



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Modelos Epidemiológicos SIR e SIS Discretos
Estudo dos modelos e elaboração de uma ação de divulgação
na área da Biomatemática
Versão final após defesa

Rabilde de Fátima Manuel Bartolomeu

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientador Científico: Prof. César Augusto Teixeira Marques da Silva

Covilhã, junho de 2018

Dedicatória

Aos meus queridos pais, Rogério Bartolomeu e Maria de Fátima V. J. Manuel que tudo têm feito por mim.

Agradecimentos

Tudo o que sou são obras das mãos de Deus e sem Ele nada do que alcancei seria possível. Ele tem sido meu auxílio, minha fortaleza e socorro bem presente na angústia, por isso agradeço ao meu Senhor, Deus Pai, Todo Poderoso pela sua infinita misericórdia que me tem feito trilhar caminhos excelentes. Contudo, Ele ainda colocou pessoas maravilhosas para me abençoarem. Assim, não teria trilhado estes caminhos se não contasse com a ajuda de tantas pessoas que contribuíram para a minha formação. Elas são incontáveis, mas gostava de ao menos citar algumas delas.

Agradeço aos meus queridos pais, Rogério Bartolomeu e Maria de Fátima Vicente João Manuel, que lutam todos os dias para o bem dos seus filhos, que desde muito cedo nos transmitiram que é necessário estudar e dedicar-se ao máximo para que no fim a recompensa chegue, e que impulsionaram a minha vinda para Portugal, a eles a minha profunda gratidão. Aos meus queridos irmãos, Bartolomeu, Anselmo, Jacinto, Inoreza, Gervásia (in memory), Valsino, Isolda, Romaide, Gelsa, Ilvano, Anália, Valério, Belmiro e Fascénia que mesmo distante os sinto tão próximos que com o seu carinho me dão força para continuar, aos meus familiares em geral e aos meus queridos amigos, Filipe José que nunca mede esforço para ajudar-me e que muito me incentiva a crescer, Manuela Luciana que sempre esteve do meu lado, Hélder Lubuato, Antónia Dias, Josina Alexandre e Edna Kidiaca pelo apoio incondicional em diversas fases da minha vida. Ao meu esposo, Esmael Zage, pelo seu apoio sem medida no decorrer destes todos anos.

O meu agradecimento vai à Direção do INAGBE que me concedeu esta bolsa de estudo, dando-me a oportunidade de conhecer um povo, uma cultura e adquirir o bem que ninguém pode tirar de mim, o conhecimento. À Escola Superior Politécnica de Malanje, na pessoa do então diretor Jacucha Quimbanda, e ao professor Infeliz Coxe por me terem colocado na lista dos candidatos à formação em Portugal. Aos meus padrinhos Manuel Osório e Etelvina Osório. Agradeço também à Universidade da Beira Interior que no seu leque de docentes e não docentes, nos proporcionou momentos singulares do saber, pelos conhecimentos adquiridos. Em particular à Prof.^a Sandra Vaz por tudo que me ensinou e ao meu tutor Prof. César Silva que não doou apenas o seu saber mas também a sua atenção, preocupando-se com o bem-estar dos seus orientandos nos dias menos bons e que com o seu zelo e afinho me fez aprender ainda mais e com vontade de continuar na busca pelo conhecimento. Aos meus colegas do curso de Matemática para Professores que dividiram os seus saberes e tempo comigo, disponibilizando-se para juntos ultrapassarmos as dificuldades encontradas durante o tempo de formação.

A minha gratidão estende-se ao senhor João Cambolo, Humberto Lopes, Andreia Malheiros e Afonso Konde, bem como aos meus colegas de serviço que com seu tempo, atenção e disponibilidade estenderam as mãos para me ajudarem. Somos seres passíveis de erro, quero desde já pedir as minhas sinceras desculpas a todos que não citei, mas que de igual modo são merecedores da tamanha honra por tudo que fizeram por mim...

...a todos a minha eterna gratidão!

Resumo

Neste trabalho, começamos por estudar alguns dos resultados fundamentais sobre estabilidade de sistemas de equações às diferenças, os quais se empregam no estudo da estabilidade local dos pontos de equilíbrio de modelos SIR e SIS autónomos, discretizados com recurso ao método de Mickens. Além disso, estabelecemos, para os modelos anteriores, a estabilidade global do ponto de equilíbrio sem doença quando $\mathcal{R}_0 < 1$ e, adaptando ao nosso contexto uma técnica já utilizada para modelos discretizados com o método de Euler, obtemos, em condições pouco exigentes, estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico quando $\mathcal{R}_0 > 1$. De seguida, verificamos a existência de uma órbita periódica para um modelo SI com taxa de incidência periódica, discretizado pelo método de Euler. Quando o modelo se reduz a um modelo autónomo, garantimos a estabilidade global do ponto de equilíbrio endémico.

Na última parte do trabalho, tecemos alguns comentários sobre a preparação de parte de uma ação de divulgação em matemática, subordinada ao tema “Alguns Modelos Discretos da Biomatemática” realizada no contexto da Academia Júnior de Ciências da Universidade da Beira Interior.

Palavras-chave

Modelos epidemiológicos SIR e SIS; Estabilidade local; Estabilidade global; Modelo periódico; Divulgação da Matemática.

Abstract

In this work, we study some of the fundamental results concerning stability systems of difference equations and we use them to study the local stability of equilibrium points of autonomous SIR and SIS models, discretized by the Mickens method. Moreover, for the referred models we establish global stability of the disease free equilibrium when $\mathcal{R}_0 < 1$ and, using in our context a technique already considered for models discretized by the Euler method, we obtain global stability of the endemic equilibrium point when $\mathcal{R}_0 > 1$. Next, we establish the existence of a periodic orbit for an SI model with periodic incidence, discretized by the Euler method. When the model is reduced to an autonomous model, we obtain the global stability of the endemic equilibrium.

In the last part of this work, we make some comments on the preparation of part of an action of dissemination of mathematical knowledge, under the theme “Some discrete models of biomathematics” done in the context of Junior Academy of Science of University of Beira Interior.

Keywords

SIR and SIS epidemiological models; Local stability; Global stability; Periodic model; Dissemination of mathematical knowledge.

Índice

Introdução	1
1 Sistemas de Equações às Diferenças	5
1.1 Definições	5
1.2 Matrizes e transformações lineares	7
1.3 Estabilidade de sistemas lineares	10
1.4 Estabilidade por aproximação linear	12
1.5 Atratores	13
2 Modelos SIR e SIS	15
2.1 Modelo SIR	15
2.1.1 Discretização pelo Método de Mickens	15
2.1.2 População Total	17
2.1.3 Pontos de equilíbrio e estabilidade local	19
2.2 Modelo SIS	24
2.2.1 Discretização pelo Método de Mickens	24
2.2.2 População Total	25
2.2.3 Pontos de equilíbrio e estabilidade local	25
3 Estabilidade Global nos modelos SIR e SIS	29
3.1 Estabilidade global do equilíbrio sem doença no modelo SIR	29
3.2 Estabilidade global do equilíbrio endêmico no modelo SIR	31
3.3 Estabilidade global no modelo SIS	36
4 Modelo SI com incidência periódica	39
4.1 População total	39
4.2 Existência de um atrator global contendo uma órbita periódica	40
5 Um projeto de divulgação	47
5.1 Academia Júnior de Ciências	47
5.2 Ação de divulgação em Biomatemática	47
Bibliografia	51

Introdução

Os modelos epidemiológicos SIR e SIS são estudados desde que se começaram a considerar modelos compartimentais para descrever a evolução de uma doença contagiosa no seio de uma população, tanto em tempo contínuo como em tempo discreto. Em diversas épocas, a humanidade foi assolada por epidemias, como por exemplo a peste negra (1343 – 1353) que resultou na morte de 75 – 200 milhões de pessoas, a varíola (430 A.C) estima-se que reduziu a população para dois terços e o sarampo que ainda hoje se verifica. Essas são apenas algumas das doenças que dizimaram inúmeras vidas ao longo do tempo. Compreender a evolução e as condições de contágio de epidemias ajuda a minimizar o número de vítimas. Desta forma, basear-se em modelos matemáticos para entender e, na medida do possível, minimizar os efeitos de uma epidemia é muito interessante.

A Matemática aplicada à Biologia tem atraído a atenção dos estudiosos já há algum tempo. O primeiro registo sobre este assunto é atribuído a Johnn Graunt (1620 – 1674) quando publicou em 1662 o trabalho “Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality”, com isto também constituiu as bases para a demografia. Passado quase um século (1760) Daniel Bernoulli, submeteu à Academia de Ciências de Paris um trabalho intitulado “An attempt at a new analysis of the mortality caused by smallpox and of the advantages of inoculation to prevent it”, mas que foi publicado apenas em 1766. Neste trabalho, foi discutido se a inoculação de um vírus deve ser encorajada mesmo que haja uma possibilidade de ser uma operação mortal. Bernoulli ressaltou a idade dos indivíduos envolvidos e designou por $S(x)$ o número de pessoas suscetíveis que estão vivas na idade x sem nunca terem sido infetadas com a varíola, por $R(x)$ o número de pessoas que estão vivas na idade x e que sobreviveram à doença e por $P(x)$ o número total de pessoas vivas na idade x . Alguns anos mais tarde, ao estudar a malária, a fim de descobrir como era feita a transmissão aos seres humanos, Ross (1911), tentou construir modelos matemáticos da transmissão desta doença, a fim de apoiar uma afirmação feita na primeira edição do seu livro, onde dissera que a malária poderia ser erradicada simplesmente reduzindo o número de mosquitos. Um dos seus modelos consistia num sistema de duas equações diferenciais, onde as variáveis eram N , a população total de humanos de uma determinada área, $I(t)$, o número de humanos infetados com a malária no tempo t , n , a população total de mosquitos (que supõe constante),

$i(t)$, o número de mosquitos infetados com malária, b , a frequência da picada de mosquitos, p , a probabilidade de transmissão da malária de humanos para os mosquitos (o inverso também é aplicável) durante a mordida, a , a taxa de humanos que se recuperaram da malária, e M , a mortalidade dos mosquitos. Ross em conclusão defendeu a modelação matemática em epidemiologia, dizendo que toda a epidemiologia, preocupada com a variação da doença periodicamente ou de um lugar para o outro, deve ser considerada matematicamente, uma vez que envolve variáveis que podem ser consideradas cientificamente. Com muitas novas ideias, Anderson Gray McKendrick em 1926, no artigo “Applications of mathematics to medical problems”, introduziu um modelo matemático de tempo contínuo para epidemias que levou em consideração aspetos estocásticos de infeção e recuperação, assim apresentou as classes de indivíduos suscetíveis (S), infetados (I) e recuperados (R), que constituem o modelo SIR. Mais tarde, junta-se a William Ogilvy Kermack e passam a trabalhar juntos em modelagem matemática em epidemiologia, eles publicaram uma série de contribuições à teoria matemática da epidemiologia a partir de 1927. Nestas contribuições estudaram determinados modelos epidémicos. Os modelos desenvolvidos por Kermack e McKendrick durante a década de 1930 ainda constituem o bloco de construção da maioria dos modelos mais complexos utilizados hoje em dia em epidemiologia. A Epidemiologia Matemática passou para um rápido desenvolvimento a partir da segunda metade do século XX. Ela é uma área interdisciplinar, resultado da interação entre epidemiologistas, matemáticos, biólogos, físicos e outros. Para mais informação sobre aspectos históricos relacionados ver [1], [2], [11] e [12].

Recentemente, os esforços consistiram em aproximar os modelos teóricos aos dados que são recolhidos em unidades de tempo não contínuas, portanto o estudo e análise de modelos epidemiológicos discretos faz todo o sentido. O objetivo neste caso é que os modelos se ajustem aos dados. Existem vários tipos de modelos, o tipo que vamos abordar são os modelos compartimentais. Neste tipo de modelo precisamos de representar o estado do indivíduo em relação à doença e acompanhar a sua evolução ao longo do tempo. Consideraremos modelos com duas ou três classes, correspondentes aos suscetíveis (S), isto é, os indivíduos vulneráveis à infeção estudada que no entanto ainda não a contraíram, aos infetados (I), indivíduos que contraíram a doença e podem transmiti-la, e aos recuperados (R), que no nosso caso, serão indivíduos que se curaram e ficaram imunes à doença.

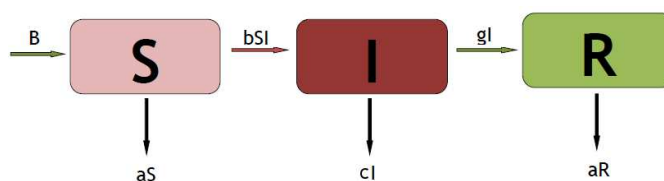


Figura 1: Modelo SIR

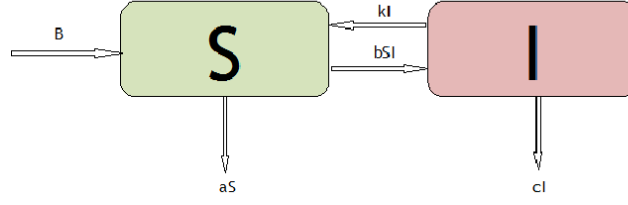


Figura 2: Modelo SIS

Os modelos que consideraremos constituem versões discretas dos seguintes modelos contínuo:

$$\begin{cases} S' = B - bSI - aS \\ I' = bSI - (c + g)I \\ R' = gI - aR \end{cases}, \quad (P)$$

e

$$\begin{cases} S' = B - bSI - aS + kI \\ I' = bSI - (c + k)I \end{cases}, \quad (Q)$$

onde B é taxa de nascimentos, b designa a incidência entre suscetíveis e infectados, a é a taxa de mortalidade nas classes dos suscetíveis e recuperados, c é a taxa de mortalidade entre os infectados e g e k são taxas de recuperação.

Vários trabalhos têm sido realizados no contexto dos modelos SIR e SIS discretos [3], [4], [6], [7], [10] e [13], os quais são o tema central deste trabalho. Várias discretizações são consideradas no processo de obtenção de modelos discretos a partir de modelos contínuos. Neste trabalho consideraremos a discretização de Mickens para obter modelos SIR e SIS autónomos (isto é com parâmetros independentes do tempo) e, na obtenção de um modelo periódico (isto é com parâmetros que dependem periodicamente do tempo), a discretização de Euler.

O primeiro capítulo deste trabalho é dedicado ao estudo de sistemas de equações às diferenças, sobretudo a teoria de estabilidade que é a base da análise que faremos dos sistemas epidemiológicos SIR e SIS. No segundo capítulo calculam-se os pontos fixos e estuda-se a estabilidade local dos modelos SIS e SIR recorrendo a técnicas comuns, nomeadamente à linearização do sistema numa vizinhança dos pontos de equilíbrio. O terceiro capítulo destina-se ao estudo da estabilidade global dos modelos anteriores. Note-se que, apesar de no modelo SIS que consideraremos termos menos uma classe do que no modelo SIR (a classe dos recuperados), assumimos nesse modelo a possibilidade de perda de imunidade, o que complica a equação dos suscetíveis. Relativamente aos resultados sobre estabilidade global que obteremos, estes resultados já foram deduzidos recentemente, recorrendo a funções de Lyapunov. A técnica que usaremos é muito distinta e consiste em adaptar ao nosso contexto a demonstração do resultado sobre estabilidade global obtida em [10] para um modelo

obtido pelo método de Euler e com taxas distintas. Algumas adaptações não triviais são necessárias para adaptar a demonstração ao nosso caso. No quarto capítulo consideramos o modelo SI com incidência periódica e estabelecemos para este modelo a existência de uma órbita periódica. O argumento recorre a um teorema de [14]. Finalmente, no quinto capítulo, apresentamos um projeto de divulgação integrado na programação da Academia Júnior de Ciências promovida pela Universidade da Beira Interior.

Capítulo 1

Sistemas de Equações às Diferenças

Como dissemos anteriormente, os modelos que vamos estudar baseam-se em sistemas de equações às diferenças. Neste capítulo, vamos falar de conceitos ligados a equações às diferenças e, com mais detalhe, a sistemas de equações às diferenças. Daremos ênfase às questões relacionadas com a estabilidade.

1.1 Definições

Começamos por definir equação às diferenças.

Definição 1.1.1. Sejam $f_n : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Uma equação da forma

$$x_{n+1} = f_n(x_n), \quad n \in \mathbb{Z}_0^+, \quad (1.1)$$

designa-se por equação às diferenças. Uma solução da equação anterior é uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+}$, onde $x_n \in \mathbb{R}^N$ para cada $n \in \mathbb{Z}_0^+$, que satisfaz a equação.

Quando $N > 1$, também se usa a expressão sistema de equações às diferenças para designar a equação (1.1). Se a sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_0^+}$ não depende de n , isto é, se $f_n = f$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, a equação diz-se autónoma, caso contrário diz-se não autónoma.

Para alguns tipos de equações às diferenças, consegue-se determinar explicitamente a solução. Perante a impossibilidade ou grande dificuldade em encontrar a solução, é primordial compreender o comportamento eventual ou assintótico do processo iterativo.

Neste capítulo, vamos concentrar-nos em modelos autónomos:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.2)$$

Conhecida a função f , em (1.2) obter o termo x_{n+1} está apenas dependente do conhecimento de x_n . Considerando x_0 , o termo inicial, e aplicando a relação (1.2)

repetidamente obtém-se

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \quad x_3 = f(f(f(x_0))), \dots,$$

ou seja obtemos a sucessão $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ que se designa por órbita positiva de x_0 e se denota por $O^+(x_0)$. Assim, a órbita positiva de determinado ponto x é dada por

$$O^+(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}.$$

Se f for invertível, podemos falar da órbita negativa de x , a qual designaremos por $O^-(x)$:

$$O^-(x) = \{f^{-k}(x) : k \geq 0\}.$$

Ainda no caso em que a função é invertível, designamos por órbita de x o conjunto

$$O(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\} = O^+(x) \cup O^-(x).$$

A seguinte definição é fundamental na análise do comportamento assintótico de sistemas autónomos:

Definição 1.1.2. Diz-se que um ponto x^* é um ponto de equilíbrio da equação (1.2) se for um ponto fixo de f , isto é se $f(x^*) = x^*$.

Um ponto de equilíbrio é um ponto cuja órbita se reduz a um conjunto com um único ponto e como tal corresponde a uma solução que é constante ao longo do tempo. Um outro tipo de soluções muito importantes são aquelas que se repetem após um número fixo de iterações, as soluções periódicas associadas ao conceito de ponto periódico.

Definição 1.1.3. Diz-se que x é um ponto periódico de período n se $f^m(x) \neq x$ para $1 \leq m < n$ e $f^n(x) = x$.

O conjunto dos iterados de um ponto periódico formam uma órbita periódica ou um ciclo.

Neste trabalho estaremos particularmente interessados no estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio dos sistemas considerados. Prosseguimos com as definições dos vários conceitos de estabilidade considerados.

