(Não) São Números Complexos

Beites[1], P. D.

19 de Dezembro de 2017

Resumo

No âmbito dos números complexos, reflete-se sobre duas modificações que se destacam na passagem do anterior para o atual Programa de Matemática A do Ensino Secundário. À luz do novo currículo e da investigação em Didática da Matemática, apresentam-se algumas propostas de tarefas com números complexos para a sala de aula.

Na passagem do anterior Programa de Matemática A do Ensino Secundário em [5] para o atual em [3], uma das continuidades é a presença dos Números Complexos. Anteriormente com a Trigonometria do 12.º ano chamado de tema, atualmente designado por domínio de conteúdo no mesmo ano de escolaridade, foi, aparentemente, o que menos alterações sofreu. Contudo, há duas modificações que se destacam.

A introdução dos Números Complexos com abordagem histórica manteve-se, mas passou a ser mais formal com o corpo dos números complexos. Segundo os autores, a construção algébrica dos números complexos visa "evitar algumas das reticências evidenciadas geralmente pelos alunos quanto à "verdadeira existência" dos números imaginários" [3, p. 22]. Em particular, trata-se de encontrar um número cujo quadrado é igual a -1.

A aplicação das fórmulas de De Moivre à primitivação de funções, com o estabelecimento de fórmulas trigonométricas e a linearização de polinómios trigonométricos, passou a constar como intenção no texto que precede os conteúdos mas não surge explicitamente nos descritores. A mesma pressupõe que o domínio de conteúdo Primitivas e Cálculo Integral, excecionalmente facultativo em 2017/2018 e 2018/2019 como consta em [9], seja considerado.

1 Estruturas Algébricas com Complexos

O problema de saber os valores de n para os quais se têm identidades

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2, \tag{1}$$

$$\text{onde} \quad z_i = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ijk} x_j y_k \quad \text{com} \quad a_{ijk} \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

foi proposto e resolvido ($n = 1, 2, 4, 8$) pelo matemático Adolf Hurwitz.

Dois pontos de vista equivalentes podem ser tomados: o formal e o funcional, [8]. No formal, os x's e y's são indeterminadas e (1) é uma relação no anel[1] dos polinómios nessas indeterminadas sobre $\mathbb{C}$. No funcional consideram-se: $\mathbb{C}^n$, o espaço vetorial complexo, de dimensão n, dos n-uplos de números complexos

$$x = (x_1, \ldots, x_n);$$

a forma quadrática, de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$, dada por

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

a aplicação bilinear, de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$, definida por

$$(x, y) \mapsto z \text{ onde } z_i \text{ é dado por (2)}$$

em termos dos complexos fixos a_{ijk}. Denotando z por xy obtém-se uma álgebra não associativa. Note-se ainda que, denotando $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ por $n(x)$, (1) da relação funcional (1)-(2) assume a forma $n(x)n(y) = n(xy)$ relacionada com a definição subsequente.

Sejam F um corpo com $\mathrm{car}(F) \neq 2$ e V uma álgebra sobre F, com multiplicação denotada por justaposição. A álgebra V é uma álgebra de composição se está munida de uma forma quadrática não degenerada (a norma) $n : V \to F$ que é multiplicativa, isto é, para quaisquer $x, y \in V$,

$$n(xy) = n(x)n(y). \tag{3}$$

Dizer que n é não degenerada significa que a forma bilinear simétrica associada

$$n(x, y) = \frac{1}{2}(n(x + y) - n(x) - n(y))$$

[1] Para além da referência [8], cuja exposição está a ser seguida, os conceitos de Álgebra Linear e de Álgebra Abstrata envolvidos podem ser consultados em [4] e [11].

é não degenerada. Se V é uma álgebra de composição com identidade, então V é chamada álgebra de Hurwitz. Neste sentido, o citado problema de Hurwitz foi assim generalizado: quais são as álgebras de Hurwitz?

Uma resolução do matemático Nathan Jacobson, conhecida como Teorema de Hurwitz generalizado, encontra-se em [7]. Nesta referência prova-se que, sobre um corpo de característica diferente de dois, qualquer álgebra de Hurwitz é isomorfa a uma das seguintes álgebras: o corpo base, de dimensão 1; uma extensão quadrática separável do corpo base, de dimensão 2; uma álgebra de quaterniões generalizada, de dimensão 4; uma álgebra de octoniões generalizada, de dimensão 8. Em dimensão 2 trata-se de uma generalização da clássica álgebra real $\mathbb{C}$ dos números complexos cuja multiplicação parece pouco natural, mas a razão reside nas estruturas algébricas que se podem conferir a $\mathbb{R}^2$.

