UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

GeoGebra, algumas aplicações ao Ensino da Matemática

Carla Susana da Cruz Fernandes

Relatório de Estágio Pedagógico para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
(2º ciclo de estudos)

Orientadora: Professora Doutora Ilda Inácio Rodrigues

Covilhã, outubro de 2012

Dedicatória

Dedico este relatório de estágio pedagógico a todos aqueles que me acompanharam, ajudaram, aconselharam e contribuíram para a sua realização.

Agradecimentos

Desde o tempo que iniciei o relatório de estágio pedagógico passaram-se quase três anos. Foram tempos difíceis e árduos, onde por vezes coloquei a hipótese de desistir do mesmo, por razões pessoais e profissionais.

Ao longo desse tempo sempre fui desenvolvendo, dentro das minhas possibilidades, o relatório.

Hoje, agradeço as palavras de incentivo decisivas de algumas pessoas que me acompanharam, ajudaram e contribuíram para a realização deste relatório.

Assim, gostaria de agradecer a quem mais contribuiu para a finalização do relatório e que sempre me aconselhou a não desistir: Filipa Maria Mateus Raposo. Obrigada por tudo.

À minha orientadora, Professora Doutora Ilda Inácio Rodrigues, pela sua enorme paciência, exigência, orientação, disponibilidade e interesse com que sempre me acompanhou. Pelas críticas, sugestões e incentivo que sempre me foi dando ao longo deste tempo. Obrigada por tudo o que aprendi.

Às professoras de matemática, Helena France e Teresa Dias, da Escola Secundária de Viriato, em Viseu, por todo o material dispensado na sessão prática realizada na Escola Superior de Tecnologia de Viseu no Encontro Regional de Professores de Matemática – ***ViseuMat2010***.

A uma grande amiga a quem tenho um carinho especial e agradeço a sua amizade e todos os momentos partilhados: Maria de Fátima Ferreira de Sousa Ramos.

Aos meus colegas de formação pelas palavras de força e amizade.

Aos meus verdadeiros amigos e amigas um muito obrigado pelo apoio que sempre me deram ao longo do relatório.

Aos meus pais, irmã e avô por estarem sempre presentes na minha vida.

A todos vocês um muito obrigado por terem contribuído, de alguma forma, para que eu tivesse chegado até aqui.

Resumo

Neste relatório de estágio pedagógico desenvolvemos material didático que auxilie o processo de ensino e aprendizagem da matemática no 3º ciclo do ensino básico e no ensino secundário.

Para a sua realização utilizámos o programa de matemática dinâmica, GeoGebra. Este relatório encontra-se dividido em cinco capítulos.

Encontramos, em anexo, actividades propostas pelo professor direccionadas ao aluno, algumas delas originais. Outras, retiradas de manuais escolares, foram melhoradas. Existem também actividades das professoras Helena France e Teresa Dias (da Escola Secundária de Viriato), quando frequentei com a minha Orientadora a sessão prática sobre o GeoGebra no Encontro Regional de Professores de Matemática – ***ViseuMat2010***.

No primeiro capítulo é feita uma abordagem inicial ao software GeoGebra; o segundo capítulo inclui algumas definições básicas do 3º ciclo do ensino básico sobre ângulos e suas relações. A abordagem aos lugares geométricos no plano é feita no terceiro capítulo. O conceito de função é introduzido de forma muito breve no capítulo quatro, com o objectivo de estudar a função afim (função do tipo $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$) e estudar a função quadrática (função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $b,\ c \in \mathbb{R}$). No último capítulo, exploramos a noção de triângulo e referimos duas demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Palavras-chave

Geometria, função, GeoGebra, auto-aprendizagem.

Abstract

In this internship educational report, we developed didactic material which helps the teaching and learning process of mathematics in the 3rd cycle of basic education and secondary education.

For its implementation we used the math dynamic program GeoGebra. This report is divided into five chapters.

We found, in attach, activities proposed by the teacher directed to the student, some of them original. Others had been extracted from textbooks and improved. There are also activities of the teachers Helena France and Teresa Dias (Viriato Secondary School) when I attended with my supervisor the practical session on the GeoGebra Regional Meeting of Mathematics Teachers – ViseuMat2010.

In the first chapter is made an initial approach to the software GeoGebra; the second chapter includes some basic definitions of the 3 cycle of basic education about angles and their relationships. The approach to the geometric places in the plan is made in the third chapter. The concept of function is introduced very briefly in chapter four, with the aim of studying the affine function (function of type $y = ax + b$, with $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ and $b \in \mathbb{R}$) and studying the quadratic function (function of type $y = ax^2 + bx + c$, with $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ and $a,\ b \in \mathbb{R}$). In the last chapter, we explore the notion of triangle and refer two proofs of the Pythagoras's Theorem.

Keywords

Geometry, function, GeoGebra, self learning.

Índice

Lista de Símbolos Matemáticos e Notações

$\parallel$	paralelo a
$\perp$	perpendicular a
AB	Recta definida pelos pontos A e B
$\dot{A}B$	Semi-recta com origem no ponto A e que passa pelo ponto B
$[AB]$	Segmento de recta de extremos nos pontos A e B
$\overline{AB}$	Distância entre os pontos A e B
$\measuredangle ABC$	Ângulo de vértice B e lados $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$
$A\hat{B}C$	Amplitude do $\measuredangle ABC$ (vértice em B)
$\Delta[ABC]$	Triângulo com vértices nos pontos A, B e C
ABC	Plano definido por três pontos (pontos não colineares A, B e C)
$\sin(\alpha)$	Seno do ângulo α
$\cos(\alpha)$	Co-seno do ângulo α
$\tan(\alpha)$	Tangente do ângulo α
$\vec{u}$	Vector u
$\overrightarrow{AB}$	Vector definido por dois pontos, A e B
$\simeq$	aproximadamente igual a
$\in$	pertence a …
$\notin$	não pertence a …
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mid\ \mid$	Módulo ou valor absoluto

Lista de Actividades da aula com o GeoGebra

Introdução

Nos actuais programas de Matemática do 3º ciclo do ensino básico e do ensino secundário destacamos a introdução no ensino/aprendizagem de software de Matemática Dinâmica. Entre muitos existentes, Geometer's Sketchpad, Cabri-Geométre, Cinderella, optámos pelo GeoGebra, por ser um programa gratuito (pode ser obtido no site ***http://www.geogebra.org***). Este software foi desenvolvido pelo Professor Doutor Markus Hohenwarter da Florida Atlantic University e pela sua equipa de programadores em 2001, com o objectivo de poder ser utilizado tanto por professores como por alunos de todo o mundo. A tradução para português foi feita pelo professor de matemática Jorge Geraldes. Alguns manuais actuais já têm páginas dedicadas à exploração do GeoGebra na sala de aula.

O GeoGebra combina, de forma interactiva, diversas áreas da matemática tais como geometria, álgebra e estatística. Usa tabelas, gráficos e cálculo numa única aplicação. Permite uma melhor compreensão dos conceitos e relações geométricas, bem como a manipulação gráfica associada à representação algébrica (por exemplo, qualquer expressão introduzida na janela de álgebra corresponde a um objecto na janela de geometria e vice-versa). Também permite a produção das aplicações interactivas em páginas WEB. Estas são algumas das características que o distinguem de outros softwares em geometria dinâmica.

Os programas de Matemática prevêem ainda o uso de calculadoras gráficas, não só como instrumento de cálculo mas com objectivo semelhante ao do GeoGebra, ou seja, um instrumento de trabalho e de incentivo à pesquisa. As calculadoras gráficas permitem a resolução de problemas reais, contribuem para um melhor entendimento das funções e proporcionam, ao mesmo tempo, um maior envolvimento dos alunos na descoberta de soluções para os problemas propostos. No entanto, apresentam algumas limitações sobretudo no que diz respeito à representação gráfica. Nem sempre é possível captar com clareza certas características das funções. A sua má utilização pode levar a obter resultados errados e os erros cometidos pelas mesmas podem ser aproveitados, tanto pelo professor como pelo aluno, como motivação para o ensino/aprendizagem dos aspectos matemáticos envolvidos.

Por exemplo, uma vantagem muito boa do GeoGebra em relação às calculadoras gráficas é que permite estudar directamente uma família de funções com os parâmetros a variar (como veremos no capítulo cinco). Comparando-o novamente com as calculadoras gráficas, verificamos que é mais rápido na representação de um mesmo objecto matemático e facilita a exploração algébrica e gráfica em simultâneo (o que ajuda o aluno a entender melhor os conceitos matemáticos envolvidos).

O aluno necessita de ter acesso a um computador, a maioria dos alunos hoje em dia possui um, e quem não possui também dificilmente possui uma calculadora gráfica devido ao preço. O professor necessita de ter uma sala com computadores na escola.

O GeoGebra facilita a construção do conhecimento do aluno, com a elaboração de actividades por parte do professor e/ou manual. Não pretende substituir o professor nem os manuais escolares, nem o lápis e papel, nem o quadro, é uma ferramenta que permite ao aluno aprender Matemática. A partir da observação, reflexão, experimentação e debate de ideias com colegas e/ou professor, ao longo da realização das actividades. Pretendemos que o aluno entenda e perceba o que está por detrás das construções, estimulando-o a novas construções, queremos que ele conjecture com base em figuras/construções, que tire conclusões e justifique algumas propriedades. O professor terá de criar diversas actividades, com o auxilio deste software, para que o aluno, sob a orientação do professor, possa explorar, manipular e visualizar propriedades geométricas e algébricas. São várias as ferramentas de construção que o GeoGebra coloca à disposição de quem o utiliza. Outra funcionalidade para o professor, é que este pode usar actividades no GeoGebra para as aulas expositivas.

Este relatório é composto por cinco capítulos.

O primeiro capítulo faz uma abordagem inicial ao GeoGebra com referência às três áreas onde os objectos matemáticos podem ser representados (zona gráfica, zona algébrica e folha de cálculo) e descreve três das onze janelas opcionais que constituem a barra de ferramentas (mais precisamente a terceira, a oitava e a décima janelas, para mais tarde serem usadas nos conteúdos abordados do 3º ciclo do ensino básico). O manual oficial do GeoGebra pode ser obtido no site http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf (usámos neste trabalho a versão 3.2).

O conteúdo do capítulo dois integra-se no 3º ciclo do ensino básico, com alguns conceitos básicos adquiridos no 2º ciclo do ensino básico: noção de ângulos adjacentes, complementares, suplementares e verticalmente opostos; ângulos de lados paralelos e suas relações; ângulos internos e externos de um triângulo. Apresentamos alguns resultados teóricos.

O capítulo três contém assuntos incluídos no programa do 3º ciclo do ensino básico: noção de lugar geométrico (circunferência, círculo, mediatriz de um segmento de recta, bissectriz de um ângulo), sua identificação e descrição.

O capítulo quatro aborda conteúdos do 3º ciclo do ensino básico, alguns deles adquiridos no ciclo de estudos anterior. Uma noção importante é de triângulo rectângulo (reconhecendo a hipotenusa e os catetos). Apresentaremos a demonstração do Teorema de Pitágoras e do seu reciproco.

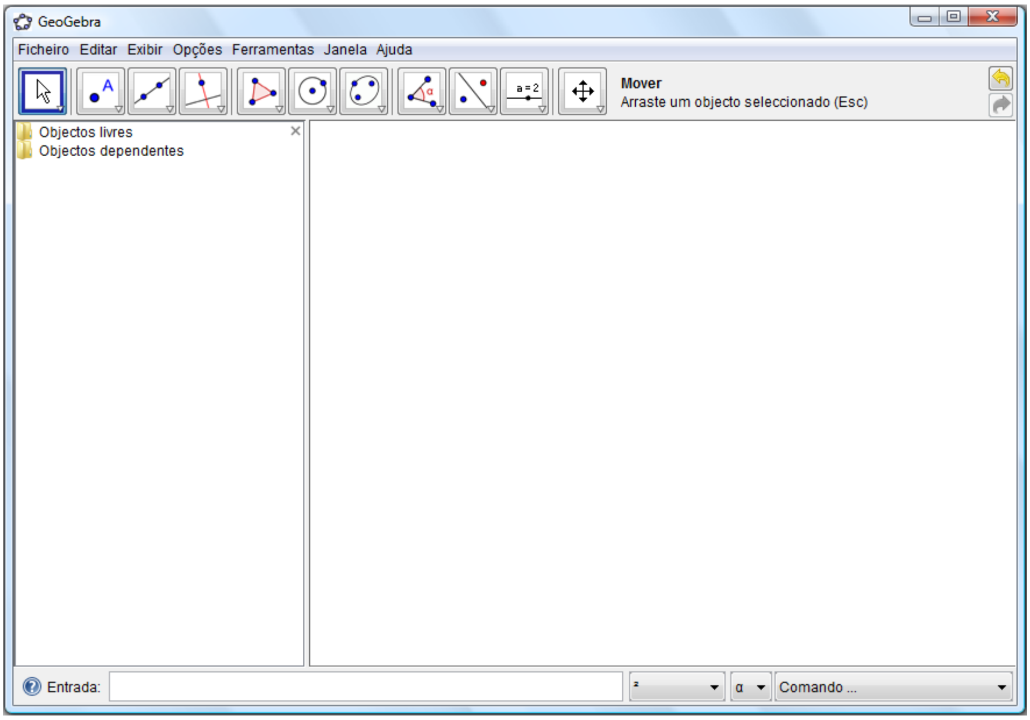
No último capítulo o aluno necessita de conceitos adquiridos no 3º ciclo do ensino básico, tais como noção de função, domínio, conjunto de chegada, contradomínio, função afim (função de proporcionalidade directa e função constante). É estudado um conteúdo do ensino secundário: a função quadrática e suas propriedades.

Ao longo da exposição dos conceitos iremos apresentar algumas actividades (que se encontram em anexo), exploradas com o Geogebra e que complementam o estudo. Nessas actividades, o aluno com a ajuda do professor, constrói o seu próprio conhecimento, testando hipóteses, reflectindo, formulando conjecturas (raciocínio indutivo), demonstrando conjecturas (raciocínio dedutivo) e até mesmo a errar, produzindo desta forma a essência do que é realmente estar a fazer Matemática (em contexto escolar).

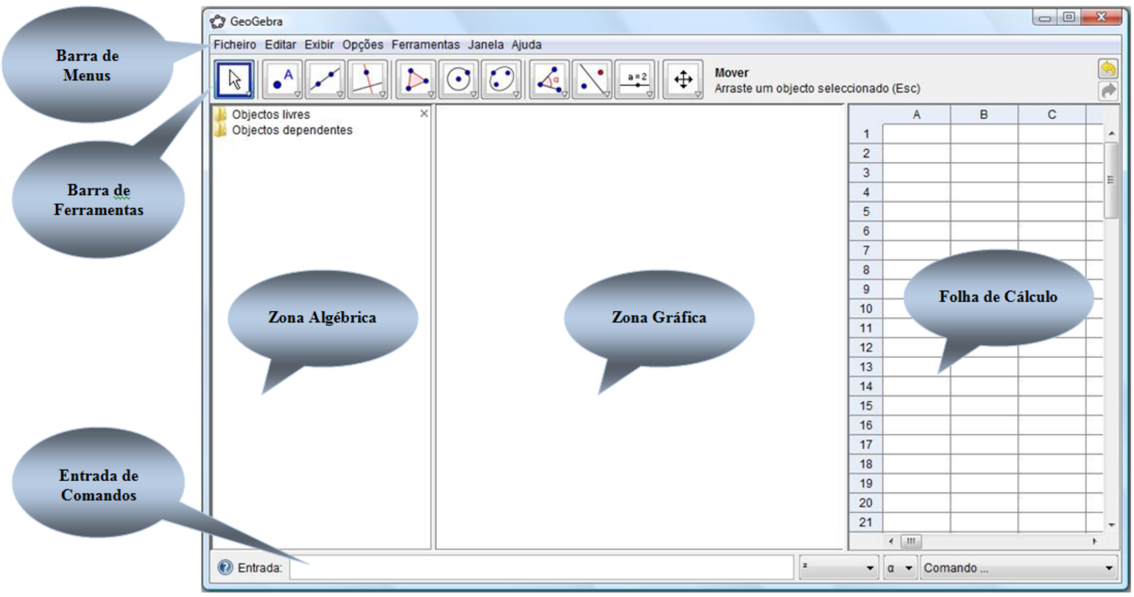
Capítulo 1

GeoGebra, uma abordagem inicial

A figura apresentada mostra o ecrã que aparece após a primeira execução do programa:



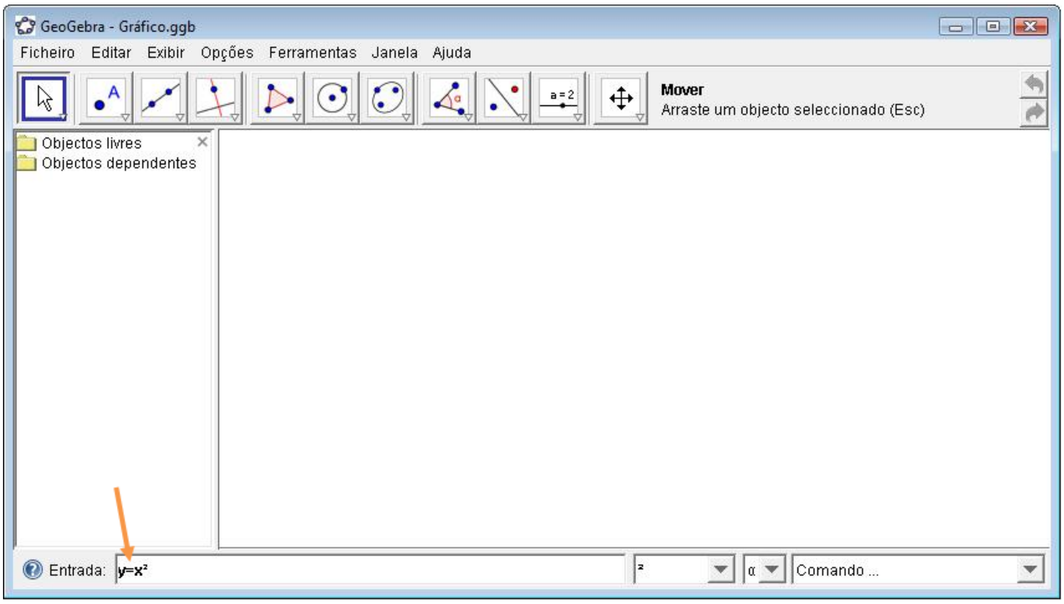
O GeoGebra relaciona as áreas de geometria, álgebra e cálculo. O ecrã abaixo tem as três possíveis representações dos objectos matemáticos: a zona gráfica, a zona algébrica ou numérica e a folha de cálculo (ver figura abaixo).

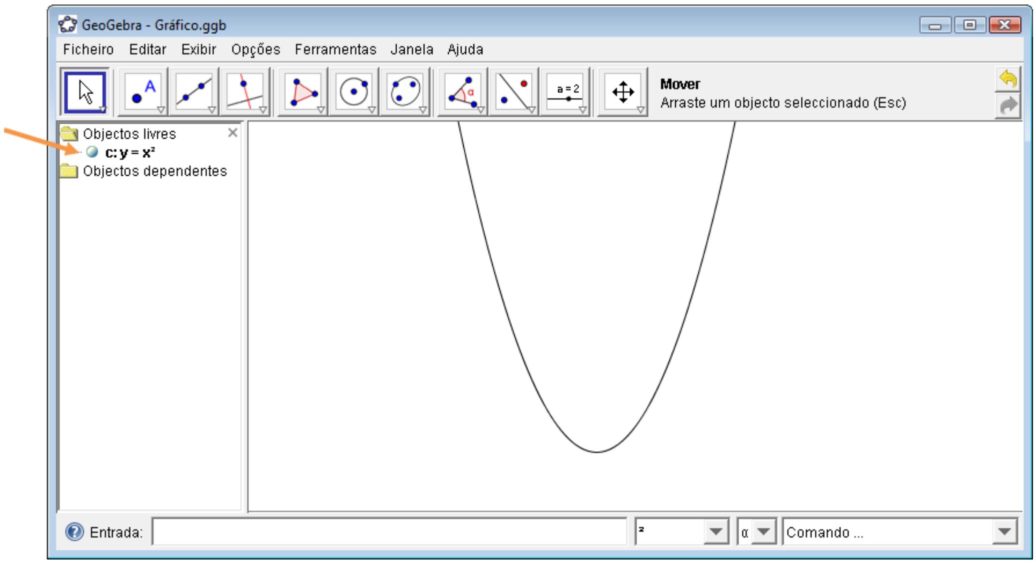


A zona algébrica e a folha de cálculo podem ou não ser exibidas no ecrã[1].

A *zona gráfica* mostra a representação gráfica de objectos matemáticos tais como ângulos, pontos, vectores, segmentos, polígonos, curvas, secções cónicas, gráfico de funções (com ou sem referencial cartesiano, com ou sem quadrícula)[2], etc.

Na *zona algébrica* aparece a lista das expressões algébricas introduzidas na entrada de comandos (tais como equações, coordenadas de pontos, etc.). À medida que cada entrada é introduzida, o programa representa-a na zona gráfica. Por exemplo:



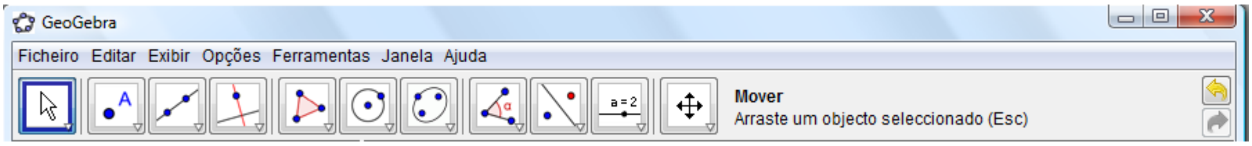


[1] Na barra de menus, na opção **Exibir**.

[2] Na barra de menus, na opção **Exibir** podemos escolher *Eixos coordenados* e/ou *Quadriculado*.

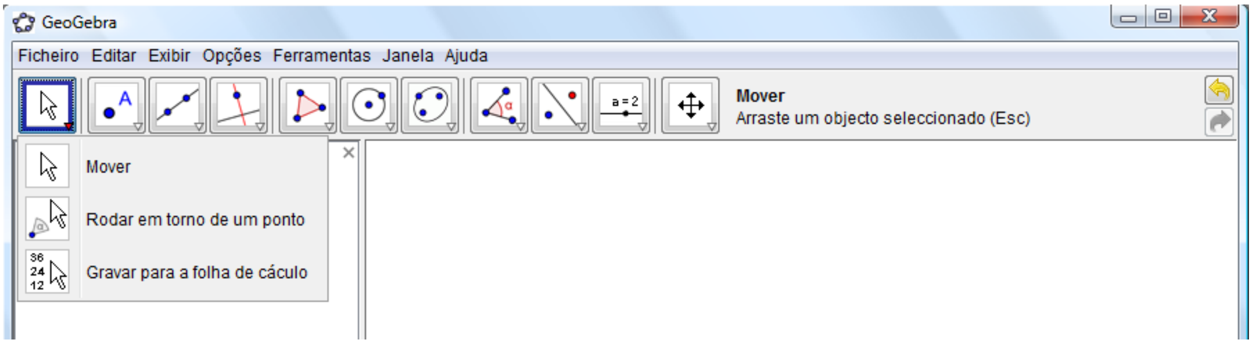
Na *folha de cálculo* cada célula tem um nome próprio que a permite identificar. Por exemplo, a célula na linha 1 coluna A é denotada por A1 e assim sucessivamente. A principal utilidade é o armazenamento de dados matemáticos obtidos nas outras zonas, o equivalente, por exemplo, a uma tabela de dados obtidos no decorrer de uma determinada actividade.

A *barra de ferramentas* é constituída por 11 janelas opcionais:

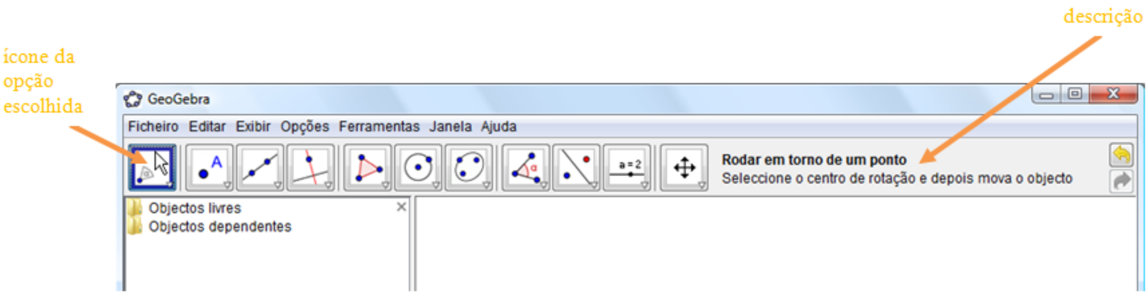


De seguida, mostraremos as funcionalidades de algumas dessas janelas.

Para visualizar as ferramentas de cada janela clicamos em ∇, no canto inferior direito do ícone da janela. Vejamos na seguinte figura as opções da primeira janela:

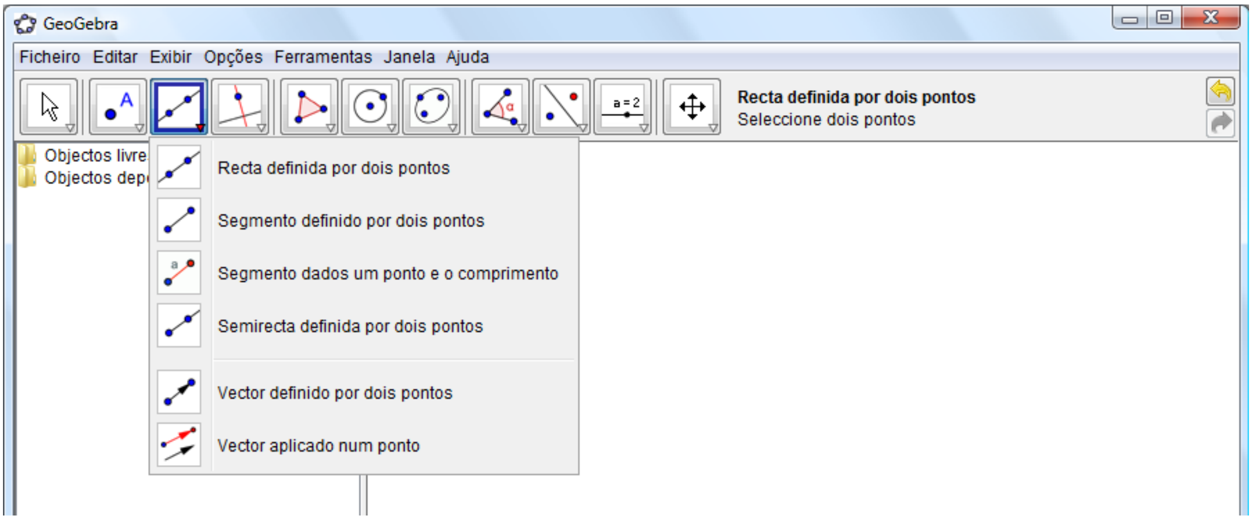


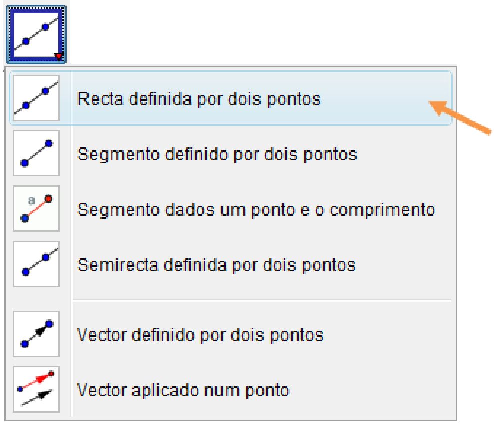
Cada opção da janela tem o seu respectivo ícone e o nome refere-se à função da ferramenta. Após clicar na opção escolhida, aparece na parte direita da barra de ferramentas uma breve descrição do modo como "operar" com a opção.



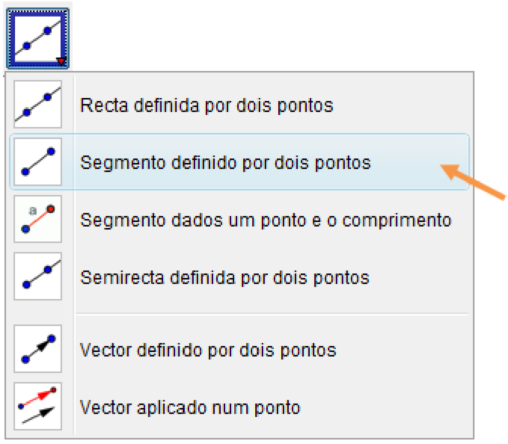
Entre as diversas janelas existentes podemos descrever, por exemplo, a terceira, a oitava e a décima janelas devido ao facto, de que mais tarde as usaremos nos conteúdos do 3º ciclo do ensino básico.

Janela 3

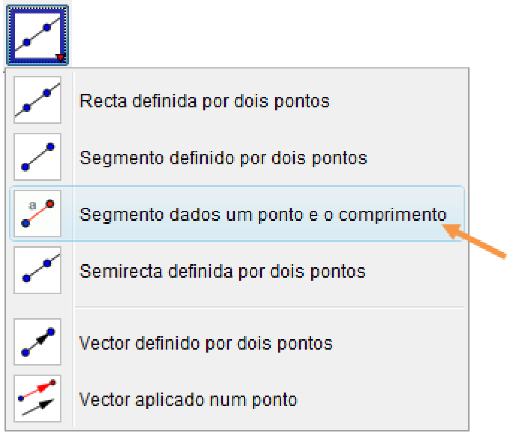




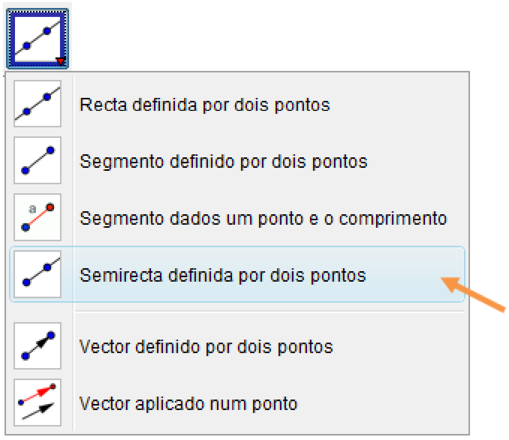
Recta definida por dois pontos - ao seleccionar dois pontos quaisquer, automaticamente se traça a recta que passa pelos mesmos.



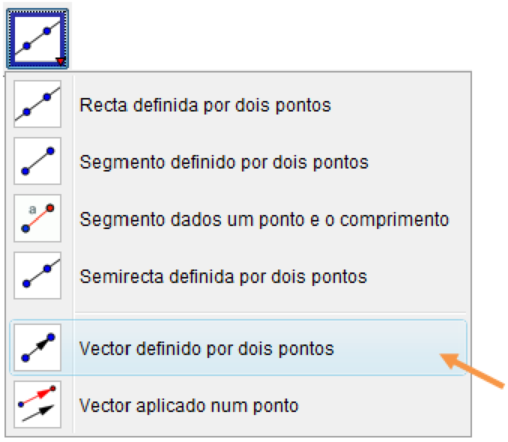
Segmento definido por dois pontos - ao seleccionar dois pontos quaisquer, automaticamente é traçado o segmento definido por esses dois pontos; na zona algébrica aparece o comprimento do segmento.



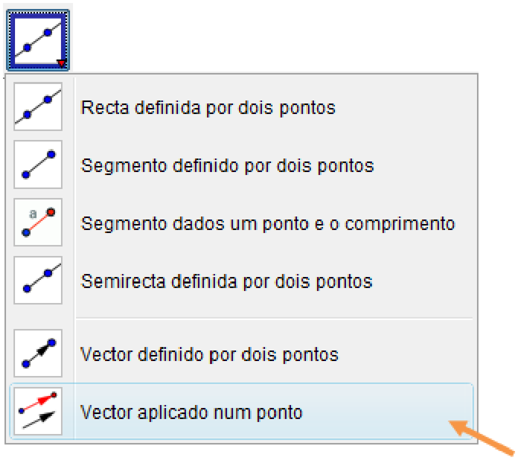
Segmento dados um ponto e o comprimento - seleciona-se um ponto (extremo inicial do segmento) na janela de diálogo que irá aparecer, escreve-se o comprimento pretendido e clica-se em OK.



Semirecta definida por dois pontos - seleccionando dois pontos, o primeiro ponto é a origem da semirecta e o segundo ponto determina a direcção da semirecta; na zona algébrica aparece a equação da recta que lhe está associada.



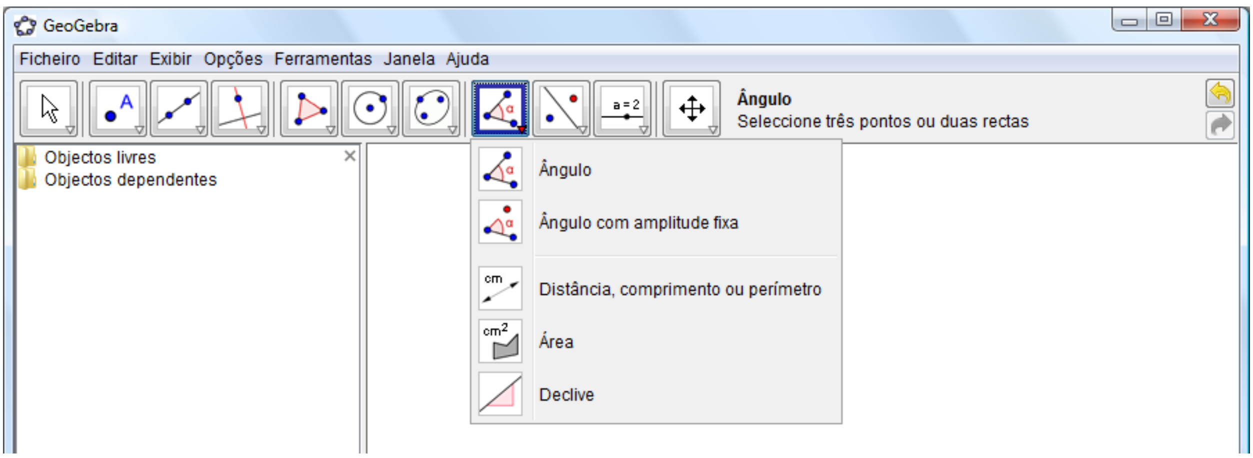
Vector definido por dois pontos - seleccionamos o ponto inicial e, a seguir, o ponto final (extremidade) do vector; na zona algébrica surgem as coordenadas do vector.

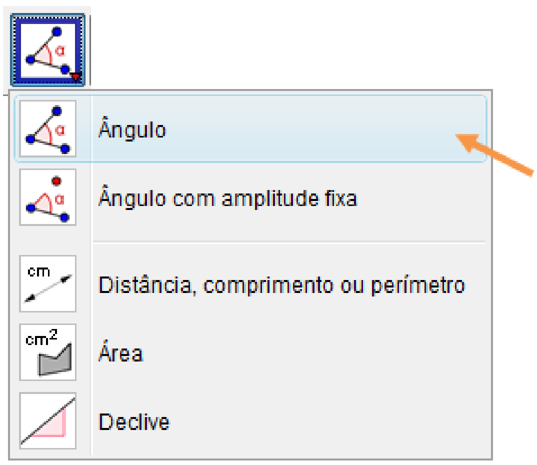


Vector aplicado num ponto - seleccionando um ponto (origem do novo vector) e um vector previamente criado obtém-se um novo vector; as suas coordenadas são visíveis na zona algébrica.

