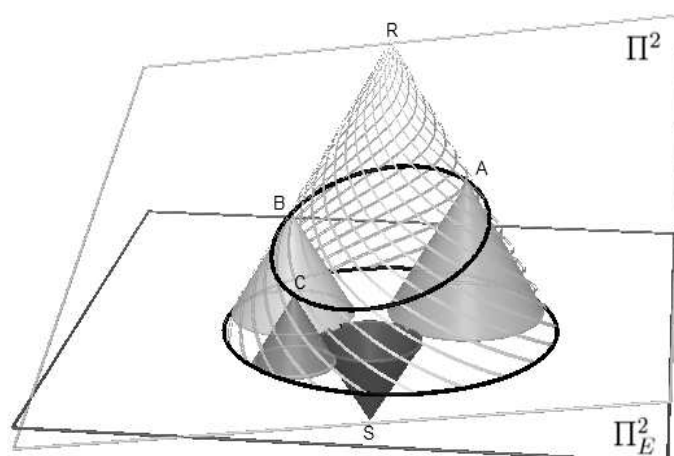


UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Departamento de Matemática

*Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no
Ensino Secundário*

Modelo de Minkowski para a Geometria de Laguerre



Ricardo Filipe Marques Portugal

Número m3226

Covilhã 2010

Conteúdo

Introdução	1
1 Geometria de Laguerre	3
1.1 As geometrias de Lie, Laguerre e Möbius	3
1.2 Tangência entre ciclos	4
1.3 Espaço de Minkowski	6
1.4 Modelo de Minkowski para a geometria de Laguerre	11
1.5 Separação	14
2 Teorema de Pitágoras-Laguerre	18

Introdução

Este trabalho iniciou-se com um estudo prévio de pontos notáveis associados a três circunferências ([6], ver anexo) a partir de um lema de incidência no plano projectivo ([6], Lema 1). Particularizando ao caso das três circunferências estarem ex-inscritas a um triângulo, este lema parece estabelecer uma caracterização geométrica unificadora de muitos centros de Kimberling.¹

Querendo explorar mais profundamente a riqueza geométrica destas configurações, acreditamos que, para tal, seria interessante estabelecer uma generalização do Teorema de Ceva. Ora, a geometria de Laguerre será talvez o contexto teórico adequado a esta generalização. De facto, nesta geometria, pontos e circunferências são tratados como objectos matemáticos equivalentes. Por outro lado, em trabalhos recentes [2, 5], tem sido colocada em evidência a possibilidade de utilizar esta geometria, no âmbito do seu modelo de Minkowski, para o estudo de problemas clássicos em geometria euclidiana.

Neste trabalho procurámos apresentar de forma completa e detalhada as ideias e resultados principais que estão presentes em [2]. Em particular, começamos por definir, de acordo com as princípios de Félix Klein e do seu Programa de Erlangen, as geometrias de Lie, Laguerre e Mobius. De seguida, descrevemos o modelo de Minkowski para a geometria de Laguerre. Este é um modelo que é fácil de manipular e que evidencia de forma clara que o espaço subjacente à geometria de Laguerre é um

¹Clark Kimberling elaborou uma lista [4] exaustiva de pontos notáveis associados a um triângulo, catalogando-os de acordo com as suas propriedades conhecidas. Por exemplo, o primeiro ponto é precisamente o incentro, denotado por $X(1)$. Os pontos aí presentes passaram a ser conhecidos por *centros de Kimberling*.

espaço homogéneo. Por fim, enunciamos e provamos um resultado que generaliza o clássico Teorema de Pitágoras. Em trabalho futuro, procuraremos aplicar algumas destas ideias na perspectiva de encontrar uma generalização adequada do Teorema de Ceva.

Capítulo 1

Geometria de Laguerre

1.1 As geometrias de Lie, Laguerre e Möbius

Em 1872, Felix Klein publica um texto onde desenvolve uma forma inovadora e clara de classificar e caracterizar diferentes geometrias [1]: uma geometria consiste num espaço de objectos e de um grupo de transformações que sobre ele actua; as propriedades relevantes dessa geometria são propriedades invariantes para a acção do grupo que lhe subjaz. Por exemplo, o conceito de paralelismo que é preservado na geometria afim, deixa de ser significativo na geometria projectiva, daí que as transformações que preservam o paralelismo sejam importantes para a classificação da geometria afim, mas não para a geometria projectiva. Estas ideias de Klein, ao estabelecerem as bases de um projecto de investigação abrangente, conhecido por *Programa de Erlangen*, que promovia uma visão unificadora da geometria, marcaram decisivamente os desenvolvimentos desta área da matemática ao longo das décadas seguintes. Nesta secção procuraremos definir a geometria de Lie e as sub-geometrias de Laguerre e Möbius de acordo com os princípios gerais do Programa de Erlangen.