Definição 1.1.4. Um ponto de equilíbrio x^* da equação (1.2) diz-se estável (ou estável no sentido de Lyapunov) se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x^* - f^n(x_0)\| < \varepsilon.$$

Definição 1.1.5. Um ponto de equilíbrio x^* da equação (1.2) diz-se localmente atrator se existir $\eta > 0$ tal que

$$\|x^* - x_0\| < \eta \Rightarrow \lim f^n(x_0) = x^*.$$

Definição 1.1.6. Um ponto de equilíbrio x^* da equação (1.2) diz-se (localmente) assintoticamente estável se for estável e localmente atrator.

Se pudermos tomar $\eta = +\infty$ nas definições 1.1.5 e 1.1.6, o ponto de equilíbrio x^* diz-se, respectivamente, globalmente atrator e globalmente assintoticamente estável.

1.2 Matrizes e transformações lineares

Antes de prosseguirmos, é necessário recordar alguns conceitos relativamente ao cálculo matricial.

Seja $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, uma aplicação linear. Então T satisfaz as seguintes relações:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$;
2. $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Existem dois conjuntos importantes numa aplicação linear, o núcleo $\text{Ker}(T)$ e a imagem $\text{Im}(T)$.

Definição 1.2.1. O núcleo (ou kernel) de T é o conjunto

$$\text{Ker}(T) = \{x \in \mathbb{R}^N : T(x) = 0\} = T^{-1}(0).$$

Definição 1.2.2. A Imagem de T é o conjunto

$$\text{Im}(T) = \{y \in \mathbb{R}^N : T(x) = y \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^N\} = T(\mathbb{R}^N).$$

Seja $F \subset \mathbb{R}^N$ um subespaço linear. Designamos por combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_n \in F$ uma soma da forma $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Um conjunto $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ de vetores de F diz-se linearmente independente se $\sum_{i=1}^k t_i v_i = 0$ é equivalente a $t_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. O conjunto S diz-se uma base de F se este contém o número mínimo de vetores capazes de gerar F , isto é, se qualquer vector de F pode ser obtido como combinação linear de vetores de S e o conjunto S é um conjunto de vectores linearmente independentes. Neste último caso, diz-se que S é gerador de F e cada vetor de F pode ser escrito como soma direta de vetores de S : $u = \sum_{i=1}^k t_i v_i, t_i \in \mathbb{R}$. Uma propriedade importante de $\text{Ker}(T)$ é a seguinte: T é injetiva se e só se $\text{Ker}(T) = 0$. Além disso $\text{Ker}(T)$ é o espaço solução do sistema $T(x) = 0$.

Dada uma base de $\mathbb{R}^N$, $\{e_1, \dots, e_N\}$, qualquer aplicação linear T pode ser identificada com uma matriz A cujas colunas são determinadas a partir dessa base: $T(e_i) = Ae_i$ para $i = 1, \dots, N$.

Definição 1.2.3. Dada uma transformação linear T , um número real λ diz-se um valor próprio dessa transformação linear se existir um vetor $x \neq 0$ tal que $T(x) = \lambda x$. Este vetor x designa-se por vetor próprio associado ao valor próprio λ .

Vamos agora recordar o conceito de norma.

Definição 1.2.4. Dado um espaço vetorial V , uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma norma se, para todos os $x, y \in V$ e todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, se verificam as seguintes propriedades:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

As normas da soma, do máximo e euclideana, dadas respectivamente por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i| \text{ e } \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right)^{1/2},$$

para cada $x = (x_1, \dots, x_k)$, são algumas das normas mais utilizadas em $\mathbb{R}^k$.

O espaço das matrizes $k \times k$ munido com a soma e o produto usuais de matrizes é um espaço vetorial que representamos por $\mathcal{M}_k$. Dada uma norma em $\mathbb{R}^k$, $\|\cdot\|_v$, podemos definir uma norma em $\mathcal{M}_k$, $\|\cdot\|$, por

$$\|A\| = \max \left\{ \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} : \|x\|_v \neq 0 \right\},$$

para cada $A \in \mathcal{M}_k$. Pode verificar-se que a norma anterior pode ser ainda dada pelas expressões seguintes:

$$\|A\| = \max_{\|x\|_v \leq 1} \|Ax\|_v = \max_{\|x\|_v = 1} \|Ax\|_v.$$

O lema seguinte mostra que, num certo sentido, é indiferente a norma que se usa em $\mathbb{R}^k$ (para uma demonstração, ver por exemplo [9]).

Lema 1.2.5. Dado $k \in \mathbb{N}$, todas as normas em $\mathbb{R}^k$ são equivalentes: dadas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em $\mathbb{R}^k$, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^k$.

As normas matriciais associadas à norma da soma, do máximo e euclidiana, são, respetivamente,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^k |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^k |a_{ij}| \text{ e } \|A\|_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2},$$

para cada matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_k$.

O objetivo seguinte é definir o conceito de semelhança entre matrizes e enunciar um teorema que afirma que qualquer matriz é semelhante a uma matriz que está numa forma especial, designada por forma canónica de Jordan. Começamos por apresentar a seguinte definição:

Definição 1.2.6. Duas matrizes $k \times k$, A e B , dizem-se semelhantes se existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$. Uma matriz que é semelhante a alguma matriz diagonal diz-se diagonalizável.

Uma propriedade importante das matrizes semelhantes é apresentada no seguinte lema:

Lema 1.2.7. Duas matrizes semelhantes possuem os mesmos valores próprios.

No conjunto de todas as matrizes semelhantes a uma dada matriz, podemos sempre determinar uma matriz que se encontra numa forma especial, conhecida como forma canónica de Jordan:

Definição 1.2.8. Dizemos que uma matriz $k \times k$, J , está na forma canónica de Jordan se

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix},$$

onde, para cada $i = 1, \dots, s$,

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

é uma matriz $m_i \times m_i$ e $\sum_{i=1}^s m_i = k$.

O teorema seguinte mostra a importância da definição anterior.

Teorema 1.2.9. Qualquer matriz $k \times k$, A , é semelhante a uma matriz B na forma canónica de Jordan.

1.3 Estabilidade de sistemas lineares

Dada uma matriz $k \times k$, A , a equação

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (1.3)$$

$n \in \mathbb{Z}_0^+$, diz-se uma equação linear. Note-se que o vetor nulo é sempre um ponto fixo de qualquer sistema de equações lineares. Começamos por reescrever os conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica para a solução nula de um sistema linear:

Definição 1.3.1. A solução nula da equação (1.3) diz-se estável se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{Z}_0^+$, temos

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|A^n x_0\| < \varepsilon.$$

Definição 1.3.2. A solução nula da equação (1.3) diz-se assintoticamente estável se for estável e existir $\eta > 0$ tal que

$$\|x_0\| < \eta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A^n x_0 = 0.$$

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os valores próprios da matriz A em (1.3). O raio espectral da matriz A é dado pela seguinte expressão

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

É fácil verificar que, para qualquer norma, $\rho(A) \leq \|A\|$.

Obtemos de seguida uma caracterização importante da estabilidade de um sistema linear.

Teorema 1.3.3. A solução nula do sistema linear (1.3) é:

a) estável se e só se existe $M > 0$ tal que $\|A^n\| \leq M$, para todo o $n \geq n_0 \geq 0$;

b) assintoticamente estável se e só se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\| = 0$.

Demonstração. Para mostrar a), começamos por assumir que a solução nula de (1.3) é estável. Então, dado $\varepsilon_0 > 0$, seja $\delta_0 > 0$ tal que, se $\|x_0\| < \delta_0$ então $\|A^n x_0\| < \varepsilon_0$. Em particular, se $\|x_0\| = \delta_0/2$ então $\|A^n x_0\| < \varepsilon_0$. Logo

$$\|A^n\| = \max_{\|x\|=1} \|A^n x\| = \max_{\|u\|=\delta_0/2} \left\| A^n \frac{u}{\|u\|} \right\| = \max_{\|u\|=\delta_0/2} \frac{\|A^n u\|}{\|u\|} < \max_{\|u\|=\delta_0/2} \frac{\varepsilon_0}{\|u\|} = \frac{2\varepsilon_0}{\delta}$$

e, fazendo $M = 2\varepsilon_0/\delta$, concluímos que $\|A^n\| \leq M$.

Reciprocamente, se $\|A^n\| \leq M$, então, dado $\varepsilon > 0$ e definindo $\delta = \varepsilon/M$, temos que, se x_0 é tal que $\|x_0\| < \delta$, então a solução (x_n) , associada à condição inicial x_0 , verifica

$$\|x_n\| = \|A^n x_0\| \leq \|A^n\| \|x_0\| \leq M \|x_0\| < M\delta = \varepsilon.$$

Concluimos que a solução nula é estável. Fica provado a).

Para mostrar b), suponha-se que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\| = 0$. Em particular, $\|A^n\|$ é limitada. Portanto $\|A^n\| \leq d$ com $d > 0$. Para $\varepsilon > 0$, tome-se $d = \frac{\varepsilon}{2\delta}$. Então sempre que $\|x_0\| < \delta$ vem

$$\|x_n\| = \|A^n\| \|x_0\| \leq d\delta < \varepsilon$$

e assim a solução nula é estável. Para provar que é atrativa basta ver que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\| \|x_0\| = 0 \times \|x_0\| = 0$$

Daqui decorre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = 0$ e assim tem-se a estabilidade assintótica da solução nula.

Reciprocamente, suponhamos que a solução nula é assintoticamente estável. Então, para cada $x_0 \neq 0$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\| \|x_0\| = 0$$

Daqui decorre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\| = 0$. Assim fica provado também b). □

A seguir faremos a demonstração de um resultado muito importante na análise da estabilidade de um determinado sistema.

Corolário 1.3.4. A solução nula do sistema (1.3) é estável se e só se $\rho(A) \leq 1$ e cada valor próprio de A com $|\lambda| = 1$ é semi-simples, ou seja, tem um bloco de Jordan diagonal.

Demonstração. Seja $A = PJP^{-1}$, onde $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$ está na forma de Jordan e

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

De acordo ao Teorema 1.3.3, a solução zero do sistema (1.3) é estável se e só se existe $M_0 > 0$ tal que

$$\|A^n\| = \|P J^n P^{-1}\| \leq M_0,$$

o que é equivalente a existir $M > 0$ tal que

$$\|J^n\| \leq M.$$

De facto, se $\|A^n\| \leq M_0$ então

$$\|J^n\| = \|P^{-1}PJ^nP^{-1}P\| \leq \|P^{-1}\| \|PJ^nP^{-1}\| \|P\| = \|P^{-1}\| \|P\| \|A^n\| \leq M,$$

com $M = \|P^{-1}\| \|P\| M_0$ e, por outro lado, se $\|J^n\| \leq M$ então

$$\|A^n\| = \|P^{-1}J^nP\| \leq \|P^{-1}\| \|J^n\| \|P\| \leq M \|P^{-1}\| \|P\|.$$

Logo $\|A^n\| \leq M_0$ com $M_0 = \|P^{-1}\| \|P\| M$.

Neste contexto basta mostrar que $\|J^n\| < M$, para algum $M > 0$. Temos que $J^n = \text{diag}(J_1^n, J_2^n, \dots, J_r^n)$, onde

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} & \dots & \binom{n}{s_i-1} \lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^n \end{bmatrix}$$

Deste modo, podemos ver que se $|\lambda_i| > 1$ ou se $|\lambda_i| = 1$ e J_i não é uma matriz 1×1 , então J_i^n fica ilimitado. Por outro lado, se $|\lambda_i| < 1$, então $J_i^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para chegar a esta conclusão, basta provar que $|\lambda_i|^n n^\ell \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para qualquer inteiro positivo ℓ . Notando que $\ln |\lambda_i| \leq 0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\lambda_i|^x x^\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\ell}{e^{-(\ln |\lambda_i|)x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ell x^{\ell-1} \ln x}{-\ln |\lambda_i| e^{-(\ln |\lambda_i|)x}} = \dots = 0,$$

de acordo com a regra de L'Hôpital. □

1.4 Estabilidade por aproximação linear

Os métodos mais antigos em teoria da estabilidade remontam a Lyapunov e Perron e baseiam-se na linearização. Vamos recorrer a estes tipo de método. Dado o sistema não linear

$$y_{n+1} = Ay_n + g(y_n), \tag{1.4}$$

onde A é uma matriz $k \times k$ e $g : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função diferenciável com $g(0) = 0$, consideremos a sua componente linear

$$z_{n+1} = Az_n. \tag{1.5}$$

Pode-se ver (1.4) como uma perturbação de (1.5). Além disso, o sistema (1.4) pode surgir da linearização do sistema não linear

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.6)$$

num ponto de equilíbrio, x^* . Neste caso, temos de considerar $f : G \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ continuamente diferenciável no ponto de equilíbrio x^* , isto é, numa vizinhança aberta de x^* , temos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$ existe e é contínua para todo $1 \leq i \leq k$.

Agora vamos mostrar como se lineariza o sistema (1.6). Escrevemos $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T$ e calcula-se a respetiva jacobiana Df_{x^*} ,

$$Df_{x^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x^*) \end{bmatrix}.$$

Fazendo a mudança de variável $y_n = x_n - x^*$, a equação (1.6) fica

$$y_{n+1} = f(y_n + x^*) - x^* = Df_{x^*}y_n + g(y_n),$$

onde $g(y_n) = f(y_n + x^*) - x^* - Df_{x^*}y_n$. Se assumirmos que $A = Df_{x^*}$ então obtemos o sistema (1.4). Considerando as hipóteses assumidas para f , concluímos que $g(y) = o(\|y\|)$ quando $\|y\|$ tende para zero (isto é que $g(y)/\|y\|$ converge para 0 quando $\|y\|$ converge para 0). Note-se que quando $x^* = 0$ temos

$$g(y_n) = f(y_n) - Df_0y_n = f(y_n) - Ay_n.$$

Temos o seguinte resultado (ver [5]):

Corolário 1.4.1. Se $\rho(A) < 1$, então a solução nula do sistema (1.4) é assintoticamente estável.

1.5 Atratores

O conceito de atrator é uma definição muito importante em dinâmica.

Definição 1.5.1. Dada uma função contínua $f : X \rightarrow X$ e um conjunto limitado e não-vazio $A \subset X$, dizemos que A é um atrator de f se:

1. A é compacto;
2. A é invariante, isto é $f(A) = A$;
3. existe uma vizinhança U de A tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{d(f^n(x), A) : x \in U\} = 0$.

Dado $B \subseteq X$, dizemos que A é um atrator de f em B se a vizinhança U na definição 1.5.1 puder ser tomada de tal forma que $B \subset U$.

Para obtermos um resultado sobre existência de atratores, o qual usaremos neste trabalho, precisamos de algumas definições:

Definição 1.5.2. Dizemos que uma função contínua dissipa pontos se existe um conjunto limitado $B_0 \subset X$ que atrai todos os pontos de X . Isto é, se existe um conjunto limitado B_0 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, B_0) = 0$ para todo $x_0 \in X$.

Definição 1.5.3. Dizemos que uma função contínua $f : S \rightarrow S$ é compacta se transforma conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos (i.e conjuntos que possuem fecho compacto).

Definição 1.5.4. Dado um conjunto X_0 , dizemos que uma função F é uniformemente persistente em relação a X_0 se existe $\eta > 0$ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(F^n(x), \partial X_0) \geq \eta,$$

para todo o $x \in X_0$, onde ∂X_0 designa a fronteira de X_0 .

Utilizaremos neste trabalho o seguinte resultado, cuja demonstração se encontra em [14], no capítulo 4.

Teorema 1.5.5 (Teorema 1.3.6 de [14]). Seja $X_0 \subset X$ e $F : X \rightarrow X$ uma função contínua com $F(X_0) \subset X_0$. Se:

- a) F é compacta;
- b) F dissipa pontos;
- c) F é uniformemente persistente em relação a X_0 .

Então existe um atrator global conexo A_0 para F em X_0 e F possui um ponto de equilíbrio.

Capítulo 2

Modelos SIR e SIS

2.1 Modelo SIR

O modelo SIR contínuo, dado por (P), é composto por três classes: Suscetíveis, Infetados e Recuperados. Vários métodos têm sido usado na discretização deste modelo. Neste trabalho vamos obter um modelo discreto, com recurso ao método de discretização de Mickens, e estudá-lo.

2.1.1 Discretização pelo Método de Mickens

De acordo com o método de Mickens, as interações devem ser não locais. Para a equação dos suscetíveis, escolhemos fazer corresponder $aS(t)$ a aS_{n+1} e $bS(t)I(t)$ a $bS_{n+1}I_n$. A derivada $S'(t)$ é substituída pela razão incremental:

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{h}.$$

Obtemos assim a seguinte equação para os suscetíveis:

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1} - S_n}{h} &= B - bS_{n+1}I_n - aS_{n+1} &\Leftrightarrow & S_{n+1} - S_n = Bh - bhS_{n+1}I_n - ahS_{n+1} \\ & &\Leftrightarrow & (1 + ah + bhI_n)S_{n+1} = Bh + S_n \\ & &\Leftrightarrow & S_{n+1} = \frac{Bh + S_n}{1 + ah + bhI_n}. \end{aligned}$$

Fazendo, $Bh = \Lambda$, $ha = \mu$ e $bh = \beta$ obtemos

$$S_{n+1} = \frac{\Lambda + S_n}{1 + \mu + \beta I_n}. \quad (2.1)$$

Procedendo da mesma forma para os infetados, fazemos corresponder $bS(t)I(t)$ a $bS_{n+1}I_n$ e $(c + g)I(t)$ a $(c + g)I_{n+1}$. Por sua vez, a derivada $I'(t)$ é substituída pela razão incremental:

$$\frac{I_{n+1} - I_n}{h}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{I_{n+1} - I_n}{h} &= bS_{n+1}I_n - (c + g)I_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad I_{n+1} - I_n = bhS_{n+1}I_n - (ch + gh)I_{n+1} \\
 &\Leftrightarrow \quad (1 + (ch + gh))I_{n+1} = bhS_{n+1}I_n + I_n \\
 &\Leftrightarrow \quad I_{n+1} = \frac{bhS_{n+1}I_n + I_n}{1 + ch + gh}.
 \end{aligned}$$

Considerando as mudanças de parâmetros feitas anteriormente e fazendo também $ch = d$ e $gh = \gamma$ temos

$$I_{n+1} = \frac{\beta S_{n+1}I_n + I_n}{1 + d + \gamma}. \quad (2.2)$$

Quanto aos recuperados, fazemos corresponder $gI(t)$ a gI_{n+1} e $aR(t)$ a aR_{n+1} . Por sua vez, a derivada $R'(t)$ é substituída pela razão incremental:

$$\frac{R_{n+1} - R_n}{h}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
 \frac{R_{n+1} - R_n}{h} &= gI_{n+1} - aR_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad R_{n+1} - R_n = ghI_{n+1} - ahR_{n+1} \\
 &\Leftrightarrow \quad (1 + ah)R_{n+1} = ghI_{n+1} + R_n \\
 &\Leftrightarrow \quad R_{n+1} = \frac{ghI_{n+1} + R_n}{1 + ah}.
 \end{aligned}$$

Usando a substituição dos parâmetros referida anteriormente, vem que

$$R_{n+1} = \frac{\gamma I_{n+1} + R_n}{1 + \mu}. \quad (2.3)$$

Das equações (2.1), (2.2) e (2.3) obtemos a seguinte discretização do sistema (P):

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{\Lambda + S_n}{1 + \mu + \beta I_n} \\ I_{n+1} = \frac{\beta S_{n+1}I_n + I_n}{1 + d + \gamma} \\ R_{n+1} = \frac{\gamma I_{n+1} + R_n}{1 + \mu} \end{cases}, \quad (2.4)$$

que muitas vezes teremos vantagem em analisar na forma:

$$\boxed{
 \begin{cases} S_{n+1} = \Lambda + S_n - \mu S_{n+1} - \beta I_n S_{n+1} \\ I_{n+1} = \beta S_{n+1}I_n - (d + \gamma)I_{n+1} + I_n \\ R_{n+1} = \gamma I_{n+1} + R_n - \mu R_{n+1} \end{cases}
 } \quad (2.5)$$

Substituindo, no sistema (2.4), S_{n+1} na equação dos infectados pela sua expressão, dada pela equação dos suscetíveis, e substituindo I_{n+1} na equação dos recuperados pela expressão obtida, podemos obter explicitamente as variáveis no tempo $n + 1$ em função das variáveis no tempo n :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{\Lambda + S_n}{1 + \mu + \beta I_n} \\ I_{n+1} = \frac{I_n [\beta \Lambda + 1 + \mu + \beta (S_n + I_n)]}{(1 + \mu + \beta I_n)(1 + d + \gamma)} \\ R_{n+1} = \frac{\gamma I_n [\beta \Lambda + 1 + \mu + \beta (S_n + I_n)] + (1 + \mu + \beta I_n)(1 + d + \gamma) R_n}{(1 + \mu + \beta I_n)(1 + d + \gamma)(1 + \mu)} \end{cases} \quad (2.6)$$

2.1.2 População Total

Nesta secção estudaremos a população total associada ao modelo (2.5).

