



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Análise do Consumo de Combustível em Navegação Aérea por Waypoints em 4D

Márcio Filipe Pereira Fernandes

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Aeronáutica
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

Covilhã, Setembro de 2012

Resumo

O problema do aumento do preço dos combustíveis tem levado as companhias aéreas a procurar novos métodos de navegação e novas formas de otimizar o consumo de combustível das suas aeronaves. Durante as diferentes fases do voo, existem vários fatores que influenciam direta e indiretamente o consumo total de combustível, tendo estes por isso que ser controlados e otimizados por todos os operadores de aeronaves. Neste trabalho é feita uma análise do consumo de combustível para as fases de subida, cruzeiro e descida, com recurso a um método de navegação 4D definida por waypoints. Este tipo de navegação consiste em percorrer uma sequência de pontos pré-definidos num determinado tempo do voo, que, por sua vez, definem a trajetória do voo. Deste modo, nesta dissertação é analisado um conjunto de diferentes trajetórias para um dado destino, com o objetivo de se avaliar qual delas permite um menor consumo total de combustível. O algoritmo utilizado para a navegação definida por waypoints 4D foi fornecido nas aulas de Otimização e Controlo de Trajetórias. As equações de navegação foram derivadas através do algoritmo de *Butcher* para sistemas controlados e a sua implementação foi feita no programa *Matlab*[®].

Da análise feita para a fase de subida de um voo comercial de médio curso, verifica-se que é possível poupar cerca de 10,8% de combustível consumido em perfis de ângulo de subida superior. Ainda assim é também possível diminuir 5,8% com a aplicação de uma razão de subida máxima e variável. Para voos de pequeno curso, onde o tempo de voo não é suficiente para atingir altitudes elevadas de cruzeiro, verifica-se uma redução de 8,4% de combustível consumido com o prolongamento da fase de subida até altitudes máximas de cruzeiro possíveis. Durante a descida um perfil baseado numa razão de descida máxima permite uma diminuição do consumo de combustível significativa. Comparativamente com outros métodos baseados na otimização de funções diferenciáveis, os métodos utilizados neste trabalho requerem um menor esforço computacional, apresentando no entanto uma boa precisão de resultados finais, podendo estes serem utilizados em diversas aplicações no que respeita à gestão de trajetórias das companhias aéreas.

O estudo realizado permite quantificar o consumo de combustível para as diferentes fases de um voo comercial, no qual se verifica que as fases de subida e descida têm um maior impacto no consumo de combustível. Assim, podemos concluir que um bom planeamento e uma boa escolha das trajetórias do voo, principalmente nestas fases, permitem uma diminuição significativa nos custos relacionados com o consumo de combustível das aeronaves.

Palavras-chave

Poupança de Combustível; *Cost Index*; Controlo de Trajetórias; Navegação por Waypoint em 4D; Redução do Consumo de Combustível.

Abstract

The problem of rising fuel prices has led airlines to search for new methods of navigation and further ways to optimize the fuel consumption of its aircraft. During the various phases of flight, there are several factors that influence directly and indirectly, the total fuel consumption, and so they must be controlled and optimized by all aircraft operators. In this work an analysis of the fuel consumption during the climb, cruise and descent phases is made using a 4D Waypoint Navigation method. This type of navigation consists of traveling through a sequence of predefined points in a given time of flight, which in turn define the trajectory of the flight. Therefore, a set of different possible paths to a given destination are analyzed, in order to assess which of these provides lower total fuel consumption. The algorithm used for 4D Waypoint Navigation was provided in class of Trajectory Optimization and Control. The navigation equations were derived by Butcher's algorithm for controlled systems, and their implementation was made in *Matlab*[®].

From the performance analysis of the initial climb phase of a commercial medium haul flight, it is possible to save 10,8% of the fuel consumed by using a higher flight path angle during the climb. It is also possible to save 5,8% of fuel with the application of a maximum and variable climb flight path angle. For a short haul flight, where the time of the flight isn't enough to reach higher flight level, the fuel consumption can be reduced by 8,5% with the extension of the climb phase until the reach of the higher possible flight level. During the descent, the use of a maximum descent profile allows a significant decrease in the fuel consumption. Comparatively to the others methods based on the differential functions optimization, the methods used in this work require a lower computational effort, presenting at the same time a good result precision, which can be used in diverse applications in regard to the airlines trajectory management.

This study allows the quantification of fuel consumption for different phases of a commercial flight, in which it's verified that the climb and descent phases have the higher impact in the fuel consumption. Therefore, a good planning and choice of the flight trajectories, especially in these phases, allows a significant decrease in the cost related to the fuel consumption of the aircrafts.

Keywords

Fuel Saving; Cost Index; Trajectories Control; 4D Waypoint Navigation; Fuel Consumption Reduction.

Agradecimentos

Os mais calorosos agradecimentos ao meu Pai e aos meus irmãos por todo o apoio que me têm dado e à minha Mãe que sempre fez tudo para ver os sonhos dos seus filhos realizados. Gostaria de agradecer à Bela pelo fantástico acompanhamento que tem feito, principalmente por todo o apoio dado à minha irmã mais nova. Agradeço à Diana pela sua presença constante na minha vida e à sua Mãe, Pai, Irmã e Cunhado por tudo o que têm feito por nós.

Devo um especial agradecimento ao meu orientador Prof. Doutor Kouamana Bousson pelo apoio dado na realização desta Dissertação. Gostaria de agradecer aos meus amigos de curso que sempre me apoiaram nos momentos mais difíceis. Queria também agradecer ao fantástico grupo de amigos da Desertuna que ao longo destes anos, com toda a alegria, trabalho e espírito de equipa, me ensinaram muito do que sei hoje.

Índice

Resumo	iii
Palavras-chave	iii
Abstract	v
Keywords	v
Agradecimentos	vii
Lista de Figuras.....	xi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Acrónimos	xv
Lista de Símbolos.....	xvii
Capítulo I - Introdução	1
1.1. Desenvolvimento Histórico da Otimização do Consumo de Combustível	1
1.2. Como Otimizar o Consumo de Combustível nas Diferentes Fase do Voo	10
1.2.1. Procedimentos antes do voo	10
1.2.2. Procedimentos durante o voo	13
1.2.3. Definição e determinação do CI	21
1.3. Objetivos do Trabalho	24
1.4. Estrutura da Dissertação	26
Capítulo II - Modelação do Problema	27
2.1. Introdução à Navegação 4D.....	27
2.2. Modelação do Problema de Navegação 4D.....	27
2.2.1. Equações da Dinâmica de Navegação	28
2.2.2. Restrições do voo.....	28
2.2.3. Navegação Waypoints 4D.....	29
2.2.4. Otimização do Consumo de Combustível	30
Capítulo III - Método para Análise do Consumo de Combustível	33
3.1. Introdução	33
3.2. Algoritmo de Navegação 4D	33
3.2.1. Cálculo da Velocidade V_{ref}	34
3.2.2. Cálculo do Fluxo de Combustível mf	37
3.2.3. Cálculo do Ângulo da Trajetória γ_{ref}	38
3.2.4. Cálculo do Rumo ψ_{ref}	40
3.2.5. Sistema de Orientação	42
3.3. Estrutura do Programa	44
Capítulo IV - Simulação e Resultados	45
4.1. Parte I - Subida	45
4.1.1. Análise de Trajetórias de Subida	45
4.1.2. Otimização da Trajetória de Subida	47

4.2. Parte II - Descida	49
4.3. Parte III - Cruzeiro	52
Capítulo V - Conclusão	55
5.1. Conclusão	55
Referências.....	57
Anexos.....	59
Anexo A - Métodos de Otimização de Funções Diferenciáveis	61
Anexo B - Dados de Simulação	69
Anexo C - Artigo: “Commercial Aircraft Fuel Consumption Analysis for 4D Navigation Trajectories”	73

Lista de Figuras

FIGURA I.1: GRÁFICO DA VARIAÇÃO DO CONSUMO ESPECÍFICO SFC E DO CAUDAL DE COMBUSTÍVEL COM A TRAÇÃO, PARA CONDIÇÕES TÍPICAS DE CRUZEIRO [1].	1
FIGURA I.2: GRÁFICO DOS VALORES DO NÚMERO DE MACH OTIMIZADOS EM FUNÇÃO DO TEMPO E DO COMBUSTÍVEL CONSUMIDO PARA UMA MESMA DISTÂNCIA PERCORRIDA [3].	2
FIGURA I.3: GRÁFICO 2D DA TRAJETÓRIA COMPLETA COM VIRAGEM [4].	3
FIGURA I.4: GRÁFICO DO FLUXO DE COMBUSTÍVEL PARA A OTIMIZAÇÃO GLOBAL DE TRAJETÓRIA [9].	6
FIGURA I.5: GRÁFICO DO CAUDAL DE COMBUSTÍVEL COM A VARIAÇÃO DA ALTITUDE PARA DIFERENTES VOOS [15].	8
FIGURA I.6: ALCANCE ESPECÍFICO EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO DO CG [17].	11
FIGURA I.7: DIFERENTES PERFIS DE SUBIDA [18].	14
FIGURA I.8: CONFIGURAÇÃO TÍPICA DE SUBIDA PARA UMA AERONAVE COMERCIAL [17].	15
FIGURA I.9: CONFIGURAÇÃO <i>STEPPED CLIMB</i> [17].	16
FIGURA I.10: INFLUÊNCIA DOS VENTOS ATMOSFÉRICOS NO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL E TEMPO DE VIAGEM [17].	17
FIGURA I.11: PERFIL DE DESCIDA [18].	18
FIGURA I.12: EXEMPLO DE UM CIRCUITO DE ESPERA [20].	19
FIGURA I.13: VELOCIDADE ÓTIMA PARA A FASE DE ESPERA [17].	20
FIGURA I.14: DIAGRAMA DE RELAÇÃO ENTRE O CI MÁXIMO E MÍNIMO [17].	22
FIGURA I.15: RELAÇÃO ENTRE OS CUSTOS DE TEMPO, COMBUSTÍVEL E DOC COM O NÚMERO DE MACH [17].	23
FIGURA I.16: RELAÇÃO ENTRE O CI E OS DOC [19].	23
FIGURA I.17: TRAJETÓRIAS DE SUBIDA A ANALISAR.	24
FIGURA I.18: TRAJETÓRIAS DE DESCIDA A ANALISAR.	25
FIGURA I.19: TRAJETÓRIAS DE CRUZEIRO A ANALISAR.	25
FIGURA II.1: REPRESENTAÇÃO DO DIAGRAMA DE FORÇAS A ATUAR NA AERONAVE E VARIÁVEIS DE ESTADO PARA A NAVEGAÇÃO 4D.	27
FIGURA II.2: TRAJETÓRIA DEFINIDA POR WAYPOINTS EM 4D.	29
FIGURA III.1: DIAGRAMA DA ESTRUTURA DO PROGRAMA DE ANÁLISE DO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL PARA NAVEGAÇÃO WAYPOINT 4D.	44
FIGURA IV.1: POSIÇÃO E CONTROLO DA AERONAVE PARA A ANÁLISE DOS PERFIS DE SUBIDA.	45
FIGURA IV.2: TRAÇÃO, ACELERAÇÃO E CONSUMO DE COMBUSTÍVEL PARA A ANÁLISE DOS PERFIS DE SUBIDA.	46

FIGURA IV.3: POSIÇÃO E CONTROLO DA AERONAVE PARA A OTIMIZAÇÃO DE SUBIDA.	47
FIGURA IV.4: REPRESENTAÇÃO DO VOO 4 E VOO 4 OTIMIZADO EM GOOGLE™ EARTH [24].	48
FIGURA IV.5: TRAÇÃO, ACELERAÇÃO E CONSUMO DE COMBUSTÍVEL PARA A OTIMIZAÇÃO DE SUBIDA.	48
FIGURA IV.6: POSIÇÃO E CONTROLO DA AERONAVE PARA A ANÁLISE DOS PERFIS DE DESCIDA.	50
FIGURA IV.7: TRAÇÃO, ACELERAÇÃO E CONSUMO DE COMBUSTÍVEL PARA A ANÁLISE DOS PERFIS DE DESCIDA.	50
FIGURA IV.8: POSIÇÃO E CONTROLO DA AERONAVE PARA A ANÁLISE DAS ALTITUDES DE CRUZEIRO.	52
FIGURA IV.9: REPRESENTAÇÃO DO VOO 9 EM GOOGLE™ EARTH [24].	52
FIGURA IV.10: TRAÇÃO, ACELERAÇÃO E CONSUMO DE COMBUSTÍVEL PARA A ANÁLISE DAS ALTITUDES DE CRUZEIRO.	53

Lista de Tabelas

TABELA IV.1: ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA OS DIFERENTES PERFIS DE SUBIDA.	46
TABELA IV.2: ANÁLISE DOS RESULTADOS DO VOO 4 E VOO 4 OTIMIZADO.	49
TABELA IV.3: ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA OS DIFERENTES PERFIS DE DESCIDA.	51
TABELA IV.4: ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA OS DIFERENTES PERFIS DE CRUZEIRO.	53
TABELA IV.5: ANÁLISE DOS RESULTADOS DAS DIFERENTES FASES DO VOO 9.	54

Lista de Acrónimos

APU	- <i>Auxiliary Power Unit</i>
ATC	- <i>Air Traffic Control</i>
BFGS	- <i>Broyden Fletcher Goldfarb Shanno</i>
CG	- <i>Center of Gravity</i>
CI	- <i>Cost Index</i>
DMSM	- <i>Direct Multiple Shooting Method</i>
DOC	- <i>Direct Operating Cost</i>
DP	- <i>Dynamic Programming</i>
ETOPS	- <i>Extended Twin Engine Operations</i>
FMGS	- <i>Flight Management and Guidance System</i>
FMS	- <i>Flight Management System</i>
FPS	- <i>Flight Planning System</i>
GA	- <i>Genetic Algorithm</i>
IAS	- <i>Indicated Air Speed</i>
ICAO	- <i>International Civil Aviation Organization</i>
IMSM	- <i>Indirect Multiple Shooting Method</i>
KKT	- <i>Karush Kuhn Tucker</i>
SDP	- <i>Soft Dynamic Programming</i>
SFC	- <i>Specific Fuel Consumption</i>
SR	- <i>Specific Range</i>
TAS	- <i>True Air Speed</i>
TOD	- <i>Top Of Descent</i>

Lista de Símbolos

Símbolo	Definição	Unidade
a	Aceleração da trajetória do voo	[m/s ²]
a_γ	Aceleração do ângulo de trajetória	[deg/s ²]
a_ψ	Aceleração do rumo	[deg/s ²]
C_F	Custo de combustível	[€/kg]
C_T	Custo relacionado com o tempo de voo	[€/s]
C_C	Custos fixos de operação	[€]
C_L	Coefficiente de sustentação	
C_D	Coefficiente de resistência aerodinâmica	
c	Consumo específico	[kg/Ns]
D	Força de resistência aerodinâmica	[N]
d_γ	Taxa do ângulo de trajetória do voo	[deg/s]
d_ψ	Taxa de rumo	[deg/s]
dt	Passo de Simulação	[s]
δ_T	Posição do acelerador	
e	Excentricidade da Terra	
φ	Latitude	[deg]
g	Aceleração gravítica da Terra	[m/s ²]
γ	Ângulo de Trajetória	[deg]
h	Altitude, em relação ao nível do mar	[m]
L	Força de sustentação aerodinâmica	[N]
λ	Longitude	[deg]
m	Massa da aeronave	[kg]
m_f	Massa de combustível consumido	[kg]
$\dot{m}_f, m_{f\text{low}}$	Fluxo de combustível	[kg/s]
ψ	Rumo	[deg]
R_e	Raio equatorial da Terra	[m]
ρ	Massa específica do ar	[kg/m ³]

σ_k	Raio do waypoint k	[m]
T	Tração	[N]
T_K	Temperatura do ar	[K]
t_i	Tempo inicial	[s]
t_f	Tempo final	[s]
t_k	Tempo de chegada ao waypoint k	[s]
V	Velocidade	[m/s]
W	Peso da aeronave	[N]
x, y, z	Coordenadas Geocêntricas	[m]

Capítulo I - Introdução

1.1. Desenvolvimento Histórico da Otimização do Consumo de Combustível

Na década de 70 começou a sentir-se o aumento contínuo dos custos operacionais das companhias aéreas devido ao aumento do preço do combustível. Este fator fez com que surgisse um interesse crescente em criar métodos eficazes para a otimização de trajetórias nas fases de subida e descida das aeronaves. Lee e Erzberger [1] verificaram que a avaliação de trajetórias ótimas com restrições por parte dos operadores das companhias aéreas manifestou um interesse na adição de restrições para a tração máxima e mínima admitidas nas fases de subida e descida, respetivamente. Considerando uma fase de cruzeiro típica com velocidade e altitude constantes, a Figura I.1 representa a variação do consumo específico (S_{FC} - *Specific Fuel Consumption*) e caudal de combustível com a tração.

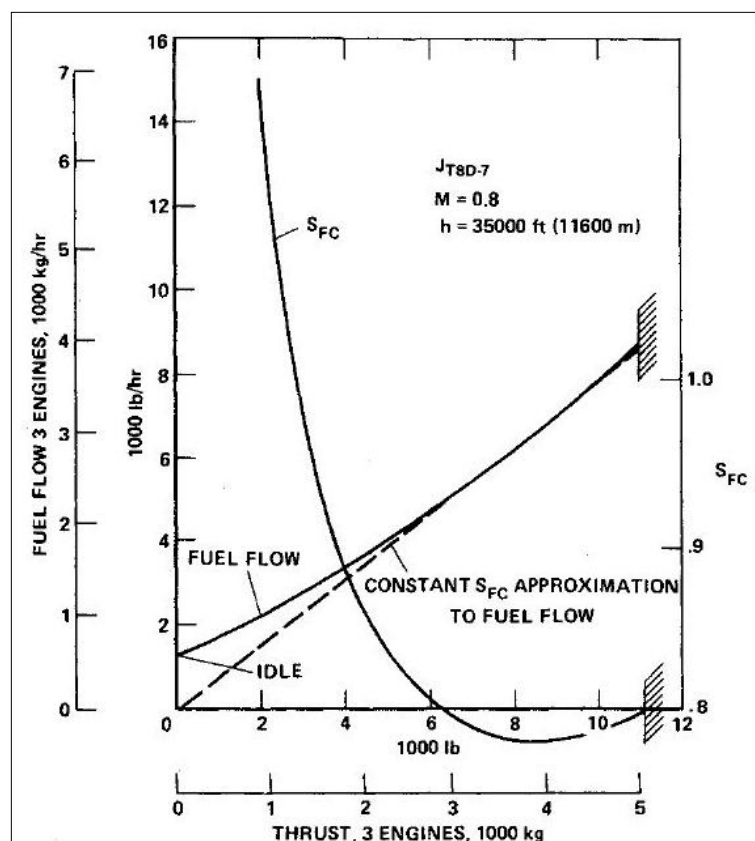


Figura I.1: Gráfico da variação do consumo específico S_{FC} e do caudal de combustível com a tração, para condições típicas de cruzeiro [1].

O problema consistia em saber de que forma as condições de restrição para a tração, relacionadas com as características aerodinâmicas e de propulsão, poderiam afetar a estrutura de uma trajetória, quais as condições de tração que poderiam levar a um

procedimento de subida e descida ótimo, e em que medida a adição de restrições de tração poderiam afetar o desempenho da aeronave. Utilizando uma abordagem baseada na teoria do controlo ótimo, Lee e Erzberger [1], concluíram que quando se considera o consumo específico independente da tração a estrutura da trajetória e o desempenho da aeronave não sofrem alterações para os dois diferentes casos. No entanto, quando se considera a dependência do consumo específico a estrutura da trajetória e o desempenho da aeronave são afetados.

Mais tarde, Kreindler e Neuman [2] desenvolveram um trabalho sobre a minimização do consumo de combustível para um voo de altitude constante, considerando a velocidade como variável de estado. As restrições e resultados numéricos foram feitos para uma aeronave de transporte comercial na área terminal do voo. Após a abordagem feita através do problema dos pontos de *Darboux*, concluíram que este método deveria ser melhor estudado para aplicação nesta área. Estes estudos mostraram apenas que a alteração da tração pode influenciar na otimização do consumo de combustível, contudo até ao momento não tinha surgido a ideia de relacionar os custos diretos de operação (DOC - *Direct Operating Cost*) com o consumo de combustível e com os atrasos de chegada.

O problema dos atrasos nos aeroportos acarretou custos significativos às companhias aéreas, principalmente devido ao consumo excessivo de combustível. Foi então que surgiu a navegação 4D de forma a criar restrição de tempo durante a navegação aérea. Burrows [3], nos anos 80, fez uma análise relacionada com este problema, na qual quantificou a influência de chegada ao aeroporto, tendo um tempo fixo ou não, na otimização do consumo de combustível. Na Figura I.2 é representada a variação do consumo total de combustível com o tempo total do voo, para um percurso de 277,8 km.

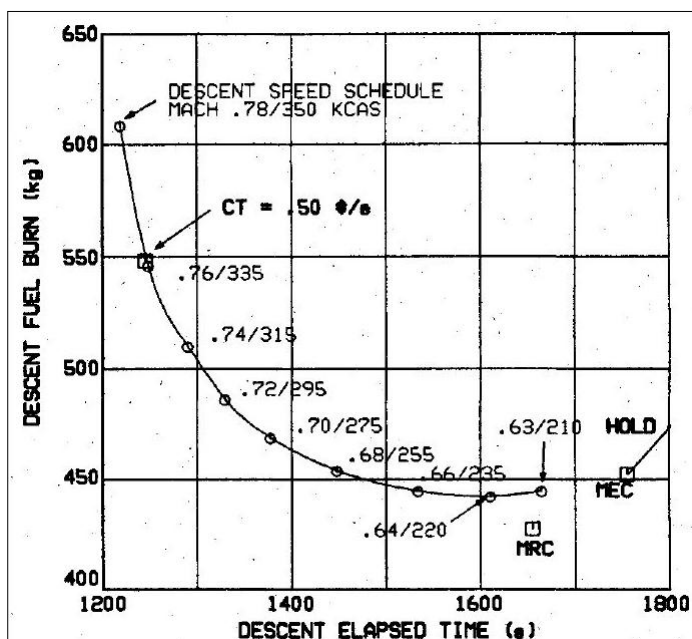


Figura I.2: Gráfico dos valores do número de Mach otimizados em função do tempo e do combustível consumido para uma mesma distância percorrida [3].

Burrows [3] comparou os resultados para diferentes modelos de aeronaves de longo e médio curso e verificou que seria importante ter em conta os custos relativos ao atraso de chegada nos custos diretos de operação das companhias aéreas.

Um dos estudos que deu início à abordagem do conceito de otimização de trajetórias para a otimização do consumo de combustível foi feito por Neuman e Kreindler [4]. Neste estudo, de forma a completar estudos em que só se focavam no voo longitudinal, Neuman e Kreindler criaram um algoritmo capaz de calcular o consumo mínimo de combustível durante a fase de subida de 2000 pés até 10000 pés, para voos de longo curso. Na definição do problema derivaram as equações da dinâmica do sistema considerando pequenos ângulos de ataque e de trajetória, viragens coordenadas, ausência de ventos atmosféricos e consideraram ainda que o peso da aeronave permanecia constante, ou seja, não sendo insignificativo a diminuição do peso total da aeronave devido ao consumo de combustível. O vetor de controlo tinha assumido a tração, o ângulo de viragem e o ângulo de trajetória. A altitude de aproximação é considerada acima dos 2000 pés e as velocidades de subida, aproximação e aterragem são definidas para uma aeronave de transporte comercial a jato. Neuman e Kreindler concluíram que as trajetórias combinadas com o voo latero-direcional e longitudinal eram ótimas em termos de consumo de combustível quando nestas existia pouca variação da altitude. A figura 1.3 representa uma trajetória completa, considerando que as fases de viragem são realizadas a uma altitude constante.

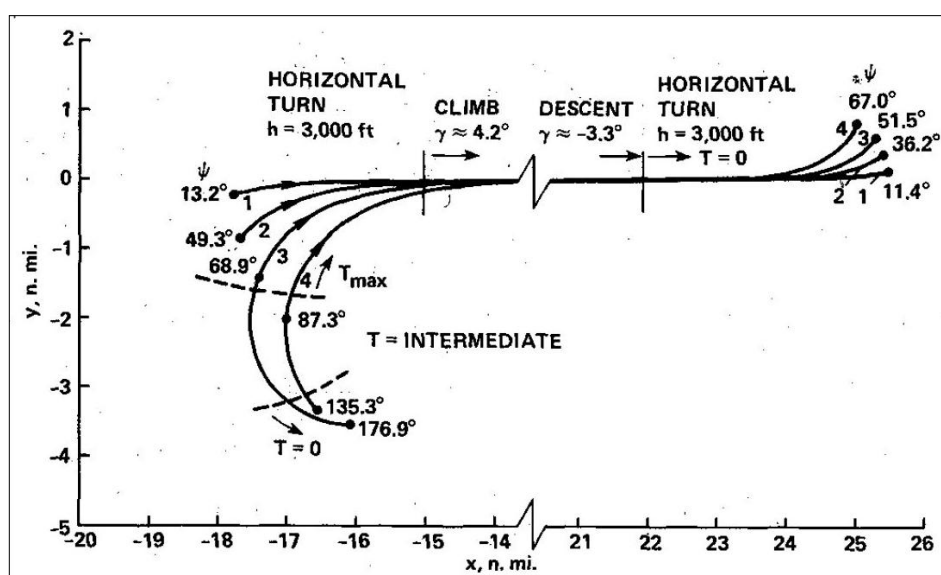


Figura 1.3: Gráfico 2D da trajetória completa com viragem [4].

Constatarem também que não existe um estado de voo constante para trajetórias de curta distância quando o ângulo de trajetória é zero e a tração é igual à força de resistência aerodinâmica. Como conclusão final Neuman e Kreindler [4] verificaram que, pelo facto da quantidade de combustível que se pode otimizar durante a fase de subida e de descida, na área terminal do voo, ser pequena comparativamente com o combustível gasto durante o

cruzeiro, torna-se importante ter estes custos em conta na projeção dos sistemas de controlo dos custos diretos de operação das companhias aéreas.

Mais tarde, Oberle, Grimm e Well [5], tendo em conta a variação do peso total da aeronave devido ao consumo de combustível, focaram-se neste problema e procuraram quantificar a importância que se deveria ter com esta diminuição de peso. Aplicando a teoria do controlo ótimo a restrições de condições periódicas, os autores tiveram em conta os dois diferentes problemas, o primeiro considerando o peso constante o segundo considerando a diminuição do peso devido ao consumo de combustível. O objetivo do trabalho consistiu em minimizar o consumo de combustível, numa determinada trajetória, de forma a comparar com as condições de voo estacionário e com o efeito da diminuição do peso da aeronave. Durante o processo de resolução numérica foi usado o método DMSM - *Direct Multiple Shooting Method*. Este método, usado para otimização de problemas com restrições de limites apenas no domínio de estados, consiste basicamente em dividir o intervalo em que as soluções são procuradas em vários intervalos menores. Por ser bastante iterativo, o DMSM torna-se pesado no processamento de sistemas como o dos problemas de otimização de trajetórias 4D. Também tendo por base este método e com a adição dos métodos de controlo contínuo e controlo por impulso, Redmond e Silverberg [6] abordaram o controlo ótimo para sistemas dinâmicos baseados em três funções de custo diferentes. As estratégias de controlo foram aplicadas a um problema de supressão de vibrações onde a energia gasta para amortecer o sistema foi comparada ao consumo de combustível. Os resultados indicaram que o controlo por impulso permite uma redução significativa no consumo de combustível comparado com os restantes métodos. No entanto, este método quando aplicado a sistemas de ordem superior torna-se bastante complicado de resolver com precisão. O método utilizado neste trabalho torna-se simples para compreender quais os métodos mais apropriados para resolver problemas de otimização com várias funções de custo, contudo não aborda a otimização do consumo de combustível para a navegação 4D. Mais tarde, começaram a surgir novos métodos numéricos para a resolução de problemas de otimização de trajetória e de controlo ótimo baseados no método da transcrição direta que combinam algoritmos de programação não-linear com a discretização das dinâmicas da trajetória. Betts e Cramer [7] aplicaram o método da transcrição direta no projeto de uma trajetória ótima para uma aeronave comercial, tendo em conta restrições de realismo durante o percurso da trajetória. O objetivo era obter resultados que cumprissem as normas de segurança da aviação civil. O tratamento dos dados da aerodinâmica e propulsão da aeronave foram feitos usando um tensor de produto de splines cúbicas, que são investigadas para duas diferentes aproximações, através de interpolação de dados e da montagem dos mínimos quadrados de forma, tendo em conta as restrições de viragem. Este método pode ser rápido devido à aproximação por splines cúbicas, mas isto é apenas uma aproximação e para uma abordagem mais exata a necessidade de uma contínua derivação pode complicar a obtenção de resultados.

Nos anos 90 começaram a ser impostas, pelos sistemas de controlo de tráfego aéreo, medidas que permitiam aumentar o nível de segurança e também melhorar a gestão do tráfego aéreo. Esta mudança no paradigma da aviação fez com que se apostasse mais nos sistemas de gestão de voo a bordo da aeronave, principalmente a implementação da navegação 4D com base nas restrições dos serviços de controlo de tráfego aéreo (ATC - *Air Traffic Control*). Até ao momento estas restrições consistiam em informar durante a navegação a altitude e velocidade que deveria ter uma aeronave num determinado ponto da trajetória, mas com a implementação da navegação 4D começou a ser também restrição a hora de chegada. Desta forma, tornou-se mais fácil otimizar a hora de chegada das aeronaves aos aeroportos diminuindo assim os custos diretos de operação das companhias aéreas. Hagelauer e Mora-Camino [8] fizeram um estudo para a otimização de trajetórias 4D, no qual apresentaram um método baseado na programação dinâmica (DP - *Dynamic Programming*), na presença de várias restrições de tempo. Foi proposta uma formulação discreta do problema sendo o problema de otimização resolvido num quadro de programação dinâmica progressiva. O tempo de processamento foi diminuído utilizando redes neuronais para calcular os custos associados a cada passo de decisão no processo de busca. Este método foi chamado de SDP - *Soft Dynamic Programming*. Comparando este método com o anterior, Hagelauer e Mora-Camino concluem que a utilização de redes neuronais nos cálculos do consumo de combustível em cada passo de decisão permitiu diminuir 88,2% do tempo gasto em processamento.

