



GEOMETRIA DESCRITIVA A

exercícios de aplicação

paralelismo de rectas e de planos

exercícios 1.2.3

perpendicularidade de rectas e de planos

exercícios 4.5.6

Paulo Chambino
Eugénia Morgado

11°E 8:30h
11°N 15:10h

paralelismo de rectas e de planos

exercícios 1.2.3

QUESTÕES

- 1 - O que são rectas paralelas?
- 2 - Quando é que uma recta é paralela a um plano?
- 3 - Quando é que um plano é paralelo a uma recta?
- 4 - Quando é que dois planos são paralelos?
- 5 - Rectas obliquas paralelas ao $\beta_{2,4}$ têm as suas projecções paralelas entre si? Justifica.
- 6 - Quando é que uma recta é paralela ao $\beta_{1,3}$?

Exercício I: PARALELISMO DE RECTAS E DE PLANOS

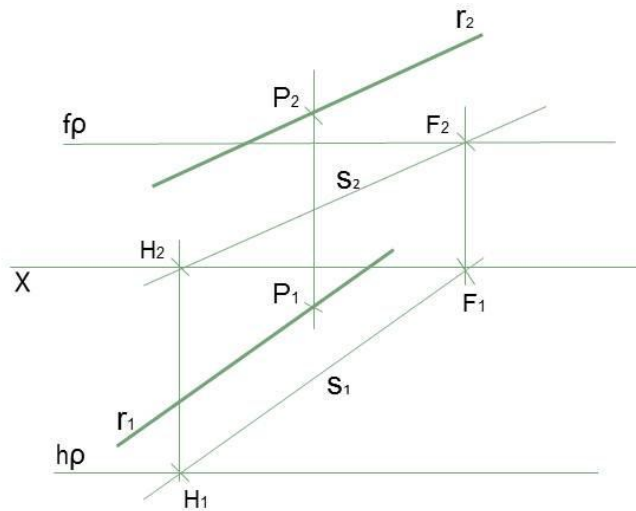
Recta paralela a um plano

São dados um plano de rampa ρ e um ponto \mathbf{P} (2;4). Os traços horizontal e frontal de ρ têm, respectivamente, 5 cm de afastamento e 3 cm de cota.

Desenhe as projecções de uma recta \mathbf{r} , paralela a ρ , sabendo que \mathbf{r} passa por \mathbf{P} e sua projecção frontal faz um ângulo de 30° (a.d.) com o eixo X .

RESOLUÇÃO

Exercício I



RESOLUÇÃO . passo a passo

Exercício I

1. Representaram-se o plano p , pelos seus traços, e o ponto P , pelas suas projecções, em função dos dados.
2. Desenhou-se a projecção frontal da recta $r - r_2$ - passando por P_2 e fazendo, com o eixo X , o ângulo pedido.
3. Para a recta r ser paralela ao plano p , terá de ser paralela a uma recta do plano. Para tal, recorreu-se a uma recta auxiliar s , pertencente ao plano e garantindo que s seja paralela à recta $r - s_2$ é paralela a r_2 . A recta s está definida pelos seus traços (condição para que uma recta pertença a um plano).
4. Conduziu-se, por P_1 , a projecção horizontal da recta r (r_1), paralela a s_1 . A recta r é paralela ao plano p , pois é paralela a uma recta do plano (a recta s).

RESOLUÇÃO

Exercício 2

1. Representaram-se a recta m (ponto M) e o ponto A , pelas respectivas projecções, em função dos dados.
2. Para que o plano pedido contenha o ponto A , o ponto A tem de pertencer a uma recta do plano. Por outro lado, para que o plano α seja paralelo à recta m , tem de conter uma recta paralela à recta m . Assim, há que conduzir, por A , uma recta paralela à recta m , que será uma recta do plano α – a recta r .
3. Determinaram-se os traços da recta r , pois os traços da recta têm de estar sobre os traços homónimos do plano (condição para que uma recta pertença a um plano).
4. Pelo traço horizontal de r conduziu-se $h\alpha$, com o ângulo pretendido ($h\alpha$ está definido por um ponto e uma direcção) – $f\alpha$ é concorrente com $h\alpha$ sobre o eixo X e contém F , o traço frontal de r ($f\alpha$ está definido por dois pontos). O plano α é paralelo à recta m , pois contém uma recta paralela a m (a recta r). O plano α contém o ponto A , pois A pertence a uma recta do plano (a recta r).

Exercício 3: PARALELISMO ENTRE PLANOS

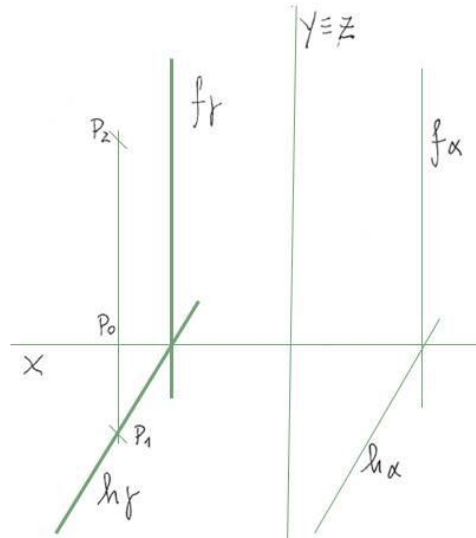
É dado um plano α , vertical, que corta o eixo X num ponto com -3 de abcissa e faz, com o Plano Frontal de Projecção, um diedro de 60° (a.e.).

