



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

**Orientação de mísseis intercetores com base no
método dos Reguladores Quadráticos Lineares
(LQR) com estimação de trajetórias**
(Versão final após defesa)

Mariana Elisa Moreira Nunes da Costa

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Aeronáutica
(ciclo de estudos integrado)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

Covilhã, Novembro de 2017

"Misseis e igrejas seguem os mesmos princípios. Primeiro contrói-se com dedicação e depois reza-se com afinco"

Mariana Costa

Agradecimentos

Em primeiro lugar, tenho que agradecer aos meus pais por me proporcionarem todas as ferramentas para chegar a esta etapa da minha vida. Fico eternamente grata por todo carinho, amor e apoio incondicionais e por todos os valores que me inculcaram. Sem todos estes fatores não seria possível alcançar mais uma meta da minha vida.

Ao Professor Doutor Koumana Bousson por compartilhar comigo os seus valiosos conhecimentos e me ter ajudado e esclarecido aspetos científicos fundamentais à realização desta dissertação. Além do mais, agradeço-lhe por manter o entusiasmo e boa disposição principalmente nas alturas mais complicadas.

Ao Professor José Duque por toda a sua disponibilidade e generosidade em compartilhar a sua competência científica.

À minha família por serem os meus pilares ao longo desta jornada e acreditarem em mim. Um especial agradecimento à minha irmã Anita e ao meu cunhado Miguel. No primeiro caso por ser uma referência na minha vida e por todas ajudas e correções e no segundo por toda paciência e tempo disponibilizados a ajudar-me.

Aos meus colegas e amigos de laboratório David, Tiago e Rui por serem incansáveis nas ajudas, pela paciência, pelo carinho e pela partilha de conhecimentos que me prestaram.

Aos meus amigos Beatriz, Inês, Eduardo, Kevin, Luís, José e Carina por todo o apoio incondicional mas principalmente por me permitirem manter com a sanidade mental e integridade moral intactas.

Ao Gil por ser companheiro, paciente, compreensivo e bom ouvinte, permitindo aligeirar os períodos de maior cansaço.

Por último, a todos os outros que tiveram implicação direta ou indireta para conclusão desta dissertação, agradeço aos que intercederam negativamente e deixo um bem-hajam aos restantes!

Resumo

Desde a Segunda Guerra Mundial, o desenvolvimento de tecnologia no setor de mísseis tem vindo a representar um fator que pode ser determinante no rumo da Humanidade. Devido à importância que constitui, este é um dos setores mais desafiantes a ser investigado.

Com esta dissertação, pretende-se incrementar alguns fundamentos em duas das áreas mais centrais à atuação do míssil: leis de orientação e localização precisa do alvo.

Assim sendo, na primeira área referida são exploradas as leis de orientação a partir das trajetórias efetuadas pelo míssil de encontro ao alvo com base nas diretrizes de um controlador *Linear Quadratic Regulator* (LQR) clássico, bem como, nas de um controlador obtido de forma determinística a partir de um critério de desempenho proposto assente nos conceitos básicos de *Receding Horizon Control* (RHC). Conclui-se que o controlador LQR clássico exibe uma melhor performance uma vez que denota trajetórias mais diretas ao alvo e com menor duração. Futuramente, não se deverão descartar controladores originados a partir de outro tipo de critério de desempenho. Dado que existe a possibilidade destes serem desenvolvidos para situações específicas e consequentemente possam revelar melhor desempenho quando comparados ao controlador LQR clássico.

Todos os sistemas possuem algum tipo de incertezas e/ou perturbações. Este facto fomenta a necessidade da aplicação de um controlador robusto. A escolha do mesmo baseia-se no controlador LQR robusto alicerçado com o método de Artstein, que apresenta excelente desempenho em osciladores caóticos e também neste estudo, na medida que responde satisfatoriamente às necessidades para o qual foi desenvolvido. Por sua vez, o controlador LQR clássico para as mesmas circunstâncias demonstra características de robustez insuficientes.

No que concerne à localização precisa do alvo é aplicado um filtro de Kalman-Bucy à trajetória real do mesmo. Este método, devido aos resultados obtidos na estimação da trajetória do alvo real e à flexibilidade de implementação que dispõe, demonstra ser uma poderosa ferramenta para o setor em questão.

Portanto, esta dissertação introduz alguns fundamentos inovadores ao setor referido neste resumo, revelando que o controlador robusto desenvolvido por Artstein tem uma grande eficácia para rastreamento de mísseis quando sujeitos a incertezas e/ou perturbações. Por sua vez, o controlador LQR clássico pode eventualmente ser substituído por outro que satisfaça um critério de desempenho concebido para situações específicas. Por último, o filtro de Kalman-Bucy demonstra elevada aptidão no âmbito da localização precisa de alvos.

Palavras-chave

Míssil interceptador; Alvo; Orientação; Intercepção; LQR clássico; LQR robusto; Filtro Kalman-Bucy

Abstract

Ever since the World War II, the technology development in the missile sector represents a factor that can be crucial in the destiny of humanity. Due to the importance it has, this is one of the most challenging sectors to investigate.

With this dissertation, the aim is to increase some fundamentals in two of the most central areas to the missile operation: orientation laws and precise target location.

Therefore, in the first-mentioned area, the orientation laws are explored through the already performed trajectories by the missile against the target based on the guidelines of a classic LQR controller and also based on a deterministically obtained controller from a performance criterion proposed, which rests in the basic notions of RHC. It was concluded that the classic LQR controller depicts a better performance as it shows more direct trajectories to the target with a decrease in terms of time. Hereafter, controllers originated from other types of performance criterion must not be discarded, being that there is the possibility of development for special situation and consequently may reveal better performance when compared to the classic LQR.

All systems have some kind of uncertainty and / or disturbance. This fact encourages the need of implementing a robust controller. The choice is based on the robust LQR controller coming from the Artstein method, which suggests excellent performance in chaotic oscillators and also in that study as it satisfies the needs for which it was developed. On the other hand, classic LQR controller for the same circumstances reveals insufficient robustness characteristics.

As far as the target location is concerned, a Kalman-Bucy filter is applied to the real trajectory. This method, due to the obtained results in the real target trajectory's estimation and the implementation flexibility it has, it proves itself to be a powerful tool to the sector in question.

Moreover, this dissertation introduces several innovative fundamentals to the referred sector, exhibiting that the robust controller developed by Artstein has a great efficiency in terms of missile tracking when under uncertainties and/or disturbances. Furthermore, the classic LQR controller may eventually be replaced by another that can fulfil a performance criterion for specific situations. At last, the Kalman-Bucy filter shows great skills in precise target location.

Keywords

Missile; Target; Guidance; Interception; Classic LQR; Robust LQR; Kalman-Bucy filter

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão bibliográfica	2
1.2.1	Fundamentos da orientação de mísseis táticos	2
1.2.2	Enquadramento do controlo	12
1.3	Objetivos	13
1.4	Estrutura da dissertação	14
2	Propriedades do controlo na orientação de mísseis	15
2.1	Modelação do sistema	16
2.2	Teoria de Lyapunov	17
2.3	Controlo ótimo LQR	18
2.3.1	Propriedades do controlador LQR clássico	19
2.3.2	Controlador obtido deterministicamente	21
2.4	LQR robusto	22
3	Filtragem e estimação da posição do alvo	25
3.1	Método dos Observadores	25
3.2	Filtragem de Kalman-Bucy	28
3.3	Aplicação ao caso de estudo	28
4	Simulações e resultados	31
4.1	LQR clássico vs LQR determinístico	31
4.2	LQR clássico vs LQR robusto	40
4.3	Filtro de Kalman-Bucy	46
5	Conclusões e perspectivas de trabalhos futuros	55
5.1	Conclusões	55
5.2	Perspetivas de trabalhos futuros	56
	Bibliography	59
A	Algoritmos matemáticos auxiliares	63
A.1	Algoritmo de Butcher	63
A.2	Programação linear quadrática	63
B	Controlador LQR clássico e controlador determinístico	65
B.1	$x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	65
C	Controlador LQR clássico e controlador determinístico	71
C.1	$x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	71
D	Controlador LQR clássico e controlador determinístico	75
D.1	$x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	75

CONTEÚDO

CONTEÚDO

E	Controlador LQR clássico e controlador LQR robusto	79
E.1	$x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	79

Lista de Figuras

1.1	Esquema da orientação e controlo de mísseis [63].	1
1.2	Três estágios de voo de míssil tático <i>Surface-Air Missile (SAM)</i> [41].	3
1.3	Classificação de diferentes tipos de mísseis [55].	4
1.4	<i>Homing</i> ativo [39].	5
1.5	<i>Homing</i> semi-ativo [39].	5
1.6	<i>Homing</i> passivo [39].	6
1.7	Orientação por comandos [4].	7
1.8	Orientação <i>Beam rider</i> [18].	8
1.9	Orientação <i>Line-of-Sight (LOS)</i> [26].	8
1.10	Perseguição pura, perseguição <i>lead</i> e colisão <i>lead</i> [43].	10
1.11	Perseguição desviada [55].	10
1.12	Navegação proporcional [64].	11
1.13	Relação entre controlo robusto e controlo não robusto[2].	13
2.1	Sistema linear com condição inicial nula [65].	16
4.1	Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a condição inicial do míssil $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	34
4.2	Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a condição inicial do míssil $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	34
4.3	Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a condição inicial do míssil $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	35
4.4	Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a condição inicial do míssil $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	35
4.5	Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	36
4.6	Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	36
4.7	Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	37
4.8	Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	37
4.9	Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	38

4.10 Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	38
4.11 Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	39
4.12 Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	39
4.13 Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	40
4.14 Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	41
4.15 Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	42
4.16 Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	42
4.17 Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	43
4.18 Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	43
4.19 Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	43
4.20 Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	44
4.21 Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	44
4.22 Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	45
4.23 Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$	45
4.24 Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	46
4.25 Trajetória tridimensional filtrada e real do alvo.	48
4.26 Comportamento da latitude filtrada e real do alvo em função do tempo.	49
4.27 Comportamento da longitude filtrada e real do alvo em função do tempo.	49

4.28	Comportamento da altitude filtrada e real do alvo em função do tempo.	50
4.29	Comportamento da velocidade latitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.	50
4.30	Comportamento da velocidade longitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.	50
4.31	Comportamento da velocidade altitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.	51
4.32	Comportamento da aceleração latitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.	51
4.33	Comportamento da aceleração longitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.	52
4.34	Comportamento da aceleração altitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.	52
B.1	Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	65
B.2	Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	65
B.3	Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	66
B.4	Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	66
B.5	Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	67
B.6	Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	67
B.7	Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	68
B.8	Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	68
B.9	Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	69
C.1	Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	71

C.2 Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 71

C.3 Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 72

C.4 Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 72

C.5 Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 72

C.6 Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 73

C.7 Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 73

C.8 Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 74

C.9 Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 74

D.1 Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 75

D.2 Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 75

D.3 Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 76

D.4 Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 76

D.5 Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 76

D.6 Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 77

D.7 Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 77

D.8	Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	78
D.9	Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x=[500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	78
E.1	Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	79
E.2	Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	79
E.3	Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	80
E.4	Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	80
E.5	Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	80
E.6	Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	81
E.7	Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	81
E.8	Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	81
E.9	Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x=[0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	82

Lista de Tabelas

1.1	Métodos de navegação usados em cada técnica de interceção [55].	9
-----	---	---

Lista de acrónimos

LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
AAM	<i>Air-Air Missile</i>
AIM	<i>Air-Intercept Missile</i>
SAM	<i>Surface-Air Missile</i>
AGM	<i>Air-Ground Missile</i>
g force	<i>Gravitational Force</i>
LOS	<i>Line-of-Sight</i>
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
SISO	<i>Single Input Single Output</i>
LTI	<i>Linear de Tempo Invariante</i>
QPI	<i>Quadratic Performance Index</i>
RHC	<i>Receding Horizon Control</i>
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>

Nomenclatura

Símbolos	Domínio	Unidades	Descrição
A	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz de estados
ΔA	\mathbb{R}^n	[-]	Incerteza associada à matriz A
A^*, B^*, C^*, D^*	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Transposta respetiva da matriz A, B, C, D
a_x	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[m/s ²]	Aceleração latitudinal
a_y	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[m/s ²]	Aceleração longitudinal
a_z	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[m/s ²]	Aceleração altitudinal
B	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz de controlo ou de entrada
ΔB	\mathbb{R}^n	[-]	Incerteza associada à matriz B
C	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz de saída
D	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz de {feedforward}
E	\mathbb{R}^n	[-]	Espaço primal
E^*	\mathbb{R}^n	[-]	Espaço dual
e_x	\mathbb{R}	[-]	Erro de estimação de estado no espaço primal
e_y	\mathbb{R}	[-]	Erro de estimação de saída no espaço primal
e_x^d	\mathbb{R}	[-]	Erro de estimação de estado no espaço dual
e_y^d	\mathbb{R}	[-]	Erro de estimação de saída no espaço dual
f_i, q_i	\mathbb{R}^n	[-]	Função representativa do método desenvolvido por Jia Luo e CC. Edward
H	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz Hamiltoniana
h	\mathbb{R}	[s]	Passo relativo ao tempo
J	\mathbb{R}^n	[-]	Desempenho quadrático linear
j_x	\mathbb{R}	[m/s ³]	{Jerk} latitudinal
j_y	\mathbb{R}	[m/s ³]	{Jerk} longitudinal
j_z	\mathbb{R}	[m/s ³]	{Jerk} altitudinal
K, L*	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Ganho
M	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz de incerteza associada à matriz R
N	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz de incerteza associada à matriz Q
N'	\mathbb{R}	[-]	Constante de navegação
n	\mathbb{R}	[-]	Dimensão da matriz A
n_c	\mathbb{R}	[ft/sec ²]	Aceleração normal ou lateral
P	\mathbb{R}^n	[-]	Solução de Riccati
p_x	\mathbb{R}	[m]	Latitude
p_y	\mathbb{R}	[m]	Longitude
p_z	\mathbb{R}	[m]	Altitude
Q	$\mathbb{R}_{0+}^{n \times n}$	[-]	Matriz de ponderação para as variáveis de estado
R	$\mathbb{R}_{0+}^{n \times n}$	[-]	Matriz
r, z	\mathbb{R}	[-]	Constantes do método de Artstein
t	\mathbb{R}_{0+}	[s]	Tempo
Δt	\mathbb{R}_{0+}	[s]	Varição de tempo
t^*	\mathbb{R}_{0+}	[s]	Instante de tempo inicial
u	\mathbb{R}^p	[-]	Vetor de controlo
u_{ref}	\mathbb{R}^p	[-]	Controlo de referência
v	\mathbb{R}^n	[-]	Vetor de controlo no espaço dual
V_c	\mathbb{R}	[ft/sec]	Velocidade de aproximação
V(x)	\mathbb{R}^n	[-]	Função de Lyapunov

Símbolos	Domínio	Unidades	Descrição
u_x	\mathbb{R}	[m/s]	Velocidade latitudinal
u_y	\mathbb{R}	[m/s]	Velocidade longitudinal
u_z	\mathbb{R}	[m/s]	Velocidade altitudinal
w	\mathbb{R}^n	[-]	Vetor de observação no espaço dual
x	\mathbb{R}^n	[-]	Vetor de estado de um sistema
x_0	\mathbb{R}^n	[-]	Condição inicial do estado
x^*	\mathbb{R}^n	[-]	Estado de equilíbrio
\hat{x}	\mathbb{R}	[-]	Estimativa do erro no espaço primal
x_{ref}	\mathbb{R}^n	[-]	Estado de referência
y	\mathbb{R}^n	[-]	Vetor de saída de um sistema
z	\mathbb{R}^n	[-]	Vetor de estado no espaço dual

Letras gregas

Símbolos	Domínio	Unidades	Descrição
Σ	\mathbb{R}^n	[-]	Sistema no espaço primal
Σ^*	\mathbb{R}^n	[-]	Sistema no espaço dual
η	\mathbb{R}^n	[-]	Ruído associado ao estado do sistema
η_1	\mathbb{R}^n	[-]	Incerteza associada à matriz A
η_2	\mathbb{R}^n	[-]	Incerteza associada à matriz B
λ	$\mathbb{C}^{n \times 1}$	[-]	Valores próprios
$\dot{\lambda}$	\mathbb{R}	[rad/sec]	Razão da LOS
Δ	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz da condição de controlabilidade
θ	$\mathbb{R}^{n \times n}$	[-]	Matriz da condição de observabilidade
η	\mathbb{R}^n	[-]	Ruído associado ao controlo do sistema
φ	\mathbb{R}	[-]	Constante da equação 2.20
Ω	\mathbb{R}	[-]	Domínio da Função de Lyapunov

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Atualmente, os mísseis apresentam um papel crucial no curso dos eventos da Humanidade, uma vez que redefinem o Mundo: transformam a ciência, a política, a economia e acima de tudo, o conceito de guerra. Para o Homem o sentido de evolução tem sido aperfeiçoado ao longo dos tempos. Desde os primórdios, procura desenvolver formas de atingir um determinado propósito e quando este se torna possível investe no melhoramento do mesmo, passando a recriá-lo, originando dessa forma propósitos mais complexos. A evolução da tecnologia associada a mísseis é um dos casos mais flagrantes desta afirmação.

A invenção da pólvora é o marco impulsionador do desenvolvimento de tecnologia destinada a rockets, mísseis e satélites. Em meados do século vinte, devido ao desenvolvimento da tecnologia em diversas áreas e à conjectura política e social que se vivia, esta tecnologia cresceu de forma exponencial. A origem dos mísseis surge aquando dominada a otimização de rockets, se implementaram sistemas de orientação, com o intuito de torná-los mais rigorosos nas suas missões. A partir desse momento, a imaginação e o engenho humano têm levado este setor a atingir objetivos nunca antes imaginados: antimísseis, mísseis de cruzeiro, mísseis balísticos e mísseis táticos.

O objetivo de um míssil é atingir um determinado alvo. Tal como é evidenciado na figura 1.1, existe um sistema integrado que descreve a missão do míssil. Inicialmente, é necessário identificar sensorialmente e localizar com precisão o alvo com recurso a um determinado filtro. Seguidamente são geradas as orientações e os controlos que são "comunicados" ao piloto automático de modo a que este envie os comandos aos sistemas propulsivo e aerodinâmico de forma a que estes se comportem convenientemente assegurando o sucesso da missão.

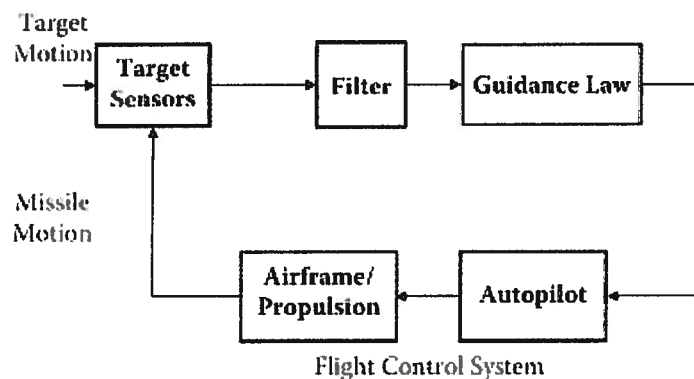


Figura 1.1: Esquema da orientação e controlo de mísseis [63].

Desta forma, este trabalho realizou-se a partir do desejo de explorar duas temáticas cruciais nesta área: a filtragem e estimação da posição do alvo e o funcionamento da orientação de mísseis táticos. Um dos meios mais interessantes de explorar a última temática enunciada é aplicar um controlo ótimo e robusto. Neste caso, foi escolhido um controlador LQR robusto pois apresenta um largo trabalho de investigação decorrido ao longo dos anos, demonstrando ser versátil e eficaz. Denote-se que o LQR por si só, apresenta algumas características de robustez. Para a filtragem e estimação da posição do alvo elegeu-se o filtro de Kalman-Bucy pois apresenta um conjunto de características e funcionamento que melhor se adequa às necessidades deste setor.

Em suma, a motivação para a realização deste trabalho ocorre pela contemporaneidade e a influência do tema na vida do Homem, bem como uma adaptação de um método robusto a um engenho de elevada complexidade.

1.2 Revisão bibliográfica

1.2.1 Fundamentos da orientação de mísseis táticos

O sistema de orientação de um míssil tem como objetivo "guiá-lo" até intercepar o alvo, por outras palavras, faz com que, a determinado momento, a posição do míssil coincida com a do alvo e a velocidade do míssil seja suficiente para destruir o alvo. Apesar de possuírem este propósito, os mísseis táticos, distinguem-se dos demais por se ativarem apenas em situações em que existem veículos que possam comprometer de alguma maneira a segurança. Através dos conhecimentos do estudo [38], o meio de funcionamento em que estes são lançados possibilita que se classifiquem em três categorias: mísseis ar-ar, *Air-Air Missile (AAM)* ou *Air-Intercept Missile (AIM)*; terra-ar, SAM e por último ar-terra, *Air-Ground Missile (AGM)*.

Para que a missão para a qual foi desenvolvido ocorra, o míssil tático realiza, em geral, três fases de voo que serão detalhadamente explicadas no primeiro sub-sub-capítulo: impulso, médio curso e terminal.

No sub-sub-capítulo dois são apresentadas algumas técnicas de interceção de mísseis táticos que podem ser usados de forma exclusiva mas, muitas vezes, são usadas de forma combinada para as diferentes fases do voo.

No último sub-sub-capítulo, exploram-se os conceitos de perseguição direta e perseguição indireta (navegação proporcional). A perseguição direta subdivide-se em algumas categorias, constituindo um método eficaz de navegação. Por sua vez, a navegação proporcional que apesar de ser o primeiro princípio a ser desenvolvido, ainda é muito versátil e com as modificações e aumentos adequados continua a ser utilizado nos sistemas de orientação contemporâneos.

1.2.1.1 Fases de voo de um míssil tático

As três fases de voo de um míssil tático SAM são classificadas em fase de impulso ou *boost phase*, fase médio curso ou *midcourse phase* e fase terminal ou *terminal phase*. Estas fases de voo encontram-se representadas na figura 1.2. Como enunciado pelos autores de [41], os outros tipos de mísseis apresentam também fases similares ao representado.

Fase de impulso ou *boost phase*

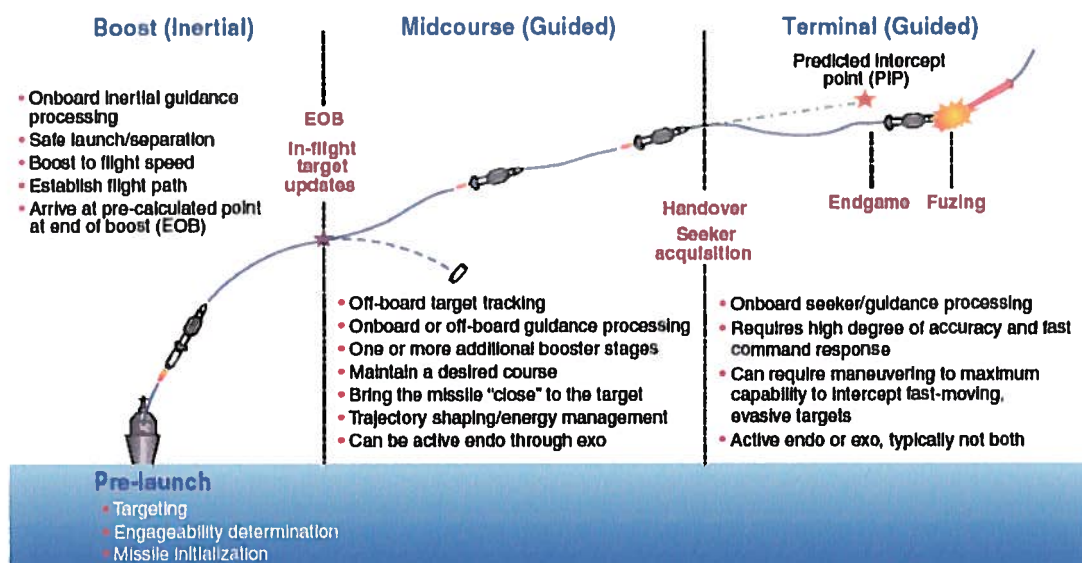


Figura 1.2: Três estágios de voo de míssil tático SAM [41].

Esta é a primeira fase de voo que o míssil efetua para intercetar o alvo. Por norma, não é controlada. Caracteriza-se pela identificação do alvo, ativação do sistema propulsivo e pelo "impulsão" do míssil até que a sua velocidade operacional se encontre na direção do alvo.

Este primeiro estágio é célere pois ocorre até o míssil se encontrar marginalmente estável e apresentar elevada aceleração longitudinal [29, 25, 63, 6].

Fase de médio curso ou *midcourse phase*

Esta fase procede a anterior e geralmente, exibe a maior duração.

Nesta fase, as técnicas de interceção atuam em pleno, dado que imprime-se ao míssil as orientações necessárias para que este cumpra a sua missão. Para tal pode ser orientado para atingir o alvo diretamente ou numa área estrategicamente definida [6, 55, 19, 10].

Fase terminal ou *terminal phase*

Corresponde à fase de encontro do míssil com alvo. Apesar de última, é a fase mais importante do voo, pois determina o sucesso ou falha da missão.

Tendo em conta as limitações de combustível e manobrabilidade do míssil, este aproxima-se o mais depressa possível do alvo de forma a intercetá-lo. Sendo assim uma fase relativamente rápida.

Salienta-se ainda que a interceção raramente acontece quando atinge diretamente o alvo. Usualmente, o míssil passa próximo do alvo e explode com a sua ogiva. Pode deste modo dizer-se então que a eficácia da fase terminal e conseqüentemente da missão, é resumida por quão perto o míssil consegue passar do alvo, por forma a atingi-lo [6, 55].

1.2.1.2 Técnicas de intercepção tática

A figura 1.3 mostra uma possível classificação dos mísseis táticos relativamente ao método de orientação. Independentemente da técnica usada, o míssil deve ter capacidade de manobra satisfatória (*Gravitational Force* (g force) suficiente) para intercepar o alvo a uma distância letal para este. Devido à extensão do conteúdo, serão apresentadas apenas as técnicas de orientações mais utilizadas.

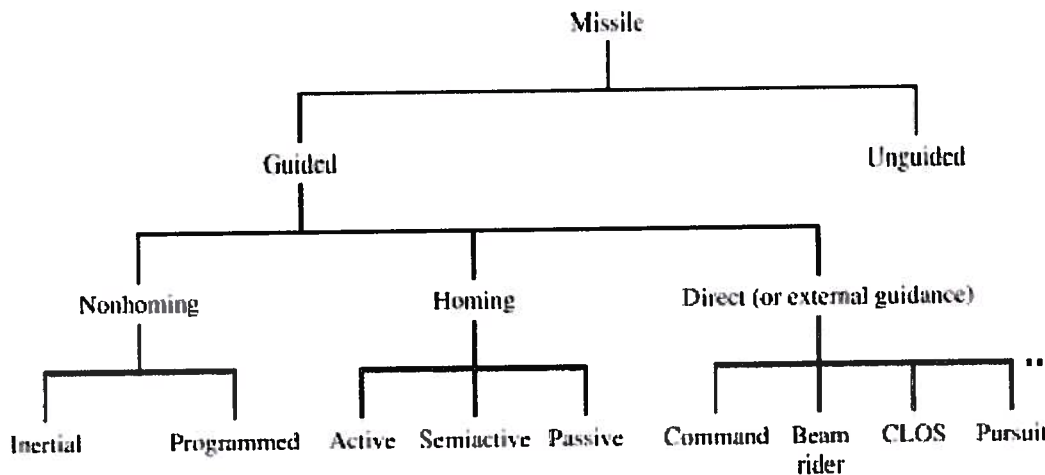


Figura 1.3: Classificação de diferentes tipos de mísseis [55].

Orientação *Homing*

Este tipo de orientação pode ser usado numa, duas ou todas as fases de voo como o caso de alguns mísseis de curto alcance [42]. Propicia que o míssil selecione o alvo, identifique a sua posição e o oriente ao encontro do mesmo de forma autónoma através do envio de comandos para as suas próprias superfícies de controlo. Esta autonomia advém de sensores direcionais localizados no míssil que detetam pequenos deslocamentos angulares entre si e o seu alvo. Estes sensores utilizam algumas características distintivas do alvo como calor, radiação emitidos, entre outras [41, 35, 55]. Consoante o nível de autonomia imprimida ao míssil pode-se dividir este tema em três categorias: *Homing* ativo, *Homing* semi-ativo e *Homing* passivo.

- ***Homing* ativo:** é um sistema completamente autónomo, porque possui todos os sistemas que permitem identificar e perseguir o alvo (antena transmissora, antena recetora, recetor, processador de sinal e computador de orientação). Estes encontram-se incorporados no míssil. Deste modo, com este sistema, o míssil transmite radiação eletromagnética para o alvo e recebe a energia refletida por ele. Tal como representado na figura 1.4.