Um ponto do plano euclidiano é chamado *ponto-finito*. Acrescentando um novo ponto no infinito, distinto de todos os outros no plano euclidiano, designado por *ponto-ideal*, obtemos o plano inversivo. Pontos no plano inversivo são chamados de *pontos-ciclo*. Uma circunferência orientada é um *ciclo-próprio*. O sinal do raio

de um ciclo-próprio define a sua orientação: caso o sinal do raio seja positivo a orientação é no sentido anti-horário; caso o sinal do raio seja negativo a orientação é no sentido horário. Um ciclo-ponto não tem orientação: o seu raio é zero. O termo *ciclo de Laguerre* refere-se a ciclos-próprios (circunferências orientadas) ou a pontos-finitos (pontos no plano Euclidiano); o termo *ciclo de Lie* refere-se a ciclos-próprios, a pontos-ciclo ou a rectas orientadas. Estamos agora em condições de definir as geometrias acima referidas:

- **Geometria de Lie.** Nesta geometria os objectos são os ciclos de Lie. As *transformações de Lie* transformam ciclos de Lie em ciclos de Lie e preservam as relações de incidência. Assim, em geral, os pontos-ciclo não são preservados por transformações Lie. Foi Sophus Lie que no século XIX desenvolveu esta geometria.
- **Geometria de Laguerre.** Os objectos desta geometria são precisamente os ciclos de Laguerre. As *transformações de Laguerre* são transformações de Lie que fixam o ponto-ideal. Em particular, estas transformações transformam rectas orientadas em rectas orientadas. A geometria de Laguerre é uma sub-geometria de Lie e foi formulada axiomáticamente por Van Warden e Smid em 1935.
- **Geometria de Möbius** - Na geometria de Möbius, desenvolvida por August Ferdinand Möbius (1790-1868), os objectos são todos os pontos-ciclo. As *transformações de Möbius* são transformações de Lie que transformam pontos-ciclo em pontos-ciclo.

1.2 Tangência entre ciclos

De seguida vamos expor as definições de *tangência* (ou *toque*) entre ciclos. Deve-se ter em atenção que, entre ciclos, a noção de tangência é um pouco mais forte que a usual: aqui é necessário ter em conta a existência de orientações.

Definição 1. a) Um ciclo-próprio (circunferência orientada) e uma recta orientada *tocam-se* se a circunferência e a recta subjacentes forem tangentes e, no ponto de contacto, as suas orientações coincidirem.

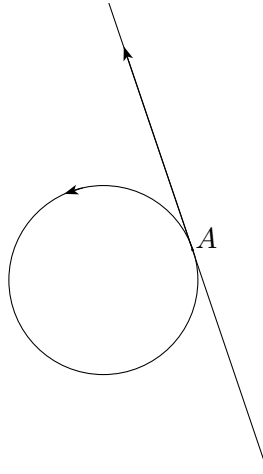


Figura 1.

Tangência entre circunferência e recta orientada

b) Um ponto-ciclo (ponto no plano inversivo) e uma recta orientada *tocam-se* quando o ponto pertence à recta.

c) Dois ciclos-próprios *tocam-se* se as circunferências subjacentes forem tangentes e, no ponto contacto, as suas orientações coincidirem (isto é, se partilharem exactamente uma recta orientada).

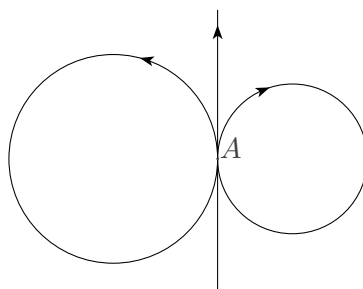


Figura 2.

As duas circunferências orientadas *tocam-se*.

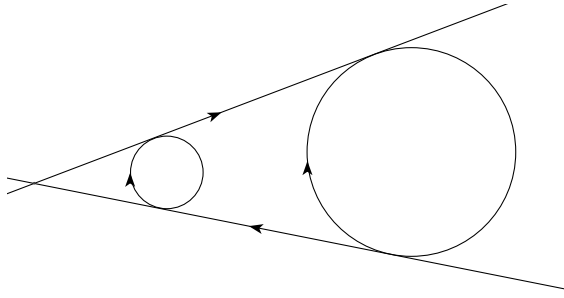


Figura 3.

As duas circunferências orientadas não se tocam, pois partilham duas rectas orientadas.

d) No plano inversivo todas as rectas se intersectam no ponto-ideal, situado no infinito. Por isso, duas rectas orientadas *tocam-se* se forem paralelas e se tiverem a mesma orientação.

1.3 Espaço de Minkowski

O *espaço de Minkowski* está presente no estudo das propriedades do espaço-tempo da Relatividade Geral de Einstein. O seu nome é uma referência ao matemático alemão Hermann Minkowski (1864-1909) que curiosamente foi professor de matemática de Einstein em Zurique.

Vamos fixar em \mathbb{R}^3 o produto interno

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2,$$

onde $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$ são dois vectores arbitrários de \mathbb{R}^3 . Este produto interno satisfaz as seguintes propriedades fundamentais:

- *Simetria*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

- *Bilinearidade*

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Definição 2. Se $\vec{x} \cdot \vec{x} < 0$, \vec{x} diz-se um vector *tipo-tempo*. Se $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$, \vec{x} diz-se um vector *tipo-espaço*. Se $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$, \vec{x} diz-se um vector *tipo-luz*.