2.1.2.1 Inequações para a população total

Vamos agora obter uma equação para a população total e determinar o seu comportamento. Somando as três equações do sistema (2.5) e denotando a população total no tempo n por N_n , isto é, fazendo $N_n = S_n + I_n + R_n$, obtemos

$$(1 + \mu)N_{n+1} + (d - \mu)I_{n+1} = \Lambda + N_n. \quad (2.7)$$

Notando que $d \geq \mu$ e $0 \leq I_{n+1} \leq N_{n+1}$, obtemos

$$0 \leq (d - \mu)I_{n+1} \leq (d - \mu)N_{n+1}$$

e portanto, por um lado

$$(1 + \mu)N_{n+1} + (d - \mu)I_{n+1} \geq (1 + \mu)N_{n+1} \quad (2.8)$$

e por outro

$$(1 + \mu)N_{n+1} + (d - \mu)I_{n+1} \leq (1 + \mu)N_{n+1} + (d - \mu)N_{n+1} = (1 + d)N_{n+1}. \quad (2.9)$$

De (2.7), (2.8) e (2.9) obtemos

$$\Lambda + N_n \geq (1 + \mu)N_{n+1} \quad \text{e} \quad \Lambda + N_n \leq (1 + d)N_{n+1}$$

e portanto a população total do modelo (2.6) verifica:

$$\frac{\Lambda}{1 + d} + \frac{1}{1 + d}N_n \leq N_{n+1} \leq \frac{\Lambda}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \mu}N_n. \quad (2.10)$$

2.1.2.2 População Total quando $d = \mu$

No caso particular em que $d = \mu$, podemos obter uma fórmula explícita para a população total. De facto, fazendo $d = \mu$ no modelo (2.5), segue de (2.10) que a população total satisfaz a equação

$$N_{n+1} = \frac{\Lambda}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \mu} N_n. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) é uma equação linear e a sua solução geral é dada por

$$\begin{aligned} N_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{1}{1 + \mu} \right] N_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} \frac{1}{1 + \mu} \right] \frac{\Lambda}{1 + \mu} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \mu} \right)^{n-n_0} N_0 + \frac{\Lambda}{1 + \mu} \left(\frac{1}{1 + \mu} \right)^{n-1} \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\frac{1}{1 + \mu} \right)^{-r} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \mu} \right)^{n-n_0} N_0 + \frac{\Lambda}{1 + \mu} \left(\frac{1}{1 + \mu} \right)^{n-1} \frac{(1 + \mu)^n - (1 + \mu)^{n_0}}{\mu} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \mu} \right)^{n-n_0} N_0 + \Lambda \left[\frac{1 - (1 + \mu)^{n_0-n}}{\mu} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Uma vez que $0 < 1/(1 + \mu) < 1$, de acordo com (2.12), o limite da população total, independentemente da condição inicial N_0 , é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (2.13)$$

Na Figura 2.1 apresenta-se o comportamento da população total no modelo SIR. Tal como os restantes gráficos que apresentaremos este foi feito com recurso ao software excel.

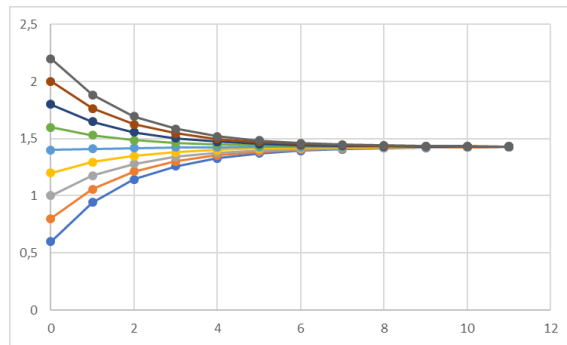


Figura 2.1: População total no modelo SIR com $d = \mu = 0,7$ e $\Lambda = 1$.

2.1.2.3 População Total no caso geral

Como veremos, ainda que não tenhamos uma fórmula explícita para a população total no caso geral é possível obter majorantes e minorantes.

Recorrendo a argumento semelhante ao usado em 2.12, pode concluir-se que as soluções gerais das equações

$$U_{n+1} = \frac{\Lambda}{1+\mu} + \frac{1}{1+\mu}U_n \quad \text{e} \quad V_{n+1} = \frac{\Lambda}{1+d} + \frac{1}{1+d}V_n, \quad (2.14)$$

com $U_0 = V_0 = N_0$ são

$$U_n = \left(\frac{1}{1+\mu} \right)^{n-n_0} N_0 + \Lambda \left[\frac{1 - (1+\mu)^{n_0-n}}{\mu} \right]$$

e

$$V_n = \left(\frac{1}{1+d} \right)^{n-n_0} N_0 + \Lambda \left[\frac{1 - (1+d)^{n_0-n}}{d} \right].$$

Atendendo agora às desigualdades em (2.10) podemos então concluir que a população total satisfaz $V_n \leq N_n \leq U_n$ e portanto

$$\left(\frac{1}{1+d} \right)^{n-n_0} N_0 + \frac{\Lambda}{d} [1 - (1+d)^{n_0-n}] \leq N_n \leq \left(\frac{1}{1+\mu} \right)^{n-n_0} N_0 + \frac{\Lambda}{\mu} [1 - (1+\mu)^{n_0-n}]. \quad (2.15)$$

Tomando o limite inferior e o limite superior quando $n \rightarrow +\infty$ em (2.15) obtemos

$$\frac{\Lambda}{d} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} N_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} N_n \leq \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (2.16)$$

2.1.3 Pontos de equilíbrio e estabilidade local

Nesta secção obteremos e discutiremos a estabilidade local dos pontos de equilíbrio do sistema (2.5). Encontraremos ainda, para este sistema, uma constante muito importante no estudo dos modelos matemáticos da epidemiologia: o número reprodutivo básico.

O Número Reprodutivo Básico, $\mathcal{R}_0$, pode ser interpretado como o número esperado de novas infeções produzidas por um único infetado colocado numa população numerosa constituída unicamente por suscetíveis. Este número é uma medida do potencial de propagação de doenças dentro de uma população. Se $\mathcal{R}_0 < 1$, o número de indivíduos infetados acaba por diminuir, porque o contágio não é suficiente para substituir os indivíduos que deixam de estar infetados e a doença tende a desaparecer. Se, por outro lado, $\mathcal{R}_0 > 1$, então o número de indivíduos infetados aumentará com o passar do tempo e a doença se espalhará.

2.1.3.1 Existência de pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio são um aspeto muito importante da dinâmica dos modelos epidemiológicos, correspondendo a soluções em que o sistema permanece em equilíbrio. De seguida vamos obter os pontos de equilíbrio do nosso sistema. Para tal, igualamos o lado direito do sistema (2.4), visto como um vetor e calculado num determinado ponto (S^*, I^*, R^*) , a esse ponto. Isto é, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} S^* = \frac{\Lambda + S^*}{1 + \mu + \beta I^*} \\ I^* = \frac{\beta S^* I^* + I^*}{1 + d + \gamma} \\ R^* = \frac{\gamma I^* + R^*}{1 + \mu} \end{cases}.$$

Da segunda equação do sistema temos que

$$I^* = \frac{\beta S^* I^* + I^*}{1 + d + \gamma} \Leftrightarrow (d + \gamma - \beta S^*) I^* = 0 \Leftrightarrow S^* = \frac{d + \gamma}{\beta} \vee I^* = 0$$

De $I^* = 0$ segue que $R^* = 0$ e $S^* = \Lambda/\mu$. Obtivemos um ponto de equilíbrio conhecido ponto de equilíbrio sem doença:

$$e_{DF} = (\Lambda/\mu, 0, 0). \quad (2.17)$$

Fazendo agora $S^* = (d + \gamma)/\beta$ temos, recorrendo à primeira equação,

$$I^* = \frac{\Lambda - \mu S^*}{\beta S^*} = \frac{\Lambda}{d + \gamma} - \frac{\mu}{\beta}.$$

Quanto aos recuperados, recorrendo à terceira equação, obtemos

$$R^* = \frac{\gamma}{\mu} I^* = \frac{\gamma}{\mu} \left(\frac{\Lambda}{d + \gamma} - \frac{\mu}{\beta} \right).$$

Temos, deste modo, determinado o segundo ponto de equilíbrio $e_E = (S^*, I^*, R^*)$. Este só é importante do ponto de vista do estudo do modelo biológico proposto se as suas componentes forem não negativas. Uma vez que a expressão obtida para S^* é sempre não negativa, apenas temos de exigir que

$$\frac{\Lambda}{d + \gamma} - \frac{\mu}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\Lambda}{d + \gamma} \geq \frac{\mu}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta \Lambda}{\mu(d + \gamma)} \geq 1.$$

O número $\beta \Lambda / (\mu(d + \gamma))$ denota-se por $\mathcal{R}_0$, é uma constante muito importante em epidemiologia e designa-se por número reprodutivo básico:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta \Lambda}{\mu(d + \gamma)}. \quad (2.18)$$

Note-se que, em função de $\mathcal{R}_0$, o ponto de equilíbrio e_E , conhecido como ponto de equilíbrio endêmico, é dado por

$$e_E = \left(\frac{d+\gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\gamma}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) \right). \quad (2.19)$$

Note-se ainda que

$$\mathcal{R}_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta\Lambda}{\mu(d+\gamma)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d+\gamma}{\beta} = \frac{\Lambda}{\mu}$$

e concluímos que, quando $\mathcal{R}_0 = 1$, temos $e_E = e_{DF}$. Obtemos então o seguinte resultado.

Proposição 2.1.1. Temos o seguinte para o sistema (2.6).

1. Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ temos um único ponto de equilíbrio, o ponto e_{DF} dado por (2.17).
2. Se $\mathcal{R}_0 > 1$ temos dois pontos de equilíbrios: o ponto e_{DF} dado por (2.17) e o ponto e_E dado por (2.19).

2.1.3.2 Estabilidade local do ponto de equilíbrio sem doença

Vamos de seguida estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio obtidos. Começamos com o ponto de equilíbrio sem doença, e_{DF} , obtido em (2.17). Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.2. Temos o seguinte relativamente ao ponto de equilíbrio sem doença, e_{DF} , do modelo (2.6).

1. Se $\mathcal{R}_0 < 1$ o ponto de equilíbrio e_{DF} é localmente assintoticamente estável.
2. Se $\mathcal{R}_0 > 1$ o ponto de equilíbrio e_{DF} é instável.

Demonstração. Atendendo a (2.6), existem funções definidas em $(\mathbb{R}^+)^3$, com valores em $\mathbb{R}$ e diferenciáveis, f_1 , f_2 e f_3 , tais que $S_{n+1} = f_1(S_n, I_n, R_n)$, $I_{n+1} = f_2(S_n, I_n, R_n)$ e $R_{n+1} = f_3(S_n, I_n, R_n)$. Usaremos a notação $e_{DF} = (e_1, e_2, e_3) = (\Lambda/\mu, 0, 0)$. Deste modo, considerando o sistema (2.5) e derivando implicitamente obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_{DF}) &= 1 - \mu \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_{DF}) - \beta e_2 \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_{DF}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_{DF}) = \frac{1}{1+\mu}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_{DF}) &= -\mu \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_{DF}) - \beta e_2 \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_{DF}) - \beta f_1(e_{DF}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_{DF}) = -\frac{\beta}{(1+\mu)^2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial S}(e_{DF}) &= \beta \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_{DF}) e_2 - (d+\gamma) \frac{\partial f_2}{\partial S}(e_{DF}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_2}{\partial S}(e_{DF}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial I}(e_{DF}) &= \beta \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_{DF})e_2 + \beta f_1(e_{DF}) - (d + \gamma) \frac{\partial f_2}{\partial I}(e_{DF}) + 1 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_2}{\partial I}(e_{DF}) &= 1 + \frac{(d + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1)}{1 + d + \gamma},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial R}(e_{DF}) = \frac{\partial f_2}{\partial R}(e_{DF}) = 0 \text{ e } \frac{\partial f_3}{\partial R}(e_{DF}) = 1 - \mu \frac{\partial f_3}{\partial R}(e_{DF}) \Leftrightarrow \frac{\partial f_3}{\partial R}(e_{DF}) = \frac{1}{1 + \mu}.$$

Podemos assim construir a matriz associada à linearização do sistema (2.6) no ponto de equilíbrio e_{DF} :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \mu} & -\frac{\beta}{(1 + \mu)^2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{(d + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1)}{1 + d + \gamma} & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S}(e_{DF}) & \frac{\partial f_3}{\partial I}(e_{DF}) & \frac{1}{1 + \mu} \end{bmatrix}.$$

Atendendo à forma da matriz, é imediato que os valores próprios são

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + \mu}, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{(d + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1)}{1 + d + \gamma} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{1}{1 + \mu}.$$

Temos que $\lambda_1 < 1$ e $\lambda_3 < 1$. Por outro lado, se $\mathcal{R}_0 < 1$ temos que $\lambda_2 < 1$ e se $\mathcal{R}_0 > 1$ temos que $\lambda_2 > 1$. Deste modo, se $\mathcal{R}_0 < 1$ todos os valores próprios têm módulo inferior a um, o que nos garante que o ponto fixo é localmente assintoticamente estável e, por outro lado, se $\mathcal{R}_0 > 1$ existe um valor próprio com módulo superior a um e portanto o ponto de equilíbrio fica instável. O resultado fica provado. $\square$

2.1.3.3 Estabilidade local do ponto de equilíbrio endêmico

Vamos agora obter um resultado sobre a estabilidade local do ponto de equilíbrio endêmico. Recordemos que só temos um ponto de equilíbrio endêmico quando $\mathcal{R}_0 > 1$.

Teorema 2.1.3. Se $\mathcal{R}_0 > 1$, o ponto de equilíbrio endêmico do modelo (2.6), e_E dado por (2.19), é localmente assintoticamente estável.

Demonstração. Mais uma vez, atendendo a (2.6), existem funções definidas em $(\mathbb{R}^+)^3$, com valores em $\mathbb{R}$ e diferenciáveis, f_1 , f_2 e f_3 , tais que $S_{n+1} = f_1(S_n, I_n, R_n)$, $I_{n+1} = f_2(S_n, I_n, R_n)$ e $R_{n+1} = f_3(S_n, I_n, R_n)$. Usaremos a notação

$$e_E = (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{d + \gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\gamma}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) \right).$$

Recorrendo de novo a derivação implícita obtemos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial S}(e_E) = 1 - \mu \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_E) - \beta a_2 \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_E) \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_E) = \frac{1}{1 + \mu \mathcal{R}_0},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial I}(e_E) = -\mu \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_E) - \beta a_2 \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_E) - \beta f_1(e_E) \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_E) = -\frac{d + \gamma}{1 + \mu \mathcal{R}_0},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S}(e_E) = \beta \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_E) a_2 - (d + \gamma) \frac{\partial f_2}{\partial S}(e_E) \Leftrightarrow \frac{\partial f_2}{\partial S}(e_E) = \frac{\mu \mathcal{R}_0 - \mu}{(1 + d + \gamma)(1 + \mu \mathcal{R}_0)}.$$

Além disso, de

$$\frac{\partial f_1}{\partial R}(e_E) = \frac{\partial f_2}{\partial R}(e_E) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_3}{\partial R}(e_E) = 1 - \mu \frac{\partial f_3}{\partial R}(e_E)$$

obtemos

$$\frac{\partial f_3}{\partial R}(e_E) = \frac{1}{1 + \mu}.$$

Temos ainda que

$$\frac{\partial f_2}{\partial I}(e_E) = \beta \frac{\partial f_1}{\partial I}(e_E) a_2 + \beta f_1(e_E) - (d + \gamma) \frac{\partial f_2}{\partial I}(e_E) + 1$$

é equivalente a

$$\frac{\partial f_2}{\partial I}(e_E) = 1 - \frac{(d + \gamma)\mu(\mathcal{R}_0 - 1)}{(1 + d + \gamma)(1 + \mu \mathcal{R}_0)}.$$

Podemos assim construir a matriz associada à linearização do sistema (2.6) no ponto de equilíbrio e_E :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \mu \mathcal{R}_0} & -\frac{d + \gamma}{1 + \mu \mathcal{R}_0} & 0 \\ \frac{\mu \mathcal{R}_0 - \mu}{(1 + d + \gamma)(1 + \mu \mathcal{R}_0)} & 1 - \frac{(d + \gamma)\mu(\mathcal{R}_0 - 1)}{(1 + d + \gamma)(1 + \mu \mathcal{R}_0)} & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S}(e_E) & \frac{\partial f_3}{\partial I}(e_E) & \frac{1}{1 + \mu} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Um dos valores próprios da matriz é $1/(1 + \mu) < 1$ e os restantes dois são as soluções da equação

$$\lambda^2 - \frac{\mu(\mathcal{R}_0 + \gamma + d)}{(1 + d + \gamma)(1 + \mu \mathcal{R}_0)}\lambda + \frac{1}{1 + \mu \mathcal{R}_0} = 0.$$

Atendendo a que $1/(1 + \mu \mathcal{R}_0) < 1$ e a que

$$\frac{\mu(\mathcal{R}_0 + \gamma + d)}{(1 + d + \gamma)(1 + \mu \mathcal{R}_0)} = \frac{\mu}{1/\mathcal{R}_0 + \mu} \times \frac{\mathcal{R}_0 + \gamma + d}{\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_0(\gamma + d)} < 1,$$

uma vez que $\mathcal{R}_0 > 1$, obtemos, de acordo com o critério de Jury (ver [8]), que os três valores próprios têm módulo inferior a um.