A vantagem mais significativa reside na completa autonomia que possui, basta lançar o míssil e este usa a filosofia de *fire-and-forget*, ou seja, depois do lançamento, o míssil é capaz de atingir o alvo sem precisar de comandos/orientações externas ao mesmo. As desvantagens são o custo e o peso elevados devido à complexidade dos sistemas e a transmissão da radiação por parte do míssil pode fazer com que o alvo detete o míssil e consiga fugir dele.

- ***Homing* semi-ativo:** este sistema é menos autónomo que o anterior, pois é uma fonte de

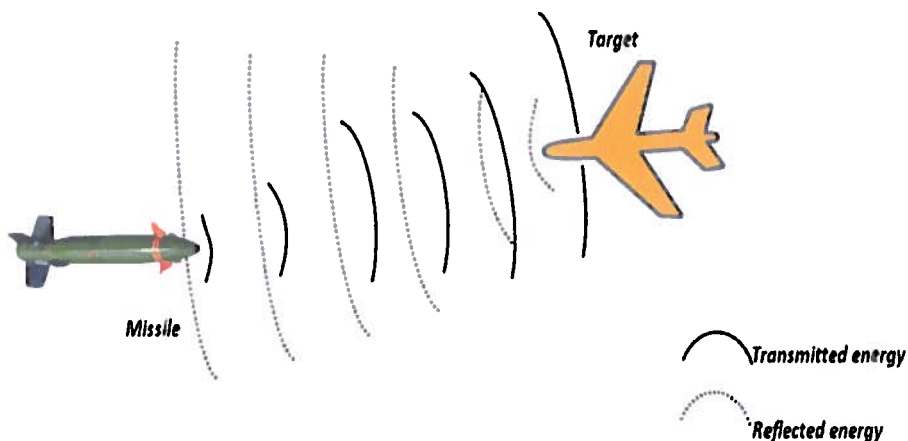


Figura 1.4: Homing ativo [39].

radiação externa e controlada (radar) que transmite a radiação ao alvo, enquanto que o míssil apenas recebe a energia refletida pelo mesmo. Isto é, o transmissor de energia fica externo ao míssil mas os recetores (antena recetora, processador de sinal e computador de orientação) encontram-se na sua composição. Para melhor compreensão do explicitado, recorrer à figura 1.5. Este sistema é mais simples que o anterior e permite orientações com intervalos de tempo maiores e com menos limitações externas na sua aplicação. A grande desvantagem é a obrigatoriedade de transmissão de radiação ao alvo durante todas as fases de voo.

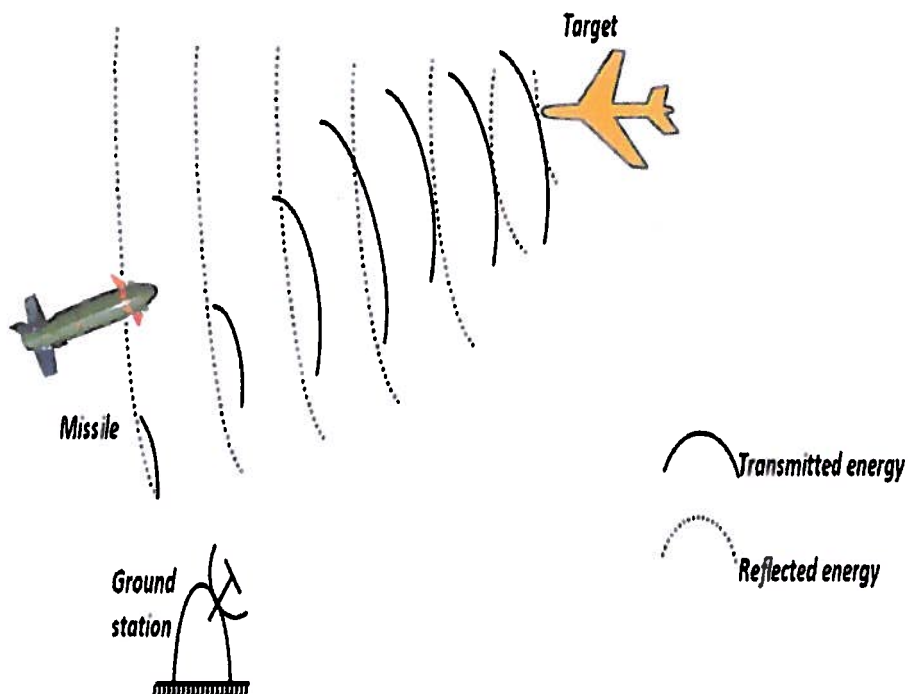


Figura 1.5: Homing semi-ativo [39].

- **Homing passivo:** este sistema utiliza a energia que o alvo emana sujeito às condições que

se encontra. Podendo ser sob a forma de ondas sonoras, de calor ou de luz .

O míssil contem um recetor que deteta o tipo de energia que é emitida pelo alvo, um processador de sinal e um computador de orientação. Na figura 1.6 está representado o modo de funcionamento deste sistema.

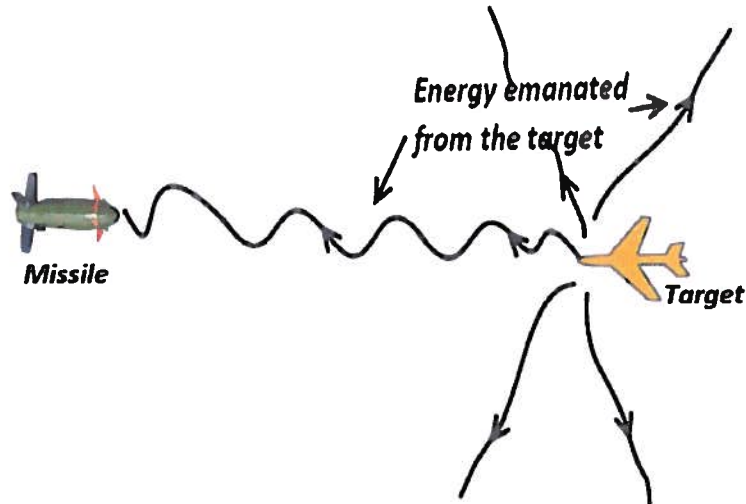


Figura 1.6: *Homing* passivo [39].

Os benefícios deste sistema são a maior simplicidade e o menor custo. Quanto às desvantagens podem enumerar-se as limitações dos sensores utilizados e o seu funcionamento ser dependente da emissão de energia suficiente por parte do alvo.

Orientação por comandos

Este tipo de orientação usa um radar de rastreamento externo ao míssil, situado numa estação terrestre. Esta última tem a responsabilidade de medir as posições e velocidades do alvo e do míssil e gerar os comandos através de um computador de orientação e posteriormente comunicar ao míssil as diretivas de como se deve comportar. É conhecida por ser uma orientação de três pontos: míssil, alvo e estação terrestre, como mostra a figura 1.7.

Em situações de comando puro existe a fase de impulso, a fase "comandada" de médio curso e por fim a fase terminal. Nestas circunstâncias, a última fase decorre rapidamente uma vez que o míssil se encontra próximo do alvo tornando-se difícil gerar novos comandos de orientação e conseqüentemente atualizar a manobra a ser efetuada. Os sistemas de mísseis de curto alcance usam bastante este sistema pois os erros de rastreamento são diminutos.

Por fim, uma grande desvantagem da orientação por comando é a necessidade de uma elevada taxa de dados (frequências altas) da fonte externa para a conveniente transmissão da energia ao alvo, implicando assim que facilmente o alvo consiga detetar essas frequências e realize manobras evasivas para escapar [26, 50, 42].

Beam rider

Neste caso, a estação do solo emite um feixe de radiação eletromagnética que rastreia a posição do alvo. O míssil, por sua vez, através de equipamento de reconhecimento de feixes eletromagnéticos deteta esse feixe e desloca-se para o eixo central do mesmo. Uma vez localizado nesse

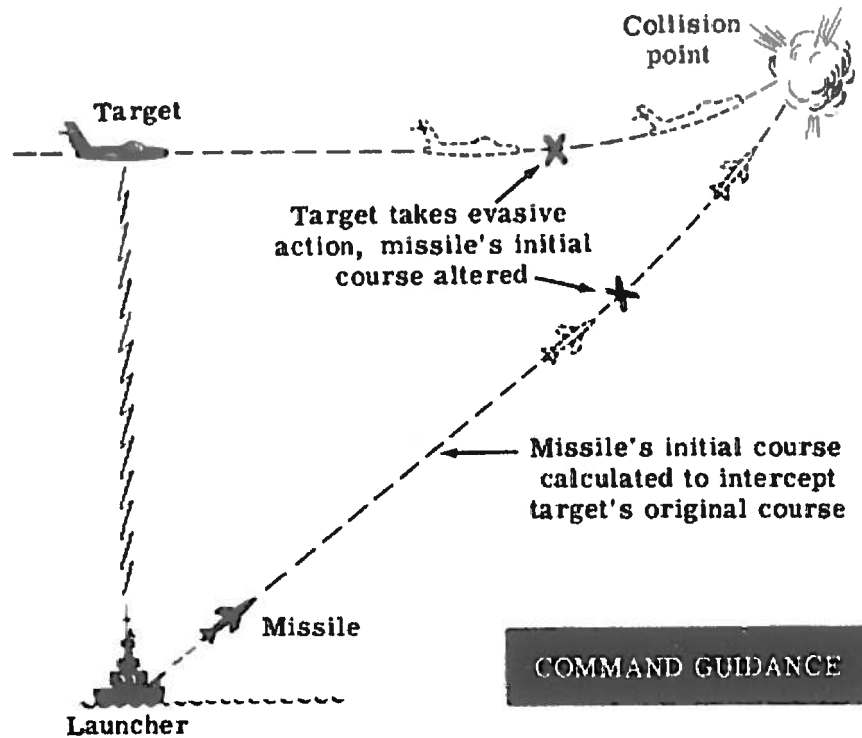


Figura 1.7: Orientação por comandos [4].

eixo central, o míssil encontra-se orientado na direção do alvo e por isso não serão enviados sinais para o sistema de controlo, indicando que não são precisas correções de trajetórias até este realizar a manobra de interceção; seja ela para perseguir o alvo diretamente ou para prever um ponto devidamente calculado onde se realize a colisão. De modo a ilustrar este conteúdo recorreu-se figura 1.8.

A orientação *Beam rider* permite que vários mísseis estejam sobre o mesmo controlo ou mesma faixa de radiação eletromagnética transmitida pelo rastreador, o que lhe confere uma enorme vantagem. Por outro lado, deve ser usado um feixe estreito de radiação, uma vez que quando se alarga o feixe de radiação a probabilidade de perda de localização do alvo é elevada [18, 52, 42].

Comando de orientação para a linha de visão

O objetivo deste tipo de orientação é comandar o míssil para realizar uma trajetória o mais similar possível à linha imaginária que junta a estação rastreadora em terreno e o alvo, conhecida como linha de visão ou LOS. A LOS é a linha imaginária que se forma entre o intercetor e o alvo durante a perseguição. Esta é diferente para cada dois corpos em estudo, ou melhor, a linha de visão que uma estação rastreadora tem em relação ao alvo é diferente da linha de visão que o míssil tem em relação a este, havendo assim duas LOS diferentes. Como esta linha muda o seu comprimento e orientação ao longo da missão, por norma para auxílio matemático, expressa-se a razão de LOS que corresponde à velocidade angular, em radianos por segundo.

Deste modo, a estação rastreadora envia os comandos para o míssil seguir a sua linha de visão em relação ao alvo de modo que partilhem a mesma LOS, como mostrado na figura 1.9.

Este tipo de orientação adequa-se para mísseis que realizem manobras pequenas com velocidade

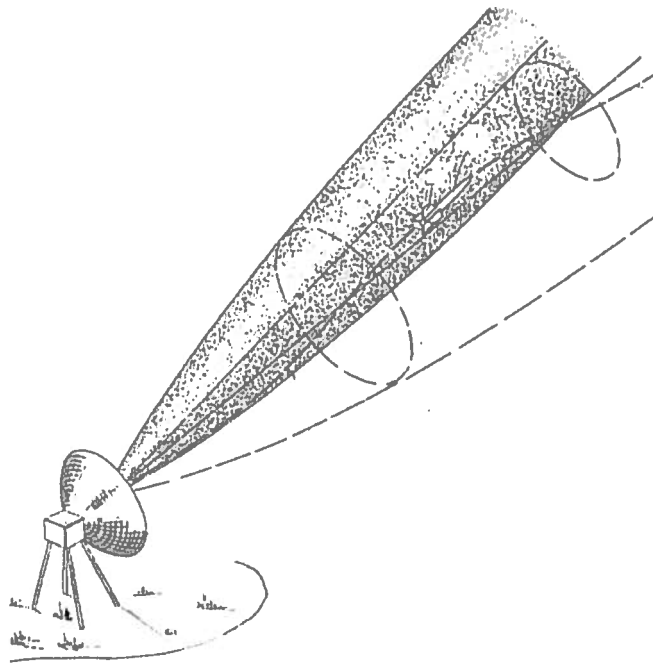


Figura 1.8: Orientação *Beam rider* [18].

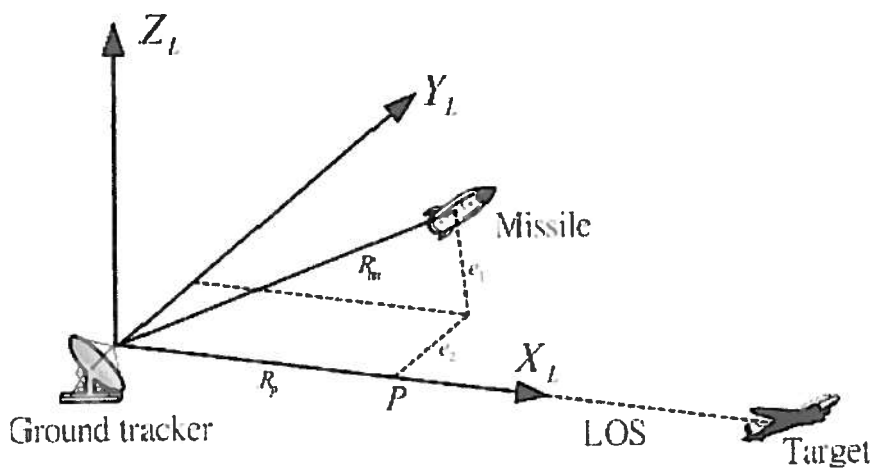


Figura 1.9: Orientação LOS [26].

moderada e para um curto alcance [55, 52].

1.2.1.3 Perseguição

Nesta secção serão apresentados em detalhe os dois métodos de navegação mais utilizados que se aplicam às técnicas de interceção acima descritas que são a perseguição e a navegação proporcional explicados nos subcapítulos um e dois, respetivamente. Na tabela 1.1 aparece de forma sucinta quais métodos de navegação que mais se adequam a cada uma das técnicas.

Tabela 1.1: Métodos de navegação usados em cada técnica de interceção [55].

Type	Methods of Navigation
Active Homing	Proportional Navigation Pure Pursuit Deviated Pursuit
Semiactive Homing	Proportional Navigation Pure Pursuit Deviated Pursuit
Passive Homing	Proportional Navigation Pure Pursuit Deviated Pursuit
Command	Any Method
Beam Rider (or CLOS)	Line-of-Sight Programmed

Perseguição direta

O conceito desta orientação é manter o míssil direcionado em relação ao alvo em todos os instantes, isto é, manter o míssil a seguir a LOS formada entre míssil e alvo a cada instante. Adequa-se para alvos que manobrem pouco e não voem com velocidades altas. Revela ser pouco sensível a ruído e apresenta fácil implementação. As suas lacunas são as seguintes: dificuldades na manobrabilidade, dificuldades em fazer com que o míssil tenha uma velocidade mais elevada que a do alvo e a atingir alvos evasivos uma vez que este tipo de orientação obriga a que os mísseis efetuem uma maior curvatura de manobra na fase terminal [52, 43, 50, 42]. Existem subcategorias deste tipo de orientação: a perseguição pura, a perseguição lead e a perseguição desviada.

- **Perseguição pura:** Neste tipo de perseguição, o míssil voa em linha reta em direção ao seu alvo de modo a colidir com o mesmo.
- **Perseguição lead:** Neste caso, a orientação prevê um ponto que o alvo irá ocupar para o intercepar. Esta condição permite que este tipo de perseguição seja mais eficiente do que a de perseguição pura, todavia manifesta os mesmos problemas de alta manobrabilidade e velocidade elevada.

Existe uma extensão desta perseguição denominada colisão *lead*. Esta prevê o ponto de colisão à frente do alvo se este continuasse em linha reta sem aceleração. Embora seja difícil o alvo se comportar nestas condições, este método requer um controlo mínimo do míssil o que se traduz num aumento de eficácia. A perseguição pura, a perseguição *lead* e a colisão *lead* encontra-se resumidas na figura 1.10 para melhor compreensão da diferença entre elas.

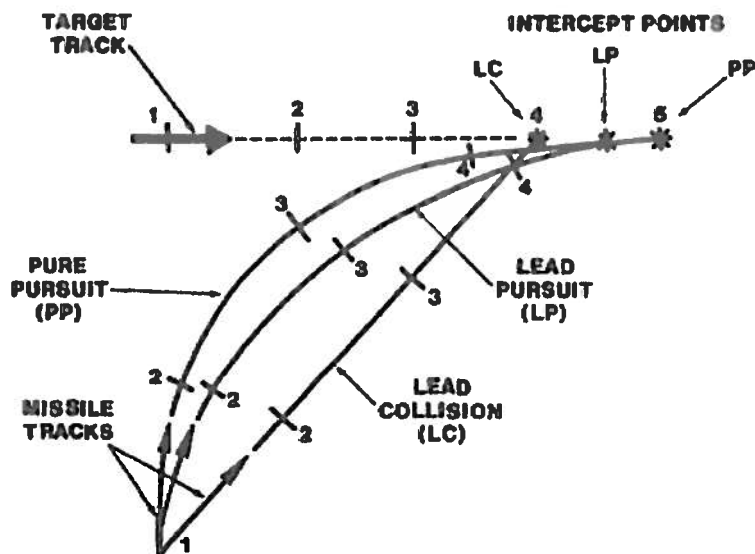


Figura 1.10: Perseguição pura, perseguição *lead* e colisão *lead* [43].

- **Perseguição desviada:** Esta perseguição é semelhante à pura com a exceção de que o míssil segue a LOS através de ângulos fixos. Teoricamente é usada para reduzir erros aleatórios. Não é, nem foi, usado para nenhum caso real em concreto devido à dificuldade de implementação do mesmo problemática exibida na figura 1.11 .

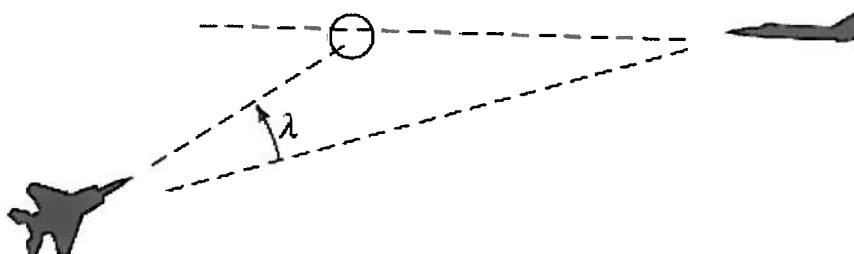


Figura 1.11: Perseguição desviada [55].

Perseguição indireta: navegação proporcional

O conceito da navegação proporcional baseia-se no princípio se dois veículos se estão a aproximar com uma velocidade relativa entre eles constante à medida que se deslocam; então eventualmente os dois veículos irão colidir. Por outras palavras, se o míssil e o alvo estão a aproximar-se e a razão de LOS formada entre eles não variar em relação ao sistema inercial considerado, irão eventualmente colidir.

Neste caso, o míssil movimenta-se numa direção calculada de forma criteriosa com velocidade constante até encontrar com o alvo. Qualquer variação na razão LOS, este método calcula os g force necessários para anular essa mesma variação. Ainda é importante referir que esses g force correspondem à aceleração que é perpendicular à LOS instântanea e proporcional à razão LOS e à velocidade de aproximação como mostra a figura 1.12 .

Daqui surge a sua lei fundamental [64]:

$$n_c = N'V_c\dot{\lambda} \quad (1.1)$$

Onde:

n_c : aceleração normal ou lateral [ft/sec²]

N' : constante de navegação (ganho escolhido pelo designer, usualmente entre 3 e 5)

V_c : velocidade de aproximação (diferença entre velocidades missil e alvo) [ft/sec]

$\dot{\lambda}$: razão da LOS [rad/sec]

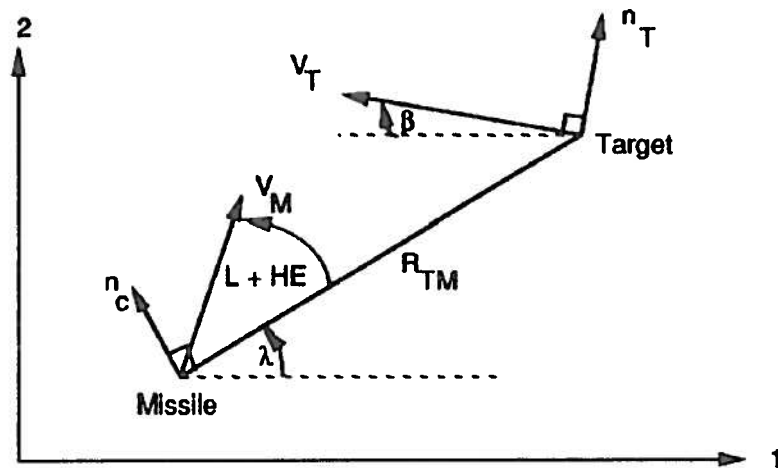


Figura 1.12: Navegação proporcional [64].

Este conceito apresenta dificuldade de implementação para casos em que o alvo apresente elevada manobrabilidade pois a navegação proporcional tem em conta a velocidade do alvo, mas não a aceleração dele.

Por outro lado, como se pode concluir esta metodologia assenta num conceito muito simples, fácil de implementar e não muito propenso a ruídos do sensor. É por isso que tem sofrido várias melhorias e aumentos e continua a ser utilizado em diversos sistemas de orientação. Caso disso é por exemplo, no caso do *homing* ativo onde produz medidas eficazes da razão de LOS e dos mísseis interceptores de aplicações com infra-vermelhos onde "estima" a velocidade de aproximação [52, 43, 64, 63].

1.2.1.4 Caraterísticas do caso de estudo

O objeto de estudo desta dissertação visa a aplicação nos seguintes campos:

- Mísseis do tipo AIM ou SAM, uma vez que a trajetória do alvo em questão é obtida através de uma trajetória de uma aeronave real, o míssil perseguidor tem de ser lançado a partir do solo ou do ar;
- Fase de voo de médio curso, pois é nesta fase que o míssil rastreia o alvo com precisão (filtragem) e define o plano de orientação para entrar em rota de colisão com o alvo;
- Qualquer tipo de técnica de interceção acima descrita pois conseguem usar métodos de navegação usados neste trabalho;

- Método de perseguição com base na perseguição direta e na LOS, pois nesta dissertação é garantido que o míssil é direcionado para o alvo em todos os instantes.

1.2.2 Enquadramento do controlo

No caso das aplicações em que se considera a perseguição direta de mísseis táticos é importante desenvolver leis de orientação que sejam eficientes a garantir o sucesso da missão, nomeadamente levar o míssil a encontrar-se com o alvo de alta manobrabilidade. Para este fim, é preciso recorrer a métodos de controlo que garantam esse sucesso.

O desenvolvimento da área de controlo surge com o início da Segunda Guerra Mundial. Tal acontecimento teve um enorme impacto na sociedade e no desenvolvimento da tecnologia em geral. Assim, no final da década de 50, a comunidade científica usufruía de um forte conhecimento na área de controlo. No seguimento do avanço nesta área de conhecimento, surgem na década de 60, devido ao trabalho desenvolvido por Kalman, importantes técnicas de controlo moderno das quais se destaca, o conceito de solução ótima aplicada ao domínio de tempo e o desenvolvimento da teoria básica acerca dos reguladores lineares quadráticos [23]. Esta teoria faz parte do controlo ótimo moderno e tem sido aplicado aos mais diversos casos [56, 24].

O controlo ótimo instiga o desenvolvimento de um controlador que ofereça uma boa performance relativamente a um critério de desempenho, isto é, levar o controlador a usar a menor quantidade de energia de modo a que a saída vá para zero. Desta forma, o conceito de ótimo é associado à minimização quadrática de energia das funções do controle de Lyapunov. Estas funções de controlo são desenvolvidas no âmbito da inovação do conceito de estabilidade de sistemas não lineares. Este conceito está associado ao ganho ou perda de energia do sistema efetuado por Lyapunov em 1897, que se encontra explicado na seguinte documentação [7].

Nos casos em que o controlo ótimo LQR conduz o sinal para um valor de referência diferente de zero, tal como o caso do LQR clássico, é feito com recurso à solução de Riccati. Mesmo para esta solução surgem os mais diversificados estudos e otimizações [45, 49, 12, 36, 37].

Na vida real, todos os sistemas apresentam incertezas que podem levar a que o desempenho do controlador não seja o melhor. Sendo assim admite-se que a robustez é uma característica desejável nos mais diversos sistemas de controlo e por isso deve ser um parâmetro sempre a ter em conta na projeção de novos controladores. Apesar do controlador LQR clássico possuir boas propriedades de robustez [24], muitas vezes não é suficiente para garantir que o objetivo seja cumprido satisfatoriamente. Neste contexto, surgem os controladores robustos com objetivo de colmatar a necessidade de contornar estas incertezas levando a que o comportamento do controlador reúna um conjunto de características, capazes de solucionar os objetivos propostos, como exemplificado em 1.13. Neste sentido, tem sido realizado ao longo do tempo um estudo intensivo nesta área sobre controlo robusto de sistemas incerto [48, 44, 62, 60, 20, 13]. Aliando esse controlo robusto ao controlo ótimo surgem outras tantas ou mais obras importantes no âmbito de rastreamento de trajetórias de veículos tais como nos seguintes estudos [16, 17, 51, 27, 57, 40].

Desta forma, para esta dissertação aplica-se o controlador robusto LQR usado em [14], no qual é usado uma metodologia desenvolvida por Artstein [3]. Este método tem tido algumas aplicações em osciladores caóticos como em [2]. Para este caso procura-se implementar este tipo de controlador no rastreamento de trajetória de um míssil e conseqüentemente verificar o seu desempenho, isto é se o sistema tem capacidade de resistir às perturbações e conseqüentemente atingir o equilíbrio.

Por último, o filtro de Kalman-Bucy provém inicialmente da terceira publicação de Kalman

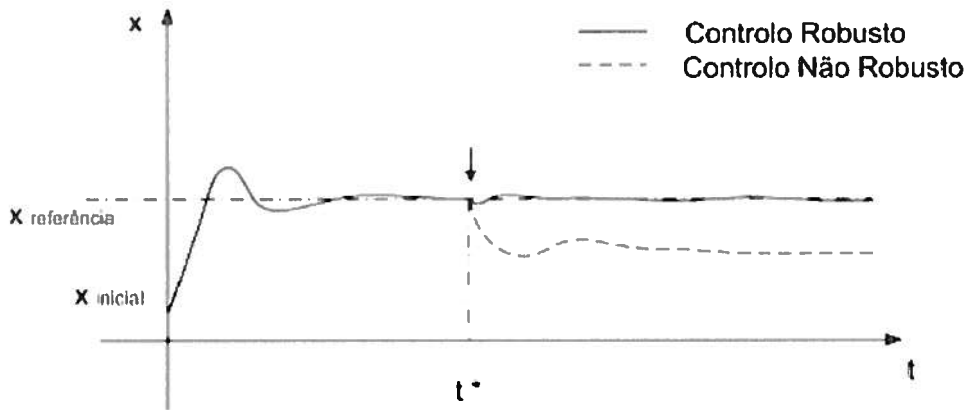


Figura 1.13: Relação entre controlo robusto e controlo não robusto[2].

acerca de filtros ótimos juntamente com a otimização matemática feita por Bucy em 1961 em [22]. Este filtro permite que através da solução de Riccati, seja possível efetuar a observação do sistema. O filtro de Kalman é composto por cinco equações, enquanto o filtro de Kalman-Bucy é composto apenas por duas. O primeiro é composto por duas fases: a fase de previsão e a fase de correção, funcionando como um sistema de realimentação, de forma a fornecer continuamente a melhor solução. Enquanto no Kalman-Bucy como se passa no domínio contínuo as duas fases fundem-se, dando origem a apenas duas expressões. No filtro de Kalman [21], as equações aparecem discretizadas, o que faz com que seja mais intuitiva a sua percepção ao separar o filtro em duas fases. Permitindo assim que a variação dos sistemas possa ser linear ou não linear; exista o recurso à álgebra linear e com isso, sistemas *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) e por fim, a lei de controlo não fica limitada apenas à avaliação de entradas e saídas uma vez que o filtro recorre ao uso de variáveis de estado que descreve a dinâmica interna do sistema. No entanto, estas características aumentam consideravelmente o tempo de processamento e a redundância, o que no setor da Aeronáutica nomeadamente da Defesa se torna desvantajoso, uma vez que o tempo de processamento e a precisão são essenciais. Já o filtro de Kalman-Bucy, é composto por duas expressões, o que faz com que o cálculo se passe no domínio contínuo, tornando-o mais simples, uma vez que não se tem previsão nem correção, diminuindo o tempo e energia gastos no seu cálculo [31].