Escolhendo agora outra janela:

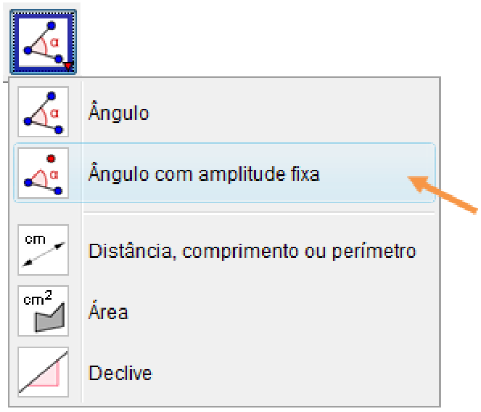
Janela 8





Ângulo - Cria um ângulo de várias formas: seleccionando três pontos cujo vértice é o segundo ponto selecionado; selecionando duas rectas não paralelas ou dois vectores ou dois segmentos de recta (útil para polígonos). A orientação na selecção dos objectos tem de ser tomada em consideração. Com a orientação anti--horária, esta ferramenta indica a amplitude do menor ângulo formado. Caso contrário, indica a amplitude do maior ângulo.

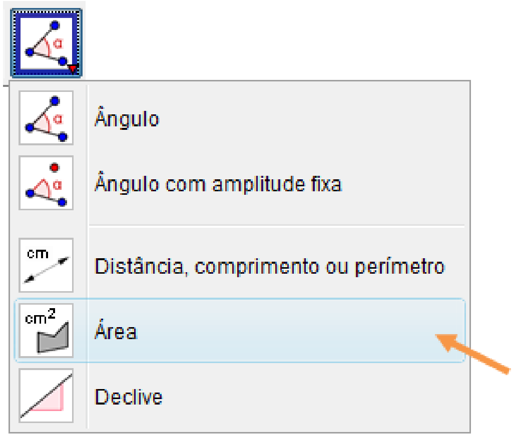
Nota: *É necessário que o utilizador trace as semirectas que correspondem aos lados do ângulo, visto que o GeoGebra apenas marca os pontos quando se opta por marcar um ângulo à custa de três pontos.*



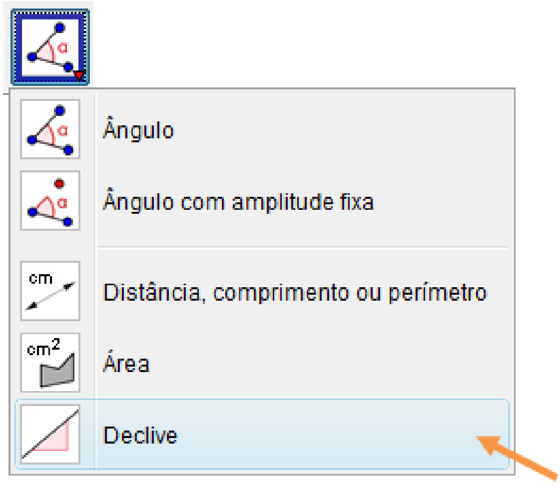
Ângulo com amplitude fixa - Cria um ângulo seleccionando dois pontos (sendo o segundo ponto será o vértice do ângulo) e indicando depois, na janela de diálogo que o programa abrirá, a medida pretendida para a amplitude do ângulo.

Nota: *É necessário que o utilizador trace as semirectas que correspondem aos lados do ângulo, visto que o GeoGebra apenas marca os pontos.*

Distância, comprimento ou perímetro - dá-nos o valor da distância entre dois pontos, ou entre um ponto e uma recta e ao mesmo apresenta tempo na **zona gráfica** aparece *texto dinâmico* com a informação da distância. Determina, também, o comprimento de um segmento e o perímetro (de um polígono, de uma circunferência, …).



Área - determina o valor numérico da área de um polígono, de um círculo ou de uma elipse e ao mesmo tempo apresenta na **zona gráfica** aparece *texto dinâmico*.



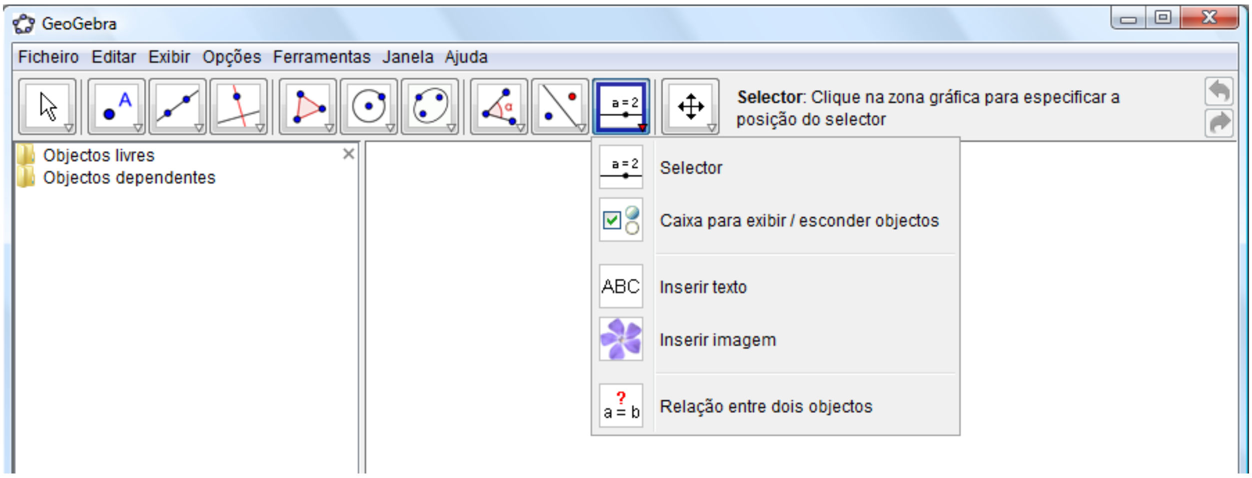
Declive - apresenta o valor do declive de uma recta e na **zona gráfica** aparece desenhado um triângulo rectângulo[3].

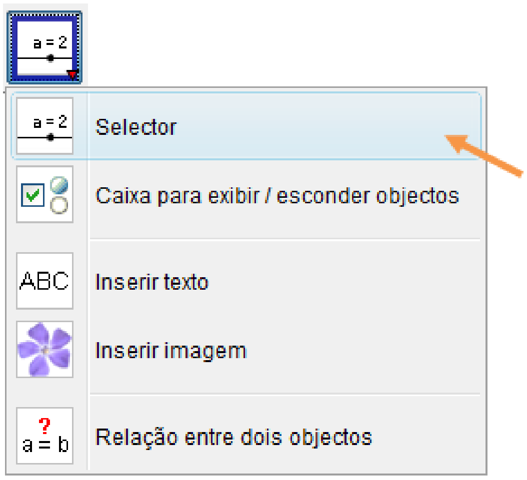
A última janela a descrever é a décima janela, que possui funcionalidades importantes para este trabalho, com principal destaque para a ferramenta *selector*[4].

[3] Se a recta for construída a partir de dois pontos, o GeoGebra mostrará um triângulo rectângulo cuja hipotenusa estará sobre a recta e com vértice num dos pontos. Se a recta for construída a partir de uma equação na entrada de comandos, o triângulo rectângulo aparecerá com vértice no eixo xx ou no eixo dos yy.

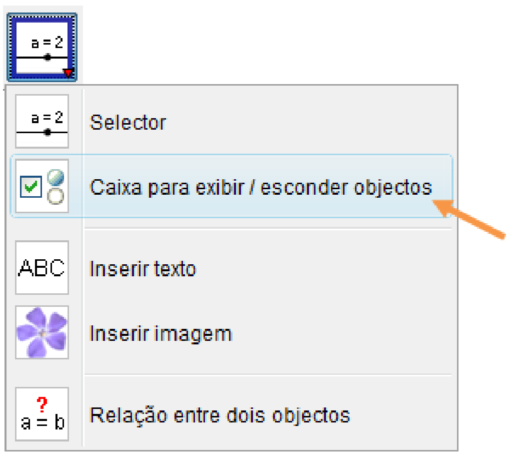
[4] A ferramenta **selector** é o equivalente a um parâmetro, com a vantagem de que num clique se pode variar o valor do parâmetro.

Janela 10

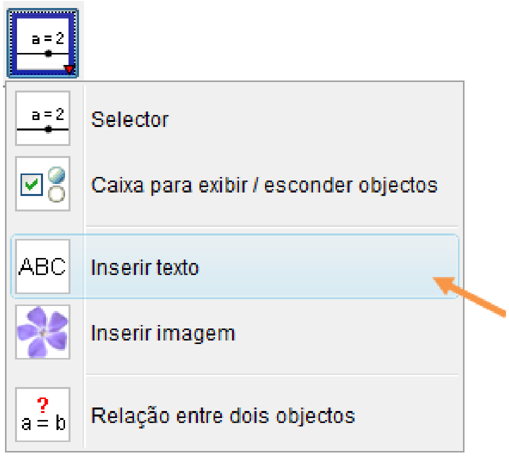




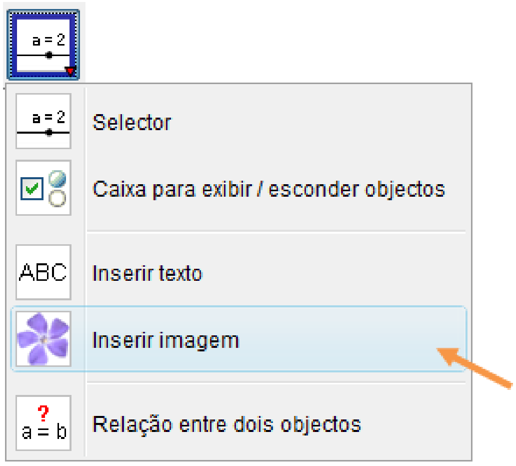
Selector - Após a escolha, clicamos na zona gráfica para que o programa abra uma janela de diálogo e crie um parâmetro (uma incógnita matemática que varia num intervalo escolhido). Podemos indicar a designação do parâmetro, o intervalo de variação e o incremento. Depois de *Aplicar* aparece na zona gráfica um segmento pequeno sobre o qual um ponto se desloca (esse deslocamento corresponde à modificação do valor do parâmetro com a opção *Mover* da primeira janela).



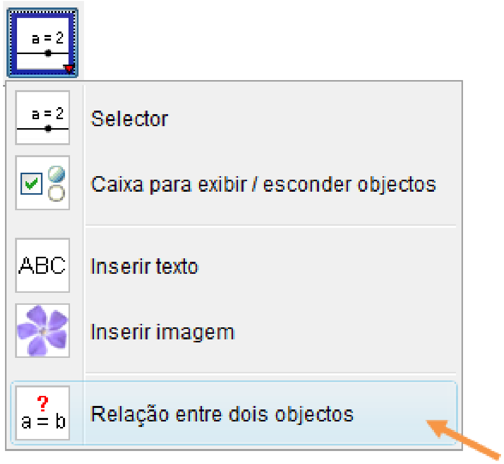
Caixa para exibir/esconder objectos - esta ferramenta permite exibir ou esconder um ou mais objectos, na **zona gráfica** e/ou na **zona algébrica**.



Inserir texto - Após a escolha desta opção, temos de clicar na zona gráfica ou num ponto para que o programa abra uma janela de diálogo onde podemos escrever *textos estáticos*, *textos dinâmicos*, *textos mistos* e até *fórmulas em Latex*.



Inserir imagem - permite inserir imagens/figuras na **zona gráfica** ou anexá-las.



Relação entre dois objectos - seleccionando dois objectos da mesma "família"[5] obtém-se a informação da relação existente entre eles abrindo-se uma janela de diálogo na **zona gráfica.**

[5] Por exemplo, não podemos comparar uma recta com um vector.

Terminamos este capítulo sem fazer referência a todas as janelas e suas ferramentas, porque tornaria muito extensa a exposição deste trabalho. Para um estudo mais profundo sobre o programa Geogebra recomendamos, por exemplo, a leitura do manual.

Capítulo 2

Algumas definições básicas

No ano 300 a.C., no livro I dos *Elementos* de Euclides, define-se ponto como "*aquilo que não tem parte*". Esta definição, para os Gregos, estava ligada ao conceito de átomo (partículas indivisíveis que constituíam a matéria). Embora isto contrarie a noção de átomo que hoje conhecemos (onde o átomo é constituído por protões, neutrões e electrões).

Em geometria, não é importante a definição de ponto, recta ou plano, mas sim o estudo destes objectos no modo como se relacionam entre si.

Este trabalho envolve apenas o estudo de geometria no plano. O plano euclidiano é um conjunto onde os seus elementos se designam por *pontos*. As rectas são, por exemplo, subconjuntos do plano euclidiano.

As definições e axiomas apresentados nesta parte do trabalho foram retirados de várias fontes incluindo $[1,2,3,12,13,14,15]$.

No plano euclidiano são válidos os seguintes axiomas:

Axioma 1: Por cada par de pontos distintos passa uma e uma só recta.

Axioma 2: Cada recta contém pelo menos dois pontos.

Axioma 3: Existem pelo menos três pontos não colineares[6].

Como **consequência** dos axiomas, podemos concluir:

I. *Duas rectas distintas são concorrentes se tiverem um ponto em comum. O axioma 1 garante que este ponto é único.*
Dizemos que duas rectas distintas são paralelas se não têm nenhum ponto em comum.

II. *Para cada recta $l \subseteq \mathcal{E}$ existe pelo menos um ponto de $\mathcal{E}$ exterior a l (isto é, um ponto que não pertence a l).*

III. *Para cada $P \in \mathcal{E}$ existe pelo menos uma recta de $\mathcal{E}$ que não passa por P.*

IV. *Por cada ponto $P \in \mathcal{E}$ passam pelo menos duas rectas distintas.*

V. *Existem pelo menos três rectas não concorrentes (isto é, tais que não há nenhum ponto comum a todas elas).*

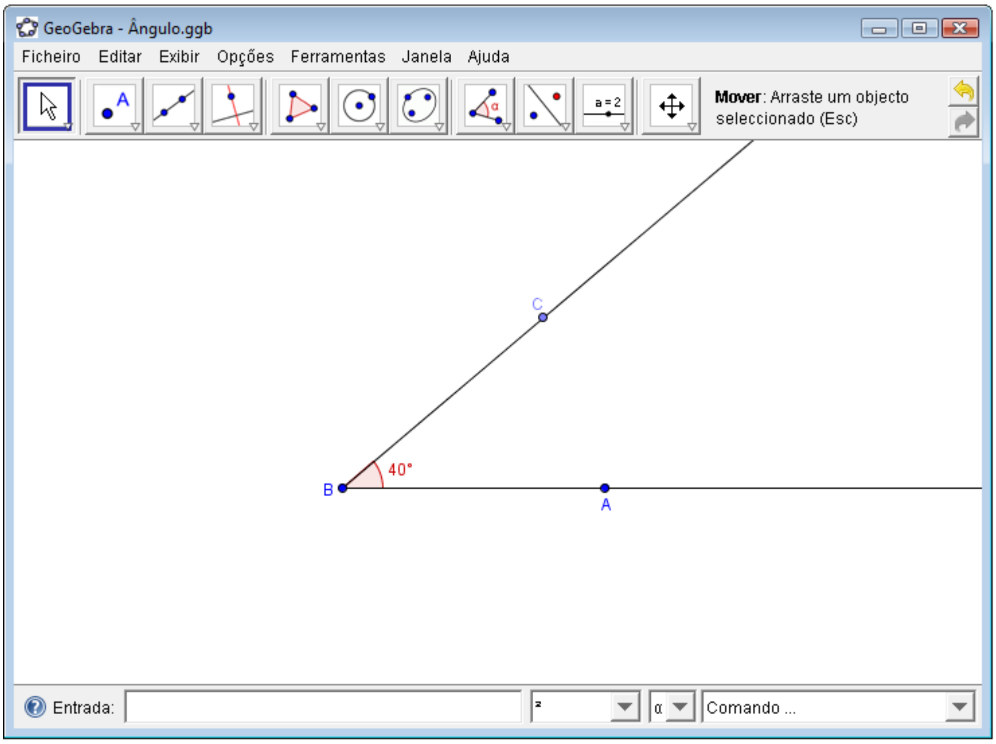
[6] Os pontos que pertencem a uma mesma recta dizem-se colineares.

De seguida, vamos introduzir algumas definições básicas necessárias para as actividades que iremos elaborar com o auxílio do software Geogebra.

Dados dois pontos distintos, P e Q, dizemos que $\dot{P}Q$ é uma **semirecta** com origem no ponto P e que contém o ponto Q.

<u>Ângulo</u> é a figura formada pela reunião de duas semirectas distintas, não colineares, com a mesma origem; à origem comum dessas semi-rectas chamamos ***vértice do ângulo***.

Na construção da figura abaixo denotamos o ângulo por $\measuredangle ABC$, sendo o ponto B a origem comum às duas semirectas, o ponto A (diferente de B) pertencente a uma semirecta e o ponto C (diferente de A e de B) pertencente a outra semirecta. As semirectas $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$ designam-se por *lados do ângulo*.



Pela observação da figura, concluímos que também podemos definir um ângulo através de três pontos não colineares.

Amplitude de um ângulo é a "abertura" definida pelas duas semirectas que formam os seus lados.

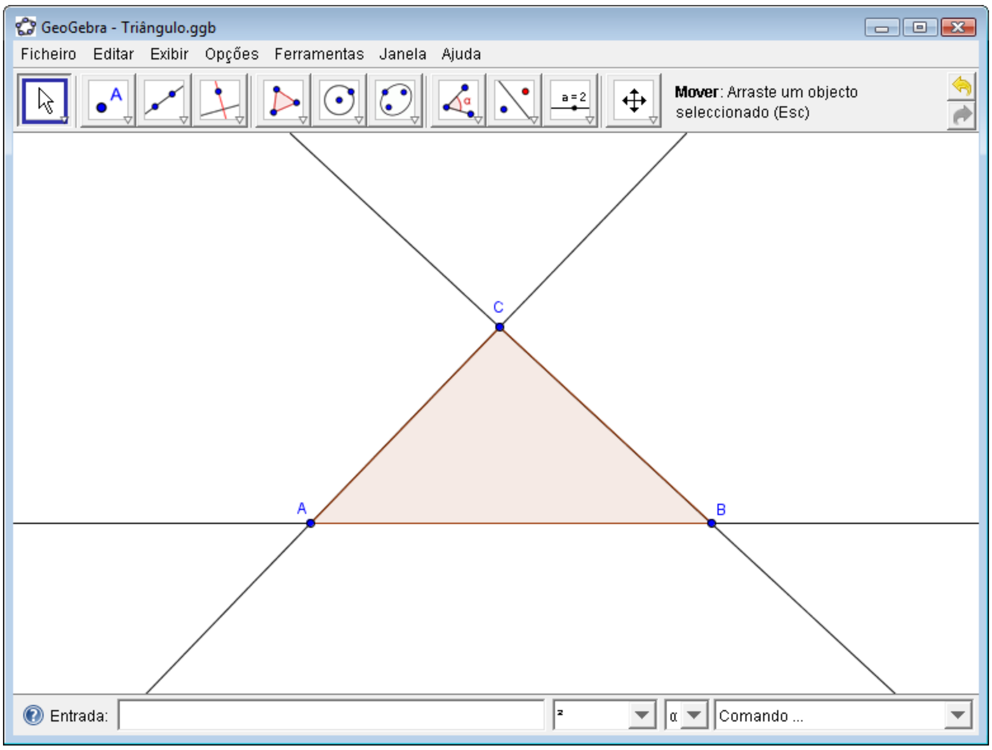
A unidade de medida para a amplitude do ângulo, neste ciclo de estudos, é o grau.

Observação: O programa GeoGebra permite deslocar qualquer ponto, na opção *Mover* da primeira janela. Deste modo, o ângulo $\measuredangle ABC$ varia de amplitude.

Os seguintes ângulos devem ser conhecidos dos alunos:

- Ângulo recto: amplitude de 90°
- Ângulo raso: amplitude de 180°
- Ângulo giro: amplitude de 360°

Dados três pontos não colineares, a intersecção dos três planos cujas origens são as rectas definidas por esses pontos, dois a dois, e que contêm o outro ponto designa-se por ***triângulo***.



Na figura anterior, os pontos A, B e C são não colineares e a intersecção dos três planos ABC, ACB e BCA está limitada pelos três segmentos de recta $[AB]$, $[AC]$ e $[BC]$. Estes segmentos de recta são os *lados do triângulo* e o triângulo é denotado por $\Delta[ABC]$. Os pontos A, B e C são os *vértices*. Os ângulos $\measuredangle BAC$, $\measuredangle ABC$ e $\measuredangle BCA$ são os **ângulos internos do triângulo**.

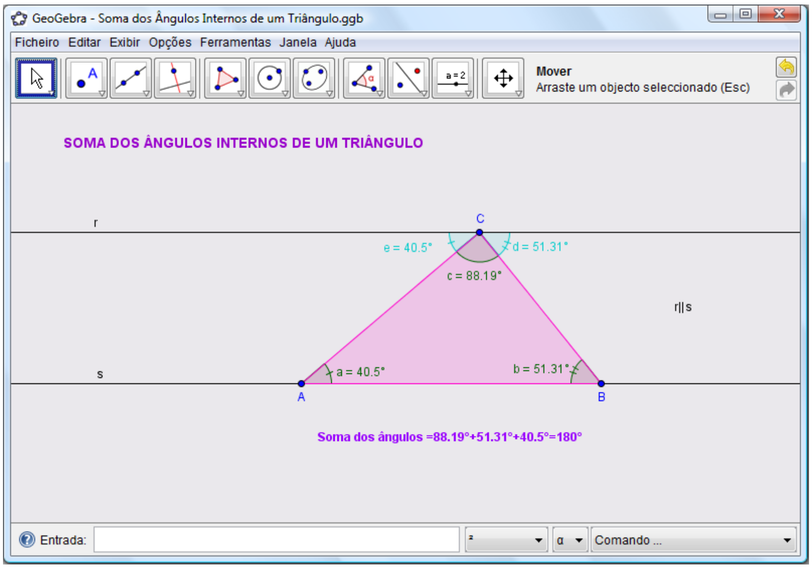
Actividade 1 (pág. 52)

> **Resultado teórico:**
> A soma das amplitudes dos ângulos internos de triângulo qualquer é igual a 180°.

Dem.:

Consideremos um triângulo $\Delta[ABC]$, qualquer.

Tracemos uma recta r paralela ao lado AB e que passe pelo vértice C do triângulo, como mostra a seguinte figura.



Verifica-se, então, que:

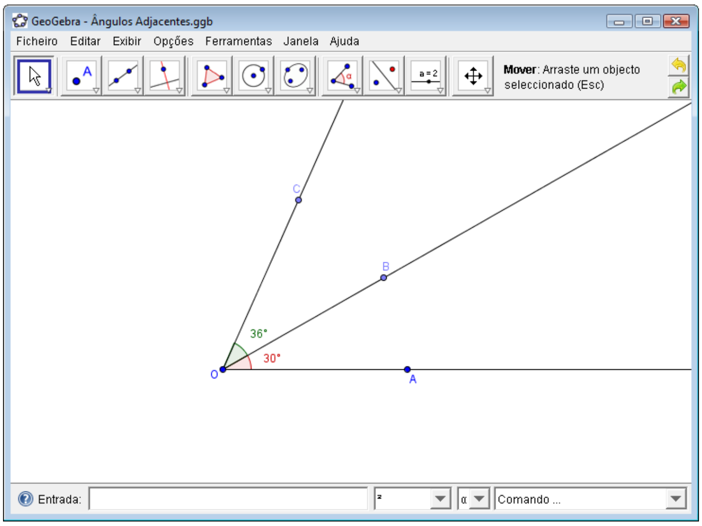
- ✓ $\measuredangle a = \measuredangle e$, porque são ângulos agudos de lados paralelos.
- ✓ $\measuredangle b = \measuredangle d$, porque são ângulos agudos de lados paralelos.
- ✓ $\measuredangle e + \measuredangle c + \measuredangle d = 180^{\circ}$, porque os ângulos $\measuredangle e$, $\measuredangle c$ e $\measuredangle d$ formam um ângulo raso.

Assim, $\measuredangle a + \measuredangle c + \measuredangle b = 180^{\circ}$, ou seja, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

(c.q.m.)

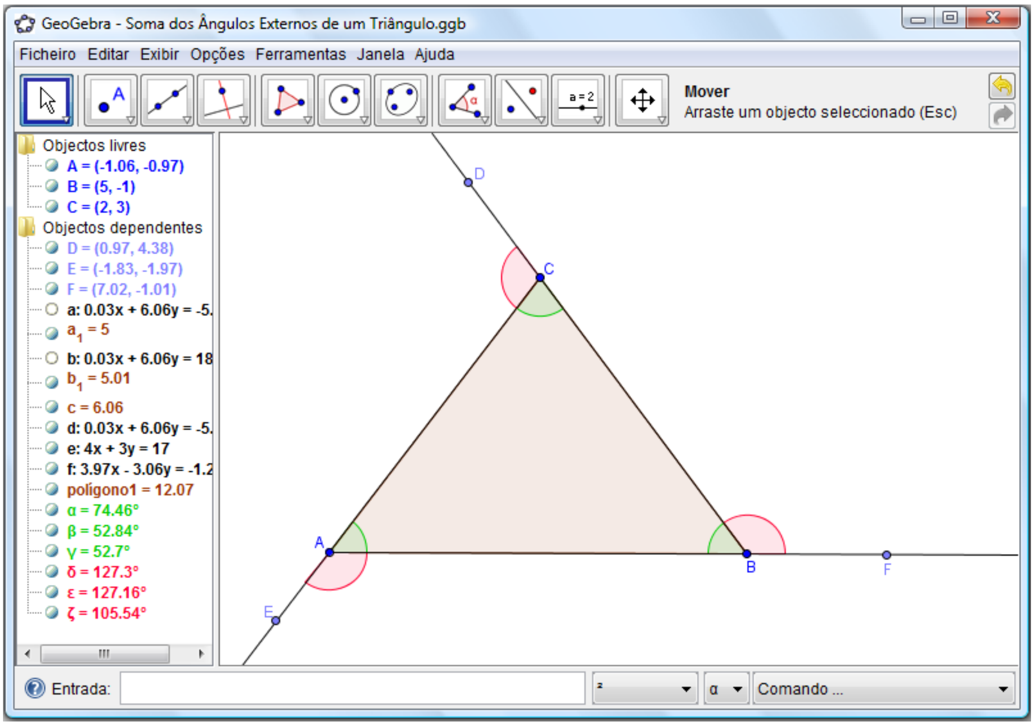
Durante a demonstração expositiva, o professor pode mover os vértices no seu ficheiro (figura anterior) e automaticamente aparece no ecrã a expressão **Soma dos ângulos**.

Ângulos Adjacentes são aqueles que têm o vértice e um lado comum estando cada um dos outros lados situados nos semi-planos opostos cuja origem é a recta a que pertence o lado comum.



Na construção apresentada anteriormente, os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{AOB}$ e $\measuredangle \boldsymbol{BOC}$ são **ângulos adjacentes**, visto que têm o vértice $\boldsymbol{O}$ e o lado $\dot{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{B}$ comuns e os lados $\dot{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{A}$ e $\dot{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{C}$ situam-se nos semi-planos opostos $\boldsymbol{OBA}$ e $\boldsymbol{OBC}$, respectivamente. Já os ângulos $\measuredangle AOB$ e $\measuredangle AOC$ têm ambos o vértice O e o lado OA comum, mas não são adjacentes porque os lados $\dot{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{B}$ e $\dot{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{C}$ encontram-se situados simultaneamente ou no semi-plano $\boldsymbol{OAB}$ ou no semi-plano $\boldsymbol{OAC}$. Temos, ainda, que: $\measuredangle \boldsymbol{AOC} = \measuredangle \boldsymbol{AOB} + \measuredangle \boldsymbol{BOC}$.

Ângulo Externo de um Triângulo é o ângulo limitado pelo prolongamento de um dos lados com a semi-recta que contém o lado consecutivo, isto é, é aquele que é formado por um lado do triângulo e pelo prolongamento de outro.



Observando a figura acima, temos a verde os ângulos internos e a vermelho os ângulos externos do triângulo $\Delta[ABC]$.

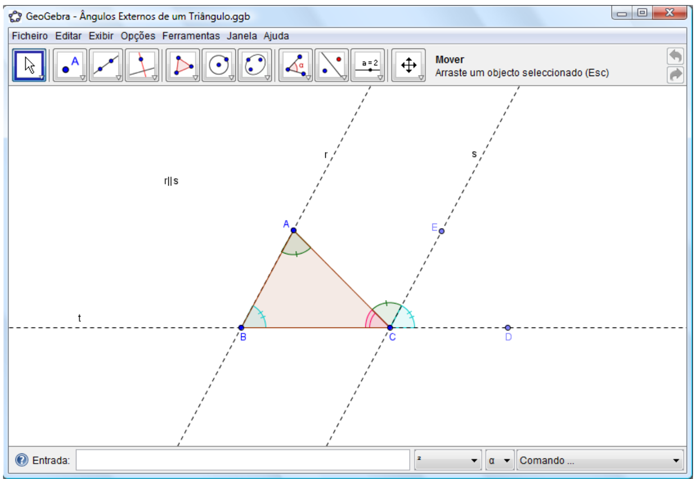
Actividade 2 (pág. 54)

Resultado teórico:

Em qualquer triângulo, a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

Dem.:

Consideremos um triângulo $\Delta[ABC]$ qualquer, como mostra a seguinte figura.



Queremos provar que a amplitude do ângulo externo $\measuredangle DCA$ é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes, que são $\measuredangle BAC$ e $\measuredangle CBA$.

Verifica-se que:

- ✓ $\measuredangle ECA = \measuredangle BAC$, porque são ângulos agudos de lados paralelos[7].
- ✓ $\measuredangle DCE = \measuredangle CBA$, porque são ângulos de lados paralelos.
- ✓ $\measuredangle DCA = \measuredangle ECA + \measuredangle DCE$, porque a amplitude do ângulo externo $\measuredangle DCA$ é igual à soma das amplitudes dos ângulos $\measuredangle ECA$ e $\measuredangle DCE$.

Como os ângulos $\measuredangle ACD$ e $\measuredangle DCA$ são ângulos suplementares,

$$\measuredangle ACD + \measuredangle DCA = 180^\circ \Leftrightarrow \measuredangle DCA = 180^\circ - \measuredangle ACD$$

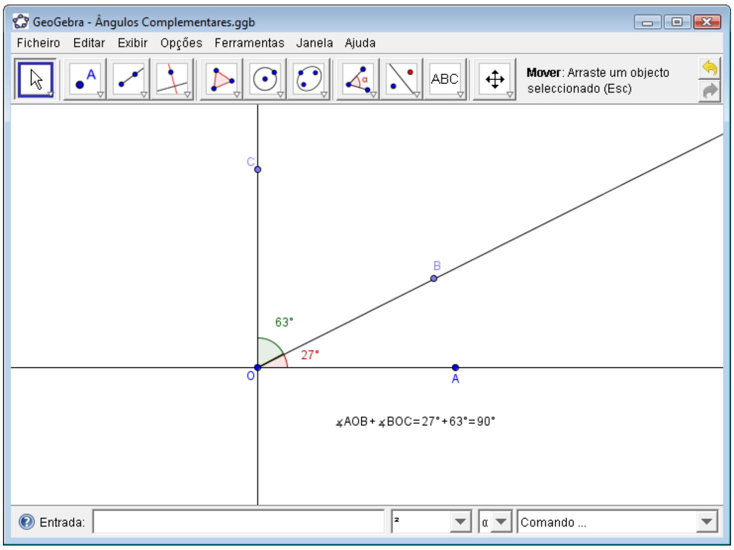
Por outro lado, pelo teorema 4, $\measuredangle BAC + \measuredangle CBA + \measuredangle ACD = 180^\circ \Leftrightarrow \measuredangle BAC + \measuredangle CBA = 180^\circ - \measuredangle ACD$.

Mas, como $\measuredangle DCA = 180^\circ - \measuredangle ACD$ e $\measuredangle BAC + \measuredangle CBA = 180^\circ - \measuredangle ACD$, logo $\measuredangle DCA = \measuredangle BAC + \measuredangle CBA$.

(c.q.m.)

De seguida, vamos apresentar mais alguns conceitos envolvendo ângulos:

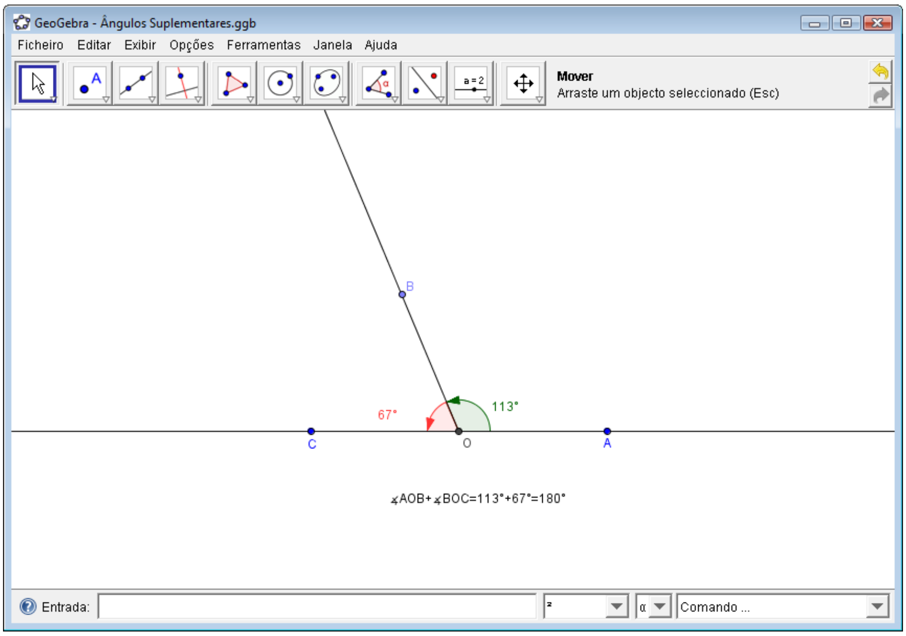
Ângulos complementares são aqueles cuja soma das suas amplitudes é igual à amplitude de um ângulo recto.



Na figura anterior, os ângulos $\boldsymbol{\measuredangle AOB}$ e $\boldsymbol{\measuredangle BOC}$ são ângulos complementares porque a soma das suas amplitudes é igual a 90°. Neste caso particular, também os ângulos $\boldsymbol{\measuredangle AOB}$ e $\boldsymbol{\measuredangle BOC}$ são adjacentes.

[7] Este conceito é introduzido na página 24 deste trabalho.

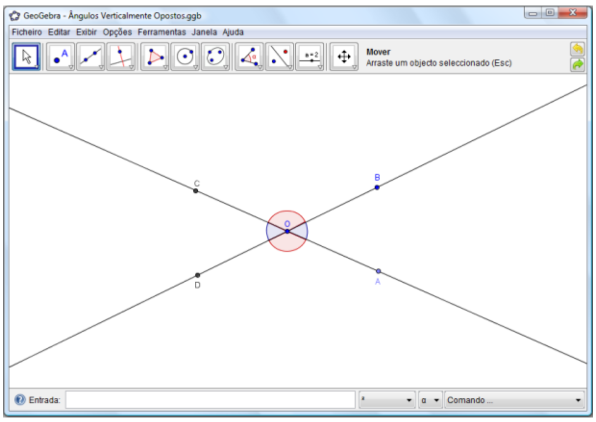
Ângulos suplementares são aqueles cuja soma das suas amplitudes é igual à amplitude de um ângulo raso.



Na construção anterior, os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{AOB}$ e $\measuredangle \boldsymbol{BOC}$ são suplementares e também adjacentes.

Note-se que: um ângulo interno de um triângulo é adjacente e é suplementar ao ângulo externo que lhe está associado.

Dois ângulos dizem-se ***verticalmente opostos*** se têm o vértice em comum e os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro.



Os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{AOB}$ e $\measuredangle \boldsymbol{COD}$, da figura, têm o vértice $\boldsymbol{O}$ em comum e os lados de cada um estão no prolongamento dos lados do outro. Por isso, eles são verticalmente opostos. Também os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{AOD}$ e $\measuredangle \boldsymbol{BOC}$ são verticalmente opostos.