Assim, se $\mathcal{R}_0 > 1$, temos estabilidade assintótica local do ponto de equilíbrio endémico. O resultado fica demonstrado. $\square$

Nas Figura 2.2 ilustramos a persistência e extinção da doença no modelo SIR.

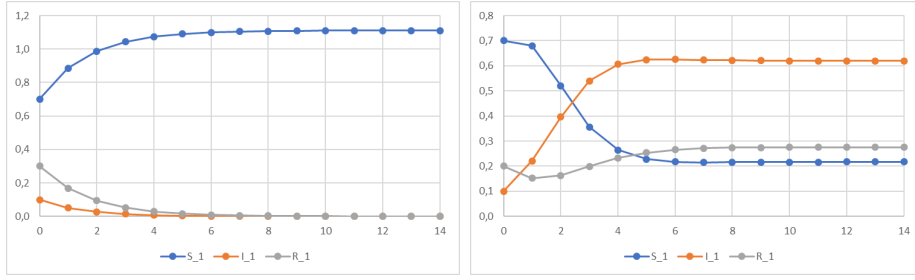


Figura 2.2: SIR. Extinção (esquerda) $\Lambda = 1$, $d = \mu = 0,9$, $\beta = 0,2$ e $\gamma = 0,4$; $\mathcal{R}_0 = 0,17$. Persistência (direita) $\Lambda = 1$, $d = \mu = 0,9$, $\beta = 6$ e $\gamma = 0,4$; $\mathcal{R}_0 = 5,12$.

2.2 Modelo SIS

Vamos de seguida obter um modelo discreto correspondente ao modelo SIS contínuo, dado por (Q), o qual é composto por duas classes: suscetíveis e infetados. Este é um modelo mais simples e quase tudo o que diremos sobre ele se pode obter reproduzindo argumentos usados para estudar o modelo SIR.

2.2.1 Discretização pelo Método de Mickens

Recorrendo de novo ao método de Mickens, escolhemos fazer corresponder $bS_{n+1}I_n$ a $bS(t)I(t)$, $aS(t)$ a aS_{n+1} e $cI(t)$ a cI_{n+1} . As derivadas $S'(t)$ e $I'(t)$ são substituídas pelas razões incrementais respetivas:

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{h} \quad \text{e} \quad \frac{I_{n+1} - I_n}{h}.$$

Obtemos assim a seguinte equação para os suscetíveis:

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{h} = B - bS_{n+1}I_n - aS_{n+1} + kI_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad S_{n+1} = \frac{Bh + S_n + khI_{n+1}}{1 + ah + bhI_n}.$$

e a seguinte equação para os infetados

$$\frac{I_{n+1} - I_n}{h} = bS_{n+1}I_n - cI_{n+1} - kI_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad I_{n+1} = \frac{bhS_{n+1}I_n + I_n}{1 + ch + kh}.$$

Fazendo, $Bh = \Lambda$, $ah = \mu$, $bh = \beta$, $ch = d$ e $kh = \gamma$ obtemos

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{\Lambda + S_n + \gamma I_{n+1}}{1 + \mu + \beta I_n} \\ I_{n+1} = \frac{\beta S_{n+1} I_n + I_n}{1 + d + \gamma} \end{cases}, \quad (2.21)$$

que muitas vezes teremos vantagem em analisar na forma:

$$\boxed{\begin{cases} S_{n+1} = \Lambda + S_n - \mu S_{n+1} - \beta I_n S_{n+1} + \gamma I_{n+1} \\ I_{n+1} = \beta S_{n+1} I_n - (d + \gamma) I_{n+1} + I_n \end{cases}}. \quad (2.22)$$

Substituindo S_{n+1} e I_{n+1} no sistema (2.21), podemos obter explicitamente as variáveis no tempo $n + 1$ em função das variáveis no tempo n :

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{(\Lambda + S_n)(1 + d + \gamma) + \gamma I_n}{(1 + \mu)(1 + d + \gamma) + (1 + d)\beta I_n} \\ I_{n+1} = \left[1 + \beta \frac{(\Lambda + S_n)(1 + d + \gamma) + \mu I_n}{(1 + \mu)(1 + d + \gamma) + (1 + d)\beta I_n} \right] \frac{I_n}{1 + d + \gamma} \end{cases}. \quad (2.23)$$

2.2.2 População Total

Somando as equações do sistema (2.22) e denotando como habitualmente a população total no tempo n por N_n , isto é, fazendo $N_n = S_n + I_n$, obtemos uma equação semelhante à determinada na secção 2.1.2 para a população total do modelo SIR:

$$(1 + \mu)N_{n+1} + (d - \mu)I_{n+1} = \Lambda + N_n. \quad (2.24)$$

Deste modo, as propriedades obtidas na secção 2.1.2 para a população total do modelo SIR ainda se verificam para a população total do modelo SIS. Em particular, continuamos a ter para o modelo SIS o enquadramento em (2.16), no caso geral, e convergência da população total para Λ/μ quando $\mu = d$.

2.2.3 Pontos de equilíbrio e estabilidade local

Tal como no modelo SIR, a partir do sistema (2.21) podemos determinar os pontos de equilíbrios resolvendo um sistema:

$$\begin{cases} S^* = \frac{\Lambda + S^* + \gamma I^*}{1 + \mu + \beta I^*} \\ I^* = \frac{\beta S^* I^* + I^*}{1 + d + \gamma} \end{cases}.$$

Da segunda equação do sistema temos que

$$(d + \gamma - \beta S^*)I^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S^* = (d + \gamma)/\beta \vee I^* = 0$$

De $I^* = 0$ obtemos $S^* = \Lambda/\mu$, o que nos conduz ao ponto de equilíbrio sem doença:

$$e_{DF} = (\Lambda/\mu, 0), \quad (2.25)$$

que verificamos ter as mesmas coordenadas que as duas primeiras coordenadas do ponto de equilíbrio sem doença do modelo SIR. Fazendo agora $S^* = (d+\gamma)/\beta$ temos, recorrendo à primeira equação,

$$I^* = \frac{\mu(d+\gamma)(\mathcal{R}_0 - 1)}{d\beta}$$

Temos, deste modo, determinado o segundo ponto de equilíbrio, que designaremos ainda por ponto de equilíbrio endêmico sempre que tiver coordenadas não negativas e que continuaremos a denotar por e_E :

$$e_E = \left((d+\gamma)/\beta, (\mathcal{R}_0 - 1) \frac{\mu(d+\gamma)}{d\beta} \right), \quad (2.26)$$

onde

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(d+\gamma)} \quad (2.27)$$

constante que determina a existência do equilíbrio endêmico, uma vez que as coordenadas são positivas se e só se $\mathcal{R}_0 > 1$, e que continuamos a designar por número reprodutivo básico. Obtemos então um resultado semelhante à Proposição 2.1.1, obtida anteriormente para o sistema SIR.

Proposição 2.2.1. Temos o seguinte para o sistema (2.22).

1. Se $\mathcal{R}_0 \leq 1$ temos um único ponto de equilíbrio, o ponto e_{DF} dado por (2.25).
2. Se $\mathcal{R}_0 > 1$ temos dois pontos de equilíbrios: o ponto e_{DF} dado por (2.25) e o ponto e_E dado por (2.26).

2.2.3.1 Estabilidade local do ponto de equilíbrio sem doença

O estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio obtidos é semelhante ao caso do modelo SIR, ainda que agora tenhamos que lidar com a falta de imunidade. Começamos com o ponto de equilíbrio sem doença, e_{DF} , obtido em (2.25). Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.2. Temos o seguinte, relativamente ao ponto de equilíbrio sem doença, e_{DF} , do modelo (2.22).

1. Se $\mathcal{R}_0 < 1$ o ponto de equilíbrio e_{DF} é localmente assintoticamente estável.
2. Se $\mathcal{R}_0 > 1$ o ponto de equilíbrio e_{DF} é instável.

Demonstração. Seja $S_{n+1} = f_1(S_n, I_n)$ e $I_{n+1} = f_2(S_n, I_n)$ com f_1, f_2 dados por (2.23). Procedendo como na demonstração do Teorema 2.1.2, construímos a matriz

associada à linearização do sistema (2.6):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial S}(e_{DF}) \\ 0 & 1 + \frac{(d+\gamma)(\mathcal{R}_0-1)}{1+d+\gamma} \end{bmatrix}.$$

Atendendo à forma da matriz, é imediato que os valores próprios são

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+\mu} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 + \frac{(d+\gamma)(\mathcal{R}_0-1)}{1+d+\gamma}.$$

Temos que $\lambda_1 < 1$ e $\lambda_2 < 1$ se $\mathcal{R}_0 < 1$ e $\lambda_2 > 1$ se $\mathcal{R}_0 > 1$. Tal como para o modelo SIR, o $\mathcal{R}_0$ determina a estabilidade do ponto de equilíbrio sem doença. De facto, se $\mathcal{R}_0 < 1$ todos os valores próprios têm módulo inferior a um o que nos garante que o ponto fixo é localmente assintoticamente estável e, por outro lado, se $\mathcal{R}_0 > 1$ existe um valor próprio com módulo superior a um e portanto o ponto de equilíbrio fica instável. $\square$

2.2.3.2 Estabilidade local do ponto de equilíbrio endémico

Vamos agora analisar a estabilidade local do ponto de equilíbrio endémico. Tal como no modelo SIR, só temos um ponto de equilíbrio endémico quando $\mathcal{R}_0 > 1$. Por uma questão de simplicidade dos cálculos, vamos apenas analisar o caso $\gamma = 0$.

Teorema 2.2.3. Se $\gamma = 0$ e $\mathcal{R}_0 > 1$, o ponto de equilíbrio endémico do modelo (2.6), e_E dado por (2.19), é localmente assintoticamente estável.

Demonstração. Sejam $\gamma = 0$ e $\mathcal{R}_0 > 1$. Mais uma vez, procedendo como na demonstração do Teorema 2.1.3, obtemos a matriz associada à linearização do sistema (2.22) com $\gamma = 0$ em torno do ponto e_E :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+\mu\mathcal{R}_0} & -\frac{d}{1+\mu\mathcal{R}_0} \\ \frac{\mu\mathcal{R}_0-\mu}{(1+d)(1+\mu\mathcal{R}_0)} & 1 - \frac{d\mu(\mathcal{R}_0-1)}{(1+d)(1+\mu\mathcal{R}_0)} \end{bmatrix}.$$

Note-se que atendendo à forma das equações dos modelos SIR e SIS, a matriz acima é obtida a partir da matriz (2.20), a matriz correspondente para o modelo SIR, apagando a última linha e a última coluna e fazendo $\gamma = 0$. Os valores próprios da matriz são as soluções da equação

$$\lambda^2 - \frac{\mu(\mathcal{R}_0+d)}{(1+d)(1+\mu\mathcal{R}_0)}\lambda + \frac{1}{1+\mu\mathcal{R}_0} = 0.$$

Atendendo a que $1/(1 + \mu\mathcal{R}_0) < 1$ e a que

$$\frac{\mu(\mathcal{R}_0 + d)}{(1 + d)(1 + \mu\mathcal{R}_0)} = \frac{\mu}{1/\mathcal{R}_0 + \mu} \times \frac{1 + d/\mathcal{R}_0}{1 + d} < 1,$$

uma vez que $\mathcal{R}_0 > 1$, obtemos, de acordo com o critério de Jury, que os valores próprios têm modulo inferior a um. Fica demonstrada a estabilidade assintótica local do ponto de equilíbrio endêmico quando $\mathcal{R}_0 > 1$. $\square$

Nas Figura 2.3 ilustramos a persistência e extinção da doença no modelo SIS.

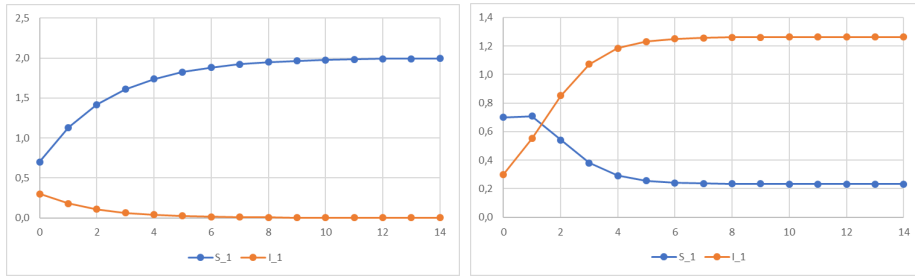


Figura 2.3: SIS. Extinção (esquerda) $\Lambda = 1$, $d = 0,7$, $\mu = 0,5$, $\beta = 0,01$ e $\gamma = 0$; $\mathcal{R}_0 = 0,028$. Persistência (direita) $\Lambda = 1$, $d = 0,7$, $\mu = 0,5$, $\beta = 3$ e $\gamma = 0$; $\mathcal{R}_0 = 8,57$.

Capítulo 3

Estabilidade Global nos modelos SIR e SIS

Vamos agora obter resultados sobre estabilidade global do equilíbrio sem doença e do equilíbrio endêmico para os nossos sistemas SIR e SIS. O resultado que obtemos sobre a estabilidade do equilíbrio endêmico para o modelo SIR corresponde ao Teorema 5 de [10], provado para o modelo SIR obtido pelo método de Euler. Ainda que a nossa demonstração seja inspirada em [10], uma série de alterações não triviais são necessárias. No nosso caso, obtivemos melhores condições sobre os parâmetros do que as condições obtidas no Teorema 5 de [10]. Como veremos, a estabilidade global do equilíbrio endêmico do modelo SIS pode ser obtida como corolário.

3.1 Estabilidade global do equilíbrio sem doença no modelo SIR

Nesta secção vamos estabelecer a estabilidade global do equilíbrio sem doença no modelo SIR. A ideia da demonstração é frequente na análise deste tipo de modelos e consiste em usar a extinção dos infectados para mostrar que qualquer solução se aproxima do equilíbrio sem doença.

Teorema 3.1.1. O equilíbrio sem doença e_{DF} do modelo (2.6) é globalmente assintoticamente estável se $\mathcal{R}_0 < 1$.

Demonstração. Seja $\mathcal{R}_0 < 1$ e (S_n, I_n, R_n) , $n \in \mathbb{N}$, uma solução do modelo (2.5). Atendendo a que $S_{n+1} \leq N_{n+1}$ e que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} N_n = \Lambda/\mu$, concluímos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N$, temos $S_{n+1} \leq \Lambda/\mu + \varepsilon$. Assim

$$I_{n+1} \leq \frac{\beta\Lambda/\mu + \beta\varepsilon + 1}{1 + d + \gamma} I_n = \frac{\mathcal{R}_0 + \beta\varepsilon/(\gamma + d) + 1/(\gamma + d)}{1 + 1/(\gamma + d)} I_n$$

Seja $a_0 = (\mathcal{R}_0 + \beta\varepsilon/(\gamma + d) + 1/(\gamma + d))/(1 + 1/(\gamma + d))$. Fazendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e atendendo a que $\mathcal{R}_0 < 1$, concluímos que $a_0 < 1$. Assim

$$I_m \leq a_0 I_{m-1} \leq a_0^2 I_{m-2} \leq \dots \leq (a_0)^{m-n} I_n.$$

Fazendo $m \rightarrow +\infty$, concluimos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = 0. \quad (3.1)$$

Atendendo a (3.1), dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N_1$, temos

$$S_{n+1} \geq \Lambda + S_n - \mu S_{n+1} - \beta \varepsilon S_{n+1} \Leftrightarrow S_{n+1} \geq \frac{\Lambda}{1 + \mu + \beta \varepsilon} + \frac{1}{1 + \mu + \beta \varepsilon} S_n.$$

Atendendo ao estudo feito para a equação (2.11), é imediato que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \geq \frac{\Lambda}{\mu + \varepsilon \beta}.$$

Atendendo a que $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \geq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Por outro lado $S_n \leq N_n \rightarrow \Lambda/\mu$. Concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \Lambda/\mu. \quad (3.2)$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N_2$, temos

$$R_{n+1} \leq \gamma \varepsilon + R_n - \mu R_{n+1} \Leftrightarrow R_{n+1} \leq \frac{\gamma \varepsilon}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \mu} R_n.$$

Atendendo ao estudo feito para a equação (2.11), é imediato que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n \leq \frac{\gamma \varepsilon}{\mu}.$$

Atendendo a que $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n \leq 0.$$

Por outro lado $R_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0. \quad (3.3)$$

De (3.2), (3.3) e (3.1) concluimos que $(S_n, I_n, R_n) \rightarrow e_{DF}$. De acordo com o Teorema 2.1.2, quando $\mathcal{R}_0 < 1$ temos estabilidade assintótica local. Deste modo concluimos que e_{DF} é globalmente assintoticamente estável. $\square$

3.2 Estabilidade global do equilíbrio endêmico no modelo SIR

Vamos agora estabelecer a estabilidade global do equilíbrio endêmico no sistema SIR. A ideia da demonstração pode descrever-se do seguinte modo: notamos que basta trabalhar inicialmente com as equações para os suscetíveis e os infectados, uma vez que estas não dependem dos recuperados; fazemos uma mudança de variáveis, passando a trabalhar com os infectados e uma nova variável correspondente à soma dos infectados e dos suscetíveis; majoramos e minoramos a equação correspondente à soma dos infectados e dos suscetíveis e com base nas inequações obtidas encontramos uma majoração e uma minoração para os infectados desde que deixemos passar tempo suficiente; associadas à majoração e minoração para os infectados obtemos equações de Beverton-Holt que nos permitem obter uma nova majoração e minoração para os infectados, desde que deixemos passar o tempo suficiente; procedendo indutivamente, vemos que os suscetíveis e os infectados convergem para as componentes respectivas do ponto fixo endêmico; usando o resultado obtido, verificamos por fim que também os recuperados convergem para a componente respectiva do ponto fixo endêmico. Notamos que no nosso caso, obtemos equações de Beverton-Holt, ao contrário do que acontece para o modelo SIR obtido pelo método de Euler em que se obtêm equações lineares.

Teorema 3.2.1. O equilíbrio endêmico e_E do modelo (2.6) é globalmente assintoticamente estável se $\mathcal{R}_0 > 1$ e $\gamma < 2\mu - d$.

Demonstração. Uma vez que as duas primeiras equações em (2.6) são independentes dos recuperados, (R_n) , vamos considerar primeiramente apenas estas equações:

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{\Lambda + S_n}{1 + \mu + \beta I_n} \\ I_{n+1} = \frac{\beta S_{n+1} I_n + I_n}{1 + d + \gamma} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{n+1} - S_n = \Lambda - \beta S_{n+1} I_n - \mu S_{n+1} \\ I_{n+1} - I_n = \beta S_{n+1} I_n - (d + \gamma) I_{n+1} \end{cases}. \quad (3.4)$$

Começamos por introduzir uma nova variável $L_n = S_n + I_n$ com o fim de obtermos uma equação linear. Fazendo $\delta = d - \mu$, de (3.4) temos:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + \Lambda - \mu S_{n+1} - (\mu + \delta + \gamma) I_{n+1} \\ &= L_n + \Lambda - \mu L_{n+1} - (\delta + \gamma) I_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim, vamos considerar as duas equações seguintes

$$\begin{cases} L_{n+1} = L_n + \Lambda - \mu L_{n+1} - (\delta + \gamma) I_{n+1} \\ I_{n+1} = \frac{I_n(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_n)}{(1 + \mu + \beta I_n)(1 + d + \gamma)} \end{cases} \quad (3.6)$$

De acordo com a equação (3.5), $0 \leq I_n \leq L_n$ temos:

$$L_{n+1} \leq L_n + \Lambda - \mu L_{n+1} \quad \wedge \quad L_{n+1} \geq L_n + \Lambda - (d + \gamma)L_{n+1}$$

e consequentemente

$$L_{n+1} \leq \frac{\Lambda}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \mu} L_n \quad \wedge \quad L_{n+1} \geq \frac{\Lambda}{1 + d + \gamma} + \frac{1}{1 + d + \gamma} L_n. \quad (3.7)$$

Comparando as duas inequações em (3.7) com as equações lineares que se obtêm substituindo a desigualdade por uma igualdade, concluímos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um inteiro positivo T_{1l} tal que $L_1^l \leq L_n \leq L_1^m$ para $n > T_{1l}$, onde $L_1^l = \frac{\Lambda}{d + \gamma} - \varepsilon$ e $L_1^m = \frac{\Lambda}{\mu} + \varepsilon$.

