

1 – INTRODUÇÃO

Até à década de 60, não se considerava a importância do cálculo da torção para o dimensionamento, pois considerava-se que esta era absorvida de alguma forma pelas redistribuições internas de esforços nas estruturas, sendo proporcionadas pela reserva de resistência que os elevados coeficientes de segurança proporcionavam (Armstrong, 1956 [3]). Uma excepção eram as “estacas-parafuso (*screw piles*)”, onde o seu dimensionamento era feito com especial atenção à torção e à compressão.

Para Armstrong, em 1956 [3], os projectos da Ponte de Waterloo (Londres) e do Royal Festival Hall (Londres), foram dois casos reais de estruturas onde os esforços de torção foram explicitamente considerados no processo de dimensionamento.

Como a temática da torção é raramente escolhida no âmbito de dissertações e dada a sua importância no dimensionamento de estruturas, a necessidade de uma ferramenta de cálculo que permita caracterizar a sua fenomenologia no âmbito de vigas de betão armado torna-se indispensável. Por isso, esta dissertação tem como objectivo aliar as novas tecnologias, com a necessidade de criar uma ferramenta que permite dar a conhecer e compreender as etapas que constituem a caracterização da torção.

O estudo da torção é feito à luz das seguintes teorias: Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviada, Teoria do Tubo Fino de Bredt e o Modelo de Trelça de Ângulo Constante e Variável.

Um dos objectivos desta dissertação é analisar teoricamente o comportamento global à torção até à rotura de vigas de betão armado com secção rectangular oca. A opção por este tipo de secção prende-se com o facto de constituir um tipo de secção comum quando os efeitos torcionais são importantes. Outro objectivo consiste em elaborar um procedimento de cálculo, na forma de um aplicativo computacional, com vista a prever teoricamente a capacidade resistente e as curvas de comportamento até à rotura, designadamente as curvas T (momento torsor) – θ (rotação transversal). Com esse objectivo, a aproximação teórica realizada encontrar-se-á dividida por fases, cada uma delas identificando-se com uma fase particular do comportamento das vigas à torção observado experimentalmente, designadamente:

- análise elástico linear em regime não fissurado (Estado I)
- análise elástico linear em regime fissurado (Estado II)
- análise última e não linear (Estado III) tendo em conta o *Softening Effect*.

PARTE I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1 – TEORIAS BASE PARA SECÇÕES SUJEITAS À TORÇÃO

A resistência à torção em secções rectangulares ocas, nas várias fases de comportamento, vai ser calculada nesta dissertação recorrendo à aproximação de várias teorias, descritas nas secções seguintes.

1.1 – TEORIA DA ELASTICIDADE

Utilizando as hipóteses de Bach [4], aquando da aplicação da teoria elástica de St. Venant é possível derivar a seguinte equação:

$$\tau_{max} = \frac{T x_{max}}{\sum_3^1 x^3 y} \quad (1)$$

em que:

τ_{max} - tensão tangencial máxima

T - Momento torsor

x_{max} - maior espessura dos rectângulos constituintes

x - largura da secção

y - altura da secção

Assumindo que a rotura ocorre quando $\tau_{max} = f'_t$, o momento torsor resistente pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$T_{np} = \sum \frac{x^3 y}{3 x_{max}} f'_t \quad (2)$$

Se todas as componentes rectangulares da secção transversal possuírem a mesma espessura, $x_{max} = x$, então:

$$T_{np} = \sum \frac{x^2 y}{3} f'_t \quad (3)$$

em que:

T_{np} - momento torsor resistente de uma viga de betão sem armaduras

f'_t - resistência à tracção do betão

Para secções rectangulares ocas, o factor de rigidez de torção C é calculado da seguinte forma:

$$C = \frac{4A^2h}{u} \quad (4)$$

em que:

A - área limitada pela linha média da parede da secção oca

h - espessura da parede de secção oca

u - perímetro da linha média da parede da secção oca

Em resultado da torção, surgem tensões de tracção no betão. De uma forma geral, a tensão tangencial máxima que surge sempre a meio da face maior da secção, pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_T} \quad (5)$$

em que W_T é o *módulo elástico de torção*.

Para secções rectangulares ocas, a tensão τ_{max} é calculada da seguinte forma:

$$\tau_{max} = \frac{T}{2Ah} \quad (6)$$

O momento torsor de fissuração, T_{cr} , será o valor do momento para o qual é atingida a tensão resistente à tracção do betão, f_{ctm} , isto é:

$$\tau = \sigma_I = -\sigma_{II} = \frac{T_{cr}}{W_T} = f_{ctm} \quad (7)$$

Portanto, o momento torsor de fissuração para secções rectangulares ocas é dado pela seguinte equação:

$$T_{cr} = W_T f_{ctm} \quad (8)$$

1.2 – TEORIA DA FLEXÃO ENVIESADA

Embora tenha sido efectuada uma tentativa para derivar a resistência à torção de secções abertas baseada no mecanismo de rotura da flexão enviesada, a complexidade matemática resultante tornou esta metodologia impraticável na prática. Para simplificar a solução, Hsu em 1968 [12], considerou-se a seguinte hipótese simplificativa: a resistência à torção de uma secção aberta é a soma das resistências à torção de cada rectângulo componente. Assim:

$$T_{np} = \sum \frac{x^2 y}{3} (0,85 f_r) \quad (9)$$

$$f_r = 21 \left(1 + \frac{10}{x^2} \right)^3 \sqrt{f'_c} \text{ para } x \geq 4 \quad (10)$$

em que:

f'_c - resistência uniaxial do betão

f_r - módulo de rotura do betão

x e y tem como unidades, *in*

f'_c e f_r tem como unidades, *psi*

Comparando a equação 3 com a equação 9, para o caso de rectângulos componentes com espessura uniforme, pode ser observado que estas são idênticas, excepto o facto de na teoria da flexão enviesada ser utilizado $0,85 f_r$ em vez de f'_t utilizado na teoria elástica. O parâmetro $\sum \frac{x^2 y}{3}$ foi adoptado pelo código Americano a partir de 1971 [1].

Hsu comprovou a equação 9 através de uma série de ensaios em 10 vigas [12]. Esta série de vigas inclui duas vigas rectangulares, quatro vigas em “L” e quatro vigas em “T”.

O momento tursor de fissuração, T_{cr} , pode ser calculado através da Teoria da Flexão Enviesada, para vigas de betão armado com secção oca, uma vez que não se entra com a influência das armaduras de torção nesta fase de comportamento. Desta forma, T_{cr} será igual à resistência à torção da viga correspondente sem armaduras de torção, T_{np} , que pode ser calculada, para secções cheias pela seguinte equação (Hsu, 1984 [14]):

$$T_{cr} = T_{np} = 6(x^2 + 10)y \left(\sqrt[3]{f'_c} \right) \left(\frac{4h}{x} \right) \text{ para } h \leq \frac{x}{4} \quad (11)$$

Se $h \geq \frac{x}{4}$, deve-se considerar $h = \frac{x}{4}$.

1.3 – TEORIA DE BREDT PARA TUBOS DE PAREDE FINA

De acordo com St. Venant, uma barra prismática sujeita à torção produzirá somente tensões tangenciais circulatorias. A tensão tangencial será nula no eixo da torção e será incrementada até um valor máximo à superfície (excepto em cantos agudos).

De um ponto de vista prático a secção transversal mais eficiente para resistir à torção seria então um tubo fino, onde todo o material constituinte se encontra totalmente solicitado. Em 1896 Bredt [6] derivou umas equações muito simples para tubos finos. Tais equações serão também muito úteis para a torção em elementos de betão armado.

Tal como foi assumido pela hipótese de St. Venant no caso de barras sólidas, Bredt também considerou que a forma da secção transversal de um tubo fino prismático permanecerá inalterada após a aplicação do momento torsor. A deformação por empenamento perpendicular à secção transversal será também uniforme ao longo do comprimento do tubo. Tais hipóteses implicam que todas as componentes de tensões devem ser nulas, excepto as componentes tangenciais.

A relação entre o momento torsor, T , e a tensão tangencial, τ , pode ser derivada directamente a partir do equilíbrio de momentos em torno do eixo z (eixo de desenvolvimento da viga).

$$T = \oint qr \, ds \quad (12)$$

$$T = q \oint r \, ds \quad (13)$$

$$T = q2A \quad (14)$$

$$T = 2\tau Ah \quad (15)$$

ou,

$$\tau = \frac{T}{2Ah} \quad (16)$$

em que o parâmetro A é a área limitada pela linha média da parede, incluindo a parte oca e o módulo de torção elástico (W_T) é calculado por $2Ah$.

Para uma secção fechada, a integração do deslocamento diferencial por empenamento ao longo de todo o perímetro deve ser igual a zero:

$$\oint dw = -\theta \oint r ds + \oint \gamma ds = 0 \quad (17)$$

$$\oint \gamma ds = \theta \oint r ds \quad (18)$$

Tendo em conta que $\gamma = \frac{\tau}{G}$, a equação 18 fica:

$$\oint \tau ds = 2G\theta A \quad (19)$$

Substituindo τ de acordo com a equação 16, vem:

$$T = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{h}} G\theta \quad (20)$$

em que C é a constante de torção para um tubo fino com espessura de parede variável.

$$C = \oint \frac{ds}{h} \quad (21)$$

$$C = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{h}} \quad (22)$$

Para uma secção rectangular oca (secção em caixão) vem:

$$u = 2x_1 + 2y_1 \quad (23)$$

$$C = \frac{2x_1^2 y_1^2}{x_1 + y_1} = \frac{4A^2 h}{u} \quad (24)$$

em que, x_1 e y_1 , são os lados correspondentes ao rectângulo definido pela linha média e A representa a área limitada pela mesma. O perímetro da área delimitada pela linha média é representado por u .

1.4 – MODELO EM TRELIÇA COM ÂNGULO VARIÁVEL

O modelo teórico mais recente, com o propósito de unificar o dimensionamento à torção, foi o Modelo de Treliza com Ângulo Variável complementado com a influência da fissuração diagonal na resistência à compressão do betão nas escoras, apresentado por Hsu e Mo em 1985 [15, 16]. Esta teoria resultou dos desenvolvimentos sucessivos, por vários autores, do modelo de treliza inicial de Rausch [18].

Resumem-se de seguida as etapas mais importantes que conduziram ao desenvolvimento do Modelo de Treliza com Ângulo Variável.

As condições de compatibilidade do modelo de treliza espacial a 45° de Rausch foram estudadas por Hsu em 1973 [13]. Fazendo uso de tais condições de compatibilidade, em adição às equações de equilíbrio de Rausch, Hsu derivou o módulo de distorção e a rigidez de torção após a fissuração.

O modelo de treliza de 45° foi generalizado por Lampert e Thurlimann em 1969 [17] para vigas sujeitas à torção. Estes autores assumiram que o ângulo de inclinação das escoras de betão podia desviar-se de 45° e que a teoria da plasticidade seria aplicável aos elementos de betão armado. Nestas condições, os referidos autores puderam explicar o facto de que, como demonstrado em vários ensaios experimentais, ambas as armaduras (longitudinal e transversal) podiam entrar em cedência, em torção pura, mesmo se as armaduras respectivas não respeitarem o princípio da igualdade de volume.

Uma vez que o ângulo podia afastar-se de 45°, Lampert e Thurlimann designaram a sua teoria de Modelo de Treliza com Angulo Variável. Foram derivadas três equações de equilíbrio que incorporam o ângulo variável das escoras de betão. Na análise de um dado elemento, o ângulo das escoras de betão é determinado pela magnitude relativa das forças de cedência nas armaduras transversais e longitudinais. No processo de dimensionamento, no entanto, este ângulo pode ser arbitrariamente escolhido para se conseguir a máxima economia na selecção da armadura transversal e longitudinal, provido que as verificações em serviço estejam garantidas.

O Modelo de Treliza com Ângulo Variável foi posteriormente estudado por Elfgren em 1972 [9]. Este autor observou que a teoria do Modelo de Treliza com Ângulo Variável era muito similar à teoria do campo de tracções apresentado por Wagner em 1929 [21] para uma viga constituída por um perfil metálico de alma fina. Após ocorrer a encurvadura da alma por corte, uma viga metálica comporta-se como uma treliza, com a alma a absorver somente tensões de tracção na direcção diagonal. Numa viga de betão

armado, é assumido que a alma de betão, após ocorrer a fissuração, absorve somente tensões de compressão. Por esta razão, Elfgren chamou à sua teoria de *teoria do campo de tensões de compressão*. Esta teoria é baseada no Modelo de Treliça com Ângulo Variável assumindo que o ângulo das fissuras é idêntico ao ângulo de inclinação do campo de compressões.

A teoria de Lampert e Thurlimann e a teoria de Elfgren podem, de uma forma geral, ser designadas de *teoria da plasticidade do campo de tensões de compressão*, porque tais tensões são baseadas na teoria da plasticidade.

O modelo da treliça com ângulo variável foi desenvolvido de uma forma algo diferente por Collins em 1973 [8]. Em vez de utilizar a teoria da plasticidade, este autor focou a sua atenção na compatibilidade de deformações do modelo de treliça. Como resultado, Collins derivou uma equação de compatibilidade para determinar o ângulo do campo de tensões de compressão. Esta equação de compatibilidade, que é idêntica à de Wagner, permitiu prever as condições de deformação utilizando o círculo de Mohr. Collins chamou à sua teoria de *teoria do campo diagonal de compressões*.

Em adição às equações de compatibilidade e às equações de equilíbrio no modelo de treliça de ângulo variável torna-se necessário assumir a Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão à compressão nas escoras. Quando inicialmente era assumida a Curva $\sigma - \varepsilon$ convencional, Curva esta obtida a partir do ensaio à compressão de provetes cilíndricos padrão, verificou-se que o valor previsto para a resistência à torção era bastante não conservativo. Utilizando uma Curva $\sigma - \varepsilon$ que tem em conta o *softening effect* (influência do corte nas escoras de betão, provocando fissuração diagonal e diminuindo a resistência à compressão do betão), Hsu e Mo em 1985 [15, 16] conseguiram prever correctamente a resistência à torção bem como a respectiva deformação.

A teoria de Collins e a teoria de Hsu e Mo podem ser designadas, de uma forma geral, de *teorias da compatibilidade do campo de compressões*, porque utilizam a compatibilidade de deformações do modelo de treliça.

1.4.1 – Vantagens e hipóteses do Modelo de Treliça com Ângulo Variável

As vantagens do Modelo de Treliça com Ângulo Variável e da teoria do campo de compressões, no que toca às vigas sujeitas à torção pura, podem ser resumidas da seguinte forma:

1. A teoria fornece um conceito claro de como uma viga de betão armado resiste à torção pura após a fissuração, à semelhança do que acontece com o esforço transversal;
2. O efeito do pré-esforço pode ser incluído de uma forma lógica;
3. A teoria permite a previsão da deformação de um elemento ao longo do historial da carga. Isto constitui uma vantagem em relação à teoria da flexão enviesada que fornece somente a carga última;
4. A teoria fornece uma precisão aceitável quando comparada com os resultados de ensaios experimentais.

Quando comparadas com as disposições adoptadas nas edições do código americano até 1995, baseadas na teoria da flexão enviesada, as disposições regulamentares para o dimensionamento baseadas no Modelo de Treliza com Ângulo Variável têm, para o caso da torção pura, a vantagem de serem aplicáveis a vigas com secções irregulares, mesmo sem componentes rectangulares.

Finalmente, refere-se que o Modelo de Treliza com Ângulo Variável e a teoria do campo de compressões são baseados nas seguintes hipóteses:

1. O modelo de treliza é constituído por escoras diagonais de betão com um ângulo α e por varões de aço longitudinais e transversais;
2. As escoras diagonais de betão suportam a tensão principal de compressão. A resistência ao corte das escoras de betão é desprezada;
3. As barras longitudinais e transversais suportam apenas tracção axial, isto é, o “efeito de ferrolho” é desprezado;
4. A resistência à tracção do betão é desprezada;
5. Para uma secção cheia sujeita à torção, o núcleo de betão não contribui para a resistência à torção.

2 – IDEALIZAÇÃO TEÓRICA DA CURVA $T-\theta$

De uma forma geral, a observação das Curvas $T-\theta$ experimentais resultantes de ensaios de vigas em caixão em betão armado sujeitas à torção pura até à rotura, tais como as obtidas por Luís Bernardo em 2003 [5], permitem, para taxas de armaduras regulamentares e independentemente da resistência do betão, desenhar uma Curva $T-\theta$ típica. Na referida curva típica é possível distinguir três zonas (Zonas 1, 2 e 3), correspondentes a fases de comportamento distintas: fase elástico linear em regime não fissurado (estado I), fase elástico linear em regime fissurado (estado II), e fase não linear (estado III).

Os pontos característicos escolhidos para caracterizar uma Curva $T-\theta$ qualquer são definidos pelas suas coordenadas $(\theta; T)$, no respectivo referencial, representado na Fig. 1.

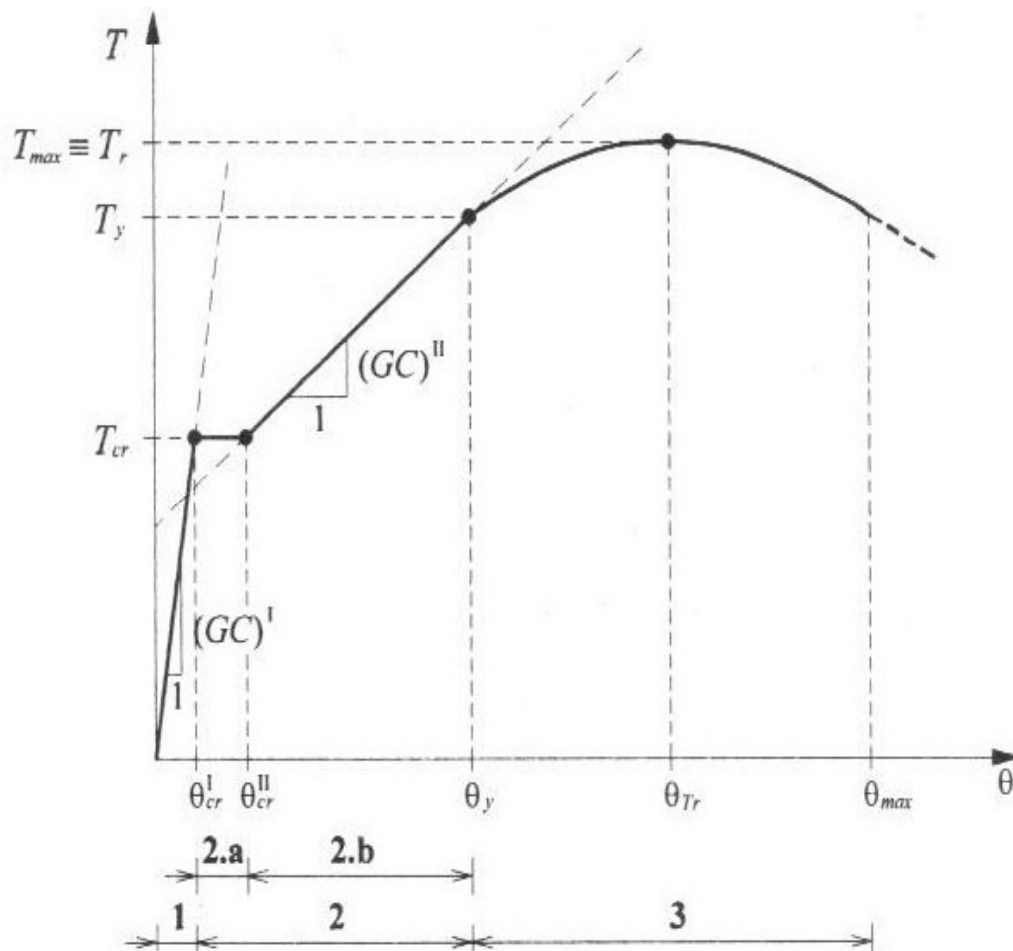


Fig. 1 – Curva Teórica $T-\theta$ típica [5]

A Zona 1 da curva típica da Fig. 1 corresponde ao Estado I da viga, ou seja, à zona do comportamento da viga antes de ser atingido o momento torsor de fissuração. Em tal zona, o declive da Curva $T-\theta$ representa a rigidez elástica de St. Venant $((GJ))'$. Nesta fase, a Curva $T-\theta$ pode ser aproximada a uma recta que tem início no ponto de coordenadas (0;0) e termina no ponto de coordenadas $(\theta'_{cr}; T_{cr})$, onde T_{cr} e θ'_{cr} representam, respectivamente, o momento torsor de fissuração e a rotação de torção, por unidade de comprimento da viga, correspondente a T_{cr} .

A Zona 1 é caracterizada com uma análise elástico linear em regime não fissurado. Os modelos teóricos adoptados neste trabalho para caracterizar a Zona 1 basear-se-ão na Teoria da Elasticidade, na Teoria da Flexão Enviesada e na Teoria de Tubo Fino de Bredt.

Depois da viga atingir o momento torsor de fissuração, a Curva $T-\theta$, após um aumento brusco da rotação para o momento torsor constante e igual a T_{cr} , desenvolve-se novamente de uma forma aproximadamente recta até um determinado nível de momento torsor. A partir deste nível a Curva $T-\theta$ tende a perder a sua linearidade. Na Fig. 1, a Subzona 2.a da curva de comportamento corresponde ao incremento brusco da rotação referido, enquanto que a Subzona 2.b corresponde ao desenvolvimento recto da Curva $T-\theta$, cujo declive representa a rigidez de torção pós fissuração $((GJ))''$, ou seja, em Estado II. A Subzona 2.a estabelece a ligação entre a Zona 1 e Subzona 2.b. O conjunto das duas Subzonas 2.a e 2.b corresponde ao comportamento da viga em regime fissurado e, a anterior à perda do comportamento linear. Recorde-se que, para vigas com secções em caixão, a Subzona 2.a representada na Fig. 1 pode não existir ou, então, ser muito menos evidenciada (não apresenta um patamar horizontal), comparativamente a vigas com secções cheias. A caracterização da viga em Estado II será efectuada por intermédio de uma análise elástico linear em regime fissurado.

O ponto da Curva $T-\theta$ a partir do qual deixa de ser válido o comportamento linear em Estado II corresponde em geral, à ocorrência da primeira de duas situações distintas. Para a primeira situação, o ponto corresponde ao instante em que pelo menos uma das armaduras de torção (armadura longitudinal ou transversal) entra em cedência. Para a segunda situação, o ponto corresponde ao momento em que o betão comprimido nas escoras das vigas começa a entrar em regime não linear, devido às elevadas tensões nele instaladas, podendo ocorrer este comportamento inclusive antes da cedência das armaduras de torção. Esta segunda situação ocorre em vigas com eladas taxas de armaduras de torção.

Para qualquer caso, o comportamento das vigas passa a ser não linear até estas atingirem o momento torsor máximo, constituindo assim a Zona 3 da curva de

comportamento. O modelo adoptado neste trabalho para caracterizar a Zona 3 baseia-se na analogia da treliça espacial com ângulo variável, tendo em consideração o comportamento não linear dos materiais e o *softening effect* (influência da fissuração diagonal no betão comprimido das escoras).

As três zonas de comportamento identificadas na Curva $T-\theta$, da Fig. 1 serão estudadas separadamente.

3 – MODELOS TEÓRICOS PARA A ANÁLISE

Através dos modelos teóricos descritos seguidamente é possível construir a Curva teórica $T-\theta$ de forma a ilustrar o comportamento de uma viga de betão armado sujeita à torção.

3.1 – ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR EM REGIME NÃO FISSURADO (ESTADO I)

Com uma ligeira correcção, a *Teoria da Elasticidade* pode ser usada para caracterizar o comportamento de uma viga na fase não fissurada (Estado I). A rotação por unidade de comprimento, θ , é dada pela seguinte equação:

$$\theta = \frac{T}{K(GJ)^I} = \frac{T}{K_t^I} \quad (25)$$

em que:

T - momento torsor externo aplicado na viga

$(GJ)^I$ - rigidez de torção (Estado I)

K - factor minorativo ($0,7 \leq K \leq 1$)

O factor minorativo (K) tem em conta que, antes de ser atingida a fissuração efectiva, os ensaios experimentais mostram que a queda da rigidez é já cerca de 20 a 40% em relação a $(GJ)^I$ (Leonhardt, 1969 [7]).

Como a armadura transversal corrente é constituída por cintas perpendiculares ao eixo das vigas, a rigidez $(GJ)^I$ pode ser calculada desprezando a influência desta (Appleton *et al*, 1984 [2]). Sabendo o módulo de distorção, $G = \frac{E_c}{2(1+\nu)}$, sendo E_c o módulo de elasticidade do betão e ν o coeficiente de Poisson, e considerando $K=0,7$ e $\nu=0,2$ em Estado I, obtém-se um valor aproximado para K_t^I de:

$$K_t^I = 0,3E_cJ^I \quad (26)$$

Para secções rectangulares, o factor de rigidez de torção C é calculado a partir da Teoria de St. Venant:

$$C = \beta x^3 y \text{ (secção cheia)} \quad (27)$$

$$C = \frac{4A^2 h}{u} \text{ (secção oca)} \quad (28)$$

em que:

x, y - menor e maior dimensão da secção cheia, respectivamente

β - coeficiente de St. Venant

A - área limitada pela linha média da secção oca ($A = x_1 y_1$)

u - perímetro da linha média da parede da secção oca: $u = 2x_1 + 2y_1$

h - espessura da parede da secção oca

Em resultado da torção, surgem tensões de tracção no betão. A tensão tangencial máxima, que surge sempre a meio da face maior da secção, pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_T} = \frac{T}{\alpha x^2 y} \text{ (secção cheia)} \quad (29)$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_T} = \frac{T}{2Ah} \text{ (secção oca)} \quad (30)$$

Onde W_T é o *Módulo Elástico de Torção* e α é um coeficiente de St Venant. O momento tursor de fissuração, T_{cr} , será o valor do momento para o qual é atingida a tensão resistente à tracção do betão, f_{ctm} , isto é:

$$T_{cr} = W_T f_{ctm} \quad (31)$$

A resistência média à tracção no betão (f_{ctm}) e o módulo de elasticidade do betão (E_c) podem ser calculados através de expressões de correlação com a resistência à compressão do betão (parâmetro normalmente fácil de obter experimentalmente). O momento tursor de fissuração, T_{cr} , pode também ser calculado para vigas de betão armado da seguinte forma (f'_c em psi, x e y em in) ((Hsu,1968 [11]):

$$T_{cr} = T_{np} = 6y(x^2 + 10)^3 \sqrt{f'_c} \quad (32)$$

Para secções ocas com espessura de parede constante h , vem (f'_c em psi, x , y e h em in) (Hsu,1984 [14]):

$$T_{cr} = T_{np} = 6(x^2 + 10)y \left(\sqrt[3]{f'_c} \right) \left(\frac{4h}{x} \right) \text{ para } h \leq \frac{x}{4} \quad (33)$$

Se $h \geq \frac{x}{4}$, deve-se considerar $h = \frac{x}{4}$.