1.3 Objetivos

Tendo em consideração todos os fatores motivadores descritos anteriormente para a execução desta temática, a investigação efetuada nesta tese tem como principais objetivos os seguintes tópicos:

- Filtrar e estimar a trajetória real de um alvo e verificar a precisão do mesmo.
- Avaliar o desempenho da trajetória de um míssil intercetor de perseguição direta com a aplicação de um controlador LQR clássico e perante a aplicação de um controlador que seja obtido deterministicamente, verificando o comportamento de ambas.
- Avaliar o desempenho da trajetória de um míssil intercetor de perseguição direta com a aplicação de um controlador LQR clássico e perante a aplicação de um controlador LQR

robusto quando o sistema estiver sujeito a perturbações, verificando o comportamento de ambas.

1.4 Estrutura da dissertação

De modo a assegurar uma boa compreensão, esta dissertação é dividida em vários capítulos. No capítulo 1, é feita uma introdução ao tema em questão. Começa-se por apresentar os argumentos que constituem a motivação do tema, seguindo de uma revisão bibliográfica na qual se efetua um elencamento dos fundamentos úteis da orientação dos mísseis interceptores e do controlo. São ainda apresentados os objetivos do trabalho.

No capítulo 2, descrevem-se as propriedades do controlo na orientação de mísseis táticos, onde se enquadra a modelação do sistema, seguidamente introduz-se o controlo ótimo LQR e, por último são apresentadas as características do controlador LQR robusto utilizado para o caso de estudo desta dissertação.

O capítulo 3, dedica-se à descrição da filtragem e estimação da posição do alvo. Para tal descrevem-se o método dos observadores, os princípios desse filtro e em último o enquadramento ao caso de estudo.

O capítulo 4 constuiu as simulações e resultados. Neste, são expostos as considerações para o estudo, os resultados obtidos e as devidas ilações retiradas dos mesmos.

O capítulo 5 é constituído pelas principais conclusões acerca desta dissertação e posteriormente apresentam-se os trabalhos futuros que poderão a vir ser desenvolvidos nesta área.

Por fim, os apêndices contêm a informação complementar à apresentada no corpo da dissertação.

Capítulo 2

Propriedades do controlo na orientação de mísseis interceptores

Neste capítulo é feito o enquadramento do controlo na orientação de mísseis táticos. Quando se utilizam os conceitos de controlo é necessário modelar os sistemas físicos de modo que matematicamente estes traduzam o comportamento que realizam. Para tal, no subcapítulo um é feita a clarificação de algumas classificações de sistemas que são utilizadas ao longo deste trabalho.

A teoria de controlo moderno constituiu um avanço à teoria clássica de controlo. A teoria clássica tem por base o estudo de modelos simples como os *Single Input Single Output* (SISO) através de ferramentas simples como as transformadas de Laplace e por sua vez a análise dos sistemas dinâmicos tem por base uma resposta frequencial. Ao passo que a teoria moderna de controlo visa o estudo de modelos mais complexos os MIMO, este baseia-se na definição de um objetivo e na verificação do controlador que melhor se adequa a esse fim com base na análise das variáveis de estado. Este estudo apresenta dois meios de resolução: controlo em malha aberta ou controlo em malha fechada (realimentação ou *feedback*). No primeiro caso, o controlador depende apenas do tempo e não do estado, o que faz com que o sistema se sujeite ao controlo inicial, negando a hipótese do utilizador efetuar correções de perturbações inesperadas e/ou imprevistas. No segundo caso, existe a conservação da unicidade das soluções, ou seja cada condição inicial deverá ser pelo menos localmente integrável e limitada pelas restrições impostas ao problema de controlo, fazendo com que seja possível corrigir uma parte das perturbações e incertezas [59]. Conferindo-lhe assim melhores características para a temática a ser desenvolvida.

O subcapítulo dois introduz a teoria de estabilidade de Lyapunov que descreve uma forma de determinar a estabilidade de um conjunto de equações diferenciais ordinárias utilizando desigualdades matriciais lineares. Esta teoria constitui um marco pioneiro neste ramo mas mantém-se contemporânea e como tal fundamenta muito dos conceitos que surgem nos subcapítulos posteriores. Devido à importância que contempla, os conceitos básicos desta temática encontram-se devidamente explicados nesta secção da estrutura deste capítulo.

Uma das teorias que mais tem sido desenvolvida para lidar com problemas de incertezas e perturbações é a teoria do controlo ótimo. No caso deste trabalho pela facilidade de implementação e análise foi escolhida a controlo ótimo dos controladores LQR que se encontra desenvolvida no subcapítulo três.

Neste contexto aparece também o controlo robusto que visa estabelecer um controlo rigoroso até nas pequenas perturbações, isto é, um ramo da teoria de controlo que trata das incertezas entre o modelo nominal e o real. O subcapítulo quatro propõe a descrição do controlo robusto aplicada a reguladores lineares quadráticos.

2.1 Modelação do sistema

A modelação matemática de problemas físicos tem por base o uso de sistemas. Existem vários tipos de classificações de sistemas contudo serão descritos três tipos de classificações fundamentais neste trabalho que dizem respeito à linearidade, variação e continuidade no tempo. Relativamente à linearidade, os sistemas dividem-se em lineares e não-lineares. De um ponto de vista físico, estes diferem pelo facto de que os primeiros usam o princípio da sobreposição de efeitos, figura 2.1, ou por outras palavras, *a resposta do sistema a uma dada entrada não é afetada pela presença simultânea de outras entradas* [65], e por este motivo pode ser modelado através de equações lineares, enquanto que nos segundos não se aplica o princípio da sobreposição e dessa forma, existe o aparecimento de novas frequências no sinal de saída que não existem no sinal de entrada. Embora os sistemas não lineares sejam mais completos no que respeita à integridade dos fenómenos dinâmicos, os sistemas lineares apresentam uma maior utilização, uma vez que grande parte dos fenómenos físicos conseguem ser descritos por comportamentos lineares nos seus pontos de operação. Existe um grande número de soluções numéricas já desenvolvidas para este caso. Nos casos em que não existam essas soluções é possível obter, facilmente, as soluções numéricas com alguns limites de precisão. Para os sistemas lineares acrescenta-se à sua vasta utilização o uso para descrever partes de sistemas não-lineares cuja solução não é analítica [46].

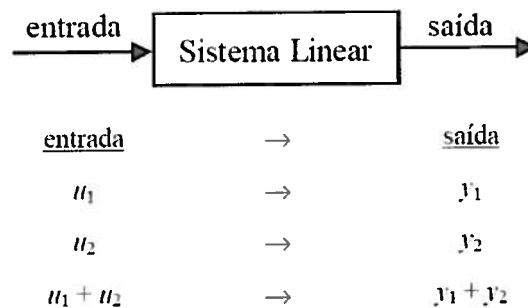


Figura 2.1: Sistema linear com condição inicial nula [65].

A segunda categoria acima referida distingue sistemas variantes ou invariantes no tempo. A diferença entre eles, tal como o nome indica, nos sistemas invariantes os parâmetros mantêm-se constantes com o decorrer do tempo, ficando o regime permanente com uma dinâmica estacionária, ao passo que nos sistemas variantes no tempo acontece o oposto. Na verdade não existem sistemas invariantes no tempo, utiliza-se este conceito, em sistemas em que a variação é lenta, para simplificação matemática [11].

No caso da continuidade dos sistemas em relação ao tempo, podem categorizar-se três tipos de sistemas: os contínuos, os discretos e os discretizados. Os sistemas contínuos apresentam sinais definidos ou especificados numa faixa de valores contínua de tempo enquanto que os sistemas discretos são definidos apenas para determinados instantes de tempo [53]. Por fim, os sistemas discretizados correspondem aos sistemas que são tornados discretos a partir de sistemas contínuos [11].

Desta forma, para o estudo de orientação de míssil tático com base nos conceitos de LQR para simplificação matemática opta-se pelo sistema linear invariante e contínuo. Como tal, para o caso da dinâmica de tempo contínuo pode ser representada por um espaço de estados, onde a

primeira equação diz respeito à equação de estado do sistema e à segunda a equação de saída do mesmo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde:

- $x \in \mathbb{R}^n$ e corresponde ao vetor de estado
- $y \in \mathbb{R}^q$ e corresponde ao vetor de saída do sistema
- $u \in \mathbb{R}^p$ e corresponde ao vetor de controlo
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e corresponde à matriz de estado
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e corresponde à matriz de controlo (ou matriz de entrada)
- $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e corresponde à matriz de saída

2.2 Teoria da estabilidade de Lyapunov

A estabilidade é uma das propriedades mais importante de um sistema. A forma de averiguar a estabilidade de um sistema passa por conhecer os seus valores próprios. Considera-se que um sistema dinâmico *Linear de Tempo Invariante* (LTI) do tipo $\dot{x} = Ax$ é estável se todos os valores próprios da matriz de estado A apresentarem partes reais negativas, isto é, estarem localizados no semi-plano à esquerda do eixo imaginário.

Esta propriedade revela ser muito importante na análise de sistemas e é possível distingui-la em duas categorias: estabilidade simples e assintótica. A diferença entre estas reside no facto que a última referida garante que o sistema retoma completamente para o equilíbrio mais cedo ou mais tarde, enquanto que a estabilidade simples assegura que o sistema fica na vizinhança do equilíbrio, não implicando necessariamente que o atinja a longo prazo. Além do mais, a estabilidade assintótica implica a estabilidade simples [15].

A estabilidade pode ser estudada com base na teoria de controlo de Lyapunov. Um sistema LTI tal como o supramencionado é assintoticamente estável se e só se $\exists P = P^T > 0$ no caso contínuo se verificar $A^T P + PA < 0$ e no caso discreto $A^T P - PA < 0$.

Seja $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com valores escalares tal que:

- $V(x)$ é dita positivamente definida se: $\forall x \neq 0, V(x) > 0$ e $V(x) = 0$ para $x = 0$;
- $V(x)$ é positivamente semidefinida se: $\forall x \neq 0, V(x) \geq 0$ e $V(x) = 0$ para $x = 0$;
- $V(x)$ é dita negativamente definida se: $\forall x \neq 0, V(x) < 0$ e $V(x) = 0$ para $x = 0$;
- $V(x)$ é negativamente semidefinida se: $\forall x \neq 0, V(x) \leq 0$ e $V(x) = 0$ para $x = 0$.

Desta maneira, o gradiente de $V(x)$ em $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ é dado por:

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right)^T \quad (2.2)$$

A derivada de $V(x)$ em relação ao tempo ao longo da trajetória é definida por:

$$\dot{V}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \quad (2.3)$$

$$= (\nabla V(x))^T \dot{x} \quad (2.4)$$

Tendo em conta o acima enunciado a estabilidade simples de Lyapunov assenta no seguinte teorema, "um sistema é estável na vizinhança de um ponto de equilíbrio x^* se existir uma função escalar $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- $V(x)$ é contínua e possui primeiras derivadas parciais contínuas numa vizinhança Ω de x^* ;
- $V(x)$ é positivamente definida em Ω , isto é: $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}, V(x) > 0$ e $V(x^*) = 0$;
- $\dot{V}(x)$ é negativamente semidefinida em Ω , isto é: $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}$ e $\dot{V}(x) \leq 0$." [8]

Por sua vez, a estabilidade assintótica de Lyapunov surge com a substituição da semidefinição negativa, na última condição de cima, pela definição negativa e por isso o teorema enuncia "um sistema é assintoticamente estável na vizinhança de um ponto de equilíbrio x^* se existir uma função escalar $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- $V(x)$ é contínua e possui primeiras derivadas parciais contínuas numa vizinhança Ω de x^* ;
- $V(x)$ é positivamente definida em Ω , isto é: $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}, V(x) > 0$ e $V(x^*) = 0$;
- $\dot{V}(x)$ é negativamente definida em Ω , isto é: $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}$ e $\dot{V}(x) < 0$."

Os dois teoremas possibilitam analisar a estabilidade assintótica local de um sistema. Caso se pretenda analisar a estabilidade global do mesmo relativamente a um ponto de equilíbrio, x^* , é necessário substituir o domínio Ω por todo o espaço \mathbb{R}^n .

Uma função de Lyapunov adequada significa que o sistema é estável. Contudo não encontrar uma tal função não implica que o sistema seja instável. O seguinte teorema explicita esta condição: "um sistema é instável num domínio Ω em torno do ponto de equilíbrio x^* se existir uma função escalar $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nas seguintes condições:

- $\forall x \in \Omega \setminus \{x^*\}, V(x) > 0$ e $V(x^*) = 0$, $V(x)$ é contínua e possui derivadas parciais contínuas no domínio Ω ;
- $\dot{V}(x)$ é positivamente definida no domínio Ω ." [8]

2.3 Controlo ótimo LQR

O controlo ótimo de trajetórias abrange a estabilização do estado, regulação e controlo da saída de um sistema e para tal, tem como objectivo encontrar o controlo que permita maximizar ou minimizar um critério que constitui o problema de otimização fundamental do distúrbio. Para este caso, é necessário definir cuidadosamente um critério de desempenho ou custo, J , de modo a garantir que o sistema se comporte devidamente. E consequentemente encontrar soluções u , que satisfaçam as condições inerentes, [56], isto é,

$$\begin{aligned} & \min_{u(t)} J(x(t), u(t)) \\ \text{s.a. : } & \dot{x}(t) = Ax + Bu \quad (2.5) \\ & x(0) = x_0 \end{aligned}$$

As soluções, podem ser calculadas deterministicamente ou por meio de alguns métodos desenvolvidos para uma certa classe de problemas [58].

No âmbito desta dissertação, a otimização é destinada ao LQR. Esta escolha baseou-se na facilidade de implementação e análise das leis de controlo devido ao longo processo de estudo que tem sido feito nesta área.

Para este caso em específico têm sido desenvolvidas diferentes aproximações, em que todas elas admitem que o aparecimento da lei de controlo em circuito fechado encontra-se intrinsecamente relacionado com o aparecimento da equação de Riccati. Antes de se utilizar esta equação, existem três condições que é necessário verificar antecipadamente, são elas: o par (A,B) deve ser estabilizável, isto é, os modos instáveis são controláveis e os modos controláveis são estáveis; a solução é sempre maior que zero; a matriz Q deve ser sempre maior ou igual a zero e fatorizável; e por último o par (A,C) deve ser detetável, ou seja, os modos instáveis são observáveis e os modos não observáveis são estáveis. Se cumpridas estas condições o uso da equação de Riccati é possível e válido [37, 45, 36]. A sua forma algébrica é dada por:

$$A^T + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.6)$$

Neste caso, pretende-se então, minimizar um índice de desempenho quadrático, *Quadratic Performance Index* (QPI). O QPI permite que o controlador possua a capacidade de usar separadamente os sistemas de desempenho de estimação e o de controlo ótimo. Então o QPI está associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controlo:

$$\begin{aligned} x(t) : [0, \infty] &\mapsto \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^n x_i(t)^2 dt &\quad (2.7) \\ &= \int_0^{\infty} x(t)'x(t)dt \end{aligned}$$

Baseado no controlo LQR ótimo, foram definidos dois critérios de performance para o sistema 2.1: um para ser usado uma solução desenvolvida por métodos matemáticos e posterior aplicação da robustificação do controlo; o outro critério é estabelecido para que a solução que o minimiza seja encontrada de forma determinística. Por forma a assegurar o bom entendimento destes casos seguem-se dois subcapítulos que detalhadamente referem o procedimento para ambos os critérios [56].

2.3.1 Propriedades do controlador LQR clássico

Para o primeiro caso, o compromisso entre as energias de estado e controlo traduz-se pelo seguinte QPI:

$$J = \min_u \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt \quad (2.8)$$

A matriz Q é matriz de ponderação para variáveis de estado, simétrica e semi-definida positivamente. A matriz R é matriz ponderação do controlo, simétrica e também definida positivamente. O peso atribuído a estas matrizes deve ser selecionado cuidadosamente pois estas estabelecem os limites de utilização do controlador. Neste contexto, surge o método de Bryson,

onde cada matriz é calculada relativamente à sua amplitude máxima de estado e controlo [32], respetivamente:

$$\begin{aligned} Q_{ii} &= 1/x_{i,max}^2 \\ R_{ii} &= 1/u_{i,max}^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

A limitação deste método reside na dificuldade em determinar os valores máximos de estado pois dependem dos limites de controlo dados pelas propriedades físicas máximas das superfícies de controlo. Ainda assim é muito usado como base de partida para processo de iteração de tentativa e erro para alcançar os valores satisfatórios de controlo.

Na tentativa de otimizar este método surgiu outro desenvolvido por Jia Luo e C. Edward [30], que consiste em calcular a matriz R com base no método anterior e a matriz Q é determinada na sua forma ideal. Para tal, recorre-se à minimização do QPI, J com o uso da matriz Hamiltoniana, H que por sua vez determina o valor de P através LQR. A matriz Hamiltoniana é representada por:

$$H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \equiv \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Para se obter a matriz Q, calcula-se os valores próprios da matriz Hamiltoniana. Estes são simetricamente distribuídos ao longo do eixo imaginário, tendo partes reais positivas e negativas simétricas. Assim a matriz Q é definida por uma diagonal composta pelo vetor $q_i = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Essa diagonal surge de uma otimização dos valores próprios da matriz Hamiltoniana, que consiste em escolher os valores que permitem um melhor desempenho, ou seja, os valores próprios que minimizem a equação seguidamente apresentada:

$$f_i(q_i) = \det(\lambda, I - H(q_i)) = 0 \quad (2.11)$$

De forma a obter os melhores resultados, este método admite que se os valores que minimizem a equação 2.11 forem negativos devem ser utilizados em valor absoluto ou o quadrado do valor dos mesmo. Os valores próprios têm de ser valores positivos, para que as matrizes Q e R sejam positivas de tal modo que $x^T Q x$ e $u^T R u$ sejam também positivos.

Com o intuito de chegar à solução de controlo que minimiza o custo definido em 2.8, é preciso parametrizar o vetor de controlo como uma função linear do vetor de estado, isto é:

$$u = -Kx \quad (2.12)$$

Assim o dimensionamento do controlador resume-se em determinar a matriz K, de m linhas e n colunas, que melhor se ajuste às necessidades de custo mínimo. Deste modo, substituindo a equação de controlo 4.6 no sistema 2.1 obtém-se o sistema otimizado:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.13)$$

Depois de definidos os valores das matrizes Q e R e a parametrização do controlo u, é necessário encontrar uma função de Lyapunov, V de acordo com o explanado em ?? , para o sistema de malha fechada sob a forma:

$$V(x) = x^T P x \quad (2.14)$$

Sendo que P é a solução de Riccati referida em 2.6 e corresponde a uma matriz simétrica positivamente definida. Neste caso, a derivada no tempo da função de *Lyapunov* deve ser igual à oposta da função 2.8:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^T P x) = -x^T (Q + K^T R K) x \quad (2.15)$$

Sabendo também que:

$$\frac{d}{dt}(x^T P x) = -\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (2.16)$$

Igualando os resultados de 2.15 e 2.16 e substituindo \dot{x} na sua forma 2.13 obtém-se:

$$x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x = -x^T (Q + K^T R K) x \quad (2.17)$$

Desenvolvendo-se a equação 2.17, para que o sistema seja estável, a matriz K tem de satisfazer a seguinte equação:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (2.18)$$

Assim a solução desta equação acima toma seguinte formato:

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.19)$$

Então, o controlo referido em 4.6 corresponde a :

$$u = -R^{-1} B^T P x \quad (2.20)$$

A lei de controlo dada em 4.6, significa que o sistema estabiliza em torno de zero. Uma vez que não se pretende que estabilize para origem do referencial mas sim para um estado e controlo de referência (x_{ref}, u_{ref}) a lei de controlo equivalente é:

$$u = u_{ref} - K(x - x_{ref}) \quad (2.21)$$

2.3.2 Propriedades do controlador obtido deterministicamente

Neste caso, mantém-se a ideologia de encontrar um valor de controlo, u que minimize um critério de desempenho quadrático, J , que para esta situação foi baseado nos conceitos de RHC para esta situação específica [61] e como tal apresenta o seguinte formato:

$$\begin{aligned} J(u) &= \dot{V}(x - x_{ref}) + (u - u_{ref})^T W (u - u_{ref}) \\ \text{s.a. } \dot{x} &= Ax + Bu \quad (2.22) \\ u_{min} &\leq u \leq u_{max} \end{aligned}$$

Neste caso, a derivada de equação de *Lyapunov* segue o mesmo formato que da expressão 2.16. Assim substituindo o valor de \dot{x} de 2.22 e com algum desenvolvimento matemático obtém-se:

$$\dot{V}(x - x_{ref}) = \dot{x}^T A^T P x - \dot{x}^T A^T P x_{ref} + u^T B^T P x - u^T B^T P x_{ref} + x^T P (Ax + Bu) - x_{ref}^T P (Ax + Bu) \quad (2.23)$$

Sendo que a soma das quatro primeiras parcelas é constante, fica denominada por φ e por isso 2.23 resulta na seguinte forma:

$$\dot{V}(x - x_{ref}) = 2(x - x_{ref})^T P B u + \varphi \quad (2.24)$$

Substituindo 2.24 em 2.22 e com auxílio de simplificações matemáticas, o critério a ser minimizado na sua forma simplificada é igual a:

$$J(u) = u^T W u + 2((x - x_{ref})^T P B - u_{ref}^T W) u + \varphi \quad (2.25)$$

Desta forma, para encontrar analiticamente o controlo u que satisfaz 2.22 basta aplicar por exemplo o método da programação linear que é descrito em apêndice.

2.4 Propriedades do controlador LQR robusto

O problema essencial na conceção de sistemas de controlo robusto reside na capacidade do mesmo alcançar um bom desempenho na presença de incertezas e/ou perturbações. O desenvolvimento de controlo robusto surge pela necessidade de desenvolver uma metodologia de projeto de controlador consistente atendendo a um ambiente incerto. A modelação do controlo robusto varia consoante o tipo de incerteza (perturbações estruturadas e não estruturadas) bem como o tipo de problema a que se quer aplicar. As incertezas estruturadas apresentam um modelo estruturado, isto é, a incerteza tem uma estrutura que é possível saber como se comporta ao longo do tempo, sendo então um tipo de incerteza que reside apenas nos valores numéricos dos seus parâmetros. Ao passo que as incertezas não estruturadas não apresentam um modelo/estrutura pois não se sabe a fonte do erro e como tal apenas é representado o efeito final do erro [1].

Assim, um sistema está sob ação de um controlador robusto se cumprir um conjunto de premissas [2], sendo elas as seguintes:

- O sistema é capaz de resistir às perturbações e desempenhar satisfatoriamente a função para qual foi desenvolvido;
- O controlo atinge o equilíbrio mesmo em caso de perturbações;
- Caso o sistema 2.1 passar a ter incertezas e por isso ficar a ser $\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u$ em que $\|A - \bar{A}\| \leq \eta_1$ e $\|B - \bar{B}\| \leq \eta_2$. O controlo considera-se robusto se este conseguir retomar o objetivo pretendido sem ter o modelo exato ou preciso do sistema.

E por conseguinte, o sistema 2.1 quando sujeito a perturbações passa a ser :

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u \quad (2.26)$$

Então, tendo em conta o cumprimento de todas estas características, neste estudo, é aplicado um controlo ótimo robusto baseado na linearização ótima feita no subcapítulo 2.3 referente ao caso um. Desta forma, recorreu-se ao método de Artstein [3], de modo a garantir que independentemente do sinal de entrada, o sinal de saída é controlado e estabilizado tal como desenvolvido [14]. Em suma, afere-se que o controlador robusto passa a apresentar a seguinte

estrutura:

$$u = -R^{-1}B^T(P(x - x_{ref}(t)) + r) \quad (2.27)$$

Em que:

$$\begin{aligned} r &= -(A^T - PBR^{-1}B^T)^{-1}Pz \\ z &= -Ax_{ref}(t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Capítulo 3

Filtragem e estimação da posição do alvo

Existem vários fatores externos que influenciam o comportamento do míssil, sendo que a informação da posição do alvo o fator mais determinante. Para assegurar uma orientação rigorosa e eficaz do míssil até ao ponto de colisão, é preciso detetar, identificar e rastrear o alvo, com elevada precisão.

No caso de se assumir que um modelo de rastreamento não possui incerteza, o sistema toma o nome de observação, surgindo daqui o Método dos Observadores. Este permite prever e estimar o estado de um sistema sem incertezas e será explicado na íntegra no subcapítulo um.

Contudo, uma vez que nas aplicações de sistemas dinâmicos e de controlo, os sensores apresentam algum tipo de ruído ou incerteza e por vezes, alguma incapacidade de fazer leituras de determinados estados, para assegurar que o objetivo da missão é alcançado, a modelação do sistema ao longo do tempo requer, portanto, o uso de um filtro. Neste caso, a escolha recai sobre o filtro de Kalman-Bucy por revelar precisão elevada e um tempo de processamento reduzido, este conteúdo será desenvolvido no subcapítulo dois [28].

3.1 Método dos Observadores

As condições necessárias e suficientes para se poder estimar o vetor de estado de um sistema com base nos valores do vetor de saída do sistema são controlabilidade e observabilidade [54]. A primeira propriedade referida resume-se a se o estado inicial pode ser ou não observado (obtido) a partir da entrada e da saída do sistema, ou seja, "um sistema é observável se os valores do valores do vetor de observação (saída) nos tempos, $t^*, t^* + \Delta t, \dots, t^* + h\Delta$, (com n maior ou igual a um, Δt sendo o passo de observação), permitem ter uma estimativa fiável do valor do vetor de estado no tempo t^* " [31]. Já que a segunda propriedade tem por base "um sistema é de estado controlável se se pode guiar o sistema para ir de um qualquer estado até atingir um outro (qualquer) estado dentro de um prazo finito" [31].

Assim, num determinado sistema é possível calcular os estados com o conhecimento das observações, isto é, a solução para todos os pontos os pontos do sistemas, caso se verifique a controlabilidade e observabilidade do mesmo [34]. Existem métodos desenvolvidos por Kalman, que permitem verificar a observabilidade e controlabilidade para sistemas lineares do tipo mencionados em 2.1.

Para se proceder à verificação de observabilidade de um sistema começa-se pela construção da matriz de observabilidade a partir dos estados A e C , com ordem igual à dimensão n da matriz A e C :

$$\theta = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad (3.1)$$

O sistema é observável se a ordem da matriz de observabilidade for igual à dimensão n da

matriz A:

$$\text{ordem}(\theta) = n \quad (3.2)$$

Analogamente ao método anteriormente utilizado, para a verificação da controlabilidade inicia-se pela construção da matriz controlabilidade Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

De modo semelhante, a condição de controlabilidade é assegurada, caso a ordem da matriz Δ seja igual à dimensão n da matriz A :

$$\text{ordem}(\Delta) = n \quad (3.4)$$

A verificação destas características num sistema é uma condição fundamental para projetar qualquer tipo de controlador no espaço primal ou dual (segundo caso). Para clarificação desta afirmação segue-se a formulação teorema da dualidade de Kalman. Considerando um sistema num espaço primal E :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3.5)$$

Sendo:

x o vetor de estado
 u o vetor de controlo

O sistema equivalente no espaço dual E^*

$$\begin{cases} \dot{z} = A^*z + C^*v \\ w = B^*z + D^*v \end{cases} \quad (3.6)$$

Sendo:

z o vetor de estado no espaço dual
 v o vetor de controlo no espaço dual
 w o vetor de observação no espaço dual

A^*, B^*, C^* e D^* são as transpostas conjugadas das matrizes correspondentes

Sendo o sistema no espaço primal (Σ) e o sistema no espaço dual (Σ^*), o teorema da dualidade de Kalman enuncia:

$$\begin{aligned} (\Sigma) \text{ é controlável, se e só se } (\Sigma^*) \text{ é observável} \\ (\Sigma) \text{ é observável, se e só se } (\Sigma^*) \text{ é controlável} \end{aligned}$$

Assim este teorema significa que todo o sistema observável no seu estado primal é controlável no respetivo estado dual e que todo sistema controlável no seu estado primal é observável no respetivo estado dual, e vice-versa.