É dado, também, um ponto P (4;2;5).

Determine os traços de um plano γ , paralelo a α e passando por P .

RESOLUÇÃO

Exercício 3



RESOLUÇÃO

Exercício 3

1. Representaram-se o plano α , pelos seus traços, e o ponto P , pelas suas projecções, em função dos dados.
2. Para que o plano γ seja paralelo ao plano α , o plano γ tem de ter os seus traços paralelos aos traços homónimos do plano α .
3. Uma vez que se trata de planos projectantes horizontais, para que o plano γ contenha o ponto P , basta que h_γ passe por P_1 – um plano projectante horizontal projecta todas as suas rectas e pontos no seu traço horizontal, e o plano γ é projectante horizontal.
4. Por P_1 conduziu-se h_γ , paralelo a h_α – f_γ é vertical (é paralelo a f_α) e é concorrente com h_γ no eixo X .



perpendicularidade de rectas e de planos

exercícios 4 . 5 . 6



QUESTÕES

- 7 - O que são rectas perpendiculares?
- 8 - Quando é que uma recta é perpendicular a um plano?
- 9 - Quando é que um plano é perpendicular a uma recta?
- 10 - Quando é que dois planos são perpendiculares?
- 11 - Quais são os planos perpendiculares a $\beta_{1,3}$?

Exercício 4: PERPENDICULARIDADE DE RECTAS E DE PLANOS

Recta perpendicular a um plano

É dado um plano α , oblíquo, definido pelos seus traços que fazem com o eixo do X, ângulos de 45° (a.e.) e 60° (a.e.), respectivamente o traço horizontal e o traço frontal. O plano α corta o eixo do X num ponto com -3 de abcissa. É dado, também, um ponto $P(0;3;4)$.

- Determine as projecções da recta p , perpendicular ao plano e que passa por P .
- Determine as projecções do ponto de intersecção da recta p com o plano α .

RESOLUÇÃO • passo a passo

Exercício 4

a) Em primeiro lugar representaram-se o plano α , pelos seus traços, e o ponto P , pelas suas projecções, em função dos dados. Determinação das projecções da recta p (*);

(*) Em primeiro lugar representaram-se o plano α , pelos seus traços, e o ponto P , pelas suas projecções, em função dos dados. Uma recta ortogonal a um plano tem de ser ortogonal a duas rectas concorrentes desse plano. Os traços do plano α são duas rectas concorrentes do plano – assim, basta fazer com que a recta p seja simultaneamente ortogonal aos traços do plano, para garantir que a recta p seja ortogonal ao plano. O traço horizontal do plano, $h\alpha$, é uma recta horizontal (de nível) do plano, pelo que a ortogonalidade é directa em projecção horizontal – por $P1$ conduziu-se $p1$, perpendicular a $h\alpha$. O traço frontal do plano, $f\alpha$, é uma recta frontal (de frente) do plano, pelo que a ortogonalidade é directa em projecção frontal – por $P2$ conduziu-se $p2$, perpendicular a $f\alpha$. A recta p é ortogonal ao plano, pois é ortogonal a duas rectas concorrentes do plano – os traços do plano. Note que as projecções da recta p são perpendiculares aos traços homónimos do plano, o que se verificou igualmente nas situações anteriores.

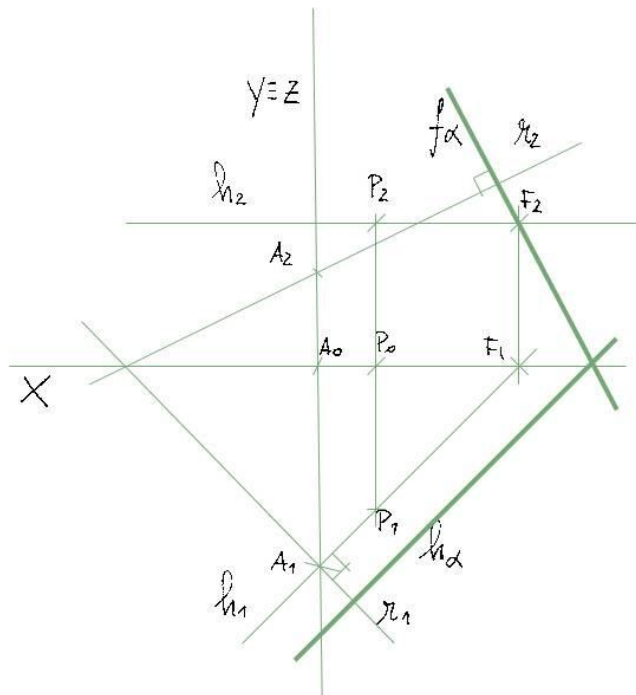
b) Para determinar o ponto de intersecção da recta p com o plano α , e uma vez que nem a recta nem o plano são projectantes, há que recorrer ao método geral da intersecção de rectas com planos.