Outra forma de calcular o momento torsor de fissuração consiste em usar a *Teoria do Tubo Fino de Bredt* para tubos homogéneos (Bredt, 1896 [6]). Segundo Hsu e Mo em 1985 [15], é possível obter a seguinte expressão aplicável a vigas de betão armado com secção rectangular oca (f'_c em psi, t em in e A_c em in²):

$$T_{cr} = 2A_c t \left(2,5 \sqrt{f'_c} \right) \quad (34)$$

em que:

A_c - área limitada pelo perímetro exterior da secção (inclui a parte oca);

t - espessura da parede da secção oca.

A equação anterior também pode ser aplicada a secções rectangulares cheias, tomando $t = \frac{1,2A_c}{p_c}$, em que p_c (em in) é o perímetro exterior da secção transversal.

Apesar dos estudos mostrarem em geral que as armaduras de torção, formadas por cintas perpendiculares ao eixo da viga, possuem um efeito desprezável na rigidez à torção (Appleton, 1984 [2]), a presença destas atrasa efectivamente a fissuração.

Em 1968, Hsu [10] demonstrou que, apesar do momento torsor de fissuração T_{cr} ser pouco afectado pela percentagem total de armadura de torção, este pode ser calculado de forma mais realista através da seguinte equação:

$$T_{cr,ef} = (1 + 4\rho_{tot})T_{cr} \quad (35)$$

A percentagem total de armadura de torção, ρ_{tot} , é calculada somando as percentagens de armadura longitudinal (ρ_l) e transversal (ρ_t):

$$\rho_l = \frac{A_l}{A_c} \quad (36)$$

$$\rho_t = \frac{A_t u}{A_c s} \quad (37)$$

em que:

A_l - área total de armadura longitudinal

A_t - área de um ramo da cinta transversal

A_c - área da secção limitada pelo perímetro exterior (incluindo a parte oca)

s - espaçamento longitudinal entre cintas

u - perímetro da linha média das cintas

A rotação correspondente a T_{cr} , em unidades *Rad/m*, é calculada através da seguinte fórmula:

$$\theta_{cr}^I = \frac{T_{cr,ef}}{K_t^I} \quad (38)$$

3.2 – ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR EM REGIME FISSURADO (ESTADO II)

Para derivar a rigidez de torção após a fissuração ($(GJ)^{II}$) para uma viga de betão armado, Hsu em 1973 [13] considerou um tubo de betão armado, com uma espessura uniforme. A validade de tal analogia foi comprovada por Hsu por intermédio de resultados de ensaios experimentais que mostraram que o comportamento torsional pós-fissuração não é afectado pelo núcleo de betão da secção. De acordo com a *Teoria de Tubo Fino de Bredt*, a tensão tangencial pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\tau = \frac{T}{2Ah} \quad (39)$$

em que:

A - área limitada pela linha média da armadura transversal

h - espessura da parede do tubo de betão armado

Para avaliar as tensões e extensões nas armaduras e no betão introduzidos pela tensão tangencial e após a fissuração do elemento, o tubo de betão armado pode ser idealizado através da treliça espacial de Rausch para simular o elemento após a fissuração (Rausch, 1929 [18]) A partir de tal análise e a partir da compatibilidade de

deformações, Hsu em 1973 mostra que a rigidez de torção após fissuração $((GJ)^{II})$, para o caso de secções rectangulares, pode ser obtida através da seguinte equação :

$$(GJ)^{II} = \frac{E_s x_1^2 y_1^2 xy}{(x_1 + y_1)^2 \left[\frac{2nxy}{(x_1 + y_1)h} + \frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_t} \right]} \quad (40)$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (41)$$

em que, x_1 , e y_1 é a maior e menor dimensão das cintas, respectivamente, referidas ao eixo dos ramos.

A espessura efectiva, h_e , a considerar nos cálculos para o caso de elementos com secção transversal cheia ou oca pode ser calculado, segundo Hsu em 1973 [13], através da seguinte expressão empírica baseada em resultados experimentais:

$$h_e = 1,4(\rho_l + \rho_t)x \quad (42)$$

Hsu em 1973 [13] estabeleceu também, a partir de resultados experimentais, que a ordenada na origem do ponto de intersecção da recta correspondente à fase elástico linear em regime fissurado e o eixo de ordenadas podia ser obtida a partir de ηT_c , sendo η um coeficiente e T_c um momento torsor dado por (f'_c em psi, x, y em in):

$$T_c = \frac{x^2 y}{3} 2,4 \sqrt{f'_c} \quad (43)$$

$$\eta = 0,57 + 2,86 \frac{h}{x} \quad (44)$$

O parâmetro h é a espessura da parede e x é a menor dimensão da secção. Para uma secção cheia, $\eta=2$ uma vez que $\frac{h}{x} = 0,5$.

3.3 – ANÁLISE NÃO LINEAR

A partir do instante em que pelo menos uma das armaduras de torção entra em cedência ou quando o betão comprimido nas escoras entra em fase de comportamento

não linear, deixa de ser válida a análise elástico linear em regime fissurado (Estado II). Para caracterizar o comportamento não linear de uma viga de betão armado à torção será usado a Teoria da Treliza Espacial com Ângulo Variável tendo em conta o *Softening Effect* (Robinson e Demorieux, 1972 *cit in* Hsu, 1984 [19]) através do coeficiente de redução (K).

A Fig. 2 representa a Curva $\sigma - \varepsilon$ tendo em conta as equações 45 e 49 e o *softening effect*.

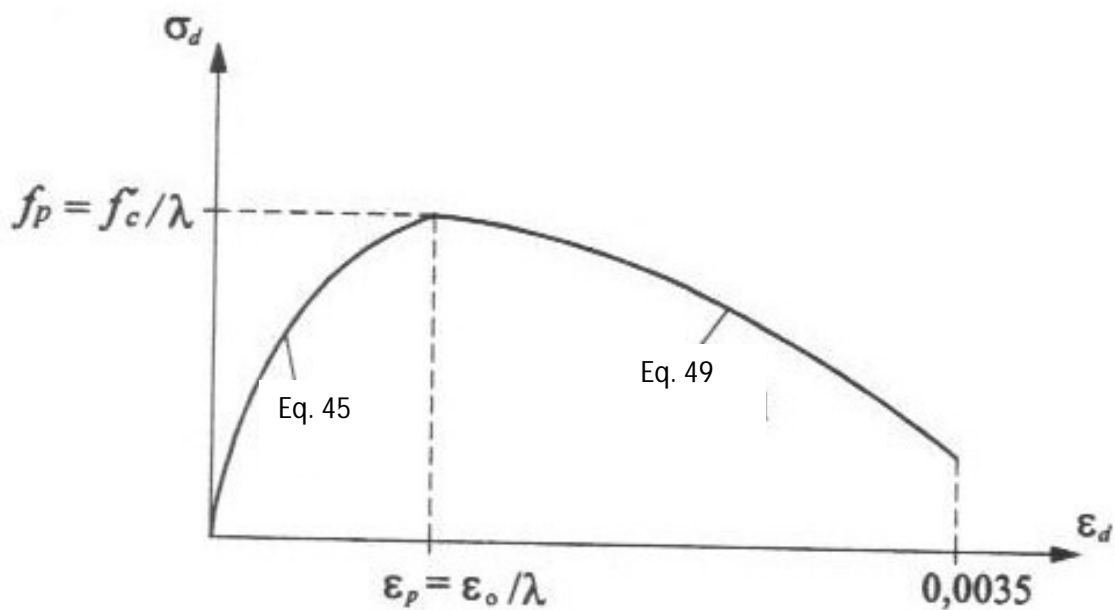


Fig. 2 – Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão tendo em conta o *softening effect* [20]

O *softening effect* do betão deve ser considerado na análise da resistência e do comportamento de um elemento de betão armado sujeito ao corte ou à torção. Na prática de dimensionamento, este efeito diminuidor de resistência é tido em conta através da quantificação da chamada *resistência efectiva do betão*.

Em 1985, Hsu e Mo [16] verificam que a curva de Vecchio e Collins é a mais apropriada para elementos de betão armado sujeitos à torção.

Em conclusão, o *softening effect* do betão nas escoras de betão sobrestima a resistência à torção de um elemento de betão armado. Tendo em conta este efeito, não há necessidade de serem estabelecidas hipóteses arbitrárias em relação à eficiência da armadura, à posição da linha média do fluxo de corte ou à não consideração do betão de recobrimento.

A partir do valor experimental das extensões ε_l e ε_t , a cada instante, as tensões nas barras longitudinais, f_l , e transversais, f_t , podem ser calculadas utilizando a relação $\sigma - \varepsilon$ para o aço das armaduras, isto é: $f_l = E_s \varepsilon_l$ e $f_t = E_s \varepsilon_t$. As tensões no betão na direcção longitudinal, σ_l , e transversal, σ_t , puderam então ser calculadas através de $\sigma_l = \rho_l f_l$ e $\sigma_t = \rho_t f_t$, em que ρ_l e ρ_t representam a taxa de armadura na direcção longitudinal e transversal, respectivamente. Utilizando os valores das tensões calculadas no betão, σ_l e σ_t , juntamente com a tensão tangencial aplicada, τ , que é conhecida nos ensaios, foi possível estabelecer o círculo de Mohr para tensões, onde os pontos correspondentes ao círculo de Mohr, são os pontos de coordenadas $(-\sigma_l; \tau)$, $(-\sigma_t; \tau)$, e o ponto $(-\sigma_d; 0)$.

Assim, a sua localização permite conhecer a tensão principal de compressão do betão. Esta tensão principal de compressão no betão, σ_d , e a correspondente extensão principal, ε_d , fornece um ponto da Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão à compressão nas escoras. Acrescentando a tensão tangencial, τ , por incrementos e medindo as extensões (ε_l , ε_t e ε_{45°) para cada nível de carga, foi obtida a Curva $\sigma - \varepsilon$ completa para as escoras de betão tendo em conta o corte.

Com base nos resultados dos ensaios, Vecchio e Collins [20] propuseram a seguinte expressão para a parte ascendente da Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão de alta resistência na direcção principal da compressão,

$$\sigma_d = f'_c \left[2 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} - \lambda \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (45)$$

em que f'_c é a resistência à compressão do betão obtida em provetes cilíndricos padrão, ε_0 é a extensão correspondente ao pico de tensão, f'_c , na Curva $\sigma - \varepsilon$ e λ é um coeficiente empírico dado por:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma_m}{\varepsilon_d} - \nu} \quad (46)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson que pode ser considerado igual a 0,3 [13] e γ_m é a distorção máxima num elemento do painel sujeito ao corte, demonstrando-se que $\gamma_m = \varepsilon_l + \varepsilon_t + 2\varepsilon_d$.

A curva caracterizada pela equação 45 constitui uma modificação da Curva $\sigma - \varepsilon$ parabólica comum utilizada na prática. A modificação surge pelo facto do segundo

termo, $\left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0}\right)^2$, estar afectado pelo coeficiente empírico λ . Se se definir σ_d e ε_p como sendo, respectivamente, o pico de tensão resistente à compressão do betão e a extensão correspondente a esse mesmo pico de tensão, então:

$$\sigma_d = \frac{1}{\lambda} f'_c \quad (47)$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{\lambda} \varepsilon_0 \quad (48)$$

Assim a equação 45 é válida para o intervalo de deformação $\varepsilon_d \leq \varepsilon_p$.

Após o pico de resistência, a parte descendente da Curva $\sigma - \varepsilon$ ($\varepsilon_d > \varepsilon_p$) é expressa pela seguinte equação:

$$\sigma_d = f_p (1 - \eta^2) \quad (49)$$

em que:

$$\eta = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_p}{2\varepsilon_0 - \varepsilon_p} \quad (50)$$

O coeficiente $\frac{1}{\lambda}$ traduz o efeito da fissuração diagonal (*softening effect*) que reduz a resistência do betão comprimido nas escoras a partir do valor padrão f'_c para $\frac{f'_c}{\lambda}$.

A construção da Curva teórica $T - \theta$ com base na teoria do *Teoria da Treliça com Ângulo Variável* requer as seguintes três equações de equilíbrio para determinar o momento torsor T , a espessura efectiva t_d da parede de secção oca e o ângulo α das escoras diagonais de betão em relação ao eixo longitudinal da viga (Hsu, 1984 [14]).

$$T = 2A_0 t_d \sigma_d \sin \alpha \cos \alpha \quad (51)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_l f_l}{p_0 \sigma_d t_d} \quad (52)$$

$$t_d = \frac{A_l f_l}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t f_t}{s \sigma_d} \quad (53)$$

em que:

A_0 - área limitada pela linha média de fluxo de corte que é assumida como coincidindo com a linha média da parede de espessura t_d ;

σ_d - tensão na escora diagonal de betão

A_l - área total de armadura longitudinal

f_l - tensão na armadura longitudinal

A_t - área de uma barra de armadura transversal

f_t - tensão na armadura transversal

s - espaçamento da armadura transversal

São também requeridas as seguintes três equações de compatibilidade para determinar as extensões na armadura transversal (ϵ_t) e longitudinal (ϵ_l), assim como o ângulo de torção (θ). Substituindo t_d a partir da equação 51, e considerando $\epsilon_d = \frac{\epsilon_{ds}}{2}$, obtém-se a seguinte expressão (Hsu, 1984 [14]):

$$\epsilon_t = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{2} \right) \epsilon_{ds} \quad (54)$$

Para a extensão ϵ_l , de forma similar, vem:

$$\epsilon_l = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \cot \alpha} - \frac{1}{2} \right) \epsilon_{ds} \quad (55)$$

A partir das expressões, $\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{dw}{dy} \frac{dy}{ds} = (\theta_y) \cos \alpha + (\theta_x) \sin \alpha$ e $\psi = \frac{d^2 w}{ds^2} = (\theta \sin \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \sin \alpha = \theta \sin 2\alpha$, o ângulo de torção (θ) é dado pela seguinte expressão:

$$\theta = \frac{\epsilon_{ds}}{2 t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (56)$$

As três equações anteriormente referidas (54, 55 e 56) constituem o modelo de compatibilidade baseadas na Teoria do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável.

A tensão nas escoras diagonais de betão σ_{ds} é definida como sendo a tensão média de um diagrama de tensões de compressão não uniforme na escora de betão (Hsu, 1984 [14]):

$$\sigma_d = k_1 \frac{1}{\lambda} f'_c \quad (57)$$

em que:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_t + \varepsilon_{ds}}{\frac{\varepsilon_{ds}}{2}} - 0,3} \quad (58)$$

O coeficiente k_1 é dado pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \text{se } \varepsilon_{ds} \leq \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \text{ então } k_1 = \lambda \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_0} - \frac{\lambda^2}{3} \left(\frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_0} \right)^2 \\ \text{se } \varepsilon_{ds} > \varepsilon_p \text{ então } k_1 = \left(1 - \frac{1}{(2\lambda-1)^2} \right) * \left(1 - \frac{1}{3} * \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{ds}} \right) + \left(\frac{1}{(2\lambda-1)^2} \right) * \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} * \left(1 - \frac{1}{3} * \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} \right) \end{cases} \quad (59)$$

PARTE II

APLICATIVO COMPUTACIONAL

1 – FUNCIONAMENTO DE UM EXEMPLO ATRAVÉS DO APLICATIVO COMPUTACIONAL

A elaboração desta dissertação tem como objectivo o desenvolvimento de uma folha de cálculo em Excel, para construir a Curva teórica $T-\theta$ de vigas de betão armado de alta resistência com secção oca sujeitas à torção pura de uma forma simples rápida e eficaz, do ponto de vista do utilizador.

A folha de cálculo elaborada nesta dissertação encontra-se dividida em vários separadores, cada um dos quais representa uma fase da construção da mesma.

A simplicidade de manuseamento do programa de cálculo permite ao utilizador introduzir os dados de entrada e, de uma forma automática, obter os pontos teóricos da Curva $T-\theta$. No caso de pretender visualizar todos os passos intermédios, basta consultar os vários separadores que representam as várias etapas de cálculo na construção da Curva teórica $T-\theta$.

1.1 – FUNCIONAMENTO GERAL DO APLICATIVO COMPUTACIONAL

Na primeira fase, o utilizador terá de preencher uma tabela de entrada de dados, como se pode verificar no Quadro 1.

Os valores utilizados para exemplificar o funcionamento desta aplicação foram retirados dos ensaios experimentais realizados por Luís Bernardo em 2003 [5].

Os parâmetros a preencher no Quadro 1 são:

- Valores dos vários momentos de torção (T) aquando do ensaio da viga e a respectiva rotação (θ);
- Valor do momento torsor de fissuração (T_{cr}), e da rotação equivalente ($(\theta_{cr})'$);
- Valores correspondentes à regressão linear para a análise linear em estado fissurado (a e b);
- Valor do momento torsor de cedência (T_n), e da rotação equivalente (θ_n);
- Valor aproximado das extensões verificadas no ensaio;
- Geometria da secção rectangular oca;
- Valor aproximado das tensões verificadas no ensaio;
- Características das armaduras longitudinal e transversal;

- Módulos de elasticidade do aço e do betão;
- Conversões necessárias.

VALORES A INTRODUIZIR PELO UTILIZADOR									
Valores da curva experimental [S.I.]							Armaduras		
T [kNm]	θ [°/m]	Fase 1:					longitudinal		
0,0000	0,0000	T_{cr} 116,717 [kNm]	$\phi 8$	0,5027	[cm ²]				
46,4865	0,0094	$(\theta_{cr})^I$ 0,04411 [°/m]	$\phi 12$	1,131	[cm ²]				
73,8599	0,0203	Fase 2: (*)	numero de varões						
99,0616	0,0324	Regressão Linear:	$\phi 8$	20	[un]				
116,7169	0,0441	α 91,459	$\phi 12$	4	[un]				
124,6764	0,1020	β 115,349	transversal						
151,8555	0,3992	Fase 3:	Geometria da secção						
178,6332	0,6920	T_{Ty} - (kNm)	x	60,000	[cm]				
207,9774	1,0128	θ_{Ty} - (°/m)	y	60,000	[cm]				
226,6518	1,2170	T_{yT} - (kNm)	x_1	53,250	[cm]				
248,8022	1,4592	θ_{yT} - (°/m)	y_1	53,400	[cm]				
265,8320	1,6759	T_n 273,2752 (kNm)	t	10,800	[cm]				
273,2752	1,7865	θ_n 1,7865 (°/m)	Tensões						
272,6740	1,9340	Extensões	f_{cm}	69,780	[Mpa]				
272,0728	2,0705	ε_{Ty} 0,00348	f_{ct}	-	[Mpa]				
250,8512	2,4179	ε_{Tu} 0,01000	f_{Ty}	672,420	[Mpa]				
211,6727	2,9966	ε_{Tu} 0,01000	f_{Ty}	695,900	[Mpa]				
154,9444	3,2096	Calcular			Conversões				
			1 in-kips = 0,113 kNm						
			1 kNm = 8,850 in-kips						
			1 deg/in = 39,370 °/m						
			1 in-kips = 2,540 [cm ²]						
			1 rad/m = 57,296 °/m						
			1 Mpa = 145,00 psi						

Quadro 1 – Quadro inicial a preencher pelo utilizador

Depois de preenchido o Quadro 1, que tem por base os resultados experimentais de uma viga ensaiada, o utilizador terá de executar a função “Calcular”, para que sejam executados todos os cálculos necessários para a construção da Curva teórica $T-\theta$. No final de executar a função “Calcular” o utilizador obtém os resultados finais no separador “FINAL”.

Após a introdução dos valores, o programa de cálculo preenche Quadro 2, apresentado a seguir. Neste quadro há uma disposição diferente dos parâmetros introduzidos no Quadro 1, assim como o cálculo de parâmetros inerentes à construção da Curva teórica $T - \theta$.

Caracterização da curva experimental			Características geométricas			Tensões		
Fase 1:				[in ²]	[m ²]		[psi]	[MPa]
T_{cr}	116,7169	[kNm]	A_c	558,001	0,360	f_{cm}	10118,1	69,780
$(\theta_{cr})^I$	0,044106158	[°/m]	A_l	440,751	0,284	f_{ct}	#VALOR!	-
$(GJ)^I$	151620,8137	[kNm ²]		[in]	[m]	f_{ly}	97500,9	672,420
Fase 2: (*) Regressão Linear: T = b + aθ (com θ em °/m)			u	0,83976378	2,133	f_{ty}	100905,5	695,900
a	91,459		Fase 3:			Extensões		
b	115,349		T_{ly}	-	(kNm)	ϵ_{cu}	0,00326	
ηT_c	115,349	[kNm]	θ_{ly}	-	(°/m)	ϵ_{θ}	0,00206	
$(\theta_{cr})^{II}$	-	[°/m]	T_{ly}	-	(kNm)	ϵ_{ly}	0,00336	
$(GJ)^{II}$	5240,235	[kNm ²]	θ_{ly}	-	(°/m)	ϵ_{θ}	0,00348	
Geometria da secção			T_n	273,2752	(kNm)	ϵ_{lu}	0,01000	
	[in]	[cm]	θ_n	1,7865	(°/m)	ϵ_{tu}	0,01000	
PROPRIEDADES DO BETÃO								
x	23,622	60,000	Resistência à compressão referido a provetes cilíndricos f_c ; f_{ck} ; f_{cm}			[psi]	[MPa]	
y	23,622	60,000	f_c (ACI)			10118,1	69,780	
x_l	20,965	53,250	f_{cm} (MC90)			10118,1	69,780	
y_l	21,024	53,400	f_{ck} (MC90)			8958,1	61,780	
t	4,252	10,800	Módulo de elasticidade - $E_{cm} = E_c$			[psi]	[MPa]	
Armaduras			E_c (Taerwe)			5713601,8	39,40415	
longitudinal	[in ²]	[cm ²]	Resistência média à tracção - f_{ctm} =			[psi]	[MPa]	
φ16	1,28	0,5027	f_{ctm} (Taerwe)			588,45815	4,058332	
φ20	2,87	1,131	TAXAS DE ARMADURAS			[%]		
numero de varões			Taxa de armadura longitudinal - ρ_l			0,405		
φ16	20	[un]	Taxa de armadura transversal - ρ_t			0,397		
φ20	4	[un]	Taxa total de armadura - ρ_{Tot}			0,802		
Área	[in ²]	[cm ²]	Módulos de Elasticidade					
$A_{s\ total}$	2113,6476	14,577		[psi]	[GPa]			
transversal	[in ²]	[cm ²]	E_s	29000	200			
φ12	1,28	0,503	E_c	0	0			
Espaçam.	[in]	[cm]						
s	2,95	7,500						
Área	[in ²]	[cm ²]						
$A_{s\ total}$	17,02308	6,702						

Quadro 2 – Caracterização geral

Nos quadros mencionados a seguir irá ser exemplificado o procedimento de cálculo necessário para a elaboração do Quadro 2.

Para a caracterização geral da curva experimental é necessário calcular o valor da rigidez de torção para a análise linear em regime não fissurado, como se pode verificar no Quadro 3.

Caracterização da curva experimental		
Fase 1:		
T_{cr}	116,7169	[kNm]
$(\theta_{cr})^I$	0,044106158	[°/m]
$(GJ)^I$	151620,8137	[kNm ²]

Quadro 3 – Caracterização da curva experimental

Com base no T_{cr} e no $(\theta_{cr})^I$ podemos calcular o valor de $(GJ)^I$.

$$(GJ)^I = \frac{T_{cr}}{\left(\frac{\theta_{cr}}{57,296}\right)^I} \quad (60)$$

O Quadro 4 fornece o valor da rigidez de torção necessária para o cálculo da análise linear em regime fissurado.

Fase 2: (*) Regressão Linear: T = b + aθ (com θ em °/m)		
a	91,459	
b	115,349	
ηT_c	115,349	[kNm]
$(\theta_{cr})^{II}$	-	[°/m]
$(GJ)^{II}$	5240,235	[kNm ²]

Quadro 4 – Regressão linear

em que a e b são valores introduzidos pelo utilizador.

$$\eta T_c = b \quad (61)$$

$$(GJ)^{II} = \frac{a}{57,296} \quad (62)$$

Os valores correspondentes à geometria da secção são retirados directamente dos dados introduzidos pelo utilizador, que possibilita o preenchimento do Quadro 5.

Geometria da secção		
	[in]	[cm]
x	23,622	60,000
y	23,622	60,000
x_i	20,965	53,250
y_i	21,024	53,400
t	4,252	10,800

Quadro 5 – Caracterização da geometria da secção

Alguns valores correspondentes às armaduras utilizadas são retirados directamente dos dados introduzidos pelo utilizador, como se pode verificar através do Quadro 6.

Armaduras		
longitudinal	[in ²]	[cm ²]
φ16	1,28	0,5027
φ20	2,87	1,131
numero de varões		
φ16	20	[un]
φ20	4	[un]
Área	[in ²]	[cm ²]
$A_s \text{ total}$	2113,6476	14,577
transversal		
φ12	1,28	0,503
Espaçam.	[in]	[cm]
s	2,95	7,500
Área	[in ²]	[cm ²]
$A_s \text{ total}$	17,02308	6,702

Quadro 6 – Caracterização da armadura longitudinal e transversal

As áreas de armadura longitudinal e transversal são retiradas através da seguinte fórmula:

$$A_s = \sum \text{número de varões} \times \text{área de cada varão} \quad (63)$$

Tendo por base os valores introduzidos no Quadro 1, é preenchido o Quadro 7, através das equações 64, 65 e 66.