O conceito de otimização do consumo de combustível e otimização de trajetórias começou também a ser implementado nos voos hipersónicos e espaciais. A sua implementação ficou a dever-se à necessidade de aumentar as velocidades dos veículos aeroespaciais para regimes hipersónicos de forma a proporcionar uma maior capacidade de transporte no espaço. Sachs e Dinkelmann [9] debatendo-se neste problema, investigaram uma forma de reduzir o combustível necessário para a refrigeração dos motores *turbo-ramjet* de um veículo espacial em regimes hipersónicos através do controlo ótimo de trajetórias. O objetivo era analisar se o combustível gasto para a refrigeração dos motores perfazia uma percentagem significativa a ter em conta quando comparada com a mesma quantidade de combustível gasto para produzir a tração. O método utilizado consistiu primeiro numa análise termodinâmica para saber a quantidade de combustível que seria necessária para a refrigeração. Na otimização de trajetória foi utilizado um modelo de dinâmica do veículo baseado nas equações do movimento em referência ao sistema esférico rotativo da Terra, sendo consideradas também as forças aerodinâmicas. No modelo matemático proposto a tração e as características de consumo de combustível dependem da posição do acelerador, do número de Mach, da altitude e ângulo de ataque. São consideradas como variáveis de controlo: o ângulo de ataque, a posição do acelerador e o ângulo de viragem. Foram consideradas restrições para um voo hipersónico tendo em conta as limitações aerodinâmicas, estruturais e limitações dos motores. Foi testada uma trajetória que consistia na descolagem de uma base, entrar em órbita com a Terra e voltar à mesma base. Sachs e Dinkelmann verificaram que a adição de combustível consumido para a refrigeração dos motores, durante o processo de

otimização, permitia redução significativa no consumo total de combustível, sendo representado na Figura 1.4 o gráfico do fluxo de combustível para a otimização global da trajetória do voo.

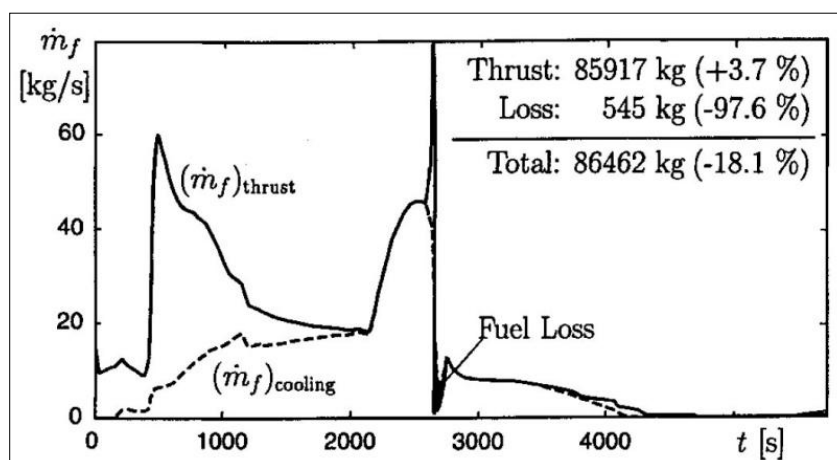


Figura 1.4: Gráfico do fluxo de combustível para a otimização global de trajetória [9].

Neste caso, em particular para o voo hipersônico, as abordagens e os métodos de resolução do problema de otimização foram bastante restringidos a este tipo de voo. Na aviação civil muitas outras variáveis de controle e restrições devem ser consideradas, uma vez que existem muitos outros fatores que devem ser estudados e normas que devem ser cumpridas.

Ainda no estudo de trajetórias aeroespaciais, Braden, Nah e Vadali [10], alguns anos mais tarde, realizaram um estudo sobre a otimização do consumo de combustível para trajetórias tridimensionais de um veículo aeroespacial para realização de viagens a Marte, propulsionado a motores de foguete com capacidade de variação do impulso específico. Foram considerados os efeitos de atração gravítica dos planetas em questão e o objetivo do trabalho consistiu em investigar os efeitos, devido à variação do tempo de viagem, à inclinação da órbita de partida e chegada; à variação da massa de combustível e ao nível de energia, na otimização do consumo de combustível para trajetórias ótimas. Este problema de otimização foi resolvido através do método IMSM - *Indirect Multiple Shooting Method*. Este consiste num método de Newton com linhas de pesquisa que permitem encontrar um extremo local de uma função. A obtenção de resultados exigiu bastante processamento numérico, mas Braden, Nah e Vadali conseguiram concluir no efeito da diminuição do nível de energia que os valores de menor consumo de combustível são obtidos para baixas razões de potência dos motores, e que tanto o tempo de viagem como os níveis de energia têm fatores de grande influência na massa final do veículo aeroespacial. Mais tarde, Chen e Sheu [11] baseando-se no mesmo problema, investigaram uma forma de diminuir o consumo de combustível na transferência de órbita de um veículo aeroespacial. Nesse trabalho, aplicaram no modelo uma função de tempo contínua por partes de forma a aproximar o ângulo ótimo para o controle de tração para o consumo ótimo de combustível durante a transferência orbital, com a tração

constante mínima necessária a partir de uma órbita circular para uma outra idêntica. Concluíram neste trabalho que o método usado se torna menos complexo na resolução das funções de controlo em comparação com o mesmo problema resolvido através do método do gradiente de segunda ordem. Isto compreende-se uma vez que este problema contém menos parâmetros responsáveis à otimização, ou seja, excluindo esses parâmetros torna-se mais simples a sua resolução.

Recentemente, Franco, Rivas e Valenzuela [12], realizaram um estudo baseado nos estudos de Kreindler e Neuman [2] e Burrows [3]. Este estudo consistiu em analisar o problema de minimização do consumo de combustível no cruzeiro para uma altitude e tempo de chegada fixos, como um problema simples de otimização. O objetivo do trabalho consistiu em verificar a influência da altitude de cruzeiro no cálculo de trajetórias ótimas, calculando o combustível mínimo necessário. Os resultados foram apresentados para um Boeing 767-300ER.

A formulação do problema consistiu em minimizar o seguinte índice de desempenho, para um determinado alcance e tempo final t_f fixo:

$$J = \int_0^{t_f} cT dt \quad (1.1)$$

Como restrições para a otimização do índice de desempenho são identificadas as seguintes equações do movimento, para um cruzeiro de altitude e rumo constantes:

$$\dot{V} = \frac{1}{m}(T - D) \quad \dot{m} = -cT \quad \dot{x} = V \quad (1.2)$$

Nestas equações a força de resistência aerodinâmica é uma função conhecida dependente da velocidade e da massa da aeronave $D(V, m)$, a força aerodinâmica de sustentação é igual ao peso $L = mg$ para voo de altitude constante. A tração $T(V)$ é dada por $T = \pi T_M(V)$, onde π define a posição do acelerador $0 \leq \pi \leq 1$, e $T_M(V)$ é uma função conhecida. O consumo específico de combustível $c(V)$ é também uma função conhecida. Este problema é apenas constituído por três variáveis de estado (velocidade V , massa m , e o alcance x) e apenas uma variável de controlo (posição do acelerador π). A massa inicial da aeronave (m_i) e as posições inicial e final ($x_i = 0$ e $x_f = \text{alcance}$) também são conhecidas.

O método utilizado para o processo de otimização foi baseado em Hamilton e aplicado à teoria do controlo ótimo. Franco, Rivas e Valenzuela [12] concluíram neste trabalho que para níveis de cruzeiro com maior altitude existe pouca influência na variação do número de Mach com o peso da aeronave. Na verdade, os maiores índices de otimização do consumo de combustível são obtidos para altitudes superiores.

As fases de voo nas quais uma aeronave gasta mais combustível são, sem dúvida, o cruzeiro e a subida. No entanto, é de notar que durante a fase de descida se pode evitar o gasto excessivo de combustível, fazendo uma aproximação ótima ao aeroporto. Turgut e Rosen [13] estudaram a relação entre o consumo de combustível e a variação de altitude durante a fase de descida para uma aeronave de transporte comercial. Na resolução do problema foi utilizado o algoritmo baseado no algoritmo genético GA - *Genetic Algorithm*,

que consiste num método de busca de soluções aproximadas para problemas de otimização. Após a análise dos resultados, Turgut e Rosen concluíram que os valores ótimos de consumo de combustível dão-se quando, durante a descida, se mantem a aeronave o maior tempo possível a maiores altitudes. A Figura I.5 representa a variação do fluxo de combustível com a altitude do voo.

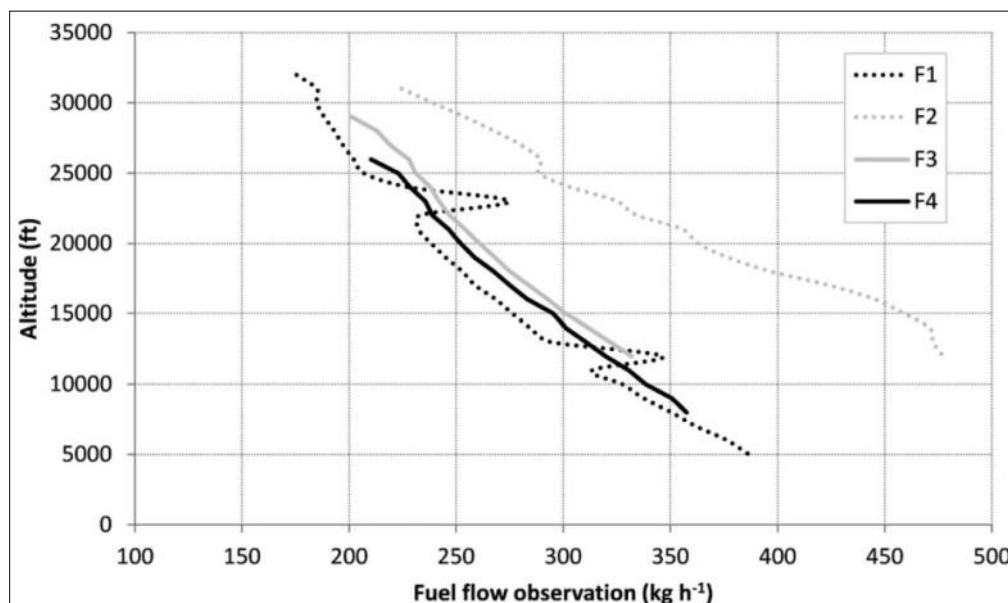


Figura I.5: Gráfico do caudal de combustível com a variação da altitude para diferentes voos [15].

Nos dias de hoje muitos outros problemas têm surgido devido ao elevado consumo de combustível das aeronaves durante as diferentes fases de voo. A questão das emissões de dióxido de carbono para a atmosfera e o elevado aumento do preço dos combustíveis fósseis tem levantado novas questões relacionadas com a minimização do consumo de combustível e a otimização de trajetórias. Os gastos das companhias aéreas são cada vez mais elevados, motivo que leva ao investimento de aeronaves mais económicas equipadas com sistemas avançados de gestão. A juntar a este fator, temos ainda o crescimento do tráfego aéreo nos arredores dos grandes aeroportos, o que para além das emissões de gases para a atmosfera acarreta ainda o problema do ruído provocado pelas aeronaves. Recentemente foram desenvolvidos trabalhos focados neste problema. Prats [14] em 2010 usando um modelo de otimização lexicográfica, procurou resolver o problema do ruído criando trajetórias específicas de forma a otimizar os níveis de ruído autorizados pelas normas da ICAO - *International Civil Aviation Organization*. Mais recentemente, Khardi e Abdallah [15] fizeram um estudo baseado no mesmo problema mas usando os métodos de otimização direta e indireta.

Um dos principais objetivos do FMS - *Flight Management System* é otimizar os parâmetros de voo para minimizar os custos relacionados com o consumo de combustível e tempo. Com o aumento do tráfego aéreo comercial durante as últimas décadas, os problemas de capacidade e congestionamento tornaram-se relevantes para o espaço aéreo e para os

controladores de tráfego aéreo na vizinhança do aeroporto, sendo impostas cada vez mais, para voos em particular, restrições de tempo. Estas limitações de tempo são impostas no terminal do aeroporto para que as aeronaves aterrem e descolem nos tempos exatos, evitando a acumulação de atrasos.

Recentemente foram disponibilizadas em algumas aeronaves modernas funcionalidades que permitem controlar o tempo de chegada a cada waypoint da trajetória, o que tem ajudado as companhias aéreas a diminuir os seus custos relacionados com o tempo. Uma solução prática que permite reduzir os custos relacionados com o tempo e consumo de combustível durante o voo é o CI - *Cost Index*, sendo este um índice de custo que as companhias aéreas definem consoante os seus objetivos durante o voo, e que lhes permite conhecer quer a velocidade, quer a altitude adequadas durante o cruzeiro para otimização de tempo e consumo de combustível.

Focando-se neste problema, Hagelauer e Mora-Camino [16] fizeram um estudo sobre o processo de otimização dos custos das companhias aéreas, tendo em conta os valores do CI para a navegação 4D durante a fase de cruzeiro. Foi utilizado um valor constante para o CI durante o voo, para um determinado tempo de chegada, e com isto encontrar a velocidade e altitude ótimas de cruzeiro. A função dos custos totais durante esta fase do voo foi definida por:

$$custo = C_F + CI \times tempo \quad (1.3)$$

Onde combustível e tempo representam o combustível consumido e a duração do voo respetivamente, para uma dada distância de voo.

Utilizando a seguinte função do custo médio durante o voo,

$$C_s = \frac{custo}{distância\ do\ voo} = \frac{P(m, M, z)}{V} + \frac{CI}{V} \quad (1.4)$$

Onde V é a velocidade relativa ao solo da aeronave; P o caudal de combustível consumido, em função do peso m da aeronave, do número de Mach M e pela altitude de cruzeiro z .

Para um determinado peso da aeronave, altitude de voo e CI, a velocidade de cruzeiro ideal é a velocidade que minimiza o custo médio ao longo da distância de voo considerada. A condição necessária para o mínimo local é:

$$\frac{dC_s}{dV} = 0 \quad (1.5)$$

Onde a condição necessária para a otimização é definida por:

$$M \frac{\partial P(m, M, z)}{\partial M} - P(m, M, z) - CI = 0 \quad (1.6)$$

Foi considerado um voo sem as perturbações dos ventos atmosféricos, e assim $M = \frac{v}{a}$, onde a é a velocidade do som para a altitude de cruzeiro considerada.

O problema de otimização de trajetória tendo em conta as restrições de tempo de chegada ao terminal foi formulado como um problema de controlo ótimo, cujo índice de desempenho a ser minimizado é o custo do combustível gasto durante o voo de cruzeiro:

$$J = \int_{x_0}^{x_f} c_f \frac{P(m, M, z)}{aM} dx \quad (1.7)$$

Onde $t(x_f) = T_c$ é a restrição de tempo, c_f é o custo de combustível, e x representa a distância percorrida, definida como variável independente.

Concluíram neste trabalho que, tanto considerando um perfil de altitude ótima fixa como um perfil de velocidade ótima para um CI constante, o consumo total de combustível acabava por ser semelhante em ambos os casos.

1.2. Como Otimizar o Consumo de Combustível nas Diferentes Fases do Voo

A competitividade do mercado da aviação e o constante aumento do preço dos combustíveis tem levado as companhias aéreas a notar o quão importante é trabalhar na gestão do consumo de combustível das suas frotas [17, 18, 19].

Esta pesquisa tem o objetivo de mostrar todas as variáveis de operação que influenciam significativamente o consumo de combustível de uma aeronave, no sentido de fornecer recomendações de forma a aumentar a economia de combustível.

Os seguintes pontos são fundamentais para que uma companhia aérea seja economicamente desenvolvida:

- Um bom planeamento de voo baseado em bons dados;
- Uma boa distribuição de peso de forma a ter uma posição correta do centro de massa da aeronave;
- Uma aeronave aerodinamicamente limpa;
- Uma boa utilização dos sistemas da aeronave;
- Procedimento de voo, usando velocidades e altitudes apropriadas para uma maior economia;
- O bom uso de sistemas de FMGS - *Flight Management and Guidance System* no módulo de gestão.
- Utilização de fatores de desempenho no planeamento de voo e nos sistemas de FMGS derivados de um programa de controlo contínuo do desempenho da aeronave.

1.2.1. Procedimentos antes do voo

A operação da aeronave começa no solo com a sua manutenção e carregamento dos passageiros e bagagens. Nesta parte vamos ver o impacto de algumas operações em solo no consumo de combustível. Apesar de ser uma operação onde se gasta muito menos combustível

do que nas restantes fases de operação, é importante que o pessoal de solo tenha sensibilidade e bons hábitos na economia de combustível.

Posição do CG e Payload

O peso bruto da aeronave é a soma do peso vazio de operação, da carga e do combustível, que atua no CG - *Center of Gravity* da aeronave. A posição do CG deve manter-se numa gama permitida pelo envelope do CG da aeronave, após a distribuição correta do peso da carga e do combustível. A posição do CG não deve ultrapassar os limites definidos no envelope, pois, quanto mais afastado estiver da posição de equilíbrio aerodinâmico, maior será a força aerodinâmica de resistência induzida na aeronave, que por sua vez levará a um aumento do consumo de combustível durante o voo.

Durante o voo, com o consumo de combustível a posição do CG altera-se, e por isso, é necessário um sistema capaz de transferir combustível para outros compartimentos de forma a acertar a posição ótima do CG. Podemos observar no gráfico da Figura I.6 a influência da posição do CG na variação do alcance específico (SR - *Specific Range*).

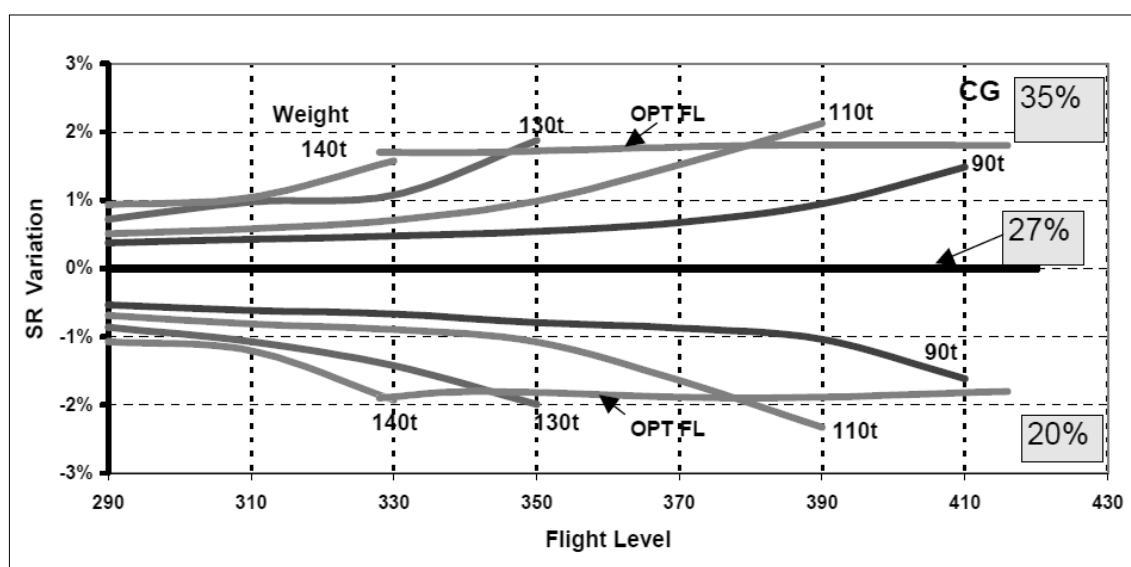


Figura I.6: Alcance específico em função da posição do CG [17].

Peso à decolagem

É importante ter em conta o excesso de combustível à decolagem, ou seja, o combustível necessário para o voo deve ser bem gerido evitando assim peso extra responsável por um maior consumo de combustível. Se comparamos duas aeronaves com os mesmos motores, mas com pesos diferentes, a aeronave mais leve torna-se mais económica no consumo de combustível.

O combustível total carregado na aeronave está dividido e calculado para várias funções:

- Dar início ao funcionamento dos motores;
- Táxi;
- Viagem;
- Reserva;
- Transporte;
- APU - *Auxiliary Power Unit*;

Para evitar peso desnecessário de combustível o voo deve ser planeado de uma forma muito precisa para o cálculo da quantidade de combustível exata a ser embarcada. O planeamento de voo deve ser baseado num sistema de monitorização de desempenho da aeronave, tendo em consideração fatores de desempenho baseados na variação do alcance específico da aeronave. O plano de voo é baseado em técnicas de otimização apropriadas utilizando as melhores rotas e níveis de voo.

Plano de voo

O requisito fundamental para alcançar a economia de combustível e a redução dos custos operacionais é a qualidade do FPS - *Flight Planning System*. Tendo em conta as restrições do ATC e as taxas de subida e descida, este sistema permite calcular a rota a velocidade e a altitude para cada instante do voo, reunindo os critérios económicos para o operador. Os dados adquiridos sobre a informação do voo, como a temperatura, velocidade e direção do vento, peso da aeronave, carga e abastecimento de combustível, devem ser de boa qualidade e precisão para um bom planeamento do voo. É importante verificar ao longo do tempo que as tripulações cumprem as regras estabelecidas para as diferentes fases do voo. Para as aeronaves bimotor existe o ETOPS - *Extended Twin Engine Operations*, certificado oficial da ICAO, que lhes permite sempre que estejam mais distantes de um aeroporto alternativo do que a distância de voo percorrida em 60 minutos, de voar em rotas mais diretas de forma a economizar combustível.

Táxi

Antes do voo é necessário ter também uma boa estimativa de tempo necessário para o táxi, devendo este ser medido e alterado consoante a hora e o dia de operação. Este fator depende do congestionamento do aeroporto, que varia com muitos fatores previstos e imprevistos, e por isso deve ser constantemente medido. Normalmente durante a fase de táxi o uso de um motor para uma aeronave bimotor e dois motores para uma aeronave quadrimotor permite menores consumos de combustível. Estes procedimentos necessitam de cuidados especiais e os operadores devem definir o seu campo de aplicação.

APU

O APU é uma unidade que fornece energia aos sistemas pneumáticos e elétricos quando a aeronave se encontra na fase de embarque ou desembarque, não necessitando do

funcionamento dos motores para fornecimento de energia. Apesar do consumo deste sistema ser muito inferior ao consumo de combustível no resto da missão, é importante que os operadores estejam cientes de que a adoção de procedimentos específicos na utilização do APU pode ajudar a economizar combustível e dinheiro. Em termos económicos globais os custos de manutenção por hora de um APU são mais baratos do que os dos motores, e por isso a redução do tempo de uso no solo dos motores pode reduzir significativamente os custos operacionais.

Deterioração aerodinâmica

Uma das penas mais severas em termos de consumo de combustível é causada pela força de resistência aerodinâmica provocada pela irregularidade da superfície aerodinâmica da aeronave. A deterioração aerodinâmica de uma aeronave durante um período de tempo pode incluir a retração incompleta de superfícies móveis, vedantes danificados nas superfícies de controlo, irregularidades na superfície da fuselagem devido a colisões com pássaros ou danos causados por veículos em terra, pintura lascada, portas incompatíveis e reparações excessivas. Cada deterioração cria uma força de resistência aerodinâmica que por sua vez leva a um aumento do consumo de combustível. É importante que as companhias aéreas adotem bons processos de limpeza e manutenção.

1.2.2. Procedimentos durante o voo

Quando uma aeronave chega à fase de descolagem os fatores que mais influenciam a economia de combustível são as técnicas de voo, a velocidade, a altitude e a configuração. Tripulações disciplinadas, que aderem a um plano de voo com base nas prioridades do operador, podem economizar muito em combustível e custos de operação. Neste ponto irão ser levantadas recomendações para as tripulações de voo para uma maior economia de combustível durante as diferentes fases de voo.

Descolagem e fase inicial de subida

Existem muitas variações na técnica de descolagem que podem afetar diretamente o consumo de combustível. Em geral, os efeitos são muito dependentes da combinação do motor com o tipo de aeronave, bem como o peso da aeronave, altitude e temperatura do aeroporto. Os seguintes parâmetros são considerados importantes para esta fase de voo:

- **APU Bleed** - Durante a descolagem pode ser usada ou não a APU *Bleed* para auxiliar ou não o fornecimento de energia aos sistemas, sendo que esta combinação permite uma maior economia de combustível. O procedimento normal consiste em selecionar o *Pack 1* depois da descolagem e o *Pack 2* após a recolha de *flaps* durante a subida.
- **Configuração** - O efeito da configuração depende bastante do tipo de aeronave e motor, bem como a altitude e temperatura do aeroporto, contudo, para

configurações maiores de *Flaps/Slats* existe uma maior tendência para o aumento do consumo de combustível, devido ao aumento dos esforços aerodinâmicos.

- **Velocidade** - Durante a decolagem torna-se mais vantajoso para o consumo de combustível optar-se por velocidades elevadas apropriadas a uma *Flex Thrust* em vez de velocidades ótimas apropriadas à temperatura atual.
- **Flex Thrust** - comparando com a tração máxima à decolagem, a *Flex Thrust* em geral permite uma diminuição do consumo de combustível. O *Flex Thrust* consiste em ter uma sensibilidade no processo de aceleração dos motores, evitar grandes variações de aceleração.
- **Inversão do curso** - No caso de ser necessária a inversão do curso após decolagem, pode-se poupar distância percorrida usando uma baixa velocidade de subida. Supondo que o ATC requer que uma aeronave após decolagem mantenha o rumo da pista até 6000 pés, uma menor velocidade de subida irá atingir esta altitude mais cedo reduzindo assim o tempo em que a aeronave se encontra próxima do solo e, conseqüentemente, o consumo de combustível.

Fase de Subida

Existem diferentes perfis de subida, que variam consoante a velocidade. Durante a subida existe uma aceleração de subida que não deve ultrapassar os limites estruturais da aeronave e os limites admitidos para o conforto dos passageiros. Então, para velocidades altas, menor deve ser a velocidade de subida, sendo maior a distância percorrida e vice-versa. Podemos observar na Figura I.7 os diferentes perfis de subida.

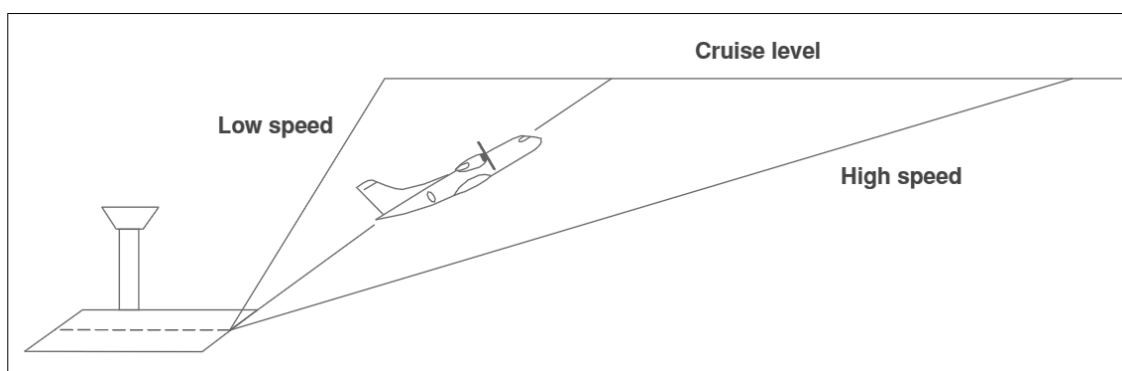


Figura I.7: Diferentes perfis de subida [18].

A fase de subida é normalmente realizada em três fases:

- Seguir a 250 nós IAS - *Indicated Air Speed* até aos 10000 pés (FL100) e depois acelerar até à velocidade escolhida no IAS;
- A velocidade IAS é mantida até à altitude de cruzeiro;
- O número de Mach é mantido constante até ao topo da subida.

O gráfico da Figura I.8 representa uma configuração típica de subida:

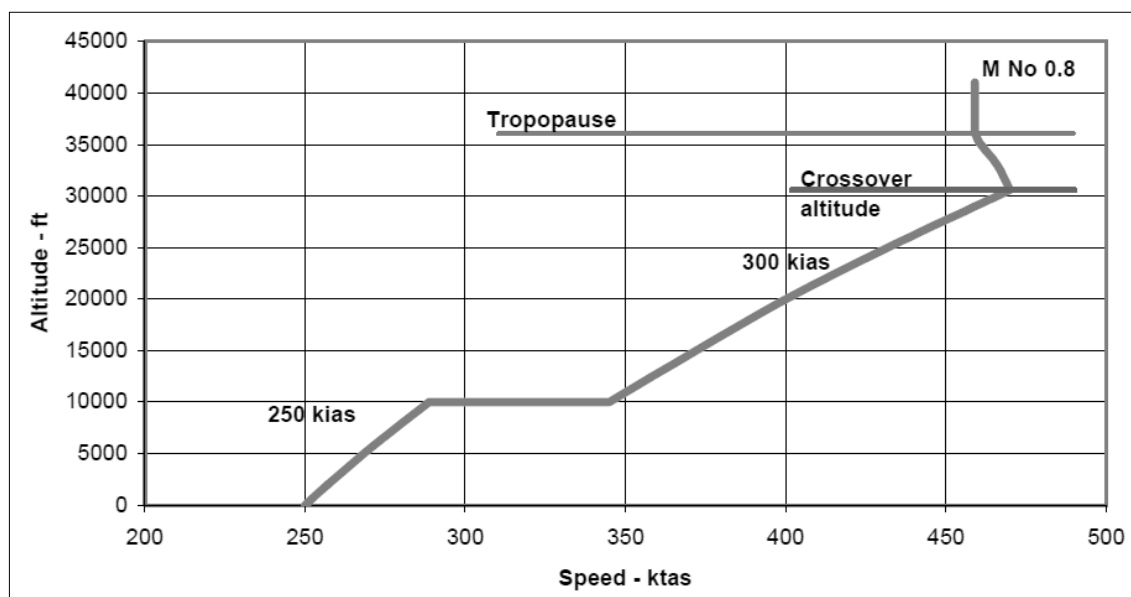


Figura I.8: Configuração típica de subida para uma aeronave comercial [17].

A altitude cruzeiro é a altitude em que se muda da subida com velocidade IAS constante para número de Mach constante. Isto apenas depende do IAS e número de Mach escolhidos, e não depende da variação do IAS. Durante a subida a IAS constante, a velocidade verdadeira TAS - *True Air Speed* e o número de Mach aumentam. Durante a subida a número de Mach constante, o TAS e o IAS diminuem até à Tropopausa.

Para avaliar corretamente o efeito das técnicas de subida, a subida e o cruzeiro devem ser vistos numa relação comum. Uma curta distância de subida, por exemplo, leva a uma extensão da distância de cruzeiro, e uma baixa velocidade de subida requer uma maior aceleração para a velocidade cruzeiro a uma altitude elevada. Uma delas deve considerar um sector que abranja a aceleração de subida, aceleração para a velocidade de cruzeiro, e uma pequena porção do cruzeiro para a mesma distância.

Fase de Cruzeiro

A fase de cruzeiro é a mais importante para a economia de combustível, uma vez que esta fase dura uma grande parte do voo, principalmente para aeronaves de longo curso. As duas variáveis que têm mais influência no consumo de combustível durante o cruzeiro são a velocidade de cruzeiro (IAS ou Numero de Mach) e a altitude (*Flight Level*).

Otimização da altitude de cruzeiro

Analisando a variação do alcance específico SR - *Specific Range* com a altitude para um número de mach constante, verifica-se que para cada peso existe uma altitude onde o alcance específico é máximo. Esta altitude é identificada como a altitude ótima de cruzeiro. Quando uma aeronave voa a uma altitude ótima, esta é operada com uma maior relação de

sustentação para a força de resistência aerodinâmica correspondente ao número de Mach selecionado. Quando uma aeronave voa a velocidades elevadas, a curva de polar de arrasto depende do número de Mach indicado e diminui quando o número de Mach aumenta. Para cada número de Mach existem valores diferentes de $(C_L/C_D)_{max}$, tomando valores mínimos quando o número de Mach aumenta. Quando uma aeronave voa no cruzeiro a uma altitude ótima para o número de Mach dado o C_L é constante e corresponde ao $(C_L/C_D)_{max}$ para o número de Mach selecionado. A influência da velocidade do ar na altitude ótima não é muito significativa para a gama de velocidades normais de cruzeiro.

