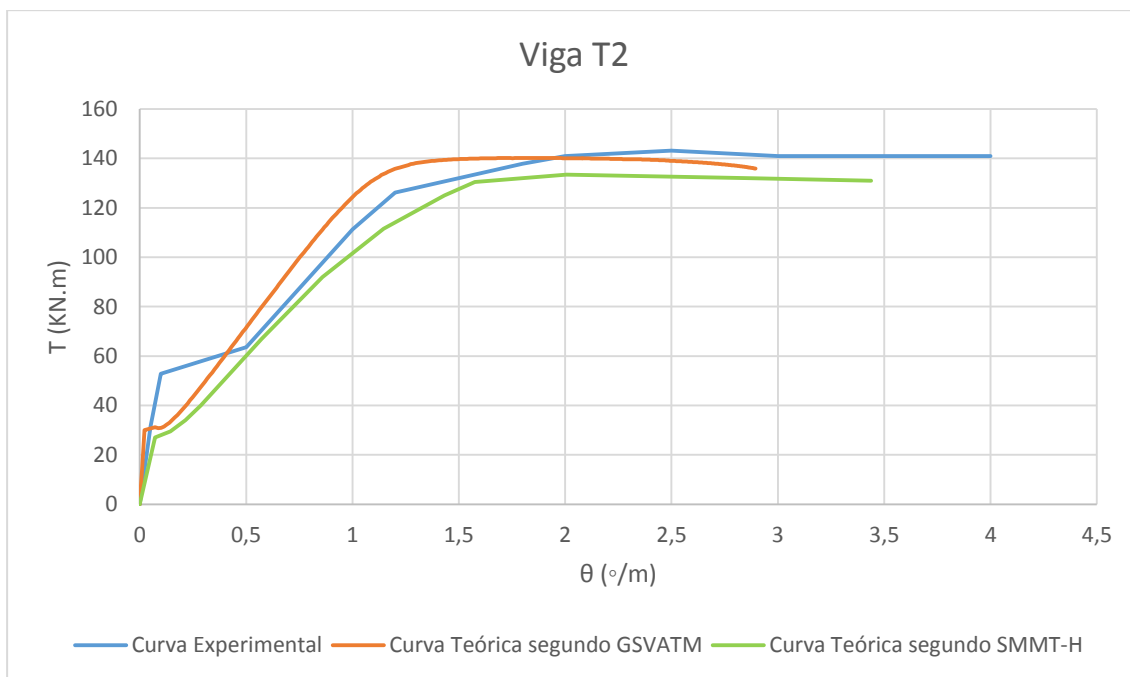


Figura 81- Comparação das curvas T- θ para a viga T2 de Lampert e Thurlimann [33]

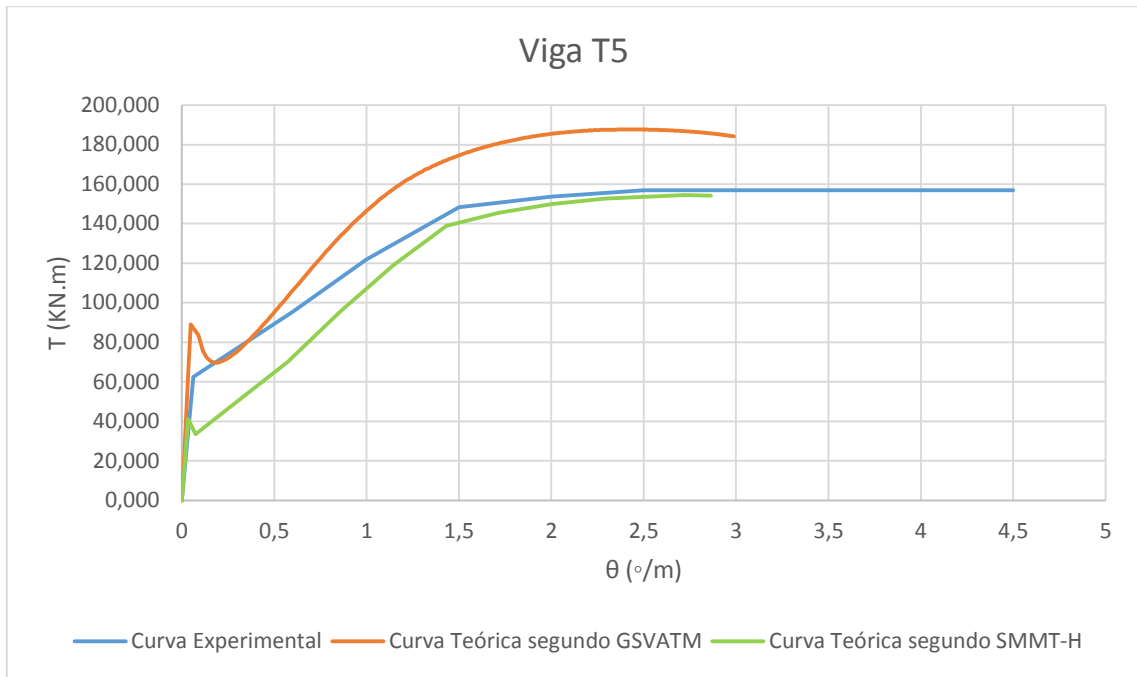


Figura 82- Comparação das curvas T- θ para a viga T5 de Lampert e Thurlimann [33]