Características geométricas		
	[in ²]	[m ²]
A_c	558,001	0,360
A_l	440,751	0,284
	[in]	[m]
u	0,83976378	2,133

Quadro 7 – Características geométricas

$$A_c = \frac{x}{100} * \frac{y}{100} \quad (64)$$

$$A_l = \frac{x_l}{100} * \frac{y_l}{100} \quad (65)$$

$$u = 2 * \left(\frac{x_l}{100} + \frac{y_l}{100} \right) \quad (66)$$

O Quadro 8 apresenta os valores correspondentes ao momento torsor de cedência (T_n), e da rotação equivalente (θ_n). Os valores correspondentes a T_n e a θ_n são retirados directamente dos dados introduzidos pelo utilizador.

Fase 3:		
T_{ty}	-	(kNm)
θ_{ty}	-	(°/m)
T_{ly}	-	(kNm)
θ_{ly}	-	(°/m)
T_n	273,2752	(kNm)
θ_n	1,7865	(°/m)

Quadro 8 – Valores característicos da análise não linear

Os valores das tensões estão mencionados no Quadro 9 assim como a resistência média à tracção do betão. Os valores correspondentes a f_{cm} , f_{ct} , f_{ly} e f_{ty} são retirados directamente dos dados introduzidos pelo utilizador.

Tensões		
	[psi]	[MPa]
f_{cm}	10118,1	69,780
f_{ct}	#VALOR!	-
f_{ly}	97500,9	672,420
f_{ty}	100905,5	695,900

Quadro 9 – Quadro representativo das tensões

O Quadro 10 apresenta os valores da extensão última convencional, extensão principal de compressão, extensão da armadura longitudinal e transversal, assim como as suas extensões últimas. Os valores correspondentes a ε_{ty} , ε_{lu} e ε_{tu} são retirados directamente dos dados introduzidos pelo utilizador.

Extensões		
ε_{cu}	0,00326	
ε_0	0,00206	
ε_{ly}	0,00336	
ε_{ty}	0,00348	
ε_{lu}	0,01000	
ε_{tu}	0,01000	

Quadro 10 – Quadro representativo das extensões

$$\varepsilon_{cu} = 0,001 \left(2,5 + 2 \left(1 - \frac{f_{cm} - 8}{100} \right) \right) \quad (67)$$

$$\varepsilon_0 = 0,001 \left(2 + 0,005 \left(\left(\frac{f_{cm} - 8}{100} \right) - 50 \right) \right) \quad (68)$$

$$\varepsilon_{ly} = \frac{f_{ly}}{E_s * 1000} \quad (69)$$

O Quadro 11 apresenta os vários valores correspondentes à resistência à compressão uniaxial do betão, valor médio da resistência à compressão do betão, resistência à tracção do betão, resistência média à tracção do betão e módulo de elasticidade do betão.

PROPRIEDADES DO BETÃO		
Resistência à compressão referido a provetes cilíndricos f'_c ; f_{ck} ; f_{cm}	[psi]	[MPa]
f'_c (ACI)	10118,1	69,780
f_{cm} (MC90)	10118,1	69,780
f_{ck} (MC90)	8958,1	61,780
Módulo de elasticidade - $E_{cm} = E_c$	[psi]	[MPa]
E_c (Taerwe)	5713601,8	39,40415
Resistência média à tracção - $f_{ctm} = f_{ct}$	[psi]	[MPa]
f_{ctm} (Taerwe)	588,45815	4,058332

Quadro 11 – Propriedades do betão

$$f'_c = f_{cm} \quad (70)$$

$$f_{ck} = f_{cm} - 8 \quad (71)$$

No cálculo do módulo de elasticidade E_c foi utilizada uma ferramenta do Excel que permite realizar testes lógicos, para garantir que o betão utilizado tenha um valor de f_{ck} superior a 50 MPa. No caso de não se verificar, o programa preenche a célula correspondente ao valor de E_c com a palavra “FALSO”. Quando o teste lógico é verificado e o valor de f_{ck} é superior a 50 MPa então o valor de E_c é calculado da seguinte forma:

$$E_c = \frac{22000 * \left(\frac{f_{ck} + 8}{10}\right)^{0,3}}{1000} \quad (72)$$

Para o cálculo de f_{ctm} utilizou-se um teste lógico para garantir que o betão utilizado tenha um valor de f_{ck} superior a 50 MPa. No caso de não se verificar o programa preenche a célula correspondente ao valor de f_{ctm} com a palavra “Não se aplica”.

Todavia, quando o teste lógico é verificado e o valor de f_{ck} é superior a 50 MPa então o valor de f_{ctm} é calculado da seguinte forma:

$$f_{ctm} = 1,8 * \left(\frac{f_{cm}}{18}\right)^{0,6} \quad (73)$$

O Quadro 12 apresenta as taxas de armadura longitudinal e transversal, bem como a taxa de armadura total.

TAXAS DE ARMADURAS	[%]
Taxa de armadura longitudinal - ρ_l	0,405
Taxa de armadura transversal - ρ_t	0,397
Taxa total de armadura - ρ_L	0,802

Quadro 12 – Taxas de armadura

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{\frac{10000}{A_c}} * 100 \quad (74)$$

$$\rho_t = \frac{A_{st} * u}{A_c * \frac{s}{100}} \quad (75)$$

$$\rho_L = \rho_l + \rho_t \quad (76)$$

O valor do módulo de elasticidade do aço e do betão encontram-se mencionados no Quadro 13. Os valores de E_s e E_c são retirados dos dados introduzidos pelo utilizador.

Módulos de Elasticidade		
	[psi]	[GPa]
E_s	29000	200
E_c	0	0

Quadro 13 – Módulos de elasticidade

2 – DESCRIÇÃO DAS VÁRIAS ANÁLISES REALIZADAS

Ao longo desta parte do trabalho será apresentado de uma forma pormenorizada as várias etapas da construção teórica da Curva $T - \theta$, bem como as várias teorias inerentes à sua construção.

2.1 - ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR EM REGIME NÃO FISSURADO (ESTADO I)

Para o cálculo da análise linear em regime não fissurado (Estado I) realizaram-se cálculos do momento torsor de fissuração T_{cr} , apresentados no Quadro 16, com base na Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviesada e Teoria do Tubo Fino.

No Quadro 14 estão apresentados os parâmetros necessários para o cálculo do factor de rigidez de torção J^I .

Factor de rigidez de torção		
	[m ³]	[m ³]
A_m	953,008	0,242
u_m	7748,031	1,968
	[m ⁴]	[m ⁴]
J^I		0,01286

Quadro 14 – Factor de rigidez de torção

A área da parte oca da secção transversal A_m de uma viga de betão armado oca é dada pela equação 77 e é obtida através dos parâmetros introduzidos no Quadro 1.

$$A_m = \frac{(x-t)(y-t)}{10000} \quad (77)$$

O perímetro da parte oca da secção transversal u_m de uma viga de betão armado oca é obtida pela equação 78

$$u_m = \frac{2(x-t)}{100} + \frac{2(y-t)}{100} \quad (78)$$

A partir das equações 77 e 78 é possível obter o valor do factor de rigidez de torção J^I .

$$J^I = \frac{4A_m^2 t}{u_m} \quad (79)$$

O módulo elástico de torção é referido no Quadro 15 e o seu valor é obtido através da equação 80.

Módulo elástico de torção		
	[in ³]	[m ³]
W_T		0,05229

Quadro 15 – Módulo elástico de torção

$$W_T = \frac{2A_m t}{100} \quad (80)$$

No Quadro 16 encontram-se os vários valores correspondentes ao momento tursor de fissuração segundo as várias teorias em estudo nesta dissertação.

Momento tursor de fissuração					
	T_{cr}		T'_{cr}		
	[in-kips]	[kNm]	[in-kips]	[kNm]	
Taerwe	1877,910	212,193	1938,154	219,000	T.E.
Taerwe	1065,620	120,409	1099,805	124,272	T.F.F.
Taerwe	1014,293	114,609	1046,832	118,286	T.F.T.F.

Quadro 16 – Caracterização do momento tursor de fissuração segundo a Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviesada e Teoria do Tubo Fino

Como já foi referido anteriormente, é possível calcular o valor do momento tursor de fissuração através de várias teorias, sendo elas, *Teoria da Elasticidade*, *Teoria da Flexão Enviesada* e a *Teoria do Tubo Fino*.

Em seguida, é apresentada a forma de obter o valor do momento tursor de fissuração segundo as várias teorias.

Teoria da Elasticidade

$$T_{cr} = W_T f_{ctm} 1000 \quad (81)$$

Teoria da Flexão Enviada

$$T_{cr} = 5,1 * (x^2 + 10) * y * (f'_c)^{\frac{1}{3}} * \left(\frac{4t}{x}\right) \text{ se } \frac{x}{10} \leq t \leq \frac{x}{4}, \text{ se } t > \frac{x}{4} \text{ então } t = \frac{x}{4} \quad (82)$$

Nota: Na folha de cálculo desenvolvida, o valor do T_{cr} tem em atenção a verificação em relação à espessura t .

Teoria do Tubo Fino

$$T_{cr} = 1,7A_c t (2,5(f'_c)^{0,5}) \quad (83)$$

A influência das armaduras de Hsu é dada pela seguinte expressão:

$$T'_{cr} = (1 + 4\rho_L)T_{cr} \quad (84)$$

A influência do coeficiente de rigidez de torção $k(GJ)^I$ assim como o seu valor é apresentado no Quadro 17.

Rigidez de torção - $k(GJ)^I$						
	K=0,7		K _{utilizador} = 0,85		K=1	
	[in-kips]	[kNm]	[in-kips]	[kNm]	[in-kips]	[kNm]
Taerwe	1309746,228	147993,924	1590085,746	179670,706	1870425,264	211347,487

Quadro 17 – Rigidez de torção $(k(GJ)^I)$ segundo vários factores minorativos

O coeficiente de rigidez de torção está dentro de um intervalo de valores, intervalo esse que resulta do coeficiente k utilizado. O coeficiente k depende do utilizador.

As equações 85, 86 e 87 apresentam os vários valores do coeficiente de rigidez de torção para diferentes valores de k .

$$k(GJ)^I_{k=0,7} = 0,292 * E_c * J^I * 1000000 \quad (85)$$

$$k(GJ)^I_{k=utilizador} = \left[\frac{k_{utilizador}^{-0,7}}{1-0,7} * (0,417 - 0,292) + 0,292 \right] * E_c * J^I * 1000000 \quad (86)$$

$$k(GJ)^I_{k=1} = 0,417 E_c J^I 1000000 \quad (87)$$

Através dos vários valores dos momentos torsores de fissuração obtidos pelas três teorias analisadas, e dos vários valores de rigidez de torção com base em diferentes factores minorativos é possível obter vários valores de rotação de torção apresentados no Quadro 18.

Rotação de torção de fissuração - θ_{cr}							
	K=0,7		K _{utilizador}		K=1		
	[Rad/m]	[°/m]	[Rad/m]	[°/m]	[Rad/m]	[°/m]	
T _{aerwe}	0,00148	0,08479	0,00122	0,06984	0,00104	0,05937	T.E.
T _{aerwe}	0,00084	0,04811	0,00069	0,03963	0,00059	0,03369	T.F.E.
T _{aerwe}	0,00080	0,04579	0,00066	0,03772	0,00056	0,03207	T.T.F.

Quadro 18 – Rotação de torção de fissuração (θ_{cr}) segundo vários factores minorativos e segundo a Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviada e a Teoria do Tubo Fino

$$\theta_{cr} = \frac{T'_{cr}}{k(GJ)^I} \quad (88)$$

A variedade de θ_{cr} advém dos vários valores do momento torsor de fissuração T'_{cr} e dos vários valores da rigidez de torção $k(GJ)^I_n$.

Através dos resultados acima obtidos é possível a construção da fase Elástico Linear de uma forma gráfica, onde são comparadas as várias teorias com os dados experimentais inseridos na folha de cálculo, podendo o utilizador verificar qual se ajusta ao estudo pretendido, como se pode verificar na Fig.3, 4 e 5.

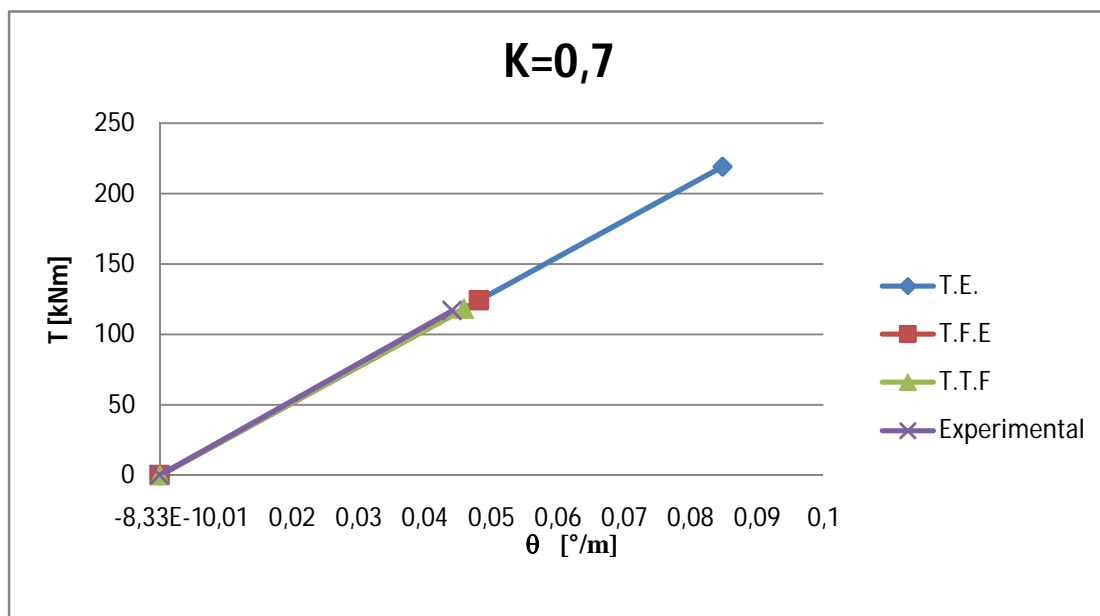


Fig. 3 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para K=0,7

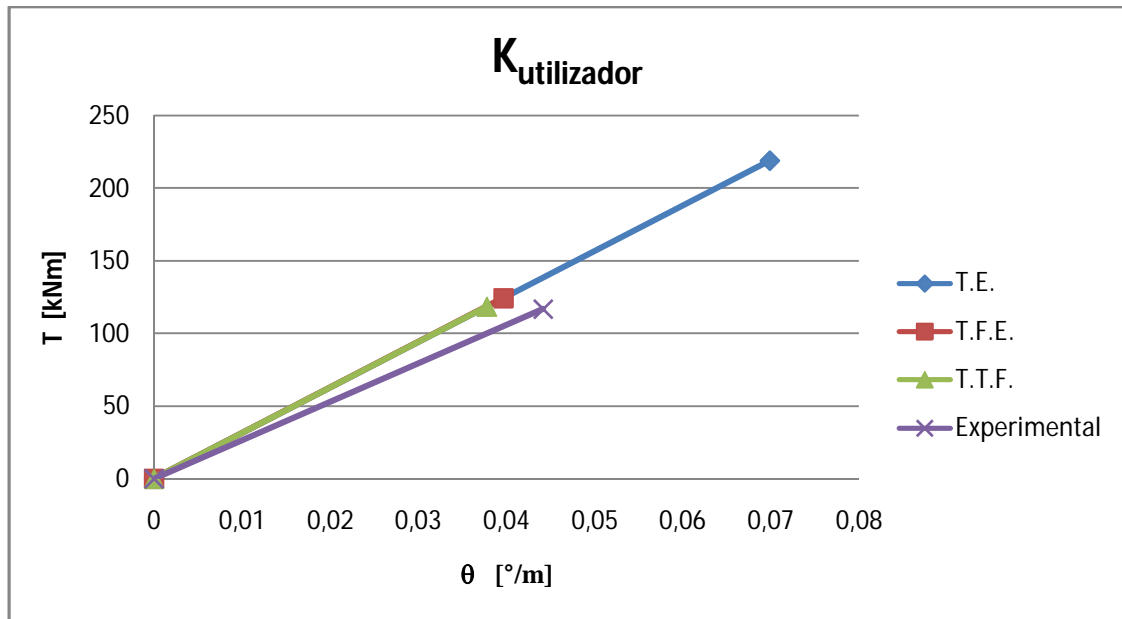


Fig. 4 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=0,85$

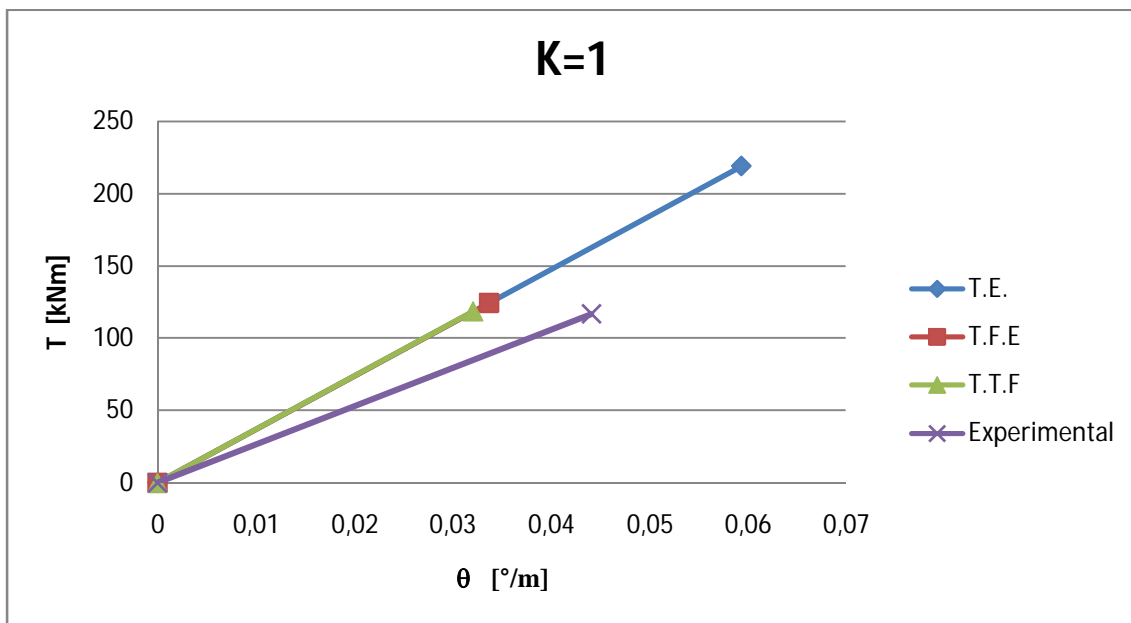


Fig. 5 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=1$

3 – ANÁLISE ELÁSTICO LINEAR EM REGIME FISSURADO (ESTADO II)

A análise elástico linear em estado fissurado é a fase de ligação entre o estado fissurado e a análise não linear. Os parâmetros correspondentes à análise linear em estado fissurado são apresentados nos quadros que se seguem.

A espessura equivalente da parede de secção oca é apresentada no Quadro 19 e pode ser obtida através da equação 89.

Espessura equivalente da parede	
h_e	0.67368574 [cm]

Quadro 19 – Espessura equivalente da parede de secção oca

$$h_e = 1,4 \left(\frac{\rho_l}{100} + \frac{\rho_t}{100} \right) x \quad (89)$$

Através do coeficiente de homogeneização apresentado no Quadro 20 e do valor do momento torsor de fissuração é possível obter o valor correspondente à ordenada na origem da análise linear em estado fissurado, Quadro 21, demonstrado pela equação 93 (nT_c).

Coeficiente de homogeneização -n	
Taerwe	5,07560744

Quadro 20 – Coeficiente de homogeneização n

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (90)$$

Intersecção com a vertical - ηT_c		
η	1.0848	
T_c	901,5939684	in-kips
T_c	101,8801184	kNm
$\eta T_c = b$	110,5195525	kNm

Quadro 21 – Abcissa na origem (ηT_c)

$$\eta = 0,57 + 2,86 \frac{t}{x} \quad (91)$$

$$T_c = \frac{\frac{1}{3} * 2,04 x^2 y f_c^{0,5}}{1000} \quad (92)$$

$$\eta T_c = \eta T_c \quad (93)$$

Após a fissuração o valor da rigidez de torção é alterado, como se pode verificar no Quadro 22, e o novo valor é obtido através das equações 94, 95 e 96.

Rigidez de Torção- $(GI)^{II}=\alpha$	
Taerwe	5080,64753 kPa

Quadro 22 – Rigidez de torção na análise linear em estado fissurado

$$G = \frac{E_s * 1000000}{4n + \frac{h_e u}{A_c \rho_l} + \frac{h_e u}{A_c \rho_t}} \quad (94)$$

$$J = 4A_l^2 \frac{h_e}{u} * 10000 \quad (95)$$

$$(GJ)^{II} = GJ \quad (96)$$

Os pontos característicos da fase elástico linear em regime fissurado (estado II) são apresentados no Quadro 23.

Pontos da curva $T-\theta$		
θ	T	θ
$[x10^{-3} \text{ Rad/m}]$	$[\text{kNm}]$	$[^\circ/\text{m}]$
0	110,5195525	0
50	364,551929	2,8648

Quadro 23 – Pontos da Curva ($T-\theta$) correspondentes à análise linear em estado fissurado

Arbitrando valores para θ é possível retirar os valores de T , podendo assim construir uma recta, que representa a fase elástico linear em regime fissurado (estado II).

$$T = (GJ)^{II} \theta + \eta T_c \quad (97)$$

O declive da recta representativa do estado elástico linear em regime fissurado (estado II) é referido no Quadro 24.

Declive	88,6736863
---------	------------

Quadro 24 – Declive da recta representativa da análise linear em estado fissurado

O declive da recta representativa do estado elástico linear em regime fissurado (estado II) é representado nesta fase para um melhor relacionamento das características do *estado II*, uma vez que, a sua utilidade é essencial para a construção da análise não linear. A recta representativa do *estado II* encontra-se representada na Fig. 6.

$$d = \frac{T_f - T_i}{\theta_f - \theta_i} \quad (98)$$

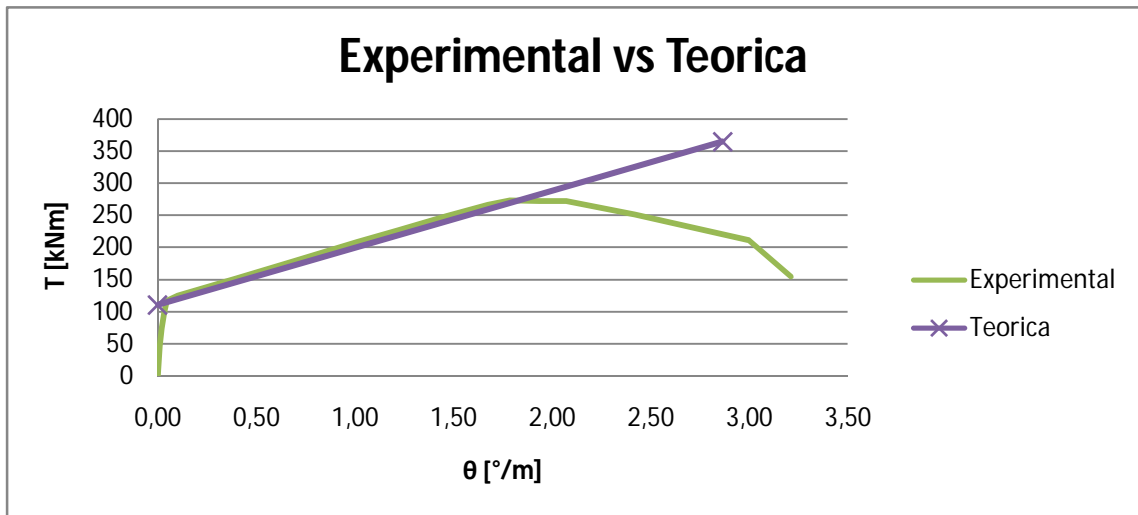


Fig. 6 – Análise comparativa da análise linear em estado fissurado com a curva experimental

4 – ANÁLISE NÃO LINEAR

A análise não linear é calculada através do Modelo de Treliza de Ângulo Variável e da alteração dos parâmetros correspondentes a ε_{ds} , t_d , α_0 , $\xi_{\sigma 0}$ e $\xi_{\varepsilon 0}$.

Na Fig.7 está representado de uma forma esquemática os procedimentos para o cálculo da rotação θ .

