



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

**Os números reais: Representação decimal
e em fração contínua**
**Planificação da unidade “Função Polinomial.
Polinómios”**

Maria Madalena Simão Duarte

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
**Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino
Secundário**
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Henrique José Freitas da Cruz

Covilhã, outubro de 2012

Agradecimentos

Não posso deixar de expressar o meu sincero agradecimento às pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho. Assim, as minhas palavras de apreço e gratidão vão para:

O meu orientador, Professor Doutor Henrique José Freitas da Cruz, pela sua dedicação, total disponibilidade e simpatia com que sempre atendeu as minhas solicitações, pelas suas sugestões sempre pertinentes, pelos seus valiosos ensinamentos e pelo seu incondicional apoio durante o estágio e a realização deste relatório;

A Dra. Maria Dulce da Costa Nascimento, orientadora cooperante da Prática de Ensino Supervisionada realizada na Escola Secundária do Fundão, pela partilha da sua experiência, pelas suas valiosas sugestões ao trabalho realizado e pela oportunidade que tive de aprender assistindo ao seu trabalho;

A Escola Secundária do Fundão e todos os que nela me acolheram com simpatia e amizade, proporcionando um ambiente favorável para a realização de um bom trabalho, em especial os professores do grupo de matemática pela partilha de experiências, colaboração e ânimo no decorrer do estágio;

A minha colega de estágio, Ângela Martins, pelo apoio, colaboração, ânimo e companheirismo demonstrado ao longo do mestrado;

Todos aqueles que estiveram e estão sempre presentes, apoiando-me e incentivando-me, nomeadamente e em especial os meus pais, irmãos, familiares e amigos.

A todos, bem-hajam!

Resumo

O presente relatório de estágio tem como objetivo a conclusão do 2º ciclo de estudos: Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

Este relatório incide sobre aspetos científico-didáticos na área da docência. Assim elaboramos um trabalho científico onde abordamos duas formas de representação dos números reais: A representação decimal e em frações contínuas.

Na parte pedagógica apresentamos as planificações efetuadas para a unidade “Funções Polinomiais. Polinómios”, incluída no Tema 2 da disciplina de Matemática A do 10º ano dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias e Ciências Sócio-Económicas. Estas planificações são parte do trabalho desenvolvido durante a PES (Prática de Ensino Supervisionada) na Escola Secundária do Fundão. Tivemos sempre presente a preocupação de contribuir para que se desenvolvesse um verdadeiro processo de ensino-aprendizagem, através do estabelecimento de objetivos e da seleção de estratégias, que permitam aos alunos a aquisição e aplicação de conhecimentos e de competências matemáticas. Foram tidas em conta todas as orientações expressas no programa da disciplina elaborado pelo Ministério da Educação.

Palavras-chave

Representação decimal; Frações contínuas; Planificação; Funções Polinomiais. Polinómios.

Abstract

This report aims to conclude the 2nd cycle of studies: Master in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education.

The report focuses on scientific and educational aspects in the area of teaching. So we developed a scientific work where we discuss two forms of representation of the real numbers: The decimal representation and continued fractions representation.

In the pedagogical part we present the lesson plans made for the unit "Polynomial Functions. Polynomials", included in Item 2 of Mathematics of the 10th year of the General Course of Natural Sciences, Science and Technology and Socio-Economic Sciences. These lesson plans are part of the work developed during the "Supervised Teaching Practice" at the Secondary School of Fundão. We were always concerned with developing a process of teaching and learning setting goals and selecting strategies that would enable the students to acquire and apply knowledge and mathematical skills. All the guidelines are expressed in the syllabus of the discipline prepared by the Ministry of Education were taken into account.

Keywords

Decimal representation; Continued fractions; Planning; Polynomial Functions. Polynomials.

Índice

Introdução.....	1
Capítulo 1 - Parte Científica.....	3
Os números reais: Representação decimal e em fração contínua	3
1.1. Introdução	3
1.2. A representação decimal de números inteiros.....	4
1.3. A representação decimal dos números reais	8
1.4. Representação de sistemas com base n.....	14
1.5. As frações contínuas como representação dos números reais.....	15
1.6. As frações contínuas como representação dos números racionais.....	19
1.7. Conclusão	20
Capítulo 2 - Parte Pedagógica.....	23
Planificação da unidade “Função Polinomial. Polinómios”	23
2.1. Introdução	23
2.2. Aula 1.....	25
2.3. Aula 2.....	36
2.4. Aula 3.....	45
2.5. Aula 4.....	54
2.6. Aula 5.....	65
2.7. Aula 6.....	71
2.8. Conclusão	81
Bibliografia	83

Introdução

Na representação decimal dos números reais começamos por estudar a representação decimal dos números inteiros. Como um número negativo pode ser representado na forma decimal, usando a representação decimal do seu simétrico, começamos por analisar a representação decimal dos números naturais, estendendo em seguida esse estudo para os números inteiros. De seguida generalizamos estes resultados a todos os números reais dando especial atenção à representação decimal dos números racionais. Por fim, mostramos que além do sistema decimal muitos outros sistemas numéricos podem ser usados para representar números reais.

Na secção seguinte iremos fazer o estudo da representação dos números reais em frações contínuas mostrando que a representação decimal ou noutra base numérica não se assume como a única representação possível para os números reais. Aqui analisamos as condições em que uma fração contínua representa um número real e verificamos ainda que os números racionais se podem representar através de frações contínuas finitas.

A parte pedagógica visa focar parte do trabalho desenvolvido durante a PES (Prática de Ensino Supervisionada) na Escola Secundária do Fundão. Apresentamos as planificações efetuadas para a unidade “Funções Polinomiais. Polinómios”, incluída no Tema 2: Funções e Gráficos - Generalidades. Funções Polinomiais. Função Módulo” da disciplina de Matemática A do 10º ano dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias e Ciências Sócio-Económicas.

De acordo com as orientações constantes no programa da disciplina no que diz respeito ao estudo de funções procuramos desenvolver um verdadeiro processo de ensino-aprendizagem, através do estabelecimento de objetivos e da seleção de estratégias, que permitam aos alunos a aquisição e aplicação de conhecimentos e de competências matemáticas.

No estudo da unidade “função Polinomial. Polinómios” foram trabalhados os polinómios de grau n , $n \in \mathbb{N}$, nomeadamente a decomposição de um polinómio em fatores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Também foi feito o estudo das propriedades das funções polinomiais e dos seus gráficos no que diz respeito a algumas famílias de funções cúbicas: $y = ax^3; a \neq 0$, $y = a(x - \beta)^3$, $y = a(x - \beta)(x - \alpha)^2$, $y = a(x - \beta)(x - \alpha)(x - \lambda); a \neq 0$, $y = a(x - \alpha)(x^2 + k); a \neq 0$ e $k > 0$. Procedeu-se também à resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com incidência nos graus 2, 3 e 4). Foram consideradas a resolução analítica, gráfica e numérica de inequações de grau superior a 2.

Capítulo 1 - Parte Científica

Os números reais: Representação decimal e em fração contínua

1.1. Introdução

A noção de representação não é exclusiva da matemática, pois o processo de representação é adotado por muitas outras ciências. Podemos olhar para os sistemas linguísticos como um exemplo elementar de representação, onde as letras do alfabeto são utilizadas para expressar as palavras da língua. Por exemplo, cada palavra do idioma Português pode ser representada por uma sucessão de algumas das 26 letras do alfabeto latino. É claro que neste caso, o procedimento inverso, não tem sentido, uma vez que uma série de letras ao acaso não corresponde necessariamente a uma palavra aceitável.

A escrita dos números passou por diferentes fases, que podem ser classificadas em três categorias principais:

A primeira categoria abarca a gravação de marcas nas pedras ou na madeira, a elaboração de nós em cordas, talhes em ossos, desenhos nas cavernas, ou outro tipo de marcação. Esta “escrita” começou com o desenvolvimento das atividades humanas, quando o Homem foi deixando de ser mero coletor de alimentos, para garantir a sua sobrevivência, e começou a fixar-se no solo, surgindo a necessidade de contar.

Com o passar do tempo, as quantidades foram representadas por expressões, gestos, palavras e símbolos, sendo que cada civilização como a egípcia, a babilónica, a romana, a grega, entre outras tinha a sua maneira de representação. Aqui encontramos os hieróglifos egípcios ou a numeração romana que formam a segunda categoria.

Mas estas representações não eram adequadas para os cálculos, especialmente quando estavam envolvidos grandes números. Esta inadequação levou a sistemas de notação (ou valor) posicional, ou seja, sistemas onde cada algarismo tem um determinado valor, de acordo com a posição relativa que ele ocupa na representação do número. O sistema babilónico, o sistema maia ou os números árabes, situam-se nesta terceira categoria.

A importância de utilizar diversas representações de um número está demonstrada no que diz Dedekind, salientando a natureza e o significado dos números: “Os números são criações livres da mente humana, eles servem como um meio de aprender mais facilmente e de forma mais

acentuada a diferença das coisas”. Por conseguinte, é necessário ter a capacidade de descrever teoricamente, e simbolizar, os números da forma mais exata. São utilizados na Matemática Moderna muitos sistemas numéricos, tais como o sistema binário, o ternário, vigesimal e o sexagesimal, mas, sem dúvida, o sistema decimal é o predominante.

A notação decimal não foi amplamente utilizada até que o belga Simon Stevin a usou no seu livro *De Thiende* publicado em holandês em 1585 (mais conhecido na sua tradução francesa sob o título *La Disme*). Mas a moderna notação decimal é devida ao matemático escocês John Napier, que também inventou os logaritmos.

Na moderna notação decimal usamos os algarismos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ como sendo o nosso alfabeto. Este “alfabeto” denomina-se alfabeto decimal indicando qual o sistema numérico utilizado.

No âmbito do nosso trabalho iremos responder a duas questões: Toda a sequência de algarismos representa um número real? Cada número real pode ser expresso de modo único usando os 10 algarismos do sistema decimal?

A representação de números reais pode também ser conseguida através de outros processos nomeadamente as frações contínuas também abordadas neste trabalho.

1.2. A representação decimal de números inteiros

No nosso estudo não consideramos o número “zero” como um número natural e denotamos por $[x]$ a parte inteira de x (maior número inteiro que não excede x).

Definição 1.1: Dizemos que um número natural N tem uma representação decimal se

$$N = c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \dots c_1 10 + c_0$$

onde

- (a) m é um número inteiro maior ou igual a zero,
- (b) $c_n, n = 0, 1, \dots, m$, são inteiros com a propriedade $0 \leq c_n \leq 9$, para $n = 0, 1, \dots, m$, e $c_m \neq 0$.

Se

$$c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \dots c_1 10 + c_0$$

é a representação decimal de um número natural N este número é abreviadamente denotado por

$$N = c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0 .$$

Os números inteiros $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ são chamados de algarismos do sistema decimal.

Teorema 1.2: *Todo o número natural admite uma única representação decimal.*

Prova: Começemos por provar que qualquer número natural tem pelo menos uma representação decimal.

Segundo o algoritmo da divisão, existem os inteiros não negativos N_1 e c_0 tais que $N = 10N_1 + c_0$. Dividindo N_1 por 10 obtemos o quociente N_2 e o resto c_1 e $N_1 = 10N_2 + c_1$, onde $c_1 \geq 0$ e $N_2 \geq 0$. Continuando este procedimento, é claro que os quocientes obtidos consecutivamente, são positivos e vão sendo cada vez mais pequenos, porque $N_{n+1} \leq \frac{N_n}{10}$. Então existe $k \geq 1$ tal que $N_k = 0$. Seja m o maior índice para o qual $N_m \neq 0$. O procedimento termina no passo $m + 1$, e obtemos a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} N &= c_0 + 10N_1 \\ N_1 &= c_1 + 10N_2 \\ &\vdots \\ N_{m-1} &= c_{m-1} + 10N_m \\ N_m &= c_m , \end{aligned}$$

onde $c_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, m$, e $0 \leq c_i \leq 9$, $i = 0, 1, \dots, m$, e $c_m \neq 0$. Assim, obtemos uma representação decimal de N ,

$$N = c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \dots + c_1 10 + c_0 .$$

Provemos agora que há no máximo uma representação decimal, mostrando que, se $N = c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \dots + c_1 10 + c_0$, então os números m e c_i , $i = 0, 1, \dots, m$, são unicamente determinados por N . Seja $n \in \{0, \dots, m - 1\}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{N}{10^n} &= \frac{c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \dots + c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + c_{n-2} 10^{n-2} + \dots + c_0}{10^n} = \\ &= c_m 10^{m-n} + c_{m-1} 10^{m-n-1} + \dots + c_n + \frac{c_{n-1}}{10} + \frac{c_{n-2}}{10^2} + \dots + \frac{c_0}{10^n} \end{aligned}$$

e

$$0 \leq \frac{c_{n-1}}{10} + \frac{c_{n-2}}{10^2} + \dots + \frac{c_0}{10^n} \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} .$$

Como,

$$\begin{aligned} \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} &= \frac{9 \times 10^{n-1} + 9 \times 10^{n-2} + \dots + 9 \times 1}{10^n} = \\ &= \frac{9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)}{10^n} = \frac{(10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)}{10^n} = \\ &= \frac{10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 - 10^{n-1} - 10^{n-2} - \dots - 1}{10^n} = \\ &= \frac{10^n - 1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n} < 1, \end{aligned}$$

vem

$$\left[\frac{N}{10^n} \right] = c_m 10^{m-n} + c_{m-1} 10^{m-n-1} + \dots + c_{n+1} 10 + c_n .$$

Analogamente

$$\left[\frac{N}{10^{n+1}} \right] = c_m 10^{m-n-1} + \dots + c_{n+1} ,$$

e então

$$c_n = \left[\frac{N}{10^n} \right] - 10 \left[\frac{N}{10^{n+1}} \right] ,$$

logo c_n é unicamente determinado por N .

Do mesmo modo, dividindo N por 10^m obtemos

$$\frac{N}{10^m} = \frac{c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \dots + c_1 10 + c_0}{10^m} =$$

$$= c_m + \frac{c_{m-1}}{10} + \dots + \frac{c_1}{10^{m-1}} + \frac{c_0}{10^m},$$

e como

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{c_{m-1}}{10^2} + \dots + \frac{c_1}{10^{m-1}} + \frac{c_0}{10^m} &\leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^{m-1}} = \\ &= \frac{10^m - 1}{10^m} = 1 - \frac{1}{10^m} < 1, \end{aligned}$$

obtemos

$$c_m = \left\lfloor \frac{N}{10^m} \right\rfloor.$$

Além disso, como $0 \leq c_i \leq 9$, $i = 0, 1, \dots, m$ e $c_m \neq 0$, temos

$$10^m \leq N \leq 9(10^m + 10^{m-1} + \dots + 10 + 1) < 10^{m+1}.$$

Assim $m \leq \log_{10} N < m + 1$. Isso significa que $m = \lfloor \log_{10} N \rfloor$.

□

A fim de estender a definição 1.1 para todos os números inteiros, é necessário observar que o número inteiro "zero" tem a única representação decimal 0. Além disso, um número negativo pode ser representado na forma decimal, usando a representação decimal do seu simétrico. De facto, se m é um inteiro $m < 0$, então $n = -m$ é um inteiro positivo ou seja um número natural, que tem uma representação decimal

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0.$$

Logo, podemos escrever:

$$m = -[a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0] = (-a_k) 10^k + (-a_{k-1}) 10^{k-1} + \dots + (-a_0),$$

sendo m denotado por

$$m = -a_k a_{k-1} \dots a_0.$$

Ou seja, cada número inteiro n tem uma única representação decimal sob a ressalva de que se $n \neq 0$, então todos os coeficientes na representação têm o mesmo sinal de n .

1.3. A representação decimal dos números reais

Nesta secção vamos generalizar a todos os números reais os resultados obtidos na secção anterior.

Definição 2.1: Um número real não negativo x tem uma representação decimal se

$$x = A_s 10^s + A_{s-1} 10^{s-1} + \dots + A_1 10 + A_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$$

onde

(a) s é um número inteiro

(b) A_i , $i = 0, 1, \dots, s$ e c_n , $n = 1, 2, \dots$ são algarismos do sistema decimal, com a ressalva que no caso em que $s \geq 1$ então $A_s \neq 0$.

(y) $[x] = A_s 10^s + A_{s-1} 10^{s-1} + \dots + A_1 10 + A_0$.

Se a série $A_s 10^s + A_{s-1} 10^{s-1} + \dots + A_1 10 + A_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$ é uma representação decimal de um número real não negativo x , então x também é denotado por

$$x = A_s A_{s-1} \dots A_0 . c_1 c_2 \dots$$

Teorema 2.2: Todo número real não negativo tem uma representação decimal.

Prova: Seja x um número real com $x \geq 0$ e $[x]$ a parte inteira de x . Assim $x = [x] + x_1$, onde $x_1 \in \mathbb{R}$, $0 \leq x_1 < 1$.

Como $[x]$ é um número inteiro não negativo pelo Teorema 1.2,

$$[x] = A_s 10^s + A_{s-1} 10^{s-1} + \dots + A_1 10 + A_0,$$

onde s é um número inteiro, A_i , $i = 0, 1, \dots, s$ algarismos do sistema decimal, com a ressalva de que no caso em que $s \geq 1$ então $A_s \neq 0$.

Partindo de x_1 , construímos a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - [x], & 0 \leq x_1 < 1 \\ x_2 &= 10x_1 - [10x_1], & 0 \leq x_2 < 1 \\ x_3 &= 10x_2 - [10x_2], & 0 \leq x_3 < 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$x_1 = x - [x], \quad x_{n+1} = 10x_n - [10x_n] \quad \text{para } n = 1, 2, \dots,$$

onde $0 \leq x_n < 1$ para $n = 1, 2, \dots$. Para cada $n = 1, 2, \dots$ os inteiros não negativos $[10x_n]$ são obviamente algarismos do sistema decimal e denotamo-los por c_n , $n = 1, 2, \dots$. Então,

$$x_1 = \frac{c_1 + x_2}{10}, \quad x_2 = \frac{c_2 + x_3}{10}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{c_n + x_{n+1}}{10}, \quad \dots$$

Assim,

$$\begin{aligned} x &= [x] + x_1 = [x] + \frac{c_1 + x_2}{10} = [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{x_2}{10} = \\ &= \dots = [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \frac{x_{n+1}}{10^n}. \end{aligned}$$

Como $0 \leq x_{n+1} < 1$, temos $0 \leq \frac{x_{n+1}}{10^n} < \frac{1}{10^n}$ assim $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{10^n} = 0$. Assim, obtemos a seguinte série infinita que é uma representação de x :

$$x = [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$$

onde c_i , $i = 1, 2, \dots$ são algarismos do sistema decimal.