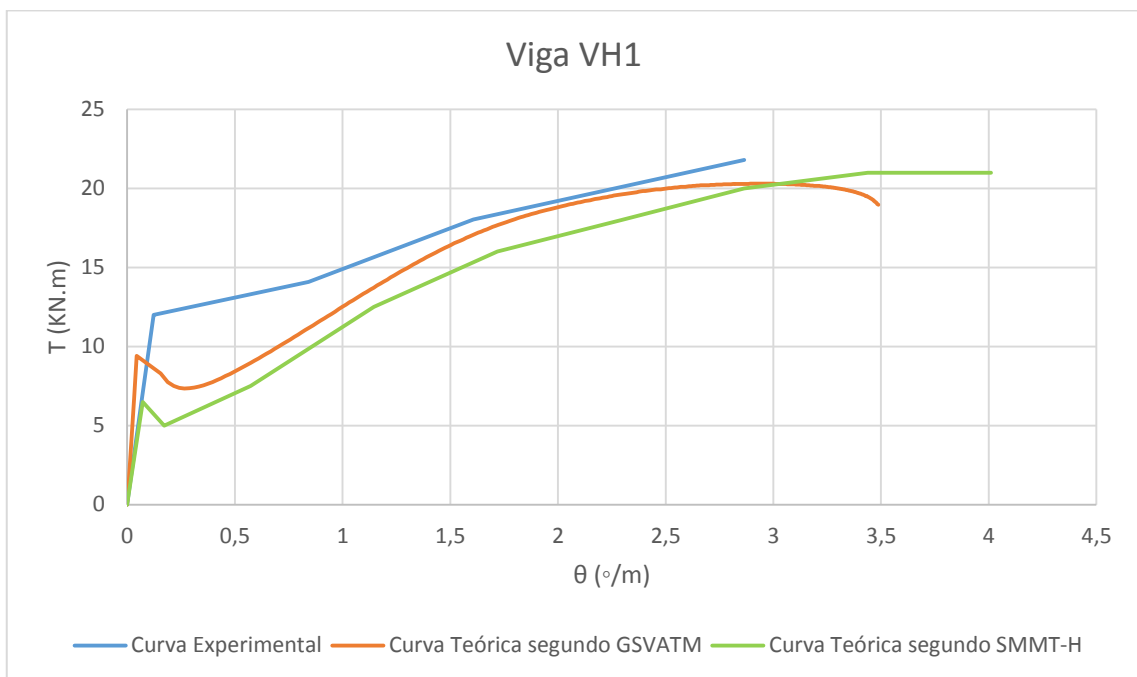


Figura 83- Comparação das curvas T- θ para a viga VH1 de Leonhardt e Schelling [50]