A adição usual e a multiplicação natural em $\mathbb{R}^2$ são, para quaisquer (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, respetivamente dadas por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \ \text{ e } \ (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2).$$

Apesar da simplicidade, $\times$ perde interesse, pois, por exemplo, $(0, 1) \times (1, 0) = (0, 0)$. Esta constatação invalida propriedades desejáveis, como a lei do anulamento do produto, que podem ser recuperadas com a multiplicação menos natural mas adequada: para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Como $+$ e $.$ são operações associativas e comutativas de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são respetivamente os elementos neutros de $+$ e $.$, cada elemento de $\mathbb{R}^2$ tem oposto aditivo (simétrico), cada elemento de $\mathbb{R}^2$ diferente de $(0, 0)$ tem oposto multiplicativo (inverso) e $.$ é distributiva em relação a $+$, então $(\mathbb{R}^2, +, .)$ é um corpo – o dos números complexos, $\mathbb{C}$. Para quaisquer $a, c \in \mathbb{R}$,

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) \ \text{ e } \ (a, 0).(c, 0) = (ac, 0),$$

pelo que pode identificar-se $\mathbb{R}$ com um subconjunto de $\mathbb{C}$, associando a cada $x \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(x, 0) \in \mathbb{C}$. Assim, o complexo $(x, 0)$ pode ser representado por x. Denotando o complexo $(0, 1)$ por i, tem-se $i^2 = -1$, pois

$$(0, 1)^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0).$$

Como um número complexo z é um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1),$$

omitindo $.$, z pode ser representado por $a + bi$.

Esta construção algébrica dos números complexos, do matemático William Hamilton, constitui a forma construtiva de os definir no atual Programa de Matemática do Ensino Secundário em [3]. Os complexos surgiam de forma descritiva no anterior, em [5], pois não se pretendia construir os números complexos nem estabelecer, por demonstração, as suas propriedades, mas antes postulá-los numa descrição por axiomas. Em particular, incluem-se nestes: a existência de um número i tal que $i^2 = -1$; para cada elemento $z \in \mathbb{C}$, a sua forma $x + yi$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Neste sentido, os manuais com as orientações em [5] apresentam a definição de número complexo através destes axiomas, eventualmente com a condição relativa à unidade imaginária substituída por $i = \sqrt{-1}$. Esta última notação levanta questões de ambiguidade e polissemia, como sucede na discussão sobre os reais em [6], por $\sqrt{-1}$ denotar a raiz principal i de -1 e, em simultâneo, as raízes quadradas (i e $-i$) de -1.

2 Conceitos Imagem nos Complexos

Na aprendizagem da Matemática, não sendo os números complexos uma exceção, continuam a existir dificuldades, muitas fruto de conceções erróneas. Uma possível justificação prende-se com duas designações em [12]: conceito definição e conceito imagem. Para uma certa noção matemática, o primeiro termo refere-se a uma forma com palavras que o especifica, enquanto que o segundo termo descreve a estrutura cognitiva total (imagens mentais, propriedades relacionadas, processos) que lhe está associada. Quando se considera uma definição para uma noção matemática, embora as palavras possam ser substituídas por outras com o mesmo significado, o conceito definição é fixo. O mesmo não sucede com os conceitos imagem de um indivíduo para outro, pois podem ser diferentes e, como se menciona em [12], sofrem modificações por serem construídos ao longo dos anos através de diversas experiências.

Na citada referência são reportadas várias investigações em Didática da Matemática, no âmbito do tópico limites e continuidade, que indicam conceitos imagem individuais que diferem da teoria formal de onde vem um certo conceito definição e que contêm fatores causadores de conflito cognitivo. A discussão é precedida por uma interessante menção em que se recorda que um número complexo $x + yi$ pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais x e y. Em particular tem-se $x + 0i$ ou $(x, 0)$, estes podendo ainda ser identificados com o número real x. Cada uma das expressões é utilizada quando conveniente, mas as mesmas constituem um potencial fator de conflito cognitivo quando evocadas em simultâneo, pois, em termos de conjuntos, distingue-se o elemento x do par ordenado $(x, 0)$. Neste sentido, num estudo referido pelos autores de [12], $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} + 0i$ foram vistos, respetivamente, como real e complexo por muitos dos estudantes.