Usando a notação decimal de $[x]$, concluímos que o número real x tem uma representação decimal, $x = A_s A_{s-1} \dots A_0 . c_1 c_2 \dots$.

□

Neste momento surge a necessidade de nos interrogarmos se toda a sequência de algarismos representa um número real e se cada número real pode ser expresso de modo único usando os 10 algarismos do sistema decimal.

Proposição 2.3: *Seja x um número real não-negativo, com representação decimal*

$$[x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$$

Então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $c_i \neq 9$.

Prova: Se $c_i = 9$ para todo $i = 1, 2, \dots$, temos,

$$x = [x] + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} \cdots = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$$

$$x = [x] + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{9}{10^i} \right) - \frac{9}{10^0} = [x] + \left(9 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} \right) - 9.$$

Como $\left| \frac{1}{10} \right| < 1$ vem $x = [x] + 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) - 9 = [x] + 10 - 9,$

e então $x = [x] + 1$ que é impossível.

□

Em seguida, enunciamos dois teoremas que nos esclarecem acerca da unicidade da representação decimal de números reais. Eles indicam quais as condições em que um número racional tem precisamente uma representação decimal ou quando admite duas representações.

Notação: Seja x um número real não negativo com representação decimal

$$x = A_s A_{s-1} \cdots A_0 . c_1 c_2 \cdots$$

Denotamos por

$$r_0 = [x],$$

$$r_1 = r_0 + \frac{c_1}{10},$$

$$r_2 = r_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2},$$

⋮

$$r_n = r_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n}$$

Assim, $x - r_n = \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots$ e

$$0 \leq x - r_n \leq \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{10^n}.$$

Teorema 2.4: *Todo o número racional que não é igual a uma fração irredutível cujo denominador é um produto de números primos cada um dos quais é um divisor de 10 tem precisamente uma única representação decimal.*

Prova: Seja x um número real com $x \geq 0$ e que não seja um número racional igual a uma fração irredutível cujo denominador é um produto de números primos cada um dos quais é um divisor de 10, e seja

$$A_s 10^s + A_{s-1} 10^{s-1} + \dots + A_1 10 + A_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$$

uma representação decimal de x . Sabemos que, usando a notação apresentada anteriormente, $0 \leq x - r_n \leq \frac{1}{10^n}$, $n = 1, 2, \dots$.

Se existe n tal que $x - r_n = \frac{1}{10^n}$, todos os algarismos $c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = 9$.

Em seguida,

$$x = r_n + \frac{1}{10^n} = \frac{[x]10^n + c_1 10^{n-1} + \dots + c_{n-1} 10 + c_n + 1}{10^n},$$

logo $10^n x$ é um número inteiro o que é impossível atendendo à hipótese. Assim,

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n}, n = 1, 2, \dots$$

donde vem que $0 \leq 10^n x - 10^n r_n < 1$. Como $10^n r_n$ é um número inteiro para $n = 0, 1, 2, \dots$ temos,

$$[10^n x] = 10^n r_n \quad \text{e} \quad [10^{n-1} x] = 10^{n-1} r_{n-1} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Assim,

$$[10^n x] - 10[10^{n-1} x] = 10^n(r_n - r_{n-1}) = 10^n \frac{c_n}{10^n} = c_n \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Assim, todos os algarismos c_n , $n = 1, 2, \dots$ são determinados de maneira única. Além disso, a definição de $[x]$ (parte inteira de x), bem como o Teorema 1.2 (*Todo o número natural admite uma única representação decimal*) garantem que o número real x com $x \geq 0$ tem uma única representação decimal.

□

Teorema 2.5: *Todo o número racional igual a uma fração irredutível cujo denominador é um produto de números primos cada um dos quais é um divisor de 10 tem duas representações decimais.*

Prova: Seja x como na hipótese, e $x = [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$ uma representação decimal de x . Então existem números naturais m, l tais que $x = \frac{l}{10^m}$. Usando a notação anteriormente definida temos $0 \leq x - r_m \leq \frac{1}{10^m}$ logo $0 \leq l - 10^m r_m \leq 1$ e os números l e $10^m r_m$ são inteiros. Assim, temos dois casos a analisar:

Se $l - 10^m r_m = 0$, então $x = \frac{l}{10^m} = r_m$, que é

$$x = [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_m}{10^m}.$$

Assim, todos os algarismos c_{m+1}, c_{m+2}, \dots devem ser zero. Seja m_0 o menor número natural com essa propriedade, assim $c_{m_0} = c_{m_0+1} = \dots = 0$. Se, $m_0 = 1$ então $x = [x]$ o que é impossível. Se $m_0 > 1$ então $c_{m_0-1} \neq 0$, assim $c'_{m_0-1} = c_{m_0-1} - 1$ também é um algarismo do sistema decimal. Consequentemente, o número x tem também a representação

$$x = [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c'_{m_0-1}}{10^{m_0-1}} + \frac{9}{10^{m_0}} + \frac{9}{10^{m_0+1}} + \dots.$$

Se $l - 10^m r_m = 1$, então $x - r_m = \frac{1}{10^m}$ é possível somente no caso em que $c_{m+1} = c_{m+2} = \dots = 9$. Seja m_0 o menor número natural tal que $c_{m_0} = c_{m_0+1} = \dots = 9$. Se, $m_0 = 1$ então $x = [x] + 1$, que é impossível. Então $m_0 > 1$ e $c_{m_0-1} \neq 9$. Assim $c'_{m_0-1} = c_{m_0-1} + 1$ também é um algarismo do sistema decimal, e concluímos,

$$\begin{aligned} x &= [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c'_{m_0-1}}{10^{m_0-1}} + \frac{0}{10^{m_0}} + \frac{0}{10^{m_0+1}} + \dots \\ &= [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_{m_0-1}}{10^{m_0-1}} + \frac{9}{10^{m_0}} + \frac{9}{10^{m_0+1}} + \dots. \end{aligned}$$

□

Exemplo:

O número racional $\frac{1}{2}$ pode ser representado em notação decimal como 0,5 ou como 0,4999..., enquanto o número racional $\frac{1}{3}$ tem uma única representação decimal como 0,3333....

Teorema 2.6: Um número real não negativo x é racional se e somente se tem uma representação decimal finita ou infinita periódica.

Prova: Seja x um número racional representado por uma fração irredutível $\frac{l}{m}$ e seja $x = [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$ a sua representação decimal. Sejam

$$x_1 = x - [x]$$

$$x_{n+1} = 10x_n - [10x_n], \quad n = 1, 2, \dots$$

$0 \leq x_n \leq 1$ para $n = 1, 2, \dots$ e $mx_1 = l - m[x]$, onde mx_1 é um inteiro. Temos $mx_{n+1} = 10mx_n - m[10x_n]$ para $n = 1, 2, \dots$. Por indução, é fácil provar que todos os números mx_n são números inteiros que satisfazem as desigualdades $0 \leq mx_n < m$ para $n = 1, 2, \dots$.

Se para algum n , temos $x_n = 0$ então $x_j = 0$ para todo $j \geq n$. Assim

$$x = [x] + \frac{[10x_1]}{10} + \frac{[10x_2]}{10^2} + \dots + \frac{[10x_{n-1}]}{10^{n-1}} + \frac{0}{10^n} + \frac{0}{10^{n+1}} + \dots,$$

e portanto x possui uma representação finita.

Se $x_n \neq 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$, temos que $0 < mx_n < m$ para $n = 1, 2, \dots$. Assim, os números mx_1, mx_2, \dots, mx_n podem ter apenas $m - 1$ diferentes valores de $1, 2, \dots, m - 1$. Daqui resulta que existem números naturais h e s tais que $h + s \leq m$ e $mx_h = mx_{h+s}$, o que prova que $x_n = x_{n+s}$ para $n > h$ e, portanto, $c_n = c_{n+s}$, para $n \geq h$. Assim, a representação é infinita periódica.

Reciprocamente, iremos provar que, se a sequência de dígitos c_1, c_2, \dots é periódica, então o número $x = [x] + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$ é racional. Na verdade, se existem números naturais s e h tais que $c_{n+s} = c_n$ quando $n \geq h$, temos,

$$x = [x] + \frac{c_1}{10} + \dots + \frac{c_h}{10^h} + \frac{c_{h+1}}{10^{h+1}} + \dots + \frac{c_h}{10^{h+s}} + \frac{c_{h+1}}{10^{h+s+1}} \dots$$

logo, fazendo $[x] = d_1 \dots d_k$ vem

$$10^{s+h-1}x - 10^{h-1}x = d_1 \dots d_k c_1 c_2 \dots c_{h+s-1} - d_1 \dots d_k c_1 c_2 \dots c_{h-1}$$

e portanto

$$x = \frac{d_1 \dots d_k c_1 c_2 \dots c_{h+s-1} - d_1 \dots d_k c_1 c_2 \dots c_{h-1}}{10^{h-1}(10^s - 1)}$$

donde concluímos que x é um número racional.

□

1.4. Representação de sistemas com base n

Como já mencionamos, além do sistema decimal muitos outros sistemas numéricos têm sido usados em cálculos aritméticos. Nas últimas décadas, alguns deles têm sido amplamente difundidos devido à sua aplicação nas ciências da computação. Além disso, os sistemas numéricos aparecem nos problemas teóricos de Teoria dos Números e da Análise. Uma das questões que se podem colocar, que é respondida nas secções anteriores para o sistema decimal, é se um sistema de números é suficiente para representar os números reais. Iremos ver que todos os resultados já mencionados para o sistema decimal são válidos em sistemas com base n , sendo n um número natural maior que 1. Nesta secção não faremos nenhuma demonstração dado que estas são análogas às demonstrações já apresentadas.

Definição 3.1: *Seja $g \in \mathbb{N}$ tal que $g > 1$. Dizemos que um número natural N tem uma representação na base de g se*

$$N = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_1 g + c_0$$

onde

(a) m é um número inteiro maior ou igual a zero,

(b) c_n , $n = 0, 1, \dots, m$, são inteiros com a propriedade $0 \leq c_n \leq g - 1$, para $n = 0, 1, \dots, m$, e $c_m \neq 0$.

Se cada número da sequência $0, 1, 2, \dots, g - 1$ é indicado por um símbolo especial, esses símbolos são chamados algarismos e N pode ser reescrito na forma

$$N = (\gamma_m \gamma_{m-1} \dots \gamma_1 \gamma_0)_g,$$

onde γ_n é o algarismo que indica o número de c_n .

Exemplo:

Se $g \leq 10$, os símbolos $0, 1, 2, \dots, 9$ são usados como os algarismos na base g .

$N = (10010)_2$ significa $N = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 = 18$ e

$N = (5603)_7$ significa $N = 5 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 0 \times 7 + 3 = 2012$.

Teorema 3.2: *Seja g um dado número natural maior que 1, e x um número real não negativo. Então,*

- (1) *O número x tem representação na base g .*
- (2) *Em qualquer representação de x , na base g , é impossível ter todos os c_n , $n = 1, 2, \dots$, iguais a $g - 1$.*
- (3) *Se x não é um número racional, que é uma fracção irredutível com um denominador de tal forma que qualquer divisor primo dele divide g , então o número x tem precisamente uma representação na base g . Além disso, esta única representação é infinita e tem infinitamente muitos algarismos diferentes de $g - 1$.*
- (4) *Se x é um número racional igual a uma fracção irredutível cujo denominador é um produto de números primos cada um dos quais é um divisor de g , então x tem duas representações na base g . Numa delas todos os c_n , $n = 1, 2, \dots$, excepto um número finito são iguais a zero, no outro a partir de um certo n todos os c_n são iguais a $g - 1$.*
- (5) *O número x é racional se e somente se ele tem uma representação decimal finita ou infinita periódica na base g .*

1.5. As fracções contínuas como representação dos números reais

A representação decimal não se assume como a única representação possível para os números reais. Deste modo, apresentamos a representação de números reais em fracções contínuas.

Uma fracção contínua é uma expressão da forma:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{\ddots \frac{b_n}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n \dots}}}}}$$

onde onde a_k 's e b_k 's são números reais.

Assumimos que estas fracções estão bem definidas, ou seja, não ocorre nenhuma divisão por zero.

Por outro lado, se $b_m = 0$ para algum m , se $n \geq m$:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n \ddots}}}}} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{\ddots}{a_{m-2} + \frac{b_{m-1}}{a_{m-1}}}}}$$

Estamos na presença de frações contínuas finitas.

A fração contínua é chamada simples se todos os b_k 's são 1 e os a_k 's são números inteiros positivos para $k \geq 1$. Representando-se da seguinte forma:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n \ddots}}}}}$$

Podemos também representar uma fração contínua da seguinte forma:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} + \dots$$

Coloquemos a seguinte questão:

Em que condições é que uma fração contínua representa um número real?

Sejam (a_n) e (b_n) , $n = 1, 2, \dots$, sequências de números reais e defina-se a sequência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ por

$$c_0 = a_0, c_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1}, c_2 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}, \dots, c_n = a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n}$$

Se o limite de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ existe, então dizemos que a fração contínua

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

ou
$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots$$

converge e usamos qualquer destas notações para indicar o valor de $\lim c_n$. Ou seja, a fração contínua representa um número real que é o limite da sucessão $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Verifiquemos agora em que condições é que a sucessão $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é convergente.

No caso em que $b_m = 0$, podemos definir a sucessão $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de modo a que para $n \geq m$, $c_n = c_{m-1}$. Portanto $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ constante a partir do m -ésimo termo, logo é convergente.

Teorema 4.1: *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais positivos e seja $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ a sucessão definida como anteriormente. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}$ é divergente, então a sucessão $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é convergente.*

Consideremos a fração contínua simples: $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma sucessão de números inteiros positivos e $b_n = 1$, logo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ é divergente. Assim, podemos afirmar:

Corolário: *Toda a fração contínua simples representa um número real.*

No caso de todos os $b_n = 1$ podemos usar a notação:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Esta notação é análoga à representação decimal dos números reais.

Será que todo o número real pode ser representado por uma fração contínua simples?

Todo número real x é representado por um ponto na recta real, e está entre dois inteiros sucessivos, digamos n e $n + 1$:

$$n \leq x < n + 1$$

O número $u = x - n$ satisfaz $0 \leq u < 1$. Assim, para um dado x real existe uma única decomposição,

$$x = n + u$$

onde n é um número inteiro e u satisfaz $0 \leq u < 1$.

Vamos utilizar um processo recursivo para representar os números reais através de frações contínuas simples.

Seja $x = n_1 + u_1$, onde n_1 é um número inteiro e $0 \leq u_1 < 1$.

Se $u_1 = 0$, então o processo recursivo termina com este primeiro passo, logo $x = n_1$.

Se $u_1 \neq 0$, então $\frac{1}{u_1}$, o inverso de u_1 , satisfaz $\frac{1}{u_1} > 1$. Então temos:

$\frac{1}{u_1} = n_2 + u_2$, onde n_2 é um número inteiro e u_2 satisfaz $0 \leq u_2 < 1$.

Assim, $x = n_1 + u_1 = n_1 + \frac{1}{\frac{1}{u_1}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + u_2}$.

Se $u_2 = 0$ temos a representação de um número real em fração contínua. Caso contrário, repetimos o raciocínio.

Em geral, se $u_k = 0$, então o processo recursivo termina com:

$$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}}}$$

No caso em que $u_k > 0$, podemos reescrever $\frac{1}{u_k}$ como $\frac{1}{u_k} = n_{k+1} + u_{k+1}$, onde n_{k+1} é um número inteiro e satisfaz $0 \leq u_{k+1} < 1$.

Após $k + 1$ etapas, podemos escrever o número real como:

$$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n_{k+1} + u_{k+1}}}}}$$

Então verificamos que toda a função contínua simples representa um número real: $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$.

1.6. As frações contínuas como representação dos números racionais

Os números racionais são representados por dízimas finitas ou infinitas periódicas e os números irracionais por dízimas infinitas não periódicas. Nesta secção iremos ver como se caracteriza a representação de um número racional através de uma fração contínua.

Teorema 5.1: *Um número real é racional se e somente se pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

Prova: Seja $x = \frac{a}{b}$, com $b > 0$.

Então, $\frac{a}{b} = n_1 + u_1$, onde $u_1 = \frac{a-n_1b}{b}$, ou seja, $u_1 = \frac{r_1}{b}$ onde r_1 é o resto da divisão de a por b .

No caso de $u_1 = 0$ então x é um número inteiro. Se $u_1 \neq 0$, então $\frac{1}{u_1} = \frac{b}{r_1} = n_2 + u_2$ onde $u_2 = \frac{b-n_2r_1}{r_1}$.

Assim, $u_2 = \frac{r_2}{r_1}$, onde r_2 é o resto da divisão de b por r_1 . Logo,

$$\frac{a}{b} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Se $r_2 = 0$ o processo termina e temos x representado por uma fracção contínua finita. Se $r_2 > 0$ repetimos o processo.

Como r_1, r_2, \dots são os restos das sucessivas divisões e $r_1 > r_2 > \dots$ o processo termina após um número finito de etapas com o aparecimento de um resto zero.

Assim, mostramos que, se x é racional, então a fracção contínua simples que o representa é finita.

Reciprocamente, provamos por indução que se uma fração contínua simples é finita, então representa um número racional.

Seja x um número real representado por uma fracção contínua simples finita,

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Se $n = 1$, então x é um número inteiro.

Seja $n > 1$ e suponhamos, por hipótese de indução, que o teorema é verdadeiro para os números reais que podem ser escritos em fração contínua na forma $y = [b_0; b_1, b_2, \dots, b_n]$, onde b_0 é um número inteiro e $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}$. Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}]$.

Podemos reescrever esta expressão da seguinte forma: $x = a_0 + \frac{1}{y}$, onde $y = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}]$.

Por hipótese de indução y é um número racional e então, $x = a_1 + \frac{1}{p}$. Ou seja, $x = \frac{pa_1+q}{p}$.

Uma vez que a_1 , p e q são números inteiros, x é um número racional. Portanto, o teorema é verdadeiro para $n + 1$, e assim por indução, provamos que se uma fracção contínua de x é finita então x é racional.