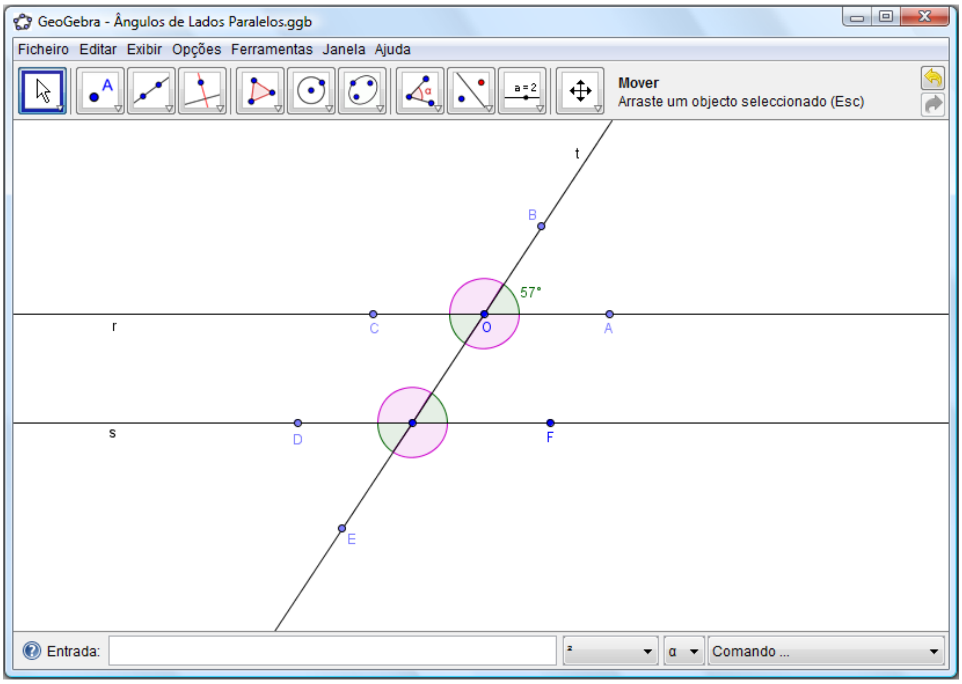
Actividade 3 (pág. 56)

Resultado teórico:

Dois ângulos verticalmente opostos são iguais, ou seja, têm a mesma amplitude.

Podemos estabelecer, tendo em conta a actividade 3, que duas rectas que se intersectam num ponto, formam sempre dois pares de ângulos verticalmente opostos.

Para abordarmos outro conceito, comecemos por observar a seguinte construção:



Temos duas rectas r e s estritamente paralelas[8] e uma recta t secante[9] a elas. Suponha que apenas um dos ângulos é conhecido. É possível indicar a amplitude dos outros ângulos, mas para isso necessitamos das seguintes noções:

[8] Duas rectas dizem-se **paralelas** quando, situadas no mesmo plano, não têm nenhum ponto comum. Usa-se o símbolo ∥ para dizer que duas rectas são paralelas.

[9] Em Geometria, uma recta diz-se **secante** ou **concorrente** a outra quando se intersectam num só ponto.

- Os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{AOB}$ e $\measuredangle \boldsymbol{FGO}$ (e os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{COG}$ e $\measuredangle \boldsymbol{DGE}$) são designados por ***ângulos agudos de lados paralelos*** e têm a mesma amplitude.
- Os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{BOC}$ e $\measuredangle \boldsymbol{OGD}$ (e os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{GOA}$ e $\measuredangle \boldsymbol{EGF}$) são designados por ***ângulos obtusos de lados paralelos*** e têm a mesma amplitude.

Os ***ângulos alternos internos*** têm diferentes vértices, estão em lados diferentes da recta que intersecta as duas rectas estritamente paralelas e situam-se na região compreendida entre essas mesmas rectas.

Por exemplo, na construção anterior, os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{COG}$ e $\measuredangle \boldsymbol{OGF}$ e os ângulos $\measuredangle \boldsymbol{GOA}$ e $\measuredangle \boldsymbol{OGD}$ são ângulos alternos[10] internos[11].

Resultado teórico:

Se duas rectas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelas, então os ângulos alternos internos determinados por uma recta secante $\boldsymbol{t}$ são iguais.

Dem.:

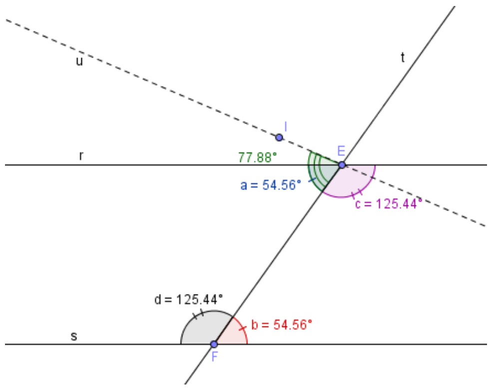
Seja u uma recta tal que $\measuredangle IEF = \measuredangle b$.

Suponhamos que as rectas u e s são paralelas $(u \parallel s)$.

Então, a recta u coincide com a recta r, porque por um ponto exterior a uma recta é possível fazer passar uma recta paralela e só uma.

Logo, $\measuredangle IEF = \measuredangle a$, $\measuredangle a = \measuredangle b$ e $\measuredangle c = \measuredangle d$.

(c.q.m.)



[10] **Alternos** porque estão um de cada lado da secante.

[11] **Internos** porque parte dos ângulos é interior ao espaço limitado pelas rectas r e s.

Propriedades:

- Em qualquer triângulo, a lados iguais (congruentes) opõem-se ângulos iguais (congruentes).
- Em qualquer triângulo, a ângulos iguais (congruentes) opõem-se lados iguais (congruentes).
- Em qualquer triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.
- Em qualquer triângulo, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.
- Em qualquer triângulo, ao menor lado opõe-se o menor ângulo.
- Em qualquer triângulo, ao menor ângulo opõe-se o menor lado.

Capítulo 3

Lugares Geométricos

De acordo com o que o Matemático Apolónio de Perga escreveu $(262 - 190\ a.c.)$ na sua obra, sobre lugares planos, podemos salientar: «*o lugar dos pontos, cuja diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante, é uma recta perpendicular à recta que une os dois pontos.*»

Neste capítulo, vamos apresentar a definição de alguns lugares geométricos: circunferência, círculo, mediatriz de um segmento de recta e bissectriz de um ângulo. O objectivo é identificar alguns lugares geométricos no plano e descrevê-los.

As definições, teoremas e propriedades aqui apresentadas foram retiradas de várias fontes incluindo $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16, 17, 18, 19]$.

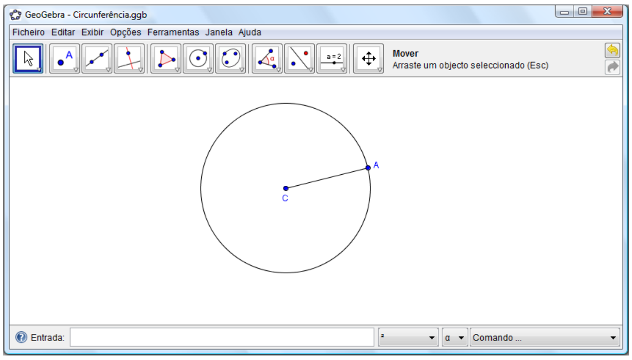
Comecemos por definir lugar geométrico:

Lugar Geométrico é uma figura formada por um conjunto de pontos, e só eles, têm em comum uma determinada propriedade.

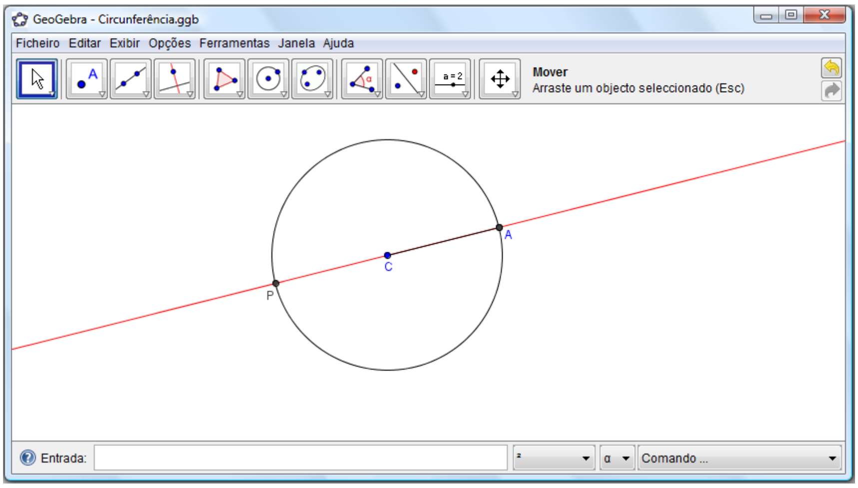
Um dos primeiros lugares geométricos que os alunos conhecem é a circunferência.

Circunferência é o lugar geométrico, uma linha fechada, de todos os pontos do plano equidistantes de um ponto fixo.

Ao ponto fixo chama-se **centro** (na figura corresponde ao ponto C). O **raio** da circunferência é o comprimento do segmento de recta definida pelo centro e por um ponto pertencente à circunferência (por exemplo, na figura $[CA]$ é um raio).



Prolongando o segmento $[CA]$ de modo a obter o ponto P (ver figura abaixo):



Obtivemos o segmento de recta $[PA]$ cujo o seu comprimento é chamado o **diâmetro** da circunferência. Ou seja, é o comprimento de um segmento de recta cujos extremos pertencem à circunferência e que passa pelo centro.

Uma importante propriedade (consequência óbvia da definição) é que todos os pontos da circunferência se encontrarem à mesma distância do centro.

Resultado teórico:

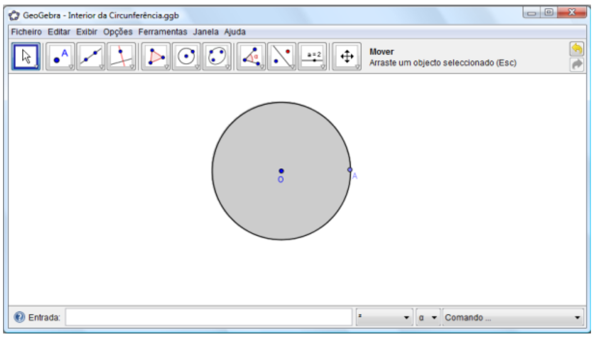
Todos os pontos de uma circunferência estão a uma distância do centro igual ao raio.

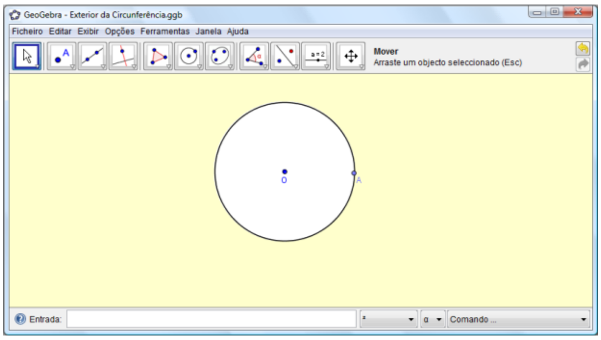
Consequência do resultado teórico:

Qualquer ponto exterior à circunferência está a uma distância do centro maior do que o raio e qualquer ponto interior está a uma distância do centro menor do que o raio.

Actividade 4, parte 1 (pág. 57)

De acordo com a actividade, podemos deixar registada a conclusão. Uma circunferência divide o plano em duas partes: uma parte contendo os pontos interiores à circunferência (a qual se designa por **interior** da circunferência) e uma outra parte contendo os pontos exteriores à circunferência (a qual se designa por **exterior** da circunferência).





Ao objecto da primeira figura apresentada anteriormente chamamos círculo.

Círculo é o lugar geométrico constituído pelos pontos pertencentes à circunferência e por todos os pontos interiores a ela.

Propriedades:

- Duas circunferências ou dois círculos são iguais se têm raios iguais e reciprocamente.
- O diâmetro de uma circunferência ou de um círculo é igual ao dobro do raio.
- O diâmetro divide a circunferência ou o círculo em duas partes iguais. A circunferência divide-a em duas semicircunferências e o círculo divide-o em dois semicírculos.
- Um ponto exterior a uma circunferência ou a um círculo está a uma distância do centro maior do que o raio.
- Um ponto interior a uma distância menor que o raio e reciprocamente.

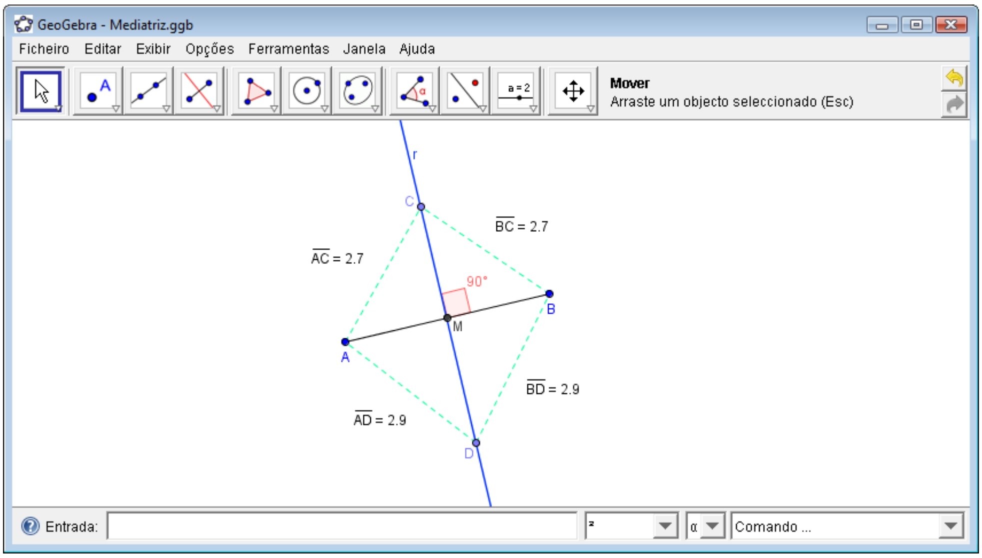
Podemos ampliar o estudo tendo como base a circunferência.

Actividade 4, parte 2 (pág. 59)

Vamos, de seguida, abordar um outro lugar geométrico. Mas desta vez, o GeoGebra vai apoiar o professor numa aula expositiva para introduzir a noção de mediatriz de um segmento de recta.

Actividade 5, parte 1 (pág. 62)

Mediatriz de um segmento de recta é o lugar geométrico constituído pelos pontos do plano equidistantes dos extremos do segmento.



A recta r é perpendicular ao segmento de recta $[AB]$ e, além disso, divide ao meio o mesmo segmento de recta passando pelo seu ponto médio, M. Por outro lado, a recta r é eixo de simetria do segmento de recta $[AB]$. À recta r chama-se **Mediatriz**.

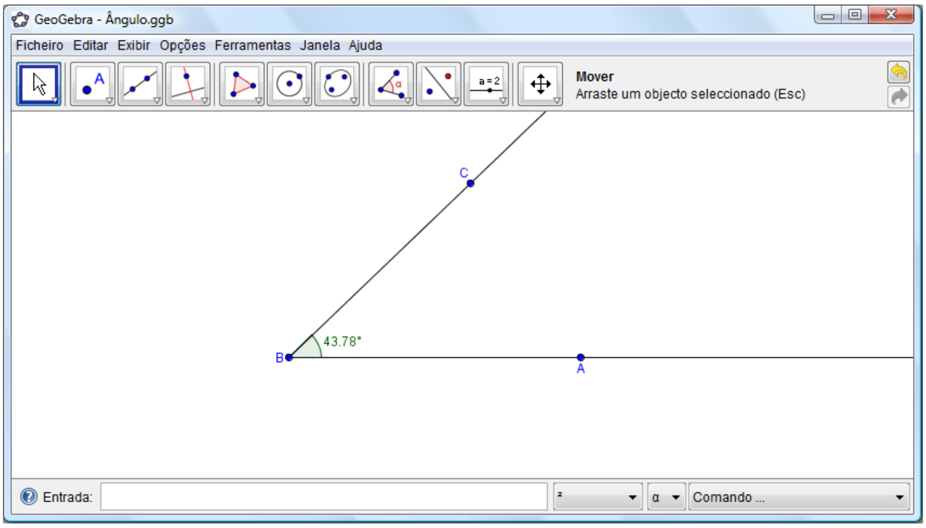
Assim, qualquer ponto que pertença à mediatriz está à mesma distância dos extremos do segmento $[AB]$.

Por curiosidade, o professor propõe aos alunos a seguinte actividade:

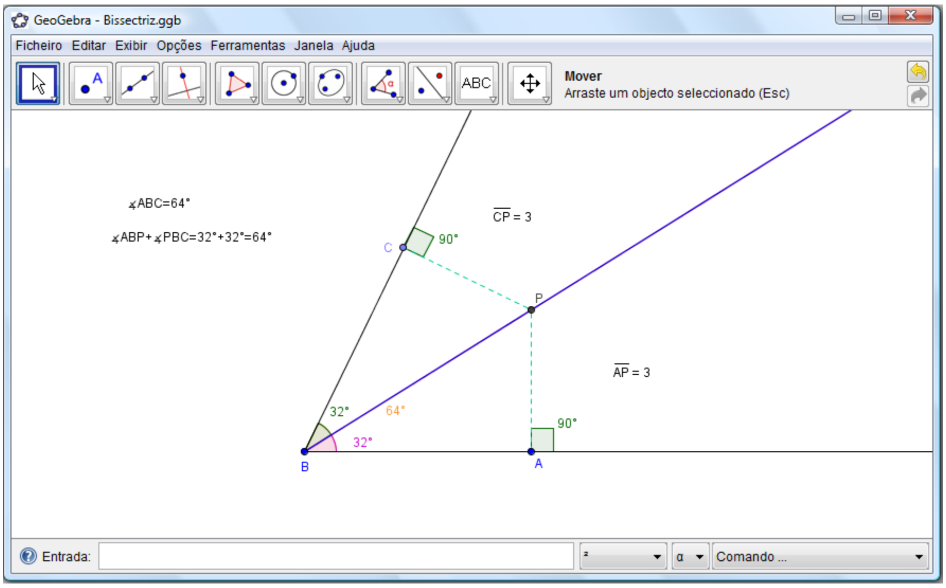
Actividade 5, parte 2 (pág. 64)

Para terminar este capítulo, vamos introduzir o último lugar geométrico escolhido para este trabalho.

Considere um ângulo arbitrário. Designemo-lo por $\measuredangle ABC$ (como na figura abaixo).



A ***bissectriz de um ângulo*** é a semirecta que divide o ângulo em dois ângulos geometricamente iguais, ou seja, têm a mesma amplitude.



Note-se que, qualquer ponto pertencente à bissectriz encontra-se à mesma distância dos lados do ângulo.

Na figura anterior, a semirecta $\dot{B}P$ designa-se por **bissectriz** do ângulo $\measuredangle ABC$.

Como a aplicação das noções deste capítulo, podemos fazer mais uma actividade.

O software que escolhemos traça directamente a *bissectriz* de um ângulo dado (opção bissectriz da janela quatro).

Actividade 6 (pág. 65)

Capítulo 4

Teorema de Pitágoras

Existem várias demonstrações do Teorema de Pitágoras onde se usam áreas de diferentes polígonos regulares.

Teorema de Pitágoras

Dado um triângulo rectângulo. Então, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

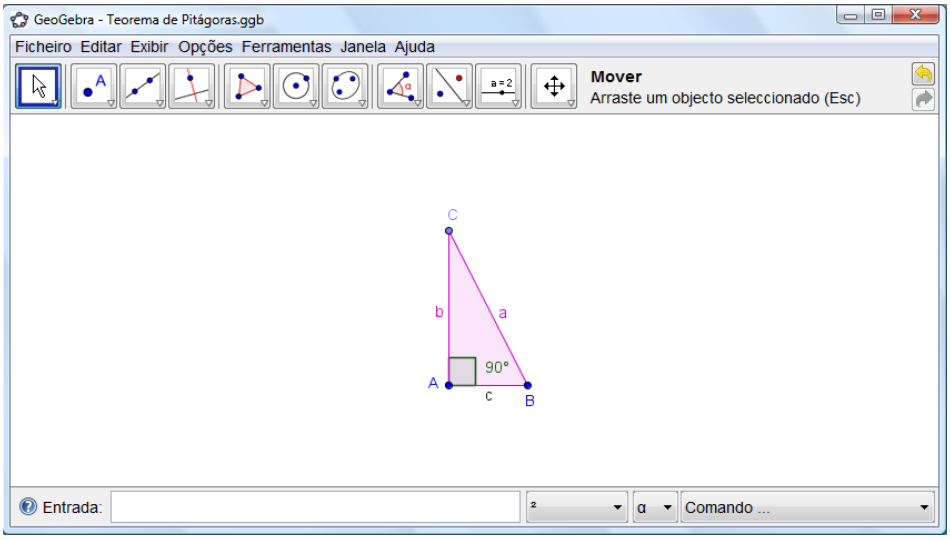
Euclides, segundo a sua interpretação ao teorema, diz que:

A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é a soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.

Neste capítulo apresentamos uma demonstração deste teorema, com recurso ao GeoGebra.

Os conteúdos apresentados neste capítulo do trabalho foram retirados de várias fontes incluindo [1, 2, 3, 16, 17, 18, 19].

Observe a seguinte construção:

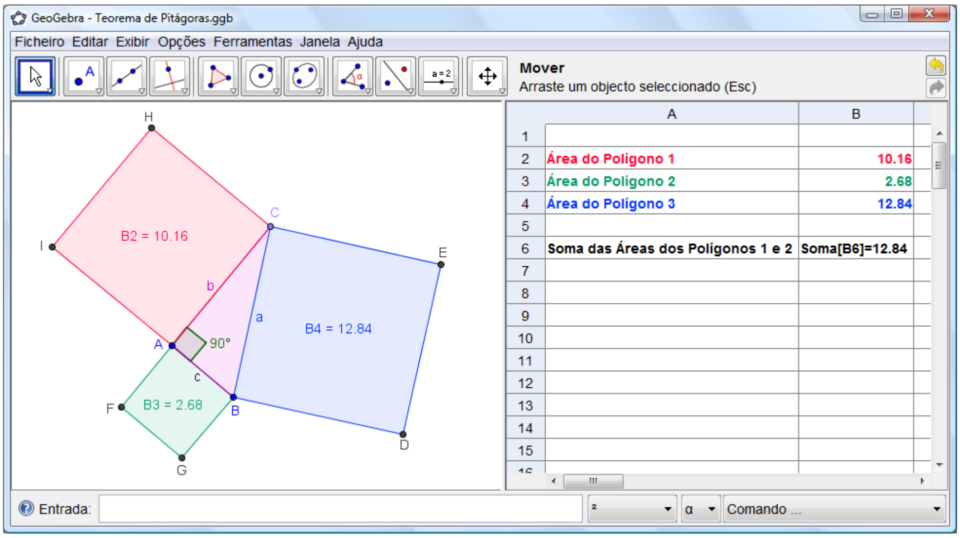


Recorde que um triângulo diz-se **triângulo rectângulo** se um dos seus ângulos internos fôr um ângulo recto. Neste caso, o lado maior (lado que se opõe ao ângulo recto) designa-se por **hipotenusa** e os outros dois lados designam-se por **catetos**.

O triângulo $\Delta[ABC]$ apresentado é rectângulo em A e, como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, conclui-se que os outros dois ângulos são ângulos agudos cuja soma é 90°. No triângulo da figura vamos designar por letras minúsculas a, b e c os comprimentos dos lados que se opõem aos vértices com a respectiva letra.

Historicamente, Pitágoras, observando os mosaicos do chão de um templo, descobriu uma curiosa relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo.

Actividade 7 (pág. 69)



Observando as tabelas obtidas pelos alunos (está um exemplo de uma tabela na figura anterior, na folha de cálculo), verifica-se que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos outros quadrados construídos sobre os catetos.

Assim, conclui-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Desta relação, surge o **Teorema de Pitágoras**.

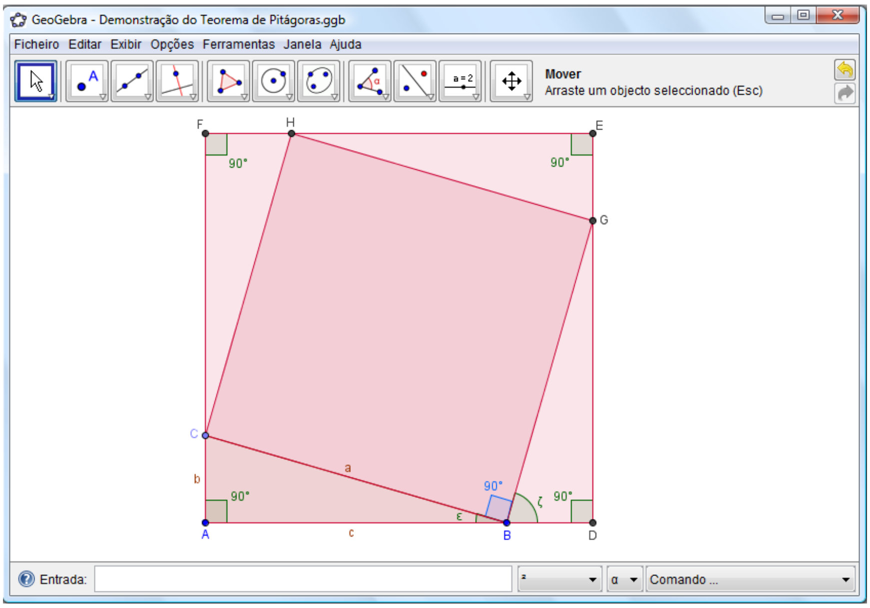
Teorema de Pitágoras

Dado um triângulo rectângulo. Então, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Dem.:

Considere-se um triângulo rectângulo de catetos b e c e hipotenusa a.

Com quatro triângulos rectângulos iguais constroem-se dois quadrados, um de lado igual ao comprimento da hipotenusa (a) do triângulo rectângulo e outro de lado igual à soma dos comprimentos dos dois catetos $(b+c)$ do triângulo rectângulo dado, como mostra a seguinte figura.



Queremos provar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Observe-se que, no quadrilátero $[CBGH]$ todos os seus lados têm o mesmo comprimento por corresponderem aos comprimentos das hipotenusas (a) dos quatro triângulos rectângulos iguais.

Por outro lado, os seus ângulos internos têm de amplitude 90°, porque:

$$\measuredangle CBG + \varepsilon + \zeta = 180^\circ$$

E, como $\varepsilon + \zeta = 90^\circ$, então:

$$\measuredangle CBG + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \measuredangle CBG = 180^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \measuredangle CBG = 90^\circ$$

Portanto, o quadrilátero $[CBGH]$ é um quadrado.

Vamos, agora, calcular a área do quadrado $[ADEF]$.

Repare-se que a área do quadrado $[ADEF]$ é igual à área do quadrado $[CBGH]$ mais a área dos quatro triângulos rectângulos iguais ($\Delta[ABC]$, $\Delta[DGB]$, $\Delta[EHG]$, $\Delta[FCH]$).

Ou seja,

$$A_{Quadrado\ [ADEF]} = A_{Quadrado\ [CBGH]} + 4 \times A_{\Delta[ABC]}$$

$$(b+c)^2 = a^2 + 4 \times \frac{b \times c}{2} \Leftrightarrow b^2 + 2 \times b \times c + c^2 = a^2 + 2 \times b \times c \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

(c.q.m.)

Também é verdadeiro o recíproco do Teorema de Pitágoras:

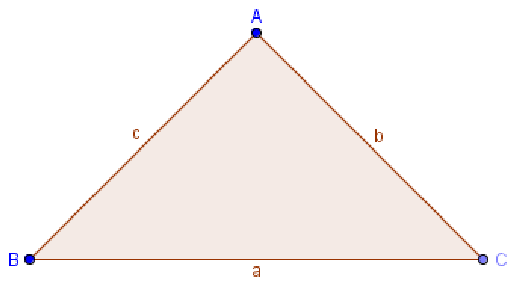
Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é um **triângulo rectângulo**.

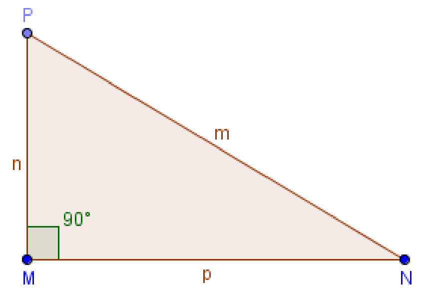
Dem.:

Considere-se o triângulo $\Delta[ABC]$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

Queremos provar que o triângulo $\Delta[ABC]$ é rectângulo.

Construa-se um triângulo $\Delta[MNP]$ rectângulo no ponto M e cujos seus catetos MP e MN sejam iguais a AC e AB, respectivamente.





Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$m^2 = n^2 + p^2$$

Como o lado $MP = AC$ e $MN = AB$, tem-se:

$$m^2 = b^2 + c^2$$

Por outro lado, por hipótese, como $a^2 = b^2 + c^2$, obtém-se:

$$m^2 = a^2 \Leftrightarrow m = \sqrt{a^2} \Leftrightarrow m = a$$

Logo, o triângulo $\Delta[ABC]$ é igual ao triângulo $\Delta[MNP]$ e, consequentemente, o triângulo $\Delta[ABC]$ é rectângulo (porque, o triângulo $\Delta[MNP]$ é rectângulo e $\Delta[MNP] = \Delta[ABC]$).

(c.q.m.)

Através do Teorema de Pitágoras, é sempre possível determinar a medida de um lado de um triângulo rectângulo conhecendo a medida dos outros dois lados do mesmo triângulo.

Curiosidade: Investigue que relação poderia estabelecer se construísse, sobre cada lado de um triângulo rectângulo, outros polígonos regulares ou não (por exemplo, triângulos equiláteros ou semicircunferências). A relação entre as áreas mantém-se?

Capítulo 5

5.1. Funções: breve introdução

Um dos conceitos mais importantes da Matemática é o conceito de função.

Ao longo dos tempos, o conceito de função evoluiu muito e Grandes contributos foram dados, no decorrer da sua evolução, por alguns Matemáticos, tais como, Newton $(1642 - 1727$, Leibniz $1646–1716$, Euler $1707–1783$ e Decartes $1596–1650$. Dando-se sentido ao cálculo algébrico e ao conceito de função, bem como revolucionando o simbolismo algébrico.

As definições apresentadas nesta secção foram retiradas de várias fontes incluindo $[3, 4, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]$.

Chama-se ***função*** a uma correspondência unívoca de um conjunto A num conjunto B (isto é, a cada elemento do conjunto A faz corresponder um e um só elemento do conjunto B). Para uma função f escrevemos $f: A \to B$.

Pela definição de função, a cada elemento x do **domínio** ou **conjunto de partida** corresponde um e um só elemento y do **conjunto de chegada** ao qual se chama **imagem do objecto x por meio da função f**. Representa-se por $\boldsymbol{f(x)}$ (ou seja, $\boldsymbol{y = f(x)}$). Caracterizamos uma função f do seguinte modo:

$$\boldsymbol{f: A \to B}$$
$$\boldsymbol{x \longmapsto y = f(x)}$$

onde $f(x)$ é a expressão designatória da função.

Ao conjunto de todas as imagens chama-se **contradomínio da função f** e denota-se por $f(A)$, sendo A o domínio de f. Temos

$$\boldsymbol{f(A) = \{y \in B : y = f(x), com\ x \in A\}}$$

Quando $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ forem ambos subconjuntos de $\mathbb{R}$ diz-se que a função $\boldsymbol{f}$ é uma ***função real de variável real***.

5.2. Função afim

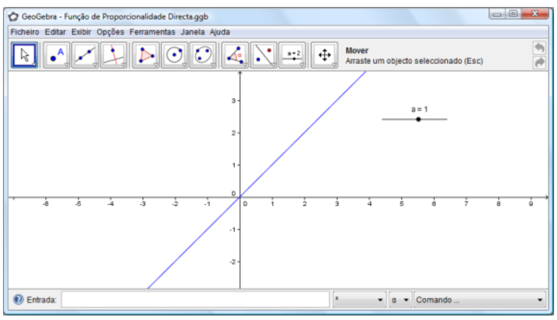
Chama-se ***função afim*** a toda a função de domínio $\mathbb{R}$ e que tem expressão analítica $f(x) = ax + b$ (ou $y = ax + b$), com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$.

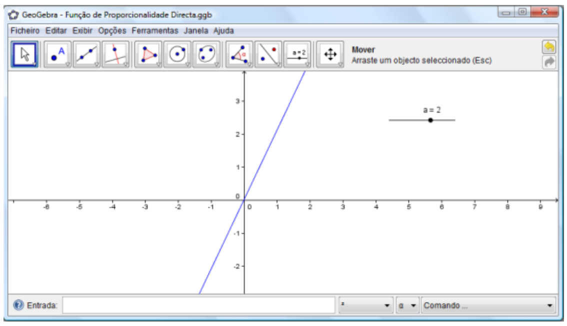
Os casos particulares da função afim, são:

- $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$

Actividade 8, parte 1 (pág. 71)

O professor com o seu programa do GeoGebra (previamente elaborado) abaixo indicado, faz variar o parâmetro a.



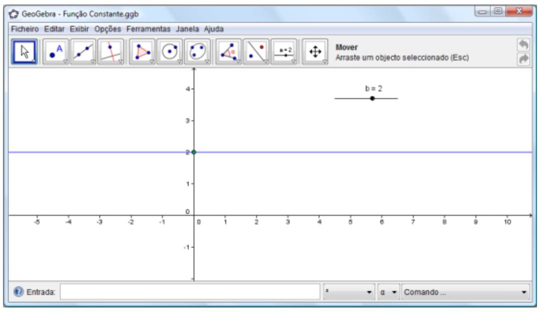


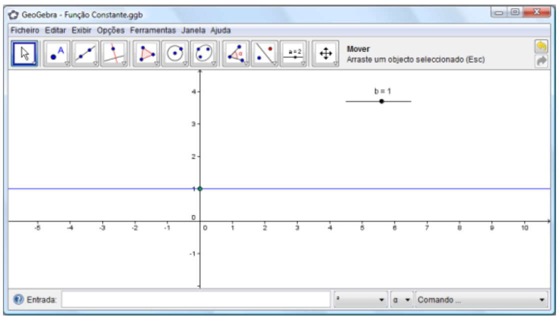
Estando de acordo ou rectificando as respostas à questão da actividade 8, parte 1, o professor concluí que cada elemento da família de funções do tipo $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tem o seu gráfico constituído por pontos que se situam sobre uma recta contendo a origem do referencial cartesiano.

A cada elemento da família anterior chamamos **função de proporcionalidade directa**. Ao valor da constante a chamamos **constante de proporcionalidade**.

Actividade 8, parte 2 (pág. 74)

O professor com o seu programa do GeoGebra (previamente elaborado) abaixo indicado, faz variar o parâmetro b.





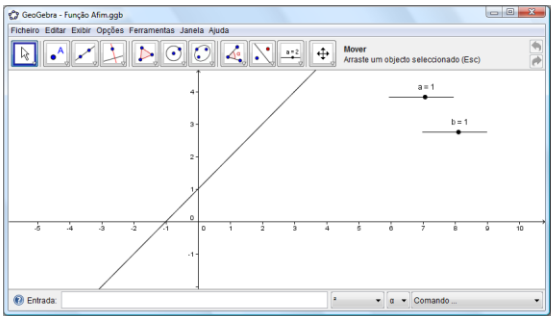
Estando de acordo ou rectificando as respostas à questão da actividade 8, parte 2, o professor concluí que cada elemento da família de funções do tipo $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$, tem o seu gráfico constituído por pontos que se situam sobre uma recta paralela ao eixo das abcissas (ou eixo dos xx).

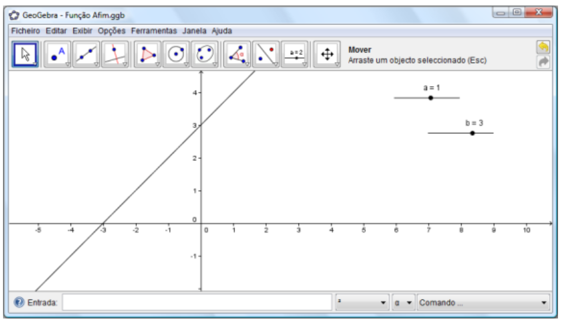
A cada elemento da família anterior chamamos **função constante**.