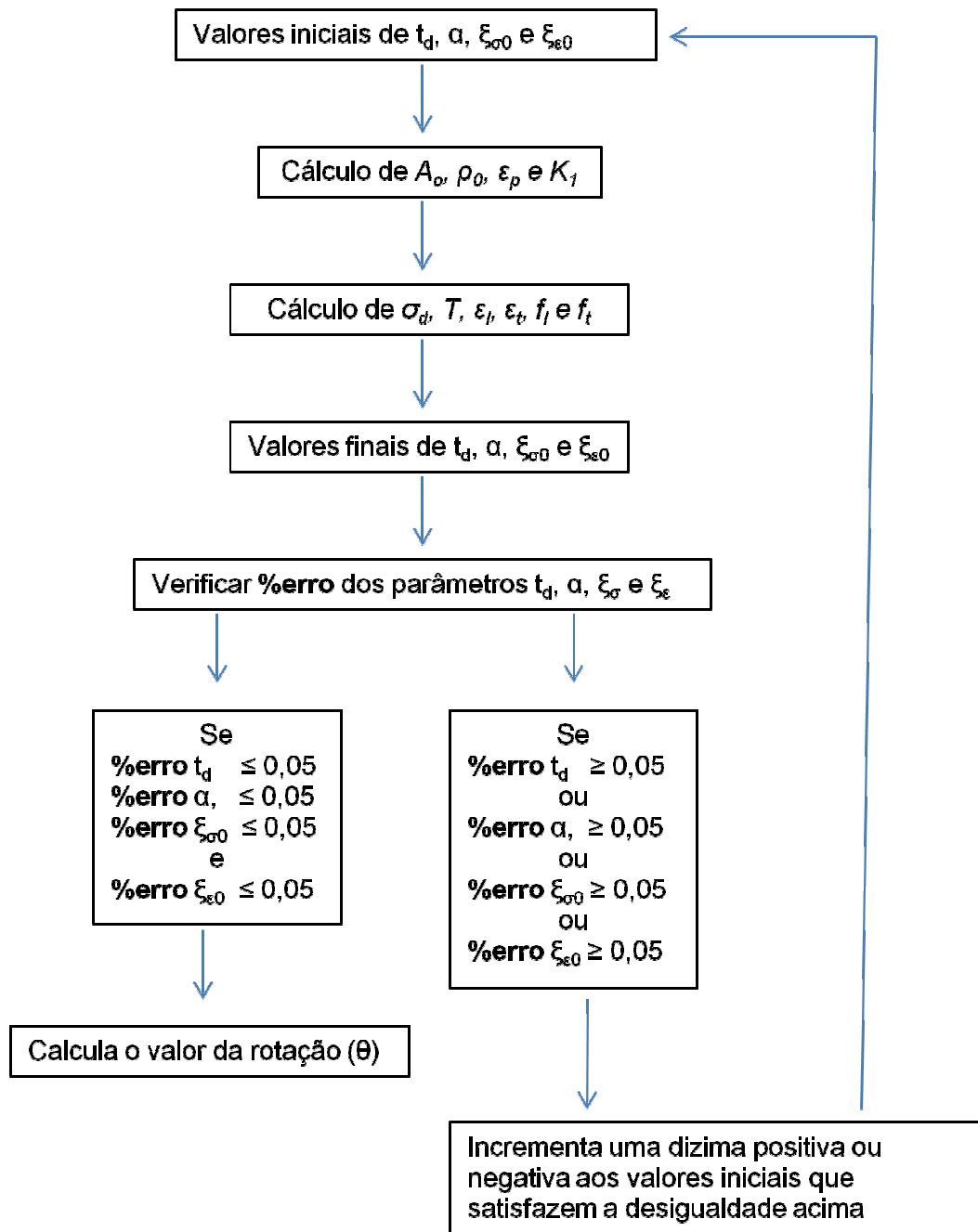


Fig. 7 – Organograma dos vários passos iterativos

Os valores dos parâmetros esquematizados na Fig. 7 são apresentados no Quadro 25.

x	y	f_c	E_c	A_c	A_t	s				
[m]	[m]	[MPa]	[GPa]	[cm ²]	[cm ²]	[cm]				
0,6000	0,6000	69,7800	200,0000	14,5769	0,5027	7,5000				
f_{ly}	f_{ly}	ε_{ly}	ε_{ly}	η	η'	Calcular				
[MPa]	[MPa]									
672,4200	695,9000	0,0035	0,0035	1,0149	0,9853					
e_{dt}	t_d	A_o	p_o	α	α	ζ_{so}	ζ_{so}	$\varepsilon_p = \zeta_{so} \varepsilon_o$	k_1	
0,00000	[m]	[m ²]	[m]	[°]	[rad]					
0,00025	0,03688	0,31710	2,25248	45,22896	0,78939	0,59817	0,76397	0,00167	0,14198	
0,00050	0,03888	0,31486	2,24448	45,20428	0,78896	0,48959	0,65325	0,00143	0,30878	
0,00075	0,04092	0,31257	2,23632	45,17775	0,78850	0,43070	0,58712	0,00129	0,46989	
0,00100	0,04327	0,30995	2,22692	45,14782	0,78798	0,39440	0,54420	0,00119	0,60439	
0,00125	0,04604	0,30687	2,21584	45,11547	0,78741	0,37087	0,51559	0,00113	0,69885	
0,00150	0,04851	0,30414	2,20596	45,51330	0,79436	0,35270	0,49306	0,00108	0,75853	
0,00175	0,04916	0,30342	2,20336	45,67582	0,79719	0,33260	0,46776	0,00102	0,79841	
0,00200	0,05019	0,30229	2,19924	45,64556	0,79667	0,31728	0,44809	0,00098	0,82119	
0,00225	0,05150	0,30085	2,19400	45,60644	0,79598	0,30531	0,43263	0,00095	0,83185	
0,00250	0,05308	0,29912	2,18768	45,57198	0,79538	0,29622	0,42076	0,00092	0,83329	
0,00273	0,05477	0,29728	2,18092	45,53161	0,79468	0,28943	0,41180	0,00090	0,82822	
σ_d	T [kNm]	ε_i	ε_t	f_i	f_t	declive				
[MPa]				[MPa]	[MPa]					
5,92634	69,30515	0,00084	0,00082	167,39994	164,34896	178,4343	0			
10,54913	129,13481	0,00157	0,00154	313,39370	308,24793	171,7058	0			
14,12206	180,62306	0,00220	0,00217	440,55217	434,19402	164,3328	0			
16,63355	223,07729	0,00273	0,00270	546,65768	540,01860	154,9416	0			
18,08578	255,52053	0,00315	0,00312	630,05248	623,99020	140,1750	0			
18,66850	275,38876	0,00359	0,00344	672,42000	687,63620	91,8363	0			
18,53027	276,32725	0,00415	0,00391	672,42000	695,90000	3,4988	1			
18,18108	275,77310	0,00460	0,00436	672,42000	695,90000	-2,2753	1			
17,72215	274,52353	0,00500	0,00474	672,42000	695,90000	-5,6788	1			
17,22437	273,42311	0,00532	0,00506	672,42000	695,90000	-5,6339	1			
16,72703	272,29908	0,00556	0,00531	672,42000	695,90000	-7,1460	1			
T_d	% erro	α	% erro	ζ_{so}	% erro	ζ_{st}	% erro	θ	θ	
								[Rad/m]	[°/m]	
								0	0,000	
0,03687	0,03853	45,24883	0,04391	0,59824	0,01116	0,76394	0,00416	0,00678	0,388	
0,03888	0,00668	45,21514	0,02402	0,48966	0,01330	0,65326	0,00188	0,01286	0,737	
0,04094	0,04927	45,17596	0,00397	0,43087	0,03865	0,58727	0,02582	0,01833	1,050	
0,04327	0,00216	45,16224	0,03193	0,39460	0,04943	0,54446	0,04848	0,02311	1,324	
0,04604	0,00101	45,12766	0,02701	0,37105	0,04820	0,51584	0,04885	0,02715	1,556	
0,04849	0,04672	45,53606	0,04999	0,35276	0,01560	0,49316	0,02097	0,03093	1,772	
0,04918	0,03296	45,66788	0,01737	0,33247	0,03869	0,46758	0,03885	0,03561	2,040	
0,05017	0,04675	45,66340	0,03907	0,31713	0,04719	0,44793	0,03607	0,03986	2,284	
0,05153	0,04990	45,60215	0,00941	0,30525	0,01803	0,43255	0,01959	0,04370	2,504	
0,05309	0,01832	45,56969	0,00503	0,29608	0,04762	0,42056	0,04800	0,04711	2,699	
0,05475	0,03422	45,54014	0,01872	0,28957	0,04743	0,41200	0,04834	0,04985	2,856	

Quadro 25 – Valores correspondentes à análise não linear

Através do quadro 25 é possível ver todos os parâmetros que constituem a fase não linear, assim como a sua constante alteração que depende dos parâmetros de entrada. A função “calcular” é a mesma que a função na entrada de dados, onde são

introduzidos os parâmetros iniciais para o cálculo teórico da Curva $T-\theta$. A função “*calcular*” encontra-se na análise não linear por comodidade, para que o utilizador consiga alterar parâmetros que lhe pareçam desejáveis de alteração e assim verificar a tendência dos parâmetros da fase não linear de uma forma mais prática.

No quadro 26 encontram-se valores necessários para o cálculo da fase não linear.

x	y	f_c	E_c	A_i	A_s	s
[m]	[m]	[MPa]	[GPa]	[cm ²]	[cm ²]	[cm]
0,6000	0,6000	69,7800	200,0000	14,5769	0,5027	7,5000
f_{ty}	f_{ty}	ϵ_{ty}	ϵ_{ty}	η	η'	
[MPa]	[MPa]					
672,4200	695,9000	0,0035	0,0035	1,0149	0,9853	

Quadro 26 – Parâmetros da secção, das armaduras e do betão

A equação 99 permite calcular o valor do coeficiente multiplicativo η através dos valores do Quadro 26.

$$\eta = \frac{u \frac{A_t}{10000} f_{ty} * 1000}{\frac{s}{100} * \frac{A_i}{10000} f_{ly} * 1000} \quad (99)$$

$$\begin{cases} \text{se } \eta > 1 \text{ então } \eta' = \frac{1}{\eta} \\ \text{se } \eta \leq 1 \text{ então } \eta' = \eta \end{cases} \quad (100)$$

O Quadro 27 apresenta os valores dos parâmetros iniciais que servem de base para o cálculo iterativo do valor da rotação θ e do momento torsor T .

ϵ_{dt}	t_{d0}	A_o	p_o	α_o	α_o	ζ_{o0}	$\zeta_{o\infty}$	$\epsilon_p = \zeta_{o\infty} \epsilon_o$	k_1
	[m]	[m ²]	[m]	[°]	[rad]				
0,00000									
0,00025	0,03595	0,31815	2,25620	45,24058	0,78960	0,59345	0,75946	0,00156	0,15136
0,00050	0,03799	0,31586	2,24804	45,20954	0,78906	0,48511	0,64837	0,00133	0,32779
0,00075	0,04014	0,31344	2,23944	45,18704	0,78866	0,42715	0,58300	0,00120	0,49469
0,00100	0,04264	0,31065	2,22944	45,15814	0,78816	0,39176	0,54109	0,00111	0,62905
0,00125	0,04558	0,30738	2,21768	45,11864	0,78747	0,36921	0,51361	0,00106	0,71780
0,00150	0,04801	0,30469	2,20796	45,64660	0,79668	0,35078	0,49072	0,00101	0,77278
0,00175	0,04882	0,30380	2,20472	45,68116	0,79729	0,33112	0,46583	0,00096	0,80787
0,00200	0,04999	0,30251	2,20004	45,64556	0,79667	0,31631	0,44686	0,00092	0,82613
0,00225	0,05150	0,30085	2,19400	45,60644	0,79598	0,30531	0,43263	0,00089	0,83231
0,00250	0,05329	0,29889	2,18684	45,57198	0,79538	0,29666	0,42130	0,00087	0,82943
0,00273	0,05507	0,29695	2,17972	45,52847	0,79462	0,29052	0,41327	0,00085	0,82020

Quadro 27 – Parâmetros iniciais para o cálculo da Curva ($T-\theta$)

Os valores ε_{ds} , t_d , α_0 , $\xi_{\sigma 0}$ e $\xi_{\varepsilon 0}$ iniciais são colocados manualmente pelo utilizador. Não é necessário um conhecimento específico dos valores característicos para estes parâmetros, visto que o programa utiliza-os como referência para poder obter valores mais próximos dos reais, com uma margem de erro mínima, como se vai verificar mais à frente neste trabalho.

Optou-se por utilizar onze pontos para caracterizar a fase não linear, considerando-se que estes são suficientes para desenhar a Curva $T-\theta$.

$$A_0 = (x - t_{du})(y - t_{du}) \quad (101)$$

$$\rho_0 = 2(x - t_{du}) + 2(y - t_{du}) \quad (102)$$

$$\varepsilon_p = \xi \varepsilon_0 \quad (103)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \varepsilon_{ds} < \varepsilon_p \text{ então } k_1 = \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} * \frac{1-\varepsilon_{ds}}{3\varepsilon_0} \\ \text{se } \varepsilon_{ds} \geq \varepsilon_p \text{ então } k_1 = \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{2}{\xi\varepsilon_0} - 1\right)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3} * \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{ds}}\right) + \left(\frac{1}{\left(\frac{2}{\xi\varepsilon_0} - 1\right)^2}\right) \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} \left(1 - \frac{1}{3} * \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p}\right) \end{array} \right. \quad (104)$$

No Quadro 28 são apresentados os valores da tensão nas escoras diagonais do betão, do momento torsor, das extensões longitudinal e transversal assim como a tensão de cedência da armadura longitudinal e transversal.

σ_d	T [kNm]	ε_l	ε_t	f_l	f_t
[MPa]				[MPa]	[MPa]
6,26802	71,67101	0,00086	0,00085	172,83664	169,55310
11,09597	133,14075	0,00161	0,00159	322,56579	317,15528
14,74495	185,51133	0,00226	0,00222	451,47541	444,64541
17,19630	227,73574	0,00279	0,00275	557,30377	550,19442
18,49313	259,09492	0,00319	0,00316	638,39070	632,09391
18,91560	276,63283	0,00366	0,00347	672,42000	693,27316
18,66628	276,77047	0,00418	0,00395	672,42000	695,90000
18,23444	275,68081	0,00463	0,00438	672,42000	695,90000
17,73202	274,67636	0,00500	0,00474	672,42000	695,90000
17,16996	273,42760	0,00529	0,00504	672,42000	695,90000
16,62743	271,86146	0,00552	0,00527	672,42000	695,90000

Quadro 28 – Valores das tensões e extensões

$$\sigma_d = \xi_{\sigma 0} f'_c \quad (105)$$

$$T = 2A_0 t_d (\sigma_d * 1000) \sin \alpha \cos \alpha \quad (106)$$

$$\varepsilon_l = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d * 1000}{p_0 T \frac{1}{\tan \alpha}} - 0,5 \right) \varepsilon_{ds} \quad (107)$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d * 1000}{p_0 T \tan \alpha} - 0,5 \right) \varepsilon_{ds} \quad (108)$$

$$\begin{cases} \text{se } \varepsilon_l < \varepsilon_{ly} \text{ então } f_l = \varepsilon_l E_s * 1000 \\ \text{se } \varepsilon_l \geq \varepsilon_{ly} \text{ então } f_l = f_{ly} \end{cases} \quad (109)$$

$$\begin{cases} \text{se } \varepsilon_t < \varepsilon_{ty} \text{ então } f_t = \varepsilon_t E_s * 1000 \\ \text{se } \varepsilon_t \geq \varepsilon_{ty} \text{ então } f_t = f_{ty} \end{cases} \quad (110)$$

O Quadro 29 é um meio pelo qual o utilizador pode aceder aos parâmetros teóricos que caracterizam a fase não linear, assim como verificar a percentagem de erro inerente aos mesmos. Podem ser calculados todos os parâmetros do quadro de forma isolada, bastando para isso seleccionar cada parâmetro que se deseje conhecer o erro. Esta forma de cálculo permite ao utilizador visualizar a tendência de todos os parâmetros quando apenas um é alterado.

t_d	% erro	α	% erro	ζ_c	% erro	ζ_s	% erro	θ [Rad/m]	θ [°/m]
								0	0,000
0,03593	0,04908	45,26320	0,04997	0,59337	0,01328	0,75929	0,02257	0,00695	0,398
0,03801	0,04309	45,21854	0,01990	0,48508	0,00609	0,64828	0,01393	0,01316	0,754
0,04014	0,00196	45,19928	0,02708	0,42718	0,00637	0,58299	0,00178	0,01869	1,071
0,04262	0,04684	45,18071	0,04997	0,39187	0,02840	0,54119	0,01777	0,02345	1,344
0,04560	0,03896	45,12523	0,01460	0,36923	0,00444	0,51360	0,00198	0,02742	1,571
0,04803	0,04656	45,63978	0,01495	0,35088	0,02973	0,49082	0,02097	0,03125	1,791
0,04880	0,03445	45,69558	0,03156	0,33128	0,04852	0,46606	0,04987	0,03586	2,054
0,05001	0,04167	45,64384	0,00376	0,31647	0,04902	0,44707	0,04714	0,04002	2,293
0,05150	0,00575	45,61776	0,02481	0,30525	0,01803	0,43255	0,01959	0,04370	2,504
0,05327	0,04130	45,58093	0,01964	0,29671	0,01787	0,42139	0,02116	0,04692	2,688
0,05509	0,04375	45,51032	0,03987	0,29044	0,02864	0,41314	0,03038	0,04958	2,841

Quadro 29 – Quadro indicativo dos parâmetros necessários para o cálculo da Curva teórica $T-\theta$ e as percentagens de erro inerentes a cada parâmetro

A expressão 111 permite calcular o valor de t_d , para ser comparado com t_{d0} e obter o valor do erro, na expressão 112.

$$t_d = \frac{\frac{A_l}{10000} f_l * 1000}{p_0 \sigma_d * 1000} + \frac{\frac{A_t}{10000} f_t * 1000}{\frac{s}{100} \sigma_d * 1000} \quad (111)$$

$$\%erro = \begin{cases} \text{se } t_{d0} > t_d \text{ então } \left| \frac{t_d}{t_{d0}} * 100 - 100 \right| \\ \text{se } t_{d0} \leq t_d \text{ então } \left| \frac{t_{d0}}{t_d} * 100 - 100 \right| \end{cases} \quad (112)$$

Através das expressões 113 e 114 é possível obter o valor de α e comparar com α_0 para verificar o erro inerente a este parâmetro.

$$\alpha = \left(\frac{\frac{A_l}{10000} f_l * 1000}{t_{d0} * \sigma_d * 1000 * \rho_0} \right)^{0,5} \quad (113)$$

$$\%erro = \begin{cases} \text{se } \alpha_0 > \alpha \text{ então } \left| \frac{\alpha}{\alpha_0} 100 - 100 \right| \\ \text{se } \alpha_0 \leq \alpha \text{ então } \left| \frac{\alpha_0}{\alpha} 100 - 100 \right| \end{cases} \quad (114)$$

O valor de ξ_σ é dado pela equação 115. De seguida, é comparado com o valor inicial de $\xi_{\sigma0}$ através da expressão 116.

$$\xi_\sigma = \frac{0,9}{\left(1 + \left(10 \frac{f'_c}{\eta'} \right) \left(\varepsilon_l + \varepsilon_t + \frac{\varepsilon_{ds}}{2} \right) \right)^{0,5}} \quad (115)$$

$$\%erro = \begin{cases} \text{se } \xi_{\sigma0} > \xi_\sigma \text{ então } \left| \frac{\xi_\sigma}{\xi_{\sigma0}} 100 - 100 \right| \\ \text{se } \xi_{\sigma0} \leq \xi_\sigma \text{ então } \left| \frac{\xi_{\sigma0}}{\xi_\sigma} 100 - 100 \right| \end{cases} \quad (116)$$

O valor de ξ_ε é dado pela equação 117 e seguidamente é comparado com o valor inicial de $\xi_{\varepsilon0}$ através da expressão 118.

$$\xi_\varepsilon = \frac{1}{\left(1 + 400 \left(\varepsilon_l + \varepsilon_t + \frac{\varepsilon_{ds}}{2} \right) \right)^{0,5}} \quad (117)$$

$$\%erro = \begin{cases} \text{se } \xi_{e0} > \xi_{\varepsilon} \text{ então } \left| \frac{\xi_{\varepsilon}}{\xi_{e0}} * 100 - 100 \right| \\ \text{se } \xi_{e0} \leq \xi_{\varepsilon} \text{ então } \left| \frac{\xi_{e0}}{\xi_{\varepsilon}} * 100 - 100 \right| \end{cases} \quad (118)$$

Na Fig. 8 e 9 é possível comparar de uma forma gráfica a análise não linear com a análise experimental e com a análise linear em estado fissurado, e verificar o seu ponto de intersecção.

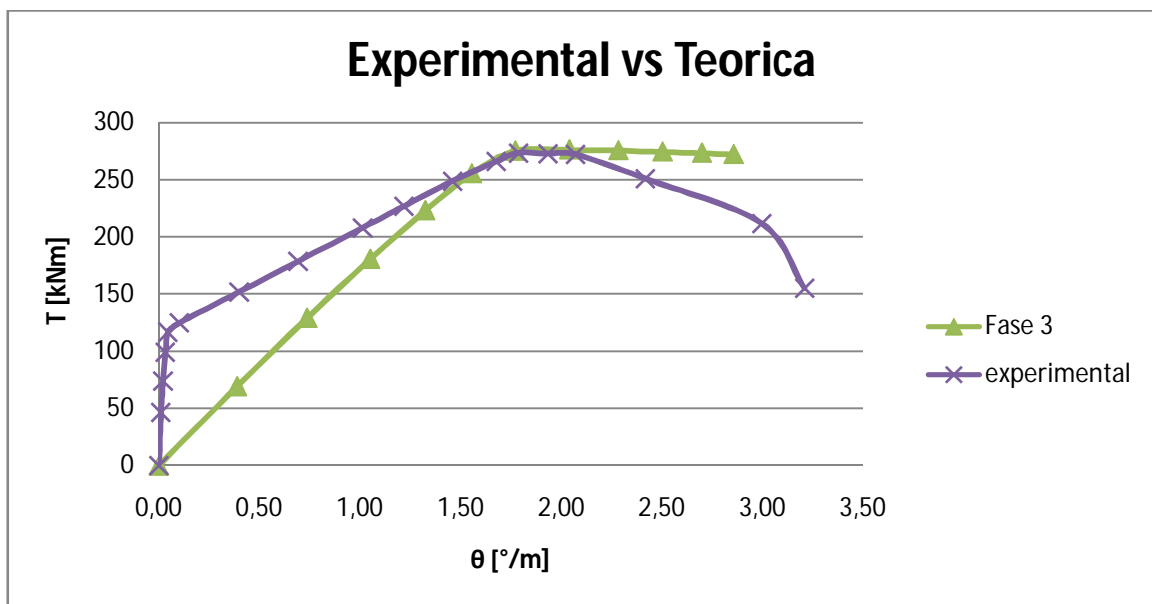


Fig. 8 – Análise comparativa entre a curva experimental e a análise não linear

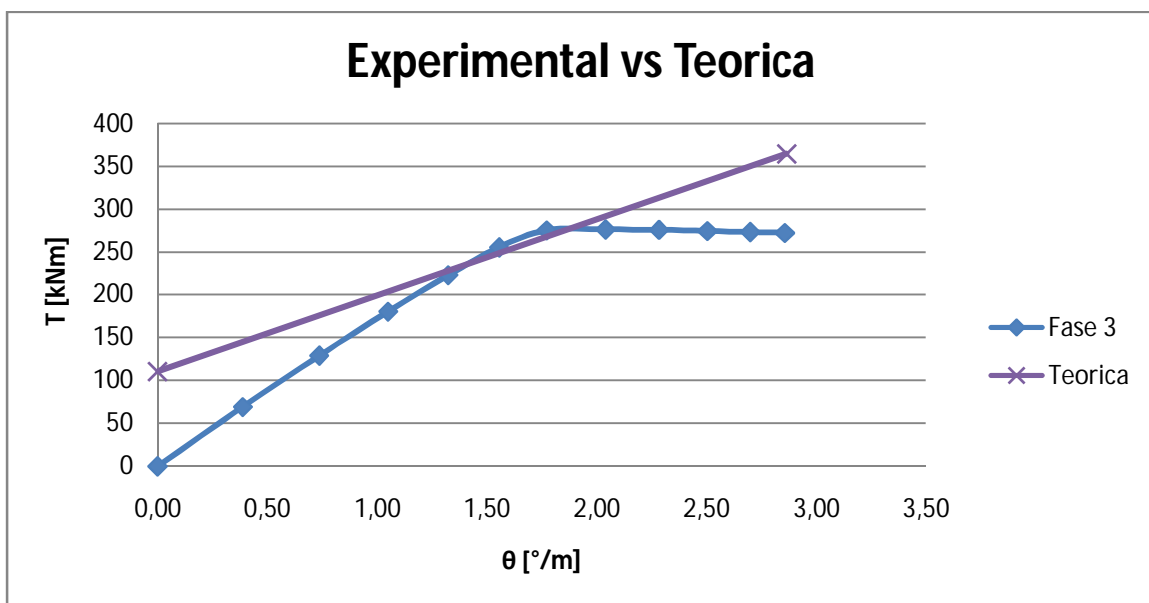


Fig. 9 – Análise comparativa entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear

Nesta fase é possível de uma forma manual escolher os valores para a construção da Curva teórica $T-\theta$. Esta construção, depende apenas do intuito do utilizador em escolher os vários valores de T e de θ . A primeira aproximação é da responsabilidade do utilizador, do conhecimento e sensibilidade que este tem perante a temática da torção.

No Quadro 30 são escolhidos os valores para a primeira aproximação da Curva teórica $T-\theta$.

Teorica Final	
T [kNm]	θ [°/m]
0	0,0000
118,29	0,0458
276,63	1,7906
276,77	2,0544
275,68	2,2929
274,68	2,5038
273,43	2,6885
271,86	2,8408

Quadro 30 – Valores correspondentes à primeira aproximação da Curva teórica $T-\theta$

Na Fig. 10 é possível comparar de uma forma gráfica os valores experimentais com os valores teóricos escolhidos pelo utilizador.