A fim de minimizar o consumo de combustível a aeronave deve fazer o cruzeiro a uma altitude ótima, mas no entanto existem vários fatores que podem afetar esta altitude ótima, tais como as limitações de desempenho da aeronave, com um baixo peso da aeronave a altitude ótima de cruzeiro pode estar acima da altitude máxima de cruzeiro certificada para o tipo de aeronave; as restrições do ATC podem também afetar os níveis de voo voados.

Otimização do cruzeiro por *Stepped Climb*

Durante o cruzeiro o consumo de combustível leva a uma diminuição do peso da aeronave, isto provoca um aumento da altitude ótima de cruzeiro. O ideal seria durante o cruzeiro criar uma subida por passos, mas as restrições do ATC e os limites de desempenho tornam esta ideia difícil de realizar.

O gráfico da Figura I.19 mostra diferentes configurações durante o cruzeiro para o alcance de altitude ótima através da subida por passos *Stepped Climb*.

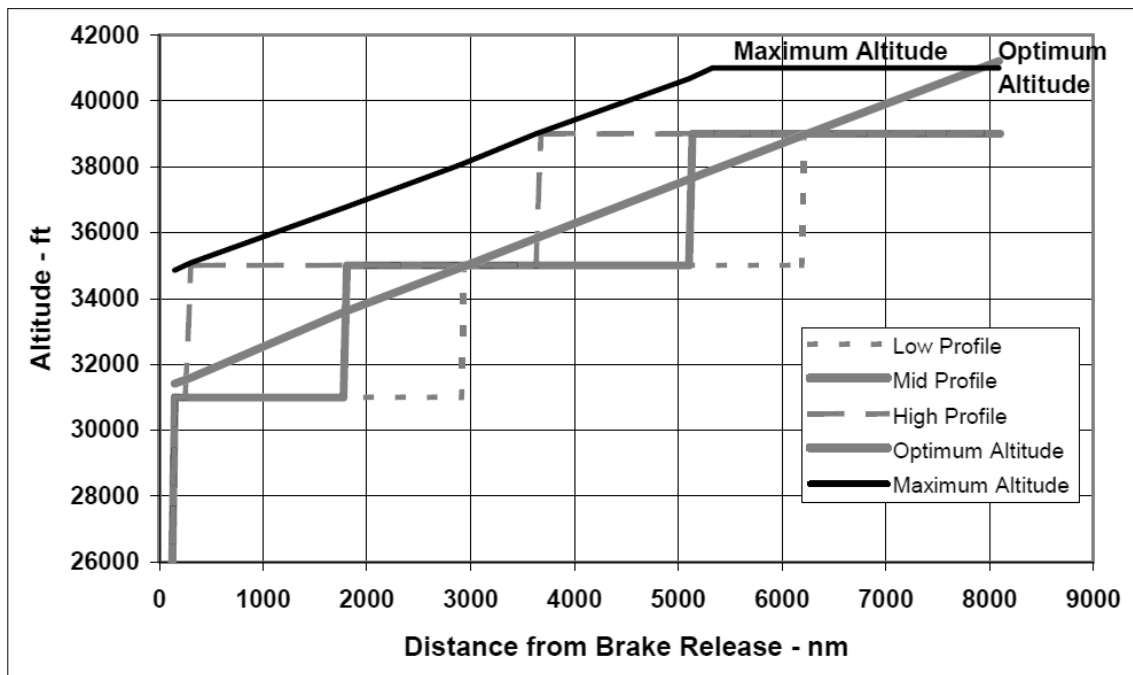


Figura I.9: Configuração *Stepped Climb* [17].

Influência dos ventos

Os ventos têm uma influência significativa no consumo de combustível durante a fase de cruzeiro. Atualmente as previsões meteorológicas são muito fiáveis e a sua integração na FMS fornece informações precisas às tripulações de voo, uma atualização constante das informações meteorológicas durante o voo permite uma constante otimização do consumo de combustível. O gráfico da Figura I.10 representa o efeito dos ventos sobre o tempo da viagem e o consumo de combustível.

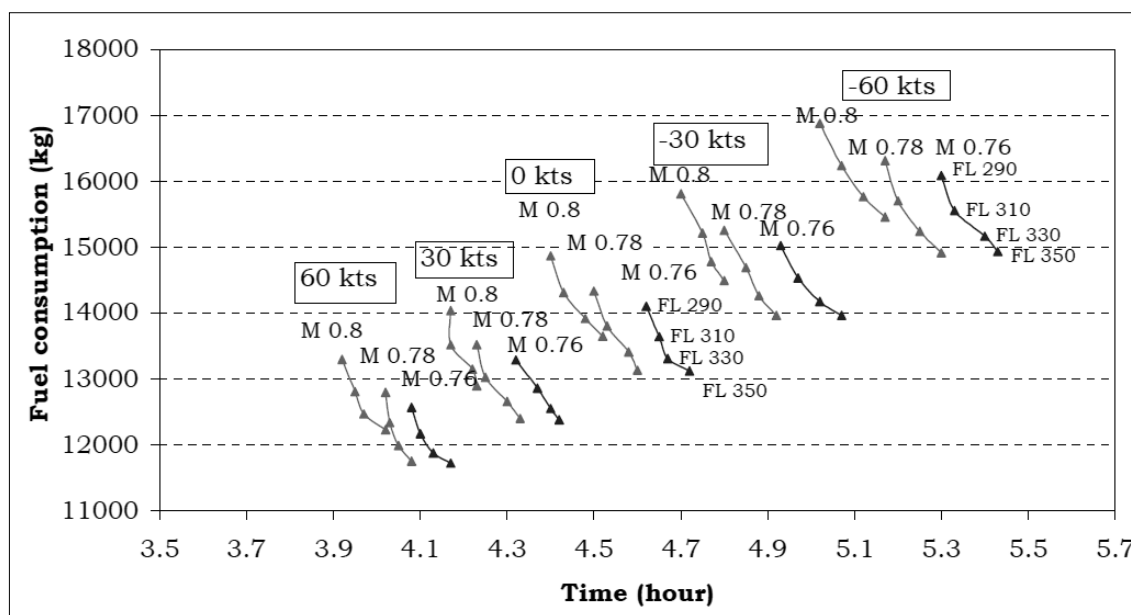


Figura I.10: Influência dos ventos atmosféricos no consumo de combustível e tempo de viagem [17].

A velocidade dos ventos pode variar com a altitude, e em geral diminui com o aumento da altitude. Para um dado peso, quando a altitude de cruzeiro é menor que a altitude ótima, o alcance específico (distância percorrida em função do combustível queimado) diminui. É possível que, para uma baixa altitude de cruzeiro com ventos favoráveis o alcance específico aumente, podendo acontecer que o alcance específico e o consumo de combustível sejam ótimos para baixas altitudes de cruzeiro em vez de altitudes ótimas de cruzeiro. Por isso, é muito importante ter em conta a direção e velocidade dos ventos durante o voo.

FMS

O sistema de gestão de voo FMS tem como objetivo a otimização do plano de voo em função dos ventos e dos custos operacionais, sugerindo a velocidade relativa ao vento e altitude mais económicas para o cruzeiro, dependendo do índice de custo CI escolhido pela companhia aérea. Uma companhia aérea que pretenda economizar combustível deve escolher um baixo CI. Esta parte tem o objetivo de destacar o impacto do CI no consumo de combustível e tempo de viagem.

Fase de descida

Durante a descida, a velocidade e o gradiente de descida são os parâmetros principais para a gerir de modo a economizar o consumo de combustível, onde por sua combinação se determina a tração necessária para esta fase. Para qualquer que seja o tipo de descida existe um ponto de início de descida TOD - *Top Of Descent* que é fundamental durante a gestão do voo. A otimização deste ponto é importante para evitar um alinhamento e nivelamento com a pista muito antes do ponto necessário, o que leva a um maior tempo de exposição da aeronave a baixas altitudes em que as forças de resistência aerodinâmica são maiores.

O procedimento normal de descida consiste em selecionar uma descida de três graus mantendo a velocidade IAS constante através do ajuste da tração. A descida mais económica acontece com uma maior inclinação, que por sua vez leva a que o TOD aconteça mais tarde e que o tempo de cruzeiro seja maior. A Figura I.11 representa dois perfis típicos de descida.

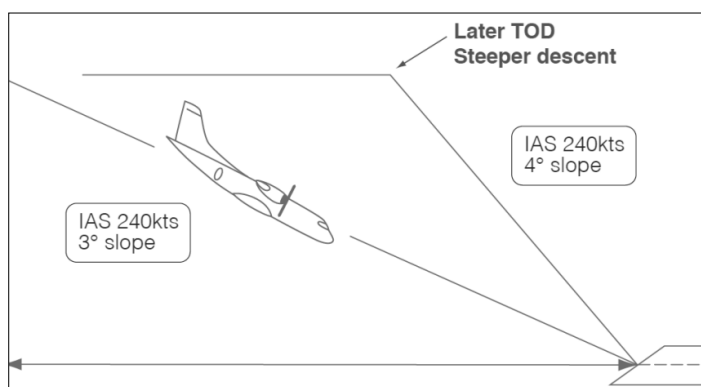


Figura I.11: Perfil de descida [18].

Além disso, para um dado gradiente de descida com uma baixa velocidade IAS selecionada permite um menor consumo de combustível, uma vez que é necessária menos tração. Quanto mais inclinada for a descida mais tempo em regime de cruzeiro é necessário até atingir o TOD, aumentando assim o consumo de combustível no cruzeiro.

Descida em tração mínima

A tração do motor é normalmente definida como *idle* na fase de descida, sendo a velocidade controlada através do controlo de atitude da aeronave. Nestas condições, maiores pesos aumentam a distância de descida devido à redução do gradiente de descida ($T - D/W$) em voo estabilizado. Isto também aumenta o combustível necessário para a descida. No entanto, numa descida de grandes altitudes um baixo peso pode levar a um gradiente de descida que resulta numa razão de descida excessiva. Neste caso, a razão de descida é reduzida pela aplicação de tração até que se possa continuar em modo de descida de tração *idle*. Isto resulta no que é conhecido por segmento de re-pressurização, podendo assim inverter a relação entre o peso e a distância de descida.

Modo de gestão de descida

O FMS calcula o TOD em função do índice de custos. Note-se que quanto maior o índice de custo, maior é a inclinação de descida, menor distância de descida e mais tarde é o TOD. O desempenho de descida é uma função do índice de custo, que quanto maior o índice de custo maior a velocidade de descida. Mas, contrariamente a subir, o peso bruto da aeronave e o nível de voo para o TOD tem um efeito desprezável sobre o cálculo da velocidade de descida, sendo o tempo de descida mais dependente dos índices de custo que o tempo para subir.

Fase de espera

A fase de espera num aeroporto ocorre devido aos atrasos de chegada das aeronaves, que podem estar relacionados com o congestionamento do tráfego aéreo, mau tempo ou indisponibilidade da pista. Isto leva a que uma aeronave tenha de se manter num circuito de espera e numa altitude específica definida pelos controladores de tráfego aéreo. Neste momento, a otimização de combustível não depende do tipo da trajetória, uma vez que esta deve ser seguida pelas indicações do ATC, mas a diminuição do fluxo de combustível nos motores da aeronave. Na Figura I.12 está representado um exemplo padrão de um circuito de espera (*Holding Pattern*).

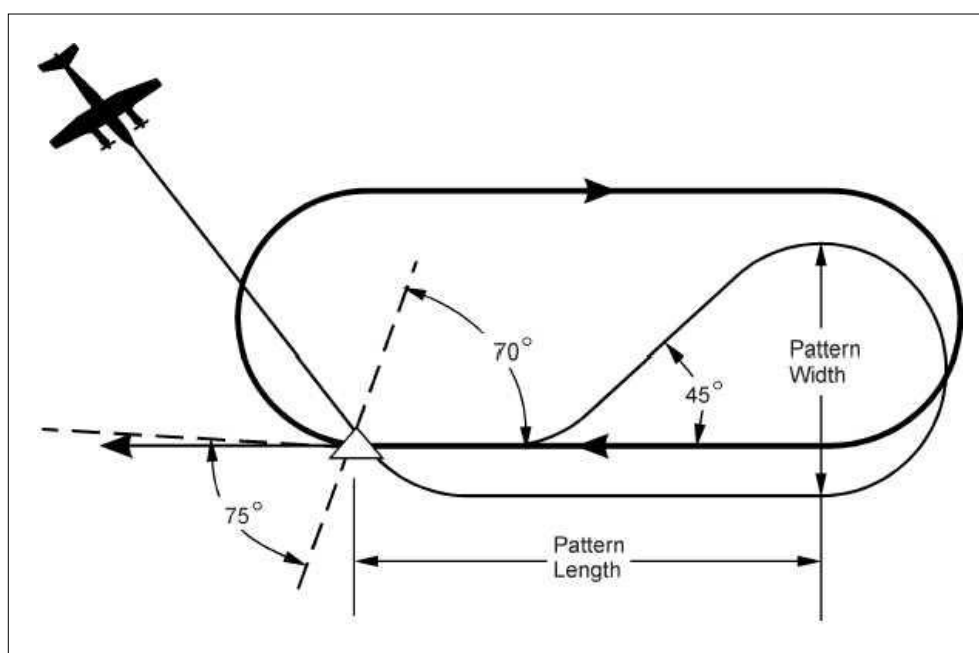


Figura I.12: Exemplo de um circuito de espera [20].

Para todas as aeronaves existe um valor para a velocidade no qual a razão de L/D é máxima e o consumo de combustível é mínimo. Podemos ver no gráfico da Figura I.13 este ponto, que é chamado de *Green Dot*.

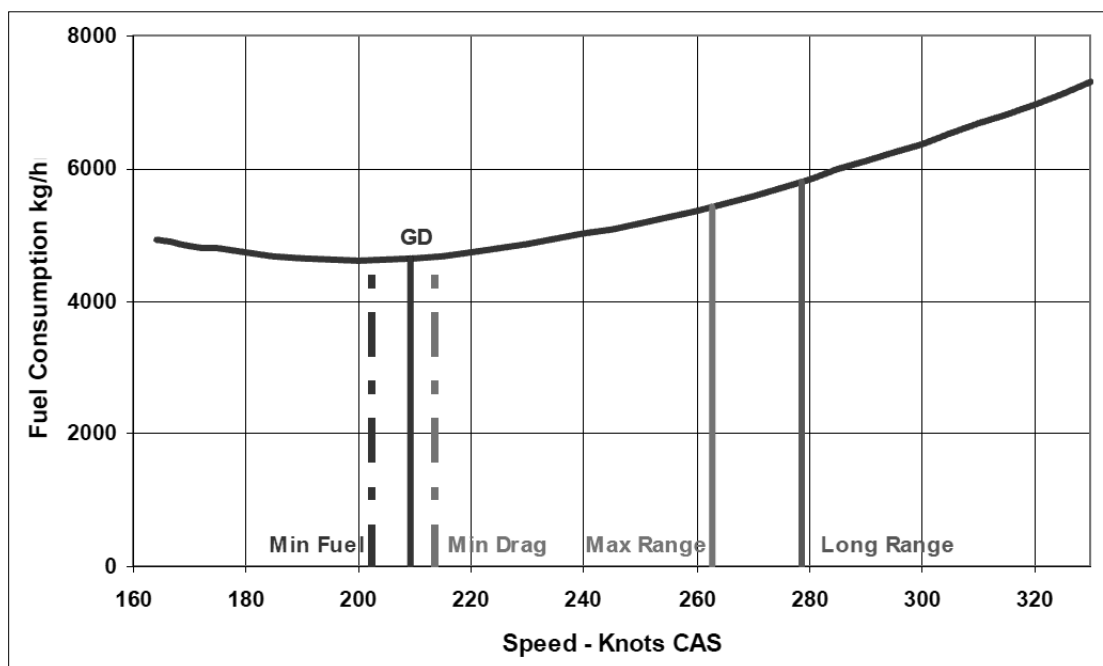


Figura I.13: Velocidade ótima para a fase de espera [17].

Por vezes, a fase de espera pode ser limitada em certos aeroportos devido à existência de obstáculos. A velocidade necessária para realizar corretamente esta fase pode ser inferior à velocidade *Green Dot* e a configuração limpa pode necessitar de uma extensão de *flaps/slats* para o aumento da sustentação. Pode acontecer em determinados aeroportos que o ATC defina uma velocidade de espera que não seja a velocidade para o consumo mínimo de combustível, assim, para permitir flexibilidade no planeamento das operações, o FCOM indica várias velocidades ótimas para diferentes configurações adaptadas a diferentes tipos de aeronave.

Aproximação

Os procedimentos usados na fase de aproximação podem afetar o consumo de combustível. A ladeira de descida *glideslop* pode ser intercetada com uma horizontal entre os 1500 e 2000 pés ou uma trajetória de voo descendente acima dos 2000 pés. Este último método permite um menor consumo de combustível, mas é difícil quantificar este consumo uma vez que o mesmo depende das trajetórias de voo em cada caso. No entanto, o ponto mais importante de uma aproximação é que esta seja de boa execução, estabilizada e segura. Nenhum destes pontos deve ser comprometido numa tentativa de poupança de combustível, devendo o procedimento de aproximação ser apropriado ao aeroporto, pista, equipamentos e condições. O mesmo se aplica à abertura do trem de aterragem. Sabe-se que uma abertura antecipada deste leva a um desgaste aerodinâmico desnecessário. No entanto, nunca se deve comprometer os níveis de segurança para poupar combustível.

1.2.3. Definição e determinação do CI

O conceito de CI tem como objetivo orientar as companhias aéreas a terem um menor custo possível durante os voos. Este conceito relaciona os custos operacionais por hora com o consumo de combustível adicional, ou seja, serve para relacionar os custos de tempo e combustível.

Os DOC são a soma dos custos fixos e variáveis durante a operação e serviço de uma aeronave.

$$DOC = C_F \Delta F + C_T \Delta T + C_C \quad (1.8)$$

Onde,

- C_F - Custo de combustível por kg [€/kg];
- C_T - Custo relacionado com o tempo por minuto de voo [€/s];
- C_C - Custos fixos independentes do tempo [€];
- ΔF - Combustível necessário para o voo [kg];
- ΔT - Tempo do voo [s].

De forma a minimizar o DOC é preciso minimizar os custos variáveis, uma vez que os fixos já não podem ser alterados durante o voo:

$$C_F \Delta F + C_T \Delta T \quad (1.9)$$

Para um determinado sector e período o preço do combustível pode ser considerado constante, podendo considerar-se a seguinte função de custo:

$$\tau = \frac{DOC}{C_F} = \Delta F + \frac{C_T}{C_F} \Delta T \quad (1.10)$$

Com,

- $\frac{C_T}{C_F} = C_I$ - Cost Index.

Que para um determinado alcance ΔS , significa que:

$$\tau = \frac{\Delta S}{SR} + C_I \frac{\Delta S}{V} \quad (1.11)$$

Onde,

- $SR = \frac{\Delta S}{\Delta F}$ - Alcance específico para determinado peso, altitude e outras condições [nm/kg]
- $V = aM + V_C$ - Velocidade relativa ao solo para voar uma distância de ΔS milhas náuticas incluindo os ventos [nm/h]. Onde V_C corresponde à componente do vento de cauda [nm/h].

Para um dado setor o custo mínimo de viagem é conseguido adotando uma velocidade operacional que relacione os custos de combustível e tempo. Para um dado CI a variação do número de Mach permite compensar as variações do vento.

Os custos relacionados com o tempo são principalmente influenciados pelos seguintes fatores:

- Custo de manutenção por hora;
- Custos para a tripulação de voo e cabine por hora - o cansaço devido a tempos de espera que levam a uma diminuição do tempo de descanso das tripulações e a uma consequente redução de eficiência;
- Uma aeronave está programada para voar um determinado número de horas por dia de forma a abater custos de compra e manutenção.

Estes custos são custos marginais que ocorrem por um minuto ou hora extra do voo. Para além dos custos acima referidos existem muitos outros como a insatisfação dos clientes pelos serviços prestados pelas companhias aéreas.

De forma a reduzir estes custos opta-se por um voo mais rápido, que por sua vez leva a uma perda no consumo de combustível. O CI permite que as companhias aéreas possam pesar a importância destes dois diferentes custos Tempo/Combustível, onde o FMS desempenha um papel bastante importante no sentido em que este sistema controla de forma económica a dinâmica do voo da aeronave.

O CI é então a relação entre os custos de tempo e combustível:

$$C_I = \frac{C_{Time}}{C_{Fuel}} \tag{I.12}$$

A economia durante o voo consiste no balanceamento destes dois diferentes pesos da seguinte forma:

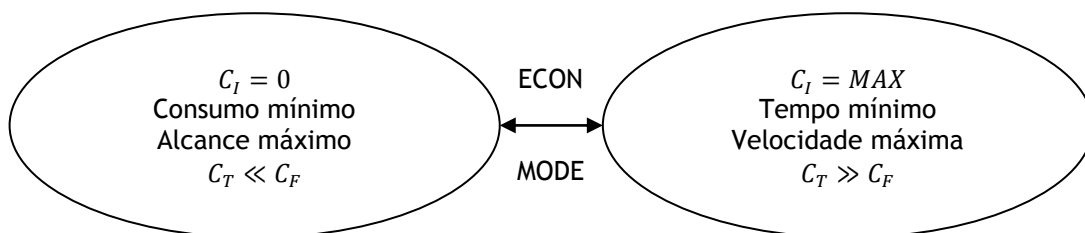


Figura I.14: Diagrama de relação entre o CI máximo e mínimo [17].

É possível verificar no gráfico da Figura I.15 a relação entre os custos de tempo, combustível e DOC com o número de Mach do voo:

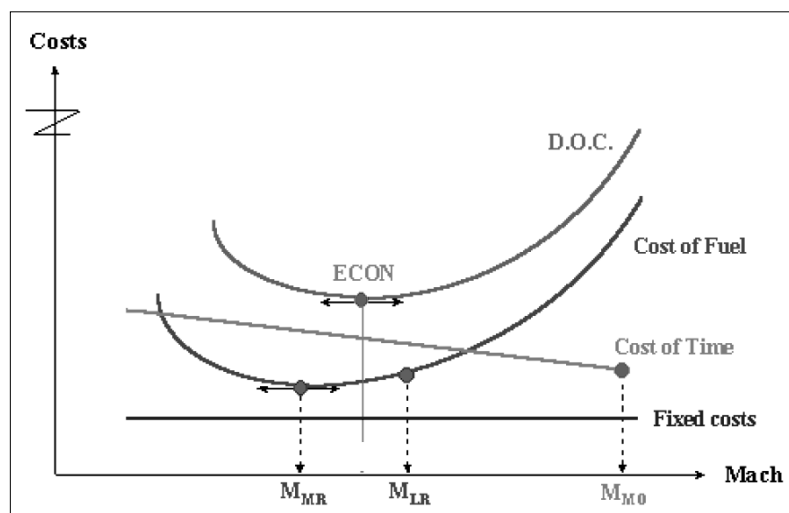


Figura I.15: Relação entre os custos de tempo, combustível e DOC com o número de Mach [17].

O CI varia consoante os objetivos das companhias aéreas. De forma a gerir os seu custos estas optam por um determinado CI que define o mais importante a nível de custos. Por exemplo, uma companhia aérea que tem definido como mais importante em termos de custos, o tempo de chegada ao destino, opta por uma subida até cruzeiro mais rápida, o que leva a que a aeronave tenha uma razão de subida menor e um maior tempo de voo a baixas altitudes. Esta companhia vai poupar nos custos de tempo, chegando mais cedo, mas vai gastar mais em termos de combustível consumido. A Figura 1.16 ilustra a relação do CI com os diferentes custos de operação [21].

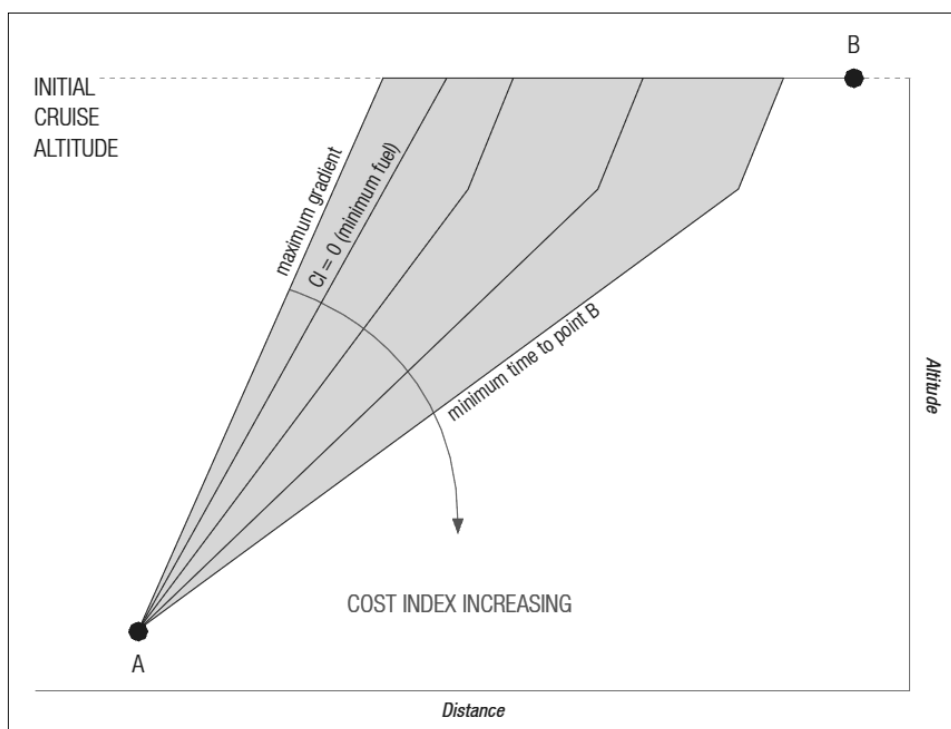


Figura I.16: Relação entre o CI e os DOC [19].

1.3. Objetivos do Trabalho

Objetivo 1 - Análise da fase de Subida

Na primeira parte da análise pretende-se quantificar o consumo de combustível desde o início da subida até à altitude cruzeiro. O primeiro ponto consiste na análise do consumo de combustível em diferentes trajetórias de subida, de forma a avaliar qual permite uma maior economia de combustível. Para n waypoints, a Figura I.17 representa as diferentes trajetórias de subida a analisar.

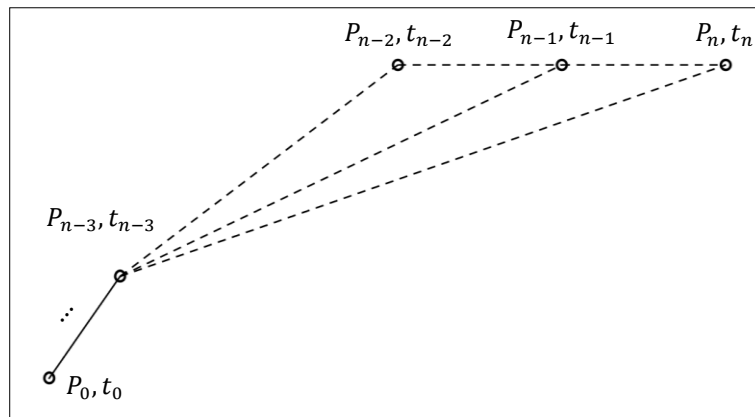


Figura I.17: Trajetórias de subida a analisar.

A primeira trajetória consiste na navegação em 4D dos waypoints $P_0 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-3} \rightarrow P_{n-2} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n$, a segunda dos waypoints $P_0 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-3} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n$ e a terceira dos waypoints $P_0 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-3} \rightarrow P_n$. Estas trajetórias identificam-se como sendo: a primeira de máxima, a segunda de média, e a terceira de baixa razão de subida. O segundo ponto nesta parte consiste em otimizar a trajetória para o perfil ótimo de subida, sendo a navegação feita apenas do waypoint $P_0 \rightarrow P_n$ sem waypoints intermédios. Este ponto tem como objetivo analisar como deve variar a razão de subida, de forma a obter uma maior economia de combustível nesta fase do voo.

Objetivo 2 - Análise da fase de Descida

Na segunda parte da análise, pretende-se avaliar o consumo de combustível para um voo completo, focando-se agora na fase de descida. Para isso vão ser analisadas três trajetórias de descida distintas com o objetivo de verificar qual delas permite uma maior economia de combustível. Para n waypoints, a Figura I.18 representa as diferentes trajetórias de descida a analisar.

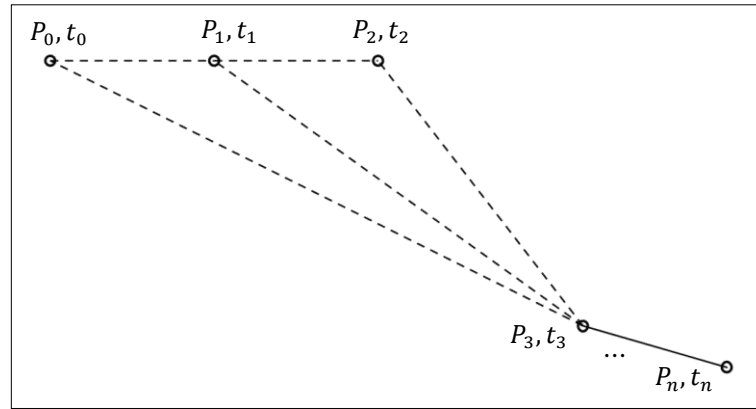


Figura I.18: Trajetórias de descida a analisar.

A primeira trajetória consiste na navegação 4D dos waypoints $P_0 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_n$, a segunda dos waypoints $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_n$ e a terceira dos waypoints $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_n$. Estas trajetórias identificam-se como sendo, a primeira de baixa, a segunda de média, e a terceira de máxima razão de descida.

Objetivo 3 - Análise da fase de Cruzeiro

Na terceira parte, pretende-se analisar o consumo de combustível para diferentes altitudes de cruzeiro. Para isso vão ser analisadas três trajetórias de cruzeiro diferentes com altitudes distintas. Para n waypoints, a Figura I.19 representa as diferentes trajetórias de cruzeiro a analisar.

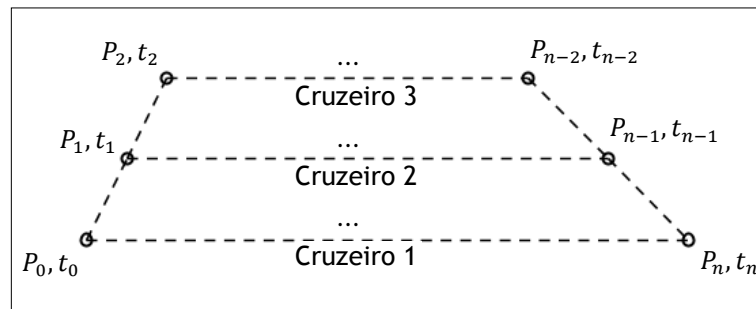


Figura I.19: Trajetórias de cruzeiro a analisar.