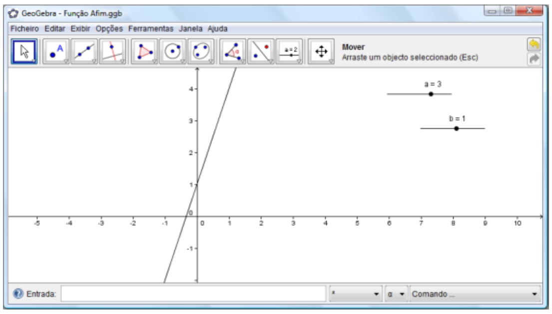
Ao valor de b chamamos **ordenada na origem**.

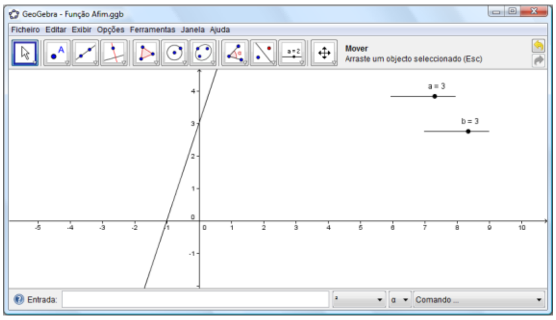
Actividade 8, parte 3 (pág. 76)

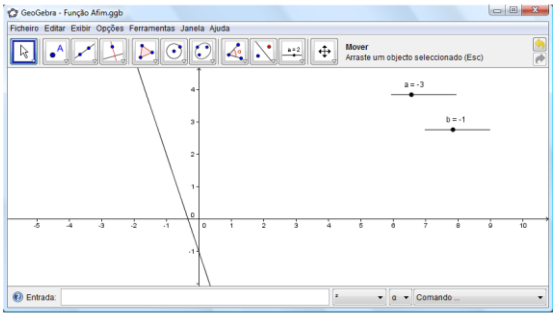
O professor com o seu programa do GeoGebra (previamente elaborado) abaixo indicado, faz variar o parâmetro a e o parâmetro b.

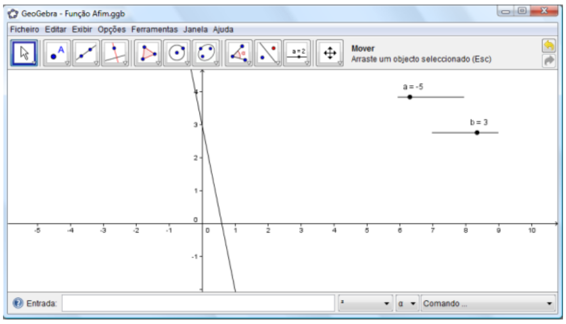


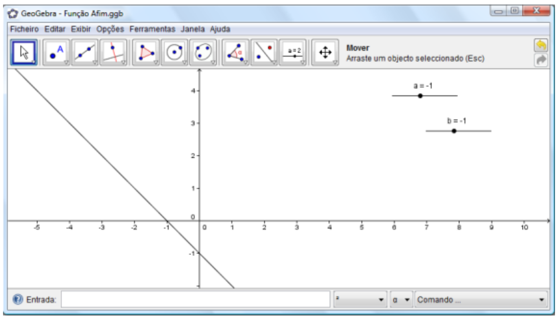


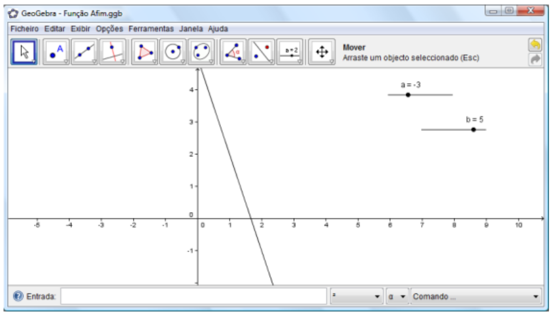












Estando de acordo ou rectificando as respostas à questão da actividade 8, parte 3, o professor concluí que cada elemento da família de funções do tipo $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$, tem o seu gráfico constituído por pontos que se situam estão sobre uma recta oblíqua que intersecta o eixo das ordenadas (ou eixo dos yy) no ponto $(0, b)$. Concluímos também que quando $a > 0$ a função é **crescente**, quando $a < 0$ a função é **decrescente** e quando $a = 0$ o gráfico da função é uma recta paralela ao eixo das abcissas (eixo dos xx) (ou seja, a função é **constante**).

A inclinação de uma recta no referencial cartesiano é o ângulo definido entre a recta e o eixo das abcissas (eixo dos xx).

Este parâmetro está directamente relacionado com a inclinação da recta relativamente ao eixo das abcissas (ou eixo dos xx).

5.3. Função quadrática

Chama-se ***função quadrática*** a toda a função de domínio $\mathbb{R}$ de equação $f(x) = ax^2 + bx + c$ (ou $y = ax^2 + bx + c$), com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Como veremos mais adiante, este tipo de funções tem como gráfico uma parábola, que é uma curva que surge em muitas situações da vida corrente: uma bola que bate no chão e salta, um jacto de água que sai de uma mangueira ou de uma fonte, uma pedra arremessada.

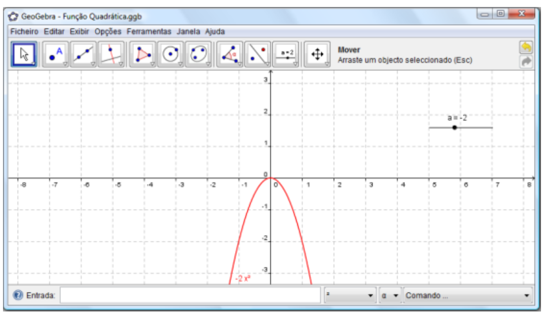
Vamos de seguida estudar as características e propriedades desta família de funções.

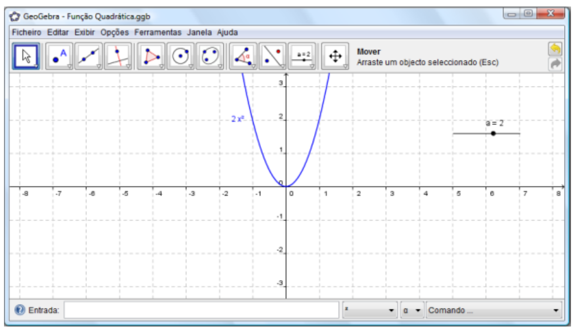
Os casos particulares da função quadrática, são:

- $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $f(x) = a(x-h)^2$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $h \in \mathbb{R}$
- $f(x) = ax^2 + k$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $k \in \mathbb{R}$

Actividade 9, parte 1 (pág. 78)

O professor com o seu programa do GeoGebra (previamente elaborado) abaixo indicado, faz variar o parâmetro a.





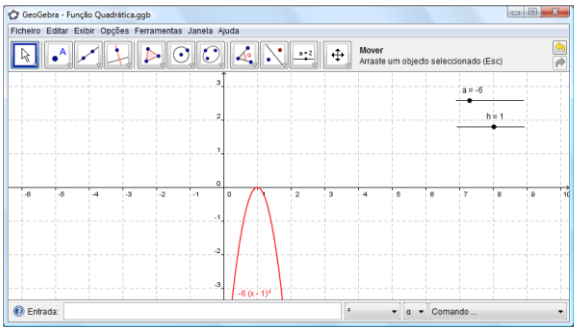
Estando de acordo ou rectificando as respostas à questão da actividade 9 parte 1, o professor concluí que cada elemento da família de funções do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, têm o seu gráfico constituído por pontos que se situam sobre uma parábola de vértice em $(0,0)$ e cujo o seu eixo de simetria é a recta de equação $x = 0$. Relativamente ao coeficiente a da expressão analítica da função, este influencia o sentido da concavidade da parábola.

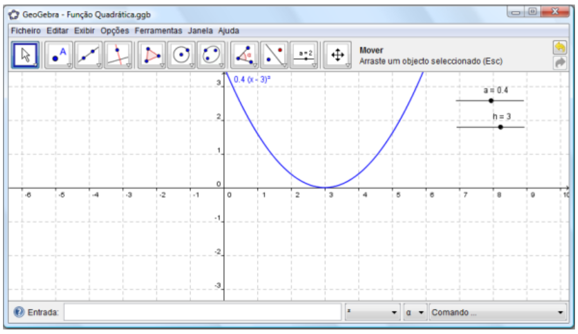
Concluímos também que se $a > 0$ a parábola tem a concavidade voltada para cima; se $a < 0$ a parábola tem a concavidade voltada para baixo. O seu valor absoluto influencia a abertura da parábola, ou seja, quanto maior é o valor absoluto do coeficiente a, menor é a abertura da parábola e vice-versa.

Podemos, ainda observar, que se $|a| > 1$, a parábola é "mais estreita", ou seja, tem os seus ramos mais próximos do eixo de simetria; se $0 < |a| < 1$, a parábola é "mais larga", ou seja, tem os seus ramos mais afastados do seu eixo de simetria.

Actividade 9, parte 2 (pág. 81)

O professor com o programa do GeoGebra abaixo indicado, faz variar os parâmetros a e h.

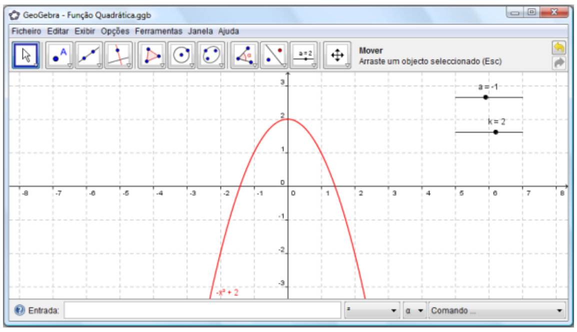


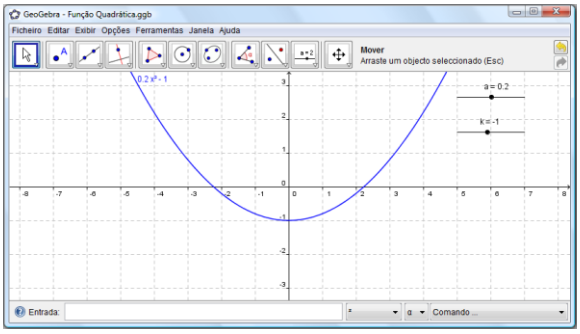


Conclui-se que a família de funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2$ (ou $y = a(x-h)^2$), com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $h \in \mathbb{R}$, são parábolas que sofrem uma translação, sobre o eixo das abcissas (isto é, eixo dos xx), associada ao vector $(h;\ 0)$ e cujo eixo de simetria é a recta de equação $x = h$.

Actividade 9, parte 3 (pág. 84)

O professor com o programa do GeoGebra abaixo indicado, faz variar os parâmetros a e h.





Conclui-se que a família de funções do tipo $f(x) = ax^2 + k$ (ou $y = ax^2 + k$), com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $k \in \mathbb{R}$, são parábolas que sofrem uma translação, sobre o eixo das ordenadas (isto é, eixo dos yy), associada ao vector $(0;\ k)$ e cujo eixo de simetria é a recta de equação $x = 0$.

Com a actividade 10, os alunos podem observar e conjecturar a influência dos valores dos parâmetros a, h e k nos diferentes tipos de gráficos da função quadrática.

Toda a função da família de funções $\boldsymbol{y = a(x - h)^2 + k}$, com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$, tem por gráfico uma parábola de vértice $\boldsymbol{V_\circlearrowleft(h, k)}$.

O gráfico de qualquer função desta família de funções pode ser obtido do gráfico $y = ax^2$ pela translação associada ao vector $\vec{u}_\circlearrowleft(h;\ 0)$, seguida da translação associada ao vector $\vec{v}_\circlearrowleft(0;\ k)$, o que equivale a uma única translação associada ao vector de coordenadas $(h;\ k)$. Assim, com a função quadrática definida desta forma se determina o vértice da parábola e se indica o gráfico desta função à custa da parábola de equação $y = x^2$.

Por exemplo, para se obter o gráfico da função definida por $y = -2(x - 4)^2 - 1$ a partir do gráfico de $y = x^2$, começa-se por multiplicar a ordenada de cada ponto por 2 e obtém-se o gráfico $y = 2x^2$. A seguir, a parábola de equação $y = 2x^2$ sofre uma translação associada ao vector de coordenadas $(4;\ 0)$. Seguida de outra translação associada ao vector $(0;\ 1)$. Por fim, o gráfico de $y = -2(x - 4)^2 - 1$ é simétrico em relação ao eixo Ox do gráfico $y = 2(x - 4)^2 + 1$.

- **Funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$**

E, se a função for definida pela expressão do segundo grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $h \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$? Quais serão as coordenadas do vértice da parábola? Qual é o seu eixo de simetria?

Para responder a estas perguntas, basta resolver apenas o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=ax^2+bx+c \\ y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c-c=ax^2+bx \\ y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=ax^2+bx \\ y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=x(ax+b) \\ y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(ax+b)=0 \\ y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee ax+b=0 \\ y=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee ax=-b \\ y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee \frac{ax}{a}=-\frac{b}{a} \\ y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=-\frac{b}{a} \\ y=c \end{cases}$$

Soluções do sistema de equações:

$$\left\{(0; c), \left(-\frac{b}{a}; c\right)\right\}$$

A abcissa do vértice é o valor médio entre 0 e $-\frac{b}{a}$, isto é:

$$x_v = \frac{0+\left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Assim, as coordenadas do vértice da parábola, são:

$$\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

E, o eixo de simetria da parábola é a recta de equação $x = -\frac{b}{2a}$.

Actividade 10, (pág. 88)

Conclusão

Sendo a Matemática uma das ciências mais antigas e a mais antiga de todas as disciplinas escolares a sua aprendizagem deve decorrer do trabalho realizado pelo aluno e o mesmo estruturado, por actividades criadas pelo professor proporcionando desta forma diversos tipos de experiências matemáticas através da resolução de algumas actividades de investigação.

Por outro lado, o professor deve realizar diferentes actividades para apoiar os alunos na sua resolução e aprendizagem.

Mas não só, também o ensino-aprendizagem da Matemática deve prever a discussão de estratégias e promover o raciocínio e a comunicação matemática.

Assim, ao longo deste relatório de estágio pedagógico foram criadas diferentes actividades com o software de Geometria Dinâmica, Geogebra, por ser um programa gratuito e acessível aos alunos do 3º ciclo do ensino básico e ensino secundário, as quais permitem ao aluno raciocinar indutivamente procurando generalizar propriedades encontradas nessas mesmas actividades.

Este relatório exigiu-me muitas horas de trabalho tanto na recolha como na selecção e organização, permitindo alargar e consolidar os meus conhecimentos na área da Geometria. No entanto, tenho pena não poder aplicar estas actividades criadas aos alunos.

Espero, que ao longo deste relatório, ter despertado alguma curiosidade em relação à utilidade do GeoGebra no ensino-aprendizagem da Matemática.

Bibliografia

[1] Araújo, Paulo Ventura, “Curso de Geometria”, 3.ª Edição: Outubro de 2002.

[2] P. F. António do Nascimento, “Elementos de Geometria”, n.º 37878, Tip. Silvas, Lda. – Lisboa.

[3] H. Markus, H. Judith, “Ajuda GeoGebra – Manual Oficial da Versão 3.2”, Tradução e Adaptação para Português de Portugal de António Ribeiro, Modificação realizada em Maio de 2009.

[4] A. V. Fernando, “História das Matemáticas na Antiguidade”, Livrarias Aillaud e Bertrand, 1732, Paris – Lisboa, pp. 178 – 200.

[5] V. Eduardo, “Geometria - Temas Actuais: Materiais para Professores”, Instituto de Inovação Educacional, 1.ª Edição: Julho de 1998, 1.ª Reimpressão: Maio de 2000, pp. 41 – 55.

[6] E. Maria Fernanda, S. Carlos Correia, Q. João Filipe, C. Maria José, S. Maria do Céu, “História da Matemática”, Universidade Aberta, 2000, pp. 280 - 313.

[7] P. Natália Bebiano, “Matemática ou Mesas, Cadeiras e Canecas de Cerveja”, Gradiva, 2.ª Edição: Outubro de 2001, pp. 113 – 131.

[8] J. S. Dirk, “História Concisa das Matemáticas”, Ciência Aberta - Gradiva, 2.ª Edição revista e ampliada: Abril de 1992, 3.ª Edição: Janeiro de 1997, pp. 71 – 115.

[9] Boyer, Carl B., “História da Matemática”, Editora Edgard Blücher, Lda., 2.ª Edição / 3.ª Reimpressão – 2001, pp. 43 – 56.

[10] M. B. David, “The History of Mathematics – An Introductin”, University of New Hampshire, 1985, pp. 129-231.

[11] P. João Pedro, S. Lurdes, M. G. Henrique, B. Ana, G. Fátima, S. Hélia, M. Luís, G. M. Maria Eugénia, O. Paulo Alexandre, “Programa de Matemática do Ensino Básico”, 2010, Ministério da Educação, DGIDC – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

[12] F. N. Maria Augusta, L. António; P. S. António; N. S. Jorge; “Matemática 7 – 7.ºAno”, Porto Editora, 1.ª Edição / 1.ª Tiragem: 2010. (Parte I e Parte II)

[13] C. Alexandra, A. Matilde, Revisão Científica: S. Ana Jacinta, “Matematicamente Falando 7 – 7.ºAno”, Areal Editores, 1.ª Edição / 1.ª Tiragem: 2010.

[14] C. P. Iolanda, F. C. Olga, “Matemática em Acção – 7.º Ano”, Lisboa Editora, 1.ª Edição / 1.ª Tiragem: 2002. (Volume I e Volume II)

[15] F. Domingos, V. Isabel, C. S. Jaime, F. Lima, P. Teresa, “Matemática 7”, Areal Editores, 1.ª Edição: 2002. (Parte I e Parte II)

[16] F. N. Maria Augusta, L. António, P. S. António, N. S. Jorge, “Matemática 8 – 8.ºAno”, Porto Editora, 1.ª Edição / 1.ª Tiragem: 2010. (Parte I e Parte II)

[17] C. Alexandra, A. Matilde, Revisão Científica: S. Ana Jacinta, “Matematicamente Falando 8 – 8.ºAno”, Areal Editores, 1.ª Edição / 2.ª Tiragem: 2011.

[18] F. N. Maria Augusta, G. Luís, N. Armando, “Matemática 8”, Porto Editora, 1.ª Edição / 10.ª Reimpressão: 2007. (1.ª Parte e 2.ª Parte)

[19] C. P. Iolanda, F. C. Olga, “Matemática em Acção – 8.º Ano”, Lisboa Editora, 1.ª Edição / 6.ª Reimpressão: 2007. (Parte I e Parte II)

[20] F. N. Maria Augusta, G. Luís, N. Armando; “Matemática 9”, Porto Editora, 1.ª Edição / 9.ª Reimpressão: 2009. (1.ª Parte e 2.ª Parte)

[21] F. Luísa, A. Alexandre, “Matemática Dinâmica 9”, Porto Editora, 1.ª Edição / 8.ª Reimpressão: 2009. (1.ª Parte, 2.ª Parte e 3.ª Parte)

[22] C. Maria Alexandra, G. A. Matilde, “Matematicamente Falando 9”, Areal Editores, 1.ª Edição / 1.ª Tiragem: 2004. (Parte I e Parte II)

[23] C. P. Iolanda, F. C. Olga, “Matemática em Acção – 9.º Ano”, Lisboa Editora, 1.ª Edição / 4.ª Reimpressão: 2006. (Parte I e Parte II)

[24] F. N. Maria Augusta, G. Luís, L. António, N. S. Jorge, “Matemática A – 10.ºAno”, Porto Editora, 1.ª Edição / 2.ª Tiragem: 2010. (Parte I e Parte II)

[25] C. Belmiro, R. Ermelinda, “Novo Espaço 10 – Matemática A”, Porto Editora, 1.ª edição / 1.ª Tiragem: 2010. (Parte I e Parte II)

[26] B. J. Ana Maria, B. A. Conceição, C. Cristina, F. Graziela, B. Judite, S. Manuela, "Matemática A – 10.ºAno", Areal Editores, 1.ª Edição / 1.ª Tiragem: 2010. (Parte I, Parte II e Parte III)

[27] C. Belmiro, R. Ermelinda, "Novo Espaço 11 – Matemática A", Porto Editora, 1.ª Edição / 3.ª Tiragem: 2011. (Parte I e Parte II)

[28] F. N. Maria Augusta, G. Luís, M. Ana, Revisão Científica: M. Rogério, "Matemática A – 11.ºAno", Porto Editora, 1.ª Edição / 6.ª Reimpressão: 2010. (Parte I, Parte II e Parte III)

[29] F. N. Maria Augusta, P. Albino, N. S. Jorge, "Matemática A – 11.ºAno", Porto Editora, 1.ª Edição / 1.ª Tiragem: 2011. (Parte I e Parte II)

[30] B. J. Ana Maria, B. A. Conceição, F. Graziela, B. Judite, C. Cristina, S. Manuela, "Matemática A – 11.ºAno", Areal Editores, 1.ª Edição / 1.ª Tiragem: 2011. (Parte I, Parte II e Parte III)

[31] B. J. Ana Maria, B. A. Conceição, F. Graziela, B. Judite, "Infinito 11 - Matemática A", Areal Editores, 1.ª Edição / 5.ª Reimpressão: 2009. (Parte I, Parte II e Parte III)

[32] C. Belmiro, R. Lurdes do Céu, R. Ermelinda, "Espaço 11 – Matemática A – 11.º Ano", Edições Asa, 1.ª Edição: 2004.

[33] C. Belmiro, R. Lurdes do Céu, R. Ermelinda, "Espaço 12 – Matemática A – 12.º Ano", Edições Asa, 2.ª Edição: 2006.

[34] B. J. Ana Maria, B. A. Conceição, F. Graziela, B. Judite, "Infinito 12 – Matemática A", Areal Editores. (Parte I, Parte II e Parte III)

[35] F. N. Maria Augusta, G. Luís, M. Ana, "Matemática A – 12.ºAno", Porto Editora. (Parte I, Parte II e Parte III)

Anexos

As actividades que a seguir são apresentadas, têm como objectivo o estudo por parte do aluno, com o auxílio do GeoGebra, permitindo o enriquecimento do estudo de alguns conteúdos de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, através da manipulação das construções e visualizando os efeitos dessas mesmas construções. Mas também fazer explorações no âmbito da Geometria, da Álgebra e do Cálculo. Em algumas destas actividades estará presente o raciocínio indutivo (isto é, formulação de conjecturas a partir dos dados obtidos) e o raciocínio dedutivo (isto é, demonstração dessa conjectura).

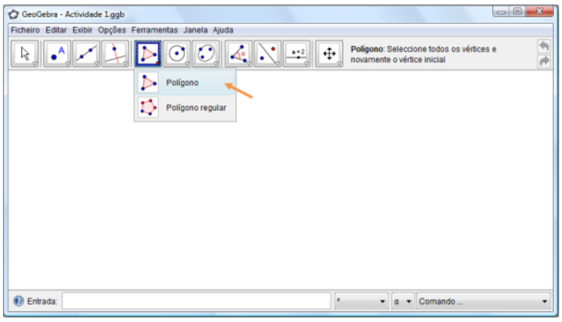
A **actividade 1** tem como objectivo que o aluno conjecture sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo arbitrário.

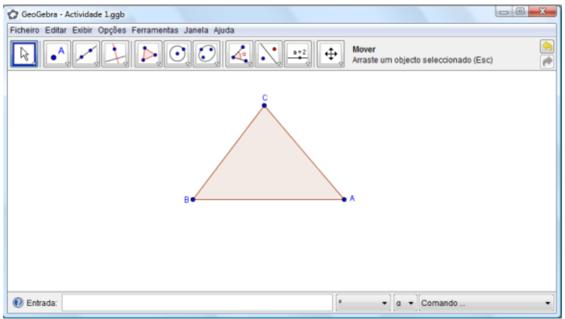
Actividade 1

Soma dos ângulos internos de um triângulo

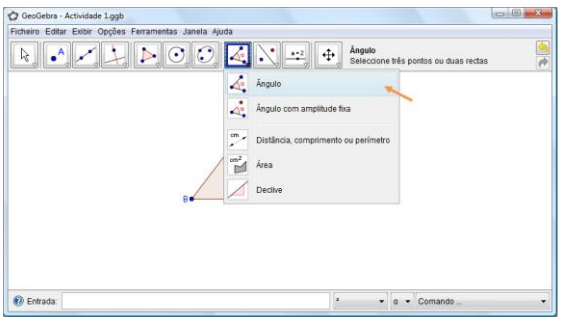
Parte 1

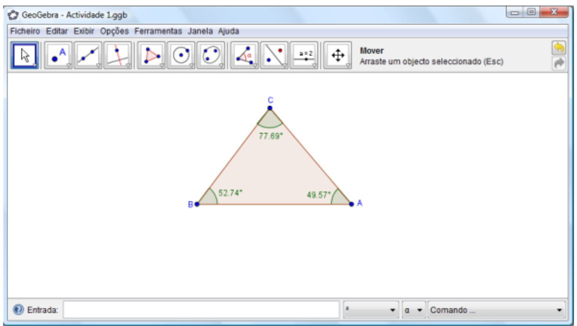
Passo 1: Construa um triângulo (o GeoGebra vai designá-lo por $\Delta[ABC]$).





Passo 2: Meça a amplitude de cada ângulo interno do triângulo e registe-os na tabela.





Amplitudes dos Ângulos Internos do Triângulo			Soma de todas as Amplitudes
$\measuredangle ABC$	$\measuredangle BCA$	$\measuredangle CAB$	

Passo 3: Arraste um dos vértices do triângulo construído anteriormente e obtenha um novo triângulo.

Passo 4: Repita todos os passos anteriores, até completar a tabela.

Questão 1: Qual o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo?

Resposta: 180°

Questão 2: O valor obtido para a soma das amplitudes dos ângulos internos depende do tipo de triângulo[12] que temos?

Resposta: Não.

Questão 3: O que podemos concluir?

Resposta: Concluímos que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo arbitrário é igual a 180°.

[12] Recorde que: podemos classificar os triângulos **quanto aos lados** (**Equiláteros** – quando têm os três lados iguais; **Isósceles** – quando têm dois lados iguais. [Os lados iguais do triângulo isósceles chamam-se **braços do triângulo** e o outro é a **base**]; **Escalenos** – quando têm os três lados desiguais.) e **quanto aos ângulos** (**Rectângulos** – se têm um ângulo recto. [O lado oposto ao ângulo recto de um triângulo rectângulo tem o nome de **hipotenusa** e os outros dois são os **catetos**]; **Acutângulos** – se têm todos os ângulos agudos; **Obtusângulos** – se têm um ângulo obtuso).

Parte 2

Para mostrar que a conjectura anterior é verdadeira, segue cuidadosamente os seguintes passos:

Passo 1: Constrói um triângulo qualquer, por exemplo $\Delta[ABC]$, e mede a amplitude de cada um dos três ângulos internos.

Passo 2: Trace a recta que passa pelo vértice C e é paralela ao lado AB.[13]

Passo 3: Determine as amplitudes dos ângulos formados com a recta e os lados do triângulo.

Passo 4: Relacione as amplitudes anteriores com os ângulos internos do triângulo.

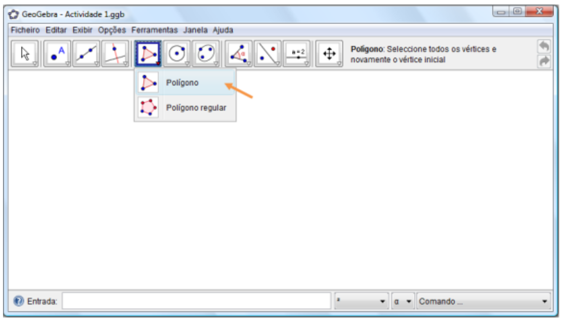
Sugestão: Use a noção de ângulos alternos internos.

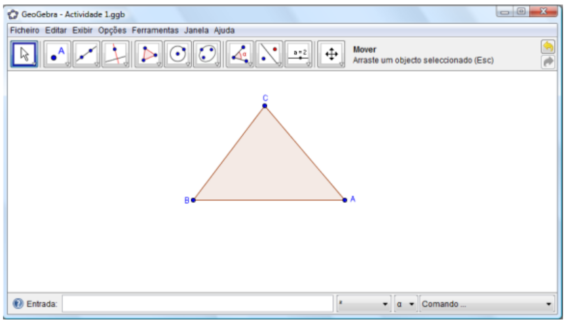
A seguinte actividade tem como objectivo que o aluno aplique o seu conhecimento sobre relações entre ângulos de lados paralelos e rectas paralelas. Justifique o seu raciocínio a partir da informação obtida das suas conjecturas. No fim da actividade, o aluno deve se capaz de relacionar ângulos internos e externos de um triângulo.

Actividade 2

Amplitude de um ângulo externo

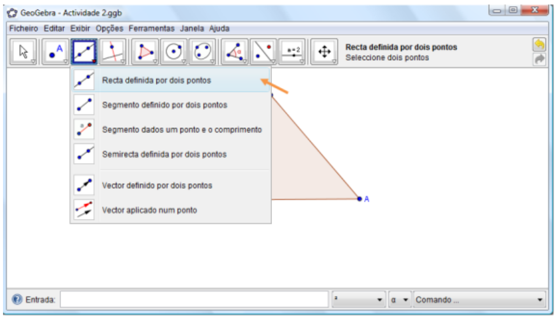
Passo 1: Construa um triângulo (o GeoGebra vai designá-lo por $\Delta[ABC]$).

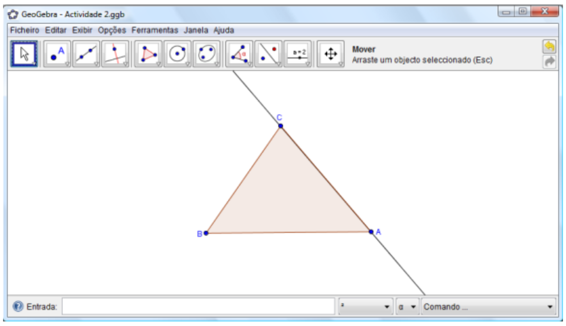




Passo 2: Trace a recta construída sobre um dos lados do triângulo (por exemplo, sobre o lado $[\boldsymbol{AB}]$).

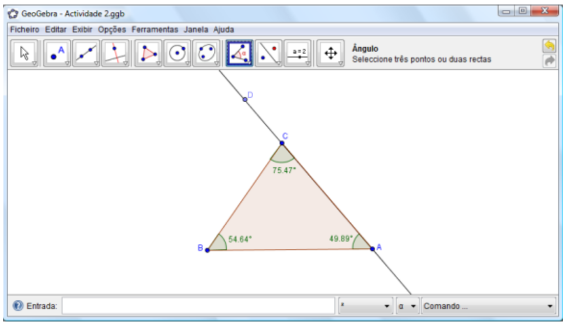
[13] Poderá fixar outro vértice e considerar o lado formado pelos outros dois vértices.

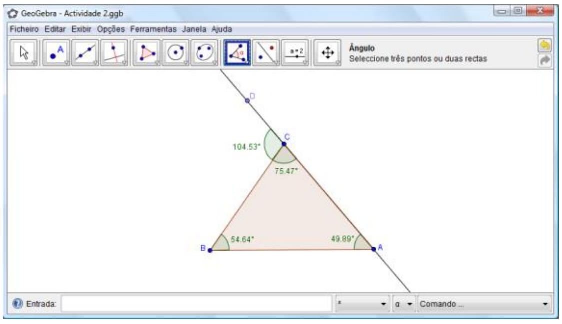




Passo 3: Meça as amplitudes de todos os ângulos internos.

Passo 4: Meça a amplitude de um ângulo externo, escolhido tendo em conta a recta anterior (por exemplo, o ângulo $\measuredangle DAC$; para isto é necessário marcar um ponto qualquer da recta que esteja fora do lado do triângulo escolhido).





Passo 5: Complete a tabela abaixo.

$\measuredangle \boldsymbol{DAC}$	**Soma:** $\measuredangle \boldsymbol{ABC}+\measuredangle \boldsymbol{ACB}$

Passo 6: Arraste um dos vértices do triângulo construído anteriormente de modo a obter um novo triângulo.

Passo 7: Repita algumas vezes todos os passos anteriores.

QUESTÃO: Que relação existe entre um ângulo externo do triângulo e o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes do triângulo?

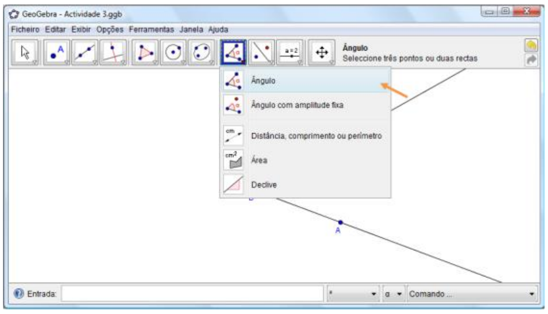
Resposta: Podemos observar que a amplitude de um ângulo externo de um triângulo arbitrário é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

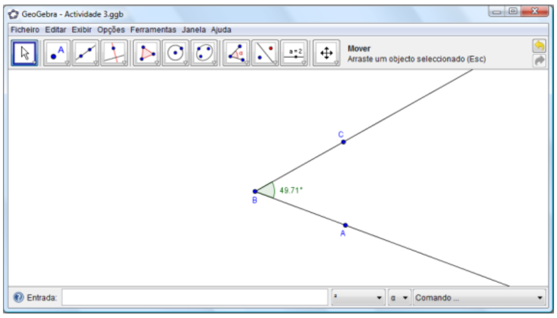
A próxima actividade é muito simples porque apenas exige ao aluno que meça amplitudes e conjecture.

Actividade 3

Amplitude de ângulos verticalmente opostos

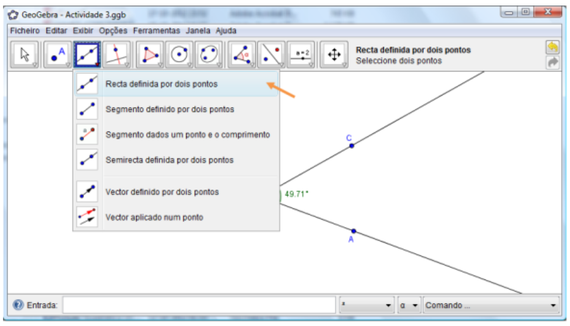
Passo 1: Construa um ângulo $\measuredangle ABC$ (traçando também os seus lados).

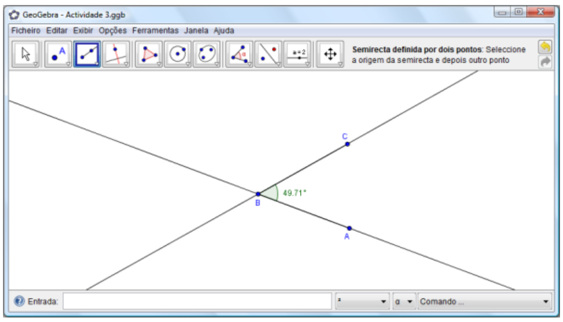




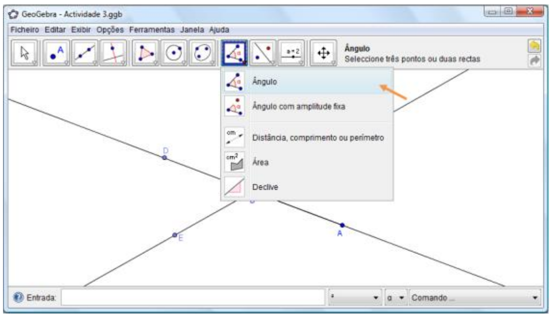
Passo 2: Construa o ângulo verticalmente oposto ao ângulo construído (ver definição).

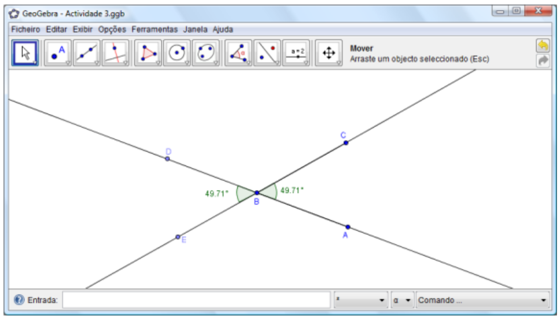
Sugestão: Prolongue os lados do ângulo construído usando a opção no GeoGebra de rectas definidas por dois pontos.