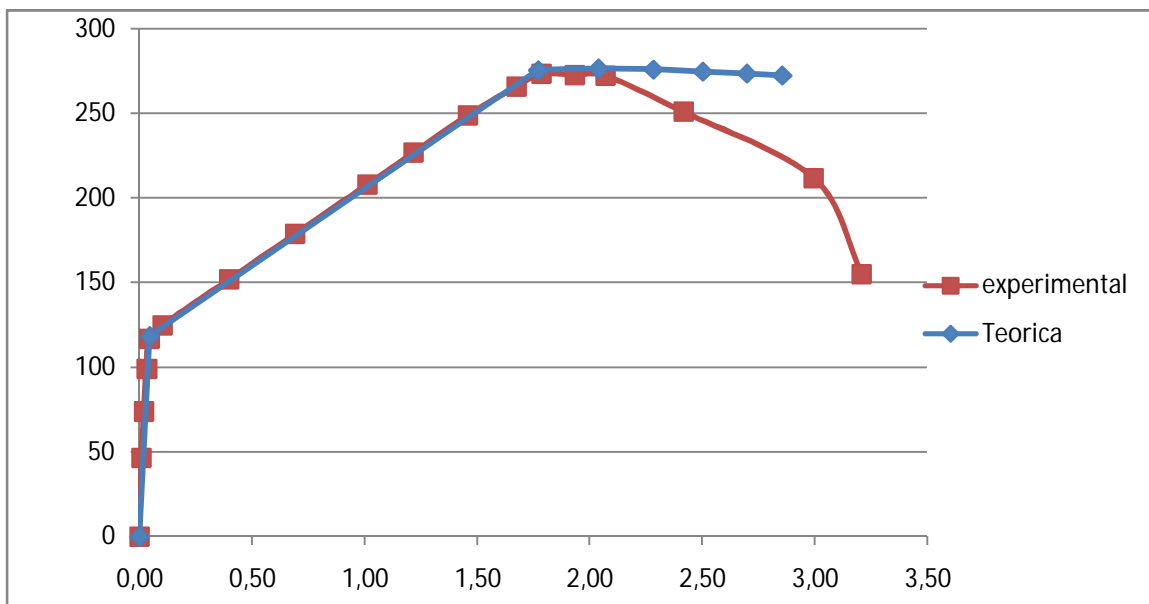


Fig. 10 – Primeira aproximação da Curva teórica $T-\theta$

4.1 – AUTOMATIZAÇÃO DA ANÁLISE NÃO LINEAR

Para a realização da aplicação computacional foi necessário recorrer a um compilador. O compilador escolhido é o “*Visual Basic*”, que permite programar de uma forma acessível, tendo em conta que o programa base é o Microsoft Excel, onde o seu uso pela parte da Engenharia é comum.

O Visual Basic é uma linguagem de programação produzida pela empresa Microsoft, e é parte integrante do pacote Microsoft Visual Studio. A versão mais recente faz parte do pacote Visual Studio.NET, voltada para aplicações.Net. Todavia, a versão anterior fez parte do Microsoft Visual Studio 6.0, ainda muito utilizado actualmente.

A linguagem é dirigida por eventos, e possui também um ambiente de desenvolvimento integrado totalmente gráfico, facilitando enormemente a construção da interface das aplicações, daí o nome "Visual". Nas suas primeiras versões, o Visual Basic não permitia acesso a bancos de dados, sendo portanto voltado apenas para iniciantes, mas devido ao sucesso entre as empresas, que faziam uso de componentes adicionais fabricados por terceiros para acesso a dados, a linguagem logo adoptou novas tecnologias, também da Microsoft, permitindo fácil acesso a bases de dados (http://pt.wikipedia.org/wiki/Visual_Basic [22]).

A construção do programa que permite calcular a análise não linear foi construído à luz do compilador “*Visual Basic*”. Este compilador é fornecido pela *Microsoft* e está disponível em qualquer sistema operativo da *Microsoft* quando acompanhado com o programa *Microsoft Office*.

4.1.1 – Função calcula_erro

A função *calcula_erro* tem como objectivo fazer a alteração do valor t_d , de uma forma automática e rápida. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```
“... If Sheets("Fase3").Cells(Tteorico_linha, Tteorico_coluna).Value  
>= Sheets("Fase3").Cells(Tpratico_linha, Tpratico_coluna).Value  
Then  
    flag = 1  
Else
```

```
flag = 0
End If    ...”
```

O excerto de código anteriormente mencionado permite comparar o valor de t_{d0} com o valor de t_d e verificar se o erro é maior ou menor que 0,05. Após a verificação anterior é guardada numa variável “*flag*” o valor de 0, se o erro for inferior ao erro pretendido, ou o valor de 1 se o erro for superior ao pretendido.

São definidas as variáveis *Tpratico_linha*, *Tprático_coluna*, *Tteorico_linha*, *Tteorico_coluna*, *erro_linha*, *erro_coluna*, *erro*, *flag*, *NovoTpratico*, *contador_defim*, e *dizima*, na primeira parte da função.

Tpratico_linha - Define a linha que corresponde ao valor t_{d0}

Tpratico_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor t_{d0}

Tteorico_linha - Define a linha que corresponde ao valor de t_d

Tteorico_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor t_d

erro_linha - Define a linha que corresponde ao valor de %erro de t_d

erro_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor de %erro de t_d

erro – Define o limite máximo do erro, neste trabalho nunca superior a 0,05

flag

flag = 0 então $t_d < t_{d0}$

flag = 1 então $t_d \geq t_{d0}$

NovoTpratico – Valor de $t_{d0} + dizima$ ou valor de $t_{d0} - dizima$

contador_defim – Permite o programa mudar de linha quando encontra um valor com um erro inferior a 0,05

dizima – Incremento de 0,00001 somado ou subtraído a t_{d0} para obter um novo t_d , com um erro inferior a 0,05

Aplicando os ciclos condicionais “*Do*” e “*If*” a função *calcula_erro*, reconhece as células que correspondentes a t_{d0} e soma ou subtrai uma quantidade definida na variável *dizima*. A soma ou subtração depende da tendência do erro, se este tende a aumentar, é reconhecido esse aumento pela função *calcula_erro*, e é feita a inversão de operador.

Esta mudança de operador pode ser visualizada na variável *flag*, quando esta toma valores de 0 ou 1. A função termina quando encontra valores de t_{d0} , que satisfaçam uma percentagem de erro entre t_{d0} e t_d inferior a 0,05. Este procedimento é efectuado ao longo de todos os valores de t_{d0} criando assim os valores finais de t_d , necessários para o cálculo da rotação (θ).

4.1.2 – Função calcula_erro_graus

A função *calcula_erro_graus* tem como objectivo fazer a alteração do valor α_0 , de uma forma automática e rápida. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```
“... If Sheets("Fase3").Cells(Tpratico_linha, Tpratico_coluna + 2)
= "" Then
Exit Do ...”
```

A linha de código anterior fornece ao compilador a condição de paragem. A função finaliza quando a linha correspondente ao valor de α_0 , numa determinada coluna não se encontra preenchida. No momento em que tal acontece o compilador finaliza a análise da função *calcula_erro_graus*.

São definidas as variáveis *Tpratico_linha*, *Tprático_coluna*, *Tteorico_linha*, *Tteorico_coluna*, *erro_linha*, *erro_coluna*, *erro*, *flag*, *NovoTpratico*, *contador_defim*, e *dizima*, na primeira parte da função.

Tpratico_linha – Define a linha que corresponde ao valor α_0

Tprático_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor α_0

Tteorico_linha - Define a linha que corresponde ao valor de α

Tteorico_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor α

erro_linha - Define a linha que corresponde ao valor de %erro de α

erro_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor de %erro de α

erro – Define o limite máximo do erro, neste trabalho nunca superior a 0,05

flag

flag = 0 então $\alpha < \alpha_0$

flag = 1 então $\alpha \geq \alpha_0$

NovoTpratico – Valor de α_0 + *dizima* ou valor de α_0 - *dizima*

contador_defim – Permite o programa mudar de linha quando encontra um valor com um erro inferior a 0,05

dizima – Incremento de 0,00001 somado ou subtraído a α_0 para obter um novo α , com um erro inferior a 0,05

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *calcula_erro_graus*, reconhece as células que correspondem a α_0 e soma ou subtrai uma quantidade definida na variável *dizima*. A soma ou subtracção depende da tendência do erro, se este tende a aumentar, é reconhecido esse aumento pela função *calcula_erro_graus*, e é feita a inversão de operador.

Esta mudança de operador pode ser visualizada na variável *flag*, quando esta toma valores de 0 ou 1. A função termina quando encontra valores de α_0 , que satisfaçam uma percentagem de erro entre α_0 e α inferior a 0,05. Este procedimento é efectuado ao longo de todos os valores de α_0 criando assim os valores finais de α , necessários para o cálculo da rotação (θ).

4.1.3 – Função *calcula_erro_zetasigma*

A função *calcula_erro_zetasigma* tem como objectivo fazer a alteração do valor ξ_{σ_0} , de uma forma automática e rápida. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```
“... Do
    If Sheets("Fase3").Cells(erro_linha, erro_coluna).Value >=
erro Then
        If flag = 1 Then
            NovoTpratico =
(Sheets("Fase3").Cells(Tpratico_linha, Tpratico_coluna).Value) +
dizima...”
```

As linhas de código anteriormente mencionadas permitem comparar o erro correspondente a ξ_{σ_0} com o valor de 0,05. Quando o valor do erro correspondente a ξ_{σ_0} é superior a 0,05, a “*flag*” toma o valor de 1 e é somada uma dízima definida pelo programador ao valor de ξ_{σ_0} . Depois de somada a dízima o processo é o mesmo até encontrar um valor de erro inferior ou igual a 0,05.

São definidas as variáveis *Tpratico_linha*, *Tprático_coluna*, *Tteorico_linha*, *Tteorico_coluna*, *erro_linha*, *erro_coluna*, *erro*, *flag*, *NovoTpratico*, *contador_defim*, e *dizima*, na primeira parte da função.

Tpratico_linha – Define a linha que corresponde ao valor $\xi_{\sigma 0}$

Tprático_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor $\xi_{\sigma 0}$

Tteorico_linha - Define a linha que corresponde ao valor de ξ_{σ}

Tteorico_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor ξ_{σ}

erro_linha - Define a linha que corresponde ao valor de %erro de ξ_{σ}

erro_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor de %erro de ξ_{σ}

erro – Define o limite máximo do erro, neste trabalho nunca superior a 0,05

flag

flag = 0 então $\xi_{\sigma} < \xi_{\sigma 0}$

flag = 1 então $\xi_{\sigma} \geq \xi_{\sigma 0}$

NovoTpratico – Valor de $\xi_{\sigma} + dizima$ ou valor de $\xi_{\sigma} - dizima$

contador_defim – Permite o programa mudar de linha quando encontra um valor com um erro inferior a 0,05

dizima – Incremento de 0,00001 somado ou subtraído a $\xi_{\sigma 0}$ para obter um novo ξ_{σ} , com um erro inferior a 0,05

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *calcula_erro_zetasigma*, reconhece as células que correspondentes a $\xi_{\sigma 0}$ e soma ou subtrai uma quantidade definida na variável *dizima*. A soma ou subtração depende da tendência do erro, se este tende a aumentar, é reconhecido esse aumento pela função *calcula_erro_zetasigma*, e é feita a inversão de operador.

Esta mudança de operador pode ser visualizada na variável *flag*, quando esta toma valores de 0 ou 1. A função termina quando encontra valores de $\xi_{\sigma 0}$, que satisfaçam uma percentagem de erro entre $\xi_{\sigma 0}$ e ξ_{σ} inferior a 0,05. Este procedimento é efectuado ao longo de todos os valores de $\xi_{\sigma 0}$ criando assim os valores finais de ξ_{σ} , necessários para o cálculo da torção (σ_d).

4.1.4 – Função *calcula_erro_zetatau*

A função *calcula_erro_zetatau* tem como objectivo fazer a alteração do valor $\xi_{\sigma 0}$, de uma forma automática e rápida. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```

“...           Else
                NovoTpratico =
(Sheets("Fase3").Cells(Tpratico_linha, Tpratico_coluna).Value) -
dizima

                End If...”
    
```

As linhas de código anteriormente mencionadas permitem comparar o erro correspondente a $\xi_{\varepsilon 0}$ com o valor de 0,05. Quando o valor do erro correspondente a $\xi_{\varepsilon 0}$ é superior a 0,05, a “flag” toma o valor de 1 e é subtraída uma dízima definida pelo programador ao valor de $\xi_{\varepsilon 0}$. Depois de subtraída a dízima o funcionamento da função é o mesmo até encontrar um valor de erro inferior ou igual a 0,05.

São definidas as variáveis *Tpratico_linha*, *Tprático_coluna*, *Tteorico_linha*, *Tteorico_coluna*, *erro_linha*, *erro_coluna*, *erro*, *flag*, *NovoTpratico*, *contador_defim*, e *dizima*, na primeira parte da função.

Tpratico_linha – Define a linha que corresponde ao valor $\xi_{\varepsilon 0}$

Tprático_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor $\xi_{\varepsilon 0}$

Tteorico_linha - Define a linha que corresponde ao valor de ξ_{ε}

Tteorico_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor ξ_{ε}

erro_linha - Define a linha que corresponde ao valor de %erro de ξ_{ε}

erro_coluna - Define a coluna que corresponde ao valor de %erro de ξ_{ε}

erro – Define o limite máximo do erro, neste trabalho nunca superior a 0,05

flag

flag = 0 então $\xi_{\varepsilon} < \xi_{\varepsilon 0}$

flag = 1 então $\xi_{\varepsilon} \geq \xi_{\varepsilon 0}$

NovoTpratico – Valor de ξ_{ε} + *dizima* ou valor de ξ_{ε} - *dizima*

contador_defim – Permite o programa mudar de linha quando encontra um valor com um erro inferior a 0,05

dizima – Incremento de 0,00001 somado ou subtraído a $\xi_{\varepsilon 0}$ para obter um novo ξ_{ε} , com um erro inferior a 0,05

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *calcula_erro_zetatau*, reconhece as células que correspondentes a $\xi_{\varepsilon 0}$ e soma ou subtrai uma quantidade definida na variável *dizima*. A soma ou subtracção depende da tendência do erro, se este

tende a aumentar, é reconhecido esse aumento pela função *calcula_erro_zetata*, e é feita a inversão de operador.

Esta mudança de operador pode ser visualizada na variável *flag*, quando esta toma valores de 0 ou 1. A função termina quando encontra valores de $\xi_{\varepsilon 0}$, que satisfaçam uma percentagem de erro entre $\xi_{\varepsilon 0}$ e ξ_{ε} inferior a 0,05. Este procedimento é efectuado ao longo de todos os valores de $\xi_{\varepsilon 0}$ criando assim os valores finais de ξ_{ε} , necessários para o cálculo da torção (σ_d).

4.1.5 – Função *calcular_tudo*

A função *calcular_tudo* tem como objectivo accionar as funções anteriores num único botão (*calcular*), de uma forma automática e rápida. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```
“... If Sheets("Fase3").Cells(erro_linha, erro_coluna).Value <=
erro And Sheets("Fase3").Cells(erro_linha, erro_coluna +2).Value
<= erro Then...”
```

As linhas de código anteriormente mencionadas permitem comparar o erro dos pontos correspondentes a t_d e caso este seja menor que 0,05 a função finaliza. Quando não se verifica um erro inferior a 0,05 então esta função acciona a função correspondente ao erro de t_d já mencionada.

São definidas as variáveis *erro_linha*, *erro_coluna* e *erro*, na primeira parte da função.

erro_linha - Define a linha que corresponde aos valores de %erro

erro_coluna - Define a coluna que corresponde aos valores de %erro

erro – Define o limite máximo do erro, neste trabalho nunca superior a 0,05

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *calcular_tudo*, reconhece as células correspondentes a %erro e executa as funções *calcula_erro*, *calcula_erro_graus*, *calcula_erro_zetasigma* e *calcula_erro_zetata* por esta mesma ordem, até que o valor de %erro seja inferior a 0,05.

4.2 – PASSAGEM DA ANÁLISE LINEAR EM ESTADO FISSURADO PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR

A passagem entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear é realizada através da intersecção da curva da análise não linear e a recta que representa a análise linear em estado não fissurado.

4.2.1 – Função tek07

A função *tek07* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```
“...Sheets("Curva_T_Teta").Cells(resultado_folha_t_teta_linha,
2).Value = Sheets("Fase3").Cells(linha_t, 2).Value
        linha_teta = linha_teta + 1
        linha_t = linha_t + 1
        resultado_folha_t_teta_linha =
resultado_folha_t_teta_linha + 1...”
```

As linhas de código anteriormente referidas permitem colocar os valores correspondentes á análise não linear no Quadro 31, para assim ser possível a construção da Curva $T-\theta$ de forma gráfica.

São definidas as variáveis $x1$, $x2$, $y1$, $y2$, $u1$, $u2$, $v1$, $v2$, $b1$, $b2$, $a1$, $a2$, x_i , y_i *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

- $x1$ – θ inicial da análise linear em estado fissurado
- $x2$ – T inicial da análise linear em estado fissurado
- $y1$ - θ final da análise linear em estado fissurado
- $y2$ - T final da análise linear em estado fissurado
- $u1$ – θ do primeiro ponto da análise não linear
- $u2$ - T do primeiro ponto da análise não linear
- $v1$ - θ do segundo ponto da análise não linear
- $v2$ – T do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 u_1$$

$$x_i = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 u_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t - Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *tek07*, tem como objectivo calcular o valor da rotação e do momento toror para um factor minorativo de 0,7, como se pode verificar no Quadro 31.

T.E.	
k=0,7	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,084786	219,0005
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 31 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 0,7

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria da Elasticidade, com um factor minorativo de 0,7. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção da análise linear em estado fissurado e da análise não linear. Após ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear.

A Fig. 11 apresenta os valores obtidos através da função *tek07* e os valores experimentais.

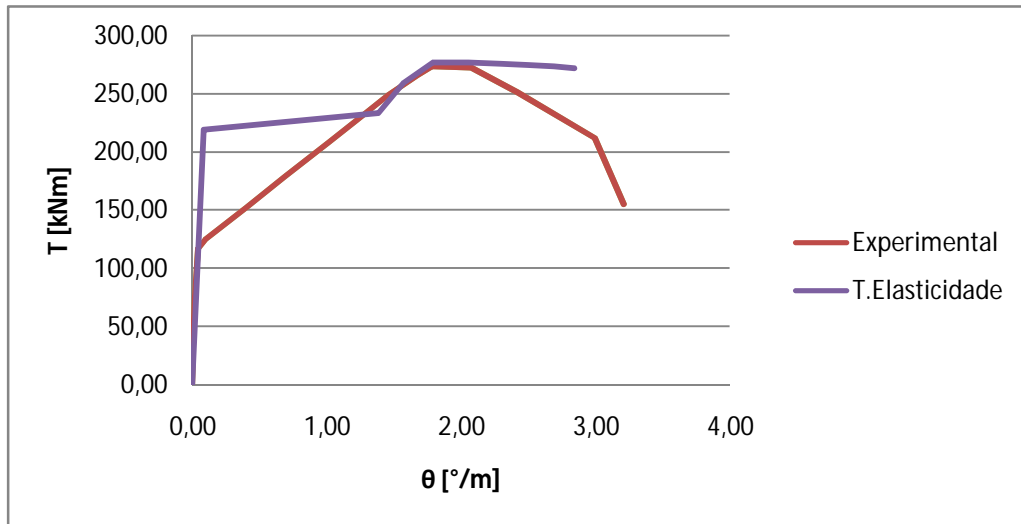


Fig. 11 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade ($k=0,7$)

4.2.2 – Função *tfek07*

A função *tfek07* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```

"...Sheets("Curva_T_Teta").Cells(4, 4).Value =
Sheets("Fase1").Cells(27, 3).Value
    Sheets("Curva_T_Teta").Cells(4, 5).Value =
Sheets("Fase1").Cells(27, 4).Value..."
    
```

As linhas de código anteriores permitem preencher os primeiros valores do Quadro 32, com os valores da Teoria da Flexão Enviesada.

São definidas as variáveis $x1$, $x2$, $y1$, $y2$, $u1$, $u2$, $v1$, $v2$, $b1$, $b2$, $a1$, $a2$, x_i , y_i *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

- $x1$ – θ inicial da análise linear em estado fissurado
- $x2$ – T inicial da análise linear em estado fissurado
- $y1$ – θ final da análise linear em estado fissurado
- $y2$ – T final da análise linear em estado fissurado
- $u1$ – θ do primeiro ponto da análise não linear
- $u2$ – T do primeiro ponto da análise não linear

$v1 - \theta$ do segundo ponto da análise não linear

$v2 - T$ do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 * x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 * u_1$$

$$x_i = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 * u_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t - Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *tfek07*, tem como objectivo preencher o Quadro 32.

T.F.E.	
k=0,7	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,048112	124,2718
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 32 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 0,7

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria da Flexão Enviesada, com um factor minorativo de 0,7. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção da análise linear em estado fissurado e a análise não linear. Após

ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear. A Fig. 12 apresenta os valores obtidos através da função *tfeK07* e os valores experimentais.

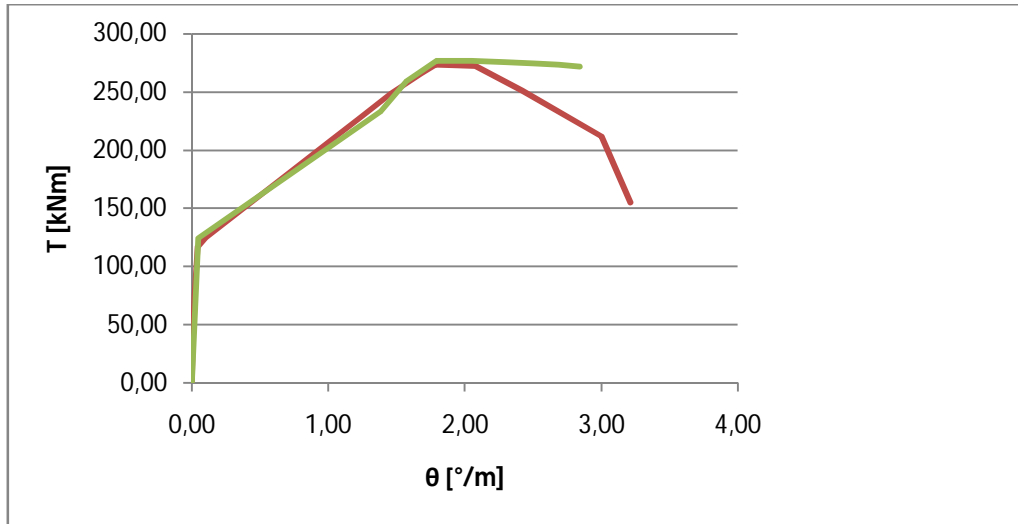


Fig. 12 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviada ($k=0,7$)

4.2.3 – Função *tffk07*

A função *tffk07* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```

“...      u1 = Sheets("Fase3").Cells(linha_teta, 10).Value
          v1 = Sheets("Fase3").Cells(linha_t, 2).Value
          u2 = Sheets("Fase3").Cells(linha_teta + 1, 10).Value
          v2 = Sheets("Fase3").Cells(linha_t + 1, 2).Value
          b1 = (y2 - y1) / (x2 - x1)
          b2 = (v2 - v1) / (u2 - u1)
          a1 = y1 - b1 * x1
          a2 = v1 - b2 * u1
          xi = -(a1 - a2) / (b1 - b2)
          yi = a1 + b1 * xi...”
    
```

As linhas de código acima mencionadas permitem calcular parâmetros auxiliares que irão ser usados para calcular a intersecção da análise linear em estado fissurado com a análise não linear.

São definidas as variáveis x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , b_1 , b_2 , a_1 , a_2 , x_i , y_i *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

x_1 – θ inicial da análise linear em estado fissurado

x_2 – T inicial da análise linear em estado fissurado

y_1 – θ final da análise linear em estado fissurado

y_2 – T final da análise linear em estado fissurado

u_1 – θ do primeiro ponto da análise não linear

u_2 – T do primeiro ponto da análise não linear

v_1 – θ do segundo ponto da análise não linear

v_2 – T do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 * x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 * u_1$$

$$x_i = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 * x_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t - Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *tffk07*, tem como objectivo preencher o Quadro 33.

T.T.F.	
k=0,7	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,045795	118,2861
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 33 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 0,7

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria do Tubo Fino, com um factor minorativo de 0,7. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção da análise linear em estado fissurado e da análise não linear. Após ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear. O Quadro 33 apresenta os valores obtidos através da função $tffk07$ e os valores experimentais. O Fig. 13 permite visualizar os valores obtidos através da Teoria do Tubo Fino e da análise experimental.

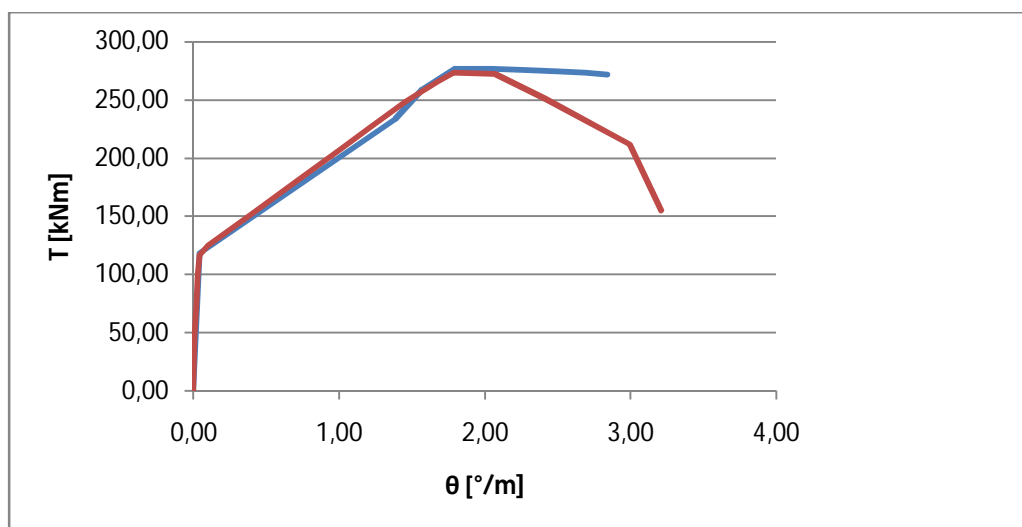


Fig. 13 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino (k=0,7)

É possível comparar os valores dos parâmetros das três teorias utilizadas para um factor minorativo de 0,7 com os valores experimentais, o que se pode verificar na Fig. 14.

Através da análise da seguinte figura podemos ver qual das teorias se ajusta melhor ao caso em estudo.