A primeira trajetória consiste na navegação 4D dos waypoints $P_0 \rightarrow \dots \rightarrow P_n$, a segunda dos waypoints $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n$ e a terceira dos waypoints $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{n-2} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_n$. Estas trajetórias diferenciam-se na altitude máxima de cruzeiro atingida pela aeronave. Na quarta parte dos objetivos, irá ser feito um levantamento das características do voo ótimo calculado nos pontos anteriores, com o objetivo de quantificar o combustível necessário para as diferentes fases do voo. Em ambas as partes da análise é utilizado o método de navegação por waypoints definidos em 4D com tempo fixo à chegada para as diferentes trajetórias.

1.4. Estrutura da Dissertação

No Capítulo I, *Introdução*, é feita uma discussão do desenvolvimento histórico acerca da otimização do consumo de combustível. São apresentadas as principais variáveis de operação, antes e durante o voo, que influenciam significativamente o consumo de combustível de uma aeronave. De seguida, são apresentados os objetivos desta dissertação e por fim é feita uma apresentação da estrutura da mesma.

No Capítulo II, *Modelação do Problema*, é feita uma apresentação da modelação teórica do problema de otimização do consumo de combustível, onde se começa por fazer uma introdução à navegação por waypoints em 4D. Segue-se a modelação do problema de navegação 4D, onde são apresentadas as equações da dinâmica do sistema de navegação, as restrições estruturais e dinâmicas da aeronave, o modelo teórico de navegação por waypoints em 4D e, por fim, é apresentado o modelo matemático para a otimização do consumo de combustível.

No Capítulo III, *Método para Análise do Consumo de Combustível*, é feita a apresentação do método utilizado neste trabalho para a análise do consumo de combustível em navegação por waypoints em 4D. Começa-se por fazer uma introdução ao método, explicando no que consiste e os motivos que levaram à sua escolha. Segue-se a apresentação do algoritmo desenvolvido para a análise do consumo de combustível na navegação por waypoints em 4D. O método inicia-se com o cálculo das referências para o vetor de controlo do sistema de orientação. Por fim é feito um diagrama de toda a estrutura do algoritmo desenvolvido.

No Capítulo IV, *Simulação e Resultados*, são apresentados os resultados obtidos da simulação dos diferentes voos para as fases de subida, descida e cruzeiro. É feita uma descrição e explicação física dos resultados, de forma a interpretá-los e relacioná-los com os objetivos do trabalho, avaliando as utilidades e implicações possíveis. Começa-se por simular os diferentes perfis de subida de forma a determinar o perfil ótimo. De seguida, é feita uma otimização da fase de subida, para estudar a variação do ângulo de subida. Segue-se a fase de descida, onde são simulados diferentes perfis de descida para achar o perfil de menor consumo. Por último, é feita a análise da fase de cruzeiro, onde são simulados diferentes altitudes de cruzeiro para um mesmo voo, com o objetivo de determinar a altitude de cruzeiro que permite um menor consumo de combustível.

Esta Dissertação termina com o Capítulo V, *Conclusão*, onde é feita uma súmula dos objetivos do trabalho e uma revisão geral dos métodos utilizados. É feito também um levantamento dos resultados obtidos, sua apreciação e utilidades. São apresentadas linhas orientadoras para possíveis trabalhos futuros relacionados com o tema.

Capítulo II - Modelação do Problema

2.1. Introdução à Navegação 4D

Com o aumento do tráfego aéreo na zona terminal dos aeroportos, é cada vez mais importante que as chegadas das aeronaves tenham um atraso mínimo para que todo o processo do controlo de tráfego aéreo seja bem gerido. Todos os responsáveis pela operação em terra e em voo das aeronaves devem cumprir com os horários para facilitar todo este trabalho de equipa. Durante o voo existem vários instrumentos de navegação que permitem às tripulações controlar a aeronave. Os sistemas baseados na navegação por waypoints definidos em 4D permitem que as aeronaves cheguem a um ponto num determinado tempo de voo, garantindo assim que a aeronave chegue ao aeroporto com um atraso mínimo.

2.2. Modelação do Problema de Navegação 4D

Neste ponto irá ser modelado o problema do controlo ótimo da navegação 4D por waypoints de uma aeronave. O sistema a analisar neste trabalho consiste numa aeronave de transporte comercial, sendo representado na Figura II.1 as forças e outras variáveis envolvidas na navegação 4D.

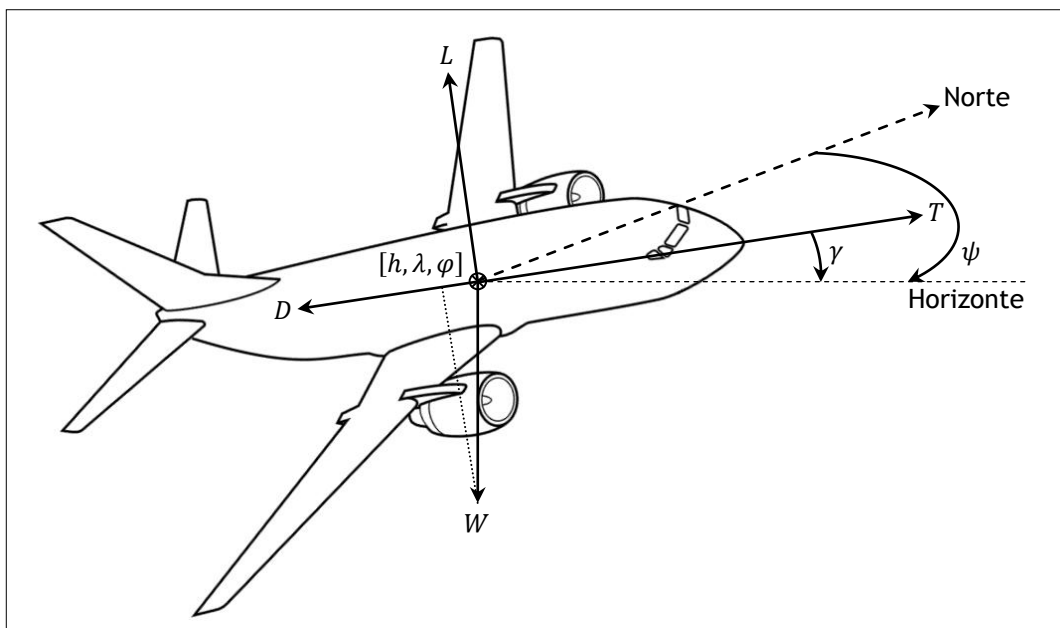


Figura II.1: Representação do diagrama de forças a atuar na aeronave e variáveis de estado para a navegação 4D.

Na Figura II.1, D representa a força de resistência aerodinâmica, L a força de sustentação aerodinâmica, T a força de tração dos motores e W o peso da aeronave.

2.2.1. Equações da Dinâmica de Navegação

O sistema das equações diferenciais utilizado na análise de trajetórias de uma aeronave é dado pelo seguinte sistema de seis dimensões, derivado no centro de gravidade da aeronave [21]:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{h} = V \sin \gamma \\ \dot{\lambda} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{(R_e + h) \cos \varphi} \\ \dot{\varphi} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{(R_e + h)} \\ \dot{V} = a \\ \dot{\gamma} = d_\gamma \\ \dot{\psi} = d_\psi \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} h \\ \lambda \\ \varphi \\ V \\ \gamma \\ \psi \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} a \\ d_\gamma \\ d_\psi \end{bmatrix} \quad (II.1)$$

Onde:

- h : Altitude, em relação ao nível do mar [m];
- λ : Longitude [deg];
- φ : Latitude [deg];
- V : Velocidade [m/s];
- γ : Ângulo de Trajetória [deg];
- ψ : Rumo [deg];
- a : Aceleração da trajetória do voo [m/s²];
- d_γ : Taxa do ângulo de trajetória do voo [deg/s];
- d_ψ : Taxa de rumo [deg/s];
- R_e : Raio equatorial da Terra [m].

Este sistema pode ser reescrito da seguinte forma matricial:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \quad (II.2)$$

Onde, t é o tempo, t_i e t_f correspondem respetivamente ao tempo inicial e final, e:

$X: [t_i, t_f] \mapsto \mathbb{R}^6$, com $X(t) = [h(t), \lambda(t), \varphi(t), V(t), \gamma(t), \psi(t)]$ o vetor de estado;

$U: [t_i, t_f] \mapsto \mathbb{R}^3$, com $U(t) = [a(t), d_\gamma(t), d_\psi(t)]$ o vetor de controlo.

2.2.2. Restrições do voo

Ao longo de uma trajetória existem várias restrições para a dinâmica da aeronave, devido a limites estruturais, restrições do ATC, normas de segurança, conforto dos passageiros e tripulações. Estas regras são importantes para uma boa operação da aeronave e por isso devem ser cumpridas.

Velocidade aerodinâmica da aeronave:

$$V_{min} \leq V \leq V_{max} \quad (II.3)$$

Ângulo de trajetória do voo:

$$\gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_{max} \quad (II.4)$$

Aceleração da trajetória do voo:

$$a_{min} \leq a \leq a_{max} \quad (II.5)$$

Taxa do ângulo de trajetória do voo:

$$d_{\gamma_{min}} \leq d_{\gamma} \leq d_{\gamma_{max}} \quad (II.6)$$

Taxa de rumo:

$$d_{\psi_{min}} \leq d_{\psi} \leq d_{\psi_{max}} \quad (II.7)$$

Aceleração do ângulo de trajetória do voo:

$$a_{\gamma_{min}} \leq a_{\gamma} \leq a_{\gamma_{max}} \quad (II.8)$$

Aceleração do rumo:

$$a_{\psi_{min}} \leq a_{\psi} \leq a_{\psi_{max}} \quad (II.9)$$

2.2.3. Navegação Waypoints 4D

A navegação por waypoint definidos em 4D consiste na distribuição temporal de pontos nos quais a aeronave deve passar. Cada waypoint contém a informação da altitude, longitude e latitude espacial e o momento temporal. Para facilitar a navegação é atribuída uma distância radial máxima necessária para a chegada. Considera-se a sequência de waypoints, representada na Figura II.2, de uma determinada trajetória:

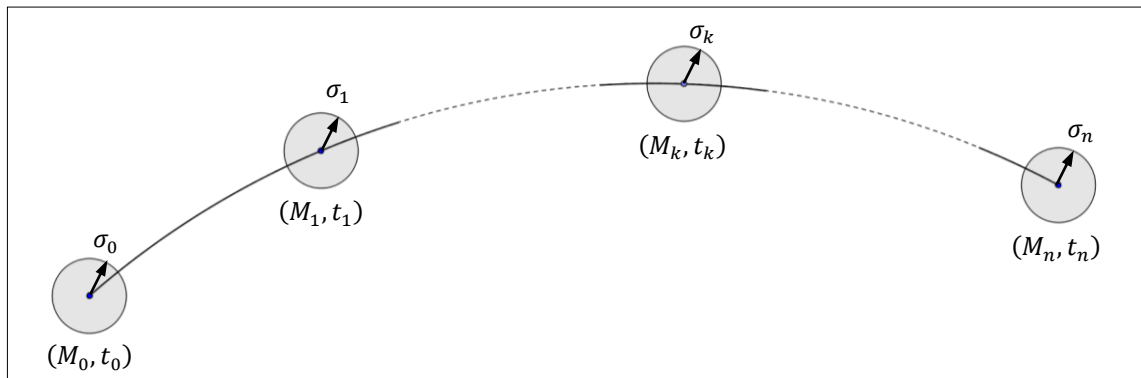


Figura II.2: Trajetória definida por waypoints em 4D.

Onde $M_k = [h_k \ \lambda_k \ \varphi_k]$ é a posição do waypoint k , t_k o tempo de chegada ao waypoint k e σ_k o raio de tolerância em torno do waypoint k .

As restrições para a navegação em waypoints definidos em 4D são a posição e tempo de chegada a cada waypoint da trajetória, que se representa matematicamente por:

$$\begin{aligned}
 M(t_0) &= M_0 \\
 \|M(t_1) - M_1\|^2 &\leq \sigma_1 \\
 &\vdots \\
 \|M(t_k) - M_k\|^2 &\leq \sigma_k \\
 &\vdots \\
 \|M(t_{n-1}) - M_{n-1}\|^2 &\leq \sigma_{n-1} \\
 \|M(t_n) - M_n\|^2 &\leq \sigma_n
 \end{aligned} \tag{II.10}$$

Onde $M(t) = [h(t) \ \lambda(t) \ \varphi(t)]$ é a posição da aeronave no instante t .

2.2.4. Otimização do Consumo de Combustível

Neste ponto é apresentado o modelo teórico para a otimização do consumo de combustível durante a navegação de uma aeronave. Os custos diretos de operação de uma aeronave estão relacionados diretamente com o consumo de combustível, com o tempo do voo e com os custos fixos de operação da aeronave.

Os custos relacionados com o combustível consumido estão relacionados com o consumo instantâneo de combustível durante o voo, matematicamente por:

$$C_F \Delta F \rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \dot{m}_f(t) dt \tag{II.11}$$

Onde,

$$\dot{m}_f = cT \tag{II.12}$$

Em que,

- C_F - Custo de combustível por kg [€/kg];
- ΔF - Combustível necessário para o voo [kg];
- \dot{m}_f - Consumo instantâneo de combustível [kg/s];
- T - Tração instantânea requerida [N];
- c - Consumo específico dos motores.

A tração instantânea é dada por:

$$T = \delta_T T_{max}(V, h) \tag{II.13}$$

Uma vez que a tração máxima disponível T_{max} e o consumo específico dos motores variam consoante as condições a cada momento do voo, então, o objetivo consiste durante a navegação desde o waypoint (P_0, t_0) até ao waypoint (P_n, t_n) , e passando por todos os waypoints intermédios, otimizar a função de custo:

$$J(u(t)) = \int_{t_i}^{t_n} c(T_K(t)) \delta_T(t) T_{max}(V(t), h(t)) dt \tag{II.14}$$

Onde, $u(t) = [\delta_T(t), a(t), d_\gamma(t), d_\psi(t)]$, é o vetor de controlo.

Sabendo que $0 \leq \delta_T \leq 1$, então a função de custo pode ser tratada como um problema de minimização do seu valor máximo. Assim podemos assumir $\delta_T = 1$ para o valor máximo da função, minimizando a seguinte função de custo:

$$J(u(t)) \leq \int_{t_i}^{t_n} c(T_K(t)) T_{max}(V(t), h(t)) dt = J(\tilde{u}(t)) \quad (II.15)$$

Onde, $\tilde{u}(t) = U(t) = [a(t), d_\gamma(t), d_\psi(t)]$, é o vetor de controlo calculado no ponto 2.2.1.

Dado que o consumo específico dos motores $c(T_K)$ varia com a temperatura do ar através da relação:

$$c(T_K) = c_0 \left(\frac{T_K(h)}{T_{K_0}} \right)^{0.5}, \quad T_K(h) = T_{K_0} + \lambda_{T_K} h \quad (II.16)$$

Onde $\lambda_{T_K} = -6.5 * 10^{-3} [K/m]$ e T_{K_0} é a temperatura atmosférica ao nível do mar.

A tração máxima disponível pode ser dada em função da altitude e velocidade da aeronave por:

$$T_{max}(h, V, \delta_T) = \delta_T T_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^\lambda \left(\frac{\rho(h)}{\rho_0} \right)^\mu \quad (II.17)$$

Onde, T_0 é a tração máxima disponível na descolagem ao nível do mar [N], V_0 a velocidade mínima para descolagem ao nível do mar [m/s], ρ_0 a densidade do ar ao nível do mar [kg/m³] e $\rho(h)$ a função de variação da densidade do ar com a altitude. Para um motor Turbo-Fan Subsónico, $\lambda = -0.43$ e $\mu = 0.65$.

Portanto o problema resume-se em achar um controlo U que minimize $J(U)$. São apresentados no Anexo A os conceitos gerais sobre os métodos de otimização.

Capítulo III - Método para Análise do Consumo de Combustível

3.1. Introdução

No capítulo anterior foi feita uma modelação teórica do problema de otimização, que poderia ser resolvido com a aplicação dos métodos teóricos de otimização de funções diferenciáveis apresentadas no Anexo A. No entanto, optou-se por criar um método mais prático baseado num processo iterativo de simulação. Este método foi criado para resolver o problema de navegação por waypoints definidos em 4D, em conjunto com o cálculo do consumo de combustível. O algoritmo de navegação por waypoints definidos em 4D teve como base na referência [21].

3.2. Algoritmo de Navegação 4D

A orientação de navegação consiste no cálculo da referência para a velocidade V_{ref} , rumo ψ_{ref} e ângulo de trajetória γ_{ref} do voo, de modo a gerar uma trajetória de voo que passe numa sequência específica de waypoints. Cada waypoint P_k contém a informação da posição e do tempo, toda esta informação é conhecida e disponibilizada através de uma base de dados, sendo definido pelo vetor:

$$P_k = [h_k \ \lambda_k \ \varphi_k \ \tau_k]^T \quad (\text{III.1})$$

Onde τ_k é o tempo, em segundos, de chegada ao waypoint P_k .

Algoritmo

Recolha de dados

- Tirar a informação da posição atual da aeronave e os dados dos waypoints na referência Geodética. Definir σ como o raio de tolerância em torno de cada waypoint;
- Calcular a distância dP_k da posição atual da aeronave M até à posição do próximo waypoint M_k , recorrendo à conversão de coordenadas geodéticas em coordenadas geocêntricas;

Método para a conversão de coordenadas geodéticas em coordenadas geocêntricas [22]:

Considerando uma referência de aproximação elipsoidal da Terra,

$$n = \frac{R_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (\text{III.2})$$

A conversão de coordenadas geodéticas para coordenadas geocêntricas é feita através das equações:

$$\begin{aligned}x &= (h + n) \cos \varphi \cos \lambda \\y &= (h + n) \cos \varphi \sin \lambda \\z &= (h + n - e^2 n) \sin \varphi\end{aligned}\tag{III.3}$$

- As posições do waypoint k e da aeronave na referência geocêntrica são dadas pelos vetores:

$$M_k = [x_k \ y_k \ z_k]^T\tag{III.4}$$

$$M = [x \ y \ z]^T\tag{III.5}$$

- A distância dP_k pode ser calculada da seguinte forma [21]:

$$dP_k = \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2}\tag{III.6}$$

- Se $dP_k \leq \sigma$, então a aeronave já chegou ao waypoint P_k e deve navegar até ao próximo waypoint P_{k+1} , caso contrário, manter a navegação para o waypoint P_k .

3.2.1. Cálculo da Velocidade V_{ref}

Calculando a distância entre a posição atual da aeronave o waypoint de destino P_k , podemos tirar a velocidade necessária V_{ref} para chegar no tempo indicado τ_k . Esta velocidade deve ser limitada nas restrições de velocidade máxima e mínima de operação da aeronave e a aceleração necessária para variar esta velocidade deve também estar dentro dos limites definidos nas restrições para a aceleração da trajetória [21].

➤ *Extensão de Flaps*

Quando a velocidade longitudinal V da aeronave é inferior à velocidade mínima de configuração limpa de flaps/slats, definir $C_L = C_{L_{max}}$ e . Isto tem influência no consumo de combustível devido à adição de forças de resistência aerodinâmica, por isso é um elemento importante a considerar.

➤ *Cálculo inicial de V_{ref}*

Se o tempo τ_k definido para a chegada ao Waypoint de destino for maior do que o tempo atual,

$$V_{ref} = \frac{dP_k}{\tau_k - t}\tag{III.7}$$

Caso contrário, se a aeronave estiver atrasada para a chegada, esta deve assumir a velocidade máxima, e então,

$$V_{ref} = V_{max}\tag{III.8}$$

➤ **Definir os limites de V_{ref}**

Definir as restrições para a velocidade $RV = [V_{min}, V_{max}]$, para a aeronave em questão. Definir uma função de saturação para a velocidade da aeronave:

$$V_{ref} = Sat(V_{ref}, RV) \quad (III.9)$$

$$Sat(V_{ref}, RV) = \begin{cases} V_{min} & V_{ref} < V_{min} \\ V_{ref} & se \quad V_{min} \leq V_{ref} \leq V_{max} \\ V_{max} & V_{ref} > V_{max} \end{cases}$$

➤ **Cálculo da aceleração máxima disponível a_{max}**

Do somatório das forças resultantes no eixo longitudinal da trajetória, podemos calcular a aceleração máxima disponível pelos motores durante a navegação, que é dada por:

$$a_{max} = \frac{1}{m}(T_{max} - D - W \sin \gamma) \quad (III.10)$$

Onde T_{max} é a tração máxima disponível dos motores, D a força de resistência aerodinâmica e W o peso da aeronave. Da Figura II.1 podemos verificar que a força de sustentação L ao atuar perpendicularmente à trajetória não influencia a resultante das forças longitudinais durante a navegação, no entanto, o peso da aeronave já tem a sua componente longitudinal que depende do ângulo da trajetória γ .

▪ **Cálculo da tração máxima disponível T_{max} :**

A tração máxima disponível pode ser dada em função da altitude e velocidade da aeronave por:

$$T_{max}(h, V, \delta_T) = \delta_T T_0 \left(\frac{V}{V_0}\right)^\lambda \left(\frac{\rho(h)}{\rho_0}\right)^\mu \quad (III.11)$$

Onde, T_0 é a tração máxima disponível na decolagem ao nível do mar [N], V_0 a velocidade mínima para decolagem ao nível do mar [m/s], ρ_0 a densidade do ar ao nível do mar [kg/m³] e $\rho(h)$ a função de variação da densidade do ar com a altitude. Para um motor Turbo-Fan Subsônico, $\lambda = -0.43$ e $\mu = 0.65$.

▪ **Cálculo da força de resistência aerodinâmica D :**

A força de resistência aerodinâmica definida em função da velocidade altitude e propriedades aerodinâmicas da aeronave em questão, é dada por:

$$D(h, V, C_L) = \frac{1}{2} \rho(h) V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2) \quad (III.12)$$

A densidade do ar, segundo os parâmetros ISA, varia com a altitude da seguinte forma:

$$\rho(h) = \rho_0 (1 - 2.2558 \times 10^{-5} h)^{4.256060537}, \quad h \leq 11000m \quad (III.13)$$

▪ **Cálculo do peso da aeronave W :**

O peso da aeronave devido à sua massa sujeita à aceleração gravítica da terra, é definido por:

$$W(t) = mg \quad (\text{III.14})$$

Onde $m(t)$ é a massa total da aeronave que varia com o tempo de voo devido ao consumo de combustível; $g = 9.81[m/s^2]$ é a aceleração gravítica da terra, que é considerada constante durante o voo. Esta força atua na vertical em direção ao centro da terra, sendo que a sua componente longitudinal varia com o ângulo de trajetória γ .

➤ **Cálculo da aceleração admitida a**

A aceleração máxima disponível pelos motores a_{max} deve ser limitada numa aceleração admitida para a aeronave em questão, tendo em conta os limites estruturais, segurança e conforto dos passageiros.

Uma aproximação da aceleração admitida em cada passo da simulação, devendo esta ser limitada entre a aceleração máxima e mínima admitida, é dada por:

$$a = \frac{V_{ref} - V}{dt} \quad (\text{III.15})$$

$$a_{min} \leq \frac{V_{ref} - V}{dt} \leq a_{max}$$

Definir as restrições para a aceleração $Ra = [a_{min}, a_{max}]$, para a aeronave em questão. Definir a função de saturação para a aceleração longitudinal da aeronave:

$$a = Sat(a, Ra) \quad (\text{III.16})$$

$$Sat(a, Ra) = \begin{cases} a_{min} & a < a_{min} \\ a & se \ a_{min} \leq a \leq a_{max} \\ a_{max} & a > a_{max} \end{cases}$$

Velocidade referência V_{ref}

Finalmente a velocidade de referência pode ser dada pela seguinte função:

$$V_{ref} = V + a \cdot dt \quad (\text{III.17})$$

Tração utilizada T

A tração usada da tração máxima disponível é então:

$$T = ma + D + W \sin \gamma \quad (\text{III.18})$$

3.2.2. Cálculo do Fluxo de Combustível \dot{m}_f

➤ Fluxo de Combustível \dot{m}_f

O fluxo de combustível durante a navegação depende da tração T e do consumo específico c da seguinte forma:

$$\dot{m}_f = cT \quad (III.19)$$

▪ Cálculo do consumo específico c :

Sendo que o consumo específico dos motores varia com a temperatura do ar:

$$c(T_K) = c_0 \left(\frac{T_K(h)}{T_{K_0}} \right)^{0.5}, \quad T_K(h) = T_{K_0} + \lambda_{T_K} h \quad (III.20)$$

Onde $\lambda_{T_K} = -6.5 * 10^{-3} [K/m]$ e T_{K_0} é a temperatura atmosférica ao nível do mar.

Fluxo de Combustível \dot{m}_f

É de notar que durante a descida o peso da aeronave vai vencer a força de resistência aerodinâmica, e a tração produzida pelos motores pode atingir valores mínimos. Quando a aeronave necessita de perder velocidade durante a descida, são aplicados os *aribrakes/spoilers*, produzindo estes uma tração negativa. Neste momento, a tração T é a força provocada pelos motores, quando positiva e pelos *aribrakes/spoilers*, quando negativa. O consumo de combustível quando são aplicados os *aribrakes/spoilers*, é assumido como o consumo mínimo definido para o modo de *idle* dos motores. Então,

$$\dot{m}_f = \begin{cases} \dot{m}_{f_{idle}} & \text{se } \dot{m}_f \leq \dot{m}_{f_{idle}} \\ \dot{m}_f & \text{se } \dot{m}_f > \dot{m}_{f_{idle}} \end{cases} \quad (III.21)$$

Onde $\dot{m}_{f_{idle}}$ corresponde ao caudal de combustível no modo de *idle* dos motores.

Combustível Consumido m_f

O consumo total de combustível no instante t_f é o somatório do consumo em cada passo da simulação desde o instante t_i até ao instante t_f :

$$m_f = \sum_{j=1}^N \dot{m}_{f(j)} dt \quad (III.22)$$

Em que $N = \frac{t_f - t_i}{dt}$ é o número de passos de simulação, m_f o combustível total consumido até ao passo N e $\dot{m}_{f(j)}$ o fluxo de combustível no passo j , então,

$$m_{f(j+1)} = m_{f(j)} + \dot{m}_{f(j+1)} dt \quad (III.23)$$

Massa da Aeronave m

Devido ao consumo de combustível, a massa total da aeronave diminui a cada passo de simulação da seguinte forma:

$$m_{(j+1)} = m_{(j)} - \dot{m}_{f(j+1)} dt \quad (\text{III.24})$$

Onde $m_{(j)}$ é a massa da aeronave no passo j .

3.2.3. Cálculo do Ângulo da Trajetória γ_{ref}

Comparando a altitude atual da aeronave com a altitude do waypoint de destino, podemos tirar o ângulo de referência para a trajetória do voo γ_{ref} . Contudo, a velocidade d_γ e aceleração a_γ de variação do ângulo de trajetória, devem estar dentro dos limites definidos nas restrições das respectivas taxas para a aeronave em questão.

➤ *Cálculo do ângulo de trajetória γ_{ref} para navegação waypoint em 4D*

O ângulo da trajetória do voo a partir da altitude atual da aeronave até à altitude do waypoint de destino é calculado da seguinte forma [21]:

$$\gamma_{ref} = \arcsin\left(\frac{h_k - h}{dP_k}\right) \quad (\text{III.25})$$

Onde h e h_k são respetivamente a altitude atual da aeronave e a altitude do waypoint de destino, k .

➤ *Cálculo do ângulo de trajetória γ_{ref} para uma subida de consumo mínimo de combustível*

Para a subida otimizada considera-se uma razão de subida máxima até à altitude de cruzeiro, sendo que a aceleração da trajetória é constante durante a subida. Para isso foi necessário acrescentar o seguinte procedimento:

- Se $h_k > h$; isto é, se a aeronave ainda estiver abaixo da altitude cruzeiro,
 - Se $a \leq a_{minClimb}$; isto é, se a aceleração longitudinal for inferior ou igual à aceleração mínima de subida,
 - $\gamma_{ref} = 0.999\gamma$; isto é, diminuir γ 0.1% a cada passo de simulação.
 - Caso contrário,
 - $\gamma_{ref} = 1.001\gamma$; isto é, aumentar γ 0.1% a cada passo de simulação.
- Se $h_k \leq h$; isto é, se a aeronave chegou mais cedo à altitude cruzeiro então,
 - $\gamma_{ref} = \arcsin\left(\frac{h_k - h}{dP_k}\right)$; isto é, seguir na direção do waypoint de destino.

Onde $a_{minClimb}$ é a aceleração mínima admitida para a aeronave ter energia de subida.

➤ **Definir os limites de γ_{ref}**

Definir as restrições para o ângulo de trajetória $R\gamma = [\gamma_{min}, \gamma_{max}]$ da aeronave em questão [21].

Definir a função de saturação para o ângulo de trajetória do voo [21]:

$$\gamma_{ref} = Sat(\gamma_{ref}, R\gamma) \quad (III.26)$$

$$Sat(\gamma_{ref}, R\gamma) = \begin{cases} \gamma_{min} & \gamma_{ref} < \gamma_{min} \\ \gamma_{ref} & se \ \gamma_{min} \leq \gamma_{ref} \leq \gamma_{max} \\ \gamma_{max} & \gamma_{ref} > \gamma_{max} \end{cases}$$

➤ **Definir os limites da referência para a velocidade do ângulo de trajetória, $d_{\gamma_{ref}}$**

Uma aproximação da taxa do ângulo de trajetória em cada passo da simulação pode ser dada por:

$$d_{\gamma_{ref}} = \frac{\gamma_{ref} - \gamma}{dt} \quad (III.27)$$

$$d_{\gamma_{min}} \leq \frac{\gamma_{ref} - \gamma}{dt} \leq d_{\gamma_{max}}$$

Definir a função de saturação para a taxa do ângulo de trajetória da aeronave:

$$d_{\gamma_{ref}} = Sat(d_{\gamma_{ref}}, Rd_{\gamma}) \quad (III.28)$$

$$Sat(d_{\gamma_{ref}}, Rd_{\gamma}) = \begin{cases} d_{\gamma_{min}} & d_{\gamma_{ref}} < d_{\gamma_{min}} \\ d_{\gamma_{ref}} & se \ d_{\gamma_{min}} \leq d_{\gamma_{ref}} \leq d_{\gamma_{max}} \\ d_{\gamma_{max}} & d_{\gamma_{ref}} > d_{\gamma_{max}} \end{cases}$$

▪ **Cálculo da aceleração do ângulo de trajetória a_{γ} :**

Uma aproximação da aceleração do ângulo de trajetória em cada passo da simulação pode ser dada por:

$$a_{\gamma} = \frac{d_{\gamma_{ref}} - d_{\gamma}}{dt} \quad (III.29)$$

$$a_{\gamma_{min}} \leq \frac{d_{\gamma_{ref}} - d_{\gamma}}{dt} \leq a_{\gamma_{max}}$$

Definir a função de saturação para a aceleração do ângulo de trajetória da aeronave:

$$a_{\gamma} = Sat(a_{\gamma}, Ra_{\gamma}) \quad (III.30)$$

$$Sat(a_{\gamma}, Ra_{\gamma}) = \begin{cases} a_{\gamma_{min}} & a_{\gamma} < a_{\gamma_{min}} \\ a_{\gamma} & se \ a_{\gamma_{min}} \leq a_{\gamma} \leq a_{\gamma_{max}} \\ a_{\gamma_{max}} & a_{\gamma} > a_{\gamma_{max}} \end{cases}$$

Referência para a velocidade do ângulo de trajetória, $d_{\gamma_{ref}}$

Resulta que a referência para a velocidade do ângulo de trajetória é:

$$d_{\gamma_{ref}} = d_{\gamma} + a_{\gamma} dt \quad (III.31)$$

Referência para o ângulo de trajetória, γ_{ref}

Finalmente, o ângulo de referência para a trajetória de voo pode ser dado por:

$$\gamma_{ref} = \gamma + d_{\gamma_{ref}} dt \quad (III.32)$$

Então,

$$\gamma_{ref} = \gamma + (d_{\gamma} + f_{\gamma} a_{\gamma} dt) dt \quad (III.33)$$

Onde γ é o ângulo de trajetória de voo atual da aeronave e $f_{\gamma} \in [0,1]$ é o fator de amortecimento para a aceleração do ângulo de trajetória.