Passo 3: Meça o ângulo mais pequeno, daqueles que obteve com a recta construída.





QUESTÃO: Que relação existe entre a amplitude dos dois ângulos medidos anteriormente? **Resposta:** As amplitudes são iguais.

Passo 4: Repita todos os passos anteriores, várias vezes.

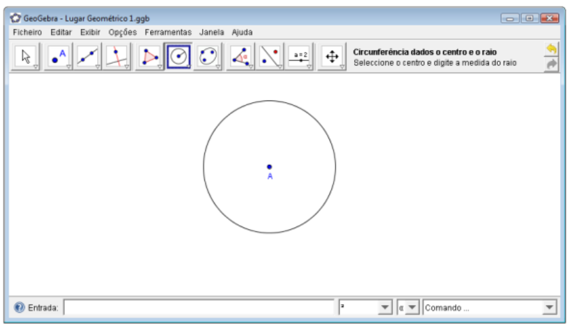
A **actividade 4** tem como objectivo resolver geometricamente problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos, identificar o conjunto de pontos do plano ou do espaço que estão a uma distância d (ou a uma distância menor que d ou maior que d) de um ponto dado, reconhecer que o conjunto de pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é a recta perpendicular ao meio do segmento, bem com descrever e justificar o processo usado na resolução de um problema.

Actividade 4

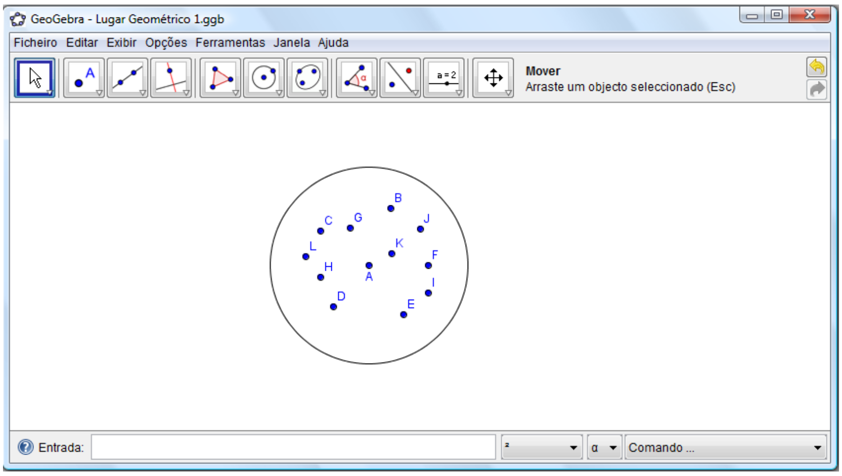
Lugares Geométricos: Circunferência, Círculo e Coroa Circular

Parte 1

Passo 1: Começa por construir uma circunferência de centro num ponto à escolha e raio à sua escolha.



Passo 2: Marque vários pontos cuja distância ao centro é menor que o raio escolhido.



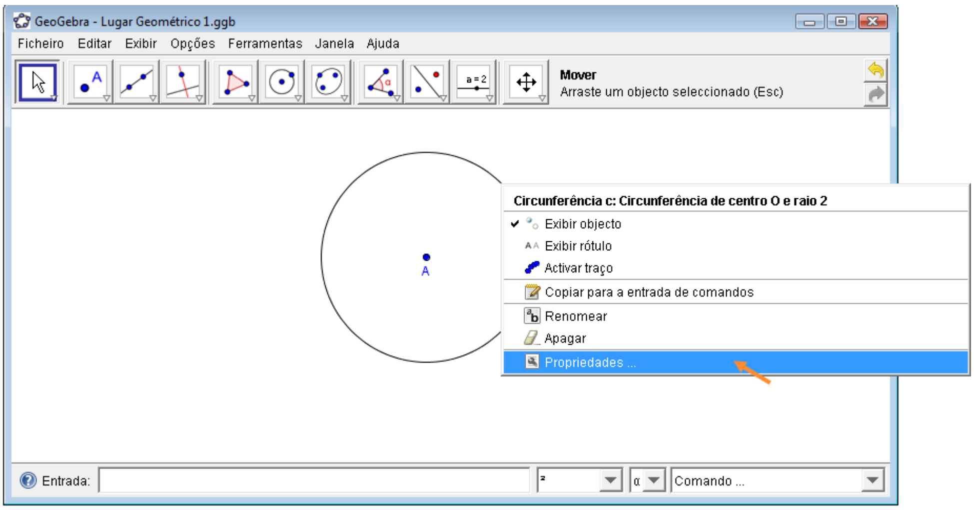
QUESTÃO: Quantos pontos pode marcar respeitando o pedido do passo anterior?

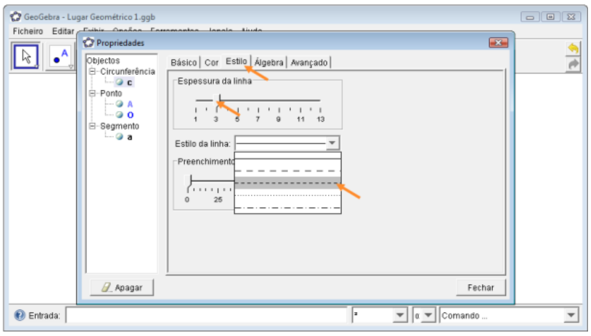
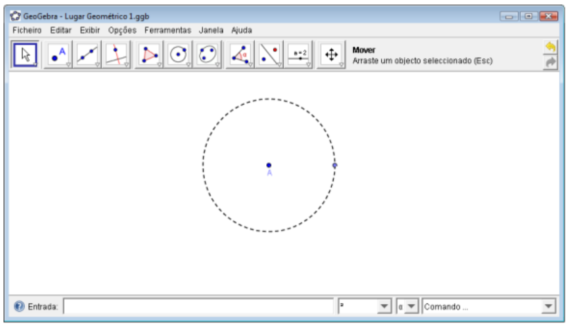
Resposta: Podemos marcar infinitos pontos, dentro da circunferência.

Agora o professor terá de auxiliar os alunos, com o GeoGebra, de modo a assinalarem todo o interior da circunferência e a excluírem a circunferência.

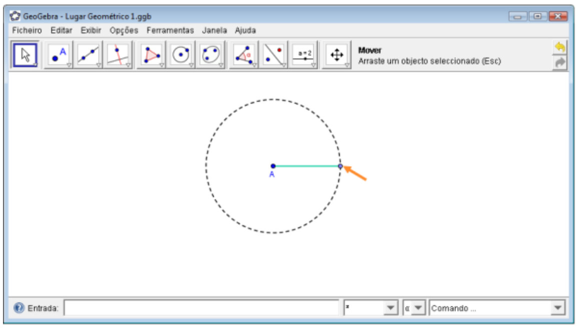
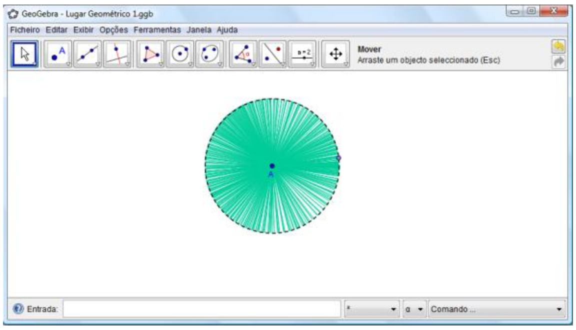
Como a distância de qualquer ponto ao centro é menor que o raio escolhido, a linha que define a circunferência tem de ser uma linha a tracejado, ou seja, os pontos que a formam não pertencem.

O menu apresentado no meio da figura abaixo surge ao clicar no botão direito do rato sobre a linha da circunferência. Pretendemos que o *estilo* da linha seja a tracejado.



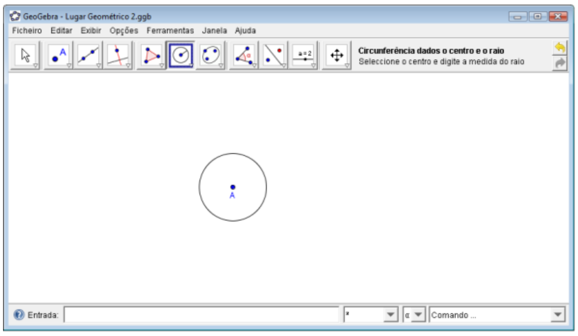
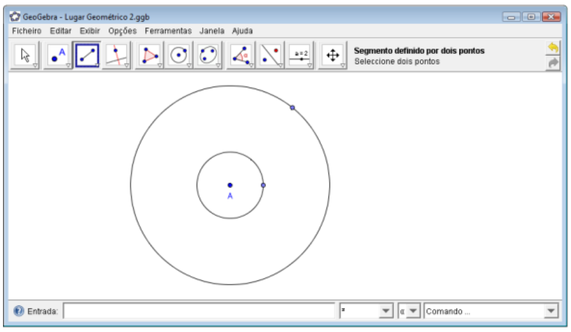



Os alunos têm de traçar vários raios (segmentos de recta), com uma outra cor, de modo a obter uma figura cuja circunferência está colorida no seu interior (será mais colorida quanto mais raios forem traçados). Não é possível no GeoGebra colorir directamente o interior da circunferência.

Parte 2

Passo 1: Constrói duas circunferências com o mesmo centro e raios distintos à sua escolha.

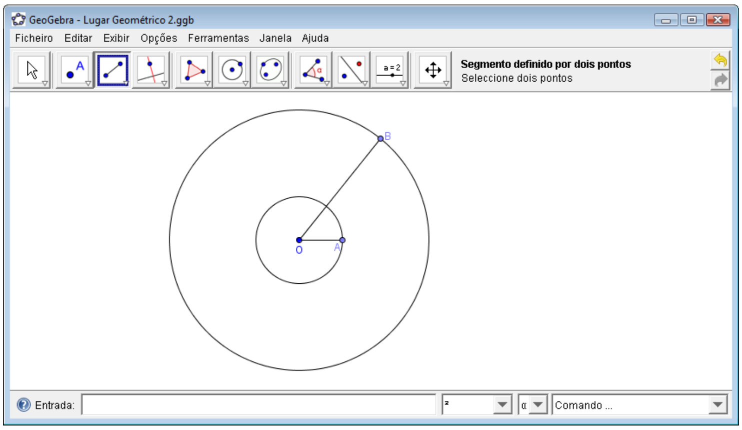
Passo 2: Marque vários pontos cuja distância ao centro é maior ou igual do que o raio de menor valor escolhido e é menor ou igual do que o raio de maior valor escolhido.

QUESTÃO: Quantos pontos pode marcar respeitando o pedido do passo anterior?

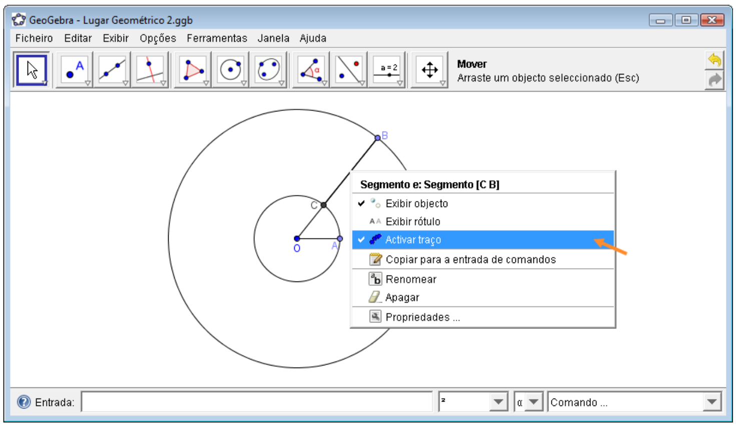
Resposta: Podemos marcar infinitos pontos, entre as circunferências.

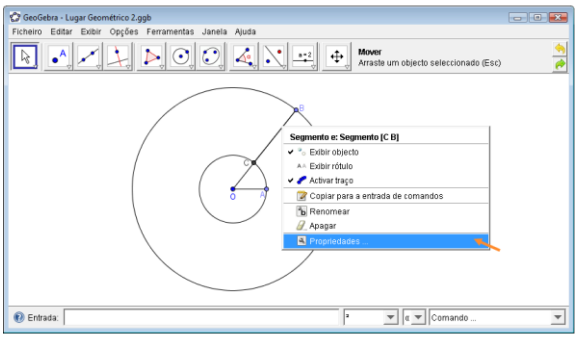
Agora o professor terá de auxiliar os alunos, com o GeoGebra, de modo a assinalarem o interior da circunferência com menor raio e o exterior da circunferência com maior raio. Aqui interessam-nos as duas circunferências.

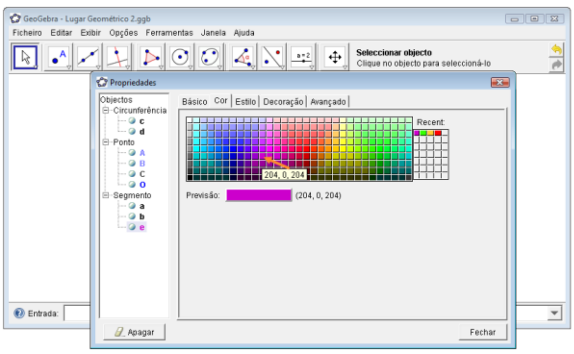
Os alunos têm de traçar vários raios (segmentos de recta), de modo análogo ao apresentado:

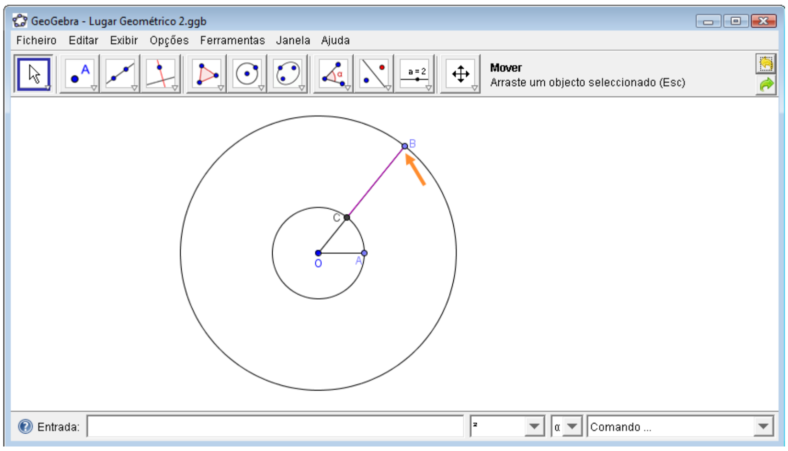


O segmento que interessa colorir é do tipo $[CB]$:

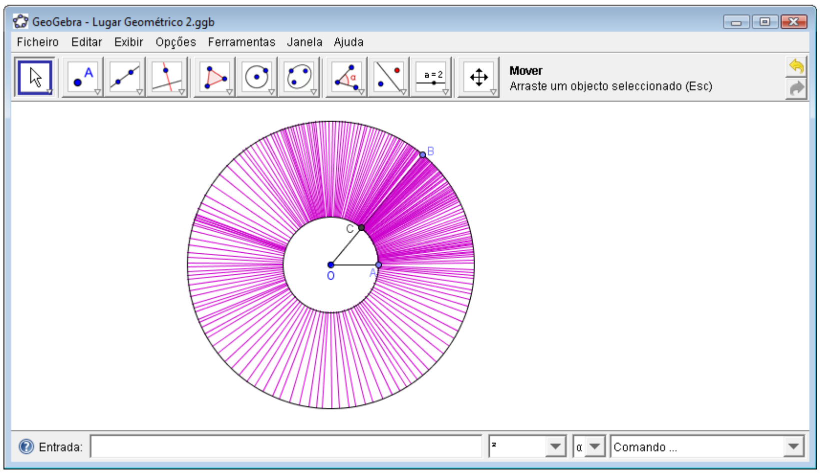








O processo anterior permite obter a seguinte figura:



Os alunos com o auxílio do professor recordam que este tipo de circunferências se designam por **circunferências concêntricas**.

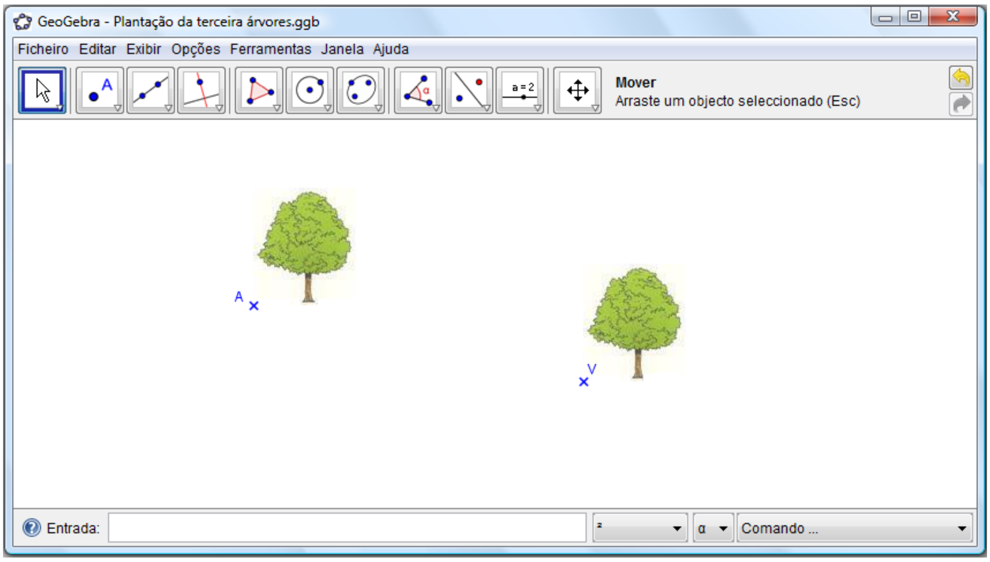
A **actividade 5** vai auxiliar o professor na exposição do conceito mediatriz de um segmento de recta. Esta actividade envolve o conhecimento que os alunos têm sobre distância entre dois pontos. Pretendemos que o aluno reconheça que o conjunto de pontos do plano equidistantes dos extremos de um segmento de recta é uma recta perpendicular ao segmento e que passa pelo seu ponto médio. Descrever e justificar o processo usado na resolução do problema que irá ser exposto pelo professor.

Actividade 5

Mediatriz de um segmento de recta

Parte 1

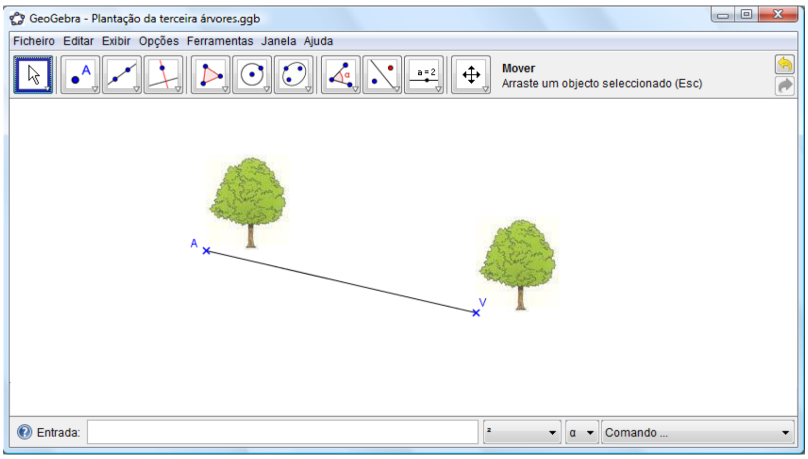
O professor abre seu ficheiro *"Plantação da terceira árvore"* do programa de GeoGebra (que previamente elaborou), cujo resultado final é a figura que se apresenta em baixo.



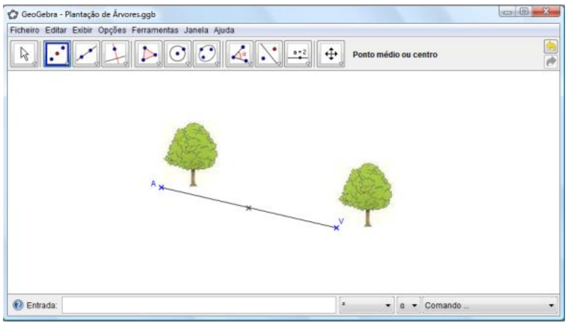
QUESTÃO 1: Imagine que num campo estão plantadas duas árvores: designadas por A e por V, como mostra a figura anterior. Onde deve ser plantada uma terceira árvore de modo que a mesma fique a igual distância das duas árvores já plantadas?

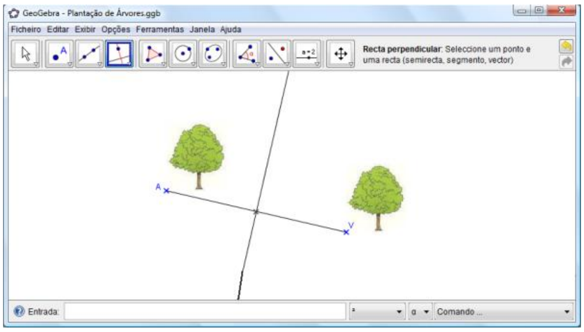
Neste momento, o professor pode ouvir a sugestão dos alunos. Espera-se que nas sugestões dos alunos existam as hipóteses de ligar as árvores com um segmento de recta e a marcação de um ponto ao meio do segmento de recta.

Continuando com a exposição do professor, os alunos vão traçar o segmento de recta definido pelos pontos A e V.



De seguida, pede para marcarem o ponto médio do segmento de recta e para tracem uma recta perpendicular ao segmento de recta e que passe nesse ponto médio (opção existente no GeoGebra).

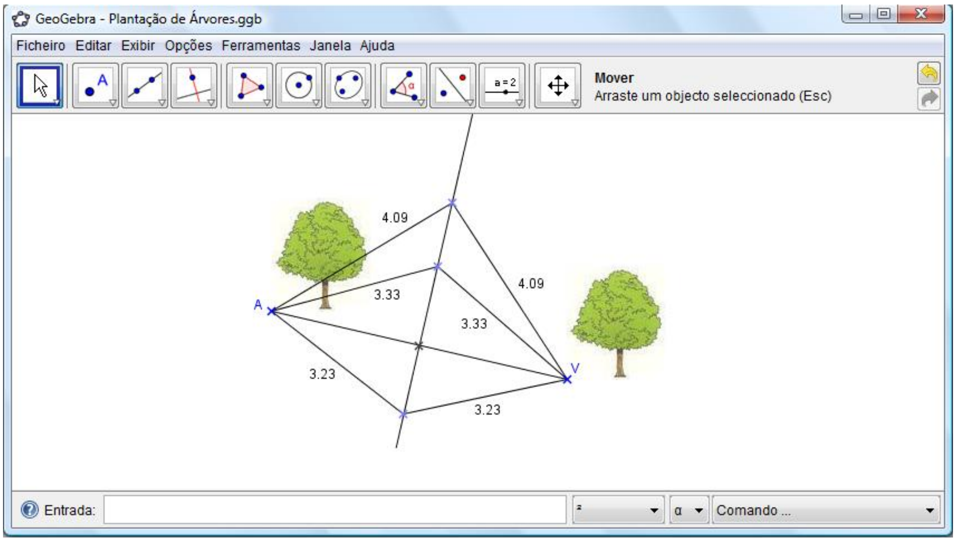




Para finalizar os alunos devem marcar pontos na nova recta e medir as distâncias de cada um desses pontos a A e a V.

QUESTÃO 2: O que podemos concluir?

Resposta: Concluímos que a distância de cada um dos pontos escolhidos da recta perpendicular a A e a V é igual.

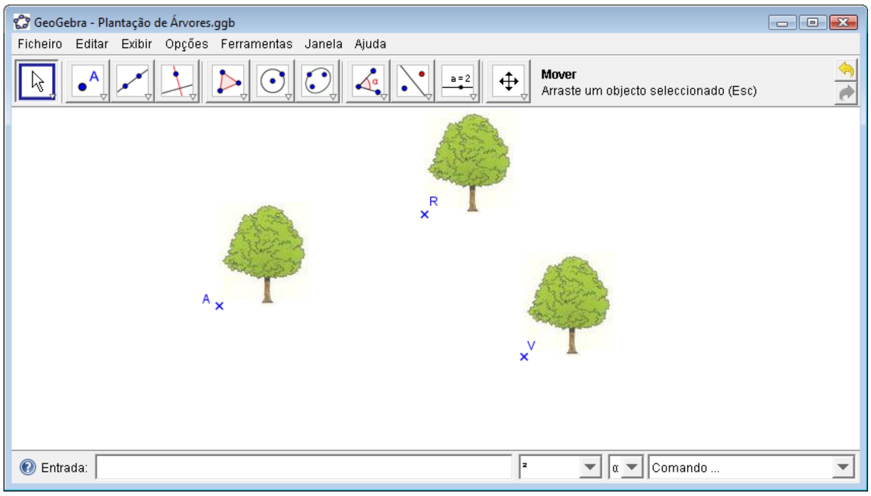


QUESTÃO 3: O que podemos concluir relativamente ao local onde plantar a terceira árvore?

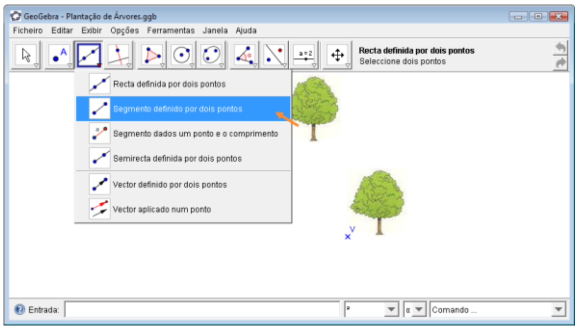
Resposta: Concluímos que a terceira árvore pode ser plantada em qualquer ponto da recta perpendicular ao segmento de recta formado pelas duas árvores iniciais e que passa no ponto médio do segmento.

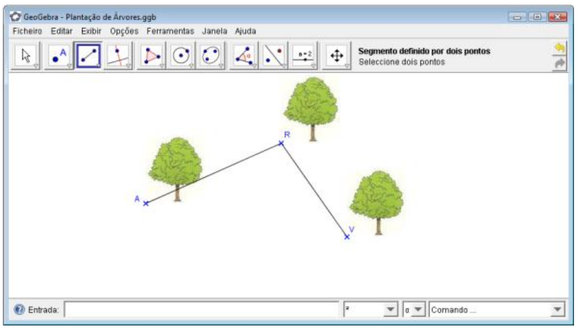
Parte 2

O professor abre o ficheiro *"Plantação de árvores"* do programa de Geometria Dinâmica GeoGebra (que previamente elaborou), cujo resultado final é a figura que se apresenta em baixo.

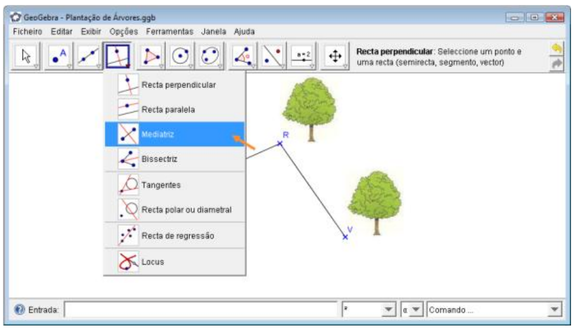


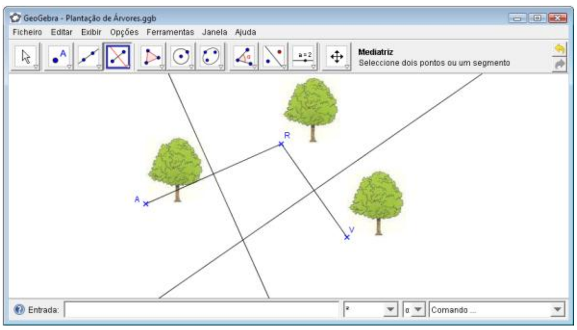
Passo 1: Começa por traçar os segmentos de recta definidos pelos três pontos, por exemplo, $\overline{AV}$ e $\overline{RV}$.

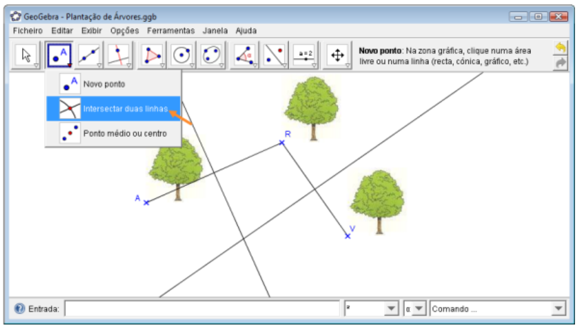


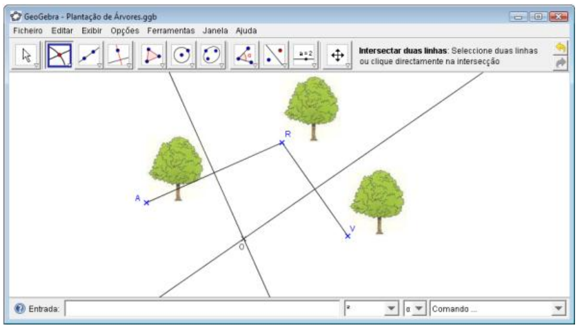


Passo 2: De seguida, traça as mediatrizes dos segmentos de recta traçados anteriormente.

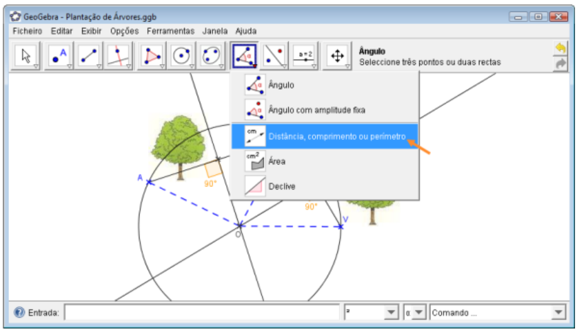


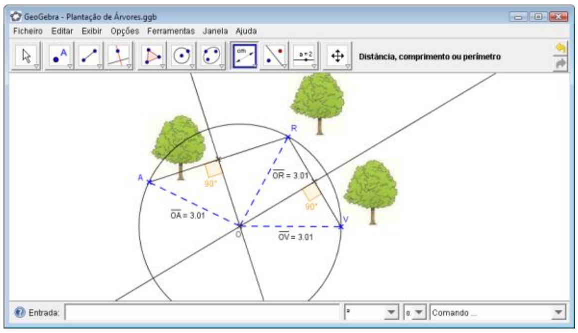






Passo 3: Observa que o ponto de intersecção das duas mediatrizes traçadas anteriormente é o centro de uma circunferência que contém os pontos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{V}$, visto que $\overline{\boldsymbol{OV}} = \overline{\boldsymbol{OR}}$ e $\overline{\boldsymbol{OV}} = \overline{\boldsymbol{OA}}$, o que implica $\overline{\boldsymbol{OR}} = \overline{\boldsymbol{OA}}$.





A **actividade 6** tem como objectivo a utilização das noções do capítulo três por parte do aluno e a auxiliar o professor na introdução de outros[14] conceitos "dentro" dos lugares geométricos. Ao mesmo tempo avalia os alunos sobre o se conhecimento relativamente à bissectriz de um ângulo, mediatriz de um segmento de recta à distância entre dois pontos.

Actividade 6

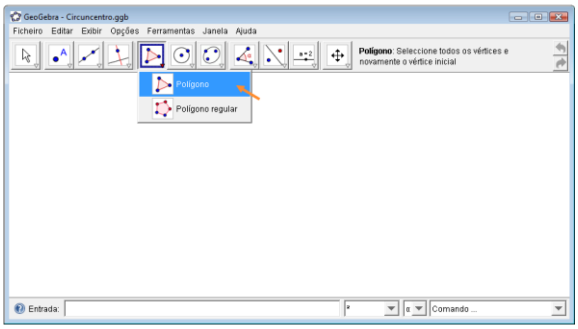
Circuncentro, Incentro, Baricentro e Ortocentro de um Triângulo

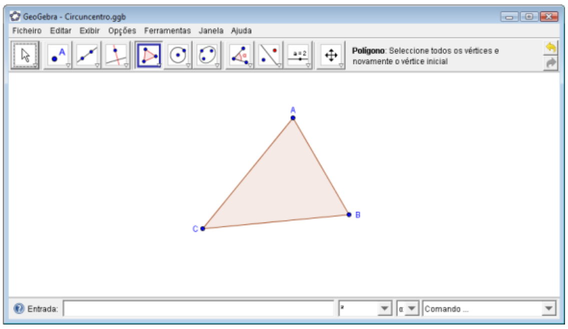
Parte 1

Circuncentro ou centro da circunferência circunscrita.

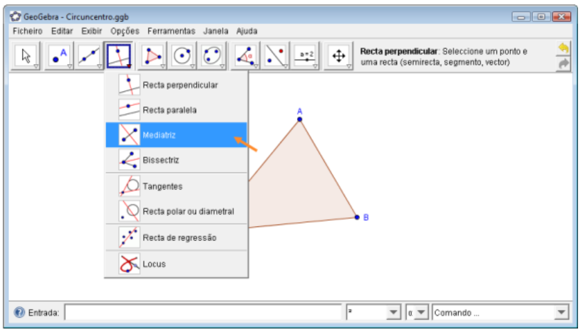
Passo 1: Construa um triângulo.

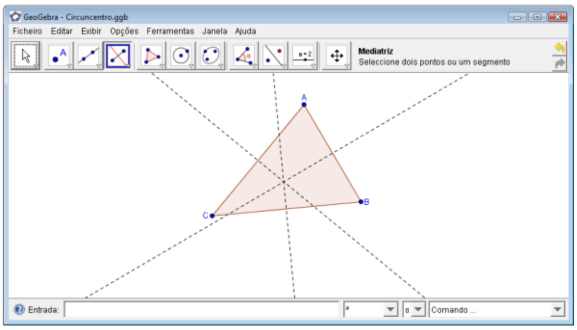
[14] Vamos apresentar o circuncentro e o incentro. Deixaremos por abordar o baricentro e o ortocentro de um triângulo (que estavam inicialmente previstos).



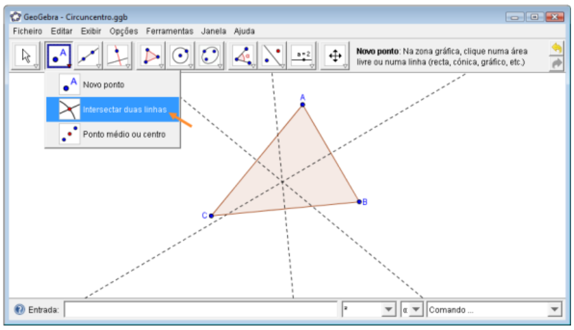


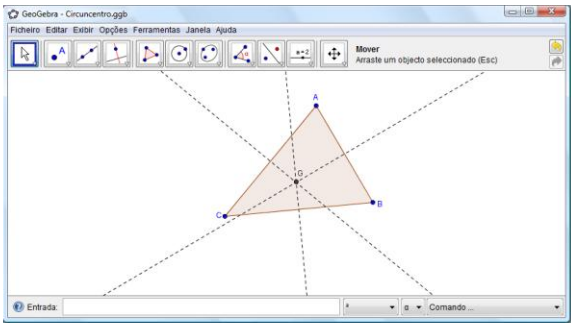
Passo 2: Trace as mediatrizes do triângulo.