Em relação a este teorema é preciso fazer uma ressalva que pretende evitar uma incorreta interpretação do mesmo: este teorema não garante que um sistema controlável é observável e/ou que um sistema observável é controlável. Deste modo, o Método das Observações permite estimar o estado de um sistema sem incertezas associadas ($\eta=0$ e $\xi=0$). Assim sendo, \hat{x} diz

respeito à estimativa do vetor de estado x e por isso o erro de estimação é:

$$e_x = x - \hat{x} \quad (3.7)$$

A respectiva derivada do erro:

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - A\hat{x} = A(x - \hat{x}) = Ae_x \quad (3.8)$$

Pelos mesmos motivos, tendo em conta que:

$$e_y = y - C\hat{x} \quad (3.9)$$

Aplicando 3.7, a equação do erro da previsão da observação, fica:

$$e_y = Ce_x \quad (3.10)$$

As equações correspondentes no espaço dual das equações 3.8 e 3.10 são as seguintes:

$$\dot{e}_x^d = A^* e_x^d + C^* v \quad (3.11)$$

$$e_y^d = 0 \quad (3.12)$$

Das equações 3.11 e 3.12 conclui-se que a analogia entre o espaço primal e o espaço dual resulta do erro primal se estabilizar em zero, se e só se, o erro dual correspondente igualmente se estabilizar em zero. Surge daqui a necessidade de encontrar um controlador que estabilize o erro dual para zero, adequado à dinâmica do erro nesse espaço. Assim a equação do erro no espaço dual tendo em conta o uso de controlador pode expressar-se em:

$$\dot{e}_x^d = (A^* - C^* L^*) e_x^d = (A - LC)^* e_x^d \quad (3.13)$$

Sendo que $L^*=K$ corresponde ao ganho de um controlador LQR que estabiliza o sistema, como descrito no capítulo 3. Nesta situação, para o sistema em malha fechada com controlo $v = -L^* e_x^d$ que estabilize o erro dual para zero, a teoria dos controladores LQR ensina que ganho tem de ser respetivamente:

$$L^* = R^{-1} C P \quad (3.14)$$

Sendo P a solução de Riccati também enunciada nesse mesmo capítulo.

Assim, tendo em conta toda explicação anterior a correspondência no espaço primal é portanto:

$$\dot{e}_x = (A - LC) e_x^d \quad (3.15)$$

E de igual forma,

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \quad (3.16)$$

Tendo em conta 3.8, a equação do observador que permite estimar o vetor de estado é

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) \quad (3.17)$$

3.2 Filtragem de Kalman-Bucy

O filtro de Kalman utiliza-se para os casos em que não se pode desprezar as incertezas ou ruídos no modelo e/ou observações, ou seja, $\eta \neq 0$ e $\xi \neq 0$. Assume-se que estes apresentam distribuições Gaussianas e são ruídos brancos, ou seja, têm médias nulas e cada um tem valores descorrelacionados ao longo do tempo, respetivamente.

Este filtro surgiu com intuito de complementar as falhas do Método dos Observadores e da necessidade de haver um método que não utilizasse valores de ruído com distribuição conhecida, pois em situações como desta dissertação nem sempre se sabe o tipo de perturbação do sistema. Deste jeito, o mesmo é capaz de prever as matrizes de covariância, sem que estas tenham significado probabilístico e que seja robusto ao ponto de anular os ruídos [31].

Para melhor explicação do tema consideremos um sistema semelhante ao 2.1 com incertezas associadas:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \eta(t) \\ y = Cx + \xi(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

É importante referir que vetor de observação y é conhecido enquanto que vetor de estado x não. Este método acrescenta dois pormenores ao anteriormente descrito: a solução da equação de Riccati é diferencial e as matrizes Q e R serem, respetivamente:

$$Q = E(\eta\eta^T) \quad (3.19)$$

$$R = E(\xi\xi^T) \quad (3.20)$$

Para finalizar, salientam-se ainda algumas das vantagens de utilização deste filtro. Uma delas, ser um método que une as duas fases (previsão e estimação) o que possibilita que os cálculos se passem no domínio contínuo e com isto seja filtro facilmente implementável; implica gastos de tempo e energia diminutos. Adicionalmente não faz uso de uma distribuição probabilística específica e devido aos cálculos serem elaborados no espaço dual permite a obtenção de estimativas no espaço primal sem gastos de energia [22, 33].

3.3 Aplicação ao caso de estudo

Neste caso de estudo, é importante ter em atenção as seguintes condições:

- A trajetória do alvo é real e portanto, as incertezas e/ou perturbações são intrínsecas aos dados utilizados;
- As matrizes A e B foram obtidas a partir de modelagem com base na experiência;
- As matrizes Q e R foram obtidas a partir de incertezas reais dos sensores;

- As variáveis de estado são referentes à posição e à velocidade do alvo no espaço tridimensional;
- As variáveis de controlo são referentes à aceleração do alvo no espaço tridimensional.

Capítulo 4

Simulações e resultados

Este capítulo destina-se à exposição das simulações e resultados obtidos desta dissertação bem como a análise aprofundada dos mesmos. De forma a facilitar a leitura e compreensão das temáticas abordadas, este capítulo é dividido em alguns subcapítulos. Acrescenta-se ainda que os todos resultados apresentados são obtidos com recurso ao programa Matlab[®]. Sobreleva-se que todas as simulações obtidas foram conseguidas com recurso ao algoritmo de Butcher. Devido à elevada utilização do mesmo neste trabalho é apresentada a sua formulação no apêndice A

No subcapítulo um são apresentados os resultados referentes ao caso de controlador LQR clássico e um controlador obtido deterministicamente referidos no capítulo 3. Nesta secção são apresentados os resultados de cada um e é feita uma análise comparativa dos métodos. Neste caso em particular é usado os conceitos de programação linear que se encontram descritos no apêndice A.

De igual modo, no subcapítulo dois são apresentados os resultados e análises comparativas dos controlador LQR clássico e robusto.

Por último, são apresentados os resultados obtidos da filtragem de Kalman-Bucy aplicada à trajetória do alvo. A trajetória do alvo filtrada é usada para os resultados dos subcapítulos um e dois. De facto, este constitui o primeiro passo de simulação. Contudo este subcapítulo aparece em último lugar de modo a respeitar a ordem em que esta dissertação está estruturada.

4.1 Comparação entre controlador LQR clássico e controlador obtido deterministicamente

Antes de se apresentar os resultados correspondentes a cada trajetória originada a partir do estudo do capítulo 2, no qual se pretende minimizar os critérios de desempenho 2.8 e 2.22 através de um controlador LQR clássico e um controlador obtido deterministicamente, estabelecem-se algumas condições comuns a ambos os casos.

O sistema que descreve o movimento do míssil corresponde ao sistema 2.1 em que o estado (x) correspondem às posições e velocidades em cada uma das orientações de um espaço tridimensional e o controlo (u) corresponde à aceleração do míssil nessas mesmas três componentes direcionais, isto é, :

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z & v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T \\ u &= \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.1)$$

Por sua vez, as matrizes A, B e C são contruídas com base no modelo do caso em questão e, por

isso, resultam no seguinte ([47]):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A utilização destas matrizes só é válida pois os critérios de controlabilidade e observabilidade descritos no capítulo 3 são assegurados, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{rank}(\text{ctrb}(A, B)) &= \text{rank}([BABA^2B \dots A^{n-1}B]) = 6 = n \\ \text{rank}(\text{obsv}(A, C)) &= \text{rank}([CCACA^2 \dots CA^{n-1}]) = 6 = n \end{aligned} \quad (4.3)$$

As matrizes de ponderação de estados e de controlo, Q e R são definidas com base na explicação no subcapítulo 2.3.1 e após se efetuar os devidos cálculos, as matrizes de ponderação apresentam os seguintes resultados:

$$Q = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Ainda comum a ambos os processos, é a obtenção da solução de Riccati descrita em 2.6. Tal só é possível, a partir dos comandos de Matlab®, *lqr(A,B,Q,R)* ou *care(A,B,Q,R)*. Estes comandos além de determinarem a solução Riccati também devolvem a matriz de ganho e os valores próprios correspondentes a esta.

Nestas circunstâncias, uma das restrições à atuação do míssil é a limitação em termos de controlo, ou por outras palavras, as acelerações mínimas e máximas em cada um dos eixos tridi-

mensionais em que o míssil pode atuar. Esta limitação, faz com que o míssil tenha tendência a efetuar manobras para evitar entrar em perda. De modo a garantir a veracidade do caso de estudo são usados como valores limites, os valores de aceleração de um míssil ar-ar, avançado de médio e curto alcance e possui capacidade de quarenta g force com um número de Mach igual a quatro (velocidade de aproximadamente de mil e quatrocentos metros por segundo).

A condição inicial imposta ao míssil corresponde a outro dos aspetos que mais influencia o seu comportamento, uma vez que quando lançado de uma posição muito distante em relação ao alvo apresenta mais dificuldades em alcançá-lo. Visto que neste caso é desenvolvido para possuir as características de perseguição direta, isto é, seguir a posição do alvo a cada instante.

Com o intuito de elucidar o supradito, são apresentados os resultados obtidos em termos de trajetória tridimensional do alvo e do míssil, que podem ser analisados nas figuras 4.1, 4.2, 4.3e 4.4. Estas figuras são relativas à aplicação de um controlador LQR clássico e ao cenário onde se determina o valor do controlador. Estes resultados tem por base o uso das mesmas condições iniciais impostas ao míssil para os dois casos durante 120 segundos, sendo que a representação gráfica apresentada apenas descreve as trajetórias do alvo e do míssil até se realizar o encontro entre ambos. Encontro esse com uma duração para o caso de controlador LQR clássico e controlador obtido deterministicamente de aproximadamente: 4 e 6 segundos nas figuras 4.1, 9 e 75 segundos na figura 4.2, 8 e 22 segundos na figura 4.3 e 10 e 25 segundos na figura 4.4, respetivamente. As condições iniciais selecionadas são apresentadas na seguinte ordem: $x_0=[0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $x_0=[0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $x_0=[0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e $x_0=[500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Por análise dos gráficos, pode-se concluir que a performance em termos de distância percorrida, o controlador LQR clássico é melhor dado que exhibe trajetórias mais diretas ao alvo nas diferentes condições iniciais comparativamente ao segundo caso em que o míssil necessita efetuar mais manobras para evitar entrar em perda antes do encontro com o alvo. Em termos de duração da colisão entre o míssil e o alvo ambos os controladores apresentam tempos diminutos e bastante similares no caso da 4.1a e 4.1b, sendo que o controlador obtido deterministicamente, esse encontro decorre com mais celeridade. Nos restantes casos, o míssil atinge mais rapidamente o alvo quando sujeito controlador LQR clássico.

Analisando por comparação as figuras 4.1a, 4.1b, 4.2a, 4.2b, 4.3a, 4.3b, 4.4a e 4.4b percebe-se que a imposição de um controlador, neste caso LQR clássico, obriga a trajetória do míssil a efetuar uma trajetória muito mais direta ao alvo, uma vez que este controlador está desenhado a que o comportamento apresente características lineares. Por outro lado quando o controlador varia a cada instante de iteração verifica-se que a trajetória é constituída por um maior número de manobras e como tal isso pode provocar um aumento de custos em termos propulsivos e em termos de controlador pois pode conduzir à saturação do mesmo.

Ambos os casos apresentam as características de perseguição pura pois o míssil segue o alvo a cada instante, sendo o caso do controlador obtido deterministicamente o mais representativo desta condição. Em síntese, conclui-se que ambos os casos atingem com sucesso o objetivo, sendo que o controlador LQR clássico satisfaz mais convenientemente a missão.

Para as condições iniciais acima descritas, verifica-se que estas apenas alteram os valores de posição em termos de altitude, longitude e latitude. Variando os valores de velocidade, as trajetórias do míssil são muito idênticas às obtidas anteriormente. Para ambos os casos, a utilização de diferentes valores de velocidade inicialmente definidos para os mesmos valores de posição acima estabelecidos, implica um vetor de velocidade diferente e conseqüentemente que exista uma variação na duração em que o míssil leva a alcançar o alvo. A duração pode ser maior caso o vetor de velocidade não esteja alinhado com o alvo e como tal, são precisas fazer

as devidas correções de modo a que esse vetor de velocidade do míssil fique alinhado com o intruso. Ou por outro lado, o tempo de interceção pode ser menor para o caso em que o vetor de velocidade se encontre alinhado, pois para valores de velocidade direcionais maiores existe um incremento na velocidade inicial do míssil, o que lhe permite atingir o alvo de forma mais célere.

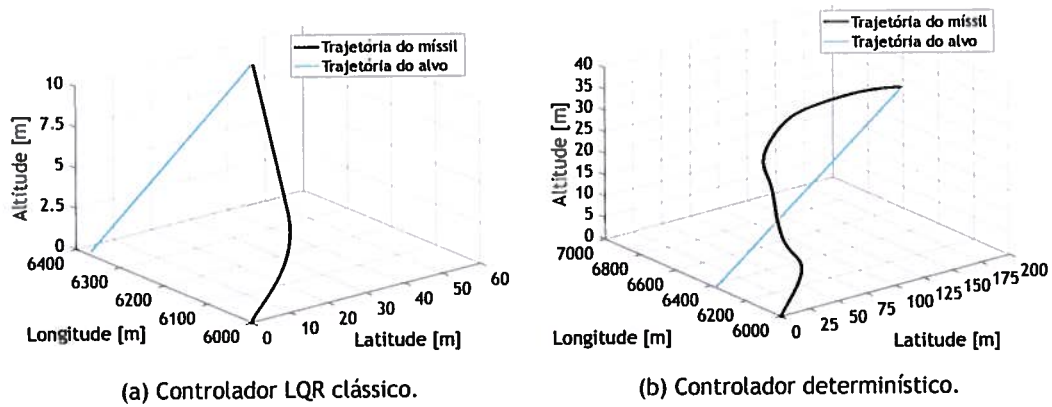


Figura 4.1: Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a condição inicial do míssil $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

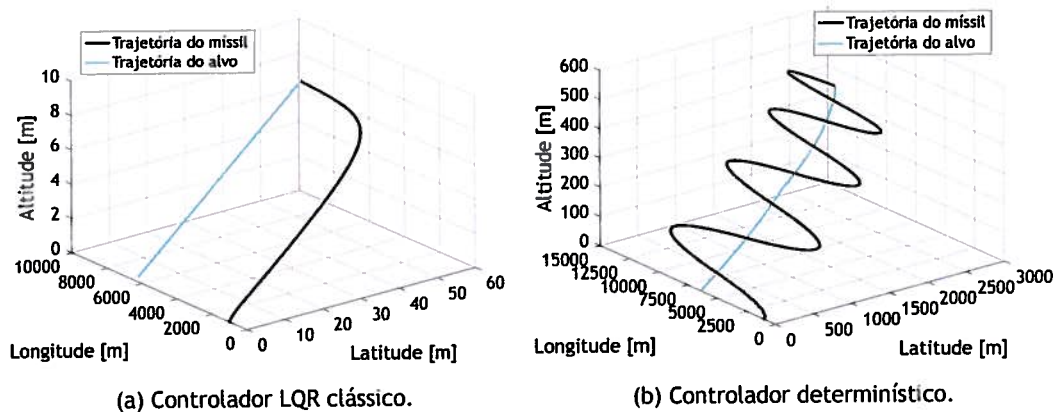


Figura 4.2: Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a condição inicial do míssil $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

As figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13 são referentes às posições, às velocidades e às acelerações em cada um dos seus eixos de referência relativos à primeira condição inicial aplicada com recurso ao controlador LQR clássico e com recurso ao controlador obtido deterministicamente. Como os comportamentos destas grandezas quando sujeitas às outras condições iniciais são similares, opta-se pela colocação dos demais gráficos nos anexos B, C e D para possível consulta.

Para o primeiro conjunto de figuras enunciadas, constata-se que o comportamento das posições, velocidades e acelerações se comportam como esperado porque tendem a estabilizar na condição de equilíbrio após o encontro com o alvo. Os valores de latitude, longitude e altitude

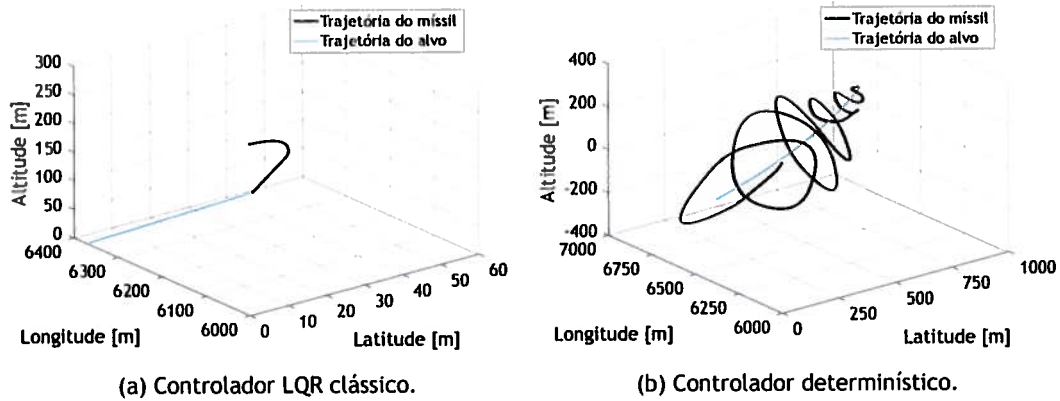


Figura 4.3: Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a condição inicial do míssil $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

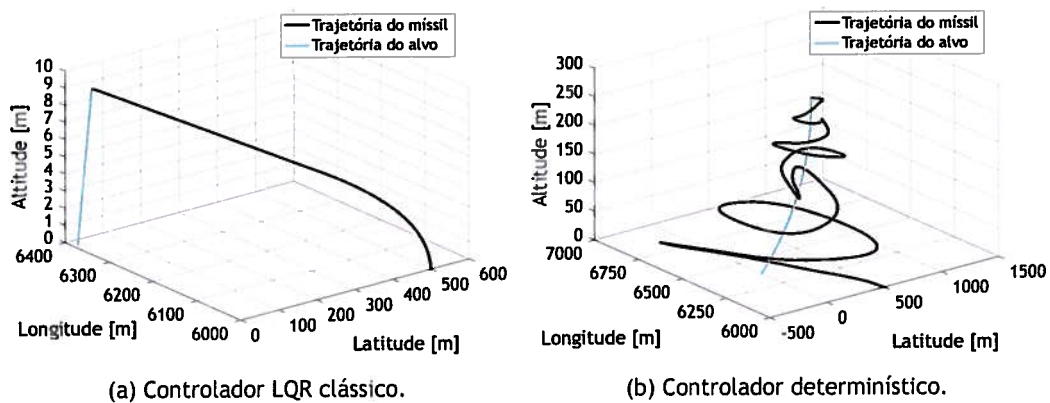


Figura 4.4: Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a condição inicial do míssil $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

atingem o equilíbrio após esse encontro, ou melhor, conserva a posição na qual se efetua o encontro entre o alvo e o míssil como se verifica nas figuras 4.5a, 4.6a, 4.7a.

À vista disto, para o segundo conjunto de figuras enunciadas, verifica-se que apesar do míssil se encontrar na proximidade do alvo mais rapidamente que o caso anterior, os estados de posição não estabilizam no tempo em que esse encontro ocorre mas revelam uma diminuição das oscilações, demonstrando que este controlador tende para o equilíbrio dos estados. Os valores de latitude, longitude e altitude apresentam um aumento crescente com o passar do tempo. Na conjectura da longitude existe um decréscimo, a seguir a esse aumento que revela que neste caso em termos de longitude o míssil apresenta um ligeiro movimento sinusoidal.

Salienta-se que todos os outros estados, esta diminuição de oscilação do comportamento dos estados é verificada.

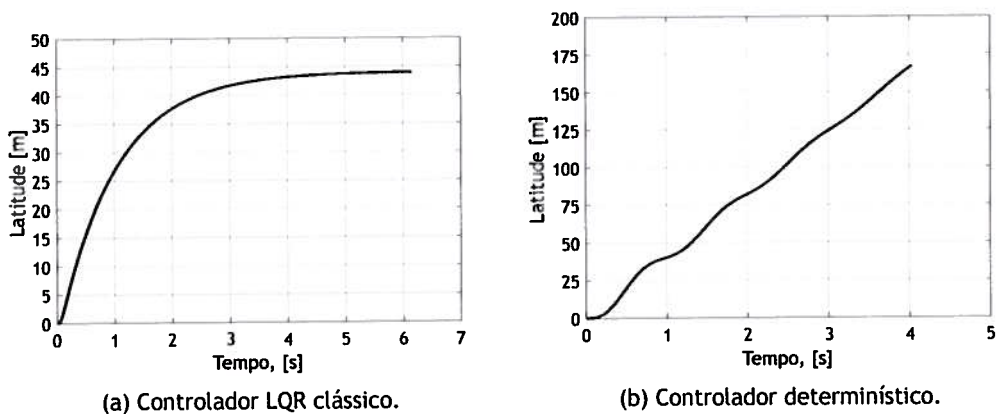


Figura 4.5: Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

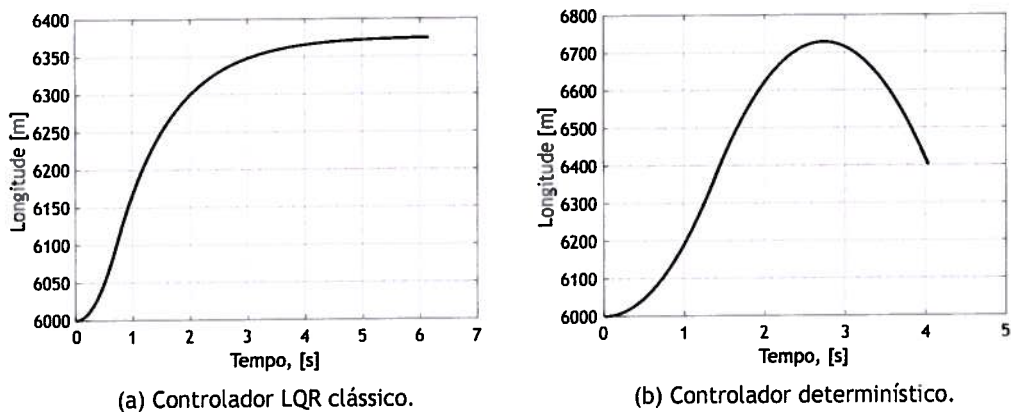


Figura 4.6: Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

No instante em que as posições se comportam de forma praticamente constante, a velocidade nas suas três componentes tende para valores próximos de zero uma vez que à medida que o míssil se aproxima do alvo não varia a sua velocidade. Tal explica que o valor da mesma seja

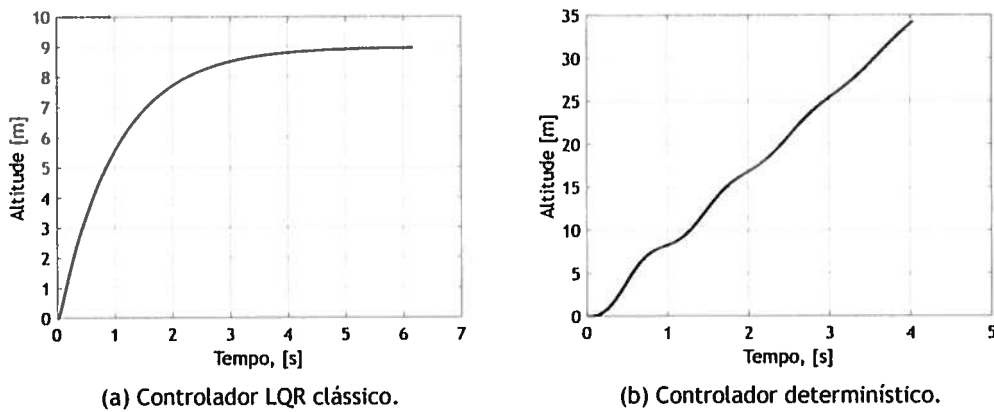


Figura 4.7: Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

muito próximo de zero como revela as figuras 4.8a, 4.9a e 4.10a.

Nas figuras 4.8b e 4.10b as velocidades latitudinal e altitudinal apresentam uma variação sinusoidal muito semelhante, revelando estabilizar num valor de equilíbrio diferente entre si e de zero. Por sua vez a velocidade longitudinal (figura 4.9b) apresenta um crescimento até ao valor máximo positivo seguido de um decréscimo acentuado até ao instante do encontro entre o míssil e o alvo. O comportamento destas três grandezas revela que o míssil ajusta a cada instante a direção e a magnitude de modo a se aproximar convenientemente do alvo, mediante as restrições a que o controlador está sujeito. A variação mais brusca na componente longitudinal da velocidade representa um maior esforço por parte dos atuadores do controlo longitudinal (aceleração) para garantir o sucesso da missão. Assim um controlador obtido deterministicamente pode apresentar excelente eficácia quando é desenvolvido para caso específico de estudo.

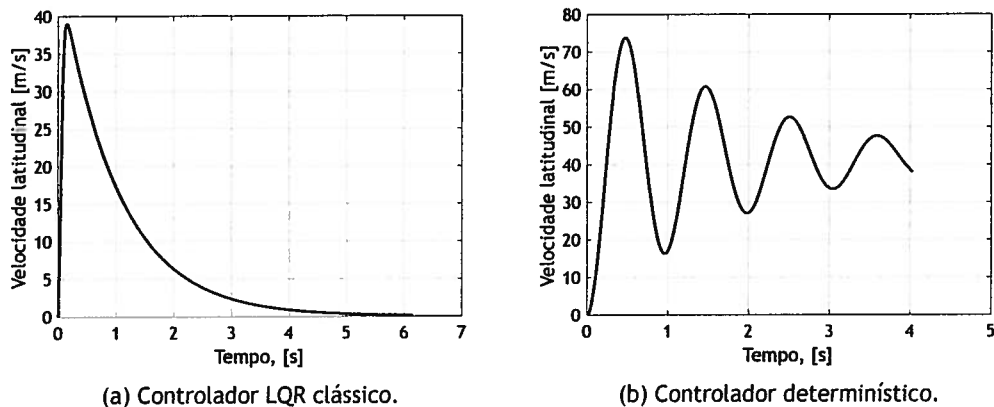
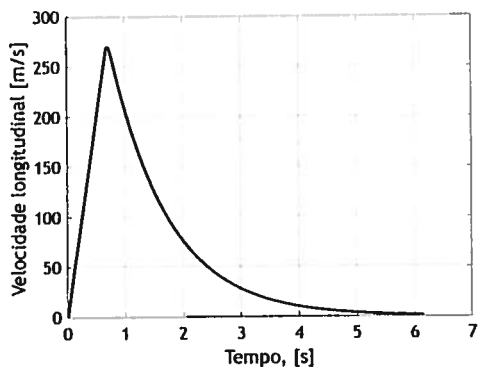
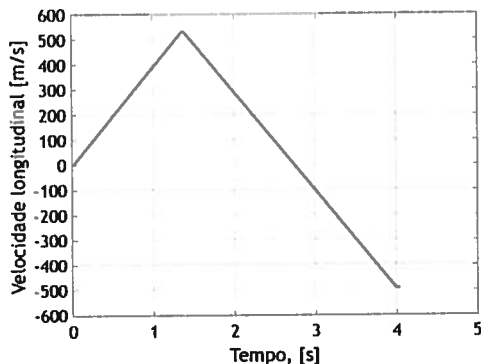


Figura 4.8: Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Segundo as figuras 4.11a, 4.12a, 4.13a todas as componentes da aceleração estabilizam em zero, significando que o controlo que tende a minimizar o sistema é zero, ou seja, o míssil continua o seu movimento depois de encontrar o alvo mas com movimento retilíneo uniforme. Verifica-se

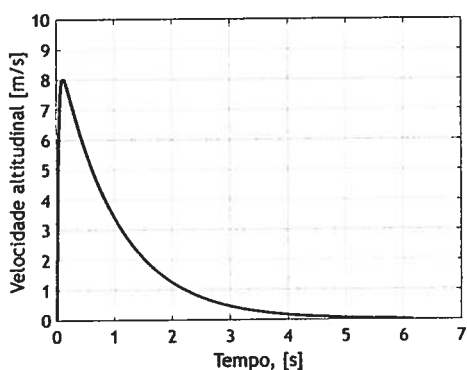


(a) Controlador LQR clássico.

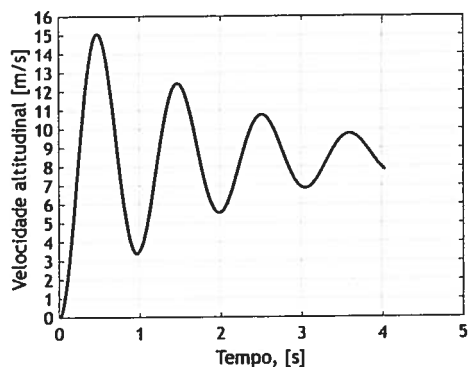


(b) Controlador determinístico.

Figura 4.9: Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



(a) Controlador LQR clássico.



(b) Controlador determinístico.

Figura 4.10: Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

ainda que existe algum tipo de oscilação nestas representações que advém das limitações de aceleração impostas enunciadas anteriormente.

As acelerações das figuras 4.11b, 4.12b e 4.13b seguem o comportamento a par das velocidades, assim, as acelerações latitudinal e altitudinal seguem o comportamento semelhante às velocidade latitudinal e velocidade altitudinal, respetivamente. Por sua vez, a aceleração longitudinal exhibe um comportamento *bang bang*, isto é, o controlador alterna entre dois estados, que nesta situação corresponde aos valores limitantes da aceleração.