3.2.4. Cálculo do Rumo ψ_{ref}

Comparando a posição loxodrômica atual da aeronave com a posição do waypoint de destino, podemos tirar o rumo de referência ψ_{ref} que a aeronave deve seguir para chegar ao waypoint. Contudo, a velocidade d_{ψ} e aceleração a_{ψ} de variação do rumo da trajetória, devem estar dentro dos limites definidos nas restrições das respectivas taxas para a aeronave em questão. O cálculo da referência para o rumo da aeronave baseia-se inicialmente na referência [21].

➤ *Cálculo das distâncias Loxodrômicas $\Delta\lambda$ e $\Delta\varphi$*

Longitude diferencial:

$$\Delta\lambda = \lambda_k - \lambda \quad (III.34)$$

Onde λ_k e λ são respectivamente as longitudes do waypoint de destino e da posição atual da aeronave, expressos em graus.

Latitude diferencial:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \ln \left(\left| \tan \left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) \right| \right) \\ \varphi^{(2)} &= \ln \left(\left| \tan \left(\frac{\varphi_k}{2} + 45^\circ \right) \right| \right) \end{aligned} \quad (III.35)$$

$$\Delta\varphi = \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}$$

Onde φ_k e φ são respectivamente as latitudes do waypoint de destino e da posição atual da aeronave, expressos em graus.

➤ **Cálculo do rumo de referência ψ_{ref}**

O rumo que a aeronave deve tomar para seguir em direção ao waypoint k é:

$$\psi_{ref} = \arctan_2(\Delta\lambda, \Delta\varphi) \quad (III.36)$$

Esta função vai exibir os valores do ângulo de rumo mais pequenos, no entanto é preciso escolher o sentido para o qual a aeronave deve virar para tomar mais rápido o rumo certo. Vamos criar as seguintes condições:

- Se $\psi > 0$
 - $\psi_{ref} = \arctan_2(\Delta\lambda, \Delta\varphi)$;
 - Se $\psi_{ref} < 0$
 - Se $\psi - \psi_{ref} > 180$
 - $\psi_{ref} = 360 + \psi_{ref}$;
- Ou se $\psi < 0$
 - $\psi_{ref} = \arctan_2(\Delta\lambda, \Delta\varphi)$;
 - Se $\psi_{ref} > 0$
 - Se $\psi - \psi_{ref} > 180$
 - $\psi_{ref} = 360 - |\psi_{ref}|$;

Sendo ψ o valor do rumo atual da aeronave.

➤ **Definir os limites da referência para a velocidade do rumo, $d_{\psi_{ref}}$**

Uma aproximação da taxa do rumo da trajetória em cada passo da simulação pode ser dada por:

$$d_{\psi_{ref}} = \frac{\psi_{ref} - \psi}{dt} \quad (III.37)$$

$$d_{\psi_{min}} \leq \frac{\psi_{ref} - \psi}{dt} \leq d_{\psi_{max}}$$

Definir a função de saturação para a taxa do rumo da trajetória da aeronave:

$$d_{\psi_{ref}} = Sat(d_{\psi_{ref}}, Rd_{\psi}) \quad (III.38)$$

$$Sat(d_{\psi_{ref}}, Rd_{\psi}) = \begin{cases} d_{\psi_{min}} & d_{\psi_{ref}} < d_{\psi_{min}} \\ d_{\psi_{ref}} & se \ d_{\psi_{min}} \leq d_{\psi_{ref}} \leq d_{\psi_{max}} \\ d_{\psi_{max}} & d_{\psi_{ref}} > d_{\psi_{max}} \end{cases}$$

▪ **Cálculo da aceleração do rumo a_ψ :**

Uma aproximação da aceleração do rumo da trajetória em cada passo da simulação pode ser dada por:

$$a_\psi = \frac{d\psi_{ref} - d\psi}{dt} \quad (III.39)$$

$$a_{\psi_{min}} \leq \frac{d\psi_{ref} - d\psi}{dt} \leq a_{\psi_{max}}$$

Definir a função de saturação para a aceleração do rumo da trajetória da aeronave:

$$a_\psi = Sat(a_\psi, Ra_\psi) \quad (III.40)$$

$$Sat(a_\psi, Ra_\psi) = \begin{cases} a_{\psi_{min}} & a_\psi < a_{\psi_{min}} \\ a_\psi & se \ a_{\psi_{min}} \leq a_\psi \leq a_{\psi_{max}} \\ a_{\psi_{max}} & a_\psi > a_{\psi_{max}} \end{cases}$$

Referência para a velocidade do rumo da aeronave, $d\psi_{ref}$

Resulta que a velocidade referência para o rumo da aeronave é dada por:

$$d\psi_{ref} = d\psi + a_\psi dt \quad (III.41)$$

Referência para o rumo da aeronave, $d\gamma_{ref}$

Finalmente, o rumo de referência da aeronave pode ser dado por:

$$\psi_{ref} = \psi + d\psi_{ref} dt \quad (III.42)$$

Então,

$$\psi_{ref} = \psi + (d\psi + f_\psi a_\psi dt) dt \quad (III.43)$$

Onde ψ é o rumo atual da aeronave e $f_\psi \in [0,1]$ é o fator de amortecimento para a aceleração do rumo de trajetória da aeronave.

3.2.5. Sistema de Orientação

Do algoritmo de navegação waypoint 4D obtêm-se os valores de referência para o novo ciclo de simulação:

$$\begin{aligned} &V_{ref} \\ &\gamma_{ref} \\ &\psi_{ref} \\ &d\gamma_{ref} \\ &d\psi_{ref} \end{aligned} \quad (III.44)$$

Para a simulação da posição da aeronave com os novos dados de referência para a velocidade, rumo e ângulo de trajetória do voo, foi utilizando o Algoritmo de *Butcher* para derivar as equações de Navegação definidas no ponto 2.2.1., onde o vetor de orientação é definido por:

$$U = \begin{bmatrix} V_{ref} \\ \gamma_{ref} \\ \psi_{ref} \end{bmatrix} \quad (III.45)$$

Algoritmo de *Butcher* para simulação de sistemas controlados

O modelo de um sistema controlado é descrito por:

$$M_{novo} = f(M_{atual}, U) \quad (III.46)$$

Onde a posição atual da aeronave é dada pelo vetor,

$$M_{atual} = \begin{bmatrix} h_{atual} \\ \lambda_{atual} \\ \varphi_{atual} \end{bmatrix} \quad (III.47)$$

Da equação (II.1) seguem-se as equações diferenciais para a derivação da posição da aeronave X através do vetor de controle U :

$$M_{novo} = f(M_{atual}, U) = \begin{bmatrix} h_{novo} = V_{ref} \sin \gamma_{ref} \\ \lambda_{novo} = \frac{V_{ref} \cos \gamma_{ref} \sin \psi_{ref}}{(R_e + h) \cos \varphi} \\ \varphi_{novo} = \frac{V_{ref} \cos \gamma_{ref} \cos \psi_{ref}}{(R_e + h)} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} V_{ref} \\ \gamma_{ref} \\ \psi_{ref} \end{bmatrix} \quad (III.48)$$

Onde $M_{novo} \in \mathfrak{R}^3$ é o vetor de estado e $U \in \mathfrak{R}^3$ o vetor de controle.

O algoritmo de *Butcher*, para a simulação de sistemas controlados, é representado por:

$$M_{novo} = fButcher(M_{atual}, U) \quad (III.49)$$

Onde,

$$\begin{aligned} k_1 &= dt \cdot f(M_{atual}, U) \\ k_2 &= dt \cdot f\left(M_{atual} + \frac{k_1}{4}, U\right) \\ k_3 &= dt \cdot f\left(M_{atual} + \frac{k_1}{8} + \frac{k_2}{8}, U\right) \\ k_4 &= dt \cdot f\left(M_{atual} - \frac{k_2}{2} + k_3, U\right) \\ k_5 &= dt \cdot f\left(M_{atual} + \frac{3k_1}{16} + \frac{9k_4}{16}, U\right) \\ k_6 &= dt \cdot f\left(M_{atual} - \frac{3k_1}{7} + \frac{2k_2}{7} + \frac{12k_3}{7} - \frac{12k_4}{7} + \frac{8k_5}{7}, U\right) \end{aligned} \quad (III.50)$$

Sendo a nova posição da aeronave dada por:

$$M_{novo} = M_{atual} + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (III.51)$$

3.3. Estrutura do Programa

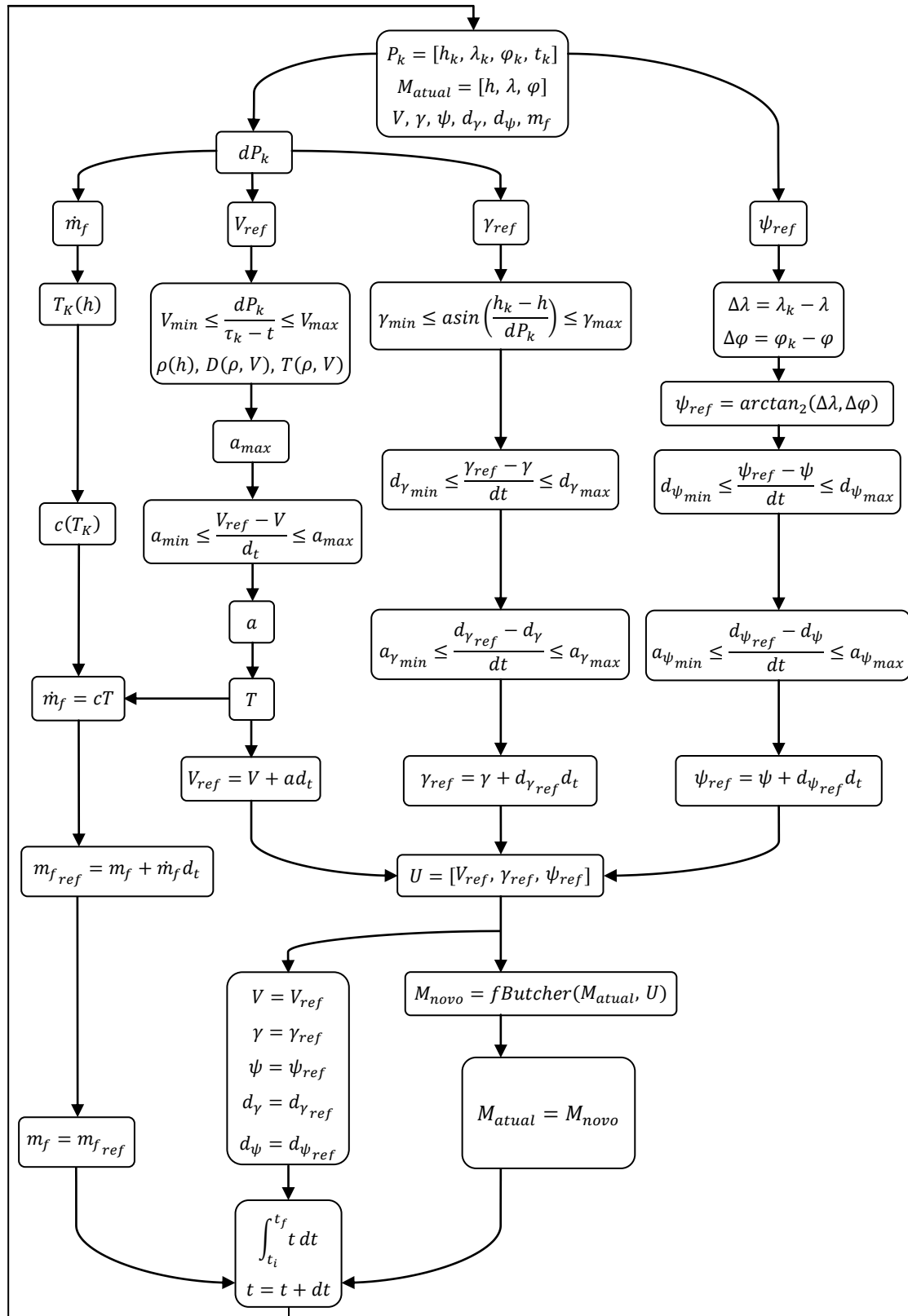


Figura III.1: Diagrama da estrutura do programa de análise do consumo de combustível para Navegação Waypoint 4D.

Capítulo IV - Simulação e Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir das simulações feitas para as diferentes trajetórias. Foi utilizado o programa *Matlab*[®] para simular o algoritmo de navegação apresentado no Capítulo III. As coordenadas dos waypoints dos voos analisados neste trabalho foram obtidas na referência [23].

4.1. Parte I - Subida

Na primeira parte são apresentados os resultados obtidos para a fase de subida. Para os diferentes voos considera-se a subida a partir dos 1166m até uma altitude de cruzeiro de 11255m, tratando-se de uma subida para voo de médio curso de Lisboa-Barcelona.

4.1.1. Análise de Trajetórias de Subida

Para a análise de trajetórias de subida são considerados três perfis diferentes após a chegada aos 4300m de altitude até ao cruzeiro de 11255m. O perfil de razão de subida máxima é apresentado como o Voo 1, o segundo de razão de subida média como Voo 2 e o terceiro de razão de subida baixa como Voo 3. O tempo de chegada ao waypoint final de cada voo é fixo de 1794 segundos, cerca de 30 minutos.

Na Figura IV.1 estão representados os gráficos dos resultados obtidos para a altitude, longitude, latitude, velocidade, ângulo de trajetória e rumo.

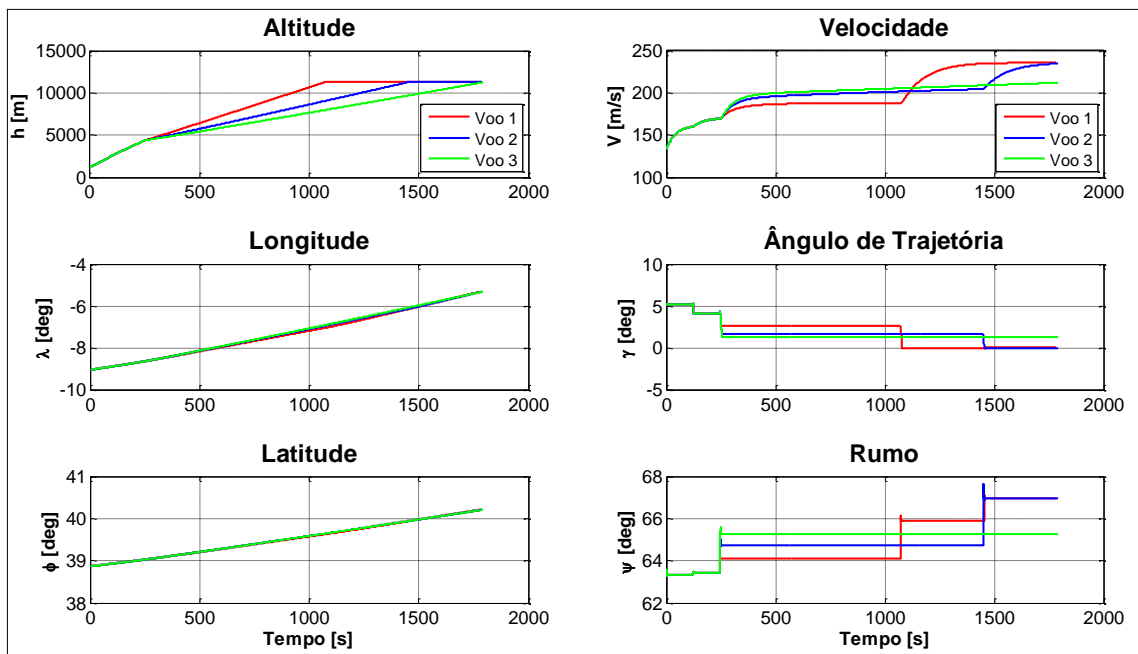


Figura IV.1: Posição e controlo da aeronave para a análise dos perfis de subida.

A Figura IV.2 representa os resultados para a tração, aceleração, fluxo de combustível e massa de combustível consumido.

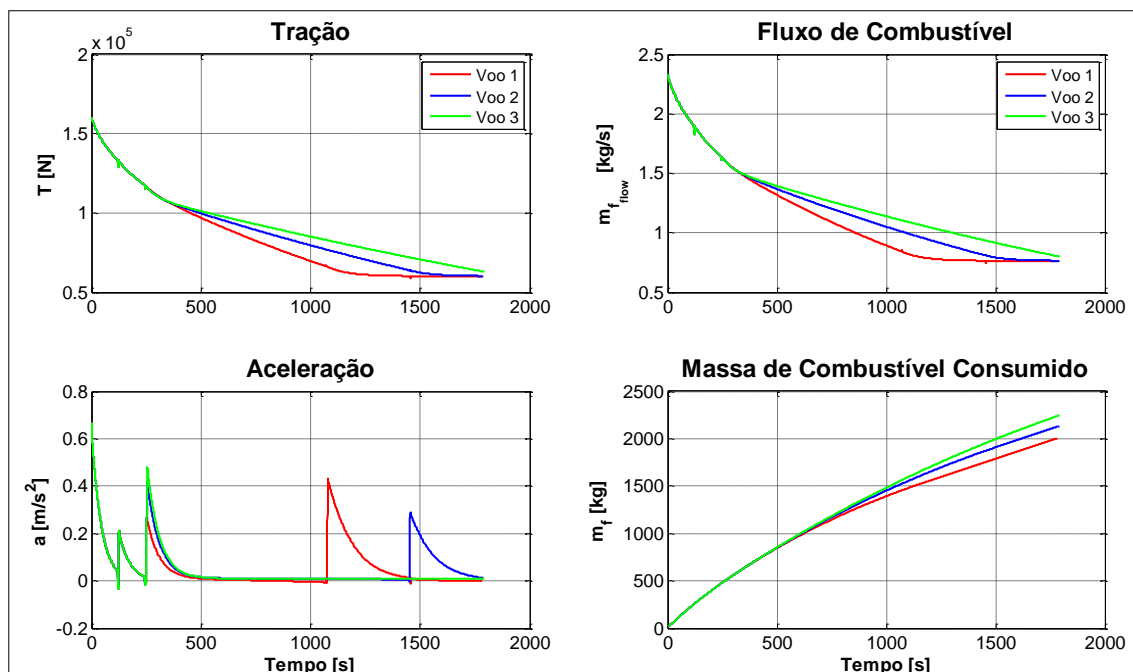


Figura IV.2: Tração, aceleração e consumo de combustível para a análise dos perfis de subida.

Na Tabela IV.1 fez-se uma análise das características dos diferentes voos, para a chegada a cruzeiro e chegada ao waypoint final. São apresentados os resultados para o tempo, velocidade, ângulo de trajetória e combustível consumido.

	Chegada ao Cruzeiro			Chegada ao waypoint final		
	Voo 1	Voo 2	Voo 3	Voo 1	Voo 2	Voo 3
Tempo [s]	1071	1449	1794	1781	1790	1794
Velocidade [m/s]	187	204	212	236	235	212
Ângulo de subida [deg]	2,6	1,7	1,2	0	0	1,2
Combustível consumido [kg]	1453	1867	2246	2003	2132	2246

Tabela IV.1: Análise dos resultados para os diferentes perfis de subida.

Durante a simulação dos voos verifica-se nos gráficos dos resultados a existência de parâmetros que se comportam da mesma forma, sendo estes parâmetros de natureza física e da formulação utilizada no algoritmo de navegação. A tração máxima T_{max} disponível nos motores diminui com o aumento da velocidade longitudinal V e com o aumento da altitude h por diminuição da massa específica do ar ρ . A força de resistência aerodinâmica D diminui com o aumento da altitude por diminuição da massa específica do ar, no entanto, aumenta com o aumento da velocidade longitudinal. O consumo específico c diminui com o aumento da altitude por diminuição da temperatura T_K do ar. A razão de subida máxima permitida para uma aeronave depende da capacidade propulsiva, quanto maior a razão entre a tração máxima disponível dos motores e o peso da aeronave, maior a razão de subida.

A velocidade da aeronave durante a subida diminui com o aumento do ângulo de subida, no entanto a aeronave chega mais cedo ao cruzeiro com um menor consumo de combustível. A chegada antecipada a cruzeiro leva a um aumento da distância percorrida até ao waypoint final, e por isso, se o tempo não fosse fixo a aeronave chegaria mais tarde ao destino. No entanto, com o tempo de chegada fixo é necessário um aumento da velocidade média da aeronave. Por fim, verifica-se que o perfil mais económico é o Voo 1 que permite uma diminuição de 243kg de combustível consumido, cerca de 10,8% do combustível consumido no Voo 3.

4.1.2. Otimização da Trajetória de Subida

Neste ponto vai ser feita uma otimização do Voo 1 apenas até atingir a altitude de cruzeiro, sendo este designado de Voo 4. O tempo de chegada ao cruzeiro para os dois voos é fixo de 1071 segundos, cerca de 18 minutos.

Na Figura IV.3 estão representados os gráficos dos resultados obtidos para a altitude, longitude, latitude, velocidade, ângulo de trajetória e rumo.

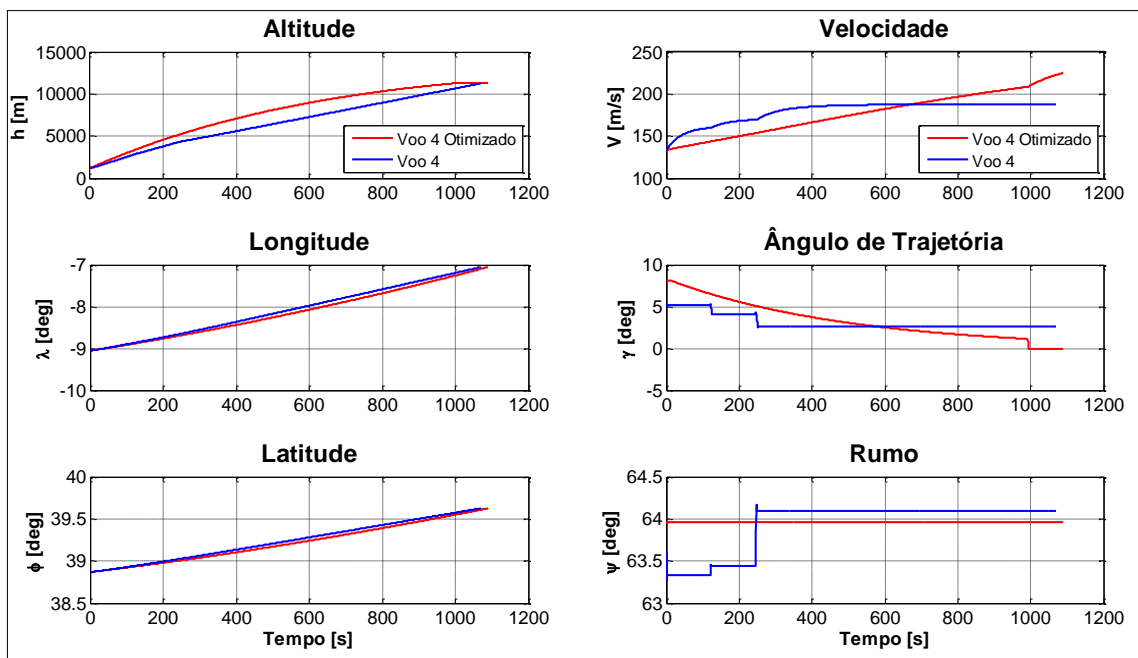


Figura IV.3: Posição e controlo da aeronave para a otimização de subida.

Na Figura IV.4 estão representados o Voo 4 a azul e o Voo4 Otimizado a vermelho em Google™earth.

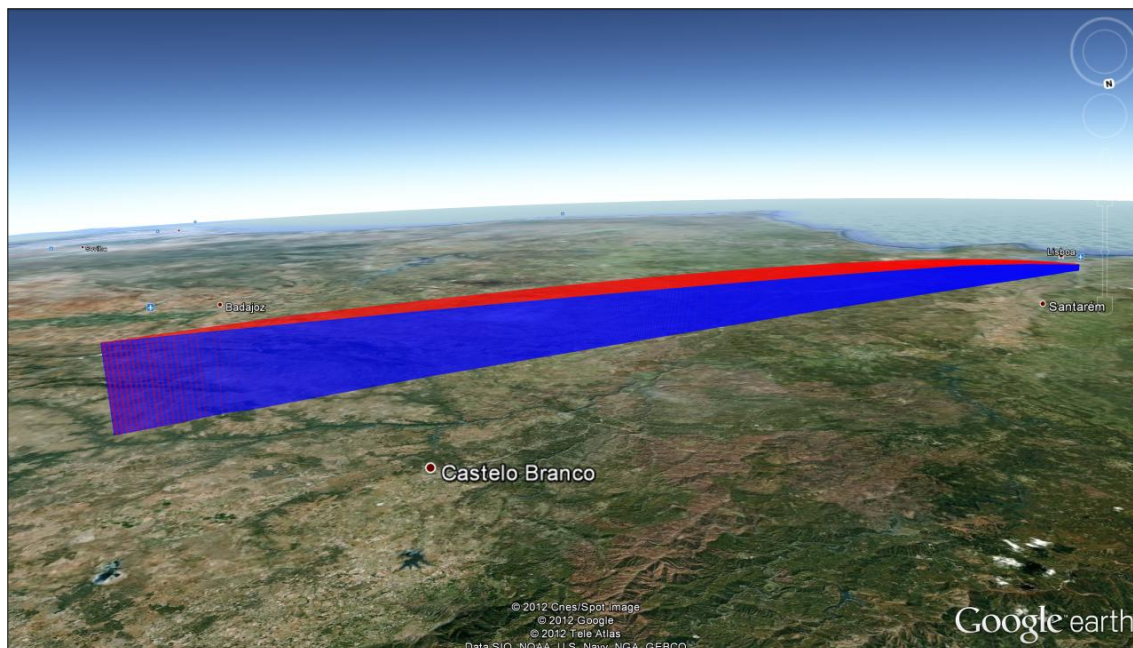


Figura IV.4: Representação do Voo 4 e Voo 4 Otimizado em Google™earth [24].

A Figura IV.5 representa os resultados para a tração, aceleração, fluxo de combustível e massa de combustível consumido.

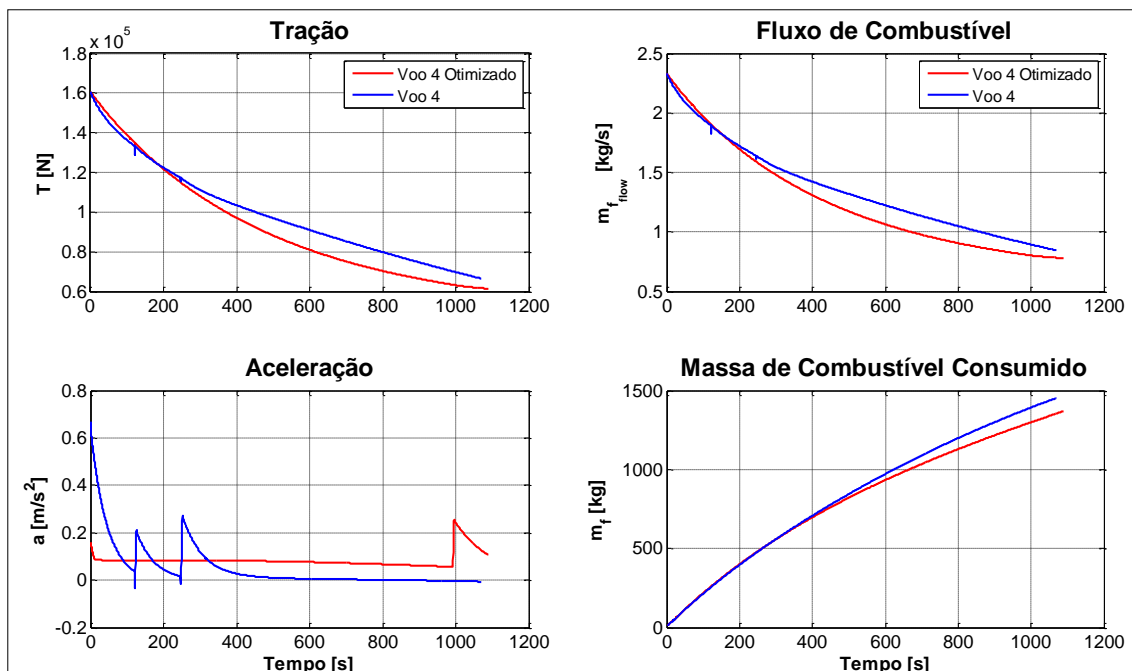


Figura IV.5: Tração, aceleração e consumo de combustível para a otimização de subida.

Na Tabela IV.2 fez-se uma análise das características dos diferentes voos, para a chegada a cruzeiro. São apresentados os resultados para o tempo, velocidade e combustível consumido.

	Chegada ao Cruzeiro	
	Voo 4	Voo 4 Otimizado
Tempo [s]	1071	1089
Velocidade [m/s]	187	225
Combustível consumido [kg]	1453	1368

Tabela IV.2: Análise dos resultados do Voo 4 e Voo 4 Otimizado.

À semelhança dos resultados anteriores o consumo específico c diminui com o aumento da altitude por diminuição da temperatura T_K do ar. A trajetória para o Voo 4 Otimizado permite um menor consumo de combustível, mas, sendo o ângulo de subida variável a distancia percorrida é maior e por isso a velocidade média é superior.

A otimização da trajetória de subida consiste em definir um ângulo de subida máximo tanto quanto possível para a aeronave tendo em conta a capacidade propulsiva e a tração máxima disponível dos motores. Quando a aeronave inicia a subida possui uma velocidade e altitude inferiores o que permite que esta tenha um ângulo de subida maior. Contudo, a velocidade e a altitude aumentam progressivamente até a aeronave chegar às condições de cruzeiro, o que por sua vez, leva a uma diminuição da tração máxima disponível dos motores. Com esta diminuição, de modo a que a aeronave não perca velocidade, o ângulo de subida tem que diminuir. Este procedimento de subida torna-se no procedimento mais económico a nível do consumo de combustível para a fase de subida, no entanto, verifica-se um atraso de 18 segundos na chegada ao cruzeiro. A otimização do Voo 4 permitiu diminuir 85kg de combustível consumido, cerca de 5,8%

4.2. Parte II - Descida

Na segunda parte são apresentados os resultados obtidos para a fase de descida. Para os diferentes voos considera-se um voo completo com diferentes perfis de descida desde a altitude de cruzeiro de 5800m até à fase de aproximação à pista. Trata-se de um voo de pequeno curso de Lisboa-Faro.