De acordo com $L_1^l \leq L_n \leq L_1^m$ e (3.6) obtemos

$$I_{n+1} \leq \frac{I_n(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_1^m)}{(1 + \mu + \beta I_n)(1 + d + \gamma)} \quad \text{e} \quad I_{n+1} \geq \frac{I_n(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_1^l)}{(1 + \mu + \beta I_n)(1 + d + \gamma)}. \quad (3.8)$$

Consideramos as duas equações às diferenças seguintes, correspondentes às desigualdades em (3.8)

$$I_{1,n+1}^m = \frac{I_{1,n}^m(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_1^m)}{(1 + \mu + \beta I_{1,n}^m)(1 + d + \gamma)} \quad \text{e} \quad I_{1,n+1}^l = \frac{I_{1,n}^l(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_1^l)}{(1 + \mu + \beta I_{1,n}^l)(1 + d + \gamma)}.$$

As equações anteriores são equações de Beverton-Holt. De facto,

$$I_{1,n+1}^m = \frac{a_1^m I_{1,n}^m}{1 + b I_{1,n}^m} \quad \text{e} \quad I_{1,n+1}^l = \frac{a_1^l I_{1,n}^l}{1 + b I_{1,n}^l}. \quad (3.9)$$

onde

$$a_1^m = \frac{\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_1^m}{(1 + \mu)(1 + d + \gamma)}, \quad a_1^l = \frac{\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_1^l}{(1 + \mu)(1 + d + \gamma)}, \quad \text{e} \quad b = \frac{\beta}{1 + \mu}.$$

Uma vez que $a_1^l > 1$ e $a_1^m > 1$, existe um inteiro positivo $T_{1l} > T_{1i}$ tal que $I_1^l \leq I_n \leq I_1^m$, para todo o $n > T_{1i}$, onde $I_1^l = (a_1^l - 1)/b - \varepsilon$ e $I_1^m = (a_1^m - 1)/b + \varepsilon$.

Recorrendo de novo à primeira equação de (3.6) e usando $I_1^l \leq I_n \leq I_1^m$, obtemos, para $n > T_{1i}$,

$$L_{n+1} \leq L_n + \Lambda - \mu L_{n+1} - (\delta + \gamma)I_1^l \quad \text{e} \quad L_{n+1} \geq L_n + \Lambda - \mu L_{n+1} - (\delta + \gamma)I_1^m$$

e consequentemente

$$L_{n+1} \leq \frac{\Lambda - (\delta + \gamma)I_1^l}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \mu} L_n \quad \text{e} \quad L_{n+1} \geq \frac{\Lambda - (\delta + \gamma)I_1^m}{1 + \mu} + \frac{1}{1 + \mu} L_n. \quad (3.10)$$

Comparando as duas inequações em (3.10) com as equações lineares que se obtêm substituindo a desigualdade por uma igualdade, concluímos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um inteiro positivo $T_{2l} > T_{1i}$ tal que $L_2^l \leq L_n \leq L_2^m$ para $n > T_{2l}$, onde $L_2^l = \frac{\Lambda - (\delta + \gamma)I_1^l}{\mu} - \varepsilon$ e $L_2^m = \frac{\Lambda - (\delta + \gamma)I_1^l}{\mu} + \varepsilon$. De novo atendendo a (3.6) obtemos

$$I_{n+1} \leq \frac{I_n(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_2^m)}{(1 + \mu + \beta I_n)(1 + d + \gamma)} \quad \text{e} \quad I_{n+1} \geq \frac{I_n(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_2^l)}{(1 + \mu + \beta I_n)(1 + d + \gamma)}.$$

e as equações às diferenças correspondentes:

$$I_{2,n+1}^m = \frac{I_{2,n}^m(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_2^m)}{(1 + \mu + \beta I_{2,n}^m)(1 + d + \gamma)} \quad \text{e} \quad I_{2,n+1}^l = \frac{I_{2,n}^l(\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_2^l)}{(1 + \mu + \beta I_{2,n}^l)(1 + d + \gamma)}.$$

que novamente são equações de Beverton-Holt. De facto,

$$I_{2,n+1}^m = \frac{a_2^m I_{2,n}^m}{1 + b I_{2,n}^m} \quad \text{e} \quad I_{2,n+1}^l = \frac{a_2^l I_{2,n}^l}{1 + b I_{2,n}^l}. \quad (3.11)$$

onde

$$a_2^m = \frac{\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_2^m}{(1 + \mu)(1 + d + \gamma)}, \quad \text{e} \quad a_2^l = \frac{\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_2^l}{(1 + \mu)(1 + d + \gamma)}.$$

Atendendo às propriedades da equação de Beverton-Holt, existe um inteiro positivo $T_{2l} > T_{2i}$ tal que $I_2^l \leq I_n \leq I_2^m$, para todo o $n > T_{2i}$, onde $I_2^l = (a_2^l - 1)/b - \varepsilon$ e $I_2^m = (a_2^m - 1)/b + \varepsilon$. Usando respetivamente nas expressões de a_2^l e a_2^m e as identidades $L_2^l = \frac{\Lambda - (\delta + \gamma)I_1^l}{\mu} - \varepsilon$ e $L_2^m = \frac{\Lambda - (\delta + \gamma)I_1^l}{\mu} + \varepsilon$, obtemos

$$I_2^l = \frac{a_2^l - 1}{b} - \varepsilon = \frac{\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_2^l}{b(1 + \mu)(1 + d + \gamma)} - \frac{1}{b} - \varepsilon = A_\varepsilon^l - B_\varepsilon I_1^m$$

e

$$I_2^m = \frac{a_2^m - 1}{b} + \varepsilon = \frac{\beta\Lambda + 1 + \mu + \beta L_2^m}{b(1 + \mu)(1 + d + \gamma)} - \frac{1}{b} + \varepsilon = A_\varepsilon^m - B_\varepsilon I_1^l,$$

onde

$$A_\varepsilon^l = \frac{(1 + \mu)(d + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1) - \beta\varepsilon}{\beta(1 + d + \gamma)} - \varepsilon, \quad A_\varepsilon^m = \frac{(1 + \mu)(d + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1) + \beta\varepsilon}{\beta(1 + d + \gamma)} + \varepsilon$$

e

$$B_\varepsilon = \frac{\delta + \gamma}{\mu(1 + d + \gamma)}.$$

Obtemos portanto o sistema linear

$$\begin{cases} I_2^l = A_\varepsilon^l - B_\varepsilon I_1^m \\ I_2^m = A_\varepsilon^m - B_\varepsilon I_1^l \end{cases}.$$

Por indução obtemos sucessões $(T_{kl})_{k \in \mathbb{N}}$, $(T_{km})_{k \in \mathbb{N}}$, $(L_k^l)_{k \in \mathbb{N}}$, $(L_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$, $(I_k^l)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(I_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $I_k^l \leq I_n \leq I_k^m$ para $n > T_{kl}$ e satisfazendo o sistema linear de equações às diferenças seguinte:

$$\begin{cases} I_{k+1}^l = A_\varepsilon^l - B_\varepsilon I_k^m \\ I_{k+1}^m = A_\varepsilon^m - B_\varepsilon I_k^l \end{cases}. \quad (3.12)$$

Este sistema tem o ponto de equilíbrio

$$(I^{l*}, I^{m*}) = \left(\frac{A_\varepsilon^l - B_\varepsilon A_\varepsilon^m}{1 - (B_\varepsilon)^2}, \frac{A_\varepsilon^m - B_\varepsilon A_\varepsilon^l}{1 - (B_\varepsilon)^2} \right). \quad (3.13)$$

Os valores próprios da matriz associada à linearização do sistema no ponto (I^{l*}, I^{m*}) são $\lambda_1 = B_\varepsilon$ e $\lambda_2 = -B_\varepsilon$. Deste modo, uma vez que $\gamma < 2\mu - d$, temos

$$|\lambda_i| = \frac{\delta + \gamma}{\mu(1 + d + \gamma)} = \frac{\delta + \gamma}{\mu} \times \frac{1}{1 + \mu + \gamma} < 1, \quad i = 1, 2.$$

Vamos agora explicitar as expressões em (3.13). Temos

$$\frac{A_\varepsilon^l - B_\varepsilon A_\varepsilon^m}{1 - (B_\varepsilon)^2} = \frac{\mu(1 + \mu)(d + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta[\mu(1 + d + \gamma) + (\delta + \gamma)]} - C\varepsilon = \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) - C\varepsilon \quad (3.14)$$

e analogamente obtemos

$$\frac{A_\varepsilon^m - B_\varepsilon A_\varepsilon^l}{1 - (B_\varepsilon)^2} = \frac{\mu(1 + \mu)(d + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1)}{\beta[\mu(1 + d + \gamma) + (\delta + \gamma)]} + C\varepsilon = \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) + C\varepsilon, \quad (3.15)$$

onde

$$C = \frac{\mu(1 + d + \gamma) + [\mu(1 + d + \gamma) + (\delta + \gamma)]^2}{\mu(1 + d + \gamma)[\mu(1 + d + \gamma) + (\delta + \gamma)]}.$$

Pela forma como o sistema (3.12) foi construído e atendendo a (3.14) e (3.15), obtemos

$$\frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) - C\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) + C\varepsilon$$

e consequentemente, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1). \quad (3.16)$$

Atendendo agora a que

$$\begin{cases} L_{k+1}^l = \frac{\Lambda - (\delta + \gamma)I_k^m}{\mu} - \varepsilon \\ L_{k+1}^m = \frac{\Lambda - (\delta + \gamma)I_k^l}{\mu} + \varepsilon \end{cases}.$$

obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} L_k^l &= \frac{\Lambda - (\delta + \gamma) \left[\frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) + C\varepsilon \right]}{\mu} - \varepsilon \\ &= \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\delta + \gamma}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) - \left(\frac{C(\delta + \gamma)}{\mu} + 1 \right) \varepsilon\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} L_k^m &= \frac{\Lambda - (\delta + \gamma) \left[\frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) - C\varepsilon \right]}{\mu} + \varepsilon \\ &= \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\delta + \gamma)}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) + \left(\frac{C(\delta + \gamma)}{\mu} + 1 \right) \varepsilon\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e notando que $\delta + \mu = d$, concluimos que

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (S_k + I_k) - \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} L_k - \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k \\ &= \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\delta + \gamma}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) - \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) \\ &= \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{d + \gamma}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) = \frac{d + \gamma}{\beta}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Por fim, atendendo a (3.16), dado $\varepsilon > 0$, temos, para n suficientemente grande,

$$\gamma \left[\frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) - \varepsilon \right] + R_n - \mu R_{n+1} \leq R_{n+1} \leq \gamma \left[\frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) + \varepsilon \right] + R_n - \mu R_{n+1}.$$

Assim, atendendo à forma da solução das equações lineares que se obtêm considerando igualdades em vez das desigualdades nas inequações acima, obtemos

$$\frac{\frac{\gamma\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) - \gamma\varepsilon}{\mu} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n \leq \frac{\frac{\gamma\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) + \gamma\varepsilon}{\mu}.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \frac{\gamma}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1).\tag{3.18}$$

Atendendo a (3.16), (3.17) e (3.18), para qualquer trajetória (S_n, I_n, R_n) com $I_0 > 0$ temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n, I_n, R_n) \rightarrow \left(\frac{\gamma + d}{\beta}, \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\gamma}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) \right) = e_E$$

e concluimos que e_E é um ponto de equilíbrio globalmente atrator. Uma vez que também é localmente assintoticamente estável, concluimos que é globalmente assin-

totalmente estável e isto conclui a nossa demonstração. $\square$

O seguinte corolário é consequência imediata do teorema anterior. Este é um resultado correspondente ao Teorema 4 de [10], o qual foi provado para o modelo SIR obtido pelo método de Euler. As condições sobre os parâmetros no nosso caso são melhores do que as condições no teorema referido.

Corolário 3.2.2. Sendo $d = \mu$ temos que o equilíbrio endêmico e_E do modelo (2.6) é globalmente assintoticamente estável se $\mathcal{R}_0 > 1$ e $\gamma < \mu$.

Na Figura 3.1 ilustramos a estabilidade global do ponto de equilíbrio sem doença no modelo SIR.

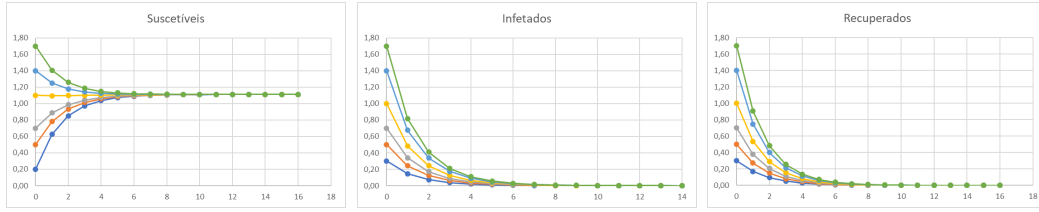


Figura 3.1: Estabilidade do ponto de equilíbrio sem doença no modelo SIR. $\Lambda = 1$, $d = \mu = 0,9$, $\beta = 0,2$ e $\gamma = 0,4$.

Na Figura 3.2 ilustramos a estabilidade global no interior do 1º octante do ponto de equilíbrio endêmico no modelo SIR.

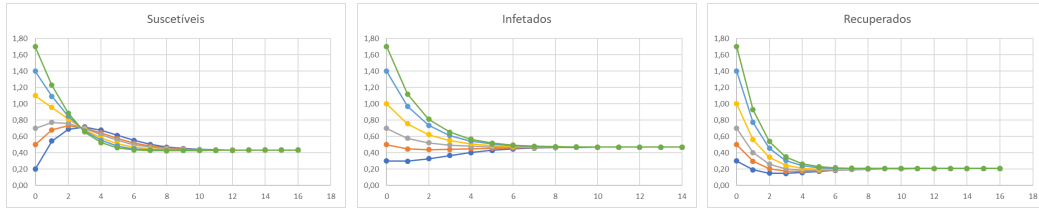


Figura 3.2: Estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico no modelo SIR. $\Lambda = 1$, $d = \mu = 0,9$, $\beta = 3$ e $\gamma = 0,4$.

3.3 Estabilidade global no modelo SIS

A demonstração da estabilidade global dos pontos de equilíbrio fazem-se de forma semelhantes e estão contidas nas demonstrações dos Teoremas 3.1.1 e 3.2.1 sobre estabilidade global do modelo SIR. Começamos com a estabilidade local.

Teorema 3.3.1. O equilíbrio sem doença e_{DF} do modelo (2.22) é globalmente assintoticamente estável se $\mathcal{R}_0 < 1$.

Demonstração. Procedendo como na demonstração do Teorema 3.1.1, concluímos que

$$I_m \leq a_0 I_{m-1} \leq a_0^2 I_{m-2} \leq \dots \leq (a_0)^{m-n} I_n,$$

onde $a_0 = (\mathcal{R}_0 + 1/(d + \gamma) + \beta\varepsilon/(d + \gamma))/(1 + 1/(d + \gamma))$ e ε é suficientemente pequeno para que $a_0 < 1$. Fazendo $m \rightarrow +\infty$, concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = 0. \quad (3.19)$$

Procedendo como no modelo SIR, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \Lambda/\mu. \quad (3.20)$$

A parte final da argumentação é semelhante. De (3.20) e (3.19) concluímos que $(S_n, I_n) \rightarrow e_{DF}$. De acordo com o Teorema 2.2.2, quando $\mathcal{R}_0 < 1$ temos estabilidade assintótica local. Deste modo, concluímos que e_E é globalmente assintoticamente estável. $\square$

Vamos agora considerar o equilíbrio endêmico.

Teorema 3.3.2. O equilíbrio endêmico e_E do modelo (2.22) é globalmente atrator se $\mathcal{R}_0 > 1$. Além disso, se $\gamma = 0$, o ponto e_E é globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Procedendo como na demonstração do Teorema 3.2.1 e fazendo $L_n = S_n + I_n$, obtemos um sistema semelhante a (3.12) onde neste caso

$$A_\varepsilon^l = \frac{(1 + \mu)d(\mathcal{R}_0 - 1) - \beta\varepsilon}{\beta(1 + d)} - \varepsilon, \quad A_\varepsilon^m = \frac{(1 + \mu)d(\mathcal{R}_0 - 1) + \beta\varepsilon}{\beta(1 + d)} + \varepsilon \quad \text{e} \quad B_\varepsilon = \frac{\delta}{\mu(1 + d)}.$$

Recorrendo a esse sistema e procedendo como na demonstração do Teorema 3.2.1, somos novamente levados à conclusão de que, para cada $\varepsilon > 0$, temos

$$\frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) - C\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) + C\varepsilon.$$

e consequentemente, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1),$$

o que mostra que o ponto de equilíbrio e_E é globalmente atrator. Se $\gamma = 0$ estamos nas condições do Teorema 2.2.3 e podemos concluir que e_E é globalmente assintoticamente estável. $\square$

Para o modelo SIS, na Figura 3.3 ilustramos a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio sem doença e na Figura 3.4 ilustramos a estabilidade global assintótica no interior do 1º octante do ponto de equilíbrio endêmico.

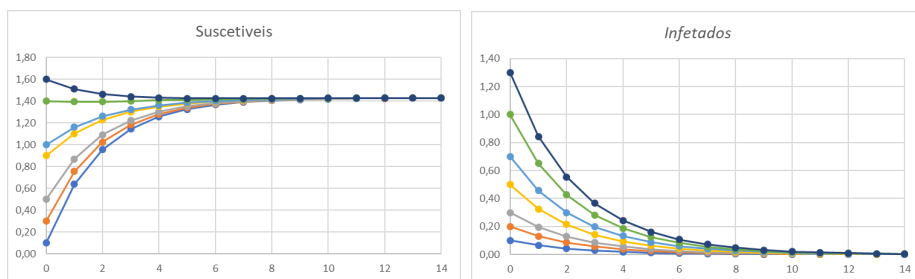


Figura 3.3: Estabilidade do ponto de equilíbrio sem doença no modelo SIS. $\Lambda = 1$, $d = \mu = 0,7$, $\gamma = 0$ e $\beta = 0,1$.