O produto interno que fixámos tem *assinatura* $(+, +, -)$, no sentido em que existe uma base de \mathbb{R}^3 formada por dois vectores do tipo-espaço e um vector do tipo-tempo. O *espaço de Minkowski* M^3 é o espaço \mathbb{R}^3 munido de um produto interno de assinatura $(+, +, -)$.

Definição 3. O *cone luz* com *vértice* em $A \in M^3$ é o conjunto dos pontos $X \in M^3$ para os quais \overrightarrow{XA} é um vector do tipo-luz.

Observação 1. a) A equação do cone luz com vértice em $A = (a, b, c)$ é dada por:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA} = (x - a)^2 + (y - b)^2 - (z - c)^2 = 0.$$

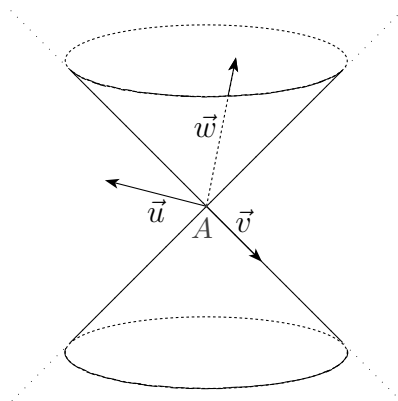


Figura 4.

Os vectores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são do tipo-espaço, luz e tempo, respectivamente.

b) Os vectores do tipo-tempo apontam para o interior do cone luz; os vectores do tipo-luz estão sobre o cone luz; os vectores do tipo-espaço apontam para o exterior do cone luz (ver Figura 4).

Definição 4. a) Um plano diz-se *euclidiano* se for ortogonal a um vector do tipo-tempo (ver Figura 5).

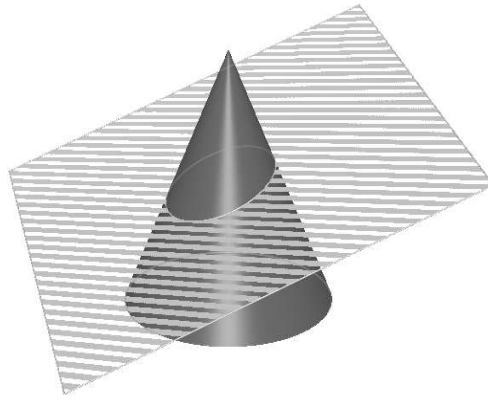


Figura 5.
Plano Euclidiano

- b) Um plano diz-se de *Lorentz* se for ortogonal a um vector do tipo-espaço (ver Figura 6).

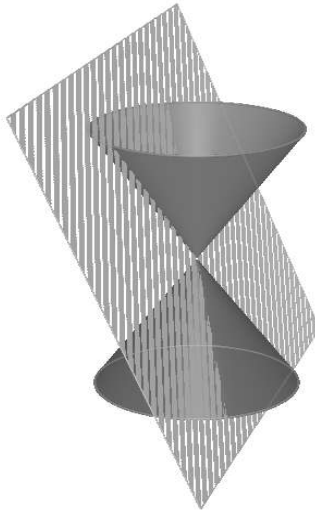


Figura 6.
Plano de Lorentz

- c) Um plano diz-se *singular* se for ortogonal a um vector do tipo-luz; estes planos são tangentes ao cone luz (ver Figura 7).

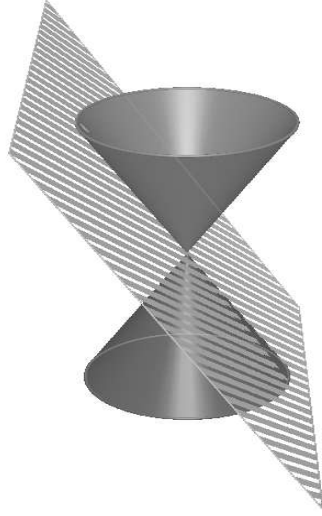


Figura 7.
Plano Singular

- Observação 2.** a) Um plano euclidiano admite uma base formada por dois vetores do tipo espaço: tem assinatura $(+, +)$.
- b) Um plano de lorentz admite uma base formada por um vector do tipo-espaço e outro do tipo-tempo: tem assinatura $(+, -)$.
- c) Um plano singular admite uma base formada por um vector do tipo-espaço e outro do tipo-luz: tem assinatura $(+, 0)$.