Para a análise de trajetórias de descida são considerados três perfis diferentes após o início da descida até à fase de aproximação ao aeroporto. O perfil de razão de descida máxima é apresentado como o Voo 7, o segundo de razão de descida média como Voo 6 e o terceiro de razão de descida baixa como Voo 5. O tempo de chegada à fase de aproximação ao aeroporto é fixo para os diferentes voos de 1560 segundos, cerca de 26 minutos.

Na Figura IV.6 estão representados os gráficos dos resultados obtidos para a altitude, longitude, latitude, velocidade, ângulo de trajetória e rumo.

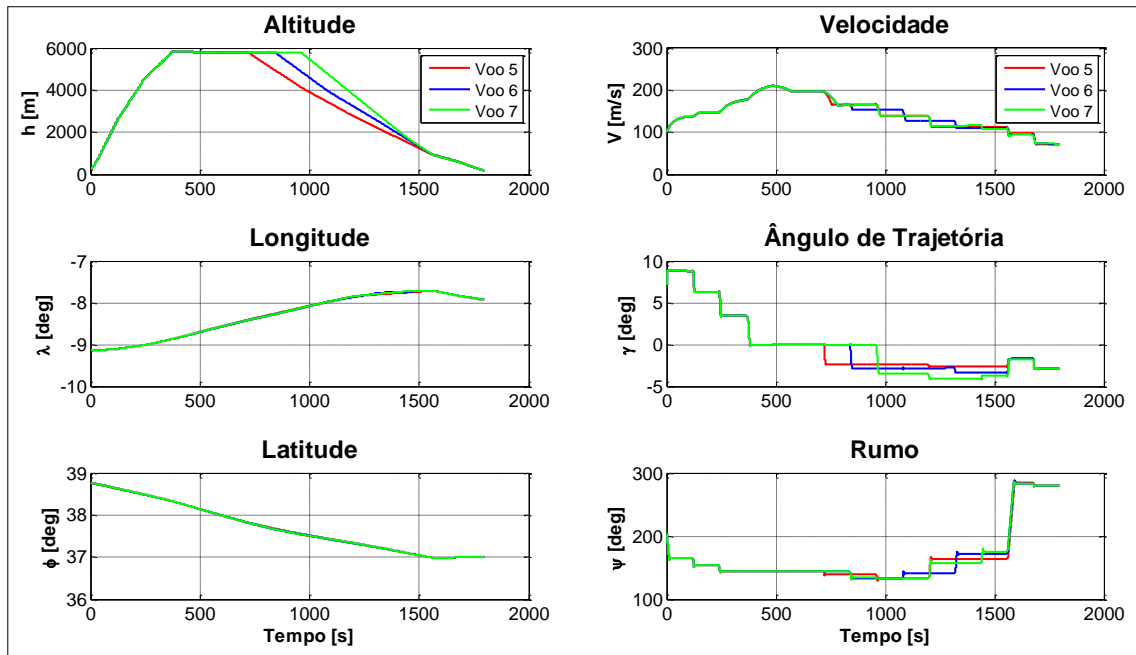


Figura IV.6: Posição e controlo da aeronave para a análise dos perfis de descida.

A Figura IV.5 representa os resultados para a tração, aceleração, fluxo de combustível e massa de combustível consumido.

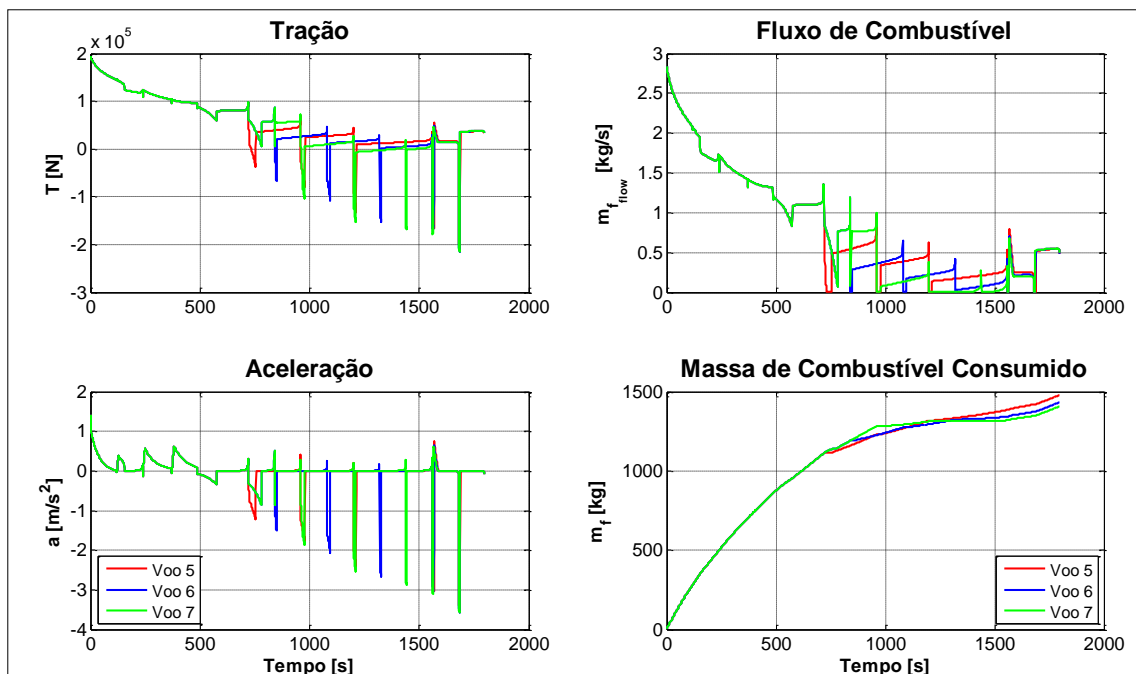


Figura IV.7: Tração, aceleração e consumo de combustível para a análise dos perfis de descida.

Na Tabela IV.3 fez-se uma análise das características dos diferentes voos, para o início da descida e início de aproximação ao aeroporto. São apresentados os resultados para o tempo, velocidade, ângulo de trajetória e combustível consumido.

	Início da descida			Início de Aproximação		
	Voo 5	Voo 6	Voo 7	Voo 5	Voo 6	Voo 7
Tempo [s]	720	840	960	1560		
Velocidade [m/s]	198	165	165	113	112	109
Ângulo de trajetória [deg]	-2,4	-2,8	-3,5	-2,6	-3,3	-3,7
Combustível consumido [kg]	1110	1189	1281	1385	1343	1319

Tabela IV.3: Análise dos resultados para os diferentes perfis de descida.

Para os diferentes voos analisados, as fases de subida são idênticas, o cruzeiro é feito à mesma altitude, as fases de descida diferenciam-se no ângulo de descida, e a aproximação ao aeroporto é feita da mesma forma. Após os 720 segundos de simulação, o Voo 5 dá início à descida, aos 840 segundos o Voo 6 e aos 960 segundos o Voo 7. Após o início da descida dos voos, a velocidade diminui progressivamente até à velocidade de aproximação ao aeroporto. Durante a fase de descida a tração apresenta valores negativos, que se traduzem pela aplicação de superfícies aerodinâmicas (*spoilers/airbrakes*). Neste contexto os motores deixam de produzir tração, operando em modo *idle*.

Iniciando a descida mais tarde é necessário um ângulo de descida superior, mas, no entanto, nota-se uma diminuição do consumo de combustível, para um tempo fixo de chegada. Nota-se que no Voo 7 foi possível diminuir 66kg de combustível consumido em relação ao Voo 5, cerca de 4,8%. Apesar de, durante a descida, os motores irem a maior parte do tempo em modo *idle*, por vezes é necessário aplicar tração para recuperar tempo de atraso. É então preferível uma diminuição da velocidade um pouco antes do final do cruzeiro e depois dar início à descida com um máximo ângulo de descida permitido, e assim reduzir a necessidade de aplicar tração durante esta fase do voo.

Apesar de se tornar mais económico a nível de consumo de combustível e de levar a uma redução do ruído nas cidades localizadas próximas dos aeroportos, este procedimento de descida pode levar a um aumento do uso de *spoilers/airbrakes*, à custa de um aumento no desgaste mecânico destas superfícies. Um outro problema que pode surgir com o prolongamento da fase de cruzeiro, que por sua vez leva a um ângulo de descida superior, é o aumento da distância total percorrida. Para um tempo fixo de chegada torna-se necessário aumentar a velocidade da aeronave, que por sua vez, irá aumentar o consumo total de combustível. Pode-se notar este efeito do Voo 6 para o Voo 7 onde a redução do consumo de combustível foi menos significativa do que do Voo 5 para o Voo 6. Desta forma, para diminuir o consumo de combustível é necessário chegar mais tarde ao destino, mantendo a mesma velocidade média e prolongando o cruzeiro para descida mais acentuada.

4.3. Parte III - Cruzeiro

Nesta parte do trabalho vai proceder-se ao estudo da influência da altitude de cruzeiro no consumo de combustível total. Para isso vão ser simuladas três trajetórias de voo diferentes com altitudes de cruzeiro distintas, tratando-se do voo pequeno curso Lisboa-Faro da alínea anterior. Para a análise das trajetórias de cruzeiro, a partir do Voo 7, foram criados outros dois voos com altitudes de cruzeiro diferentes. Na Figura IV.8 estão representados os gráficos dos resultados obtidos para a altitude, longitude, latitude, velocidade, ângulo de trajetória e rumo.

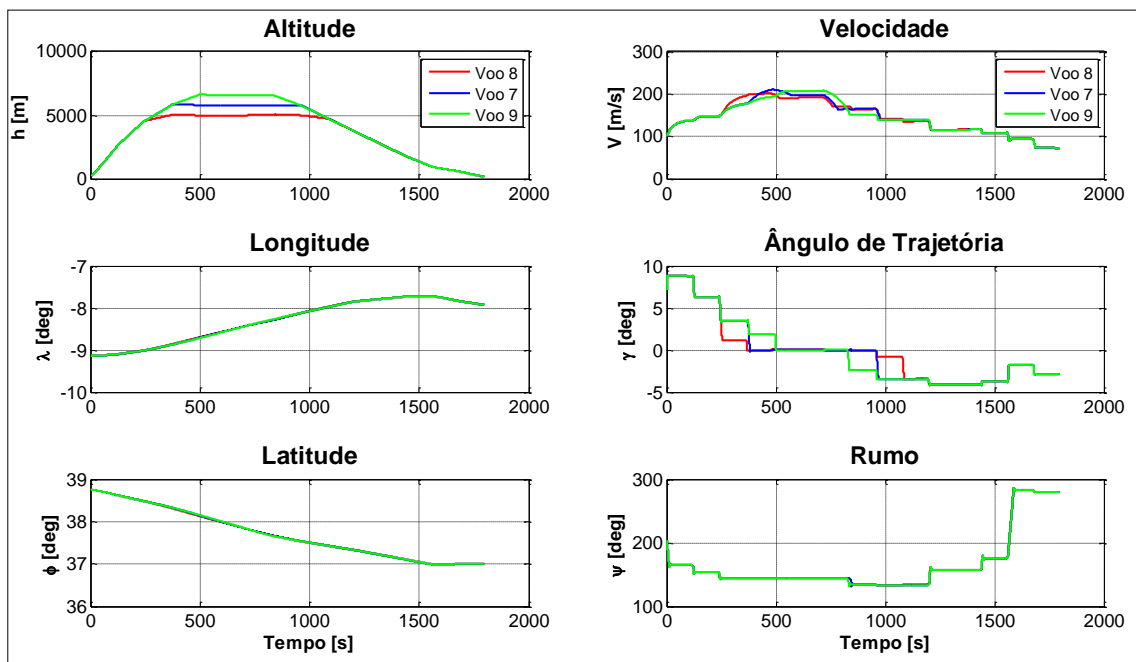


Figura IV.8: Posição e controlo da aeronave para a análise das altitudes de cruzeiro.

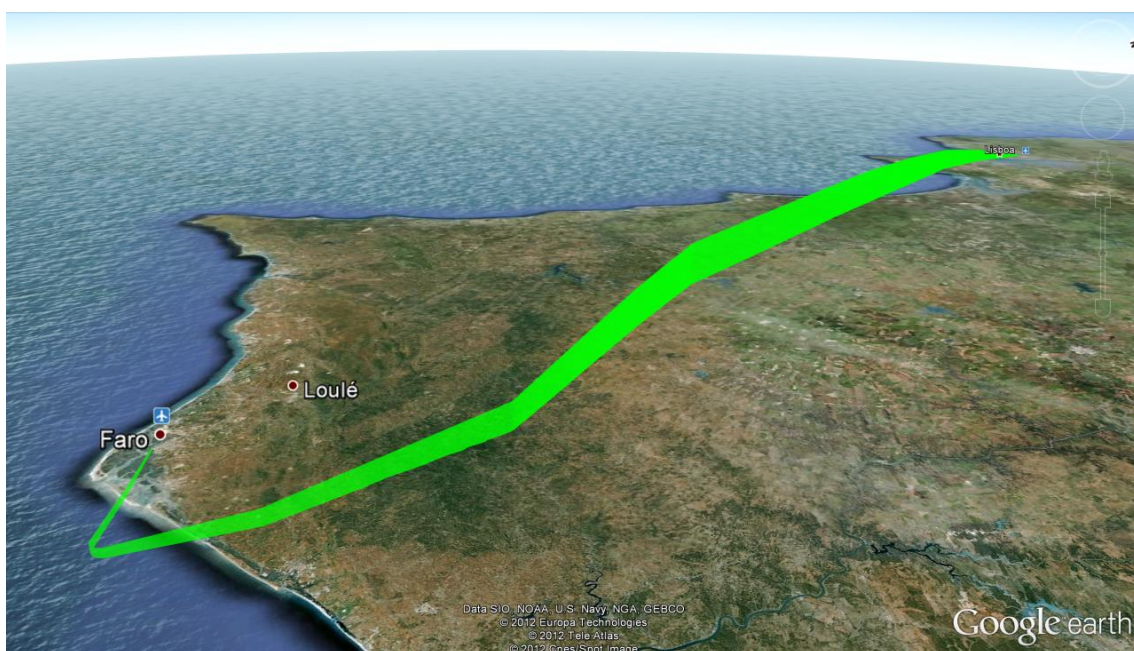


Figura IV.9: Representação do Voo 9 em Google™earth [24].

A Figura IV.10 representa os resultados para a tração, aceleração, fluxo de combustível e massa de combustível consumido.

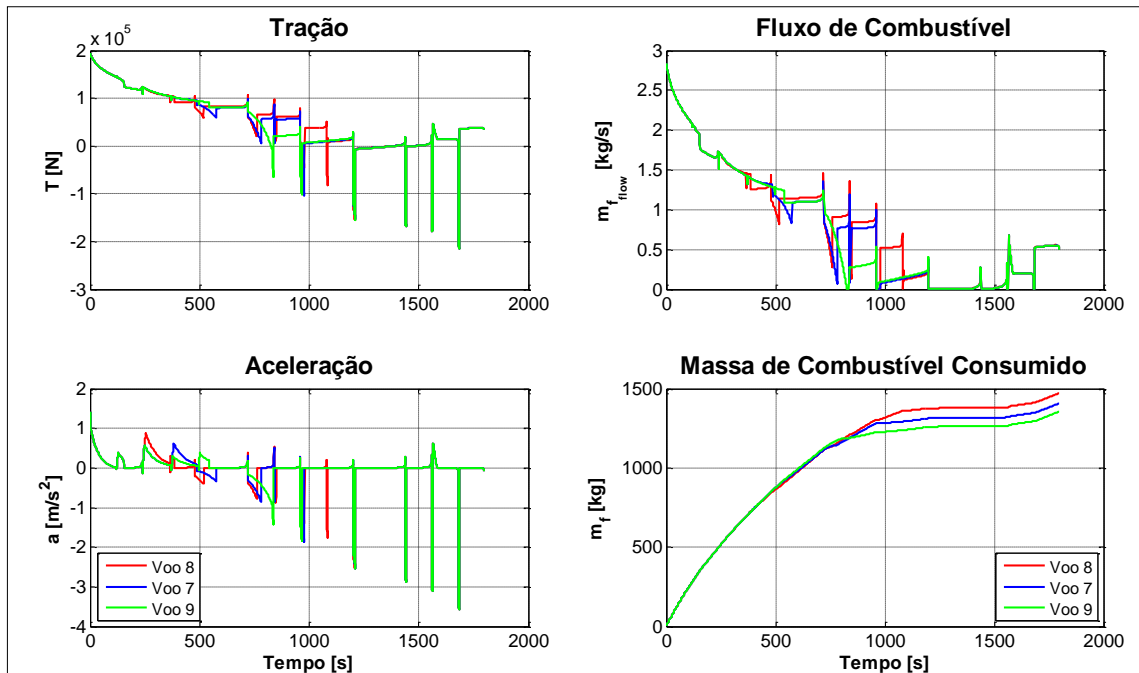


Figura IV.10: Tração, aceleração e consumo de combustível para a análise das altitudes de cruzeiro.

Na Tabela IV.4 fez-se uma análise das características dos diferentes voos, desde o waypoint 1 até ao waypoint 2. São apresentados os resultados para o tempo, altitude e combustível consumido.

	Waypoint 1			Waypoint 2		
	Voo 8	Voo 7	Voo 9	Voo 8	Voo 7	Voo 9
Tempo [s]	240			1200		
Altitude [m]	4442			3800		
Combustível consumido [kg]	496			1376	1313	1260

Tabela IV.4: Análise dos resultados para os diferentes perfis de cruzeiro.

Para os diferentes voos, as fases de subida até aos 4442m, as fases de descida após os 3800m e as aproximações ao aeroporto são idênticas. O cruzeiro é feito a altitudes distintas, o Voo 8 inicia o cruzeiro aos 5000 m enquanto os Voos 7 e 9 prolongam a sua subida, iniciando o cruzeiro nos 5800 m e 6600 m, respetivamente. Após análise dos diferentes perfis de cruzeiro verifica-se que o prolongamento da subida para uma altitude de cruzeiro superior compensa no consumo de combustível total para o mesmo tempo de duração do voo. No entanto, a velocidade média é superior uma vez que a aeronave percorre uma distância superior desde o waypoint 1 até ao waypoint 2.

Deve-se notar que a adição de distância percorrida para efetuar o cruzeiro a altitudes máximas, permite que a aeronave se mantenha durante um maior tempo do voo sujeita a menores esforços aerodinâmicos, devido às propriedades da atmosfera. Mesmo sendo

necessário ter uma fase de subida prolongada com os motores em potência máxima assim como uma velocidade média superior para um tempo fixo de chegada, é possível observar uma diminuição significativa no consumo de combustível. Isto verifica-se uma vez que a fase de descida também se inicia mais cedo, sendo possível nesta compensar o consumo adicional de combustível. A trajetória do Voo 9 permitiu uma diminuição de 116kg de combustível consumido em relação ao Voo 8, cerca de 8.4%.

A Tabela IV.5 indica os resultados para o início e fim das diferentes fases do Voo 9.

Voo 9	Início Subida	Início Cruzeiro	Início Descida	Início Aproximação	Chegada
Altitude [m]	150	6600	6600	953	160
Tempo [s]	0	495	829	1560	1800
Velocidade [m/s]	100	194	161	109	72
Ângulo de trajetória [deg]	8,8	0	-3,7	-2,9	-2,9
Combustível consumido [kg]	0	866	1187	1267	1355

Tabela IV.5: Análise dos resultados das diferentes fases do Voo 9.

Durante a fase de subida do Voo 9, após descolagem do aeroporto de Lisboa até uma altitude de cruzeiro de 6600m, a aeronave consome 866kg de combustível, com uma duração de 8 minutos e 15 segundos. Na fase de cruzeiro verifica-se um consumo de 321kg de combustível, com uma duração de 5 minutos e 34 segundos. Para a fase de descida dos 6600m até aos 953m a aeronave gasta 80kg de combustível, com uma duração de 12 minutos e 11 segundos. E finalmente na fase de aproximação à pista do aeroporto de Faro a aeronave consome 88kg de combustível, com uma duração de 4 minutos. A percentagem de combustível consumido corresponde a 64%, 24%, 6% e 6%, para as fases de subida, cruzeiro, descida e aproximação ao aeroporto, respetivamente.

Esta análise foi feita para um voo de curto curso, onde não é possível atingir a altitude máxima de cruzeiro da aeronave. No entanto para voos de médio e longo curso não existe este problema, uma vez que a duração do voo permite à aeronave realizar a fase de cruzeiro na altitude máxima.

Capítulo V - Conclusão

5.1. Conclusão

Os objetivos na presente dissertação consistiram na análise do consumo de combustível para diferentes trajetórias de voo nas diferentes fases de um voo comercial. Assim, na primeira parte foi realizada a análise da fase de subida, na segunda a fase de descida e na terceira a fase de cruzeiro. Foram analisados voos de médio curso para a fase de subida e pequeno curso para as fases de descida e cruzeiro. As trajetórias consistiram na navegação através de waypoints definidos em 4D para uma aeronave comercial.

Foi utilizado um processo de simulação iterativo que consistiu no cálculo, a cada passo de simulação do voo, das referências para a velocidade, ângulo de trajetória e rumo da aeronave, para passar numa sequência de waypoints definida em 4D. Considerou-se a navegação em 4D com o objetivo de definir um tempo fixo de chegada, permitindo assim diminuir os atrasos. A simulação dinâmica do sistema baseou-se na integração das equações dinâmicas do sistema usando o algoritmo de *Butcher* para sistemas controlados, sendo este sistema de orientação e o sistema de navegação 4D implementados em *Matlab*[®]. Durante todo o processo da orientação de navegação adicionou-se o cálculo do consumo de combustível, que permitiu fazer a sua análise.

Após uma análise geral dos resultados obtidos, verifica-se, na primeira parte, uma maior economia de combustível para um ângulo de subida superior. Nesta parte é feita também uma otimização da trajetória de subida para um voo de ângulo de subida constante, verificando-se que ângulos de subida máximos levam a uma diminuição significativa no consumo de combustível. Na segunda parte é feita uma análise do ângulo de descida, em que se verifica uma maior economia de combustível para um ângulo de descida superior. Na terceira parte é feita uma análise da altitude de cruzeiro, verificando-se uma maior economia de combustível para altitudes de cruzeiro superiores. É feita uma análise geral do Voo 9 de pequeno curso de Lisboa-Faro, onde se verifica um maior consumo durante a subida, e na fase de cruzeiro. Verifica-se um menor consumo de combustível na fase de descida e aproximação ao aeroporto, sendo que, na última fase, os procedimentos adequados de aproximação nunca devem ser postos em causa para diminuição do consumo de combustível.

O parâmetro principal para a diminuição do consumo de combustível é o consumo específico de combustível SFC dos motores. Este parâmetro diminui com o aumento da altitude por diminuição da temperatura do ar, o que para motores *turbo-fan* é um fator importante para o aumento da eficiência propulsiva. O peso e a força de resistência aerodinâmica da aeronave são, respetivamente, forças de origem inercial e aerodinâmica que influenciam a cinemática da aeronave. Não é possível evitar o facto da força de resistência aerodinâmica aumentar com o aumento da velocidade, contudo, esta força diminui com o aumento da altitude, pelo que durante a navegação deve evitar-se voar a baixas altitudes.

Tendo em conta as restrições do controlo de tráfego aéreo, normas de segurança e a distância do voo, a otimização do consumo de combustível faz-se maximizando a altitude de voo da aeronave.

Neste trabalho foram abordados todos os objetivos pretendidos, sendo possível dar a conhecer os pontos fundamentais para as companhias aéreas poderem gerir as trajetórias de voo, de forma a obterem uma maior economia de combustível das suas aeronaves. Comparativamente com métodos baseados na otimização de funções diferenciáveis, os métodos utilizados neste trabalho requerem um menor esforço computacional, apresentando em simultâneo uma boa precisão de resultados finais, podendo estes serem utilizados em diversas aplicações no que respeita à gestão de trajetórias das companhias aéreas.

Gostaria como possível trabalho futuro, que fosse criado um sistema físico de navegação que tivesse por base o algoritmo de navegação criado nesta Dissertação, de forma a poder receber continuamente por via rádio a informação da posição de um UAV, e com isto controlar no solo a sua navegação em torno de um conjunto de waypoints definidos em 4D. Esta possibilidade permitia testar o algoritmo de navegação em ambiente real, substituindo assim o Algoritmo de *Butcher*, utilizado para a simulação da aeronave, num sistema real UAV.

Referências

- [1] Erzberger, H. and Lee, H., “Constrained Optimum Trajectories with Specified Range” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 3, No. 1, 1979, pp. 78-85.
- [2] Kreindler, E. and Neuman, F., “Minimum Fuel Horizontal Flight Paths in the Terminal Area” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 5, 1982, pp. 490-497.
- [3] Burrows, J. W., “Fuel-Optimal Aircraft Trajectories with Fixed Arrival Times,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 6, No. 1, 1982, pp. 14-19.
- [4] Kreindler, E. and Neuman, F., “Minimum-Fuel, Three-Dimensional Flight Paths for Jet Transports” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 5, 1985, pp. 650-657.
- [5] Oberle, H. J., Grimm, W. and Well, K. H. “Periodic Control for Minimum-Fuel Aircraft Trajectories” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 9, No. 2, 1986, pp. 169-174.
- [6] Redmond, J. and Silverberg, L., “Fuel Consumption in Optimal Control” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 2, 1992, pp. 424-430.
- [7] Betts, J. T. and Cramer, E. J., “Application of Direct Transcription to Commercial Aircraft Trajectory Optimization” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 1, 1995, pp. 151-159.
- [8] Hagelauer, P. and Mora-Camino, F., “A Soft Dynamic Programming Approach for on-line aircraft 4D-Trajectory Optimization” *Journal of Operational Research*, 107, 1998, pp. 87-95.
- [9] Sachs, G. and Dinkelmann, M., “Reduction of Coolant Fuel Losses in Hypersonic Flight by Optimal Trajectory Control” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 6, 1996, pp. 1278-1284.
- [10] Braden, E., Nah, R. S. and Vadali, S. R., “Fuel-Optimal, Low-Thrust, Three-Dimensional Earth-Mars Trajectories” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 6, 2001, pp. 1100-1107.
- [11] Chen, Y. and Sheu, D., “Parametric Optimization Analysis for Minimum-Fuel Low-Thrust Coplanar Orbit Transfer” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 6, 2006, pp. 1446-1450.
- [12] Franco, A., Rivas, D. and Valenzuela, A., “Minimum-Fuel Cruise at Constant Altitude with Fixed Arrival Time” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 1, 2010, pp. 280-285.
- [13] Turgut, E. T. and Rosen, M. A., “Relationship between Fuel Consumption and Altitude for Commercial aircraft During Descent” *Journal of Aerospace Science and Technology*, 17, 2012, pp. 65-73.

- [14] Prats, X., Puig, V., Quevedo, J. and Nejari, F., “Lexicographic Optimization for Optimal Departure Aircraft Trajectories” *Journal of Aerospace Science and Technology*, 14, 2010, pp. 26-37.
- [15] Khardi, S. and Abdallah, L., “Optimization Approaches of Aircraft Flight Path Reducing Noise” *Journal of Applied Acoustics*, 73, 2012, pp. 291-301.
- [16] Hagelauer, P. and Mora-Camino, F., “Evaluation of Practical Solutions for Onboard Aircraft Four-Dimensional Guidance” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 5, 1997, pp. 1052-1054.
- [17] Airbus, “Flight Operations Support and Line Assistance - Getting to Grips With Fuel Economy”, issue 3, July 2004.
- [18] ATR, “Fuel Saving - Contributing to a Sustainable Air Transport Development”, 2011.
- [19] Boeing, “Fuel Conservation Strategies: Cost Index Explained”, *Boeing Commercial Aeromagazine*, February 2007.
- [20] WWW http://1.bp.blogspot.com/_CqGG3Q_RPUg/S9ASzNc-qvI/AAAAAABBg/aWV7ULoVFUg/s1600/The+holding+pattern.jpg, Consultado em Janeiro de 2012.
- [21] Bousson, K., “Geodetic Waypoint Navigation Guidance”, Private Communication, Department of Aerospace Sciences, University of Beira Interior, 2008.
- [22] Vermeille, H., “Direct transformation from geocentric coordinates to geodetic coordinates”, *Journal of Geodesy*, 76, 2002, pp. 451-454.
- [23] WWW <<http://www.flightradar24.com>>, Consultado em Maio de 2012.
- [24] 2011 Google Inc., Google Earth 6.1.0.5001.
- [25] R. Fletcher, “Practical Methods of Optimization”, second edition, May 2000.
- [26] Machado, P., “Otimização e Controlo de Trajetórias 4D Definidas por Waypoints”, Dissertação de Mestrado, Universidade da Beira Interior, Junho 2008.
- [27] Betts, J. T., “Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, Mach-April 1998, pp. 193-207.
- [28] De Gernon, La Vecchia and Rigaldo, “Performance and Design of the Airbus A320 - Analysis of a Subsonic Aircraft”, *Performance Analysis of the A320*, December 2009.
- [29] Matt Zagoren “Airbus A320-232 Limitations”, 2009.

Anexos

Anexo A - Métodos de Otimização de Funções Diferenciáveis

A maioria dos problemas em engenharia, principalmente em controlo, em estimação de estados e em design, podem ser colocados sob a forma de problemas de otimização. De uma forma geral pode afirmar-se que a otimização consiste num processo de melhor escolha tendo em conta um conjunto de possibilidades. Neste capítulo irá ser feita uma breve revisão de algumas noções e conceitos base que irão ser utilizados no processo de otimização do problema proposto [25, 26, 27].

Definições

Sejam D um subconjunto compacto de \mathcal{R}^n e $f(x): D \rightarrow \mathcal{R}$ uma função. Um ponto $x^* \in D$ é um minimizador local de $f(x)$ em D se existir uma vizinhança V de x^* , com $V \subseteq D$, tal que:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in V, \quad f(x^*) \leq f(x) \quad (1)$$

Neste caso o número $y^* = f(x^*)$ é o mínimo local de $f(x)$ em D . Uma função pode ter vários minimizadores locais com os mínimos locais correspondentes sendo eventualmente diferentes uns dos outros. O ponto $x^* \in D$ é um minimizador global de $f(x)$ em D se:

$$\forall x \in D, \quad f(x^*) \leq f(x) \quad (2)$$

Neste caso o número $y^* = f(x^*)$ é o mínimo global de $f(x)$ em D . Embora uma função possa ter vários minimizadores globais, tem apenas um mínimo global, isto é, se houver vários minimizadores globais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*$, então:

$$f(x_1^*) = f(x_2^*) = \dots = f(x_p^*) \quad (3)$$

Para definir o que é um maximizador (local ou global) de $f(x)$ em D , basta substituir a desigualdade \leq nas definições precedentes pela desigualdade \geq .

Proposição 1: Qualquer minimizador global de $f(x): D \rightarrow \mathcal{R}$ é também um minimizador local de $f(x)$ em D , mas há minimizadores locais que não são minimizadores globais de $f(x)$.

Corolário 1: Se $f(x): D \rightarrow \mathcal{R}$ tiver apenas um minimizador local, então este é o minimizador global de $f(x)$ em D .

Definição 1: Minimizar uma função $f(x)$ num domínio D significa procurar pelo menos um minimizador (local ou global) de $f(x)$ em D e o mínimo (local ou global) correspondente. Por convenção, escreve-se: $\text{Min}_{x \in D} f(x)$, para dizer: minimizar $f(x)$ em D , ou: $\text{Max}_{x \in D} f(x)$, para dizer: maximizar $f(x)$ em D .