□

1.7. Conclusão

O estudo da representação decimal e em fração contínua dos números reais contribuiu para a aquisição/consolidação/incorporação de competências científicas necessárias ao exercício da função docente no Ensino da Matemática, perspetivando uma formação adequada, capaz de responder aos diversos desafios da realidade escolar tal como definido nos objetivos deste ciclo de estudos.

Entendemos que deverá existir uma articulação entre o conhecimento científico, a formação pedagógica e a prática profissional. Ao querer encontrar uma ligação e uma aplicação na prática profissional, para o conhecimento matemático adquirido/aprofundado com este trabalho, podemos referir *Delgado (2009)* quando cita *Mcintosh, Reys e Reys, (1992)* “De uma forma global, diria que o PMEB (Programa de Matemática do Ensino Básico) assume, nos três ciclos, uma perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, que inclui, entre outros aspetos, a compreensão de múltiplas representações dos números, de regularidades dos números, do efeito das operações, das suas propriedades e das relações entre elas, e a capacidade para relacionar o contexto e os cálculos”, sendo esta afirmação consequência do propósito principal de ensino do tema Números e Operações, no terceiro ciclo do ensino

básico. Podemos também mencionar que “as diferentes representações dos números também devem ser ligadas à resolução de problemas geométricos, em que a relação com conceito de medida tem um lugar privilegiado” (Brito, 2009).

Temos porém consciência que este estudo não esgotou, muito longe disso, tudo o que poderia ser dito sobre a representação de números reais. Esperamos poder aprofundar este assunto em futuros trabalhos.

Capítulo 2 - Parte Pedagógica

Planificação da unidade “Função Polinomial. Polinómios”

2.1. Introdução

A Prática de Ensino Supervisionada (PES) inserida no Estágio Pedagógico teve lugar na Escola Secundária com 3º Ciclo do Fundão, no ano letivo de 2010/2011, sob a orientação da Dra. Maria Dulce Costa Nascimento, docente da escola cooperante e do Prof. Doutor Henrique José Freitas Cruz, docente da Universidade da Beira Interior. O trabalho foi realizado em duas das turmas atribuídas à orientadora cooperante, uma do 8º ano e outra do 10º ano do curso de Ciências e Tecnologias.


Da Prática de Ensino Supervisionada fazem parte 12 sessões letivas supervisionadas, como estipulado no *Regulamento Específico da Iniciação à Prática Profissional do 2º Ciclo em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário*, assim distribuídas: No 1º período, 4 aulas do 8º ano da *Unidade 2 - Teorema de Pitágoras. Decomposição de Figuras e áreas. Semelhança de Triângulos* tendo-se abordado os temas: Semelhança de Triângulos. Relações entre perímetros e áreas de triângulos semelhantes. Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos. No 2º período, 6 aulas do 10º ano da disciplina de Matemática A e relativas à unidade: “Funções Polinomiais. Polinómios”, incluída no *Tema 2 - Funções e Gráficos - Generalidades. Funções Polinomiais. Função Módulo*. No 3º período, 2 aulas do 10º ano da disciplina de Matemática A relativas à *Unidade 3 - Estatística: Medidas de localização*.

Neste capítulo apresentamos as planificações efetuadas para a unidade “Funções Polinomiais. Polinómios”, incluída no Tema 2 da disciplina de Matemática A do 10º ano dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias e Ciências Sócio-Económicas. Estas planificações são apenas parte do trabalho desenvolvido durante a PES, em virtude das limitações impostas para este relatório. Tivemos sempre presente a preocupação de contribuir para que se desenvolvesse um verdadeiro processo de ensino-aprendizagem, através do estabelecimento de objetivos e da seleção de estratégias, que permitam aos alunos a aquisição e aplicação de conhecimentos e de competências matemáticas, pois consideramos que aprender matemática é também aprender a interpretar o que nos rodeia com um sentido matemático. Foram tidas em conta todas as orientações expressas no programa da disciplina elaborado pelo Ministério da Educação.

A planificação da unidade “Funções Polinomiais. Polinómios” é composta por 6 aulas. Na 1ª aula iremos trabalhar as operações com polinómios e utilizar o método dos coeficientes indeterminados e a regra de Ruffini para determinar os coeficientes do polinómio quociente e o resto da divisão inteira de polinómios. Na 2ª aula iremos abordar o teorema do resto para encontrar o resto da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por um binómio $(x - a)$, a decomposição de um polinómio em fatores, a identificação do número máximo de raízes de um polinómio e o cálculo da multiplicidade de uma raiz. Nas aulas nº 3 e nº 4 será feito o estudo das famílias de funções cúbicas $y = ax^3; a \neq 0$, $y = a(x - \beta)^3$, $y = a(x - \beta)(x - \alpha)^2$, $y = a(x - \beta)(x - \alpha)(x - \lambda); a \neq 0$, $y = a(x - \alpha)(x^2 + k); a \neq 0$ e $k > 0$. Na 4ª aula ainda iremos resolver problemas envolvendo funções polinomiais. Na aula nº 5 realizaremos exercícios de consolidação de conhecimentos, nomeadamente a resolução de problemas envolvendo funções polinomiais e a resolução analítica, gráfica e numérica de inequações de grau superior a 2. Na 6ª aula iremos realizar exercícios de consolidação de conhecimentos sobre a função polinomial.

Em todas as planificações apresentadas são considerados os seguintes tópicos: *conteúdos programáticos, pré-requisitos, objetivos, materiais e recursos necessários, sumário, estratégias do docente, questões a resolver na aula e avaliação dos alunos.*

2.2. Aula 1

Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão  2010/2011	Planificação da Aula Nº 1		
	Ano: 10º	Turma: CT1	Data: 23 de Março de 2011
	Unidade Didática: Estudo da Função Polinomial		
	Professora estagiária: Maria Madalena Simão Duarte		

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- ▶ Polinómios. Operações com polinómios;
- ▶ Método dos coeficientes indeterminados;
- ▶ Regra de Ruffini.

PRÉ-REQUISITOS:

- ▶ Saber calcular o perímetro, a área e o volume de um paralelepípedo;
- ▶ Identificar o coeficiente e a parte literal de um monómio.
- ▶ Identificar um polinómio e o seu grau.
- ▶ Verificar se um polinómio é completo e ordená-lo;

OBJECTIVOS:

- ▶ Efetuar adições, subtrações e multiplicações de polinómios;
- ▶ Efetuar a divisão inteira de polinómios;
- ▶ Efetuar a divisão de polinómios utilizando o método dos coeficientes indeterminados e a regra de Ruffini.

MATERIAIS E RECURSOS:

- ▶ Quadro Interativo;
- ▶ Projetor de Vídeo;
- ▶ Computador;
- ▶ Manual Adoptado:

Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda; Novo Espaço - Matemática A 10º Ano; Porto Editora.

SUMÁRIO:

Polinómios. Operações com polinómios.

Método dos coeficientes indeterminados e Regra de Ruffini.

Resolução de exercícios do manual.

ESTRATÉGIAS:

No início da aula apresento uma tarefa cuja exploração permite apresentar a definição de polinómio de grau n , partindo do cálculo do perímetro, da área e do volume de um paralelepípedo e apresentando-os sob a forma de polinómios de grau 1, 2 e 3 respetivamente (exploração de uma tarefa).

É dado algum tempo para os alunos explorarem a tarefa e responderem às questões, depois serão confrontadas e discutidas as respostas às questões, assim como os processos utilizados pelos alunos.

Relembro algumas definições relacionadas com os polinómios tais como: grau de um polinómio, polinómio completo e incompleto, monómio, binómio e polinómio nulo.

Em seguida, explico através de exemplos que resolvo no quadro, as regras de adição, subtração, multiplicação e divisão inteira de polinómios e proponho a realização de exercícios do manual para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos.

Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem na resolução dos exercícios.

A definição de grau de polinómio resultante da multiplicação de dois polinómios é apresentada a partir da resolução do exemplo da multiplicação de polinómios.

As definições de divisão exata, polinómio divisível, polinómio múltiplo e polinómio divisor resultam e são lembradas a partir do exemplo de divisão inteira de polinómios.

Apresento e explico o método dos coeficientes indeterminados para encontrar os polinómios quociente e resto na divisão de polinómios e proponho a realização de exercícios do manual para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos.

Em seguida, refiro que podemos aplicar um método denominado Regra de Ruffini para determinar os coeficientes do polinómio quociente e o resto da divisão quando queremos efetuar a divisão inteira de polinómios em que o divisor é um polinómio de grau 1. Explico a sequência de etapas da Regra de Ruffini recorrendo a um exercício prático.

Proponho a realização de exercícios do manual para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos sobre a Regra de Ruffini.

Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem na resolução dos exercícios.

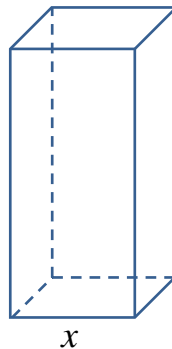
DESENVOLVIMENTO DA AULA:

- ✓ Início a aula ditando o sumário.

- ✓ Refiro que vamos relembrar alguns conceitos já estudados sobre polinómios e efetuar operações com polinómios.
- ✓ Distribuo uma folha contendo o enunciado da tarefa a ser realizada pelos alunos, dando tempo suficiente para a realização da mesma.
- ✓ Após os alunos resolverem e explorarem a tarefa apresentada, irei resolver as questões da tarefa no quadro interativo, promovendo a discussão das respostas às questões, assim como os processos utilizados pelos alunos.

Tarefa

A Ana costuma fazer os presentes que dá à família e aos amigos. Para o Dia da Mãe, resolveu construir uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada. Para construir a estrutura da caixa usou um arame colorido e depois construiu as faces em papel celofane. No final, a altura da caixa media mais 5 cm do que a aresta da base.



1. Escreva a expressão da quantidade de arame gasto pela Ana.

R:

A quantidade de arame necessária corresponde ao perímetro das duas bases, acrescido das quatro alturas.

Designando por P a expressão que representa a quantidade de arame, em centímetros, temos que:

$$P = 2(4x) + 4(x + 5) \Leftrightarrow C(x) = 12x + 20$$

2. Qual é a expressão que dá a quantidade de papel celofane gasto pela Ana?

R:

A quantidade de papel celofane corresponde à área total da caixa, que é a soma das áreas das duas bases e das quatro faces laterais.

A expressão x^2 corresponde à área de cada base e $x(x + 5)$ à área de cada face lateral.

Seja A a expressão que representa essa área total:

$$A = 2x^2 + 4x(x + 5) \Leftrightarrow A(x) = 6x^2 + 20x$$

3. Qual é a expressão que dá o volume da caixa que a Ana construiu?

R:

Designemos por V o volume da caixa:

$$V = x^2(x + 5) \Leftrightarrow V(x) = x^3 + 5x^2$$

- ✓ Refiro que as expressões anteriores são designadas por polinómios. E que P é um polinómio do 1º grau completo, A é um polinómio do 2º grau incompleto (falta-lhe o termo independente (grau zero)) e V é um polinómio do 3º grau incompleto (falta-lhe o termo de grau um e o termo independente).
- ✓ Apresento, no quadro, a definição de polinómio e peço aos alunos para registar no caderno o que for apresentado no quadro.

Um polinómio de grau n , em x , é toda a expressão do tipo

$$a_0 + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

em que:

- x é a variável real;
- $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_0 \neq 0$;
- $n \in \mathbb{N}$;

Um polinómio com dois termos diz-se **binómio**.

Se um polinómio tem só um termo, diz-se **monómio**.

Um polinómio que apresenta todos os coeficientes iguais a zero diz-se **polinómio nulo**.

- ✓ Refiro que vamos trabalhar agora as operações com polinómios:
- ✓ Relembro que para adicionar dois polinómios associamos os termos semelhantes e adicionamos as correspondentes partes literais. Exemplificando no quadro:

Considerando os polinómios:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \text{ e } Q(x) = x^3 + 4x - 3$$

Então:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (3x^3 + 2x^2 - x + 1) + (x^3 + 4x - 3) = (3x^3 + x^3) + 2x^2 + (-x + 4x) + (1 - 3) = \\ &= 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

- ✓ Relembro que para subtrair dois polinómios adiciona-se ao primeiro o simétrico do segundo. Exemplificando no quadro:

Considerando os polinómios:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \text{ e } Q(x) = x^3 + 4x - 3$$

Então:

$$P(x) - Q(x) = (3x^3 + 2x^2 - x + 1) - (x^3 + 4x - 3) = (3x^3 + 2x^2 - x + 1) + [-(x^3 + 4x - 3)] =$$

$$= (3x^3 + 2x^2 - x + 1) + (-x^3 - 4x + 3) = 2x^3 + 2x^2 - 5x + 4x$$

- ✓ Refiro que para efetuar a multiplicação de dois polinómios poderemos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica ou aplicar o algoritmo da multiplicação. Exemplificando no quadro:

Considerando os polinómios:
 $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ e $Q(x) = x^3 + 4x - 3$
 Então:

$$P(x) \times Q(x) = (3x^3 + 2x^2 - x + 1) \times (x^3 + 4x - 3) =$$

$$= 3x^6 + 12x^4 - 9x^3 + 2x^5 + 8x^3 - 6x^2 - x^4 - 4x^2 + 3x + x^3 + 4x - 3 =$$

$$= 3x^6 + 2x^5 + 11x^4 - 10x^2 + 7x - 3$$

ou:

				+3x ³	+ 2x ²	- x	+ 1
			×	+x ³		+ 4x	- 3
				-9x ³	- 6x ²	+ 3x	- 3
		+12x ⁴		+ 8x ³	- 4x ²	+ 4x	
+3x ⁶	+ 2x ⁵	- x ⁴	+x ³				
+3x ⁶	+ 2x ⁵	+ 11x ⁴	0	- 10x ²	+ 7x	- 3	

Assim,

$$P(x) \times Q(x) = 3x^6 + 2x^5 + 11x^4 - 10x^2 + 7x - 3$$

- ✓ Relembro e peço aos alunos para registarem no caderno o que for escrito no quadro:

Se os graus dos polinómios P e Q são, respetivamente, m e n, então o grau do polinómio P x Q é igual a m + n.

- ✓ Refiro que um dos processos para efetuar a divisão inteira de polinómios assenta na mesma estrutura do algoritmo da divisão inteira de números naturais. Relembro alguns conceitos básicos e exemplifico no quadro:

Considerando D e d dois números inteiros, então:

D	d	D - dividendo
- dq	q	d - divisor
r		q - quociente
		r - resto

Aplicando o mesmo algoritmo aos polinómios efetuemos a divisão inteira do polinómio $M(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 8$ pelo polinómio $N(x) = x + 4$

Então:

$$4x^3 - 8x^2 + 5x - 8 \quad \left| \begin{array}{l} x + 4 \\ \hline 4x^2 \end{array} \right.$$

O primeiro termo do quociente terá de ser $4x^2$, pois $4x^2 \times x = 4x^3$. Em seguida, multiplicamos $4x^2$ por $x + 4$ e subtraímos o produto ao polinómio dividendo, tal como fazemos na divisão de números naturais:

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 8 \quad \left| \begin{array}{l} x + 4 \\ \hline 4x^2 \end{array} \right. \\ -4x^3 - 16x^2 \\ \hline 0 \quad -24x^2 \end{array}$$

Continuamos o algoritmo da mesma forma, até que o grau do resto seja inferior ao grau do divisor, o que impossibilita continuar a divisão inteira:

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 8 \quad \left| \begin{array}{l} x + 4 \\ \hline 4x^2 - 24x + 101 \end{array} \right. \\ -4x^3 - 16x^2 \\ \hline 0 \quad -24x^2 + 5x - 8 \\ +24x^2 + 96x \\ \hline 0 \quad +101x - 8 \\ -101x - 404 \\ \hline 0 \quad -412 \end{array}$$

Podemos concluir que na divisão de $M(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 8$ por $N(x) = x + 4$ o **polinómio quociente** é $Q(x) = 4x^2 - 24x + 101$ e o **polinómio resto** é $R(x) = -412$, ou seja,

$$\begin{aligned} M(x) &= N(x) \times Q(x) + R(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 8x^2 + 5x - 8 &= (4x^2 - 24x + 101)(x + 4) - 412 \end{aligned}$$

✓ Para concluir, relembro pedindo aos alunos para registarem no caderno o que for escrito no quadro:

No caso em que $R(x) = 0$, diz-se que a **divisão é exata**, ou ainda que:

O polinómio $M(x)$ é **divisível** pelo polinómio $N(x)$;

O polinómio $M(x)$ é **múltiplo** do polinómio $N(x)$;

O polinómio $N(x)$ é **divisor** do polinómio $M(x)$;

- ✓ Proponho aos alunos a realização dos exercícios 73, 75, 78.1 e 79.2 das páginas 69, 70 e 72 do manual.
- ✓ Resolvo os exercícios propostos solicitando a participação dos alunos para escrever as respostas no quadro.
- ✓ Indico que existem outros processos para calcular os polinômios quociente e resto de uma divisão inteira de polinômios, um desses processos é o **método dos coeficientes indeterminados**. Exemplifico, no quadro, através de um exemplo.

Queremos efetuar a divisão inteira do polinômio $M(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ pelo polinômio $N(x) = x + 1$.

Como os graus dos polinômios P e Q são, respetivamente, m e n, então o grau do polinômio $P:Q$ (quociente) é igual a $m - n$.

Logo, o grau do polinômio quociente, $Q(x)$ é 2, ou seja, $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Como o grau do resto tem de ser inferior ao grau do divisor, logo o grau do resto é 0, ou seja, $R(x) = r$.

Atendendo a que, $M(x) = Q(x) \times N(x) + R(x)$.

Logo, $2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = (ax^2 + bx + c)(x + 1) + r \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 &= ax^3 + ax^2 + bx^2 + bx + cx + c + r = \\ &= ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c + r \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = -3 \\ b + c = 5 \\ c + r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 10 \\ r = -8 \end{cases}$$

Então, $Q(x) = 2x^2 - 5x + 10$ e $R(x) = -8$

- ✓ Proponho aos alunos a realização dos exercícios 82 e 83 da página 74 do manual.
- ✓ Resolvo os exercícios propostos solicitando a participação dos alunos para escrever as respostas no quadro.
- ✓ Menciono que quando queremos efetuar a divisão inteira de polinômios em que o divisor é um polinômio de grau 1, em particular do tipo $x - a$, com $a \in \mathbb{R}$, podemos aplicar um método denominado por **Regra de Ruffini**, que permite determinar os coeficientes do polinômio quociente e o resto da divisão (grau zero). Através de um exemplo, explico a sequência de etapas da Regra de Ruffini recorrendo à projeção da resolução do exercício.

