



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharias

Afectação de Unidades Térmicas - Relaxação Lagrangeana

Filipe Miguel Barreiro Ferreira

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Electrotécnica e de Computadores
2º Ciclo de estudos

Orientador: Prof. Doutor Sílvio José Pinto Simões Mariano

Covilhã, Outubro de 2011

Dedicatória

À minha mãe, avós e irmã.

Agradecimentos

A realização desta dissertação marca o fim de uma importante etapa da minha vida. Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram de forma decisiva para a sua concretização.

Desejo expressar o meu maior agradecimento ao Professor Doutor Sílvio José Pinto Simões Mariano, Professor Associado do Departamento de Engenharia Electromecânica da UBI, responsável como orientador científico. O zelo com que conduziu a minha formação e orientou este trabalho mostra o enorme gosto pela Engenharia pela sua experiência e profundo conhecimento.

À minha família, pelo apoio, confiança, compreensão e paciência, nomeadamente à minha mãe, irmã e avós, por tudo o que fazem por mim e sem os quais nunca teria sido possível realizar esta dissertação.

À minha segunda família a que se dá o nome de Desertuna, por todos os momentos vividos, por tudo o que me ensinaram e por me terem ajudado a crescer como pessoa.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram e me deram força para continuar.

A todos que me ajudaram a ser quem sou, que depositam confiança em mim e para os quais sou uma esperança, resta-me afincadamente não vos desiludir. Muito obrigado...

Resumo

Nos dias de hoje é cada vez mais importante produzir energia ao menor custo possível. A obtenção da afectação óptima de unidades é um problema de grande importância, sendo por isso motivo de grande interesse de investigação, também pelos proveitos que pode gerar. Na prática, a solução alcançada não é óptima mas sim subóptima, e resulta da resolução do problema dual em vez de se resolver o problema primal de forma directa. Uma vez que a solução obtida pela resolução do problema primal, na prática não é igual à obtida pela resolução do problema dual de Lagrange, importa relacionar estas duas soluções. A dificuldade que se coloca aquando da procura da solução óptima primal resulta da dimensão e complexidade deste problema. No caso que iremos expor apenas são consideradas três unidades de geração, com custos de arranque estáticos e para um horizonte temporal de duas horas. Mesmo apenas para este horizonte temporal, existe uma grande dificuldade de resolução e de interpretação dos resultados. Assim, se o número de restrições fosse aumentado, bem como o horizonte temporal, também a dificuldade aumentaria de forma considerável, tornando este problema, com os meios computacionais actuais, impossível de resolver de forma directa.

Na impossibilidade de resolver o problema primal de forma directa recorre-se à Relaxação Lagrangeana, resolvendo-o de forma indirecta. No entanto ao resolver o problema de forma indirecta continuamos a obter soluções não óptimas e não factíveis, do ponto de vista do problema primal. Para demonstrar essas dificuldades serão resolvidos alguns exemplos ilustrativos. Esses exemplos permitirão observar as dificuldades do problema ser abordado de forma directa e permitirão ainda observar as limitações algorítmicas que surgirão aquando da obtenção da solução óptima recorrendo à Relaxação Lagrangeana.

Por último será feita uma análise aos exemplos por nós considerados, com o intuito de perceber que influências terão os custos de arranque e os custos de operação na obtenção da solução óptima do problema.

Palavras-chave

Sistema de Energia Eléctrica

Planeamento Operacional

Afectação óptima de unidades

Relaxação Lagrangeana

Multiplicadores de Lagrange

Custos de operação

Custos de arranque

Espaço de decisão

Abstract

Nowadays it is increasingly important to produce energy at the lowest cost possible. Obtaining the optimal commitment units is a major problem and therefore of great interest for research, also by the income it can generate. In practice the reached solutions are not optimal but suboptimal, and results of solving the dual problem instead of solving the primal problem directly. Since the obtained solution of the primal issue in practice is not equal to the one obtained by the Lagrange dual problem, it is important to relate these two solutions. The difficulty that arises when finding the primal optimal solution results from the dimension and complexity of this problem. In the case exposed we only considered three generating units with start-up costs for a static (one hour) and a time horizon of two hours. Even just for this time horizon, there is great difficulty of resolution and interpretation of results. Thus, if the number of constraints increases as also the time horizon, the difficulty also increase significantly, making this problem, with current computational resources, impossible to solve directly.

In the impossibility of solving the primal problem directly, we have to reach for the Lagrangian Relaxation resolving it indirectly. However to solve the problem indirectly we continue obtaining a solution that is not optimal and feasible, from the standpoint of the primal problem. To demonstrate these difficulties it will be solved some illustrative examples. These examples will allow to observe the difficulty of the problem being addresses directly and will also observe the algorithmic limitations that arise when obtaining the optimal solution using the Lagrangian Relaxation.

Finally an analysis to the examples will be made by us in order to see what influences will have depending on start-up costs and operating costs in obtaining the optimal solution of the problem.

Keywords

Power System

Operational Planning

Optimal Resource Scheduling

Lagrangian Relaxation

Costs of Operation

Start-up Costs

Lagrange Multipliers

Space of Operation

Índice

1 - Introdução	2
1.1 - Enquadramento	3
1.2 - Motivação	6
1.3 - Perspectiva histórica da investigação	7
1.4 - Organização do texto	9
1.5 - Notação	10
2 - Problema Primal	12
2.1 - Formulação do problema	13
2.2 - Problema Primal - Ilustração	17
2.3 - Horizonte temporal de uma hora	18
2.4 - Horizonte temporal de duas horas	19
3 - Relaxação Lagrangeana	21
3.1 - Função de Lagrange	22
3.2 - Multiplicadores de Lagrange	24
4 - Problema Dual de Lagrange	25
4.1 - Problema Dual de Lagrange	26
4.2 - Formulação do problema Dual de Lagrange	26
4.2 - Problema Dual de Lagrange - Ilustração	30
4.3 - Horizonte temporal de uma hora	30
4.4 - Horizonte temporal de duas horas	33
5 - Salto de Dualidade	37
5.1 - Salto de dualidade	38
5.2 - Horizonte temporal de uma hora	39

6 - Resultados e análise crítica.....	42
6.1 - Introdução	43
6.2 - Horizonte temporal de uma hora.....	45
6.2.1 - Variação dos custos de arranque	45
6.2.2 - Variação dos custos de operação	49
6.2.3 - Variação de ambos os custos	53
6.3 - Horizonte temporal de duas horas	56
6.3.1 - Variação dos custos de arranque	56
6.3.2 - Variação dos custos de operação	59
6.3.3 - Variação de ambos os custos	62
7 - Conclusões	66
7.1 - Principais conclusões	67
7.2 - Direcções de investigação	69
8 - Referências Bibliográficas.....	70
Outras Referências	72

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Gráfico correspondente à solução do problema primal em D	19
Figura 2.2 - Gráfico correspondente à solução do problema primal em d^2	20
Figura 4.1 - Gráfico correspondente à solução do problema Dual de Lagrange em D	32
Figura 4.2 - Gráfico correspondente à solução do problema Dual de Lagrange em d^2	33
Figura 4.3 - Gráfico correspondente às linhas de contorno da função dual de Lagrange representada na Figura 4.2	35
Figura 5.1 - Gráfico correspondente ao Salto de Dualidade em D	40
Figura 6.1 - Gráfico correspondente à solução do problema primal em D, com aumento dos custos de arranque	45
Figura 6.2 - Gráfico correspondente à solução do problema dual de Lagrange em D, com aumento dos custos de arranque	47
Figura 6.3 - Gráfico correspondente salto de Dualidade em D (aumento dos custos de Arranque).....	48
Figura 6.4 - Gráfico correspondente à solução do problema primal em D, com aumento dos custos de operação	49
Figura 6.5 - Gráfico correspondente à solução do problema dual de Lagrange em D, com aumento dos custos de operação	50
Figura 6.6 - Gráfico correspondente salto de Dualidade em D (aumento dos custos de operação)	51
Figura 6.7 - Gráfico correspondente ao zoom da Figura 6.6	52
Figura 6.8 - Gráfico correspondente à solução do problema primal em D, com aumento de ambos os custos	53
Figura 6.9 - Gráfico correspondente à solução do problema dual de Lagrange em D, com aumento de ambos os custos	54
Figura 6.10 - Gráfico correspondente salto de Dualidade em D (aumento de ambos os custos)	55

Figura 6.11 - Gráfico correspondente à solução do problema primal em d^2 , com aumento dos custos de arranque	57
Figura 6.12 - Gráfico correspondente à solução do problema dual de Lagrange em d^2 , com aumento dos custos de arranque	58
Figura 6.13 - Gráfico correspondente às linhas de contorno da função dual de Lagrange representada na Figura 6.11	59
Figura 6.14 - Gráfico correspondente à solução do problema primal em d^2 , com aumento dos custos de operação	60
Figura 6.15 - Gráfico correspondente à solução do problema dual de Lagrange em d^2 , com aumento dos custos de operação	61
Figura 6.16 - Gráfico correspondente às linhas de contorno da função dual de Lagrange representada na Figura 6.14	62
Figura 6.17 - Gráfico correspondente à solução do problema primal em d^2 , com aumento de ambos os custos	63
Figura 6.18 - Gráfico correspondente à solução do problema dual de Lagrange em d^2 , com aumento de ambos os custos	64
Figura 6.19 - Gráfico correspondente às linhas de contorno da função dual de Lagrange representada na Figura 6.17	65

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo é apresentado uma curta introdução ao problema de afectação de unidades em sistemas térmicos de energia eléctrica. Apresenta-se o enquadramento do estudo e esboçam-se as ideias fundamentais que motivaram a abordagem deste tema com recurso a processos de cálculo automáticos para optimização.

1.1 - Enquadramento

Esta dissertação enquadra-se no problema geralmente designado de planeamento operacional que é um problema real com que as empresas produtoras de energia eléctrica se deparam diariamente. A finalidade do planeamento operacional é disponibilizar potência para o fornecimento de energia eléctrica às instalações eléctricas. Torna-se necessário determinar quais os grupos que devem estar preparados para começar a produzir. Determinar quais os grupos que devem estar prontos para entrar em funcionamento e quando, é um processo hierarquicamente superior ao processo das decisões de operação e desenrola-se numa escala de tempo ainda superior, que vai desde horas até dias, este processo é designado de planeamento operacional. Este problema abarca um conjunto de tarefas a realizar por técnicos especializados na exploração e operação, que recorrendo á informação actual e histórica terão influência na gestão futura, determinando a melhor sequencia de acções particulares de entre um conjunto de alternativas viáveis, tendo como finalidade disponibilizar potência ao consumidor ao menor custo possível [1].

A energia eléctrica tem cada vez maior importância no dia-a-dia, tornando-se num dos bens essenciais da actividade humana. A energia eléctrica deve ser gerada na altura em que é requerida, devido aos elevados valores económicos envolvidos na sua armazenagem, o que impede de atingir uma estratégia económica óptima. Para que a energia eléctrica esteja sempre disponível, é indispensável que a operação do sistema de produção seja constantemente planeada [2].

Num sistema de produção de energia eléctrica as operações estão interligadas entre todas as centrais eléctricas pela demanda de energia, pelo consumo e pelas reservas de capacidade de cada central. Um sistema de energia eléctrica é um sistema de grande dimensão e complexidade.

Para além da sua própria dinâmica, a produção em centrais térmicas é condicionada pela potência mínima, potência máxima e pela energia produzida para um tempo predefinido, que pode ser condicionada pelas quantidades de combustíveis disponíveis.

O planeamento operacional pode conter desde um horizonte temporal de horas até a um horizonte temporal de décadas. Para um horizonte temporal longo (anos) o planeamento baseia-se na construção de novas centrais eléctricas, na modernização ou substituição de outras de forma a satisfazer o consumo de energia que tende a aumentar cada vez mais. Este planeamento pretende minimizar os custos operacionais relacionados com a segurança do serviço e o investimento esperado [3, 4].

Para um horizonte temporal ainda longo (meses) o planeamento operacional baseia-se na manutenção das centrais eléctricas e nos contratos de transacção de energia, com o intuito de minimizar os custos operacionais relacionados com a segurança do serviço.

No caso de um horizonte temporal curto (geralmente uma semana) o planeamento operacional baseia-se na minimização dos custos de operação para um período de afectação predefinido, cumprindo todos os requisitos de geração e de capacidade em cada hora.

Os problemas de programação matemática de excessivo porte e de difícil resolução advêm do chamado problema de afectação de unidade, quer pela dimensão do próprio sistema, quer pela diversidade de recursos existentes. O problema de afectação de unidades envolve milhares de decisões de natureza discreta e contínua, resultando daí a combinação óptima de unidades.

Para o horizonte temporal mais curto (minutos) o planeamento baseia-se na determinação do trânsito óptimo de potências com o intuito de minimizar o custo de operação em cada instante. Nesta dissertação dar-se-á maior ênfase ao planeamento operacional de curto prazo.

O sector Eléctrico Nacional (SEN) tem sofrido desenvolvimentos no sentido de introduzir concorrência no sector, que era considerado um monopólio natural. Em Portugal progrediu-se de uma empresa pública monopolista e verticalmente integrada para a existência de várias empresas nas diversas áreas do mercado de energia, introduzindo concorrência nesse sector através da liberalização do mercado, com o intuito de baixar o preço ao consumidor, presenciou-se assim à reestruturação do sector eléctrico. A EDP acabou por sofrer também uma reestruturação. Existindo agora uma evidente separação entre produção, transporte e distribuição de energia. Com isto, a evolução do sector eléctrico nacional (SEN) teve início com a criação do sistema eléctrico não vinculado (SENV) coexistindo com o sistema eléctrico público (SEP), sendo que ambos os sistemas eram regulados por uma entidade independente apelidada de entidade reguladora do sector eléctrico (ERSE). Na sequência da implementação da Lei Base de Electricidade, os sectores vinculados e não vinculado do SEM foram substituídos por um sistema de mercado único. As actividades de produção e comercialização de electricidade e a gestão dos mercados de electricidade organizados estão agora inteiramente abertas à concorrência, sujeitas à obtenção de licenças e aprovações necessárias [5, 6].

Para satisfazer a procura de energia eléctrica dispõe-se, tipicamente, de dois tipos de recursos, hídricos e térmicos, para além da produção em regime especial (cogeração, mini-hídrica e eólica). Nesta dissertação focaremos os recursos térmicos.

Na afectação de unidades térmicas, a programação dinâmica foi o primeiro método a ser aplicado. Este problema é de grande complexidade e envolve programação inteira mista de larga escala. Embora tenha existido uma grande evolução tecnológica, que levou a um aumento da capacidade de cálculo dos computadores, nos dias de hoje ainda não foi possível encontrar um método que resolva este problema de forma plena [3].

No que diz respeito à afectação de unidades térmicas os métodos de optimização desenvolvidos até finais da década de oitenta, são baseados em: Programação Dinâmica, Relaxação Lagrangeana, Processos Heurísticos e decomposição de Benders. As primeiras metodologias utilizadas na resolução do problema de afectação de unidades foram a Programação Dinâmica e os Processos Heurísticos. O método que encontrou maior adesão por parte dos investigadores foi o método baseado em técnicas de optimização dual de Lagrange, também apelidado de Relaxação Lagrangeana. Ainda hoje existe grande esforço por parte dos investigadores no melhoramento da solução do problema obtida por este método, que é uma solução subóptima e por vezes não fazível [3, 7, 8, 9].

Recorrendo à programação dinâmica obtém-se com precisão a solução, no entanto tem a limitação de só funcionar para problemas de dimensão reduzida. Duas grandes desvantagens da programação dinâmica é ter um tempo de execução grande e precisar de uma grande capacidade de memória. Sendo que uma das grandes características do problema de afectação de unidades é a sua grande dimensão, a programação dinâmica não é utilizada para resolver o problema como um todo mas sim para resolver o problema em conjunto com outras metodologias.

Houve quem recorresse a outros métodos para resolver o problema de afectação de unidades térmicas, tais como: o “Branch-and-Bound”, a decomposição de Benders e o recurso à programação não linear inteira mista [10].

De todos os métodos aplicados à resolução deste problema, o que obteve maior adesão por parte dos investigadores, foi o método baseado em técnicas de optimização dual de Lagrange, também apelidado de Relaxação Lagrangeana. Este método teve maior sucesso devido à sua exequibilidade e devido aos bons resultados apresentados [11, 12, 13].

Se o problema Dual de Lagrange for resolvido de maneira correcta, verifica-se que a solução do problema de afectação melhora de forma significativa, no entanto persiste ainda uma grande dificuldade, porque a resolução deste problema depende do processo tentativa e correcção de erro, fazendo com que a sua resolução seja morosa e dependente da perícia do utilizador [14, 15, 16].

1.2 - Motivação

O que nos leva a abordar o tema de sistemas de decisão óptima em coordenação hidrotérmica para planeamento operacional recai sobre dois argumentos. O primeiro argumento resume-se ao facto do sector de energia eléctrica estar a atravessar uma profunda reestruturação, o que obriga a questionar sobre a maior ou menor eficácia dos diversos modelos de mercado existentes. O outro argumento consiste no facto do planeamento operacional ser parte essencial da actividade das empresas do sector eléctrico, não apenas no que diz respeito à necessidade de recursos humanos muito especializados, mas mais ainda pelo valor económico que pode aumentar no caso de a resolução ser óptima. Os sistemas de decisão óptima em coordenação hidrotérmica para planeamento operacional representam enormes poupanças.

O primeiro argumento tem um papel fundamental na caracterização dos modelos existentes ou propostos para a reestruturação do mercado de energia eléctrica. É neste sentido que se investiu de forma a melhorar e a tornar mais fácil a utilização de um produto capaz de conduzir e de suportar as decisões para planeamento operacional. Este argumento é fundamental para a caracterização dos modelos existentes ou propostos para a reestruturação do mercado de energia eléctrica, no sentido de estudar o desempenho no que diz respeito à optimização das decisões para planeamento operacional, bem como o que diz respeito aos benefícios que daí possam resultar para os consumidores e trazer respostas aos desafios que a reestruturação do sector eléctrico veio trazer às empresas produtoras de energia eléctrica.

Quanto ao outro argumento, é explícito no que diz respeito à importância de existirem meios computacionais poderosos, que ajudam e suportam as decisões dos Engenheiros, com o objectivo de otimizar a exploração de todos os recursos. Foi nesse sentido que se trabalhou de forma a melhorar e a tornar mais fácil a utilização de um produto capaz de suportar e conduzir as decisões para planeamento operacional.

Quando resolvido de forma óptima, o planeamento operacional assume uma importância cada vez maior nas empresas produtoras de energia eléctrica, podendo representar volumosas poupanças quando resolvido de forma óptima. Existe, assim, um grande interesse pelo desenvolvimento de melhores meios, de modo a contribuir tecnicamente para a convergência no sentido das decisões óptimas.

A complexidade subjacente aos problemas de planeamento operacional de sistemas de energia hidroeléctricos, ligada ao aumento das exigências de racionalidade de recursos, leva a que seja rapidamente ultrapassado o que pode ser abrangido pela mente humana. Para uma utilização racional dos recursos das centrais produtoras, a utilização exclusiva da perspectiva heurística, baseada na criatividade e experiência dos engenheiros de planeamento operacional, é inadequado na actualidade.