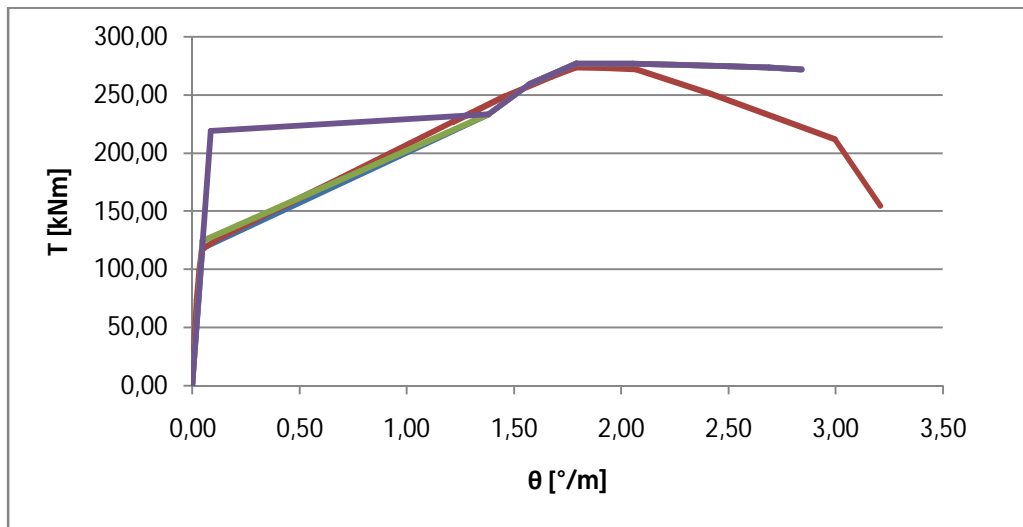


Fig. 14 – Análise comparativa entre a curva experimental e as teorias utilizadas (k=0,7)

4.2.4 – Função *tffkut*

A função *tffkut* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```

"...Sheets("Curva_T_Teta").Cells(resultado_folha_t_teta_linha,
16).Value = xi
    Sheets("Curva_T_Teta").Cells(resultado_folha_t_teta_linha,
17).Value = yi..."
    
```

As linhas de código anteriores permitem preencher o Quadro 34 com o terceiro par de valores. Este par de valores corresponde ao momento em que a análise linear em estado fissurado intercepta a análise não linear.

São definidas as variáveis $x1$, $x2$, $y1$, $y2$, $u1$, $u2$, $v1$, $v2$, $b1$, $b2$, $a1$, $a2$, xi , yi *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

- $x1$ – θ inicial da análise linear em estado fissurado
- $x2$ – T inicial da análise linear em estado fissurado
- $y1$ – θ final da análise linear em estado fissurado

y_2 - T final da análise linear em estado fissurado

u_1 - θ do primeiro ponto da análise não linear

u_2 - T do primeiro ponto da análise não linear

v_1 - θ do segundo ponto da análise não linear

v_2 - T do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 * x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 * u_1$$

$$x_i = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 * u_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t - Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *tffkut*, tem como objectivo preencher o quadro 34.

T.T.F.	
k=utilizador	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,037721	118,2861
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 34 – Valores correspondentes à Curva teórica T - θ pela Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo introduzido pelo utilizador ($k=0,85$)

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria do Tubo Fino, com um factor minorativo de 0,85. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção

da análise linear em estado fissurado e da análise não linear. Após ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear. A figura 15 apresenta os valores obtidos através da função *tffkut* e os valores experimentais.

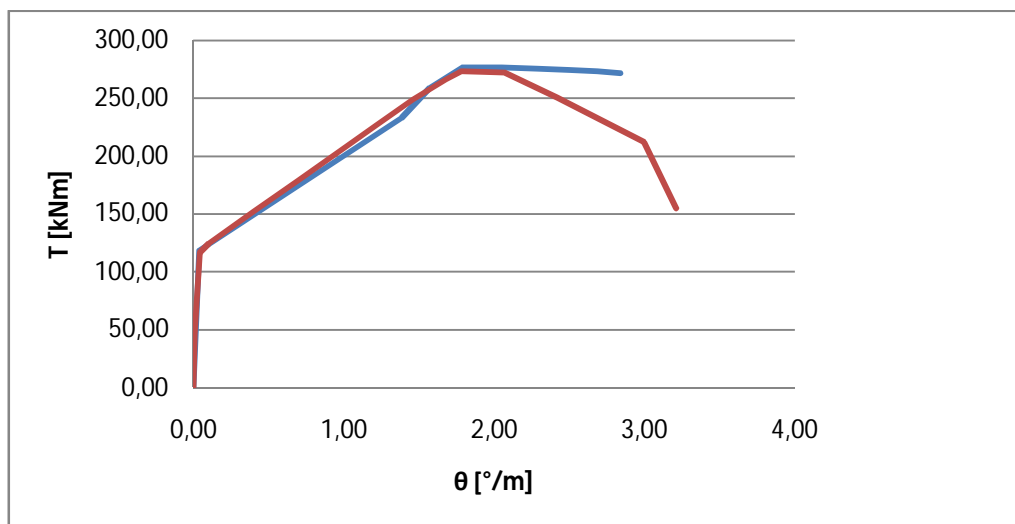


Fig. 15 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino ($k=0,85$)

4.2.5 – Função *tfekut*

A função *tfekut* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```

"...x1 = Sheets("Fase2").Cells(7, 3).Value
y1 = Sheets("Fase2").Cells(7, 2).Value
x2 = Sheets("Fase2").Cells(8, 3).Value
y2 = Sheets("Fase2").Cells(8, 2).Value..."

```

O código acima referido permite introduzir os valores correspondentes à análise linear em estado não fissurado, calculados pela Teoria da Flexão Enviada, no Quadro 35.

São definidas as variáveis x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , b_1 , b_2 , a_1 , a_2 , x_i , y_i *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

x_1 – θ inicial da análise linear em estado fissurado

x_2 – T inicial da análise linear em estado fissurado

y_1 – θ final da análise linear em estado fissurado

y_2 – T final da análise linear em estado fissurado

u_1 – θ do primeiro ponto da análise não linear

u_2 – T do primeiro ponto da análise não linear

v_1 – θ do segundo ponto da análise não linear

v_2 – T do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 * x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 * u_1$$

$$x_i = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 * x_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t – Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *tfekut*, tem como objectivo preencher o Quadro 35.

T.F.E.	
k=utilizador	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,03963	124,2718
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 35 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo introduzido pelo utilizador ($k=0,85$)

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria do Flexão Enviesada, com um factor minorativo de 0,85. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção da análise linear em estado fissurado e da análise não linear. Após ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear. A Fig. 16 apresenta os valores obtidos através da função *tfekut* e os valores experimentais.

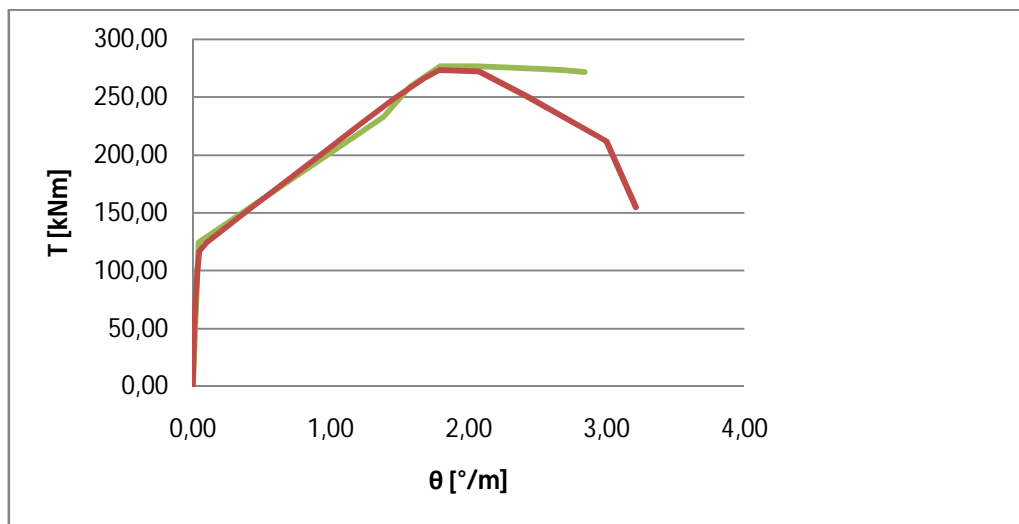


Fig. 16 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada ($k=0,85$)

4.2.6 – Função *tekut*

A função *tekut* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```
“...          linha_teta = linha_teta + 1
          linha_t = linha_t + 1...”
```

O código acima transcrito permite a mudança de linha, visto que os valores se encontram em coluna, e esta é fixa para o parâmetro em análise. A mudança de linha é efectuada através do incremento de uma unidade, permitindo assim analisar todos os pontos referentes ao momento torsor e à rotação, e transcreve-los para o Quadro 36.

São definidas as variáveis $x_1, x_2, y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2, b_1, b_2, a_1, a_2, x_i, y_i$ *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

x_1 – θ inicial da análise linear em estado fissurado

x_2 – T inicial da análise linear em estado fissurado

y_1 - θ final da análise linear em estado fissurado

y_2 - T final da análise linear em estado fissurado

u_1 – θ do primeiro ponto da análise não linear

u_2 - T do primeiro ponto da análise não linear

v_1 - θ do segundo ponto da análise não linear

v_2 – T do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 * x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 * u_1$$

$$x_i = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 * x_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t - Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *tekut*, tem como objectivo preencher o quadro 36.

T.E.	
k=utilizador	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,069838	219,0005
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 36 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Elasticidade com um factor minorativo introduzido pelo utilizador ($k=0,85$)

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria da Elasticidade, com um factor minorativo de 0,85. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção da análise linear em estado fissurado e a análise não linear. Após ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear. A Fig. 17 apresenta os valores obtidos através da função *tekut* e os valores experimentais.

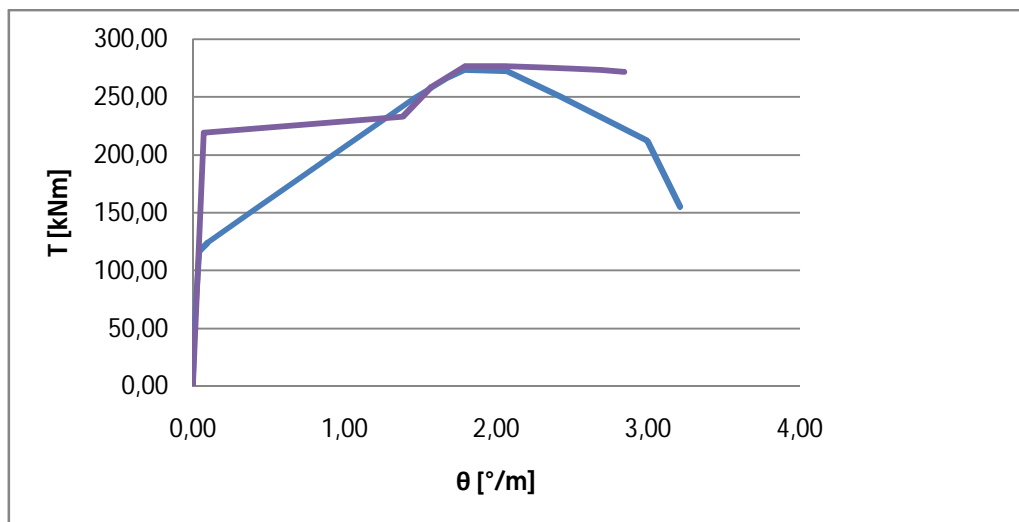


Fig. 17 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade ($k=0,85$)

É possível comparar os valores dos parâmetros das três teorias utilizadas para um factor minorativo de $k=1$ com os valores experimentais, Fig.18. Através da análise da figura abaixo representada pode-se ver qual das teorias se ajusta melhor ao caso em estudo.

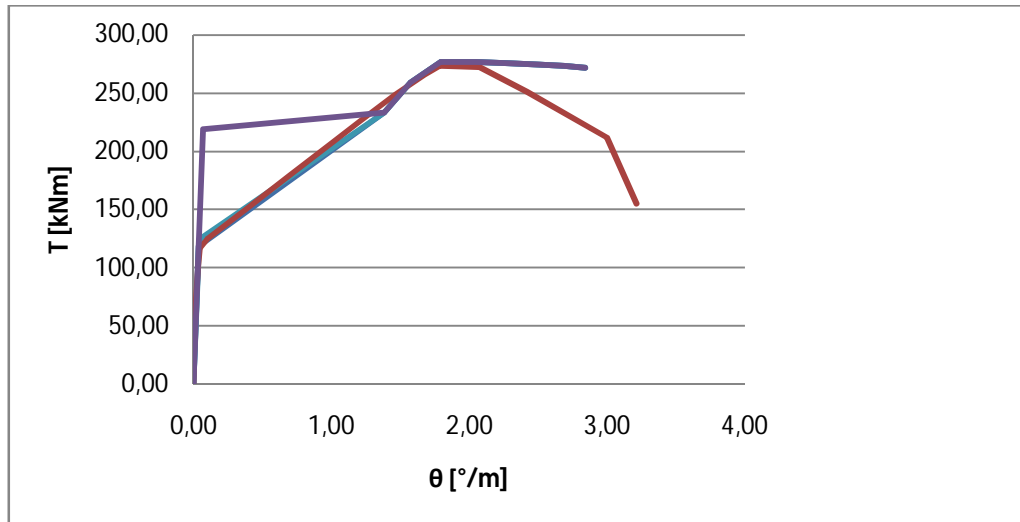


Fig. 18 – Análise comparativa entre a curva experimental e as teorias utilizadas ($k=0,85$)

4.2.7 – Função tek1

A função *tek1* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```

“...          If (x1 - xi) * (xi - x2) >= 0 And (u1 - xi) *
(xi - u2) >= 0 And _
                (u1 - xi) * (xi - u2) >= 0 And _
                (y1 - yi) * (yi - y2) >= 0 And _
                (v1 - yi) * (yi - v2) >= 0 Then...”
    
```

É apresentado no código acima o ciclo condicional “If”. Este ciclo permite analisar todos os pontos constituintes da análise não linear e encontrar a sua intersecção com a análise linear em estado fissurado.

São definidas as variáveis x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , b_1 , b_2 , a_1 , a_2 , x_i , y_i *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

x_1 – θ inicial da análise linear em estado fissurado

x_2 – T inicial da análise linear em estado fissurado

y_1 – θ final da análise linear em estado fissurado

y_2 – T final da análise linear em estado fissurado

u_1 – θ do primeiro ponto da análise não linear

u_2 – T do primeiro ponto da análise não linear

v_1 – θ do segundo ponto da análise não linear

v_2 – T do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 * x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 * u_1$$

$$x_i = - \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 * x_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t – Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função *tek1*, tem como objectivo preencher o quadro 37.

T.E.	
k=1	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,059371	219,0005
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 37 – Valores correspondentes à Curva teórica T - θ pela Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 1

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria da Elasticidade, com um factor minorativo de 1. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção da análise linear em estado fissurado e a análise não linear. Após ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear. A Fig. 19 apresenta os valores obtidos através da função $tek1$ e os valores experimentais.

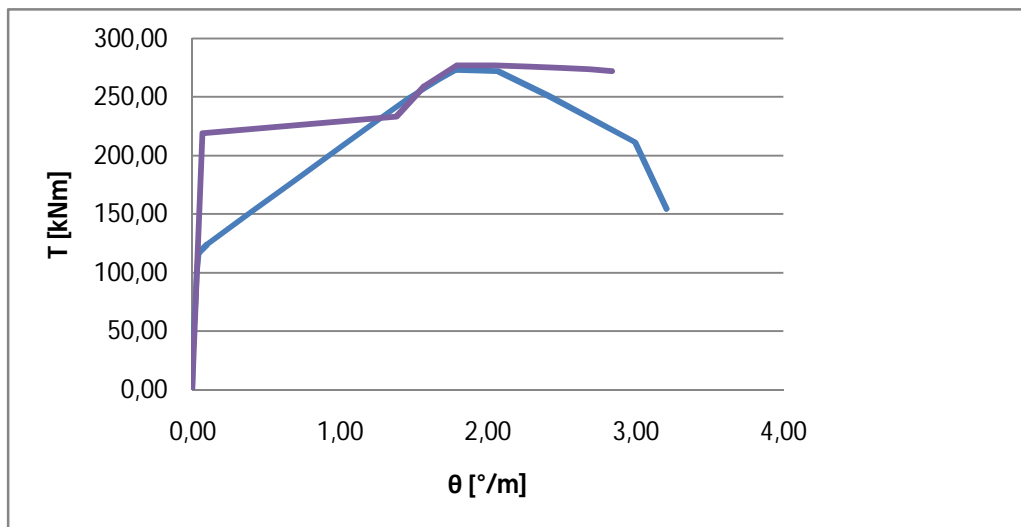


Fig. 19 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade (k=1)

4.2.8 – Função *tfek1*

A função *tfek1* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```
x1 = Sheets("Fase2").Cells(7, 3).Value
y1 = Sheets("Fase2").Cells(7, 2).Value
x2 = Sheets("Fase2").Cells(8, 3).Value
y2 = Sheets("Fase2").Cells(8, 2).Value
```

O código acima atribui os valores do momento torsor da análise não linear às variáveis $x1$, $x2$, $y1$ e $y2$

São definidas as variáveis $x1$, $x2$, $y1$, $y2$, $u1$, $u2$, $v1$, $v2$, $b1$, $b2$, $a1$, $a2$, x_i , y_i *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

$x1$ – θ inicial da análise linear em estado fissurado

$x2$ – T inicial da análise linear em estado fissurado

$y1$ – θ final da análise linear em estado fissurado

$y2$ – T final da análise linear em estado fissurado

$u1$ – θ do primeiro ponto da análise não linear

$u2$ – T do primeiro ponto da análise não linear

$v1$ – θ do segundo ponto da análise não linear

$v2$ – T do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 * x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 * u_1$$

$$x_i = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 * x_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t – Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função t_{fek1} , tem como objectivo preencher o Quadro 38.

T.F.E.	
k=1	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,03369	124,2718
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 38 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 1

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria do Flexão Enviesada, com um factor minorativo de 1. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção da análise linear em estado fissurado e a análise não linear. Após ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear. A Fig.20 apresenta os valores obtidos através da função t_{fe1} e os valores experimentais.

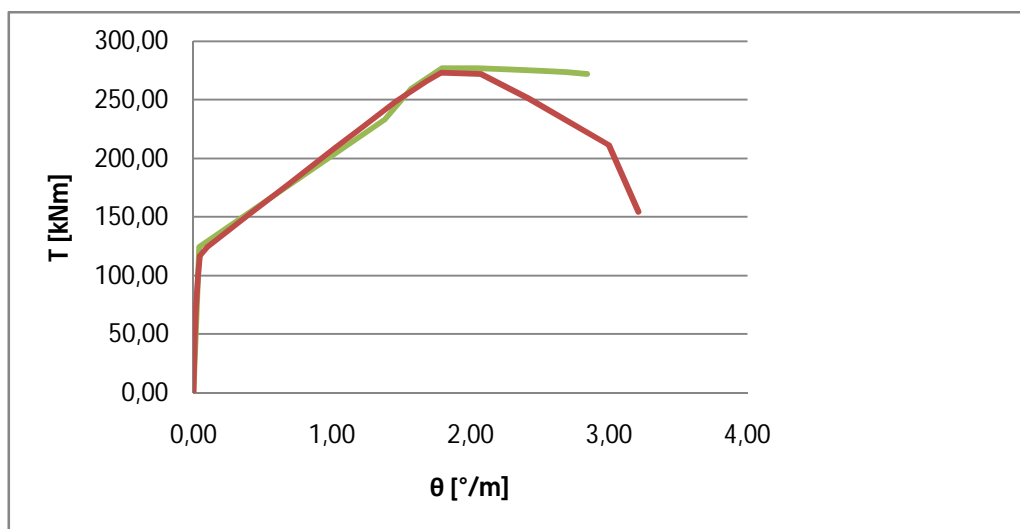


Fig. 20 – Análise comparativa entre a Curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada (k=1)

4.2.9 – Função *tffk1*

A função *tffk1* tem como objectivo o cálculo dos valores que definem a Curva $T-\theta$, numa primeira fase da análise de uma viga de secção oca solicitada à torção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```

“...                               End If
                                   Loop
                                   Exit Do
                                   Else...”
    
```

As linhas de código anteriores permitem “fechar” ciclos (*End if*), voltar ao início de um ciclo para o executar novamente (*Loop*), sair de um ciclo e não o voltar a executar (*Exit Do*) e fazer um teste lógico com duas ou mais opções (*Else*).

São definidas as variáveis x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , b_1 , b_2 , a_1 , a_2 , x_i , y_i *linha_teta*, *linha_t*, *resultado_folha_t_teta_linha*, na primeira parte da função.

x_1 – θ inicial da análise linear em estado fissurado

x_2 – T inicial da análise linear em estado fissurado

y_1 – θ final da análise linear em estado fissurado

y_2 – T final da análise linear em estado fissurado

u_1 – θ do primeiro ponto da análise não linear

u_2 – T do primeiro ponto da análise não linear

v_1 – θ do segundo ponto da análise não linear

v_2 – T do segundo ponto da análise não linear

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{u_2 - u_1}$$

$$a_1 = y_1 - b_1 * x_1$$

$$a_2 = v_1 - b_2 * u_1$$

$$x_i = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

$$y_i = a_1 + b_1 * u_i$$

linha_teta – Define a linha que corresponde ao valor de θ

linha_t – Define a linha que corresponde ao valor de T

resultado_folha_t_teta_linha – Resultado da intersecção dos valores da análise linear em estado fissurado com a análise não linear

Aplicando os ciclos condicionais “Do” e “If” a função $tffk1$, tem como objectivo preencher o quadro 39.

T.T.F.	
k=1	
θ [°/m]	T [kNm]
0	0
0,032067	118,2861
1,382423	233,1041
1,571317	259,0949
1,790583	276,6328
2,054411	276,7705
2,292881	275,6808
2,503784	274,6764
2,68847	273,4276
2,840833	271,8615

Quadro 39 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 1

Os primeiros dois pares de valores são retirados da análise linear em estado não fissurado, tendo como base os valores calculados através da Teoria do Tubo Fino, com um factor minorativo de 1. O terceiro par de valores é calculado através da intersecção da análise linear em estado fissurado e a análise não linear. Após ser encontrada a intersecção, os restantes valores são obtidos pela análise não linear. A Fig. 21 apresenta os valores obtidos através da função $tffkut$ e os valores experimentais.

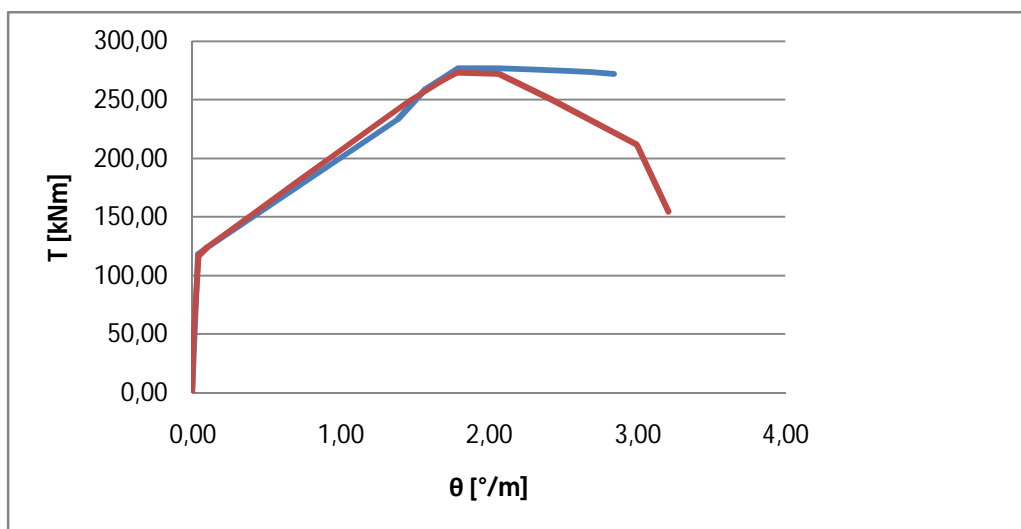


Fig. 21 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino (k=1)

É possível comparar os valores dos parâmetros das três teorias utilizadas para um factor minorativo de 1 com os valores experimentais, Fig. 22. Através da análise da figura abaixo referenciada pode-se ver qual das teorias se ajusta melhor ao caso em estudo.

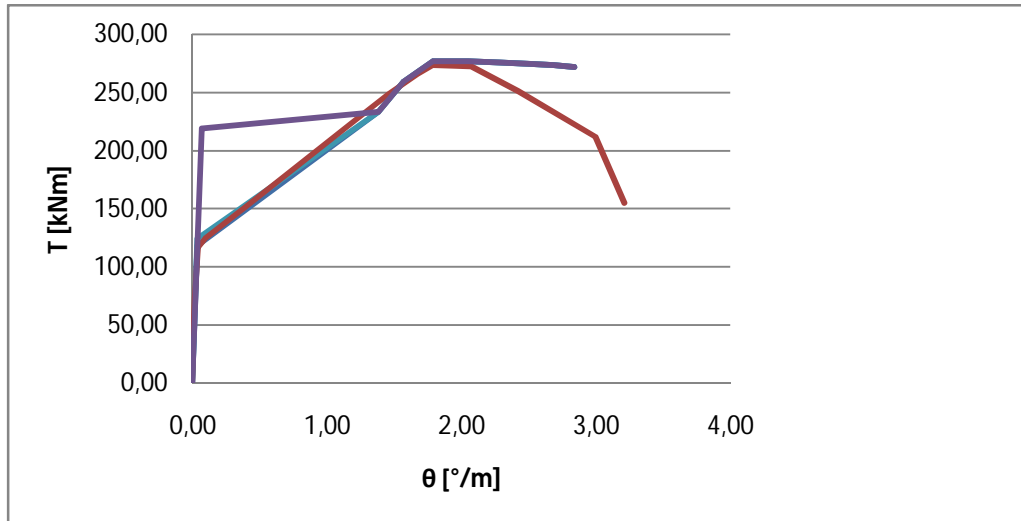


Fig. 22 – Análise comparativa entre a curva experimental e as teorias utilizadas (k=1)

Para se obter os valores resultantes das funções acima mencionadas é necessário executar o botão correspondente a cada uma delas que se encontra junto às tabelas, no ficheiro executável, Quadro 29.