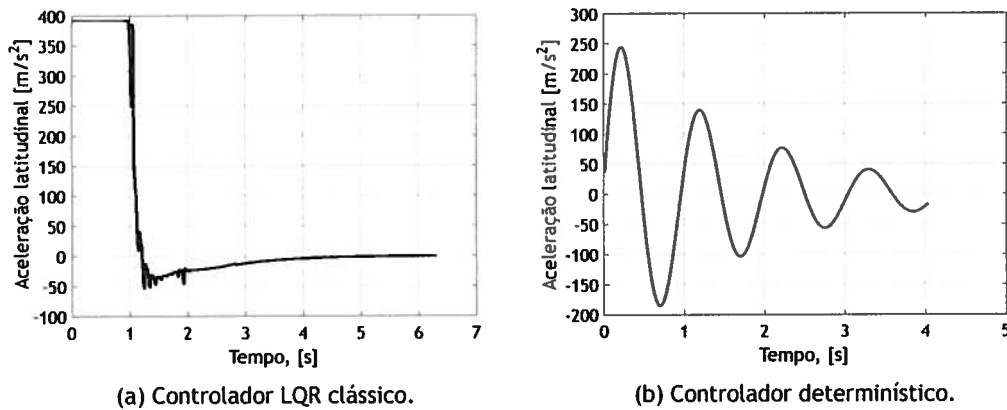


Figura 4.11: Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

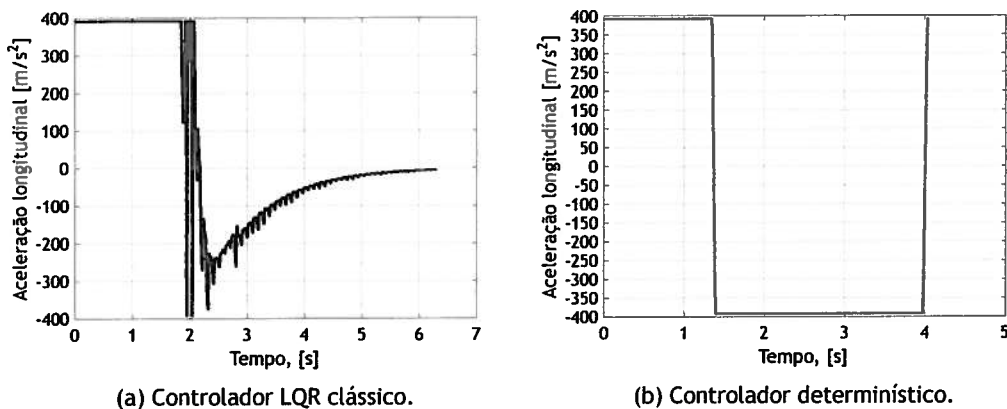


Figura 4.12: Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Resumidamente, a componente de longitude, velocidade longitudinal e aceleração longitudinal são os estados que demonstram maiores mudanças. Tal comportamento deve-se ao facto que para esta condição inicial apresentada o míssil foi posicionado muito próximo do alvo em termos de longitude, enquanto que a latitude e a altitude se encontram muito afastadas do mesmo. Como tal, as grandezas nesta componente precisam de assumir tais comportamentos, de modo a garantir que todos os outros estados estabilizem até encontrar o alvo. Isto é, analisando

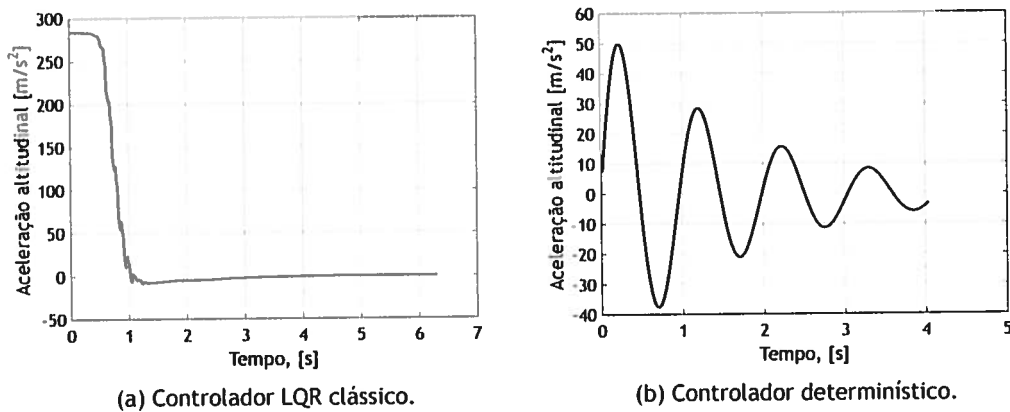


Figura 4.13: Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

isoladamente estes estados facilmente se aproximam do de referência (alvo), como o movimento é tridimensional é necessário que todas as componentes se encontrem em condições para que o encontro entre o alvo e o míssil se verifique de facto.

4.2 Comparação desempenho de controlador LQR clássico e controlador LQR robusto

Este estudo pretende, sob as mesmas condições iniciais, analisar o comportamento da trajetória, velocidade e aceleração do míssil quando aplicado um controlo com base LQR clássico e um controlo com base LQR robusto de um sistema semelhante ao 2.1 mas sujeito a perturbações, isto é, resolver o sistema 2.26. Neste sistema, as perturbações ΔA e ΔB são impostas de forma aleatória e diferentes a cada instante para garantir uma não estrutura das mesmas. Para tal, estas matrizes são matrizes diagonais com valores *random*, que em termos Matlab[®] se resume ao comando *rand*. Impôs-se incertezas a ambas as matrizes de modo a garantir que o sistema apresenta uma incerteza total. As matrizes A, B, Q e R mantêm-se iguais às usadas na comparação feita anteriormente.

Devido ao facto de existir uma infinidade de possibilidades para atribuir a condição inicial ao caso de estudo, neste subcapítulo apenas são mostrados os resultados para uma condição inicial, encontrando-se outros exemplos em anexo.

Menciona-se que esta condição inicial ao contrário das acima impostas é escolhida com base numa localização mais afastada do alvo e com uma velocidade inicial diferente de zero de modo que as perturbações influenciem o modelo. Portanto com base nestes argumentos, a condição inicial escolhida é $x_0 = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]$.

Assim, as figuras 4.14 representam a trajetória do alvo e do míssil quando usado o controlador de LQR clássico e o controlador LQR robusto, respetivamente. Constanta-se na figura 4.14a que o controlo LQR clássico não é tão eficaz como o controlo robusto devido à dificuldade que apresenta em suportar as perturbações já que o míssil interceta a trajetória do alvo num instante em que o mesmo já lá não se encontra, ou por outras palavras, o míssil interceta uma posição que

o alvo esteve anteriormente. Por sua vez, na figura 4.14b verifica-se que o míssil rapidamente (cerca de 10 segundos) atinge o alvo, mostrando a robustez do controlador. O míssil acompanha a trajetória que o alvo efetuava se não tivesse sido alcançado. Esta figura revela a elevada eficácia que o controlador apresenta uma vez que cumpre os requisitos expostos no capítulo 2.

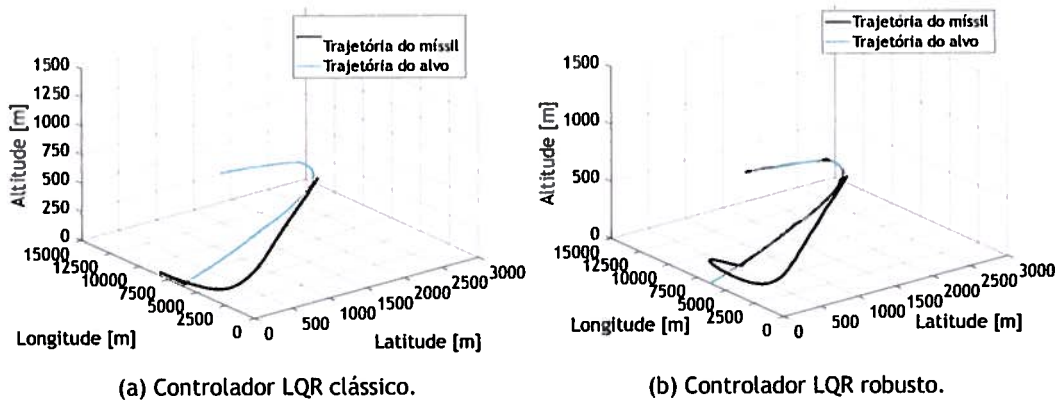


Figura 4.14: Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

Por sua vez as figuras 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 representam as posições, velocidades e acelerações em cada um dos eixos tridimensionais quando aplicado um controlador LQR clássico e um controlador LQR robusto. As figuras 4.15a, 4.16a, 4.17a, 4.18a, 4.19a, 4.20a, 4.21a, 4.22a e 4.23a demonstram o mesmo comportamento descrito no subcapítulo acima, quando comparando com o controlador que é obtido deterministicamente. Tal revela que este controlador está a funcionar sem considerar as perturbações do sistema. Contudo estas afetam diretamente os valores de aceleração (latitudinal, longitudinal e altitudinal) e indiretamente o estado do sistema pois este não atinge o propósito estipulado.

Nas restantes figuras 4.15b, 4.16b, 4.17b, 4.18b, 4.19b, 4.20b, 4.21b, 4.22b e 4.23b constata-se que as grandezas tendem a ter em parte comportamentos similares quando sujeitas a um controlador LQR clássico. Contudo verifica-se que as incertezas "obrigam" a que os resultados não sejam tão lineares. Lembre-se que os gráficos estão dispostos para 120 segundos e como tal depois do míssil encontrar o alvo este, matematicamente segue a trajetória do alvo, daí que as velocidades estabilizem em zero mas a latitude, longitude e altitude não se comportem de forma constante.

Para as três componente de velocidade ambos os cenários apresentam comportamentos semelhantes e valores semelhantes. Estas semelhanças residem no fato de que o controlador LQR robusto tem por base o controlador LQR clássico na sua constituição e pelo razão que a variação de posição em cada uma das orientações ser idênticas.

Acrescenta-se que as acelerações latitudinais, longitudinais e altitudinais que compõem o controlo tendem para zero, oscilando nesse ponto porque é o controlador que "absorve" maior parte das perturbações do sistema e por isso apresenta um comportamento *bang bang* menos acentuado relativamente ao primeiro caso.

Em síntese, verifica-se que o controlador LQR robusto apresenta resultados muito satisfatórios quando um sistema está sob incertezas e/ou perturbações, conseguindo neste caso fazer com que o míssil atinja o seu alvo. Para as mesmas condições, o controlador LQR clássico apresenta

resultados insatisfatórios na maioria dos casos, uma vez que o controlador não possuiu características de robutez suficientes para contornar as perturbações. Ressalva-se que, para casos em que a condição inicial é colocada nas proximidades da posição inicial do alvo, o controlador LQR clássico funciona convenientemente mesmo sujeito a perturbações, apresentando tempos de interceção mais elevados do que controlador LQR robusto.

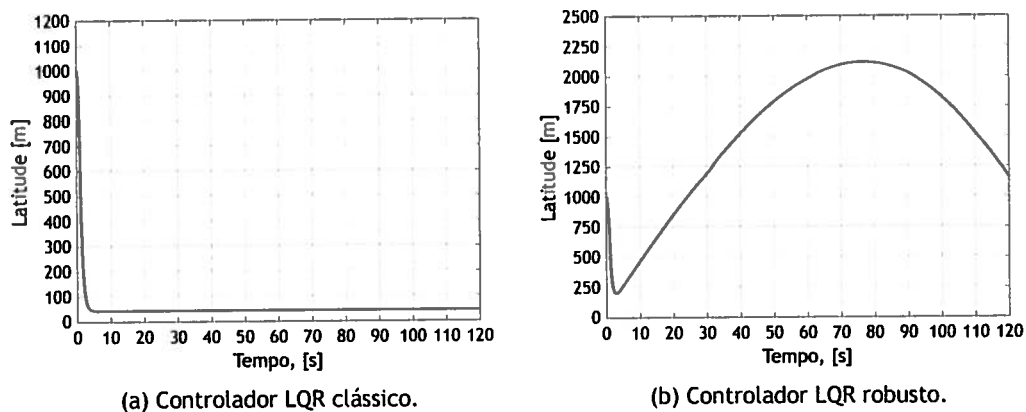


Figura 4.15: Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

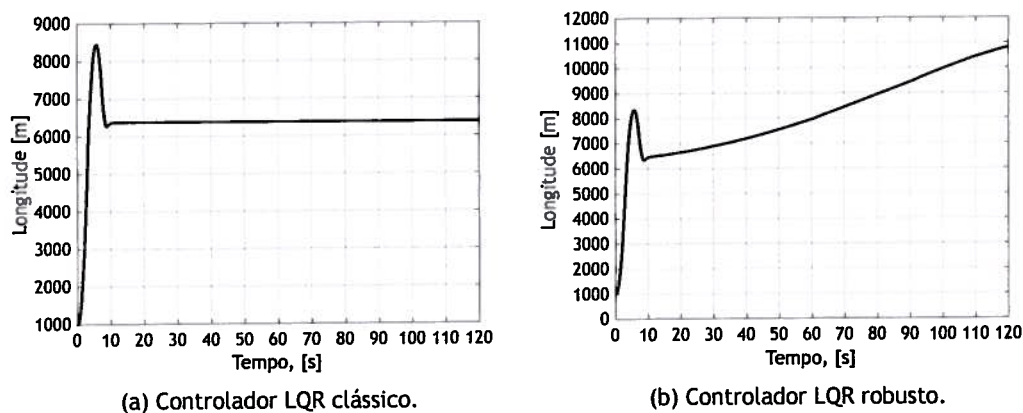


Figura 4.16: Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

A figura 4.24 descreve a trajetória tridimensional do míssil quando este se encontra sob a atuação de um controlador LQR clássico em 4.24a e controlador LQR robusto em 4.24b quando sujeito à condição inicial $x=[0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ para ambas as circunstâncias. Esta representação, surge para reforçar o facto de que o controlador LQR clássico não consegue resistir às perturbações e tem comportamento semelhante ao da figura 4.14a. Percebe-se que, enquanto no caso acima sem ruído este controlador apresentava desempenho muito positivo, aqui o objetivo não é cumprido. Relativamente ao controlador LQR robusto é provado, mais uma vez, que o desempenho é muito próximo do ideal pois atinge o alvo em aproximadamente 5 segundos. Os gráficos respetivos às posições, velocidades e acelerações nas diferentes componentes encontram-se no

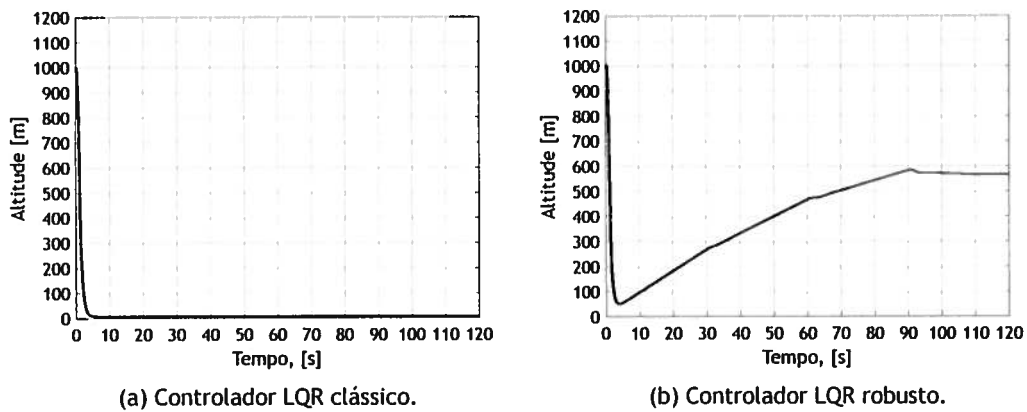


Figura 4.17: Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

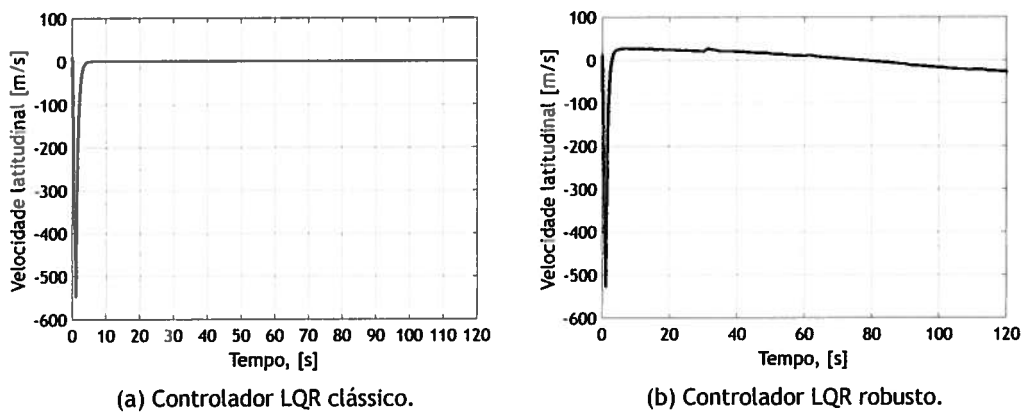


Figura 4.18: Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

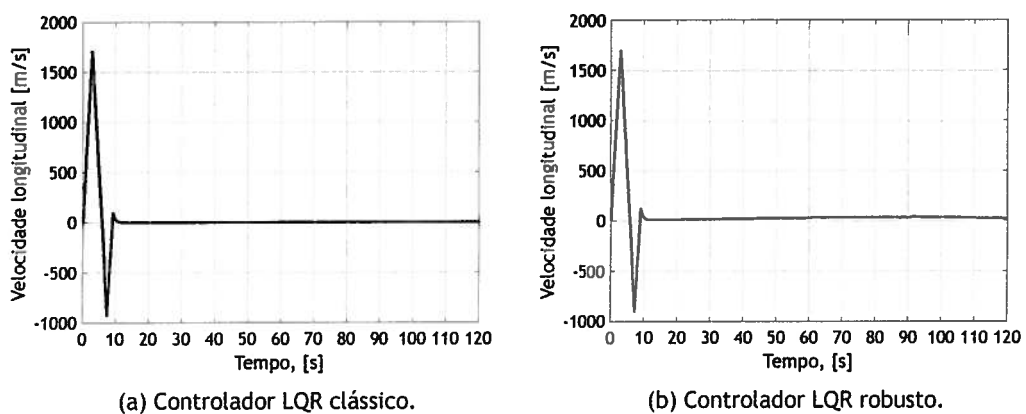


Figura 4.19: Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

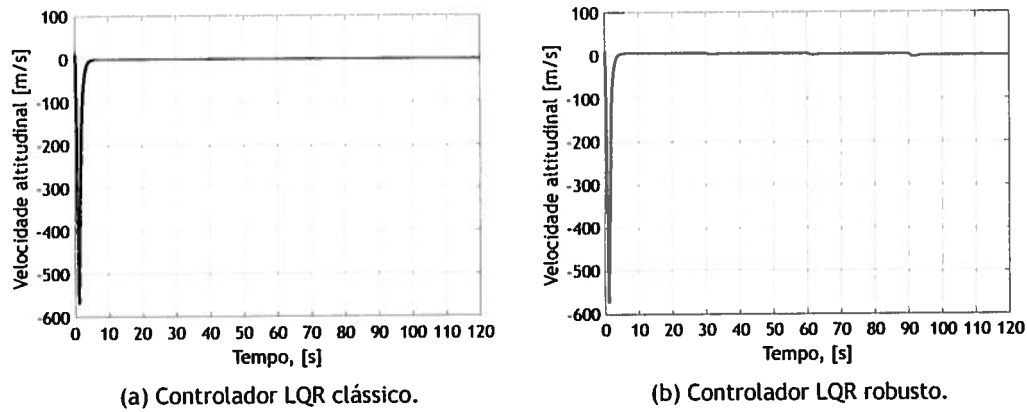


Figura 4.20: Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10]^T$.

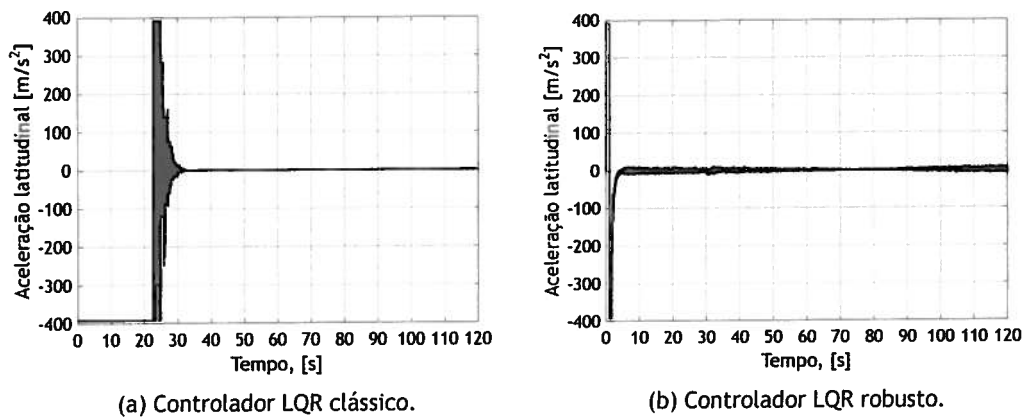


Figura 4.21: Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10]^T$.

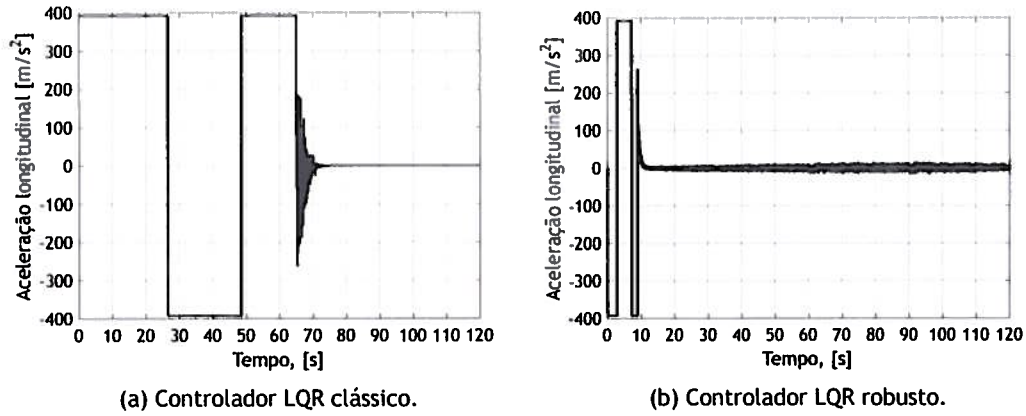


Figura 4.22: Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

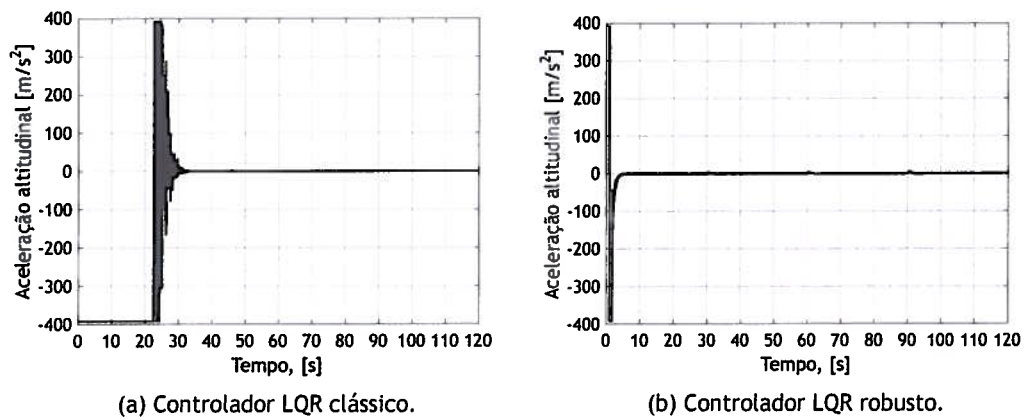


Figura 4.23: Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

apêndice E para consulta complementar.

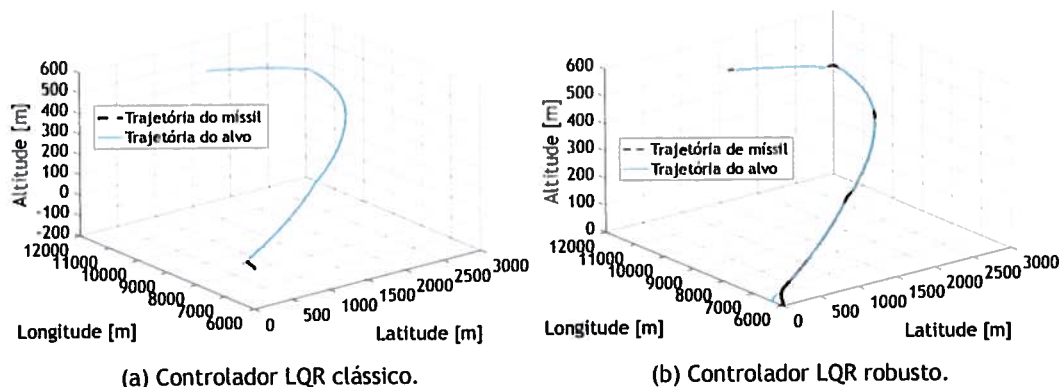


Figura 4.24: Trajetória tridimensional do alvo e do míssil sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

4.3 Filtro de Kalman-Bucy

Deste modo, na simulação da filtragem e estimação da trajetória do alvo procura-se satisfazer a equação 3.17 e tem por começo o sistema 3.18 tendo um enquadramento adequado ao caso de estudo específico. Assim, o estado do sistema x , corresponde ao vetor da posição, velocidade e aceleração do alvo nas três dimensões e o vetor de observação, y , corresponde às posições também nessas três dimensões, isto é:

$$x = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z & v_x & v_y & v_z & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T \quad (4.5)$$

$$y = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T$$

O controlo u é composto por *jerk* que é equivalente à derivada da aceleração. Assim, esta grandeza corresponde à variação de aceleração e não à sua quantidade mensurável. No entanto, *jerk* pode ser reconhecido como ruído gaussiano. O ruído gaussiano é um ruído estatístico cuja função de densidade provável é idêntica a uma distribuição normal ou distribuição gaussiana. Então o controlo apresenta o seguinte formato:

$$u = \begin{bmatrix} j_x & j_y & j_z \end{bmatrix}^T \quad (4.6)$$

Enquanto que os ruídos, w e v , correspondem a ruídos reais que são brancos e apresentam distribuição gaussiana, definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w &\approx N(0, Q) \\ v &\approx N(0, R) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por sua vez, as matrizes associadas ao estado, ao controlo, ao observador e aos ruídos são respetivamente A , B , C , N e M . As três primeiras são definidas com base na experiência e as duas últimas estão relacionadas com erro real associado aos sensores de leitura e são baseadas

em [5]. Deste modo, todas estas matrizes estão definidas seguidamente:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 N &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ainda para se conseguir obter o resultado pretendido, há necessidade de estipular as matrizes Q e R seguindo o enunciado em 3.19 e 3.20 e por isso apresentam-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 Q &= NQN^T \\
 R^{-1} &= (MRM^T)^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Com base nesta informação, as matrizes Q e R tomam os seguintes valores:

$$Q = \begin{bmatrix} 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A solução de Riccati foi calculada com base no método algébrico em vez do método diferencial tendo em conta o princípio descrito em [9]. A justificativa da utilização do método algébrico reside, essencialmente, na ocorrência que o primeiro método converge mais lentamente que o segundo. E por isso opta-se pela solução algébrica devido à sua simplicidade. A seguinte figura 4.25 demonstra a trajetória real e a trajetória filtrada dessa mesma obtida com recurso ao filtro de Kalman-Bucy. Esta figura pretende mostrar a importância das trajetórias de filtragem e de estimativa. A diferença entre as duas trajetórias mencionadas acima é pequena porque as incertezas impostas neste caso de estudo e o radar de incertezas variam numa pequena gama de valores (matriz Q e R, respectivamente).