Lema 1. *Consideremos uma recta do tipo-tempo ou do tipo-espaço. Suponha-se que esta recta intersecta o cone luz com vértice em A nos pontos P e Q , não necessariamente distintos (ver Figura 8). Seja Z um ponto qualquer da recta. Então*

$$\overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZQ} = \overrightarrow{ZA} \cdot \overrightarrow{ZA}.$$

Demonstração. Sejam $\vec{s} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ e M o ponto médio do segmento PQ . Uma vez que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} - \vec{s}$ e $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \vec{s}$ são vectores do tipo-luz, vamos ter

$$(\overrightarrow{AM} - \vec{s}) \cdot (\overrightarrow{AM} - \vec{s}) = 0 \quad (1.1)$$

$$(\overrightarrow{AM} + \vec{s}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \vec{s}) = 0. \quad (1.2)$$

Pela bilinearidade e simetria do produto interno, (1.1) e (1.2) são equivalentes, respectivamente, a

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AM} \cdot \vec{s} + \vec{s} \cdot \vec{s} = 0 \quad (1.3)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \vec{s} + \vec{s} \cdot \vec{s} = 0 \quad (1.4)$$

Somando (1.3) a (1.4) resulta que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + \vec{s} \cdot \vec{s} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZQ} &= (\overrightarrow{ZM} - \vec{s}) \cdot (\overrightarrow{ZM} + \vec{s}) = \overrightarrow{ZM} \cdot \overrightarrow{ZM} - \vec{s} \cdot \vec{s} \\ &= \overrightarrow{ZM} \cdot \overrightarrow{ZM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Por outro lado, subtraindo (1.3) a (1.4) obtemos $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{s} = 0$, ou seja, as rectas AM e ZM são perpendiculares. Assim,

$$\overrightarrow{ZA} \cdot \overrightarrow{ZA} = (\overrightarrow{ZM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{ZM} + \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{ZM} \cdot \overrightarrow{ZM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}. \quad (1.6)$$

Finalmente, de (1.5) e (1.6) concluímos que $\overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZQ} = \overrightarrow{ZA} \cdot \overrightarrow{ZA}$. \square

Para provar o próximo teorema vamos necessitar da definição de *homotetia*, recordemos que:

Definição 5. Uma *homotetia* com centro no ponto Z e razão $\lambda \neq 0$ é a transformação em M^3 que envia o ponto A para o ponto A' de modo que $\overrightarrow{ZA'} = \lambda \overrightarrow{ZA}$.

Estas transformações enviam rectas, planos e cones luz para rectas, planos e cones luz, respectivamente, preservando o tipo. Se Z , A , e A' são pontos sobre uma recta em M^3 , então existe uma única homotetia de centro em Z que envia A para A' .

Teorema 2. *Consideremos uma recta do tipo-espaço ou tipo-tempo que passa pelos pontos Z , A e A' em M^3 . Qualquer outra recta do tipo-espaço ou tipo-tempo que passe por Z intersecta o cone luz com vértice em A nos pontos P e Q (não necessariamente distintos). Essa recta intersecta o cone luz com vértice em A' e os pontos P e Q são transformados por uma homotetia nos pontos P' e Q' , respectivamente. Então:*

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'}.$$

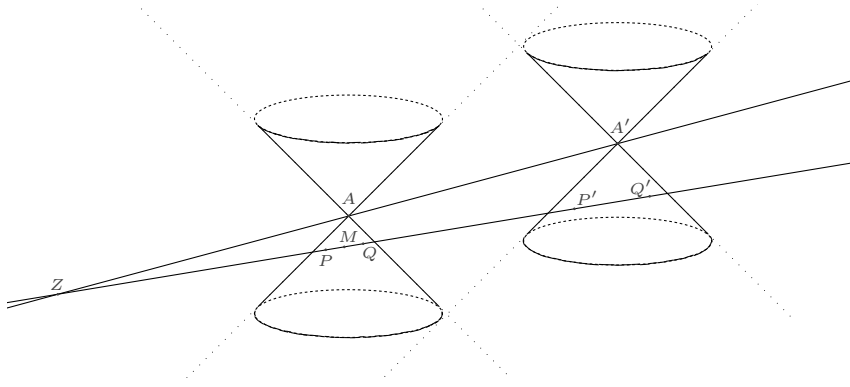


Figura 8.

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'}$$

Demonstração. Consideremos a homotetia de razão λ e centro em Z que envia A para A' . Para qualquer ponto X temos que $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZX'}$, sendo X' a sua imagem. Assim, pela definição de homotetia: $\overrightarrow{XX'} = (\lambda - 1)\overrightarrow{ZX}$. Então:

$$\overrightarrow{PP'} = (\lambda - 1)\overrightarrow{ZP}, \quad \overrightarrow{QQ'} = (\lambda - 1)\overrightarrow{ZQ}$$

Sendo assim,

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{QQ'} = (\lambda - 1)^2 \overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZQ}. \quad (1.7)$$

Pelo Lema 1, sabemos que: $\overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZQ} = \overrightarrow{ZA} \cdot \overrightarrow{ZA}$, logo

$$(\lambda - 1)^2 \overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZQ} = (\lambda - 1)^2 \overrightarrow{ZA} \cdot \overrightarrow{ZA} = ((\lambda - 1)\overrightarrow{ZA}) \cdot ((\lambda - 1)\overrightarrow{ZA}) = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'}. \quad (1.8)$$

Finalmente, de (1.7) e (1.8) concluímos que $\overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZQ} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'}$. \square

1.4 Modelo de Minkowski para a geometria de Laguerre

A utilização do modelo de Minkowski no estudo da geometria de Laguerre apresenta duas grandes vantagens: por um lado, torna possível efectuar cálculos analíticos, uma vez que se fixa um produto interno; por outro lado, torna evidente que o espaço dos ciclos de Laguerre na geometria de Laguerre é um espaço homogéneo, isto é, se considerarmos dois objectos distintos no espaço, temos a garantia de que

todas as propriedades que se verificam na vizinhança de um dos objectos também se verificam na vizinhança do outro.