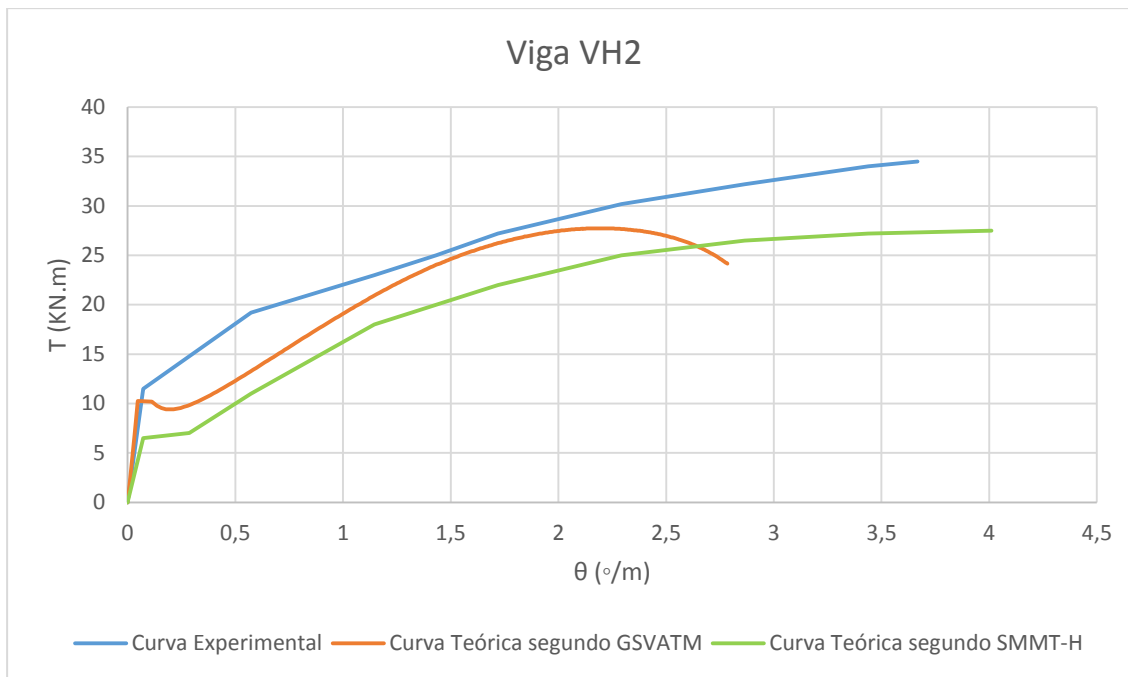


Figura 84- Comparação das curvas T-θ para a viga VH2 de Leonhardt e Schelling [50]

Os gráficos das Figuras 62 a 82 para as 23 vigas adicionais mostram que existe uma maior variabilidade entre as curvas $T-\theta$ experimentais e teóricas, comparativamente ao observado nos gráficos das Figura 51 a 59 para as vigas ensaiadas por Jeng [25]. A referida variabilidade é observada tanto para o SMMT-H como para o GSVATM modificado. Além disso, também se observa uma maior variabilidade entre as previsões do SMMT-H e do GSVATM modificado, comparativamente ao observado nas Figura 53 a 61 onde as curvas teóricas eram muito próximas.

De seguida particulariza-se a análise dos gráficos das Figuras 62 a 84 para o conjunto de vigas de cada autor.

É possível identificar em quase todas as vigas de Bernardo uma diminuição do valor do momento torsor logo após a ocorrência da primeira fissura, no entanto, como se pode observar, existe uma proximidade muito grande não só entre o traçado das curvas $T-\theta$ teóricas e experimentais, como também dos valores obtidos para os momentos torsores de fissuração (T_{cr}) e momentos torsores últimos (T_u). No entanto, para as vigas com maiores taxas de armaduras, os desvios são maiores, tanto para o GSVATM modificado como para o SMMT-H, tendendo os momentos torsores de fissuração teóricos a serem subestimados.

Relativamente às vigas estudadas por Hsu (D3 e D4), pode concluir-se que os valores dos momentos torsores de fissuração são um pouco subestimados pelo GSVATM modificado e também pelo SMMT-H. No entanto a concordância das curvas no geral é notável, assim como a proximidade dos valores dos momentos torsores últimos.

Com base na comparação entre os resultados obtidos teoricamente através do GSVATM e os obtidos experimentalmente por Lampert e Thurlimann [33], é possível identificar novamente uma discrepância dos valores relativos ao momento torsor de fissuração, uma vez que estes são inferiores aos obtidos experimentalmente (com exceção da viga T5 para o GSVATM modificado), mas é bastante notória a semelhança entre o traçado das respectivas curvas $T-\theta$ assim como a grande proximidade dos valores obtidos para os momentos torsos últimos (teóricos e experimentais), novamente com exceção da viga T5 para o GSVATM modificado.

As Figuras 83 e 84, referentes às vigas VH1 e VH2 de Leonhardt e Schelling [50] respectivamente, evidenciam claramente as melhores previsões do comportamento das vigas à torção fornecidas pelo GSVATM modificado. O momento torsor de fissuração é quase concordante nas curvas $T-\theta$, teórica e experimental, da viga VH2, havendo apenas uma ligeira diferença relativa ao momento torsor último.

Seguidamente, na Tabela 4 (a) apresenta-se um quadro resumo onde se identificam os pontos-chave de todas as vigas analisadas, quer referentes à curva $T-\theta$ experimental quer às curvas $T-\theta$ teóricas fornecida pelo GSVATM modificado e pelo SMMT-H.