Os métodos de optimização e a simulação computacional permitem gerar sistemas de informação com excelência para o suporte das decisões, criando condições para obter melhor viabilidade, eficiência e competitividade.

No entanto, é compreensível, quer pelo valor dos investimentos necessários, quer pelo tempo que demora desde a decisão até à construção de novas centrais, que o incremento na produção de energia eléctrica não seja realizado à custa da construção de novas centrais. Isto requer uma maior responsabilidade e racionalidade da parte das empresas de produção de energia eléctrica.

Alguns dos factores que motivam o estudo do problema, de modo a ter uma maior racionalidade nas decisões são: a complexidade do problema, a escassez de recursos naturais e o objectivo de ter soluções óptimas.

De seguida são apresentados alguns factores que reforçam a motivação para o estudo do tema com base na tecnologia informática: o primeiro factor será a necessidade, estabelecida pelos grandes investimentos requeridos nas empresas de produção de energia eléctrica e pelos custos dos combustíveis das centrais térmicas. Outro factor tem a ver com a velocidade de cálculo e a capacidade de memória central existentes nos computadores dos dias de hoje. Esses computadores permitem o suporte de metodologias de optimização que, para uma análise mais rigorosa de todas as alternativas possíveis, necessitam processar e memorizar uma grande quantidade de informação.

1.3 - Perspectiva histórica da investigação

Para a optimização em sistemas de energia eléctrica, o tipo de operação económico e eficiente no pequeno espaço de tempo de recursos existentes, tem sido um assunto alvo de investigação desde a década de sessenta, devido aos benefícios económicos resultantes da melhor solução possível e da complexidade do problema [4].

Reflectindo um pouco sobre o sector eléctrico nacional e a sua evolução, observou-se que a partir da década de 80, sem colocar em causa o monopólio constituído pelas redes eléctricas, tem-se defendido que a produção e a comercialização de electricidade são segmentos do sector onde é possível introduzir a concorrência. Com a reestruturação em curso nalguns países, pretende-se passar, na produção e na comercialização, do monopólio regulado ao mercado concorrencial. A abertura parcial ou total do mercado significa que uma parte ou a totalidade dos clientes pode, individualmente, escolher o seu fornecedor de electricidade.

Espera-se que esta possibilidade de escolher quem fornece a electricidade provoque o processo concorrencial [17].

No sector eléctrico, as economias de escala e as reduções de custos de transacção obtidas com as integrações vertical e horizontal favoreceram o aparecimento do monopólio. Desde cedo se sentiu a necessidade de limitar o poder de mercado da empresa monopolista através de uma acção reguladora, o que deu origem ao monopólio regulado.

A partir da década de 80, sem colocar em questão o monopólio constituído pela infraestrutura das redes, tem-se defendido que a produção e comercialização da electricidade são segmentos do sector onde é possível introduzir a concorrência. Assim, assiste-se, nalguns países, à desregulação da indústria eléctrica. Para pequenos sistemas isolados aceita-se que a sua exploração seja efectuada através de uma única empresa, pois esta solução reduz custos de transacção.

Devemos ter consciência que a passagem do monopólio regulado ao mercado concorrencial, no qual os consumidores têm a possibilidade de escolha de fornecedor, não significa só aumentar o eventual número de operadores. Significa, também, quebrar todo o enquadramento regulatório pré-existente, por exemplo, sobre os centros produtores de energia eléctrica. Teoricamente, o risco dos produtores aumenta, no entanto, eles ganham a liberdade para estabelecerem estratégias de modo a maximizarem os seus lucros, tendo, naturalmente, em conta a acção dos restantes concorrentes.

Na década de setenta, houve progressos nos domínios de geração e da tecnologia para a transmissão e distribuição de energia eléctrica que permitiram baixar os custos por unidade de energia eléctrica. Nessa altura os custos de produção eram significativamente baixos, o que permitia uma certa tolerância no que diz respeito aos custos de equipamentos instalados e disponíveis para a produção. Foi nessa mesma década, mais precisamente em 1973, que surge a crise económica, havendo uma repercussão sobre os custos dos equipamentos e sobre os custos das construções, dando origem a certas preocupações e atitudes com aspectos económicos, que até essa data eram considerados irrelevantes. A partir dessa data o preço da energia eléctrica aumentou, tornando-se cada vez mais difícil manter os níveis de fiabilidade recorrendo aos métodos utilizados anteriormente. Deste modo, tornou-se impraticável operar sob as condições de exploração exercidas anteriormente, face á nova estrutura de custos dentro de uma perspectiva económica saudável. Nos dias que correm as empresas têm de encarar os seus investimentos com grande racionalidade, face á concorrência existente hoje no sector eléctrico. Para isso as empresas tentam maximizar a utilização dos recursos existentes e minimizar os projectos que não contribuem directamente para uma melhoria económica na produção de energia eléctrica.

Um grande desafio que as empresas produtoras de energia eléctrica enfrentam diariamente está relacionado com o reflexo económico, que incide sobre as empresas na vivência do cenário actual. Para enfrentar esses desafios um dos caminhos que se tem seguido é o de tirar partido quer de decisões mais eficientes fundamentadas na experiência histórica vivida, quer de um melhor aproveitamento dos equipamentos instalados e da investigação. Para tal tem-se recorrido cada vez mais às formulações em programação matemática das concepções físicas determinantes dos problemas económicos básicos e às vantagens proporcionadas pela utilização de computadores existentes devido a recentes avanços neste domínio.

1.4 - Organização do texto

A dissertação está organizada em sete capítulos, sendo que os capítulos 2, 3, 4, 5 e 6 destinam-se à descrição de aspectos de solução do problema, evoluindo no sentido da importância dos custos de operação, também em consonância com a reestruturação do sector eléctrico nacional, apresentando as respectivas ilustrações. O capítulo 7 destina-se às conclusões da dissertação.

O capítulo 2 trata o problema de afectação de unidades de um sistema de energia térmico, para um curto prazo. A formulação do problema leva a um problema de optimização matemática, que resulta numa função objectivo que abrange o custo de operação durante o período de afectação, e onde são descritas todas as restrições impostas pelo sistema a cumprir no problema de optimização. Neste capítulo surgirá a interpretação geométrica da resolução do problema primal para dois exemplos de pequena dimensão.

O capítulo 3 trata a relaxação Lagrangeana, que conjuntamente com técnicas de optimização dual será a forma encontrada para tentar solucionar as dificuldades encontradas na resolução do problema primal. A relaxação é então uma das formas de tentar solucionar as dificuldades encontradas na resolução do problema primal.

O capítulo 4 trata o problema dual de Lagrange, que nos permite solucionar de forma indirecta o problema primal. A solução do problema primal resulta do enfraquecimento do problema primal recorrendo à relaxação Lagrangeana. Neste capítulo surgirá a interpretação geométrica da resolução do problema primal para os mesmos dois exemplos apresentados no capítulo dois.

O capítulo 5 trata o salto de dualidade, que será a relação existente entre a solução do problema primal e a solução do problema dual de Lagrange. Será apresentada a interpretação geométrica do salto de dualidade, para os exemplos apresentados nos capítulos anteriores.

O capítulo 6 trata os resultados e análise crítica, ou seja, vamos analisar que influência tem os custos de arranque e os custos de operação na obtenção da solução óptima do problema. Os exemplos apresentados nos capítulos 2 e 4, serão considerados como exemplos modelos, depois alteram-se os valores dos custos e observamos que diferenças existem em relação ao gráfico considerado como modelo.

O capítulo 7 trata as conclusões que se podem retirar após a análise efectuada nos capítulos anteriores. Serão também enunciadas direcções em que possa desenrolar-se futuros trabalhos de investigação de bastante interesse, com o intuito de melhorar/criar algoritmos de solução do problema de afectação óptima de unidades.

1.5 - Notação

Todas as figuras e tabelas são exibidas com referência ao capítulo em que são apresentadas e são numeradas de forma sequencial no capítulo respectivo. A identificação de expressões é exibida entre parênteses curvos (), sendo a identificação de referências bibliográficas exibida entre parênteses rectos []. De seguida é formada uma lista abreviada de definições dos símbolos usados no decorrer do texto. Os símbolos usados são definidos aquando da sua introdução ao longo do texto, o que faz com que a lista de símbolos não se torne exhaustiva.

Lista de funções

C_{ik} : função de custo associada com a afectação do recurso i na hora k .

R_{mi} : função de contribuição de capacidade associada com o recurso i para a reserva de capacidade do sistema tipo m .

H_{ni} : função que descreve a contribuição do recurso i para a restrição cumulativa tipo n .

A_{ik} : função de estado associada a cada recurso i na hora k .

Lista de conjuntos

H_n : conjunto de todos os recursos com restrições cumulativas tipo n.

U_{ik} : universo das variáveis de controlo (decisões) admissíveis para o recurso i na hora k.

Lista de Escalares e Vectores

K: número total de horas.

I: número de recursos.

x_{ik} : estado do recurso i na hora k.

P_{ik} : potência entregue pelo recurso i na hora k.

u_{ik} : variável de controlo (decisão) para o recurso i na hora k.

D_k : demanda esperada na hora k.

R_{mk}^{req} : reserva de capacidade do sistema tipo m na hora k.

M: número do tipo de reservas consideradas.

H_n^{req} : limite inferior da restrição cumulativa tipo n.

N : número de restrições cumulativas.

X_i^0 : estado inicial do recurso i.

X_i^K : estado final do recurso i.

ξ : salto de dualidade.

C^* : solução do problema primal.

Q^* : solução do problema dual de Lagrange.

Capítulo 2

Problema Primal

Neste capítulo é retratado, com o intuito de enquadramento, o modelo matemático para a resolução do problema de afectação de unidades térmicas num curto intervalo de tempo. Descrevem-se as diferentes categorias de modelos mais utilizadas, evidenciando as restrições existentes na resolução do problema e qual o modelo da função de custo mais adequado á obtenção do melhor resultado para a resolução deste problema de optimização.

De seguida e recorrendo a exemplos simplificados e de pequena dimensão, recorre-se à solução do problema primal para dois exemplos ilustrativos, podendo verificar-se as dificuldades existentes na resolução deste problema para uma maior dimensão e sem simplificações.

2.1 - Formulação do problema

No início deste capítulo faz-se uma breve abordagem da formulação do problema, que ainda nos dias que correm, é parte integrante na investigação e resolução deste problema, tendo resultado em imensas publicações, como por exemplo a [18].

A afectação óptima de unidades pode ser definida como a tarefa de estabelecer um mapa de operações factíveis de cada unidade disponível num sistema de energia eléctrica, para um horizonte temporal previamente definido, de forma a satisfazer o diagrama de carga esperado e outras condições impostas pelo sistema, ao menos custo possível. O mapa de operações é estabelecido com periodicidade de uma hora, sendo que normalmente o diagrama de carga considerado é de um a sete dias [3].

Uma das formulações que o problema de afectação óptima de unidades pode ter é a seguinte: dado um conjunto de recursos, minimizar o custo de operação num horizonte temporal previamente definido, sujeito a geração e capacidade requerida pelo sistema em cada hora. Em termos matemáticos o problema primal pode ser escrito da seguinte forma:

$$\underset{u}{Min} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I C_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \quad (2.1)$$

Esta expressão representa o custo de operação total para todos os recursos em todas as horas do período de afectação previamente definido. O primeiro somatório é aplicado sobre o horizonte temporal previamente definido e o segundo somatório realizado sobre todas as unidades de geração, este duplo somatório $\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I C_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik})$ resulta da soma de termos independentes e representa a função de custo total também designada de função objectivo. Esta função avalia o desempenho de cada decisão válida, sendo não decrescente e separável para cada um dos seus termos.

A função de custo $C_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik})$ simboliza o custo aliado com a afectação da unidade i na hora k . Esta função avalia a decisão tomada em cada estado, isto é, existe um custo de operação associado à transição de estado, que fornece a potência, estabelecido pela acção do controlo, para cada unidade i na hora k .

$$\sum_{i=1}^I p_{ik} = D_k \quad k=1, \dots, K \quad (2.2)$$

Esta expressão representa o diagrama de carga esperado, ou seja, a geração solicitada pelo sistema em cada hora. Todos os recursos contribuem para satisfazer essa restrição, pelo que se pode designar de restrição colectiva.

$$\sum_{i=1}^I R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \geq R_{mk}^{req} \quad m=1, \dots, M \text{ e } k=1, \dots, K \quad (2.3)$$

Esta expressão representa todas as restrições de capacidade do sistema para cada hora. Também estas restrições são colectivas, isto devido a todos os recursos serem chamados a contribuir para a satisfação dessa restrição. Em regra são considerados dois tipos de reservas, a reserva operacional e reserva girante. A reserva operacional é definida como sendo o somatório da capacidade possivelmente afectada nos dez minutos imediatamente a seguir á solicitação de afectação, em cada hora. Já a reserva girante pode ser definida como sendo a diferença entre o somatório, sobre todos os recursos, da capacidade ainda disponível e da capacidade afectada, a cada hora. Pode então definir-se a capacidade como sendo a geração mais a reserva. Realçar que caso algum recurso não colabore para a reserva de capacidade, o termo da função correspondente à cooperação desse recurso será nulo.

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i \in H_n} H_{ni}(x_{ik}, p_{ik}, u_{ik}) \geq H_n^{req} \quad n=1, \dots, N \quad (2.4)$$

Esta expressão representa todas as restrições cumulativas. São restrições colectivas ao subconjunto dos recursos a elas ligados e possuem carácter cumulativo durante o período de afectação previamente definido. Um dos exemplos de uma restrição deste género é as limitações nas quantidades de combustíveis disponibilizadas que, normalmente, resulta de um certo número de unidades térmicas ter um limite máximo no que diz respeito ao consumo de combustível e no número de arranques máximo especificado, isto para um período de afectação previamente definido. Esta restrição pode ser para uma única unidade de geração.

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik}) \quad i=1, \dots, I \text{ e } k=1, \dots, K \quad (2.5)$$

$$u_{ik} \in U_{ik} \quad x_{i0} = X_i^0 \quad x_{ik} = X_i^K \quad (2.6)$$

$i=1, \dots, I \text{ e } k=1, \dots, K$

A expressão (2.5) representa a equação de estado para cada recurso. Com esta equação vamos obter o estado de cada recurso e o valor do contributo para satisfazer a demanda, para qualquer que seja a decisão tomada a cada hora. A função de despacho é a associação da

variável de controlo e do estado resultante. Esta equação pode variar no tempo de forma a englobar o carácter dinâmico de alguns recursos, que é imposto por restrições de estado variantes no tempo. Os vários tipos de recursos são agrupados por categorias, a distinção de categoria é feita devido ao seu comportamento. Segue-se a identificação de algumas categorias, sabendo no entanto que podem ser contempladas recorrendo à equação de estado.

Categoria 1: o comportamento dos recursos existentes nesta categoria distingue-se por não ter qualquer restrição à transição de estado entre a hora $k-1$ e a hora k . Para este caso não existem restrições de carácter dinâmico e os recursos são totalmente controláveis para qualquer que seja o seu estado. Estes recursos são conhecidos por terem unidades com custo de arranque constante, tempo de arranque muito curto. Uma das unidades que se enquadra nesta categoria é as turbinas a gás.

Categoria 2: Os recursos que fazem parte desta categoria caracterizam-se pela existência de restrições de carácter dinâmico durante o período de afectação e por terem custos de arranque dependentes do estado em que se encontram. Tem de se ter em conta que existem restrições à transição de estado entre a hora $k-1$ e a hora k , ou seja, após ligada/desligada, a unidade terá de permanecer afectada/desafectada um tempo mínimo. Nestes recursos existe memória, ou seja, as decisões adoptadas anteriormente têm influência nas decisões tomadas futuramente.

Categoria 3: Os recursos que fazem parte desta categoria caracterizam-se pela restrição no que toca ao consumo de combustíveis. As centrais térmicas possuem um valor pré-estabelecido no que diz respeito à quantidade de combustível a consumir durante o período de afectação. Para definir este tipo de recursos é introduzido uma nova variável de estado que define a quantidade de combustível utilizada em cada hora, gerando um valor final na última hora que conduz à satisfação do valor pré-estabelecido para a quantidade de combustível a consumir [3].

Para esta formulação os símbolos têm a seguinte designação:

K: número total de horas

I: número de recursos

C_{ik} : função de custo associada com a afectação do recurso i na hora k

x_{ik} : estado do recurso i na hora k

P_{ik} : potência entregue pelo recurso i na hora k

u_{ik} : variável de controlo (decisão) para o recurso i na hora k

D_k : demanda esperada na hora k

R_{mi} : função de contribuição de capacidade associada com o recurso i para a reserva de capacidade do sistema tipo m

R_{mk}^{req} : reserva de capacidade do sistema tipo m na hora k

M: número do tipo de reservas consideradas

H_n : conjunto de todos os recursos com restrições cumulativas tipo n

H_{ni} : função que descreve a contribuição do recurso i para a restrição cumulativa tipo n

H_n^{req} : limite inferior da restrição cumulativa tipo n

N : número de restrições cumulativas

A_{ik} : função de estado associada a cada recurso i na hora k

U_{ik} : universo das variáveis de controlo (decisões) admissíveis para o recurso i na hora k

X_i^0 : estado inicial do recurso i

X_i^K : estado final do recurso i

Em termos de relaxação lagrangeana, o problema (P) é definido como sendo o problema primal. Devido à formulação da função objectivo e às restrições colectivas, não é permitido a separabilidade da função, o que torna o problema de minimização num problema de grande complexidade. Em suma, em termos de problema de optimização, verifica-se que a solução óptima não pode ser determinada pela soma dos diversos valores obtidos da optimização em separado de cada recurso. No que diz respeito ao horizonte temporal, também não é permitido a sua separação, isto devido á dinâmica exibida por parte de alguns recursos. Perante isto, verificamos que estamos na presença de um problema de dimensão descomodida, para o qual uma abordagem directa, continua a não ser possível.

O problema apelidado de problema primal recorre a técnicas convencionais de optimização não linear, é um problema de difícil resolução, de grande complexidade e que envolve programação inteira mista de larga escala. Em termos computacionais, os requisitos exigidos aumentam de forma exponencial com o número de recursos e com o número de estádios

considerados no horizonte temporal. Nos dias que correm recorre-se a métodos baseados na resolução do problema dual, deixando assim de resolver o problema primal de forma directa.

Só é possível encontrar uma solução para o problema primal se o sistema for de pequena dimensão. Recorrendo a essa solução pode observar-se a complexidade da função de custo do problema primal e as vantagens e limitações da utilização da Relaxação Lagrangeana na resolução deste problema.

Passamos agora à caracterização da solução do problema primal, através de ilustrações. Pretendemos com essas ilustrações realçar as qualidades e compreender as limitações, que advêm da aplicação do problema primal.

2.2 - Problema Primal - Ilustração

Vamos considerar, para os exemplos considerados, como única condição imposta pelo sistema o diagrama de carga, com o intuito de ser mais perceptível a ilustração do problema, tendo sempre como evidência o que importa apreender do ponto de vista qualitativo. Recorrendo à optimização sequencial discreta e à programação dinâmica, obtemos a solução óptima do problema primal que leva à afectação óptima de todos os recursos, observando as restrições.