No modelo de Minkowski para a geometria de Laguerre os ciclos são representados por pontos e as rectas orientadas por planos singulares. Fixando um plano euclidiano, um ponto $A \in M^3$ representa um ciclo de Laguerre no mesmo plano, como mostra o seguinte teorema.

Teorema 3. *A intersecção do cone luz com vértice no ponto A com um plano euclidiano Π_E^2 é uma circunferência orientada de centro A_0 , o pé da perpendicular por A a Π_E^2 . O raio da circunferência é dado por*

$$-\vec{u} \cdot \overrightarrow{A_0A},$$

onde \vec{u} é o vector unitário ortogonal ao plano euclidiano tal que $\vec{u} \cdot \vec{e}_z < 0$, com $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$.

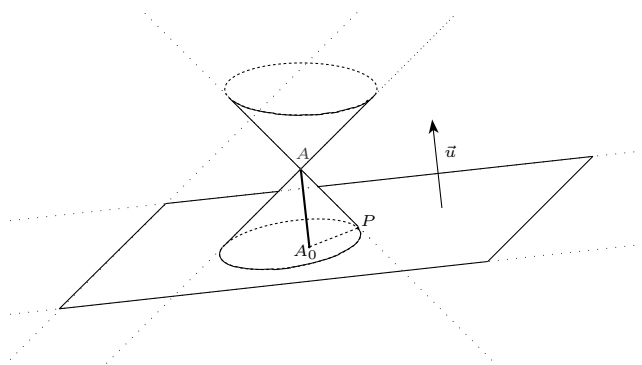


Figura 9.

Circunferência orientada de centro A_0 .

Demonstração. O que se pretende provar é que, pondo $r = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{A_0A}$, vamos ter $r^2 = \overrightarrow{A_0P} \cdot \overrightarrow{A_0P}$ para qualquer ponto P na intersecção do cone luz com o plano euclidiano fixado.

Fixemos uma base ortonormada de M^3 com assinatura $(+, +, -)$ formada por \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{u} . Então:

$$\overrightarrow{AP} = -(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u})\vec{u} + \overrightarrow{AP}^\perp, \quad (1.9)$$

onde $\overrightarrow{AP}^\perp = (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2$ é a projecção ortogonal de \overrightarrow{AP} sobre o plano Π_E^2 . Como \vec{u} e $\overrightarrow{A_0P}$ são perpendiculares, vamos ter:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0P}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AA_0} \cdot \vec{u} = -\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u}. \quad (1.10)$$

Por outro lado, como $\overrightarrow{A_0A}$ e \vec{u} são paralelos,

$$\overrightarrow{A_0A} \cdot \overrightarrow{A_0A} = (-\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u})\vec{u} \cdot (-\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u})\vec{u} = -(\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u})^2. \quad (1.11)$$

Tendo ainda em conta que \overrightarrow{AP} é um vector do tipo-luz, de onde $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, e que $\overrightarrow{A_0A} \cdot \overrightarrow{AP}^\perp = 0$, resulta de (1.9), (1.10) e (1.11) que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0P} \cdot \overrightarrow{A_0P} &= (\overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{AP}) \cdot (\overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{AP}) \\ &= \overrightarrow{A_0A} \cdot \overrightarrow{A_0A} + 2(\overrightarrow{A_0A} \cdot \overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{A_0A} \cdot \overrightarrow{A_0A} + 2\overrightarrow{A_0A} \cdot (-\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u})\vec{u} + \overrightarrow{AP}^\perp \cdot \overrightarrow{AP}^\perp \\ &= \overrightarrow{A_0A} \cdot \overrightarrow{A_0A} - 2(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u}) = \overrightarrow{A_0A} \cdot \overrightarrow{A_0A} + 2(\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u})^2 \\ &= -(\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u})^2 + 2(\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u})^2 = (\overrightarrow{A_0A} \cdot \vec{u})^2, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Observação 3. a) Quando aqui nos referimos a *circunferência de raio r* no plano euclidiano Π_E^2 , estamos a considerar a distância induzida pela restrição do produto interno em M^3 a Π_E^2 , que não coincide, em geral, com a distância induzida pela restrição do produto interno usual em \mathbb{R}^3 . Em relação a esta última, a intersecção do plano com o cone resulta obviamente numa elipse.

b) Para definir a orientação dos ciclos há que ter em consideração se o ponto A se encontra, relativamente ao sentido positivo definido por $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$, acima ou abaixo do plano euclidiano. Quando o ponto está acima do plano, então a orientação do ciclo é no sentido anti-horário; se o ponto está abaixo do plano, então a orientação é no sentido horário.