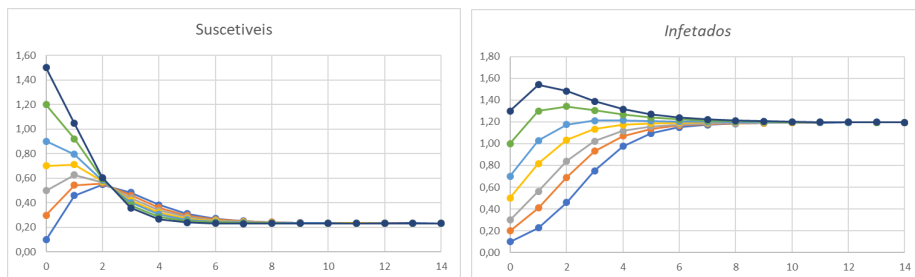


Figura 3.4: Estabilidade do ponto de equilíbrio endêmico no modelo SIS. $\Lambda = 1$, $d = \mu = 0,7$, $\gamma = 0$ e $\beta = 3$.

Capítulo 4

Modelo SI com incidência periódica

Neste capítulo, para um determinado $p \in \mathbb{N}$ fixo, vamos considerar a família de modelos SI discretos periódicos de período p seguinte

$$\begin{cases} S_{n+1} = \Lambda - \mu S_n - \beta_n S_n I_n + S_n \\ I_{n+1} = \beta_n S_n I_n - d I_n + I_n \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde $\beta_n = \beta_{n+p}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assumimos que $0 < \mu \leq d < 1$. Definimos

$$\beta^\ell = \min_{n=1, \dots, p} \beta_n \quad \text{e} \quad \beta^u = \max_{n=1, \dots, p} \beta_n.$$

O modelo (4.1) pode ser escrito na forma $x_{n+1} = f_n(x_n)$ com $x_n = (S_n, I_n)$ e

$$f_n(S, I) = (\Lambda - \mu S - \beta_n S I + S, \beta_n S I - d I + I), \quad (4.2)$$

$n \in \mathbb{N}$. Temos naturalmente $f_n = f_{n+p}$. Definimos a função $F : (\mathbb{R}_0^+)^2 \rightarrow (\mathbb{R}_0^+)^2$ dada por

$$F(S, I) = (f_p \circ f_{p-1} \circ \dots \circ f_1)(S, I). \quad (4.3)$$

4.1 População total

No modelo (4.1) a equação para a população total não tem parâmetros que dependam do tempo e veremos que se comporta como no caso dos modelos SIS e SIR estudados anteriormente. Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1. As seguintes afirmações são válidas:

1. Dadas condições iniciais $S_0, I_0 \geq 0$ e sendo $N_0 = S_0 + I_0$, a população total $N_n = S_n + I_n$ verifica

$$(1 - d)^n(N_0 - \Lambda/d) + \Lambda/d \leq N_n \leq (1 - \mu)^n(N_0 - \Lambda/\mu) + \Lambda/\mu; \quad (4.4)$$

2. O conjunto $\alpha = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S, I \geq 0 \text{ e } \Lambda/d \leq S + I \leq \Lambda/\mu\}$ é positivamente invariante por F ;
3. Se $0 < \mu < 1$, temos $\limsup_{n \rightarrow \infty} N_n \in \left[\frac{\Lambda}{d}, \frac{\Lambda}{\mu}\right]$.

Demonstração. De acordo com (4.1), temos

$$N_{n+1} = \Lambda - \mu S_n - dI_n + N_n \leq \Lambda - \mu N_n + N_n = \Lambda + (1 - \mu)N_n$$

e

$$N_{n+1} = \Lambda - \mu S_n - dI_n + N_n \geq \Lambda - dN_n + N_n = \Lambda + (1 - d)N_n.$$

Aplicando às equações $U_{n+1} = \Lambda + (1 - \mu)U_n$ e $V_{n+1} = \Lambda + (1 - d)V_n$ argumentos semelhantes aos utilizados na Secção 2.1.2 podemos concluir que as afirmações acima se verificam. $\square$

No caso particular $d = \mu$ temos imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 4.1.2. Assumindo que $d = \mu$, as seguintes afirmações são válidas:

1. Dadas condições iniciais $S_0, I_0 \geq 0$ e sendo $N_0 = S_0 + I_0$, a população total $N_n = S_n + I_n$ verifica
- $$N_n = (1 - \mu)^n(N_0 - \Lambda/\mu) + \Lambda/\mu; \quad (4.5)$$
2. O conjunto $\alpha = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S, I \geq 0 \text{ e } S + I = \Lambda/\mu\}$ é positivamente invariante por F ;
 3. Se $0 < \mu < 1$, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_n = \Lambda/\mu$.

4.2 Existência de um atrator global contendo uma órbita periódica

Uma questão muito importante no nosso estudo dos modelos epidemiológicos é perceber o que acontece, do ponto de vista do comportamento global, no caso em que $\mathcal{R}_0 > 1$. O objectivo principal das próximas secções é mostrar que temos uma órbita periódica endémica, isto é com componentes estritamente positivas. Tal resultado será consequência do resultado que obteremos nesta secção sobre existência de um atrator global para a função F dada por (4.3).

Dados $M_0, M_1 > 0$ definimos os conjuntos

$$\beta_{M_0, M_1} = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0 \text{ e } I > 0 \text{ e } M_1 \leq S + I \leq M_0\}.$$

e os números

$$\mathcal{R}_0^+ = \Lambda\beta^u/(\mu d) \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_0^- = \Lambda\beta^\ell/(\mu d)$$

Dizemos que (S^*, I^*) é um ponto periódico de período p para o nosso sistema periódico de período p se $(f_p \circ f_{p-1} \circ \cdots \circ f_1)(S^*, I^*) = (S^*, I^*)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Temos o resultado:

Teorema 4.2.1. Suponhamos que $]\mathcal{R}_0^-, \mathcal{R}_0^+[\subseteq]\frac{d}{\mu}, \frac{4\mu}{d}[$. Então, para qualquer $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe um conjunto conexo $A \subset \beta_{M_0, M_1}$, onde $M_0 = \Lambda/\mu + \delta$ e $M_1 = \Lambda/d - \delta$, que é um atrator da função F dada por (4.3) em β_{M_0, M_1} . Este atrator contém um ponto de equilíbrio.

Demonstração. Para provarmos o resultado, vamos usar o Teorema 1.5.5. A demonstração deste resultado será feita em vários lemas.

Lema 4.2.2. A função F em (4.3) é uma função compacta.

Demonstração. (Demonstração do Lema 4.2.2) Seja L um subconjunto limitado de $(\mathbb{R}_0^+)^2$. Então, usando a distância dada pelo máximo, existe $\delta > 0$ tal que $L \subseteq B_\delta((0, 0))$. Temos, para todo o $(S, I) \in L$,

$$\begin{aligned} d(f_n(S, I), (S, I)) &= d((\Lambda - \mu S - \beta_n SI + S, \beta_n SI - dI + I), (S, I)) \\ &= \max\{\Lambda - \mu S - \beta_n SI + S, \beta_n SI - dI + I\} \\ &\leq \max\{\Lambda + \mu\delta + \beta^u\delta^2 + \delta, \beta^u\delta^2 + d\delta + \delta\} \\ &\leq \Lambda + d\delta + \beta^u\delta^2 + \delta := \delta_1 \end{aligned}$$

e logo $f_1(L) \subseteq B_{\delta+\delta_1}((0, 0))$. De forma semelhante $(f_2 \circ f_1)(L) \subseteq B_{\delta_1+\delta_2}((0, 0))$, onde $\delta_2 = \Lambda + d\delta_1 + \beta^u\delta_1^2 + \delta_1$. Procedendo indutivamente, concluimos que $F(L) = (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1) \subseteq B_{\delta_{n-1}+\delta_n}((0, 0))$, onde $\delta_n = \Lambda + d\delta_{n-1} + \beta^u\delta_{n-1}^2 + \delta_{n-1}$ e $\delta_k = \Lambda + d\delta_{k-1} + \beta^u\delta_{k-1}^2 + \delta_{k-1}$, $k = 1, \dots, n-1$. Assim, $F(L)$ é um conjunto limitado e logo $\overline{F(L)}$ é também limitado. Como $\overline{F(L)}$ é também um conjunto fechado, concluimos que é um conjunto compacto. Conclui-se que F é uma função compacta. $\square$

Lema 4.2.3. Nas condições do enunciado, para qualquer $\delta > 0$ suficientemente pequeno, β_{M_0, M_1} é positivamente invariante por f_n , para todo o $n \in \mathbb{N}$, e logo também é positivamente invariante por F , para qualquer $M_0 = \frac{\Lambda}{\mu} + \delta$ e $M_1 = \frac{\Lambda}{d} - \delta$.

Demonstração. (Demonstração do Lema 4.2.3) Seja $\delta > 0$ um número suficientemente pequeno que determinaremos mais tarde e $M_0 = \Lambda/\mu + \delta_0$ com $\delta_0 < \delta$. Para mostrar o resultado, começamos por notar que se $N_n = S_n + I_n < M_0$ então

$N_{n+1} = S_{n+1} + I_{n+1} < M_0$. Suponhamos que $S_n, I_n \in \beta_{M_0, M_1}$ verificam $S_n, I_n > 0$. Uma vez que $\beta_n S_n > 0$, $1 - d > 0$ e $I_n > 0$, temos por um lado

$$I_{n+1} = [\beta S_n + (1 - d)]I_n > 0.$$

Por outro lado, uma vez que

$$\beta_n S_n I_n \leq \beta^u I_n (M_0 - I_n) \leq \beta^u \max_{t \in [0, M_0]} t(M_0 - t) = \beta^u \max_{t \in [0, M_0]} (M_0 t - t^2) = \beta^u M_0^2 / 4,$$

temos $-\beta_n S_n I_n \geq -\beta^u M_0^2 / 4$ e logo

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \Lambda - \mu S_n - \beta_n S_n I_n + S_n \\ &\geq \Lambda - \mu S_n - \beta^u M_0^2 / 4 + S_n \\ &= \Lambda(1 - \beta^u M_0^2 / (4\Lambda)) + (1 - \mu)S_n \\ &= \Lambda(1 - \frac{d\mathcal{R}_0^+}{4\mu} - \beta^u \delta_0 / (2\mu) - \beta^u \delta_0^2 / (4\Lambda)) + (1 - \mu)S_n > 0. \end{aligned}$$

escolhemos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $1 - \frac{d\mathcal{R}_0^+}{4\mu} - \beta\delta / (2\mu) - \beta\delta^2 / (4\Lambda) > 0$. Note que é sempre possível, uma vez que $1 - \frac{d\mathcal{R}_0^+}{4\mu} > 0$. Assim $S_{n+1}, I_{n+1} > 0$. Por outro lado, se $S_n = 0$ e $I_n > 0$ temos $S_{n+1} = \Lambda > 0$ e $I_{n+1} = (1 - d)I_n > 0$. Se $S_n + I_n > M_1$ então $S_{n+1} + I_{n+1} > M_1$, logo temos invariância de região. Concluimos o pretendido. $\square$

Lema 4.2.4. Nas condições do enunciado, a função F é uniformemente persistente em relação a β_{M_0, M_1} , onde M_0, M_1 são dados pelo lema anterior.

Demonstração do Lema 4.2.4. Começamos por notar que $\partial\beta_{M_0, M_1} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ onde

$$\gamma_1 = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S, I \geq 0 \text{ e } S + I = M_0\},$$

$$\gamma_2 = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S = 0 \text{ e } M_1 \leq I \leq M_0\},$$

$$\gamma_3 = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : I = 0 \text{ e } M_1 \leq S \leq M_0\}$$

e

$$\gamma_4 = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S, I \geq 0 \text{ e } S + I = M_1\}.$$

Seja $(S_0, I_0) \in \beta_{M_0, M_1}$ e $((S_n, I_n))_{n \in \mathbb{N}}$ a solução correspondente. Uma vez que todas as soluções se aproximam da faixa $\{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : \Lambda/d \leq S + I \leq \Lambda/\mu\}$ e que $M_0 = \Lambda/\mu + \delta_0$ e $M_1 = \Lambda/d - \delta_1$, existe $\varepsilon_1 < \min\{\delta_0, \delta_1\}$ tal que $M_1 + \varepsilon_1 < S_n + I_n < M_0 - \varepsilon_1$, para todo o n suficientemente grande. Logo, $\liminf_{n \rightarrow \infty} d((S_n, I_n), \gamma_1) > \varepsilon_1$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} d((S_n, I_n), \gamma_4) > \varepsilon_1$.

Vamos mostrar que se $S_0 \geq 0$ e $I_0 > 0$ então a componente I_n da solução verifica

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} I_n \geq \frac{\mu \mathcal{R}_0^- - d}{2\beta^u}. \quad (4.6)$$

Procedemos por contradição. Supomos que (4.6) não se verifica. Como

$$\frac{\Lambda}{d} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n + I_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n + I_n \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

existe Φ_n com $\Phi_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ tal que $\Lambda/d - \Phi_n \leq S_n + I_n \leq \Lambda/\mu + \Phi_n$. Logo, $S_n \geq \frac{\Lambda}{d} - \Phi_n - I_n$ e temos, uma vez que estamos a supor que (4.6) não se verifica, para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} I_{n+1} &\geq \beta_n(\Lambda/d - \Phi_n - I_n)I_n - dI_n + I_n \\ &\geq (\mu \mathcal{R}_0^- - d - \beta^u \Phi_n - \beta^u I_n + 1)I_n \geq \Theta_0 I_n, \end{aligned}$$

com $\Theta_0 = (\mu \mathcal{R}_0^- - d)/2 + 1 > 1$ (note-se que $\mathcal{R}_0^- > d/\mu$ por hipótese). Portanto, se (4.6) não se verifica, concluímos que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$. Contradição pois $0 < I_n < M_0$. Deste modo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d((S_n, I_n), \gamma_3) > \frac{\mu \mathcal{R}_0^- - d}{2\beta} := \varepsilon_3.$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \Lambda - \mu S_n - \beta_n S_n I_n + S_n \\ &\geq \Lambda - (\mu + \beta^u \Lambda/\mu + \beta^u \Phi_n + 1)S_n \\ &\geq \Lambda - (\mu + \beta^u \Lambda/\mu + \beta^u \varepsilon + 1)S_n. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n \geq \frac{\Lambda}{\mu + \beta^u \Lambda/\mu + \beta^u \varepsilon + 1}$$

e logo, pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d((S_n, I_n), \gamma_2) \geq \frac{\Lambda}{\mu + \beta^u \Lambda/\mu + 1} := \varepsilon_4.$$

Logo, $F = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_p$ é uniformemente persistente em relação a β_{M_0, M_1} e podemos tomar $\eta = \min\{\varepsilon_i, i = 1, \dots, 4\}$ na Definição 1.5.4. $\square$

Vamos agora demonstrar o teorema. Pelo Lema 4.2.2, a função F é uma função compacta e obtemos a) do Teorema 1.5.5. Pelo Lema 4.2.3, a função β_{M_0, M_1} é positivamente invariante e pelo Lema 4.2.4 a função F é uniformemente persistente em relação a β_{M_0, M_1} , e obtemos c) do Teorema 1.5.5. Uma vez que β_{M_0, M_1} é um conjunto limitado concluímos trivialmente que a função F restrita a β_{M_0, M_1} dis-

sipa pontos e podemos tomar para o conjunto B_0 da definição o conjunto β_{M_0, M_1} . Obtemos b) do Teorema 1.5.5. Assim, estando nas condições do referido teorema, concluímos que existe um atrator conexo A_0 para F em X_0 e que F possui um ponto de equilíbrio. $\square$

O seguinte corolário é imediato.

Corolário 4.2.5. Se $]\mathcal{R}_0^-, \mathcal{R}_0^+[\subseteq]\frac{d}{\mu}, \frac{4\mu}{d}[$ existe uma órbita periódica de período p para o sistema (4.1).

Demonstração. Se existe $(a, b) \in \beta_{M_0, M_1}$ tal que $F(a, b) = (a, b)$ então, designando por (S_n, I_n) , $n \in \mathbb{N}$ a solução tal que $(S_0, I_0) = (a, b)$, concluímos que

$$(f_p \circ \dots \circ f_1)(a, b) = F(a, b) = (a, b).$$

Concluímos que a órbita $\mathcal{O}$ é uma órbita periódica de período p . $\square$

Corolário 4.2.6. Suponhamos que o sistema (4.1) é autónomo, ou seja que $\beta_n = \beta$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Se $d = \mu$ e $\mathcal{R}_0 > 1$, o ponto de equilíbrio endémico e_E é globalmente assintoticamente estável em β_{M_0, M_1} .

Demonstração. O teorema anterior diz que existe um atrator A para F em β_{M_0, M_1} , o que mostra neste caso que o atrator está contido no segmento de reta

$$\{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : S, I \geq 0 \text{ e } S + I = \Lambda/\mu\}. \quad (4.7)$$

De acordo com [10], o sistema

$$\begin{cases} S_{n+1} = \Lambda + S_n - \mu S_n - \beta_0 I_n S_n / N_n \\ I_{n+1} = \beta_0 S_n I_n / N_n - \mu I_n + I_n \end{cases}. \quad (4.8)$$

é globalmente assintoticamente estável desde que o número reprodutivo básico deste sistema, dado por β_0/μ , seja maior do que 1. Atendendo a que o sistema anterior é invariante no conjunto (4.7), temos que, nesse conjunto, a equação (4.8) fica

$$\begin{cases} S_{n+1} = \Lambda + S_n - \mu S_n - \beta I_n S_n \\ I_{n+1} = \beta S_n I_n - \mu I_n + I_n \end{cases}. \quad (4.9)$$

onde $\beta = \beta_0 \mu / \Lambda$. Uma vez que $\beta_0/\mu = \beta \Lambda / \mu^2$, concluímos que, se o número reprodutivo básico de (4.9) é maior do que 1 ($\mathcal{R}_0 = \beta \Lambda / \mu^2 > 1$) temos que o equilíbrio endémico do sistema (4.9) é globalmente assintoticamente estável na região (4.7).

Vamos agora ver a estabilidade local do ponto de equilíbrio endémico, e_E em β_{M_0, M_1} . O sistema

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n \end{cases}, \quad (4.10)$$

pode ser escrito como $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $x_n = (S_n, I_n)$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a função dada por $f(S, I) = (S + \Lambda - \mu S - \beta SI, I + \beta SI - \mu I)$.

A matriz derivada desta função num ponto (S, I) é a matriz

$$df_{(S, I)} = \begin{bmatrix} 1 - \mu - \beta I & -\beta S \\ \beta I & 1 + \beta S - \mu \end{bmatrix}$$

Prosseguindo na análise da estabilidade do ponto de equilíbrio endémico, e_E , vemos que a derivada neste ponto de equilíbrio é dada por:

$$df_{e_E} = \begin{bmatrix} \frac{\mu - \beta \Lambda}{\mu} & -\mu \\ \frac{\beta \Lambda - \mu^2}{\mu} & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} \frac{\mu - \beta \Lambda}{\mu} - \lambda & -\mu \\ \frac{\beta \Lambda - \mu^2}{\mu} & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

e o polinómio característico é

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(-2 + \frac{\beta \Lambda}{\mu}\right) \lambda + \left(1 - \frac{\beta \Lambda}{\mu} - \mu^2 + \beta \Lambda\right).$$

Os valores próprios são assim as soluções da equação

$$\lambda^2 + \left(-2 + \frac{\beta \Lambda}{\mu}\right) \lambda + \left(1 - \frac{\beta \Lambda}{\mu} - \mu^2 + \beta \Lambda\right) = 0.$$

Alguns cálculos permitem concluir que os valores próprios são $\lambda_1 = 1 - \mu$ e $\lambda_2 = 1 + \mu - \beta \Lambda / \mu$.