Recorrendo à regra de Ruffini obtemos o quociente e o resto da divisão de $x^3 - 2x + 5$ por $x - 3$ da seguinte forma:

<p>número que anula o divisor ↓ 3</p>	<p style="text-align: center;">coeficientes do dividendo</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> </table>	1	0	-2	5	<p>Os coeficientes do dividendo são escritos por ordem decrescente do grau dos seus termos.</p>																				
1	0	-2	5																							
3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↓</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1	0	-2	5	↓				1				<p>Escrever debaixo da linha o coeficiente do termo de mais elevado grau do dividendo.</p>												
1	0	-2	5																							
↓																										
1																										
3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↙</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">①</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1	0	-2	5	↙	3			①				<p>Multiplicar 3 por 1 e colocar o produto, 3, na tabela imediatamente debaixo do coeficiente do 2º termo do dividendo.</p>												
1	0	-2	5																							
↙	3																									
①																										
3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↙</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1	0	-2	5	↙	3	+		↘	3			1	3			<p>Adicionar 0 com 3 e escrever a soma na última linha da tabela.</p>								
1	0	-2	5																							
↙	3	+																								
↘	3																									
1	3																									
3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↙</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">③</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1	0	-2	5	↙	3	+		↘	9			③				<p>Multiplicar 3 por 3 e escrever o produto, 9, por baixo do 3º termo do dividendo.</p>								
1	0	-2	5																							
↙	3	+																								
↘	9																									
③																										
3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↙</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">⑦</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1	0	-2	5	↙	3	+		↘	9	+		⑦				<p>Adicionar -2 com 9 e escrever a soma, 7, na última linha.</p>								
1	0	-2	5																							
↙	3	+																								
↘	9	+																								
⑦																										
3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↙</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">⑦</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">②①</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1	0	-2	5	↙	3	+		↘	9	+		⑦	+			②①				<p>Multiplicar 3 por 7 e escrever o produto, 21, por baixo do último termo do dividendo.</p>				
1	0	-2	5																							
↙	3	+																								
↘	9	+																								
⑦	+																									
②①																										
3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↙</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">⑦</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">②①</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">②⑥</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1	0	-2	5	↙	3	+		↘	9	+		⑦	+	+		②①	+	+		②⑥				<p>Calcular a soma de 5 com 21 e escrevê-la na última linha.</p>
1	0	-2	5																							
↙	3	+																								
↘	9	+																								
⑦	+	+																								
②①	+	+																								
②⑥																										
3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">0</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↙</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">⑦</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">②①</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">②⑥</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td></td> </tr> </table>	1	0	-2	5	↙	3	+		↘	9	+		⑦	+	+		②①	+	+		②⑥	+	+		<p>Separar os coeficientes do quociente do resto. O grau do quociente é 2. Logo, $Q(x) = x^2 + 3x + 7$ e $R(x) = 26$</p>
1	0	-2	5																							
↙	3	+																								
↘	9	+																								
⑦	+	+																								
②①	+	+																								
②⑥	+	+																								
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">3</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">7</td> <td style="width: 25%; text-align: center;">26</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center;">coeficientes do quociente</td> <td style="text-align: center;">resto</td> </tr> </table>	1	3	7	26	coeficientes do quociente			resto																	
1	3	7	26																							
coeficientes do quociente			resto																							

Desta forma, temos que $x^3 - 2x + 5 = (x - 3)(x^2 + 3x + 7) + 26$

- ✓ Marcar para trabalho de casa os exercícios 85.1, 86.1 e 87.3 das páginas 75 e 76 do manual.

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Exercício 73 da página 69

Comenta a afirmação: “Existe um valor $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a + 1)x^3 + ax^2 + (3a + 3)x + a$ é um polinómio completo do 2º grau.”.

R.:

A afirmação é falsa, pois para que o polinómio seja do 2º grau tem-se $a = -1$.

Mas se $a = -1$, obtemos o polinómio incompleto $-x^2 - 1$.

Exercício 75 da página 70

Considera os polinómios:

$$A(x) = 3x^2 + x - 1;$$

$$B(x) = x^2 - 2;$$

$$C(x) = 10x^4 + 3x^2 + x - 8.$$

Calcula apresentando o resultado na forma de polinómio reduzido e ordenado.

75.1.

$$A(x) + B(x)$$

R.:

$$A(x) + B(x) = (3x^2 + x - 1) + (x^2 - 2) = 4x^2 + x - 3$$

75.2.

$$A(x) - C(x)$$

R.:

$$\begin{aligned} A(x) - C(x) &= (3x^2 + x - 1) - (10x^4 + 3x^2 + x - 8) = \\ &= (3x^2 + x - 1) + [-(10x^4 + 3x^2 + x - 8)] = \\ &= (3x^2 + x - 1) + (-10x^4 - 3x^2 - x + 8) = -10x^4 + 7 \end{aligned}$$

75.3.

$$A(x) \times B(x)$$

R.:

$$\begin{aligned} A(x) \times B(x) &= (3x^2 + x - 1) \times (x^2 - 2) = 3x^4 - 6x^2 + x^3 - 2x - x^2 + 2 = \\ &= 3x^4 + x^3 - 7x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

75.4.

$$(B(x))^2 - C(x)$$

R.:

$$\begin{aligned} (B(x))^2 - C(x) &= (x^2 - 2)^2 - (10x^4 + 3x^2 + x - 8) = (x^4 - 4x^2 + 4) - (10x^4 + 3x^2 + x - 8) = \\ &= x^4 - 4x^2 + 4 - 10x^4 - 3x^2 - x + 8 = -9x^4 - 7x^2 - x + 12 \end{aligned}$$

Exercício 78.1 da página 72

Determina o polinómio que:

78.1.

Dividido por $(x^2 + 3x - 1)$ tem como quociente $(3x - 2)$ e resto $(5x + 4)$

R.:

$$P(x) = (x^2 + 3x - 1) \times (3x - 2) + (5x + 4) = (3x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x - 3x + 2) + (5x + 4) \\ = 3x^3 + 7x^2 - 4x + 6$$

Exercício 79.2 da página 72

Efetua as seguintes divisões, indicando o quociente e o resto:

79.2.

$$(x^4 - 8) : (x^2 + 2)$$

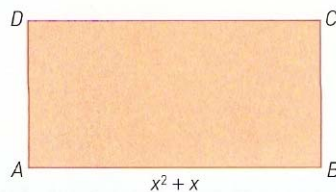
R.:

$$\begin{array}{r} x^4 \quad 0x^3 \quad 0x^2 \quad 0x \quad -8 \\ -x^4 \quad -2x^2 \\ \hline -2x^2 \quad 0x^2 \quad 0x \quad -8 \\ +2x^2 \quad +4 \\ \hline +4 \quad 0x \quad -8 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ \hline x^2 - 2 \end{array} \right.$$

$$Q(x) = x^2 - 2 \quad \text{e} \quad R(x) = -4$$

Exercício 82 da página 74

Na figura está representado um rectângulo $[ABCD]$.



A área do rectângulo é dada pela expressão $3x^3 + x^2 - 2x$ e $\overline{AB} = x^2 + x$. Utiliza o método dos coeficientes indeterminados para determinar a expressão que representa \overline{BC} .

R.:

Seja a área do rectângulo representada pelo polinómio $A(x) = \overline{AB} \times \overline{BC}$.

$$\text{Logo, } \overline{BC} = A(x) : \overline{AB}$$

Se \overline{BC} é o quociente entre a área que é um polinómio do 3º grau e a expressão de \overline{AB} que é um polinómio do 2º grau então $\overline{BC} = ax + b$

Temos então:

$$3x^3 + x^2 - 2x = (ax + b)(x^2 + x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^3 + x^2 - 2x = ax^3 + ax^2 + bx^2 + bx \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a + b = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Então $\overline{BC} = 3x + b$

Exercício 83 da página 74

Usando o método dos coeficientes indeterminados, calcula o quociente e o resto da divisão de $2x^3 - 4x^2 + 9$ por $2x^2 - 4$.

R.:

O quociente é um polinómio do 1º grau e o resto será no máximo do primeiro grau também:

$$Q(x) = ax + b \text{ e } R(x) = cx + d$$

Aplicando a propriedade fundamental da divisão será:

$$2x^3 - 4x^2 + 9 = (2x^2 - 4)(ax + b) + (cx + d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 + 9 = (2ax^3 + 2bx^2 - 4ax - 4b) + (cx + d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 + 9 = 2ax^3 + 2bx^2 + (c - 4a)x + (d - 4b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = -4 \\ c - 4a = 0 \\ d - 4b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \\ d = 1 \end{cases}$$


AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;

APOIO BIBLIOGRÁFICO: [3], [6], [10] e [11]

2.3. Aula 2

Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão  2010/2011	Planificação da Aula Nº 2		
	Ano: 10º	Turma: CT1	Data: 25 de Março de 2011
	Unidade Didática: Estudo da Função Polinomial		
	Professora estagiária: Maria Madalena Simão Duarte		

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- ▶ Teorema do Resto;
- ▶ Determinação das raízes de um polinómio. Decomposição em factores.

PRÉ-REQUISITOS:

- ▶ Saber identificar uma raiz ou um zero de um polinómio.
- ▶ Saber resolver uma equação do 2º grau.
- ▶ Saber aplicar a Regra de Ruffini.

OBJECTIVOS:

- ▶ Aplicar o teorema do resto para encontrar o resto da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por um binómio $(x - a)$.
- ▶ Decompor um polinómio em factores.
- ▶ Identificar o número máximo de raízes de um polinómio.
- ▶ Calcular a multiplicidade de uma raiz.

MATERIAIS E RECURSOS:

- ▶ Quadro Interativo;
- ▶ Projetor de Vídeo;
- ▶ Computador;
- ▶ Calculadora gráfica;
- ▶ Manual Adoptado:
Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda; Novo Espaço - Matemática A 10º Ano; Porto Editora.

SUMÁRIO:

Teorema do Resto.

Determinação das raízes de um polinómio. Decomposição em factores.

Resolução de exercícios do manual.

ESTRATÉGIAS:

No início da aula refiro a importância do conhecimento do resto da divisão de dois polinómios para saber, por exemplo, se um dado polinómio é divisível por outro.

Através da resolução, no quadro, de dois exercícios e analisando as respetivas respostas os alunos são levados a tirar conclusões que permitem construir o enunciado do Teorema do Resto como um método simples para encontrar o resto da divisão inteira de polinómios.

Enuncio no quadro o Teorema do Resto, que os alunos passam para o caderno.

Proponho a realização de exercícios do manual para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos sobre a aplicação do Teorema do Resto.

Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem na resolução dos exercícios.

Relembro que podemos decompor um polinómio de qualquer grau num produto de fatores, ou seja, podemos fatorizar o polinómio a partir da determinação das suas raízes.

Escrevo no quadro dois teoremas, um que descreve a forma como um polinómio pode ser decomposto se conhecermos as suas raízes e o outro que define o número máximo de zeros que um polinómio de grau n pode admitir. Apresento também a definição de raiz de multiplicidade k .

Proponho a realização de exercícios do manual para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos na aula.

Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem na resolução dos exercícios.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

- ✓ Início a aula ditando o sumário e resolvo, no quadro, os exercícios que foram marcados para trabalho de casa.
- ✓ Refiro que por vezes basta conhecermos o resto da divisão para responder a certas questões como por exemplo saber se um dado polinómio é divisível por outro. O Teorema do Resto é um método simples para se encontrar o resto da divisão inteira de polinómios.
- ✓ Chegaremos ao enunciado do teorema do resto através da resolução de dois exercícios no quadro interativo.

- Queremos verificar se o polinómio $A(x) = x^4 - 2x^3 + x - 2$ é divisível por $x - 2$.

Sabemos que $A(x) = (x - 2)Q(x) + R$.

Em particular, se $x = 2$, tem-se:

$$A(2) = 0 \times Q(x) + R \Leftrightarrow A(2) = R \Leftrightarrow 2^4 - 2 \times 2^3 + 2 - 2 = R \Leftrightarrow R = 0$$

Como $R = 0$, então $A(x)$ é divisível por $(x - 2)$.

Também podemos concluir que 2 é um **zero** ou **raiz do polinómio** $A(x)$, pois $A(2) = 0$

- Verifiquemos agora se o polinómio $B(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$ é divisível por $x - 2$.

Como vimos no exemplo anterior basta-nos então calcular $B(2)$ para conhecer o resto da divisão inteira de $B(x)$ por $x - 2$.

$$B(2) = -2 \times 2^3 + 2^2 - 2 + 1 = -13$$

Podemos então concluir que $R = -13$, logo $B(x)$ não é divisível por $x - 2$.

Como $B(2) \neq 0$, então 2 não é zero (ou não é raiz) do polinómio $B(x)$.

- ✓ Promovo a discussão das respostas dos exercícios anteriores, levando a que os alunos tirem conclusões que permitam construir o enunciado do teorema do resto.
- ✓ Escrevo, no quadro, o enunciado do teorema do resto, que os alunos passam para o caderno.

- O resto da divisão de um polinómio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

- Se o divisor é um binómio do tipo $ax - b$, o resto é dado por $P\left(\frac{b}{a}\right)$, pois $ax - b = a\left(x - \frac{b}{a}\right)$

- O número real a diz-se um zero ou raiz do polinómio $P(x)$ se e só se $P(a) = 0$

- a é raiz de $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow x - a$ é divisor de $P(x)$

- ✓ Proponho aos alunos a realização dos exercícios 90 e 91 da página 78 do manual.
- ✓ Refiro que quando estudamos a função quadrática vimos que, se esta tiver um ou dois zeros, podemos decompor o polinómio do 2º grau que a representa num produto de factores de grau inferior a 2, ou seja, podemos fatorizar o polinómio. De igual modo, podemos fatorizar um polinómio de qualquer grau a partir da determinação das suas raízes.
- ✓ Relembro, escrevendo no quadro, que:

Se a é uma raiz de um polinómio $P(x)$, então este é divisível por $x - a$, logo existe um polinómio $Q(x)$ tal que:

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

$P(x)$ foi, assim, decomposto num produto de dois factores.

Se $Q(x)$ tiver uma raiz b , existe um outro polinómio $S(x)$ tal que:

$$Q(x) = (x - b)S(x)$$

$$P(x) = (x - a)(x - b)S(x)$$

Podemos continuar a decomposição enquanto o polinómio quociente tiver raízes reais

- ✓ Peça aos alunos para passarem para o caderno os seguintes teoremas que escrevo no quadro:

Teorema:

Dado um polinómio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, de grau n , com n raízes x_1, x_2, \dots, x_n , $P(x)$ pode ser decomposto da seguinte forma:

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Teorema:

Um polinómio de grau n de coeficientes reais tem, no máximo, n raízes (zeros) reais.

- ✓ Definir, no quadro, raiz de multiplicidade k , e pedir aos alunos que registem no caderno.

Diz-se que a é uma **raiz de multiplicidade k** do polinómio $P(x)$ se o factor $(x - a)$ aparece exactamente k vezes na factorização de $P(x)$. Isto é:

$$P(x) = (x - a)^k Q(x)$$

e $Q(x)$ não é divisível por $(x - a)$.

- ✓ Proponho aos alunos a realização dos exercícios 98 e 100 das páginas 81 e 82 do manual.

RESOLUÇÃO DO TRABALHO DE CASA

Exercício 85.1 da página 75

Utiliza a regra de Ruffini para efetuar as seguintes divisões:

85.1. $(2x^3 - x^2 - 12x - 7) : x - 3$

R.:

Aplicando a regra de Ruffini:

	2	-1	-12	-7
3		6	15	9
	2	5	3	2

E daqui concluímos que $Q(x) = 2x^2 + 5x + 3$ e $R(x) = 2$

Exercício 86.1 da página 76

Recorrendo à regra de Ruffini, mostra que:

86.1. $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$ é divisível por $x - 2$

R.:

$P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$ é divisível por $x - 2$ se e só se $R(x) = 0$

Aplicando a regra de Ruffini:

	1	1	-4	-4	0
2		2	6	4	0
	1	3	2	0	0

Como $R(x) = 0$, logo $P(x)$ é divisível por $x - 2$.

Exercício 87.3 da página 76

Utiliza a regra de Ruffini para efetuar as seguintes divisões:

87.3. $(4x^3 - 8x^2 - 1) : (2x - 1)$

R.:

$(4x^3 - 8x^2 - 1) : (2x - 1) = (4x^3 - 8x^2 - 1) : 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$

Aplicando a regra de Ruffini:

	4	-8	0	-1
1/2		2	-3	-3/2
	4	-6	-3	-5/2

$2Q = 4x^2 - 6x - 3 \Leftrightarrow Q = x^2 - 3x - \frac{3}{2}$ e $R = -\frac{5}{2}$

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Exercício 90 da página 78

Determina $k \in \mathbb{R}$ de modo que a divisão de $2x^3 - 5x^2 + kx + 3$ por $x - 3$ seja exacta.

R.:

$2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 + k \times 3 + 3 = 0 \Leftrightarrow 54 - 45 + 3k + 3 = 0 \Leftrightarrow 3k = -12 \Leftrightarrow k = -4$

Exercício 91 da página 78

Considera a família de polinómios $P(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

91.1. Determina uma relação entre a e b de modo que $P(x)$ seja divisível por $x - 2$.

R.:

Para que $P(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ seja divisível por $x - 2$,

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - a \times 2^2 - 2 \times 2 + b = 0 \Leftrightarrow 8 - 4a - 4 + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4a + b = 0 \Leftrightarrow b = 4a - 4$$

91.2. Determina a e b sabendo que $P(x)$ é divisível por $x - 1$ e dividido por $x + 2$ dá resto 1.

R.:

Como $P(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ é divisível por $x - 1$, logo

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - a \times 1^2 - 2 \times 1 + b = 0 \Leftrightarrow 1 - a - 2 + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 - a + b = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$$

Também sabemos que $P(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ dividido por $x + 2$ dá resto 1, logo

$$P(-2) = 1 \Leftrightarrow (-2)^3 - a \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + b = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 - 4a + 4 + b = 1 \Leftrightarrow -4 - 4a + b = 1 \Leftrightarrow b = 4a + 5$$

Assim,

$$\begin{cases} b = a + 1 \\ b = 4a + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ a + 1 = 4a + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Portanto, $a = -\frac{4}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$

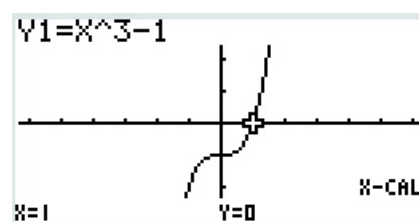
Exercício 98 da página 81

Decompõe em fatores os seguintes polinómios:

98.1. $A(x) = x^3 - 1$

R.:

Através da calculadora gráfica



verifica-se que 1 é um zero do polinómio $A(x) = x^3 - 1$.