Sejam A e A' dois pontos de M^3 , um situado acima do plano euclidiano Π_E^2 e outro abaixo, e consideremos os respectivos cones luz. Suponha-se que ℓ é uma

recta comum aos dois cones luz. Neste caso, os pontos A e A' vão gerar dois ciclos tangentes, com orientações opostas, de acordo com o que vimos na Observação 3. Por outro lado, a intersecção do plano singular Π_S^2 que contém a recta ℓ e é tangente aos dois cones luz com o plano euclidiano origina a única recta orientada que toca ambos os ciclos. A orientação da recta é definida de acordo com a Figura 2 da Definição 1. A orientação desta recta não depende obviamente do par de cones luz escolhido tangente ao plano singular Π_S^2 . Vemos assim como um plano singular no espaço de Minkowski representa uma recta orientada no plano euclidiano.

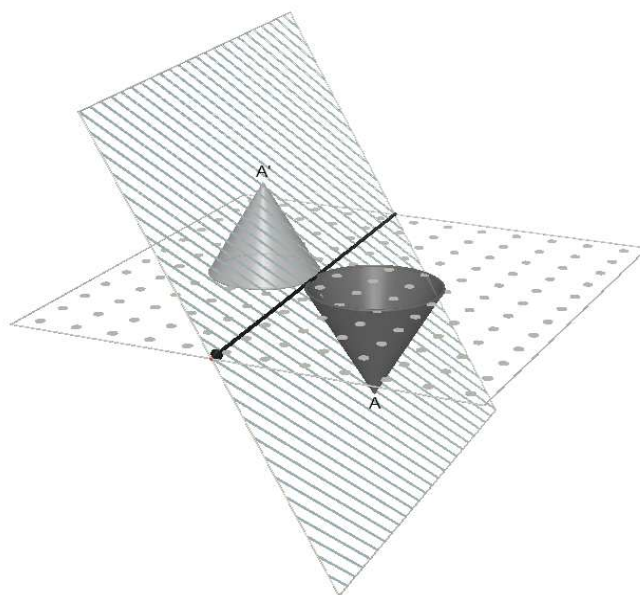


Figura 10.

Ciclos Tangentes

1.5 Separação

Consideremos duas circunferências \mathcal{A} e \mathcal{A}' , com centros em C_1 e C_2 , respectivamente, no plano euclidiano. Seja Z um *centro de similitude* [3] de \mathcal{A} e \mathcal{A}' ; tracemos por Z uma recta ℓ que intersecta \mathcal{A} em P e Q , como mostra a figura seguinte, e \mathcal{A}' em P' e Q' .

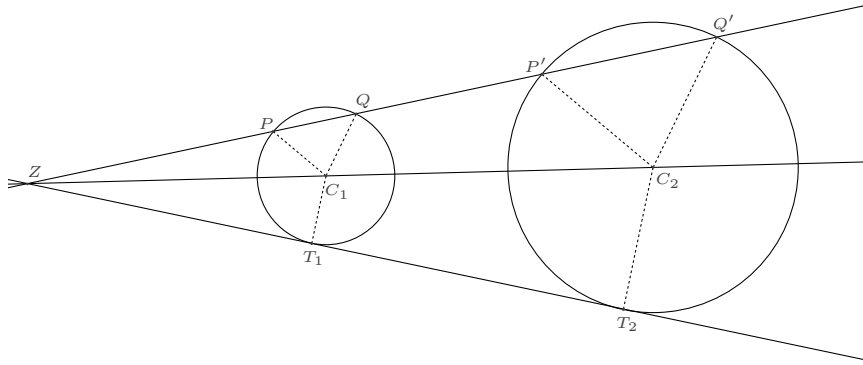


Figura 11.

Separação e distância tangencial

A homotetia que transforma \mathcal{A} em \mathcal{A}' transforma também a recta PC_1 na recta $P'C_2$. Assim, as rectas PC_1 e $P'C_2$ são paralelas, uma vez que qualquer homotetia transforma rectas em rectas paralelas. Do mesmo modo, as rectas QC_1 e $Q'C_2$ são também paralelas. Recordemos [3] ainda que o produto $ZP \cdot ZQ$ não depende da secante escolhida (para cada par de pontos X e Y , XY denota a distância orientada de X a Y). Este produto é precisamente a potência de Z relativamente a \mathcal{A} :

$$\mathcal{P}(Z; \mathcal{A}) = ZP \cdot ZQ.$$

Dois ciclos próprios tem exactamente um centro de similitude. Caso os raios sejam iguais, o ponto de similitude é o ponto-ideal (ponto no infinito).