Proposição 2: Maximizar $f(x)$ em D é equivalente a minimizar $-f(x)$ em D . Esta proposição significa simplesmente que os maximizadores da função $f(x)$ em D são os

minimizadores da sua função oposta $(-f(x))$. Por isso, falar-se-á apenas de minimização no que segue.

Programação Não Linear

Nesta secção vai ser explicado, de forma geral, a metodologia da programação não linear. Esta metodologia consiste num conjunto de métodos que pretendem descobrir qual o mínimo ou máximo, local ou global, de uma determinada função $f(x)$ que seja não linear.

Métodos Iterativos

Os métodos para otimização de funções com várias variáveis podem ser agrupados em duas classes: métodos de procura que utilizam apenas valores da função, comparando-os para progredir em direção ao minimizante e métodos do gradiente que utilizam não só valores de $f(x)$, mas também informação relativa às derivadas, na forma do vetor gradiente e da matriz Hessiana.

Existência do Mínimo Global

Considere-se o problema $\text{Min}_{x \in D} f(x)$, $x \in \mathcal{R}^n$, então existem duas possibilidades:

- Se o conjunto $\{f(x)|x \in D\}$ não possuir fronteiras inferiores, então não existe uma solução ótima para o problema.
- Se o conjunto $\{f(x)|x \in D\}$ possuir delimitação inferior, nesta situação existem dois casos para provar a solução ótima.

Teorema 1. O mínimo de $f(x)$ num domínio D existe se $f(x)$ é contínua. (i.e. D é compacto em \mathcal{R}^n):

Teorema 2. O mínimo global existe se $f(x)$ é contínuo e coercivo, e D é fechado. (i.e. $f(x^k) \rightarrow \infty, \forall \|x^k\| \rightarrow \infty$).

Métodos Iterativos Descendentes

Considere-se a minimização de uma função sem restrições diferenciável e contínua $f(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$. Supondo que $f(x)$ é delimitada inferiormente, $f(x) \geq L, \forall x \in \mathcal{R}^n$. Os métodos iterativos descendentes, de maneira geral, começam com um ponto arbitrário e em seguida geram novos pontos tal que $f(x)$ esteja a decrescer, isto é:

- Arbitra-se um ponto $x^0 \in \mathcal{R}^n$;
- Gera-se sucessivamente x^1, x^2, \dots, x^k tal que $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

Método do Gradiente

Considera-se por isso uma função $f(x): D \rightarrow \mathcal{R}$, D sendo um subconjunto compacto de \mathcal{R}^n . Supõe-se que $f(x)$ é de classe C^1 em D , e pretende-se resolver o seguinte problema:

$$\text{Min}_{x \in D} f(x) \quad (4)$$

Gradiente de uma função

O gradiente da função $f(x)$ em $x \in \mathcal{R}^n$ é o vetor definido por:

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^T \quad (5)$$

Onde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1 - h, x_2, \dots, x_n)}{2h} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= \frac{f(x_1, x_2 + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2 - h, \dots, x_n)}{2h} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n + h) - f(x_1, x_2, \dots, x_n - h)}{2h} \end{aligned} \quad (6)$$

Em que $h = 10^{-6}$.

O gradiente de uma função multivariável num ponto x é a direção de subida máxima quando se desloca na curva desta função a partir de x . Um deslocamento sobre esta curva a partir de x e na direção de $\nabla f(x)$ resulta numa subida maior do que em qualquer outra direção com um percurso de mesmo comprimento. Pela mesma razão, um percurso na direção oposta ao gradiente dá lugar a uma descida máxima. Deste modo, é claro que seguindo a direção oposta ao gradiente no percurso sobre a curva da função, acaba-se, mais tarde ou mais cedo, por encontrar um mínimo desta função. O método do gradiente é um método iterativo de procura que parte de um ponto inicial $x_0 \in D$ (em geral escolhido arbitrariamente), e que vai definir o vetor x_{k+1} a partir de x_k pela fórmula:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (7)$$

Onde $\alpha_k \in \mathcal{R}$ e d_k é um vetor que indica uma direção de descida para atingir um mínimo da função $f(x)$. Isto significa que se deve ter $(\nabla f(x_k))^T d_k < 0$ para garantir a descida. Note-se que o caso mais simples é quando se considera $d_k = -\nabla f(x_k)$. As iterações acabam-se quando $\|d_k\|$ atingir um valor relativamente próximo de zero. Seguem-se os modos de escolha do passo de descida α_k para garantir a convergência para um mínimo de $f(x)$.

- No método do gradiente com descida maior, escolhe-se α_k igual ao valor de $\alpha_k \geq 0$ que minimize a função g definida para qualquer α por:

$$g(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k) \quad (8)$$

- Em vez de achar o valor ótimo de α_k como é feito no caso do gradiente com o maior declive, pode apenas escolher-se α_k igual a um valor $\alpha \geq 0$ tal que:

$$f(x_k + \alpha d_k) < f(x_k) \quad (9)$$

- Ou então, o parâmetro α_k pode ser escolhido de tal modo que a sequência $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ construída convirja para zero e que $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k = +\infty$.

Otimização sem Restrições

Neste ponto considera-se um problema de otimização que não está sujeito a restrições. Considerando que são escolhidas n variáveis x para minimizar o escalar da função de custo ou função objetiva $f(x)$. As condições necessárias para que x^* seja um ponto satisfatório são:

$$c(x^*) = \nabla_x f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

Se for usado o método de Newton para encontrar o ponto onde o gradiente é zero, deve-se calcular a direção de descida usando:

$$H(x)d = -c(x) \quad (11)$$

Onde $H(x)$ é a matriz Hessiana simétrica das segundas derivadas da função de custo. Apesar disto existem ainda alguns obstáculos à utilização deste procedimento. O primeiro, $c(x) = 0$ é uma condição necessária mas não suficiente, porque o ponto de gradiente nulo tanto pode ser um máximo ou um mínimo. No ponto mínimo a matriz Hessiana é positivamente definida, mas pode não ser para um ponto longe da solução. Segundo, existe alguma ambiguidade na escolha da função de mérito, se a direção de descida é usada para estabilizar o método.

Matriz Hessiana

A matriz Hessiana de uma função f de n variáveis é a matriz quadrada com n colunas e n linhas das derivadas parciais de segunda ordem da função, descrevendo a curvatura local da função.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (12)$$

Se todas as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x)$ existirem, a matriz Hessiana de $f(x)$ é dada por:

$$H(f(x))_{ij}(x) = D_i D_j f(x) \quad (13)$$

Onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e D_i é o operador diferencial no que diz respeito ao i^{esimo} argumento, a matriz Hessiana é então:

$$H(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Escolha do Passo de Descida

Para o cálculo do passo de descida α_k que garanta a convergência da função $f(x)$ existem os seguintes métodos mais usados:

- α_k é escolhido tal que $f(x^k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha d_k)$. (Regra da Minimização)
- α_k é escolhido como sendo uma constante, $\alpha_k = s, \forall k$. (Passo de descida constante)

É de notar que a escolha desta forma do passo de descida leva a que os pontos gerados não convirjam necessariamente.

- Para $k = 1$, $\alpha_k = s$, em cada passo $k + 1$ se $\alpha_k = s$ não for suficientemente pequeno para que a desigualdade $f(x^k + \alpha_k d_k) < f(x^k)$ seja cumprida, então tentar $\alpha_k = \delta^k s$ para $\delta \in [0, 1]$. (Regra da Redução Sucessiva)

Método de Armijo

Este método permite determinar um valor desejável para o passo α_k . Consiste na combinação dos métodos da Regra da Minimização com a Regra da Redução Sucessiva acima definidas.

- Iniciar $\alpha = 1$ e escolher um numero real δ tal que $0 < \delta < 1$;
- Repetir até $f(x_k + \alpha d_k) < f(x_k) + \delta \alpha g_k^T d_k$;
 - $\alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $\alpha_k = \alpha$.

Escolha da Direção de Descida, Métodos de Newton

O método de Newton consiste na aplicação direta da condição $\nabla^2 f(x^k) d^k = -\nabla f(x^k)$, então, assumindo que existe inversa da matriz Hessiana:

- Escolher um ponto ou vetor inicial x_0 , e $\varepsilon > 0$;
- Iniciar $k = 0$, e calcular a direção de descida: $d_k = -H_k^{-1} \nabla f(x_k)$, sendo H_k a matriz Hessiana da função $f(x_k)$;
- Repetir até $\|d_k\| < \varepsilon$;
 - $x_{k+1} = x_k + d_k$;

- $k = k + 1$;
- Calcular a direção de descida: $d_k = -H_k^{-1}\nabla f(x_k)$;
- Retomar o valor $f(x)_{min} = f(x_k)$ como valor mínimo da função $f(x)$, e o vetor $x_{min} = x_k$ como minimizador correspondente.

Método do tipo Quasi-Newton

O método de Newton precisa do cálculo das segundas derivadas na forma da matriz Hessiana. Estas derivadas podem ser difíceis de calcular quando $f(x)$ tem uma forma complicada. Assim os seguintes métodos têm como característica estimar a matriz Hessiana inversa G e determinar a direção de descida através de:

$$d^k = -G^k \nabla f(x^k) \quad (15)$$

BFGS - Broyden Fletcher Goldfarb Shanno

- Escolher um ponto (vetor) inicial x_0 , e ε muito pequeno (positivo e próximo de zero);
- Iniciar $k = 0$, e $G_k = I$; (I sendo a matriz identidade)
- Repetir até $\|d_k\| < \varepsilon$:
 - Calcular a direção de descida: $d_k = -G_k \nabla f(x_k)$;
 - $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, com α_k calculado pelo método de Armijo;
 - $s_k = \alpha_k d_k$;
 - $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$;
 - $G_{k+1} = \left(I - \frac{s_k y_k^T}{y_k^T s_k} \right) G_k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k} \right) + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k}$;
 - $k = k + 1$.
- Retomar o valor $f_{min} = f(x_k)$ como valor mínimo da função f , e vetor $x_{min} = x_k$ como minimizador correspondente.

Neste método a matriz G^0 pode ser arbitraria, desde que seja definida positivamente e simétrica, pois alguns métodos conservam estas propriedades de iteração para iteração. Na maior parte dos casos assume-se $G^0 = I$, resultando d^0 como a direção de descida máxima.

Método dos Gradientes Conjugados

Nos problemas considerados de grandes dimensões, em que o número de variáveis é elevado, interessa evitar o cálculo das segundas derivadas de $f(x)$ e até a resolução do sistema de equações lineares para o cálculo da direção de procura não é aconselhado. Estes métodos preocupam-se basicamente com a rapidez de convergência das iterações para um mínimo da função $f(x)$. Um dos métodos dos gradientes conjugados baseado no conceito do gradiente é o método de Polack-Ribière:

Método Polack-Ribière

- Escolher um ponto (vetor) inicial x_0 , e ε muito pequeno (positivo e próximo de zero);
- Calcular $d_0 = -\nabla f(x_0)$, e iniciar $k = 0$;
- Repetir até $\|d_k\| < \varepsilon$:
 - $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, com α_k calculado pelo método de Armijo;
 - $\beta_k = \frac{(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))^T \nabla f(x_{k+1})}{\|\nabla f(x_k)\|^2}$;
 - $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k d_k$;
 - $k = k + 1$.
- Retomar o valor $f_{min} = f(x_k)$ como valor mínimo da função f , e vetor $x_{min} = x_k$ como minimizador correspondente.

Otimização com Restrições

Restrições de Igualdade

Seja $f(x)$ a função objetiva $f(x)$, então pretende-se,

$$\min_{x \in \mathcal{R}^n} L(x, \lambda) \quad (16)$$

Sujeito a:

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (17)$$

Onde $m \leq n$.

A função Lagrangiana, $L(x, \lambda): \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$, é definida como:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \quad (18)$$

Onde $\lambda_i = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ são os multiplicadores de Lagrange. Agora pretende-se encontrar as condições necessárias da função $f(x)$ relativamente às restrições $h_i(x)$.

As condições necessárias para que (x^*, λ^*) seja um minimizador da função de Lagrange são:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) &= \nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_x h_i(x^*) = 0 \\ \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) &= \sum_{i=1}^m h_i(x^*) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

As expressões anteriores podem ser reescritas fazendo uma mudança de variável:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{n+m}, \quad G(z) = 0 \quad (20)$$

Este sistema representa as condições de KKT - *Karush Kuhn Tucker* para um problema com restrições de igualdade. As condições KKT são condições necessárias para que seja garantida a convergência local, caso a função $f(x)$ seja convexa então as condições KKT são suficientes para poder afirmar que existe um mínimo local.

Restrições de Desigualdade

Uma importante generalização para o problema de otimização ocorre quando são impostas restrições de desigualdade. Para minimizar a função objetiva $f(x)$ que satisfaça r restrições de desigualdade,

$$\min_{x \in \mathcal{R}^n} f(x) \quad (21)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} h_i(x) &= 0, & i &= 1, \dots, m \\ g_j(x) &\leq 0, & j &= 1, \dots, r \end{aligned} \quad (22)$$

Assim para que x^* seja mínimo local neste tipo de problemas, tem de existir um vetor único $\lambda^* \in \mathcal{R}^m$ e $\mu^* \in \mathcal{R}^r$ tal que:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_x h_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla_x g_j(x^*) = 0 \quad (23)$$

Com,

$$\begin{aligned} \mu_j^* &\geq 0, & \forall j &= 1, 2, \dots, r \\ \mu_j^* &= 0, & se: \forall j \notin \{j \in \{1, 2, \dots, r\} | g_j(x^*) = 0\} \end{aligned} \quad (24)$$

A solução das equações acima ou equações KT são a base de alguns algoritmos não lineares. Estes algoritmos tentam calcular os multiplicadores de Lagrange diretamente. Os métodos derivados do método de Newton garantem a convergência das equações de KKT.

Anexo B - Dados de Simulação

Dados da Aeronave [28, 29]

Definição	Símbolo	Valor	Unidade
Consumo específico de combustível ao nível do mar	c_0	1.4706×10^{-5}	[kg/Ns]
Posição máxima do acelerador	$\delta_{T_{max}}$	95%	
Envergadura	WS	34.1	[m]
Área alar	S	200	[m ²]
Coeficiente de resistência aerodinâmica	C_{D_0}	0.022	
Coeficiente de sustentação aerodinâmica	C_L	0.45	
Coeficiente de sustentação aerodinâmico máximo	$C_{L_{max}}$	1.4	
Fator de forma	K	0.043	
Velocidade mínima para configuração máxima de flaps/slats	$V_{min_{Lmax}}$	70	[m/s]
Velocidade mínima para configuração mínima de flaps/slats	$V_{min_{Lmin}}$	82	[m/s]
Velocidade máxima	V_{max}	260	[m/s]
Potência máxima dos motores ao nível do mar	T_0	240000	[N]
Peso máximo à decolagem	m	77000	[kg]
Aceleração mínima de subida	$a_{min_{climb}}$	0.073	[m/s ²]
Aceleração máxima do ângulo de trajetória	$a_{\gamma_{min}}$	0.9	[deg/s ²]
Aceleração máxima do rumo	$a_{\psi_{max}}$	2	[deg/s ²]
Aceleração gravítica	g	9.81	[m/s ²]
Valor mínimo para o ângulo de trajetória	γ_{min}	-10	[deg]
Valor máximo para o ângulo de trajetória	γ_{max}	15	[deg]
Velocidade máxima para o ângulo de trajetória	$d_{\gamma_{max}}$	0.4	[deg/s]
Velocidade máxima para o rumo	$d_{\psi_{max}}$	5	[deg/s]

Dados dos Waypoints [23]

Subida:

Voo 1

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	1166	-9.0584	38.8676	0
1	2819	-8.8688	38.9417	120
2	4321	-8.6544	39.0250	240
3	11255	-7.0539	39.6262	1071
4	11255	-6.1467	39.9383	1454
5	11255	-5.3160	39.2088	1781

Voo 2

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	1166	-9.0584	38.8676	0
1	2819	-8.8688	38.9417	120
2	4321	-8.6544	39.0250	240
3	11255	-6.1467	39.9383	1449
4	11255	-5.3160	39.2088	1790

Voo 3

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	1166	-9.0584	38.8676	0
1	2819	-8.8688	38.9417	120
2	4321	-8.6544	39.0250	240
3	11255	-5.3160	39.2088	1794

Voo 4

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	1166	-9.0584	38.8676	0
1	2819	-8.8688	38.9417	120
2	4321	-8.6544	39.0250	240
3	11255	-7.0539	39.6262	1071

Voo 4 Otimizado

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	1166	-9.0584	38.8676	0
1	11255	-7.0539	39.6262	1071

Descida:

Voo 5

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	150	-9.1444	38.7655	0
1	2515	-9.1049	38.6321	120
2	4442	-9.0182	38.4932	240
3	5800	-8.8735	38.3304	360
4	5800	-8.7206	38.1607	480
5	5800	-8.4183	37.8221	720
6	4161	-8.1230	37.5433	960
7	2781	-7.8478	37.3367	1200
8	953	-7.7154	36.9902	1560
9	602	-7.8299	36.9950	1680
10	160	-7.9269	37.0089	1800

Voo 6

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	150	-9.1444	38.7655	0
1	2515	-9.1049	38.6321	120
2	4442	-9.0182	38.4932	240
3	5800	-8.8735	38.3304	360
4	5800	-8.7206	38.1607	480
5	5800	-8.4183	37.8221	720
6	5800	-8.2819	37.6681	840
7	4000	-7.9799	37.4380	1080
8	2500	-7.7632	37.2243	1320
9	953	-7.7154	36.9902	1560
10	602	-7.8299	36.9950	1680
11	160	-7.9269	37.0089	1800

Voo 7

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	150	-9.1444	38.7655	0
1	2515	-9.1049	38.6321	120
2	4442	-9.0182	38.4932	240
3	5800	-8.8735	38.3304	360
4	5800	-8.7206	38.1607	480
5	5800	-8.4183	37.8221	720
6	5800	-8.2819	37.6681	840
7	5800	-8.1230	37.5433	960

8	3800	-7.8478	37.3367	1200
9	1800	-7.7272	37.1057	1440
10	953	-7.7154	36.9902	1560
11	602	-7.8299	36.9950	1680
12	160	-7.9269	37.0089	1800

Cruzeiro:

Voo 8

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	150	-9.1444	38.7655	0
1	2515	-9.1049	38.6321	120
2	4442	-9.0182	38.4932	240
3	5000	-8.8735	38.3304	360
4	5000	-8.7206	38.1607	480
5	5000	-8.4183	37.8221	720
6	5000	-8.2819	37.6681	840
7	5000	-8.1230	37.5433	960
8	4750	-7.9799	37.4380	1080
9	3800	-7.8478	37.3367	1200
10	1800	-7.7272	37.1057	1440
11	953	-7.7154	36.9902	1560
12	602	-7.8299	36.9950	1680
13	160	-7.9269	37.0089	1800

Voo 9

Waypoint k	Altitude h [m]	Longitude λ [deg]	Latitude φ [deg]	Tempo t_k [s]
Posição inicial	150	-9.1444	38.7655	0
1	2515	-9.1049	38.6321	120
2	4442	-9.0182	38.4932	240
3	5800	-8.8735	38.3304	360
4	6600	-8.7206	38.1607	480
5	6600	-8.4183	37.8221	720
6	6600	-8.2819	37.6681	840
7	5800	-8.1230	37.5433	960
8	3800	-7.8478	37.3367	1200
9	1800	-7.7272	37.1057	1440
10	953	-7.7154	36.9902	1560
11	602	-7.8299	36.9950	1680
12	160	-7.9269	37.0089	1800

**Anexo C - Artigo: “*Commercial Aircraft
Fuel Consumption Analysis for 4D
Navigation Trajectories*”**

**Submitted to: Control Engineering and
Applied Informatics, 2012**

Fernandes, M., and Bousson, K., “Commercial Aircraft Fuel Consumption Analysis for 4D Navigation Trajectories”, submitted to Control Engineering and Applied Informatics, September 2012.

Commercial Aircraft Fuel Consumption Analysis for 4D Navigation Trajectories

Márcio Fernandes¹, Kouamana Bousson²

Avionics and Control Laboratory, Department of Aerospace Science

University of Beira Interior, Covilhã, Portugal

Abstract

The problem of rising fuel prices has led airlines to search for new methods of navigation and further ways to optimize the fuel consumption of its aircraft. During the various phases of flight, there are several factors that influence directly and indirectly, the total fuel consumption, and so they must be controlled and optimized by all aircraft operators. In this work an analysis of the fuel consumption during the climb, cruise and descent phases is made using a 4D Waypoint Navigation method. This type of navigation consists of traveling through a sequence of predefined points in a given time of flight, which in turn define the trajectory of the flight. Therefore, a set of different possible paths to a given destination are analyzed, in order to assess which of these provides lower total fuel consumption. The algorithm used for 4D Waypoint Navigation was provided in class of Trajectory Optimization and Control. The navigation equations were derived by Butcher's algorithm for controlled systems, and their implementation was made in *Matlab*[®]. This study allows the quantification of fuel consumption for different phases of a commercial flight, in which it's verified that the climb and descent phases have the higher impact in the fuel consumption. Therefore, a good planning and choice of the flight trajectories, especially in these phases, allows a significant decrease in the cost related to the fuel consumption of the aircrafts.

Keywords:

Fuel Saving; Cost Index; Trajectories Control; 4D Waypoint Navigation; Fuel Consumption Reduction.

List of Symbols:

Definition	Symbol	Units
Flight Path Acceleration	a	[m/s ²]
Flight Path Angle Acceleration	a_γ	[deg/s ²]
Heading Acceleration	a_ψ	[deg/s ²]
Specific Fuel Consumption	c	[kg/Ns]
Drag Force	D	[N]
Flight Path Angle Velocity	d_γ	[deg/s]
Heading Velocity	d_ψ	[deg/s]
Step Size	dt	[s]

Throttle	δ_T	
Latitude	φ	[deg]
Gravitational Acceleration	g	[m/s ²]
Flight Path Angle	γ	[deg]
Altitude, Related to Sea Level	h	[m]
Lift Force	L	[N]
Longitude	λ	[deg]
Aircraft Weight	m	[kg]
Consumed Fuel Weight	m_f	[kg]
Fuel Flow	\dot{m}_f	[kg/s]
Heading	ψ	[deg]
Earth Equatorial Radius	R_e	[m]
Air Specific Mass	ρ	[kg/m ³]
Waypoint Radius	σ_k	[m]
Thrust	T	[N]
Air Temperature	T_K	[K]
Initial Time	t_i	[s]
Final Time	t_f	[s]
Waypoint Arrival Time	t_k	[s]
Flight Path Velocity	V	[m/s]
Aircraft Weight	W	[N]

I. Introduction

Nowadays many problems have arisen due to high fuel consumption of aircraft during different phases of the flight. The emission rates of carbon dioxide into the atmosphere and the high rising cost of fossil fuels have raised new issues related to the reduction of fuel consumption and optimization of trajectories. The operating costs of airlines are increasingly high, which requires investments in more economical aircraft. In addition, the growth in air traffic leads to the increase of pollutant gases emissions to the atmosphere as well as noise levels. Several works have recently addressed to this problem. Using a model of Lexicographic Optimization, Prats [1] sought to solve the noise problem by creating specific trajectories to optimize the noise levels allowed by ICAO standards. More recently Khardi and Abdallah [2] conducted a study based on the same problem using the direct and indirect optimization methods instead.

A major goal of the FMS is to optimize the parameters of the flight and minimize the costs associated with time and fuel consumption. With the increased commercial air traffic the airspace congestion has become a major problem for air traffic controllers in the airports vicinity, increasingly being imposed by time constraints. These time constraints are imposed at the airport terminal so that departing and arriving aircraft comply with the scheduled times avoiding traffic accumulation and delays. Recently it became available, in some modern aircraft, features that help airlines to reduce their costs through the control of arrival time at each waypoint. A practical solution that reduces the cost associated with time and fuel consumption during flight is the Cost Index. This is the index that airlines define as their goals, allowing them to know the proper speed and altitude during the different phases of the flight. Focused on this problem, Hagelauer and Mora-Camino [3] conducted a study on

¹ Aeronautical Engineering Student in the Department of Aerospace Science at University of Beira Interior

² Research Professor in the Department of Aerospace Science at University of Beira Interior

the process of optimizing the costs of airlines taking into account the values of Cost Index for 4D navigation during the cruise. In this work a constant value of Cost Index was used for a given arrival time, in order to find the optimum speed and altitude cruise. They concluded that either considering an optimum fixed altitude profile or an optimal velocity profile for a constant Cost Index, the total fuel consumption would eventually be similar in both cases.

Taking into account previous works, this study is based in the analysis of different profiles of climb, cruise and descent of a short-haul commercial flight, and the optimization of the climb phase for a medium-haul commercial flight. Using an algorithm defined by a 4D waypoint navigation the flight trajectories are simulated along with the calculation of the total fuel consumption. It was intended to ultimately, discover which profile allows lower total fuel consumption, and with that gather a set of important factors for the fuel economy of commercial airlines.

II. Optimization Problem Formulation

Problem Formulation

The system to be analyzed in this work consists of a commercial transport aircraft, being represented in the figure below the diagram of forces and control variables to 4D Navigation.

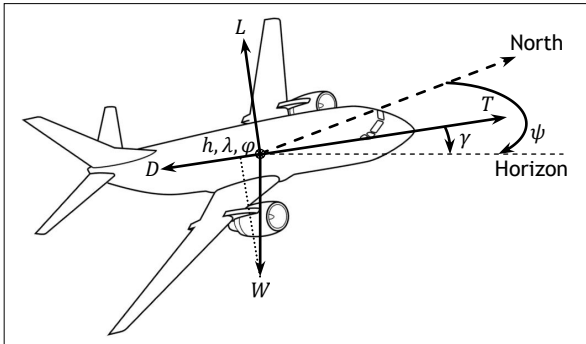


Figure 1: Forces acting on the aircraft during the navigation.

Equations of Navigation

The differential equations system used in the analysis of trajectories for navigation system is given by the following system of six dimensions, derived from the center of gravity of the aircraft [4]:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{h} = V \sin \gamma \\ \dot{\lambda} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{(R_e + h) \cos \phi} \\ \dot{\phi} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{(R_e + h)} \\ \dot{V} = a \\ \dot{\gamma} = d_\gamma \\ \dot{\psi} = d_\psi \end{bmatrix} \quad (1)$$

This system can be rewritten as follows matrix form:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \quad (2)$$

Where,

State vector:

$$X: [t_i, t_f] \mapsto \mathbb{R}^6 \\ t \rightarrow X(t) = [h(t), \lambda(t), \phi(t), V(t), \gamma(t), \psi(t)]$$

Control vector:

$$U: [t_i, t_f] \mapsto \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow U(t) = [a(t), d_\gamma(t), d_\psi(t)]$$

Flight constraints

Throughout a trajectory there are several restrictions regarding the dynamics of the aircraft mainly due to structural limitations, ATC restrictions, safety and comfort of passengers and crew.

Flight Path Velocity:

$$V_{min} \leq V \leq V_{max} \quad (3)$$

Flight Path Angle:

$$\gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_{max} \quad (4)$$

Flight Path Acceleration:

$$a_{min} \leq a \leq a_{max} \quad (5)$$

Flight Path Angle Velocity:

$$d_{\gamma_{min}} \leq d_\gamma \leq d_{\gamma_{max}} \quad (6)$$

Heading Velocity:

$$d_{\psi_{min}} \leq d_\psi \leq d_{\psi_{max}} \quad (7)$$

Flight Path Angle Acceleration:

$$a_{\gamma_{min}} \leq a_\gamma \leq a_{\gamma_{max}} \quad (8)$$

Heading Acceleration:

$$a_{\psi_{min}} \leq a_\psi \leq a_{\psi_{max}} \quad (9)$$

4D Waypoint Navigation

The 4D waypoint Navigation consists of traveling through a sequence of predefined points in a given time of flight, which in turn define the trajectory of the flight. Each waypoint contains the information of altitude, longitude, latitude, arrival time, and radius. Considering the following sequence of waypoints for a given trajectory:

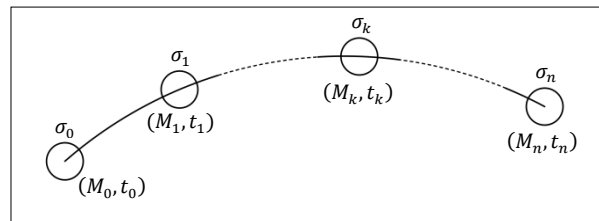


Figure 2: 4D Waypoint Trajectory.

Where, $M_k = [h_k \ \lambda_k \ \phi_k]$ is the position of the waypoint k , t_k the arrival time at waypoint k and σ_k waypoint k radius.

The position and arrival time at each waypoint are considered as constraints for the 4D Trajectory Navigation, which can be represented mathematically by:

$$\begin{aligned} M(t_0) &= M_0 \\ \|M(t_1) - M_1\|^2 &\leq \sigma_1 \\ &\vdots \\ \|M(t_k) - M_k\|^2 &\leq \sigma_k \\ &\vdots \\ \|M(t_{n-1}) - M_{n-1}\|^2 &\leq \sigma_{n-1} \\ \|M(t_n) - M_n\|^2 &\leq \sigma_n \end{aligned} \quad (10)$$

Where, $M(t) = [h(t) \ \lambda(t) \ \varphi(t)]$ is the aircraft position at instant t .

Fuel Consumption Optimization

The aircraft direct operating costs are directly related by fuel consumption, flight time and the fixed costs. The fuel cost is related to the fuel flow during the flight:

$$C_F \Delta F \rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \dot{m}_f(t) dt \quad (11)$$

$$\dot{m}_f = cT \quad (12)$$

The Thrust is given by:

$$T = \delta_T T_{max}(V, h) \quad (13)$$

The maximum available thrust T_{max} and the engine specific fuel consumption vary according to the conditions verified at each flight moment. During the navigation between waypoints (P_0, t_0) and (P_n, t_n) the objective is to minimize the following cost function:

$$J(u) = \int_{t_i}^{t_n} c(T_K(t)) \delta_T(t) T_{max}(V(t), h(t)) dt \quad (14)$$

Where, $u(t) = [\delta_T(t), a(t), d_\gamma(t), d_\psi(t)]$.

Knowing that $0 \leq \delta_T \leq 1$, the cost function can be treated as a minimization problem of its maximum values, so that, considering $\delta_T = 1$:

$$J(u) \leq \int_{t_i}^{t_n} c(T_K(t)) T_{max}(V(t), h(t)) dt = J(\tilde{u}) \quad (15)$$

Where, $\tilde{u}(t) = U(t) = [a(t), d_\gamma(t), d_\psi(t)]$ is the control vector.

Fuel Consumption Analyze Method

The navigation guidance consists of the reference's calculation for the velocity V_{ref} , heading ψ_{ref} , and flight path angle γ_{ref} during the flight, and in this way, to generate the flight trajectory which crosses a specific waypoint sequence [4]. Each waypoint P_k contains time and position information, which can be defined by the vector:

$$P_k = [h_k \ \lambda_k \ \varphi_k \ \tau_k]^T \quad (16)$$

The following diagram represents the algorithm used to calculate the fuel consumption during the 4D waypoint navigation, where the Butcher's algorithm is used in order to solve the differential equations of motion (II.1).