Através da Regra de Ruffini:

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Então:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 - x - 1)$$

98.2. $B(x) = x^4 - x^2 - 2$

Sugestão: considera $y = x^2$

R.:

$B(x) = x^4 - x^2 - 2$, fazendo $y = x^2$, temos

$$B(y) = y^2 - y - 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

Assim, $B(y) = (y - 2)(y + 1)$, como $y = x^2$, vem

$$B(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1)$$

98.3. $C(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, sabendo que $C(x)$ é divisível por $x + 2$.

R.:

Através da Regra de Ruffini:

	1	3	-4	-12
-2		-2	-2	12
	1	1	-6	0

Então:

$$C(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x^2 + x - 6)$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

Logo, $C(x) = (x + 2)(x - 2)(x + 3)$

98.4. $D(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 - x$, sabendo que $D(1) = 0$

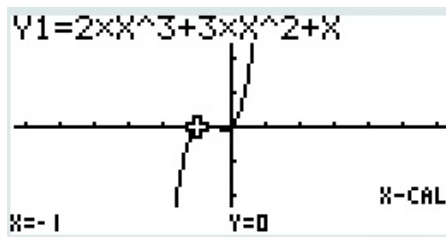
R.:

Através da Regra de Ruffini:

	2	1	-2	-1	0
1		2	3	1	0
	2	3	1	0	0

Então, $D(x) = (x - 1)(2x^3 + 3x^2 + x)$

Recorrendo à calculadora gráfica:



Verificamos que -1 é raiz do polinómio $2x^3 + 3x^2 + x$ logo, aplicando a Regra de Ruffini:

	2	3	1	0
-1		-2	-1	0
	2	1	0	0

Logo, $D(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x) = (x - 1)(x + 1)x(x + 1)$

Exercício 100 da página 82

Determina a multiplicidade da raiz -1 do polinómio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e decompõe $P(x)$ em factores.

R.:

Como -1 é raiz do polinómio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$. Então aplicando a regra de Ruffini:

	1	2	0	-2	-1
-1		-1	-1	1	1
	1	1	-1	-1	0
-1		-1	0	1	
	1	0	-1	0	
-1		-1	1		
	1	-1	0		
-1		-1			
	1	-2			

Verificamos que o resto é 0 nas três primeiras vezes e diferente de zero na quarta vez, logo:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x + 1)^3(x - 1)$$

Assim, a raiz -1 tem multiplicidade 3 .


AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;

APOIO BIBLIOGRÁFICO: [3] e [11]

2.4. Aula 3

Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão  2010/2011	Planificação da Aula Nº 3		
	Ano: 10º	Turma: CT1	Data: 29 de Março de 2011
	Unidade Didática: Estudo da Função Polinomial		
	Professora estagiária: Maria Madalena Simão Duarte		

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- ▶ Função Polinomial;

PRÉ-REQUISITOS:

- ▶ Identificar e relacionar objeto e imagem;
- ▶ Interpretar representações gráficas e algébricas de funções afim e quadrática;
- ▶ Identificar os zeros de uma função a partir da sua representação gráfica e determinar os zeros de uma função a partir da sua representação algébrica;
- ▶ Identificar a multiplicidade de uma raiz, dada a expressão algébrica de uma função.

OBJECTIVOS:

- ▶ Fazer o estudo de uma função polinomial de grau três a partir das suas representações algébrica e gráfica;
- ▶ Identificar e analisar propriedades comuns entre uma função cúbica e as funções afim e quadrática cujo produto de polinómios dá origem à sua representação algébrica;
- ▶ Identificar algumas famílias de funções cúbicas e analisar algumas propriedades, nomeadamente os zeros;
- ▶ Saber identificar uma função ímpar, a partir da sua representação gráfica e da sua expressão algébrica.

MATERIAIS E RECURSOS:

- ▶ Quadro Interativo;
- ▶ Projetor de Vídeo;
- ▶ Computador;
- ▶ Calculadora gráfica;
- ▶ Software: TI-SmartView e Geogebra;

► Manual Adotado:

Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda; Novo Espaço - Matemática A 10º Ano; Porto Editora.

SUMÁRIO:

Estudo de funções: função polinomial.

Resolução de uma tarefa e de exercícios do manual.

ESTRATÉGIAS:

No início da aula apresento uma tarefa que permite relacionar as representações gráficas e algébricas de funções polinomiais de diferentes graus (função afim, função quadrática e função cúbica), partindo da análise de algumas propriedades.

Com a exploração desta tarefa pretende-se chegar a uma função cúbica, que é obtida a partir do produto de uma função Afim, definida algebricamente, por uma função quadrática, dada inicialmente por uma representação gráfica.

É dado algum tempo para os alunos explorarem a tarefa e responderem às questões, depois serão confrontadas e discutidas as respostas às questões, assim como os processos utilizados pelos alunos.

Em seguida, vamos analisar algumas famílias de funções cúbicas (utilizando o software Geogebra) quanto aos zeros.

A definição de função ímpar é apresentada aquando da referência à família $y = ax^3$; $a \neq 0$, pois os gráficos das funções desta família são simétricos em relação à origem.

Proponho a realização de exercícios do manual para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos na aula. Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem na resolução dos exercícios.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

- ✓ Início a aula ditando o sumário e refiro que vamos fazer o estudo da função polinomial, que é uma função real de variável real, cuja expressão analítica se pode escrever na forma

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \text{ com } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

- ✓ Lembro aos alunos que já foram estudadas algumas funções polinomiais, nomeadamente as do tipo $y = ax + b$, $a \neq 0$, definidas por um polinómio do 1º grau (função afim) cujo

gráfico é uma recta e as do tipo $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, definidas por um polinómio do 2º grau (função quadrática) cujo gráfico é uma parábola).

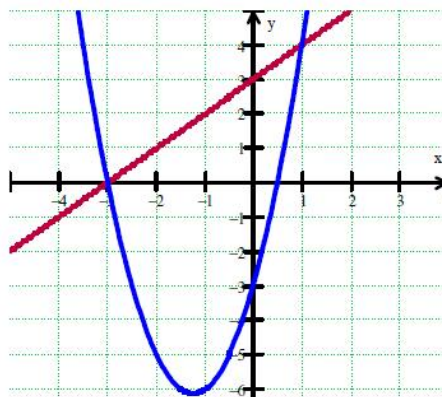
- ✓ Distribuo uma folha contendo o enunciado da tarefa a ser realizada pelos alunos, dando tempo suficiente para a realização da mesma.
- ✓ Após os alunos resolverem e explorarem a tarefa apresentada, irei resolver as questões da tarefa no quadro interativo, promovendo a discussão das respostas às questões, assim como os processos utilizados pelos alunos.

Tarefa

Considere as funções:

- $f(x) = x + 3$, uma função Afim (polinomial de grau um);
- g , uma função polinomial de grau dois, definida por uma expressão da forma $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$), representada graficamente.
- h , que resulta do produto dos polinómios que definem as funções f e g .

1. As funções f e g admitem as seguintes representações gráficas, para certos valores de a, b e c :



1.1. Mostre que $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

R:

Fazendo uma observação cuidada da representação gráfica, indica-se alguns pontos conhecidos: $(-3, 0)$, $(0, -3)$ e $(1, 4)$. Ao estabelecer a relação entre o objeto e a respetiva imagem, e recorrendo à expressão algébrica $g(x) = ax^2 + bx + c$ podemos determinar os valores correspondentes aos parâmetros a, b , e c , resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a(-3)^2 + b(-3) + c = 0 \\ a(0)^2 + b \times 0 + c = -3 \\ a(1)^2 + b \times 1 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Logo, $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$

Nota: Deve-se realçar que são necessários três pares ordenados distintos e independentes para definir a representação de uma função quadrática, não bastando, mostrar que a função definida por $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$ tem os mesmos zeros que a função representada graficamente, pois existe uma infinidade de funções quadráticas cujas representações gráficas são parábolas que têm os mesmos zeros.

1.2. Estude o sinal da função h .

R:

Como a função f assume valores negativos entre $-\infty$ e -3 e, neste intervalo a função g assume valores positivos, h terá valores negativos.

De modo idêntico, como a função g assume valores negativos entre -3 e $\frac{1}{2}$, e neste intervalo a função f assume valores positivos, h terá valores negativos.

Por fim, a função g assume valores positivos entre $\frac{1}{2}$ e $+\infty$, e neste intervalo a função f continua a assumir valores positivos, h terá valores positivos.

Ou de outro modo:

Como $h(x) = (2x^2 + 5x - 3)(x + 3)$ podemos construir uma tabela de sinais de cada uma das funções fatores, recorrendo à representação gráfica e às propriedades das funções f e g , e concluir quanto ao sinal da função produto:

x	$-\infty$	-3		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Assim,

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$$

1.3. Determine:

$$h(-3); h\left(\frac{1}{2}\right); h(0); h(-1); h(1); h(2).$$

R:

$$h(-3) = 0, \text{ uma vez que } -3 \text{ é um zero das funções } f \text{ e } g.$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ pois } \frac{1}{2} \text{ é um zero da função } g.$$

$$h(2) = f(2) \times g(2) = (5 + 3)(2 \times 2^2 + 5 \times 2 - 3) = 5 \times 15 = 75$$

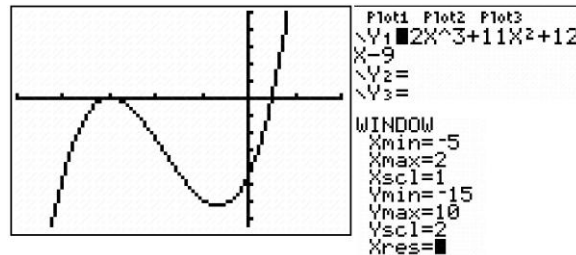
$$h(0) = f(0) \times g(0) = 3 \times (-3) = -9$$

$$h(-1) = f(-1) \times g(-1) = 2 \times (-6) = -12$$

$$h(1) = f(1) \times g(1) = 4 \times 4 = 16$$

1.4. Faça um esboço da representação gráfica da função h .

R:



2. Procure novos valores para os parâmetros a , b e c , de modo que:

2.1. a função h tenha apenas um zero real.

R:

Utilizando o software Geogebra vamos atribuir vários valores aos parâmetros a , b e c da representação algébrica da função g , de modo que h tenha o número de zeros pretendidos, observando as alterações nas representações gráficas relativamente à mudança dos parâmetros.

Assim, registamos que a função f não é alterada. Logo, para que a função h tenha apenas um zero, a função g pode ser de dois tipos: i) não ter zeros, e então o zero da função h vai corresponder ao zero da função f ; e ii) ter apenas um zero coincidente com o zero da função f .

i) Existe uma infinidade de soluções. Como se pretende que g não tenha zeros reais, podemos escolher-se valores para a , b e c de forma que $b^2 - 4ac < 0$. Considerando, por exemplo, $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$, tem-se $g(x) = x^2 + 1$ e a função h tem apenas um zero, que coincide com o zero da função f .

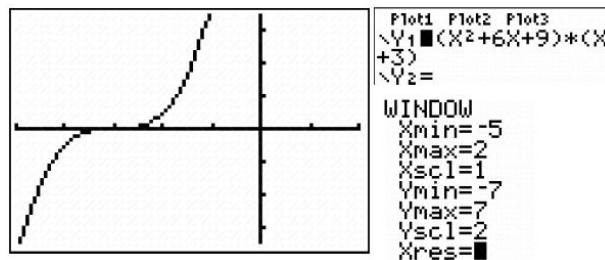
ii) Para g ter apenas um zero coincidente com o zero da função f , a expressão algébrica que representa g pode ser do tipo $g(x) = k(x + 3)^2, k \neq 0$, escolhendo, deste modo, as funções quadráticas que têm um zero duplo para $x = -3$. Desenvolvendo o quadrado do binómio, vem: $g(x) = k(x^2 + 6x + 9)$.

Então, os valores para os parâmetros podem ser, por exemplo, $a = 1$, $b = 6$ e $c = 9$.

Podemos verificar o sinal da função:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+
$g(x)$	+	0	+
$h(x)$	-	0	+

e observar a representação gráfica de h através da calculadora gráfica:



Verificamos que a representação gráfica da função h apresenta uma única intersecção com o eixo das abcissas (como seria esperado, já que h deveria ter um único zero real).

2.2. a função h tenha mais do que dois zeros reais e distintos.

R:

A função g tem que ter dois zeros e estes têm que ser diferentes do zero da função f . Assim, a expressão algébrica que representa g tem que ser do tipo $g(x) = a(x - d)(x - e)$, com $a \neq 0$, sendo $d \neq -3$ e $e \neq -3$.

Seja, por exemplo, $g(x) = (x - 0)(x - (-4))$, ou seja, $g(x) = x(x + 4)$. Desenvolvendo o produto, temos $g(x) = x^2 + 4x$ e, assim, temos $a = 1$, $b = 4$ e $c = 0$

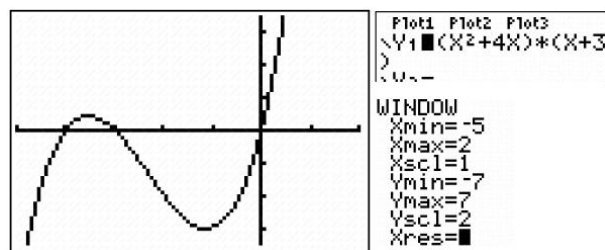
A função h é, neste caso, definida por:

$$h(x) = (x^2 + 4x)(x + 3),$$

Podemos verificar o sinal da função:

x	$-\infty$	-4		-3		0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

e observar a representação gráfica de h através da calculadora gráfica:

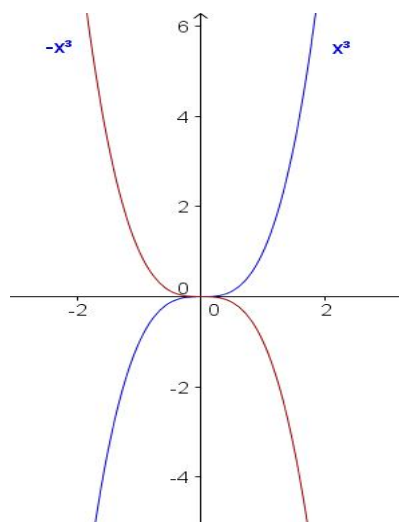


Deste modo, confirma-se que a representação gráfica da função h apresenta três intersecções com o eixo das abcissas (como seria esperado, já que h deveria ter mais do que dois zeros reais e, portanto, teria que ter obrigatoriamente três, pois trata-se de uma função cúbica).

- ✓ Apresento algumas famílias de funções cúbicas (utilizando o software Geogebra que permite fazer a representação gráfica e o estudo de funções) fazendo o estudo do número de zeros de cada família.

Vamos analisar algumas famílias de funções cúbicas, quanto aos zeros:

1. $y = ax^3; a \neq 0$



- Todas as funções desta família têm **um único zero** $\rightarrow 0$ (multiplicidade 3)

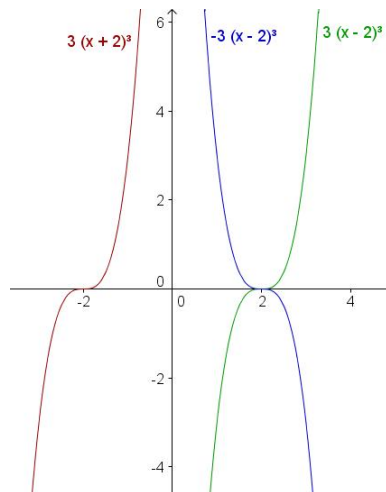
- ✓ Saliento que quando a raiz tem multiplicidade ímpar a função toma valores de sinal contrário antes e depois do zero. Quando a raiz tem multiplicidade par a função toma valores com o mesmo sinal antes e depois do zero.
- ✓ Chamo a atenção para o fato de os gráficos das funções desta família serem simétricos em relação à origem, ou seja, $y(-x) = -y(x)$. Funções que satisfaçam esta condição dizem-se funções ímpares.
- ✓ Defino, no quadro, uma função ímpar e peço aos alunos que registem no caderno.

A função f de domínio D é ímpar se, para todo o $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$$

Continuamos a analisar algumas famílias de funções cúbicas, quanto aos zeros:

2. $y = a(x - \beta)^3; a \neq 0$



- Todas as funções desta família têm **um único zero** $\rightarrow \mathbf{B}$ (multiplicidade 3)

✓ Proponho aos alunos a realização dos exercícios 101 e 104 da página 84 do manual.

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Exercício 101 da página 84

Seja f uma função polinomial. Verifica, em cada caso, se f é uma função ímpar.

101.1 $f(x) = x^5 + 2x$

R.:

$$f(-x) = (-x)^5 + 2(-x) = -x^5 - 2x$$

$$-f(x) = -(x^5 + 2x) = -x^5 - 2x$$

Como $f(-x) = -f(x)$, podemos dizer que a função f é uma função ímpar.

101.2 $f(x) = -x^3 + x^2$

R.:

$$f(-x) = -(-x)^3 + (-x)^2 = x^3 + x^2$$

$$-f(x) = -(-x^3 + x^2) = x^3 - x^2$$

Como $f(-x) \neq -f(x)$, podemos dizer que a função f não é uma função ímpar.

101.3. $f(x) = -x^3 + x + 1$

R.:

$$f(-x) = -(-x)^3 + (-x) + 1 = x^3 - x + 1$$

$$-f(x) = -(-x^3 + x + 1) = x^3 - x - 1$$

Como $f(-x) \neq -f(x)$, podemos dizer que a função f não é uma função ímpar.

101.4. $f(x) = -x^3 + x$

R.:

$$f(-x) = (-(-x))^3 + (-x) = x^3 - x$$

$$-f(x) = -(-x^3 + x) = x^3 - x$$

Como $f(-x) = -f(x)$, podemos dizer que a função f é uma função ímpar.