Teorema 4. *Relativamente à Figura 11, o produto $PP' \cdot QQ'$ não depende da recta ℓ escolhida. Essa quantidade é chamada de separação entre \mathcal{A} e \mathcal{A}' .*

Demonstração. Observemos a Figura 11 e reparemos que, pelo Teorema de Tales, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{PP'}{ZP'} = \frac{C_1C_2}{ZC_2} \quad \text{e} \quad \frac{QQ'}{ZQ'} = \frac{C_1C_2}{ZC_2}.$$

Daqui,

$$PP' = \left(\frac{C_1C_2}{ZC_2} \right) ZP' \quad \text{e} \quad QQ' = \left(\frac{C_1C_2}{ZC_2} \right) ZQ'.$$

Logo,

$$PP' \cdot QQ' = \left(\frac{C_1 C_2}{ZC_2} \right)^2 ZP' \cdot ZQ' = \left(\frac{C_1 C_2}{ZC_2} \right)^2 \mathcal{P}(Z, C_2)$$

□

Consideremos uma tangente comum aos ciclos \mathcal{A} e \mathcal{A}' . Sejam T_1 e T_2 os respectivos pontos de tangência (ver Figura 11). Então $|T_1 T_2|$ é designada por *distância tangencial* entre os dois ciclos. Repare-se que a separação s é precisamente o quadrado da distância tangencial t . De facto, aplicando o Teorema de Tales, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{PP'}{ZP'} = \frac{T_1 T_2}{ZT_2} \quad (1.12)$$

$$\frac{QQ'}{ZQ'} = \frac{T_1 T_2}{ZT_2}. \quad (1.13)$$

Multiplicando (1.12) a (1.13) temos que:

$$\frac{PP' \cdot QQ'}{ZP' \cdot ZQ'} = \frac{(T_1 T_2)^2}{(ZT_2)^2}$$

Assim,

$$s = PP' \cdot QQ' = (T_1 T_2)^2 \frac{ZP' \cdot ZQ'}{(ZT_2)^2} = (T_1 T_2)^2 \frac{\mathcal{P}(Z, \mathcal{A}')}{\mathcal{P}(Z, \mathcal{A})} = (T_1 T_2)^2 = t^2$$

Observação 4. Sejam A e A' os vértices dos cones-luz que representam \mathcal{A} e \mathcal{A}' , respectivamente. Como $s = t^2$ e $t^2 = \overrightarrow{T_1 T_2} \cdot \overrightarrow{T_1 T_2}$, pelo Teorema 2 vamos ter:

$$s = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'}.$$

Teorema 5. A separação s entre dois ciclos é dada por: $s = (C_2 C_1)^2 - (r_2 - r_1)^2$.

Demonstração. Pelo critério de semelhança AA, os triângulos $\triangle ZT_1 C_1$ e $\triangle ZT_2 C_2$ são semelhantes e portanto

$$\frac{ZT_2}{ZT_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{ZC_2}{ZC_1}.$$

Assim,

$$(T_1 T_2)^2 = (ZT_2 - ZT_1)^2 = (ZT_1)^2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right)^2$$

$$(C_1 C_2)^2 = (ZC_2 - ZC_1)^2 = (ZC_1)^2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right)^2$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle ZT_1C_1$, obtemos

$$(ZT_1)^2 = (ZC_1)^2 - r_1^2.$$

Logo:

$$\begin{aligned}(T_1T_2)^2 &= (ZT_1)^2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)^2 = (ZC_1)^2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)^2 - r_1^2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)^2 \\ &= (C_2C_1)^2 - (r_2 - r_1)^2,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar, tendo em atenção que $s = t^2$.

□

Capítulo 2

Teorema de Pitágoras-Laguerre

Neste capítulo vamos apresentar uma generalização do clássico Teorema de Pitágoras a uma configuração de três circunferências orientadas. Com este exemplo, pretendemos ilustrar a possibilidade de usar a geometria de Laguerre em problemas clássicos de geometria euclidiana.

Convém recordar que, quando usamos o termo *ponto*, nos referimos a um determinado ponto P do espaço de Minkowski. Fixado um plano euclidiano, esse mesmo ponto representa, no quadro da geometria de Laguerre, um ciclo, que também denotamos por P . Apenas o contexto nos permite distinguir os dois casos.

Teorema 6 (Pitágoras-Laguerre). *Sejam A, R, B, S ciclos de modo que R e S tenham orientações opostas e cada um toque o seguinte, com os quatro pontos de tangência colineares. Se C for um ciclo que toque R e S , então o quadrado da distância tangencial entre A e B é a soma dos quadrados das distâncias tangenciais entre B e C e entre C e A (ver Figura 12).*

Demonstração. A figura geométrica associada a este teorema é, no âmbito da Geometria de Laguerre, equivalente a um triângulo rectângulo, como de seguida passamos a explicar em detalhe.