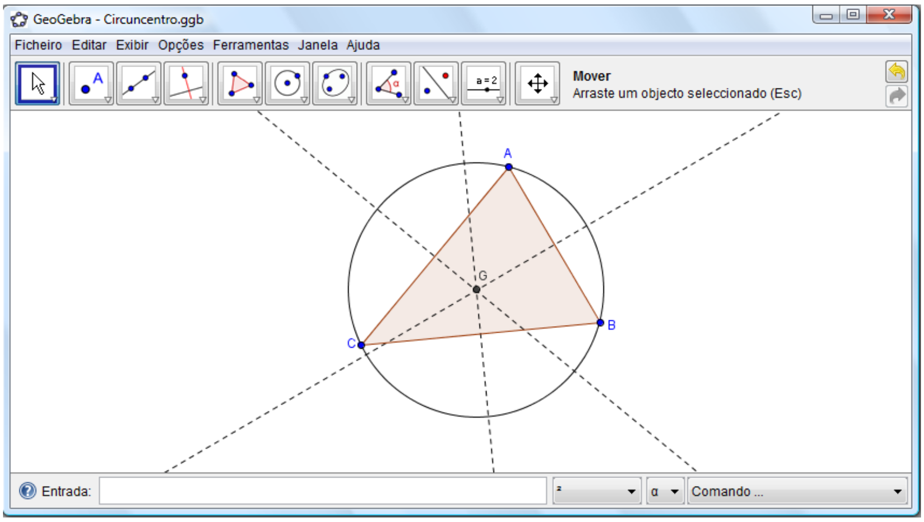


Passo 3: Assinala o ponto de intersecção das mediatrizes do triângulo (opção directa no GeoGebra). Ponto esse que está à mesma distância de cada um dos vértices do triângulo.





Passo 4: Mede a distância desse ponto a cada um dos vértices do triângulo.



QUESTÃO: Com o passo anterior o que concluí?

Resposta: O ponto de intersecção das mediatrizes está à mesma distância de cada um dos vértices do triângulo.

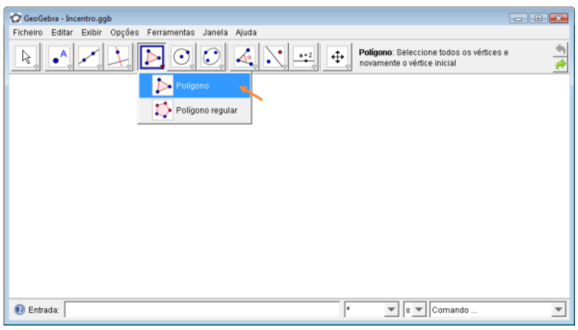
Com o centro nesse ponto de intersecção das medianas e com os raios $\overline{GC}$, $\overline{GB}$ e $\overline{GA}$ conseguimos construir uma circunferência.

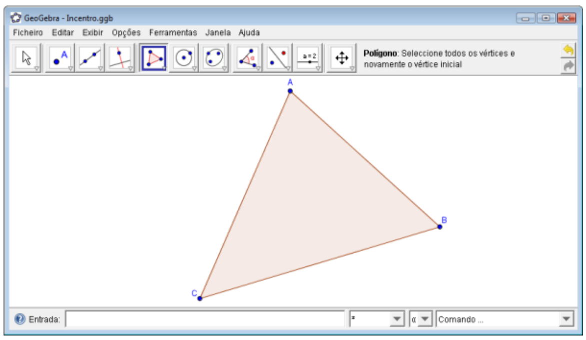
Ao ponto de encontro das três mediatrizes de um triângulo chama-se **circuncentro** ou **centro da circunferência circunscrita.**

Parte 2

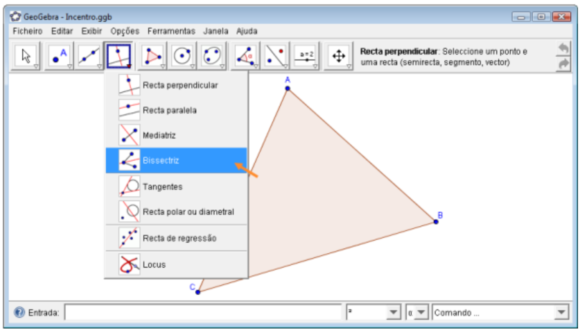
Incentro ou **centro da circunferência inscrita.**

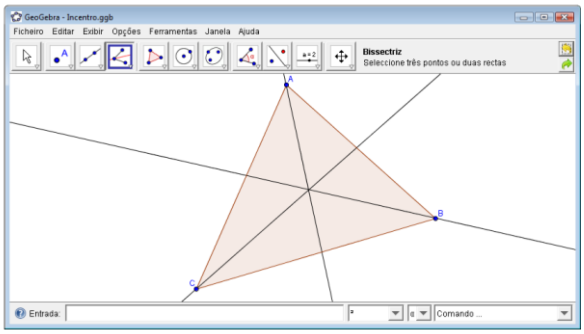
Passo 1: Construa um triângulo qualquer.



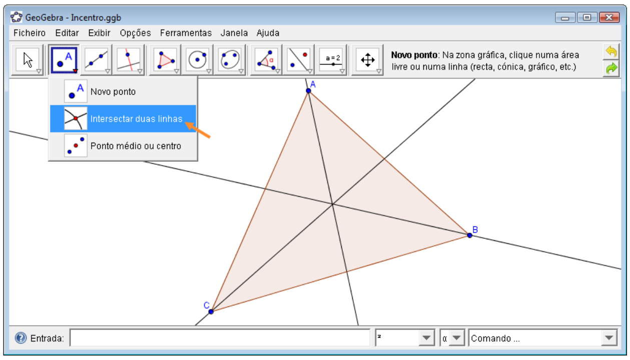


Passo 2: Trace as bissectrizes do triângulo.

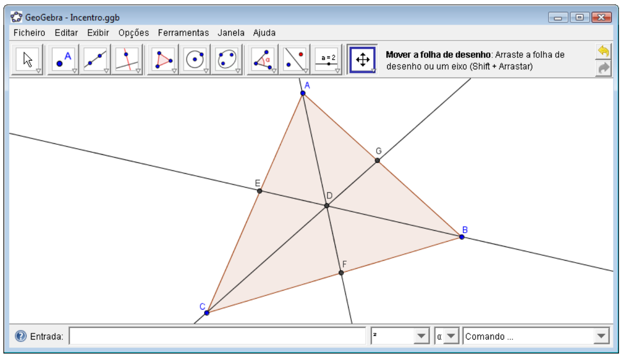




Passo 3: Assinala o ponto de intersecção das bissectrizes do triângulo (opção directa no GeoGebra).



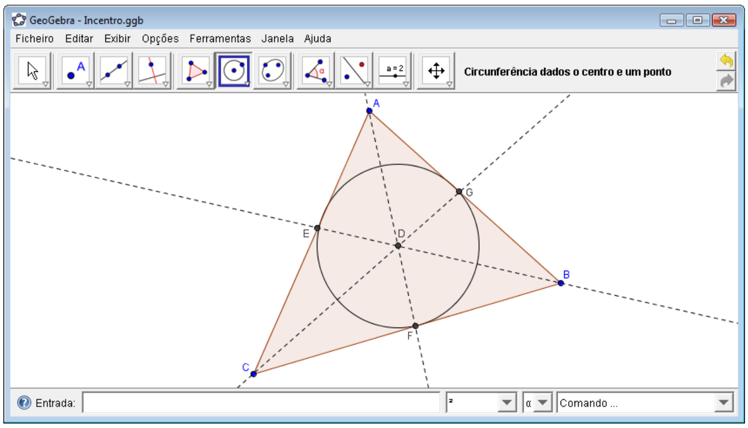
Passo 4: Mede a distância desse ponto a cada um dos lados dos vértices do triângulo.



QUESTÃO: Com o passo anterior o que concluí?

Resposta: O ponto de intersecção das bissectrizes está à mesma distância a cada um dos lados dos vértices do triângulo.

Com o centro nesse ponto de intersecção das bissectrizes e com os raios $\overline{ED}$, $\overline{FD}$ e $\overline{GD}$ conseguimos construir uma circunferência.



Ao ponto de encontro das bissectrizes de um triângulo chama-se **incentro** ou **centro da circunferência inscrita.**

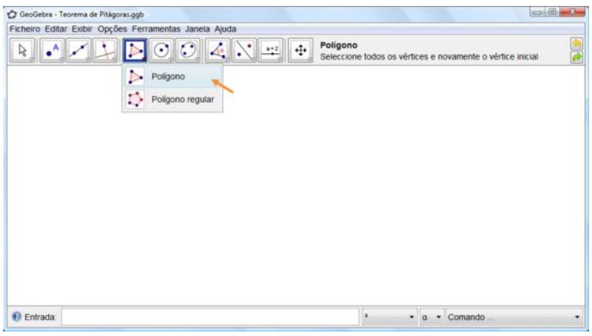
A **actividade 7** tem como objectivo raciocinar indutivamente (ou seja, formulando uma conjectura a partir dos dados obtidos) e dedutivamente (isto é, demonstrando essa conjectura). Os alunos, vão ter de traçar triângulos rectângulos e quadrados, calcular áreas com o auxílio do GeoGebra.

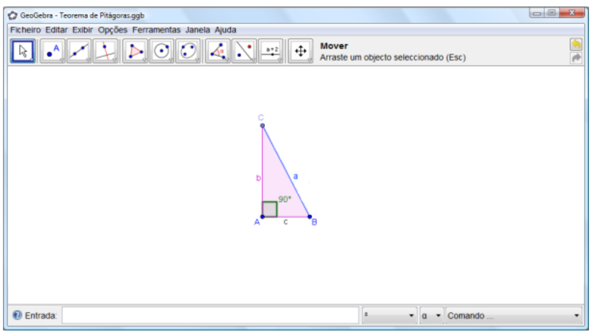
Actividade 7

Teorema de Pitágoras

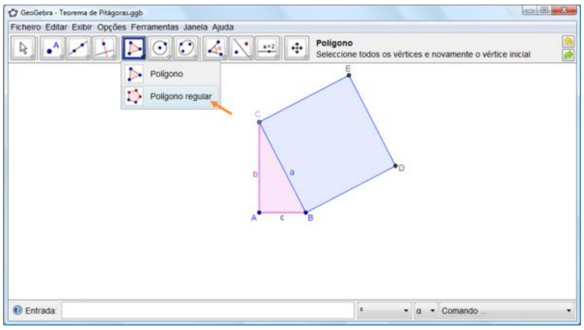
Passo 1: Construa um triângulo rectângulo.

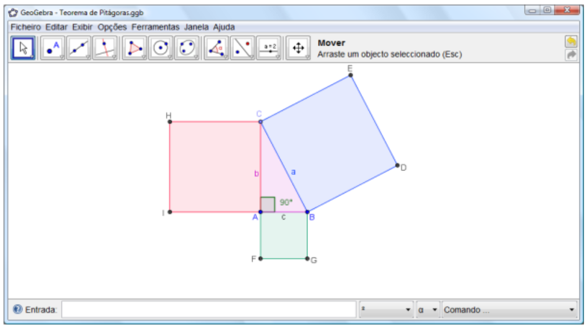
Sugestão: Para ajudar, pode utilizar a quadricula para marcar os três pontos que formam o triângulo rectângulo.



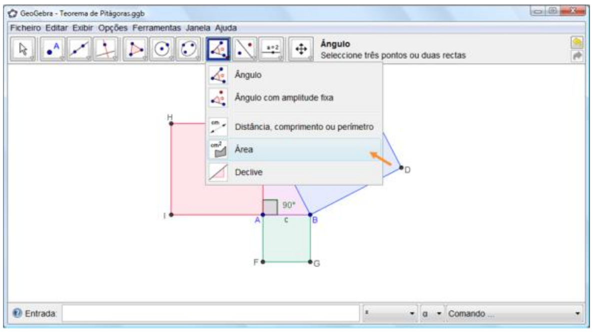


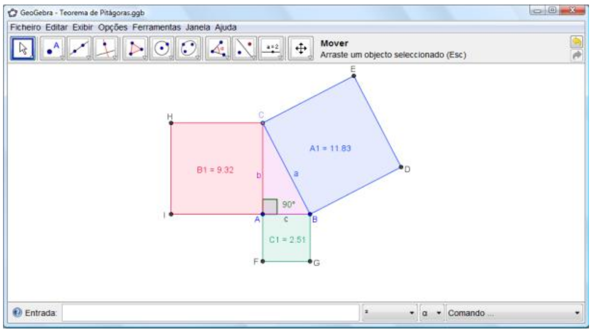
Passo 2: Trace, em cada lado do triângulo rectângulo, o quadrado respectivo (o lado de cada quadrado é igual ao lado do triângulo respectivo).

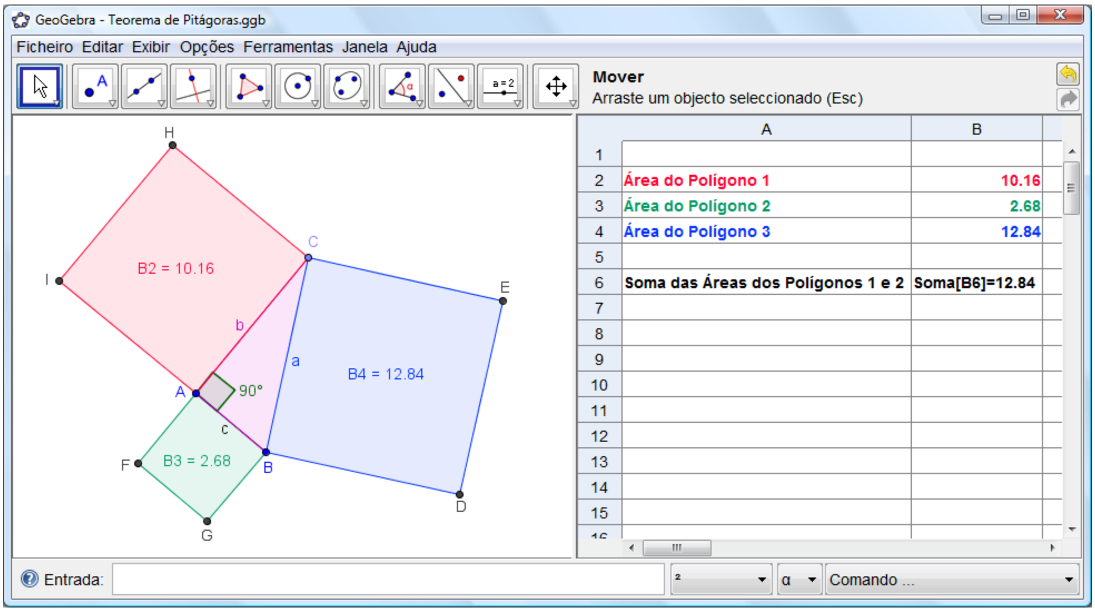




Passo 3: Determine o valor da área de cada um dos três quadrados construídos sobre os lados do triângulo rectângulo e anote-os numa tabela (ou na folha de cálculo do GeoGebra).







Passo 4: Repita, algumas vezes, todos os passos anteriores, construindo novos triângulos rectângulos distintos. Ou também, com o GeoGebra (na opção *Mover* da janela 1), arrastar um ou mais vértices do triângulo para obter outro triângulo rectângulo.

QUESTÃO: Que relação pode estabelecer, em cada triângulo rectângulo que construiu, entre as áreas desses quadrados?

Resposta: Num triângulo rectângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Actividade 8

Função Afim

Parte 1

Considere a função do tipo $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

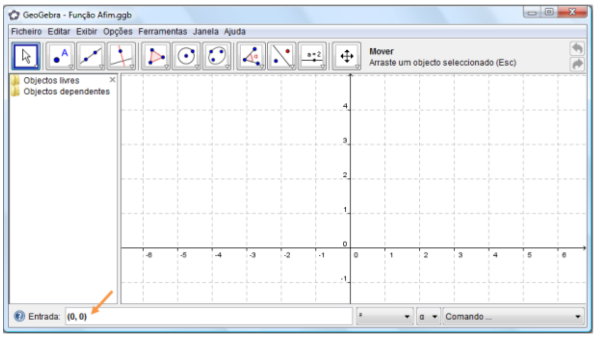
Escolha vários valores de a (positivos, nulo, negativos).

Passo 1: Para cada valor de a escolhido, complete uma tabela da seguinte forma (pode usar a folha de cálculo do GeoGebra):

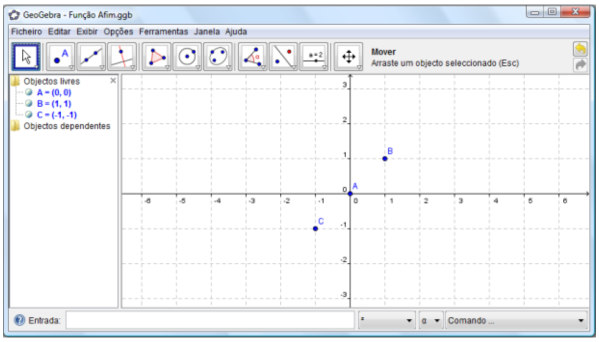
$\boldsymbol{a =}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x) = ax}$	Ponto $(\boldsymbol{x, y})$

"Marque" os pontos (x, y) obtidos introduzindo-os na entrada de comandos. Os pontos aparecem na zona algébrica e gráfica. Esboce o gráfico ligando todos os pontos.

Sugestão: Use uma cor diferente na zona gráfica, para cada função (ou seja, para cada valor de a escolhido).

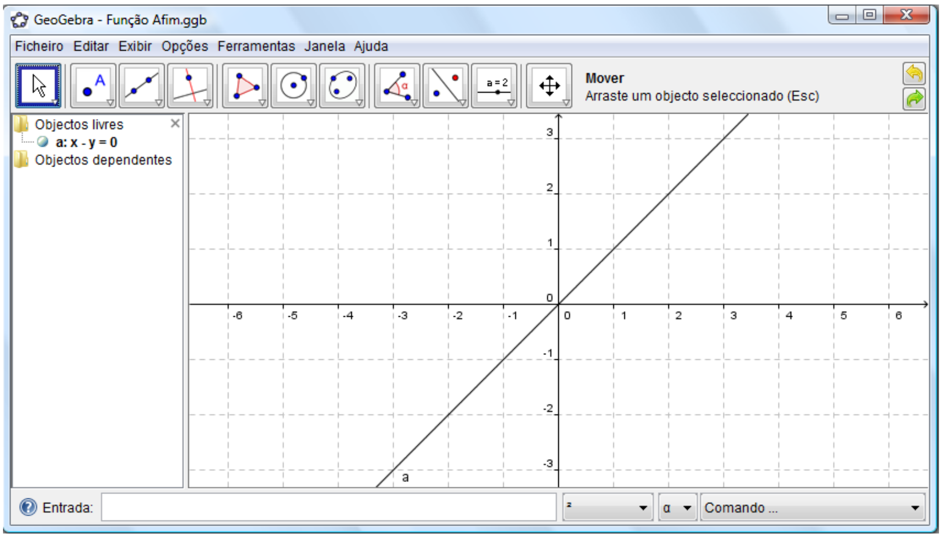


$a = 1$

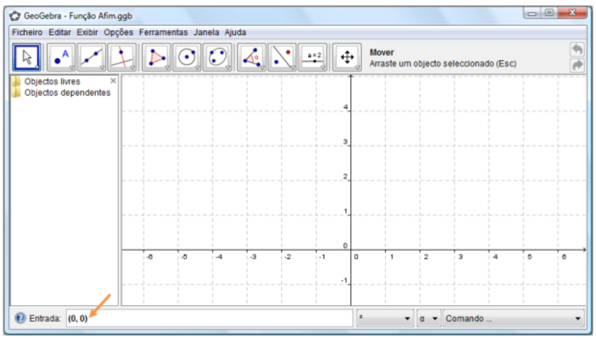


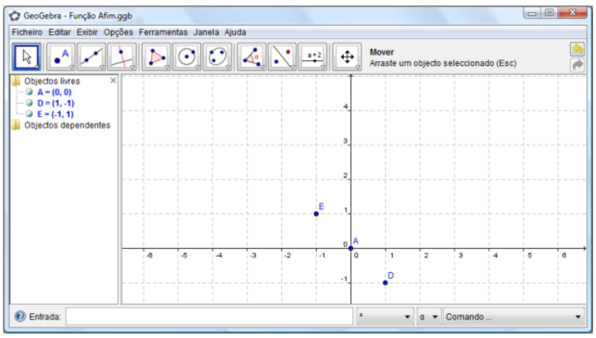
$a = 1$

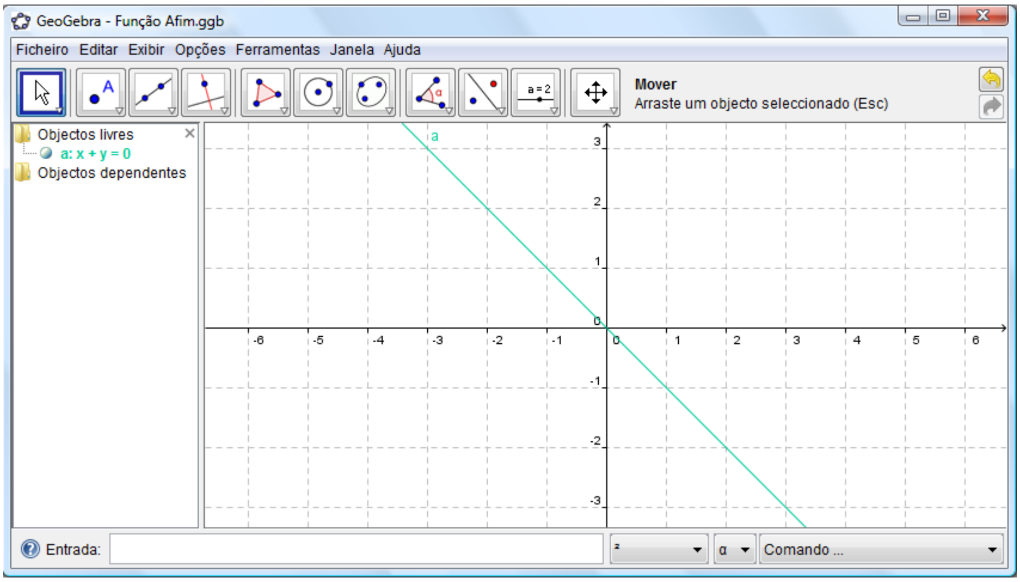
Observe que na zona algébrica aparece a equação que define a sua função. Compare-a com a expressão analítica da sua função.



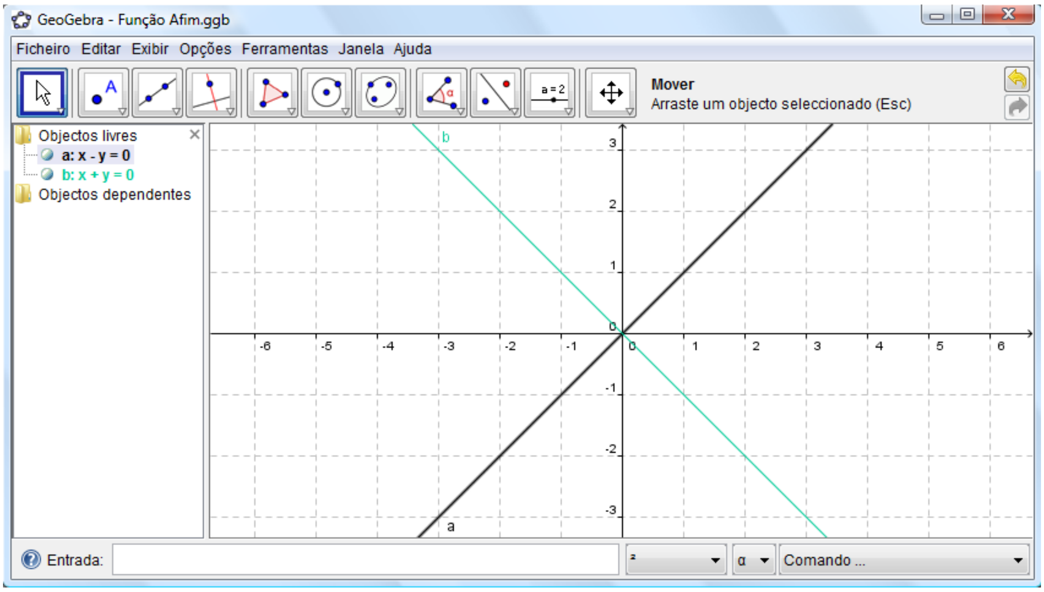
Passo 2: Repita o passo 1 com outro valor de a, mas mantenha o mesmo referencial cartesiano para todos os valores de a.







No final, obtemos algo análogo à seguinte figura:



QUESTÃO: O que pode dizer relativamente a todas as funções que considerou e aos seus respectivos gráficos?

Parte 2

Considere a função do tipo $f(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$.

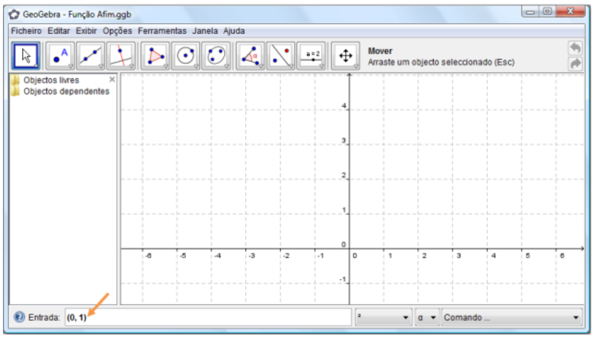
Escolha vários valores de b (positivos, nulo, negativos).

Passo 1: Para cada valor de b escolhido, complete uma tabela da seguinte forma (pode usar a folha de cálculo do GeoGebra):

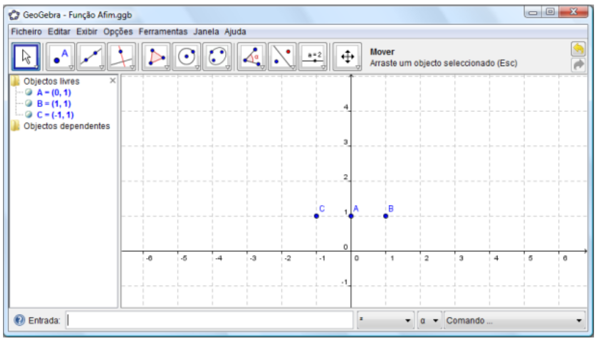
$\boldsymbol{b =}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x) = b}$	Ponto $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

"Marque" os pontos (x, y) obtidos introduzindo-os na entrada de comandos. Os pontos introduzidos aparecem na zona algébrica e gráfica. Esboce o gráfico ligando todos os pontos.

Sugestão: Use uma cor diferente na zona gráfica, para cada função (ou seja, para cada valor de b escolhido).

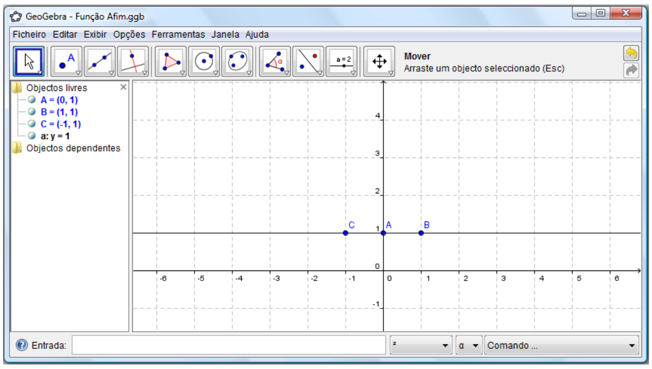


$b = 1$

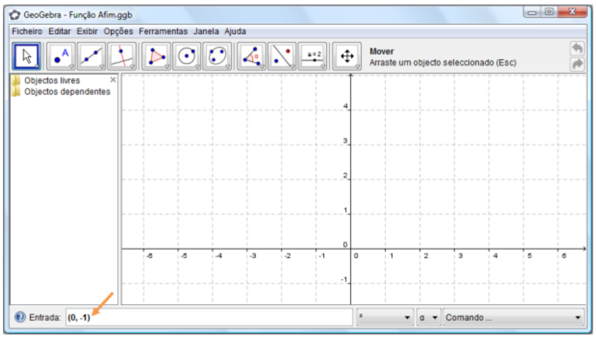


$b = 1$

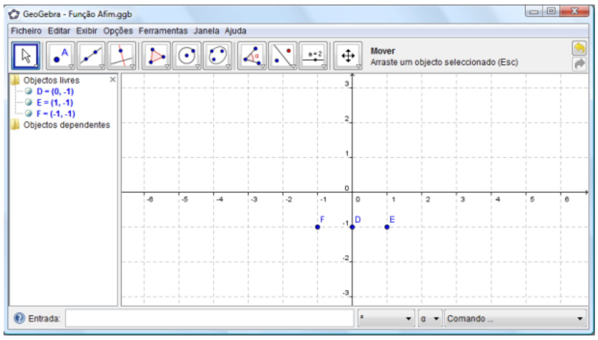
Observe que na zona algébrica aparece a equação que define a sua função. Comparando-a com a expressão analítica da sua função.



Passo 2: Repita o passo 1 com outro valor de b, mas mantenha o mesmo referencial cartesiano para todos os valores de b.

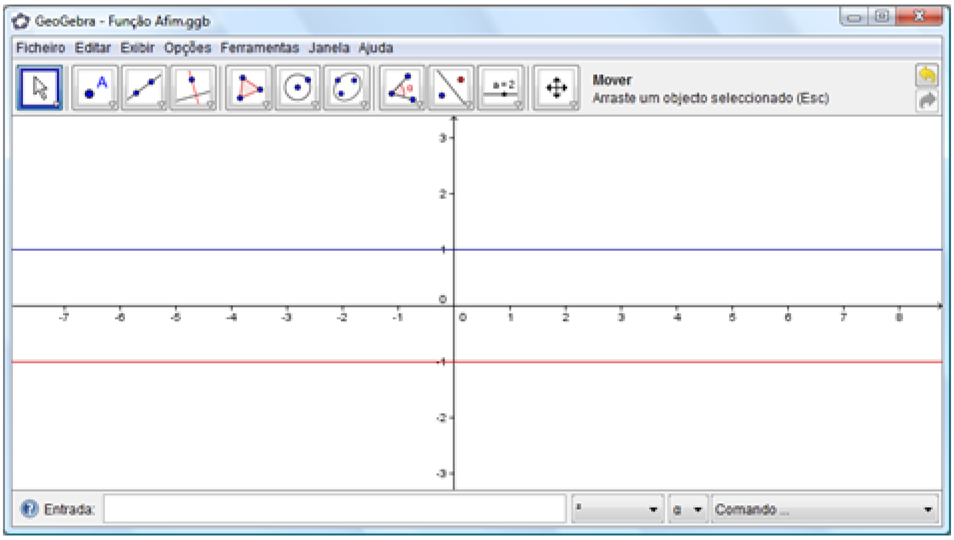


$b = -1$



$b = -1$

No final, obtemos algo análogo à seguinte figura:



QUESTÃO: O que pode dizer relativamente a todas as funções que considerou e aos seus respectivos gráficos?

Parte 3

Considere a função do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$.

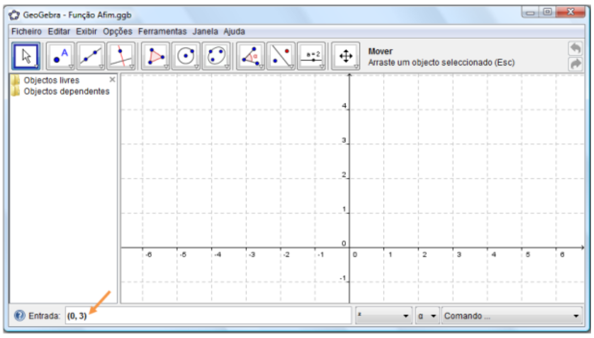
Escolha vários valores para a e para b (positivos, nulo, negativos).

Passo 1: Para cada valor de a e cada valor de b escolhido, complete uma tabela da seguinte forma (pode usar a folha de cálculo do GeoGebra):

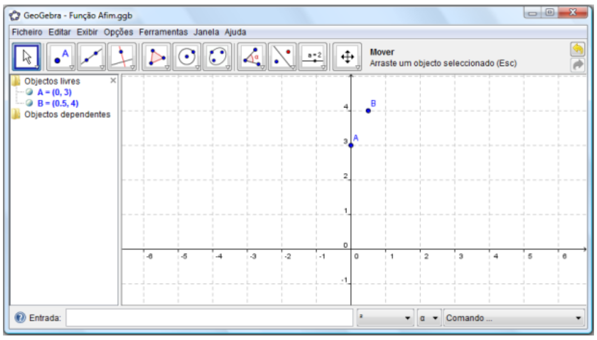
$\boldsymbol{a =}$ $\boldsymbol{b =}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x) = ax + b}$	**Ponto** $\boldsymbol{(x, y)}$

"Marque" os pontos (x, y) obtidos introduzindo-os na entrada de comandos. Os pontos introduzidos aparecem na zona algébrica e gráfica. Esboce o gráfico ligando todos os pontos.

Sugestão: Use uma cor diferente na zona gráfica, para cada função (ou seja, para cada valor de a e cada valor de b escolhidos).

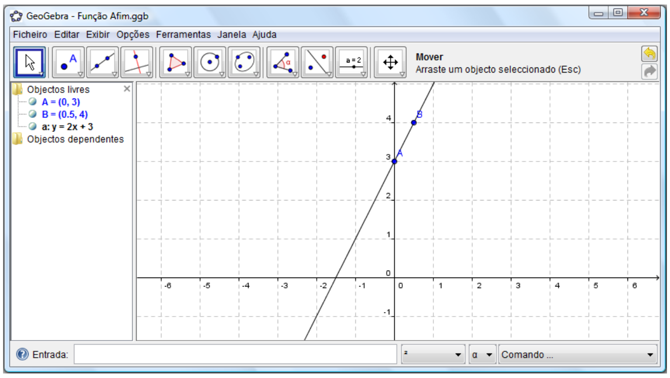


$a = 2$ e $b = 3$

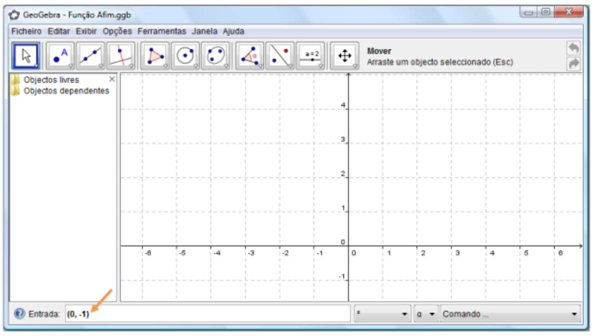


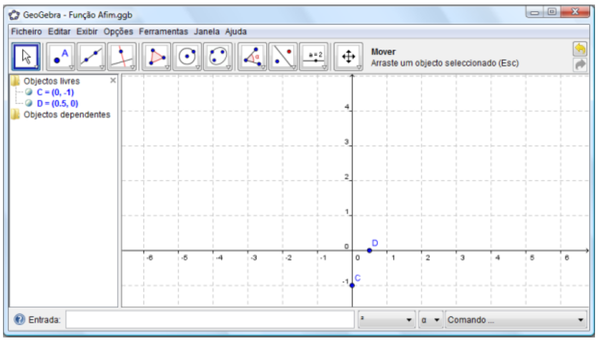
$a = 2$ e $b = 3$

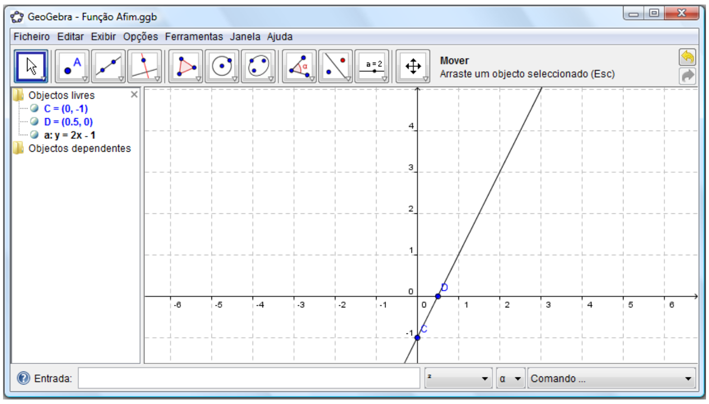
Passo 2: Repita o passo 1 com outro valor de a e outro valor de b, mas mantenha o mesmo referencial cartesiano para todos.