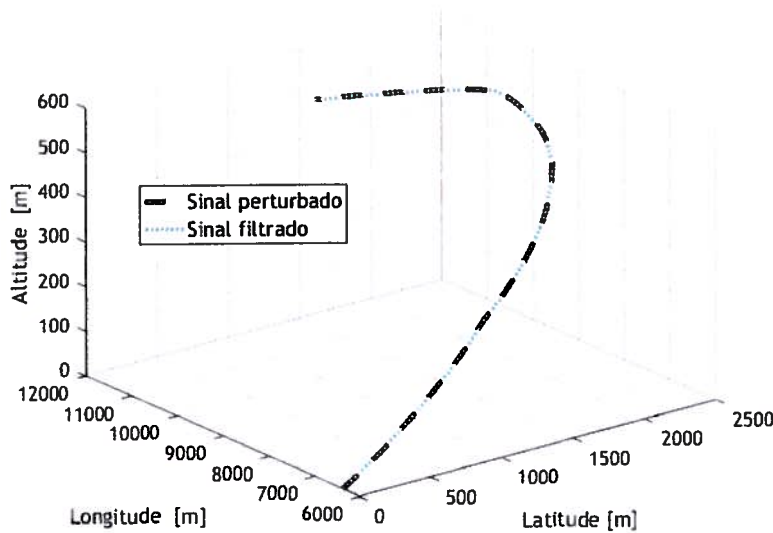


Figura 4.25: Trajetória tridimensional filtrada e real do alvo.

Com a intenção de esclarecer a eficácia do filtro Kalman-Bucy para a estimativa das trajetórias de mísseis apresentam-se as posições, velocidade e aceleração filtradas e as reais em cada espaço tridimensional, respectivamente, durante 120 segundos nas figuras 4.26a, 4.27a, 4.28a, 4.29a, 4.30a, 4.31a, 4.32a, 4.33a e 4.34a.

As figuras 4.26b, 4.27b, 4.28b são apresentadas devido à dificuldade de percepção da diferença entre as posições filtradas e as posições perturbadas porque o erro de leitura é diminuto. Portanto, o sinal filtrado e o sinal perturbado são bastante próximos. Contudo por muito pequena que seja esta diferença é sempre significativa a sua implicação e por isso deve ser tomada em conta.

Em termos das posições das figuras 4.26, 4.27 e 4.28 é possível verificar que na generalidade, a estimação acompanha o comportamento do valor teórico do estado ao longo do tempo com alguma precisão.

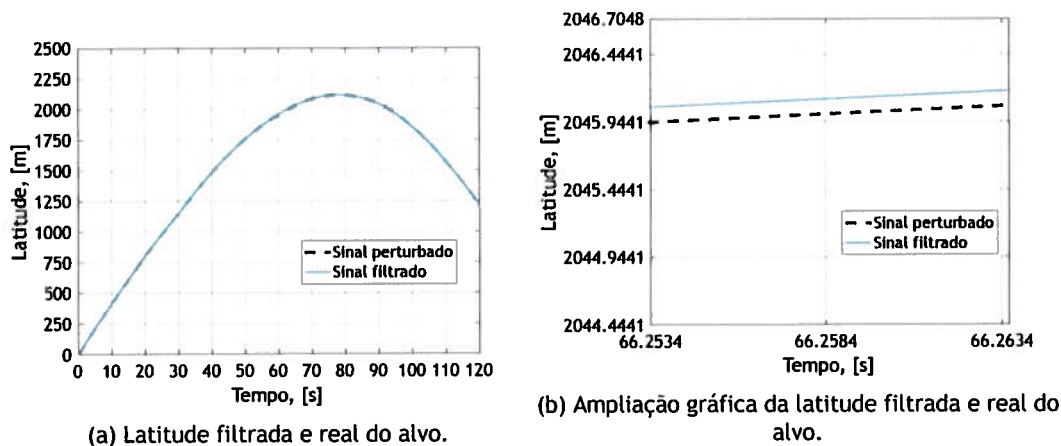


Figura 4.26: Comportamento da latitude filtrada e real do alvo em função do tempo.

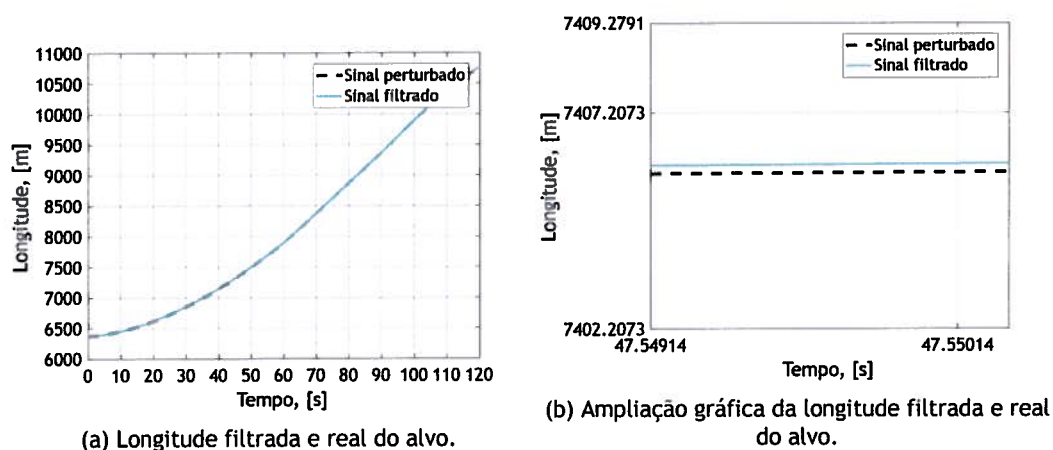
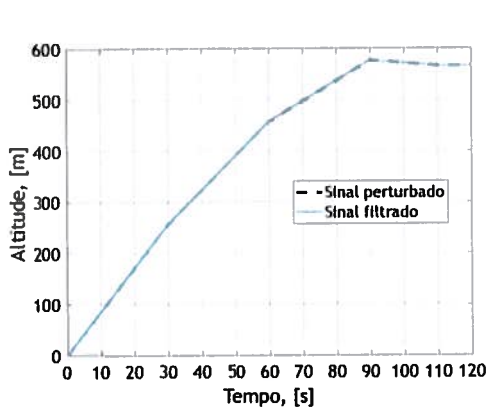


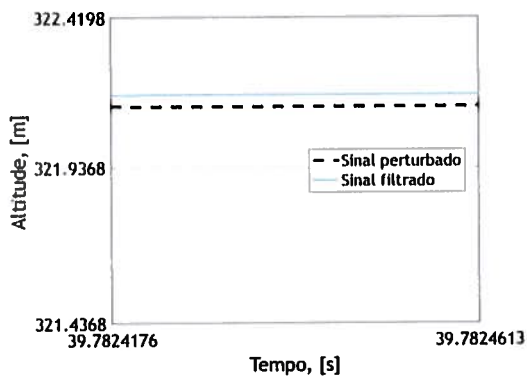
Figura 4.27: Comportamento da longitude filtrada e real do alvo em função do tempo.

Relativamente à velocidade, é utilizada a derivação da posição para obter a velocidade perturbada. Quando o filtro é neles aplicado, a velocidade apresenta-se muito mais "limpa". Denote-se que existe um erro bastante baixo, que vai convergindo ao longo do tempo e por isso constitui um grande êxito como mostra as figuras 4.29b, 4.30b e 4.31b.

Na aceleração, o mesmo método de derivação é usado, mas neste contexto, a derivação da velocidade. Aqui, o sinal filtrado é praticamente linear e por isso, é possível dizer que o filtro

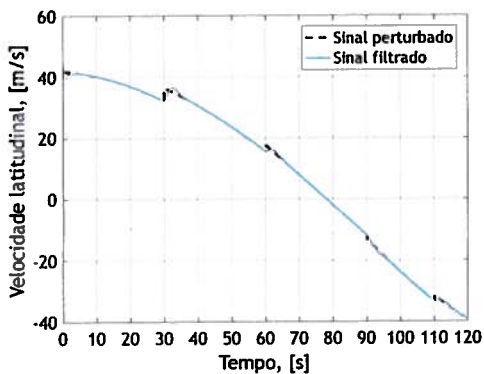


(a) Altitude filtrada e real do alvo.

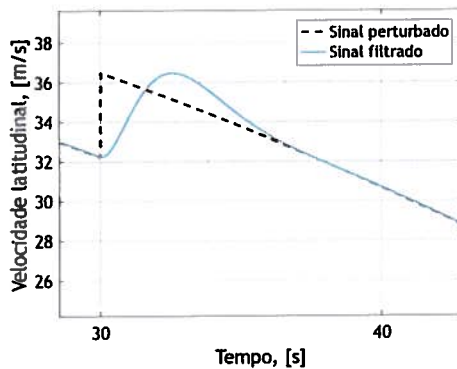


(b) Ampliação gráfica da altitude filtrada e real do alvo.

Figura 4.28: Comportamento da altitude filtrada e real do alvo em função do tempo.

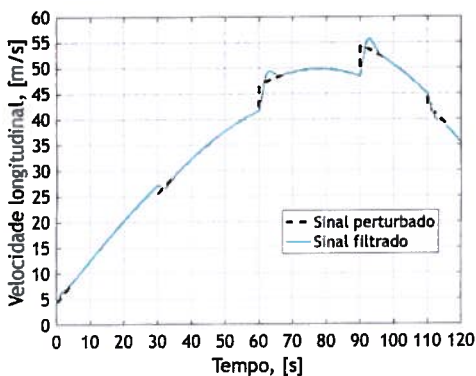


(a) Velocidade latitudinal filtrada e real do alvo.

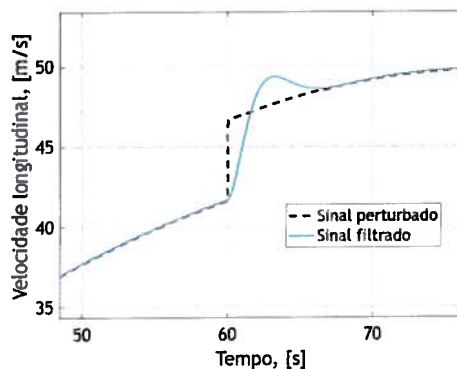


(b) Ampliação gráfica da velocidade latitudinal filtrada e real do alvo.

Figura 4.29: Comportamento da velocidade latitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.



(a) Velocidade longitudinal filtrada e real do alvo.



(b) Ampliação gráfica da velocidade longitudinal filtrada e real do alvo.

Figura 4.30: Comportamento da velocidade longitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.

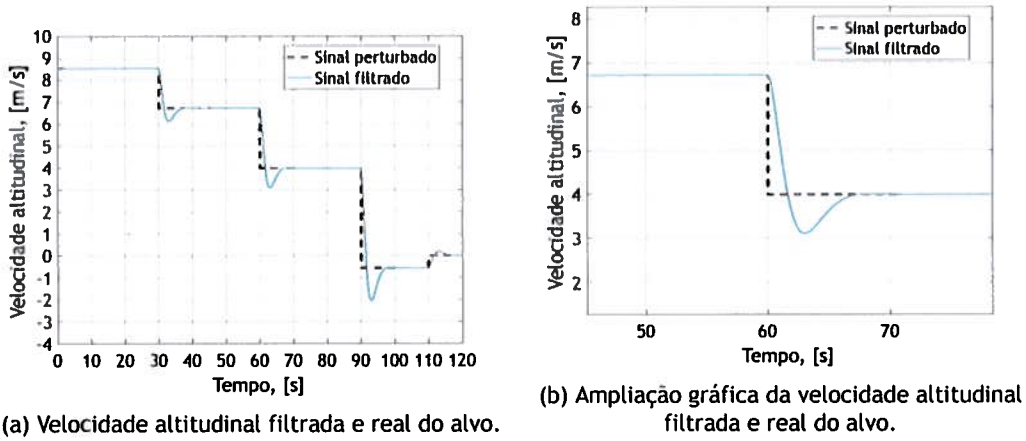


Figura 4.31: Comportamento da velocidade altitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.

pode remover substancialmente todo o ruído. Para tal estão exibidas as figuras 4.32b, 4.33b e 4.34b. A estimação através do filtro de Kalman-Bucy consegue acompanhar quase na perfeição as acelerações reais do alvo.

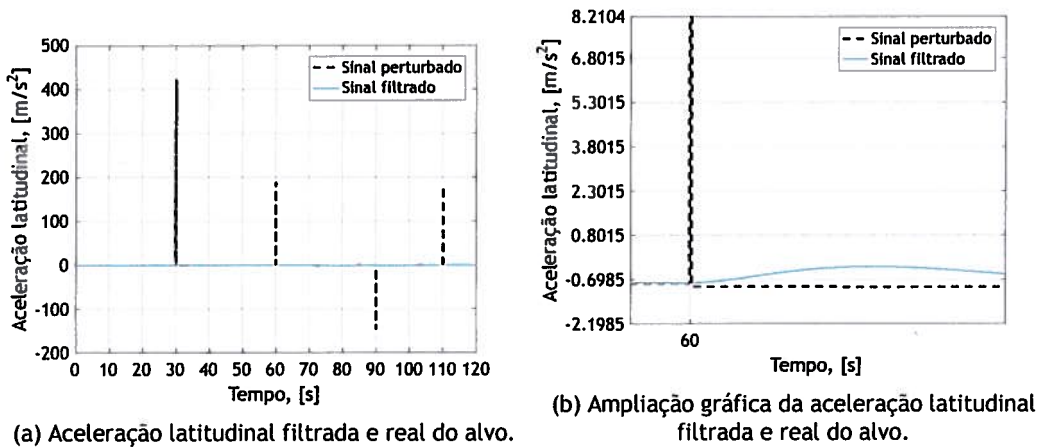


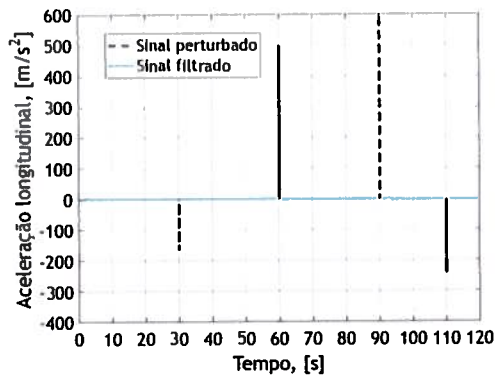
Figura 4.32: Comportamento da aceleração latitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.

Todo este processo só é possível porque as características de controlabilidade e observabilidade são garantidas, como se mostra seguidamente:

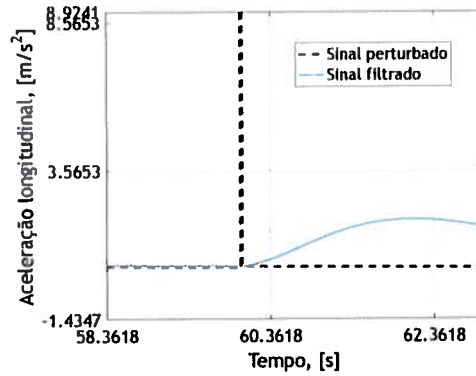
$$\begin{aligned} \text{rank}(\text{ctrb}(A, B)) &= \text{rank}([BABA^2B \dots A^{n-1}B]) = n = n \\ \text{rank}(\text{obsv}(A, C)) &= \text{rank}([CCACA^2 \dots CA^{n-1}]) = n = n \end{aligned} \quad (4.11)$$

Finalmente, os mesmos gráficos foram feitos para diferentes valores de incerteza na matriz R, mas a gama de valores de sensibilidade do radar é pequena e, portanto, não existe diferenças significativas.

Em síntese, comprova-se o que seria esperado pois, como revelam estes resultados o filtro de Kalman-Bucy corresponde a um satisfatório método de filtragem e estimação de trajetórias re-

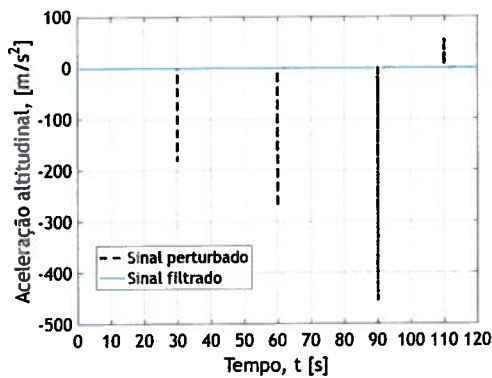


(a) Aceleração longitudinal filtrada e real do alvo.

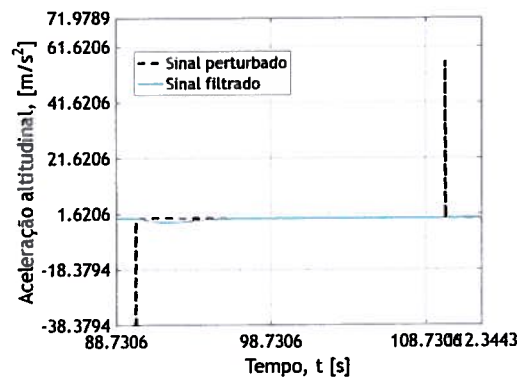


(b) Ampliação gráfica da aceleração longitudinal filtrada e real do alvo.

Figura 4.33: Comportamento da aceleração longitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.



(a) Aceleração altitudinal filtrada e real do alvo.



(b) Ampliação gráfica da aceleração altitudinal filtrada e real do alvo.

Figura 4.34: Comportamento da aceleração altitudinal filtrada e real do alvo em função do tempo.

ais. Mais especificamente, revela ser uma convincente ferramenta a ser utilizada na localização precisa de alvos.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas de trabalhos futuros

Este capítulo destina-se à apresentação das principais conclusões desta dissertação que se encontram descritas no subcapítulo um e à descrição dos principais trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos neste âmbito de modo a complementar ou acrescentar algumas melhorias a este trabalho.

5.1 Conclusões

Nesta dissertação são explorados dois campos cruciais da orientação de mísseis: as leis de orientação adequadas ao sucesso da missão e a localização precisa do alvo.

Quanto às leis de orientação, foram determinadas as trajetórias de um míssil intercetor durante a fase de voo de médio curso e em modo de perseguição direta de encontro ao alvo (posições filtradas) sujeito às seguintes condições: controlador LQR clássico, controlador obtido de forma determinística, controlador LQR clássico quando o sistema está sujeito a perturbações não estruturadas e controlador LQR robusto quando o sistema está sujeito a essas mesmas perturbações. No campo da localização precisa do alvo aplicou-se o Filtro Kalman-Bucy de modo a testar a eficácia deste método. O primeiro facto a ser constatado é a realização de todos os objetivos a propostos nesta dissertação, tendo alcançado resultados promissores. Senão veja-se: nas duas primeiras condições enunciadas pode-se concluir que quando imposto um controlador LQR clássico, o comportamento do míssil apresenta menor duração e efetua um percurso mais direto quando comparado à implementação de um controlador determinado através da programação linear quadrática. Contudo o desempenho do míssil quando sujeito a ambos os controladores funciona convenientemente para as posições (latitude, longitude, altitude) iniciais, localizadas não muito distantes do alvo, e as velocidades (latitudinais, longitudinais e altitudinais) devidamente orientadas com o alvo. Em síntese, para as condições iniciais impostas, o controlador LQR clássico permite uma melhor performance. Apesar do funcionamento do mesmo apresentar um melhor comportamento, o controlador obtido deterministicamente pode ser aperfeiçoado para ser implementado numa condição mais específica. Esta premissa advém dos resultados provenientes da primeira condição imposta pois em ambos os casos, o míssil atinge o alvo com duração semelhante.

Nos sistemas em que se implementaram as perturbações não estruturadas, o controlador LQR robusto utilizado neste trabalho demonstra ser bastante eficaz quando aplicado nesta temática. Enquanto que o controlador LQR clássico sujeito às mesmas condições iniciais que o controlador LQR robusto (posições iniciais distantes do alvo e velocidades iniciais diferentes de zero) demonstra incapacidade de cumprir o objetivo proposto, que consiste em encontrar o melhor caminho para o míssil se aproximar do alvo, evidenciando uma total incapacidade de operação, uma vez que o míssil durante os 120 segundos de atuação encontra-se com uma posição pela qual o alvo já passou. Com a finalidade de realçar esta conclusão, realizou-se a simulação considerando uma condição inicial utilizada na comparação anterior em que o controlador LQR clássico apresenta excelente comportamento, mostrando assim, que as perturbações pre-

judicam totalmente a sua atuação. Esta observação vem reforçar a necessidade de usar um controlador robusto. Por sua vez, o controlador LQR robusto utilizado revela forte potencial quando implementado para solucionar sistemas nos quais predominem perturbações.

Todos os sistemas reais possuem um determinado nível de ruído, pelo que a existência de um filtro se torna imprescindível. No caso da estimação da trajetória de um míssil, o filtro utilizado foi o filtro de Kalman-Bucy. A escolha recaiu no facto deste possuir um leque de características mais adequadas ao setor de Aeronáutica, em específico da Defesa onde se enquadra esta temática; das quais se podem destacar maior simplicidade e menores gastos de energia e tempo quando comparados ao filtro de Kalman. Apesar das dificuldades apresentadas se basearem no desconhecimento do tipo de incerteza associado às medições da trajetória real do alvo em questão, foram colmatadas com recurso a um conhecimento científico de incertezas de sensores de rastreamento reais. Pode-se concluir que após a filtragem, foram obtidos resultados excelentes relativos às grandezas de posição, de velocidade e de aceleração. Portanto, concluiu-se que a utilização deste método permite uma filtragem bastante eficaz, o que leva a uma boa precisão na previsão do estado de um determinado sistema, espelhando ser uma ferramenta muito útil para este setor.

Apesar dos resultados obtidos serem bastante satisfatórios existem sempre limitações associadas a qualquer estudo. Neste caso em específico, as condições limitantes têm por base o dimensionamento das matrizes Q e R pois estas, apesar dos métodos apresentados, dependem muito da experiência do designer do controlador; outra condição reside no facto que o controlador precisa de ser limitado de modo a manter a realidade e a veracidade do estudo. Por último, mas não menos importante o tempo de processamento do programa para cada um dos casos limitou em termos cronológicos a aprendizagem de outras temáticas.

Em modo de desfecho, o controlador LQR clássico demonstrou algumas características de robustez, sendo que o seu critério de desempenho é mais adequado às situações de rastreamento deste caso de estudo, em comparação com o controlador obtido deterministicamente. Sendo possível que este último, quando sujeito a critério de desempenho específico numa determinada circunstância, apresente uma melhor performance. No caso das perturbações o sucesso do controlador LQR robusto é muito evidente. Por último, o filtro de Kalman-Bucy revela ser uma ferramenta de filtragem e estimação de dados muito poderosa devido à sua competência e simplicidade de formato.

5.2 Perspetivas de trabalhos futuros

No contexto desta tese, muitos trabalhos futuros podem ser desenvolvidos, uma vez que o conteúdo abordado ostenta carácter complexo. Um dos trabalhos propostos consiste em alterar o enquadramento em que o míssil se encontra nesta dissertação, tendo como exemplo, o desenvolvimento do estudo do míssil quando se rege pelo método de navegação de perseguição indireta (navegação proporcional).

Outro estudo relevante seria utilizar-se um alvo evasivo em vez de um alvo com trajetória definida, isto é, definir-se as trajetórias do míssil quando um alvo se encontra em fuga do mesmo. Ainda neste contexto, outros dos trabalhos a ser realizado consiste em limitar a duração em que o míssil pode encontrar o seu respetivo alvo.

Relativamente à parte do controlo, uma nova abordagem em termos de controladores poderia recair sobre o estudo do comportamento do míssil quando sujeito a diferentes controladores determinísticos em diversas circunstâncias. No âmbito desta dissertação poderia ser realizado

o estudo com controlador *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) em alternativa ao controlador LQR. No que diz respeito ao controlo robusto, a utilização de uma abordagem do controlador robusto de H_{∞} complementaria este estudo em questão.

Por último, seria também importante aplicar o filtro de Kalman-Bucy à trajetória do míssil depois de aplicado um controlo robusto.

Bibliografia

- [1] “Fundamentação Teórica - Teses USP,” [Último acesso:2008-04-20]. [Online]. Available: [https://www.google.pt/search?q=incertezas+estruturadas+e+nao+estruturadas+controlo+usp\[&\]oq=incerte\[&\]aqs=chrome.0.69i59l2j69i57j69i61j0j69i61.3110j0j7\[&\]sourceid=chrome\[&\]ie=UTF-8](https://www.google.pt/search?q=incertezas+estruturadas+e+nao+estruturadas+controlo+usp[&]oq=incerte[&]aqs=chrome.0.69i59l2j69i57j69i61j0j69i61.3110j0j7[&]sourceid=chrome[&]ie=UTF-8) 22
- [2] S. Antunes, “Controlo Ótimo Robusto de Osciladores Caóticos,” Tese de Mestrado, Universidade da Beira Interior, 2009. xiii, 12, 13, 22
- [3] Z. Artstein, “Stabilization with Relaxed Controls,” *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 7, no. 11, pp. 1163-1173, 1983. 12, 22
- [4] H. N. S. Association, “Introduction to rocket and guided missile fire control - part J,” [Último acesso:2017-06-04]. [Online]. Available: <https://archive.hnsa.org/doc/firecontrol/partj.htm> xiii, 7
- [5] Y. Bar Shalom and H. Chen, “Multisensor track-to-track association for tracks with dependent errors,” in *43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Nassau, Bahamas: IEEE, 2004, pp. 2674-2679. 47
- [6] S. M. Bezick, A. J. Pue, and C. M. Patzelt, “Inertial Navigation for Guided Missile Systems,” *Johns Hopkins APL Technical Digest*, vol. 28, no. 4, pp. 331-342, 2010. 3
- [7] F. Blanchini, “Lyapunov methods in robustness: an introduction,” *Università di Udine, Tech. Rep.*, 2009. 12
- [8] K. Bousson “Fundamentos para a Análise da Dinâmica de Voo”, Notas de aula, Universidade da Beira Interior, 2016.18
- [9] D G. Chen, G. Chen, and S. H. Hsu, “Optimal Estimation for Discrete-Time Linear Stochastic Systems,” in *Linear Stochastic Control Systems*. CRC Press, 1995, pp. 157-206. 48
- [10] V. H. L. Cheng and N. K. Gupta, “Advanced Midcourse Guidance for Air-to-Air Missiles,” *Journal Guidance*, vol. 9, no. 2, pp. 135-142, 1986. 3
- [11] F. de Souza, “Sistemas,” Notas de aula, Universidade da Beira Interior, Portugal. 16
- [12] R. M. Dolphus and W. E. Schmitendorf, “A Non-Iterative Riccati Approach to Robust Control Design,” *IEEE*, vol. 35, no. 8, pp. 916-918, 1990. 12
- [13] J. Douglas and M. Athans, “Robust Linear Quadratic Designs with Real Parameter Uncertainty,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 107-111, 1994. 12
- [14] O. Föllinger, “Regulation Technology,” Hüthig Heidelberg, 1990. 12, 22
- [15] B. Fontelle, “Técnica de Controle Robusto Hinfinito Aplicada a um Sistema de Posicionamento Dinâmico,” 2011. 17

- [16] K. Gu, M. A. Zohdy, and N. K. Loh, "Necessary and Sufficient Conditions of Quadratic of Uncertain Linear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 5, pp. 601-604, 1990. 12
- [17] M. A. Hamid, F. Perrin, and D. Mehdi, "Robustness and Optimality of Linear Quadratic Controller for Uncertain Systems," *Automatica*, vol. 32, no. 7, pp. 1081-1083, 1996. 12
- [18] R. Hawes, "Beam Riding Guidance System," 1966. xiii, 7, 8
- [19] F. Imado, T. Kuroda, and S. Miwa, "Optimal Midcourse Guidance for Medium-Range," *Journal Guidance*, vol. 13, no. 4, pp. 603-608, 1990. 3
- [20] F. Jabbari and W. E. Schmitendorf, "A Noniterative Method for the Design of Linear Robust Controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 8, pp. 954-957, 1990. 12
- [21] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. D, pp. 35-45, 1960. 13
- [22] R. E. Kalman and R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *Journal of Basic Engineering*, vol. 83, no. D, pp. 95-108, 1961. 13, 28
- [23] R. Kalman, "Contributions to the Theory of Optimal Control," *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, vol. 5, pp. 102-119, 1960. 12
- [24] F. L. Lewis, D. L. Vrabie, and V. L. Syrmos, *Optimal Control*. John Wiley & Sons, Inc, 2012. 12
- [25] Y. Li, Y. Bar-Shalom, T. Kirubarajan, and M. Yeddanapudi, "Trajectory and Launch Point Estimation for Ballistic Missiles from Boost Phase LOS Measurements," pp. 425-442, 1950. 3
- [26] C. M. Lin and Y. F. Peng, "Missile Guidance Law Design Using Adaptive Cerebellar Model Articulation Controller," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, no. 3, pp. 636-644, 2005. xiii, 6, 8
- [27] X. Liu, Y. Wu, Y. Zhang, and S. Xiao, "A Control Method to Make LQR Robust : A Planes Cluster Approaching Mode," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 12, no. 2, pp. 302-308, 2014. 12
- [28] G. Luenberger, "Observers for Multivariable Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, no. 2, pp. 190-197, 1966. 25
- [29] J. A. Lukacs and O. A. Yakimenko, "Trajectory-Shape-Varying Missile Guidance for Interception of Ballistic Missiles during the Boost Phase," in *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, no. August, 2007, pp. 1-21. 3
- [30] J. Luo and C. E. Lan, "Determination of Weighting Matrices of a Linear Quadratic Regulator," *Journal Guidance*, vol. 18, no. 6, pp. 1462-1463, 2004. 20
- [31] N. Maia, "Estimação de Incertezas em Modelos Dinâmicos pelo Método de Filtragem de Kalman-Bucy Elaborado," *Tese de mestrado, Universidade da Beira Interior*, 2009. 13, 25,