Tabela 4 (a)- Comparação dos valores obtidos pelas curvas $T-\theta$ estudadas

Viga	T_{cr}	T_{cr}	T_{cr}	θ_{cr}	θ_{cr}	θ_{cr}	T_u	T_u	T_u	θ_u	θ_u	θ_u
	GSVATM (KN.m)	SMMT (KN.m)	exp. (KN.m)	GSVATM (°/m)	SMMT (°/m)	exp. (°/m)	GSVATM (KN.m)	SMMT (KN.m)	exp. (KN.m)	GSVATM (°/m)	SMMT (°/m)	exp. (°/m)
A1	87.75	-	104.08	0.067	-	0.071	135.06	-	150.78	5.650	-	2.115
A2	112.02	-	109.49	0.053	-	0.064	258.70	-	254.08	2.178	-	2.019
A3	128.42	58.50	113.27	0.038	0.048	0.057	324.37	312.50	299.91	2.087	2.578	2.101
A4	75.22	72.00	120.87	0.023	0.036	0.063	369.96	393.50	368.22	2.196	2.865	2.295
A5	74.73	75.00	120.93	0.023	0.035	0.044	402.28	416.00	412.24	1.939	2.578	2.154
B2	131.75	-	116.72	0.034	-	0.044	274.07	-	273.27	2.390	-	1.787
B3	134.13	126.00	130.45	0.034	0.036	0.045	426.63	418.00	355.84	2.195	2.292	1.784
B4	98.99	137.00	142.93	0.025	0.072	0.070	478.55	487.00	437.85	2.030	2.578	1.605
B5	97.77	130.00	146.26	0.025	0.072	0.064	522.07	520.00	456.19	1.837	2.578	1.526
C1	88.75	-	117.31	0.059	-	0.040	135.08	-	151.76	5.229	-	1.764
C2	126.53	-	124.46	0.033	-	0.049	259.94	-	266.14	3.143	-	1.884
C3	129.74	130.00	131.93	0.033	0.057	0.064	408.54	420.00	351.16	2.236	2.291	1.642
C4	102.12	130.00	132.60	0.025	0.070	0.051	495.79	498.00	450.30	2.128	2.750	1.693
C5	106.41	135.00	138.34	0.025	0.057	0.051	550.51	540.00	467.26	2.026	2.578	1.590
C6	103.41	137.00	139.09	0.026	0.070	0.054	597.04	570.00	521.33	1.765	2.578	1.456
D3	7.88	7.50	15.15	0.052	0.072	0.081	41.34	42.00	39.11	2.526	4.0110	2.795
D4	8.73	8.00	15.82	0.056	0.072	0.118	48.77	47.50	47.92	2.453	3.438	2.970
T0	38.10	35.00	49.82	0.030	0.071	0.062	171.83	218.20	185.50	1.841	2.510	1.300
T1	33.01	27.50	47.99	0.030	0.034	0.043	140.04	129.80	140.01	1.835	2.292	2.316
T2	33.02	27.00	52.79	0.028	0.072	0.098	140.18	133.50	143.10	1.743	2.010	2.500
T5	86.27	41.00	62.54	0.069	0.034	0.063	187.68	154.5	156.88	2.436	2.720	2.295
VH1	9.659	6.50	11.99	0.074	0.072	0.123	20.30	21.00	21.79	2.967	3.438	2.865
VH2	10.23	6.50	11.5	0.080	0.071	0.072	27.73	27.5	34.50	1.835	4.011	2.180

Tabela 4 (b) - Comparação dos valores obtidos pelas curvas T- θ estudadas

Viga	SMMT-H				GSVATM			
	$T_{cr,Exp}$	$\theta_{cr,Exp}$	$T_{u,Exp}$	$\theta_{u,Exp}$	$T_{cr,Exp}$	$\theta_{cr,Exp}$	$T_{u,Exp}$	$\theta_{u,Exp}$
	$T_{cr,SMMT-H}$	$\theta_{cr,SMMT-H}$	$T_{u,SMMT-H}$	$\theta_{u,SMMT-H}$	$T_{cr,GSVATM}$	$\theta_{cr,GSVATM}$	$T_{u,GSVATM}$	$\theta_{u,GSVATM}$
A1					1.1861	1.0597	1.1164	0.3743
A2					0.9774	1.2075	0.9821	0.9270
A3	1.9362	1.0598	0.9597	0.8150	0.8820	1.5000	0.9246	1.0067
A4	1.6788	1.7500	0.9358	0.8010	1.6069	2.7391	0.9953	1.0451
A5	1.6124	1.2571	0.9910	0.8355	1.6182	1.9130	1.0248	1.1109
B2					0.8859	1.2941	0.9971	0.7477
B3	1.0353	1.2500	0.8513	0.7784	0.9726	1.3235	0.8341	0.8128
B4	1.0433	0.9722	0.8991	0.6226	1.4439	2.8000	0.9150	0.7906
B5	1.1251	0.8889	0.8773	0.5919	1.4960	2.5600	0.8738	0.8307
C1					1.3218	0.6780	1.1235	0.3373
C2					0.9836	1.4848	1.0239	0.5994
C3	1.0148	1.1228	0.8361	0.7167	1.0169	1.9394	0.8595	0.7343
C4	1.0200	0.7286	0.9042	0.6156	1.2985	2.0400	0.9082	0.7956
C5	1.0247	0.8947	0.8653	0.6168	1.3001	2.0400	0.8488	0.7848
C6	1.0153	0.7714	0.9146	0.5648	1.3450	2.0769	0.8732	0.8249
D3	2.0200	1.1250	0.9312	0.6968	1.9226	1.5577	0.9461	1.1065
D4	1.9775	1.6389	1.0088	0.8639	1.8121	2.1071	0.9826	1.2108
T0	1.4234	0.8732	0.8501	0.5179	1.3076	2.0667	1.0796	0.7061
T1	1.7451	1.2647	1.0787	1.0105	1.4538	1.4333	0.9998	1.2621
T2	1.9552	1.3611	1.0719	1.2438	1.5987	3.5000	1.0208	1.4343
T5	1.5254	1.8529	1.0154	0.8438	0.7249	0.9130	0.8359	0.9421
VH1	1.8446	1.7083	1.0376	0.8333	1.2413	1.6622	1.0734	0.9656
VH2	1.7692	1.0141	1.2545	0.5435	1.1241	0.9000	1.2441	1.1880
Média	1.4870	1.1963	0.9601	0.7507	1.2835	1.7737	0.9775	0.8929
Desvio padrão (%)	0.40	0.35	0.11	0.18	0.30	0.69	0.11	0.27
Coef. de Variação (%)	26.74	28.93	11.04	24.33	23.71	38.69	10.77	29.70