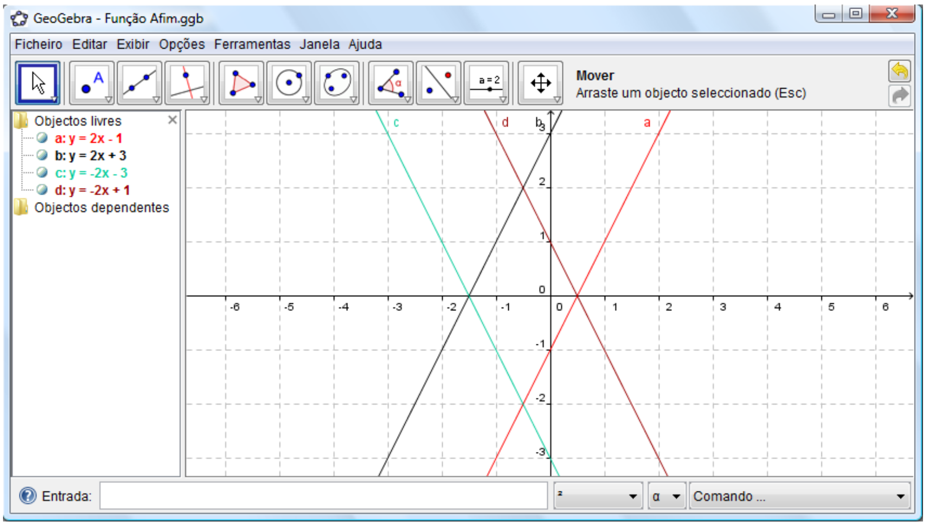
Por exemplo, considerando $a = 2$ e $b = -1$.







No final obtemos algo análogo à seguinte forma:



QUESTÃO: O que pode dizer relativamente a todas as funções que considerou e aos seus respectivos gráficos?

Actividade 9

Função Quadrática

Parte 1

Considere a função do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

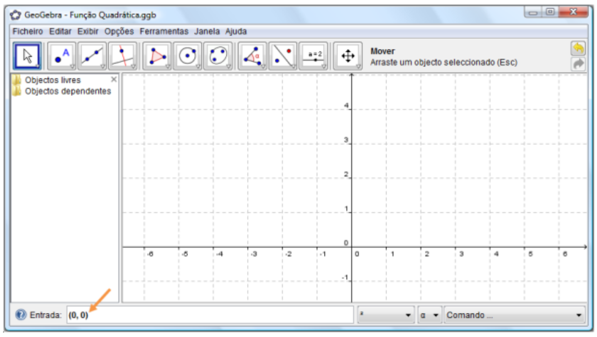
Escolha vários valores de a (positivos, nulo, negativos).

Passo 1: Para cada valor de a escolhido, complete uma tabela da seguinte forma (pode usar a folha de cálculo do GeoGebra):

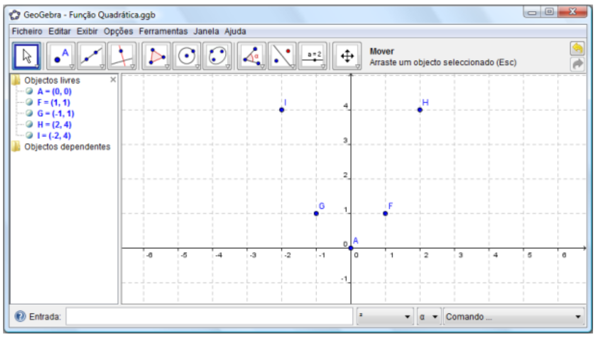
$a =$	x	$y = f(x) = ax^2$	Ponto (x, y)

"Marque" os pontos (x, y) obtidos introduzindo-os na entrada de comandos. Os pontos aparecem na zona algébrica e gráfica, respectivamente. Esboce o gráfico ligando todos os pontos[15].

Sugestão: Use uma cor diferente na zona gráfica, para cada função (ou seja, para cada valor de a escolhido).



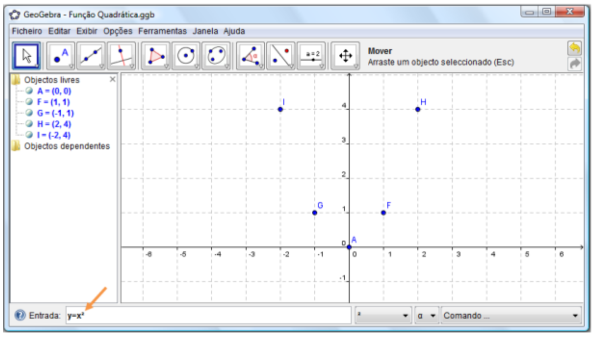
$a = 1$

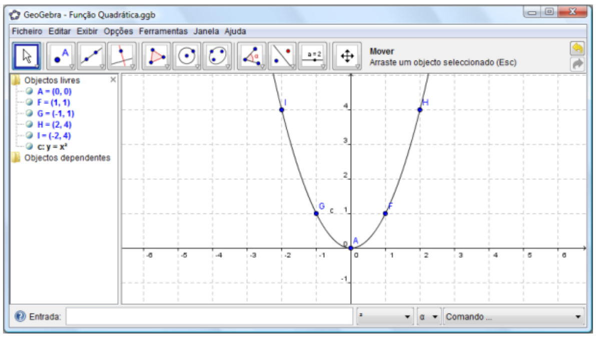


$a = 1$

Ao contrário do que aconteceu na função afim, os alunos não reconhecem de imediato a forma do gráfico. Quanto maior o número de pontos, mais certeza têm que é uma forma parabólica.

Passo 2: Introduza a expressão da sua função (na figura abaixo usámos $y = x^2$)

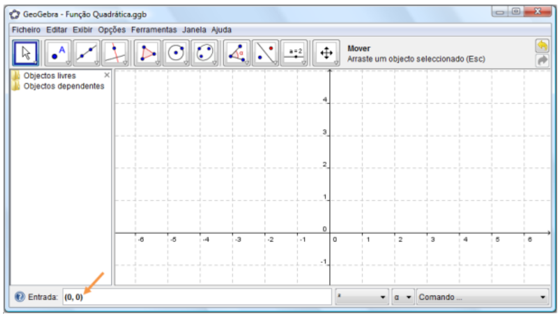


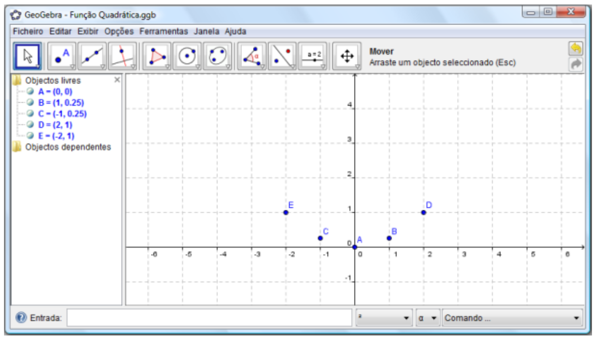


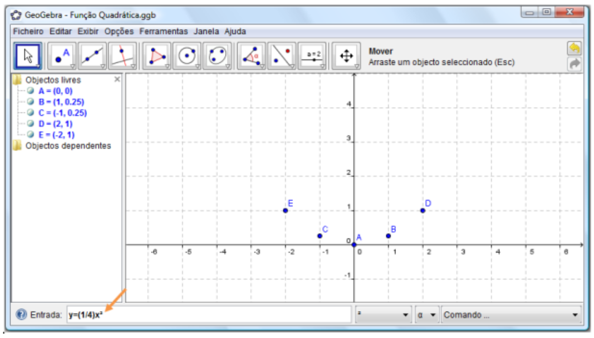
Passo 3: Repita os passos anteriores com outro valor de a.

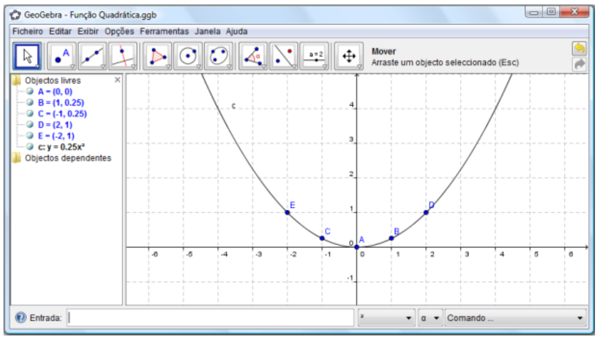
[15] Pode ocorrer que a escolha dos pontos por parte do aluno não dê para obter a forma de uma parábola. O professor tem de ir supervisionando o trabalho dos alunos na sala de computadores.

Por exemplo, considerando $a = \frac{1}{4}$.

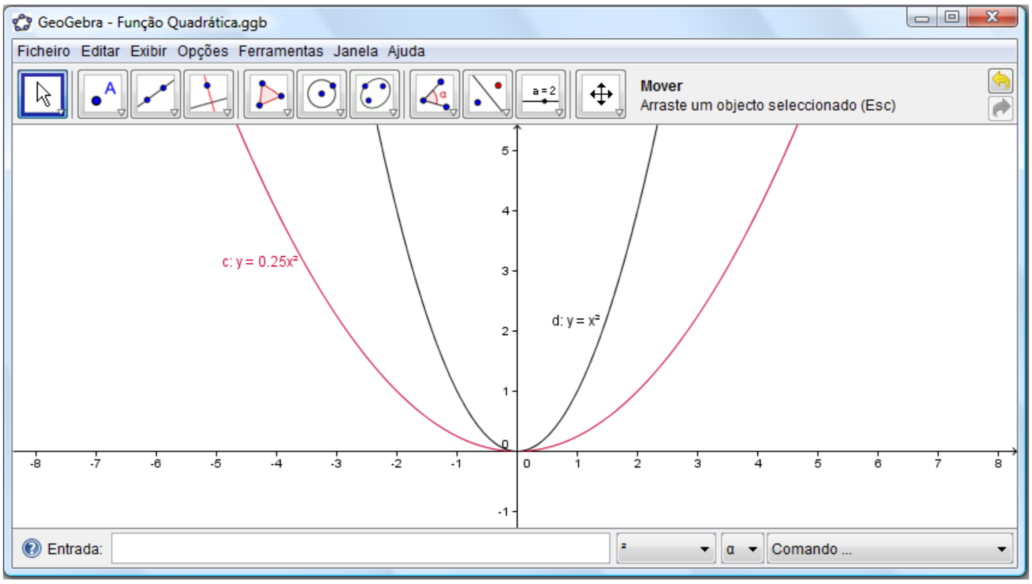








No final, obtemos algo análogo à seguinte figura.



QUESTÃO: O que pode dizer relativamente a todas as funções que considerou e aos seus respectivos gráficos?

Parte 2

Considere a função do tipo $f(x) = a(x - h)^2$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $h \in \mathbb{R}$.

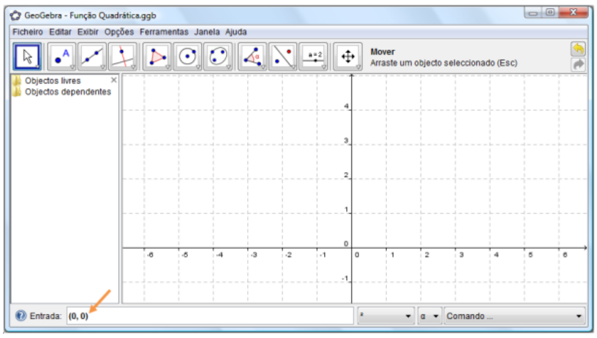
Escolha vários valores para a e para h (positivos, nulo, negativos).

Passo 1: Para cada valor de a e cada valor de h escolhido, complete uma tabela da seguinte forma (pode usar a folha de cálculo do GeoGebra):

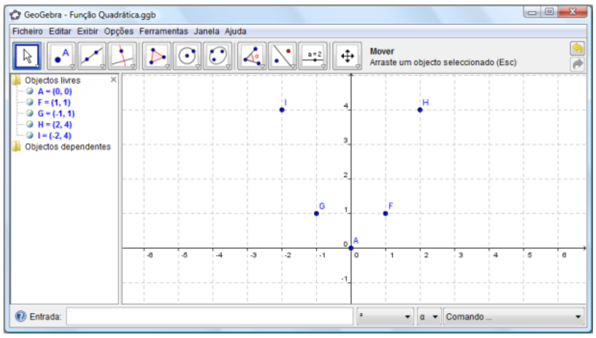
$a =$ $h =$	x	$y = f(x) = a(x-h)^2$	Ponto (x, y)

"Marque" os pontos (x, y) obtidos introduzindo-os na entrada de comandos. Os pontos aparecem na zona algébrica e gráfica, respectivamente. Esboce o gráfico ligando todos os pontos.

Sugestão: Use uma cor diferente na zona gráfica, para cada função (ou seja, para cada valor de a e cada valor de h escolhido).



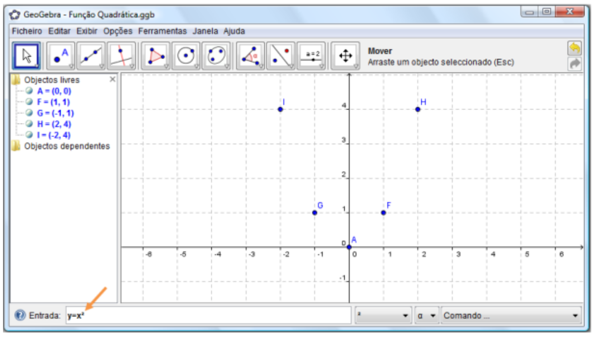
$a = 1$ e $h = 0$

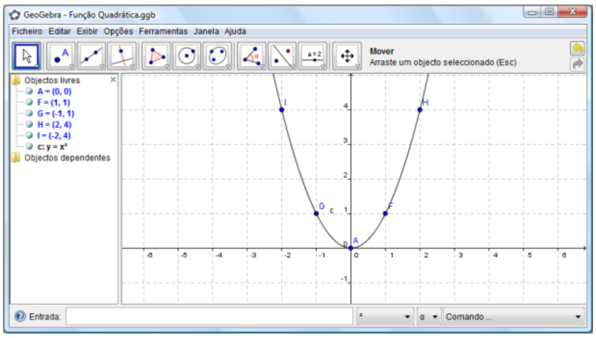


$a = 1$ e $h = 0$

Ao contrário do que aconteceu na função afim, os alunos não reconhecem de imediato a forma do gráfico. Quanto maior o número de pontos, mais certeza têm que é uma forma parabólica.

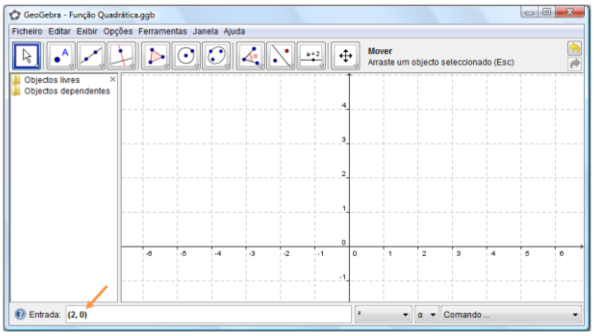
Passo 2: Introduza a expressão da sua função (na figura abaixo usámos $y = x^2$)

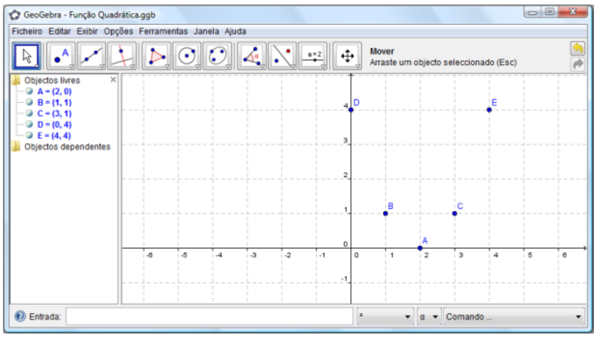


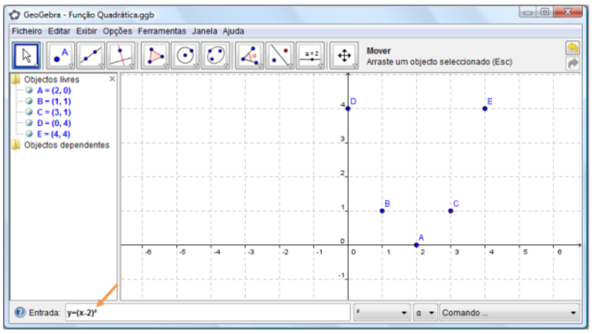


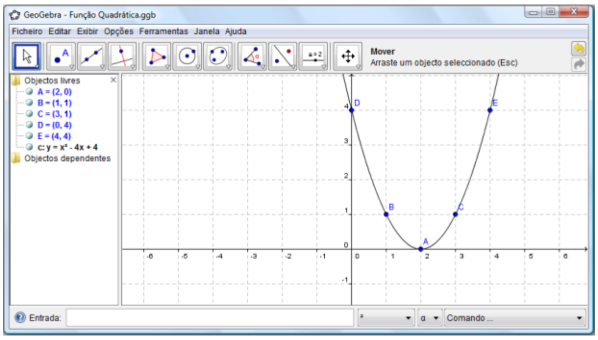
Passo 3: Repita os passos anteriores com outro valor de a e h.

Por exemplo, considerando $a = 1$ e $h = 2$.

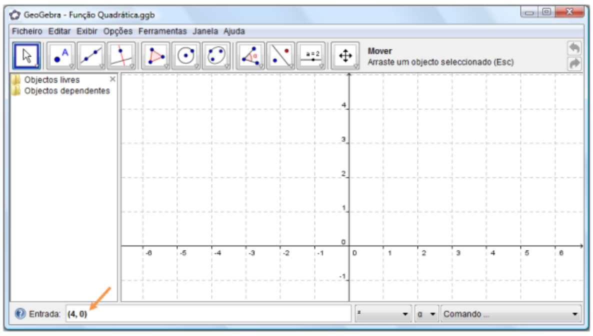


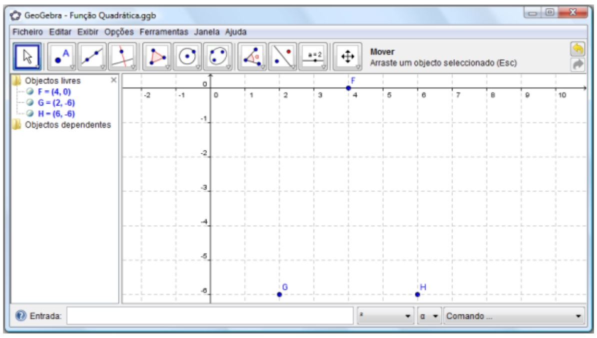


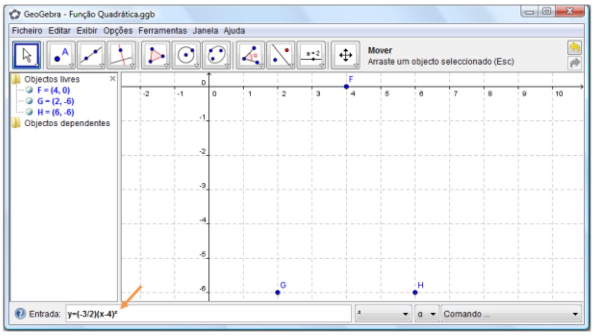


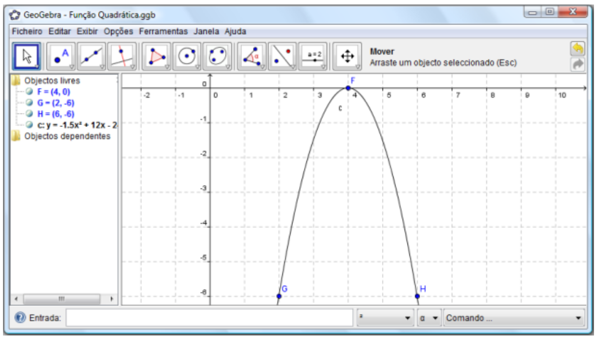


Por exemplo, considerando $a = -\frac{3}{2}$ e $h = 4$.

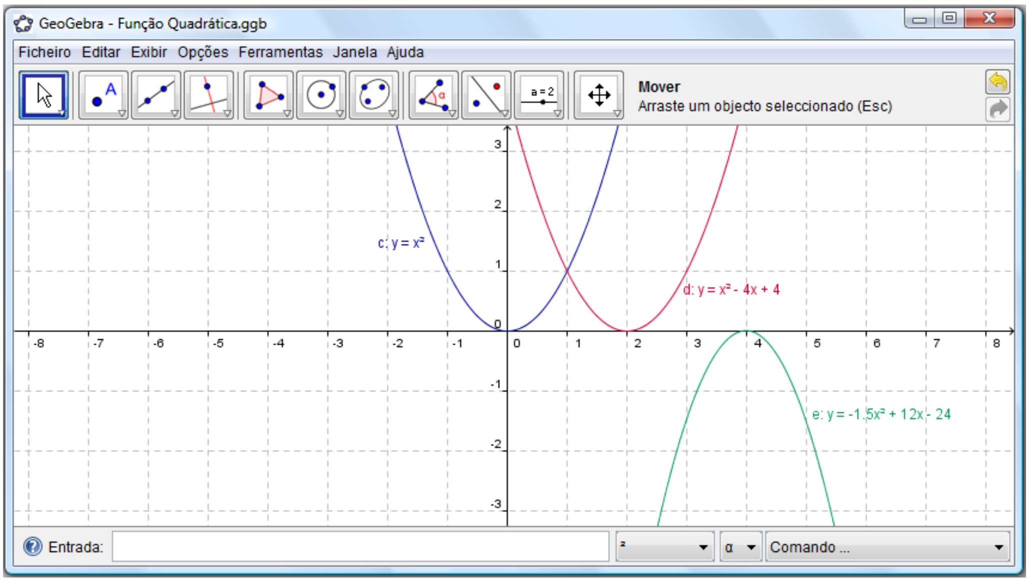








No final, obtemos algo análogo à seguinte figura.



QUESTÃO: O que pode dizer relativamente a todas as funções que considerou e aos seus respectivos gráficos?

Parte 3

Considere a função do tipo $f(x) = ax^2 + k$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $k \in \mathbb{R}$.

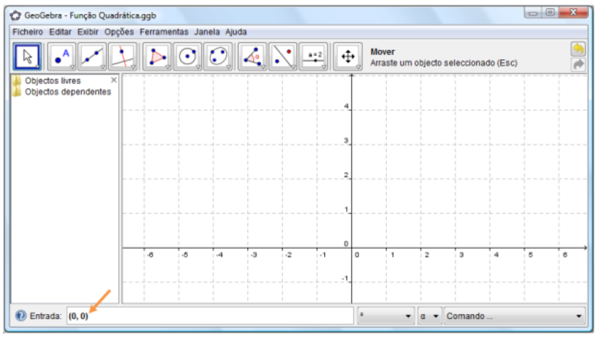
Escolha vários valores para a e para k (positivos, nulo, negativos).

Passo 1: Para cada valor de a e cada valor de k escolhido, complete uma tabela da seguinte forma (pode usar a folha de cálculo do GeoGebra):

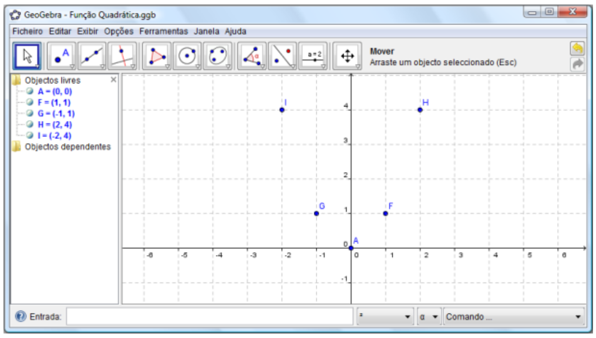
$\boldsymbol{a} =$ $\boldsymbol{k} =$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + k}$	**Ponto** $\boldsymbol{(x, y)}$

"Marque" os pontos (x, y) obtidos introduzindo-os na entrada de comandos. Os pontos aparecem na zona algébrica e gráfica, respectivamente. Esboce o gráfico ligando todos os pontos.

Sugestão: Use uma cor diferente na zona gráfica, para cada função (ou seja, para cada valor de a e cada valor de k escolhido).



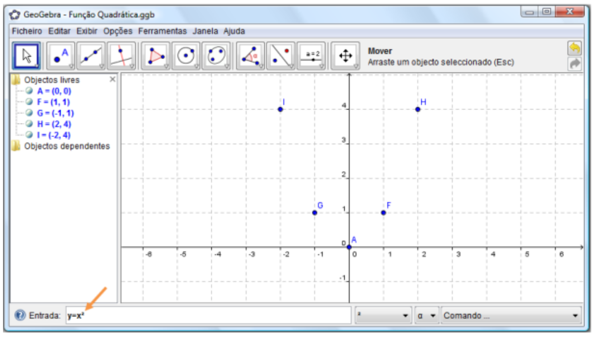
$a = 1$ e $k = 0$

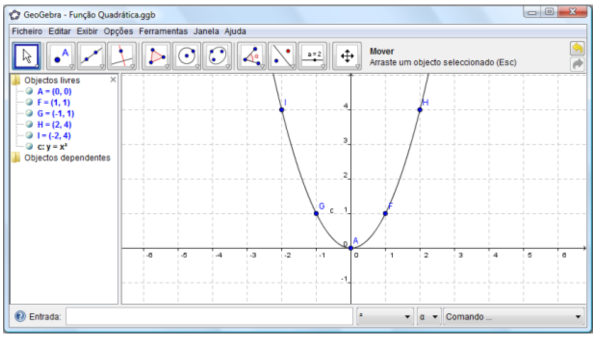


$a = 1$ e $k = 0$

Ao contrário do que aconteceu na função afim, os alunos não reconhecem de imediato a forma do gráfico. Quanto maior o número de pontos, mais certeza têm que é uma forma parabólica.

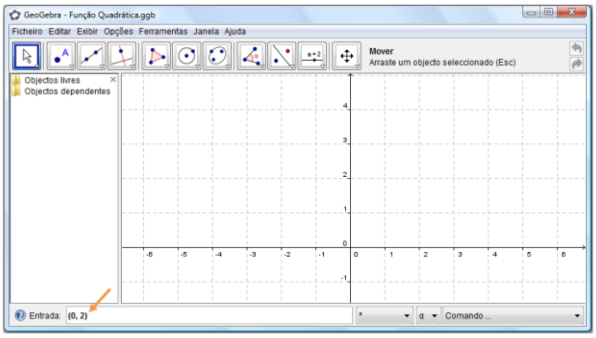
Passo 2: Introduza a expressão da sua função (na figura abaixo usámos $y = x^2$)

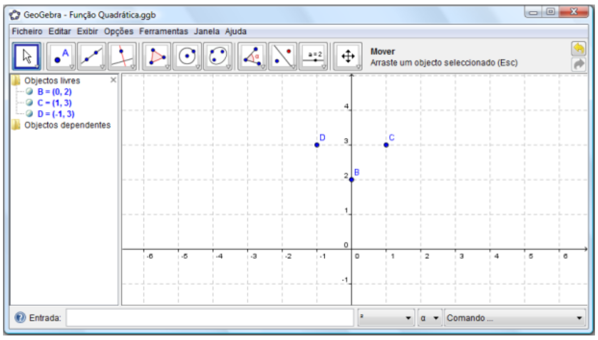


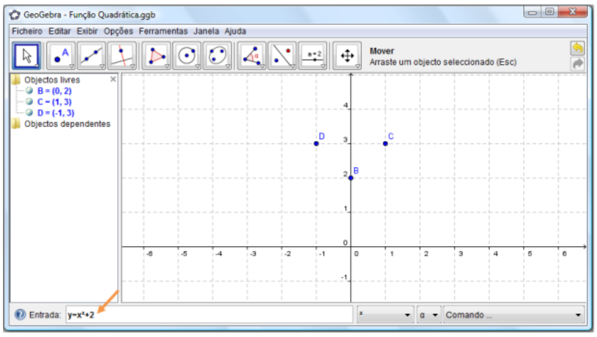


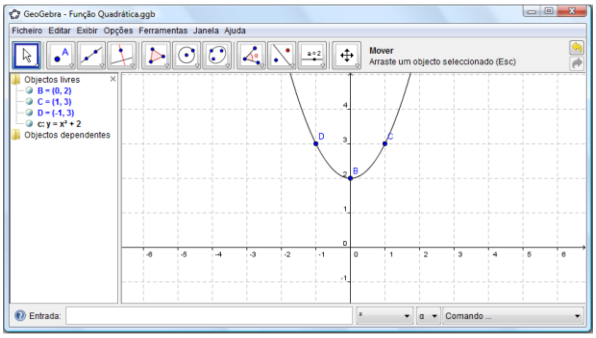
Passo 3: Repita os passos anteriores com outro valor de a e h.

Por exemplo, considerando $a = 1$ e $k = 2$.

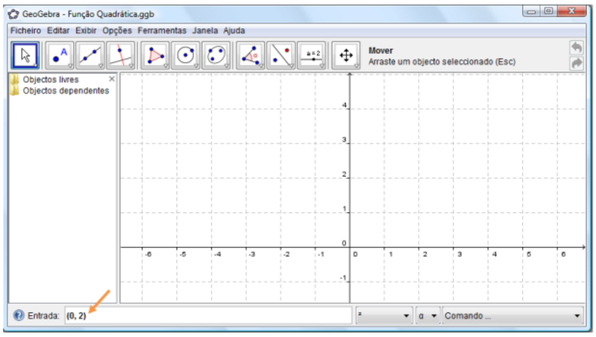


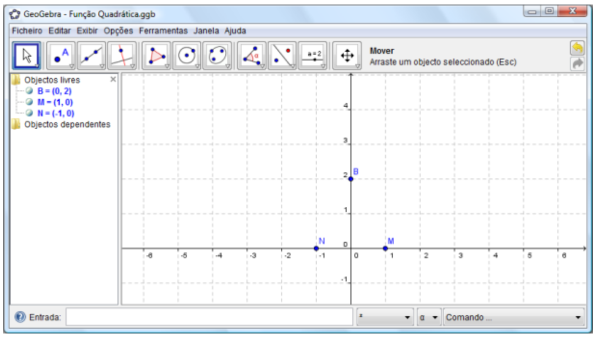


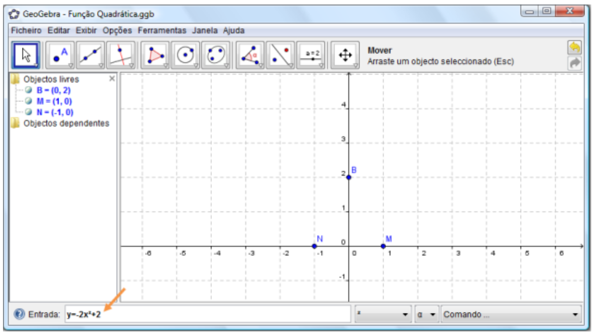


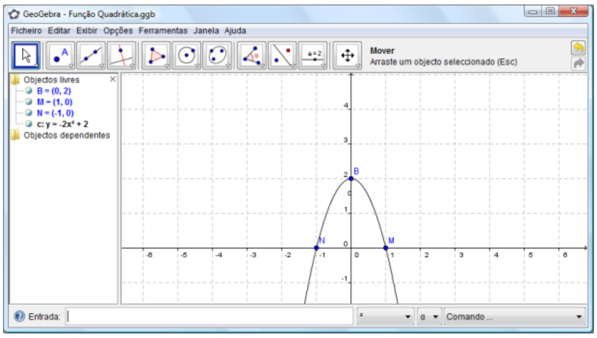


Por exemplo, considerando $a = -2$ e $k = 2$.

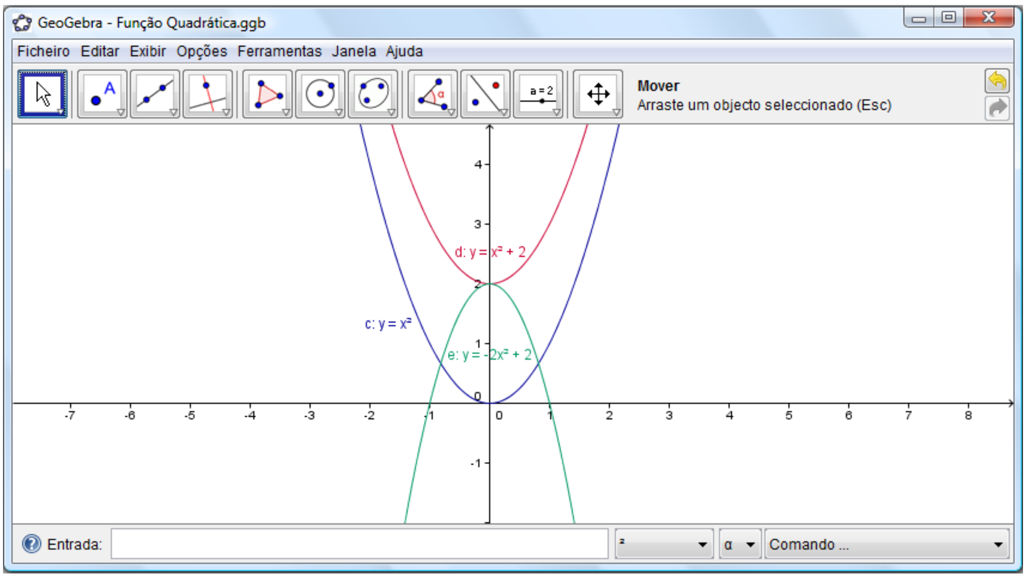








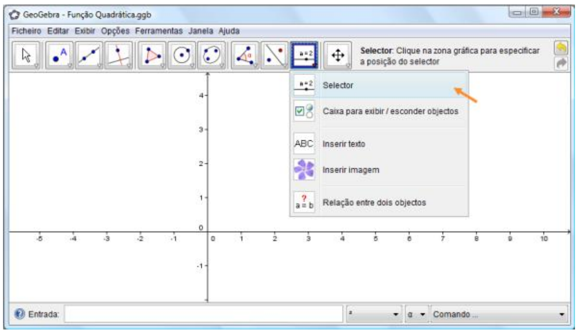
No final, obtemos algo análogo à seguinte figura.

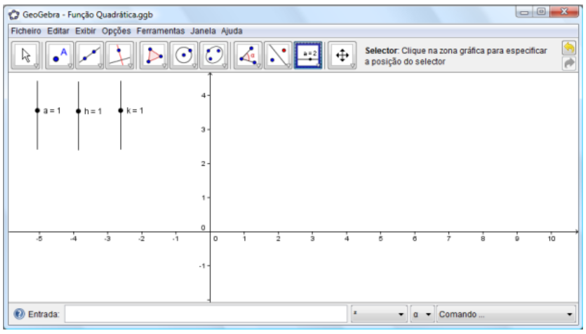


QUESTÃO: O que pode dizer relativamente a todas as funções que considerou e aos seus respectivos gráficos?

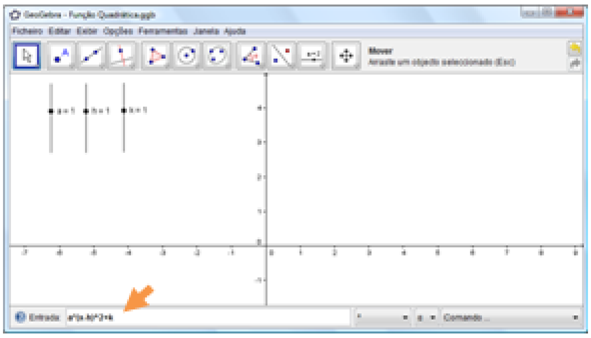
Nota: Como os alunos a que se destina este conteúdo são do ensino secundário (10° Ano), o professor pode orientá-los com a ferramenta selector.

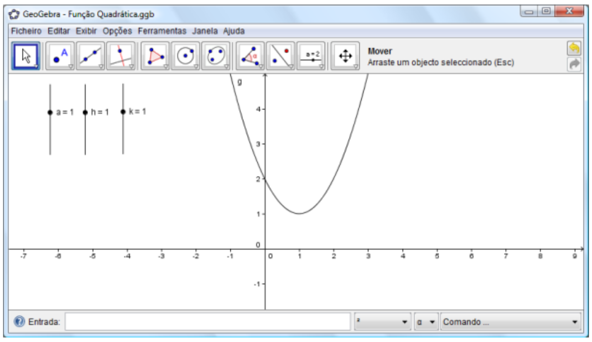
No GeoGebra crie três parâmetros dinâmicos que permitem observar a variação da função, usando três selectores que consistem num pequeno segmento de recta sobre o qual se desloca um ponto e ao qual lhe corresponde um valor.