4.3 – PASSAGEM DA ANÁLISE LINEAR EM ESTADO FISSURADO PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR ATRAVÉS DO DECLIVE

A passagem da análise linear em estado fissurado com a análise não linear é calculada comparando os declives. O declive da análise linear em estado fissurado é representado por um único valor, enquanto na análise não linear, devido ao conjunto de pontos, é necessário calcular o declive entre cada ponto. Após calculados os vários declives na análise não linear, são comparados com o declive da análise linear em estado fissurado, através da função new_tek07.

4.3.1 – Função new_tek07

A função new_tek07 tem como função calcular a intersecção da análise linear em regime fissurado com a análise não linear, e para isso utiliza o declive para encontrar a intersecção. O código correspondente a esta função encontra-se em anexo.

```
“...Do
    If Sheets("Fase3").Cells(linha_declive, 9).Value > 1 Or
    Sheets("Fase3").Cells(linha_declive, 9).Value < 0 Then...”
```

Através do ciclo condicional “Do” é possível criar um ciclo condicional “If”, onde são comparados os declives calculados na análise não linear, aos quais está associado um número 0 ou 1.

São definidas as variáveis *declive*, *linha_declive*, *contador*, *linha*, *linha_teta*, *a*, e *b*, na primeira parte da função.

declive – declive definido na análise não linear, entre dois pontos consecutivos

linha_declive – declive da recta que define a análise linear em estado fissurado

contador – permite analisar todos os declives da análise não linear

linha – permite descarregar os valores para o separador “FINAL”

linha_teta – valores de θ calculados na análise não linear

a – valores do Momento Torsor calculados na análise não linear

b - valores do Momento Torsor calculados na análise não linear corrigido

A função new_tek07 compara o declive da análise linear em regime fissurado analisado no ponto 3 desta dissertação e compara-o com o declive da análise não linear analisado no ponto 4.

A partir do momento que se verifique um declive superior na análise linear em regime fissurado, a função analisa o declive correspondente na análise não linear. Após a análise dos declives a função new_tek07 fixa, a abcissa correspondente ao ponto de intersecção, e compara o valor dos momentos torsores. Nesta fase é somado ou subtraído o valor *delta* obtendo-se assim o valor do momento torsor corrigido (*b*) (Quadro 40).

Passagem da fase linear para não linear			
Fase linear	Fase não linear		
Y_l	x_n	Y_n	delta
249,8539946	1,571316678	259,0949	-9,24092

Quadro 40 – Valores correspondentes à transição da análise linear em estado fissurado para a análise não linear

$$y_l = \frac{(GI)'' \frac{x_n}{57,296}}{1000} + \eta T_c \quad (119)$$

x_n - Valor da abcissa (θ) obtido pela função new_tek07

y_n - Valor da ordenada (T) obtido pela função new_tek07

$$delta = y_n - y_l \quad (120)$$

5 – DISCUSSÃO DE RESULTADOS

5.1 – ANÁLISE LINEAR EM ESTADO NÃO FISSURADO

Para o exemplo em estudo a construção da Curva teórica $T-\theta$ na análise linear em estado não fissurado pode ser caracterizada por três teorias, Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviesada e pela Teoria do Tubo Fino, cada uma das teorias, com três valores distintos de k .

Com a análise das Fig. 23, 24 e 25 pode-se verificar qual das teorias e factores minorativos (k) se aplicam melhor no estudo da análise linear em estado não fissurado.

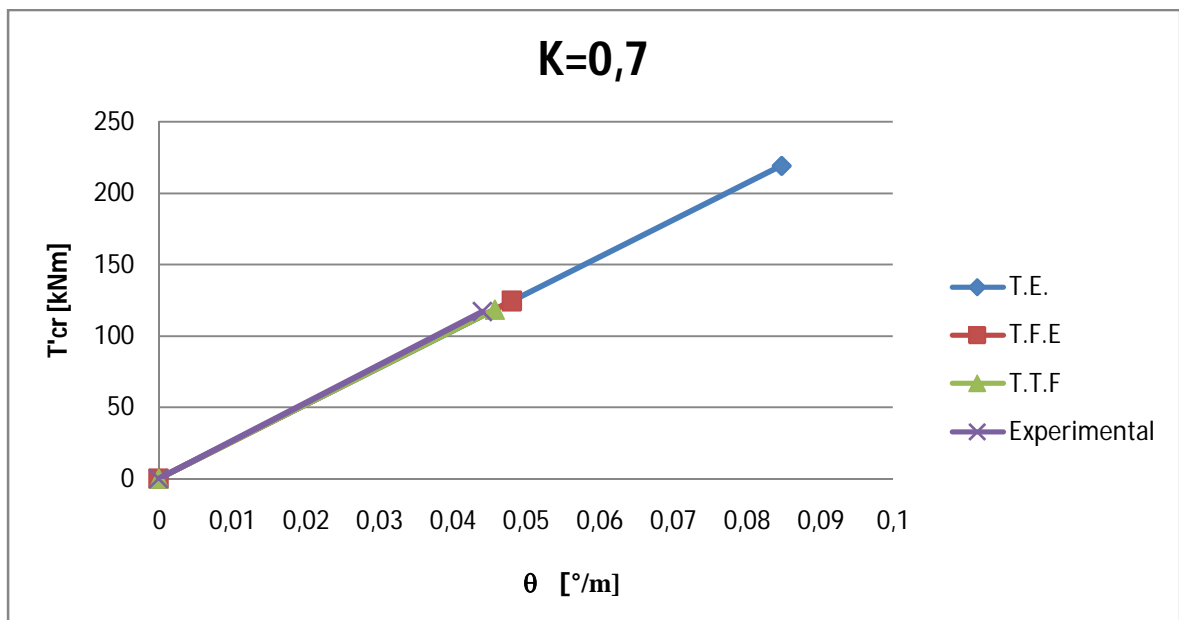


Fig. 23 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=0,7$

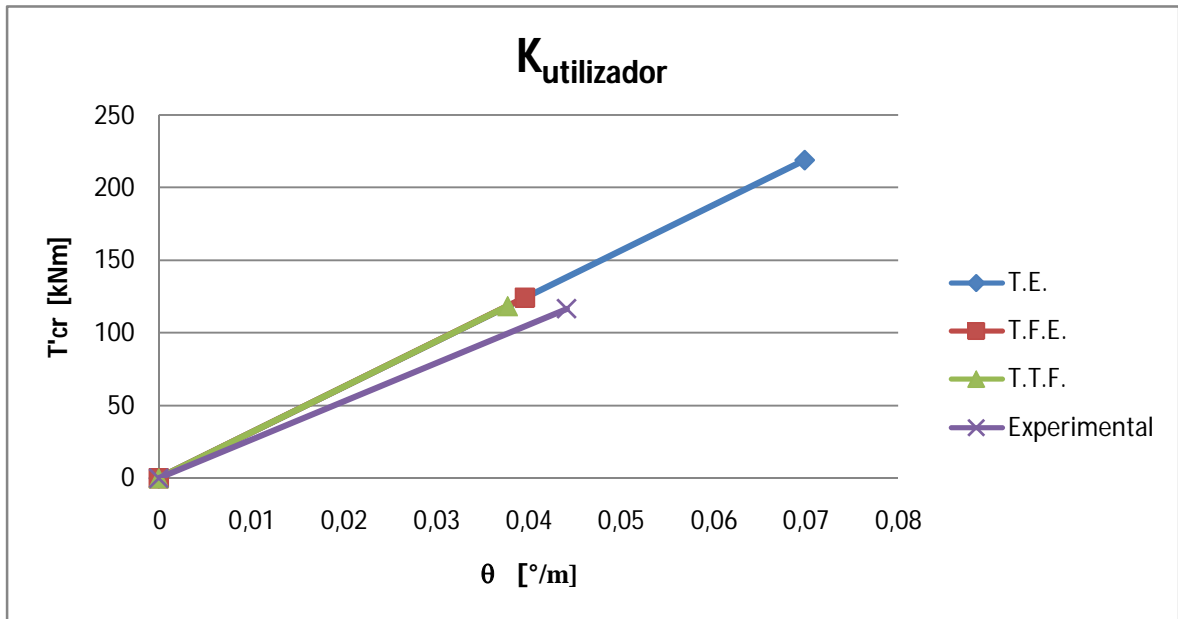


Fig. 24 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=0,85$

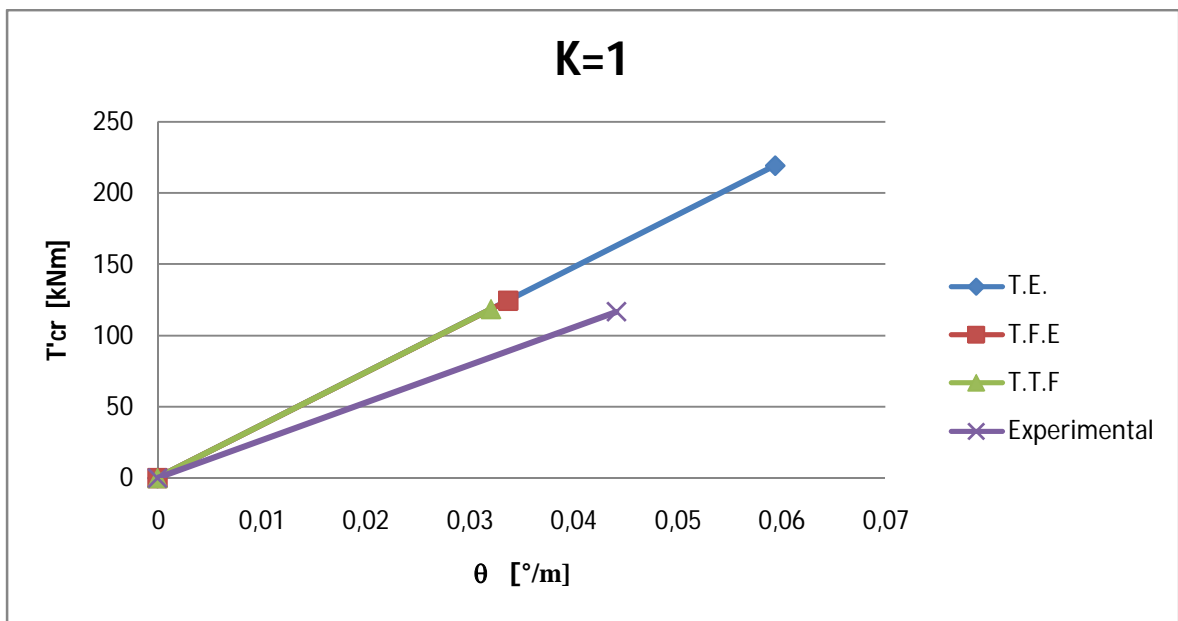


Fig. 25 – Análise comparativa da análise linear em estado não fissurado para $K=1$

Pela análise das três figuras anteriores pode-se concluir que os valores correspondentes à análise linear em estado não fissurado para o factor minorativo ($k=1$) são os que menos se apropriam para a análise da viga em estudo, sendo os valores das três teorias utilizadas os que menos se aproximam da representação experimental.

Quando se utiliza um valor do factor minorativo de $k=0,85$, valor este escolhido pelo utilizador, há uma certa proximidade com os valores experimentais. Estes resultados exprimem por excesso o valor do momento torsor (T), quando analisados pela Teoria da

Elasticidade. Todavia, obtém-se um valor menor que o experimental quando analisados pelas Teoria da Flexão Enviada e pela Teoria do Tubo Fino.

No caso da rotação (θ), a Teoria da Elasticidade apresenta uma rotação maior do que os valores experimentais e a Teoria da Flexão Enviada, assim como a Teoria do Tubo Fino, apresentam valores menores que os experimentais.

Quando analisados os mesmos valores obtidos pelos ensaios de vigas à torção à luz das mesmas teorias, mas com um factor minorativo de $k=0,7$, verifica-se que a Teoria da Elasticidade é a que menos se adequa.

A teoria que melhor se ajusta à viga em análise é a Teoria do Tubo Fino que apresenta um momento torsor e uma rotação que melhor se ajusta à análise linear em estado não fissurado.

É de salientar também que as três teorias utilizadas mostram os diferentes resultados que podem ser considerados em outras análises, dependendo do intuito do utilizador.

Os resultados da análise linear em estado fissurado e da análise não linear são apresentados de duas formas distintas. O primeiro conjunto de valores, do qual resulta a construção da Curva teórica $T-\theta$, é obtido através da intersecção da análise linear em estado fissurado com a análise não linear. O segundo conjunto de valores, do qual resulta a construção da Curva teórica $T-\theta$ é obtido através do declive da recta representativa da análise linear em estado fissurado e o consecutivo declive dos pontos que caracterizam a análise não linear.

Admitindo que a melhor solução analisada será com um factor minorativo de $k=0,7$, vão ser analisados apenas os resultados obtidos a partir desse valor.

É de referir que esta análise comparativa é referente a uma viga, pretendendo-se assim construir uma folha de cálculo e calibrar o modelo para um exemplo.

5.2 – PASSAGEM DA ANÁLISE LINEAR EM ESTADO FISSURADO PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR

A Fig.26 permite visualizar de uma forma gráfica os resultados obtidos pela Teoria da Elasticidade e os experimentais.

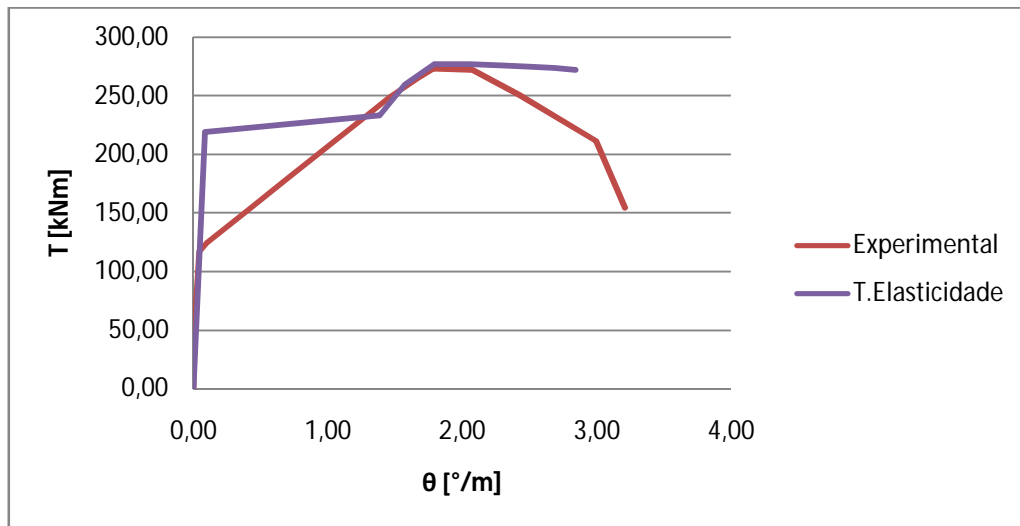


Fig. 26 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade

Verifica-se uma discrepância dos valores entre o momento torsor de fissuração experimental e o momento torsor de fissuração teórico quando analisados pela Teoria da Elasticidade. A análise linear em estado fissurado também não se aproxima da experimental devido ao elevado valor do momento torsor de fissuração. Verifica-se um aumento do momento torsor não concordante entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear, o que não pode acontecer, no máximo poderia aparecer um patamar de rotura.

Com esta análise conclui-se que a Teoria da Elasticidade quando comparada com a análise experimental conduz a uma certa precaução em relação ao seu uso.

A Fig.27 permite visualizar de uma forma gráfica os resultados obtidos pela Teoria da Flexão Enviesada e os experimentais.

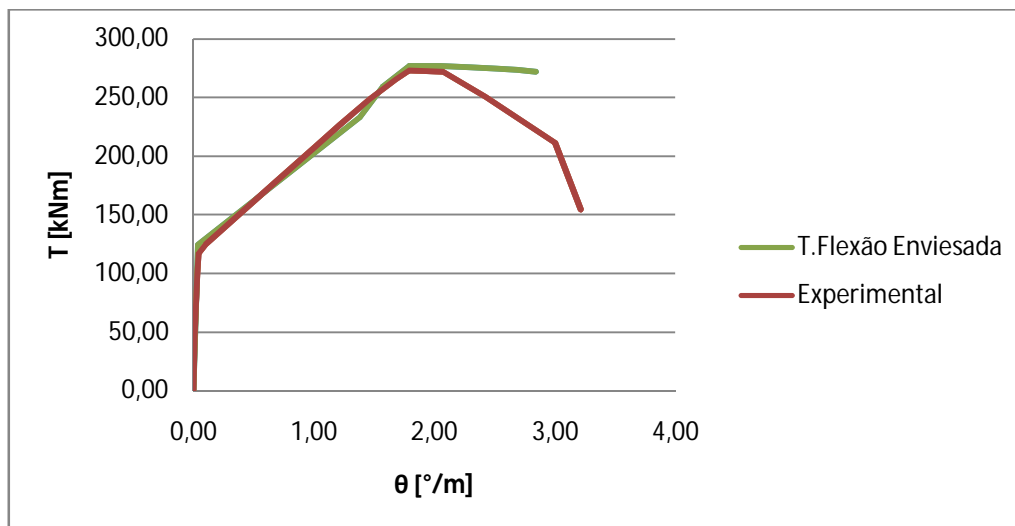


Fig. 27 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada

Quando analisados os valores obtidos pela Teoria da Flexão Enviesada verifica-se uma semelhança com os valores obtidos experimentalmente na fase correspondente à análise linear em estado não fissurado. Esta semelhança é também verificada na análise linear em estado fissurado.

Verifica-se um aumento do momento torsor não concordante entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear, menos acentuado quando comparado com a análise feita pela Teoria da Elasticidade, o que não pode acontecer, no máximo poderia aparecer um patamar de rotura.

Com esta análise conclui-se que a Teoria da Flexão Enviesada apresenta um desvio quando comparada com a análise experimental. Este desvio só se torna evidente na passagem da análise linear em estado fissurado com a análise não linear.

Todas estas evidências requerem uma certa precaução em relação ao seu uso quando o estado mais importante é a transição do estado fissurado para o estado de rotura.

A Fig.28 permite visualizar de uma forma gráfica os resultados obtidos pela Teoria do Tubo Fino e os experimentais.

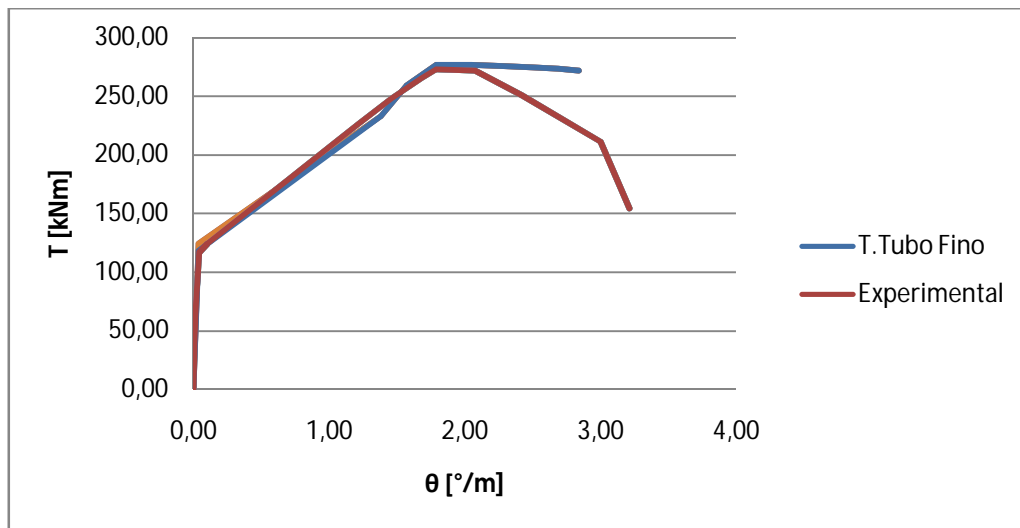


Fig. 28 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino.

Através da Fig.28 verifica-se que a Teoria do Tubo Fino apresenta uma certa semelhança na fase correspondente à análise linear em estado não fissurado relativamente à análise experimental. Esta mesma semelhança mantém-se também em relação à análise linear em estado fissurado.

Verifica-se um aumento do momento torsor não concordante menos acentuado, entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear, quando comparado com a análise feita pela Teoria da Elasticidade. Esta análise apresenta valores muito semelhantes aos da Teoria da Flexão Enviesada.

Todas estas conclusões levam a uma certa precaução em relação ao seu uso quando o estado mais importante é a transição do estado fissurado para o estado de rotura.

5.3 – PASSAGEM ENTRE A ANÁLISE LINEAR EM ESTADO FISSURADO PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR ATRAVÉS DO DECLIVE

De seguida, estão representados os gráficos e as tabelas correspondentes aos pontos da Curva $T-\theta$ com base na passagem da análise linear em estado fissurado para a análise não linear através do declive.

Os resultados obtidos com base na Teoria da Elasticidade encontram-se representados no Quadro 41 e a sua visualização gráfica na Fig. 29, 30 e 31.

Teoria da Elasticidade					
K=0,7		K=utilizador		K=1	
θ [°/m]	T [kNm]	θ [°/m]	T [kNm]	θ [°/m]	T [kNm]
0	0	0	0	0	0
0,084786	219,0005	0,069838	219,0005	0,059371	219,0005
2,040193	268,3273	2,040193	268,3273	2,040193	268,3273
2,283744	267,7731	2,283744	267,7731	2,283744	267,7731
2,503784	266,5235	2,503784	266,5235	2,503784	266,5235
2,699106	265,4231	2,699106	265,4231	2,699106	265,4231
2,8564	264,2991	2,8564	264,2991	2,8564	264,2991

Quadro 41 – Valores correspondentes à Curva teórica T - θ pela Teoria da Elasticidade com os vários factores minorativos

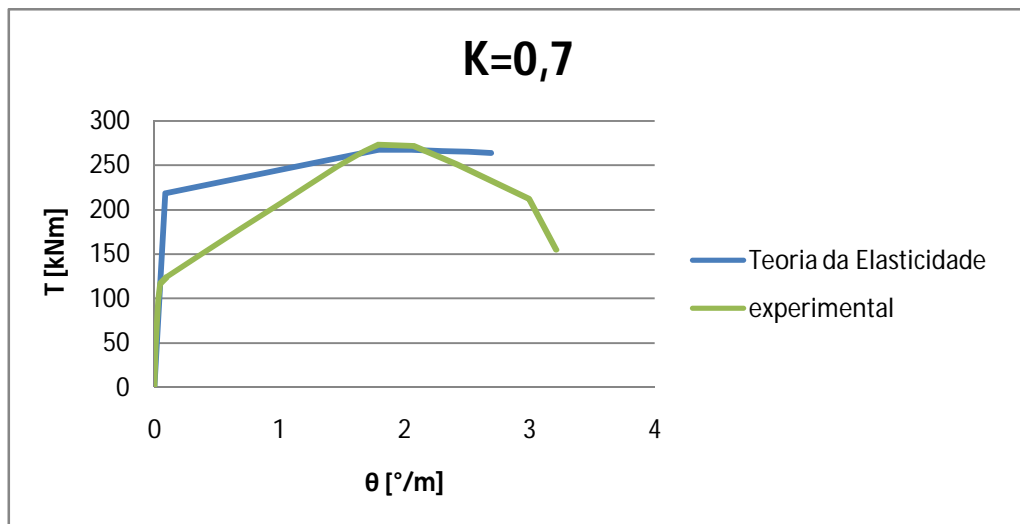


Fig. 29 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 0,7

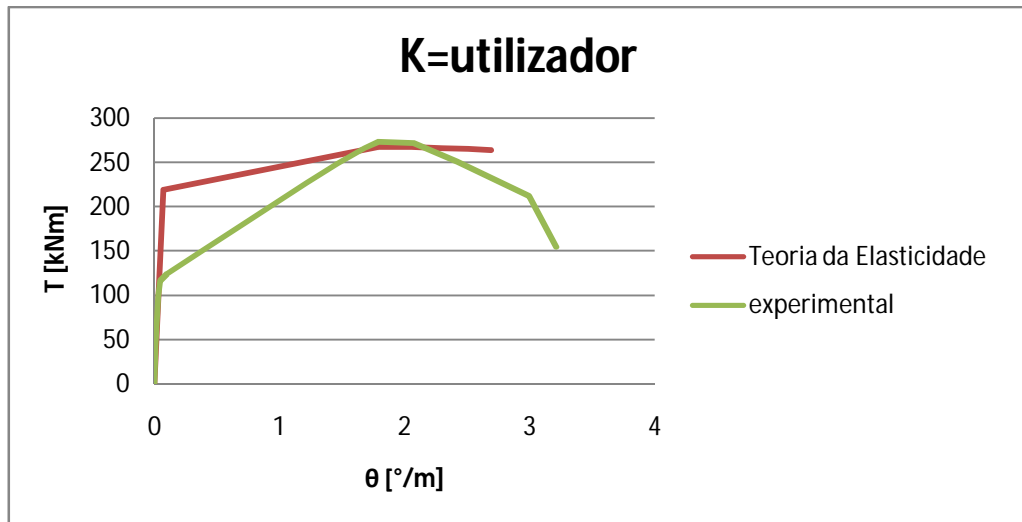


Fig. 30 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 0,85

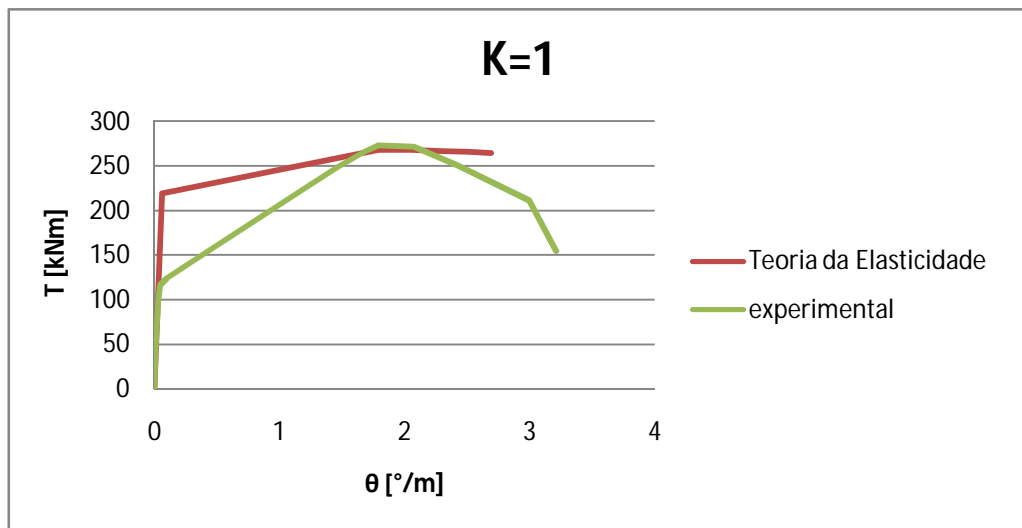


Fig. 31 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 1

Os resultados obtidos com base na Teoria da Flexão Enviesada encontram-se representados no Quadro 42 e a sua visualização gráfica na Fig. 32, 33 e 34.