Como $0 < \mu < 1$, temos $\lambda_1 < 1$. Por outro lado, se $\mathcal{R}_0 > 1$, temos

$$\lambda_2 = 1 + \mu - \frac{\beta \Lambda}{\mu} = 1 + \mu(1 - \mathcal{R}_0) < 1$$

e concluimos que o ponto e_E é localmente assintoticamente estável.

Como vimos, o ponto de equilíbrio, e_E é localmente assintoticamente estável e logo é estável. Por outro lado, e_E é globalmente assintoticamente estável em (4.7) e o atrator global tem de estar nessa reta. Logo e_E é globalmente assintoticamente estável em β_{M_0, M_1} . $\square$

Para o modelo periódico que considerámos, na Figura 4.1 ilustramos a existência de uma órbita periódica e na Figura 4.2 é sugerida a estabilidade assintótica dessa órbita. Para as figuras considerámos $\Lambda = 4$, $\mu = 0.2$, $d = 0.5$ e

$$\beta_n = 0.01115 \times (5 - (-1)^n).$$

Note-se que, neste caso temos

$$]\mathcal{R}_0^-, \mathcal{R}_0^+[=]1.6, 2.4[\subseteq]1.6, 2.5[=]d/\mu, 4\mu/d[,$$

e portanto, a Figura 4.1 ilustra a conclusão do Corolário 4.2.5.

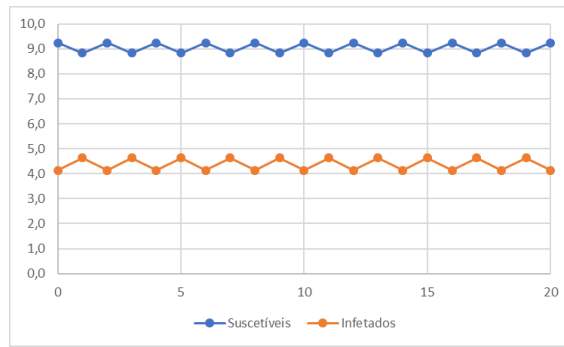


Figura 4.1: Modelo periódico. Órbita periódica.

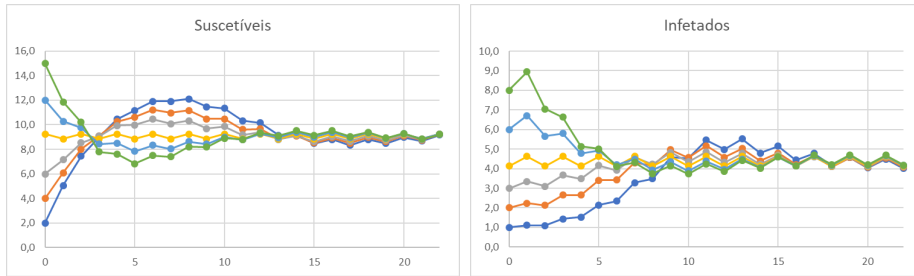


Figura 4.2: Modelo periódico. Comportamento assintótico.

Capítulo 5

Um projeto de divulgação

Neste capítulo enumeram-se alguns aspetos da preparação e apresentação de uma ação de divulgação subordinada ao tema “modelos discretos da biomatemática”. Esta ação de divulgação foi preparada e apresentada na Academia Júnior de Ciências (AJC) pela autora deste trabalho, pelo seu orientador, Prof. César Silva, e por um seu colega. Pode encontrar-se um vídeo da apresentação bem como os slides usados na apresentação nos endereços <http://www.mat.ubi.pt/~csilva/AJC.mp4> e <http://www.mat.ubi.pt/~csilva/2018-03-10-slides-Academia.pdf>. As imagens incluídas na apresentação foram retiradas do site <https://pixabay.com/>. Este site permite a utilização livre das imagens.

5.1 Academia Júnior de Ciências

A Academia Júnior de Ciências é uma iniciativa da Universidade da Beira Interior (UBI) que, em parceria com as escolas do Ensino Secundário da região, proporcionam aos melhores alunos do 12º ano a oportunidade de viver experiências em torno da ciência. A AJC teve o seu início em 2014 e neste ano de 2018 conclui a sua quarta edição, a qual começou a 13 de outubro de 2017 e o seu encerramento a 23 de março de 2018.

Esta última edição teve a participação de mais de 30 alunos das escolas do distrito de Castelo Branco e Guarda, os quais participaram em projetos ligados à Matemática, Física, Química, Engenharia Aeroespacial, Ciências da Saúde e Engenharia Eletromecânica, bem como em várias conferências da qual a última contou com a nossa participação.

5.2 Ação de divulgação em Biomatemática

Fazer parte desta edição foi desafiador. Uma vez que a AJC é composta pelos alunos do Ensino Secundário, elaborar uma apresentação ligada à Biomatemática

não foi uma tarefa fácil, pois grande parte da Matemática que está na base dos modelos apresentados ainda não é conhecida pelos participantes. Neste contexto, fomos levados a ajustar os conteúdos bem como a linguagem usada.

Numa primeira fase, os slides utilizados foram preparados separadamente, tendo cabido à autora o desenvolvimento inicial das secções relativas aos modelos epidemiológicos, os slides 20 a 30. Numa segunda fase, em conjunto com o meu colega Augusto dos Santos e com o meu orientador, os conteúdos dos slides preparados pela autora foram aperfeiçoados e adaptados aos conteúdos das outras partes da apresentação. Ressaltaremos em seguida alguns aspectos que foram trabalhados:

1. Nos slides, optou-se por privilegiar gráficos e outros esquemas em vez de cálculos longos, sempre que isso fosse suficiente para compreender o aspeto matemático ou biológico que se pretendia descrever.
2. Apesar de, dependendo das unidades consideradas, as variáveis nos nossos modelos poderem ser interpretados como densidades populacionais, percentagem de indivíduos ou número de indivíduos, optámos por não referir todas estas interpretações e usar sempre a interpretação das variáveis como número de indivíduos. Deste modo os parâmetros μ , β e γ passaram a ser vistos como frações das várias subpopulações (por exemplo, γI_n é visto como o número de infectados que recupera no dia n e que transita para a classe dos recuperados, sendo γ a fracção dos infetados que recupera).
3. Nos vários slides, em vez de “equações às diferenças” obtámos por falar de “sucessões definidas por recorrência”, para nos aproximarmos de um conceito conhecido pelos participantes.
4. Em muitos dos slides, optou-se por usar o comando `\pause`, disponível no estilo “beamer” que se usou para preparar os slides, para modificar as cores numa fórmula e ser mais fácil perceber os cálculos que estavam a ser efetuados. Tal foi o caso dos cálculos efectuados nos slides 24, 27 e 30 (ver versão da apresentação com as pausas no link acima).
5. Algumas expressões foram escritas de forma diferente da que assumiram em capítulos anteriores, com o objetivo de facilitar a interpretação das mesmas. Por exemplo, ao escrevermos a equação para a população total no slide 26, em vez de $P_{n+1} = \Lambda - (\mu - 1)P_n$, escrevemos $P_{n+1} = P_n + \Lambda - \mu P_n$. Apesar da última fórmula ser menos condensada, tem a vantagem de se poder interpretar biologicamente de forma imediata: a população no dia seguinte é obtida adicionando o número de nascimentos e subtraindo o número de mortes à população no dia anterior. Um outro exemplo diz respeito à forma de apresentar

os pontos de equilíbrio no slide 28. Em vez da representação usual como vetor:

$$e_{DF} = (\Lambda/\mu, 0, 0)$$

e

$$e_E = \left(\frac{\mu + \gamma}{\beta}, \frac{\Lambda}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\gamma\Lambda}{\mu(\mu + \gamma)} - \frac{\gamma}{\beta} \right),$$

optou-se, no slide, pela representação

$$S_n = \Lambda/\mu, \quad I_n = 0, \quad R_n = 0 \quad e_{DF}$$

e

$$S_n = \frac{\mu + \gamma}{\beta}, \quad I_n = \frac{\Lambda}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta}, \quad R_n = \frac{\gamma\Lambda}{\mu(\mu + \gamma)} - \frac{\gamma}{\beta} \quad e_E,$$

menos natural mas mais fácil de compreender para os participantes que não estivessem familiarizados com equações às diferenças (ou com sucessões definidas por recorrência) em dimensão maior do que um.

6. Sempre que os cálculos fossem morosos ou complexos, optamos por não os apresentar. Por exemplo, ocultamos os cálculos existentes para determinar a solução da equação para a população total, no slide 26, por causa da sua complexidade. Apresentou-se apenas a fórmula que se obtém.
7. A fim de ajudar à compreensão da importância dos “pontos de equilíbrio” optou-se por os designar por “estado de equilíbrio”, à semelhança do que já tinha sido feito noutras partes da apresentação, a propósito de modelos unidimensionais. Pretendia-se que os participantes associassem pontos de equilíbrio ou soluções constantes a estados em que o sistema biológico está em equilíbrio.
8. Optou-se por fazer os cálculos suficientes para ver surgir o número reprodutivo básico, $\mathcal{R}_0$, como um número que matematicamente estabelece a fronteira entre permanência e extinção da doença no slide 28. Ainda assim, $\mathcal{R}_0$ foi apresentado de forma simplificada, não entrando muito em detalhes matemáticos e privilegiando a sua interpretação biológica: o número de novas infeções que um único infetado lançado numa população constituída unicamente por suscetíveis provoca durante o tempo em que permanece infeccioso. Naturalmente a interpretação anterior deveria ser feita num contexto assintótico mas não se referiu este aspeto para não complicar a exposição.

Bibliografia

- [1] Bacaër, Nicolas A Short History of Mathematical Population Dynamics. Springer, France, 2011. 2
- [2] Brauer, F., Driessche, P. V. den e Wu, J. (eds) Mathematical Epidemiology. Mathematical Biosciences Subseries, Springer, 2008. 2
- [3] Cui, Q. e Zhang, Q., Global stability of a discrete SIR epidemic model with vaccination and treatment, Journal of Difference Equations and Applications, 21:2 (2015), 111–117.
URL <http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2014.990450> 3
- [4] Dénes, A. e Röst, G, Global Stability for SIR and SIRS models with nonlinear incidence and removal terms via Dulac functions, Discrete and Continuous Dynamical Systems B, 4 (2016), 1101–1117.
URL <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.1101> 3
- [5] Elaydi, Saber An Introduction to Diference Equations. third edition, Springer, 2005. 13
- [6] Enatsu, Y., Nakata, Y. e Muroya, Y., Global stability for a discrete SIS epidemic model with immigration of infectives, Journal of Difference Equations and Applications, 18 (2012), 1913–1924.
URL <https://doi.org/10.1080/10236198.2011.602973> 3
- [7] Franke, J. E. e Abdul-Azizyakubu, SIS epidemic attractors in periodic environments, Journal of Biological Dynamics 1 (2007), 394–412.
URL <https://doi.org/10.1080/17513750701605630> 3
- [8] Jury, E. I., A simplified stability criterion for linear discrete systems, Proc. IRE. 50 (1962), 1493–1500. 23
- [9] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, 1989 8
- [10] Ma, Xia, Zhou, Yicang and Cao, Hui, Global stability of the endemic equilibrium of a discrete SIR epidemic model, Advances in Difference Equations

2013, 2013:42

URL <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-42> 3, 29, 36, 44

- [11] Murray, J. D, Mathematical biology. Second edition, Biomathematics, 19. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Cap 10, p. 315–327

URL <http://dx.doi.org/10.1155/2014/472746> 2

- [12] Thieme, Hosrt R., Mathematics in Population Biology, Princeton Series in Theoretical Biology, 2003. 2

- [13] Wang, Y., Teng, Z. e Rehim, M., Lyapunov Functions for a Class of Discrete SIRS Epidemic Models with Nonlinear Incidence Rate and Varying Population Sizes, Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2014, Article ID 472746, 10 pp. 3

- [14] Zhao, Xiao-Qiang, Dynamical Systems in Population Biology, Springer, 2003. 4, 14

Apêndice A

Anexo - Slides

Alguns Modelos Discretos da Biomatemática

Rabilde Bartolomeu, Augusto dos Santos e César Silva

Academia Júnior de Ciências

Universidade da Beira Interior

23 de Março de 2018

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

1 / 40

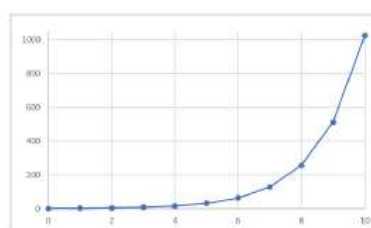
Recorrência



Xadrez e bagos de arroz

1 2 4 8 16 32 64 128 ...

$$\begin{cases} u_n = 2^n, & n = 1, 2, \dots \\ u_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 2u_{n-1}, & n = 1, 2, \dots \\ u_0 = 1 \end{cases}$$



(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

2 / 40

Recorrência



Juros de 2% ao ano

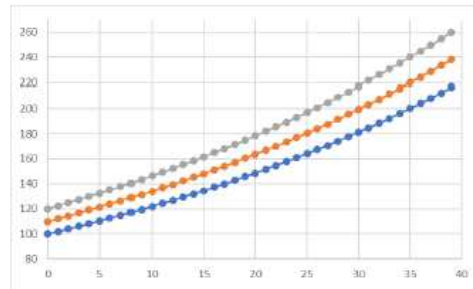
$$u_{n+1} = u_n + 0,02 u_n$$

100,0 102,0 104,0 106,1 108,2 110,4 ...

110,0 112,2 114,4 116,7 119,1 121,4 ...

120,0 122,4 124,8 127,3 129,9 132,5 ...

(aproximando às décimas)



(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

3 / 40

Recorrência

f - Lei de evolução

$$u_0 \quad u_1 = f(u_0) \quad u_2 = f(u_1) \quad u_3 = f(u_2) \quad \cdots \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \cdots$$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

f (Bagos de arroz num quadrado) = Bagos de arroz no quadrado seguinte

f (Dinheiro na conta bancária) = Dinheiro na conta bancária no ano seguinte

f (População num ano) = População no ano seguinte

f (Número de infectados num dia) = Número de infectados no dia seguinte

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

4 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais

Modelos de crescimento populacional



(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

5 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais

Modelo de Beverton-Holt

$$P_{n+1} = \frac{kP_n}{1 + cP_n} \quad k, c > 0$$

- P_n é a população no ano n
- P_{n+1} depende de:
 - população no ano n
 - parâmetros positivos k e c



$$P_0 \quad P_1 = \frac{kP_0}{1 + cP_0} \quad P_2 = \frac{kP_1}{1 + cP_1} \quad P_3 = \frac{kP_2}{1 + cP_2} \quad \dots$$

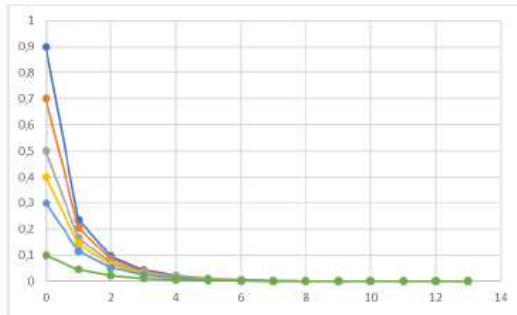
(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

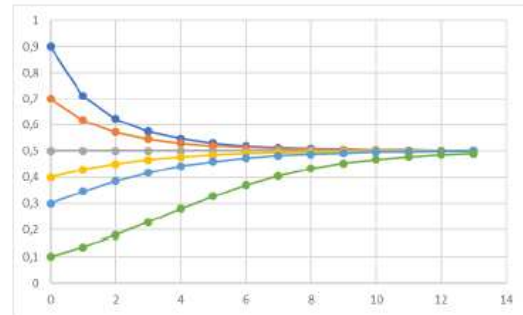
23-03-2018

6 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais



$$k = \frac{1}{2}, \quad c = 1$$



$$k = \frac{3}{2}, \quad c = 1$$

Persistencia e extinção no modelo de Beverton-Holt

Modelos ecológicos unidimensionais

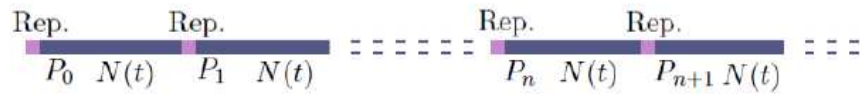


O que significam os parâmetros k e c ?

Para respondermos a esta pergunta precisamos de fazer outra:

Como é que se obtém o modelo de Beverten-Holt?

Modelos ecológicos unidimensionais



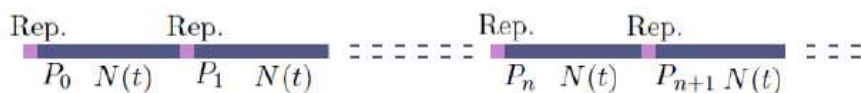
- P_n - população no início ano n , imediatamente após a reprodução
- Se a população no início do período for P_n então

$$N(t) = \frac{e^{-\mu_0(t-n)} P_n}{1 + \frac{m}{\mu_0}(1 - e^{-\mu_0(t-n)})P_n}, \quad t \in [n, n+1[$$

- Entre períodos reprodutivos - população depende apenas de constantes μ_0, m associadas à mortalidade

$$N(n) = P_n \quad \text{e} \quad N'(t) = -(\mu_0 + mN(t))N(t) < 0$$

Modelos ecológicos unidimensionais



- p a probabilidade de sobreviver à época reprodutiva per capita
- b o número médio de descendentes viáveis per capita

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= pN(n+1) + bN(n+1) = (p+b)N(n+1) \\ &= \frac{(p+b)e^{-\mu_0} P_n}{1 + m(\mu_0)^{-1}(1 - e^{-\mu_0})P_n} \end{aligned}$$

Modelos ecológicos unidimensionais



- p a probabilidade de sobreviver à época reprodutiva per capita
- b o número médio de descendentes viáveis per capita

$$P_{n+1} = pN(n+1) + bN(n+1) = (p+b)N(n+1)$$

$$= \frac{(p+b)e^{-\mu_0} P_n}{1 + m(\mu_0)^{-1}(1 - e^{-\mu_0})P_n} = \frac{kP_n}{1 + cP_n}$$

onde

$$k = (p+b)e^{-\mu_0} \quad \text{e} \quad c = \frac{m}{\mu_0}(1 - e^{-\mu_0})$$

k aumenta com o aumento dos nascimentos e da longevidade
 c aumenta com o aumento da mortalidade

(AJC)

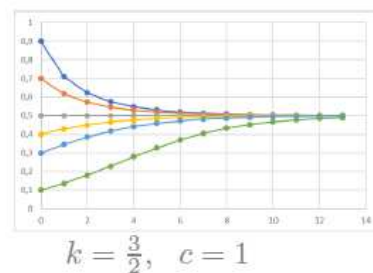
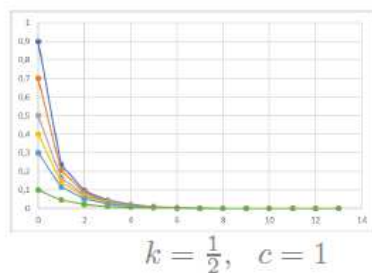
Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

11 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais

$$P_{n+1} = \frac{kP_n}{1 + cP_n}$$



Soluções constantes $P_{n+1} = P_n$

$$P_n = \frac{kP_n}{1 + cP_n} \Leftrightarrow P_n(1 + cP_n) = kP_n \Leftrightarrow P_n(1 - k + cP_n) = 0$$

$$P_n = 0 \quad \text{ou} \quad P_n = \frac{k-1}{c}$$

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

12 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais

Modelo de Beverton-Holt

- se $k \leq 1$ a população aproxima-se da extinção com o passar do tempo
- se $k > 1$ existe uma população de equilíbrio $P_n = \frac{k-1}{c}$ da qual a população se aproxima



Modelos ecológicos unidimensionais

Modelos de captura



Modelos ecológicos unidimensionais

Como incluir o efeito da captura nos modelos de crescimento populacional?