Assim, tem-se:

- por p conduziu-se um plano auxiliar (o plano γ , que é um plano vertical – é o plano projectante horizontal da recta p);
- determinou-se a recta i , a recta de intersecção dos dois planos (a recta i está definida pelos seus traços, pois trata-se do caso geral da intersecção entre planos);
- o ponto de concorrência da recta i com a recta p (o ponto l) é o ponto de intersecção da recta p com o plano α .

RESOLUÇÃO

Exercício 5



RESOLUÇÃO • passo a passo

Exercício 5

1. Em primeiro lugar representaram-se a recta r e o ponto P , pelas suas projecções, em função dos dados.
2. Em seguida, para que o plano α seja ortogonal à recta r ; o plano α tem de conter duas rectas concorrentes ortogonais à recta r (duas «famílias» de rectas ortogonais à recta r) – essas rectas podem ser os seus traços. Por outro lado, para que o plano α contenha o ponto P , P terá de pertencer a uma recta do plano α .
3. Assim, por P conduziu-se uma recta h , horizontal (de nível), pertencente ao plano α – h é ortogonal à recta r , pois $h1$ é perpendicular a $r1$ (a perpendicularidade é directa em projecção horizontal). Já temos uma «família» de rectas do plano α que é ortogonal à recta r (o traço horizontal do plano é também uma recta horizontal, que é paralela à recta h).
4. Necessitamos de uma outra, que terá de ser a «família» das rectas frontais (de frente) de α .
5. Por F , o traço frontal da recta h , conduziu-se $f\alpha$, perpendicular a $r2$ – $f\alpha$ é uma recta frontal (de frente) do plano α e é ortogonal à recta r , pois a ortogonalidade verifica-se directamente em projecção frontal.
6. Em seguida, desenhou-se $h\alpha$, que é concorrente com $f\alpha$ num ponto do eixo X e é perpendicular a $r1$ (e perpendicular a $r1$).
7. O plano α é ortogonal à recta r (contém duas rectas concorrentes ortogonais à recta r) e passa pelo ponto P , pois P pertence a uma recta do plano α (a recta h).
8. Note que se tem que os traços do plano α são perpendiculares às projecções homónimas da recta r .

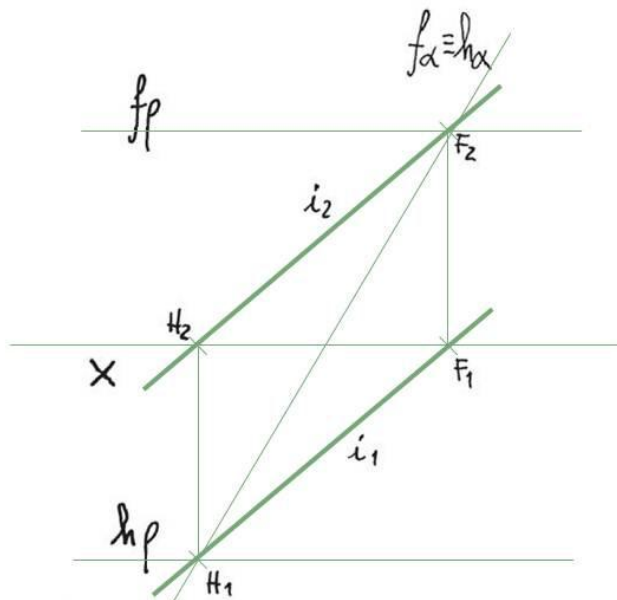
Exercício 6: PERPENDICULARIDADE DE RECTAS E DE PLANOS
Planos perpendiculares

Determine as projecções da recta i , a recta de intersecção de dois planos α e ρ , sendo dados:

- α é oblíquo, é perpendicular a $\beta_{2,4}$ e o seu traço frontal faz um ângulo de 60° (a.d.) com o eixo X;
- ρ é de rampa, é perpendicular a $\beta_{1,3}$ e o seu traço horizontal tem 4cm de afastamento.

RESOLUÇÃO

Exercício 6



RESOLUÇÃO • passo a passo

Exercício 6

1. Representaram-se os planos α e ρ , pelos respectivos traços, em função dos dados.
2. O plano α é ortogonal ao $\beta 2/4$, pelo que tem os seus traços coincidentes.
3. O plano ρ é ortogonal ao $\beta 1/3$, pelo que tem os seus traços simétricos em relação ao eixo $X - f\rho$ tem 4 cm de cota.
4. Determinaram-se as projecções da recta i , a recta de intersecção dos dois planos – a recta i fica definida por dois pontos, que são os seus traços nos planos de projecção (trata-se do caso geral da intersecção entre planos).