Teoria da Flexão Enviesada					
K=0,7		K=utilizador		K=1	
θ [°/m]	T [kNm]	θ [°/m]	T [kNm]	θ [°/m]	T [kNm]
0	0	0	0	0	0
0,048112	124,2718	0,03963	124,2718	0,03369	124,2718
2,040193	268,3273	2,040193	268,3273	2,040193	268,3273
2,283744	267,7731	2,283744	267,7731	2,283744	267,7731
2,503784	266,5235	2,503784	266,5235	2,503784	266,5235
2,699106	265,4231	2,699106	265,4231	2,699106	265,4231
2,8564	264,2991	2,8564	264,2991	2,8564	264,2991

Quadro 42 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria da Flexão Enviesada com os vários factores minorativos

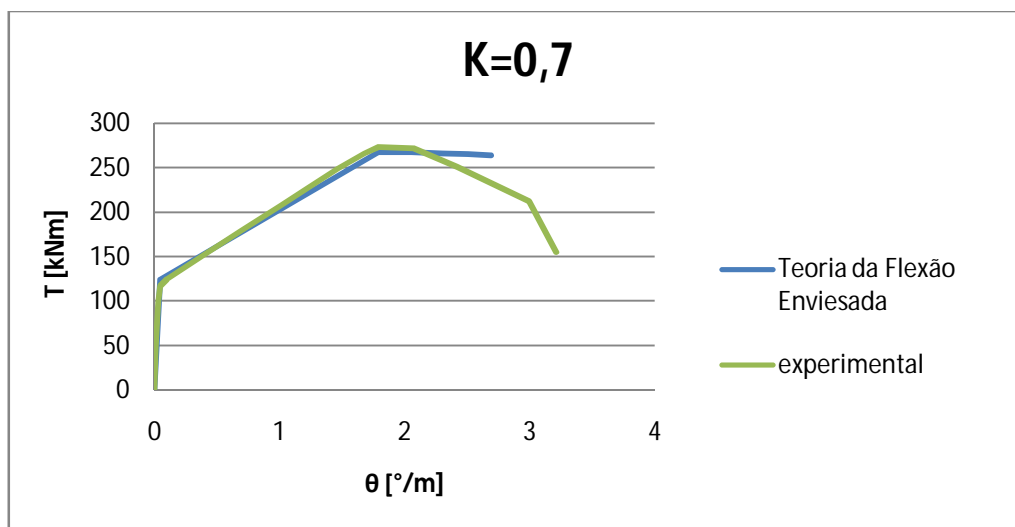


Fig. 32 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 0,7

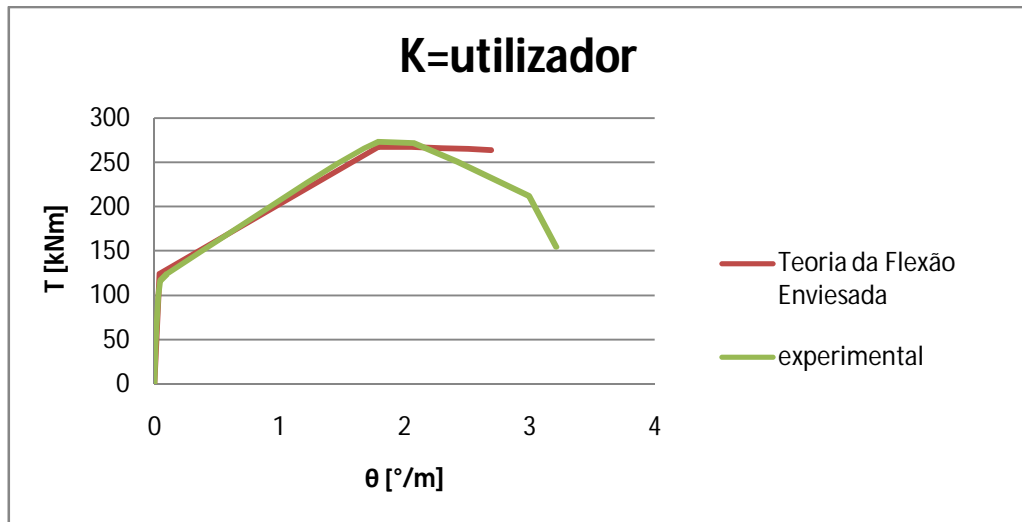


Fig. 33 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 0,85

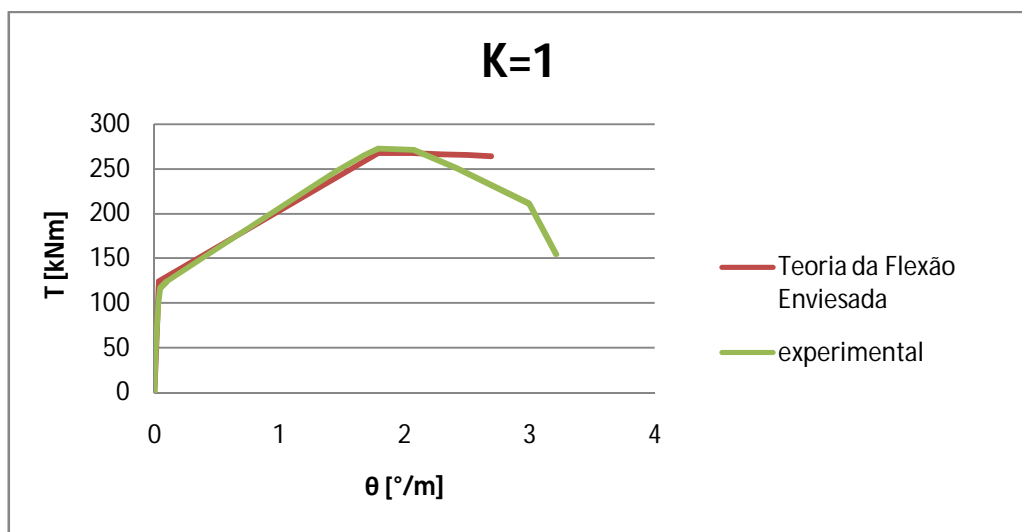


Fig. 34 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 1

Os resultados obtidos com base na Teoria do Tubo Fino encontram-se representados no Quadro 43 e a sua visualização gráfica na Fig. 35, 36 e 37.

Teoria do Tubo Fino					
K=0,7		K=utilizador		K=1	
θ [°/m]	T [kNm]	θ [°/m]	T [kNm]	θ [°/m]	T [kNm]
0	0	0	0	0	0
0,045795	118,2861	0,037721	118,2861	0,032067	118,2861
2,040193	268,3273	2,040193	268,3273	2,040193	268,3273
2,283744	267,7731	2,283744	267,7731	2,283744	267,7731
2,503784	266,5235	2,503784	266,5235	2,503784	266,5235
2,699106	265,4231	2,699106	265,4231	2,699106	265,4231
2,8564	264,2991	2,8564	264,2991	2,8564	264,2991

Quadro 43 – Valores correspondentes à Curva teórica $T-\theta$ pela Teoria do Tubo Fino com os vários factores minorativos

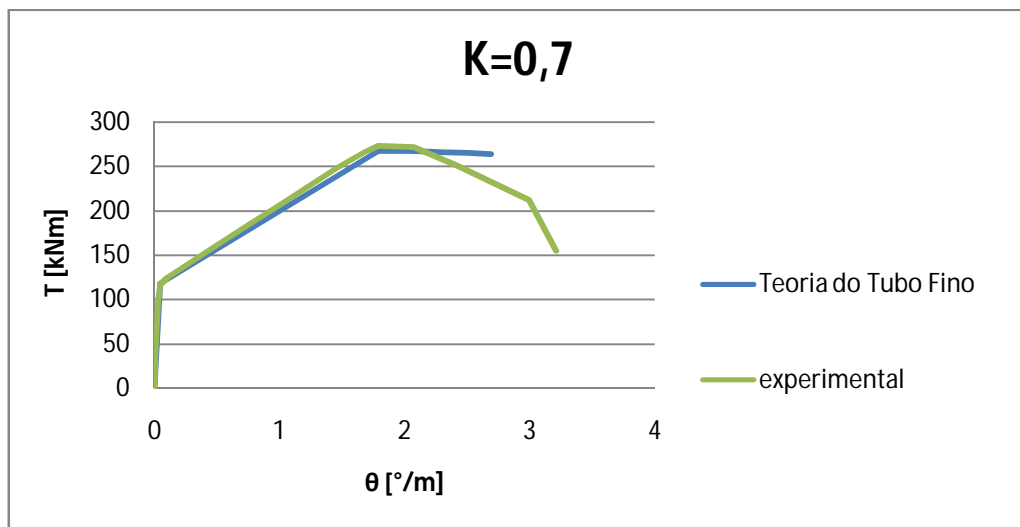


Fig. 35 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 0,7

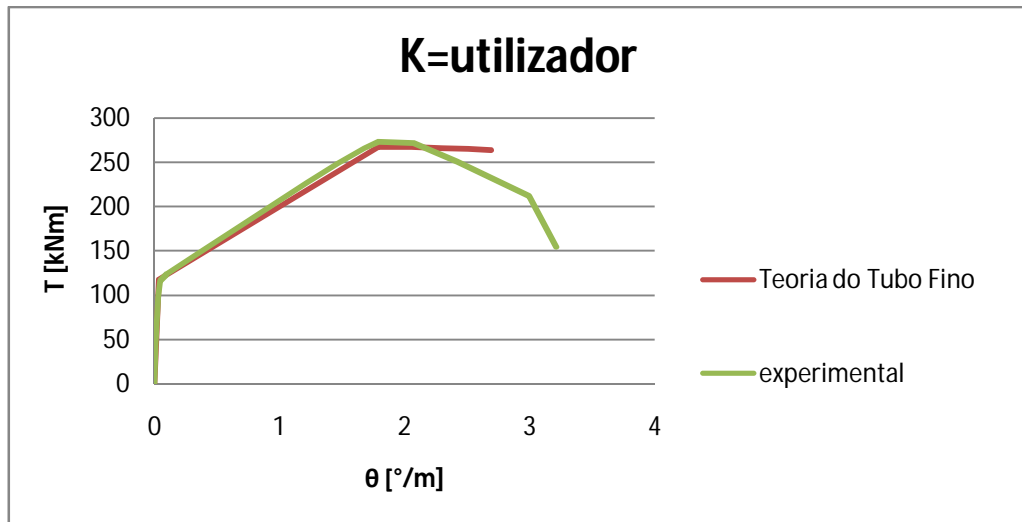


Fig. 36 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 0,85

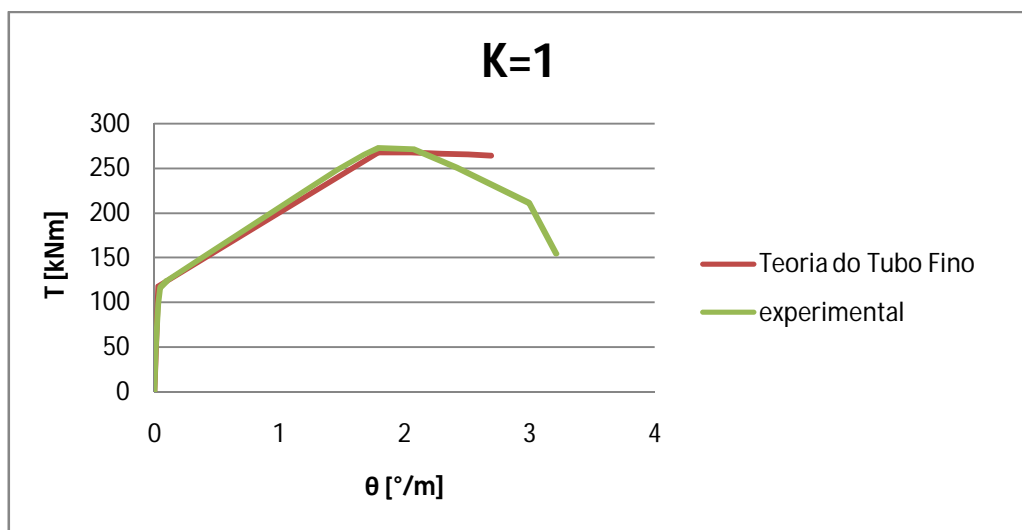


Fig. 37 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 1

Admitindo que a melhor solução analisada será com um factor minorativo $k=1$, serão analisados apenas os resultados obtidos a partir desse valor. As Fig. 38, 39 e 40 apresentam a comparação das três teorias utilizadas com a análise experimental da viga em estudo.

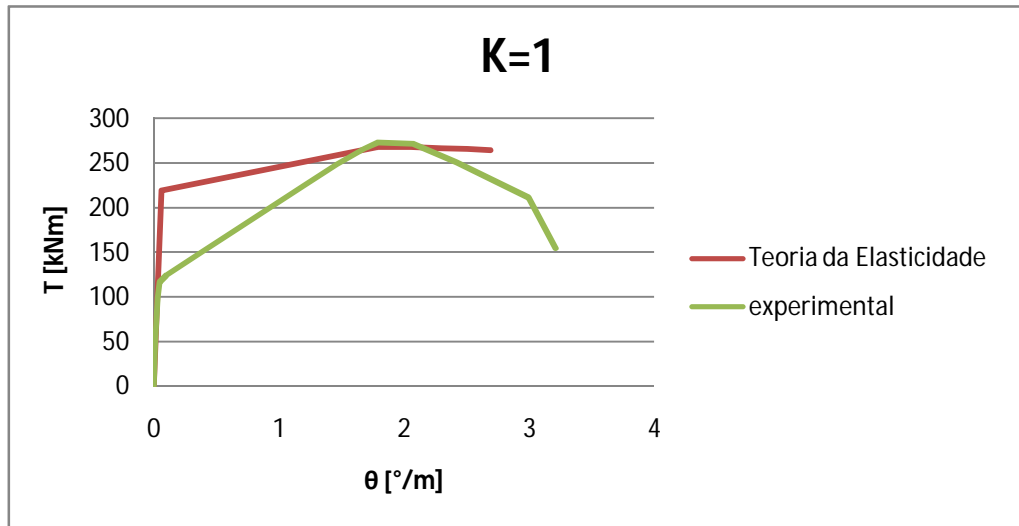


Fig. 38 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Elasticidade com um factor minorativo de 1

Verifica-se uma concordância do momento torsor entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear, o que traduz de uma forma mais realista os resultados obtidos.

Com esta análise conclui-se que a Teoria da Elasticidade evidencia uma discrepância quando comparada com a análise experimental. Esta mesma discrepância leva a uma certa precaução em relação ao seu uso, quando o estado elástico linear é fundamental.

Como demonstra a Fig. 39, verifica-se uma concordância do momento torsor entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear.

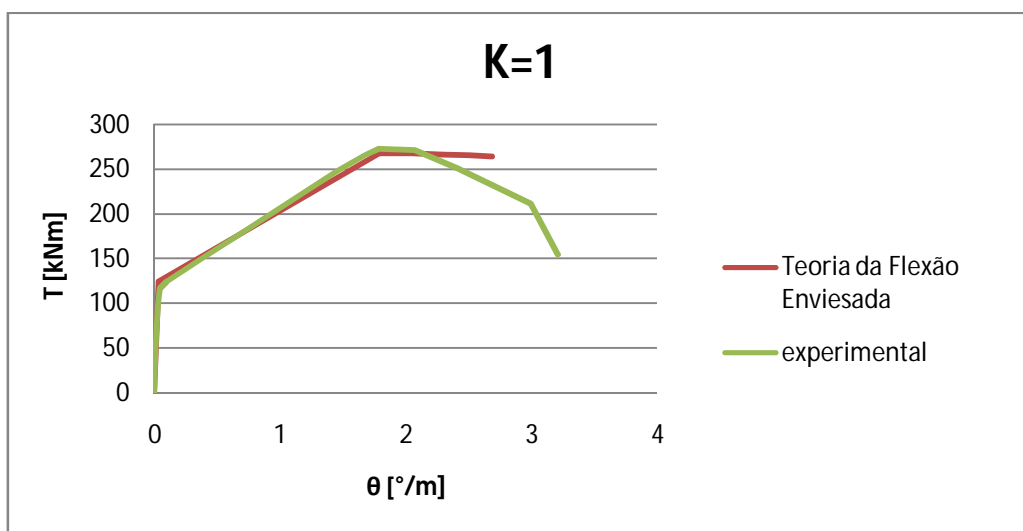


Fig. 39 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria da Flexão Enviesada com um factor minorativo de 1

Esta concordância deve-se à passagem da análise linear em regime fissurado para a análise não linear comparando os declives entre os dois estados e fixando a ordenada do ponto correspondente ao mesmo declive na análise linear em estado fissurado, o que traduz de uma forma mais realista os resultados obtidos. Há uma ligeira variação em relação ao momento torsor de rotura, sendo este ligeiramente mais conservador que o real, o que leva a uma certa confiança quando utilizado para o dimensionamento.

Com esta análise conclui-se que a Teoria da Flexão Enviesada se ajusta à análise experimental.

Como demonstra a Fig. 40, a análise linear em estado fissurado também se aproxima da experimental.

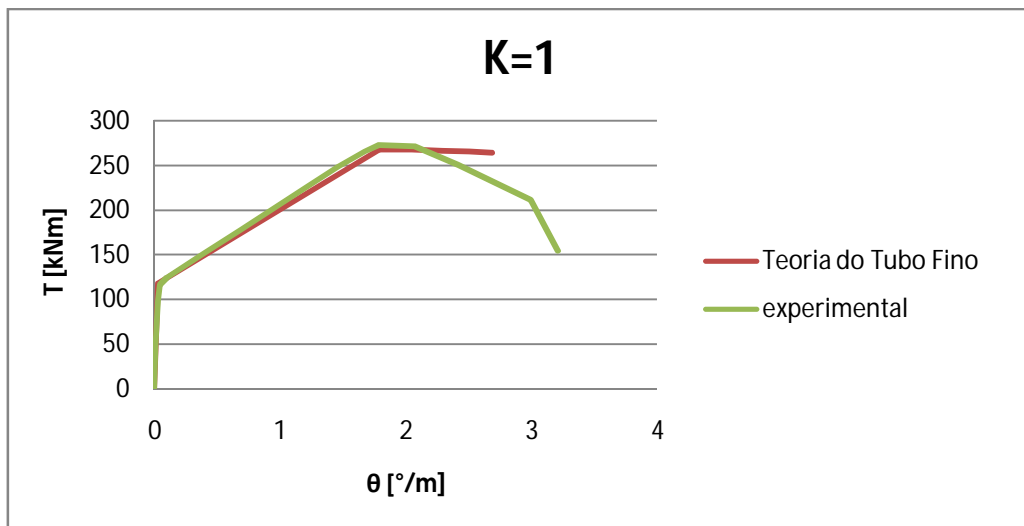


Fig. 40 – Análise comparativa entre a curva experimental e a Teoria do Tubo Fino com um factor minorativo de 1

Verifica-se uma concordância do momento torsor entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear. Essa concordância deve-se á passagem da análise linear em regime fissurado para a análise não linear comparando os declives entre os dois estados e fixando a ordenada do ponto correspondente ao mesmo declive na análise linear em estado fissurado, o que traduz de uma forma mais realista os resultados obtidos. Há uma ligeira variação em relação ao momento torsor de rotura, sendo este ligeiramente mais conservador que o real, o que leva a uma certa confiança quando utilizado para o dimensionamento.

6 – CONCLUSÃO

Esta secção destina-se a ser um ponto de reflexão sobre os aspectos e resultados mais importantes obtidos através desta dissertação. Tendo em conta os objectivos inicialmente propostos, salientam-se as principais conclusões inerentes aos resultados deste trabalho.

O objectivo de criar uma aplicação computacional para a construção da Curva teórica $T-\theta$, foi concluído com sucesso.

A aplicação computacional permite uma grande facilidade de utilização. O seu uso não exige elevados conhecimentos, mas os necessários para entender e enquadrar os resultados obtidos.

A facilidade de atingir resultados de uma forma rápida e eficaz, foi concluída com sucesso através da aplicação computacional.

Com esta análise comparativa realizada com uma viga, conclui-se que a Teoria do Tubo Fino se ajusta à análise experimental.

Conclui-se que a Teoria da Elasticidade é a que menos se adequa à análise experimental da viga em caixão. As teorias que melhor se ajustam de uma forma teórica à análise da torção da viga oca em caixão, é a Teoria da Flexão Enviesada e a Teoria do Tubo Fino.

Conclui-se também, que a passagem entre a análise linear em estado fissurado e a análise não linear, realizada pelo declive apresenta melhores resultados quando comparada com a intersecção da recta representativa da análise linear em estado fissurado e a análise não linear.

A elaboração desta dissertação permitiu adquirir o conhecimento necessário para a realização de estudos mais complexos que possam surgir na área da programação, assim como um grande conhecimento a nível da temática da torção e das leis que a constituem.

Ao concluir este trabalho denota-se a necessidade de fazer estudos mais alargados no âmbito da investigação teórica de vigas de betão armado de alta resistência para secções ocas quando solicitadas à torção, dada a existência de pouca bibliografia referente a esta temática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. ACI Committee 318, Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71), American Concrete Institute, Detroit, 1971.
2. Appleton, J. A. S., Almeida, J. C. F. e Câmara, J. M. N., “Dimensionamento e Pormenorização de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado,” Volume 1 – “Dimensionamento,” Centro de Mecânica e Engenharia Estruturais, Instituto Superior Técnico, 1984.
3. Armstrong, S., “The Strength of Concrete Members in Combined Bending and Torsion,” *Proceedings of a Symposium of the Strength of Concrete Structures, Session B: Paper 2*, Cement and Concrete Association, London, May 1956, pp. 101 – 122.
4. Bach, B., “*Elasticitat und Festigkeit*”, 6th ed., 1911 (citado em [12]).
5. Bernardo, L.F.A., “Torção em vigas em caixão de betão de alta resistência,” Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e tecnologia da Universidade de Coimbra, 2003.
6. Bredt, R., “Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizitat,” *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, Band 40, No. 28, July 11, 1896, pp. 785 – 790; No. 29, July 18, 1896, pp. 813 – 817 (citado em [12]).
7. CEB, “Torsion”, *Bulletin d’Information N.º71*, Mars 1969.
8. Collins, M. P., “Torque – Twist Characteristics of Reinforced Concrete Beams,” *Inilasticity and Non-Linearity in Structural Concrete*, Study No. 8, University of Waterloo Press, Waterloo, Ontario, Canada, 1973, pp. 211 – 232.
9. Elfgren, L., “Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear,” *Publication 71:3*, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1972, pp. 249.
10. Hsu, T.T.C., “Torsion of Structural Concrete – A Summary of Pure Torsion,” *Torsion of Structural Concrete*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp 165 – 178.
11. Hsu, T. T. C., “Torsion of Structural Concrete – Plain Concrete Rectangular Sections,” *Torsion of Structural Concrete, SP-18*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 203-238.

12. Hsu, T.T.C., "Torsion of Structural Concrete – Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Member," *Torsion of Structural Concrete, SP-18*, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp 261 – 306.
13. Hsu, T. T. C., "Post-Cracking Torsional Rigidity of Reinforced Concrete Sections," *Journal of the American Concrete Institute, Proc.*, Vol. 70, No. 5, May 1973, pp. 352 – 360.
14. Hsu, T. T.C., "Torsion of Reinforced Concrete," Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
15. Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., "Softening of Concrete in Torsional Members – Theory and Tests," *Journal of the American Concrete Institute, Proc.*, Vol. 82, No. 3, May-June 1985, pp. 290 – 303.
16. Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., "Softening of Concrete in Torsional Members – Design Recommendations," *Journal of the American Concrete Institute, Proc.*, Vol. 82, No. 4, July-August 1985, pp. 443 – 452.
17. Lampert, P. und Thurlimann, B., "Torsionsversuche an Stahlbetonbalken (Torsion Tests of Reinforced Concrete Beams)," *Bericht, Nr. 6506-2*, Institut für Baustatik, ETH, Zurich, 1969, pp. 101 (citado em [33]).
18. Rausch, E., "Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in torsion)," Ph.D. Thesis, Berlin, 1929, pp. 53.
19. Robinson, J. R. and Demorieux, J. M., "Essais de Traction Compression sur Modèles d'Ame de Poutres en Béton Armé," "Institut de Recherches Appliquées du Béton Armé (IRABA), Part 1, June 1968 and Part 2, May 1972 (citado em [13]).
20. Vecchio, F. J. and Collins, M. P., "Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear," *IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced concrete*, Delft 1981, Final Report, pp. 211 – 225.
21. Wagner, H., "Ebene Blechwandträger mit Sehr Dünnem Stegblech (Flat Sheet Metal Girders with Very Thin Metal Web)," *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, Vol. 20, No. 8 to 12, Berlin, 1929 (citado em [13]).
22. WIKIPÉDIA, A enciclopédia livre [em linha], citado em 8 de Abril de 2009, [consultado a 1 de Agosto de 2009]. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Visual_Basic.