- [32] P. Margarido, "Flight Dynamics and Simulation of a Generic Aircraft for Aeroservoelastic Design," Artigo escolar, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2016. 20
- [33] A. I. Matasov, "The Kalman-Bucy Filter Accuracy in the Guaranteed Parameter Estimation Problem with Uncertain Statistics," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, no. 3, pp. 635-639, 1994. 28
- [34] D. Mclean, "Control System Design Methods II," in Automatic Flight Control Systems. Prentice Hall, 1990, pp. 222-269. 25
- [35] F. W. Nesline and P. Zarchan, "A New Look at Classical vs Modern Homing Missile Guidance," Journal Guidance and Control Conference, pp. 78-85, 1979. 4
- [36] M. L. Ni, "A Note on the Maximum Solutions of Riccati Equations," Automatica, vol. 27, no. 6, pp. 1059-1060, 1991. 12, 19
- [37] M. L. Ni and H. X. Wu, "A Riccati Equation Approach to the Design of Linear Robust Controllers," Automatica, vol. 29, no. 6, pp. 1603-1605, 1993. 12, 19
- [38] J. Nielsen, "Missile Aerodynamics." McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960, pp. 1-6. 2
- [39] NPTEL, "Guidance Phases During Missile Flight," [Último acesso:2017-05-02]. [Online]. Available: <http://nptel.ac.in/courses/101108056/8> xiii, 5, 6
- [40] T. Oliveira, A. Pedro, and P. Encarnação, "Moving Path Following for Unmanned Aerial Vehicles With Applications to Single and Multiple Target Tracking Problems," IEEE Transactions on Robotics, vol. 32, no. 5, pp. 1062 - 1078, 2016. 12
- [41] N. F. Palumbo, R. A. Blauwkamp, and J. M. Lloyd, "Basic Principles of Homing Guidance," Johns Hopkins APL Technical Digest, vol. 29, no. 1, pp. 25-41, 2010. xiii, 2, 3, 4
- [42] H. L. Pastrick, S. M. Seltzer, and M. E. Warren, "Guidance Laws for Short-Range Tactical Missiles," Journal of Guidance and Control, vol. 4, no. 2, pp. 98-108, 1981. 4, 6, 7, 9
- [43] D. Perh, "A study into advanced guidance laws using computational methods," Tese de mestrado, Naval Postgraduate School, 2011. xiii, 9, 10, 11
- [44] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," Systems & Control Letters, vol. 8, pp. 351-357, 1987. 12
- [45] I. R. Petersen and C. V. Hollot, "A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems," Automatica, vol. 22, no. 4, pp. 397-411, 1986. 12, 19
- [46] M. I. Ribeiro and A. Pascoal, "Modelação de Sistemas Físicos Objectivos," Notas de aula, Instituto Superior Técnico, 2008. 16
- [47] L. Robert, "Quadrotor Intercept Trajectory Planning and Simulation," Ph.D. dissertation, Naval Postgraduate School, 2017. 32
- [48] W. E. Schmitendorf, "Design of Observer-based Robust Stabilizing Controllers," Automatica, vol. 24, no. 5, pp. 693-696, 1988. 12

- [49] W. Schmitendorf, "Design Methodology for Robust Stabilizing Controllers," *Journal Guidance*, vol. 10, no. 3, pp. 250-254, 1987. 12
- [50] R. Shaw L, *Fighter Combat:Tactics and Maneuvering*. Naval Institute Press, 1985. 6, 9
- [51] N. C. Shieh, K. Z. Liang, and C. J. Mao, "Robust Output Tracking Control of an Uncertain Linear System via a Modified Optimal," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 117, no. 3, pp. 649-659, 2003. 12
- [52] N. A. Shneydor, *Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control*. Horwood Publishing Chichester, 1998. 7, 9, 11
- [53] H. B. Silveira, "Sinais e Sistemas Lineares I," *Notas de aula, Universidade Federal de Santa Catarina*, 2014. 16
- [54] L. M. Silverman and H. E. Meadows, "Controllability and Observability in Linear Systems," *Journal SIAM Control*, vol. 5, no. 1, pp. 64-73, 1967. 25
- [55] G. Siouris, *Missile Guidance and Control Systems*. Springer, 2004. xiii, xix, 3, 4, 9, 10
- [56] G. M. Siouris, "An Engineering Approach to Optimal Control and Estimation Theory." John Wiley & Sons, Inc, 1996, pp. 219-294. 12, 18, 19
- [57] H. Tan, S. Shu, and F. Lin, "An optimal control approach to robust tracking of linear systems," *International Journal of Control*, vol. 82, no. 3, pp. 525-540, 2009. 12
- [58] E. Tognetti, "Controle Robusto: Análise e Controle via LMIs," *Notas de aula, Universidade de Brasília*, 2014. 19
- [59] A. Trofino, "Sistemas Lineares," *Apostila, Universidade Federal de Santa Catarina*. [Online]. Available: www.das.ufsc.br/labsil 15
- [60] S. C. Tsay, "Robust Control for Linear Uncertain Systems via Linear Quadratic State Feedback," *Systems & Control Letters*, vol. 15, pp. 199-205, 1990. 12
- [61] A. Vargas, J.Val, and E.Costa,"Controle de Horizonte Retrocedente de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos para o Problema de Rastreamento com Alvos Dinâmicos," *Controle e Automação*, vol.16,no.4,pp.435-448,2005. 21
- [62] R. T. Yanushevsky, "Approach to Robust Control Systems Design," *Journal Guidance*, vol. 14, no. 1, pp. 218-220, 1990. 12
- [63] R. Yanushevsky, *Modern Missile Guidance*. CRC Press, 2008. xiii, 1, 3, 11
- [64] P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*. AIAA, Inc, 2012. xiii, 11
- [65] F. Zuben, "Caracterização de Sistemas Lineares e Técnicas de Linearização," *Notas de aula, Universidade Estadual de Campinas*. xiii, 16

Apêndice A

Algoritmos matemáticos auxiliares

A.1 Algoritmo de Butcher

O algoritmo de Butcher é um método muito usado neste trabalho na obtenção de estados x a partir da equação diferencial \dot{x} .

Este algoritmo surge do método de Runge Kutta de ordem seis, ou melhor, carece do cálculo de seis funções (k_1, \dots, k_6) para estabelecer o estado seguinte x_{n+1} . Pelo facto da aproximação deste método ser de sexta ordem implica que o método apresente resultados muito precisos. Neste contexto, a aplicação do mesmo reside na resolução de equações diferenciais ordinárias do tipo:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.1})$$

Tendo em conta as condições iniciais $a(t_0, x_0)$ e controlo u , a solução do sistema ao longo do tempo é dada por:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_2 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (\text{A.2})$$

Em que as funções de k_i apresentam o seguinte formato:

$$\begin{aligned} k_1 &= dt \cdot f(x_k, u_k) \\ k_2 &= dt \cdot f\left(x_k + \frac{1}{4}k_1, u_k\right) \\ k_3 &= dt \cdot f\left(x_k + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, u_k\right) \\ k_4 &= dt \cdot f\left(x_k - \frac{1}{2}k_2 + k_3, u_k\right) \\ k_5 &= dt \cdot f\left(x_k + \frac{3}{16}k_1 + \frac{9}{16}k_4, u_k\right) \\ k_6 &= dt \cdot f\left(x_k - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, u_k\right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Resta apenas referir que dt corresponde ao passo de integração e deve ser um valor pequeno de modo a assegurar a convergência do método e que instantes em que se calcula cada x_{n+1} é equivalente a $t_{n+1} = t_n + dt$.

A.2 Programação linear quadrática

Esta temática vem de encontro à necessidade de determinar o valor de controlo u que minimiza o critério de desempenho dois.

De uma forma geral, este processo é um caso específico da programação não-linear e consiste em resolver um problema de otimização (maximização ou minimização) quadrática sujeito a

restrições.

Na aplicação deste trabalho em particular, pretende-se resolver o problema 2.22. Para tal é usado o comando de Matlab, `quadprog(H, f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)`, que resolve o problema seguiuamente descrito:

$$\min_u \frac{1}{2} x^T H x + f^T x$$

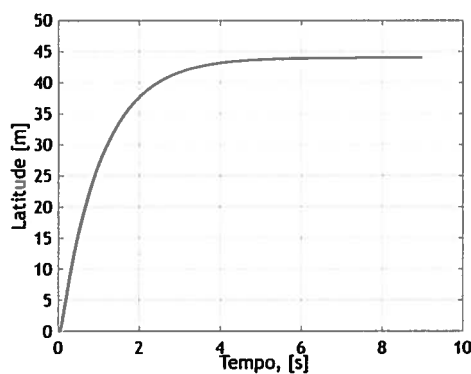
$$s.a \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Em que lb e ub correspondem ao controlo mínimo, u_{min} e máximo, u_{max} ao qual o controlo está restrito. No caso, como não existem as primeira e segunda restrições, então o terceiro, quarto, quinto e sexto elementos são matrizes vazias. Relativamente a H e f por comparação ao critério dois de desempenho J pode-se afirmar que f corresponde a K e H corresponde a R .

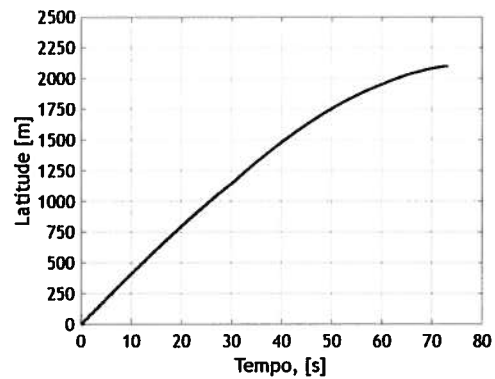
Apêndice B

Gráficos de comparação entre controlador LQR clássico e controlador obtido deterministicamente com condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

B.1 $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

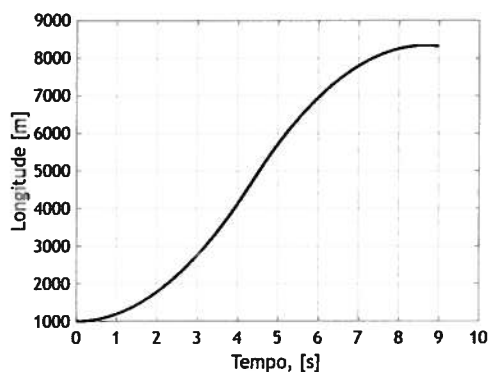


(a) Controlador LQR clássico.

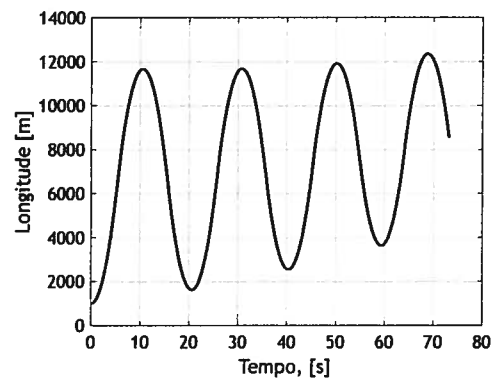


(b) Controlador determinístico.

Figura B.1: Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

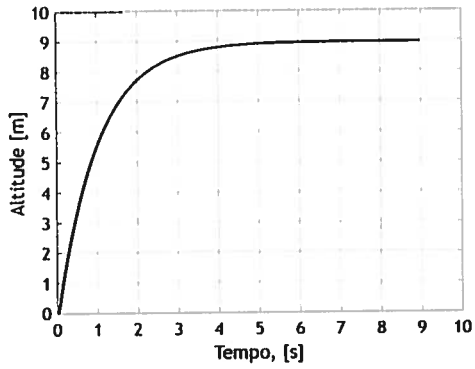


(a) Controlador LQR clássico.

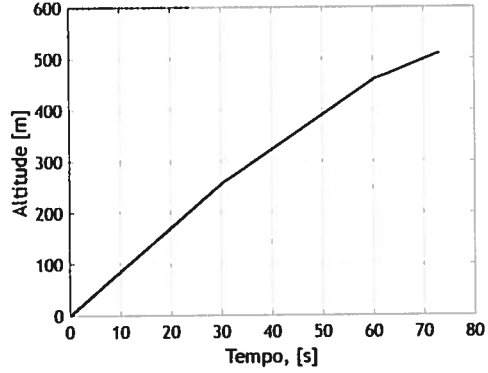


(b) Controlador determinístico.

Figura B.2: Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

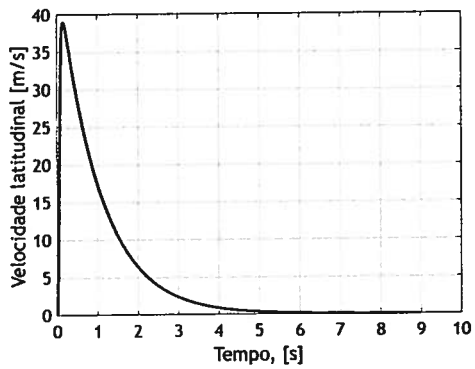


(a) Controlador LQR clássico.

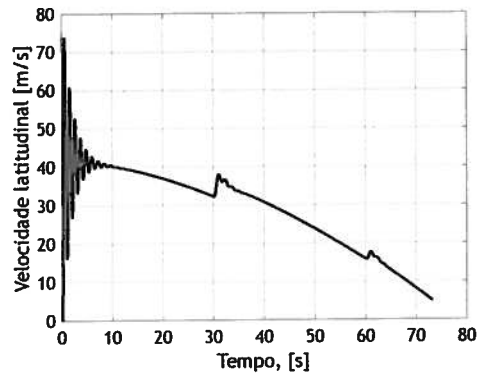


(b) Controlador determinístico.

Figura B.3: Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



(a) Controlador LQR clássico.



(b) Controlador determinístico.

Figura B.4: Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

$$x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

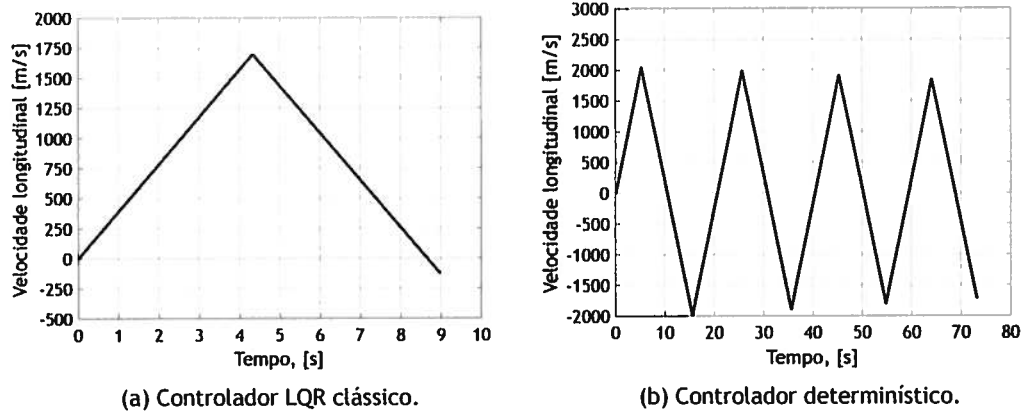


Figura B.5: Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

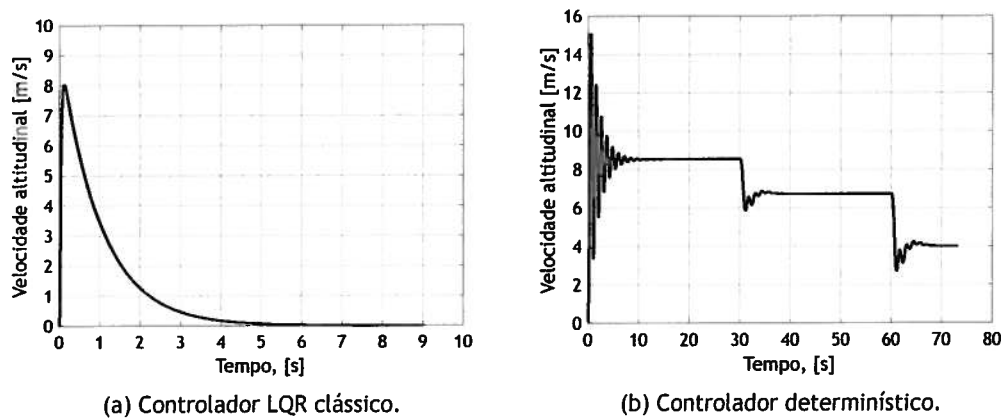


Figura B.6: Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

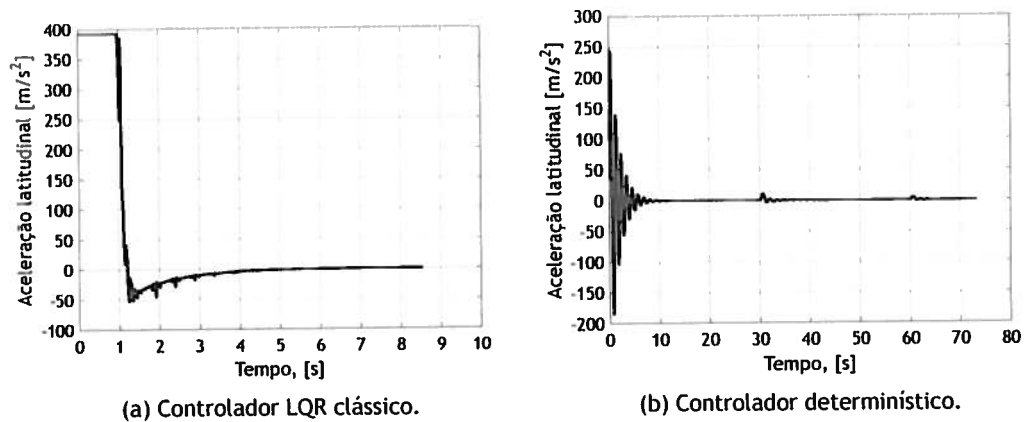


Figura B.7: Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

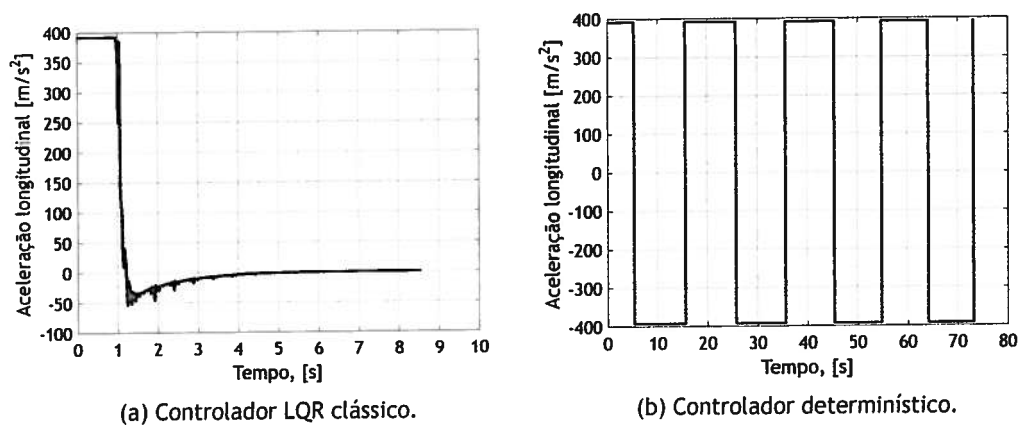


Figura B.8: Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

$$x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

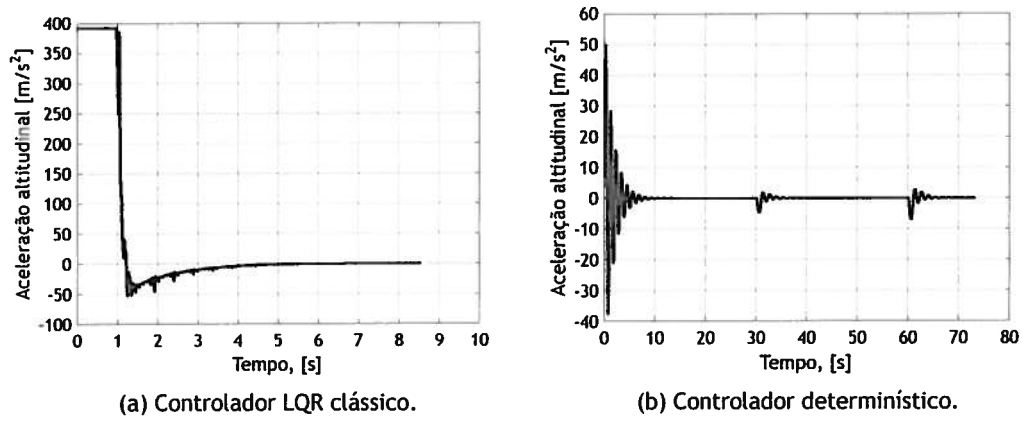
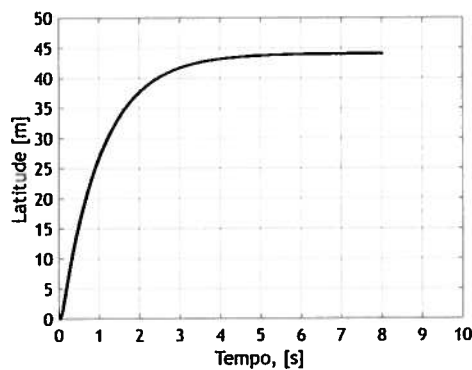


Figura B.9: Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

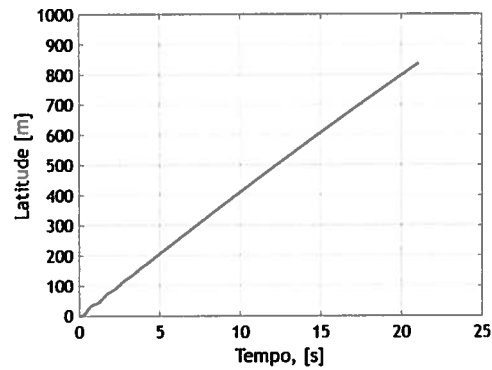
Apêndice C

Gráficos de comparação entre controlador LQR clássico e controlador obtido deterministicamente com condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

C.1 $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

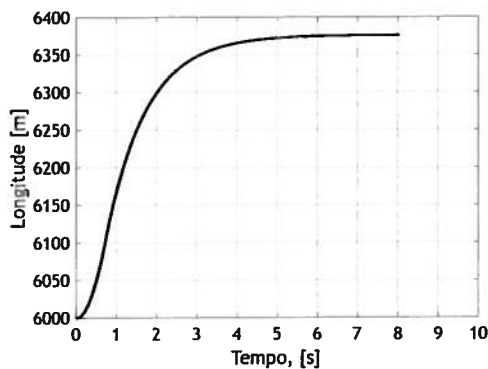


(a) Controlador LQR clássico.

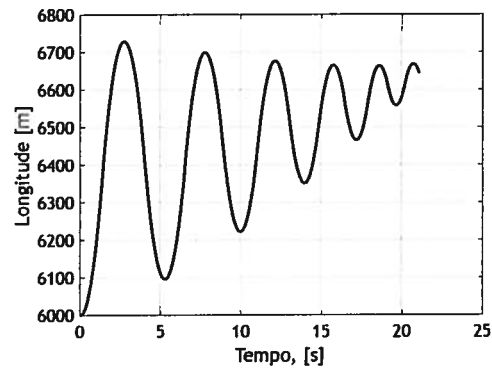


(b) Controlador determinístico.

Figura C.1: Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



(a) Controlador LQR clássico.



(b) Controlador determinístico.