Exercício 104 da página 84

Considera a função polinomial do 3º grau definida por: $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

104.1. Mostra que 3 é o seu único zero.

R.:

Calculemos o resto da divisão de $f(x)$ por $x - 3$, aplicando a regra de Ruffini:

3	1	-3	1	-3
		3	0	3
	1	0	1	0

Concluimos que $f(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$

Calculemos, agora os zeros de $x^2 + 1$

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ equação impossível.}$$

Fica então provado que 3 é o seu único zero.

104.2. Indica, justificando, o valor lógico da afirmação: “Se uma função cúbica tem apenas uma raiz, ela é de multiplicidade três.”

R.:

A afirmação é falsa, pois como vimos no exercício anterior a função f é uma função cúbica e tem um único zero mas um zero simples.


AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;

APOIO BIBLIOGRÁFICO: [3], [11] e [12]

2.5. Aula 4

Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão  2010/2011	Planificação da Aula Nº 4		
	Ano: 10º	Turma: CT1	Data: 30 de Março de 2011
	Unidade Didática: Estudo da Função Polinomial		
	Professora estagiária: Maria Madalena Simão Duarte		

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- ▶ Função Polinomial;

PRÉ-REQUISITOS:

- ▶ Identificar e relacionar objeto e imagem;
- ▶ Identificar os zeros de uma função a partir da sua representação gráfica;
- ▶ Determinar os zeros de uma função a partir da sua representação algébrica;
- ▶ Saber fatorizar um polinómio utilizando a regra de Ruffini;
- ▶ Saber identificar uma função ímpar e uma função par, a partir da sua representação gráfica e da sua expressão algébrica.

OBJECTIVOS:

- ▶ Identificar algumas famílias de funções cúbicas e analisar algumas propriedades, nomeadamente os zeros;
- ▶ Resolver problemas envolvendo funções polinomiais.

MATERIAIS E RECURSOS:

- ▶ Quadro Interativo;
- ▶ Projetor de Vídeo;
- ▶ Computador;
- ▶ Calculadora gráfica;
- ▶ Software: simulador da calculadora gráfica fx9860;
- ▶ Manual Adotado: Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda; Novo Espaço - Matemática A 10º Ano; Porto Editora.

SUMÁRIO:

Estudo de funções: função polinomial.

Resolução de exercícios.

ESTRATÉGIAS:

Vamos continuar a analisar algumas famílias de funções cúbicas quanto aos zeros.

Em seguida, proporei aos alunos a resolução de exercícios do manual, tendo estes como objetivo rever os conhecimentos adquiridos na aula anterior sobre a função polinomial.

Os exercícios propostos abordam o estudo da paridade de uma função polinomial e a resolução de problemas usando uma função polinomial.

É necessário o uso de calculadora gráfica na resolução de alguns exercícios.

Os alunos irão resolver individualmente os exercícios da ficha de trabalho, que posteriormente irão ser corrigidos no quadro interativo.

Na correção dos exercícios a serem resolvidos com recurso à calculadora gráfica, irei recorrer ao software simulador, no computador, de uma calculadora fx9860.

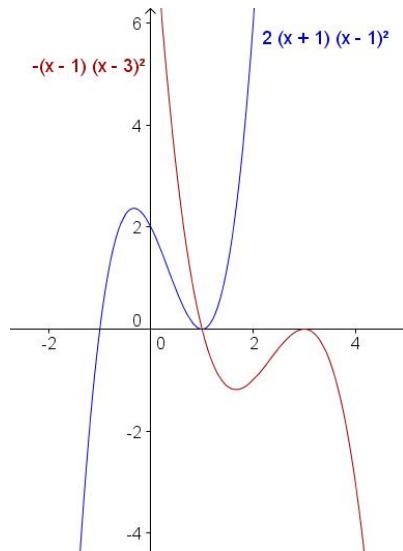
Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem oralmente ou no quadro na correção dos exercícios.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

- ✓ Início a aula ditando o sumário e continuo a apresentar algumas famílias de funções cúbicas fazendo o estudo do número de zeros de cada família.

Vamos continuar a analisar algumas famílias de funções cúbicas, quanto aos zeros:

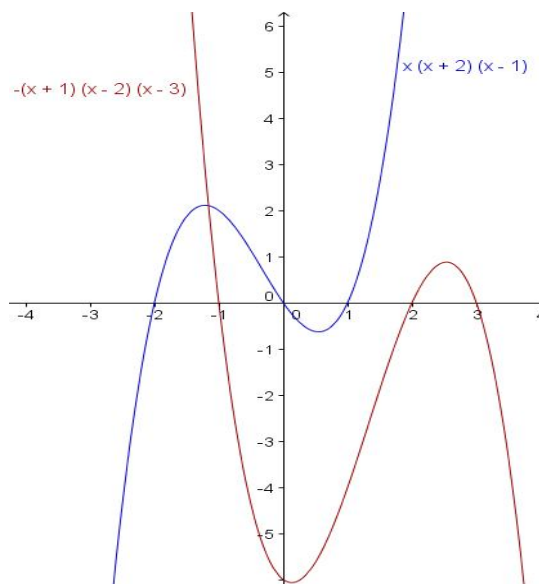
3. $y = a(x - \beta)(x - \alpha)^2; a \neq 0$



Todas as funções desta família têm **dois zeros**:

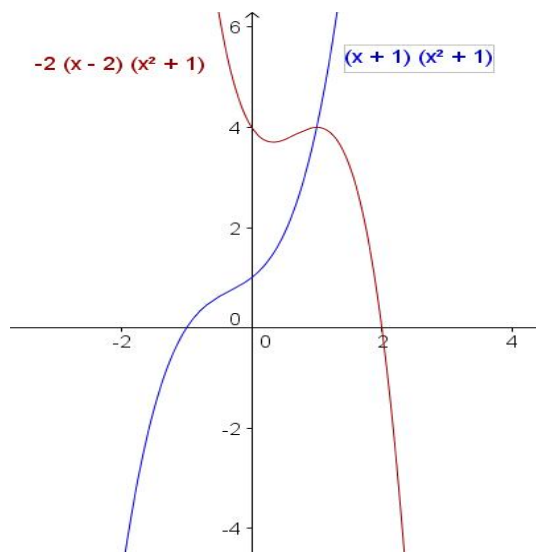
- β - zero simples (multiplicidade 1)
- α - zero duplo (multiplicidade 2)

4. $y = a(x - \beta)(x - \alpha)(x - \lambda); a \neq 0$



- Todas as funções desta família têm **três zeros simples** $\rightarrow \alpha, \beta$ e λ .

5. $y = a(x - \alpha)(x^2 + k); a \neq 0$ e $k > 0$



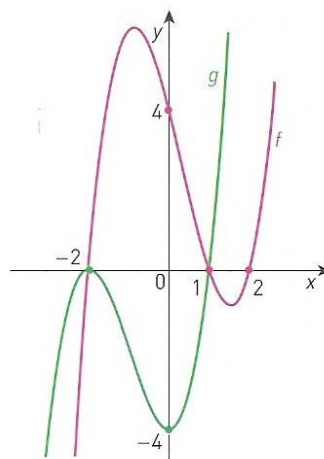
- Todas as funções desta família têm **um único zero simples** (multiplicidade 1) $\rightarrow \alpha$

- ✓ De seguida, proponho a resolução dos exercícios 105 e 106 da página 85 e 108 da página 86.
- ✓ Proponho a realização das tarefas 13 e 14 das páginas 88 e 89 do manual e irei corrigir os exercícios, acompanhando o ritmo de trabalho dos alunos.

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Exercício 105 da página 85

Na figura estão representadas duas funções polinomiais do 3º grau designadas por f e g .



Mostra que:

105.1. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

R.:

Pela representação gráfica da função f verificamos que a função tem 3 zeros: -2, 1 e 2.

$$\text{Assim, } f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 2) = (x^2 - x - 2x + 2)(x + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x - 2x^2 - 4x + 2x + 4 = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

105.2. $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

R.:

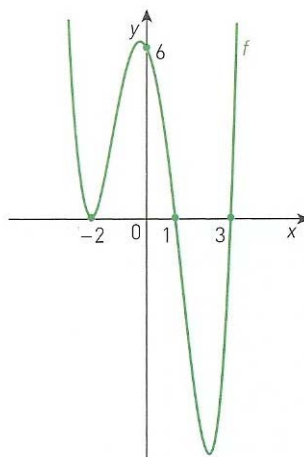
Pela representação gráfica da função g verificamos que a função tem 2 zeros: -2 (multiplicidade 2) e 1 (multiplicidade 1).

$$\text{Assim, } g(x) = (x - 1)(x + 2)^2 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4 = x^3 + 3x^2 - 4$$

Exercício 106 da página 85

Na figura está representada uma função polinomial do 4º grau.



Sabe-se que: $f(x) = a(x - b)(x - c)(x - d)^2$

Indica possíveis valores para a , b , c e d .

R.:

Pela representação gráfica da função f verificamos que a função tem 3 zeros: -2, 1 e 3.

$$\text{Assim, } f(x) = a(x - 1)(x - 3)(x + 2)^2$$

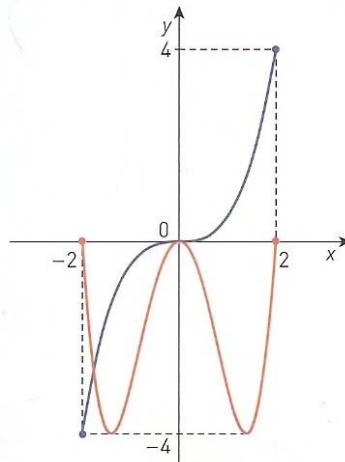
$$\text{Pela representação gráfica da função, } f(0) = 6 \Leftrightarrow a(-1)(-3) \times 4 = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Logo, $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 3$ e $d = -2$

Exercício 108 da página 86

Na figura estão representadas duas funções f e g , ambas de domínio $[-2, 2]$, sendo f uma função ímpar e g uma função par.



Indica se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações.

108.1. $f(-x) \times f(x) < 0$, se $x \neq 0$

R.:

Como a função f é uma função ímpar $f(-x) = -f(x)$

Assim temos, $f(-x) \times f(x) < 0 \Leftrightarrow -f(x) \times f(x) < 0$, $x \neq 0$

Logo a afirmação é verdadeira

108.2. $f\left(\frac{1}{2}\right) \times g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$

R.:

$f\left(\frac{1}{2}\right) \times g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ é uma afirmação verdadeira, pois no ponto de abscissa $\frac{1}{2}$, a função f é positiva e a função g é negativa, logo o produto de f por g é negativo.

108.3. $g(\sqrt{2}) + g(-\sqrt{2}) > 0$

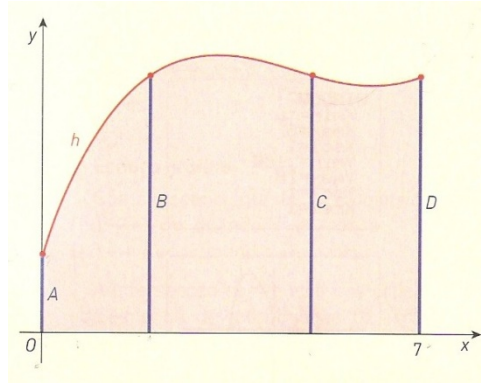
R.:

Como a função g é uma função par $g(-x) = g(x)$

Assim temos, $g(\sqrt{2}) + g(-\sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow 2g(\sqrt{2}) > 0$ uma afirmação falsa, pois a função g é negativa, em todo o seu domínio, logo $2g(\sqrt{2}) < 0$.

Tarefa 13 da página 88

1. Considera a função polinomial h definida por $h(x) = x^3 - 14x^2 + 59x + 30$. No referencial da figura, está representada uma figura metálica suportada por quatro colunas A , B , C e D . O contorno superior da estrutura coincide com parte da representação gráfica da função h . Sabe-se que a unidade, no eixo das abscissas, é o metro e no eixo das ordenadas é o decímetro.



1.1. Atendendo aos dados da figura, determina as alturas das colunas A e D.

R.:

$$\text{Altura da coluna A} = h(0) = 30 \text{ dm}$$

$$\text{Altura da coluna D} = h(7) = 7^3 - 14 \times 7^2 + 59 \times 7 + 30 = 100 \text{ dm}$$

1.2. Sem recorrer à calculadora, determina as distâncias entre as colunas B e C, sabendo que têm a mesma altura da coluna D.

R.:

Como as colunas B e C têm a mesma altura da coluna D, então:

$$x^3 - 14x^2 + 59x + 30 = 100 \Leftrightarrow x^3 - 14x^2 + 59x - 70 = 0$$

Se 7 é solução da equação $x^3 - 14x^2 + 59x - 70 = 0$ é porque o polinómio

$x^3 - 14x^2 + 59x - 70$ é divisível por $x - 7$, utilizando a regra de Ruffini:

	1	-14	59	-70
7		7	-49	70
	1	-7	10	0

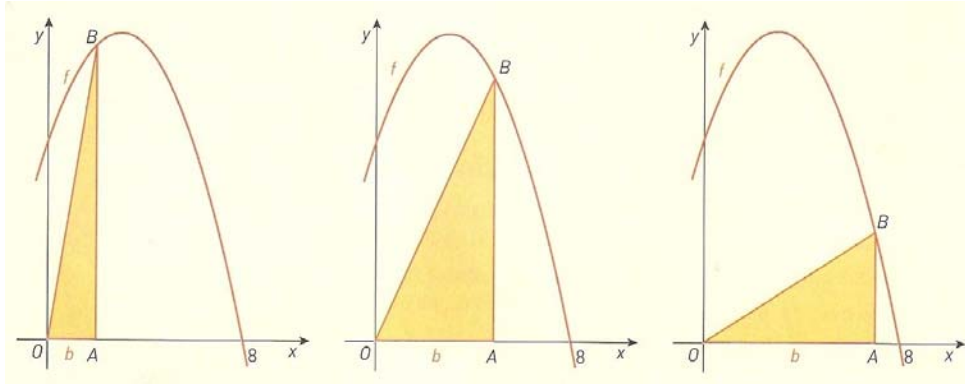
$$\text{Logo, } x^3 - 14x^2 + 59x - 70 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$x - 7 = 0 \vee x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 7 \vee x = 5 \vee x = 2$$

Assim, a distância entre as colunas B e C é 3 m ($5 - 2 = 3$)

2. Considera a função quadrática f definida por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8$. O ponto B pertence ao gráfico de f e abcissa $b \in]0, 8[$. Para cada valor de b é construído um triângulo [OAB], retângulo em A, como é sugerido nas figuras:



2.1. Seja g a função que a cada valor de b faz corresponder a área do $\Delta[AOB]$. Mostra que $g(b) = -\frac{b^3}{4} + \frac{3}{2}b^2 + 4b$.

R.:

O triângulo $[OAB]$ tem base b e altura a ordenada do ponto do gráfico de g que tem abcissa b , ou seja,

$$f(b) = -\frac{1}{2}b^2 + 3b + 8.$$

Então,

$$g(b) = \frac{b \left(-\frac{1}{2}b^2 + 3b + 8 \right)}{2} = \frac{-\frac{1}{2}b^3 + 3b^2 + 8b}{2} = -\frac{1}{4}b^3 + \frac{3}{2}b^2 + 4b$$

2.2. Sem recorrer à calculadora, determina todas as soluções da equação $g(b) = 24$, sabendo que $g(6) = 24$.

R.:

$$g(b) = 24 \Leftrightarrow -\frac{b^3}{4} + \frac{3}{2}b^2 + 4b = 24 \Leftrightarrow -\frac{b^3}{4} + \frac{3}{2}b^2 + 4b - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(b) = -b^3 + 6b^2 + 16b - 96 = 0$$

Como uma das soluções desta equação é 6 por ser $g(b) = 24$ vamos dividir

$-b^3 + 6b^2 + 16b - 96$ por $b - 6$

	-1	6	16	-96
6		-6	0	96
	-1	0	16	0

Então:

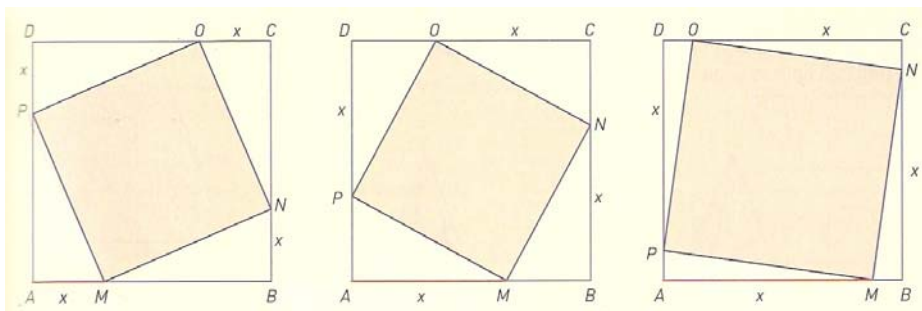
$$-b^3 + 6b^2 + 16b - 96 = 0 \Leftrightarrow (b - 6)(-b^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = 6 \vee b^2 = 16 \Leftrightarrow b = 6 \vee b = 4 \vee b = -4$$

As soluções são $\{-4, 4, 6\}$

Tarefa 14 da página 89

Dado um quadrado $[ABCD]$ com 6 cm de lado, considera todos os quadrados $[MNOP]$ nele inscritos. A seguir, estão representados três desses quadrados.



Para cada posição do ponto M pertencente a $[AB]$, designa por x a medida de \overline{AM} . Repara que, em cada caso, $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CO} = \overline{DP}$.

1. Indica o intervalo de variação de x .

R.:

x pode tomar valores em $[0, 6]$.