Para os exemplos ilustrados vamos considerar três recursos, em que cada um é caracterizado por um custo de arranque, por uma função de custo quadrática e pela restrição de potência mínima e de potência máxima que cada um dos três recursos consegue fornecer. Para que o número de configurações aumente de forma considerável, basta que a modelação dos recursos seja de maior complexidade. Se for considerado um tempo mínimo ligado/desligado o número de configurações será muito maior.

Os valores (D) existentes para a demanda resultam da seguinte condição:

$$D \in \{0\} \cup d \tag{2.7}$$

em que

$$d = [p_1^{\min} p_1^{\max}] \cup \dots \cup [p_l^{\min}, p_l^{\max}] \cup \left[\sum_{i=1}^2 p_i^{\min}, \sum_{i=1}^2 p_i^{\max} \right] \cup \dots \cup \left[\sum_{i=1}^l p_i^{\min}, \sum_{i=1}^l p_i^{\max} \right]$$

Analisando a expressão conclui-se que esta condição obriga a que pelo menos umas das configurações possíveis para a afectação de unidades se encontre dentro dos limites da operação. Também é fácil de concluir-se que no conjunto das decisões admissíveis, vai existir configurações para a afectação de unidades que serão impossíveis. A que tiver menor custo de operação será a configuração escolhida. Para os exemplos que se seguem, considerou-se a função de custo da seguinte forma:

$$c: \Omega^m \rightarrow \mathcal{R} \text{ com } \begin{cases} m = 1 \text{ se } K = 1 \\ m = 2 \text{ se } K = 2 \end{cases} \quad (2.8)$$

A solução do problema primal é representada na função de custo óptimo (2.8), para as ilustrações que se seguem existe uma única restrição (restrição de satisfação de carga), o horizonte temporal é de uma e duas horas respectivamente. Para este horizonte temporal é possível representar graficamente a função de custo óptimo. Se aumentarmos o horizonte temporal deixa de ser possível representar graficamente a função de custo óptimo.

O primeiro exemplo ilustra um exemplo em que o horizonte temporal é de uma hora, já o segundo exemplo representa um horizonte temporal de duas horas.

2.3 - Horizonte temporal de uma hora

Para este exemplo a função de custo óptimo, resultante da resolução do problema primal, é uma função com diagrama temporal de uma hora. Obtêm-se um valor para a função de custo óptimo para cada valor de carga considerado. A configuração de menor custo (afectação óptima de unidades) ditará qual o valor obtido.

Para este exemplo o espaço de decisão tem uma dimensão, o que torna o problema de fácil ilustração e compreensão. De referir também que para cada restrição de carga há uma afectação óptima de unidades. O objectivo deste exemplo é as unidades entregarem, um valor de potência, numa hora, ao melhor preço possível (menor custo).

Para o exemplo que se segue pode observar-se que a solução do problema de afectação de unidades (função de custo óptimo) é mal comportada no que diz respeito à optimização matemática, é uma função não continua e não convexa. Devido à falte de dinâmica verifica-se que para subconjuntos do conjunto das decisões admissíveis a função pode ser bem comportada.

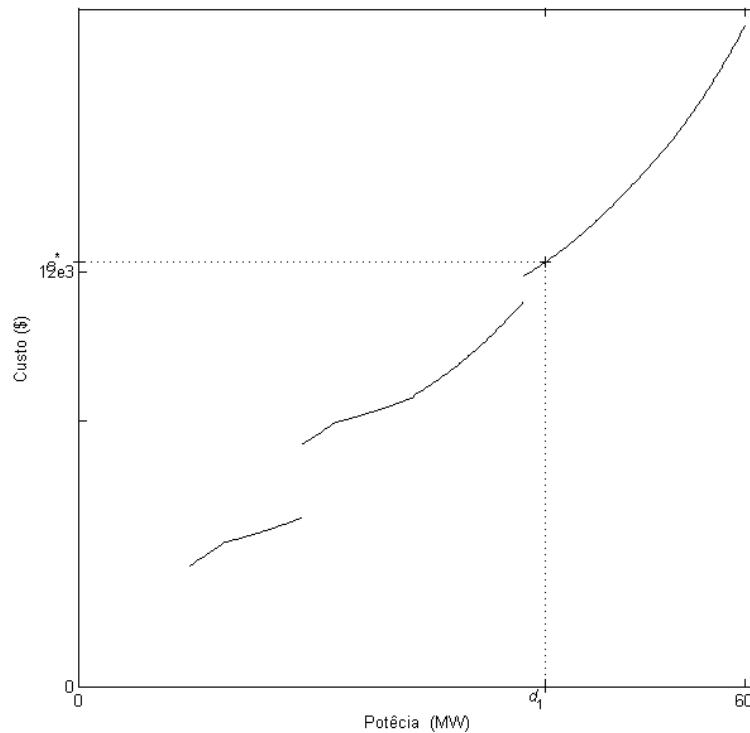


Figura 2.1 - Este gráfico corresponde à solução do problema primal (função de custo óptimo) para um diagrama temporal de uma hora. O “*” representa o custo óptimo, correspondente a um problema de afectação de unidades com um horizonte temporal de uma hora e com restrição de carga.

2.4 - Horizonte temporal de duas horas

O que diferencia este exemplo do anterior é o espaço de decisão que passa de uma para duas dimensões, ou seja, a função de custo óptimo resultante da resolução do problema primal (P) é $c : \Omega^2 \rightarrow \Re$ com $d \in \Omega^2 \equiv D^2$.

Para cada valor de carga (restrição de carga), na hora um e na hora dois, adquire-se um valor para a função de custo óptimo, ao qual corresponde uma afectação óptima de unidades. Como podemos verificar, este exemplo terá maior dificuldade de compreensão e ilustração. Para este exemplo as unidades terão de entregar, para cada uma das horas, um valor de potência, ao menor custo possível.

Considerando o exemplo, podemos concluir através da ilustração da solução do problema primal, que a função não é contínua nem convexa, ou seja, do ponto de vista de optimização matemática a função de custo óptimo é mal comportada. Podemos ainda observar que quanto

maior for a dimensão do problema bem como o número de restrições pior será o comportamento da função de custo óptimo. Com o aumento das restrições aumentamos a dimensão do problema e introduzimos uma maior dinâmica no problema.

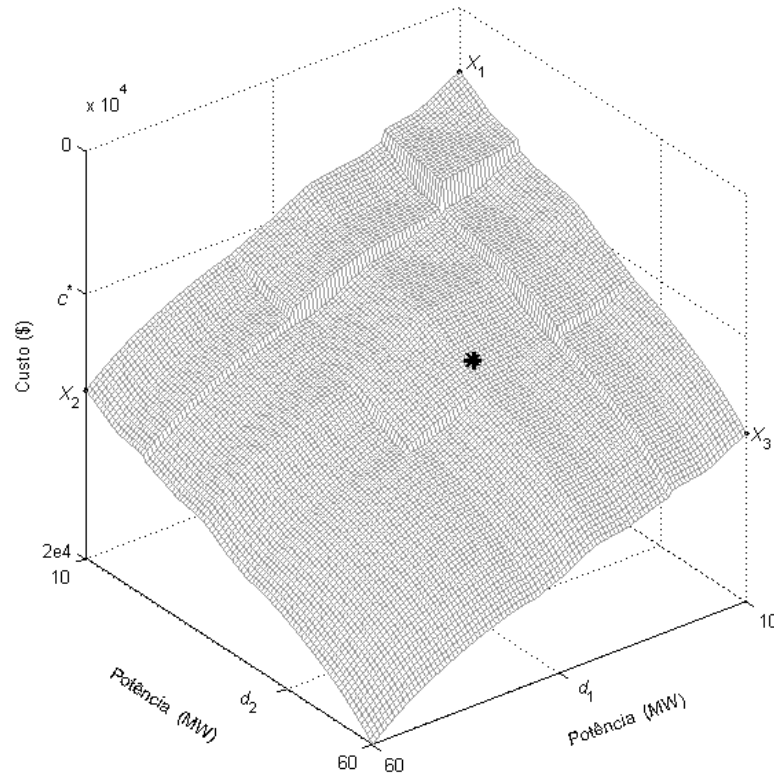


Figura 2.2 - Este gráfico corresponde à solução do problema primal (função de custo óptimo) para um diagrama temporal de duas horas. O “*” representa o custo óptimo, corresponde a um problema de afectação de unidades com um horizonte temporal de duas horas e com restrição de carga c^* , respectivamente para a hora um e dois. Os pontos X_1 , X_2 e X_3 vão ser utilizados para definir um novo referencial.

Após a análise da figura 2.1 e da figura 2.2 fica explícito que o problema de afectação de unidades é um problema não linear que envolve decisões discretas. Devido à dimensão dos sistemas reais, qualquer tentativa para solucionar o problema primal, utilizando recursos computacionais de topo, será difícil devido ao tempo computacional requerido. Para tentar melhorar a solução deste problema é aplicada a relaxação Lagrangeana.

Capítulo 3

Relaxação Lagrangeana

Este capítulo diz respeito à relaxação Lagrangeana, que de grosso modo é uma das formas de tentar solucionar as dificuldades encontradas na resolução do problema primal.

Para ultrapassar essa dificuldade recorre-se então à relaxação Lagrangeana, que em conjunto com técnicas de otimização dual, nos permite solucionar o problema primal, mas de forma indirecta. Do enfraquecimento do problema primal resulta a obtenção da solução do problema primal, o que pode significar a obtenção de soluções diferentes.

3.1 - Função de Lagrange

Desde 1976 que tem sido aplicada a optimização com base na metodologia apelidada de relaxação Lagrangeana na afectação de unidades térmicas. Foram muitos os investigadores que contribuíram com complementos e sucessivos melhoramentos da metodologia básica. Existe imensa literatura que retrata este problema, entre ela encontra-se uma literatura que descreve a revisão que foi feita neste tema [19].

A grande vantagem resultante da utilização da relaxação Lagrangeana consiste na decomposição do problema. Cada recurso passa a constituir uma entidade única, sendo que cada recurso é optimizado de forma individual, ou seja, a afectação de cada recurso é feita de forma óptima, mas independente de qualquer outra afectação. Recorre-se á programação dinâmica para optimizar os recursos, que torna a tarefa facilmente atingível. Vantagem esta conseguida devido á relaxação das restrições. Se, por exemplo, a restrição de igualdade entre a produção e a demanda for relaxada, o problema é resolvido, existindo a possibilidade de violação das restrições. No entanto, estas restrições relaxadas não são totalmente ignoradas. Recorrendo a multiplicadores de Lagrange, de forma a compensar o enfraquecimento do problema primal, a violação das restrições é literalmente penalizada na função de Lagrange. Será adicionado um termo à função de Lagrange, que representa um custo associado à violação de cada restrição, sendo que as restrições são relaxadas [20, 21].

Da deslocação das restrições para a função objectivo do problema primal surge a função de Lagrange, que é representada simbolicamente por L . Isto leva-nos a concluir que a função de Lagrange resultante do problema primal, através da relaxação das restrições, pode ser definida como sendo:

$$\begin{aligned}
 L(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}, \lambda, \mu, \gamma) &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I C_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \\
 &+ \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(D_k - \sum_{i=1}^I p_{ik} \right) \\
 &+ \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \mu_{mk} \left(R_{mk}^{req} - \sum_{i=1}^I R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \right) \\
 &+ \sum_{n=1}^N \gamma_n \left(H_n^{req} - \sum_{k=1}^K \sum_{i \in H_n} H_{ni}(x_{ik}, p_{ik}, u_{ik}) \right) \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Vamos ter alguns multiplicadores de Lagrange, sendo que o λ corresponde às restrições de carga, o μ corresponde às restrições de capacidade e o γ corresponde às restrições cumulativas. Variáveis duais é umas das designações atribuída aos vectores dos multiplicadores de Lagrange. A cada uma das restrições está associado um vector de variáveis duais. Pode então concluir-se que, qualquer restrição é facilmente executada em termos matemáticos na função de Lagrange.

Sujeita às restrições locais, a afectação de unidades exige que a função de Lagrange seja minimizada. O problema de minimização da função de Lagrange é formulado como sendo:

$$(L) \quad \underset{u}{\text{Min}} L(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}, \lambda, \mu, \gamma) \quad (3.2)$$

com

$$\mu \geq 0, \gamma \geq 0$$

sujeito a

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik})$$

$$u_{ik} \in \mathbf{U}_{ik} \quad x_{i0} = X_i^0 \quad x_{ik} = X_i^k$$

$$i=1, \dots, I \quad k=1, \dots, K$$

No que diz respeito às restrições de igualdade não existe restrição de sinal, já no caso das restrições de desigualdade o seu multiplicador é restrito no sinal.

Recorrendo à Relaxação Lagrangeana obtém-se uma solução para o problema de afectação de unidades relaxando as restrições que ligam os recursos entre si, o problema é resolvido aplicando penalizações aquando da violação das mesmas.

Para encontrar a solução do problema (L), a relaxação Lagrangeana recorre a optimização dual.

3.2 - Multiplicadores de Lagrange

No capítulo anterior observou-se que o problema primal consiste na minimização da função objectivo, que é uma função de custo, logo tem dimensão de um custo (€).

Os multiplicadores de Lagrange são representados em unidades de custo por unidade dos parâmetros da restrição escolhida.

Poderá ser atribuída uma interpretação económica aos multiplicadores de Lagrange, para isso basta que a cada restrição seja atribuído o conceito de produção. Imaginando que se tem um nível de produção aliado a uma determinada restrição, e que esse nível de produção está em defeito, mas o multiplicador de Lagrange é positivo, então, o termo acrescido à função objectivo (L) é positivo. Os multiplicadores de Lagrange são também designados de preços sombra, tendo em conta que existe um custo associado. Fazendo um breve ponto da situação pode dizer-se que: tendo uma produção por defeito e aumentando-se o valor da função objectivo, então é viável inferir uma compra ideada da quantidade em defeito num pseudo mercado, sendo que o custo unitário é fixado pelo preço sombra. Da mesma forma, se for considerado a existência de excesso de produção, o valor da função objectivo decresce, sendo então possível encontrar uma venda ideada da quantidade em excesso num pseudo mercado, sendo que o preço unitário é fixado pelo preço sombra [20, 22, 23].

Capítulo 4

Problema Dual de Lagrange

Como visto no capítulo anterior, vamos recorrer à relaxação Lagrangeana conjuntamente com técnicas de optimização dual, o que nos permite solucionar de forma indirecta o problema primal.

Neste capítulo é feita a interpretação geométrica da resolução do problema dual, neste caso serão considerados dois exemplos. Para estes dois exemplos serão ilustradas as relações existentes entre si bem como ambas as soluções, podendo-se concluir quais as vantagens e desvantagens da resolução do problema primal de forma indirecta, recorrendo à relaxação Lagrangeana.

4.1 - Problema Dual de Lagrange

Devido a um problema de optimização, existirá um problema relacionado com o primeiro. Sendo que o primeiro é designado de problema primal e o segundo designado de problema dual de Lagrange. Em termos de solução, ambas as soluções (primal e dual de Lagrange) terão o mesmo valor, isto acontece devido a certas condições de convexidade. Por outras palavras, pode-se dizer que, a função objectivo do problema primal tem o mesmo valor óptimo da função objectivo do problema dual de Lagrange, sendo que resolvendo o problema dual obteremos a resolução do problema primal de forma indirecta [10, 18, 24].

É importante relembrar que, como referido no capítulo 2, o problema primal é um problema não convexo, não linear e é de difícil resolução. Recorrendo ao problema dual de Lagrange, a sua resolução conduz-nos a diversos algoritmos de resolução de problemas lineares de grande dimensão, assim como a algoritmos de resolução de problemas não convexos e não lineares como o problema primal. O que nos leva a aplicar técnicas de optimização dual de Lagrange, ou seja, a grande vantagem da aplicação dessas técnicas, reside no facto se ser feita optimização de uma função côncava sobre um conjunto convexo, ou seja, existe variáveis do problema que são limitadas inferiormente [3, 25].

4.2 - Formulação do problema Dual de Lagrange

A função dual de Lagrange é definida da seguinte forma:

$$q(\lambda, \mu, \gamma) = \underset{u}{\text{Min}} L(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}, \lambda, \mu, \gamma) \quad (4.1)$$

Sujeito a

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik})$$

$$u_{ik} \in U_{ik} \quad x_{i0} = X_i^0 \quad x_{ik} = X_i^k$$

$$i=1, \dots, I \quad k=1, \dots, K$$

As propriedades da função dual de Lagrange que realçam maior motivo de interessa são: ser uma função côncava e subdiferenciável.

Sabendo que a função dual de Lagrange é uma função côncava, podemos afirmar que o ponto óptimo local de uma função é também o ponto óptimo global da função. Mais à frente vamos poder observar que, os subgradientes da função dual de Lagrange representam um papel importante no que diz respeito à maximização da função dual de Lagrange. Um dos subgradientes g da função dual de Lagrange, que é relativamente fácil de obter, para um ponto previamente definido pelos valores dos multiplicadores de Lagrange, é o vector dos desvios ligado às restrições [26].

Este subgradiente g , da função dual de Lagrange, pode ser representado do seguinte modo:

$$g = \begin{bmatrix} \dots \\ D_k - \sum_{i=1}^I p_{ik} \\ \dots \\ \text{-----} \\ \dots \\ R_{mk}^{req} - \sum_{i=1}^I R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \\ \dots \\ \text{-----} \\ \dots \\ H_n^{req} - \sum_{k=1}^K \sum_{i \in H_n} H_{ni}(x_{ik}, p_{ik}, u_{ik}) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Associado ao problema primal, o problema dual de Lagrange e o enfraquecimento do problema primal (através da relaxação Lagrangeana), podendo formular o problema do seguinte modo:

$$Max \ q(\lambda, \mu, \gamma) \quad (4.3)$$

sujeito a

$$\mu \geq 0, \ \gamma \geq 0$$

Sabendo que o problema dual de Lagrange resulta da maximização de um mínimo, a função dual q , pode ser apresentada como sendo:

$$\begin{aligned}
q(\lambda, \mu, \gamma) &= \sum_{i=1}^I q_i(\lambda, \mu, \gamma) \\
&+ \sum_{k=1}^K \lambda_k D_k \\
&+ \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \mu_{mk} R_{mk}^{req} \\
&+ \sum_{n=1}^N \gamma_n H_n^{req}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

em que

$$\begin{aligned}
q_i(\lambda, \mu, \gamma) &= \underset{u_i}{Min} \sum_{k=1}^K \left(C_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \right. \\
&- \lambda_k p_{ik} \\
&- \sum_{m=1}^M \mu_{mk} R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \\
&\left. - \sum_{n=1}^N \gamma_n H_{ni}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \right)
\end{aligned}$$

sujeito a

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik})$$

$$u_{ik} \in U_{ik} \quad x_{i0} = X_i^0 \quad x_{ik} = X_i^k$$

$$k = 1, \dots, K$$

Comparando o esforço necessário à solução do problema primal com o esforço necessário à solução do problema dual, é facilmente perceptível que o esforço necessário para determinar a solução recorrendo à solução do problema dual é menor. De seguida iremos salientar algumas das diferenças:

- No que diz respeito à afectação dos recursos, no problema primal essa afectação é feita conjuntamente de forma óptima para todos os recursos, já no problema dual essa afectação é feita recorrendo à decomposição, ou seja, cada recurso representa uma entidade única e é otimizado individualmente.
- No que diz respeito à função objectivo, no problema primal trata-se de uma função não convexa e não continua, já no que diz respeito ao problema dual trata-se de uma função côncava.
- É facilmente perceptível que o problema primal não é igual ao dual. Temos de ter a perfeita noção que quando estamos a resolver o problema dual, estamos a resolver um problema diferente, isto porque, todas as formulações existentes para chegar ao problema dual resultaram do enfraquecimento do problema primal. Como referido anteriormente, para que a função objectivo, tenha o mesmo valor no ponto óptimo, quer para o problema primal quer para o problema dual, serão necessárias determinadas condições de convexidade. Para essas condições, a solução determinada através do problema dual seria igual à solução determinada através da resolução directa do problema primal.