Tendo por base os resultados apresentados na Tabela 4(b) para o momento torsor de fissuração, observa-se que o GSVATM modificado apresenta melhores resultados do ponto de vista médio e de dispersão, comparativamente ao SMMT-H. O momento torsor de fissuração é no entanto subdimensionado tanto para o GSVATM modificado como para o SMMT-H. No que se refere à rotação associada ao momento torsor de fissuração, o SMMT-H passa a apresentar melhores resultados, tanto do ponto de vista do valor médio como da dispersão. Os desvios observados para este parâmetro para o GSVATM modificado são particularmente notáveis. No que se refere ao ponto último, designadamente ao momento torsor último e respetiva rotação, os resultados obtidos tendo por base o GSVATM modificado e o SMMT são similares e bastante aceitáveis para o momento torsor último.

Verifica-se assim que, tanto o GSVATM modificado como o SMMT-H, apresentam maiores dificuldades em prever adequadamente a resposta das 23 vigas adicionais de secção vazada para baixos níveis de carregamento. Tal dificuldade aparenta ser maior para as vigas com maiores taxas de armaduras de torção, visto que para muitas das vigas com menores taxas de

armaduras as previsões dos modelos são bastante mais aceitáveis, conforme observado ao longo das 62 a 84.

4.3. Notas Finais

No presente Capítulo foram apresentados os resultados da análise comparativa efetuada entre as curvas $T-\theta$ obtidas experimentalmente por diversos autores e as obtidas pelo modelo teórico GSVATM modificado com o auxílio do programa TORQUE 2.0. Com a análise comparativa pretendeu-se observar a validade da modificação realizada ao GSVATM, sendo assim apresentadas e caracterizadas 32 vigas. Ao analisar o comportamento de cada viga individualmente e obtendo a respetiva curva $T-\theta$ foi possível estabelecer uma comparação com os dados provenientes do modelo GSVATM. Apesar de em alguns casos o valor do momento torsor de fissuração ficar um pouco abaixo do valor real e de existir uma pequena diferença em relação ao momento torsor último, é clara, no geral, a proximidade existente entre as duas curvas (teórica e experimental). Os resultados obtidos com o GSVATM modificado são no geral bastante similares aos obtidos por Jeng [25] com o SMMT-H.

O GSVATM modificado apresenta uma previsão bastante mais real do comportamento de uma viga de secção vazada à torção, comparativamente à sua anterior versão (não modificado), constituindo por isso um avanço significativo no estudo das vigas de secção vazada.

Ao incorporar as previsões de Jeng [25] segundo o SMMT-H, relativas ao comportamento de todas as vigas analisadas neste estudo, pode afirmar-se que o modelo apenas se encontra perfeitamente calibrado para as nove vigas ensaiadas pelo próprio autor, não sendo a sua proposta de alteração precisa em relação à maioria das vigas encontradas na literatura. A mesma conclusão pode ser estabelecida para o GSVATM modificado, visto ter incorporado as mesmas alterações do SMMT-H relativamente ao anterior modelo SMMT.

Capítulo 5 - Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros

5.1. Introdução

Resumem-se neste capítulo as conclusões principais do presente estudo e também se apresentam propostas de desenvolvimento futuras.

No que se refere ao procedimento de cálculo do GSVATM modificado proposto, bem como ao programa auxiliar de cálculo associado, o TORQUE 2.0, pode considerar-se que este constitui um modelo teórico bastante satisfatório que permite simular de forma bastante credível o problema estudado que é referente a vigas de betão armado com secção transversal vazada sujeitas à torção.