Uma variedade apreciável de conceitos imagem associados ao conceito definição de número complexo foi apresentada num estudo em [10]. Concretamente, emergiram quatro categorias de conceito imagem: um artifício matemático; números 2-dimensionais; uma extensão simbólica da Matemática; um mistério incompreensível. Uma tarefa integrante dos instrumentos de recolha de dados, designada teste de identificação, consistia em decidir se cada um dos números numa lista era ou não complexo. As conclusões indicam uma tendência dos estudantes: relacionam os complexos com números 2-dimensionais, com uma parte real e uma parte imaginária, ou que, pelo menos, têm a unidade imaginária i visível. Assim, a grande maioria dos participantes no estudo considerou que, por exemplo, $\cos\pi + i\sin\pi$ e i são números complexos, mas que $-2,5$ e $\cos\pi+\sin\pi$ não são números complexos.

3 Propostas de Tarefas com Complexos

A primeira proposta de tarefa resulta da adaptação do teste de identificação em [10] para a Matemática - 12.º Ano, unidade curricular do Curso Ano Zero da Universidade da Beira Interior. Com o atual Programa de Matemática A do Ensino Secundário, que não estava a ser implementado no 12.º ano do ano letivo 2016/2017, $\mathrm{cis}(\pi)$ poderia ser substituído por $\mathrm{e}^{i\pi}$.

O formato da tarefa torna-a particularmente útil numa abordagem com Aprendizagem pelos Pares, método de ensino-aprendizagem caracterizado pelos típicos eventos de votação. Estes são despoletados por questões conceptuais e implicam a indispensável discussão dos alunos com os seus pares. Mais detalhes podem ser consultados em [2] e referências aí citadas.

Quais das expressões

$$i; \quad -2,5; \quad \mathrm{cis}(\pi); \quad \cos\pi + \sin\pi$$

representam números complexos?

(A) só i e $\mathrm{cis}(\pi)$

(B) só $-2,5$ e $\cos\pi + \sin\pi$

(C) todas

(D) nenhuma

Proposta de tarefa com conceitos imagem nos números complexos.

A segunda e a terceira propostas de tarefas têm a linearização de polinómios trigonométricos como fio condutor. Na segunda, preparatória para a terceira, pretende-se que os alunos experienciem atividades habituais para um matemático: enunciação de conjeturas através de um raciocínio indutivo cujo ponto de partida são casos particulares; teste de conjeturas mediante exemplos e contraexemplos; decisão sobre a validade de conjeturas. Na terceira, através ainda das fórmulas de De Moivre, pretende-se que os alunos linearizem um polinómio trigonométrico para o primitivarem.

1. Para alguns valores de θ à sua escolha, determine $\cos\theta$, $\mathrm{e}^{i\theta}$ e $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
2. Enuncie uma conjetura que relacione $\cos\theta$, $\mathrm{e}^{i\theta}$ e $\mathrm{e}^{-i\theta}$.
3. Decida sobre a validade da sua conjetura. Caso seja falsa, construa um contraexemplo. Caso seja verdadeira, apresente uma demonstração.

Proposta de tarefa com decisão sobre a validade de conjeturas.

Utilize a forma como exprimiu o cosseno em função da exponencial complexa para:

1. mostrar que $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{8}$;
2. determinar $\int \cos^4 x \, dx$.

Proposta de tarefa com primitivação de polinómio trigonométrico.

Referências

[1] Beites, P. D. (2015). *Números complexos e seus parentes algébricos*. Notas da formação CCFC/ACC-79778/14, Universidade da Beira Interior.

[2] Beites, P. D., & Romano, A. (2014). Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!. *Educação e Matemática*, (129), 13-16.

[3] Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2014). *Programa e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

[4] Cabral, I., Perdigão, C., & Saiago, C. (2009). *Álgebra Linear*. Lisboa: Escolar Editora.

[5] Carvalho e Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., da Fonseca, C., & Lopes, I. (2001/2002). *Programa de Matemática A - Ensino Secundário*. Lisboa: ME, DES.

[6] Gómez, B. (2014). Ambiguëdad y polisemia del signo radical: un problema matemático y didáctico. *La Gaceta de la RSME*, 17, 139-153.

[7] Jacobson, N. (1958). Composition algebras and their automorphisms. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 7, 55-80.

[8] Jacobson, N. (1985). *Basic Algebra I*. New York: Dover.

[9] Ministério da Educação (2016). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A*. Lisboa: ME, D-GE.

[10] Nordlander, M. C., & Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43, 627-641.

[11] Sobral, M. (1996). *Álgebra*. Lisboa: Universidade Aberta.

[12] Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Agradecimentos

P. D. Beites agradece o apoio do CMA–UBI, projeto UID/MAT/00212/2013.

Sobre a autora

Patrícia Damas Beites é Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Os seus principais interesses de investigação prendem-se com tópicos de Álgebra, em particular Não Associativa, e de Didática da Matemática.

[1]Departamento de Matemática e Centro de Matemática e Aplicações (CMA–UBI) da Universidade da Beira Interior