Depois de ler o exposto acima, fica a ideia de que a resolução do problema primal é uma tarefa acessível, no entanto, surgem outras complexidades visto a função dual não ser obrigatoriamente diferenciável em alguns pontos, ou seja, pode não ter gradiente em alguns pontos e por não ser uma expressão analiticamente fácil de computar, isto devido à função dual de Lagrange só poder ser computada após a minimização de todos os subproblemas. No que diz respeito à resolução do problema dual será tratado mais à frente.

De salientar que é importante assinalar a relação existente entre o problema primal e o problema dual, embora o problema primal seja diferente do problema dual. A relação de que falamos resulta no facto da solução do problema dual, ou seja, o valor óptimo da função dual, por norma, conduzir a uma afectação de unidades que não preenche as restrições, que simultaneamente foram relaxadas. Querendo com isto dizer que é imprescindível analisar toda a informação fornecida pela solução do problema dual, para isto existe a necessidade de responder a algumas questões como:

- Qual é a afectação de unidades resultante da solução do problema dual?
- Será esta afectação de unidades, em termos de problema primal, uma afectação óptima?
- Sendo uma solução subóptima em termos de problema primal, será possível satisfazer as restrições?

Através de ilustrações da função dual (mesmos exemplos do problema primal), surgirão as respostas às questões colocadas acima.

4.2 - Problema Dual de Lagrange - Ilustração

No que diz respeito à resolução do problema dual de Lagrange, já foi referido mais atrás que se trata de uma tarefa de difícil resolução. No entanto, se for para um certo e determinado valor da função dual num ponto, é possível obter a solução óptima. Para obter essa solução óptima procede-se à optimização de todos os subproblemas.

Para as ilustrações seguintes, iremos utilizar os mesmos exemplos considerados nas ilustrações do problema primal. A função dual será a seguinte:

$$q: \Theta^m \rightarrow \mathcal{R} \text{ com } \begin{cases} m = 1 & \text{se } K = 1 \\ m = 2 & \text{se } K = 2 \end{cases} \quad (4.5)$$

Esta função dual é resultante de um problema primal, no qual existe uma única restrição (restrição de carga), a essa restrição está aliado um multiplicador de Lagrange, que não é limitado em termos de sinal. O que faz com que o horizonte temporal seja limitado a uma ou duas horas. Para este caso, é possível calcular o valor da função dual na proximidade do seu valor máximo e a sua representação gráfica. Para que a representação gráfica da função dual deixe de ser possível, basta aumentar o horizonte temporal ou o número de restrições do problema primal. No entanto, através da representação gráfica da função dual, quer para uma ou para duas dimensões, permite observar o seu comportamento para problemas de maior dimensão.

4.3 - Horizonte temporal de uma hora

Tendo em conta o problema primal apresentado no capítulo 2, para $k=1$, a função dual resultante do enfraquecimento do problema primal é representada na Figura 4.1. Figura esta resultante de um subconjunto compreendido de valores $\lambda \in \Theta = \mathcal{R}$. Para que o valor da função dual seja alterado basta alterar o λ , ou seja, para cada valor λ obtém-se um valor para a função dual. Observando a Figura 4.1, verifica-se que a função dual é uma função côncava e subdiferenciável, ou seja, é quase sempre diferenciável quando, o $\lambda^* \in \mathcal{R}$ é o valor correspondente ao multiplicador de Lagrange que leva à solução do problema dual, isto é:

$$q^*(\lambda^*) = \text{Max}_{\lambda \in \mathbb{R}} q(\lambda) \quad (4.6)$$

Para este exemplo, e tendo em conta que foi considerado apenas uma restrição (carga), o subgradiente é resultante de:

$$g = d_1 - \sum_{i=1}^I p_i \quad (4.7)$$

Depois de encontrar a solução do problema dual, isto é, determinado o valor $q^*(\lambda^*)$, leva à colocação da seguinte questão: qual o gradiente correspondente ao valor máximo da função dual?

Como foi escrito no início deste capítulo, a função dual é uma função não diferenciável no seu ponto máximo, ou seja, a função não tem qualquer gradiente nesse ponto. Em termos numéricos, podemos afirmar que ao ponto máximo da função dual correspondem dois subgradientes, tal como se vai poder observar de seguida.

Considerando:

- O valor óptimo do problema dual, $q^*(\lambda^*)$ — valor da função dual para λ^* ;
- O valor da função dual para $(\lambda^* - \varepsilon)$ ou seja $q(\lambda^* - \varepsilon)$ (ε é uma variação infinitesimal de λ), ao qual corresponde o gradiente g_1 ;
- O valor da função dual para $(\lambda^* + \varepsilon)$ ou seja $q(\lambda^* + \varepsilon)$, ao qual corresponde o gradiente g_2 .

Analisando em termos numéricos é considerado válido a seguinte igualdade:

$$q(\lambda^* - \varepsilon) = q(\lambda^* + \varepsilon) = q^*(\lambda^*) \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Analisando esta igualdade, podemos afirmar que para o valor óptimo da função dual foram identificados dois subgradientes diferentes, g_1 e g_2 . O facto de haver dois subgradientes para o mesmo valor óptimo da função dual leva a concluir que para a mesma demanda d_1 existem duas possibilidades de afectação de unidades, isto é, dois valores distintos para

$$\sum_{i=1}^I p_i \cdot$$

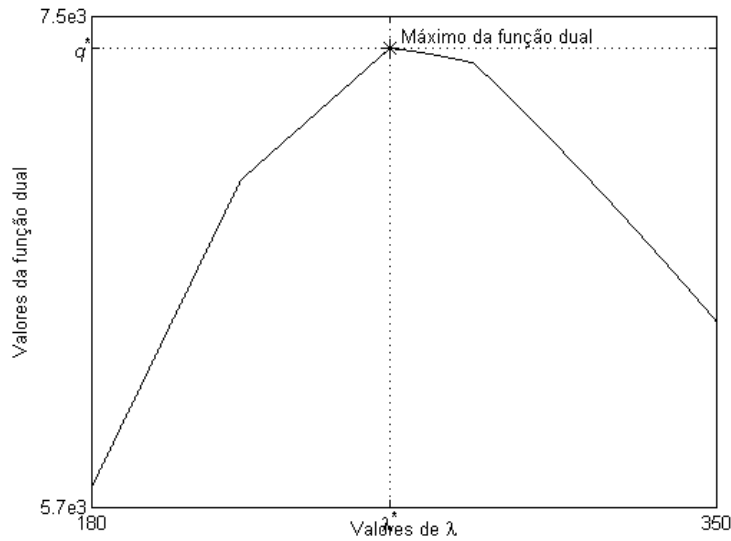


Figura 4.1 - Este gráfico corresponde à solução do problema dual do problema primal cuja solução foi identificada na Figura 2.1. Ao observar esta figura verificamos que se encontra assinalado o valor óptimo da função dual, ou seja, para o valor λ^* é encontrado o valor máximo da função q^* .

Fazendo uma breve conclusão e respondendo às questões colocadas na secção anterior, podemos afirmar o seguinte:

- Em termos de afectação de unidades, ao ponto óptimo do problema primal coincidem duas soluções distintas.
- A existência de duas soluções distintas para o mesmo ponto óptimo, com valores diferentes em termos de problema primal para a afectação de unidades, leva-nos a concluir que a solução óptima do problema dual não corresponde à solução óptima do problema primal. A figura 4.1 tem um custo óptimo do problema dual q^* , valor este que é inferior ao custo óptimo do problema primal c^* , da Figura 2.1, isto é, $q^* < c^*$, que nos leva a concluir que a solução do problema primal é diferente da solução do problema dual.
- Podemos ainda afirmar que a solução do problema dual é uma solução subótima em termos de problema primal, isto porque embora minimize o custo determinado pela função de Lagrange não satisfaz a restrição de carga. Por outras palavras podemos dizer que em termos de problema primal, uma solução corresponde a uma produção em excesso enquanto a outra solução corresponde a uma produção por defeito.

4.4 - Horizonte temporal de duas horas

Tendo em conta o problema primal apresentado no capítulo 2, para $k=2$, a função dual resultante do enfraquecimento do problema primal é representada na Figura 4.2. Figura esta resultante de um subconjunto compreendido de valores $\lambda \in \Theta \equiv \mathfrak{R}^2$. No que diz respeito ao vector dos multiplicadores de Lagrange podemos afirmar que apresenta dois componentes, isto é, $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2]'$. Para cada valor das componentes do vector dos multiplicadores de Lagrange, λ_1 e λ_2 , obtém-se um valor para a função dual. Visualizando a Figura 4.2, podemos observar que a função dual é uma função côncava e subdiferenciável, $\lambda \in \mathfrak{R}^2$ é o vector que possui os valores dos multiplicadores de Lagrange que levam á solução do problema dual, isto é,

$$q^*(\lambda^*) = \underset{\lambda \in \mathfrak{R}^2}{\text{Max}} q(\lambda)$$

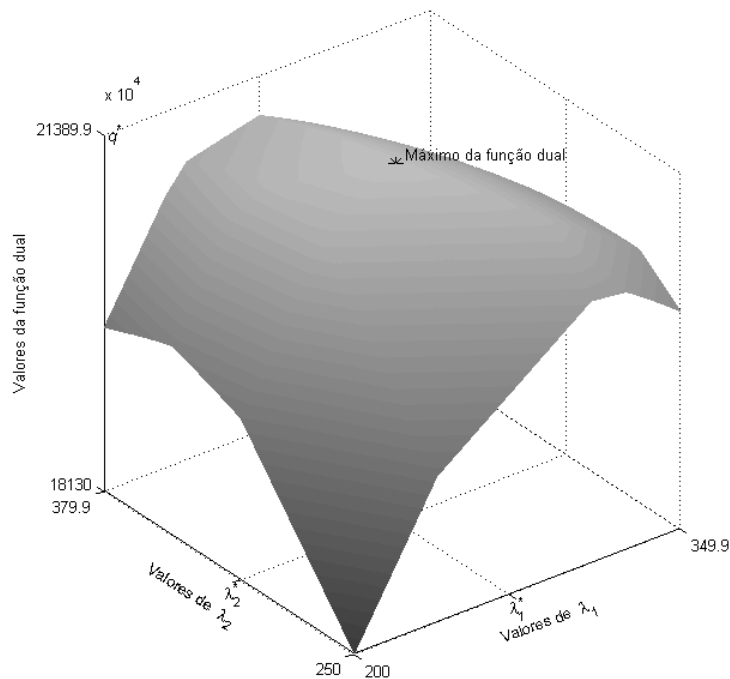


Figura 4.2 - Este gráfico corresponde à solução do problema dual cuja solução foi identificada na Figura 2.2. Ao observar esta figura verificou-se que se encontra assinalado o valor óptimo da função dual, ou seja, para os valores de λ_1^* e λ_2^* obtém-se o valor máximo da função q^* .

Para este exemplo, e tendo em conta que foi considerada uma única restrição (restrição de carga), o subgradiente é obtido da seguinte maneira:

$$g = \begin{bmatrix} d_1 - \sum_{i=1}^I p_{i1} \\ d_2 - \sum_{i=1}^I p_{i2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Desta forma vamos conseguir encontrar a solução do problema dual, ou seja, é obtido o valor de $q^*(\lambda^*)$, Determinado esse valor surge de novo a seguinte questão:

- Qual o gradiente ao qual corresponde o valor máximo da função dual?

A função dual não é diferenciável no seu ponto máximo, tal como o caso anterior (4.3), ou seja, a função não tem gradiente no ponto máximo. Se fizermos uma análise em termos de resultados numéricos, podemos dizer que ao ponto máximo da função dual correspondem cinco subgradientes, sendo esta a grande diferença existente em relação ao caso anterior (4.3), onde existia um único multiplicador de Lagrange. A variação deste multiplicador definia uma única direcção. Relativamente ao caso anterior foi acrescentado uma dimensão ao espaço do problema, no entanto passámos a ter infinitas direcções definidas pelas várias combinações possíveis das componentes do vector dos multiplicadores de Lagrange. Assim sendo, teoricamente, para o mesmo valor óptimo do problema dual, poderíamos estar perante infinitos subgradientes. Devido à existência de cinco subgradientes diferentes, por parte do nosso exemplo, concluí-se que existe cinco possibilidades de afectação de unidades para a demanda d_1 e d_2 , isto é, existem cinco pares de valores diferentes

$$\left(\sum_{i=1}^I p_{i1}, \sum_{i=1}^I p_{i2} \right).$$

De seguida vamos visualizar a representação gráfica de linhas de contorno da função dual, através da qual podemos observar a existência de cinco faces diferentes que se juntam no seu ponto máximo. Cada face representa um subgradiente.

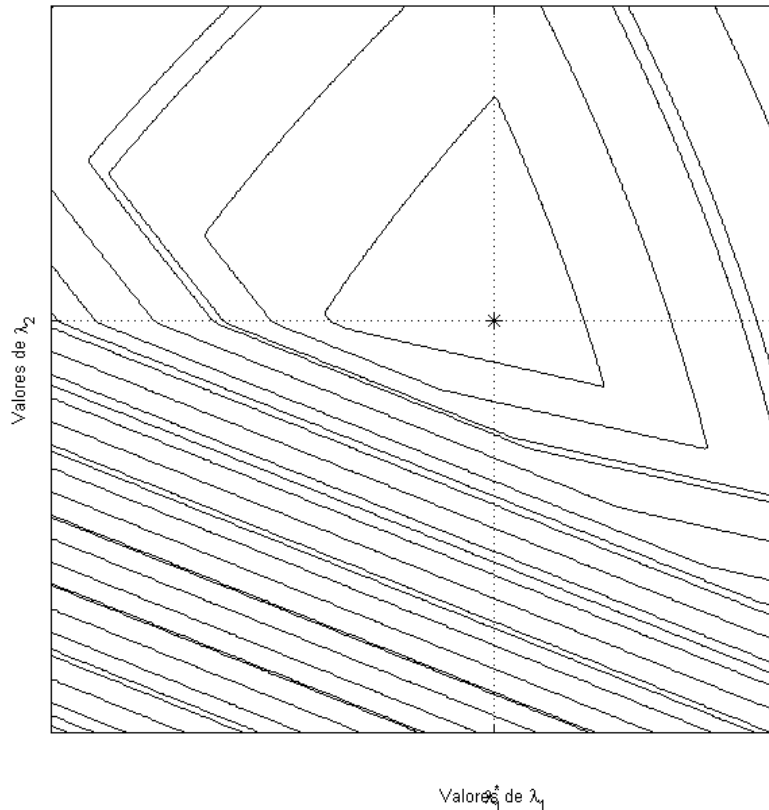


Figura 4.3 - Este gráfico representa graficamente as linhas de contorno da função dual representada na figura 4.2. Analisando esta figura visualizamos que se encontra assinalado o valor ótimo da função dual, ou seja o valor máximo da função q^* , valor máximo este obtido para os valores de λ_1^* e λ_2^* . De salientar que a cada face da função dual corresponde um subgradiente. Este exemplo tem cinco subgradientes, ou seja, existem cinco faces que se juntam no ponto ótimo.

Fazendo uma breve conclusão e respondendo às questões colocadas na secção anterior, podemos dizer o seguinte:

- Em termos de afectação de unidades, ao ponto ótimo do problema dual coincidem cinco soluções distintas.
- A existência de cinco soluções distintas para o mesmo ponto ótimo, com valores diferentes em termos de problema primal para a afectação de unidades, leva-nos a concluir que a solução ótima do problema dual não corresponde à solução ótima do problema primal. A figura 4.2 tem um custo ótimo do problema dual q^* , valor este que é inferior ao custo ótimo do problema primal c^* , da Figura 2.2, isto é, $q^* < c^*$, que nos leva a concluir que a solução do problema primal é diferente da solução do problema dual.

- Podemos ainda dizer que a solução ótima do problema dual é uma solução subótima em termos de problema primal, isto porque embora minimize o custo determinado pela função de Lagrange não satisfaz a restrição de carga. Por outras palavras podemos dizer que em termos de problema primal, iremos ter cinco soluções distintas, sendo que algumas serão por defeito de produção e outras serão por excesso, isto para d_1 e d_2 .

De salientar ainda que, quer para o exemplo apresentado na Figura 4.1, quer para este exemplo, e sabendo que o valor ótimo do problema dual não é igual ao valor ótimo do problema primal, em termos de problema dual são encontradas varias afectações ótimas.

Surge então umas questões muito importantes que são as seguintes:

- Qual a razão da existência de várias soluções não ótimas em termos de problema primal, resultante da resolução do problema dual, para a afectação de unidades e o porquê de acomodar essas soluções na solução do problema primal?
- Analisando a relação existente entre o problema primal e o problema dual de Lagrange, quais as condições necessárias para que o valor da solução do problema primal seja igual ao valor da solução do problema dual de Lagrange?

Estas questões serão respondidas no capítulo seguinte, isto porque como veremos mais à frente, o salto de dualidade será preponderante para a determinação das respostas colocadas.

Capítulo 5

Salto de Dualidade

Nos capítulos anteriores, vimos como encontrar a solução ótima recorrendo ao problema primal e ao problema dual de Lagrange. No capítulo 4, verificamos que a solução ótima encontrada para o problema dual, não passa de uma solução subótima em termos de problema primal.

Neste capítulo será analisado a relação existente entre o valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual de Lagrange, esta análise está directamente ligado com o conceito de salto de dualidade. Em termos de definição, o salto de dualidade é a diferença entre os dois valores.

5.1 - Salto de dualidade

No capítulo anterior, vimos que o valor da solução que em termos de problema dual de Lagrange é ótima, em termos de problema primal não passa de subótima. Foi então que no final do capítulo 4 surgiram algumas questões muito importantes. Para responder a essas questões temos de abordar o conceito de salto da dualidade.

O conceito de salto de dualidade está relacionado com o valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual de Lagrange. Em suma, o salto de dualidade é definido como sendo a diferença entre o valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual de Lagrange. A expressão do salto de dualidade é a seguinte:

$$\xi = c^* - q^* \quad (5.1)$$

Sendo que,

ξ : corresponde ao salto de dualidade.

c^* : corresponde ao valor da solução do problema primal.

q^* : corresponde ao valor da solução do problema dual de Lagrange.