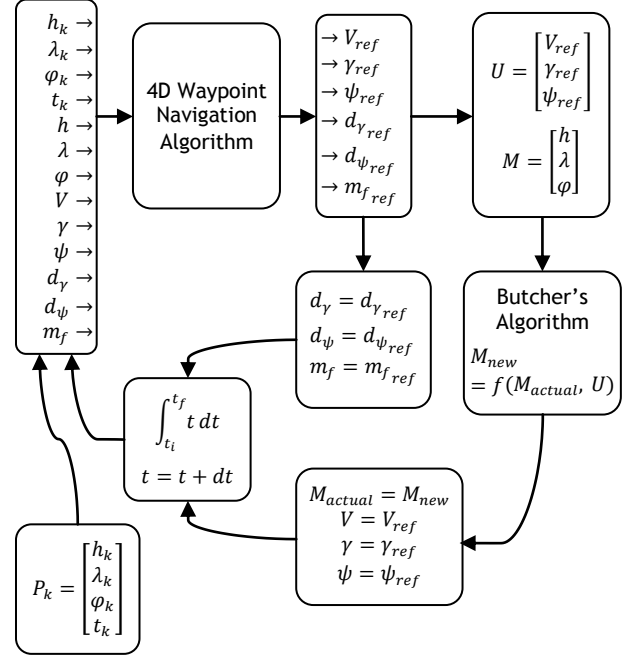


Figure 3: Program's Structure for fuel consumption analysis in 4D Waypoint Navigation.

III. Simulation and Results

The results of the different flight phases for a commercial aircraft are represented in this section. The simulation is performed using *Matlab*® software to implement the control algorithm represented in figure 3 using a simulation step of 0,5 seconds.

Climb

The first part presents the results obtained for the climb phase. For the various flights the climb phase considered was between 1166m to a cruising altitude of 11255m, regarding a medium-haul flight from Lisbon to Barcelona.

Climb Trajectories Analyze

For the climb trajectory analysis three different profiles were considered between the climb from 4300m to 11255m. Flight 1 represents the maximum, Flight 2 the medium, and Flight 3 the minimum climb rate profile. The arrival time at the final waypoint for the different flights is fixed at 1794 seconds, approximately 30 minutes.

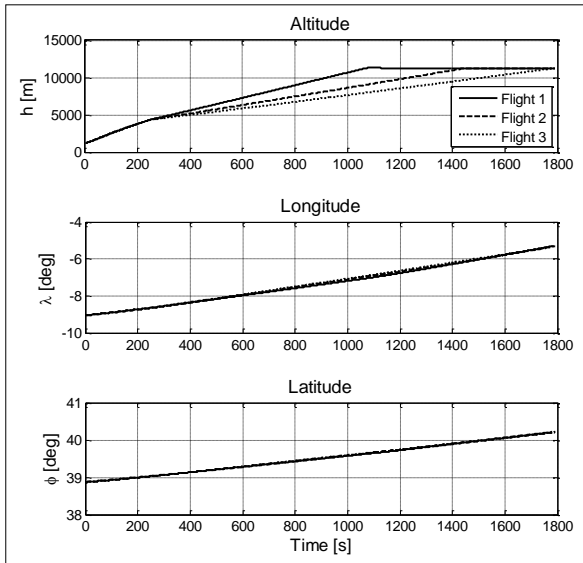


Figure 4: Altitude, longitude, and latitude for the climb profiles analysis.

During the different simulated flights it's verified the existence of parameters which behave similarly. The maximum available thrust, T , decrease with the increase of the flight path velocity, V , and also with the altitude, h , increase due to the air specific mass, ρ , decrease. Drag force, D , decrease with the altitude increase due to air specific mass decrease, but also increase with the flight path velocity increase. Specific fuel consumption, c , decrease with the altitude increase due to air temperature T_K decrease.

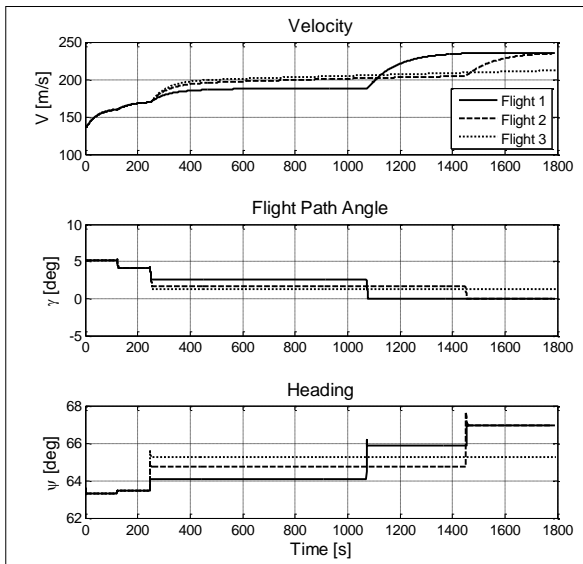


Figure 5: Velocity, flight path angle, and heading for the climb profiles analysis.

The maximum climb rate depends on the thrust capability, which depends of the ration between thrust and aircraft weight.

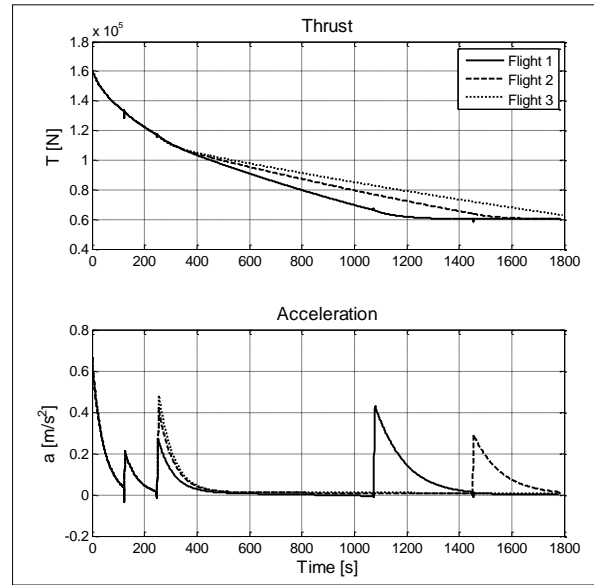


Figure 6: Thrust and acceleration for the climb profiles analysis.

During the climb phase the aircraft velocity decreases as the climb rate increases, however, the aircraft comes early to cruise with lower fuel consumption. An earlier arrival to cruise leads to an increase of the traveled distance to the final waypoint, which results in the increase of the aircraft average speed, for a fixed time.

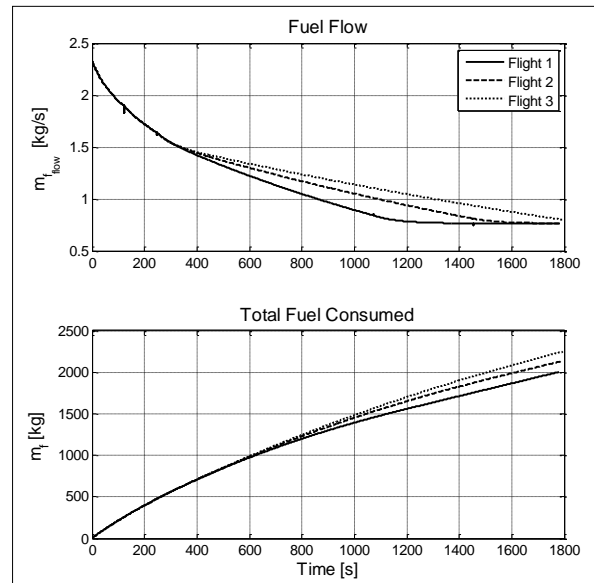


Figure 7: Fuel flow and total fuel consumed for the climb profiles analysis.

It is noted that the profile of Flight 1 is the most economical, which allows a reduction in the fuel consumption of 243kg, that corresponds to 10,8% of the fuel used in Flight 3.

Climb Trajectories Optimization

At this point the optimization of Flight 1 is performed until reaching the cruise altitude, which is designated Flight 4. The arrival time at the cruise phase

for the different two flights is fixed at 1071 seconds, approximately 18 minutes.

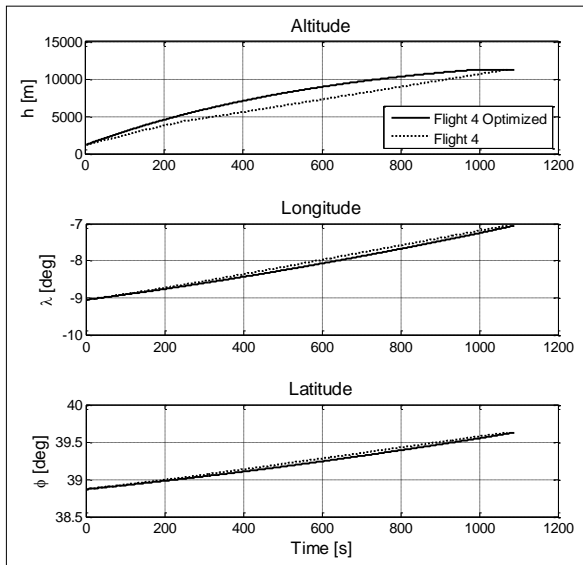


Figure 8: Altitude, longitude, and latitude for the climb optimization analysis.

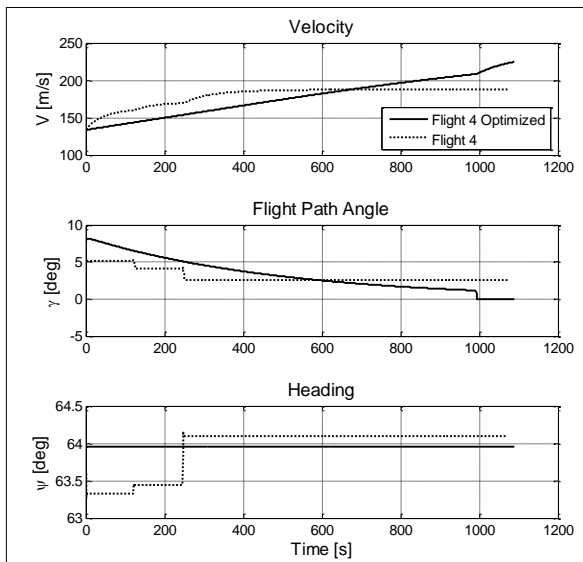


Figure 9: Velocity, flight path angle, and heading for the climb optimization analysis.

Similar to the previous results, the specific fuel consumption, c , decreases as the altitude increases due to the air temperature T_K reduction. The climb phase trajectory optimization consists of defining a maximum climb angle for the aircraft, having in mind propulsive capability and the engines maximum available thrust. When the aircraft starts climbing it has a lower velocity and altitude, which allows this to have a higher climb angle. However, the velocity and the altitude progressively increase until the aircraft reaches its cruising conditions, which in turn, leads to a reduction of the engines maximum available thrust. With this reduction, in order for the aircraft not to lose velocity, the climb angle must reduce.

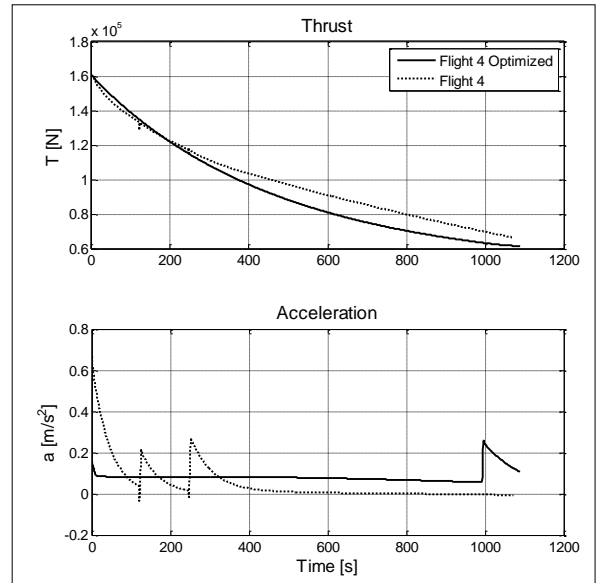


Figure 10: Thrust and acceleration for the climb optimization analysis.

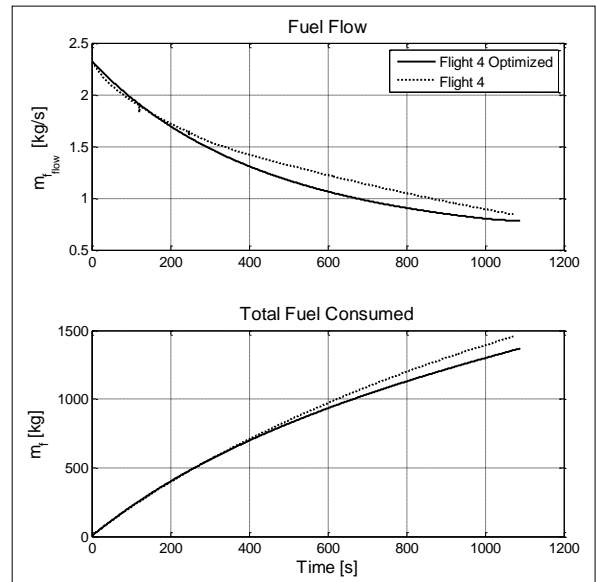


Figure 11: Fuel flow and total fuel consumed for the climb optimization analysis.

The Optimized Flight 4 trajectory enables a lower fuel consumption, but due to the variable climb rate, the distance traveled is greater and therefore the average speed is higher. There is a 18 seconds delay in the arrival time at cruise altitude regarding Optimized Flight 4, however, this allows a reduction in the fuel consumption of 85kg, that corresponds to 5,8% of the fuel used in non optimized Flight 4.

Descent

The second part presents the results obtained for the descent phase. For the various flights the descent phase considered was between the cruising altitude at 5800m until the approach of the runway, regarding a short-haul flight from Lisbon to Faro.

Descent Trajectories Analyze

For the descent trajectory analysis three different profiles were considered. Flight 5 represents the minimum, Flight 6 the medium, and Flight 7 the maximum descent rate profile. The arrival time at the final waypoint for the different flights is fixed at 1560 seconds, approximately 26 minutes.

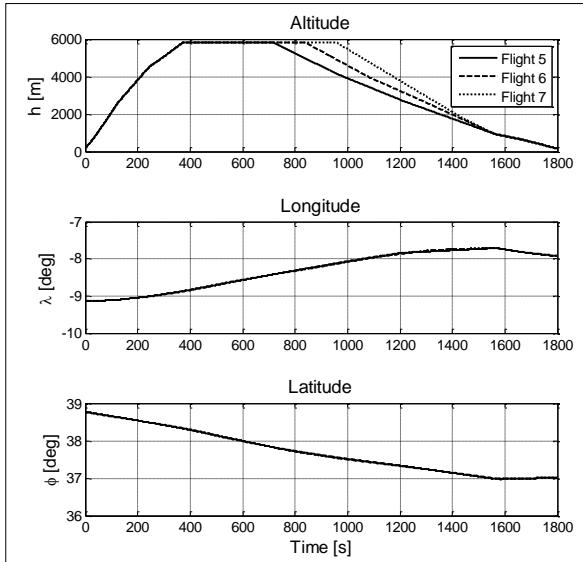


Figure 12: Altitude, Longitude, and Latitude for the descent profiles analysis.

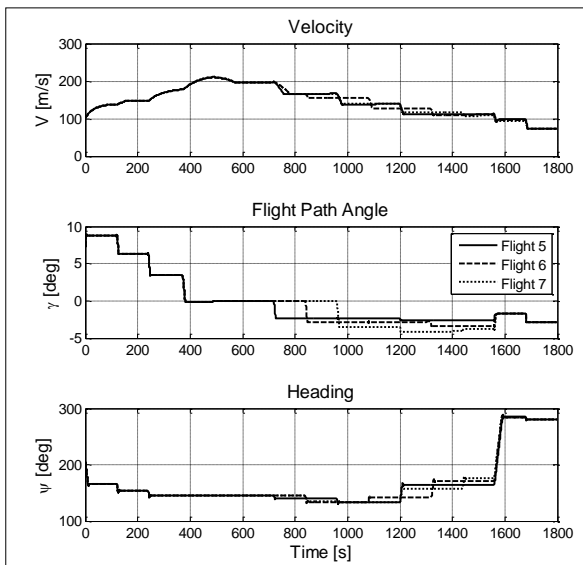


Figure 13: Velocity, flight path angle, and heading for the descent profiles analysis.

For the different analyzed flights the climb phases are identical, the cruise is performed at the same altitude, the descent phases differ with regard to the descent angle, and the approach to the airport is made in the same manner. After 720 seconds of the simulation, Flight 5 starts its descent, at 840 seconds Flight 6, and at 960 seconds Flight 7.

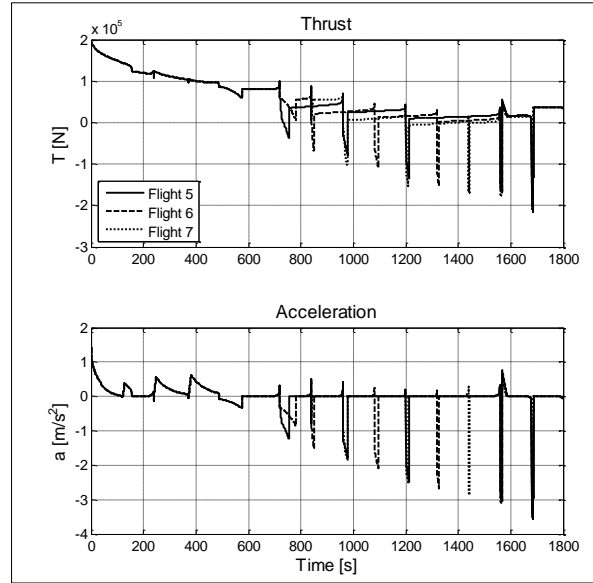


Figure 14: Thrust and acceleration for the descent profiles analysis.

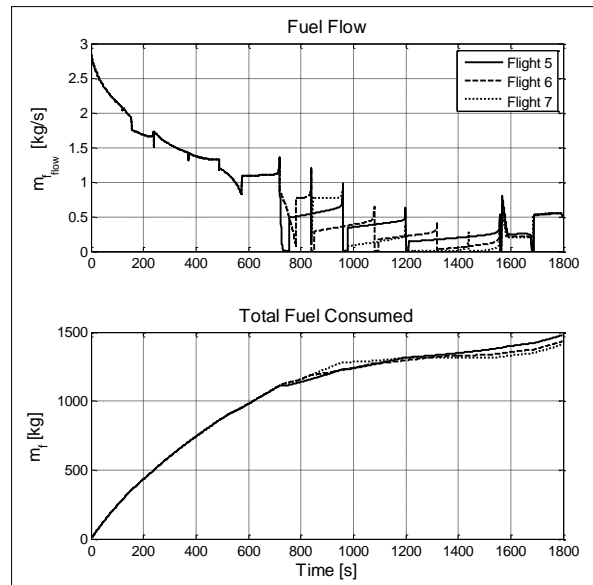


Figure 15: Fuel flow and total fuel consumed for the descent profiles analysis.

After the beginning of the flights descent, the velocity decreases progressively until the airport's approach velocity. During the descent phase, the thrust presents negative values, which are reflected by the application of aerodynamics surfaces, spoilers and airbrakes. In this context the engines no longer produce thrust, operating in idle mode.

A later beginning of the descent phase requires a higher descent rate, however, the reduction in the fuel consumption is noted for a fixed arrival time. It was possible to reduce 66kg of the fuel consumed in Flight 7, that corresponds to 4,8% of the fuel used in Flight 5.

Although it becomes more economical in terms of fuel consumption and leading to a noise reduction in the cities located near the airports, this descent procedure may lead to an increased use of spoiler and airbrakes, yet at the expense of an increase of

mechanical wear of this surfaces. Another problem that can arise by extending the cruising phase, which in turn may lead to a superior descent angle, is the increase of the total traveled distance. For a fixed arrival time it becomes necessary to increase the aircraft's velocity, which in turn, will increase the total fuel consumption. This effect can be noticed between Flight 6 to Flight 7, where the fuel consumption reduction was less significant than Flight 5 to Flight 6. Therefore, in order to reduce the fuel consumption it is necessary a later arrival at the destination, maintaining the same average velocity and extending the cruise phase to a more accentuated descent.

Cruise

This section presents the obtained results regarding the influence of cruising altitude in the total fuel consumption. Therefore, three different flight trajectories, with different cruising altitudes are simulated, regarding a short-haul flight from Lisbon to Faro.

Cruise Trajectories Analyze

For the cruising trajectory analysis three different profiles were considered, which are the Flight 7, Flight 8, and Flight 9 with cruising altitudes 5800m, 5000m, and 6600m, respectively.

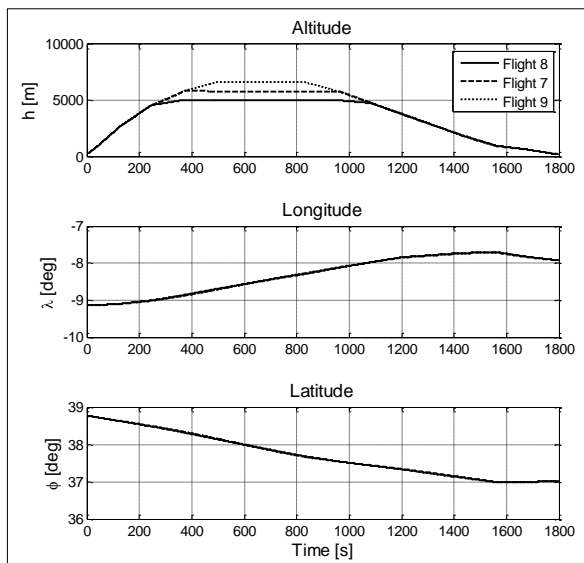


Figure 16: Altitude, Longitude, and Latitude for the cruise profiles analysis.

For the different flights, the climb phases until 4442m, the descent phases following 3800m, and the airport's approach are identical. The cruising phase is performed at different altitudes, Flight 8 initiates cruising at 5000m, whereas Flight 7 and 9 extend their climb phase, initiating the cruising phase at 5800 m and 6600 m, respectively.

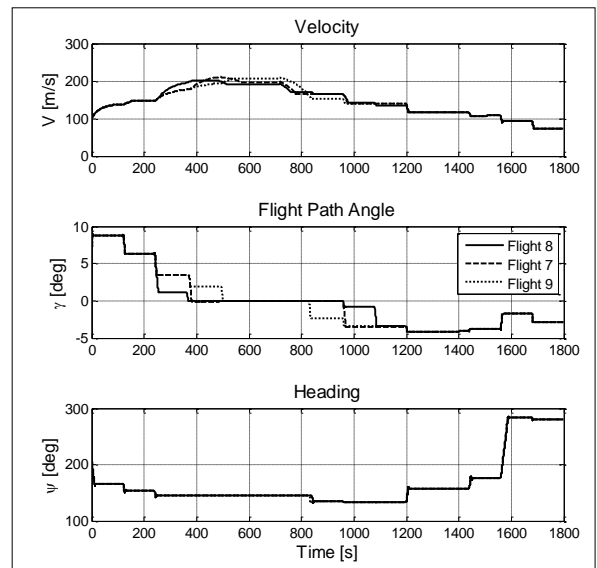


Figure 17: Velocity, flight path angle, and heading for the cruise profiles analysis.

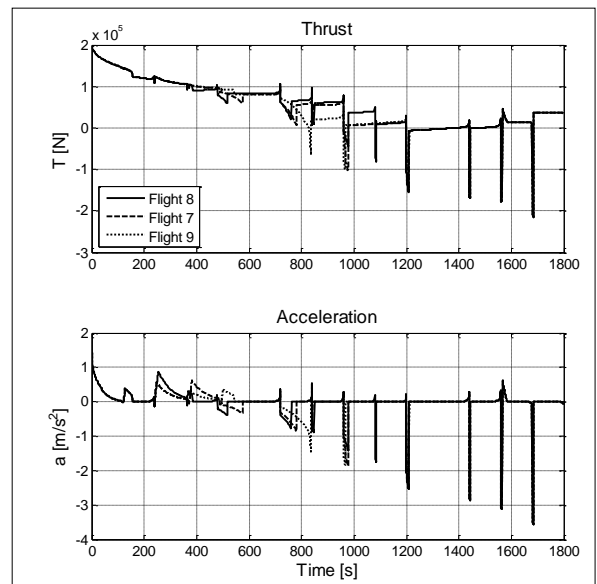


Figure 18: Thrust and acceleration for the cruise profiles analysis.

It should be noted that the addition of the traveled distance to perform the cruise at maximum altitudes, allows the aircraft to maintain during a longer flight time subjected to lower aerodynamic stresses, due to the atmosphere's properties. Even though it is necessary to have an extended climb phase with the engines at maximum power as well as a superior average velocity for a fixed arrival time, it is possible to observe a significant decrease in the fuel consumption. This is verified since the descent phase also initiates sooner, therefore, being possible to compensate the additional consumed fuel.

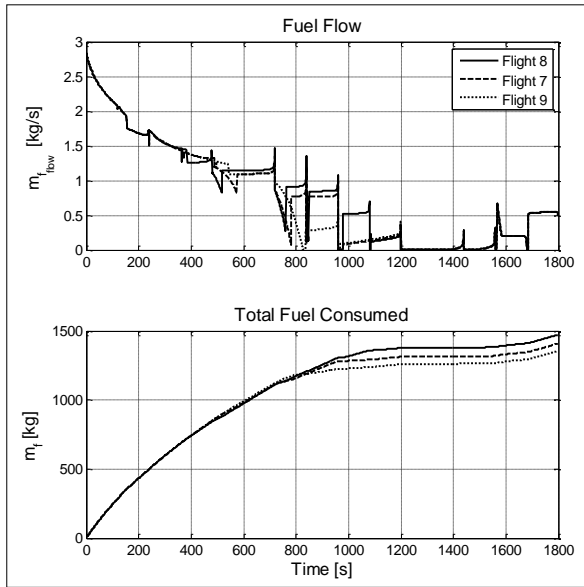


Figure 19: Fuel flow and total fuel consumed for the cruise profiles analysis.

A climb phase extending requires a higher average speed, however, the reduction in total fuel consumption is noted for a fixed arrival time. It was possible to reduce 116kg of the fuel consumed in Flight 9, that corresponds to 8,4% of the fuel used in Flight 8.

Flight 9 Analyze

Flight 9	Climb	Cruise	Descent	Approach	Arrival
h [m]	150	6600	6600	953	160
t [s]	0	495	829	1560	1800
V [m/s]	100	194	161	109	72
γ [deg]	8,8	0	-3,7	-2,9	-2,9
m_f [kg]	0	866	1187	1267	1355

Table 1: Analysis of the different phases of Flight 9.

During Flight 9’s climb phase, following the takeoff from Lisbon’s airport to a cruising altitude of about 6600m, the aircraft consumes 866kg of fuel with a duration of 8 minutes and 15 seconds. In the cruising phase it is verified a fuel consumption of 321kg with a duration of 5 minutes and 34 seconds. For the descent phase from the 6600m until 953m the aircraft spends 80kg of fuel, with a duration of 12 minutes and 11 seconds. Finally in the approach phase to Faro’s airport runway, the aircraft consumes 88kg of fuel, with a duration of 4 minutes. The percentage of fuel consumed corresponds to 64%, 24%, 6% and 6%, respectively for the climb, cruise, descent and airport approach phases.

This analyze was done for a short-haul flight where it is not possible to achieve the maximum cruising altitude of the aircraft. However, for medium and long haul this problem does not exist, since the duration of the flight allows the aircraft to realize the cruising phase at the maximum altitude.

IV. Conclusion

This study is based in the analysis of different profiles of climb, cruise and descent of a short-haul commercial flight, and the optimization of the climb phase for a medium-haul commercial flight. Using an algorithm defined by a 4D waypoint navigation the flight trajectories are simulated along with the calculation of the total fuel consumption. It was intended to ultimately, discover which profile allows lower total fuel consumption, and with that gather a set of important factors for the fuel economy of commercial airlines.

An iterative simulation process, which consisted in the calculation, at each step of the flight simulation, of the references for the velocity, flight path angle, and heading, in order to cross a 4D waypoints sequence, was utilized. The 4D navigation was considered with the purpose of defining a fixed arrival time allowing then to reduce delays. The system’s dynamic simulation was based in the integration of the system’s dynamic equations using Butcher’s algorithm for controlled systems, being this guidance and the 4D waypoint navigation systems implemented in Matlab®. During all the navigation guidance process the fuel consumption calculation was added, which allowed to perform its analyze.

The objective in the analysis of different flight trajectories is to verify which profiles allow greater fuel economy, for the various commercial flight phases. In the first part it was performed an analysis of the climb angle, where it’s noticed that there is a greater fuel economy for a higher climb angle. In this part the climb trajectory optimization for a constant climb angle was also performed, and it’s verified that maximum climb angles leads to a significantly decrease in the fuel consumption. In the second part it was performed an analysis of the descent angle, where it’s verified a higher fuel economy for a higher descent angles. In the third part it was performed an analysis of the cruising altitude, where higher cruising altitudes provide higher fuel economy. In the fourth part of the analysis results it was performed an evaluation of the fuel consumption during a short haul-flight from Lisbon to Faro. This analysis shows higher fuel consumption during the climb follow by the cruise while the lower fuel consumption is verified in the descent and approach to the airport. In this last phase it’s important to note that all the maneuvers and procedures during the approach to an airport should never be jeopardize for the aircraft fuel consumption economy and therefore all this maneuvers depend exclusively of Air Traffic Control restrictions.

The principal parameter for the decrease of fuel consumption is the specific fuel consumption SFC of the engines. This parameter decreases as the altitude increases due to the reduction of the air temperature, which for turbo-fan engines is an important factor for the increase of propulsive efficiency. The aircraft weight and the drag force are respectively, inertial and aerodynamical forces which affect the aircraft

cinematics. It is not possible to avoid the fact that aerodynamic drag force increases with the increases of the velocity, nevertheless, this force reduces with the altitude increase, and therefore, during the navigation it should be avoided to fly at low altitudes. Having in mind ATC restrictions, safety rules, and flight distance, the optimization of the fuel consumption is performed by maximizing the aircraft's flight altitude.

Comparatively to the others methods based on the differential functions optimization, the methods used in this work require a lower computational effort, presenting at the same time a good result precision, which can be used in diverse applications in regard to the airlines trajectory management. In this work all the proposed objectives were achieved, and it's possible to provide fundamental guide lines, so that, airlines could manage their flight trajectories and achieve a greater fuel economy in their aircrafts.

V. References

- [1] Prats, X., Puig, V., Quevedo, J. and Nejjari, F., "Lexicographic Optimization for Optimal Departure Aircraft Trajectories" *Journal of Aerospace Science and Technology*, 14, 2010, pp. 26-37.
- [2] Khardi, S. and Abdallah, L., "Optimization Approaches of Aircraft Flight Path Reducing Noise" *Journal of Applied Acoustics*, 73, 2012, pp. 291-301.
- [3] Hagelauer, P. and Mora-Camino, F., "Evaluation of Practical Solutions for Onboard Aircraft Four-Dimensional Guidance" *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 5, 1997, pp. 1052-1054.
- [4] Bousson, K., "Geodetic Waypoint Navigation Guidance", Private Communication, Department of Aerospace Sciences, University of Beira Interior, 2008.