A alteração do modelo GSVATM analisada no estudo individual das 32 vigas apresentadas neste trabalho, mostrou-se adequada para os propósitos deste estudo uma vez que permitiu obter resultados bastante razoáveis para as previsões do GSVATM relativas ao comportamento de vigas de secção vazada sujeitas à torção.

Pode-se por isso afirmar que os objetivos propostos no início deste trabalho foram alcançados com sucesso.

5.2. Conclusões

Segue-se de forma resumida as principais conclusões obtidas ao longo do presente trabalho.

A proposta de extensão da formulação do GSVATM original por forma a incorporar também as vigas de secção vazada, de acordo com a metodologia adotada neste trabalho baseada nos estudos levados a cabo por Jeng em 2014 [25], mostrou-se adequada. As previsões obtidas a partir do modelo proposto, designado por GSVATM modificado, são bastante credíveis existindo uma boa concordância entre as curvas comportamentais analisadas.

Através do estudo comparativo das curvas $T-\theta$ teóricas obtidas segundo o SMMT-H e segundo o GSVATM modificado com as curvas $T-\theta$ experimentais das nove vigas de secção vazada ensaiadas por Jeng, é possível observar a notável proximidade encontrada. Relativamente à média obtida entre a relação do momento torsor de fissuração segundo o GSVATM modificado e o momento torsor de fissuração experimental, os valores obtidos para as referidas vigas são próximos, sendo a média de 0.9054 e com uma dispersão aceitável de 12.57%. Melhores resultados são ainda observados para o momento torsor resistente em que a média da discrepância entre as curvas $T-\theta$ (teóricas segundo o GSVATM modificado e experimentais) é de 1.0759 verificando-se uma dispersão de apenas 5.44%. Quanto à rotação correspondente ao momento torsor de fissuração, o GSVATM apresenta uma dispersão um pouco elevada de

21.06%. A dispersão é também elevada para a rotação correspondente ao momento torsor resistente (28.16%), no entanto e para este último, o GSVATM apresenta valores bastante mais aceitáveis que os apresentados com o SMMT-H cuja dispersão é bastante elevada (65.29%).

A partir da análise comparativa das curvas $T-\theta$ teóricas segundo o GSVATM modificado com as curvas obtidas através dos resultados experimentais disponíveis na literatura consultada das 23 vigas suplementares estudadas, foi possível observar uma boa proximidade entre elas. Os resultados obtidos em relação à discrepância entre as curvas $T-\theta$ (teóricas e experimentais) provam as boas previsões do GSVATM modificado.

Em termos de comparação do comportamento último das vigas, nomeadamente ao nível dos valores dos momentos torsos resistentes, as previsões teóricas do GSVATM modificado são ainda melhores do que as relativas aos momentos torsos de fissuração, considerando-se estes valores bastante aceitáveis.

Para estas últimas vigas, pode concluir-se ainda que, de uma maneira geral, o GSVATM modificado, assim como o SMMT-H, apresentam maiores desvios em relação à previsão da resposta comportamental para a situação de baixos níveis de carregamento, sendo esta diferença aparentemente mais visível no caso de vigas com taxas de armadura mais elevadas. Para estas vigas verifica-se que, quer o GSVAM modificado quer o SMMT-H, preveem um momento torsor de fissuração um pouco subdimensionado. Tais desvios, segundo Jeng, poderão resultar do facto dos ensaios realizados não terem permitido registar com suficiente precisão as pequenas deformações e o valor exato do momento torsor resistente. No entanto, pôde também observar-se que o GSVATM modificado apresenta resultados bastante mais satisfatórios do que o SMMT-H relativamente à previsão do valor do momento torsor de fissuração para todas as vigas em geral.

Conforme observado, existe uma clara diferença dos resultados obtidos para as nove vigas ensaiadas por Jeng e para as restantes 23 vigas existentes na literatura, mostrando estas últimas uma discrepância de valores maior. A justificação de tal diferença reside no facto de os ensaios realizados por Jeng, para além de serem muito recentes, pois datam de 2014, foram especialmente concebidos para registar com precisão o comportamento pré-fissuração das vigas.

5.3. Propostas de Trabalhos Futuros

Como extensão do trabalho desenvolvido considera-se de especial interesse o desenvolvimento dos seguintes estudos:

- Calibrar o procedimento de cálculo do GSVATM modificado para as vigas que apresentem maiores taxas de armaduras (vigas para as quais se observaram maiores desvios relativamente ao momento torsor de fissuração e respetiva rotação);
- Tendo por base novos resultados experimentais, calibrar no procedimento de cálculo do GSVATM modificado os parâmetros relativos às paredes classificadas como de “parede espessa” quando se tratam de vigas de alta resistência ($f'_c > 47.85$ MPa), uma vez que Jeng possuía uma quantidade insuficiente de vigas com estas características para quantificar os parâmetros ν , μ e λ (Jeng possuía apenas a viga C100a e mais duas vigas virtuais adicionais);
- Realizar mais ensaios experimentais com vigas de secção vazada de forma a existir uma maior amostragem de resultados com vista a calibrar de forma mais rigorosa o GSVATM modificado.