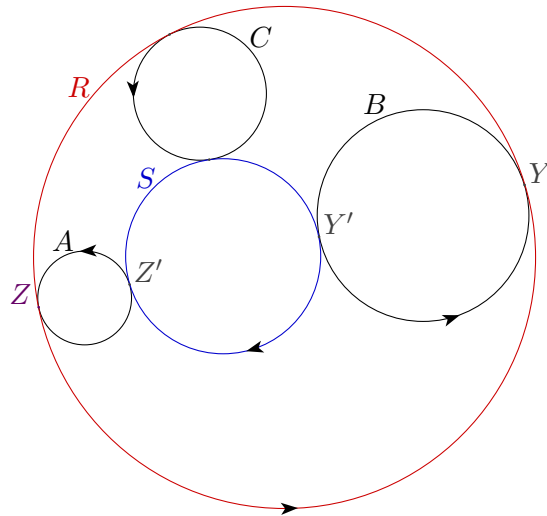


Figura 12.

Transformação de Laguerre para o Teorema de Pitágoras no plano Π_E^2

Consideremos um plano euclidiano Π_E^2 em M^3 onde fixamos o produto interno obtido por restrição do produto interno de Minkowski. Sejam Z, Z', Y e Y' os pontos de contacto entre os ciclos A e R, A e S, B e R, B e S , respectivamente. Ora, de acordo com o modelo de Minkowski, cada ciclo é gerado pela intersecção de um cone luz com o plano euclidiano Π_E^2 . Aos ciclos em questão correspondem então cones-luz com vértices em A, B, C, R e S , respectivamente.

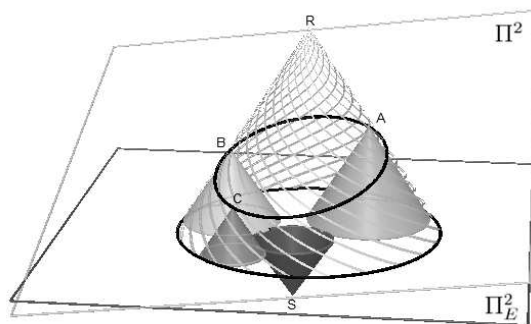


Figura 13.

Teorema de Pitágoras-Laguerre

Os pontos A, B, C, Z e Y pertencem ao cone luz R . Os pontos Z' e Y' pertencem ao cone luz S . Consideremos o plano definido pelos pontos R, A e B . Este plano contém ainda a recta ZY . Por outro lado, o plano definido pelos pontos S, A e B contém a recta $Z'Y'$, que, por hipótese, coincide com ZY . Logo os dois planos também coincidem, ou seja, os pontos A, B, R e S são coplanares.

Designemos por Π^2 o plano euclidiano que contém os pontos A, B e C . A intersecção do cone-luz com vértice em R com o plano Π^2 é uma circunferência \mathcal{C} , de acordo com o Teorema 3. Esta circunferência contém obviamente os pontos A, B e C . O próximo passo é provar que o centro dessa circunferência pertence ao segmento AB . Deste modo, o triângulo $\triangle ABC$ é rectângulo em C , pois $\angle ACB$ é um ângulo inscrito numa semi-circunferência.

Como vimos, os pontos A, B, R e S são coplanares. As rectas AR e BR são do tipo-luz, uma vez que estão contidas no cone luz com vértice em R . Do mesmo modo, as rectas AS e BS , contidas no cone-luz com vértice em S , são também do tipo luz. Sendo assim, as rectas AR e BS são paralelas, tal como as rectas AS e BR . Logo, $RASB$ é um paralelogramo:

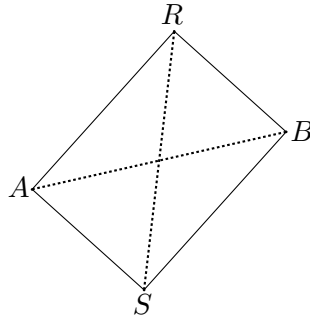


Figura 14.

$RASB$ é um paralelogramo

O centro da circunferência \mathcal{C} que passa por A, B e C é o ponto de intersecção do segmento AB e RS . De facto, como $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{RA}$, vamos ter

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RS} &= (\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB}) \cdot (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS}) \\ &= \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{RB} \cdot \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AR} = 0. \end{aligned}$$

Logo, o ponto de intersecção do segmento AB e RS é o pé da perpendicular por R ao plano Π^2 . Logo, pelo Teorema 3, este ponto é o centro da circunferência \mathcal{C} . Assim, o triângulo $\triangle ABC$ é rectângulo em C , de onde resulta, pelo Teorema de Pitágoras, que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

O teorema é agora consequência imediata da Observação 4.

□

Bibliografia

- [1] H.S.M. Coxeter, *The Erlangen program*, Math. Intelligencer, 0:22, 1977.
- [2] Jay P. Fillmore and Arthur Springer, *New Euclidean Theorems by the use of Laguerre Transformations - some geometry of Minkowski (2+1) - space*, Journal of Geometry, Vol. 52, 1995.
- [3] Paulo Araújo Ventura, *Curso de Geometria*, 2ª edição, 1999.
- [4] C. Kimberling, *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers-ETC*.
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
- [5] Robert D.Knight *The Apollonius contact problem and Lie contact geometry*, Journal of Geometry, Vol. 83, 2005.
- [6] R. Pacheco, F. Pinheiro and R. Portugal, *A note on the geometry of three circles*, 2009 (Submetido para publicação).