2. Mostra que a área do quadrado $[MNOP]$ é dada, em função de x , pela expressão: $A(x) = 2x^2 - 12x + 36$

R.:

Mostremos que a área do quadrado $[MNOP]$ é dada em função de x pela expressão

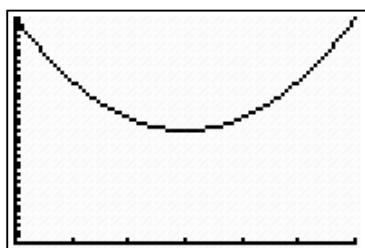
$$A(x) = 2x^2 - 12x + 36.$$

O lado do quadrado $[MNOP]$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem x e $6 - x$. Assim,

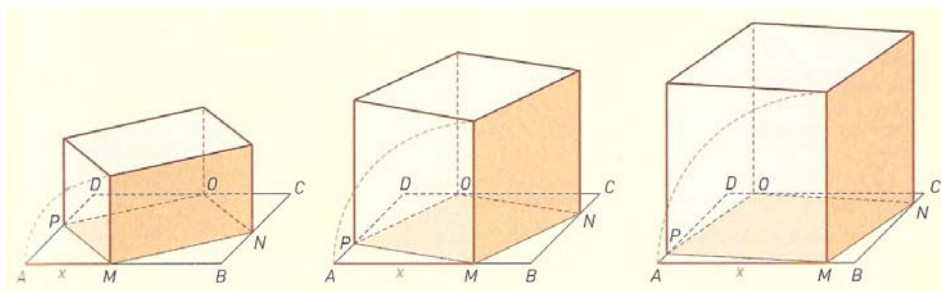
$$\overline{PO} = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2} \Leftrightarrow \overline{PO} = \sqrt{x^2 + 36 - 12x + x^2} \Leftrightarrow \overline{PO} = \sqrt{2x^2 + 36 - 12x}$$

$$\text{E por isso a área pedida é } A = (\sqrt{2x^2 + 36 - 12x})^2 \Leftrightarrow A = |2x^2 - 12x + 36| \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A = 2x^2 - 12x + 36$ pois o polinómio $2x^2 - 12x + 36$ é positivo em todo o domínio como se constata ao observar o gráfico.



3. Para cada valor de x é construído um prisma recto, de altura x e cuja base é o quadrado $[MNOP]$, conforme é sugerido na figura abaixo.



3.1. Mostra que o volume V do prisma é dado, em função de x , pela expressão:

$$V(x) = 2x^3 - 12x^2 + 36x$$

R.:

Mostremos que o volume do prisma é dado pela expressão $V(x) = 2x^3 - 12x^2 + 36x$

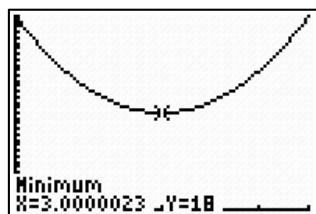
Ora, $V(x) = (2x^2 - 12x + 36) \times x \Leftrightarrow V(x) = 2x^3 - 12x^2 + 36x$

3.2. Calcula as dimensões do prisma quando a área da base é mínima.

R.:

Calculemos as dimensões do prisma quando a área da base é mínima.

Do gráfico da função e utilizando a calculadora calculamos o minimizante da área da base e concluímos ser 3.



Podíamos ter encontrado este valor calculando a abcissa do vértice da parábola que representa a área da base.

As dimensões do prisma são:

$$\text{Aresta da base} = \sqrt{2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 36} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{Altura do prisma} = 3 \text{ cm}$$

3.3. Calcula $A(0)$, onde A representa a área da base do prisma recto, e $V(0)$ dando uma interpretação geométrica aos resultados.

R.

$$A(0) = 36 \text{ e } V(0) = 0$$

Quando $x = 0$ o quadrado $[MNOP]$ coincide com o quadrado $[ABCD]$, pelo que a sua área é $36 = 6^2$ e o volume é zero por ser a altura igual a zero.

3.4. Identifica o sólido que se obtém para $x = 6$ e calcula $A(6)$ e $V(6)$.

R.:

O sólido que se obtém para $x = 6$ é um cubo de aresta 6.

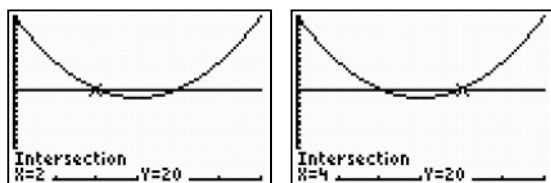
$A(6) = 2 \times 6^2 - 12 \times 6 + 36 \Leftrightarrow A(6) = 36$ (área do quadrado com 6 cm de lado) e

$V(6) = 2 \times 6^3 - 12 \times 6^2 + 36 \times 6 = 216$ (volume do cubo com 6 cm de aresta).

3.5. Determina para que valores de x a área da base é 20 cm^2 e calcula o(s) volume(s) do(s) prisma(s) correspondente(s).

R.:

Determinemos os valores de x para os quais a área da base é 20 cm^2 e calculemos os volumes dos prismas correspondentes.

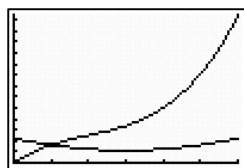


$V(2) = 2 \times 8 - 12 \times 4 + 36 \times 2 = 40$ e $V(4) = 2 \times 64 - 12 \times 16 + 36 \times 4 = 80$

3.6. Recorrendo à calculadora faz o estudo da variação da área da base e do volume do prisma com a variação de x .

R.:

Atendendo ao gráfico podemos dizer que a área começa por ser 36 e diminui até 18 quando $x = 3$ voltando a aumentar até voltar a atingir o valor 36. O volume cresce sempre à medida que x aumenta.




AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;

APOIO BIBLIOGRÁFICO: [3] e [11]

2.6. Aula 5

Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão  2010/2011	Planificação da Aula Nº 5		
	Ano: 10º	Turma: CT1	Data: 1 de Abril de 2011
	Unidade Didáctica: Estudo da Função Polinomial		
	Professora estagiária: Maria Madalena Simão Duarte		

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- ▶ Função Polinomial;
- ▶ Resolução de inequações de grau superior a 2.

PRÉ-REQUISITOS:

- ▶ Identificar e relacionar objeto e imagem;
- ▶ Identificar os zeros de uma função a partir da sua representação gráfica;
- ▶ Determinar os zeros de uma função a partir da sua representação algébrica;
- ▶ Saber fatorizar um polinómio utilizando a regra de Ruffini;
- ▶ Saber identificar uma função ímpar e uma função par, a partir da sua representação gráfica
- ▶ Provar a paridade de uma função através da sua expressão algébrica.
- ▶ Resolver inequações do 2º grau.

OBJECTIVOS:

- ▶ Resolver problemas envolvendo funções polinomiais.
- ▶ Resolver inequações de grau superior a 2.

MATERIAIS E RECURSOS:

- ▶ Quadro Interativo;
- ▶ Projetor de Vídeo;
- ▶ Computador;
- ▶ Calculadora gráfica;
- ▶ Software: simulador da calculadora gráfica fx9860;
- ▶ Manual Adotado: Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda; Novo Espaço - Matemática A 10º Ano; Porto Editora.

SUMÁRIO:

Continuação do estudo de funções: função polinomial.

Resolução de inequações de grau superior a 2.

Resolução de exercícios.

ESTRATÉGIAS:

No início da aula proponho aos alunos a resolução de uma tarefa do manual, tendo esta como objetivo rever os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores sobre a função polinomial.

Os exercícios propostos abordam a resolução de problemas usando uma função polinomial.

Após a resolução da tarefa do manual, proponho um exercício que envolve a resolução de inequações de grau superior a 2, que explicarei à medida que resolvo o exercício.

Em seguida, proporei aos alunos a resolução de exercícios do manual. Tendo estes como objetivo a resolução de inequações de grau superior a 2.

É necessário o uso de calculadora gráfica na resolução de alguns exercícios.

Os alunos irão resolver individualmente os exercícios propostos, que posteriormente irão ser corrigidos no quadro interativo.

Na correção dos exercícios a serem resolvidos com recurso à calculadora gráfica, irei recorrer ao software simulador, no computador, de uma calculadora fx9860.

Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem oralmente ou no quadro na correção dos exercícios.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

- ✓ Início a aula ditando o sumário e proponho a realização da tarefa 15 da página 90 do manual e irei corrigir os exercícios, acompanhando o ritmo de trabalho dos alunos.
- ✓ Colocarei e resolvo no quadro o seguinte exercício. Este exercício envolve a resolução de inequações de grau superior a 2, que explicarei à medida que resolvo o exercício.

Exercício:

Seja f a função de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = -4x^4 + 33x^2 + 14x - 15$

1. Sem efetuar a divisão inteira mostre que $f(x)$ é divisível por $x + 1$ e por $x - 3$.
2. Decomponha $f(x)$ num produto de factores do menor grau possível.

3. Sem recorrer à calculadora, resolva a inequação $f(x) < 0$.

4. Utilizando a calculadora represente a função f numa janela adequada que lhe permita concluir que o contradomínio é da forma $]-\infty, k]$. Determine o valor de k com aproximação às centésimas.

Resolução:

1.

$$f(1) = -4 \times (-1)^4 + 33 \times (-1)^2 + 14 \times (-1) - 15 = -4 + 33 - 14 - 15 = 0$$

$$f(3) = -4 \times 3^4 + 33 \times 3^2 + 14 \times 3 - 15 = -324 + 297 + 42 - 15 = 0$$

Como o resto da divisão de $f(x)$ por $x + 1$ é $f(1) = 0$ e o resto da divisão de $f(x)$ por $x - 3$ é $f(3) = 0$, pelo Teorema do Resto concluímos que $f(x)$ é divisível por $x - 1$ e por $x - 3$.

2.

Começemos por dividir $f(x)$ por $x + 1$ e por $x - 3$.

	-4	0	33	14	-15
-1		4	-4	-29	15
	-4	4	29	-15	0

	-4	4	29	-15
3		-12	-24	15
	-4	-8	5	0




Ficamos então com $f(x) = (x + 1)(x - 3)(-4x^2 - 8x + 5)$

Calculemos os zeros de $-4x^2 - 8x + 5$:

$$-4x^2 - 8x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{-8} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

Concluimos então que $f(x) = -4(x + 1)(x - 3)\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

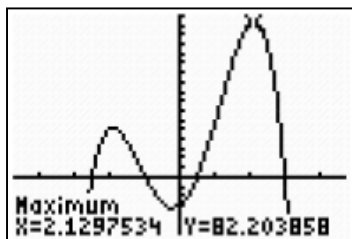
3.

	x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
	$x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
	$x-3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
	$-4x^2 - 8x + 5$	-	0	+	+	+	0	-	-	-
	$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Concluimos então que $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{5}{2}[\cup]-1, \frac{1}{2}[\cup]3, +\infty[$

4.

```
WINDOW
Xmin=-4.7
Xmax=4.7
Xscl=1
Ymin=-30
Ymax=85
Yscl=5
Xres=1
```



O valor de k com aproximação às centésimas é $k = 82,20$

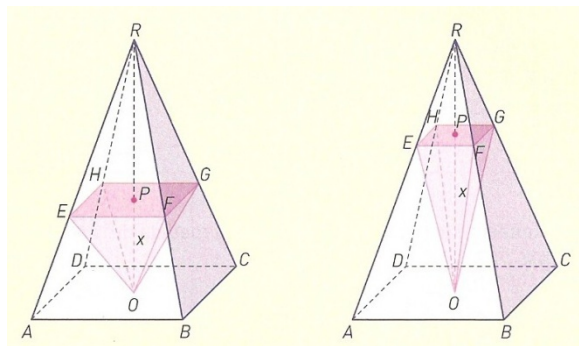
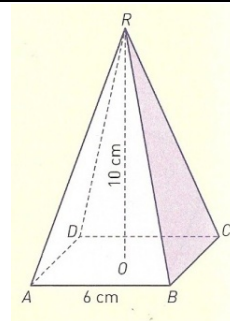
✓ Proponho a realização do exercício 113.5 da página 91 do manual.

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Tarefa 15 da página 90

Considera uma pirâmide quadrangular regular de altura 10 cm em que a aresta da base mede 6 cm.

Com o vértice em O , centro da base da pirâmide, considera outras pirâmides em que as bases são paralelas à base da pirâmide dada, como é sugerido nas figuras seguintes.



O ponto P é móvel, deslocando-se de O para R . Para cada posição do ponto P , tem-se $\overline{OP} = x$, que representa a altura da pirâmide de vértice O .

1. Mostra que o lado l da base dessa pirâmide é dado, em função de x , por: $l(x) = \frac{3}{5}(10 - x)$

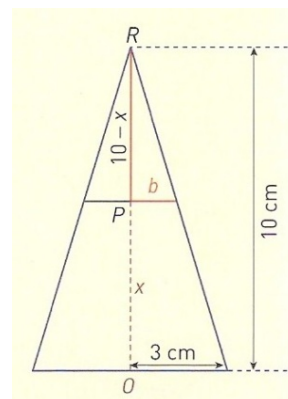
Sugestão: Recorre à semelhança de triângulos e à figura ao lado.

R.:

Recorrendo à semelhança de triângulos e à figura.

Da figura resulta: $\frac{3}{10} = \frac{b}{10-x} \Leftrightarrow b = \frac{3(10-x)}{10}$

Assim, $l(x) = 2b \Leftrightarrow 2 \times \frac{3}{10} (10 - x) \Leftrightarrow l(x) = \frac{3}{5}(10 - x)$



2. Designa por V o volume da pirâmide de vértice O . Mostra que V é dado, em função de x , pela expressão: $V(x) = \frac{3}{25}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 12x$. Indica o intervalo de variação de x .

R.:

O volume de uma pirâmide é igual a $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura}$.

Pelo que, neste caso, temos:

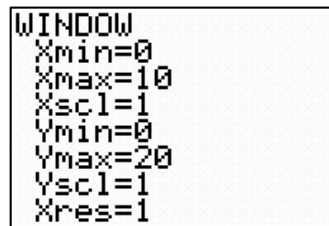
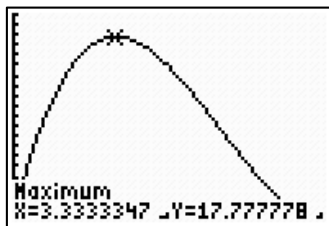
$$V(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5}(10-x) \right)^2 \times x \Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{25} (100 - 20x + x^2) \times x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(x) = \frac{3}{25}(100x - 20x^2 + x^3) \Leftrightarrow V(x) = \frac{3}{25}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 12x$$

O domínio de V é $[0, 10]$

3. Recorrendo à calculadora, determina para que valores de x o volume é máximo.

R.:



O volume é máximo para $x \approx 3,33$ (aproximação às centésimas)

4. Seja S a função que a cada x faz corresponder o volume limitado pelas superfícies das duas pirâmides.

4.1. Mostra que $S(x) = 120 - V(x)$.

R.:

O volume limitado pelas superfícies das duas pirâmides é igual ao volume da pirâmide de vértice R menos o volume da pirâmide de vértice O . Ora o volume da pirâmide de vértice R é

$$C(60) = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 10 = 120.$$

Logo $S(x) = 120 - V(x)$

4.2. Explica como podes obter o gráfico da função S a partir do gráfico da função V.

R.:

O gráfico da função S pode obter-se do de V por uma simetria em relação ao eixo das abcissas seguida de uma translação vertical associada ao vector de coordenadas (0,120).

Exercício 113.5 da página 91

Resolve a seguinte inequação:

$$(x^3 - 8)(2 - x) < 0$$

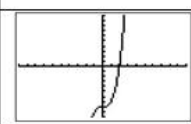
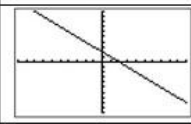
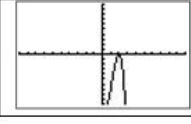
R.:

Calculemos os zeros:

$$(x^3 - 8)(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \vee 2 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 8 \vee -x = -2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \vee x = 2 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 2$$

Assim:

	x	$-\infty$	2	$+\infty$
	$x^3 - 8$	-	0	+
	$2 - x$	+	0	-
	$(x^3 - 8)(2 - x)$	-	0	-

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$


AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;

APOIO BIBLIOGRÁFICO: [3] e [11]

2.7. Aula 6

Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão  2010/2011	Planificação da Aula Nº 6		
	Ano: 10º	Turma: CT1	Data: 5 de Abril de 2011
	Unidade Didática: Estudo da Função Polinomial		
	Professora estagiária: Maria Madalena Simão Duarte		

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- ▶ Função Polinomial;
- ▶ Resolução de inequações de grau superior a 2.

PRÉ-REQUISITOS:

- ▶ Identificar e relacionar objeto e imagem;
- ▶ Identificar os zeros de uma função a partir da sua representação gráfica;
- ▶ Determinar os zeros de uma função a partir da sua representação algébrica;
- ▶ Saber fatorizar um polinómio utilizando a regra de Ruffini;
- ▶ Saber identificar uma função ímpar e uma função par, a partir da sua representação gráfica
- ▶ Provar a paridade de uma função através da sua expressão algébrica.
- ▶ Resolver inequações do 2º grau.

OBJECTIVOS:

- ▶ Resolver problemas envolvendo funções polinomiais.
- ▶ Resolver inequações de grau superior a 2.

MATERIAIS E RECURSOS:

- ▶ Quadro Interativo;
- ▶ Projetor de Vídeo;
- ▶ Computador;
- ▶ Calculadora gráfica;
- ▶ Software: simulador da calculadora gráfica fx9860;
- ▶ Manual Adotado: Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda; Novo Espaço - Matemática A 10º Ano; Porto Editora.

SUMÁRIO:

Resolução de inequações de grau superior a 2.

Resolução de exercícios do manual.

ESTRATÉGIAS:

No início da aula proponho aos alunos a resolução de exercícios do manual, tendo estes como objetivo rever os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores sobre a função polinomial e a resolução de inequações de grau superior a 2.

É necessário o uso de calculadora gráfica na resolução de alguns exercícios.

Os alunos irão resolver individualmente os exercícios propostos, que posteriormente irão ser corrigidos no quadro interativo.

Na correção dos exercícios a serem resolvidos com recurso à calculadora gráfica, irei recorrer ao software simulador, no computador, de uma calculadora fx9860.

Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem oralmente ou no quadro na correção dos exercícios.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

- ✓ Início a aula ditando o sumário e proponho a realização do exercício 113.9 da página 91 e dos exercícios 114 e 115 da página 92 do manual.
- ✓ Proponho a resolução das propostas 60 da página 129 e 63 da página 131.