Referências Bibliográficas

- [1] Armstrong, S., "The Strength of Concrete Members in Combined Bending and Torsion", *Proceeding of a Symposium of the Strength of Concrete Structures*, Session B: Paper 2,, Londres: Cement and Concrete Association, 1956, pp. 101-122.
- [2] Cuerel, J., "New Waterloo Bridge at London," *International Association for Bridge and Structural Engineering, 3rd Congress*, Liège, 1948, pp.367-380
- [3] "International Database for Civil and Structural Engineering - Waterloo Bridge," [Online]. Available: <http://structurae.net/structures/waterloo-bridge-1945-1>. [Acedido em Maio 2014].
- [4] S. McKee, "Birddog," [Online]. Available: <http://www.birddog.co.uk/blog/2011/06/14/the-business-of-social-media>. [Acedido em Maio 2014].
- [5] Bernardo, L. F. A. "Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003.
- [6] "TravelPod," [Online]. Available: http://www.travelpod.com/ad/Royal_Festival_Hall-London. [Acedido em Maio 2014].
- [7] Hsu, T. T. C., "Torsion of reinforced Concrete", Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
- [8] ACI Commite 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete(ACI 318-71)", American Concrete Institute, Detroit, 1971.
- [9] CEB-FIP, "Model Code for Concrete Structers", CEB-FIP International Recommendations, 3rd edition, Paris, 1978, pp348.
- [10] <http://pormenoresconstrutivos.cype.pt/FIG009_A.html>[Acedido em Maio 2014].
- [11] Bastos, Paulo, "Torção em vigas de concreto armado", Fculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Estruturas de Concreto II - notas de aula, Maio 2005.
- [12] Andrade, J. M. A. "Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã 2010.
- [13] EN 1992-1-1, "Eurocódigo 2: Projeto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios", Comité Europeu de Normalização, Abril 2004.
- [14] Taborda, C. S. B., "Efeito do Confinamento Axial no Comportamento de Vigas de betão Estrutural sujeitas à Torção" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da beira Interior, Covilhã, 2012.
- [15] Bernardo, L. F. A.; Lopes S.M.R., "Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams", *Materials and Structures*, RILEM, Springer, Netherlands, Vol.

- 41, No. 6, Junho 2008, pp. 1143-1167.
- [16] Bernardo, L.F.A.; Lopes, S.M.R., "Theoretical Behaviour of HSC Sections under Torsion", *Engineering Structures*, volume 33, Issue 12, December 2011, pp. 3702-3714.
- [17] Hsu T. T.; Mo, Y. L. "Softening of concrete in torsional members-theory and tests". *J American Concrete Intitute Proc* 82(3): 290-303.
- [18] H. T. Belarbi A, "Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete," *Structers J American Concrete Institute*, vol. 91, pp. 465-474, 1994.
- [19] L. A. J. N. C. Bernardo, "Generalized softened variable angle truss-model for reinforced concrete beams under torsion," *Materials and Structures*, 2013.
- [20] Bernardo, L. F. A.; Andrade, J. M. A.; Oliveira, L. A. P., "Reinforced And Prestressed Concrete Hollow Beams Under Torsion". *Journal of Civil Engineering and Management*, 2012 (em publicação).
- [21] Jeng, C. H.; Hsu, T.T.C., "A softened membrane model for torsion in reinforced concrete members, 2009, *Eng Str* 31: 1944-1954.
- [22] Belarbi, A.; Hsu, T. T. C., "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete", *Strutural Jornal of American Concrete Institute*, Vol. 91(4), 1994, pp. 465-474.
- [23] Bernardo, L. F. A., Andrade, J.M.A., Nunes, N. C. G., "Generalized Softened Variable Angle Truss-Model for Reinforced Concrete Beams under Torsion", *Materials and Structures* (in Press), DOI: 10.1617/s11527-014-0301-z.
- [24] Bernardo, L. F. A. ; Andrade, J. M. A. ;Oliveira, L. A. P., 2013 "Reinforced And Prestressed Concrete Hollow Beams Under Torsion". *Journal of Civil Engineering and Management*, ISSN 1392-3730, Taylor and Francis, Vol. 19, Supplement 1, pp. S141-S152.
- [25] C.-H. Jeng, "Unified Softened Membrane Model for Torsion in Hollow and Solid Reinforced Concrete Members - Modeling the Entire Pre- and Post- cracking Behavior," *Journal of Structural Engineering*, 2014.
- [26] Ritter, W., "Die Bauweise Hennebique", *Schweizerische Bauzeitung, Zurich*, Fevereiro 1899.
- [27] Morsh, E., "Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie", *1st edition, Wayss and Freytag, A.G., Im selbstverlag der Firma, Neustdat a. d. Haardt*, May 1902, 188 pp.; "der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung", *2nd edition, Verlag von Konrad Wittmer, Stuttgart*, 1906, 252 pp.; *3rd edition (traduzido para Inglês por E.P. Goodrich, McGraw-Hill Book Co., New York, 1909, 368 pp.)*.
- [28] Rausch, E., "Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in torsion)", *Ph D. Thesis, Berlim*, 1929.