No capítulo anterior verificamos que o valor da solução do problema primal será sempre superior ou igual ao valor da solução do problema dual de Lagrange, isto é:

$$c^* \geq q^*$$

Conclui-se então que o salto de dualidade é a distância existente entre o valor do problema primal e o valor do problema dual de Lagrange. Sempre que se verificar a existência dessa desigualdade podemos afirmar que existe salto de dualidade. Tendo em conta as características do problema primal podemos afirmar que essa desigualdade acontece quase sempre.

Segue-se uma breve ilustração de:

- Significado geométrico do salto de dualidade
- Solução ótima do problema dual e das soluções subótimas a este associadas, no que diz respeito ao problema primal, para os mesmos exemplos anteriores.

5.2 - Horizonte temporal de uma hora

Tendo em conta o capítulo 2, vamos considerar o problema primal e a sua função de custo ótimo $c : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$, com $\Omega \equiv D$, cuja solução pertence ao domínio D , para uma hora. Vai-se passar uma recta r_1 , que passa no ponto cuja ordenada é definida pelo valor da solução ótima do problema primal c^* e cuja abcissa é definida pela carga d_1 a satisfazer. Essa recta r_1 é perpendicular ao eixo da demanda, ou seja, ao eixo das abcissas como podemos ver na Figura 5.1. Analisando a Figura 5.1 reparem que existe uma recta r_2 , recta essa que intersecta a recta vertical r_1 e que é maximizante. Podemos então dizer que o máximo da função dual q^* corresponde ao ponto de intersecção entre as rectas r_1 e r_2 e que o declive da recta r_2 é atribuído pelo valor do multiplicador de Lagrange λ^* , que tem como objectivo maximizar a função dual.

Pontos de suporte será o nome que designaremos aos dois pontos pertencentes à solução ótima do problema primal que definem a recta de suporte r_2 e que tem como declive λ^* . Os pontos de suporte, são definidos por $P^A(d_1^{sA}, c^{sA})$ e $P^B(d_1^{sB}, c^{sB})$. Estes pontos de suporte dizem respeito às duas afectações de unidades, definidas pelo máximo da função dual, em termos de problema primal, como se pode verificar no capítulo 2.

Interpretando geometricamente a existência dos dois pontos de suporte concluímos que para um valor de carga a satisfazer, ao qual coincide um valor ótimo primal, a recta r_2 fará a maximização do problema dual quando a recta tangente for inferior a esse ponto. Uma vez que essa recta nunca será tangente a esse ponto, a recta vai assentar nos pontos que a suportam, como poderemos ver na Figura 5.1.

A intersecção das rectas r_1 e r_2 , visto que r_2 não consegue ser tangente no ponto ótimo primal, resulta na interpretação geométrica para a solução dual de Lagrange. Visto que a recta r_2 não consegue ser tangente no ponto ótimo primal, podemos concluir que existe salto de dualidade, Como vimos no inicio deste capitulo, o salto de dualidade foi definido como sendo a diferença entre o valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual de Lagrange. Analisando a interpretação geométrica, concluímos que corresponde à distância, que será medida sobre a recta r_1 , para os valores compreendidos entre o valor ótimo do problema primal c^* e o valor ótimo do problema dual de Lagrange

q^* . Na figura 5.1 o salto de dualidade está representado por um segmento de recta a traço grosso [3].

Devido a algumas variáveis do problema primal serem inteiras, levam a que fique comprometido as propriedades da convexidade, o que faz com que a solução do problema dual de Lagrange seja diferente da solução do problema primal. No entanto, uma vez que se trata de um exemplo simplificado, é possível resolver o problema, para isso basta a restrição de carga ter um valor superior a d_1^{SB} , o que faz com que a recta r_2 fosse tangente a esse ponto, resultando daí um valor óptimo do problema primal igual ao valor óptimo do problema dual de Lagrange. Para este caso, podíamos concluir que a solução do problema dual de Lagrange seria igual à solução do problema primal.

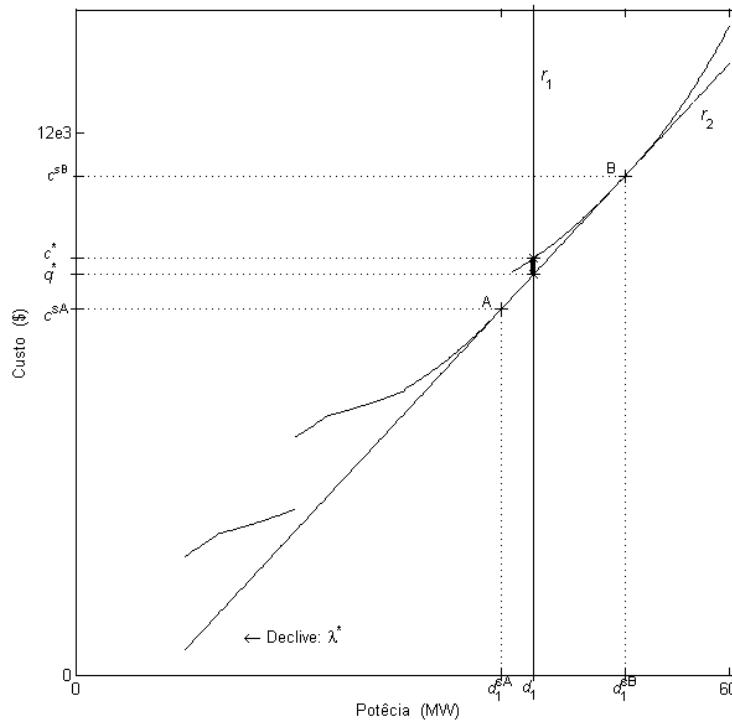


Figura 5.1 - Este gráfico representa a solução do problema primal, em D, para a ilustração geométrica do denominado salto de dualidade, ou seja, representa a relação existente entre o problema primal e o problema dual de Lagrange.

Analisando a Figura 5.1, observamos que são marcados, sobre a solução do problema primal em todo o seu domínio D vários pontos, designadamente:

- O valor óptimo do problema primal, com as seguintes coordenadas $c^*(d_1, c^*)$.

- O valor óptimo do problema dual de Lagrange, com as seguintes coordenadas $q^*(d_1, q^*)$, sendo que este ponto diz respeito à intersecção existente entre as rectas r_1 e r_2 .
- O custo e a demanda coincidente com a solução do problema dual, no que diz respeito à afectação de unidades, em que os pontos A e B são definidos pelas coordenadas $P^A(d_1^{sA}, c^{sA})$ e $P^B(d_1^{sB}, c^{sB})$.

Como já foi referido anteriormente, para problema de grande escala não é possível obter um valor óptimo para o problema primal, o que faz com que se torne impossível obter o valor para o salto de dualidade. Depois de alguma pesquisa foram encontrados alguns actores que definem salto de dualidade como sendo a diferença existente entre o custo óptimo obtido para uma afectação óptima fazível, resultante de uma solução do problema dual de Lagrange, e o valor obtido nessa mesma solução. Essa definição é para nós considerada de exorbitante. Tendo em conta a nossa experiência computacional, nem sempre se torna possível obter uma afectação fazível que resulte da solução do problema dual de Lagrange, tendo em conta que se trata de problemas de larga escala. No entanto é possível obter uma solução fazível, no entanto não resulta da solução do problema dual de Lagrange. Tendo em conta que a esta solução corresponde um custo, que será designado c^{admi} , este custo será um majorante do custo óptimo primal. Deste modo, será possível estabelecer uma medida de proximidade desta afectação com a solução do problema primal:

$$\xi < c^{admi} - q^*, c^{sB} \text{ é um exemplo de } c^{admi} \quad (5.2)$$

Admitindo que a c^{admi} se trata de uma solução óptima do problema dual de Lagrange, a medida de proximidade que foi definida na expressão (5.2) é incerta no que diz respeito ao salto de dualidade, pois nunca se sabe a proximidade a que se encontra a solução do problema primal da solução do problema dual de Lagrange.

Capítulo 6

Resultados e análise crítica

Nos capítulos anteriores vimos como obter a solução óptima do problema de afectação de unidades, quer para o problema primal (resolução directa), quer para o problema dual de Lagrange (resolução indirecta).

Neste capítulo serão mostrados os resultados obtidos por forma a perceber a influência dos custos de arranque e dos custos de operação na obtenção da solução óptima do problema, fazendo uma análise crítica. Para cada exemplo será analisado o salto de dualidade de forma a perceber qual a distância existente entre os custos da solução óptima do problema primal e da solução óptima do problema dual de Lagrange. Os exemplos que vamos designar por exemplos modelo são os exemplos apresentados anteriormente, designadamente, os representados na Figura 2.1 e na Figura 2.2.

6.1 - Introdução

Este capítulo terá como objectivo principal perceber que influência têm os custos de arranque e os custos de operação na obtenção da solução óptima do problema. Tendo em conta os gráficos obtidos anteriormente, serão analisadas todas as situações possíveis, isto é:

- Variação dos custos de arranque.
- Variação dos custos de operação.
- Variação de ambos os custos.

Será realizada uma análise para os exemplos do problema primal e para os exemplos do problema dual de Lagrange. Mediante esta análise iremos perceber que importância terá os custos de arranque e que importância terá os custos de operação, na obtenção da solução óptima do problema.

Teoricamente e uma vez que os exemplos apresentados anteriormente são para horizontes temporais pequeno, designadamente uma e duas horas, poderemos observar que para o problema primal os custos de arranque terão maior importância que os custos de operação, uma vez que quanto maior for os custos de arranque mais evidente se torna a descontinuidade e não linearidade da função de custo mínimo da solução óptima do problema primal.

No que diz respeito à variação dos custos de operação a função da solução óptima terá um comportamento diferente, relativamente à variação dos custos de arranque. Com o aumento dos custos de operação a função torna-se mais linear. Podemos então afirmar que com o aumento dos custos de operação diminui o salto existente entre as unidades de geração, fazendo com que a função se torne cada vez mais suave. O aumento dos custos de operação fará com que o valor da solução óptima do problema seja maior, ou seja, quanto maior for o valor dos custos de operação maior será o valor da solução óptima do problema.

Como referimos anteriormente trata-se de exemplos com um horizonte temporal curto, o que nos leva a concluir que, o aumento dos custos de arranque terá relevância face ao aumento dos custos de operação, como poderemos ver mais à frente.

Para o exemplo de uma hora teremos como exemplo modelo a Figura 2.1, que representa a solução óptima do problema primal. Em termos de problema dual de Lagrange, mas ainda referente a um horizonte temporal de uma hora teremos como exemplo modelo a Figura 4.1. exemplo este representativo da solução óptima do problema dual de Lagrange.

Proseguiremos depois com uma análise de várias situações, de modo a percebermos que importâncias terão os custos de arranque e os custos de operação na obtenção da solução de custo óptimo, tanto para o problema primal como para o problema dual de Lagrange, apresentando de seguida o gráfico correspondente ao salto de dualidade existente para cada situação.

A ordem de alterações existentes será a seguinte:

- Variação dos custos de arranque.
- Variação dos custos de operação.
- Aumento dos custos de arranque e dos custos de operação.

Do mesmo modo serão depois representadas as Figuras equivalentes à solução óptima do problema, mas desta vez para um horizonte temporal de duas horas. Os exemplos considerados como modelos serão a Figura 2.2, representativa da solução óptima do problema primal e a Figura 4.2, representativa da solução óptima do problema dual de Lagrange.

Para cada gráfico será feita uma análise de resultados e uma análise crítica com o intuito de perceber quais as alterações existentes em relação ao gráfico original. O objectivo dessa análise é perceber qual a importância dos custos na obtenção da solução óptima do problema primal.

6.2 - Horizonte temporal de uma hora

6.2.1 - Variação dos custos de arranque

6.2.1.1 - Problema Primal

Recordemos então a Figura 2.1, esta corresponde à solução óptima do problema primal, cujos valores dos custos de arranque e os valores dos custos de operação serão os considerados como valores modelo, isto é, tendo em conta estes valores vamos começar por alterar os custos de arranque de forma a perceber a importância que os custos de arranque terão na obtenção da solução óptima do problema primal.

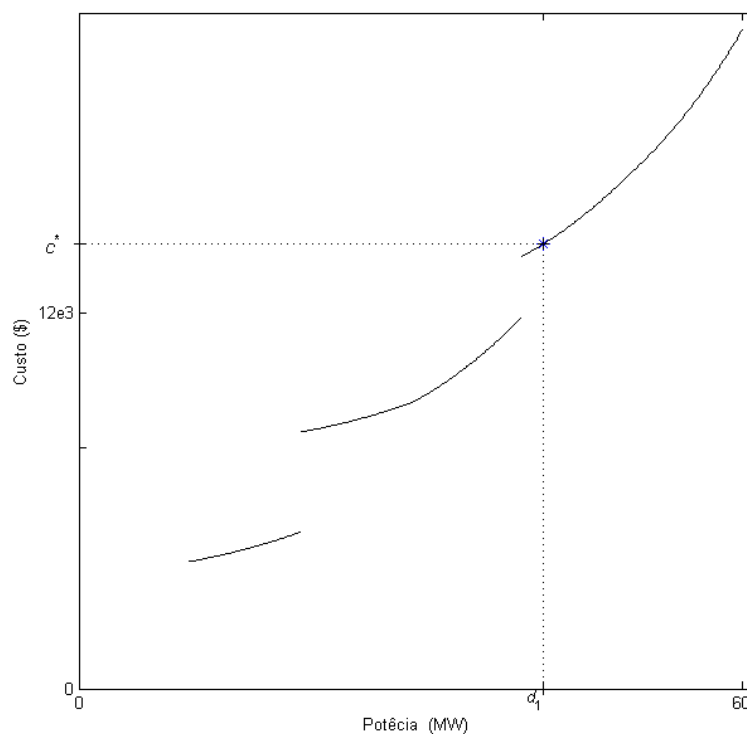


Figura 6.1 - Este gráfico corresponde à solução do problema primal (função de custo óptimo) para um horizonte temporal de uma hora. O “*” representa o custo óptimo para a restrição de carga d_1 .

A Figura 6.1 representa a solução óptima do problema primal, mas para valores de custos de arranque superiores. Tendo em conta que se trata de um exemplo com um horizonte

temporal de uma hora, facilmente se observa que os custos de arranque são muito importantes na obtenção da solução óptima do problema primal.

Como vimos anteriormente, para cada valor de carga “d” obtém-se um valor para a função de custo óptimo “c”. Sendo que esse valor será obtido, de entre todas as configurações possíveis, da configuração de menor custo, ou seja, as unidades têm de entregar, numa hora, um valor de potência d_1 , ao menor custo c^* .

Observando o gráfico concluímos que, tal como prevíamos, a solução óptima do problema primal terá um custo superior, face ao exemplo anterior, onde os custos de arranque eram menores.

Verifica-se ainda que existe um salto maior entre as unidades de geração, esse salto será tanto maior quanto maior forem os custos de arranque, salto esse que acontece devido à diferença existente entre os custos de arranque das várias unidades de geração. Podendo ainda concluir-se que com o aumento dos custos de arranque existe uma maior discretização entre as unidades de geração.

6.2.1.2 - Problema dual de Lagrange

A figura 4.1, correspondente à solução óptima do problema dual de Lagrange, terá a função de custos de arranque e a função de custos de operação como referência, isto é, tendo em conta estes valores vamos começar por alterar os custos de arranque de forma a perceber a importância que os custos de arranque terão na obtenção da solução óptima do problema dual de Lagrange.

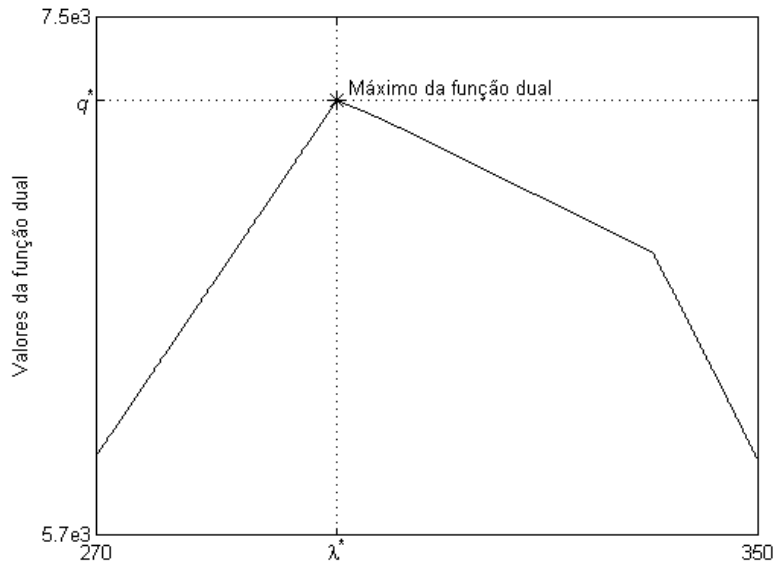


Figura 6.2 - Este gráfico corresponde à solução ótima do problema dual de Lagrange, mas que contém uma função de custos de arranque com valores superiores, ou seja, aumentou-se o valor dos custos de arranque.

Tendo em conta que se trata de um exemplo com um horizonte temporal de uma hora, facilmente observamos a existência de duas soluções ótimas para o problema dual de Lagrange, mas que em termos de solução ótima de problema primal, essas soluções são subótimas.

Em relação ao exemplo modelo (Figura 4.1), conclui-se que com o aumento dos custos de arranque as soluções ótimas passam a ter custo superior q^* , no entanto esse valor é inferior face ao custo ótimo do problema primal c^* , ou seja, $q^* < c^*$, levando a concluir que a solução do problema primal é diferente da solução do problema dual de Lagrange.

6.2.1.3 - Salto de Dualidade

Tal como foi descrito anteriormente, o salto de dualidade é definido como sendo a diferença entre o valor da solução do problema primal e o valor da solução do problema dual de Lagrange. A expressão do salto de dualidade é a seguinte:

$$\xi = c^* - q^*$$

Podendo então afirmar-se que o salto de dualidade é a distância existente entre o valor do problema primal e o valor do problema dual de Lagrange. Sempre que se verificar a existência dessa desigualdade podemos afirmar que existe salto de dualidade. Tendo em conta as características do problema primal podemos afirmar que essa desigualdade acontece quase sempre.

Para este exemplo, como veremos de seguida existe salto de dualidade, pelo que podemos concluir que a solução óptima do problema primal não será igual à solução óptima do problema dual de Lagrange.