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Exercício 113.9 da página 91

Resolva a seguinte inequação:

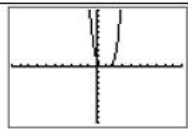
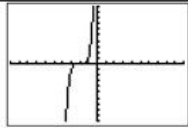
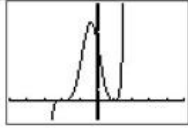
$$(x - 1)^4(x + 2)^5 < 0$$

R.:

Calculemos os zeros:

$$(x - 1)^4(x + 2)^5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^4 = 0 \vee (x + 2)^5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

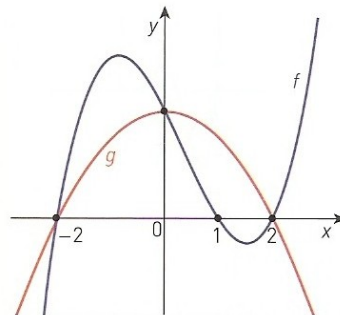
Assim:

	x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
	$(x-1)^4$	+	+	+	0	+
	$(x+2)^5$	-	0	+	+	+
	$(x-1)^4(x+2)^5$	-	0	+	0	+

$x \in]-\infty, -2[$

Exercício 114 da página 92

Na figura estão representadas duas funções polinomiais f e g , respetivamente do 3º e do 2º graus.



Indica o conjunto solução das seguintes condições:

114.1 $f(x) > 0$

R.:

$x \in]-2, 1[\cup]2, +\infty[$

114.2 $g(x) \leq 0$

R.:

$x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

114.3 $f(x) < g(x)$

R.:

$x \in]-\infty, -2[\cup]0, 2[$

114.4 $f(x) - g(x) \geq 0$

R.:

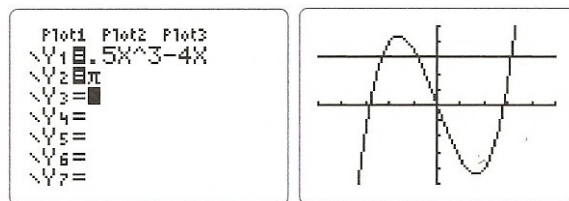
$x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty[$

Exercício 115 da página 92

Para resolver a inequação

$$\frac{1}{2}x^3 - 4x \geq \pi$$

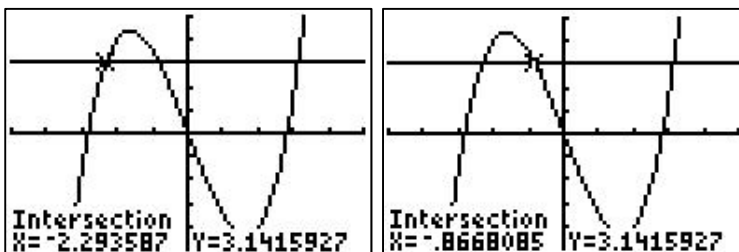
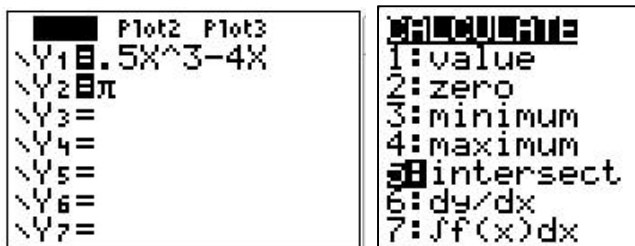
a Joana recorreu à calculadora gráfica. Parte do processo que utilizou está representado a seguir.

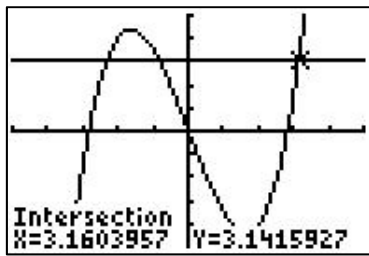


Conclui o processo e apresenta o conjunto-solução na forma: $[a, b] \cup [c, +\infty[$.

Os valores de a , b e c devem estar arredondados às décimas.

R.:



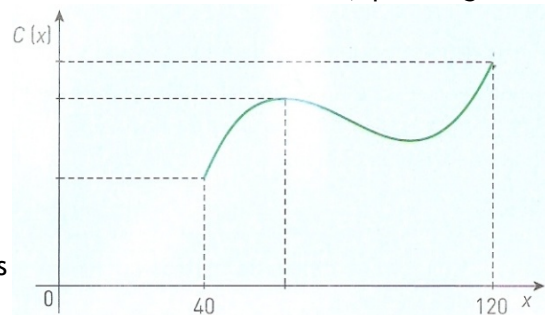


Logo, $a = -2,3$; $b = -0,9$; $c = 3,2$

Proposta 60 da página 129

Um novo modelo de uma marca de automóveis fez testes para avaliar o consumo de gasolina. Utilizando velocidades que variam entre os 40 km/h e os 120 km/h, o consumo $C(x)$ é dado em litros por cada 100 km percorridos à velocidade constante de x km/h, pelo seguinte modelo matemático:

$$C(x) = 0,0001x^3 - 0,024x^2 + 1,83x - 36$$



Recorre à calculadora para responder às seguintes questões:

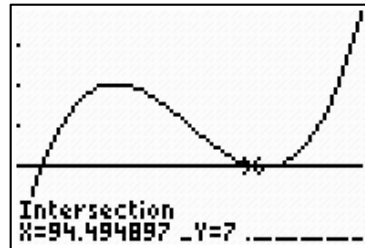
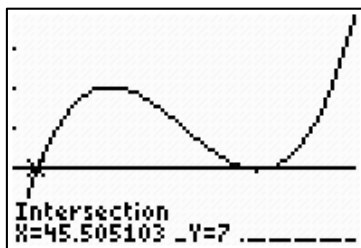
1. Qual é o consumo se o teste for realizado à velocidade de 60 km/h?

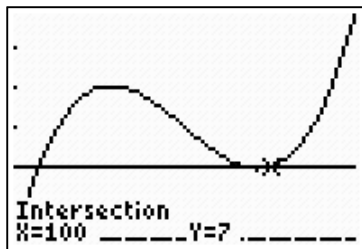
R.:

O consumo se o teste for realizado à velocidade de 60 km/h é $C(60) = 9$ litros / 100 km.

2. Num dos testes, o consumo foi de 7 litros por cada 100 km. Determina os valores possíveis da velocidade a que foi realizado o teste.

R.:



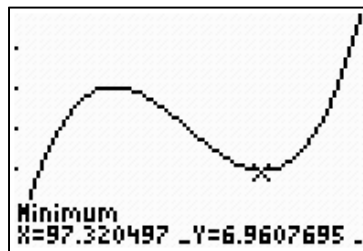
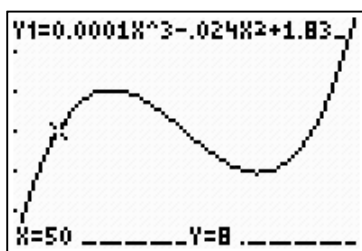


Concluimos assim que o teste pode ter sido realizado a uma velocidade de aproximadamente 45,5 km/h ou 94,5 km/h ou à velocidade de 100 km/h.

3. Num itinerário em que a velocidade mínima permitida é de 50 km/h, qual é a velocidade que recomendamos para que o consumo de gasolina seja o menor possível?

R.:

Dado que a 50 km/h se consomem 8 litros/100 km vamos aconselhar aproximadamente 97 km/h onde o consumo será de aproximadamente 7 litros / 100 km.

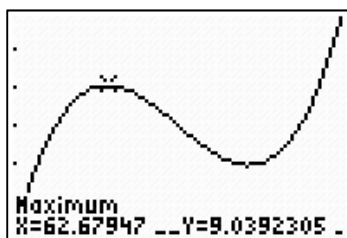


4. No referencial da figura está uma representação gráfica do modelo dado. Determina as coordenadas do ponto A, assinalado na figura, ponto em que a função atinge um máximo, e indica o seu significado no contexto do problema. Apresenta os resultados arredondados às centésimas.

R.:

Determinemos as coordenadas do ponto A, ponto em que a função atinge um máximo.

A (62,68; 9,04) com aproximação às centésimas.



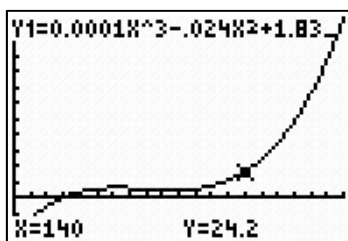
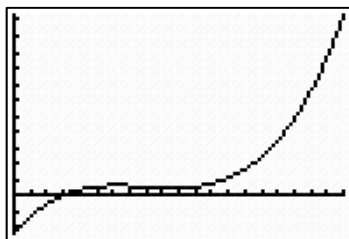
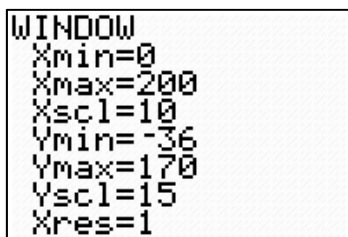
O seu significado é que a uma velocidade de aproximadamente 62,68 km/h se terá um consumo de aproximadamente 9,04 litros / 100 km.

5. Na tua opinião, o modelo apresentado ajusta-se para outras velocidades fora do intervalo [40, 120]? Justifica.

R.:

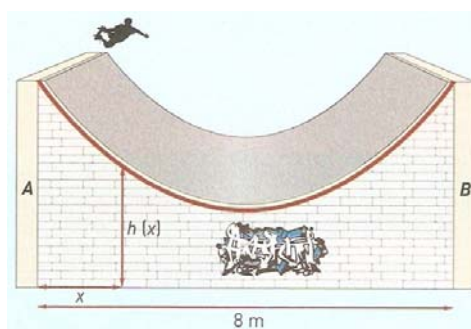
Na minha opinião, o modelo apresentado não se ajusta para outras velocidades fora do intervalo [40, 120]. Para o perceber representámos a função num intervalo [0, 200].

A menos de 30 km / h o consumo seria negativo o que é absurdo. Igualmente seria absurdo o consumo a mais de 120 km / h, por exemplo a 140 km / h o consumo já seria de 24, 2 litros / 100 km.



Proposta 63 da página 131

Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes A e B, distanciadas 8 m entre si, como é sugerido na figura.



Considera a função h definida por $h(x) = 0,2x^2 - 1,6x + 5$, em que $h(x)$ representa a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A.

1. Por processos exclusivamente analíticos, determina:

1.1 a altura máxima e mínima da rampa

R.:

Os pontos que estão a uma altura máxima são os pontos de abcissa 0 ou 8, por isso vamos calcular a ordenada desses pontos.

$$h(0) = 0,2 \times 0^2 - 1,6 \times 0 + 5 = 5$$

$$h(8) = 0,2 \times 8^2 - 1,6 \times 8 + 5 = 5$$

Logo, a altura máxima da rampa é 5 metros.

$$\text{A altura mínima é } h(4) = 0,2 \times 4^2 - 1,6 \times 4 + 5 = 1,8$$

1.2 a altura do ponto da rampa que dista 1,5 m da parede B

R.:

A altura do ponto da rampa que dista 1,5 m da parede B é:

$$h(8 - 1,5) = h(6,5) = 0,2 \times 6,5^2 - 1,6 \times 6,5 + 5 = 3,05 \text{ metros}$$

1.3 a distância entre os pontos da rampa que estão a 2 m de altura

R.:

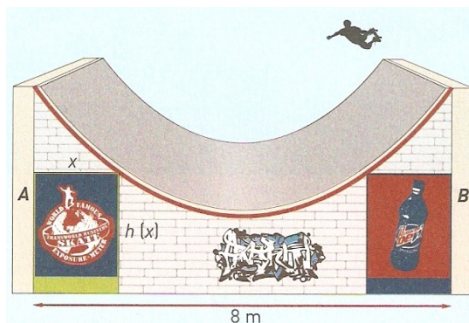
Para determinar a distância entre os pontos da rampa que estão a 2 m de altura temos, em 1º lugar de resolver a equação $h(x) = 2$

$$h(x) = 2 \Leftrightarrow 0,2x^2 - 1,6x + 5 = 2 \Leftrightarrow 0,2x^2 - 1,6x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1,6 \pm \sqrt{1,6^2 - 4 \times 0,2 \times 3}}{2 \times 0,2} \Leftrightarrow x = \frac{1,6 \pm \sqrt{0,16}}{0,4} \Leftrightarrow x = \frac{1,6 \pm 0,4}{0,4} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 3$$

Assim, a distância entre os pontos da rampa que estão a 2 metros de altura é de $5 - 3 = 2$ metros.

2. Sob a rampa foram colocados dois painéis retangulares geometricamente iguais, como mostra a figura seguinte.



2.1 Mostra que a área conjunta dos dois painéis, em metros quadrados, é dada em função de x pela expressão $A(x) = 0,4x^3 - 3,2x^2 + 10x$

R.:

Os painéis são retangulares e geometricamente iguais, por isso,

$$A(x) = 2 \times x \times h(x) = 2x(0,2x^2 - 1,6x + 5) = 0,4x^3 - 3,2x^2 + 10x$$

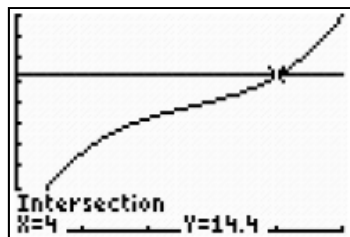
2.2. Resolva a equação $A(x) = 14,4$. Para a solução encontrada, dá uma interpretação geométrica para a posição dos dois painéis.

R.:

Utilizando a calculadora para resolver a equação $A(x) = 14,4$

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=0.4X^3-3.2X^2+
10X
\Y2=14.4
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=20
Yscl=2
Xres=1
```



A equação tem apenas uma solução $x = 4$.

Isso significa que os dois painéis ficam unidos formando um único painel com 8 metros de comprimento (pois cada um tem 4 metros de comprimento) e 1,8 metros de largura.

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;

APOIO BIBLIOGRÁFICO: [3] e [11]

2.8. Conclusão

A Prática de Ensino Supervisionada organizada em sessões letivas supervisionadas, em observações letivas (às aulas do orientador cooperante e de colegas estagiários) e outras colaborações na docência permitiu a mobilização e aprofundamento de conhecimentos científicos da área da docência; o desenvolvimento de competências no domínio das metodologias e estratégias relacionadas com os processos de ensino e de aprendizagem; a aprendizagem de conhecimentos e o desenvolvimento da capacidade de reflexão sobre a organização e o funcionamento da sala de aula, da escola e do sistema educativo e a integração progressiva e orientada no exercício da prática profissional docente e nas atividades desenvolvidas na comunidade escolar.

Foi realçada a necessidade de se aplicarem diversas metodologias e estratégias de ensino tendo em conta a heterogeneidade de uma turma e as singularidades de cada aluno. Nos processos de ensino e de aprendizagem não basta ao professor o conhecimento dos conteúdos e conceitos a serem lecionados, mas também o saber selecionar e aplicar a(s) metodologia(s) adequadas que permitam a aprendizagem a todos e a cada aluno em particular. Deste modo, a tarefa de planificação das aulas a lecionar é fundamental para a realização de um bom trabalho.

Não podemos olhar para o plano de aula como algo estanque e que tem de ser seguido à risca, mas sim como um elemento de apoio que permita ao professor, de uma forma flexível, alterar alguns elementos consoante as necessidades, sem no entanto perder o fio condutor da planificação.

Devido à importância de que se reveste o plano de aula, foi sentida uma responsabilidade acrescida na sua elaboração, permitindo que se fizesse uma reflexão sobre a prática docente pois foi necessário escolher não só a metodologia a utilizar na sala de aula bem como o modo de aplicá-la para melhor ensinar os conteúdos programáticos. Este “desafio” foi superado com sucesso, adotando-se uma abordagem voltada para o uso das novas tecnologias e privilegiando a modelação matemática como um contributo essencial para a motivação dos alunos para a matemática.

Os alunos de uma forma geral demonstraram interesse nas atividades e tarefas propostas, interagindo ativamente e assumindo um papel fundamental no processo ensino/aprendizagem. No entanto, alguns alunos ainda não conseguiram desenvolver atitudes positivas face à matemática nem a capacidade de apreciar esta ciência, isto conjugado com a falta de autonomia e de capacidade de iniciativa traduz-se num desafio maior para superar as suas dificuldades. No trabalho em grupo, alguns alunos apresentaram dificuldades em organizar-se e em desenvolver um trabalho corporativo que lhes permitisse obter melhores

resultados. No entanto podemos dizer que perante os resultados obtidos pelos alunos na avaliação, o nosso contributo enquanto professora estagiária foi proveitoso.

Bibliografia

- [1] Brito, Maria Graciete C. (2009). *Diferentes representações dos números racionais: Explicitar as concepções dos alunos e gerir possíveis conflitos cognitivos*. *Interacções*, No. 12, pp. 65-76.
- [2] Collins, Darren C. (1999). *Continued Fractions*. *Undergraduate Journal of Mathematics*, MIT, 1, 1999, pp. 11-18.
- [3] Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda (2010). Manual adotado: *Novo Espaço Matemática A 10.º Ano - Parte 2*. Porto Editora.
- [4] Delgado, Catarina (2009). *Os Números e as Operações no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico*. *Educação e Matemática*, Revista da Associação de Professores de Matemática, No. 105, Nov/Dez 2009, pp. 17-21.
- [5] Dias, Carla; Ferreira, Jorge; Lagoa, Jorge; Leandro, Salústio (2010). *IRealmat Matemática A - 10.º ano - volume 2*. Plátano Editora.
- [6] Duarte, Teresa O.; Filipe, Jaime P. (2010). *Matemática Dez - Parte 2 - Funções/Estatística*. Lisboa Editora.
- [7] Kalapodi, Aleka (2010). *The decimal representation of real numbers*. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 41, No. 7, 15 October 2010, pp. 889-900.
- [8] Loya, Paul (2006). *Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis: On the incredible infinite*. A Course in Undergraduate Analysis, Fall 2006. Disponível em: <http://www.math.binghamton.edu/dennis/478.f07/ElAna.pdf>.
- [9] Moore, Charles G. (1964). *An Introduction to Continued Fractions*. Arizona State College, Flagstaff, Arizona. National Council of Teachers of Mathematics, Inc, Washington, D. C.
- [10] Neves, Maria Augusta F.; Guerreiro, Luís; Leite, António; Silva, Jorge N. (2010). *Matemática A 10.º Ano - Funções I*. Porto Editora.
- [11] Programa de Matemática do Ensino secundário 10.º ano - Cursos Científico Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Disponível em: <http://www.dgicd.min-edu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directoriod&pid=2&letra=M>.

[12] Saraiva, Manuel J.; Teixeira, Ana M.; Andrade, Jael M. (2010). *Estudo das funções no programa de matemática A com problemas e tarefas de exploração*. Projecto IMLNA - Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra. Instituto da Educação - Universidade de Lisboa. Universidade da Beira Interior.