Ideia:

- usar duas funções: uma para a captura e outra para a reprodução
- aplicar cada uma delas alternadamente

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

15 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais

Função de reprodução

$$P_{n+1} = \frac{4P_n}{1+(P_n)^2} = f(P_n)$$

Função de captura

$$h(P_n) = P_n - \gamma P_n$$

Reprodução após captura

$$P_{n+1} = (f \circ h)(P_n) = \frac{4(1-\gamma)P_n}{1+(1-\gamma)^2 P_n^2}$$

Captura após reprodução

$$P_{n+1} = (h \circ f)(P_n) = \frac{4(1-\gamma)P_n}{1+P_n^2}$$

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

16 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais

Reprodução após captura $P_{n+1} = (f \circ h)(P_n)$

População de equilíbrio: $x_1^*(\gamma) = \sqrt{\frac{3-4\gamma}{(1-\gamma)^2}}$

Captura após reprodução $P_{n+1} = (h \circ f)(P_n)$

População de equilíbrio: $x_2^*(\gamma) = \sqrt{3-4\gamma}$

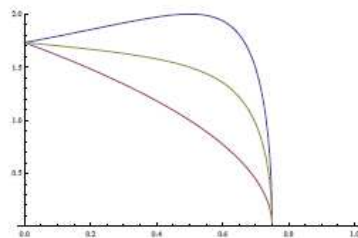
(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

17 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais



Gráficos de $x_1^*(\gamma)$ e $x_2^*(\gamma)$ e $(x_1^*(\gamma) + x_2^*(\gamma))/2$

- Um efeito matemático descrito na literatura e aparentemente paradoxal é o seguinte: em algumas situações, ao aumentar a captura, aumenta também o tamanho da população. → **Efeito de hidra**.
- Num artigo de Eduardo Liz e Frank Hilker de 2014 foi proposta uma possível explicação para esta situação, aparentemente paradoxal, usando o modelo de Ricker.
- Possível explicação: para valores moderados de captura, um aumento da captura conduz a uma maior oscilação anual da população.

(AJC)

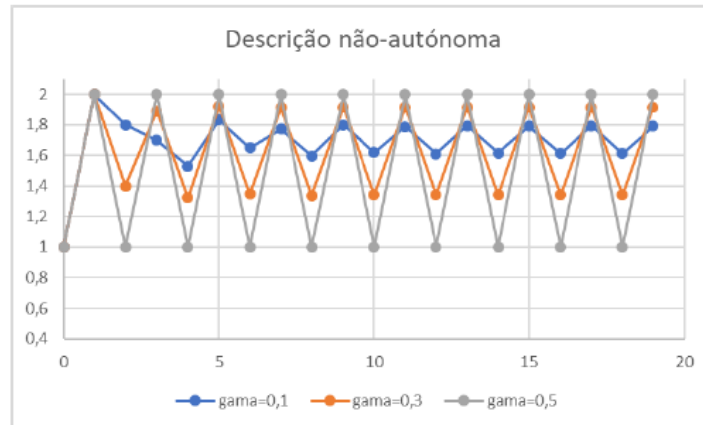
Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

18 / 40

Modelos ecológicos unidimensionais

Separando os efeitos da reprodução e da captura

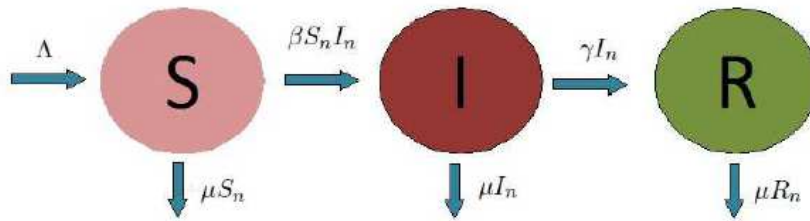


Modelos Epidemiológicos

O modelo SIR



Modelos Epidemiológicos



$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

Assumimos: $\mu + \gamma < 1$

Λ nascimentos

μ mortalidade

β contacto entre I e S

γ recuperação

(S_0, I_0, R_0) (S_1, I_1, R_1) (S_2, I_2, R_2) (S_3, I_3, R_3) ...

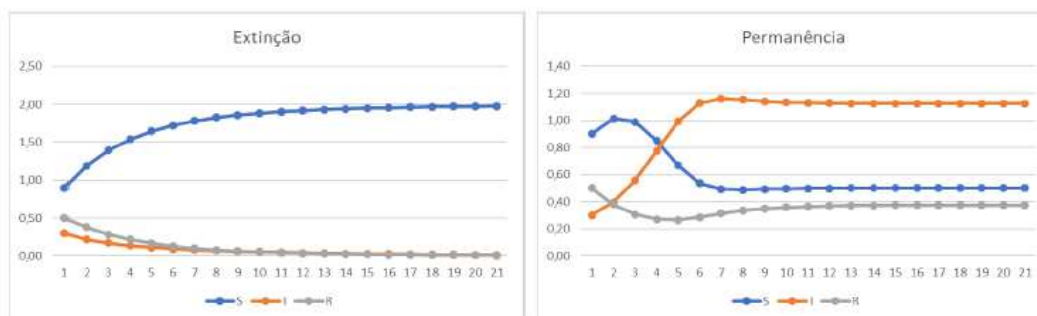
(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

21 / 40

Modelos Epidemiológicos



$\lambda = 0,6, \mu = 0,3,$
 $\gamma = 0,1, \beta = 0,15$

$\lambda = 0,6, \mu = 0,3,$
 $\gamma = 0,1, \beta = 0,8$

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

22 / 40

Modelos Epidemiológicos

População Total

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

Somando as três equações anteriores

$$S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1} = S_n + I_n + R_n + \Lambda - \mu S_n - \mu I_n - \mu R_n$$

Modelos Epidemiológicos

População Total

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

Somando as três equações anteriores

$$S_{n+1} + I_{n+1} + R_{n+1} = S_n + I_n + R_n + \Lambda - \mu S_n - \mu I_n - \mu R_n$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$P_{n+1}$$

$$=$$

$$P_n$$

$$+ \Lambda$$

$$- \mu P_n$$

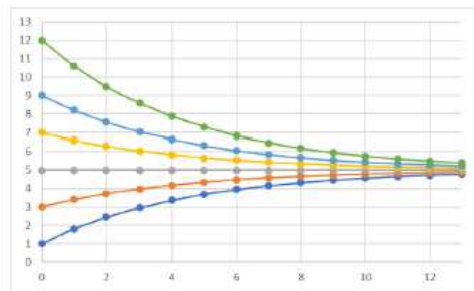
$$\boxed{P_{n+1} = P_n + \Lambda - \mu P_n}$$

Modelos Epidemiológicos

$$P_{n+1} = P_n + \Lambda - \mu P_n$$

Soluções constantes - fazemos $P_{n+1} = P_n$

$$P_n = P_n + \Lambda - \mu P_n \Leftrightarrow 0 = \Lambda - \mu P_n \Leftrightarrow P_n = \Lambda/\mu$$



$$\mu = \frac{1}{5} \quad \Lambda = 1 \quad \frac{\Lambda}{\mu} = 5$$

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

25 / 40

Modelos Epidemiológicos



$$P_{n+1} = P_n + \Lambda - \mu P_n$$

A equação anterior tem solução para cada condição inicial P_0 :

$$P_n = (1 - \mu)^n (P_0 - \Lambda/\mu) + \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$\lim P_n = \lim \left[(1 - \mu)^n (P_0 - \Lambda/\mu) + \frac{\Lambda}{\mu} \right] = \Lambda/\mu$$

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

26 / 40

Modelos Epidemiológicos

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

Soluções constantes - fazer $S_{n+1} = S_n$, $I_{n+1} = I_n$, $R_{n+1} = R_n$

$$\begin{cases} S_n = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_n = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_n = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n = 0 \\ I_n(\beta S_n - \mu - \gamma) = 0 \\ \gamma I_n - \mu R_n = 0 \end{cases}$$

$$I_n = 0 \quad \text{ou} \quad S_n = (\mu + \gamma)/\beta$$

(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

27 / 40

Modelos Epidemiológicos

Soluções Constantes:

$$S_n = \Lambda/\mu, \quad I_n = 0, \quad R_n = 0 \quad e_{DF}$$

$$S_n = \frac{\mu + \gamma}{\beta}, \quad I_n = \frac{\Lambda}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta}, \quad R_n = \frac{\gamma \Lambda}{\mu(\mu + \gamma)} - \frac{\gamma}{\beta} \quad e_E$$

$$I_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Lambda}{\mu + \gamma} - \frac{\mu}{\beta} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Lambda \beta}{\mu(\mu + \gamma)} \geq 1$$

$$\boxed{\mathcal{R}_0 = \frac{\Lambda \beta}{\mu(\mu + \gamma)}}$$

Modelo SIR

$\mathcal{R}_0 \leq 1 \rightarrow$ uma única solução de equilíbrio, e_{DF}

$\mathcal{R}_0 > 1 \rightarrow$ duas soluções de equilíbrio, e_{DF} e e_E

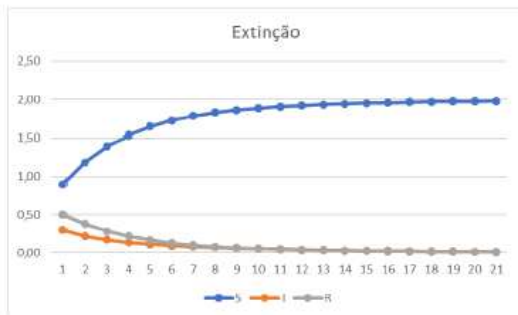
(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

28 / 40

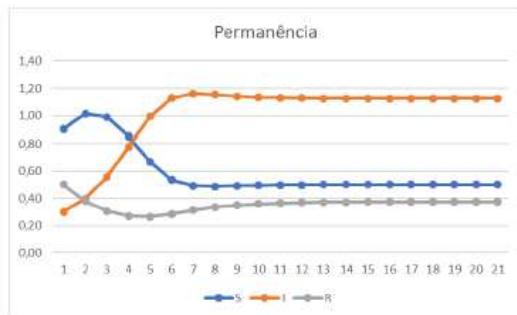
Modelos Epidemiológicos



$$\Lambda = 0,6, \mu = 0,3,$$

$$\gamma = 0,1, \beta = 0,15$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{0,6 \times 0,15}{0,3(0,3+0,1)} = 0,75 < 1$$

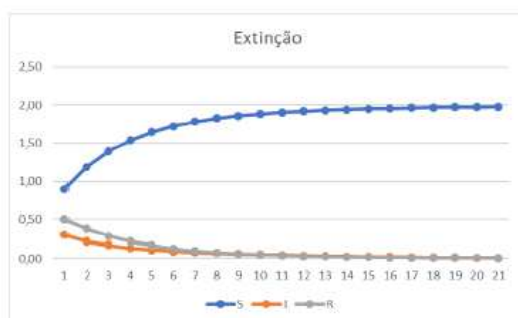


$$\Lambda = 0,6, \mu = 0,3,$$

$$\gamma = 0,1, \beta = 0,8$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{0,6 \times 0,8}{0,3(0,3+0,1)} = 4 > 1$$

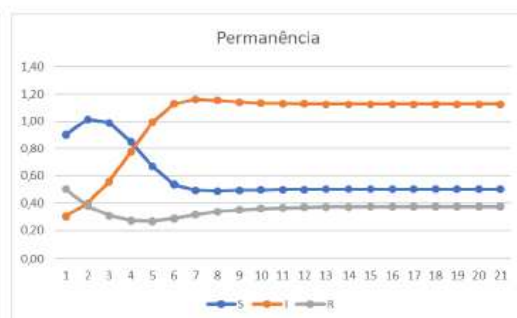
Modelos Epidemiológicos



$$\Lambda = 0,6, \mu = 0,3,$$

$$\gamma = 0,1, \beta = \mathbf{0,15}$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{0,6 \times \mathbf{0,15}}{0,3(0,3+0,1)} = 0,75 < 1$$



$$\Lambda = 0,6, \mu = 0,3,$$

$$\gamma = 0,1, \beta = \mathbf{0,8}$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{0,6 \times \mathbf{0,8}}{0,3(0,3+0,1)} = 4 > 1$$

Outros modelos



(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

31 / 40

Outros modelos



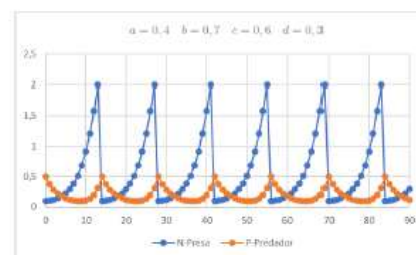
Modelo de Lotka Volterra

$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n + aN_n - bP_nN_n \\ P_{n+1} = P_n + cP_nN_n - dP_n \end{cases}$$

N_n - presas

P_n - predadores

- aN_n — crescimento das presas na ausência de predadores
- bP_nN_n — decrescimento das presas devido à predação
- cP_nN_n — crescimento da população de predadores
- dP_n — decrescimento dos predadores em consequência da mortalidade



(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

32 / 40

Outros modelos

Modelo de Goodwin

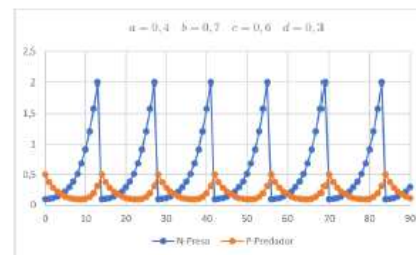


$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n + aN_n - bP_nN_n \\ P_{n+1} = P_n + cP_nN_n - dP_n \end{cases}$$

N_n - emprego

P_n - salários

- a - relacionado com intensidade do capital, produtividade do trabalho e oferta de emprego
- b - relacionado com intensidade do capital
- c - relacionado com correlação entre emprego e salários reais e produtividade do trabalho
- d - relacionado com correlação entre emprego e salários reais



Outros modelos

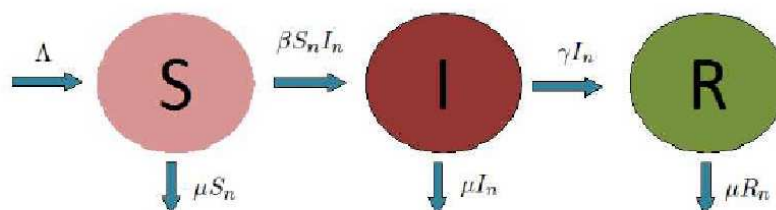
Modelo SIR



$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

S_n - suscetíveis I_n - infectados

R_n - recuperados



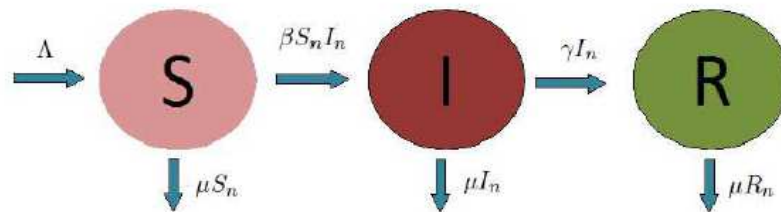
Outros modelos



Modelo SIR

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

S_n - suscetíveis I_n - infectados
 R_n - recuperados



(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

35 / 40

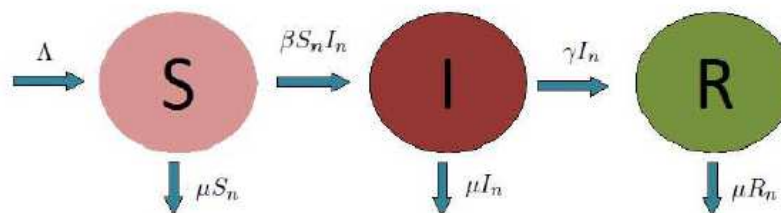
Outros modelos



Modelo SIR

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda - \mu S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

S_n - Potenciais clientes
 I_n - clientes R_n - ex-clientes



(AJC)

Modelos Discretos da Biomatemática

23-03-2018

36 / 40

Outros modelos



Modelo eco-epidemiológico

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda S_n - \beta S_n I_n - \mu S_n - \eta_2 P_n S_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - c I_n - \eta_1 P_n I_n \\ P_{n+1} = P_n + r P_n - b P_n^2 + k \eta_1 P_n I_n + k \eta_2 P_n S_n \end{cases}$$

S_n - Presa susceptível

I_n - Presa infectada P_n - Predador

Outros modelos



Modelo eco-epidemiológico

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda S_n - \beta S_n I_n - \mu S_n - \eta_2 P_n S_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - c I_n - \eta_1 P_n I_n \\ P_{n+1} = P_n + r P_n - b P_n^2 + k \eta_1 P_n I_n + k \eta_2 P_n S_n \end{cases}$$

S_n - Presa susceptível

I_n - Presa infectada P_n - Predador

$$\boxed{I_0 = 0}$$

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda S_n - \mu S_n - \eta_2 P_n S_n \\ P_{n+1} = P_n + r P_n - b P_n^2 + \eta_2 P_n S_n \end{cases}$$

Outros modelos

Modelo eco-epidemiológico



$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda S_n - \beta S_n I_n - \mu S_n - \eta_2 P_n S_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - c I_n - \eta_1 P_n I_n \\ P_{n+1} = P_n + r P_n - b P_n^2 + k \eta_1 P_n I_n + k \eta_2 P_n S_n \end{cases}$$

S_n - Presa susceptível

I_n - Presa infectada P_n - Predador

$$\boxed{I_0 = 0}$$

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda S_n - \mu S_n - \eta_2 P_n S_n \\ P_{n+1} = P_n + r P_n - b P_n^2 + \eta_2 P_n S_n \end{cases}$$

$$\boxed{P_0 = 0}$$

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \Lambda S_n - \beta S_n I_n - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta S_n I_n - c I_n \end{cases}$$

Obrigado pela vossa atenção!

Todas as imagens utilizadas nesta apresentação foram obtidas no site <https://pixabay.com/>