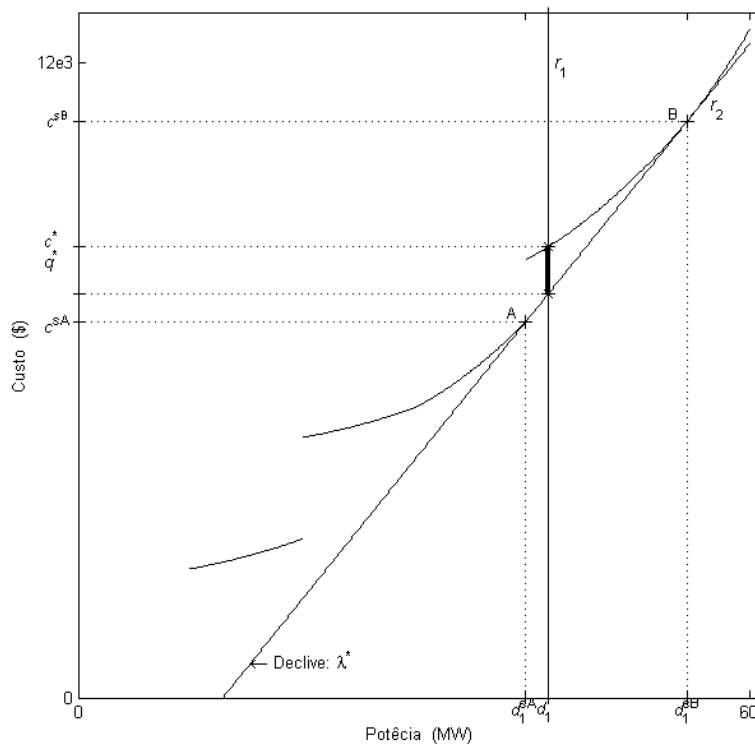


Figura 6.3 - Este gráfico corresponde ao salto de dualidade, ou seja, representa a relação existente a solução óptima do problema primal e do problema dual de Lagrange.

Sabendo que o valor óptimo do problema primal, contém as coordenadas $c^*(d_1, c^*)$, contém um valor óptimo do problema dual de Lagrange com as coordenadas $q^*(d_1, q^*)$, sendo que este ponto diz respeito à intersecção existente entre as rectas r_1 e r_2 e que o custo e a demanda coincidente com a solução do problema dual, no que diz respeito à afectação de unidades, em que os pontos A e B são definidos pelas coordenadas $P^A(d_1^{sA}, c^{sA})$ e $P^B(d_1^{sB}, c^{sB})$.

Tendo como termo de comparação a Figura 5.1, que representa o salto de dualidade para o exemplo por nós considerado como modelo, observamos que com o aumento dos custos de arranque aumenta também a distância, em termos de custo, entre a solução do problema primal e do problema dual. Podendo então afirmar-se que para este exemplo existe um maior afastamento dos custos, evidenciando a maior dificuldade em obter solução do problema primal através da resolução do problema dual de Lagrange. Contudo não é, ainda possível afirmar que esse maior afastamento corresponde a piores soluções em termos do problema primal.

6.2.2 - Variação dos custos de operação

6.2.2.1 - Problema Primal

Tendo em conta o exemplo considerado como modelo, iremos proceder ao aumento dos custos de operação com o intuito de perceber que importância terão os custos de operação na obtenção da solução óptima do problema primal.

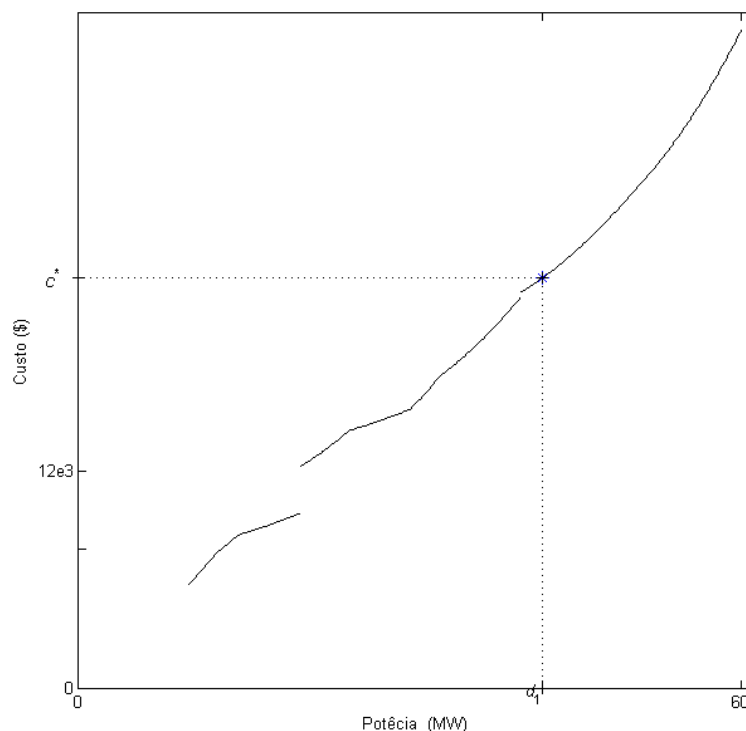


Figura 6.4 - Este gráfico corresponde à solução óptima do problema primal, mas que em relação ao exemplo modelo contém uma função de custos de operação com valores superiores, ou seja, aumentou-se o valor dos custos de operação.

Os custos de operação terão um papel bastante importante na obtenção da solução óptima do problema primal, uma vez que, quanto maior for os custos de operação maior será o valor da solução óptima do problema primal.

Com o aumento dos valores da função de custos de operação verifica-se uma aproximação de todas as unidades geradoras, isto é, não se verifica um salto de transição de uma unidade geradora para outra. Daqui resulta uma diminuição de importância dos custos de arranque no que diz respeito à obtenção da solução óptima do problema primal, embora para este exemplo e devido a um horizonte temporal de uma hora, os custos de arranque continuam a ter muita importância na obtenção da solução óptima do problema primal.

Observando a Figura 6.4 podemos ainda concluir que quanto maior for os custos de operação mais linear será a função da solução óptima do problema primal.

6.2.2.2 - Problema dual de Lagrange

Para este exemplo procederemos ao aumento dos custos de operação, de modo a percebermos que importância terão os custos de operação na obtenção da solução óptima do problema dual de Lagrange.

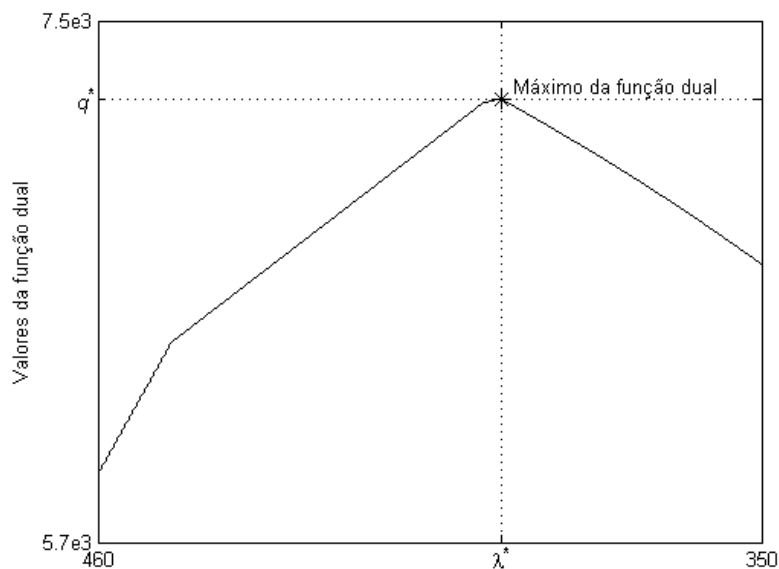


Figura 6.5 - Este gráfico corresponde à solução óptima do problema dual de Lagrange, mas que contém uma função de custos de operação com valores superiores, ou seja, aumentou-se o valor dos custos de operação face ao exemplo modelo.

Mais uma vez, e devido ao horizonte temporal ser de uma hora, observamos a existência de duas soluções ótimas para o problema dual de Lagrange, mas que em termos de solução ótima de problema primal, essas soluções são subótimas.

Utilizando o exemplo modelo como termo de comparação, conclui-se que com o aumento dos custos de operação as soluções ótimas passam a ter custo superior q^* , no entanto esse valor é inferior face ao custo ótimo do problema primal c^* , ou seja, $q^* < c^*$, levando a concluir que a solução do problema primal é diferente da solução do problema dual de Lagrange.

6.2.2.3 - Salto de dualidade

Para este exemplo, como veremos de seguida existe salto de dualidade, pelo que podemos concluir que a solução ótima do problema primal não será igual à solução ótima do problema dual de Lagrange.

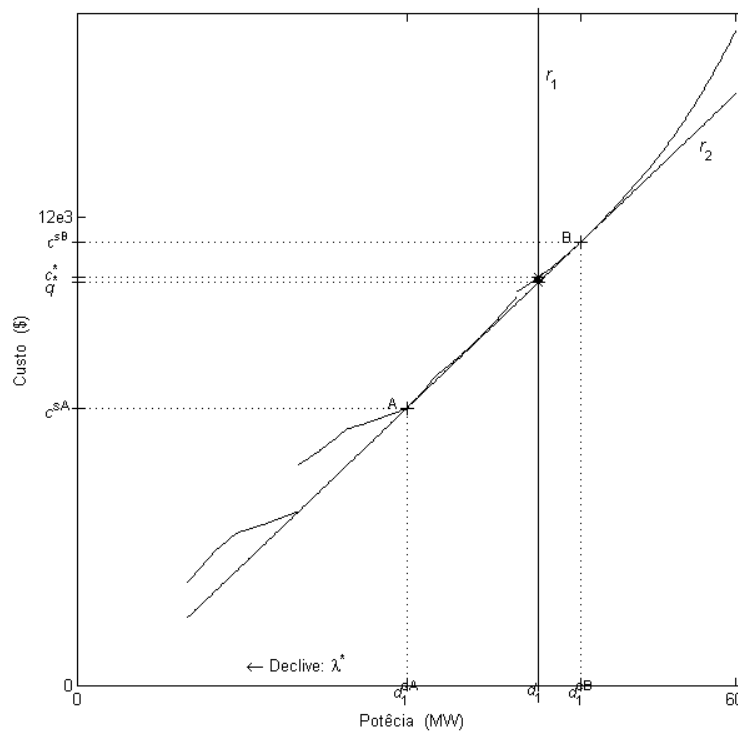


Figura 6.6 - Este gráfico corresponde ao salto de dualidade, ou seja, representa a relação existente entre a solução ótima do problema primal e do problema dual de Lagrange.

Mais uma vez podemos concluir que a solução óptima do problema primal é diferente da solução óptima do problema dual de Lagrange, o que faz com que exista salto de dualidade.

Relativamente ao exemplo original, verifica-se um salto de dualidade menor - quase nulo, ou seja, o valor da solução óptima do problema dual de Lagrange está próximo do valor da solução óptima do problema primal. Contudo, verificamos, que as soluções em termos do problema primal são piores (o gradiente em ambos os pontos A e B é maior).

Trata-se de um exemplo muito interessante, pois para este exemplo estamos no limiar de existência de solução óptima, isto é, a solução óptima do problema dual é quase igual à solução óptima do problema primal, mas as soluções do problema primal, que correspondem ao valor máximo da função dual de Lagrange, exibem um gradiente maior, sendo, quando comparadas com o exemplo anterior, piores soluções.

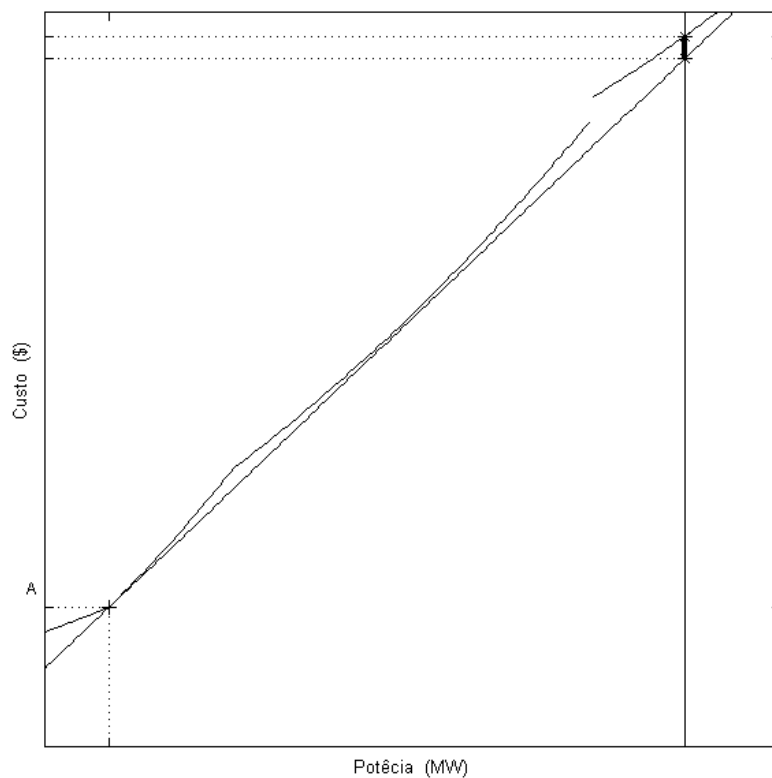


Figura 6.7 - Este gráfico representa o zoom, isto é, permite uma melhor visualização do elevado gradiente respeitante à solução, em termos do problema primal, representada pelo ponto A.

6.2.3 - Variação de ambos os custos

6.2.3.1 - Problema Primal

Para este exemplo, e tendo em conta o exemplo considerado como modelo, iremos proceder ao aumento dos custos de operação e dos custos de arranque de forma a percebermos qual a importância que terão os custos de operação e os custos de arranque na obtenção da solução ótima do problema primal.

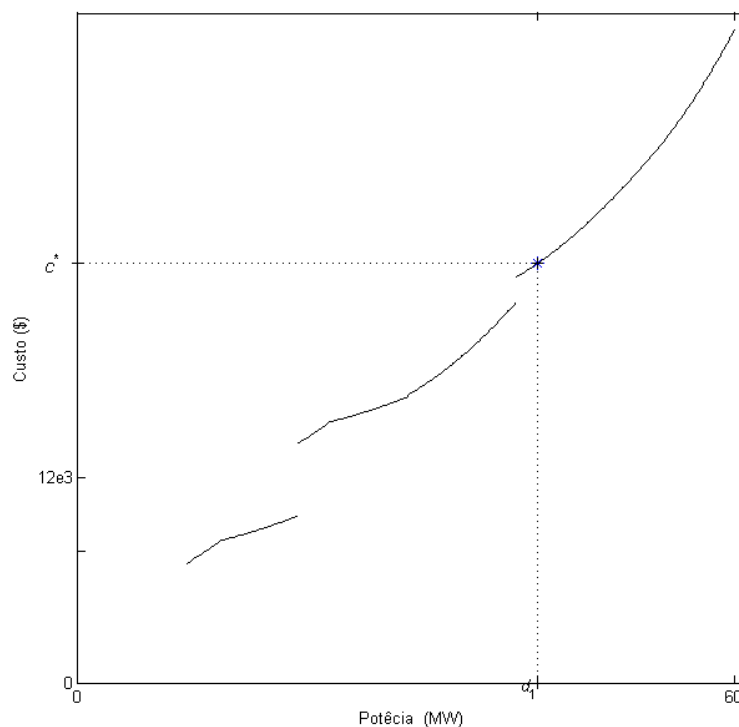


Figura 6.8 - Este gráfico corresponde à solução ótima do problema primal contendo uma função de custos de arranque e uma função de custos de operação com valores superiores face ao exemplo original, ou seja, aumentou-se os custos de arranque e os custos de operação. Com o aumento dos custos de arranque e dos custos de operação, surge uma solução ótima com um valor superior face ao exemplo original.

Verifica-se que embora se aumente os custos de arranque, os custos de operação têm também cota parte de importância na obtenção da solução ótima do problema primal, isto acontece devido aos custos de operação serem superiores face aos custos de arranque.

6.2.3.2 - Problema dual de Lagrange

Sabendo que para este exemplo houve um aumento dos valores dos custos de operação e dos custos de arranque, vamos visualizar que importância terão os custos de operação e os custos de arranque na obtenção da solução ótima do problema dual de Lagrange.

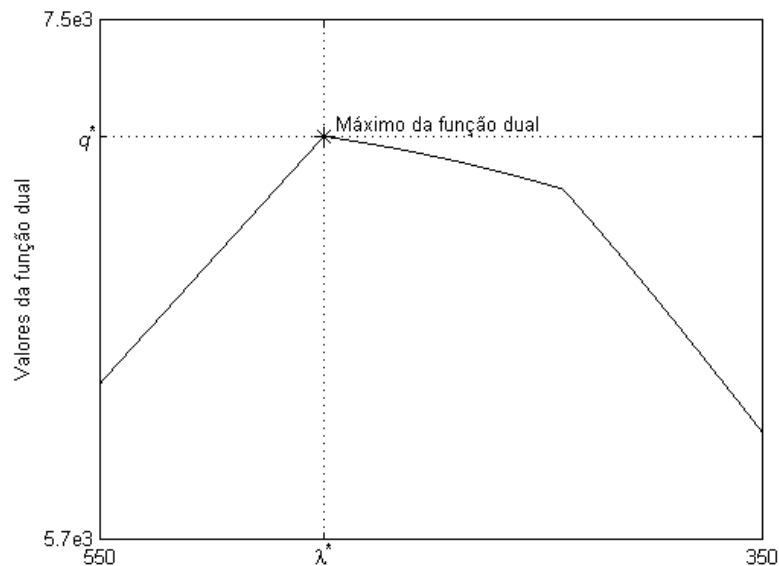


Figura 6.9 - Este gráfico corresponde à solução ótima do problema dual de Lagrange, contendo uma função de custos de arranque e uma função de custos de operação superiores face ao exemplo original, ou seja, aumentou-se os custos de arranque e os custos de operação. Com o aumento dos custos de arranque e dos custos de operação, resulta numa solução ótima com um valor superior face ao exemplo original.

De salientar a existência de duas soluções ótimas para o problema dual de Lagrange, mas que em termos de solução ótima de problema primal, essas soluções são subótimas.

Tendo como termo de comparação o exemplo modelo, conclui-se que com o aumento dos custos de arranque e dos custos de operação as soluções ótimas passam a ter custo superior q^* , no entanto esse valor é inferior face ao custo ótimo do problema primal c^* , ou seja, $q^* < c^*$, levando a concluir que a solução ótima do problema primal é diferente da solução ótima do problema dual de Lagrange.

6.2.3.3 - Salto de dualidade

Para este exemplo, como veremos de seguida existe salto de dualidade, pelo que podemos concluir que a solução óptima do problema primal não será igual à solução óptima do problema dual de Lagrange.

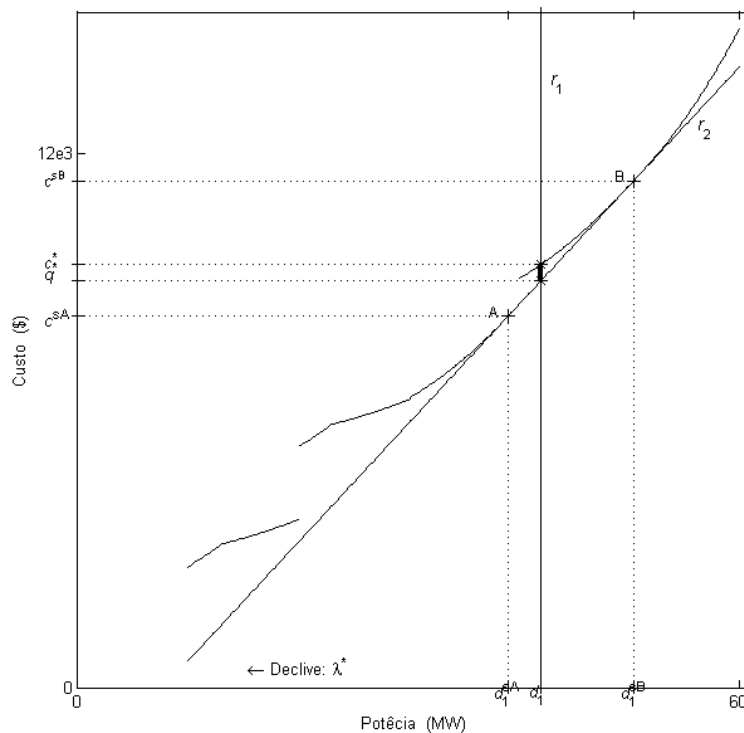


Figura 6.10 - Este gráfico corresponde ao salto de dualidade, ou seja, representa a relação existente entre a solução óptima do problema primal e do problema dual de Lagrange. Mais uma vez podemos concluir que a solução óptima do problema primal é diferente da solução óptima do problema dual de Lagrange, o que faz com que exista salto de dualidade.