Figura C.2: Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

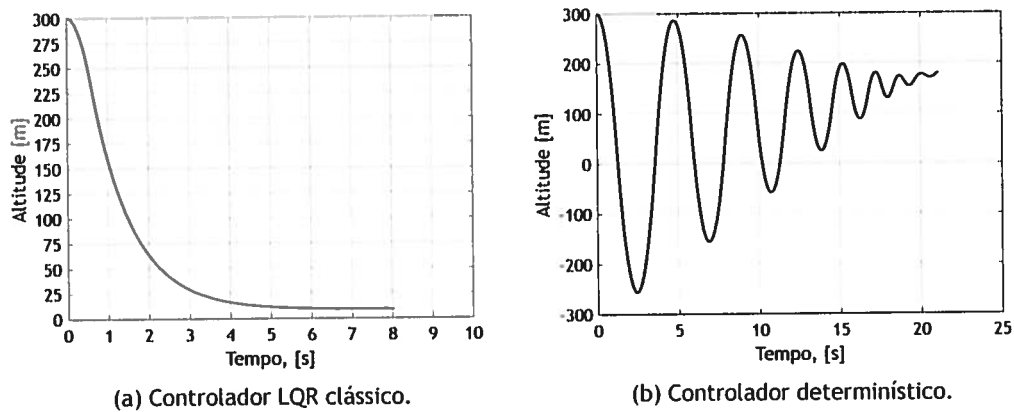


Figura C.3: Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

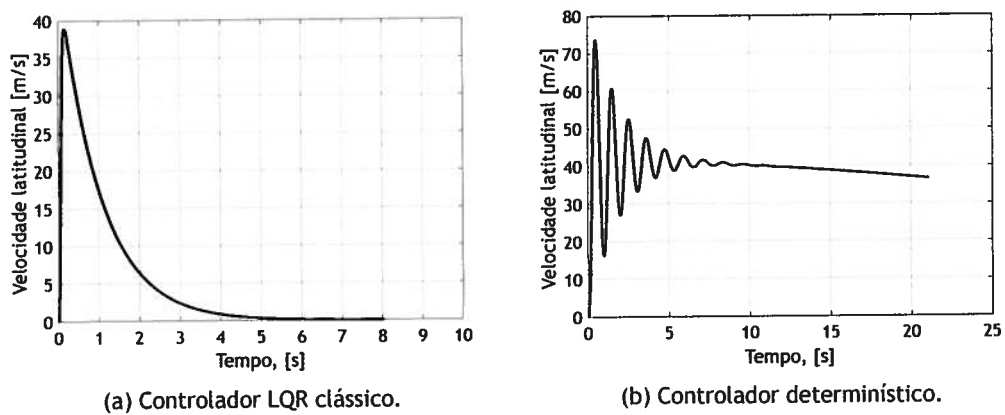


Figura C.4: Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

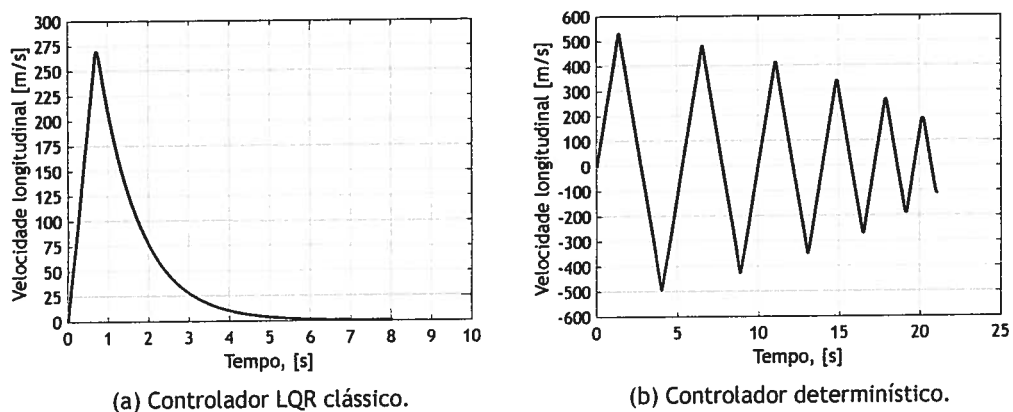


Figura C.5: Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

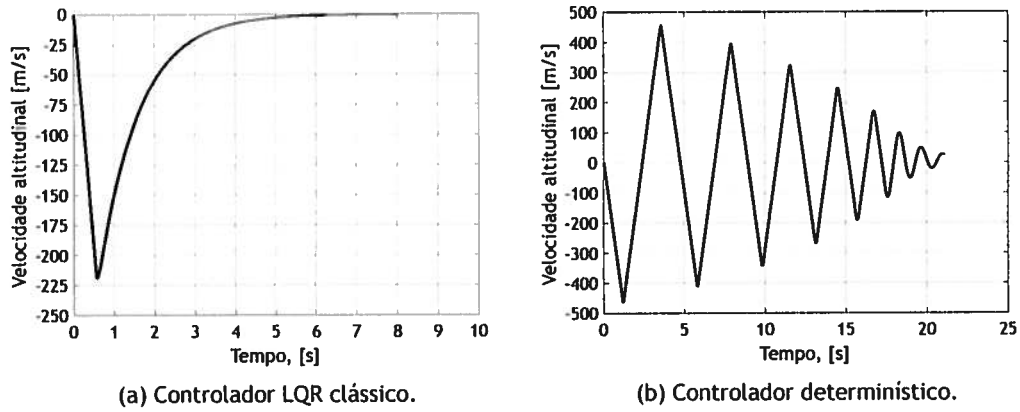


Figura C.6: Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

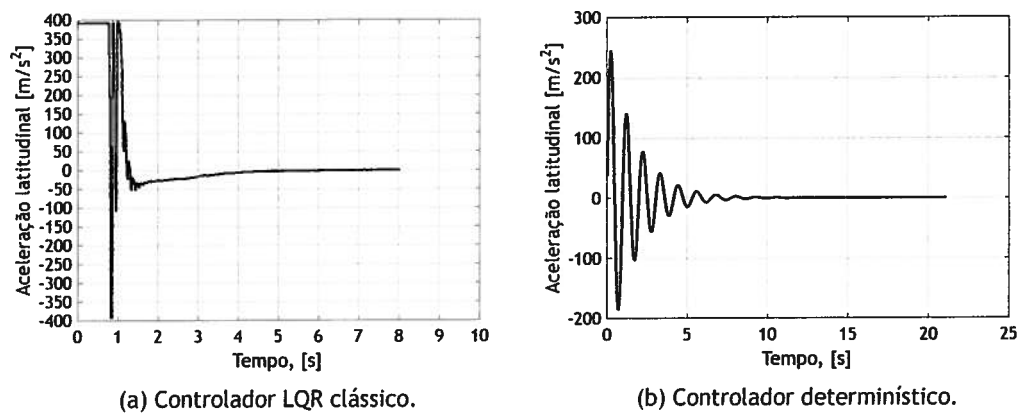


Figura C.7: Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

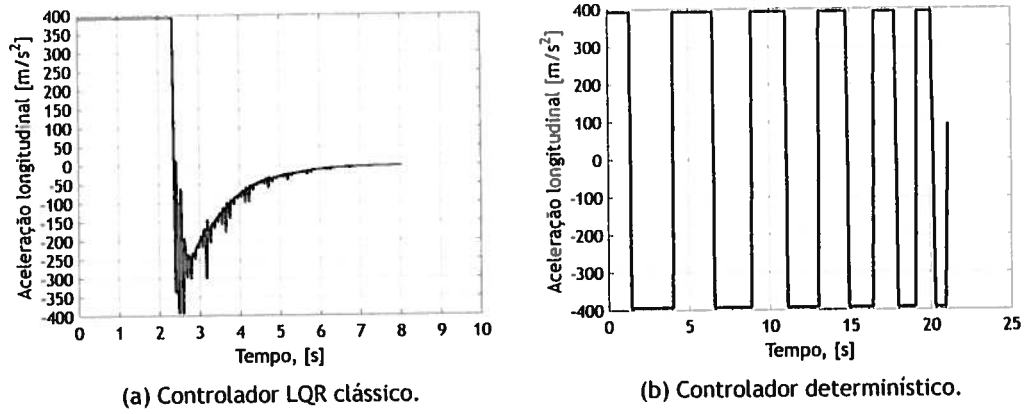


Figura C.8: Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

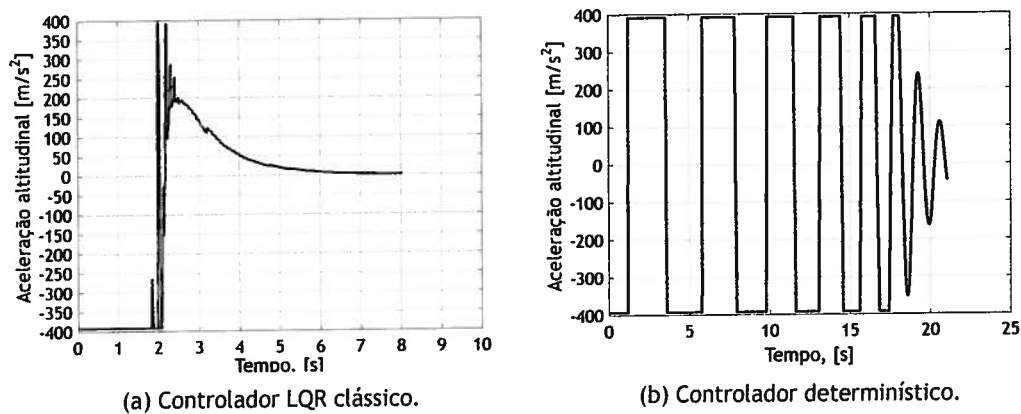
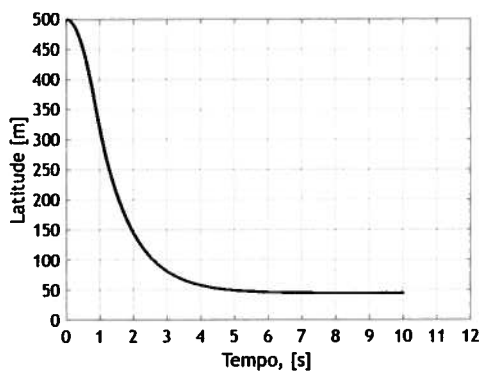


Figura C.9: Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 300 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

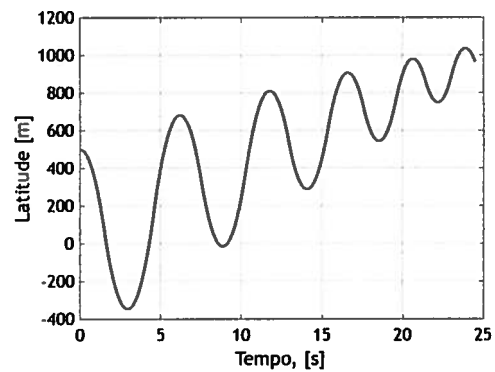
Apêndice D

Gráficos de comparação entre controlador LQR clássico e controlador obtido deterministicamente com condição $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

D.1 $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

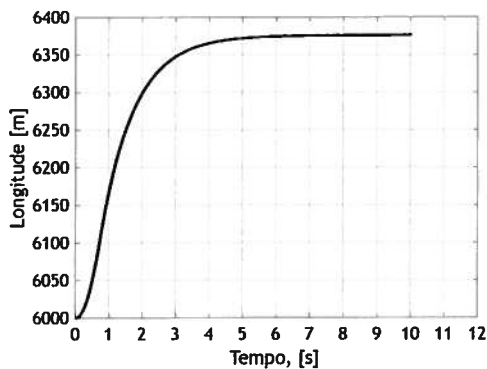


(a) Controlador LQR clássico.

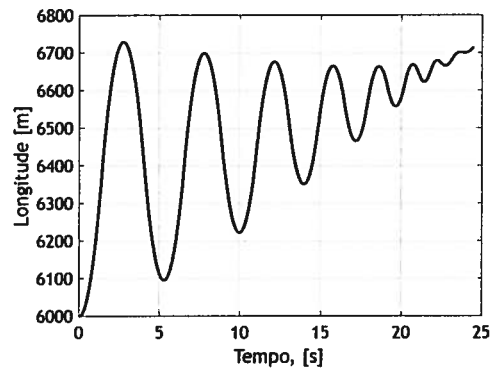


(b) Controlador determinístico.

Figura D.1: Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

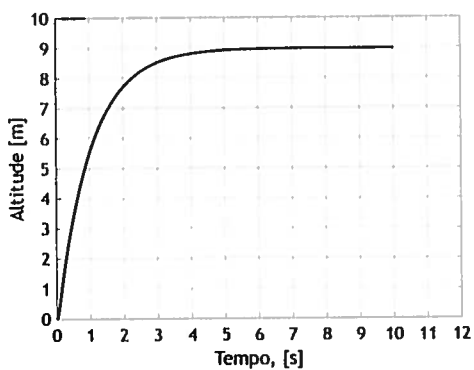


(a) Controlador LQR clássico.

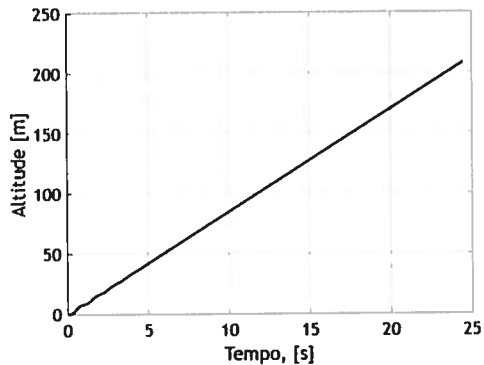


(b) Controlador determinístico.

Figura D.2: Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

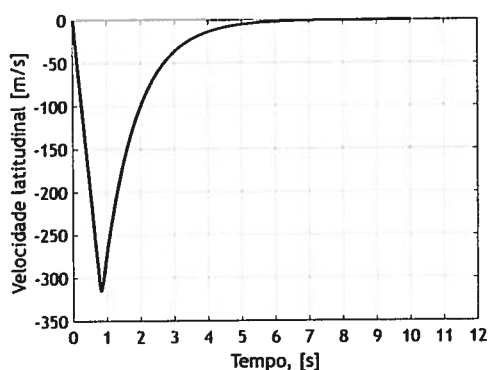


(a) Controlador LQR clássico.

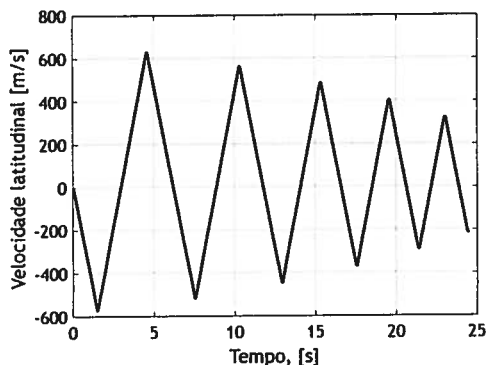


(b) Controlador determinístico.

Figura D.3: Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

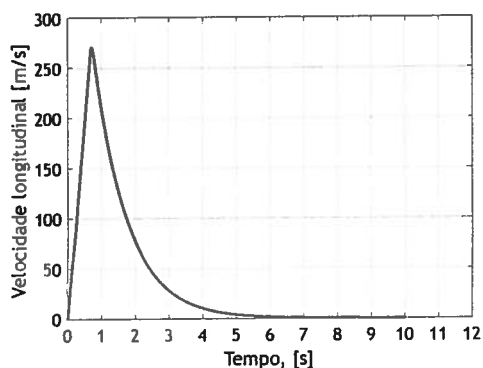


(a) Controlador LQR clássico.

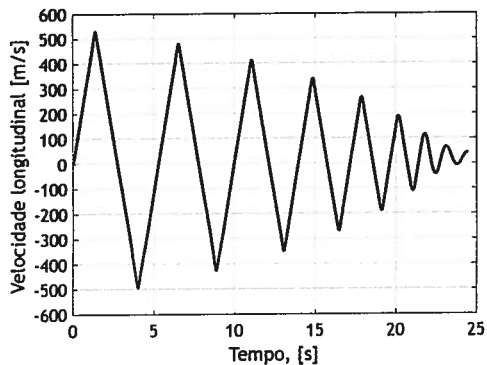


(b) Controlador determinístico.

Figura D.4: Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



(a) Controlador LQR clássico.



(b) Controlador determinístico.

Figura D.5: Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

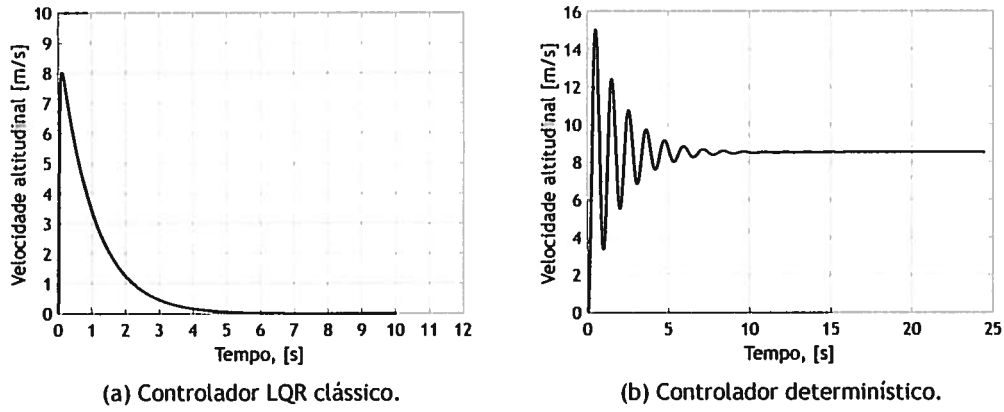


Figura D.6: Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

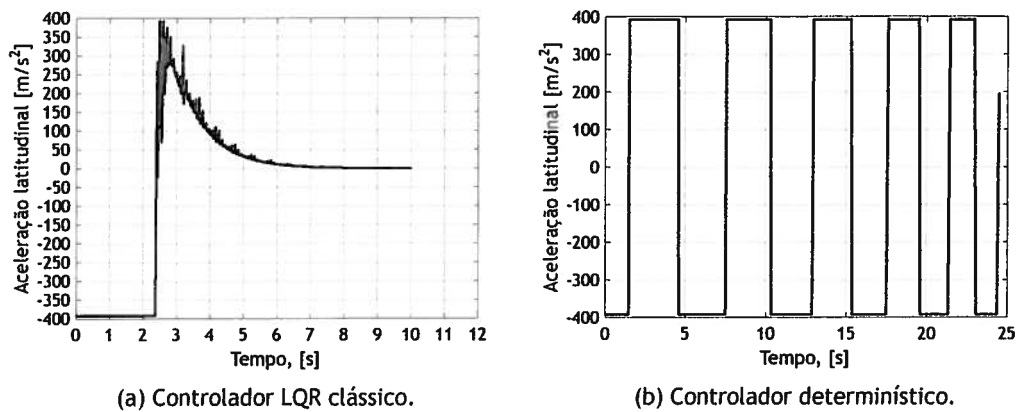
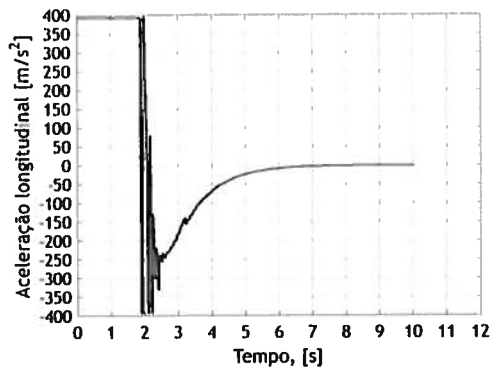
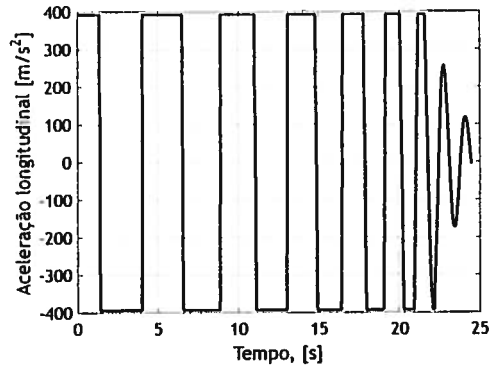


Figura D.7: Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

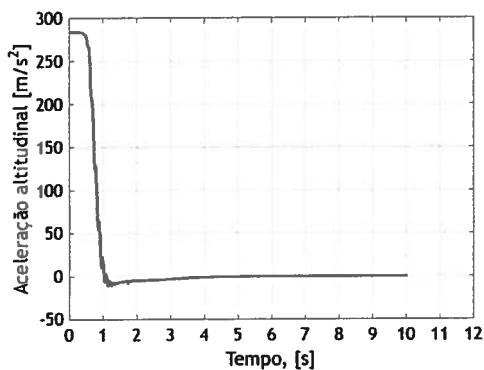


(a) Controlador LQR clássico.

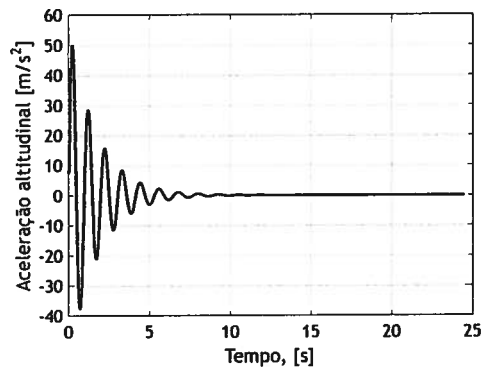


(b) Controlador determinístico.

Figura D.8: Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



(a) Controlador LQR clássico.



(b) Controlador determinístico.

Figura D.9: Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador obtido deterministicamente (b) com a seguinte condição inicial $x = [500 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Apêndice E

Gráficos de comparação entre controlador LQR clássico e controlador LQR robusto com condição inicial $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

E.1 $x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

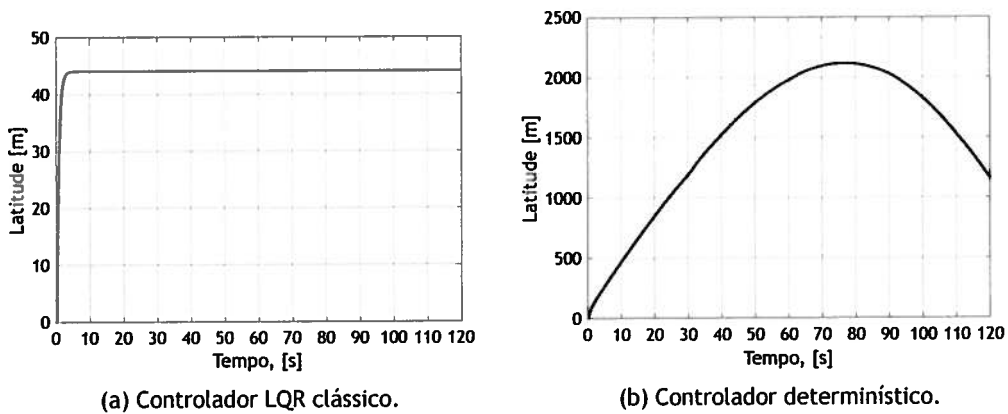


Figura E.1: Gráfico da latitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

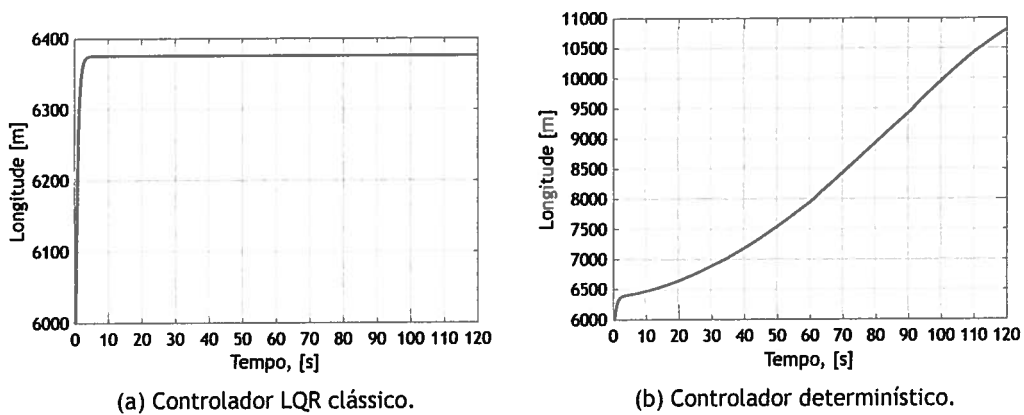
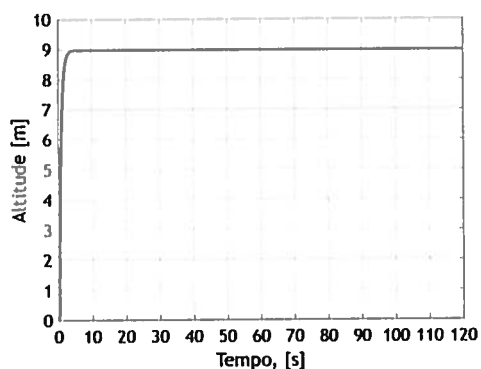
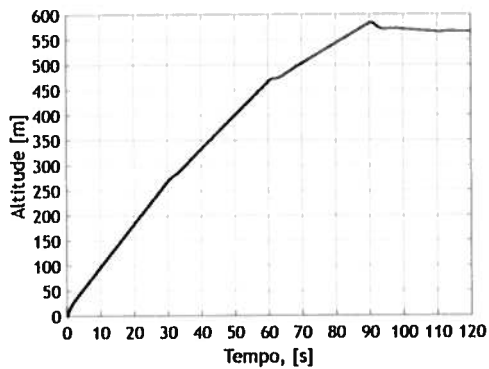


Figura E.2: Gráfico da longitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

$$x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

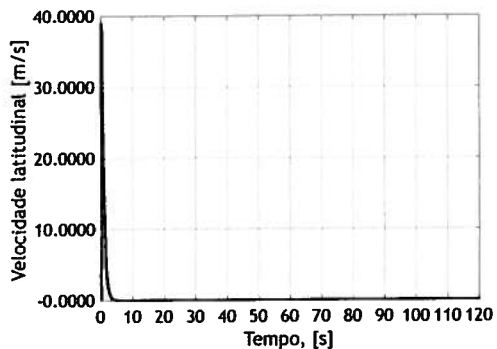


(a) Controlador LQR clássico.

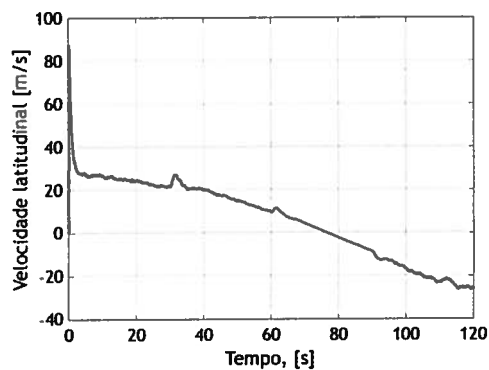


(b) Controlador determinístico.

Figura E.3: Gráfico da altitude do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

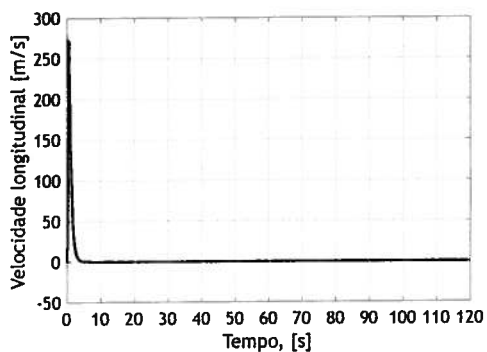


(a) Controlador LQR clássico.

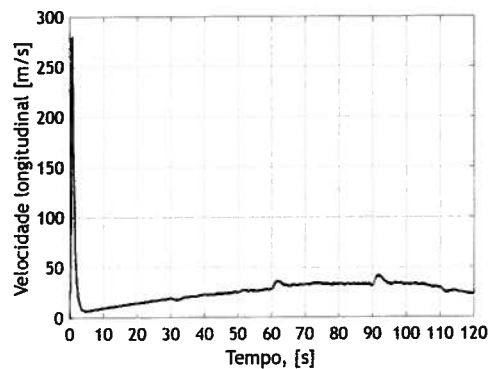


(b) Controlador determinístico.

Figura E.4: Gráfico da velocidade latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



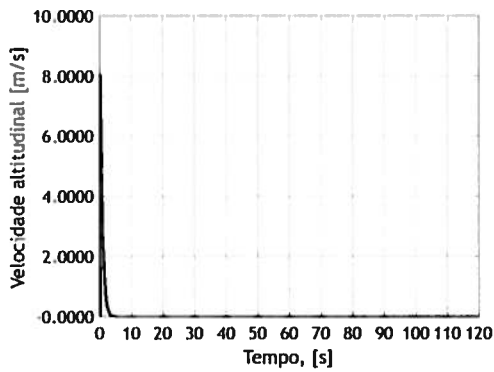
(a) Controlador LQR clássico.



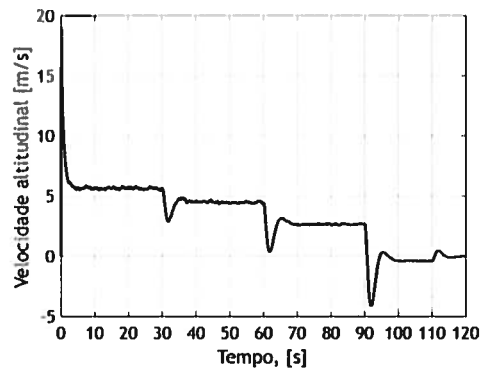
(b) Controlador determinístico.

Figura E.5: Gráfico da velocidade longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

$$x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

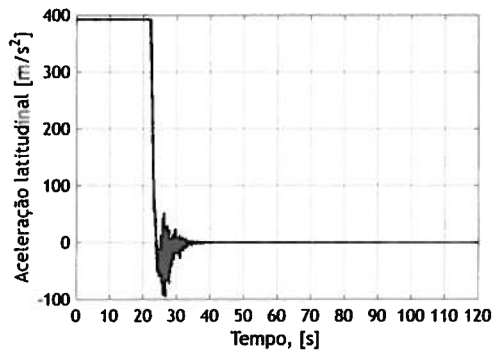


(a) Controlador LQR clássico.

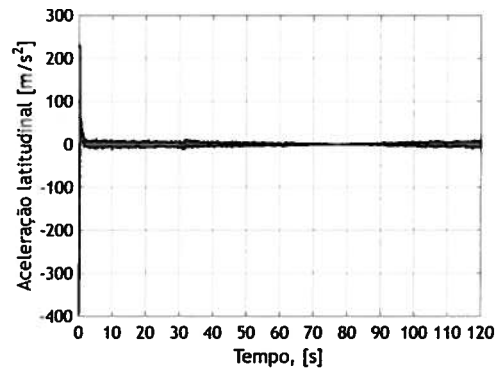


(b) Controlador determinístico.

Figura E.6: Gráfico da velocidade altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

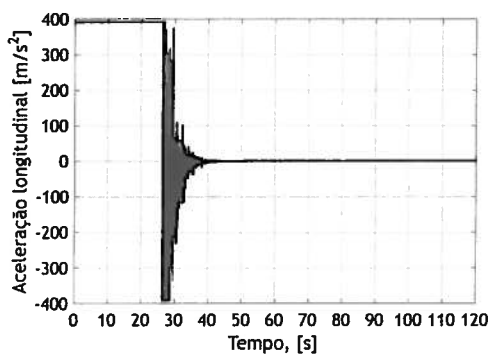


(a) Controlador LQR clássico.

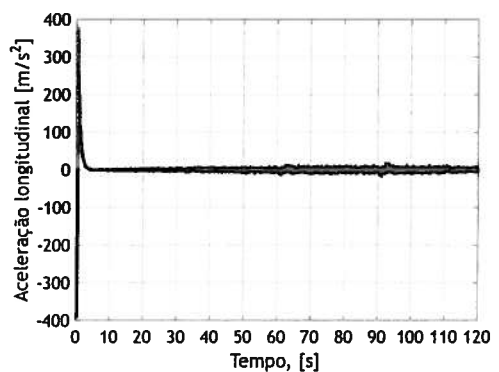


(b) Controlador determinístico.

Figura E.7: Gráfico da aceleração latitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



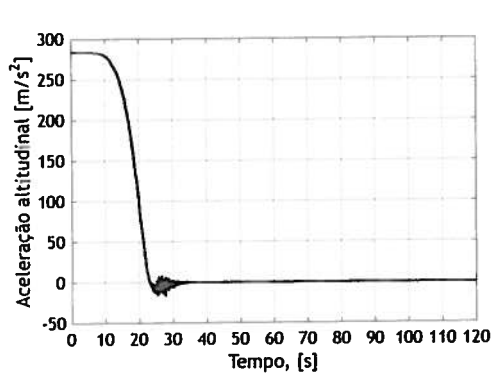
(a) Controlador LQR clássico.



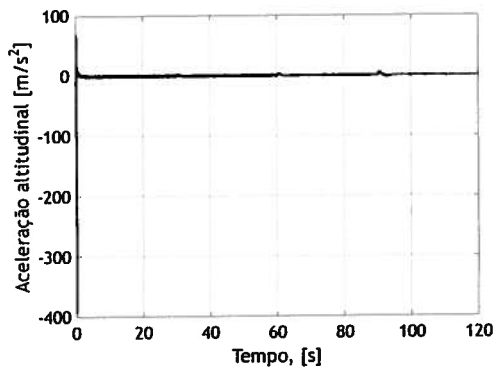
(b) Controlador determinístico.

Figura E.8: Gráfico da aceleração longitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x = [0 \ 0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

$$x = [0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$



(a) Controlador LQR clássico.



(b) Controlador determinístico.

Figura E.9: Gráfico da aceleração altitudinal do míssil em função do tempo, sujeito ao controlador LQR clássico (a) e ao controlador LQR robusto (b) com a seguinte condição inicial $x=[0 \ 6000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.