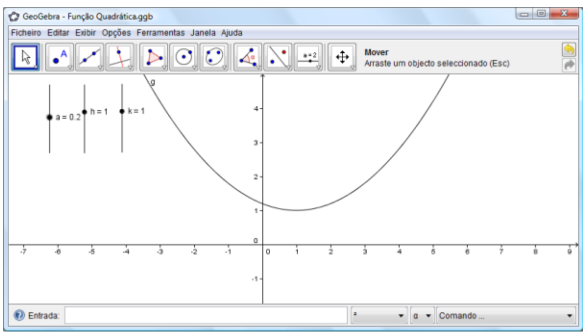


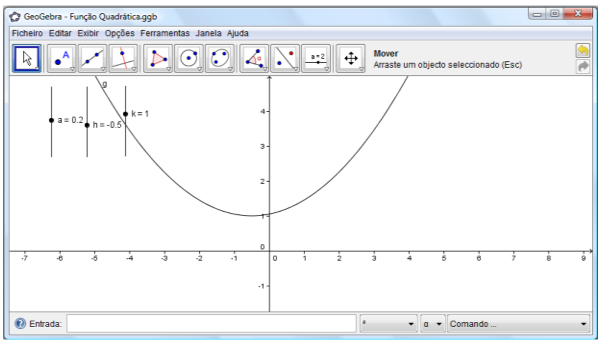
Passo 2: Introduza, na entrada de comandos, a expressão $y = a * (x - h)^2 + k$.[16]



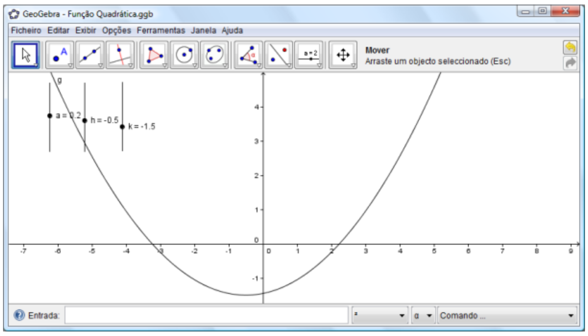


Ao deslocar cada um dos pontos dos selectores, eles mudam de valor e observe a variação que ocorre no gráfico.





[16] Os selectores têm de ter a designação a, h e k e tomar valores positivos, nulo e negativos.

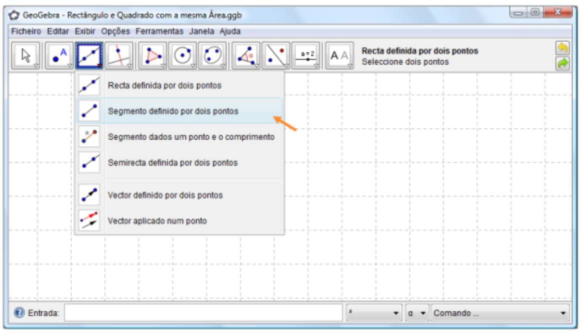


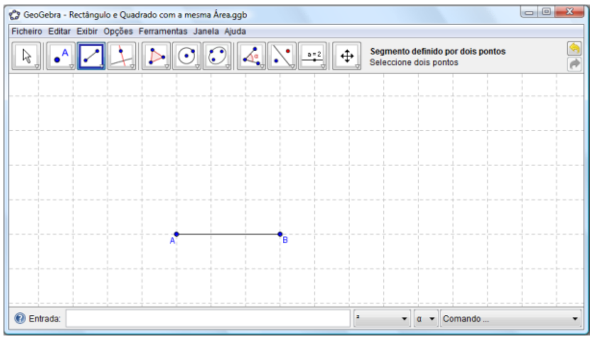
Actividade 10

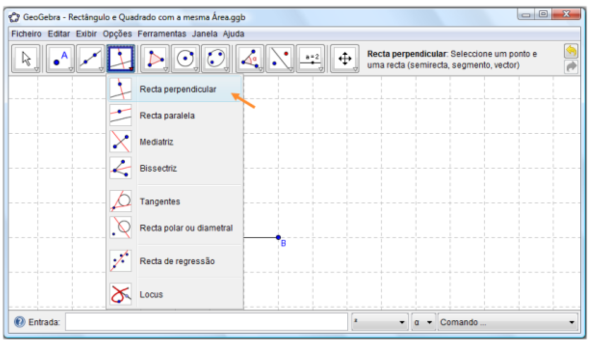
Problema Histórico do Filósofo e Matemático francês René Decartes (1596 – 1650)

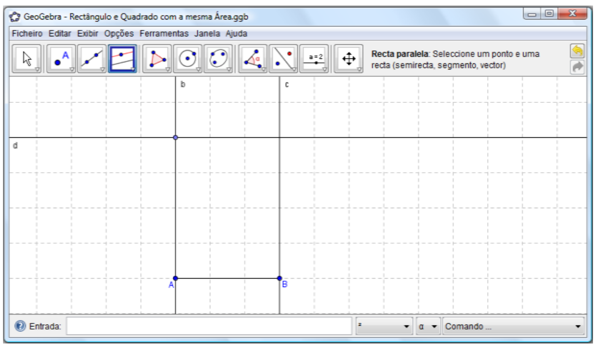
Dado um rectângulo como construir um quadrado de igual área?

Passo 1: Abre o Software de Geometria Dinâmica, GeoGebra, e comece por construir um rectângulo $[ABCD]$, partindo de um segmento de recta $[AB]$ e traçando rectas perpendiculares e paralelas.

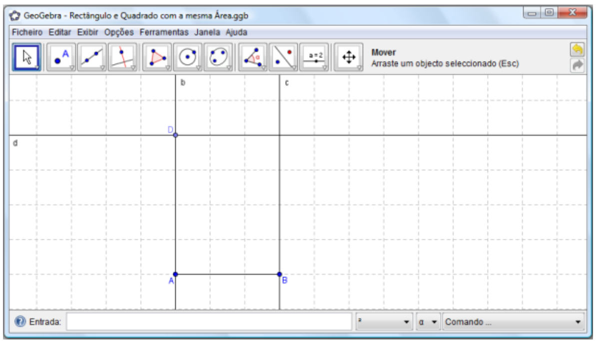


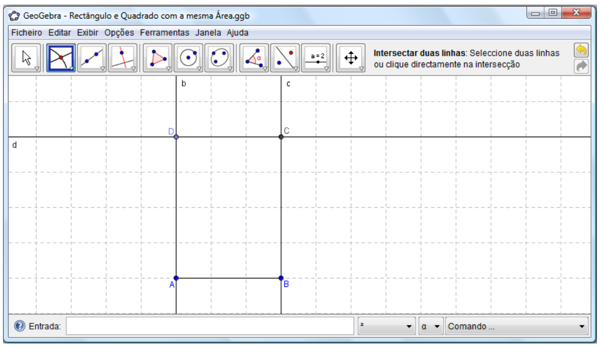




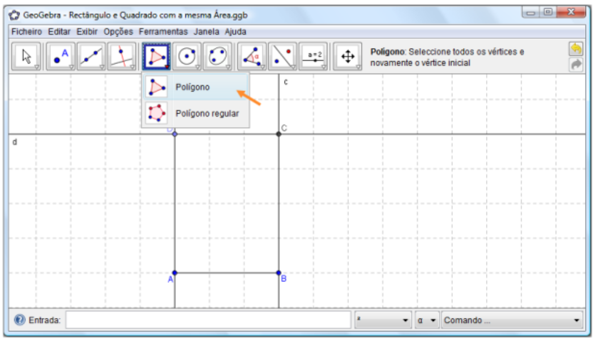


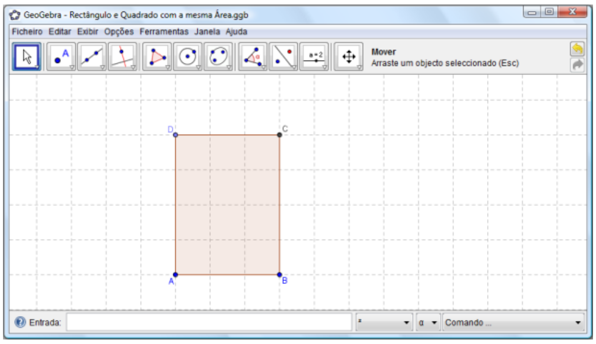
Passo 2: A seguir, sobre a recta perpendicular a AB e que passa pelo ponto A, considere um ponto que seja vértice do rectângulo (por exemplo D). Do mesmo modo, identifique o vértice C.



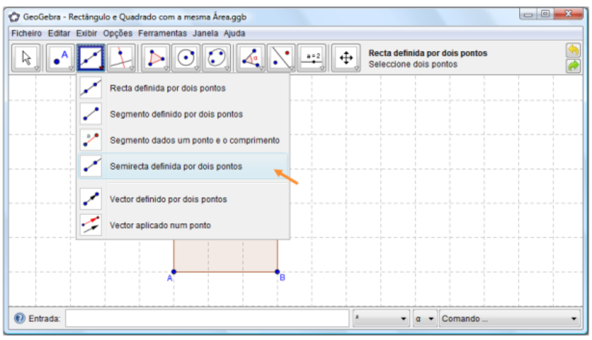


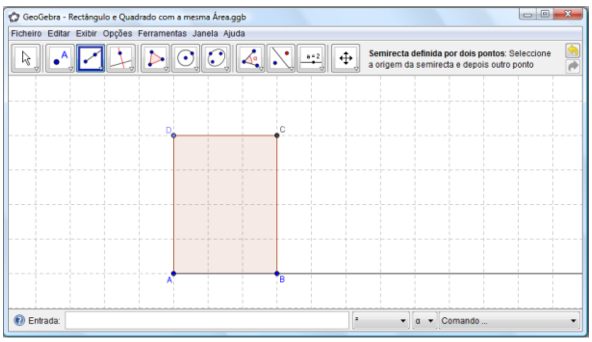
Passo 3: Para a construção não ficar muito confusa esconda as rectas e, de seguida, construa o polígono, que neste caso é o rectângulo $[ABCD]$.

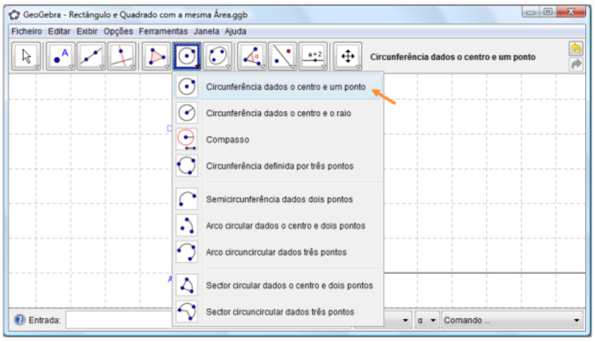


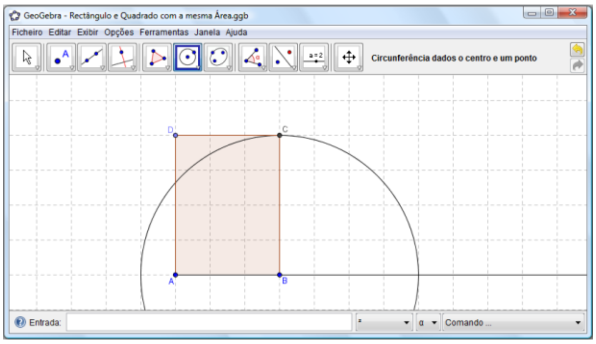


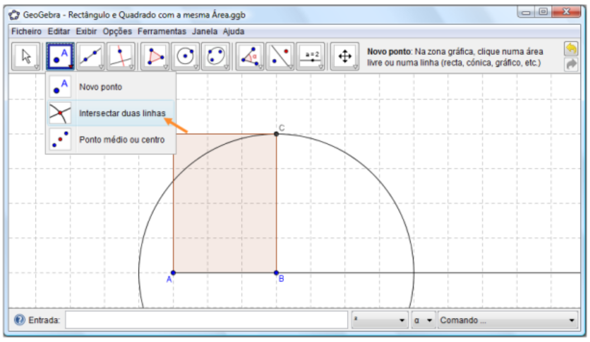
Passo 4: A seguir, determine o ponto E. Trace uma semi-recta com origem no ponto A e que passa pelo ponto B e, depois, trace a circunferência de centro no ponto B e com raio $\overline{BC}$.

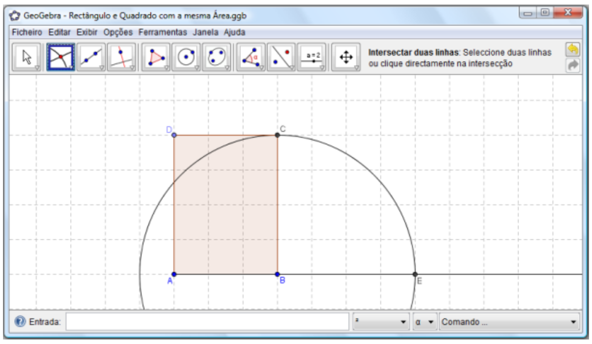




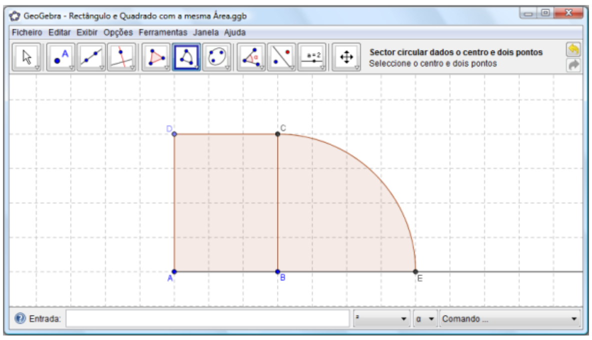




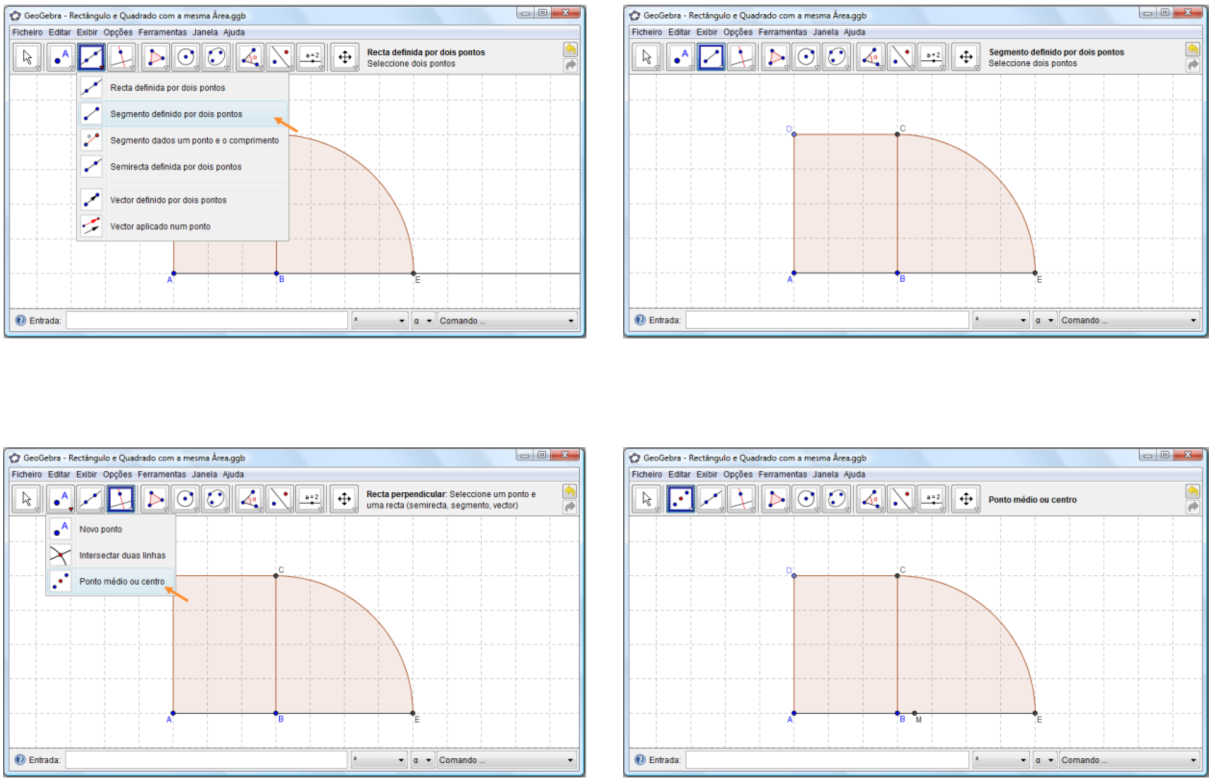




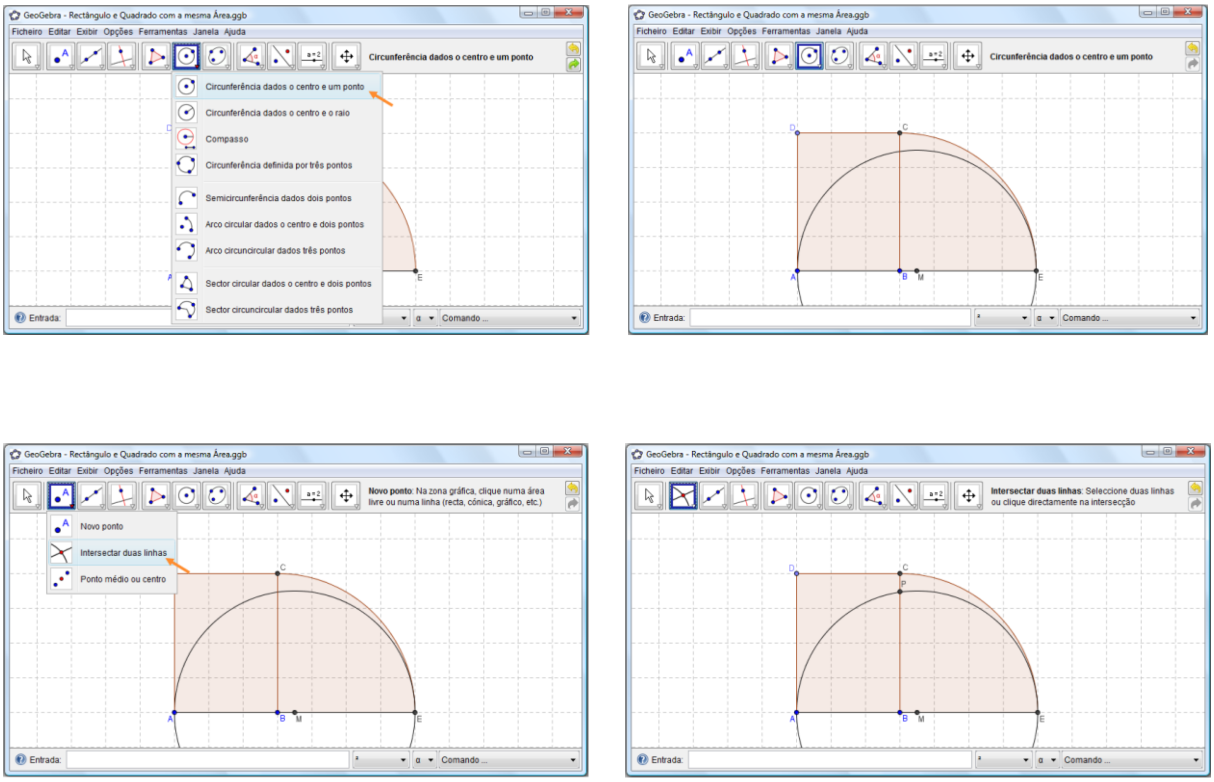
Passo 5: Esconde, agora, a circunferência traçada anteriormente e define o arco de circunferência de centro no ponto B e que passa pelo ponto E e pelo ponto C.



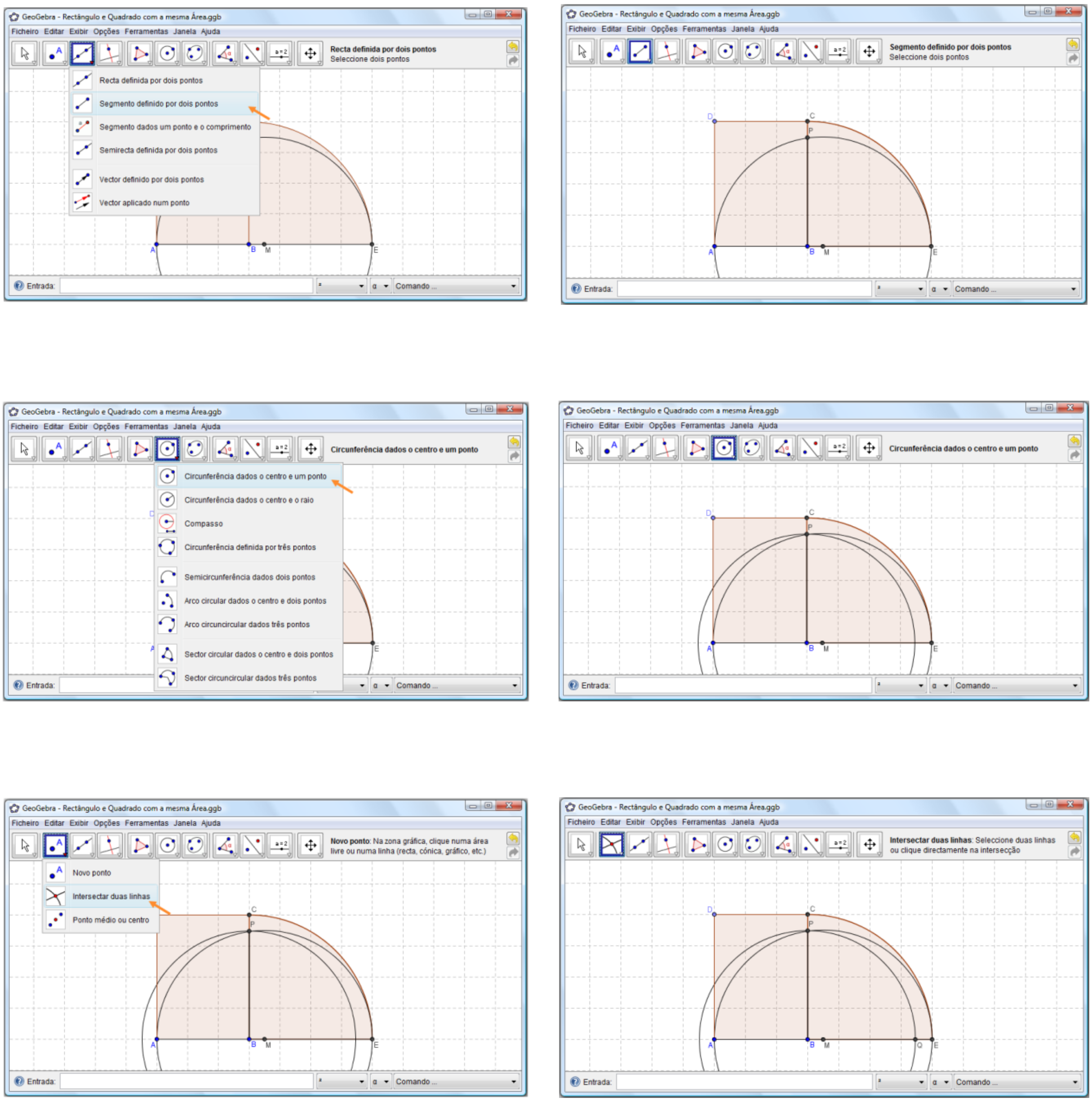
Passo 6: Define o segmento $[AE]$ e determine o seu ponto médio, obtendo-se, assim, o ponto M. Esconde a semi-recta com origem no ponto A e que passa pelo ponto B, definida anteriormente, para a construção não se tornar muito confusa.



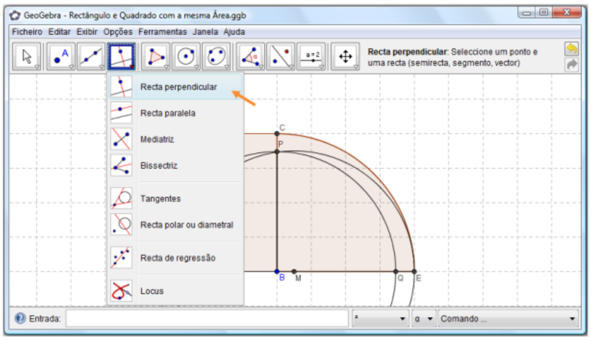
Passo 7: Trace uma circunferência de centro no ponto M e de raio $\overline{MA}$. Seja esse ponto, P, o ponto de intersecção entre a circunferência e o lado $[BC]$ do rectângulo $[ABCD]$.

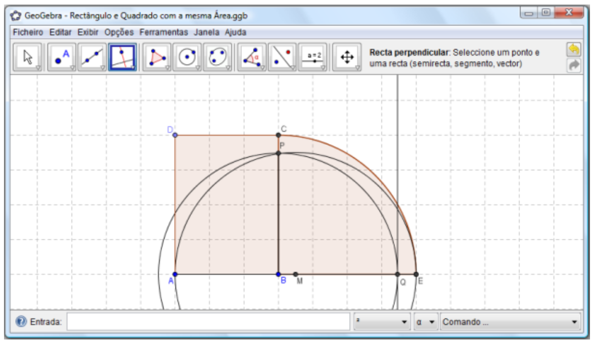


Passo 8: Considere o segmento $[BP]$ um dos lados do quadrado pretendido. Trace, agora, uma circunferência de centro no ponto B e de raio $\overline{BP}$. Seja esse ponto, Q, o ponto de intersecção entre a circunferência e o lado $[BE]$ do rectângulo $[ABCD]$.

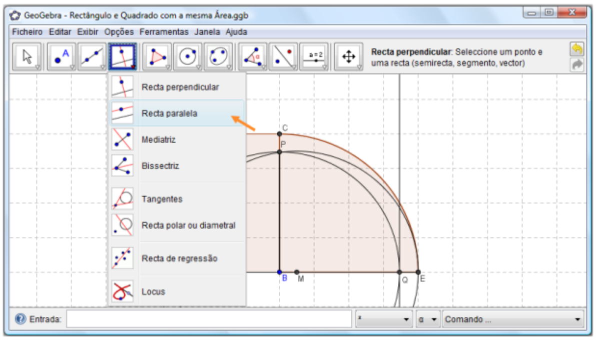


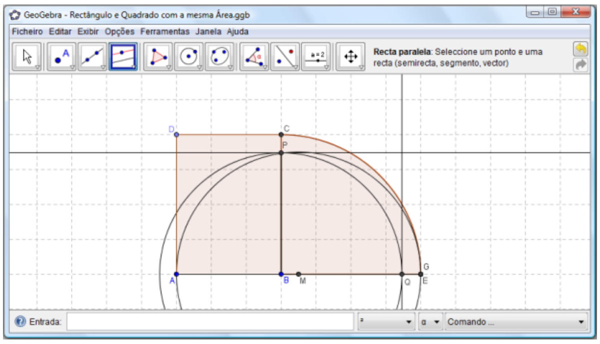
Passo 9: Trace uma recta perpendicular ao segmento de recta $[BQ]$ e que passe pelo ponto Q.



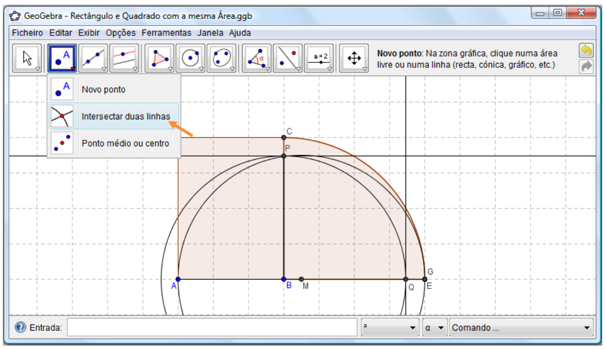


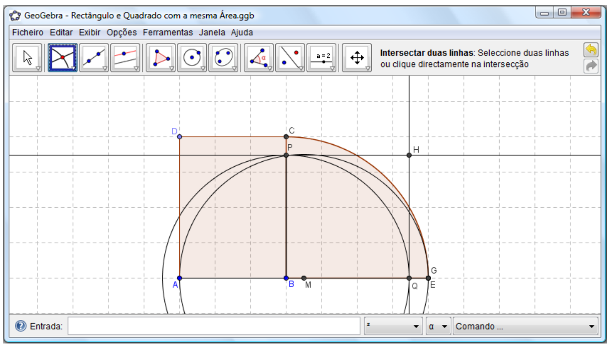
Passo 10: De seguida, trace uma recta paralela ao segmento de recta $[BQ]$ e que passe pelo ponto P.



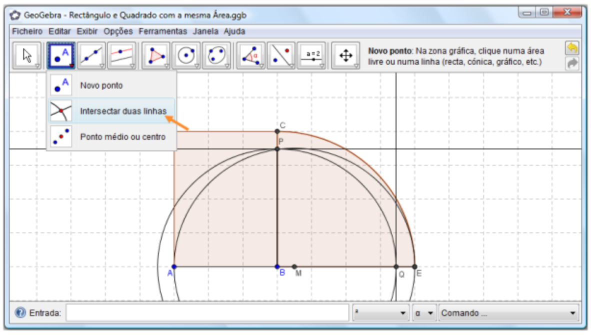


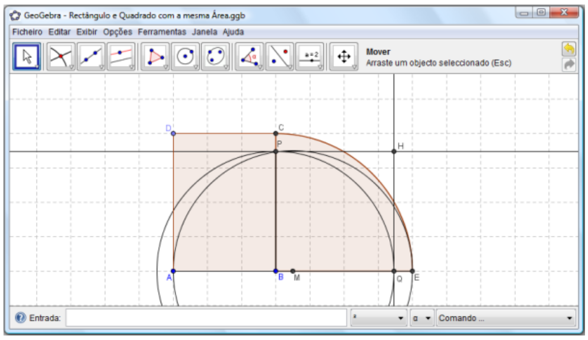
Passo 11: Determine o ponto de intersecção entre as duas rectas traçadas anteriormente. Seja esse ponto de intersecção, o ponto H.



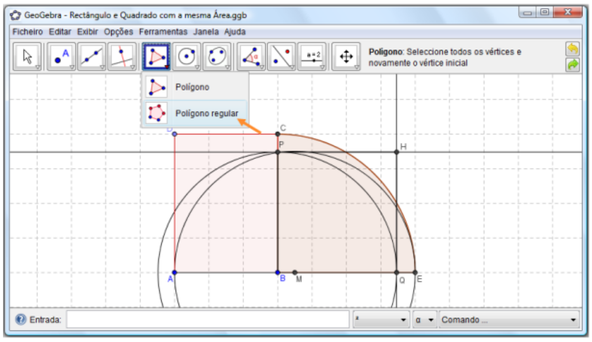


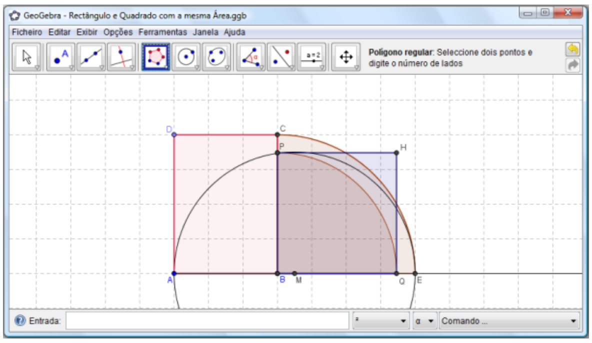
Passo 12: Considere, agora, os segmentos $[PH]$, $[HQ]$ e $[QB]$, os outros lados do polígono pretendido, que neste caso é o quadrado $[QHPB]$.



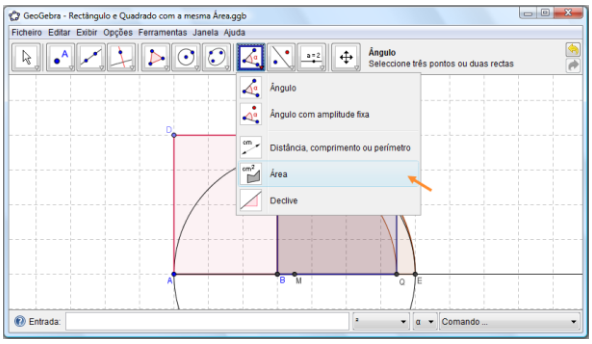


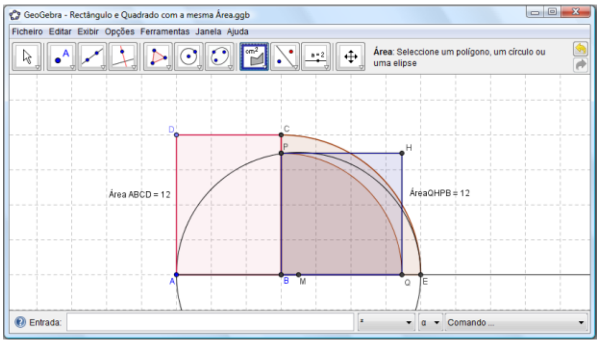
Passo 13: De seguida, constrói o polígono regular, o quadrado $[QHPB]$, e esconde as rectas e as circunferências uma de centro no ponto B e raio $\overline{BC}$ e outra de centro no ponto M e raio $\overline{MA}$, respectivamente, para a construção não ficar confusa.



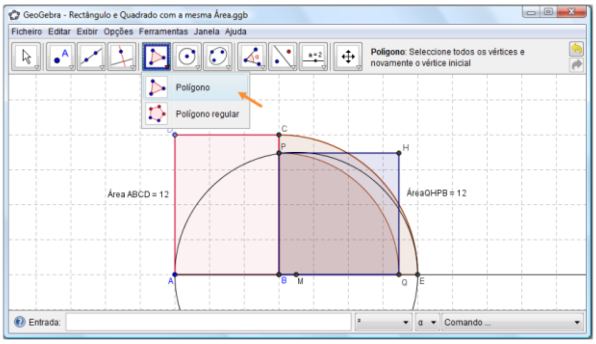


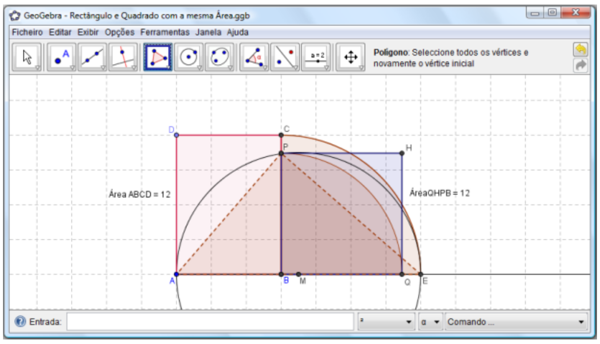
Passo 14: Determine a área do rectângulo $[ABCD]$ e do quadrado $[QHPB]$.

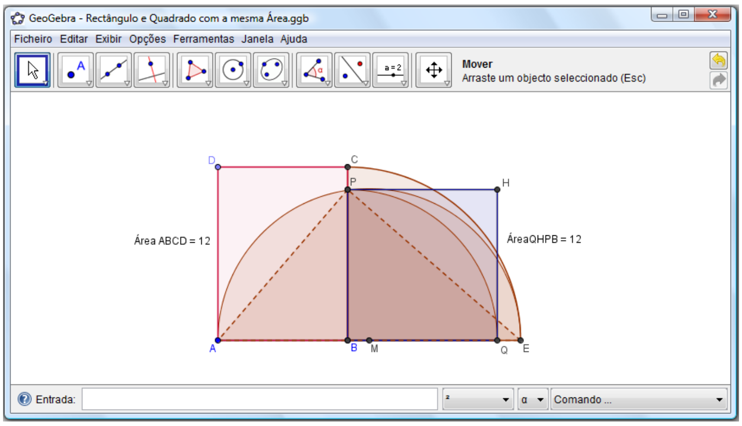




Passo 15: Para ajudar a demonstrar que a área do rectângulo $[ABCD]$ e do quadrado $[QHPB]$ construídos são iguais, constrói o triângulo $[AEP]$, com as suas linhas a tracejado, como elemento de partida para demonstrar que as áreas dos dois polígonos são iguais.







Sugestão: Considere os triângulos rectângulos $\Delta[ABP]$, $\Delta[BPE]$ e $\Delta[APE]$.

Nota:

$$(\overline{AP})^2 + (\overline{PE})^2 = (\overline{AB} + \overline{BE})^2$$