Relativamente ao exemplo anterior, verifica-se um salto de dualidade maior, ou seja, com o aumento dos custos de arranque o salto de dualidade aumenta, ou seja, a solução óptima do problema dual de Lagrange estará mais longe da solução óptima do problema primal, face ao exemplo anterior.

Neste caso verifica-se um gradiente menor respeitante à solução, em termos do problema primal, representada pelo ponto A.

6.3 - Horizonte temporal de duas horas

6.3.1 - Variação dos custos de arranque

6.3.1.1- Problema Primal

Recordemos agora a Figura 2.2, correspondente à solução ótima do problema primal, cujos valores da função de custo de arranque e os valores da função de custos de operação serão os considerados como os valores modelo, isto é, tendo em conta estes valores vamos começar por alterar os custos de arranque de forma a perceber a importância desses custos na obtenção da solução ótima do problema primal.

Este exemplo é semelhante ao exemplo 6.2.1.1, a alteração existente em relação ao exemplo anterior, é que deixamos de ter um horizonte temporal de uma hora para passar-mos a ter um horizonte temporal de duas horas, ou seja, a função de custo ótimo resultante da resolução do problema primal é uma função:

$$c : \Omega^2 \rightarrow \mathfrak{R}$$

com

$$d \in \Omega^2 \equiv d_2$$

Para cada restrição de carga, isto é, para cada valor de carga d_1 , na hora um, e de d_2 , na hora dois, obtém-se um valor para a função de custo ótimo, ao qual corresponde uma afectação de unidades. Relativamente ao exemplo anterior este trata-se de um exemplo de maior dificuldade de ilustração e compreensão. As unidades têm que entregar, em cada uma das duas horas, um valor de potência, d_1 e d_2 , respectivamente para a hora um e para a hora dois, ao menor custo c^* .

Torna-se evidente que o comportamento da função de custo ótimo tende a piorar com o aumento da dimensão do espaço de decisão.

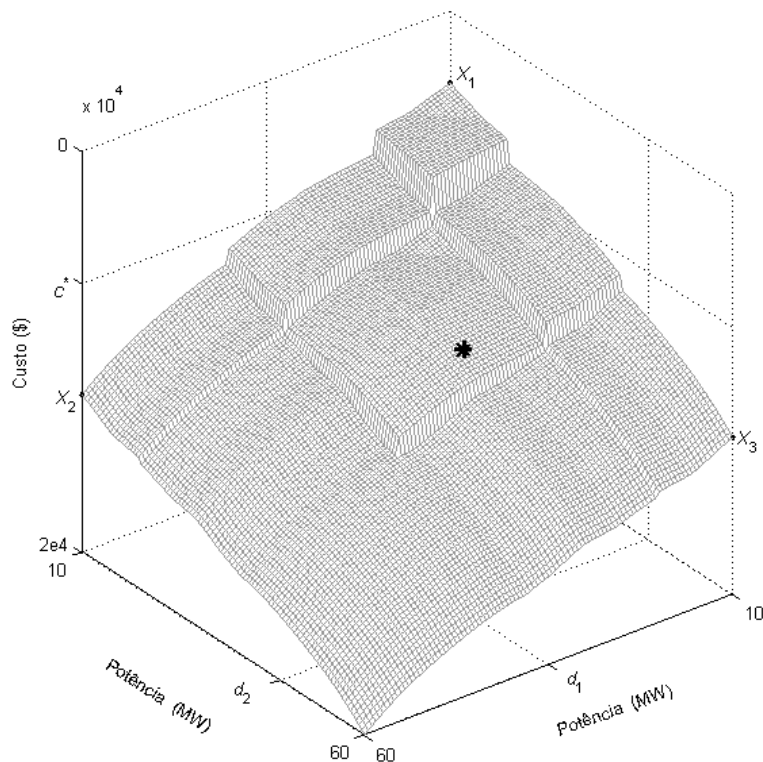


Figura 6.11 - Este gráfico corresponde à solução ótima do problema primal, contendo uma função de custos de arranque com valores superiores, ou seja, aumentou-se o valor dos custos de arranque.

Tendo em conta que este exemplo tem um horizonte temporal de duas horas, em relação ao exemplo anterior, trata-se de um exemplo de maior dificuldade de ilustração e compreensão.

Tal como para o exemplo anterior, em que se aumentou os custos de arranque, denota-se discretização entre unidades de geração. Para este exemplo verifica-se que os custos de arranque são ainda muito importantes no que diz respeito à obtenção da solução ótima do problema primal. Denota-se um salto entre unidades de geração, estes saltos acontecem devido à diferença que existe nos custos de arranque das unidades geradoras ter crescido.

Observando esta figura conclui-se ainda que quanto maior for o horizonte temporal maior será a dificuldade de ilustração e compreensão e quanto maior forem os custos de arranque maior será o salto existente entre as unidades de geração.

6.3.1.2 - Problema dual de Lagrange

De seguida vamos variar os custos de arranque, tal como fizemos para o problema primal, de forma a perceber que influência terão os custos de arranque na obtenção da solução óptima do problema dual de Lagrange.

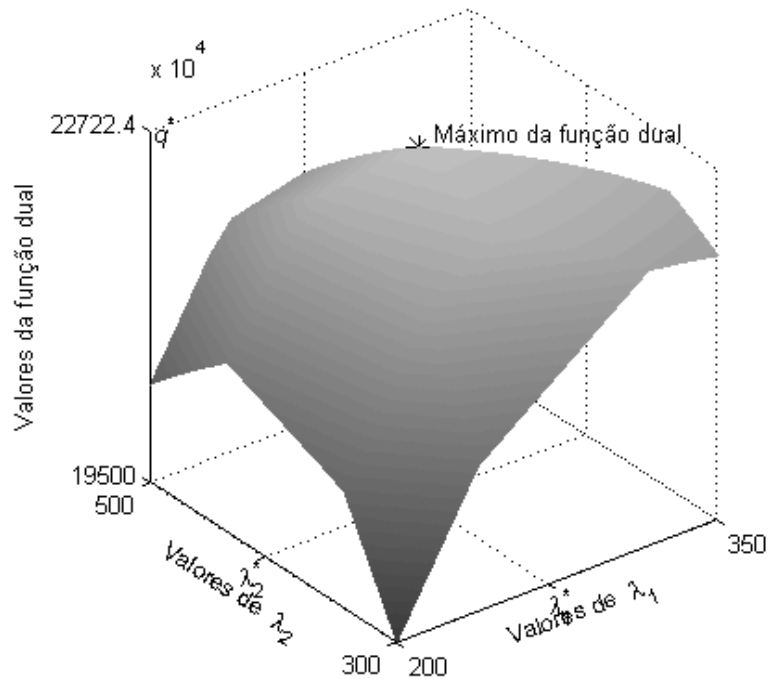


Figura 6.12 - Este gráfico corresponde à solução óptima do problema dual de Lagrange, contendo uma função de custos de arranque com valores superiores, ou seja, aumentou-se o valor dos custos de arranque.

Tendo em conta que este exemplo possui um horizonte temporal de duas horas, e em relação ao exemplo anterior, trata-se de um exemplo de maior dificuldade de ilustração e compreensão. Tendo em conta o exemplo modelo (Figura 4.2), observa-se que ouve um ligeiro aumento do valor de custo da solução óptima do problema dual de Lagrange.

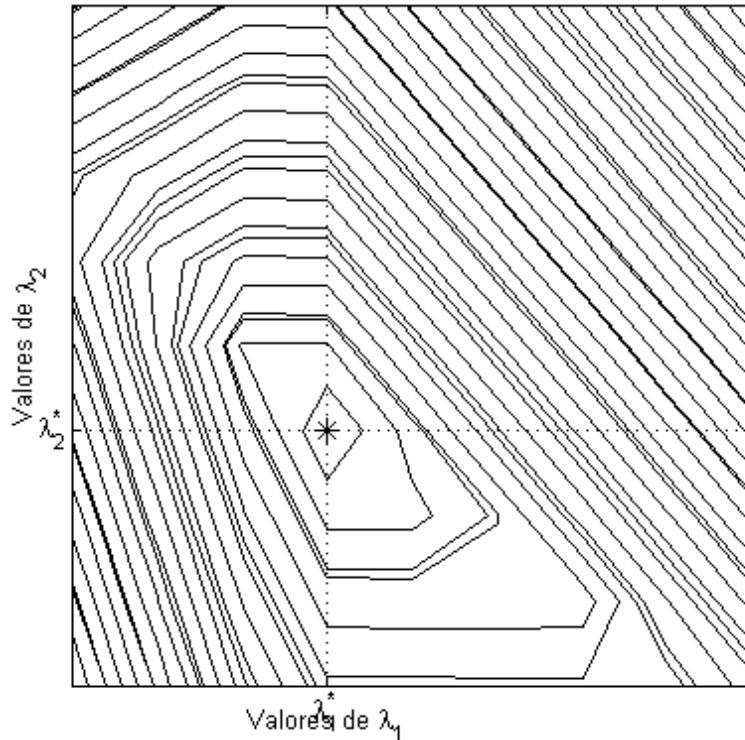


Figura 6.13 - Este gráfico representa graficamente as linhas de contorno da função dual representada na figura 6.12. Analisando esta figura visualizamos que se encontra assinalado o valor ótimo da função dual, ou seja o valor máximo da função q^* , valor máximo este obtido para os valores de λ_1^* e λ_2^* . De salientar que a cada face da função dual corresponde um subgradiente. Este exemplo contém quatro subgradientes, ou seja, existem quatro faces que se juntam no ponto ótimo.

A existência de quatro soluções distintas para o mesmo ponto ótimo, com valores diferentes em termos de problema primal para a afectação de unidades, leva-nos a concluir que a solução ótima do problema dual não corresponde à solução ótima do problema primal.

6.3.2 - Variação dos custos de operação

6.3.2.1 - Problema Primal

Para este exemplo, relativamente ao exemplo considerado como modelo, existirá um aumento dos custos de operação. De seguida observaremos a importância dos custos de operação na obtenção da solução ótima do problema primal. Teremos de ter em conta que para este exemplo o horizonte temporal será de duas horas.

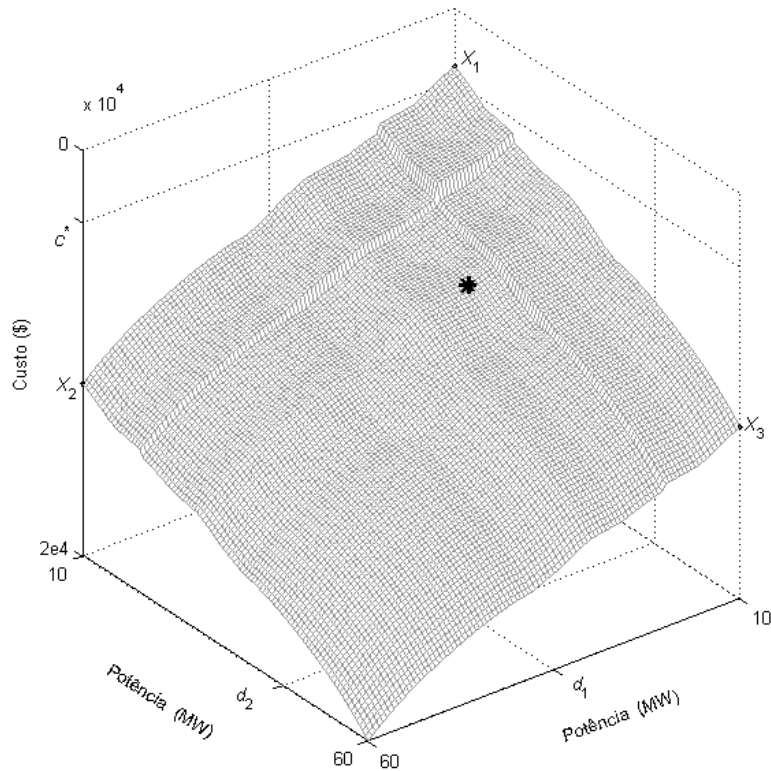


Figura 6.14 - Este gráfico corresponde à solução óptima do problema primal, contendo uma função de custos de operação com valores superiores, ou seja, aumentou-se o valor dos custos de operação. Os custos de operação têm um papel importante na obtenção da solução óptima do problema primal, uma vez que aumentando os custos de operação, o valor da solução óptima terá um valor superior.

Com o aumento dos custos de operação denota-se uma aproximação de todas as unidades geradoras. Deixando por isso de se verificar o salto de transição de uma unidade geradora para outra, isto deve-se ao facto dos custos de operação terem custos superiores face aos arranque.

Pode concluir-se que quanto maior for os custos de operação face aos de arranque, mais suave se vai tornar a função da solução óptima do problema primal.

6.3.2.2 - Problema dual de Lagrange

Sabendo que se trata de um exemplo com um horizonte temporal de duas horas, e que comparativamente ao exemplo modelo existe um aumento dos custos de operação, vamos tentar perceber que influência terão os custos de operação na obtenção da solução óptima.

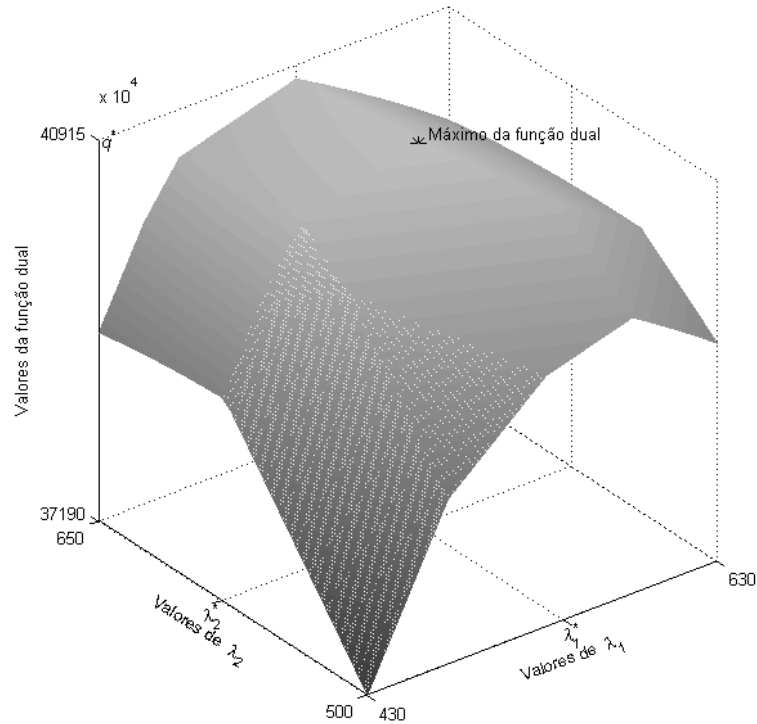


Figura 6.15 - Este gráfico corresponde à solução óptima do problema dual de Lagrange, contendo uma função de custos de operação com valores superiores, ou seja, aumentou-se o valor dos custos de operação.

Tendo em conta o exemplo modelo (Figura 4.2), denota-se um aumento do valor de custo da solução óptima do problema dual de Lagrange, aumento esse também maior que o existente aquando do aumento dos custos de arranque.

Podendo então concluir-se que os custos de operação são mais relevantes no que diz respeito à obtenção da solução óptima do problema dual de Lagrange.

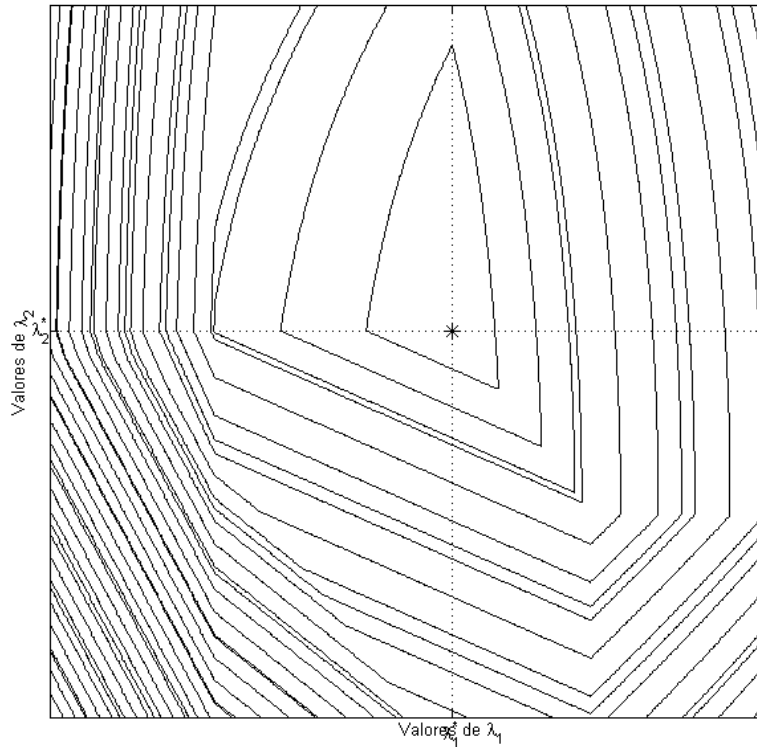


Figura 6.16 - - Este gráfico corresponde às linhas de contorno da função dual representada na figura 6.15. Analisando esta figura visualizamos que se encontra assinalado o valor óptimo da função dual, ou seja o valor máximo da função q^* , valor máximo este obtido para os valores de λ_1^* e λ_2^* . De salientar que a cada face da função dual corresponde a um subgradiente. Este exemplo contém três subgradientes, ou seja, existem três faces que se juntam no ponto óptimo.

A existência de três soluções distintas para o mesmo ponto óptimo, com valores diferentes em termos de problema primal para a afectação de unidades, leva-nos a concluir que a solução óptima do problema dual não corresponde à solução óptima do problema primal.

6.3.3 - Variação de ambos os custos

6.3.3.1 - Problema Primal

Através deste exemplo, pretendo perceber que importância terão os custos de arranque e os custos de operação na obtenção da solução óptima do problema primal. Neste exemplo existirá um aumento das funções de custos de arranque e das funções de custos de operação, comparativamente com o exemplo considerado modelo.