- [29] ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)", American Concrete Institute, Detroit, 1971.
- [30] ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-95)", American Concrete Institute, Detroit, 1995.
- [31] Andersen, P., "Experiments with Concrete in Torsion", *Transactions*, ASCE, Vol. 100, 1935, pp.949-983.
- [32] Cowan, H.J., "Elastic Theory for Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams", *Magazine of Concrete Research*, Julho 1950, Vol. 2, No. 4, pp.3-8.
- [33] Lampert, P., Thurlimann, B., "Torsionsversuche an Stanhlbetobalken (Torsion Tests of Reinforced Concrete Beams)", *Bericht*, No. 6506-2, *Institute fur Baustatik, ETH, Zurich*, 1969.
- [34] CEB-FIP, "Model Code for Concrete Structures", CEB-FIP International Recommendations, 3rd edition, Paris, 1978, 348 pp..
- [35] Collins, M.P., Mitchell, D., "Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams", *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, Proc., V.25, No. 5, Setembro-Outubro 1980, pp. 32-100.
- [36] ACI Commite 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05)", Detroit, MI : American Institute, 2005.
- [37] Hsu, T.T.C., Mo, Y.L. "Softening of Concrete in Torsional Members - Design Recommendations", *Journal of the American Concrete Institute*, Proc., Julho-Agosto 1985, Vol. 82, No.4, pp. 443-452.
- [38] Hognestad, E., "What Do We Know About Diagonal Tension and Web Reinforcement in Concrete?", Circular Series, 64, University of Illinois, Engineering Exp. Station, Ill.1952.
- [39] Bernardo, L. F. A.; Andrade, J.M.A.; Lopes, S.M.R., "Softened Truss Model for Reinforced NSC and HSC Beams under Torsion: a Comparative Study", *Engineering Structures*, 2012, volume 42, pp. 278-296.
- [40] Belarbi, A. and Hsu, T.C., "Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression" Research Report UHCEE 91-2, University of Houston, Texas, 1991.
- [41] Zhang, L.X. and Hsu, T.C., "Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Janeiro-Fevereiro 1998, Vol. 124, No. 1, pp.24-34.
- [42] Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members", *Torsion of Structural Concrete SP-18*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 261-306.

- [43] Jeng, C. H., Chiu, H. J., Peng, S. F., "Design Formulas for Cracking Torque and Twist in Hollow Reinforced Concrete Members", *ACI Struct. Journal*, 110(3), May-Jun., 2013a, 457-468.
- [44] Bredt, R., "Kritische Bemerkungen zur drehungselastizitat", *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 40(28):798-790, 1896 in German.
- [45] Jeng, C. H., "Simple Rational Formulas for Cracking Torque and Twist of Reinforced Concrete Members", *ACI Struct. Journal*, 107(2), Mar.-Apr., 2010, pp. 189-198.
- [46] Nobre, S. S., "Modelo Modificado de Treliça Espacial com ângulo Variável - Avaliação da Lei constitutiva do Betão à Tração para a Fissuração de Vigas de Betão Armado sujeitas à Torção" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2014
- [47] Jeng, C. H. " Softened Membrane Model for Torsion in Reinforced Concrete Members", *Advances in Engineering Research*. Volume 2, Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, NY, 2012, pp. 251-338.
- [48] Jeng, C.H., Peng, X., and Wong, Y.L., "Strain Gradient Effect in RC Elements Subjected to Torsion", *Magazine of Concrete Research*, 63(5), May, 2011, pp. 343-356.
- [49] Jeng, C.H., Peng, S. F., Chiu, H.J., and Hsiao, C. K., "New Torsion Experiment on Large-size Hollow Reinforced Concrete Beams", submitted to *ACI Struct. Journal*, 2013b.
- [50] Leonhardt, F., and Schelling, G., "Torsionsversuche an Stahlbetonbalken," *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin*, vol. Bulletin No. 239, p. 122, 1974.
- [51] L A. M. Andrade, L. F. A. Bernardo e S. M. R. Lopes, "'TORQUE_MTEAV: Computing Tool to Evaluate the Ultimate Behavior of Reinforced and Prestressed Concrete Beams in Torsion'," em *Structural Concrete Applications: proceedings of the International Conference on Recent Advances in Nonlinear Models* , Coimbra, Covilhã, 24-25 November 2011.