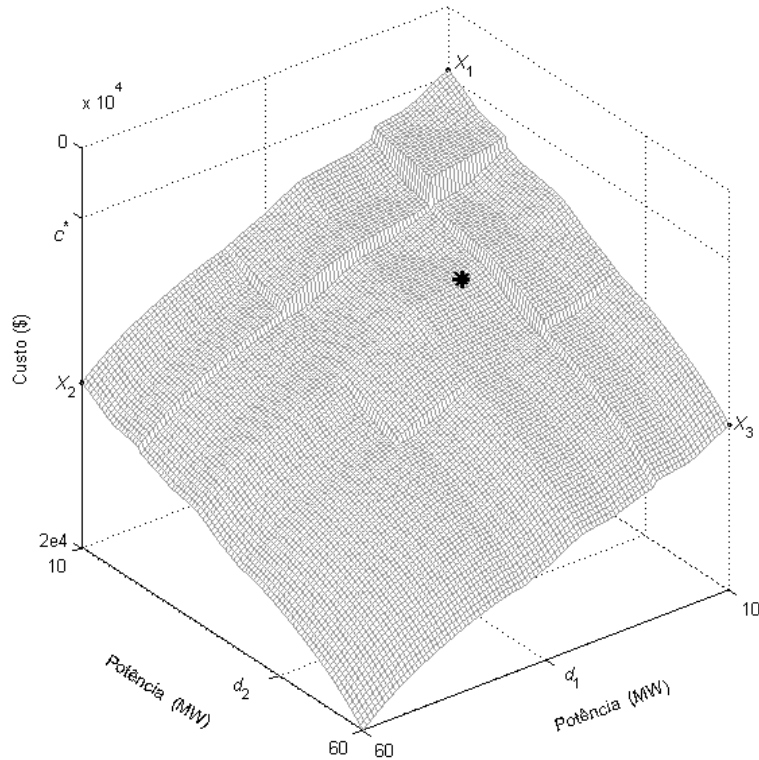


Figura 6.17 - Este gráfico corresponde à solução óptima do problema primal, contendo uma função de custos de arranque e uma função de custos de operação superiores face ao exemplo original, ou seja, teoricamente o que se fez foi aumentar os custos de arranque e os custos de operação.

Com o aumento dos custos de arranque e dos custos de operação, resulta numa solução óptima com um valor superior face ao exemplo original.

Ao analisar este gráfico observa-se que toda a análise descrita no gráfico anterior (Figura 6.14), no entanto os gráficos são diferentes, devido ao aumento dos custos de arranque nota-se que a função da solução óptima do problema primal é menos linear, ou seja, existe um salto entre as unidades de geração, isso deve-se ao facto dos custos de arranque serem superiores face aos custos de operação. No entanto podemos observar que os custos de operação são importantes na obtenção da solução óptima do problema primal, pois embora exista um salto entre as unidades de geração, esse salto é inferior face ao exemplo original. Isto deve-se ao facto dos valores dos custos de operação serem superiores face aos aplicados no exemplo considerado modelo.

6.3.3.2 - Problema dual de Lagrange

Sabendo que para este exemplo existirá um aumento dos custos de arranque e de operação, face ao exemplo modelo. Vamos perceber que influência terão os custos de arranque e os custos de operação na obtenção da solução óptima do problema dual de Lagrange.

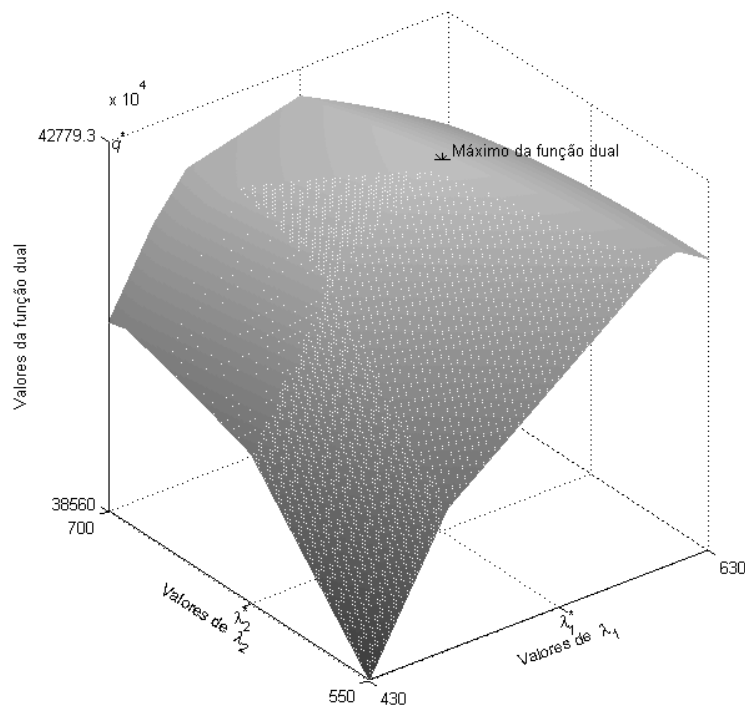


Figura 6.18 - Este gráfico corresponde à solução óptima do problema dual de Lagrange, contendo uma função de custos de operação e de custos de arranque com valores superiores, ou seja, aumentou-se o valor dos custos de operação e dos custos de arranque.

Tendo em conta o exemplo modelo (Figura 4.2), observa-se que houve um aumento do valor de custo da solução óptima do problema dual de Lagrange.

Comparando as Figuras (Figura 4.2, Figura 6.12, Figura 6.15 e Figura 6.18), verificamos que os custos de operação fazem com que os valores da solução óptima do problema dual de Lagrange aumentem significativamente. No exemplo (Figura 6.15), verificou-se que aumentando os custos de operação, o custo da solução óptima do problema dual de Lagrange aumentaria de forma significativa. Comparando o último exemplo com este exemplo observamos que face ao aumento dos custos de arranque o custo da solução óptima do problema dual de Lagrange aumentou pouco.

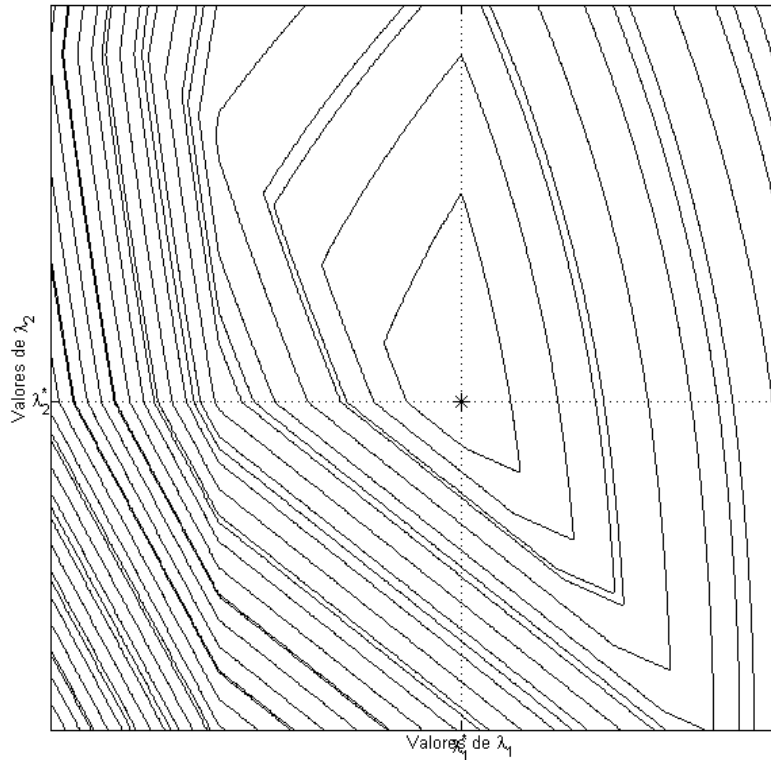


Figura 6.19 - Este gráfico corresponde às linhas de contorno da função dual representada na figura 6.18. Analisando esta figura visualizamos que se encontra assinalado o valor óptimo da função dual, ou seja o valor máximo da função q^* , valor máximo este obtido para os valores de λ_1^* e λ_2^* . De salientar que a cada face da função dual corresponde um subgradiente. Este exemplo contém cinco subgradientes, ou seja, existem cinco faces que se juntam no ponto óptimo.

A existência de cinco soluções distintas para o mesmo ponto óptimo, com valores diferentes em termos de problema primal para a afectação de unidades, leva-nos a concluir que a solução óptima do problema dual não corresponde à solução óptima do problema primal.

Capitulo 7

Conclusões

Neste capítulo enuncia-se uma síntese de estudo e apresentam-se as principais conclusões que se extraem da investigação desenvolvida sobre o problema de afectação de unidades térmicas.

São apontadas algumas direcções em que pode ser desenvolvida investigação de interesse relevante para a solução do problema.

7.1 - Principais conclusões

Esta dissertação tinha como principais objectivos compreender as dificuldades encontradas na resolução do problema primal, perceber as limitações da relaxação Lagrangeana na obtenção de uma solução quer em termos de problema primal (afecção óptima de unidades), quer também as dificuldades que surgem na resolução do problema dual de Lagrange.

A ilustração da solução do problema primal, para exemplos de dimensão reduzida, serviu para observar as dificuldades encontradas na abordagem do problema de forma directa. Sendo que as dificuldades encontradas foram a dimensão e a complexidade reais que este problema exhibe. A relaxação Lagrangeana é um método de optimização poderoso na resolução do problema primal de forma indirecta, no entanto, a qualidade da solução obtida está fortemente dependente do utilizador. Com o objectivo de compreender a complexidade, e de salientar as vantagens e desvantagens existentes aquando da aplicação desta técnica de optimização na resolução do problema primal, recorreu-se a ilustrações, sendo essas para os mesmos valores das ilustrações apresentadas na resolução do problema primal de forma directa. Feitas as ilustrações seguiu-se a interpretação geométrica em termos de solução do problema primal, bem como da definição do salto de dualidade

De forma a perceber o problema fez-se uma análise ilustrada para o problema de afectação óptima de unidades e para a sua resolução, recorrendo à relaxação Lagrangeana. O objectivo desta análise foi perceber o porquê deste problema ser abordado recorrendo à relaxação Lagrangeana, bem como perceber os motivos da sua resolução não conduzir à solução óptima em termos de problema primal.

De seguida serão enunciadas as principais vantagens do problema ser abordado recorrendo à relaxação Lagrangeana, e serão também enunciadas as principais dificuldades aquando da sua abordagem.

- Devido à dimensão e à complexidade do problema primal, não conseguirá ser feita uma abordagem de forma directa.
- A relaxação Lagrangeana é um método de optimização poderoso, uma vez que permite a decomposição do problema, isto é, cada recurso passa a constituir uma entidade única, o que faz com que seja feita optimização de forma individual.
- A existência de salto de dualidade prova que a resolução do problema primal não conduz a uma solução exacta em termos de problema primal. Podendo então afirmar-se que para um horizonte temporal de K horas existirão pelo menos $K+1$ soluções subóptimas em termos de afectação de unidades.

Para resolver o problema dual de Lagrange precisamos da relaxação Lagrangeana, que assim vai resolver o problema primal de forma indirecta. A decomposição do problema primal é conseguida graças à relaxação Lagrangeana, o que nos permitiu obter a solução do problema dual de Lagrange. Essa decomposição leva a que cada recurso passe a constituir uma entidade única, passando a ser otimizado individualmente. Devido à relaxação das restrições, nada nos garante que a solução do problema dual de Lagrange seja igual à solução do problema primal. Tendo em conta que os problemas reais de afectação de unidades são problemas de larga escala, podemos afirmar que existe sempre salto de dualidade. Então se encontrarmos o valor óptimo para o problema dual de Lagrange num horizonte temporal de K horas, sabemos que iremos ter pelo menos $(k+1)$ soluções subóptimas em termos de afectação de unidades. De qualquer forma é complicado encontrar o valor óptimo do problema dual de Lagrange, bem como conseguir encontrar as soluções subóptimas que apareceriam. Tem-se por norma convergir para um valor na vizinhança do óptimo do problema dual de Lagrange, ao qual irá corresponder uma determinada afectação de unidades.

Por último procedeu-se a uma análise crítica e de resultados, com o intuito de perceber que influências terão os custos de arranque e os custos de operação na obtenção da solução óptima do problema. Através dessa análise podem retirar-se as seguintes conclusões:

- Em termos de problema primal o aumento dos custos de arranque faz com que exista maior discretização entre as unidades de geração. Com o aumento dos custos de operação a função da solução óptima torna-se mais suave. Podendo ainda dizer-se que quanto maior for o horizonte temporal maior será a dificuldade de ilustração e compreensão e quanto maior forem os custos de arranque maior será o salto existente entre as unidades de geração.
- No que diz respeito ao problema dual de Lagrange, podemos concluir que para os exemplos apresentados não foi encontrada nenhuma solução óptima de afectação de unidades em termos de primal, ou seja, todos os exemplos apresentados tinham salto de dualidade.

7.2 - Direcções de investigação

Torna-se cada vez mais importante produzir energia ao menor preço possível. Assim sendo, a obtenção da afectação óptima de unidades é um problema de grande importância, sendo por isso motivo de grande interesse de investigação.

É possível estabelecer um conjunto de direcções de investigação, quer no âmbito desta dissertação, uma vez que a mesma não esgota os assuntos nela abordados, quer no que concerne a novas perspectivas, que a própria dissertação deixa antever, para futura investigação. Assim, salientam-se as seguintes direcções de investigação:

Pressupondo que o algoritmo proposto nesta dissertação para a actualização do valor do passo permite encontrar a solução do problema dual, e sabendo que é muito importante melhorar essa solução. Melhorar essa solução uma vez que essa solução não corresponde à solução do problema primal, e que para alguns casos não se trata de uma solução factível. O desenvolvimento de novos algoritmos é interessante, sendo que esse algoritmo teria como função encontrar um método que conseguisse estabelecer, de forma óptima, uma solução factível para o problema de coordenação térmica de curto prazo.

8 - Referências Bibliográficas

- [1] Habibollahzadeh, H., Bubenko, J.A., "Application of decomposition techniques to short-term operation planning of hydrothermal power system", IEEE Trans. Power Syst., Vol. PWRS-1, No. 1, pp. 41-47, February 1986.
- [2] Catalão, J.P, "Planeamento Operacional de Curto Prazo de Sistemas de Energia Hidroeléctricos", Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, Dezembro 2003.
- [3] Mariano, S.J.P.S., "Sistemas de Decisão Óptima em Coordenação Hidrotérmica para Planeamento Operacional", Dissertação de Doutoramento, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal, Dezembro 2000.
- [4] Mendes, V.M.F., "Planeamento da Gestão de Curto Prazo dos Recursos Produtores de um Sistema de Energia Eléctrica no Contexto da Operação", Dissertação de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, Fevereiro 1994.
- [5] Agência investimento e para o comércio externo de Portugal (AICEP), "Sector Eléctrico Nacional - 2008", <http://www.portugalglobal.pt>.
- [6] Entidade Reguladora do Sector Eléctrico, "Caracterização do Sector Eléctrico — Portugal Continental 2000", <http://www.erse.pt>.
- [7] S. K. Tong, S. M. Shahidehpour, Z. Ouyang, "A Heuristic Short-Term Unit Commitment", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 3, August 1991.
- [8] Snyder, W.L., Jr., Powell, H.D., Jr., Rayburn, J.C., "Dynamic programming approach to unit commitment", IEEE Trans. Power Syst., Vol. PWRS-2, No. 2, pp. 339-350, May 1987.
- [9] Ouyang, Z., Shahidehpour, S.M., "An intelligent dynamic programming for unit commitment application", IEEE Trans. Power Syst., Vol. 6, No. 3, pp. 1203-1209, August 1991.
- [10] A. I. Cohen, "Optimization-Based Methods for Operations Scheduling", Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 12, December 1987.
- [11] Kun-Yuan Huang, Hong-Tzer Yang, Ching-Lien Huang, "A New Thermal Unit Commitment Approach Using Constraint Logic Programming", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 13, No. 3, August 1998.

- [12] Virmani, S., Adrian, E.C., Imhof, K., Mukherjee, S., "Implementation of a Lagrangian relaxation based unit commitment problem", IEEE Trans. Power Syst., Vol. 4, No. 4, pp. 1373-1380, October 1989.
- [13] Zhuang, F., Galiana, F.D., "Towards a more rigorous and practical unit commitment by Lagrangian relaxation", IEEE Trans. Power Syst., Vol. 3, No. 2, pp. 763-773, May 1988.
- [14] Padhy, N.P., "Unit commitment – A bibliographical survey", IEEE Trans. Power Syst., Vol. 19, No. 2, pp. 1196-1205, May 2004.
- [15] Li, C.-A., Johnson, R.B., Svoboda, A.J., "A new unit commitment method", IEEE Trans. Power Syst., Vol. 12, No. 1, pp. 113-119, February 1997.
- [16] Svoboda, A.J., Tseng, C.-L., Li, C.-A., Johnson, R.B., "Short-term resource scheduling with ramp constraints", IEEE Trans. Power Syst., Vol. 12, No. 1, pp. 77-83, February 1997.
- [17] Cohen, A.I., Sherkat, V.R., "Optimization-based methods for operations scheduling", Proc. IEEE, Vol. 75, No. 12, pp. 1574-1591, December 1987.
- [18] L.A.F.M. Ferreira, T. Andersson, C.F. Imparato, T.E. Miller, C.K. Pang, A. Svoboda, and A.F. Vojdani, "Short-Term Resource Scheduling in Multi-Area Hydrothermal Power Systems", International Journal of Electric Power and Energy Systems, EPES-11, pp. 200-212, 1989.
- [19] J. A. Muckstadt, S. A. Koenig, "An Application of Lagrangean Relaxation to Scheduling in Power-Generation Systems", Oper. Res. Vol. 25, No. 3, May/June 1977, pp. 387-403.
- [20] Peter B. Luh and Daoyuan Zhang; Robert N. Tomastik; "An Algorithm for Solving the Dual Problem of Hydrothermal Scheduling", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 13, No. 2, May 1998.
- [21] Virmani, S.; Adrian, E.C.; Imhof, K.; Mukherjee, S.; "Implementation of a Lagrangian relaxation based unit commitment problem", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 4, Nov 1989.
- [22] Attaviriyanupap, P., Kita, H., Tanaka, E., Hasegawa, J., "A hybrid LR-EP for solving new profit-based UC problem under competitive environment", IEEE Trans. Power Syst., Vol. 18, No. 1, pp. 229-237, February 2003.
- [23] Li, T., Shahidehpour, M., "Price-based unit commitment: a case of Lagrangian relaxation versus mixed integer programming", IEEE Trans. Power Syst., Vol. 20, No. 4, pp. 2015-2025, November 2005.

[24] G. B. Sheblé, G. N. Fahd, “Unit Commitment Synopsis”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 1, February 1994.

[25] Ronald L. Rardin, “Optimization In Operations Research”, Prentice-Hall International, Inc., New Jersey, 1998.

[26] Mokhtar S. Bazaraa, C.M. Shetty, “Nonlinear Programming — Theory and Algorithms”, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1979.

Outras Referências

Mariano, S.J.P.S., “CONTROLO E OPERAÇÃO DE SISTEMAS DE ENERGIA ELÉCTRICA ”, Caderno de exercícios, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal.