



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Faculdade de Ciências

**Alquilbenzeno:
produção e utilização como cintilador líquido na
pesquisa do duplo decaimento β sem emissão de
neutrinos**

Jesuíno Simões

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Química Industrial
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Paulo Parada

Covilhã, Outubro de 2013

Dedicatória

Ao João

ao Tiago

à Gracinda

Agradecimentos

Ao Prof. Doutor Paulo Parada, pela disponibilidade e orientação, e acima de tudo, pela sugestão do tema.

À Prof. Doutora Isabel Ismael, pelos bons conselhos.

À Prof. Doutora Lurdes Círiaco, pela colaboração.

Pelo disponibilização online do template para o \LaTeX , agradeço ao Norberto Barroca, ao Rui Paulo e em especial ao João Ferro, de quem tive o privilégio de ser professor durante três anos. Que esta dissertação seja uma homenagem ao João.

Resumo

O Modelo Padrão de Física de Partículas, apresentado no primeiro capítulo, é uma teoria que fornece a explicação de como as partículas elementares interagem recorrendo a três forças fundamentais e aos seus mediadores. No Modelo Padrão existem quatro tipos de partículas: duas famílias de partículas com spin- $\frac{1}{2}$, os leptões e os quarks, uma família de partículas com spin-1, os bósons de gauge, e pelo menos uma partícula de spin-0, o bóson de Higgs. Trata-se de uma teoria de campo de gauge baseada no grupo de simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

No quadro do Modelo Padrão, os neutrinos não têm massa, no entanto, é um facto experimental bem estabelecido que têm, de facto, massa. Assim, e atendendo ao desconhecimento do carácter dos neutrinos, apresentam-se os termos de massa de Dirac e de Majorana, bem como um possível mecanismo para revelar a sua massa, o mecanismo *seesaw*. O fenómeno da mistura de neutrinos é discutido e efectua-se a parametrização da matriz unitária de mistura. Apresenta-se uma caracterização, incluindo os resultados experimentais mais recentes, de três métodos distintos de pesquisa em física de neutrinos: medição directa da massa, oscilações e pesquisa do duplo decaimento β sem emissão de neutrinos. Este último método, enquadrado na experiência SNO+, merecerá destaque devido à utilização do alquilbenzeno como cintilador líquido.

Por fim apresentam-se os principais aspectos relacionados com a catálise heterogénea da reacção de alquilação Friedel-Crafts na produção de alquilbenzeno.

Palavras-chave

Modelo Padrão; neutrinos; massa de neutrinos; mistura de neutrinos; alquilbenzeno.

Abstract

The Standard Model of Particle Physics, presented in Chapter 1, is the theory that describes how elementary particles interact via three fundamental forces and their mediators. In the Standard Model there are four types of particles: two families of spin- $\frac{1}{2}$ particles, the leptons and the quarks, one family of spin-1 particles, the gauge bosons, and at least one spin-0 particle, the Higgs boson. It is a gauge field theory based on the $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ symmetry group.

Within the framework of the Standard Model the neutrinos are massless, however it is now well established experimentally that they do, in fact, have mass. In the light of the undetermined character of the neutrino particles, the Dirac and the Majorana mass terms are presented, as well as a possible mechanism for neutrino mass generation - the seesaw. The phenomenology of neutrino mixing is discussed and the unitary mixing matrix parametrization is presented. The three main methods of researching neutrinos - direct mass measurement, neutrino oscillations and the search for neutrinoless double β decay - are discussed, and the most recent experimental results presented. Special attention is given to neutrinoless double β decay and the SNO+ experimental search, in view of the use of linear alkylbenzene as a liquid scintillator.

Finally, the main aspects related to heterogeneous catalysis of the Friedel-Crafts alkylation reaction in the production of linear alkylbenzene are presented.

Keywords

Standard Model; neutrinos; neutrino masses; neutrino mixing; linear alkylbenzene.

Índice

1	Modelo Padrão	1
1.1	Introdução	1
1.1.1	Arquitectura do Modelo Padrão	1
1.1.2	Notação e unidades	2
1.1.3	Mecânica Quântica não-relativista	3
1.1.4	Mecânica Quântica relativista	5
1.1.5	Equações de Maxwell	7
1.2	Simetrias de gauge	9
1.2.1	Grupos	9
1.2.2	U(1), SU(2) e SU(3)	10
1.2.3	Invariância de gauge local U(1) e QED	11
1.2.4	Invariância de gauge SU(3) e QCD	14
1.2.5	Quebra espontânea de simetria	15
1.2.6	Quebra espontânea de uma simetria de gauge global	16
1.2.7	Mecanismo de Higgs	18
1.2.8	Quebra espontânea da simetria de gauge SU(2) local	19
1.2.9	O mecanismo de Higgs no modelo Glashow-Salam-Weinberg	22
1.2.10	Transformações de Lorentz	34
2	Física de Neutrinos	39
2.1	Propriedades dos neutrinos	39
2.1.1	Helicidade e quiralidade	40
2.1.2	Conjugação de carga	41
2.1.3	Transformação de paridade	41
2.1.4	Número leptónico	42
2.2	Massa de neutrinos	44
2.2.1	Termos de massa dos neutrinos	45
2.2.2	O mecanismo seesaw	53
2.3	Matriz de mistura de neutrinos	55
2.3.1	Parametrização da matriz de mistura 3×3	55
2.4	Detectors de neutrinos	58
2.4.1	Fontes de neutrinos	58
2.4.2	Reacções importantes na detecção de neutrinos	60
2.4.3	Detecção de neutrinos	60
2.5	Determinação directa da massa de neutrinos	64
2.5.1	Decaimento β	64
2.5.2	Determinação de $m_{\bar{\nu}_e}$	66
2.5.3	Massa de ν_μ e ν_τ	68
2.6	Duplo decaimento β sem emissão de neutrinos	70
2.6.1	Aspectos experimentais	70
2.6.2	Massa efectiva de Majorana	73
2.6.3	Resultados experimentais	75
2.6.4	Alquilbenzeno: utilização como cintilador líquido em SNO+	76

2.7	Oscilações de neutrinos	80
2.7.1	Formalismo geral	80
2.7.2	Oscilações com dois neutrinos	82
2.7.3	O caso dos três sabores	83
2.7.4	Considerações experimentais	84
2.7.5	Massa efectiva de Majorana II	88
2.8	Conclusões e perspectivas	90
3	Alquilbenzeno: produção	93
3.1	Introdução	93
3.2	Química Verde e a reacção Friedel-Crafts	93
3.3	Catálise heterogénea para reacções Friedel-Crafts	96
3.4	Indústria do alquilbenzeno	97
3.5	Conclusões	98
	Bibliografia	99

Lista de Figuras

1.1	O potencial V para (a) $\mu^2 > 0$ e (b) $\mu^2 < 0$	16
1.2	O potencial V para um campo escalar complexo no caso em que $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$	17
1.3	Efeito das transformações P , C e CP num neutrino esquerdo; os estados com assinados em caixas não são observados na natureza. Adaptado de [MS08]	38
2.1	Diagrama de Feynman do decaimento do μ^-	59
2.2	Diagramas de Feynman para o decaimento inverso do muão.	60
2.3	Diagrama de Feynman da dispersão elástica $\nu_e e^-$	60
2.4	Desenvolvimento de uma cascata electromagnética num calorimetro. O calorimetro consiste em camadas alternadas de chumbo (Pb) e de um cintilador (Sc) [MS08].	61
2.5	Representação do telescópio de neutrinos IceCube. [Colaboração IceCube].	62
2.6	Os dois eventos detectados pelo IceCube, em Agosto de 2011 e Janeiro de 2012 [A ⁺ 13a].	63
2.7	A vermelho a massa do neutrino do electrão, a azul a massa efectiva de Majorana em função da soma dos valores próprios da massa dos neutrinos, para (a) hierarquia normal e (b) hierarquia invertida, [DHMW13].	64
2.8	Diagrama de Feynman para o decaimento β^- , que pode ser interpretado como o decaimento do neutrão.	65
2.9	Espectro de emissão β em torno do seu ponto final E_0 para $m(\nu_e) = 0$ (vermelho) e para uma massa arbitrária $m(\nu_e) = 1$ (azul). A zona cinzenta corresponde à fracção de electrões resultantes do decaimento β com energias $E_0 - 1$ eV. Adaptado de [DHMW13].	66
2.10	Esquema do aparato experimental utilizado pela experiência Mainz [DHMW13].	67
2.11	Esquema de funcionamento do MAC-E-Filter. Em baixo variação do momento linear desde a fonte até ao detector [DHMW13].	68
2.12	Potencial de descoberta da experiência KATRIN [DHMW13].	68
2.13	Dependência da energia com Z para isóbaros; os núcleos estáveis estão representados pelos círculos a cheio. O número de neutrões é (a) ímpar, existindo apenas um isóbaros estável; (b) par, vários isóbaros estáveis são possíveis.	71
2.14	Diagramas de Feynman correspondentes aos processos (a) $2\nu\beta\beta$ e (b) $0\nu\beta\beta$	72
2.15	Espectro de energia para os dois electrões no $2\nu\beta\beta$ e para o $0\nu\beta\beta$ em função razão das suas energias pelo valor Q [MS08].	73
2.16	Valores da massa efectiva de Majorana em função da massa mínima para o espectro de massa normal (NS, com $m_{\min} = m_1$) e para o espectro de massa invertido (IS, $m_{\min} = m_3$) [BG12].	74
2.17	Valores dos elementos da matriz nuclear calculados por diferentes métodos [BG12].	75
2.18	Experiência SNO, o detector encontra-se a uma profundidade de 2 km numa cavidade em forma de barril com 34 m de altura e 22 m de largura. [Colaboração SNO].	76
2.19	Espectro de energia simulado. O sinal $0\nu\beta\beta$ corresponde a uma massa efectiva de 350 meV para 3 anos de recolha de dados com 0,1% de Nd [Sar12]	79
2.20	Representação do detector LENA. Adaptado de [W ⁺ 12]	88
3.1	Alquilação FC	93
3.2	AE em reacções FC de benzeno em função do agente de alquilação [Mac09].	94

3.3	LCA parcial e simplificado de um catalisador. Adaptado de [Mac09]	95
3.4	Três famílias de zeólitos, (a) ZSM-5, (b) mordenite e (c) beta [BMO07]. O zeólito actua como uma peneira molecular. Apenas cadeias lineares passam pelos orifícios na estrutura do zeólito.	96
3.5	Reacção de formação do LAB a partir de alcenos.	97
3.6	Etapas de produção do LAB com a tecnologia UOP/CEPSA.	98

Lista de Tabelas

2.1	Principais emissores de neutrinos na Terra, com respectivas abundâncias isotópicas naturais e o período de meia vida [FLM07].	59
2.2	Principais emissores $\beta\beta$ [Zub12], com o valor Q e as respectivas abundâncias naturais. Algumas das experiências que procuram $0\nu\beta\beta$ [WZ13].	72
2.3	Principais resultados das experiências $0\nu\beta\beta$	75
3.1	O E factor [SAH07].	94

Lista de Acrónimos

$0\nu\beta\beta$	Duplo decaimento β sem emissão de neutrinos
$2\nu\beta\beta$	Duplo decaimento β com emissão de dois neutrinos
AE	Eficiência atómica
CC	Corrente Carregada
CE	Captura electrónica
CKM	Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
CL	Intervalo de confiança
CMB	Fundo cósmico de microondas
CN	Corrente Neutra
CNO	Ciclo Carbono, Azoto e Oxigénio
CP	Transformação de carga e paridade
CPT	Transformação de carga, paridade e inversão temporal
$C\nu B$	Fundo cósmico de neutrinos
FC	Friedel-Crafts
GUT	Teorias de grande unificação
h.c.	Conjugado hermítico
HPA	Heteropoliácidos
IS	Espectro invertido
LAB	Alquilbenzeno
LCA	Avaliação do ciclo de vida
MP	Modelo Padrão
MQ	Mecânica Quântica
mwe	metros equivalentes de água
NS	Espectro normal
pep	Reacção protão-electrão-protão
pp	Reacção protão-protão
PMT	Tubo fotomultiplicador
PMNS	Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata
TL	Transformação de Lorentz
TRR	Teoria da Relatividade Restrita
TQC	Teoria Quântica de Campo
VEV	Valor expectável do vácuo

Capítulo 1

Modelo Padrão

1.1 Introdução

O objectivo da Física é reduzir a descrição dos fenómenos a um conjunto de leis e teorias que, em princípio, podem reproduzir quantitativamente e prever as observações experimentais. A um nível microscópico toda a fenomenologia da matéria e da radiação pode ser compreendida em função de três interacções fundamentais: nuclear forte, electromagnética e nuclear fraca. A uma escala macroscópica também deve ser considerada uma quarta interacção fundamental, a gravítica. Os prótons e os neutrões são constituídos por quarks, unidos devido à interacção nuclear forte, que como efeito residual é responsável pela existência dos núcleos sobrepondo-se à repulsão eléctrica entre os prótons. A ligação entre electrões e núcleos num átomo é devida às forças electromagnéticas; a luz é a vibração dos campos eléctrico e magnético. A interacção fraca está presente nos decaimentos radioactivos β , bem como em reacções nucleares que libertam as enormes quantidades de energia nas estrelas; a desintegração do neutrão e dos píons carregados, o decaimento dos léptons carregados pesados (μ e τ) e as interacções que envolvam neutrinos.

Todas estas interacções (com a excepção da gravidade) são descritas no quadro da Mecânica Quântica (MQ) e da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), ou seja, no quadro da Teoria Quântica de Campo (TQC). A cada partícula descrita como pontual, está associado um campo com propriedades de transformação sob o grupo de Lorentz (as transformações de coordenadas do espaço-tempo). É de assinalar que a descrição destas três interacções fundamentais se baseia num princípio comum, a invariância de gauge. Uma simetria de gauge é uma invariância para transformações que efectuam uma rotação nos graus de liberdade internos, com ângulos de rotação dependentes de cada ponto do espaço-tempo. O protótipo de todas as teorias de campo de gauge é a Electrodinâmica Quântica (QED), desenvolvida no segundo quartel do século passado, sendo a versão quântica da teoria de Maxwell do electromagnetismo. Estas teorias com simetria de gauge são renormalizáveis e são determinadas dado o grupo de simetria e as representações dos campos que estão a interagir. O conjunto completo das interacções forte, electromagnética e fraca é descrito por uma teoria de gauge, denominada de Modelo Padrão (MP) a seguir discutido [Han04, HM08, MS08, Alt13].

1.1.1 Arquitectura do Modelo Padrão

O MP é uma teoria de campo de gauge baseada no grupo de simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. O grupo tem $8+3+1=12$ geradores com uma álgebra não-comutativa, ou seja, o MP é não-abeliano. $SU(2) \times U(1)$ descreve a interacção electrofraca. $SU(3)$ é o grupo de cor da teoria da interacção forte, a Cromodinâmica Quântica (QCD).

Numa teoria de gauge, a cada gerador T associa-se um vector bóson (ou bóson de gauge) com os mesmos números quânticos do que T . Se a simetria de gauge não é quebrada, este bóson tem massa nula e é o mediador da correspondente interacção. A título de exemplo, na QED esse campo vectorial associado ao gerador Q (carga eléctrica) é o fóton γ . A interacção entre duas partículas carregadas na QED, por exemplo, dois electrões, é mediada pela troca de um fóton emitido por um electrão e absorvido pelo outro. Da mesma forma, existem oito campos vectoriais

associados ao grupo $SU(3)$ dos geradores de cor, denominados de gluões, e para $SU(2) \times U(1)$, além do fóton, existem mais três bósons de gauge, W^+ , W^- e Z^0 . Apenas os gluões e o fóton não têm massa, uma vez que a simetria induzida pelos outros três geradores é na realidade quebrada espontaneamente. As massas de W^\pm e Z^0 são bastante grandes para a escala das partículas elementares: $m_W \sim 80.4$ GeV e $m_Z \sim 91.2$ GeV; refira-se que a massa do próton é ~ 1 GeV.

Na teoria electrofraca a quebra de simetria é de um tipo particular, a quebra espontânea de simetria, neste caso as cargas e as correntes são determinadas pela simetria mas o estado fundamental de energia mínima, o vácuo, não é único e existe um contínuo de estados degenerados que respeitam a simetria. No MP a quebra espontânea de simetria é feita pelo mecanismo de Higgs.

Os campos de fermiões do MP, partículas com spin- $\frac{1}{2}$, são os quarks e os leptões. Cada tipo de quark é um tripleto de cor (cada sabor existe em três cores) com carga electrofraca de $+2/3$ para os quarks up, charm e top, e $-1/3$ para os quarks down, strange e bottom, fazendo com que os quarks sejam sensíveis a todas as interações do MP. Os leptões não têm cor e, como tal, não interagem fortemente; possuem carga electrofraca de -1 para o electrão, múon e tau, e 0 para os três sabores respectivos de neutrinos.

1.1.2 Notação e unidades

Para as coordenadas no espaço tridimensional utiliza-se $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ou $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Os índices latinos i, j e k assumem, para o espaço, os valores 1, 2 e 3. As coordenadas de um evento no espaço-tempo são descritas por um quadri-vector contravariante

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z). \quad (1.1)$$

Os índices gregos $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ assumem, para o espaço-tempo, os valores 0, 1, 2 e 3. Com o mesmo significado, utiliza-se com frequência (x, t) , onde x representa as três coordenadas espaciais.

Utiliza-se a convenção de soma, onde para índices repetidos se efectua a soma, no entanto, por vezes, nomeadamente no capítulo 2, os somatórios são indicados explicitamente para reforçar a ideia de que uma soma está envolvida.

O quadri-vector covariante x_μ obtém-se por troca de sinal nas componentes espaciais

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.2)$$

com

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

As derivadas contravariante e covariante são definidas, respectivamente, como:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = \partial_\mu \quad (1.4)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \partial^\mu. \quad (1.5)$$

As duas constantes fundamentais na TQC são a constante de Planck e a velocidade da luz no vácuo:

$$\begin{aligned} \hbar &\equiv \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} \text{ Js} \\ c &= 2.998 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

É conveniente utilizar um sistema de unidades em que \hbar é a unidade da acção, ou momento angular, e c é a unidade da velocidade. Para completar este sistema de unidades naturais, fixa-se a unidade de energia como sendo o eV. A MQ e a TRR desempenham um papel crucial na física de partículas, de tal forma que \hbar e c aparecem variadas vezes nas fórmulas. Com a escolha das unidades naturais, a expressão

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

escreve-se como

$$E^2 = p^2 + m^2, \quad (1.7)$$

onde é evidente a economia de escrita. Mais, desta forma, além da energia também o momento linear e a massa são expressos em eV, enquanto o comprimento e o tempo em eV⁻¹.

1.1.3 Mecânica Quântica não-relativista

No mundo quântico o comportamento dual da matéria, das partículas elementares, é estudado como se existissem entidades que nem são partículas nem sem ondas, umas vezes apresentam comportamentos semelhantes a partículas macroscópicas, por outras, o seu comportamento é o de uma onda.

A equação de Schrödinger é a equação que descreve o comportamento ondulatório da matéria e pode ser obtida, para uma partícula livre, a partir de

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1.8)$$

efectuando as substituições

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla \quad (1.9)$$

Os operadores resultantes podem ser entendidos como se estivessem a actuar numa função de onda complexa, $\psi(x, t)$. Isto é,

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(x, t) = 0 \quad (1.10)$$

onde se interpreta $\rho \equiv |\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t)\psi(x, t)$ como a densidade de probabilidade da posição ($|\psi(x, t)|^2 dx^3$ é a probabilidade de encontrar a partícula num elemento de volume dx^3). A interpretação física da função de onda é feita como amplitude de probabilidade. A equação (1.10) é a equação de Schrödinger para uma partícula livre.

Para obter a equação de onda para uma partícula num campo de potencial, utiliza-se a mesma receita, ou seja, partindo da energia da partícula,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x, t), \quad (1.11)$$

efectuam-se as substituições (1.9), obtendo

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(x, t) \right] \psi(x, t). \quad (1.12)$$

A equação de Schrödinger e as suas soluções não são suficientes para contabilizar um dos atributos básicos das partículas, o spin. Uma vez que o spin é uma propriedade intrínseca da partícula, não está associado às coordenadas espaciais, nem à coordenada temporal, é um dos graus de liberdade internos da partícula. Pelo contrário, as coordenadas (x, t) são graus de liberdade externos. A carga eléctrica é um outro exemplo de grau de liberdade interno. As soluções da equação de Schrödinger

para as orbitais electrónicas caracterizam com sucesso os seus atributos, *i.e.*, raio (número quântico principal), o momento angular orbital (número quântico de momento angular) e a orientação das orbitais (número quântico de momento magnético). No entanto, o conhecimento completo da configuração electrónica dos átomos requer que se especifique o spin. A equação de Schrödinger é assim uma equação incompleta, uma vez que falha em fornecer por completo o quadro teórico para compreender a física atómica. A informação relacionada com o spin tem de ser "colada" às funções de onda, no caso dos electrões, em matrizes coluna de dois componentes correspondentes a dois estados de spin \uparrow e \downarrow . É na mecânica quântica relativista que o spin encontra o seu lugar natural.

Para contabilizar partículas em movimento e eventuais interacções com outras partículas, *e.g.*, colisões, é necessário calcular a corrente de probabilidade, \mathbf{J} . A partir da sua conservação infere-se que a taxa de decréscimo do número de partículas num dado volume é igual ao fluxo total para fora desse volume, ou seja,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV,$$

onde se utilizou o teorema de Gauss permitindo assim escrever

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.13)$$

Para determinar o fluxo é necessária a conjugada complexa da equação de Schrödinger,

$$-i \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi^*. \quad (1.14)$$

Multiplicando a equação de Schrödinger por ψ^* e a conjugada da equação de Schrödinger por ψ e subtraindo-as, vem

$$i \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2im} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

que tem a forma da equação de continuidade (1.13), com

$$\rho = |\psi|^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = \frac{1}{2im} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Uma solução da equação (1.12) é

$$\psi = N e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)}$$

que descreve uma partícula livre de energia E e momento linear \mathbf{p} , e cuja densidade de probabilidade é $\rho = |N|^2$ definida e positiva, como convém. A sua corrente de probabilidade é $\mathbf{J} = |N|^2 \frac{\mathbf{p}}{m}$.

Só mais uma palavra em relação à equação (1.13) que, definindo o quadri-vector corrente na forma

$$j^\mu = (j^0, \mathbf{j}) = (\rho, \mathbf{j}),$$

pode ser reescrita como

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

1.1.4 Mecânica Quântica relativista

1.1.4.1 Equação de Klein-Gordon

As equações de onda para a mecânica quântica relativista são obtidas a partir da relação

$$E^2 - p^2 = m^2 \quad (1.15)$$

efectuando as substituições (1.9),

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2 \right) \phi(x) = 0 \quad (1.16)$$

ou

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0. \quad (1.17)$$

Esta é a equação de Klein-Gordon, onde $\phi(x)$ é a função de onda para partículas com spin 0, ou seja, é uma amplitude escalar que é invariante para transformações de Lorentz, *i.e.*, assume o mesmo valor para todos os referenciais de inércia.

1.1.4.2 Equação de Dirac

A equação de Dirac é a peça central da mecânica quântica relativista. Incorpora naturalmente o spin de uma partícula como uma parte do seu momento angular total e, não menos extraordinário, prevê a existência de anti-partículas. A equação de Klein-Gordon é uma equação diferencial de segunda ordem, tanto nas coordenadas espaciais como na coordenada temporal. A motivação de Dirac foi a de encontrar uma equação de primeira ordem no tempo.

O processo de passar de uma expressão de segunda ordem para uma de primeira ordem está relacionado com a factorização, nomeadamente com a factorização do primeiro termo da equação (1.15). A factorização mais simples é, obviamente, a factorização de $x^2 - y^2$:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

A factorização de $x^2 + y^2$, no entanto, já não pode ser feita em termos de números reais, sendo necessário introduzir números complexos na factorização:

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy).$$

A factorização de uma expressão com três termos, $x^2 + y^2 + z^2$, requer mais do que números reais ou complexos, requer a ajuda de matrizes. Considere-se as três matrizes de Pauli σ , dadas na representação

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

que satisfazem as relações de anticomutação

$$\{\sigma^a, \sigma^b\} = \sigma^a \sigma^b + \sigma^b \sigma^a = 2\delta^{ab} \mathbb{1}, \quad (1.19)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 2×2 . Para quaisquer dois vectores \mathbf{A} e \mathbf{B} que comutem com σ , tem-se a seguinte identidade

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Quando aplicada a um vector, reduz-se a

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A},$$

o que permite, em função de matrizes 2×2 , efectuar a factorização de expressões com três termos, tal como

$$(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}). \quad (1.20)$$

A factorização de $p^\mu p_\mu$, que é uma expressão de quatro termos, pode ser feita como

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \left((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \right) = E^2 - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}). \quad (1.21)$$

O que permite obter a equação de onda relativista para fermiões sem massa,

$$p^\mu p_\mu \phi(x) = (E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \phi(x) = 0, \quad (1.22)$$

onde a função de onda $\phi(x)$ é um spinor de duas componentes (matriz coluna de dois componentes), uma vez que as matrizes de Pauli são matrizes 2×2 .

Finalmente pode efectuar-se a factorização da expressão de cinco termos na equação de Klein-Gordon, $p^\mu p_\mu - m^2$, no entanto, a sua linearização não é possível com as três matrizes de Pauli. Dirac demonstrou que tal factorização só pode ser alcançada com a ajuda de matrizes 4×4 , que podem ser construídas a partir das matrizes de Pauli. Assim,

$$p^\mu p_\mu - m^2 = E^2 - \left((p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \right) - m^2 = (\gamma^\mu p_\mu + m)(\gamma^\nu p_\nu - m), \quad (1.23)$$

onde as quatro matrizes γ^μ devem satisfazer as relações de anticomutação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.24)$$

A representação mais usual para as matrizes de Dirac é

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

e que podem ser representadas numa forma mais compacta com a ajuda das matrizes de Pauli,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.26)$$

Efectuando a substituição de p_μ por $i\partial_\mu$ na equação (1.23), a equação de Dirac, que é apenas um dos factores do último membro, escreve-se como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (1.27)$$

A função de onda $\psi(x)$ é um spinor com quatro componentes (matriz coluna de quatro componentes), uma vez que as matrizes de Dirac são matrizes 4×4 , o que na representação usual, consiste em duas soluções com energia positiva (uma com spin \uparrow e outra com spin \downarrow) e duas soluções com energia negativa (uma com spin \uparrow e outra com spin \downarrow).

À semelhança do que foi feito para a equação de Schrödinger, pretende-se obter uma equação de continuidade. A primeira diferença encontra-se desde logo no facto de a equação de Dirac ser uma equação matricial, e, como tal, não é possível efectuar apenas a sua conjugação complexa; é necessário escrever a sua adjunta. Para tal, reescreve-se a equação de Dirac como

$$i \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) = m \psi, \quad (1.28)$$

obtendo-se a adjunta

$$-i (\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger = m \psi^\dagger. \quad (1.29)$$

É conveniente introduzir o spinor adjunto de Dirac, representado por $\bar{\psi}$,

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (1.30)$$

Multiplicando a equação (1.28) pela esquerda, por $\bar{\psi}$, vem

$$i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) = m \bar{\psi} \psi, \quad (1.31)$$

a multiplicação da equação (1.29) pela direita, por $\gamma^0 \psi$, vem

$$-i (\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \psi = m \psi^\dagger \gamma^0 \psi. \quad (1.32)$$

Atendendo que as matrizes de Dirac obedecem à propriedade $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Leftrightarrow (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$, com $(\gamma^0)^2 = 1$, a equação (1.32) fica

$$-i (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = m \bar{\psi} \psi, \quad (1.33)$$

dado que $(\partial_\mu \psi)^\dagger \gamma^0 = \partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 = \partial_\mu \bar{\psi}$. A subtracção da equação (1.31) por (1.33),

$$i [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.34)$$

onde se definiu

$$j^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.35)$$

A equação (1.34) representa uma equação de continuidade, tal como (1.13), e j^μ é o quadrivector corrente.

1.1.5 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\text{não homogéneas}) \quad (1.36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{homogéneas}) \quad (1.37)$$

onde \mathbf{E} , é o vector campo eléctrico, \mathbf{B} é o vector campo magnético, ρ , é a densidade de carga e \mathbf{J} é a densidade de corrente.

Os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} podem ser expressos através de um potencial escalar ϕ e de um potencial vectorial \mathbf{A} , como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.38)$$

Na notação quadrivectorial a densidade e o potencial podem ser escritos como:

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{J}) \quad \text{e} \quad A^\mu = (\phi, \mathbf{A}). \quad (1.39)$$

Introduzindo o tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & E_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

é possível reescrever as equações de Maxwell não homogéneas (1.36) como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (1.41)$$

Existem duas conclusões muito importantes que podem ser retiradas sobre as equações de Maxwell,

- o quadripotencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ não é único, dado que o mesmo tensor $F^{\mu\nu}$ também pode ser obtido a partir de

$$A^\mu + \partial^\mu \chi = \left(\phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \mathbf{A} - \nabla \chi \right), \quad (1.42)$$

onde χ é uma função arbitrária e a sua contribuição para o tensor $F^{\mu\nu}$ é nula, trata-se do análogo quadridimensional do rotacional de um gradiente ser zero. Esta transformação deixa os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} invariantes, ou seja, dá origem à mesma física. Esta liberdade de deslocar o quadripotencial $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ de um gradiente quadridimensional de uma função arbitrária denomina-se **transformação de gauge**, e constitui a base da teoria quântica de campo para o MP;

- as equações de Maxwell não homogéneas (1.41) na ausência de cargas e correntes, são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (1.43)$$

e usando a liberdade de efectuar uma transformação de gauge, pode-se impor a **gauge de Lorentz**, $\partial_\mu A^\mu = 0$, de modo a que as equações de Maxwell se reduzam a

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0, \quad (1.44)$$

e que constitui um resultado interessante, os fotões (*i.e.*, os campos A^μ) são campos de Klein-Gordon sem massa, uma vez que esta equação é exactamente da forma da equação (1.17) com $m = 0$.

1.2 Simetrias de gauge

Simetrias e leis de conservação são um tema recorrente na física e assumem um papel crucial na física de partículas. As simetrias são transformações de semelhança, que podem ser geométricas, ou seja, modificam as coordenadas dos pontos do espaço-tempo. Constituem exemplos de transformações geométricas, entre outras, as translações da origem do referencial, as rotações espaciais dos referenciais ou as modificações de escala. Também existem simetrias em que as coordenadas dos pontos do espaço-tempo não são alteradas. Exemplos dessas simetrias internas são a invariância do isospin da força forte e a troca do sinal das cargas no electromagnetismo (conjugação de carga). A cada uma das simetrias referidas encontra-se associada uma lei de conservação. Ou de um modo mais consistente, as leis de conservação têm a sua origem em simetrias e propriedades invariantes das interações em causa. Algumas dessas leis de conservação são leis universais, isto é, são válidas para todas as interações. As leis de conservação do momento linear e do momento angular, cuja origem remonta à homogeneidade e isotropia do espaço, respectivamente, são bons exemplos de universalidade de uma lei de conservação. Outras há, tal como a paridade, que apenas é conservada na aproximação que despreza a força fraca. A sua violação será discutida posteriormente.

1.2.1 Grupos

A teoria de grupos é o ramo da Matemática que estuda as simetrias. Apesar de não ser necessário utilizar a maquinaria formal da teoria de grupos, é, no entanto, útil introduzir alguns conceitos e terminologia necessárias à discussão que se pretende fazer. O grupo das rotações irá servir de exemplo. O conjunto das rotações forma um grupo, sendo cada rotação um elemento do grupo. Duas rotações sucessivas, R_1 seguida de R_2 , ou escritas como o produto $R_1 R_2$, são equivalentes a uma rotação, que é outro elemento do grupo, assim, o conjunto de rotações é fechado para a operação multiplicação. Existe um elemento identidade, que corresponde a efectuar nenhuma rotação, e cada rotação tem uma inversa. O produto não é necessariamente comutativo $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$, mas a lei associativa $R_3 (R_1 R_2) = (R_3 R_2) R_1$ é sempre verdadeira. O grupo das rotações é um grupo contínuo, em que cada rotação pode ser indicada por um conjunto de parâmetros $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ que variam continuamente. Podem ser usadas as componentes de um vector $\vec{\alpha}$ na direcção do eixo de rotação com norma igual ao ângulo de rotação. Uma propriedade de grande importância está relacionada com o facto de uma rotação poder ser expressa em termos de sucessivas rotações infinitésimas, ou seja, como produto de rotações infinitésimas (rotações próximas da identidade). Um resultado experimental não depende da orientação do laboratório, como tal, as rotações devem formar um grupo de simetria. Elas são um sub-conjunto das transformações de Lorentz. Por definição, a física não se altera com uma operação de simetria. Em particular, essas operações deixam as probabilidades de transição do sistema invariantes. Por exemplo, para uma rotação R , o estado do sistema transforma-se como

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U |\psi\rangle.$$

A probabilidade de um sistema ser descrito por $|\psi\rangle$ ser encontrado no estado $|\phi\rangle$ deve manter-se inalterada após a aplicação de uma rotação R ,

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2,$$

onde se introduziu a exigência de U ser unitária.

Um aspecto muito importante está relacionado com a possibilidade de se poder escrever uma matriz

unitária na forma $U = e^{iH}$, sendo H uma matriz hermítica. O seu desenvolvimento é

$$U = \mathbb{1} + iH + \frac{(iH)^2}{2!} + \dots$$

Uma rotação de um ângulo infinitesimal ϵ em torno de um dos eixos, por exemplo, z (3), pode ser escrita, em primeira ordem em ϵ , como

$$U = \mathbb{1} - i\epsilon J_3,$$

onde J_3 é o gerador das rotações em torno do eixo z . Assim,

$$\mathbb{1} = U^\dagger U = (1 + i\epsilon J_3^\dagger) (1 - i\epsilon J_3) = \mathbb{1} + i\epsilon (J_3^\dagger - J_3) + O(\epsilon^2),$$

tornando-se evidente que J_3 deve ser hermítico, *i.e.*, $J_3^\dagger = J_3$. Para todos os geradores deste grupo pode escrever-se a relação de comutação

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k,$$

onde as constantes de estrutura do grupo, ϵ_{ijk} , o símbolo de Levi-Civita em três dimensões, assumem os valores

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ for igual a } (1, 2, 3) \text{ ou } (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ for igual a } (2, 1, 3) \text{ ou } (1, 3, 2) \text{ ou } (3, 2, 1) \\ 0 & \text{se } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i \end{cases} \quad (1.45)$$

1.2.2 U(1), SU(2) e SU(3)

O conjunto das matrizes unitárias 1×1 e a operação multiplicação entre matrizes, constituem o grupo U(1). A matriz unitária 1×1 é apenas um número e a operação multiplicação matricial é a multiplicação entre números, que goza da propriedade associativa como é requerido. A condição de unitariedade $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ é

$$u^* u = u u^* = 1 \quad \Rightarrow \quad |u|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = e^{i\alpha}, \quad \text{com } \alpha \text{ real.}$$

Assim, os números u só podem ser números complexos de norma 1, conjunto que inclui $1 = e^{i0}$, que é o elemento neutro (identidade) da multiplicação entre números. Atendendo a $e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i\beta} e^{i\alpha}$, o grupo U(1) é um grupo abeliano.

O conjunto de todas as matrizes unitárias 2×2 é conhecido como o grupo U(2). O grupo SU(2) é o subgrupo de U(2) em que as matrizes, além de unitárias, têm $\det U = 1$. O grupo SU(2) do isospin constitui um exemplo. O isospin surge porque um nucleão pode ser visto como tendo um grau de liberdade interno com dois estados possíveis, o próton e o neutrão, os quais a interação forte não distingue. Nesse sentido, existe uma simetria SU(2) na qual (n, p) formam a representação fundamental do grupo. De uma forma geral, qualquer matriz U da representação do grupo SU(2) pode ser escrita na forma

$$U = e^{i\theta^j T^j} = e^{i\theta^j \sigma^j / 2},$$

onde θ^j são números reais e $T^j \equiv \frac{\sigma^j}{2}$ são os três geradores hermíticos do grupo SU(2).

O conjunto das matrizes unitárias 3×3 com $\det U = 1$ representam o grupo SU(3). Os geradores podem ser $3^2 - 1 = 8$ matrizes hermíticas linearmente independentes. A representação fundamental do grupo é um triplete, como o caso das três cores dos quarks, que formam uma representação

fundamental de um grupo de simetria SU(3).

Qualquer matriz unitária desta representação SU(3) pode ser escrita na forma

$$U = e^{i\alpha_j\lambda_j/2} \quad \text{com} \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

onde os α_j são oito números reais e λ_j são as oito matrizes de Gell-Mann:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

As matrizes

$$T^j \equiv \frac{\lambda_j}{2} \quad \text{com} \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

são os oito geradores hermíticos do grupo SU(3) que satisfazem as relações de comutação

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} \frac{T_k}{2},$$

e f_{ijk} são as constantes de estrutura do grupo SU(3).

1.2.3 Invariância de gauge local U(1) e QED

Um electrão é descrito por um campo complexo, e a Lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \tag{1.46}$$

é invariante para a transformação de fase

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \psi(x), \tag{1.47}$$

onde α é uma constante real. Esta invariância é facilmente demonstrada notando que

$$\partial_\mu \psi \longrightarrow e^{i\alpha} \partial_\mu \psi \quad \text{e} \quad \bar{\psi} \longrightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi}$$

Como já foi referido, a família das transformações de fase $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$, onde o parâmetro α pode assumir valores reais independentes das coordenadas, forma o grupo abeliano unitário U(1). A invariância da Lagrangiana para transformações de fase global U(1) é muito importante e encerra em si um resultado extraordinário, consequência do teorema de Noether, ou seja, implica a existência de uma corrente conservada. Para o demonstrar é suficiente verificar a invariância da lagrangiana sob uma transformação U(1) infinitesimal,

$$\psi \longrightarrow (1 + i\alpha) \psi.$$

A invariância requer que a lagrangiana fique inalterada, ou seja,

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta (\partial_\mu \psi) + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \delta (\partial_\mu \bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \\
 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} (i\alpha\psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} (i\alpha\partial_\mu \psi) + (-i\alpha\bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + (-i\alpha\partial_\mu \bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \\
 &= i\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \psi + i\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi \right) \\
 &\quad - i\alpha \bar{\psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - i\alpha \partial_\mu \bar{\psi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right). \tag{1.48}
 \end{aligned}$$

Os termos entre parêntesis rectos são nulos devido à equação de Lagrange, ficando

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{1.49}$$

onde

$$j^\mu = ie \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi,$$

utilizando a Lagrangiana de Dirac (1.46). O factor de proporcionalidade é escolhido para que j^μ coincida com a densidade de corrente de um electrão de carga $-e$. Decorre de (1.49) que a carga $Q = \int d^3x j^0$ deve ser uma quantidade conservada devido à invariância de fase U(1).

De um ponto de vista físico, a existência de uma simetria, implica que alguma quantidade não pode ser medida. Por exemplo, a invariância de translação significa que não se pode determinar uma posição absoluta no espaço. De forma similar a relação (1.47) implica que a fase α também não pode ser medida e, como tal, não tem significado físico podendo ser escolhida arbitrariamente. Esta invariância global não é, seguramente, a invariância mais geral, seria mais satisfatório se a fase α variasse de ponto para ponto no espaço e no tempo, isto é, $\alpha = \alpha(x)$. A questão que se coloca é saber se a Lagrangiana de Dirac, equação (1.46), é invariante para tais transformações,

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \tag{1.50}$$

onde $\alpha = \alpha(x)$ depende de modo arbitrário do espaço e do tempo, apenas com a condição de ser diferenciável. De onde é imediato que

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}(x),$$

e o termo $-m\bar{\psi}\psi$ é invariante, no entanto, a derivada de ψ é

$$\partial_\mu \psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi + ie^{i\alpha(x)} \psi \partial_\mu \alpha. \tag{1.51}$$

É o facto de $\partial_\mu \alpha \neq 0$ que quebra a simetria U(1) local da lagrangiana. Se se insistir em impôr a invariância da lagrangiana de Dirac para transformações de gauge local, deve procurar-se uma derivada modificada, D_μ , que tenha a propriedade

$$D_\mu e^{i\alpha} \psi = e^{i\alpha} D_\mu \psi.$$

Para formar esta derivada covariante deve introduzir-se um campo vectorial, A_μ , com propriedades de transformação tais que o termo indesejado na equação (1.51) seja cancelado. Isto pode ser

alcançado através de

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i q A_\mu, \quad (1.52)$$

onde A_μ se transforma como

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \delta A_\mu. \quad (1.53)$$

Assim, a Lagrangiana de Dirac, com a nova derivada é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi \\ &= \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \end{aligned}$$

efectuando as substituições (1.52) e (1.53), vem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= e^{-i\alpha} \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{i\alpha} \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \alpha - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \delta A_\mu \\ &= \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \alpha - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \delta A_\mu \\ &= \mathcal{L} - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi (\partial_\mu \alpha + q \delta A_\mu). \end{aligned}$$

Para que \mathcal{L} seja invariante, deve impôr-se a condição

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{q} \partial_\mu \alpha,$$

assim, para conseguir a invariância da fase local, é necessário forçar a introdução de um **campo vectorial** A_μ , denominado campo de gauge, que transforma como

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha, \quad (1.54)$$

e que acopla com a partícula de Dirac (carga q) exactamente da mesma forma como o fotão. De facto, o novo termo da interacção, $q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$, pode ser escrito como $-j^\mu A_\mu$. Se se considerar este novo campo de gauge, A_μ como o fotão, deve adicionar-se à Lagrangiana de Dirac o termo correspondente à sua energia cinética. Dado que o termo cinético deve ser invariante sob a transformação (1.54), só pode envolver o tensor invariante de gauge,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

assim, obtém-se a Lagrangiana da Electrodinâmica Quântica (QED),

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.55)$$

em que vale a pena reforçar a sua invariância para transformações de gauge local,

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x),$$

desde que a transformação de gauge de $A_\mu(x)$ seja escolhida como

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x).$$

1.2.4 Invariância de gauge SU(3) e QCD

De modo análogo, pode chegar-se à estrutura da Cromodinâmica Quântica (QCD) a partir da invariância de gauge local. De facto, a QCD é baseada exactamente nesta ideia, mas com o grupo U(1) substituído pelo grupo SU(3) das transformações de fase na cor dos quarks. A Lagrangiana livre é

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = \bar{q}_j (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) q_j, \quad (1.56)$$

com $j = 1, 2, 3$, a denotar as três cores dos quarks. Por razões de simplicidade a demonstração seguinte é feita em apenas um dos sabores dos quarks. Podem explorar-se as consequências de requerer que $\mathcal{L}_{\text{livre}}$ seja invariante sob transformações de gauge locais da forma

$$q(x) \longrightarrow Uq(x) \equiv e^{i\alpha_a(x)T_a}q(x)$$

onde U é uma matriz SU(3). T_a com $a = 1, \dots, 8$ representa o conjunto de matrizes linearmente independentes de traço nulo e α_a são os parâmetros de grupo. As matrizes $\lambda_a/2$ correspondem à escolha convencional para as matrizes T_a . O grupo é não-abeliano uma vez que nem todos os geradores T_a comutam entre si. O comutador entre quaisquer dois é dado por

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c,$$

onde f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo. Para impôr a invariância de gauge local SU(3) na Lagrangiana (1.56), seguem-se os passos da secção anterior. É suficiente considerar transformações de fase infinitésimas,

$$\begin{aligned} q(x) &\longrightarrow (1 + i\alpha_a(x)T_a)q(x) \\ \partial_\mu q &\longrightarrow (1 + i\alpha_a T_a)\partial_\mu q + iT_a q \partial_\mu \alpha_a. \end{aligned} \quad (1.57)$$

O último termo estraga a invariância de (1.56). À primeira vista parece que se pode proceder de modo análogo ao adoptado na QED. Isto é, introduzir oito campos de gauge G_μ^a a transformarem como

$$G_\mu^a \longrightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha_a, \quad (1.58)$$

e a derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu + igT_a G_\mu^a \quad (1.59)$$

e efectuando estas substituições em (1.56), resulta em

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) q - g (\bar{q} \gamma^\mu T_a G_\mu^a). \quad (1.60)$$

No entanto, para uma transformação de gauge não-abeliana, isto não é suficiente para produzir uma Lagrangiana invariante de gauge. O problema é que

$$\begin{aligned} (\bar{q} \gamma^\mu T_a q) &\rightarrow (\bar{q} \gamma^\mu T_a q) + i\alpha_b \bar{q} \gamma^\mu (T_a T_b - T_b T_a) q \\ &\rightarrow (\bar{q} \gamma^\mu T_a q) - f_{abc} \alpha_b (\bar{q} \gamma^\mu T_c q). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Tendo em conta este resultado, a invariância de gauge da Lagrangiana é obtida se se rescrever a equação (1.58) como

$$G_\mu^a \longrightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha_a - f_{abc} \alpha_b G_\mu^c. \quad (1.62)$$

Finalmente, deve adicionar-se à Lagrangiana um termo invariante de gauge para a energia cinética para cada um dos campos G_μ^a , permitindo escrever a expressão final da Lagrangiana QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) q - g (\bar{q} \gamma^\mu T_a q) G_\mu^a - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (1.63)$$

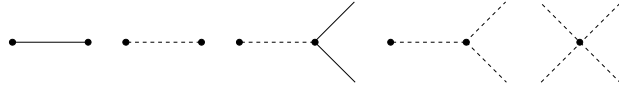
Tal como sucedeu anteriormente com o fóton, também a invariância de gauge SU(3) requer que os gluões não tenham massa. O tensor do campo $G_{\mu\nu}^a$ é

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gf_{abc} G_\mu^b G_\nu^c,$$

cujo termo extra tem uma consequência assinalável. Impôr a simetria de gauge implicou que o termo da energia cinética na Lagrangiana não seja puramente cinético, inclui uma auto-interacção entre bosões de gauge. Isto torna-se claro se se escrever a \mathcal{L}_{QCD} na forma simbólica,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = (\bar{q}q) + (G^2) + g (\bar{q}qG) + g (G^3) + g^2 (G^4),$$

e se se analisar a figura seguinte



Os primeiros três termos têm análogos QED. Descrevem a propagação livre de quarks e gluões e a interacção quark-gluão. Os restantes dois termos mostram a presença de vértices de três e quatro gluões e reflectem o facto de os próprios gluões carregarem cor. Não têm análogo QED e surgem como consequência do carácter não-abeliano do grupo de gauge.

1.2.5 Quebra espontânea de simetria

Considere-se um campo escalar que obedece à Lagrangiana de Klein-Gordon, adicionando os termos de auto-interacção e, simultaneamente, requerendo que esta seja invariante para uma transformação de simetria $\varphi \rightarrow -\varphi$, (não pode existir o termo em φ^3) tem-se

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 - \frac{1}{4} \lambda \varphi^4, \quad (1.64)$$

com $\lambda > 0$. As duas formas possíveis para o potencial estão representadas na Figura 1.1.

No caso (a), com $\mu^2 > 0$,

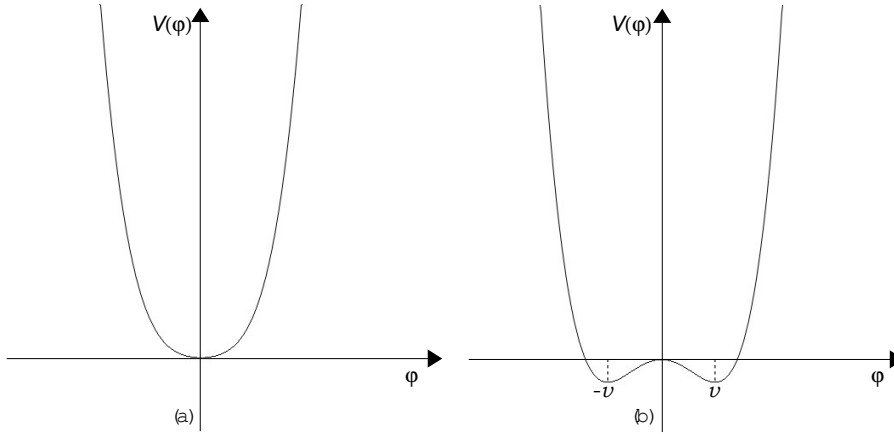
$$\frac{dV}{d\varphi} = \mu^2 \varphi + \lambda \varphi^3 = \varphi (\mu^2 + \lambda \varphi^2)$$

apresenta um mínimo global em $\varphi = 0$, mínimo esse que corresponde ao estado fundamental, o vácuo, e a quantidade μ é a massa da partícula representada pelo campo escalar φ . No caso (b), onde $\mu^2 < 0$, é a possibilidade que se pretende explorar. Agora a Lagrangiana (1.64) tem um termo de massa de sinal errado do campo φ e o potencial apresenta dois mínimos que satisfazem a condição

$$\frac{dV}{d\varphi} = \varphi (\mu^2 + \lambda \varphi^2) = 0,$$

e que são dados por

$$\varphi = \pm v \quad \text{com} \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}.$$


 Figura 1.1: O potencial V para (a) $\mu^2 > 0$ e (b) $\mu^2 < 0$.

O extremo $\varphi = 0$ não corresponde ao mínimo de energia. Cálculos perturbativos devem envolver expansões à volta de um dos mínimos, $\varphi = v$ ou $\varphi = -v$. Como tal, escreve-se

$$\varphi(x) = v + \eta(x),$$

onde $\eta(x)$ representa as flutuações à volta deste mínimo. Substituindo na Eq. (1.64) obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} \partial^\mu (v + \eta) \partial_\mu (v + \eta) - \frac{1}{2} \mu^2 (v + \eta)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \eta)^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \frac{1}{4} \lambda v^4. \end{aligned}$$

O último somando é uma constante e, como tal, pode ser ignorado. A Lagrangiana deixou de ser invariante para a transformação de simetria $\eta \rightarrow -\eta$, uma vez que surgiu um termo em η^3 . É este o aspecto essencial que constitui a **quebra espontânea de simetria** (*Spontaneous Symmetry Breaking*, SSB). O campo η tem um termo de massa com o sinal correcto. Identificando os primeiros dois termos com a Lagrangiana de Klein-Gordon, é possível concluir que representam um campo escalar com massa

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}.$$

Os termos de ordem superior em η representam a interacção do campo com ele próprio. A conclusão importante é que a quebra espontânea de simetria revela uma massa.

1.2.6 Quebra espontânea de uma simetria de gauge global

Seguindo a receita anterior, agora para um campo escalar complexo, $\phi = 1/\sqrt{2}(\phi_1 + i\phi_2)$, descrito pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2, \quad (1.65)$$

que é invariante para a transformação contínua de simetria U(1) global,

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi,$$

com α real e constante. A energia potencial V associada a esta Lagrangiana é

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 = \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2.$$

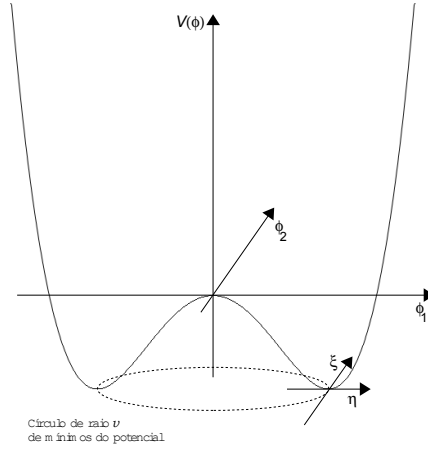


Figura 1.2: O potencial V para um campo escalar complexo no caso em que $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$.

Se $\lambda > 0$ e $\mu^2 > 0$, a função V apresenta um mínimo global em $\phi_1 = \phi_2 = 0$, o que corresponde ao vácuo e a quantidade μ não é mais do que a massa da partícula representada pelo campo ϕ .

Mas o caso de interesse é quando $\lambda > 0$ e $\mu^2 < 0$, figura 1.2, e apresenta um círculo de raio v de mínimos do potencial no plano (ϕ_1, ϕ_2) , tal que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 \quad \text{com} \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}.$$

$\phi_1 = \phi_2 = 0$ é um máximo local; o mínimo global da função corresponde à circunferência de raio v centrada na origem. Com efeito, impondo

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial \phi_2} = 0,$$

resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi_1} &= \mu^2 \phi_1 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2) \phi_1 = \phi_1 [\mu^2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_2} &= \mu^2 \phi_2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2) \phi_2 = \phi_2 [\mu^2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)] = 0 \end{aligned}$$

a partir das quais se conclui que o mínimo de V é atingido nos pontos

$$\mu^2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2) = 0 \Rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}.$$

Desenvolvendo a Lagrangiana em torno de um desses pontos, por exemplo, $(\phi_1, \phi_2) = (v, 0)$,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x)] \tag{1.66}$$

tem-se a seguinte expansão da Lagrangiana em torno do vácuo em termos dos campos η e ξ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} \partial^\mu (v + \eta - i\xi) \partial_\mu (v + \eta + i\xi) + \frac{1}{2} \lambda v^2 (v + \eta - i\xi) (v + \eta + i\xi) \\ &\quad - \frac{1}{4} \lambda [(v + \eta - i\xi) (v + \eta + i\xi)]^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \partial^\mu \xi \partial_\mu \xi - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \lambda v \eta \xi^2 - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\lambda}{2} \eta^2 \xi^2 - \frac{\lambda}{4} \xi^4 + \frac{1}{2} \lambda v^4. \end{aligned}$$

O terceiro somando tem a forma de termo de massa para o campo escalar η . E, como anteriormente,

a sua massa é $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$. O segundo somando representa a energia cinética do campo ξ , mas não existe o termo de massa corresponde para este campo. Isto é, existe um campo escalar sem massa, que é denominado **bosão de Goldstone**. A sua interpretação é simples, o potencial na direcção tangente ξ é plano, implicando um modo sem massa, pois não existe resistência à excitação ao longo dessa direcção.

1.2.7 Mecanismo de Higgs

O passo final é estudar a quebra espontânea de simetria local. Aqui toma-se o exemplo mais simples: a simetria de gauge U(1), deixando a discussão com SU(2) para a secção seguinte. É necessário tornar a Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2,$$

invariante para transformações de fase local U(1),

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi. \quad (1.67)$$

Para o conseguir é necessário, como se viu na Sec. 1.2.3, substituir a derivada ∂_μ pela derivada covariante D_μ ,

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu,$$

com o campo de gauge a transformar da seguinte forma

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha.$$

A Lagrangiana invariante de gauge, nestas condições, é

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu - iqA^\mu) \phi^* (\partial_\mu + iqA^\mu) \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.68)$$

Se $\mu^2 > 0$, esta é apenas a Lagrangiana QED para uma partícula sem spin com carga q e massa m . No entanto, e de novo, o caso de interesse é quando $\mu^2 < 0$, de modo a revelar massas através da SSB. Repita-se o procedimento já familiar de efectuar uma translação do campo ϕ para o estado fundamental. Substituindo (1.66) em (1.68), vem

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial^\mu \xi \partial_\mu \xi + \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta - \lambda v^2 \eta^2 + \frac{1}{2} q^2 v^2 A^\mu A_\mu + qv \partial^\mu \xi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + \text{termos de grau superior a dois nos campos } \eta, \xi \text{ e } A_\mu. \end{aligned}$$

O espectro de partículas desta Lagrangiana mostra um bosão de Goldstone ξ (o primeiro somando) e um escalar η com massa $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}$ (o segundo e terceiro somandos). Aparecem, ainda, dois termos novos, um dos quais é muito importante. Trata-se de $\frac{1}{2} q^2 v^2 A^\mu A_\mu$, que representa um campo vectorial com massa $m_A = qv$. A presença do termo $qv \partial^\mu \xi A_\mu$ sugere que algum destes três campos não corresponda a uma verdadeira partícula. É isso que de facto sucede, o campo ξ pode ser eliminado da Lagrangiana através de uma transformação de gauge conveniente, como se demonstra a seguir. Note-se que

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta + i\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta) e^{i\xi/v}, \quad (1.69)$$

em primeira ordem em ξ . Para verificar qual a transformação de gauge que foi usada, substitui-se (1.69) em (1.67),

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta) e^{i\xi/v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta) e^{i(\alpha+\xi)/v}$$

e

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha.$$

A observação das duas últimas expressões permite inferir sobre a transformação de gauge que se deve utilizar,

$$\phi \longrightarrow \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h) e^{i\theta/v}$$

e

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{qv} \partial_\mu \theta,$$

onde as funções h e θ são funções reais de $x = x^\mu$. Esta transformação de gauge recebe o nome de gauge unitária. Nestas condições é possível obter uma nova Lagrangiana,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2} q^2 v^2 A^\mu A_\mu - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 + \frac{1}{2} q^2 h^2 A^\mu A_\mu \\ & + q^2 v h A^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

onde se identifica o campo escalar h com massa $m_h = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$, e o campo vectorial A_μ com massa $m_A = qv$. O campo θ que deveria dar origem ao bóson de Goldstone desapareceu, confirmando a suspeita, isto é, o aparente grau de liberdade extra é na realidade espúrio, pois corresponde apenas à liberdade de efectuar uma transformação de gauge. A Lagrangiana descreve apenas duas partículas com massa, o bóson de gauge A_μ e um escalar com massa h , que representa a partícula de Higgs. Este fenómeno denomina-se **mecanismo de Higgs**.

1.2.8 Quebra espontânea da simetria de gauge SU(2) local

Na secção anterior, analisou-se a SSB de gauge U(1) local. É necessário repetir o procedimento para uma simetria de gauge SU(2) local. Este exemplo final irá servir como resumo, contém todas as ideias introduzidas e irá fornecer a preparação para a discussão de simetrias de gauge da interacção electrofraca. Considere-se a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (1.70)$$

onde o campo ϕ é um duplete de SU(2) de campos escalares complexos:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{pmatrix}$$

e α_1 , α_2 , β_1 e β_2 são funções escalares reais de x^μ , assim,

$$\phi^\dagger \phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^* & \varphi_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Aplicando ao campo ϕ uma transformação unitária U global

$$\phi \longrightarrow \phi' = U\phi,$$

dado que U não depende das coordenadas é imediato que $\partial^\mu U = \partial_\mu U = 0$, e atendendo a

$$(\phi')^\dagger \phi' = (U\phi)^\dagger (U\phi) = \phi^\dagger U^\dagger U \phi = \phi^\dagger \phi$$

e

$$\left(\partial^\mu \phi'\right)^\dagger \left(\partial_\mu \phi'\right) = (\partial^\mu U \phi)^\dagger \partial_\mu U \phi = (U \partial^\mu \phi)^\dagger U \partial_\mu \phi = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi)$$

conclui-se que a Lagrangiana (1.70) apresenta simetria SU(2) global.

Prosseguindo para a transformação SU(2) local é necessário considerar transformações unitárias U que dependam das coordenadas. A transformação unitária pode ser escrita na forma

$$U = e^{i\theta^a T^a} \quad \theta^a = \theta^a(x) \quad \text{com } a = 1, 2, 3$$

onde T^a são os já conhecidos geradores do grupo SU(2).

Aplicando as receitas anteriormente delineadas

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + i g W_\mu^a T^a,$$

e

$$W_\mu^a \longrightarrow W_\mu'^a = W_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a - \epsilon^{abc} \theta^b W_\mu^c.$$

onde W_μ^a , com $a=1,2,3$, são três campos vectoriais de gauge e ϵ^{abc} representa o símbolo de Levi-Civita em três dimensões, dado por (1.45).

Desta forma, a Lagrangiana (1.70) ganha a forma

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \quad (1.71)$$

que já inclui os termos cinéticos associados aos W_μ^a :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c.$$

Se $\mu^2 > 0$, esta Lagrangiana contém dois campos escalares complexos φ_1 e φ_2 com massa μ , e três campos vectoriais W^1 , W^2 e W^3 sem massa. Portanto, é necessário de novo recorrer à SSB para revelar as massas. Considerando $\mu^2 < 0$, a energia potencial é

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2) + \frac{1}{4} \lambda (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)^2 \end{aligned} \quad (1.72)$$

que apresenta um mínimo sobre uma esfera quadridimensional de equação

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2. \quad (1.73)$$

Para efectuar o desenvolvimento da Lagrangiana é usual a escolha do ponto

$$\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = v \Rightarrow \langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Escrevendo

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ v + \eta + i\xi \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

com α , β , η e ξ campos reais, os segundo e terceiro termos da Lagrangiana (1.71), ficam

$$\begin{aligned}\phi^\dagger\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & v + \eta - i\xi \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta \\ v + \eta + i\xi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [\alpha^2 + \beta^2 + (v + \eta)^2 + \xi^2] \\ &= \frac{v^2}{2} + v\eta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2 + \xi^2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\phi^\dagger\phi)^2 &= \frac{1}{4} [v^4 + v^3\eta + 4v^2\eta^2 + 2v^2(\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2 + \xi^2) + \dots] \\ &= v^2 \left[\frac{v^2}{4} + v\eta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + 3\eta^2 + \xi^2) \right] + \dots\end{aligned}$$

onde foram omitidos os termos de terceira e quarta ordem nos campos, obtém-se

$$\begin{aligned}-\mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 &= \lambda v^2 \left[\frac{v^2}{2} + v\eta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + \eta^2 + \xi^2) \right] \\ &\quad - \lambda v^2 \left[\frac{v^2}{4} + v\eta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + 3\eta^2 + \xi^2) \right] + \dots \\ &= \lambda v^2 \left(\frac{v^2}{4} - \eta^2 \right) + \dots = -\lambda v^2 \eta^2 + \dots\end{aligned}$$

com o termo constante a ser omitido. Esta expressão mostra que ao campo escalar η está associada uma massa $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$, enquanto que os campos escalares α , β e ξ não têm massa, ou seja, são bósons de Goldstone. Este resultado pode ser confirmado usando a transformação de gauge unitária,

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\theta^a T^a} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.76)$$

desenvolvendo em primeira ordem nos campos,

$$\begin{aligned}\phi' &\cong (\mathbb{1} + i\theta^a T^a) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2} \theta^a \sigma^a \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i\theta^1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i\theta^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{i\theta^3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i\theta^3}{2} & \frac{i\theta^1}{2} + \frac{\theta^2}{2} \\ \frac{i\theta^1}{2} - \frac{\theta^2}{2} & 1 - \frac{i\theta^3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v(\theta^2 + i\theta^1)/2 \\ v+h - (iv\theta^3)/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

que coincide com (1.75) se se fizer $\theta^1 = 2\beta/v$, $\theta^2 = 2\alpha/v$, $\theta^3 = -2\xi/v$ e $h = \eta$, forçando a conclusão de que o campo escalar η é a partícula de Higgs. A transformação (1.76) mantém invariantes os segundo e terceiro somandos da Lagrangiana (1.71), e não afecta o último somando, que representa as interações entre os campos W^a , com $a = 1, 2, 3$. Resta estudar o primeiro somando, que contém a informação acerca das massas dos campos W^a . Assim, devem-se procurar

termos do tipo $\frac{1}{2} (M^a)^2 W^{a\mu} W_\mu^a$, substituindo (1.74) nesse primeiro somando,

$$\begin{aligned} D_\mu \langle \phi \rangle &= (\partial_\mu + ig W_\mu^a T^a) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{igv}{2\sqrt{2}} W_\mu^a \sigma^a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{igv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ -W_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.77)$$

e

$$\begin{aligned} \langle (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi \rangle &= \left[-\frac{igv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W^{1\mu} + iW^{2\mu} & -W^{3\mu} \end{pmatrix} \right] \left[\frac{igv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ -W_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2} \right)^2 (W^{1\mu} W_\mu^1 + W^{2\mu} W_\mu^2 + W^{3\mu} W_\mu^3) \end{aligned}$$

concluindo-se que os três campos têm a mesma massa, $M_W = \frac{gv}{2}$.

1.2.9 O mecanismo de Higgs no modelo Glashow-Salam-Weinberg

1.2.9.1 Massas dos bósons

Para gerar a massa dos bósons de gauge aplica-se a quebra espontânea de simetria de gauge local ao modelo Glashow-Salam-Weinberg (GSW), $SU(2) \times U(1)$.

O campo é escrito na forma de um duplete

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}, \quad (1.78)$$

onde φ^+ e φ^0 são campos escalares complexos e as transformações unitárias locais que deixam invariante a Lagrangiana são

$$\begin{aligned} \phi \longrightarrow \phi' &= e^{i\theta^a T^a} \phi = e^{i\theta^a \sigma^a / 2} \phi, & \text{com } a = 1, 2, 3 & \quad [SU(2)] \\ \phi \longrightarrow \phi' &= e^{i\alpha Y / 2} \phi & & \quad [U(1)] \end{aligned}$$

$\theta^1, \theta^2, \theta^3$ e α são funções reais de $x = x^\mu$. Os operadores T^a e Y são os geradores hermíticos dos grupos $SU(2)$ e $U(1)$, respectivamente. Como o operador Y é simplesmente um número, T^a e Y comutam. Note-se que

$$T^3 \phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+ / 2 \\ -\varphi^0 / 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} T^3 \varphi^+ &= \varphi^+ / 2 \\ T^3 \varphi^0 &= -\varphi^0 / 2 \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$Y \phi = \phi \Rightarrow \begin{aligned} Y \varphi^+ &= \varphi^+ \\ Y \varphi^0 &= \varphi^0 \end{aligned} \quad (1.80)$$

ou seja, os campos φ^+ e φ^0 são os campos próprios dos operadores T^3 e Y . O operador T^3 recebe o nome de **isospin fraco** e ao operador Y dá-se-lhe o nome de **hipercarga fraca**. O operador carga eléctrica Q é dado por

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \quad (1.81)$$

Dado que

$$Q \phi = \left(T^3 + \frac{Y}{2} \right) \phi = \left(T^3 + \frac{Y}{2} \right) \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ -\varphi^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.82)$$

o campo φ^+ é um campo carregado com $Q = +1$ e o campo φ^0 é um campo com carga nula.

Para que a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^\dagger \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (1.83)$$

apresente simetria $SU(2) \times U(1)$ local, deve ser introduzida a derivada covariante

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a T^a + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (1.84)$$

e a Lagrangiana transforma-se em

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}, \quad (1.85)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad \text{e} \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (1.86)$$

e as transformações dos campos são dadas por

$$W_\mu'^a = W_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a - \epsilon^{abc} \theta^b W_\mu^c \quad \text{e} \quad B_\mu' = B_\mu - \frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha. \quad (1.87)$$

A energia potencial é novamente

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.88)$$

e se $\mu^2 < 0$, atinge o valor mínimo nos pontos onde

$$\frac{dV}{d(\phi^\dagger \phi)} = 0 \Rightarrow \mu^2 + 2\lambda (\phi^\dagger \phi) = 0 \Rightarrow \phi^\dagger \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda}. \quad (1.89)$$

Separando os campos complexos φ^+ e φ^0 nas suas partes real e imaginária,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.90)$$

conclui-se que o mínimo é atingido nos pontos em que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = v^2. \quad (1.91)$$

Como o valor esperado do operador carga no vácuo é nulo, usando (1.82) vem

$$\langle \phi | Q | \phi \rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle \alpha_1 - i\beta_1 & \langle \alpha_2 - i\beta_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle \alpha_1 + i\beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

o que implica $\langle \alpha_1 \rangle = \langle \beta_1 \rangle = 0$. Escolhendo o ponto $\alpha_2 = v$ e $\beta_2 = 0$, para o desenvolvimento da Lagrangiana em torno desse mínimo é conveniente escolher a gauge unitária e escrever

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \Rightarrow \phi^\dagger \phi = \frac{1}{2} (v + h)^2, \quad (1.92)$$

sendo h o campo de Higgs. Substituindo em (1.88) e utilizando (1.89), vem

$$V(\phi) = -\lambda v^2 \frac{1}{2} (v + h)^2 + \frac{1}{4} \lambda (v + h)^4 \cong \lambda v^2 h^2, \quad (1.93)$$

omitindo o termo constante e os termos de ordem superior a dois no campo h . O bóson de Higgs tem massa $m_h = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-\mu^2}$.

O próximo objectivo é determinar quais são as massas associadas aos campos W^a e B . Para tal, introduz-se

$$\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.94)$$

no primeiro somando da Lagrangiana (1.85),

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \left(\partial_\mu + i g W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + i g' B_\mu \frac{Y}{2} \right) \phi = \frac{i}{2} (g W_\mu^a \sigma^a + g' B_\mu) \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i v}{2\sqrt{2}} \left[g W_\mu^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + g W_\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + g W_\mu^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + g' B_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{i v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g W_\mu^3 + g' B_\mu & g W_\mu^1 - i g W_\mu^2 \\ g W_\mu^1 + i g W_\mu^2 & -g W_\mu^3 + g' B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i v}{2} \begin{pmatrix} [g W_\mu^3 + g' B_\mu] / \sqrt{2} & g W_\mu^+ \\ g W_\mu^- & [-g W_\mu^3 + g' B_\mu] / \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{i v}{2} \begin{pmatrix} g W_\mu^+ \\ [-g W_\mu^3 + g' B_\mu] / \sqrt{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.95)$$

onde se definiu $W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2)$ o que implica $(W_\mu^\pm)^* = W_\mu^\mp$. Portanto,

$$\begin{aligned} (D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi &= -\frac{i v}{2} \begin{pmatrix} g W^{\mu-} & [-g W^{\mu 3} + g' B_\mu] / \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{i v}{2} \begin{pmatrix} g W^{\mu+} \\ [-g W^{\mu 3} + g' B_\mu] / \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{4} \left[g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{(-g W^{\mu 3} + g' B_\mu)(-g W_\mu^3 + g' B_\mu)}{2} \right] \\ &= \left(\frac{v g}{2} \right)^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{v^2}{8} (g^2 W^{\mu 3} W_\mu^3 - g g' W^{\mu 3} B_\mu - g g' B^\mu W_\mu^3 + g'^2 B^\mu B_\mu). \end{aligned} \quad (1.96)$$

O primeiro somando mostra que os campos complexos conjugados W_μ^+ e W_μ^- têm uma massa

$$M_{W^+} = M_{W^-} = \frac{1}{2} v g.$$

O segundo somando requer uma análise mais detalhada. Reescrevendo-o na forma

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} & B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 \frac{v^2}{4} & -g g' \frac{v^2}{4} \\ -g g' \frac{v^2}{4} & g'^2 \frac{v^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix}, \quad (1.97)$$

esta expressão tem o aspecto de um termo de massa, a razão pela qual a matriz

$$M = \begin{pmatrix} g^2 \frac{v^2}{4} & -g g' \frac{v^2}{4} \\ -g g' \frac{v^2}{4} & g'^2 \frac{v^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -g g' \\ -g g' & g'^2 \end{pmatrix}, \quad (1.98)$$

recebe o nome de **matriz de massa**. O facto de os campos W^3 e B aparecerem misturados na expressão (1.96) significa que os campos físicos com massa são combinações lineares de W^3 e B . A forma mais simples de identificar esses campos é proceder à diagonalização da matriz de massa.

A condição $\det(m\mathbb{1} - M) = 0$ permite calcular os valores próprios m de M ,

$$\begin{vmatrix} m - \frac{g^2 v^2}{4} & gg' \frac{v^2}{4} \\ gg' \frac{v^2}{4} & m - \frac{g'^2 v^2}{4} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(m - \frac{g^2 v^2}{4}\right) \left(m - \frac{g'^2 v^2}{4}\right) - g^2 g'^2 \frac{v^4}{16} = 0,$$

de modo que

$$m^2 - \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4} m = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 0 \\ \frac{g^2 + g'^2}{4} v^2 \end{cases} \quad (1.99)$$

De seguida, obtêm-se os vectores próprios correspondentes. Para $m_1 = 0$,

$$\begin{pmatrix} \frac{g^2 v^2}{4} & -gg' \frac{v^2}{4} \\ -gg' \frac{v^2}{4} & \frac{g'^2 v^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g \frac{v^2}{4} (-gx + g'y) = 0 \quad y = \frac{g'}{g} x \quad (1.100)$$

e para $m_2 = \frac{g^2 + g'^2}{4} v^2$

$$\begin{pmatrix} \frac{g'^2 v^2}{4} & gg' \frac{v^2}{4} \\ gg' \frac{v^2}{4} & \frac{g^2 v^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g' \frac{v^2}{4} (g'x + gy) = 0 \quad y = -\frac{g'}{g} x. \quad (1.101)$$

Os vectores próprios correspondentes ao valor próprio m_1 têm a forma

$$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{g'}{g} x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g'}{g} \end{pmatrix}, \quad (1.102)$$

de modo que o vector normalizado será

$$\hat{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{g'}{g}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g'}{g} \end{pmatrix} = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g'}{g} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' \\ g \end{pmatrix}, \quad (1.103)$$

que se pode escrever como

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta_W \\ \cos \theta_W \end{pmatrix}, \quad (1.104)$$

se se definir

$$\begin{aligned} \sin \theta_W &\equiv \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ \cos \theta_W &\equiv \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{aligned} \Rightarrow \tan \theta_W = \frac{g'}{g}, \quad (1.105)$$

onde θ_W representa o ângulo de Weinberg.

Para m_2 ,

$$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{g'}{g} x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{g'}{g} \end{pmatrix}, \quad (1.106)$$

e o vector normalizado é

$$\hat{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-g'}{g}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{g'}{g} \end{pmatrix} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{g'}{g} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}, \quad (1.107)$$

que se escreve como

$$\hat{V}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_W \\ -\sin \theta_W \end{pmatrix}. \quad (1.108)$$

O campo representado pelo vector próprio \hat{V}_2 é designado por Z e o vector \hat{V}_1 por A . Assim,

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \quad (1.109)$$

e

$$A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu, \quad (1.110)$$

ou

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

e as relações inversas

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \quad (1.112)$$

Utilizando (1.105) e substituindo (1.112) em (1.97), vem que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g^2 + g'^2) \frac{v^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.113)$$

por sua vez, a expressão (1.96) toma a forma

$$(D^\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi = \left(\frac{gv}{2}\right)^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2 (g^2 + g'^2)}{4}\right) Z^\mu Z_\mu, \quad (1.114)$$

o que permite identificar a massa do campo Z ,

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2} \quad (1.115)$$

e concluir que o campo A não tem massa, como seria de esperar, pois é o fóton. Os valores experimentais para a massa dos bosões W e Z são $M_W \cong 80,4$ GeV e $M_Z \cong 91,2$ GeV, e para o ângulo de Weinberg é de

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos \theta_W \Rightarrow \cos \theta_W \cong 0,8816. \quad (1.116)$$

1.2.9.2 Massa dos fermiões

A matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ tem, na representação de Dirac, a forma

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.117)$$

A matriz γ^5 tem as seguintes propriedades:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (1.118)$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{1} \quad (1.119)$$

e

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (1.120)$$

γ^5 é o operador quiralidade a partir do qual se definem os operadores de projecção

$$L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad \text{e} \quad R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (1.121)$$

cuja soma é $L + R = 1$. De notar que estes dois operadores são hermiticos $L^\dagger = L$ e $R^\dagger = R$, idempotentes $L^2 = L$ e $R^2 = R$, bem como, ortogonais $LR = 0$ e $RL = 0$ e têm as seguintes propriedades: $L\gamma^5 = \gamma^5L = -L$ e $R\gamma^5 = \gamma^5R = R$, bem como, $L\gamma^\mu = \gamma^\mu R$ e $R\gamma^\mu = \gamma^\mu L$.

Se ψ é o spinor que representa um fermião, as funções de onda $\psi_L \equiv L\psi$ e $\psi_R \equiv R\psi$ são as componentes esquerda e direita de ψ , e $\psi = \psi_L + \psi_R$. As componentes esquerda e direitas dos spinores adjuntos de Dirac, são, respectivamente, dadas por $\bar{\psi}_L = \bar{\psi}R$ e $\bar{\psi}_R = \bar{\psi}L$, permitindo obter: $\bar{\psi}_L\psi_L = \bar{\psi}R\psi = 0$, $\bar{\psi}_R\psi_R = \bar{\psi}L\psi = 0$ e $\bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_R = 0$, $\bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_L = 0$.

A Lagrangiana que tem vindo a ser construída só inclui bósons, ou seja, as interações. Para a dotar do realismo necessário é preciso introduzir os fermiões (leptões e quarks). Os spinores ψ associados aos seis leptões são separados nas suas componentes esquerda, ψ_L , e direita, ψ_R ; as seis componentes esquerdas dão origem a três dupletos; as três componentes direitas dão origem a três singletos (no MP mínimo aqui exposto os neutrinos não têm componente direita porque não têm massa). Os spinores do electrão, muão e tau são representados pela letra ℓ , os spinores dos três neutrinos, pela letra ν e os dupletos pela letra L . Assim,

$$\text{dupleto: } L_{jL} = \begin{pmatrix} \nu_j \\ \ell_j \end{pmatrix}_L; \quad \text{singlete: } \ell_{jR} \quad (j = 1, 2, 3)$$

Para os quarks faz-se algo semelhante. Para cada cor e cada geração existem dois quarks, cujos spinores têm ambas componentes esquerda e direita. As componentes esquerda dão origem a um dupleto e as componentes direita a dois singletos,

$$\text{dupleto: } Q_{jL} = \begin{pmatrix} p_j \\ n_j \end{pmatrix}_L; \quad \text{singletos: } p_{jR} \quad \text{e} \quad n_{jR} \quad (j = 1, 2, 3)$$

com j a indicar a geração, mas não a cor, e se faz associação de p com os quarks u , c e t , e n com os quarks d , s e b .

Para efectuar a análise do termo $i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi$ da Lagrangiana, relembra-se que

$$D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a T^a + ig'B_\mu \frac{Y}{2}$$

e

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}.$$

Para qualquer componente direita, ou seja, para qualquer singlete, $T^a\psi_R = 0$; em particular $T^3\psi_R = 0$ o que implica em $\frac{Y}{2}\psi_R = Q\psi_R$. Aplicando a derivada covariante a um spinor direito,

$$D_\mu\psi_R = (\partial_\mu + ig'B_\mu Q)\psi_R, \quad (1.122)$$

de modo que

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R &= i\bar{\psi}_R\gamma^\mu (\partial_\mu + ig'B_\mu Q)\psi_R \\ &= i\bar{\psi}_R\gamma^\mu \partial_\mu\psi_R - e\bar{\psi}_R\gamma^\mu Q\psi_R A_\mu + \frac{g}{\cos\theta_W}\bar{\psi}_R\gamma^\mu Q\psi_R \sin^2\theta_W Z_\mu, \end{aligned} \quad (1.123)$$

onde se fez uso da equação (1.112) e da relação $g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$. Para qualquer componente esquerda, ou seja, para qualquer duplete, Ψ_L , tem-se

$$i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu D_\mu \Psi_L = i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu + igW_\mu^a T^a + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \right) \Psi_L, \quad (1.124)$$

e como,

$$\begin{aligned} W_\mu^a T^a &= W_\mu^1 T^1 + W_\mu^2 T^2 + W_\mu^3 T^3 \\ &= W_\mu^3 T^3 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.125)$$

resulta em

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu D_\mu \Psi_L &= i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(gW_\mu^3 T^3 + g' B_\mu \frac{Y}{2} \right) \Psi_L \\ &\quad - \frac{g}{2} \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \Psi_L. \end{aligned} \quad (1.126)$$

O segundo e o terceiro somandos têm aspecto de correntes, $j_\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, e recebem os nomes de **corrente neutra** (CN) e **corrente carregada** (CC), respectivamente. É conveniente analisar estas correntes ao detalhe. Faça-se

$$\Psi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde x pode representar ν_j ou p_j , e y pode representar l_j ou n_j , respectivamente. Para a corrente carregada

$$\begin{aligned} j_\mu^{\text{CC}} &= -\frac{g}{2} \begin{pmatrix} \bar{x}_L & \bar{y}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{x}_L & \bar{y}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^+ y_L \\ W_\mu^- x_L \end{pmatrix} \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{x}_L \gamma^\mu W_\mu^+ y_L + \bar{y}_L \gamma^\mu W_\mu^- x_L) \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{x}_L \gamma^\mu y_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (1.127)$$

Onde h.c. representa o conjugado hermítico do primeiro somando da expressão, uma vez que $(\bar{x}_L \gamma^\mu y_L)^\dagger = \bar{y}_L \gamma^\mu x_L$, resulta em

$$\left(-\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{x}_L \gamma^\mu y_L W_\mu^+ \right)^\dagger = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{x}_L \gamma^\mu y_L)^\dagger (W_\mu^+)^* = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{y}_L \gamma^\mu x_L W_\mu^-,$$

o que justifica a utilização de h.c. na expressão (1.127).

Em relação à corrente neutra, o desenvolvimento do termo entre parêntesis da equação (1.126), por recurso às equações (1.81) e (1.112), bem como à relação $g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$, fornece

$$\begin{aligned} gW_\mu^3 T^3 + g' B_\mu \frac{Y}{2} &= gT^3 (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) + g' (Q - T^3) (-\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu) \\ &= eQA_\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) Z_\mu, \end{aligned} \quad (1.128)$$

permite que a CN se escreva como,

$$\begin{aligned}
 j_\mu^{\text{CN}} &= -\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(g W_\mu^3 T^3 + g' B_\mu \frac{Y}{2} \right) \Psi_L \\
 &= -\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left[e Q A_\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) Z_\mu \right] \Psi_L \\
 &= -e \bar{\Psi}_L \gamma^\mu Q \Psi_L A_\mu - \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{\Psi}_L \gamma^\mu (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) \Psi_L Z_\mu.
 \end{aligned} \tag{1.129}$$

Substituindo (1.129) e (1.127) em (1.126),

$$\begin{aligned}
 i \bar{\Psi}_L \gamma^\mu D_\mu \Psi_L &= i \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L - e \bar{\Psi}_L \gamma^\mu Q \Psi_L A_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{x}_L \gamma^\mu y_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \\
 &\quad + \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{\Psi}_L \gamma^\mu (Q \sin^2 \theta_W - T^3) \Psi_L Z_\mu.
 \end{aligned} \tag{1.130}$$

As expressões (1.123) e (1.130), respeitantes às componentes esquerda e direita, podem ser somadas, obtendo-se

$$\begin{aligned}
 i \bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R + i \bar{\Psi}_L \gamma^\mu D_\mu \Psi_L &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu Q \psi A_\mu \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{x}_L \gamma^\mu y_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \\
 &\quad - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\psi} \gamma^\mu (T^3 - 2Q \sin^2 \theta_W - T^3 \gamma^5) \psi Z_\mu,
 \end{aligned}$$

que é usualmente escrita na forma

$$\begin{aligned}
 i \bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R + i \bar{\Psi}_L \gamma^\mu D_\mu \Psi_L &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu Q \psi A_\mu \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{x}_L \gamma^\mu y_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \\
 &\quad - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi Z_\mu,
 \end{aligned} \tag{1.131}$$

onde foram introduzidos os operadores vectorial, g_V , e axial, g_A ,

$$g_V \equiv T^3 - 2Q \sin^2 \theta_W \quad \text{e} \quad g_A \equiv T^3.$$

A expressão (1.131) representa apenas uma geração de fermiões, a expressão geral é

$$i \bar{\psi}_j \gamma^\mu D_\mu \psi_j = \mathcal{L}_{\text{cin}} + \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{CC}} + \mathcal{L}_{\text{CN}}, \tag{1.132}$$

onde \mathcal{L}_{cin} , inclui os termos cinéticos associados a todos os fermiões

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = i \bar{\psi}_j \gamma^\mu \partial_\mu \psi_j = i \bar{\nu}_{jL} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{jL} + i \bar{\ell}_j \gamma^\mu \partial_\mu \ell_j + i \bar{p}_j \gamma^\mu \partial_\mu p_j + i \bar{n}_j \gamma^\mu \partial_\mu n_j.$$

\mathcal{L}_{EM} , representa a interacção entre os fermiões e os fotões,

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -e \bar{\psi}_j \gamma^\mu Q \psi_j A_\mu.$$

\mathcal{L}_{CC} , contém as interacções entre os fermiões e os campos W_μ^+ e W_μ^- ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{CC}} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{x}_{jL} \gamma^\mu y_{jL} W_\mu^+ + \text{h.c.} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{jL} \gamma^\mu \ell_{jL} W_\mu^+ + \text{h.c.} \\
 &\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{p}_{jL} \gamma^\mu n_{jL} W_\mu^+ + \text{h.c.}
 \end{aligned} \tag{1.133}$$

\mathcal{L}_{CN} , contém as interações entre os fermiões e os campos Z_μ ,

$$\mathcal{L}_{\text{CN}} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\psi}_j \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi_j Z_\mu.$$

Para se obter a expressão final da Lagrangiana, é necessário introduzir a massa dos fermiões. Lembre-se que um termo de massa do tipo $-m\bar{\psi}\psi$ não é permitido, dado que viola a invariância de gauge da Lagrangiana. Tal como no caso dos bosões, é o mecanismo de Higgs com a SSB que permite gerar a massa dos fermiões. Para isso, é necessário introduzir na Lagrangiana um termo que acople os fermiões com o campo escalar e que seja invariante de gauge. O termo mais geral possível deste tipo, é o **termo de Yukawa** que tem a forma

$$\mathcal{L}_Y = -Y_{jk}^{(\ell)} \bar{L}_{jL} \phi \ell_{kR} - Y_{jk}^{(n)} \bar{Q}_{jL} \phi n_{kR} - Y_{jk}^{(p)} \bar{Q}_{jL} \tilde{\phi} p_{kR} + \text{h.c.} \quad (1.134)$$

onde $Y_{jk}^{(\ell)}$, $Y_{jk}^{(n)}$ e $Y_{jk}^{(p)}$ são números complexos arbitrários, conhecidos como **acoplamentos de Yukawa**, e os escalares complexos ϕ e $\tilde{\phi}$ são dupletos relacionados entre si através de $\tilde{\phi} = i\sigma^2 \phi^*$, ou seja,

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\phi} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^- \\ \varphi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{0*} \\ -\varphi^- \end{pmatrix}. \quad (1.135)$$

Os três primeiros termos em (1.134) são do tipo "LR" e os últimos três (os conjugados hermiticos dos primeiros) são do tipo "RL". Cada um dos somandos inclui nove termos, já que os valores possíveis de j e k são 1, 2 e 3. O já usual mecanismo, inicia-se com o desenvolvimento da Lagrangiana em torno do mínimo da energia potencial,

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (\mu^2 < 0) \quad (1.136)$$

e se se escolher a gauge unitária, basta inserir em (1.134) as expressões

$$\phi = \frac{v+h}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\phi} = \frac{v+h}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (1.137)$$

sendo h o campo de Higgs. O primeiro somando de (1.134) fica,

$$\begin{aligned} -Y_{jk}^{(\ell)} \bar{L}_{jL} \phi \ell_{kR} &\cong -\frac{v+h}{\sqrt{2}} Y_{jk}^{(\ell)} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{jL} & \bar{\ell}_{jL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ell_{kR} = -\frac{v+h}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_{jL} Y_{jk}^{(\ell)} \ell_{kR} \\ &= \frac{v}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{h}{v}\right) \begin{pmatrix} \bar{\ell}_{1L} & \bar{\ell}_{2L} & \bar{\ell}_{3L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11}^{(\ell)} & Y_{12}^{(\ell)} & Y_{13}^{(\ell)} \\ Y_{21}^{(\ell)} & Y_{22}^{(\ell)} & Y_{23}^{(\ell)} \\ Y_{31}^{(\ell)} & Y_{32}^{(\ell)} & Y_{33}^{(\ell)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{1R} \\ \ell_{2R} \\ \ell_{3R} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix}_L M^{(\ell)} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_R - \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix}_L M^{(\ell)} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_R \frac{h}{v}, \end{aligned} \quad (1.138)$$

onde se introduziu a **matriz de massa dos fermiões**

$$M^{(\ell)} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{11}^{(\ell)} & Y_{12}^{(\ell)} & Y_{13}^{(\ell)} \\ Y_{21}^{(\ell)} & Y_{22}^{(\ell)} & Y_{23}^{(\ell)} \\ Y_{31}^{(\ell)} & Y_{32}^{(\ell)} & Y_{33}^{(\ell)} \end{pmatrix}.$$

Assim, o primeiro somando de (1.138) fornece a massa dos leptões, e o segundo somando representa a interacção entre os fermiões e o campo de Higgs. Para o segundo e terceiro somandos de (1.134) aplicando um raciocínio semelhante, escrevem-se as **matrizes de massa dos quarks n e p** :

$$M^{(n)} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{11}^{(n)} & Y_{12}^{(n)} & Y_{13}^{(n)} \\ Y_{21}^{(n)} & Y_{22}^{(n)} & Y_{23}^{(n)} \\ Y_{31}^{(n)} & Y_{32}^{(n)} & Y_{33}^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M^{(p)} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Y_{11}^{(p)} & Y_{12}^{(p)} & Y_{13}^{(p)} \\ Y_{21}^{(p)} & Y_{22}^{(p)} & Y_{23}^{(p)} \\ Y_{31}^{(p)} & Y_{32}^{(p)} & Y_{33}^{(p)} \end{pmatrix}.$$

E a expressão completa para massa dos fermiões e da sua interacção com o campo de Higgs, assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y \cong & - \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix}_L M^{(\ell)} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_R - \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix}_L M^{(\ell)} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_R \frac{h}{v} + \text{h.c.} \\ & - \begin{pmatrix} \bar{n}_1 & \bar{n}_2 & \bar{n}_3 \end{pmatrix}_L M^{(n)} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_R - \begin{pmatrix} \bar{n}_1 & \bar{n}_2 & \bar{n}_3 \end{pmatrix}_L M^{(n)} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_R \frac{h}{v} + \text{h.c.} \\ & - \begin{pmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \end{pmatrix}_L M^{(p)} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}_R - \begin{pmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \end{pmatrix}_L M^{(p)} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}_R \frac{h}{v} + \text{h.c.} \quad (1.139) \end{aligned}$$

As matrizes $M^{(\ell)}$, $M^{(n)}$ e $M^{(p)}$ não são diagonais, podendo, inclusive, nem serem hermiticas. Para efectuar a diagonalização recorre-se ao teorema da decomposição em valores singulares. Uma matriz M quadrada, complexa e arbitrária pode ser diagonalizada através de uma transformação biunitária, ou seja,

$$M = \Lambda_L D \Lambda_R^\dagger, \quad (1.140)$$

com as matrizes unitárias Λ_L e Λ_R^\dagger e a matriz D uma matriz diagonal de valores positivos. Os valores da diagonal de D denominam-se de valores singulares de M . Assim, o primeiro somando da equação (1.139) fica

$$- \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix}_L M^{(\ell)} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_R = - \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix}_L \Lambda_L^{(\ell)} D^{(\ell)} \left[\Lambda_R^{(\ell)} \right]^\dagger \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_R,$$

se se definir

$$\begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_R = \left[\Lambda_R^{(\ell)} \right]^\dagger \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_R \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_L = \left[\Lambda_L^{(\ell)} \right]^\dagger \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_L, \quad (1.141)$$

obtém-se

$$- \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix}_L M^{(\ell)} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_R = - \begin{pmatrix} \bar{e} & \bar{\mu} & \bar{\tau} \end{pmatrix}_L D^{(\ell)} \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_R. \quad (1.142)$$

Como a matriz $D^{(\ell)}$ tem a forma

$$D^{(\ell)} = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}, \quad (1.143)$$

resulta que

$$\begin{aligned} - \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix} M^{(\ell)} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \bar{e} & \bar{\mu} & \bar{\tau} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_R \\ &= -m_e \bar{e}_L e_R - m_\mu \bar{\mu}_L \mu_R - m_\tau \bar{\tau}_L \tau_R, \end{aligned} \quad (1.144)$$

onde m_e, m_μ e m_τ são as massas do electrão, do muão e do tau, respectivamente.

Somando a equação (1.144) ao seu conjugado hermítico, vem

$$\begin{aligned} - \begin{pmatrix} \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_2 & \bar{\ell}_3 \end{pmatrix} M^{(\ell)} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} + \text{h.c.} &= -m_e \bar{e}_L e_R - m_\mu \bar{\mu}_L \mu_R - m_\tau \bar{\tau}_L \tau_R \\ &\quad - m_e \bar{e}_R e_L - m_\mu \bar{\mu}_R \mu_L - m_\tau \bar{\tau}_R \tau_L \\ &= -m_e \bar{e} e - m_\mu \bar{\mu} \mu - m_\tau \bar{\tau} \tau. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Os restantes somandos da equação (1.139) são tratados da mesma forma, permitindo obter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &\cong -m_e \bar{e} e - m_\mu \bar{\mu} \mu - m_\tau \bar{\tau} \tau - \frac{m_e}{v} \bar{e} e h - \frac{m_\mu}{v} \bar{\mu} \mu h - \frac{m_\tau}{v} \bar{\tau} \tau h \\ &\quad - m_d \bar{d} d - m_s \bar{s} s - m_b \bar{b} b - \frac{m_d}{v} \bar{d} d h - \frac{m_s}{v} \bar{s} s h - \frac{m_b}{v} \bar{b} b h \\ &\quad - m_u \bar{u} u - m_c \bar{c} c - m_t \bar{t} t - \frac{m_u}{v} \bar{u} u h - \frac{m_c}{v} \bar{c} c h - \frac{m_t}{v} \bar{t} t h. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Vale a pena referir que o acoplamento entre qualquer fermião e o higgs é proporcional à massa do fermião.

Na Lagrangiana (1.132) é necessário analisar com detalhe o termo da CC, aplicando às componentes esquerdas dos neutrinos a mesma transformação usada nas componentes esquerdas dos leptões carregados, *i.e.*,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L = [\Lambda_L^{(\ell)}]^\dagger \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}_L \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{\nu}_e & \bar{\nu}_\mu & \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_3 \end{pmatrix}_L \Lambda_L^{(\ell)}, \quad (1.147)$$

a combinação com a equação (1.141) fornece

$$\begin{aligned}
 -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_{jL}\gamma^\mu\ell_{jL}W_\mu^+ &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_3 \end{pmatrix}_L\gamma^\mu\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_L W_\mu^+ \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_3 \end{pmatrix}_L\Lambda_L^{(\ell)}\gamma^\mu\left[\Lambda_L^{(\ell)}\right]^\dagger\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}_L W_\mu^+ \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{\nu}_e & \bar{\nu}_\mu & \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}_L\gamma^\mu\begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_L W_\mu^+,
 \end{aligned}$$

e para o conjugado hermítico obtém-se uma expressão análoga.

Para os dois somandos de (1.133), associados aos quarks,

$$\begin{aligned}
 -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{p}_{jL}\gamma^\mu n_{jL}W_\mu^+ &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \end{pmatrix}_L\gamma^\mu\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_L W_\mu^+ \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \bar{p}_3 \end{pmatrix}_L\Lambda_L^{(p)}\left[\Lambda_L^{(p)}\right]^\dagger\gamma^\mu\Lambda_L^{(n)}\left[\Lambda_L^{(n)}\right]^\dagger\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_L W_\mu^+ \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} & \bar{t} \end{pmatrix}_L\gamma^\mu\left[\Lambda_L^{(p)}\right]^\dagger\Lambda_L^{(n)}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L W_\mu^+.
 \end{aligned}$$

Se se introduzir a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM),

$$V = \left[\Lambda_L^{(p)}\right]^\dagger\Lambda_L^{(n)} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}, \quad (1.148)$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
 -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{p}_{jL}\gamma^\mu n_{jL}W_\mu^+ &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} & \bar{t} \end{pmatrix}_L\gamma^\mu V\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L W_\mu^+ \\
 &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} & \bar{t} \end{pmatrix}_L\gamma^\mu\begin{pmatrix} V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \\ V_{cd}d + V_{cs}s + V_{cb}b \\ V_{td}d + V_{ts}s + V_{tb}b \end{pmatrix}_L W_\mu^+, \quad (1.149)
 \end{aligned}$$

o que da sua análise permite concluir que os quarks do tipo n (d , s e b) são misturados pela matriz CKM.

Finalmente pode escrever-se a Lagrangiana do MP,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4.$$

- $\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$

– onde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c, & G_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ W_\mu^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ + W_\mu^-), & W_\mu^2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ - W_\mu^-) \\ W_\mu^3 &= \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu, & B_\mu &= -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu \end{aligned}$$

inclui os termos cinéticos associados às partículas W^+ , W^- , Z e γ e as suas interações.

- $\mathcal{L}_2 = (D^\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$
 - representa as massas das partículas W^+ , W^- , Z e γ , e ainda da partícula de Higgs, h , massas essas reveladas através da SSB no potencial $V(\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ quando $\mu^2 < 0$ sendo ϕ uma campo escalar complexo. Também inclui as interações entre a partícula de Higgs e os bosões de gauge. A relação relevante é $D_\mu = \partial_\mu\mathbb{1} + igW_\mu^a T^a + ig'B_\mu\frac{Y}{2}$ com $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ e $Y = \mathbb{1}$
- $\mathcal{L}_3 = i\psi_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ig'B_\mu\frac{Y}{2}\right)\psi_R + i\psi_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu + igW_\mu^a T^a + ig'B_\mu\frac{Y}{2}\right)\psi_L$
 - representa os termos cinéticos associados aos fermiões e as suas interações com as partículas W^+ , W^- , Z e γ . Os fermiões são descritos através das componentes esquerda e direita dos seus spinores ψ_L e ψ_R , respectivamente.
- $\mathcal{L}_Y = -Y_{jk}^{(\ell)}\bar{L}_{jL}\phi\ell_{kR} - Y_{jk}^{(n)}\bar{Q}_{jL}\phi n_{kR} - Y_{jk}^{(p)}\bar{Q}_{jL}\tilde{\phi}p_{kR} + \text{h.c.}$
 - representa a massa dos fermiões, assim como as interações destas partículas com a partícula de Higgs. As massas são reveladas, de novo, através do mecanismo de SSB no potencial. A massa dos quarks requer a introdução de um campo adicional $\tilde{\phi} = i\sigma^2\phi^*$.

1.2.10 Transformações de Lorentz

Como já se referiu, as simetrias e as leis de conservação assumem um papel de relevo na física e ainda mais na física de partículas. Mas, como se vai verificar, é necessária alguma prudência quando se tenta associar uma simetria a uma lei de conservação. Por outro lado, a violação das simetrias é a porta de entrada para a compreensão de alguns fenómenos, como, por exemplo, o domínio da matéria sobre a antimatéria no universo.

A TRR impõe que uma lei física deve ser expressa pela mesma equação em qualquer referencial de inércia. A equação de Dirac satisfaz esse princípio, diz-se que é relativisticamente invariante, ou covariante.

Uma transformação de Lorentz (TL) é uma transformação linear e real das coordenadas do espaço-tempo,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.150)$$

que conserva o comprimento do elemento de linha definido pela métrica de Lorentz:

$$dx'^\mu dx'_\mu = dx^\mu dx_\mu.$$

O conjunto de todas as TL constitui um grupo denominado **grupo de Lorentz não homogéneo** ou **grupo de Poincaré**. A expressão não homogéneo, resulta da presença do quadrivector a^μ , que representa as translações no espaço-tempo.

Para efeito da discussão que se segue, considera-se o grupo de Lorentz homogéneo, que não inclui as translações. Assim, as transformações de Lorentz homogéneas têm a forma

$$x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x'^{\nu}, \quad \left[\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \right]. \quad (1.151)$$

Esta transformação pode ser invertida, fornecendo

$$x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu}, \quad \left[(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \right]. \quad (1.152)$$

As TL são classificadas em contínuas e discretas, de acordo com a sua dependência, ou não, de um ou mais parâmetros que podem variar de forma contínua. As transformações contínuas são as translações no espaço-tempo, as rotações e os *boosts*; as transformações discretas envolvem reflexões no espaço e/ou no tempo.

1.2.10.1 Invariância de Lorentz da equação de Dirac

A equação de Dirac é,

$$(i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi(x) = 0, \quad (1.153)$$

em primeiro lugar, aplica-se uma TL homogénea, equação (1.151), esperando que a forma da equação de Dirac seja

$$(i \gamma^{\mu} \partial'_{\mu} - m) \psi'(x') = 0. \quad (1.154)$$

Os spinores transformam-se como

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S_{\Lambda} \psi(x), \quad (1.155)$$

onde S_{Λ} é uma transformação linear que depende da TL, Λ , e que actua no espaço dos spinores. Assim, se se introduzir (1.155) em (1.154), obtém-se

$$(i \gamma^{\mu} \partial'_{\mu} - m) S_{\Lambda} \psi(x) = 0 \Rightarrow \left(i \gamma^{\mu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} - m \right) S_{\Lambda} \psi(x) = 0. \quad (1.156)$$

Multiplicando pela esquerda por S_{Λ}^{-1} ,

$$S_{\Lambda}^{-1} \left(i \gamma^{\mu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} - m \right) S_{\Lambda} \psi(x) = 0 \Rightarrow \left(i S_{\Lambda}^{-1} \gamma^{\mu} S_{\Lambda} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} - m \right) \psi(x) = 0, \quad (1.157)$$

que coincide com (1.153), impondo a condição

$$S_{\Lambda}^{-1} \gamma^{\mu} S_{\Lambda} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} = \gamma^{\nu} \partial_{\nu} \Rightarrow S_{\Lambda}^{-1} \gamma^{\mu} S_{\Lambda} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} = \gamma^{\nu}. \quad (1.158)$$

A sua multiplicação pela direita por Λ^{ρ}_{ν} ,

$$S_{\Lambda}^{-1} \gamma^{\mu} S_{\Lambda} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \Lambda^{\rho}_{\nu} = \gamma^{\nu} \Lambda^{\rho}_{\nu} \Rightarrow S_{\Lambda}^{-1} \gamma^{\mu} S_{\Lambda} \delta_{\mu}^{\rho} = \Lambda^{\rho}_{\nu} \gamma^{\nu}, \quad (1.159)$$

permite obter

$$S_{\Lambda}^{-1} \gamma^{\rho} S_{\Lambda} = \Lambda^{\rho}_{\nu} \gamma^{\nu}. \quad (1.160)$$

1.2.10.2 Paridade e inversão temporal

As TL que podem ser obtidas pela deformação contínua da transformação identidade (sucessivas transformações infinitésimas arbitrariamente próximas da identidade), constituem o grupo próprio

de Lorentz. No entanto, além das transformações próprias, o grupo de Lorentz também inclui as transformações (impróprias) discretas de paridade (inversão espacial), P , e inversão temporal, T :

$$(\Lambda_P)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\Lambda_T)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a transformação de paridade corresponde à mudança de sinal das coordenadas espaciais, enquanto que na inversão temporal, é apenas a coordenada temporal que troca de sinal.

É necessário encontrar a matriz S_P que satisfaça a condição (1.160),

$$S_P^{-1} \gamma^0 S_P = \gamma^0, \quad S_P^{-1} \gamma^i S_P = -\gamma^i. \quad (1.161)$$

Uma possível solução é γ^0 , $S_P = S_P^{-1} = \gamma^0$, e assim os spinores são transformados como

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi_P = S_P \psi(-\mathbf{x}, t).$$

Numa transformação de paridade as componentes esquerdas dos férmions $\psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi$ transformam-se em $\psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi$, e vice-versa. Dado que as CC no MP só envolvem as componentes esquerdas, a paridade não é uma boa simetria para a interação fraca, não obstante, a QCD e a QED são invariantes para a mesma transformação.

Por simplicidade da notação, adopta-se para o operador paridade P em vez de S_P . O mesmo irá suceder para os operadores seguintes.

Uma escolha adequada para o operador inversão temporal, T , é

$$T = i\gamma^1\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1\sigma_3 \\ -i\sigma_1\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.162)$$

com os campos de férmions a transformar como

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi_T = T\psi = i\gamma^1\gamma^3\psi(\mathbf{x}, -t).$$

1.2.10.3 Conjugação de carga

Outra simetria discreta da equação de Dirac é a conjugação de carga, que transforma uma partícula na sua antipartícula, e vice-versa, no mesmo estado. De outra forma, é a transformação que relaciona cada campo complexo, ϕ com ϕ^\dagger .

Para campos escalares a conjugação de carga é apenas a conjugação complexa. Por sua vez, para os spinores é

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi_C = C\bar{\psi}^T(\mathbf{x}, t) \quad \text{com} \quad \bar{\psi}^T = (\psi^\dagger\gamma^0)^T = \gamma^{0T}\psi^{\dagger T} = \gamma^0\psi^*. \quad (1.163)$$

Para encontrar a forma de C , faz-se a conjugação complexa da equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^* \psi^* = \left(i(\gamma^{\mu\dagger})^T \partial_\mu - m\right) (\psi^\dagger)^T = \gamma^{0T} (-i\gamma^{\mu T} \partial_\mu - m) \bar{\psi}^T = 0, \quad (1.164)$$

onde se usou $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$. A introdução do operador C torna a equação de Dirac

$$(-iC\gamma^{\mu T}C^{-1}\partial_\mu - m)\psi_C = 0. \quad (1.165)$$

Para que ψ_C satisfaça a equação de Dirac, C deve ser uma matriz sujeita à condição,

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \quad (C^{-1} = C^\dagger). \quad (1.166)$$

Na representação de Dirac, uma escolha adequada para este operador é

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.167)$$

e a conjugação de carga é dada por

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi_C = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T = i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi^* = i\gamma^2\psi^*(\mathbf{x}, t), \quad (1.168)$$

onde se levou em conta (1.163).

Sob C as correntes transformam-se como:

$$\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_2\gamma_\mu\psi_1 \quad \text{e} \quad \bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 \rightarrow \bar{\psi}_2\gamma_\mu\gamma_5\psi_1,$$

onde ψ_i representa o spinor do sabor do leptão i . Também a conjugação de carga só é uma boa simetria para as interacções electromagnética e forte.

1.2.10.4 Simetrias CP e CPT

Sob a transformação combinada CP as correntes transformam-se como:

$$\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1 \quad \text{e} \quad \bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 \rightarrow -\bar{\psi}_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_1,$$

onde os campos no lado esquerdo (direito) são respeitantes às coordenadas (\mathbf{x}, t) ($(-\mathbf{x}, t)$). Apesar de individualmente as transformações de paridade e de conjugação de carga serem violadas individualmente na interacção fraca, a operação combinada CP é invariante¹. Considere-se o exemplo dos neutrinos, que como se sabe, só interagem através da interacção fraca.

Não deixa de ser um facto extraordinário que na natureza só se observem neutrinos esquerdos e antineutrinos direitos, o que viola claramente a invariância C , que requer que neutrinos e antineutrinos tenham interacções fracas idênticas. Também viola a invariância P , que requer, igualmente, que os estados ν_L e ν_R tenham interacções fracas idênticas, uma vez que o operador P inverte o momento linear, mantendo o spin inalterado, e assim converte um neutrino esquerdo num neutrino direito (não observado na natureza). No entanto, é compatível com a invariância CP , uma vez que o operador CP converte um neutrino esquerdo num antineutrino direito, ver figura (1.3).

Apesar da transformação CP não ser conservada, continuam a existir boas razões para acreditar que todas as interacções são invariantes para a operação combinada da conjugação de carga, C , da transformação de paridade, P , e da inversão do tempo, T , independentemente da ordem pela qual sejam tomadas. Este resultado traduz o denominado **teorema CPT** . Tal como a operação CP , também a CPT converte partículas em repouso em antipartículas em repouso, e a sua invariância requer que partículas e antipartículas tenham a mesma massa e o mesmo tempo de vida. Uma

¹Está bem estabelecido experimentalmente a violação CP nas interacções fracas no sector hadrónico, no entanto, esse assunto não será abordado.

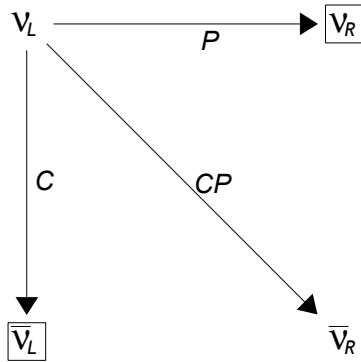


Figura 1.3: Efeito das transformações P , C e CP num neutrino esquerdo; os estados com assinalados em caixas não são observados na natureza. Adaptado de [MS08]

das consequências do teorema CPT é que a violação de CP e de T são equivalentes. Assim, dado que a violação de CP é um resultado bem estabelecido no sector hadrónico, pode concluir-se de imediato que a simetria T também é violada.

O efeito conjunto das três operações num campo de Dirac, é

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi_{CPT} = -i\gamma^5\psi^*(-\mathbf{x}, -t).$$

Assim, a menos do factor γ^5 , uma partícula movendo-se num sentido é equivalente a uma antipartícula movendo-se em sentido oposto (no espaço e no tempo).

Capítulo 2

Física de Neutrinos

Os neutrinos ganharam um espaço de destaque na Física de Partículas, se por um lado são as partículas mais abundantes, por outro lado são as mais invulgares. Os neutrinos são hoje um meio de olhar para o Sol, para as supernovas e para o interior da Terra. No MP os neutrinos não têm massa, no entanto, é um dado experimentalmente adquirido que os neutrinos têm massa, por mais pequena que seja, nem que sejam necessários duzentos mil neutrinos para equilibrar os pratos de uma balança com um electrão, ela, a massa, tem obrigatoriamente de ser não-nula. A forma de gerar a massa através do mecanismo padrão de Higgs não é aplicável aos neutrinos, a natureza terá escolhido outro mecanismo, como por exemplo, o mecanismo *seesaw*, que será discutido adiante. Antes, e atendendo ao carácter dos neutrinos, que permanece dúbio, apresentam-se os termos de massa de Dirac e de Majorana. O fenómeno da mistura de neutrinos é discutido no quadro da invariância CP no sector leptónico, efectuando-se a parametrização da matriz unitária de mistura, a matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata. A detecção de neutrinos apresenta-se como um desafio experimental, envolvendo enormes colaborações e grandes meios, numa desproporcionalidade imensa quando comparada com a sua dimensão pontual. As fontes de neutrinos são as mais variadas, decaimentos fracos de píões, processos de interacção de raios cósmicos na atmosfera, decaimento de muões, decaimentos β de núcleos, reacções nucleares no Sol, etc. No sentido de se obter uma escala de massa cada vez mais precisa para os neutrinos tem-se prosseguido na procura do duplo decaimento β sem emissão de neutrinos e pela medição directa da massa de neutrinos através da investigação de decaimentos β ou captura electrónica. Para além destes dois métodos de pesquisa, também se apresenta o fenómeno das oscilações e os resultados mais recentes na sua investigação. A pesquisa do duplo decaimento β sem emissão de neutrinos na colaboração SNO+, terá um destaque devido à utilização do alquilbenzeno como cintilador líquido, onde se faz uma digressão pelos principais aspectos da experiência.

No actual quadro existe um conjunto de questões que continuam sem resposta, e que a geração de experiências a decorrer ou em fase de desenvolvimento e pesquisa, procuram dar resposta.

- Os neutrinos são partículas de Dirac ou de Majorana?
- A invariância CP é violado no sector leptónico?
- Qual é o carácter do espectro de massa dos neutrinos?
- Quais são os valores absolutos das massas dos neutrinos?

Todas estas questões serão abordadas nas próximas secções.

2.1 Propriedades dos neutrinos

Na TQC as partículas com $\text{spin} = \frac{1}{2}$ são descritas por funções de onda de quatro componentes $\psi(x)$ que obedecem à equação de Dirac. As quatro componentes independentes de $\psi(x)$ correspondem a partículas e antipartículas com as duas possíveis projecções de spin, $J_z = \pm \frac{1}{2}$, equivalentes às duas helicidades, $\mathcal{H} = \pm 1$. Os neutrinos como leptões fundamentais que são, possuem $\text{spin} = \frac{1}{2}$, no

entanto, é um facto experimental que só se observam neutrinos esquerdos ($\mathcal{H} = -1$) e antineutrinos direitos ($\mathcal{H} = 1$).

2.1.1 Helicidade e quiralidade

A equação de Dirac é a equação de onda relativista para partículas de spin- $\frac{1}{2}$ e é dada por

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.1)$$

Aqui ψ representa o spinor de quatro componentes e as matrizes γ , 4×4 , são dadas na forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

onde os σ^i correspondem às matrizes de Pauli, 2×2 , com γ_5 a ser igual a

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

e as relações de anticomutação

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

$$\{\gamma^\alpha, \gamma_5\} = 0, \quad (2.5)$$

onde $g_{\alpha\beta} = (+1, -1, -1, -1)$.

A equação de Dirac pode ser reescrita como

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi = 0, \quad (2.6)$$

uma multiplicação pela esquerda por γ^0 , resulta em

$$(i\partial_0 + i\gamma^0\gamma^i\partial_i - m\gamma^0)\psi = 0, \quad (2.7)$$

que com a multiplicação por γ_5 , fica

$$(i\partial_0\gamma_5 + i\gamma_5\gamma^0\gamma^i\partial_i - m\gamma_5\gamma^0)\psi = 0. \quad (2.8)$$

O desenvolvimento do termo $\gamma_5\gamma^0\gamma^i$, é

$$\begin{aligned} \gamma_5\gamma^0\gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} = \Sigma^i, \end{aligned}$$

e

$$i\Sigma^i\partial_i = \Sigma^i p_i = -\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} \quad \text{com} \quad i\partial_i = i\frac{\partial}{\partial^i} = -\mathbf{p}. \quad (2.9)$$

Desta forma, a equação (2.8) toma a forma

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}\psi = (i\partial_0 + m\gamma^0)\gamma_5\psi, \quad (2.10)$$

e

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}\psi = (E + m\gamma^0) \gamma_5 \psi. \quad (2.11)$$

Se $m = 0$, em função das projecções quirais, tem-se

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}\psi = E\gamma_5\psi \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_L = E\gamma_5\psi_L = -E\psi_L = -|\mathbf{p}|\psi_L \\ \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_R = E\gamma_5\psi_R = E\psi_R = +|\mathbf{p}|\psi_R \end{cases} \quad (2.12)$$

A última equação implica que $\psi_{L,R}$ são funções próprias do operador helicidade, \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (2.13)$$

ψ_L é um spinor próprio com valores próprios da helicidade $\mathcal{H} = -1$ para partículas e $\mathcal{H} = +1$ para antipartículas. Da mesma forma, ψ_R é um spinor próprio com valores próprios da helicidade $\mathcal{H} = +1$ para partículas e $\mathcal{H} = -1$ para antipartículas. Portanto, no caso de partículas sem massa, a quiralidade e a helicidade são iguais. Para $m > 0$, $\psi_{L,R}$ não descrevem partículas com helicidade fixa e a helicidade deixa de ser um bom número quântico conservado.

2.1.2 Conjugação de carga

Enquanto que para todos os fermiões carregados do MP pode ser feita uma clara distinção entre partícula e antipartícula através da carga eléctrica, para os neutrinos essa distinção já não é óbvia. Se partícula e antipartícula não são idênticas, tais fermiões designam-se **partículas de Dirac**. Se a partícula e a antipartícula são idênticas, denominam-se **partículas de Majorana**. Seja $\psi(x)$ o campo de um neutrino livre, e o correspondente campo conjugado, ψ^c , é definido por

$$\psi \xrightarrow{C} \psi^c \equiv C\psi C^{-1} = \eta_C C \bar{\psi}^T \quad (2.14)$$

com η_C como o factor de fase, $|\eta_C| = 1$. Utilizando os operadores de projecção,

$$\begin{aligned} L\psi &= \psi_L \xrightarrow{C} L\psi^c = (\psi^c)_L = (\psi_R)^c \\ R\psi &= \psi_R \xrightarrow{C} R\psi^c = (\psi^c)_R = (\psi_L)^c. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se ψ é um estado próprio da quiralidade, ψ^C também o é, mas com um valor próprio de sinal oposto. Mais ainda, a equação (2.15) mostra que a conjugação de carga C transforma uma partícula de quiralidade direita (esquerda) numa antipartícula de quiralidade esquerda (direita), deixando a helicidade inalterada. Apenas a aplicação adicional da transformação de paridade altera a helicidade. No entanto, a operação (2.14) converte uma partícula direita (esquerda) numa antipartícula esquerda (direita), convertendo a helicidade e quiralidade. Para incluir o facto de $\psi_{L,R}$ e $\psi_{L,R}^c$ terem helicidades opostas, é usual evitar referir $\psi_{L,R}^c$ como o conjugado de carga de $\psi_{L,R}$, assim, é mais frequente utilizar a expressão *conjugado CP* de $\psi_{L,R}$.

2.1.3 Transformação de paridade

A operação transformação de paridade P é definida como

$$\psi(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{P} P\psi(\mathbf{x}, t)P^{-1} = \eta_P \gamma_0 \psi(-\mathbf{x}, t). \quad (2.16)$$

O factor de fase η_P com $|\eta_P| = 1$ corresponde a reais $\eta_P = \pm 1$ para a paridade intrínseca. Utilizando (2.14) para o campo conjugado de carga,

$$\psi^c = \eta_C C \bar{\psi}^T \xrightarrow{P} \eta_C \eta_P^* C \gamma_0^T \bar{\psi}^T = -\eta_P^* \gamma_0 \psi^c. \quad (2.17)$$

Isto implica que um fermião e o seu correspondente antifermião têm paridades opostas, *i.e.*, para uma partícula de Majorana $\psi^c = \pm \psi$ o que resulta em $\eta_P = -\eta_P^*$. Como tal, para neutrinos de Majorana algo interessante ocorre. Um campo de Majorana pode ser escrito como

$$\psi_M = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi + \eta_C \psi^c) \quad \text{com} \quad \eta_C = \lambda_C e^{2i\phi}, \quad \lambda_C = \pm 1 \quad (2.18)$$

onde λ_C é denominada fase de criação. Aplicando a transformação de fase

$$\psi_M \rightarrow \psi_M e^{-i\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi e^{-i\phi} + \lambda_C \psi^c e^{i\phi}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi + \lambda_C \psi^c) \equiv \psi_M \quad (2.19)$$

pode ser verificado que o campo ψ_M é um estado próprio respeitante à conjugação de carga,

$$\psi_M^c = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^c + \lambda_C \psi) = \lambda_C \psi_M \quad (2.20)$$

com valores próprios $\lambda_C = \pm 1$. Isto significa que a partícula de Majorana é idêntica à sua antipartícula, ou seja, ψ_M e ψ_M^c são indistinguíveis. Em relação à transformação CP ,

$$\psi_M(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{C} \psi_M^c = \lambda_C \psi_M \xrightarrow{P} \frac{\lambda_C}{\sqrt{2}} (\eta_P \gamma_0 \psi - \lambda_C \eta_P^* \gamma_0 \psi^c) \quad (2.21)$$

$$= \lambda_C \eta_P \gamma_0 \psi_M = \pm i \gamma_0 \psi_M(-\mathbf{x}, t), \quad (2.22)$$

dado que $\eta_P^* = -\eta_P$. Assim, a paridade intrínseca de uma partícula de Majorana é imaginária, $\eta_P = \pm i$ se $\lambda_C = \pm 1$. Finalmente de (2.19)

$$(\gamma_5 \psi_M)^c = \eta_C C (\bar{\gamma}_5 \bar{\psi}_M)^T = -\eta_C \gamma_5^T \bar{\psi}_M^T = -\gamma_5 \psi_M^c = -\lambda_C \gamma_5 \psi_M \quad (2.23)$$

porque $\gamma_5 \bar{\psi}_M = (\gamma_5 \psi_M)^\dagger \gamma_0 = \psi_M^\dagger \gamma_5 \gamma_0 = -\bar{\psi}_M \gamma_5$. Em conjunto com (2.15) conclui-se que um estado próprio para C não pode ser simultaneamente um estado próprio para a quiralidade. Um neutrino de Majorana não tem, portanto, quiralidade fixa.

2.1.4 Número leptónico

Da invariância das equações do movimento sob certas transformações de simetria surgem números quânticos conservados. Simetrias contínuas (*e.g.*, translação) podem ser descritas por números reais e conduzem a números quânticos aditivos, enquanto simetrias discretas (*e.g.*, reflexões espaciais em torno da origem) conduzem a números quânticos multiplicativos. Para alguns deles as operações de simetria subjacentes são conhecidas. No entanto, alguns números quânticos ainda não foram associados a uma simetria fundamental, como são os caso do número bariónico, B , ou do número leptónico, L , e a sua conservação é apenas motivada pelos dados experimentais. O número leptónico foi introduzido para caracterizar as observações experimentais da interacção fraca. Cada leptão tem $L = +1$ e cada antileptão tem $L = -1$. Cada geração de leptões tem o seu próprio número leptónico L_e, L_μ, L_τ com $L = L_e + L_\mu + L_\tau$. Os números leptónicos individuais não são conservados como consequência da observação do fenómeno das oscilações de neutrinos (cf. Sec. 2.7).

Considerem-se os quatro escalares de Lorentz e a transformação de fase global, $e^{i\alpha}$:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi} \quad \text{de tal forma que} \quad \bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi \quad (2.24)$$

$$\psi^c \rightarrow (e^{i\alpha} \psi)^c = \eta_C C e^{i\bar{\alpha}} \psi^T = e^{-i\alpha} \psi^c \quad \text{e} \quad \bar{\psi}^c \rightarrow e^{i\alpha} \bar{\psi}^c. \quad (2.25)$$

Como se pode verificar, $\bar{\psi}\psi$ e $\bar{\psi}^c\psi^c$, são invariantes para esta transformação e estão ligados a um número quântico conservado, nomeadamente, o número leptónico: ψ aniquila um leptão ou cria um antileptão, $\bar{\psi}$ actua de modo inverso. $\bar{\psi}\psi$ e $\bar{\psi}^c\psi^c$ forçam transições do tipo $\ell \rightarrow \ell$ e $\bar{\ell} \rightarrow \bar{\ell}$ com $\Delta L = 0$. As outras duas combinações para os escalares de Lorentz, $\bar{\psi}\psi^c$ e $\bar{\psi}^c\psi$, que forçam transições da forma $\ell \rightarrow \bar{\ell}$ e $\bar{\ell} \rightarrow \ell$, correspondem a $\Delta L = \pm 2$. Para leptões carregados, transições com violação do número leptónico violam a conservação de carga eléctrica e não são permitidas (*i.e.*, $e^- \rightarrow e^+$), assim, apenas termos de massa de Dirac são admitidos.

Como não é conhecida nenhuma simetria fundamental associada à conservação do número leptónico, pode pensar-se em observar violações de sabor de leptões. Um teste clássico à conservação dos números leptónicos individuais é a conversão de muões em núcleos:

$$\begin{array}{rccccccc} & \mu^- & + & \frac{A}{Z}X & \rightarrow & \frac{A}{Z}X & + & e^- \\ L_e & 0 & + & 0 & \rightarrow & 0 & + & 1 \\ L_\mu & 1 & + & 0 & \rightarrow & 0 & + & 0 \end{array}$$

Isto violaria a conservação dos números leptónicos individuais, mas deixaria o número leptónico total inalterado. No entanto, a reacção favorita para distinguir o carácter dos neutrinos, de Dirac ou de Malorana, e como tal, estabelecer a violação do número leptónico total é o duplo decaimento β sem emissão de neutrinos ($0\nu\beta\beta$), que será apresentado na Sec. 2.6.

2.2 Massa de neutrinos

A análise efectuada nesta secção é baseada na bibliografia [Bil10, Zub12], e esse facto será enfatizado ocasionalmente efectuando referências explícitas em determinadas passagens.

A ideia da existência do neutrino remonta a 1930, quando W. Pauli a propôs para salvar a lei de conservação da energia no decaimento β . Quando a hipótese foi avançada as únicas partículas consideradas elementares conhecidas eram o electrão e o protão, fazendo do neutrino uma das partículas elementares mais antigas a ser considerada. No entanto, a sua existência só foi comprovada em 1956, por Clyde Cowan e Fred Reines. Hoje sabe-se que existem doze fermiões na natureza: Estão agrupados em três gerações que diferem na massa, mas que têm igual interacção electrofraca

1 ^a geração	u	d	e^-	ν_e
2 ^a geração	c	s	μ^-	ν_μ
3 ^a geração	t	b	τ^-	ν_τ

com fotões e bosões W^\pm e Z . Na Lagrangiana da interacção electrofraca os neutrinos entram em pé de igualdade com os quarks e os leptões carregados, existem, no entanto, duas diferenças entre os neutrinos os outros fermiões:

- nas energias disponíveis, a secção eficaz da interacção de neutrinos com a matéria é muitas ordens de grandeza menor do que a secção eficaz da interacção electromagnética de leptões carregados. Isto está relacionado com o facto de os neutrinos interagirem com a matéria apenas através da troca de bosões W^\pm e Z , que como se sabe possuem massas elevadas;
- a massa dos neutrinos é muitas ordens de grandeza menor do que as massas dos quarks e dos leptões carregados.

Devido ao valor muito pequeno da secção eficaz da interacção dos neutrinos com a matéria, foi necessário desenvolver métodos especiais de detecção, no entanto, após o seu desenvolvimento a observação dos processos envolvendo neutrinos permitiu obter informação única:

- a medição da secção eficaz de processos do tipo, $\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) + N \longrightarrow \mu^- (\mu^+) + X$, conduziu ao estabelecimento da estrutura dos nucleões, *i.e.*, a sua constituição em quarks;
- a detecção de neutrinos solares permitiu estabelecer a origem nuclear da energia solar e obter informação sobre a região central e invisível do Sol, onde decorrem as reacções que a originam;
- a detecção de neutrinos da explosão de uma supernova permite investigar o mecanismo de colapso gravitacional.

A medição das pequenas massas dos neutrinos constitui um desafio difícil e que não está resolvido. A observação de novos fenómenos, como a oscilação de neutrinos (transição entre diferentes sabores de neutrinos) em 1998, possibilita a determinação do quadrado da diferença de massas de neutrinos, Δm^2 . A partir dos dados de oscilação de neutrinos e da análise do decaimento β , é possível concluir que:

- as massas dos neutrinos são diferentes de zero;
- as massas dos neutrinos são $\lesssim 2$ eV.

A oscilação de neutrinos é um indicador de uma física para além do MP. No quadro do MP o pequeno valor das massas dos neutrinos não pode ser explicado de forma natural, é necessário um

novo mecanismo de geração da massa. A descoberta da oscilação de neutrinos significa que os estados de sabor dos neutrinos são sobreposições de estados de neutrinos com massas definidas. Os estados de sabor estão ligados aos estados de massa através da matriz de mistura que é caracterizada por três ângulos de mistura e uma fase. Este fenómeno é similar à mistura de quarks, no entanto, os ângulos de mistura de quarks são pequenos e satisfazem uma hierarquia. Os ângulos de mistura de neutrinos são diferentes: dois ângulos são grandes e um é pequeno, embora os mais recentes resultados (*e.g.*, Daya Bay [A⁺12b]) mostrem claramente que não é tão pequeno como inicialmente se previa. Esta discrepância sugere que a mistura de quarks e de neutrinos têm origens diferentes. A explicação mais comum para o valor da massa dos neutrinos ser extremamente pequeno, é baseada na assunção da violação do número leptónico total à escala das Teorias de Grande Unificação, GUT ($10^{15} - 10^{16}$ GeV). Se isto for correcto, os neutrinos com massas definidas são verdadeiramente partículas de Majorana. Os leptões carregados e os quarks, são partículas de Dirac. Os leptões e antileptões e os quarks e antiquarks são partículas diferentes. Têm a mesma massa mas as suas cargas eléctricas são de sinal oposto. Se os neutrinos são partículas de Majorana, então serão idênticos aos antineutrinos. A eventual observação do $0\nu\beta\beta$,

$$(Z, A) \longrightarrow (Z+2, A) + 2e^-,$$

será uma prova de que os neutrinos são partículas de Majorana.

2.2.1 Termos de massa dos neutrinos

O termo de massa dos neutrinos é o objecto central na teoria de mistura e de massa de neutrinos. Determina a massa dos neutrinos, a mistura de neutrinos e a própria natureza dos neutrinos (Dirac ou Majorana). A possibilidade da existência dos denominados neutrinos estéreis é também determinada pelo termo de massa.

Nas teorias modernas os termos de massa dos fermiões aperecem na Lagrangiana como resultado da quebra de simetrias. A discussão seguinte será geral, baseada na invariância de Lorentz, onde se consideram todos os tipos de termos possíveis. Foi estabelecido no LEP, CERN, que existem três sabores de neutrinos leves na natureza, ν_e , ν_μ e ν_τ . Estes sabores tomam parte nos processos fracos de CC e CN,

$$j_\alpha^{\text{CC}}(x) = 2\bar{\nu}_{\ell L}(x) \gamma_\mu \ell_L(x), \quad j_\alpha^{\text{NC}}(x) = \bar{\nu}_{\ell L}(x) \gamma_\mu \nu_{\ell L}(x), \quad \text{com } \ell = e, \mu, \tau. \quad (2.26)$$

Aqui ℓ é o operador dos leptões carregados ℓ^\pm de massa m_ℓ , os campos $\nu_{\ell L}(x)$ devem entrar no termo de massa do neutrino, e a sua estrutura deve depender de:

- outros campos (se esse for o caso) que entrem no termo de massa,
- conservação do número leptónico total, $L = L_e + L_\mu + L_\tau$.

2.2.1.1 Termo de massa de Dirac

O termo de massa para qualquer campo com spin- $\frac{1}{2}$ é

$$\mathcal{L}^D = -m_D \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad (2.27)$$

onde $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ é invariante de Lorentz e hermitico. Dado que a Lagrangiana também deve ser hermitica, implica que m_D deve ser real ($m_D^* = m_D$). Para dois spinores arbitrários $\psi(x)$ e $\phi(x)$,

$$\bar{\psi}_L(x)\phi_L(x) = \bar{\psi}(x)RL\phi(x) = 0, \quad \bar{\psi}_R(x)\phi_R(x) = \bar{\psi}(x)LR\phi(x) = 0$$

e

$$\bar{\psi}(x)\phi(x) = (\bar{\psi}_L(x) + \bar{\psi}_R(x))(\phi_L(x) + \phi_R(x)) = \bar{\psi}_L(x)\phi_R(x) + \bar{\psi}_R(x)\phi_L(x).$$

Desta forma o termo de massa de Dirac pode ser escrito nas componentes quirais como

$$\mathcal{L}^D = -m_D\bar{\psi}_L(x)\psi_R(x) + \text{h.c.} \quad (2.28)$$

Assumindo que além das componentes esquerdas dos campos de sabor, $\nu_{\ell L}(x)$, também entram as três componentes direitas $\nu_{\ell R}(x)$ no termo de massa, o termo de massa dos neutrinos mais geral terá a forma

$$\mathcal{L}^D = -\bar{\nu}_{\ell' L}(x)M_{\ell'\ell}^D\nu_{\ell R}(x) + \text{h.c.}, \quad (2.29)$$

onde os índices ℓ e ℓ' correm para e, μ e τ e $M_{\ell'\ell}^D$ é uma matrix complexa 3×3 .

Verifica-se que se o termo de massa em \mathcal{L}^D entrar na \mathcal{L} total, a invariância para as seguintes transformações de fase global

$$\nu'_{\ell L}(x) = e^{i\theta}\nu_{\ell L}(x), \quad \nu'_{\ell R}(x) = e^{i\theta}\nu_{\ell R}(x), \quad \ell'(x) = e^{i\theta}\ell(x) \quad (2.30)$$

mantém-se. θ é uma constante de fase arbitrária. A invariância para estas transformações tem como consequência a conservação do número leptónico total.

A matrix complexa pode ser diagonalizada através de transformação biunitária [Bil10],

$$M^D = U^\dagger mV, \quad (2.31)$$

onde U e V são matrices unitárias e $m_{ik} = m_i\delta_{ik}$, $m_i > 0$. Das equações (2.29) e (2.31),

$$\nu_{\ell L}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{\ell i}\nu_{iL}(x), \quad \ell = e, \mu, \tau \quad (2.32)$$

e

$$\nu_{\ell R}(x) = \sum_{i=1}^3 V_{\ell i}\nu_{iR}(x), \quad \ell = e, \mu, \tau. \quad (2.33)$$

A matrix unitária U , 3×3 , na eq. (2.32) é denominada matrix de mistura de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakada (PMNS), cuja parametrização será efectuada na Sec. (2.3.1).

O termo de massa (2.29) tem a forma

$$\mathcal{L}^D = -\sum_{i=1}^3 m_i\bar{\nu}_i(x)\nu_i(x). \quad (2.34)$$

A partir das equações (2.32) e (2.34), conclui-se que:

- $\nu_i(x)$ é o campo dos neutrinos com massa definida, m_i ($i = 1, 2, 3$),
- as componentes esquerdas dos campos de sabor $\nu_{\ell L}(x)$, que entram nas CC e CN, são misturas de campos $\nu_i(x)$ com massas definidas,
- para produzir o termo de massa são necessárias as duas componentes esquerda e direita, como

no MP só existem neutrinos esquerdos, fica claro que no MP os neutrinos não têm massa.

A partir das equações (2.30), (2.32) e (2.33) resulta que a \mathcal{L} total é invariante para as transformações

$$\nu'_i(x) = e^{i\theta} \nu_i(x), \quad \ell'(x) = e^{i\theta} \ell(x). \quad (2.35)$$

Esta invariância significa que ν_i é o campo de Dirac dos neutrinos e antineutrinos, que são partículas com a mesma massa. Os números leptônicos dos neutrinos e antineutrinos são simétricos: $L(\nu_i) = 1$ e $L(\bar{\nu}_i) = -1$. O termo de massa em (2.29) denomina-se **termo de massa de Dirac**.

2.2.1.2 Termo de massa de Majorana

Um termo de massa é a soma de produtos invariantes de Lorentz das componentes esquerdas e direitas do campo. De seguida, mostra-se que os campos conjugados

$$(\nu_{\ell L})^C = C(\bar{\nu}_{\ell L})^T \quad \text{e} \quad (\nu_{\ell R})^C = C(\bar{\nu}_{\ell R})^T \quad (2.36)$$

são, correspondentemente, campos direitos e esquerdos. C é a matriz unitária de conjugação de carga, que satisfaz as relações

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu, \quad C^T = -C. \quad (2.37)$$

Por outro lado,

$$\gamma_5 \nu_{\ell L} = -\nu_{\ell L}, \quad \gamma_5 \nu_{\ell R} = \nu_{\ell R}. \quad (2.38)$$

A partir destas relações pela conjugação hermítica e multiplicação por γ_0 , pela direita, obtém-se

$$\bar{\nu}_{\ell L} \gamma_5 = \nu_{\ell L}, \quad \bar{\nu}_{\ell R} \gamma_5 = -\nu_{\ell R} \quad (2.39)$$

e pela transposição e multiplicação pela esquerda da matriz C vem

$$\gamma_5 (\nu_{\ell L})^C = (\nu_{\ell L})^C \quad \text{e} \quad \gamma_5 (\nu_{\ell R})^C = -(\nu_{\ell R})^C, \quad (2.40)$$

onde se fez uso de $C\gamma_5^T C^{-1} = \gamma_5$. Segue-se que $(\nu_{\ell L})^C$ é a componente direita e $(\nu_{\ell R})^C$ é a componente esquerda. De (2.36) e (2.37),

$$\overline{(\nu_{\ell L})^C} = -\nu_{\ell L}^T C^{-1}, \quad \overline{(\nu_{\ell R})^C} = -\nu_{\ell R}^T C^{-1}. \quad (2.41)$$

Tendo em conta que $(\nu_{\ell L})^C$ é a componente direita, pode-se construir um termo de massa do neutrino no qual apenas entram componentes esquerdas dos campos de sabor dos neutrinos. O termo de massa mais geral deste tipo tem a forma

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_{\ell L} M^M (\nu_{\ell L})^C + \text{h.c.}, \quad (2.42)$$

onde M^M é uma matriz complexa não diagonal. O termo de massa pode ser reescrito como

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M^M (\nu_L)^C + \text{h.c.}, \quad (2.43)$$

onde M^M é uma matriz 3×3 e

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

A matriz M^M é uma matriz simétrica [Bil10], que pode ser escrita na forma

$$M^M = U m U^T, \quad (2.45)$$

onde U é uma matriz unitária e $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$, $m_i > 0$. Das equações (2.36), (2.43) e (2.45) tem-se

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L U m U^T C \bar{\nu}_L^T + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} \overline{U^\dagger \nu_L} m (U^\dagger \nu_L)^C - \frac{1}{2} \overline{(U^\dagger \nu_L)^C} m U^\dagger \nu_L. \quad (2.46)$$

Assim, é possível apresentar o termo de massa na forma

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M m \nu^M \quad (2.47)$$

onde

$$\nu^M = U^\dagger \nu_L + (U^\dagger \nu_L)^C = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

De (2.47) e (2.48), resulta

$$\mathcal{L}^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i(x) \nu_i(x). \quad (2.49)$$

Assim, $\nu_i(x)$ é o campo do neutrino com massa m_i . Da equação (2.48)

$$(\nu^M(x))^C = \nu^M(x) \quad (2.50)$$

e os campos de neutrinos $\nu_i(x)$ com massa definida satisfazem a denominada **condição de Majorana**

$$\nu_i^C(x) = \nu_i(x). \quad (2.51)$$

O campo $\nu^M(x)$ é a soma das componentes esquerda e direita,

$$\nu^M(x) = \nu_L^M(x) + \nu_R^M(x), \quad (2.52)$$

comparando as equações (2.48) com (2.52), vem

$$\nu_L^M(x) = U^\dagger \nu_L(x), \quad \nu_R^M(x) = (U^\dagger \nu_L(x))^C, \quad (2.53)$$

concluindo-se que as componentes esquerda e direita do campo de Majorana estão ligadas através de

$$\nu_R^M(x) = (\nu_L^M(x))^C, \quad (2.54)$$

assim, em conjunto com (2.48), vem que

$$\nu_{iR}(x) = (\nu_{iL}(x))^C, \quad (2.55)$$

que é consequência directa da condição de Majorana. De facto,

$$(\nu_{iL})^C = \left(\frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \nu_i \right)^C = C \frac{\mathbb{1} + \gamma_5^T}{2} \bar{\nu}_i^T = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \nu_i^C = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \nu_i = \nu_{iR}. \quad (2.56)$$

O contrário também é óbvio, *i.e.*, $\nu_{iL}(x) = (\nu_{iR}(x))^C$, as componentes esquerda e direita estão ligadas pela relação (2.55). Note-se que esta relação representa a diferença entre os campos de Dirac e de Majorana: no caso do campo de Dirac, as componentes esquerda e direita são independentes, enquanto que no caso do campo de Majorana estão ligadas através da referida relação.

Considere-se a transformação de gauge global

$$\nu'_L(x) = e^{i\theta} \nu_L(x), \quad (2.57)$$

onde θ é uma constante arbitrária. Para o campo conjugado tem-se

$$(\nu'_L)^C(x) = e^{-i\theta} (\nu_L)^C(x). \quad (2.58)$$

O termo de massa (2.43) não é invariante para a transformação de gauge (2.57). Assim, no caso do termo de massa de Majorana não há invariância de gauge global e não existe conservação do número leptónico que permita distinguir neutrinos de antineutrinos.

Da equação (2.48), é possível escrever

$$\nu_{\ell L}(x) = \sum_{i=1}^3 U_{\ell i} \nu_{iL}^M(x), \quad (2.59)$$

onde U é a matriz de mistura 3×3 . Assim, no caso do termo de massa de Majorana as componentes esquerdas dos campos de sabor $\nu_{\ell L}$, que entram nas CC e CN do MP, estão ligadas com as componentes esquerdas dos campos de Majorana ν_{iL} através da relação (2.59).

Para concluir, analisa-se o termo cinético do neutrino na Lagrangiana,

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{\ell} \bar{\nu}_{\ell L} i \gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_{\ell L} = \bar{\nu}_L i \gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_L, \quad (2.60)$$

tendo em conta a unitariedade da matriz de mistura U , encontra-se, a partir de (2.53) e (2.60)

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\nu}_L^M i \gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_L^M = \sum_i \bar{\nu}_{iL} i \gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_{iL}. \quad (2.61)$$

Verifica-se que

$$\bar{\nu}_{iL} i \gamma_\alpha \partial^\alpha \nu_{iL} = -\partial^\alpha \nu_{iL}^T i \gamma_\alpha^T \bar{\nu}_{iL}^T = -\partial^\alpha \overline{(\nu_{iL})^C} i \gamma_\alpha (\nu_{iL})^C \quad (2.62)$$

e

$$-\partial^\alpha \overline{(\nu_{iL})^C} i \gamma_\alpha (\nu_{iL})^C = -\partial^\alpha \left(\overline{(\nu_{iL})^C} i \gamma_\alpha (\nu_{iL})^C \right) + \overline{(\nu_{iL})^C} i \gamma_\alpha \partial^\alpha (\nu_{iL})^C. \quad (2.63)$$

A \mathcal{L} é determinada a menos da divergência de um vector. Assim, o primeiro somando do segundo membro de (2.63) pode ser omitido, fornecendo para o termo cinético da \mathcal{L} dos campos de neutrinos

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_i \bar{\nu}_{iL} i \gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_{iL} + \frac{1}{2} \sum_i \overline{(\nu_{iL})^C} i \gamma_\alpha \partial^\alpha (\nu_{iL})^C = \frac{1}{2} \sum_i \bar{\nu}_i i \gamma^\alpha \partial_\alpha \nu_i, \quad (2.64)$$

onde

$$\nu_i(x) = \nu_{iL}(x) + (\nu_{iL}(x))^C \quad (2.65)$$

é o campo de Majorana. Finalmente, das equações (2.49) e (2.64) obtém-se a expressão para a Lagrangiana livre dos campos de neutrinos

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{\nu}_i (i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m_i) \nu_i. \quad (2.66)$$

Note-se que de (2.64) e (2.66) é evidente porque se introduziu o factor $1/2$ em (2.47). Sublinhe-se, ainda, o facto de no termo de massa de Majorana apenas as componentes esquerdas dos campos de sabor dos neutrinos, $\nu_{lL}(x)$, entrarem nas CC e CN, e que por esse facto são vulgarmente denominadas **campos activos**, enquanto que as componentes direitas são denominadas de **campos estéreis**, dado que não entram nas correntes, Eq. (2.27).

2.2.1.3 Termo de massa de Dirac e de Majorana

O termo de massa mais geral, incluindo os campos de sabor activo esquerdos, ν_{lL} , e os campos estéreis direitos, ν_{lR} , tem a forma

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_L^M (\nu_L)^C - \bar{\nu}_L M^D \nu_R - \frac{1}{2} \overline{(\nu_R)^C} M_R^M \nu_R + \text{h.c.}, \quad (2.67)$$

onde M_L^M e M_R^M são matrizes complexas simétricas e não-diagonais 3×3 , e M^D é uma matriz complexa e não-diagonal 3×3 , e as colunas são

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nu_R = \begin{pmatrix} \nu_{eR} \\ \nu_{\mu R} \\ \nu_{\tau R} \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

O termo de massa (2.67) é a soma do termo de massa de Majorana esquerdo, o termo de massa de Dirac e um termo de massa de Majorana direito. É denominado **termo de massa de Dirac e de Majorana**. É óbvio que o termo de massa não é invariante para transformações de gauge global. Assim, na teoria com o termo de massa de Dirac e de Majorana o número leptónico não é conservado. Deve esperar-se, portanto, que os campos de neutrinos com massas definidas sejam campos de Majorana. Com o objectivo de diagonalizar o termo de massa de Dirac e de Majorana, pode escrever-se

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^C + \text{h.c.}, \quad (2.69)$$

onde

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^C \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

e

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} M_L^M & M^D \\ (M^D)^T & M_R^M \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

é uma matriz simétrica 6×6 . De notar que em (2.69) teve-se em conta a relação

$$\bar{\nu}_L M^D \nu_R = -(\nu_R)^T (M^D)^T (\bar{\nu}_L)^T = \overline{(\nu_R)^C} (M^D)^T (\nu_L)^C. \quad (2.72)$$

A matriz M^{D+M} pode ser apresentada na forma diagonal

$$M^{D+M} = U m U^T, \quad (2.73)$$

onde U é uma matriz unitária 6×6 e $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$ ($i, k = 1, \dots, 6$). De (2.69) e (2.73) tem-se

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \overline{U^\dagger n_L} m (U^\dagger n_L)^C + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M m \nu^M = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 m_i \bar{\nu}_i \nu_i, \quad (2.74)$$

onde

$$\nu^M = \nu_L^M + (\nu_L^M)^C = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_6 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

e

$$\nu_L^M = U^\dagger n_L. \quad (2.76)$$

Da equação (2.75) vem

$$(\nu^M)^C = \nu^M \quad \text{e} \quad \nu_i^C = \nu_i \quad (i = 1, \dots, 6), \quad (2.77)$$

que em conjunto com (2.74) permite concluir que ν_i é o campo de partículas de Majorana com massa m_i . A partir de (2.76) verifica-se que $\nu_{\ell L}$ e $(\nu_{\ell R})^C$ estão ligados com as componentes esquerdas dos campos de Majorana, ν_{iL} , por uma transformação unitária. De facto,

$$n_L = U \nu_L^M \quad (2.78)$$

e

$$\nu_{\ell L}(x) = \sum_{i=1}^6 U_{\ell i} \nu_{iL}(x), \quad (\nu_{\ell R}(x))^C = \sum_{i=1}^6 U_{\ell i} \nu_{iL}(x), \quad (2.79)$$

onde U é a matriz de mistura unitária 6×6 . Assim, no caso do termo de massa de Dirac e de Majorana, o campo de sabor $\nu_{\ell L}$ é uma mistura das seis componentes esquerdas dos campos das partículas de Majorana de massa m_i . O campo estéril $(\nu_{\ell R})^C$ é uma mistura das mesmas componentes. Refira-se, desde já, que o mecanismo *seesaw* de geração de massa dos neutrinos, e que permite explicar a reduzida massa dos mesmos, é baseado no termo de massa de Dirac e Majorana.

É instructivo considerar um termo de massa no caso mais simples de dois campos de neutrinos. Considere-se o termo de massa de Dirac e de Majorana no caso de uma geração,

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} m_L \bar{\nu}_L (\nu_L)^C - m_D \bar{\nu}_L \nu_R - \frac{1}{2} m_R \overline{(\nu_R)^C} \nu_R + \text{h.c.} \quad (2.80)$$

Assumindo a invariância CP no sector leptónico, os parâmetros m_L , m_D e m_R são parâmetros reais. Apresentando o termo de massa \mathcal{L}^{D+M} na forma matricial,

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{n}_L M^{D+M} (n_L)^C + \text{h.c.}, \quad (2.81)$$

onde,

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^C \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

e

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

É conveniente apresentar a matriz M^{D+M} na forma

$$M^{D+M} = \frac{1}{2}\text{Tr}M^{D+M} + M \quad (2.84)$$

onde, $\text{Tr}M = 0$, obtendo para M

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(m_R - m_L) & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

A matriz M pode ser diagonalizada por uma transformação ortogonal,

$$M = O\bar{m}O^T, \quad (2.86)$$

onde,

$$O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

é uma matriz ortogonal, e

$$\bar{m}_{12} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}. \quad (2.88)$$

Destas três últimas três expressões obtém-se

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L}, \quad \cos 2\theta = \frac{m_R - m_L}{\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}}. \quad (2.89)$$

Partindo das equações (2.84), (2.86) e (2.88), obtém-se para a matriz M^{D+M}

$$M^{D+M} = Om'O^T, \quad (2.90)$$

onde

$$\tilde{m}_{12} = \frac{1}{2}(m_R + m_L) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}, \quad (2.91)$$

são os valores próprios da matriz M^{D+M} . Estas quantidades podem ser positivas ou negativas. Se se escrever

$$\tilde{m}_i = m_i\eta_i, \quad (2.92)$$

com $m_i = |\tilde{m}_i|$ e $\eta_i = \pm 1$ ($i = 1, 2$), e

$$M^{D+M} = Om\eta O^T = UmU^T, \quad (2.93)$$

onde $U = O\eta^{1/2}$ é uma matriz unitária. Assim, de (2.81) e (2.93), a expressão do termo de massa é

$$\mathcal{L}^{D+M} = -\frac{1}{2}\overline{\nu^M}m\nu^M = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^2 m_i\bar{\nu}_i\nu_i, \quad (2.94)$$

com

$$\nu^M = U^\dagger n_L + (U^\dagger n_L)^C = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

e $\nu_i^C = \nu_i$. Assim, os campos ν_1 e ν_2 são os campos dos neutrinos de Majorana com massas m_1 e m_2 , respectivamente.

Das equações (2.82), (2.85) e (2.95), para uma família de neutrinos no caso do termo de massa de

Dirac e Majorana, obtêm-se as seguintes relações de mistura

$$\nu_L = \cos \theta \sqrt{\eta_1} \nu_{1L} + \sin \theta \sqrt{\eta_2} \nu_{2L} \quad (2.96)$$

$$(\nu_R)^C = -\sin \theta \sqrt{\eta_1} \nu_{1L} + \cos \theta \sqrt{\eta_2} \nu_{2L}. \quad (2.97)$$

A massa dos neutrinos m_1 e m_2 e o ângulo de mistura θ são determinados por três parâmetros reais m_L , m_R e m_D , como se verifica nas expressões (2.89) e (2.91). O parâmetro η_i ($i = 1, 2$) determina a paridade CP do neutrino de Majorana, ν_i .

Mediante este resultado, merecem destaque os seguintes casos importantes:

$$(i) \quad m_L = m_R = 0 \quad (\theta = 45^\circ)$$

$$m_{1,2} = m_D \text{ e } \eta_i = \mp 1 \quad (i = 1, 2)$$

Os neutrinos são campos de Dirac puros.

$$(ii) \quad m_D \gg m_L, m_R \quad (\theta \simeq 45^\circ)$$

$$m_{1,2} \simeq m_D$$

Resulta em neutrinos pseudo-Dirac.

$$(iii) \quad m_D = 0 \quad (\theta = 0^\circ)$$

$$m_{1,2} = m_{L,R} \text{ e } \eta_{1,2} = 1$$

Os neutrinos são campos de Majorana puros.

$$(iv) \quad m_R \gg m_D, \quad m_L = 0 \quad \left(\theta = \frac{m_D}{m_R} \ll 1 \right)$$

É o cenário que se apresenta de seguida na discussão do mecanismo *seesaw*.

2.2.2 O mecanismo seesaw

O mecanismo *seesaw*, proposto no fim dos anos 70 do século passado, é baseado no termo de massa de Dirac e de Majorana. É aparentemente o mecanismo mais natural e viável para gerar as pequenas massas dos neutrinos. De forma a expor a principal ideia do mecanismo, continua-se a análise do ponto anterior com o caso mais simples de apenas uma família. O termo de massa de Dirac e de Majorana é dado para esta situação pela expressão (2.80). Os três parâmetros m_L , m_R e m_D caracterizam os termos de massa esquerdo e direito de Majorana e de Dirac, respectivamente. De realçar que se está a considerar as partículas com massas definidas como partículas de Majorana, com as suas massas dadas pela relação (2.91) e o ângulo de mistura por (2.89). As principais assunções do mecanismo *seesaw* são:

$$(i) \quad \text{assume-se que não existe termo de massa esquerdo de Majorana, i.e., } m_L = 0;$$

$$(ii) \quad \text{assume-se que o termo de massa de Dirac é gerado pelo mecanismo de Higgs, o que significa que } m_D \text{ é da ordem de grandeza da massa de um quark ou de um leptão;}$$

$$(iii) \quad \text{o termo de massa direito de Majorana viola a conservação do número leptónico. Assume-se que o número leptónico é violado numa escala muito superior à escala electrofraca,}$$

$$m_R \equiv M_R \gg m_D. \quad (2.98)$$

Das equações (2.91) e (2.98), obtêm-se para as massas das partículas de Majorana as relações seguintes,

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{M_R} \ll m_D, \quad m_2 \simeq M_R \gg m_D. \quad (2.99)$$

Para o ângulo de mistura, de (2.89) e (2.98), resulta em

$$\theta \simeq \frac{m_D}{M_R} \ll 1. \quad (2.100)$$

Levando em conta que $\eta_1 = -1$ e $\eta_2 = 1$, o uso das equações (2.96) e (2.100) permite escrever as relações de mistura

$$\nu_L = i\nu_{1L} + \frac{m_D}{M_R}\nu_{2L} \quad (2.101)$$

$$(\nu_R)^C = -i\frac{m_D}{M_R}\nu_{1L} + \nu_{2L}. \quad (2.102)$$

No quadro deste mecanismo, o pequeno valor das massas dos neutrinos em comparação com as massas dos quarks e leptões está ligada à violação do número leptónico total a uma escala de energia dada por M_R . O factor $\frac{m_D}{M_R}$ está relacionado com a razão entre a escala electrofraca e a escala da violação do número leptónico. Note-se que se se fizer $m_D \simeq m_t \simeq 170$ GeV e $m_1 \simeq 5 \times 10^{-2}$ eV (o limite superior para a massa dos neutrinos no caso das hierarquias de massa dos neutrinos) obtém-se o seguinte resultado

$$M_R \simeq \frac{m_D^2}{m_1} \simeq 10^{15} \text{ GeV},$$

que é uma escala natural para Grande Unificação, muito superior à escala da unificação electrofraca, definida por $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \approx 246$ GeV.

No caso de três famílias a matriz de massa *seesaw* tem a forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M_R \end{pmatrix}, \quad (2.103)$$

onde m_D e M_R são matrizes 3×3 e $M_R = M_R^T$. Assumindo que $M_R \gg m_D$, introduz-se a matriz m através da relação

$$U^T M U = m, \quad (2.104)$$

com U unitária. Por analogia com o caso de uma família, escolhe-se a matriz U na forma

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & (m_D^T)^\dagger (M_R^{-1})^\dagger \\ -M_R^{-1} m_D^T & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

Até termos na ordem de $\frac{m_D}{M_R}$, verifica-se que $U^\dagger U = 1$. De (2.104) e (2.105) a matriz m toma a forma

$$m \simeq \begin{pmatrix} -m_D M_R^{-1} & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

Assim, a matriz de massa de neutrinos de Majorana é dada por

$$m_\nu = -m_D M_R^{-1} m_D^T. \quad (2.107)$$

A estrutura desta última relação onde M_R , a matriz das partículas de Majorana pesadas, tem um valor elevado, no denominador garante o reduzido valor da massa dos neutrinos, quando comparadas com as massas dos leptões carregados e dos quarks. Desta forma, se o mecanismo *seesaw* ocorre na natureza: os neutrinos são partículas de Majorana; as massas dos neutrinos são muito menores do que as massas dos leptões carregados e dos quarks; devem existir partículas de Majorana pesadas, os parceiros de balancé (*seesaw*) dos neutrinos.

2.3 Matriz de mistura de neutrinos

Na secção anterior consideraram-se os possíveis termos de massa de neutrinos. Mostrou-se que se na Lagrangiana total existir um termo de massa de neutrinos, estes são partículas com massa e os campos de sabores de neutrinos ν_{eL} , $\nu_{\mu L}$ e $\nu_{\tau L}$, são misturas das componentes esquerdas dos campos de neutrinos com massas definidas ν_i :

$$\nu_{\ell L}(x) = \sum_i U_{\ell i} \nu_{iL}(x), \quad (2.108)$$

onde U é a matriz unitária de mistura e $\nu_i(x)$ é o campo de neutrino (Dirac ou Majorana) com massa m_i .

O mecanismo de geração do termo de massa de neutrinos é ainda desconhecido. Também não se sabe se os neutrinos com massas definidas são partículas de Dirac ou de Majorana. No entanto, está bem estabelecido pelos dados experimentais existentes que a mistura de neutrinos acontece. A matriz unitária de mistura U é o objecto central da teoria, bem como da parte experimental, pela sua importância justifica-se que se faça explicitamente a sua parametrização.

2.3.1 Parametrização da matriz de mistura 3×3

Se a natureza dos neutrinos com massa é de Dirac, a matriz de mistura 3×3 é caracterizada por três ângulos de mistura e uma fase. No caso de Majorana, serão necessárias duas fases adicionais. Comece-se pela parametrização da matriz de mistura para neutrinos de Dirac e a introdução dos parâmetros padrão referidos. Sejam três vectores ortogonais e normalizados,

$$|i\rangle \quad (i = 1, 2, 3) \quad \langle i|k\rangle = \delta_{ik}. \quad (2.109)$$

No sentido de obter três vectores *misturados* gerais, executam-se três rotações de Euler. A primeira rotação será efectuada de um ângulo θ_{12} em torno do vector $|3\rangle$. Os novos vectores ortogonais e normalizados são

$$\begin{aligned} |1\rangle^{(1)} &= c_{12} |1\rangle + s_{12} |2\rangle \\ |2\rangle^{(1)} &= -s_{12} |1\rangle + c_{12} |2\rangle \\ |3\rangle^{(1)} &= |3\rangle \end{aligned} \quad (2.110)$$

com $c_{12} = \cos \theta_{12}$ e $s_{12} = \sin \theta_{12}$. Na forma matricial pode escrever-se,

$$|\nu\rangle^{(1)} = U^{(1)} |\nu\rangle. \quad (2.111)$$

Com as seguintes correspondências,

$$|\nu\rangle^{(1)} = \begin{pmatrix} |1\rangle^{(1)} \\ |2\rangle^{(1)} \\ |3\rangle^{(1)} \end{pmatrix}, \quad |\nu\rangle = \begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \\ |3\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.112)$$

e

$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.113)$$

Ao efectuar a segunda rotação, de um ângulo θ_{13} em torno de $|2\rangle^{(1)}$, introduz-se a fase δ ,

$$\begin{aligned} |1\rangle^{(2)} &= c_{13} |1\rangle^{(1)} + s_{13} e^{-i\delta} |3\rangle^{(1)} \\ |2\rangle^{(2)} &= |2\rangle^{(1)} \\ |3\rangle^{(2)} &= -s_{13} e^{i\delta} |1\rangle^{(1)} + c_{13} |3\rangle^{(1)} \end{aligned} \quad (2.114)$$

que toma a forma matricial,

$$|\nu\rangle^{(2)} = U^{(2)} |\nu\rangle^{(1)}. \quad (2.115)$$

com

$$U^{(2)} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}. \quad (2.116)$$

Finalmente, a terceira rotação em torno de $|1\rangle^{(2)}$ de um ângulo θ_{23} . Os novos vectores são

$$\begin{aligned} |1\rangle^{(\text{mis})} &= |1\rangle^{(2)} \\ |2\rangle^{(\text{mis})} &= c_{23} |2\rangle^{(2)} + s_{23} |3\rangle^{(2)} \\ |3\rangle^{(\text{mis})} &= -s_{23} |2\rangle^{(2)} + c_{23} |3\rangle^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

com a forma matricial

$$|\nu\rangle^{(\text{mis})} = U^{(3)} |\nu\rangle^{(2)}. \quad (2.118)$$

onde

$$U^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.119)$$

De (2.111), (2.115) e (2.118), tem-se

$$|\nu\rangle^{(\text{mis})} = U |\nu\rangle, \quad (2.120)$$

onde

$$U = U^{(3)} U^{(2)} U^{(1)}. \quad (2.121)$$

De (2.113), (2.116) e (2.119), tem-se

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.122)$$

sendo possível escrever a matriz unitária 3×3 de mistura para neutrinos de Dirac

$$U = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}c_{12}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

Esta é a denominada parametrização padrão da matriz de mistura, que é caracterizada por três ângulos de mistura θ_{12} , θ_{23} e θ_{13} e a fase δ . Note-se que esta forma de parametrizar a matriz de mistura de neutrinos de Dirac é idêntica à forma usualmente usada para a matriz CKM, mas não há qualquer relação entre os valores dos ângulos e fase num e noutro caso. Se se impuser

a conservação CP no sector leptónico, $U^* = U$. Assim, a fase δ é responsável pelos efeitos de violação CP . Se realmente existir invariância CP , $\delta = 0, \pi$.

Para neutrinos de Majorana a matriz de mistura deve incluir as duas fases adicionais [Bil10], isso pode ser efectuado pela multiplicação da matriz U por uma matriz diagonal, D , obtendo a matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS),

$$U_{PMNS} = UD \quad \text{com} \quad D = \text{diag}(1, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}). \quad (2.124)$$

Em geral, para os três ângulos de mistura $0 \leq \theta_{12(13)(23)} \leq \pi$ e para as três fases $0 \leq \delta \leq 2\pi$, $0 \leq \lambda_j \leq 2\pi$ com $j = 2, 3$. No caso dos neutrinos de Majorana sem violação CP , a condição a se satisfeita é a condição da invariância CP para a mistura de neutrinos de Majorana [Bil10],

$$\rho_i U_{\ell i}^M = U_{\ell i}^{M*}, \quad (2.125)$$

deve notar-se que aqui não há soma, apesar do índice i repetido.

Por economia de notação, de agora em diante, considera-se $U_{PMNS} = U$ para denotar a matriz de mistura para os neutrinos, independentemente do seu carácter de Dirac ou de Majorana.

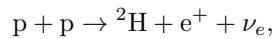
2.4 Detectores de neutrinos

A detecção de neutrinos é um desafio. Devido aos valores muito baixos da secção eficaz para a interacção dos neutrinos, os detectores devem conter uma massa enorme para se obter taxas mensuráveis. A secção eficaz para a dispersão neutrino-nucleão, com neutrinos de 10 GeV, é da ordem de 10^{-37} cm²/nucleão. Por exemplo, para um alvo de ferro com 10 m a probabilidade de ocorrer interacção, dada por $R = \sigma N_A d \rho$, é apenas da ordem de 10^{-10} , onde σ é a secção eficaz nuclear, N_A é a constante de Avogadro, d é a espessura e ρ é a densidade. Até nestas condições é pouco provável a interacção de neutrinos mesmo com detectores contendo grandes quantidades de massa. Para neutrinos de baixa energia, a situação é ainda pior. Os neutrinos solares de 100 keV estão associados a uma secção eficaz para a dispersão νN de $\sim 10^{-45}$ cm²/nucleão. O que faz com que a probabilidade de interacção destes neutrinos com o planeta Terra, numa colisão central, seja apenas $\approx 10^{-12}$ [GS08]. Nesta secção apresentam-se de forma resumida as principais fontes de neutrinos e quais os principais requisitos a que o detector deve obedecer de forma a cumprir a sua função. A discussão será breve, ainda assim, engloba uma digressão sobre a história da detecção de neutrinos.

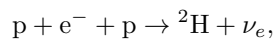
2.4.1 Fontes de neutrinos

Os neutrinos são gerados em interacções e decaimentos fracos, como, por exemplo, os decaimentos β que merecerão a devida atenção na Sec. 2.5.1.

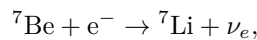
As estrelas produzem energia através da fusão nuclear, criando apenas neutrinos com o sabor electrão, a maioria na fusão protão-protão, pp ,



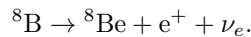
com pouca expressão em termos de fracção de neutrinos solares produzidos, a reacção protão-electrão-protão, pep ,



mas também na captura electrónica com o ${}^7\text{Be}$,

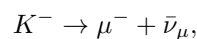
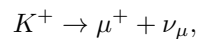
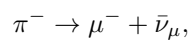
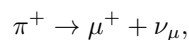


e nos decaimentos do ${}^8\text{B}$,



O espectro de energia para os neutrinos solares vai dos keV até 15 MeV. Os neutrinos pep têm uma energia bem definida de 1.442 MeV.

Os neutrinos também são produzidos na atmosfera em cascatas iniciadas com raios cósmicos, essencialmente no decaimento dos píões e kaões,



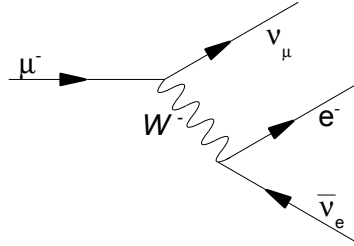

 Figura 2.1: Diagrama de Feynman do decaimento do μ^- .

Tabela 2.1: Principais emissores de neutrinos na Terra, com respectivas abundâncias isotópicas naturais e o período de meia vida [FLM07].

Decaimento	Abu. nat.	$T_{1/2}$ /anos
$^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb} + 8\ ^4\text{He} + 6e^- + 6\bar{\nu}_e$	0.9927	4.47×10^9
$^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + 6\ ^4\text{He} + 4e^- + 4\bar{\nu}_e$	1.0000	1.40×10^{10}
$^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ca} + e^- + \bar{\nu}_e$ (89%)	1.17×10^{-4}	1.28×10^9
$^{40}\text{K} + e^- \rightarrow ^{40}\text{Ar} + \nu_e$ (11%)	1.17×10^{-4}	1.28×10^9
$^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb} + 7\ ^4\text{He} + 4e^- + 4\bar{\nu}_e$	0.0072	7.04×10^8
$^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr} + e^- + \bar{\nu}_e$	0.2783	4.75×10^{10}

e no posterior decaimento dos muões, Fig. 2.1,

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu,$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Estes neutrinos atmosféricos podem chegar a ter energias na ordem dos GeV.

As explosões de supernovas são fontes extraordinárias de neutrinos. Os neutrinos do electrão são originados através de

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e,$$

e os outros sabores são gerados nos decaimentos fracos de Z s virtuais, como resultado da interacção

$$e^+ + e^- \rightarrow Z \rightarrow \nu_\ell + \bar{\nu}_\ell \quad (\ell = e, \mu, \tau).$$

O Big Bang também foi uma fonte de neutrinos e hoje podem detectar-se essas relíquias no denominado **fundo cósmico de neutrinos** ($C\nu B$, Cosmic Neutrino Background). Com a radiação de fundo de microondas é possível obter informação sobre o universo, 300 000 anos após o Big Bang, altura em que o universo passou a ser transparente para essa radiação. Existe a expectativa de se conseguir informação sobre tempos muito mais próximos do Big Bang, a partir da análise do $C\nu B$. Os neutrinos terão desacoplado da restante matéria 1 s após o Big Bang, portanto, o $C\nu B$ a que corresponde uma temperatura $T_{0\nu} \simeq 1.95$ K e uma energia de $E_{0\nu} \simeq 2 \times 10^{-4}$ eV, poderá fornecer informação nessa escala de tempo [FHKS13]. Convém salientar a imensa dificuldade que será a detecção de um sinal inequívoco desse fundo, pois aliada à sua baixa energia, ainda há que contar com o reduzido valor da secção eficaz na interacção dos neutrinos com a matéria. Está em fase de estudo e desenvolvimento a experiência LENA, com um vasto programa em física de neutrinos, em que um dos objectivos é efectuar medições do $C\nu B$ [W⁺12].

Os neutrinos geológicos são produzidos em decaimentos radioactivos, principalmente das cadeias do ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K , ^{235}U e ^{87}Rb , a Tab. 2.1 mostra os produtos finais das cadeias de decaimento, bem como, as abundâncias isotópicas naturais e o período de meia vida, que em todos os casos é comparável à idade da Terra.

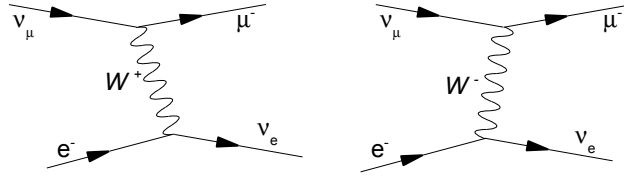
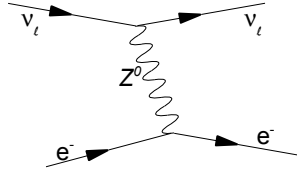


Figura 2.2: Diagramas de Feynman para o decaimento inverso do muão.


 Figura 2.3: Diagrama de Feynman da dispersão elástica $\nu_\ell e^-$.

2.4.2 Reacções importantes na detecção de neutrinos

Os neutrinos podem ser detectados nas interações fracas com os nucleões. Para os diferentes sabores apresentam-se as interações CC características

$$\begin{aligned} \nu_\ell + n &\rightarrow \ell^- + p \\ \bar{\nu}_\ell + p &\rightarrow \ell^+ + n \end{aligned} \quad (\ell = e, \mu, \tau).$$

O decaimento inverso do muão, figura 2.2, também é um exemplo de CC.

As correspondentes interações de CN não são tão úteis para a detecção de neutrinos, uma vez que uma fracção significativa da energia é transportada pelo neutrino no estado final, ainda assim, é um canal de detecção que também é usado, por exemplo, nas interações de neutrinos com electrões atómicos, ver Fig. 2.3, como sucede nos detectores com cintiladores líquidos como alvo,

$$\nu_\ell + e^- \rightarrow \nu_\ell + e^- \quad (\ell = e, \mu, \tau)$$

uma vez que uma fracção da energia do neutrino incidente é transferida para o electrão.

2.4.3 Detecção de neutrinos

Como já se referiu as secções eficazes envolvidas em física de neutrinos são tão baixas que são necessários detectores de grande tamanho e com elevada massa, só assim é possível obter taxas de eventos razoáveis. Como tal, um detector deve preencher alguns dos seguintes requisitos [Zub12]:

- identificação de um leptão carregado para distinguir eventos de CC de CN;
- medição da energia e do ângulo de dispersão de um leptão carregado para determinar as variáveis cinemáticas do evento;
- medição da energia hadrónica total de forma a reconstruir E_ν ;
- identificação de cada um dos hadrões secundários e do seu momento linear para caracterizar o estado hadrónico final;
- detecção de partículas com tempo de vida curto;
- utilização de diferentes materiais como alvo.

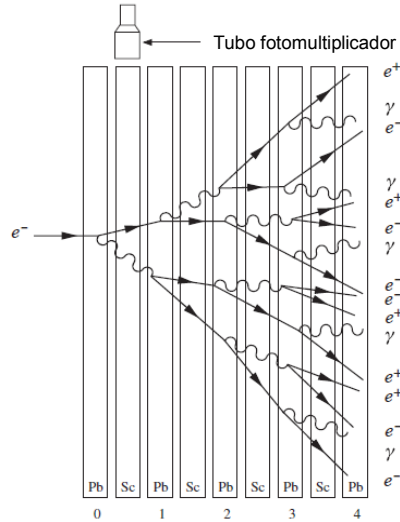
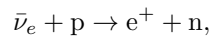


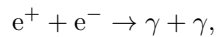
Figura 2.4: Desenvolvimento de uma cascata electromagnética num calorímetro. O calorímetro consiste em camadas alternadas de chumbo (Pb) e de um cintilador (Sc) [MS08].

Não existe nenhum detector que preencha cumulativamente todos estes requisitos, o seu design vai depender da física em estudo.

Com o objectivo de introduzir, de forma muito leve, alguns canais de detecção, considera-se pedagógico efectuar um pequeno desvio histórico e destacar alguns momentos chave na detecção de neutrinos. Em 1956, Cowan e Reines descobriram o antineutrino do electrão através da reacção

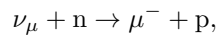


onde o positrão é identificado na sequência do processo de aniquilação



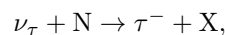
que emite dois fótons de 511 keV, que são detectados em coincidência. Alguns microssegundos depois, também são detectados os fótons originados no decaimento γ do núcleo de cádmio excitado após a captura do neutrão.

Em 1962, Lederman, Schwartz e Steinberger comprovaram experimentalmente a existência de neutrinos muónicos,



onde o detector permitia distinguir os muões (traço direito) dos eventuais electrões (cascata electromagnética) produzidos na reacção.

A observação directa de neutrinos do sabor tau foi feita pela primeira vez em 2000, pela experiência DONUT (Direct Observation of the Nu Tau),



através do subsequente decaimento do τ^- , completou a terceira geração de leptões.

A base das experiências radioquímicas consiste na interacção dos neutrinos com partículas carregadas, produzindo núcleos excitados ou átomos excitados. A experiência Homestake, que Ray Davis

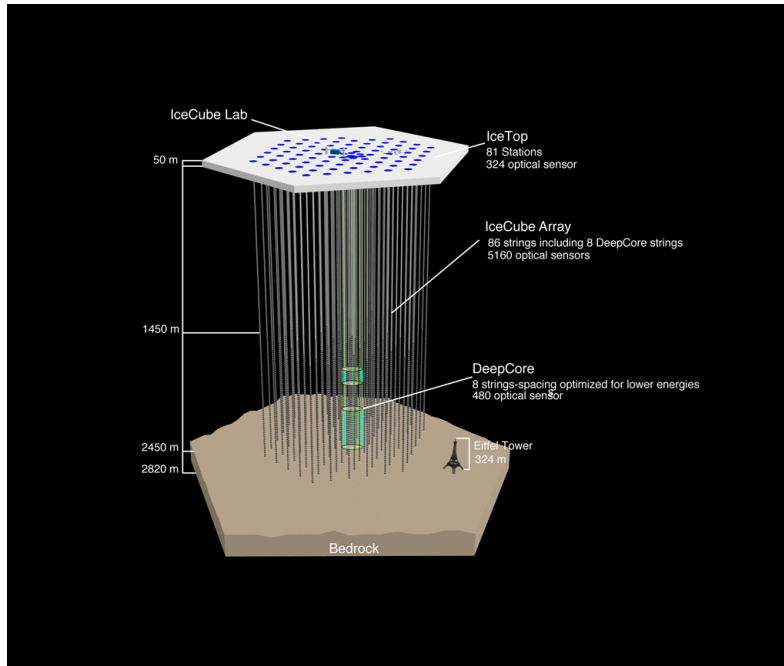
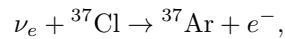
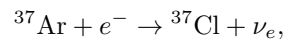


Figura 2.5: Representação do telescópio de neutrinos IceCube. [Colaboração IceCube].

e Jonh Bahcall iniciaram na década de 1960, detectou pela primeira vez neutrinos solares,



onde um neutrão no núcleo de cloro é transformado num próton. Por sua vez,



ficando o ${}^{37}\text{Cl}$ num estado excitado, retornando ao estado fundamental emitindo fótons X ou electrões de Auger, fornecendo assim a evidência da detecção do neutrino.

Quando é necessário detectar todas as partículas do estado final de forma a reconstruir devidamente a energia do neutrino incidente pode utilizar-se o método calorimétrico, que implica a absorção total da energia da partícula incidente no detector e consequente medição da energia depositada. Por exemplo, um muão com energia da ordem de GeV deposita a sua energia essencialmente através da ionização dos átomos do material no alvo, sendo necessário um percurso de ~ 10 m para a absorção total da sua energia, dependendo do material utilizado (ferro, chumbo). Por outro lado, fótons (alta energia), electrões e hadrões podem interagir com o meio produzindo partículas secundárias, numa casacata electromagnética ou hadrónica, que depositam eficientemente a sua energia no material do alvo. Assim, os detectores que se baseiam nesta técnica calorimétrica são denominados de calorímetros electromagnéticos e calorímetros hadrónicos. A figura 2.4 mostra o desenvolvimento de uma casacata electromagnética num calorimetro.

Os calorímetros são detectores para neutrinos de diferentes energias, dependendo da sua configuração. Podem ser classificados em dois tipos: fonte=detector e fonte \neq detector. No segundo caso, os calorímetros consistem em camadas alternadas de material dopado com a fonte emissora e de detectores, sendo eficazes para a detecção de neutrinos de altas energias. Como exemplo do primeiro, estão as experiências em que a fonte dos neutrinos está dissolvida num cintilador líquido. Os enormes detectores de neutrinos SNO, BOREXINO, KARMEN e SuperKamiokande exploram a radiação de Cherenkov e a cintilação para concretizar a detecção. O seu princípio

de funcionamento baseia-se na recolha, por tubos fotomultiplicadores (PMT), da luz emitida por partículas carregadas electricamente e que se propagam no cintilador; são indicados para medições de neutrinos de baixa energia, *e.g.*, neutrinos solares.

A experiência IceCube merece aqui uma atenção especial pelo facto de utilizar uma vasta massa de gelo polar como alvo do detector. O telescópio de neutrinos IceCube foi construído entre 2005 e 2010 no Pólo Sul, com o objectivo de detectar neutrinos de altas energias, na ordem dos PeV. Consiste num conjunto de 5160 sensores ópticos montados em 86 linhas verticais a profundidades variáveis (1450-2450 m), Fig. 2.5. Os dois canais de detecção baseiam-se em sinais resultantes de interacções de CN ou CC, e consistem na detecção do traço originado por muões induzidos por neutrinos e da cascata electromagnética ou hadrónica, que originam fótons de Cherenkov.

Dos dados recolhidos entre Maio de 2010 e Maio de 2012, a colaboração reportou este ano a observação de dois eventos induzidos por neutrinos com energias depositadas no detector de 1.04 ± 0.16 e 1.14 ± 0.17 PeV [A⁺13a]. A figura 2.6 é uma reconstituição dos dois eventos. Cada esfera representa um sensor óptico. As cores estão relacionadas com os instantes de detecção, de vermelho (primeiro) a azul (último). A dimensão das esferas é uma medida do número de fótons detectados.

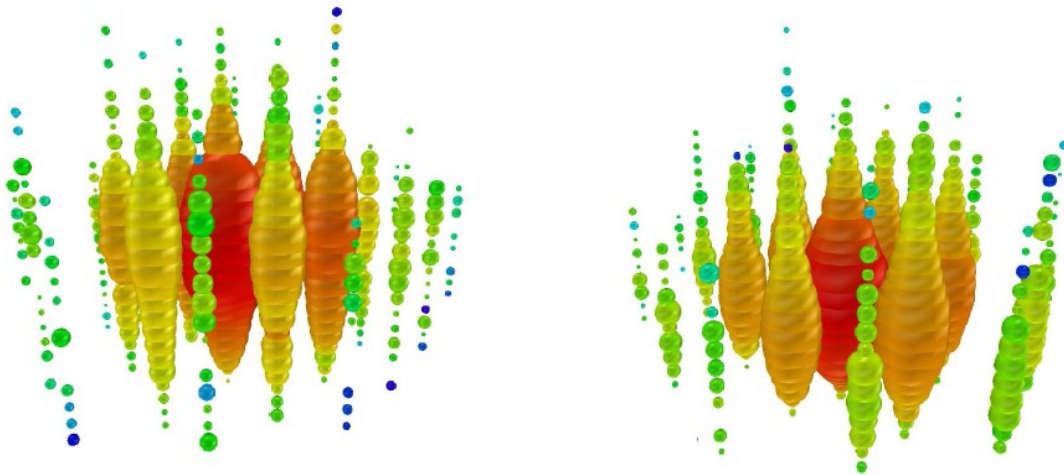


Figura 2.6: Os dois eventos detectados pelo IceCube, em Agosto de 2011 e Janeiro de 2012 [A⁺13a].

Nas próximas seccções com o objectivo de explorar três áreas, a determinação directa da massa de neutrinos, a pesquisa do $0\nu\beta\beta$ e a oscilação de neutrinos, o funcionamento de alguns destes detectores será aprofundado, no entanto, o foco será mantido na pesquisa de neutrinos e na determinação dos parâmetros associados à teoria, e não tanto na tecnologia necessária para alcançar esses resultados.

2.5 Determinação directa da massa de neutrinos

As várias experiências em oscilação de neutrinos evidenciam que os neutrinos têm massa, mas têm sido incapazes de fornecer uma escala para os valores absolutos das suas respectivas massas. Esse conhecimento é muito importante para a compreensão da evolução e estrutura do universo, bem como para a física de partículas para além do MP. As observações cosmológicas têm permitido obter constrangimentos na massa de todos os neutrinos, paralelamente têm-se perseguido dois métodos para obter uma escala absoluta da massa dos neutrinos: a procura pelo duplo decaimento β sem emissão de neutrinos ($0\nu\beta\beta$) e pela medição directa da massa de neutrinos através da investigação de decaimentos β ou captura electrónica. O $0\nu\beta\beta$ além de ser sensível à massa, também irá sondar o carácter de Majorana dos neutrinos, verificando, ou não, a violação do número leptónico. Sintetizando, há uma aposta em métodos baseados em três conceitos independentes, a saber, cosmologia, $0\nu\beta\beta$ e determinação directa, refira-se ainda que os diferentes métodos são complementares. A Fig. 2.7 mostra o gráfico da massa do neutrino do electrão e a massa efectiva de Majorana em função da soma dos valores próprios da massa dos neutrinos, que é constrangida com os dados cosmológicos. A largura das bandas está relacionada com as incertezas experimentais dos ângulos de mistura, e para o caso da massa efectiva de Majorana, também pelo desconhecimento do valor das fases de violação CP de Majorana. No caso da hierarquia normal e para massas de neutrinos pequenas, a massa efectiva pode ser nula, o que no caso da hierarquia invertida já não é possível.]

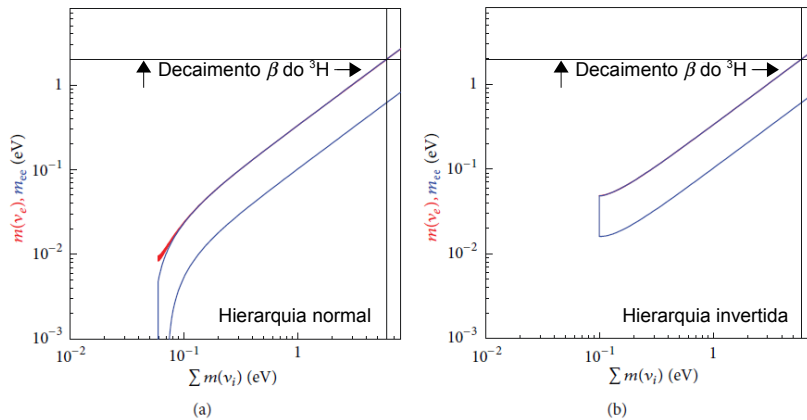
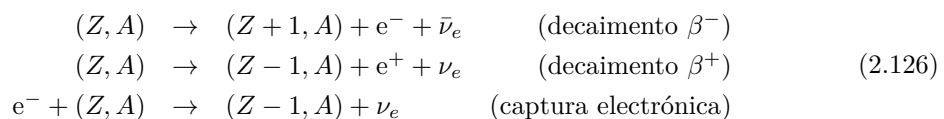


Figura 2.7: A vermelho a massa do neutrino do electrão, a azul a massa efectiva de Majorana em função da soma dos valores próprios da massa dos neutrinos, para (a) hierarquia normal e (b) hierarquia invertida, [DHMW13].

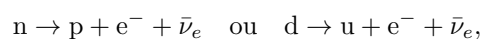
os resultados de Mainz e Troitsk e discutindo-se levemente a experiência KATRIN.

2.5.1 Decaimento β

O decaimento β é uma transição nuclear onde Z muda em uma unidade, enquanto A se mantém. Existem três mecanismos possíveis:



O mecanismo subjacente para o primeiro esquema é



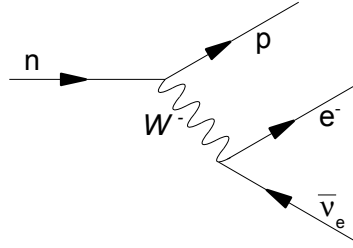


Figura 2.8: Diagrama de Feynman para o decaimento β^- , que pode ser interpretado como o decaimento do neutrão.

e o correspondente diagrama de Feynman está representado na Fig. 2.8. Os outros modos de decaimento podem ser compreendidos de forma análoga. A energia do decaimento, Q , onde $m(Z, A)$ é a massa do átomo e não do núcleo, é fornecida para cada um dos processos por:

1. Decaimento β^-

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= [m(Z, A) - Zm_e]c^2 - [(m(Z+1, A) - (Z+1)m_e) + m_e]c^2 \\ &= [m(Z, A) - m(Z+1, A)]c^2. \end{aligned} \quad (2.127)$$

O valor de Q corresponde exactamente à diferença de massa entre o núcleo pai e o núcleo filho.

2. Decaimento β^+

$$\begin{aligned} Q_{\beta^+} &= [m(Z, A) - Zm_e]c^2 - [(m(Z-1, A) - (Z-1)m_e) + m_e]c^2 \\ &= [m(Z, A) - m(Z-1, A) - 2m_e]c^2. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Para ocorrer o decaimento β^+ é necessário que a diferença de massas dos dois núcleos seja superior à massa de repouso de electrões ($2m_e c^2$).

3. Captura electrónica

$$\begin{aligned} Q_{\text{CE}} &= [m(Z, A) - Zm_e]c^2 + m_e c^2 - [(m(Z-1, A) - (Z-1)m_e) + m_e]c^2 \\ &= [m(Z, A) - m(Z-1, A)]c^2. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Os valores de Q dos últimos processos estão relacionados através de

$$Q_{\beta^+} = Q_{\text{CE}} - 2m_e c^2.$$

Se Q é maior do que $2m_e c^2$, ambos os processos podem ocorrer, dado que conduzem ao mesmo núcleo filho. Para pequenos valores de Q apenas a captura electrónica pode ocorrer.

Destes processos, é o decaimento β^- que permite determinar a massa do neutrino, dado que a invariância CPT garante que $m_{\bar{\nu}_e} \equiv m_{\nu_e}$, assim, e de forma mais precisa, este método pode medir a massa do $\bar{\nu}_e$, e consequentemente a m_{ν_e} .

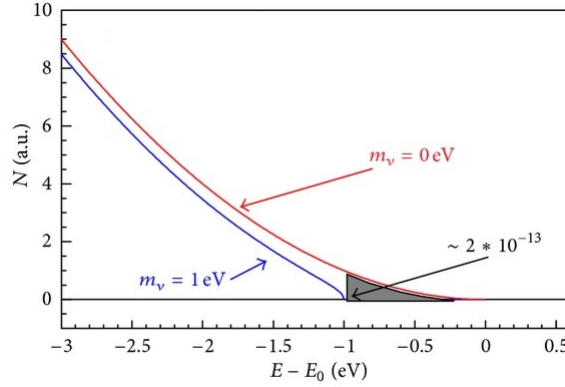


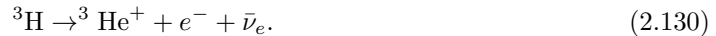
Figura 2.9: Espectro de emissão β em torno do seu ponto final E_0 para $m(\nu_e) = 0$ (vermelho) e para uma massa arbitrária $m(\nu_e) = 1$ (azul). A zona cinzenta corresponde à fracção de electrões resultantes do decaimento β com energias $E_0 - 1$ eV. Adaptado de [DHMW13].

2.5.2 Determinação de $m_{\bar{\nu}_e}$

O decaimento β é um exemplo de pesquisa cinemática. A massa é dada pela energia total relativista invariante $m^2 = E^2 - p^2$ e a incerteza na massa é dada por

$$\Delta m_\nu^2 \simeq \Delta E_\nu^2 + \Delta p_\nu^2 \simeq (2E_\nu^2 \Delta E_\nu^2 + 2p_\nu^2 \Delta p_\nu^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, para uma pesquisa sensível à massa de neutrinos a sua energia deve ser tão pequena quanto possível, caso contrário, a relatividade irá esconder qualquer efeito de massa. As investigações devem ser feitas perto do final do espectro de energia, Figura 2.9, onde E_0 é a energia máxima do electrão, no caso do neutrino não ter massa. Mais, devem ser utilizados isótopos com um valor Q pequeno, requerendo-se uma resolução de energia muito boa. As primeiras medições, obtidas em 1947, resultaram num limite superior de 100 KeV. Mas, em 1952, uma medição forneceu o limite superior de 250 eV, o que conduziu à assunção generalizada de que os neutrinos não tinham massa, tornando-se motivação para implementar o MP com neutrinos sem massa. De todos os isótopos, um dos mais favoráveis é o trítio, com uma energia no final do espectro de 18,6 KeV, no entanto, apenas uma fracção de 2×10^{-13} electrões é que cai na região de 1 eV abaixo do ponto final. O decaimento é



A diferença de massa ${}^3\text{H} - {}^3\text{He}$ está bem estabelecida, no entanto, as experiências utilizam trítio na sua forma molecular, H_2 . Neste caso, a energia de ligação tem de ser considerada, bem como, a energia de recuo do núcleo após a emissão β .

A utilização de espectómetros tem tido relevo nas experiências Mainz, na Alemanha, e Troistk, na Rússia. Também se espera que num futuro próximo, com o espectómetro KATRIN (KARlsruhe TRItium Neutrino experiment), se consigam resultados muito interessantes, uma vez que se aponta para uma sensibilidade na massa dos neutrinos na ordem dos 0.2 eV.

O principal aparato utilizado na experiência Mainz está esquematizado na figura 2.10. A fonte de trítio, um fino filme de trítio molecular, e o detector estão localizados numa região entre dois solenóides supercondutores responsáveis por criar um campo magnético variável, com um valor máximo de $B_S = 2.4$ T, e um valor mínimo de $B_{\min} \approx 8 \times 10^{-4}$ T no plano intermédio do espectómetro, fornecendo uma razão $B_S/B_{\min} = 3000$. Os electrões emitidos pela fonte de trítio são guiados pelas linhas de campo magnético até ao espectómetro. Um conjunto de electrodos à volta do espectómetro geram um potencial electrostático, cujo valor máximo, $U_0 < 0$, é atingido

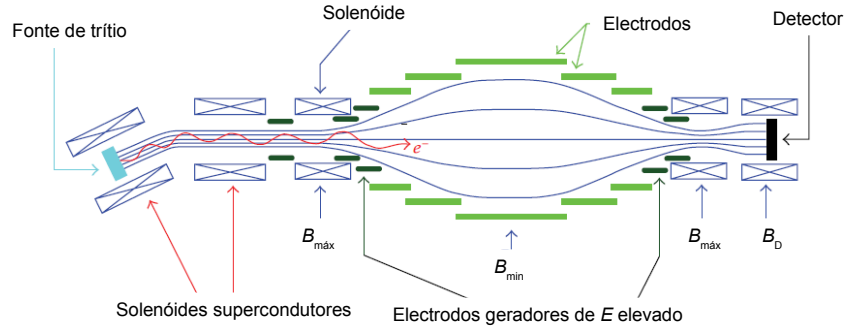


Figura 2.10: Esquema do aparato experimental utilizado pela experiência Mainz [DHMW13].

no plano intermédio, o que permite diminuir a velocidade dos electrões, e apenas aqueles que têm energia suficiente passam esta barreira de potencial, sendo posteriormente acelerados e guiados ao longo das linhas de campo magnético até ao detector.

A principal vantagem para a utilização deste espectómetro é a seguinte: os electrões emitidos têm uma energia cinética longitudinal, E_{cL} , na direcção das linhas de campo magnético, e que vai ser analisada pelo espectrómetro, e uma energia cinética transversal, E_{cT} , no movimento de ciclotrão dada por

$$E_{cT} = -\mu \cdot \mathbf{B} \quad \text{com} \quad \mu = \frac{e}{2m_e} \mathbf{L}.$$

Atendendo à conservação do momento angular, \mathbf{L} e μ são constantes do movimento, logo, a E_{cT} é directamente proporcional ao valor de \mathbf{B} . Assim, a energia num campo magnético de módulo decrescente é transferida entre as componentes $E_{cT} \rightarrow E_{cL}$, e vice-versa, $E_{cL} \rightarrow E_{cT}$, num campo magnético de módulo crescente. No plano intermédio toda a energia de ciclotrão é convertida em E_{cL} , à excepção de uma pequena parcela entre zero (emissão com $\theta = 0^\circ \Rightarrow E_{cT} = 0$) e um máximo (emissão com $\theta = 90^\circ \Rightarrow E_{cT} = E_c$). A função transmissão tem a largura

$$\Delta E_c = \frac{B_{\min}}{B_S} E_c = \frac{1}{3000} E_c = 6 \text{ eV} \quad (\text{se } E_c \approx 18 \text{ keV}).$$

O que permitiu uma significativa melhoria na sensibilidade desta experiência foi a utilização do filtro MAC-E-Filter (Magnetic Adiabatic Collimation with an Electrostatic Filter), ver figura 2.11, com uma resolução de energia de 4.8 eV. Na figura também é possível verificar como o momento linear dos electrões varia desde a fonte até ao detector, nessa análise não se contabiliza a variação do módulo provocada pelo potencial de travagem. A experiência Troistk, com uma resolução de energia de 3.5 eV, era em tudo similar à de Mainz. Para além do desenvolvimento independente do filtro, a principal diferença residia no estado físico da fonte de trítio, dado que em Troistk se encontrava no estado gasoso. Os resultados obtidos por Mainz [KBB⁺05],

$$m_\nu^2 = -0.6 \pm 2,2 \text{ (stat.)} \pm 2.1 \text{ (sys.) eV}^2 \rightarrow m_\nu < 2,3 \text{ eV (95\%CL)}$$

e por Troistk, numa recente reanálise dos dados recolhidos de 1994 a 2004 [A⁺11b],

$$m_\nu^2 = -0.67 \pm 1,89 \text{ (stat.)} \pm 1.68 \text{ (sys.) eV}^2 \rightarrow m_\nu < 2,2 \text{ eV (95\%CL)}.$$

Estas sensibilidades não são suficientes, como se irá verificar na análise do $0\nu\beta\beta$ e das oscilações. A colaboração KATRIN irá testar a massa dos neutrinos numa escala de 0.2 eV, para tal é necessária uma janela de transmissão de apenas 1 eV, o que corresponde a uma razão de $B_{\min}/B_S = 5 \times 10^{-5}$.

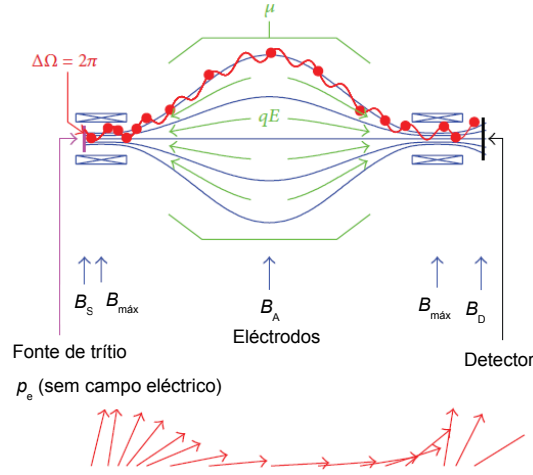


Figura 2.11: Esquema de funcionamento do MAC-E-Filter. Em baixa variação do momento linear desde a fonte até ao detector [DHMW13].

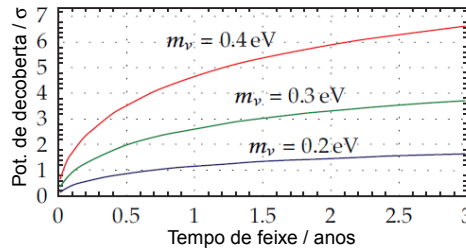


Figura 2.12: Potencial de descoberta da experiência KATRIN [DHMW13].

Ao fim de três anos de funcionamento espera-se um erro total de 0.025 eV^2 . A figura 2.12, mostra o potencial de descoberta de KATRIN em função do tempo de feixe para as diferentes massas de neutrinos. Da análise da figura pode esperar-se, por exemplo, uma descoberta de $m_\nu = 350 \text{ meV}$ com uma significância de 5 desvios padrão, ao fim de três anos de funcionamento

A invariância CPT , como se referiu atrás, assegura que $\bar{\nu}_e = \nu_e$, no entanto, algumas teorias para além do MP sugerem a possibilidade de ocorrer, em algum regime, a violação CPT , pelo que se torna interessante considerar medir directamente m_{ν_e} . A CE é um processo alternativo ao decaimento β^- , no qual ocorre a emissão de um neutrino e não de um antineutrino. O isótopo candidato mais promissor é o ^{163}Ho .

2.5.3 Massa de ν_μ e ν_τ

O limite superior mais preciso para a massa do ν_μ foi obtido na medição do momento linear do muão no decaimento

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

O estado do ν_μ é uma sobreposição de estados com massas definidas, $|\nu_\mu\rangle = \sum_i U_{\mu i}^* |\nu_i\rangle$. Da conservação da energia e do momento linear para a massa de ν_μ , encontra-se a expressão

$$m_{\nu_\mu}^2 = m_{\pi^+}^2 + m_{\mu^+}^2 - 2m_{\pi^+} \sqrt{m_{\mu^+}^2 + p_{\mu^+}^2}, \quad (2.131)$$

onde m_{π^+} e m_{μ^+} são as massas de π^+ e μ^+ , respectivamente, e p_{μ^+} .

Assim, a determinação de m_{ν_μ} depende do conhecimento preciso do momento linear do muão, bem

2.5. Determinação directa da massa de neutrinos

como das massas de μ^+ e π^+ . A combinação de resultados de diferentes colaborações, permitiu obter um limite para a massa do neutrino do muão [Zub12],

$$m_{\nu_\mu}^2 = (-0.016 \pm 0.023) \text{ MeV}^2 \rightarrow m_{\nu_\mu} < 190 \text{ keV} \quad (90\% \text{ CL})$$

O estudo dos decaimentos

$$\tau^- \rightarrow 2\pi^- + \pi^+ + \nu_\tau$$

$$\tau^- \rightarrow 3\pi^- + 2\pi^+ + \pi^0 + \nu_\tau,$$

permitiu determinar o limite superior da massa do neutrino tauónico. Das diversas medidas obtidas, destaca-se a obtida pela colaboração ALEPH [Zub12],

$$m_\tau < 18.2 \text{ MeV} \quad (95\% \text{ CL})$$

2.6 Duplo decaimento β sem emissão de neutrinos

Ettore Majorana mostrou que uma partícula elementar neutra que não tenha nenhum número quântico discreto, pode ser descrita por um campo de Majorana, onde a distinção entre matéria e antimatéria desaparece, ou seja, uma partícula pode ser idêntica à sua antipartícula. Como se viu em secções anteriores, existem duas possibilidades para os neutrinos com massa, ν_i : podem ser partículas de Dirac, se o número leptónico total, $L = L_e + L_\mu + L_\tau$, for conservado, ou partículas de Majorana, verdadeiramente neutras, se não houver conservação do número leptónico.

O problema da natureza dos neutrinos com massa é um problema fundamental na física de neutrinos. A solução deste problema irá ter um enorme impacto na compreensão da origem da massa e da mistura de neutrinos. Se se provar que são partículas de Majorana, a violação do número leptónico tem forçosamente de ocorrer. A violação do número leptónico é uma condição requerida pelas GUT, nas quais quarks e leptões são componentes do mesmo multiplete, e assim além da violação do número leptónico, também se espera a violação do número bariónico. A leptogénese é um exemplo de modelo, que usa a violação do número leptónico no decaimento de neutrinos de Majorana para produzir a assimetria no Universo entre matéria e antimatéria. Outra motivação para o neutrino de Majorana é o mecanismo *seesaw* para a geração da sua massa, que é considerado como o mecanismo que fornece a explicação mais natural para os valores tão pequenos da massa dos três neutrinos leves, dividindo o termo de massa em neutrinos "leves" e "pesados", com a condição paralela de que a massa dos neutrinos "pesados" esteja na escala de energia GUT, $\sim 10^{15}$ GeV.

A oscilação de neutrinos é um fenómeno de interferência sensível a Δm^2 muito pequenos, no entanto, pela investigação das oscilações é impossível decidir sobre a sua natureza de Dirac ou de Majorana. No sentido de a revelar é necessário estudar processos nos quais o número leptónico total é violado. Para partículas de Dirac, onde se incluem a generalidade dos fermiões, as partículas e as antipartículas não são idênticas. Partículas e antipartículas de Majorana são idênticas e só são distinguíveis através da sua helicidade. Este é experimentalmente o aspecto mais interessante das massas de Majorana, a partícula poder actuar como a sua própria antipartícula. Isto é possível, porque a helicidade pode parecer invertida num referencial que ultrapasse a partícula (de forma que pareça que a partícula se mova para trás no referencial). Assim, trocando de helicidade a mesma identidade assume dois caracteres distintos, partícula num referencial e antipartícula noutro referencial.

2.6.1 Aspectos experimentais

O duplo decaimento β ($2\nu\beta\beta$) é um processo nuclear caracterizado pela mudança da carga nuclear em duas unidades mantendo o número de massa inalterado,

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e,$$

e que foi descrito pela primeira vez por Goeppert-Mayer em 1935.

Recorrendo à formula de Weizsäcker [MK93],

$$m(Z, A) \propto \text{constante} + \alpha Z + \beta Z^2 + \delta_p \quad (2.132)$$

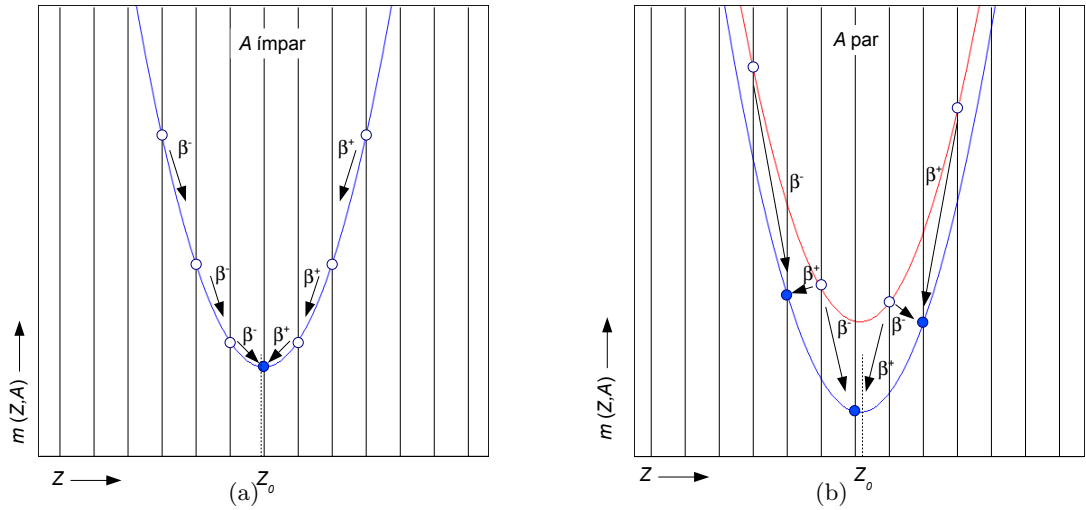


Figura 2.13: Dependência da energia com Z para isóbaros; os núcleos estáveis estão representados pelos círculos a cheio. O número de nêutrons é (a) ímpar, existindo apenas um isóbaros estável; (b) par, vários isóbaros estáveis são possíveis.

onde δ_p é a energia de emparelhamento, obtida empiricamente,

$$\delta_p = \begin{cases} -a_p A^{-1/2} & \text{núcleos par-par} \\ 0 & \text{núcleos par-ímpar e ímpar-par} \\ a_p A^{-1/2} & \text{núcleos ímpar-ímpar} \end{cases} \quad (2.133)$$

com $a_p \sim 12$ MeV, e onde as combinações par-par, ímpar-ímpar, par-ímpar e ímpar-par são respeitantes, respectivamente, ao número de prótons (Z) e número de nêutrons ($N = A - Z$). Para A ímpar, Fig. 2.13(a), a energia de emparelhamento anula-se, originando uma parábola com um isóbaros estável, enquanto que para A par existem duas parábolas separadas por $2\delta_p$, Fig. 2.13(b). O segundo caso admite $2\nu\beta\beta$ e, como tal, todos os emissores são núcleos par-par. Para que o decaimento duplo seja possível é necessário que

$$m(Z, A) > m(Z + 2, A).$$

São conhecidos 35 isótopos candidados para o $2\nu\beta\beta$, dos quais apenas 11 são verdadeiramente bons candidados ($Q > 2$ MeV). Para a maioria deles o decaimento normal com a emissão de dois nêutrons já foi observado com tempos de meia vida no intervalo 10^{18} - 10^{21} anos. A tabela 2.3, mostra os principais candidados, o valor Q e abundância natural e a Fig. 2.14(a) mostra o diagrama de Feynman correspondente a este processo.

O $2\nu\beta\beta$ pode ser visto como o decaimento simultâneo de dois nêutrons. Este decaimento conserva o número leptónico e é permitido dentro do MP, independentemente da natureza do nêutrino. Por sua vez, o processo $0\nu\beta\beta$, Fig. 2.14(b), proposto pela primeira vez por W. Furry em 1939,

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^-,$$

viola claramente a conservação do número leptónico em duas unidades e é proibido dentro do MP. Pode ser interpretado em duas etapas

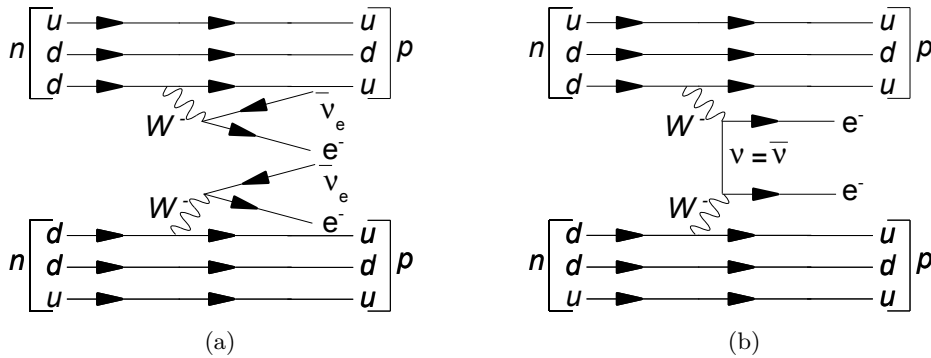
$$(Z, A) \rightarrow (Z + 1, A) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2.134)$$

$$(Z + 1, A) + \nu_e \rightarrow (Z + 2, A) + e^- \quad (2.135)$$

Tabela 2.2: Principais emissores $\beta\beta$ [Zub12], com o valor Q e as respectivas abundâncias naturais. Algumas das experiências que procuram $0\nu\beta\beta$ [WZ13].

Transição	Q / keV	Abu. nat. / %	Experiências
${}^{48}_{20}\text{Ca} \rightarrow {}^{48}_{22}\text{Ti}$	4274 ± 4	0.187	CANDLES
${}^{76}_{32}\text{Ge} \rightarrow {}^{76}_{34}\text{Se}$	2039.04 ± 0.16	7.8	GERDA, MAJORANA
${}^{82}_{34}\text{Si} \rightarrow {}^{82}_{36}\text{Kr}$	2995.5 ± 1.3	9.2	SuperNEMO, LUCIFER
${}^{96}_{40}\text{Zr} \rightarrow {}^{96}_{42}\text{Mo}$	3347.7 ± 2.2	2.8	-
${}^{100}_{42}\text{Mo} \rightarrow {}^{100}_{44}\text{Ru}$	3034.40 ± 0.17	9.6	AMoRE, LUMINEU, MOON
${}^{110}_{46}\text{Pd} \rightarrow {}^{110}_{48}\text{Cd}$	2004 ± 11	11.8	-
${}^{116}_{48}\text{Cd} \rightarrow {}^{116}_{50}\text{Sn}$	2089 ± 4	7.5	COBRA, CdWO ₄
${}^{124}_{50}\text{Sn} \rightarrow {}^{124}_{42}\text{Te}$	2287.8 ± 1.5	5.64	-
${}^{130}_{52}\text{Te} \rightarrow {}^{130}_{54}\text{Xe}$	2527.01 ± 0.32	34.5	CUORE
${}^{136}_{54}\text{Xe} \rightarrow {}^{136}_{56}\text{Ba}$	2457.83 ± 0.37	8.9	EXO, KamLAND-Zen, NEXT
${}^{150}_{60}\text{Nd} \rightarrow {}^{150}_{62}\text{Sm}$	3367.7 ± 2.2	5.6	SNO+, MCT

Na primeira etapa um neutrão decai emitindo um $\bar{\nu}_e$ com helicidade direita. Este deve ser absorvido por um neutrão no interior do mesmo núcleo como um ν_e com helicidade direita. Para preencher estas condições, o neutrino e o antineutrino têm de ser idênticos, *i.e.*, os neutrinos têm de ser partículas de Majorana. Mais ainda, para permitir a "troca" de helicidade, os neutrinos devem ter massa.


 Figura 2.14: Diagramas de Feynman correspondentes ao processos (a) $2\nu\beta\beta$ e (b) $0\nu\beta\beta$.

A detecção do $0\nu\beta\beta$ tem sérias dificuldades associadas. Apenas uma pequena fracção de cerca de 2×10^{-13} electrões emitidos no duplo decaimento, são emitidos com energia próxima da energia final do espectro, ~ 1 eV, como mostra a figura 2.9. Acresce que o tempo de meia-vida do $0\nu\beta\beta$ é muito longo quando comparado com o do $2\nu\beta\beta$, e o processo ainda não foi observado. Se o $0\nu\beta\beta$ for realmente permitido, a sua ocorrência será apenas uma pequena fracção da taxa de decaimento $2\nu\beta\beta$ normal. Além do mais, a sua probabilidade será extremamente baixa, uma vez que é um processo de segunda ordem em G_F . Um dos principais desafios está em distinguir os pares de electrões produzidos no $0\nu\beta\beta$ dos electrões produzidos no duplo decaimento β normal. No $2\nu\beta\beta$, os neutrinos não detectados transportam energia, resultando num espectro contínuo para a energia dos electrões emitidos, já no $0\nu\beta\beta$ são os electrões que transportam toda a energia, resultando num pico bem definido, Fig. 2.15, correspondendo ao valor de Q , o que constitui a assinatura experimental da detecção do $0\nu\beta\beta$. Para assegurar que os sinais podem ser separados é necessário um aparato experimental com uma excelente resolução de energia¹. Um outro requisito está relacionado com a

¹A resolução de energia é uma medida da capacidade do detector distinguir dois sinais com valores próximos de energia, $R = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\text{FWHM}}{E}$, onde FWHM significa Full Width at Half Maximum.

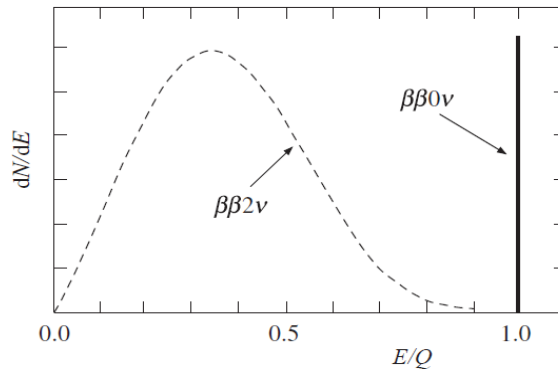


Figura 2.15: Espectro de energia para os dois electrões no $2\nu\beta\beta$ e para o $0\nu\beta\beta$ em função razão das suas energias pelo valor Q [MS08].

dimensão do aparato experimental. O $0\nu\beta\beta$ é tão raro que para se conseguir a estatística suficiente para uma medida interessante, é necessária uma grande quantidade do isótopo candidato.

Se o $0\nu\beta\beta$ for observado, não só constituirá a prova de que os neutrinos são partículas de Majorana, bem como fornecerá uma medida da massa dos neutrinos, uma vez que a taxa do $0\nu\beta\beta$ está relacionada com o quadrado da massa efectiva do neutrino [EV02]. Na tabela 2.3 estão sumarizadas alguma das experiências em fase de análise dos primeiros dados, de recolha de dados ou de pesquisa e desenvolvimento.

2.6.2 Massa efectiva de Majorana

A grandeza que se mede nas experiências de pesquisa pelo $0\nu\beta\beta$ é o tempo de meia-vida do isótopo candidato [BG12],

$$\left(T_{1/2}^{0\nu}\right)^{-1} = G_{0\nu}(Q_{ee}, Z) |M_{0\nu}|^2 \frac{|m_{ee}|^2}{m_e^2}, \quad (2.136)$$

onde $G_{0\nu}$ é o factor do espaço de fase, $M_{0\nu}$ é o elemento da matriz nuclear, m_e é a massa do electrão e $|m_{ee}|$ é massa efectiva do neutrino do electrão de Majorana e é dada por

$$|m_{ee}| = \sum_i |U_{ei}|^2 m_i. \quad (2.137)$$

que é determinada pelas massas dos neutrinos com massas definidas, m_i , os ângulos de mistura e das fases de violação CP , presentes nos diferentes elementos U_{ei} da matriz de mistura U_{PMNS} . Na parametrização padrão da matriz de mistura (2.124) a massa efectiva de Majorana escreve-se como

$$|m_{ee}| = \left| \cos^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} m_1 + e^{2i\alpha_{12}} \sin^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} m_2 + e^{2i\alpha_{13}} \sin^2 \theta_{13} m_3 \right|, \quad (2.138)$$

onde $\alpha_{12} = \lambda_2$ e $\alpha_{13} = \lambda_3 - \delta$. Assim, o $0\nu\beta\beta$ depende dos três ângulos de mistura, da fase de violação CP de Dirac e também das duas fases de violação CP de Majorana, o que está de acordo com a expectativa da violação do número leptónico total neste processo.

No caso do espectro de massa normal, as massas m_2 e m_3 estão ligadas com m_1 (a menor massa), através de

$$m_2 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{\odot}^2}, \quad m_3 = \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{\odot}^2 + \Delta m_{\text{atm}}^2}. \quad (2.139)$$

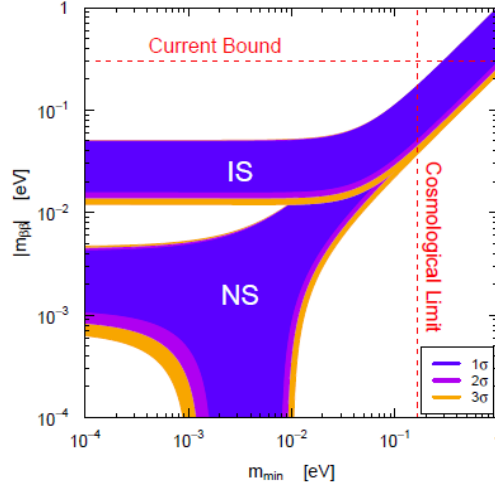


Figura 2.16: Valores da massa efectiva de Majorana em função da massa mínima para o espectro de massa normal (NS, com $m_{\min} = m_1$) e para o espectro de massa invertido (IS, $m_{\min} = m_3$) [BG12].

No caso do espectro de massa invertido, é m_3 a menor massa, e as relações ficam

$$m_1 = \sqrt{m_3^2 + \Delta m_{\text{atm}}^2}, \quad m_2 = \sqrt{m_3^2 + \Delta m_{\odot}^2 + \Delta m_{\text{atm}}^2}. \quad (2.140)$$

Com as equações (2.138), (2.139) e (2.140) é possível construir o gráfico da massa eficaz de Majorana em função da massa mínima para os dois espectros de massa, figura 2.16. O limite superior é imposto pelos dados experimentais da Tab. 2.3 e o limite cosmológico é constrangido pelas observações que fornecem $\sum_i m_i = 0.2 - 0.4$ eV [GHMT06].

Para os neutrinos de Majorana existem duas fases de violação CP adicionais como se viu na parametrização da matriz de mistura,

$$U_{PMNS} = UD = U \text{diag} (1, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}).$$

As oscilações entre sabores de neutrinos, como se verá na Sec. 2.7, podem testar apenas a fase de violação CP de Dirac, δ , porque violam o número leptónico de sabor mantendo o número leptónico total invariante. O $0\nu\beta\beta$ é único no sentido em que é a única hipótese para testar as fases de violação CP de Majorana.

A massa efectiva de Majorana, no caso da invariância CP , com $\lambda_j = k\pi$ e $k = 0, 1, 2$, fica

$$|m_{ee}| = |m_1 U_{e1}^2 \pm m_2 U_{e2}^2 \pm m_3 U_{e3}^2|. \quad (2.141)$$

Dependendo dos sinais, pode haver interferência destrutiva entre os termos individuais, como se pode verificar no gráfico da Fig. 2.16, para o espectro normal. A representação pode ser mais explícita

$$\begin{aligned} |m_{ee}| = & \cos^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} m_1 + e^{2i\alpha_{12}} \sin^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{\odot}^2} \\ & + e^{2i\alpha_{13}} \sin^2 \theta_{13} \sqrt{m_1^2 + \Delta m_{\odot}^2 + \Delta m_{\text{atm}}^2}, \end{aligned} \quad (2.142)$$

onde se utilizou a equação 2.138 e as relações das diferenças de massas ao quadrado para o espectro normal. Esta forma é conveniente quando se utilizam os resultados obtidos nas pesquisas do $0\nu\beta\beta$ e das oscilações de sabores.

Tabela 2.3: Principais resultados das experiências $0\nu\beta\beta$

Experiência	Isótopo	$T_{1/2}^{0\nu}$ anos (90% C.L.)	$ m_{ee} $ /eV
HdM [KKDB ⁺ 01]	⁷⁶ Ge	$> 1.9 \times 10^{25}$	$\lesssim 0.22-0.64$
Cuoricino [AAA ⁺ 11]	¹³⁰ Te	$> 2.8 \times 10^{24}$	$\lesssim 0.30-0.71$
NEMO3 [BB11]	¹⁰⁰ Mo	$> 1.1 \times 10^{24}$	$\lesssim 0.44-1.00$
KamLAND-Zen [G ⁺ 12]	¹³⁶ Xe	$> 1.9 \times 10^{25}$	$\lesssim 0.30-0.60$
EXO-200 [A ⁺ 12c]	¹³⁶ Xe	$> 1.6 \times 10^{25}$	$\lesssim 0.14-0.38$
GERDA [A ⁺ 13g]	⁷⁶ Ge	$> 2.1 \times 10^{25}$	$\lesssim 0.20-0.40$

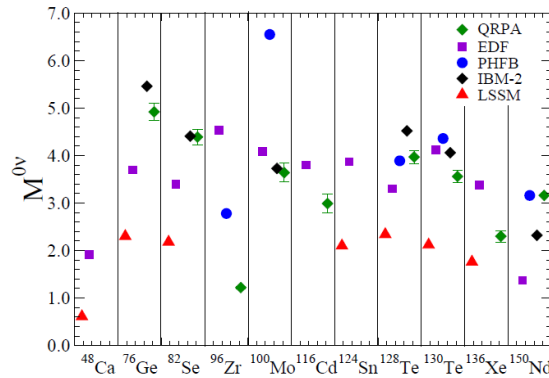


Figura 2.17: Valores dos elementos da matriz nuclear calculados por diferentes métodos [BG12].

2.6.3 Resultados experimentais

A procura pelo $0\nu\beta\beta$ tem decorrido nos últimos anos em diversas experiências, mas sem encontrar, por enquanto, evidências positivas e inequívocas. Os resultados mais interessantes encontram-se sumarizados na tabela 2.3, onde já figuram os dados de 2013 da experiência GERDA, no laboratório subterrâneo de Gran Sasso, Itália, que concluiu a primeira fase, não mostrando a indução do pico Q_{ee} , *i.e.*, não observando o $0\nu\beta\beta$. O valor para o $T_{1/2}^{0\nu}$ é referido como sendo a medida mais rigorosa atendendo à baixa taxa de contagem de fundo e à boa resolução de energia.

O cálculo do período de meia-vida, Eq. 2.136, e consequentemente $|m_{ee}|$ depende do elemento de matriz $M_{0\nu}$ para o $0\nu\beta\beta$, o que é um problema difícil. A figura 2.17 sintetiza os diferentes valores que pode tomar dependendo do método de cálculo utilizado. Da sua análise pode concluir-se que existe uma grande discrepância entre os valores calculados através dos cinco métodos para o elemento da matriz nuclear. É esta razão pela qual na coluna do limite superior para a massa efectiva de Majorana na Tab. 2.3 se apresentam dois valores.

Várias experiências na pesquisa do $0\nu\beta\beta$ com diferentes isótopos candidatos estão neste momento em desenvolvimento ou em fase de início de recolha de dados. Por exemplo, o sucessor de NEMO3, o SuperNEMO, com construção prevista para 2014, irá melhorar a sensibilidade na $|m_{ee}|$ em uma ordem de grandeza, para valores de $\sim 0.05 - 0.1$ eV, para um $T_{1/2}^{0\nu} \sim (1 - 2) \times 10^{26}$ anos. A escolha do isótopo irá recair no ⁸²Se, em vez do ¹⁰⁰Mo utilizado no NEMO3, melhorando todos os aspectos experimentais, eficiência do sinal, resolução de energia e aumentando significativamente a massa do isótopo dos 7 kg para 100-200 kg [Bar11]. Um outro exemplo é o da colaboração SNO+, que será analisado com mais detalhe devido à utilização de alquilbenzeno como cintilador líquido.

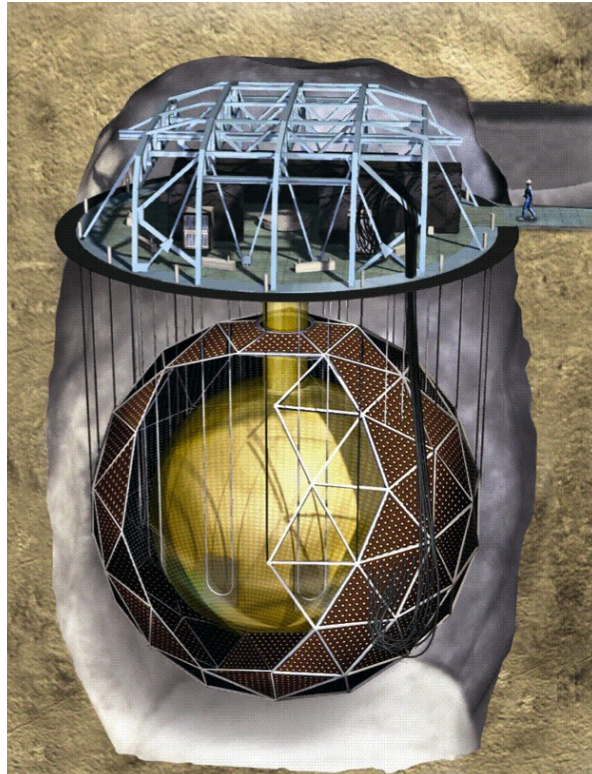


Figura 2.18: Experiência SNO, o detector encontra-se a uma profundidade de 2 km numa cavidade em forma de barril com 34 m de altura e 22 m de largura. [Colaboração SNO].

2.6.4 Alquilbenzeno: utilização como cintilador líquido em SNO+

A localização do Sudbury Neutrino Observatory, SNO, 2 km abaixo da superfície, Fig. 2.18, e o cuidado extremo na utilização de materiais de construção com baixas taxas de emissão de radiações, permitiram obter medidas muito precisas do espectro e da composição de sabores do fluxo de neutrinos do ^8B solar, contribuindo para a solução do problema dos neutrinos solares. O alvo utilizado no detector foi a água pesada e a detecção era baseada na radiação de Cherenkov. SNO+ é a experiência seguinte efectuando a detecção através da luz de cintilação num alvo que será alquilbenzeno (LAB)². O detector será cheio com 780 ton de cintilador orgânico líquido, o LAB às quais se adicionam 2 gL^{-1} de 2,5-difeniloxazole (PPO).

O SNO+ irá funcionar em duas fases distintas, (i) fase do cintilador com 0.1% de neodímio natural, tem o objectivo de detectar o $0\nu\beta\beta$ e sondar a natureza de Dirac ou de Majorana dos neutrinos, no entanto, será também sensível a neutrinos geológicos e de reactores e (ii) fase do cintilador puro, com o objectivo de detectar neutrinos solares (*pep* e CNO), neutrinos geológicos, neutrinos de supernovas e de reactores, estes últimos para recolha de dados para o estudo das oscilações de sabores.

No global, o programa de SNO+ é o seguinte:

- **Neutrinos geológicos**

Os neutrinos geológicos são na realidade antineutrinos do electrão resultantes dos decaimentos β no interior da Terra, ver Tab. 2.1, que permitirão sondar as abundâncias relativas dos

²Na literatura em língua inglesa aparece a denominação *linear alkylbenzene*, embora a nomenclatura IUPAC seja alquilbenzeno, mantém-se o acrónimo em inglês

respectivos isótopos na crosta e manto terrestres. O sinal dos neutrinos geológicos no cintilador líquido será dado pela energia depositada pelo positrão emitido no decaimento inverso β .

- **Neutrinos de reactores**

O fluxo de antineutrinos do electrão de reactores nucleares em SNO+ é relativamente baixo quando comparado com outros detectores, por exemplo, é apenas 20% do fluxo em KamLAND. Atendendo ao baixo número de reactores relevantes para SNO+, apenas dois contribuem significativamente para o espectro de energia de oscilação de sabores de neutrinos, espera-se uma boa sensibilidade em Δm_{12}^2 .

- **Neutrinos de supernovas**

Os detectores com cintiladores líquidos são sensíveis às correntes neutras e carregadas. O principal canal para a detecção de neutrinos de todos os sabores é a CN na dispersão neutrino-protão, dado que fornece informação espectral para todos os sabores de neutrinos permitindo a sua discriminação.

- **Neutrinos solares**

Após as medidas precisas do fluxo de neutrinos ^8B (≥ 3.5 MeV) por SNO e de neutrinos ^7Be (≥ 0.862 MeV) por Borexino, o próximo objectivo é o de medir o fluxo de neutrinos da reacção *pep*, cuja energia é de 1.442 MeV.

- **Pesquisa do $0\nu\beta\beta$**

Com uma concentração de Nd natural de 0.1% espera-se uma resolução de energia de 6.4% (FWHM) no valor de Q . Aumentando a concentração de neodímio durante o funcionamento da experiência irá aumentar a taxa do decaimento e assim, melhorar a sensibilidade para $|m_{ee}|$ com o dano colateral de piorar a resolução de energia para 9.0% (FWHM).

O elemento activo do detector irá consistir nas 780 ton de LAB contidas numa esfera acrílica de diâmetro 12 m, rodeada de 9500 PMTs fixos a uma estrutura esférica, visível na figura 2.18 para uma cobertura de 54%. Os PMTs e a esfera estão localizados numa cavidade na rocha rodeados de 7400 ton de água ultrapura que actua como uma primeira protecção, termalizando os neutrões provenientes da rocha. A profundidade de 2 km, 6000 mwe (*meters water equivalent*, metros equivalentes de água), reduzem o fluxo cósmico de muões para três por hora. A mudança de água pesada para LAB ($\rho=0.86$ gcm $^{-3}$) obriga à adaptação do sistema de fixação da esfera, sendo necessário criar um sistema de ancoragem para evitar a sua livre flutuação na água circundante. O sistema está concluído utilizando Tensylon de elevada pureza; o sistema de suspensão que é visível na representação da Fig. 2.18 também foi substituído com o mesmo material.

O LAB foi o escolhido para cintilador líquido devido à sua compatibilidade com o acrílico; ao seu relativamente elevado ponto de ignição (130 °C); a sua elevada eficiência de conversão da energia cinética das partículas incidentes em fotões; elevada transparência óptica para os fotões gerados no seu interior, para permitir que os sinais luminosos atinjam eficientemente os PMTs; elevado grau de pureza à saída da fábrica, permitindo ainda, *in situ*, purificação adicional (destilação, para remoção de metais pesados; extracção por água, para remoção de Ra, K e Bi; extração por vapor com N $_2$, para remoção de Rn, Kr, Ar, O $_2$; extracção de metais, para remoção de Bi, Pb; microfiltração para remoção de poeira); e devido ao facto de ser barato. Acresce ainda, quase como bônus, que existe uma fábrica no Quebec, Cepsa Química Bécancour Inc., que produz cerca de 120 kton/ano, dos produtos testados foi aquele que apresentou maior pureza e transparência, o que significa que não há custos elevados de transporte.

Um outro aspecto a ter em conta está relacionado com o facto de as propriedades ópticas se degradarem com o aumento da concentração do metal dissolvido, como tal, foi encontrado um bom compromisso para 0.1% de Nd natural, correspondendo a um total de 43,7 kg no volume total do detector [Har12]. Como se referiu no programa da experiência, está programado um aumento da concentração do isótopo ^{150}Nd de forma a melhorar a sensibilidade, no entanto, quando se atingir o máximo 0.3% (131 kg de ^{150}Nd) ter-se-á um meio menos transparente para a propagação da luz de cintilação. Os requisitos de pureza (níveis muito baixos de isótopos radioactivos) para o SNO+ estão muito próximos dos níveis de pureza alcançados na experiência Borexino [A⁺08]. Os níveis de Th e de U devem manter-se nos 10^{-17} e 10^{-17} g/g, respectivamente. O ^{14}C , presente no LAB, é um emissor β de baixa energia que cai na região dos neutrinos pp , se o seu nível for muito elevado irá ocultar por completo o sinal procurado. Assim, é necessário atingir um ratio de $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ de 10^{-18} [Loz12]. Um outro ponto que não será descurado pela colaboração está relacionado com a purificação do cloreto de neodímio que será utilizado.

A identificação do $0\nu\beta\beta$ é feita com base na detecção dos electrões emitidos no decaimento. Quando uma carga eléctrica entra no cintilador pode excitar uma molécula de LAB que transfere a energia a uma molécula de PPO. É no processo de desexcitação da molécula de PPO que, durante um intervalo de tempo muito curto, a luz de cintilação é emitida. A utilização do PPO justifica-se com o propósito de deslocar o comprimento de onda dos fótons emitidos para uma região onde a eficiência dos PMTs é maior [Loz12].

Um aspecto de particular importância para a experiência SNO+ é a discriminação entre eventos α e β no cintilador. Ambos eventos de $0\nu\beta\beta$ e neutrinos solares, produzem sinais semelhantes de electrões. A capacidade de detectar e identificar os eventos α , permite efectuar a sua rejeição e controlar o fundo. A remoção do oxigénio do cintilador também melhora o desempenho na identificação de partículas α e consequentemente na sua rejeição, rejeição essa que pode atingir valores superiores a 99,9% [OOC11].

A figura 2.19 mostra uma simulação do fundo esperado. O fundo inclui os sinais de $2\nu\beta\beta$ do ^{150}Nd , neutrinos solares do ^8B , ^{208}Tl e ^{214}Bi . Como já se referiu, SNO+ irá compensar o relativamente elevado fundo, ~ 40 eventos por ano na janela de energia do $0\nu\beta\beta$, com uma estatística significativa. Tendo um elevado Q de 3.37 MeV, acima do valor Q_e do ^{214}Bi (3.27 MeV) e como tal, acima do fundo do radão. O baixo efeito do fundo, devido a uma expectável boa pureza do cintilador (praticamente isento de isótopos radioactivos), irá favorecer as condições de análise do decaimento, no entanto, espera-se uma baixa resolução de energia, 6,4%, o que contribui para o aumento das contagens de fundo. A expressão seguinte permite avaliar a sensibilidade para o $T_{1/2}$, na situação de não se detectar nenhum sinal [Sar12],

$$T_{1/2}^{0\nu} > \ln 2 \frac{N_A M \varepsilon}{A} \frac{T_{\text{obs}}}{N_{\text{excl}}}, \quad (2.143)$$

onde M é a massa do isótopo candidato, A é a massa atómica, N_A é a constante de Avogadro, ε é a eficiência do detector, T_{obs} é a duração da medição e N_{excl} é número de eventos $0\nu\beta\beta$ excluídos. Desta relação, e devida à baixa taxa do processo $0\nu\beta\beta$, fica claro que é necessário atingir um fundo radioactivo extremamente baixo e massas de isótopo muito altas, de forma a compensar a baixa resolução em energia. A sensibilidade esperada para o $T_{1/2}^{0\nu}$, equação (2.143), após três anos de recolha de dados é superior aos 6×10^{24} (90% C.L.), nas mesmas condições para a $|m_{ee}|$, espera-se uma sensibilidade de 100-200 meV. Na fase do cintilador puro espera detectar-se neutrinos solares pep e CNO. O sinal destes neutrinos no SNO+ será detectado através da dispersão elástica

$$\nu_\ell + e^- \rightarrow \nu_\ell + e^-,$$

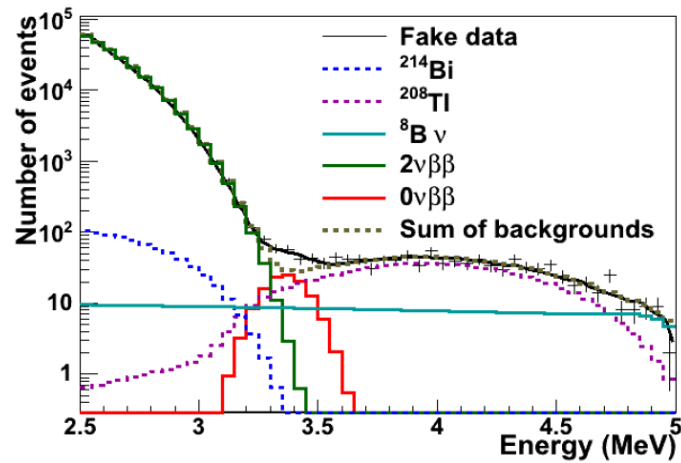


Figura 2.19: Espectro de energia simulado. O sinal $0\nu\beta\beta$ corresponde a uma massa efectiva de 350 meV para 3 anos de recolha de dados com 0,1% de Nd [Sar12]

onde, mais uma vez, o detector será sensível aos fotões emitidos pelo cintilador em resultado da interacção dos electrões ao excitar as suas moléculas.

2.7 Oscilações de neutrinos

Os neutrinos e antineutrinos são emitidos, por exemplo, em decaimentos fracos de píões e kaões, no decaimento de muões, em decaimentos β de núcleos, em reacções nucleares no Sol, na fissão do Urânio e do Plutónio em reactores nucleares. A observação de oscilação de neutrinos, no final do século passado, nas experiências Super Kamiokande (neutrinos atmosféricos), SNO, Homestake, GALLEX-GNO, SAGE (neutrinos solares), KamLAND (reactor) e K2K e MINOS (neutrinos de aceleradores) foi uma das descobertas recentes mais importantes em física de partículas. Para neutrinos com massa, os estados próprios de massa e sabor não são necessariamente iguais, um facto que é bem conhecido no sector quark, onde os estados estão ligados pela matriz CKM. É isto que permite o fenómeno das oscilações entre sabores de neutrinos. Tais oscilações entre diferentes sabores não conservam o número leptónico individual, mas conservam o número leptónico total.

2.7.1 Formalismo geral

Considere-se um decaimento fraco de uma CC

$$a \rightarrow b + \ell^+ + \nu_\ell \quad (\ell = e, \nu, \tau), \quad (2.144)$$

onde a e b representam hadrões. A parte leptónica da Lagrangiana da CC tem a forma

$$\mathcal{L}^{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_\alpha^{CC} W^\alpha + \text{h.c.}, \quad (2.145)$$

com a CC dada por

$$j_\alpha^{CC} = 2 \sum_\ell \bar{\nu}_{\ell L} \gamma_\alpha \ell_L, \quad (2.146)$$

e $\nu_{\ell L}$ é o campo misturado

$$\nu_{\ell L} = \sum_i^3 U_{\ell i} \nu_{iL}. \quad (2.147)$$

U é a matriz de mistura e ν_i é o campo do neutrino (Dirac ou Majorana) com massa m_i .

No caso da mistura de neutrinos os números leptónicos de sabor não são conservados. O neutrino que é produzido juntamente com um leptão, ℓ^+ , num processo fraco de CC é denominado neutrino de sabor ν_ℓ , e é descrito pelo estado de mistura

$$|\nu_\ell\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\ell i}^* |\nu_i\rangle. \quad (2.148)$$

A unitariedade da matriz de mistura implica que os estados ν_ℓ são ortogonais e normalizados

$$\langle \nu_{\ell'} | \nu_\ell \rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\ell' i} U_{\ell i}^* = \delta_{\ell' \ell}. \quad (2.149)$$

Os sabores de neutrinos que são produzidos nas CC, juntamente com os leptões, ℓ^+ , são descritos pelos estados normalizados (2.148), que são combinações lineares de estados próprios de massa ν_i e cuja helicidade é -1.

Analogamente, o estado normalizado do antineutrino de sabor $\bar{\nu}_\ell$, que é produzido no processo fraco de CC, juntamente com um leptão, ℓ^- ,

$$a' \rightarrow b' + \ell^- + \bar{\nu}_\ell \quad (\ell = e, \nu, \tau), \quad (2.150)$$

no caso dos neutrinos de Dirac é dado por

$$|\bar{\nu}_\ell\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\ell i} |\bar{\nu}_i\rangle, \quad (2.151)$$

onde $|\bar{\nu}_i\rangle$ é o estado de um antineutrino com momento linear p_i e helicidade positiva. No caso dos neutrinos de Majorana tem-se

$$|\bar{\nu}_\ell\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\ell i} |\nu_i\rangle, \quad (2.152)$$

onde $|\nu_i\rangle$ é o estado de um neutrino de Majorana com momento linear p_i e helicidade positiva. As relações (2.148), (2.151) e (2.152) são as relações básicas da teoria de oscilações de neutrinos.

Os estados próprios de massa $|\nu_i\rangle$ são estados estacionários e têm uma dependência temporal de acordo com

$$|\nu_i(x, t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i(x, 0)\rangle, \quad (2.153)$$

assumindo que os neutrinos com momento linear p são emitidos por uma fonte em $x = 0$ e $t = 0$

$$|\nu_i(x, 0)\rangle = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} |\nu_i\rangle \quad (2.154)$$

e que também são relativistas

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \simeq p_i + \frac{m_i^2}{2p_i} \quad (2.155)$$

para $p \gg m_i$ e $E \approx p$ como sendo a energia do neutrino. O estado de sabor do neutrino é a sobreposição coerente de estados de neutrinos com massas definidas. São os estados de sabor de neutrinos que são produzidos e que podem ser detectados, como tal, neutrinos com sabor $|\nu_\ell\rangle$ emitidos numa fonte em $t = 0$ evoluem no tempo para um estado

$$|\nu_\ell(x, t)\rangle = \sum_i U_{\ell i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_{i, \ell'} U_{\ell i}^* U_{\ell' i} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE_i t} |\nu_{\ell'}\rangle. \quad (2.156)$$

O factor de fase na equação anterior depende da massa dos neutrinos, ou seja, diferentes massas de neutrinos implicam diferentes valores para o factor de fase. Isto significa que, em termos de sabor, os estados final e inicial diferem. A distâncias macroscópicas este efeito pode ser grande, apesar da massa dos neutrinos ser muito pequena. A amplitude de transição (dependente do tempo) para uma conversão $\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}$ é dada por

$$A(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'})(t) = \langle \nu_{\ell'} | \nu_\ell(x, t) \rangle = \sum_i U_{\ell' i} U_{\ell i}^* e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE_i t}. \quad (2.157)$$

Aqui o factor $U_{\ell i}^*$ é a projecção de um estado de sabor inicial $|\nu_\ell\rangle$ num estado próprio com massa definida, Eq. (2.148); o factor $e^{-iE_i t}$ descreve a propagação no estado $|\nu_i\rangle$, Eq. (2.154); o factor $U_{\ell' i}$ é a projecção do estado $|\nu_i\rangle$ sobre o estado final $|\nu_{\ell'}\rangle$, Eq. (2.157).

Utilizando a equação (2.155), pode escrever-se

$$A(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'})(t) = \langle \nu_{\ell'} | \nu_\ell(x, t) \rangle = \sum_i U_{\ell' i} U_{\ell i}^* \exp\left(-i \frac{m_i^2 L}{2E}\right) = A(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'})(L) \quad (2.158)$$

onde $L = x = ct$, é a distância entre a fonte e o detector.

A probabilidade da transição P , pode ser obtida a partir da amplitude de transição A ,

$$\begin{aligned} P(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}) (t) &= |A(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'})|^2 = \sum_i \sum_j U_{\ell i} U_{\ell' j}^* U_{\ell' i} U_{\ell j} e^{-i(E_i - E_j)t} \\ &= \sum_i |U_{\ell i} U_{\ell' i}^*|^2 + 2\text{Re} \sum_{j>i} U_{\ell i} U_{\ell' j}^* U_{\ell' i} U_{\ell j} \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2}\right) \frac{L}{E} \end{aligned} \quad (2.159)$$

com $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. O segundo termo descreve a dependência temporal (ou espacial) das oscilações de neutrinos.

A equação (2.159) pode ser escrita como [Zub12]

$$\begin{aligned} P(\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}) &= \delta_{\ell\ell'} - 4 \sum_{i>j=1}^3 \text{Re}(K_{\ell\ell',ij}) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}\right) \\ &\quad + 4 \sum_{i>j=1}^3 \text{Im}(K_{\ell\ell',ij}) \sin\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E}\right) \cos\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{4E}\right), \end{aligned} \quad (2.160)$$

onde

$$K_{\ell\ell',ij} = U_{\ell i} U_{\ell' i}^* U_{\ell' j} U_{\ell j}^*,$$

e a probabilidade de encontrar o sabor original é

$$P(\ell \rightarrow \ell) (t) = 1 - \sum_{\ell \neq \ell'} P(\ell \rightarrow \ell') (t). \quad (2.161)$$

Como se pode ver da equação (2.159) existirá comportamento oscilatório desde que pelo menos um estado próprio de massa seja diferente de zero e se existir mistura (U com termos não diagonais) entre os sabores. Além disso, a observação de oscilações não permite obter valores absolutos para a massa dos neutrinos, as oscilações só são sensíveis a Δm^2 .

2.7.2 Oscilações com dois neutrinos

Justifica-se a inclusão desta secção com a oscilação apenas entre dois sabores, pelo facto de ser o caso mais comum na análise de dados experimentais. A oscilação entre os três sabores, mais precisa, irá ser estudada experimentalmente na geração de experiências que se encontram neste momento em fase de pesquisa e/ou desenvolvimento, pelo que o seu tratamento será feito na secção seguinte. Para esta situação a relação entre os estados de neutrinos é descrita por um ângulo de mistura e uma diferença de massa, por exemplo, $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$. A transformação unitária, equação (2.148), é dada por

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (2.162)$$

A probabilidade de transição é

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu) = P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e) \\ &= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \\ &= 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \end{aligned} \quad (2.163)$$

porque não existe fase de violação CP se existirem apenas duas gerações. Esta fórmula mostra

explicitamente que as oscilações só ocorrem se θ e Δm^2 , forem ambos simultaneamente não nulos. Com a introdução de algumas unidades práticas, o termo de oscilação pode ser expresso como

$$\sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4 E} \right) = \sin^2 \pi \frac{L}{L_0}, \quad (2.164)$$

com

$$L_0 = 4\pi\hbar c \frac{E}{\Delta m^2} = 2,48 \frac{E/\text{MeV}}{\Delta m^2/\text{eV}^2} \text{ m.}$$

No último passo, definiu-se o comprimento da oscilação L_0 , que descreve o comprimento de uma oscilação completa. Torna-se maior para maiores energias e menor para Δm^2 menores. O ângulo de mistura em $\sin^2 2\theta$ determina a amplitude da oscilação, enquanto Δm^2 influencia o comprimento da oscilação.

2.7.3 O caso dos três sabores

Um cenário mais realista é o de considerar os três sabores de neutrinos. Além de se necessitar da matriz de mistura U , também é necessário introduzir no formalismo mais quantidades Δm^2 (em valor e sinal). As probabilidades das oscilações de neutrinos dependem de θ_{12} , θ_{23} e θ_{13} , de δ e de duas Δm^2 independentes, Δm_{12}^2 e Δm_{23}^2 . Reforça-se a ideia da não dependência nas fases de Majorana devido à não violação do número leptónico total. Da análise de dados sabe-se que

$$\Delta m_{12}^2 \simeq \frac{1}{30} |\Delta m_{23}^2|. \quad (2.165)$$

No caso da mistura de três neutrinos são possíveis dois espectros de massa:

1. espectro normal (NS)

$$m_1 < m_2 < m_3; \quad \Delta m_{12}^2 \ll \Delta m_{23}^2 \quad (2.166)$$

2. espectro invertido (IS)

$$m_3 < m_1 < m_2; \quad \Delta m_{12}^2 \ll \Delta m_{13}^2. \quad (2.167)$$

Os actuais dados experimentais não permitem estabelecer qual é o espectro realizado na natureza. Introduzindo o quadrado da diferença de massas "solar" e "atmosférico", respectivamente, Δm_{\odot}^2 e Δm_{atm}^2 , é possível efectuar a associação $\Delta m_{12}^2 = \Delta m_{\odot}^2$, para ambos os espectros. Para o NS (IS) tem-se $\Delta m_{23}^2 = \Delta m_{\text{atm}}^2$ ($|\Delta m_{13}^2| = \Delta m_{\text{atm}}^2$).

Na ausência de matéria, a probabilidade é dada pela equação (2.160), que no cenário de três sabores é muito complexa; como tal faz-se a seguinte aproximação: na maioria dos caso é apenas uma diferença de massas que é relevante, ou seja, $\Delta m_{\text{atm}}^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$ e considera-se apenas o caso do espectro normal de massa dos neutrinos:

$$\Delta m_{12}^2 = \Delta m_{\odot}^2 \ll \Delta m_{13}^2 \approx \Delta m_{23}^2 = \Delta m_{\text{atm}}^2. \quad (2.168)$$

Desta forma as expressões para as transições específicas resultam:

$$\begin{aligned} P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}) &= 4 |U_{33}|^2 |U_{23}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right) \\ &= \sin^2(2\theta_{23}) \cos^4(\theta_{13}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right), \end{aligned} \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned}
 P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= 4 |U_{13}|^2 |U_{23}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right) \\
 &= \sin^2(2\theta_{13}) \sin^2(\theta_{23}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right), \tag{2.170}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) &= 4 |U_{33}|^2 |U_{13}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right) \\
 &= \sin^2(2\theta_{13}) \cos^2(\theta_{23}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 L}{4E} \right). \tag{2.171}
 \end{aligned}$$

2.7.4 Considerações experimentais

A procura por oscilações de neutrinos pode ser efectuada de duas formas diferentes:

- aparecimento de $\nu_{\ell'}$ num feixe de ν_ℓ , com $\ell' \neq \ell$,
- desaparecimento de ν_ℓ em outros sabores que escapam à detecção.

Uma vez que o sabor de neutrino é definido pelo leptão carregado que é produzido nas suas interacções de CC, uma medição de aparecimento implica que:

- a energia do neutrino seja suficientemente grande para produzir o leptão no estado final, *i.e.*, que esteja cinematicamente acima do limiar de massa do leptão;
- o detector seja capaz de distinguir esse estado final do leptão de outros estados que possam ocorrer.

Por outro lado, uma medição de desaparecimento requer um bom controlo do fluxo expectável de neutrinos, uma vez que o sinal irá consistir em desvios desse fluxo e/ou do espectro de energia. O mesmo é verdade para medições de aparecimento, se o sabor relevante já se encontra presente como fundo no fluxo inicial. O conhecimento requerido pode ser obtido quer com cálculos precisos do fluxo expectável, quer pela utilização de dois detectores a diferentes distâncias da fonte. Neste caso, o fluxo observado a curta distância (antes dos efeitos da oscilação serem significativos) pode ser usado para calibrar o fluxo expectável no detector a longa distância. Podem ser utilizadas diversas fontes de neutrinos (antineutrinos) para experiências de oscilações:

- centrais nucleares ($\bar{\nu}_e$),
- aceleradores ($\nu_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$),
- atmosfera ($\nu_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$),
- Sol (ν_e).

Devem ser considerados três casos respeitantes a possíveis observações de oscilações:

- $L/E \ll \frac{4}{\Delta m^2}$, *i.e.*, $L \ll L_0$, não há tempo para desenvolver a oscilação.
- $L/E \gtrsim \frac{4}{\Delta m^2}$, *i.e.*, $L/E \gtrsim \frac{1}{\Delta m^2}$, esta é a condição necessária para observar oscilações e é a região mais sensível.
- $L/E \gg \frac{4}{\Delta m^2}$, *i.e.*, $L \gg L_0$, várias oscilações poderão ter ocorrido entre a fonte e o detector.

O SuperKamiokande (SK) obteve em 1998 a primeira evidência convincente da oscilação de neutrinos na observação de neutrinos atmosféricos, foi medido um claro déficit de neutrinos do muão. Dos resultados do SK [W⁺10], os valores para os parâmetros de oscilação dos neutrinos no caso do NS (IS), a 90%, são:

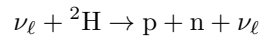
$$\begin{aligned} 1.9 (1.7) \times 10^{-3} \text{ eV}^2 &\leq \Delta m_{\text{atm}}^2 \leq 2.6 (2.7) \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \\ 0.407 &\leq \sin^2 \theta_{23} \leq 0.583, \quad \sin^2 \theta_{13} < 0.04 (0.09). \end{aligned} \quad (2.172)$$

Mais recentemente, a combinação de resultados das experiências com neutrinos solares, KamLAND e SNO permite obter os seguintes resultados [A⁺13h],

$$\Delta m_{\odot}^2 = (7.41_{-0.19}^{+0.21}) \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad \tan^2 \theta_{12} = 0.446_{-0.029}^{+0.030}, \quad \sin^2 \theta_{13} = 0.025_{-0.015}^{+0.018}. \quad (2.173)$$

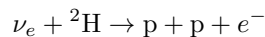
Estes resultados, principalmente os de SNO, foram uma contribuição fundamental para a resolução do problema dos neutrinos solares, um problema de longa data em que o número de neutrinos provenientes do Sol era detectado em menor quantidade do que o previsto pelo modelo padrão solar. O detector SNO, Fig. 2.18, observou neutrinos resultantes do decaimento do ⁸B através de três canais de detecção diferentes:

- Medição da taxa das reacções de CN



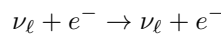
que é sensível aos três sabores de neutrinos. O fluxo total de neutrinos do ⁸B é previsto pelo modelo padrão solar, e o resultado da colaboração SNO mostrou claramente que a probabilidade de sobrevivência do neutrino do electrão, durante o dia para a energia de 10 MeV, era de 0.317 [A⁺13h], configurando claramente a refutação da hipótese da não-oscilação.

- Medição da taxa das reacções de CC



que é sensível apenas a neutrinos do electrão, a comparação da taxa desta reacção com a taxa da reacção de CN possibilitou o cálculo da sua probabilidade de sobrevivência em função da energia.

- Medição da taxa da dispersão elástica



que é sensível aos três sabores, mas a secção eficaz para neutrinos do electrão é aproximadamente seis vezes superior do que para os outros dois sabores.

As experiências com neutrinos de aceleradores permitem obter melhores medidas para o valor de $|\Delta m_{\text{atm}}^2|$ do que as experiências baseadas na observação de neutrinos atmosféricos, devido à distância fixa entre a fonte e o detector e, não menos importante, ao conhecimento preciso do espectro de neutrinos emitidos.

A experiência MINOS (Main Injector Neutrino Oscillation Search) utiliza dois detectores, separados de uma distância de 734 km, sujeitos ao feixe de neutrinos NuMI (Neutrinos at the Main Injector) do FermiLab (Fermi National Accelerator Laboratory) perto de Chicago, Estados Unidos. Com uma exposição de 7.25×10^{20} POT (protões no alvo), a experiência é sensível a $|\Delta m_{\text{atm}}^2|$ através da

medição da taxa de desaparecimento do neutrino do muão, com os resultados mais recentes [A⁺11a]

$$|\Delta m_{\text{atm}}^2| = (2.32_{-0.08}^{+0.12}) \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad \sin^2 2\theta_{\text{atm}} > 0.90 \quad 90\% \text{ C.L.}$$

A colaboração T2K (Tokai to Kamioka), no Japão, reportou em Julho de 2013 a evidência do aparecimento do ν_e num feixe de ν_μ [A⁺13c]. Foram observados 11 eventos candidatos a ν_e no detector SK quando se esperava um fundo de 3,3 eventos, rejeitando assim a hipótese do resultado ser devido apenas ao fundo com uma significância de 3.1σ . Confirmando o excelente resultado de Daya Bay para θ_{13} , embora com um nível de confiança menor, em

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.088 \quad \text{a } 68\% \text{ C.L.}$$

A experiência OPERA (Oscillation Project with Emulsion-tRacking Apparatus) foi desenhada para pesquisar o aparecimento de ν_τ em feixes de ν_μ produzidos no CNGS (CERN Neutrinos to Gran Sasso) perto de Genebra, Suíça, em direcção ao LNGS (Gran Sasso Underground Laboratory), a 730 km de distância, onde se encontra o detector. Os dados recolhidos em 2008 e 2009, correspondendo a uma exposição de 5.25×10^{19} POT, revelaram a observação de 19 eventos candidatos a ν_e , o que é compatível com o cenário da não-oscilação atendendo ao fundo esperado de 19.8 ± 2.8 eventos [A⁺13f]. A análise dos dados de 2008 a 2011, e que ainda não correspondem à totalidade dos dados, uma vez que o CNGS só foi encerrado em Dezembro de 2012, mostra a observação de 2 candidatos ν_τ , o que é um resultado compatível com o número de eventos esperado 1.53 ± 0.16 , quer com o número de eventos do fundo 0.18 ± 0.02 , afastando a hipótese da não-oscilação com uma significância de 2.4 desvios padrão [A⁺13e].

O SK corrobora a observação de OPERA encontrando evidências do aparecimento de ν_τ atmosféricos no seu detector. Apresentam o resultado normalizado [A⁺13b] de 1.42 ± 0.35 , excluindo a hipótese da não-oscilação, *i.e.*, do não aparecimento de ν_τ (que teria um resultado normalizado de zero) com uma significância de 3.8σ .

Para além das experiências com neutrinos de aceleradores (MINOS e OPERA), também as experiências com neutrinos de reactores nucleares assumem um papel importante nas pesquisas das oscilações entre sabores de neutrinos. Uma vez que os produtos da fissão nuclear são instáveis (excesso de neutrões), todos os decaimentos β são do tipo β^- e consequentemente o fluxo é na realidade de antineutrinos do electrão e não de neutrinos.

Como se referiu atrás, a colaboração Daya Bay [A⁺12b] apresentou em Março de 2012 uma medida muito precisa (5.2σ) do ângulo de mistura θ_{13} :

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.089 \pm 0.010 \text{ (stat.)} \pm 0.005 \text{ (sys.)},$$

o que constitui uma evidência clara da sua não nulidade, abrindo portas para que, com a actual tecnologia, se possa procurar violações CP no sector leptónico e eventualmente determinar o padrão do espectro de massa [BG12].

Três semanas após a comunicação dos resultados de Daya Bay, foi a vez da experiência sul-coreana RENO (Reactor Experiment for Neutrino Oscillations), apresentar uma medida para θ_{13} , também ela com boa confiança (4.9 desvios padrão),

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.113 \pm 0.013 \text{ (stat.)} \pm 0.019 \text{ (sys.)},$$

com base nos dados recolhidos de Agosto de 2011 a Março de 2012 [A⁺12a]. Recentemente, a 14 de Agosto, num encontro da colaboração, foi comunicado que tendo em conta os dados até Outubro

de 2012, o valor é melhorado para

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.100 \pm 0.010 \text{ (stat.)} \pm 0.015 \text{ (sys.)},$$

com 5.6σ .

A experiência Double Chooz, que detecta neutrinos da central nuclear de Chooz, França, apresentou em Janeiro de 2013 a sua medida para θ_{13} [A⁺13d],

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.097 \pm 0.034 \text{ (stat.)} \pm 0.034 \text{ (sys.)}.$$

Todas estas experiências de neutrinos de reactores medem a taxa de desaparecimento de $\bar{\nu}_e$ utilizando como canal de detecção o decaimento inverso β , $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$.

Os reactores nucleares são poderosas fontes de neutrinos à espera de serem exploradas e com a enorme vantagem de se conhecer o fluxo e o espectro de energia com uma precisão $<2\%$, com o auxílio do detector de proximidade esse valor pode ser melhorado e atingir os 0.3% . A descoberta do valor de θ_{13} e o seu valor relativamente elevado tornaram as pesquisas para determinar a hierarquia de massa e a fase de violação CP de Dirac acessíveis com a tecnologia actual. Estão em desenvolvimento projectos que serão sensíveis a estas questões, nomeadamente Daya Bay e RENO-50. Ambos os detectores utilizam cintilador líquido como alvo, na ordem das ~ 20 kton, com 15000 PMTs para uma cobertura de 70-80% e um período de funcionamento previsto de cerca de 5 anos. Detectores com massas tão elevadas de cintilador líquido podem ter um programa com uma lista de objectivos significativa. Além do estabelecimento da hierarquia de massa, os parâmetros de mistura de neutrinos poderão ser medidos dentro de uma precisão $<1\%$, empurrando os limites da pesquisa para a física para além do MP, podendo estudar questões como a existência de neutrinos estéreis. Abre-se aqui um parêntesis para referir que a experiência MiniBoone [AA⁺10] (Mini Booster Neutrino Experiment), do Fermilab, aponta para que o número de neutrinos com massa ter de ser superior a três, o que faz com que para além dos três neutrinos activos correspondentes às componentes esquerdas dos sabores electrão, muão e tau, também devem existir neutrinos estéreis. A utilização de detectores com esta ordem de grandeza de massa de cintilador líquido também os torna ideais para pesquisas em neutrinos de supernovas, uma vez que conseguem discriminar os neutrinos pelos seus sabores e energia. Este é um dos objectivos da experiência LENA (Low Energy Neutrino Astronomy) que se encontra em fase de pesquisa e desenvolvimento pelo projecto europeu LAGUNA (Large Apparatus studying Grand Unification and Neutrino Astrophysics). O detector LENA [W⁺12] é descrito como um telescópio de neutrinos multifacetado, apontando para um programa com uma extensa lista de objectivos relacionados com neutrinos de baixas energias, tocando praticamente em todos os aspectos da física de neutrinos e em todas as suas fontes. Para as altas energias, LENA propõe um canal para a detecção do decaimento do protão, possibilitando pesquisas na violação do número bariónico e nas teorias para além do MP.

O programa ambicioso poderá dar respostas às questões na física de neutrinos, que até aqui têm vindo a ser discutidas, violação CP no sector leptónico; hierarquia de massa dos neutrinos; existência de neutrinos estéreis, entre outros. Por outro lado, como que um telescópio apontado para o céu, irá contribuir para a compreensão do colapso gravitacional do núcleo das estrelas por observação de neutrinos de supernovas; será sensível ao fundo difuso de neutrinos de supernovas; olhará para o Sol, tirando-lhe uma neutrinografia, com o objectivo de determinar a sua composição; e tendo o Universo como laboratório, a matéria escura poderá ter algumas das suas propriedades reveladas.

A detecção de neutrinos geológicos poderá fornecer informação sobre a abundância relativa e dis-

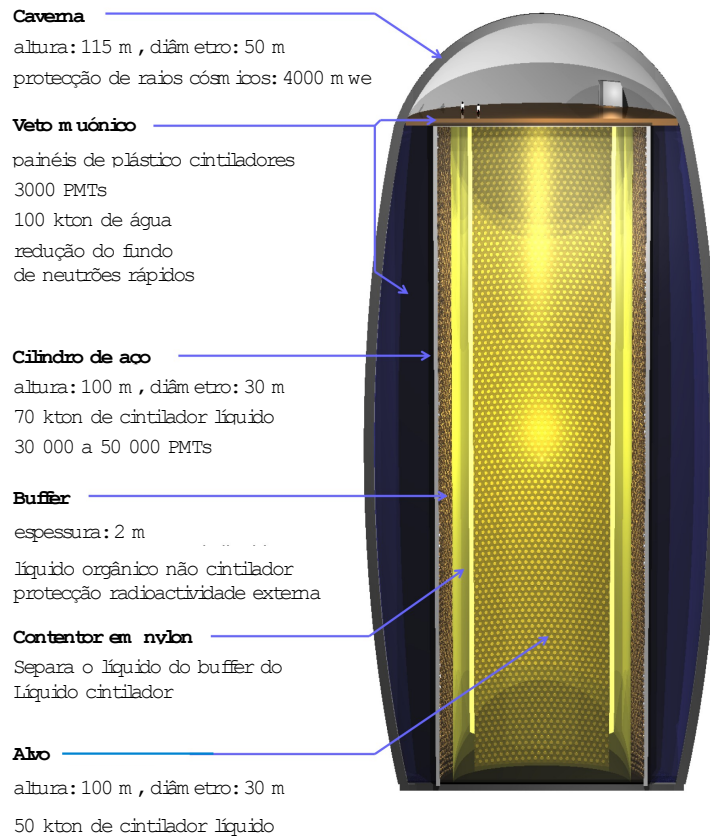


Figura 2.20: Representação do detector LENA. Adaptado de [W⁺12]

tribuição dos elementos radioactivos, responsáveis pela sua emissão, no interior da Terra.

A figura 2.20 é uma vista esquemática do detector. O detector será construído numa cavidade com cerca de 115 m de altura e a uma profundidade que forneça uma protecção de 4000 mwe; o cintilador líquido estará no tanque central, de aço ou betão, com 100 m de altura e 30 m de diâmetro. No seu interior existirá um cilindro de nylon que separa o cintilador líquido do líquido orgânico não cintilador que fará a protecção contra a radiação externa.

O cintilador líquido, para o qual o LAB é o principal candidato, será o alvo do detector com uma massa na ordem das 50 kton, dependendo da composição exacta do cintilador. Para uma cobertura de 30% serão necessários ~ 45000 PMTs.

2.7.5 Massa efectiva de Majorana II

É útil recuperar a massa efectiva de Majorana, Eq. (2.138), e efectuar uma discussão no contexto dos resultados das oscilações. Assim, a $|m_{ee}|$ é função dos três ângulos de mistura e das fases de violação CP de Dirac e de Majorana. Consideram-se três situações com espectros característicos para as massas dos neutrinos [BG12],

1. Hierarquia normal da massa dos neutrinos

$$m_1 \ll m_2 \ll m_3$$

2. Hierarquia invertida da massa dos neutrinos

$$m_3 \ll m_1 \lesssim m_2$$

3. Espectro de massa quasi-degenerado dos neutrinos

$$\sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2} \ll m_0 \simeq \begin{cases} m_1 \lesssim m_2 \lesssim m_3 & \text{(NS)} \\ m_3 \lesssim m_1 \lesssim m_2 & \text{(IS)} \end{cases},$$

onde m_0 impõe uma escala de massa absoluta às três massas dos neutrinos.

1. Hierarquia normal da massa dos neutrinos Neste caso, as relações entre massas e as diferenças do quadrado das massa, são:

$$m_1 \ll \sqrt{\Delta m_{\odot}^2}, \quad m_2 \simeq \sqrt{\Delta m_{\odot}^2}, \quad m_3 \ll \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}. \quad (2.174)$$

m_2 e m_3 são determinadas pelas diferenças do quadrado das massas observados nos neutrinos solares e atmosféricos. Se se desprezar a contribuição de m_1 para a massa efectiva dos neutrinos, obtém-se

$$|m_{ee}| \simeq \left| \sin^2 \theta_{12} \sqrt{\Delta m_{\odot}^2} + e^{2i\alpha_{23}} \sin^2 \theta_{13} \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2} \right|, \quad (2.175)$$

onde α_{23} é a diferença de fase entre U_{e3} e U_{e2} : $\alpha_{23} = \alpha_{13} - \alpha_{12} = \lambda_3 - \delta - \lambda_2$ na parametrização padrão da matriz de mistura, equação (2.124), e das relações impostas a seguir à equação (2.138).

O primeiro termo na equação anterior é pequeno porque Δm_{\odot}^2 é pequeno. Por outro lado, a contribuição de Δm_{atm}^2 é suprimida devido a $\sin^2 \theta_{13}$. Ambos os termos devem ser levados em conta e são possíveis anulamentos, como mostra a figura 2.16. Assim, na hierarquia de massas obtém-se um limite superior

$$|m_{ee}| \leq \sin^2 \theta_{12} \sqrt{\Delta m_{\odot}^2} + e^{2i\alpha_{23}} \sin^2 \theta_{13} \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2} \lesssim 5 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad (2.176)$$

impondo $e^{2i\alpha_{23}} = 1$. O limite superior obtido é substancialmente menor do que a sensibilidade esperada na próxima ronda de experiências de procura do $0\nu\beta\beta$.

2. Hierarquia invertida da massa dos neutrinos Neste caso, as relações entre massas e as diferenças do quadrado das massas, são:

$$m_3 \ll \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}, \quad m_1 \simeq \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}, \quad m_2 \simeq \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2} \left(1 + \frac{\Delta m_{\odot}^2}{2\Delta m_{\text{atm}}^2} \right) \simeq \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}. \quad (2.177)$$

Desprezando as pequenas contibuições de $\sin^2 \theta_{13}$, resulta em

$$|m_{ee}| \simeq \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2} (1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 2\alpha_{12}). \quad (2.178)$$

A fase α_{12} é o único parâmetro desconhecido no caso da hierarquia invertida. Da equação (2.178), obtém-se o intervalo

$$\cos 2\theta_{12} \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2} \leq |m_{ee}| \leq \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}. \quad (2.179)$$

Os extremos do intervalo correspondem a situações de invariância CP no sector leptónico.

Dos dados de oscilações disponíveis, obtém-se

$$10^{-2} \text{ eV} \lesssim |m_{ee}| \lesssim 5 \times 10^{-2} \text{ eV}. \quad (2.180)$$

Neste regime, as sensibilidades prometidas para a $|m_{ee}|$ nas próximas experiências estão contidas neste intervalo; se a hierarquia invertida é a escolha da natureza, a pesquisa pelo $0\nu\beta\beta$ poderá comprovar desde logo o carácter de Majorana dos neutrinos.

3. Espectro de massa quasi-degenerado dos neutrinos Desprezando a pequena contribuição de $\sin^2 \theta_{13}$ na Eq. (2.138), vem

$$|m_{ee}| \simeq m_0 \sqrt{1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \alpha_{12}}, \quad (2.181)$$

onde se desconhece m_0 e α_{12} que é a diferença de fase entre U_{e2} e U_{e1} : $\alpha_{12} = \lambda_2$ na parametrização padrão da matriz de mistura, Eq. (2.124). Da equação (2.181) obtém-se o intervalo seguinte

$$\cos 2\theta_{12} m_0 \leq |m_{ee}| \leq m_0. \quad (2.182)$$

Se o $0\nu\beta\beta$ for observado e se se obtiver um valor de $|m_{ee}|$ relativamente grande ($|m_{ee}| \gg \sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}$), constituirá prova de que os neutrinos são partículas de Majorana e o seu espectro de massa é quasi-degenerado. Nessa situação, pode escrever-se

$$|m_{ee}| \leq m_0 \leq \frac{|m_{ee}|}{\cos 2\theta_{12}} \simeq 2.8 |m_{ee}|. \quad (2.183)$$

O valor da escala de massa poderá estar acessível em próximas experiências, *e.g.*, KATRIN e na segunda fase de GERDA, onde apontam para um aumento da sensibilidade em $|m_{ee}|$ num factor de 10, propondo ainda explorar a escala de massa degenerada [A^+13g].

2.8 Conclusões e perspectivas

Desde a descoberta do SuperKamiokande da oscilação de neutrinos em 1998, foram necessários 14 anos para medir os três ângulos de mistura da matriz PMNS. O resultado fornece um quadro compreensivo da transformação de neutrinos entre os três sabores e abre a possibilidade de procurar a violação de CP no sector leptónico. O surpreendente valor elevado de θ_{13} irá promover fortemente as próximas experiências para encontrar os efeitos da violação CP e determinar a hierarquia de massa. A medição de θ_{13} é o tiro de partida para a próxima geração de experiências completar a compreensão da natureza fundamental da massa e do carácter dos neutrinos e dos parâmetros de mistura. Assim, determinar o sinal de Δm_{13}^2 irá esclarecer qual é o espectro de massa dos neutrinos. Determinar a natureza dos neutrinos com massa, ν_i , será essencial para se compreender a origem da massa e da mistura de neutrinos.

O fenómeno das oscilações entre sabores de neutrinos através da mistura de neutrinos com massas definidas está bem estabelecido pelas experiências que mediram taxas de interacção de neutrinos nos detectores. As experiências com neutrinos solares (KamLand, SNO), atmosféricos (SK), de reactores (Daya Bay, RENO, Double Chooz) e de aceleradores (MINOS, K2K, OPERA) reportam observações consistentes com a mistura dos três sabores de neutrinos governada pelos três ângulos de mistura $\theta_{12} = 34^\circ$, $\theta_{23} = 45^\circ$ e $\theta_{13} = 9^\circ$ e pela fase de violação CP , δ . OS valores destes ângulos de mistura não têm paralelo com os ângulos de mistura no sector dos quarks, onde a

mistura é "bem comportada". A mistura também depende dos três estados de massa, m_i , e como tal, de duas diferenças de massas ao quadrado independentes, $\Delta m_{\odot}^2 = 7.6 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ e $\Delta m_{\text{atm}}^2 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$.

Recentemente, foram observadas as oscilações $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$ (T2K) e $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}$ (OPERA e SK) excluindo, uma vez mais, a hipótese da não oscilação.

Na matriz de mistura U_{PMNS}

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}), \quad (2.184)$$

as incógnitas que permanecem são as fases de violação CP , por outras palavras, não se conhece o estado da simetria CP no sector leptónico. Esta é uma das questões a ser abordada num programa de muitos anos nas experiências futuras. As outras questões mais importantes são a determinação da natureza, Dirac ou Majorana, dos neutrinos; o espectro de massa dos neutrinos e a escala absoluta da massa dos neutrinos.

Os dados das oscilações aliados aos resultados das experiências do decaimento β do ${}^3\text{H}$ permitem concluir que as massas dos neutrinos:

1. são diferentes de zero;
2. são muito menores do que as dos restantes leptões e dos quarks;
3. não são geradas pelo mecanismo de Higgs do MP.

O mecanismo mais provável para a geração de massa dos neutrinos é o mecanismo *seesaw*. De acordo com este mecanismo as pequenas massas dos neutrinos são geradas por uma nova interação para além do MP e que viola a conservação do número leptónico total numa escala muito maior do que a escala electrofraca $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \simeq 246 \text{ GeV}$.

Capítulo 3

Alquilbenzeno: produção

3.1 Introdução

A reacção de Friedel-Crafts (FC) tem tido um papel central na química industrial. É aplicável nas transformações de hidrocarbonetos, produzindo uma vasta gama de químicos. O poder e o alcance da reacção é tal, que os maiores processos, em termos de volume, envolvem a química FC, nomeadamente as alquilações e acilações. Com as preocupações ambientais abriu-se o caminho para a obtenção de métodos de produção mais limpos e seguros, fornecendo à indústria o ímpeto para mudar alguns dos processos FC. Isto pode ser enunciado, *grosso modo*, como o deslocamento na utilização de catalisadores desde o cloreto de alumínio, AlCl_3 , para o ácido fluorídrico, HF, prosseguindo para a utilização dos ácidos sólidos que apresentam benefícios óbvios, tais como, fácil manuseamento, recuperação e reutilização.

3.2 Química Verde e a reacção Friedel-Crafts

A reacção FC consiste na acção de um halogeneto alifático sobre um hidrocarboneto aromático e tem como efeito a substituição de um dos H do anel por um radical alquilo (alquilação). Trata-se de um processo de síntese muito importante na indústria, figura 3.1, o catalisador tradicionalmente utilizado, o AlCl_3 , permite a formação do catião R^+ , o qual ataca imediatamente o anel.



Figura 3.1: Alquilação FC

É amplamente reconhecido que existe uma necessidade crescente de utilizar processos na química industrial que sejam ambientalmente aceitáveis. De certa forma, este foi o ponto de partida da química verde, constituindo uma mudança de paradigma, alterando o foco dos conceitos tradicionais de eficiência de processos, *e.g.*, rendimento, para a redução de desperdícios na fonte, bem como, a não utilização de substâncias tóxicas ou perigosas, mantendo, no entanto, preocupações a nível económico. Uma possível definição operacional de química verde pode ser enunciada como [SAH07]: *a química verde utiliza eficientemente matérias primas, preferencialmente renováveis, elimina desperdícios e evita o uso de reagentes e solventes tóxicos ou perigosos na produção e aplicação de produtos químicos.*

Os doze princípios da química verde [AW98] formam a base do novo rumo na química e definem os requisitos para um processo verde, de onde se destacam a necessidade de evitar a utilização de solventes tóxicos, o baixo consumo de energia e, de grande importância, a utilização de catalisadores, nomeadamente de catalisadores que sejam facilmente separáveis e recuperáveis. Este é, sem dúvida, um aspecto fulcral no desenvolvimento de novos processos. O uso de ácidos sólidos como catalisadores, mais fáceis de recuperar e reutilizar, representam um significativo passo em frente na catálise FC. Tem-se investido imenso no desenvolvimento de novos catalisadores ácidos sólidos

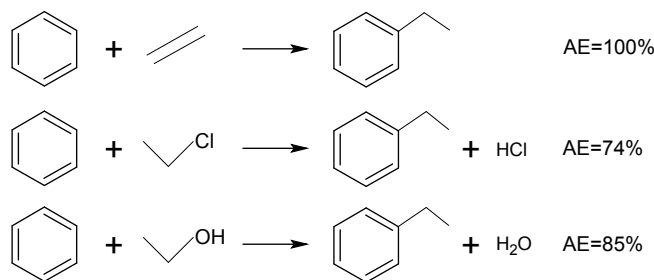


Figura 3.2: AE em reacções FC de benzeno em função do agente de alquilação [Mac09].

Tabela 3.1: O E factor [SAH07].

Indústria	Massa de produto/ton	E factor
Refinaria	$10^6 - 10^8$	<0,1
Granel	$10^4 - 10^6$	<1-5
Fina	$10^2 - 10^4$	5->50
Farmacêutica	$10 - 10^3$	25->100

para a reacção FC, em particular para a alquilação, embora para a acilação também se verifiquem progressos, onde alguns verdadeiros catalisadores têm sido desenvolvidos [Har02].

A química verde desenvolveu-se numa poderosa ferramenta de análise de processos químicos e da sua respectiva performance ambiental. É possível, embora difícil, analisar processos em termos do seu impacto ambiental e assim identificar áreas de melhoramento, bem como, optar entre diferentes processos tendo por base critérios ambientais. Para alcançar este objectivo têm sido desenvolvidas algumas métricas, tais como, a *Eficiência Atômica* (*Atom Efficiency*, AE) e o *E factor* (*Environmental factor*). Estas ajudam a quantificar diferentes aspectos de um processo com o propósito de obter uma medida do seu impacto ambiental.

A AE é uma ferramenta muito útil para uma rápida avaliação da quantidade de desperdício produzido por processos alternativos. Calcula-se dividindo a massa molar do produto desejado pela soma das massas molares de todas as substâncias formadas na reacção química, obedecendo à estequiometria da reacção. A figura 3.2 mostra a AE em reacções FC de benzeno em função do agente de alquilação. Para a primeira reacção a AE é 100%, todos os átomos dos reagentes são incluídos nos produtos. Para as outras duas reacções, apresentam-se os respectivos valores da AE. A natureza dos desperdícios também é importante, obviamente que H₂O e HCl não ficam em pé de igualdade.

O E factor leva em conta o rendimento e inclui reagentes, perdas de solventes, todos os processos auxiliares e, em princípio, o combustível (embora frequentemente seja difícil de quantificar). A água é uma excepção, que normalmente não é incluída no E factor, pois poderá conduzir a valores muito altos, o que não é útil quando se pretende comparar processos. Valores elevados do E factor significam mais desperdício e, conseqüentemente, maior impacto ambiental negativo. O E factor ideal é nulo. De forma muito simples, é a massa de matéria-prima, subtraída da massa do produto desejado, dividida pela massa do mesmo produto. Para uma unidade industrial pode ser facilmente calculado a partir da massa de matéria-prima adquirida e da massa de produto vendido. A tabela 3.1 mostra alguns valores típicos para diferentes segmentos da indústria química.

A derradeira métrica é fornecida pela *análise do ciclo de vida* (*Life Cycle Assessment*, LCA), que leva em conta todos os inputs (energia e químicos) e outputs (desperdícios), incluindo a contribuição de todos os reagentes, solventes e catalisadores (e os seus percursos), transporte de

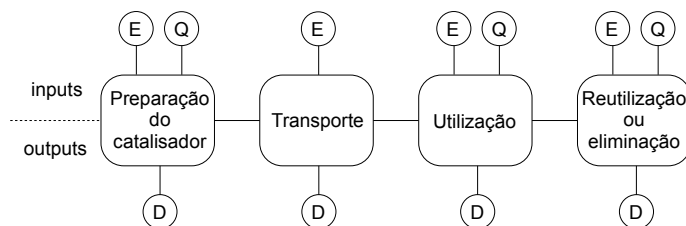


Figura 3.3: LCA parcial e simplificado de um catalisador. Adaptado de [Mac09]

matérias-primas e ainda o destino do produto no fim da sua vida útil. Tudo isto faz com que a análise do ciclo completo seja muito complexa de realizar e poucos o consigam fazer rigorosamente. No entanto, algumas aproximações podem ser muito valiosas como indicador dos factores que devem ser considerados, mesmo que nem todos os dados estejam disponíveis. A figura 3.3 mostra um diagrama de uma LCA para um catalisador numa reacção FC.

A LCA tem como objectivos fornecer um quadro tão completo quanto possível das interacções entre uma dada actividade e o ambiente; identificar os pontos negros de um ciclo que causam impactos ambientais assinaláveis; comparar impactos ambientais de produtos, processos ou actividades alternativos; contribuir para a compreensão da natureza global e interdependente das consequências ambientais das actividades humanas; dotar os decisores de informação sobre os efeitos ambientais das actividades e identificar oportunidades para efectuar melhoramentos a nível ambiental [Aza02].

Um dos focos principais da química verde tem sido o desenvolvimento de catalisadores menos poluentes. A catálise é uma ferramenta imprescindível na minimização de desperdícios e, consequentemente, na prevenção da poluição. Uma escolha adequada do catalisador pode permitir a produção sem desperdício. No topo da lista para ser substituído por alternativas mais limpas está o AlCl_3 , que tem sido uma escolha usual para catalisar processos industriais FC. As principais razões para tal prendem-se com as dificuldades em recuperar o catalisador, bem como com a natureza tóxica e corrosiva dos desperdícios gerados. Uma dificuldade adicional assenta no facto de a alquilação do produto desejado constituir ela própria um problema, isto é, muitos dos processos baseados no AlCl_3 ocorrem com baixas taxas de conversão. A dificuldade em recuperar o catalisador implica a sua constante adição e coloca uma pressão na sua produção, o que tem como consequência uma pégada ecológica significativa. O AlCl_3 é produzido a partir da bauxite através da redução do alumínio e posterior reacção com o Cl_2 ou HCl , produzindo H_2 como subproduto, num processo energeticamente dispendioso.

A excepcional actividade do AlCl_3 tem tido como consequência a sua utilização generalizada, portanto, qualquer catalisador proposto para o substituir, terá de ter, forçosamente, um bom desempenho. A substituição parcial do AlCl_3 por HF tem sido levada a cabo com algum sucesso. O HF tem uma menor pégada ecológica na sua produção (reacção de CaF_2 com H_2SO_4), é relativamente volátil e condensável e facilmente recuperável e reutilizável. No entanto, tem de se levar em linha de conta os riscos associados com o seu transporte e manuseamento, pois fugas e emissões constituem um problema dada a perigosidade e toxicidade do HF.

Nos últimos anos tem-se assistido ao desenvolvimento de catalisadores ácidos sólidos e o número de processos industriais que os podem utilizar tem-se tornado significativo, sendo a alquilação um dos exemplos. Alguns ácidos sólidos apresentam bons níveis de actividade em alguns processos, com a vantagem adicional de poderem ser reutilizados. Os tipos de catalisadores utilizados incluem zeólitos, óxidos metálicos, resinas de troca iónica, argilas, entre outros. Assim, pode afirmar-se que o desígnio dos ácidos sólidos é substituir a catálise homogénea com AlCl_3 e HF.

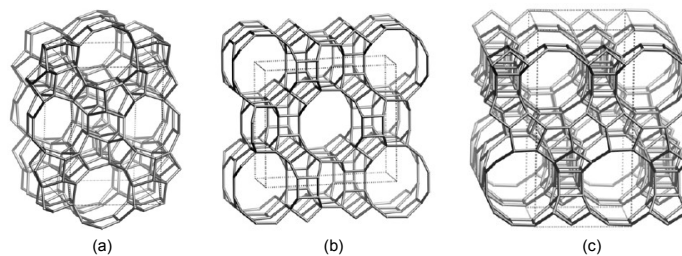


Figura 3.4: Três famílias de zeólitos, (a) ZSM-5, (b) mordenite e (c) beta [BMO07]. O zeólito actua como uma peneira molecular. Apenas cadeias lineares passam pelos orifícios na estrutura do zeólito.

3.3 Catálise heterogénea para reacções Friedel-Crafts

A maioria dos catalisadores heterogéneos apresentam valores elevados de área específica (entre 100 e 1000 m^2g^{-1}) e sítios activos, que podendo estar interligados se encontram dispersos na superfície e assentes na estrutura porosa. À medida que a reacção decorre na superfície do catalisador, a difusão dos reagentes para a superfície e dos produtos em sentido inverso, é um aspecto chave, e a dimensão dos poros deve ser suficientemente grande para que tal possa ocorrer livremente, sem que se causem constrangimentos nos poros e diminuição da velocidade da reacção.

Uma grande variedade de materiais ácidos sólidos desde argilas, heteropoliácidos (HPA), óxidos metálicos, HPA suportados em óxidos, resinas de troca iónica e zeólitos, têm mostrado bons resultados na catálise do LAB, em termos de linearidade, conversão de alcenos e tempo de vida útil.

Os zeólitos representam uma classe extremamente importante de catalisadores sólidos, estando presentes em processos industriais baseados na reacção FC. Os blocos primários de construção dos zeólitos são, entre outros, $[\text{SiO}_4]^{-4}$ e $[\text{AlO}_4]^{-5}$, cuja estrutura é tetraédrica, e que se encontram ligados pelos seus vértices para formar canais e cavidades. São predominantemente materiais cristalinos e, como tal, têm poros regulares e bem definidos. A dimensão dos seus poros varia entre os 5 Å e os 10 Å, dependendo do zeólito, alguns possuem sistemas porosos comunicantes. Além do mais, possuem elevada estabilidade térmica, bem como elevada área específica. A Fig. 3.4, apresenta três famílias de estruturas base para diferentes zeólitos, ZSM-5, Mordenite e Beta.

A acidez que é requerida consegue-se pela inclusão de Al nos sítios da estrutura da base. Cada Al na estrutura induz o aparecimento de uma carga negativa na rede. O número de sítios ácidos é directamente proporcional ao número de átomos de Al no zeólito, mas a força relativa do ácido é inversamente proporcional ao número de átomos de Al. A forma ácida é usualmente designada pelo prefixo H; normalmente também se fornece a razão Si:Al.

Existe um significativo número de estudos sobre a acção dos zeólitos na formação do LAB, na sua grande maioria, os resultados apontam para uma quantidade obtida elevada devido à boa selectividade dos zeólitos. Os zeólitos com canais relativamente pequenos, tais como o H-ZSM-5 (dimensão dos poros: 5.6 Å×5.3 Å; razão Si/Al=15) e H-ZSM-12 (canais unidimensionais: 6.2 Å; razão Si/Al=80) mostram fraca actividade para a produção de LAB. No entanto, estudos com a mordenite indicam uma melhor actividade na alquilação [KVI01]. Os zeólitos do tipo H-Y sujeitos a permutas iónicas com terras raras (Ce^{3+} , La^{3+} e RE^{3+1}) [TDS06] e materiais compósitos, como o zeólito AIMCM-41/Beta [BDN^+06] mostram-se activos para a alquilação do benzeno, no entanto, com taxas de conversão e selectividades para 2-fenilalcenos variadas, $\sim 50 - 80\%$ e $\sim 70 - 94\%$, respectivamente.

Os HPA constituem uma classe única de materiais, atendendo à sua actividade quer na catálise

¹É uma mistura de terras raras, onde o principal ião é o La^{3+} , com pequenas quantidades de Ce^{3+} , Pr^{3+} e Nd^{3+} .

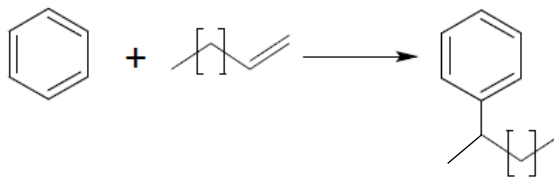


Figura 3.5: Reacção de formação do LAB a partir de alcenos.

ácida quer na catálise redox. Possuem elevada acidez bem como uma estabilidade térmica também ela relativamente elevada. São catalisadores ácidos de Brønsted com maior acidez do que a generalidade dos ácidos sólidos convencionais, tais como os zeólitos. Podem ser utilizados na sua forma original ou suportados. A forma suportada é preferível devido à sua maior área específica e ao melhor acesso por parte dos reagentes aos centros ácidos. No entanto, colocam-se alguns problemas, como a sua susceptibilidade à desactivação por envenenamento ou deposição de inertes (depósitos carbonáceos, como resultado das reacções orgânicas). A estabilidade térmica não é suficientemente elevada para que o processo de regeneração convencional por calcinação a 500-550 °C, possa ser levado a cabo.

A utilização de óxido de zircónio como base para diferentes HPA também tem sido investigada, nomeadamente com os ácidos 12-tungstodifosfórico e 12-molibdodifosfórico, que actuam como catalisadores eficientes na alquilação do benzeno com alcenos lineares (1-octeno e 1-dodeceno) na síntese do LAB [DLH05, DLB⁺05].

3.4 Indústria do alquilbenzeno

Os LAB são os precursores dos LAS (*linear alkylbenzene sulfonates*), um importante grupo de surfactantes (tensioactivos), preparados a partir de benzeno e de um alceno de cadeia longa ($C \geq 10$), recorrendo a um catalisador FC. O processo de alquilação tem-se baseado na catálise com $AlCl_3$ ou HF, mas, como se referiu, existem problemas associados com ambos. Os zeólitos surgiram como uma hipótese alternativa, embora com resultados díspares.

Em 1995, a companhia americana UOP (Universal Oil Products, uma empresa do grupo A Honeywell Company) e a espanhola CEPESA Química, introduziram o processo DETAL (DETergerent ALkylate), que substituiu o uso dos tradicionais catalisadores por um catalisador ácido sólido. Foi o ponto de partida para a produção de LAB descolar definitivamente da produção baseada em $AlCl_3$ e HF, no entanto, atendendo à tecnologia instalada anteriormente, e ainda em funcionamento, a catálise heterogénea ainda tem pouca expressão em termos globais. Um dos desafios que o catalisador deve enfrentar é o de contribuir para a formação de 2-fenilalcanos o mais linear possível, isto é, sem ramificações e com a ligação ao anel numa ponta da cadeia, figura 3.5. Isto é importante pois ajuda à biodegradabilidade do produto. O processo DETAL melhora a linearidade do produto em comparação com a catálise homogénea com HF (94-95% vs 92,3%) [KVI01].

O processo industrial, esquematizado na Fig. 3.6, inicia-se com a conversão dos alcanos em alcenos, efectuando a desidrogenação pela tecnologia PACOL. De forma a garantir elevados padrões de qualidade, os alcenos são sujeitos a tratamentos de purificação. No reactor DETAL, recorrendo ao catalisador ácido sólido em leito fixo, o benzeno é adicionado aos alcenos. Posteriormente, o LAB produzido é destilado de forma a recuperar, e reutilizar, o excesso de benzeno que não reagiu; também se obtém no processo de destilação alcanos que são devolvidos ao início do processo. A purificação final é feita extraindo ao produto final os alquilados pesados (*heavy alkylbenzene*, HAB), conseguindo-se assim um elevado padrão de qualidade no LAB a comercializar. O HAB também

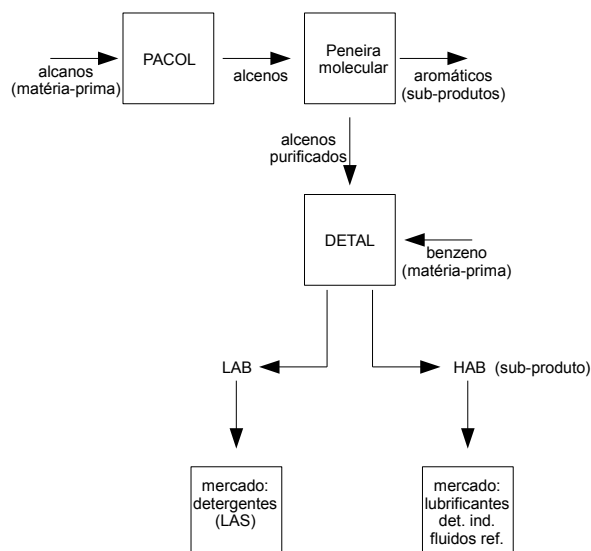


Figura 3.6: Etapas de produção do LAB com a tecnologia UOP/CEPSA.

entra no mercado, uma vez que é utilizado em óleos lubrificantes, detergentes industriais e fluidos de refrigeração.

3.5 Conclusões

A reacção de alquilação FC é uma das principais reacções na química industrial, especialmente no processamento em larga escala de hidrocarbonetos e irá certamente manter esse estatuto por muitos anos. Nas últimas três décadas, a indústria afastou-se dos processos tradicionais baseados no AlCl_3 no sentido de reduzir a produção de desperdícios. Isto tem-se manifestado na utilização de HF, separável e recuperável para reutilização, mas particularmente perigoso se o seu confinamento não for perfeito. Assim, têm sido os ácidos sólidos a ganhar um papel proeminente na indústria. O principal grupo de ácidos sólidos que têm sido utilizados em processos comerciais são os zeólitos, materiais facilmente sintetizados, disponíveis numa gama de estruturas com acidez controlável e com comportamento térmico extremamente estável, permitindo a reactivação e a reutilização.

Bibliografia

- [A⁺08] C. Arpesella et al. Direct Measurement of the Be-7 Solar Neutrino Flux with 192 Days of Borexino Data. *Phys.Rev.Lett.*, 101:091302, 2008. arXiv:0805.3843v2. 78
- [A⁺11a] P. Adamson et al. Measurement of the neutrino mass splitting and flavor mixing by MINOS. *Phys.Rev.Lett.*, 106:181801, 2011. arXiv:1103.0340. 86
- [A⁺11b] V.N. Aseev et al. An upper limit on electron antineutrino mass from Troitsk experiment. *Phys.Rev.*, D84:112003, 2011. arXiv:1108.5034. 67
- [A⁺12a] J.K. Ahn et al. Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment. *Phys.Rev.Lett.*, 108:191802, 2012. arXiv:1204.0626v2. 86
- [A⁺12b] F.P. An et al. Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay. *Phys.Rev.Lett.*, 108:171803, 2012. arXiv:1203.1669v2. 45, 86
- [A⁺12c] M. Auger et al. Search for Neutrinoless Double-Beta Decay in ¹³⁶Xe with EXO-200. *Phys.Rev.Lett.*, 109:032505, 2012. arXiv:1205.5608v2. 75
- [A⁺13a] M.G. Aartsen et al. First observation of PeV-energy neutrinos with IceCube. *Phys.Rev.Lett.*, 111:021103, 2013. arXiv:1304.5356. xiii, 63
- [A⁺13b] K. Abe et al. A Measurement of the Appearance of Atmospheric Tau Neutrinos by Super-Kamiokande. *Phys.Rev.Lett.*, 110:181802, 2013. arXiv:1206.0328v2. 86
- [A⁺13c] K. Abe et al. Evidence of Electron Neutrino Appearance in a Muon Neutrino Beam. *Phys.Rev.*, D88:032002, 2013. arXiv:1304.0841v2. 86
- [A⁺13d] Y. Abe et al. First Measurement of θ_{13} from Delayed Neutron Capture on Hydrogen in the Double Chooz Experiment. *Phys.Lett.*, B723:66–70, 2013. arXiv:1301.2948v2. 87
- [A⁺13e] N. Agafonova et al. New results on $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}$ appearance with the OPERA experiment in the CNGS beam. 2013. arXiv:1308.2553v1. 86
- [A⁺13f] N. Agafonova et al. Search for $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$ oscillations with the OPERA experiment in the CNGS beam. *JHEP*, 1307:004, 2013. arXiv:1303.3953v1. 86
- [A⁺13g] M. Agostini et al. Results on neutrinoless double beta decay of ⁷⁶Ge from GERDA Phase I. 2013. arXiv:1307.4720. 75, 90
- [A⁺13h] B. Aharmim et al. Combined Analysis of all Three Phases of Solar Neutrino Data from the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys.Rev.*, C88:025501, 2013. arXiv:1109.0763v1. 85
- [AA⁺10] A.A. Aguilar-Arevalo et al. Event Excess in the MiniBooNE Search for $\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations. *Phys.Rev.Lett.*, 105:181801, 2010. arXiv:1007.1150v3. 87
- [AAA⁺11] E. Andreotti, C. Arnaboldi, F.T. Avignone, M. Balata, I. Bandac, et al. ¹³⁰Te Neutrinoless Double-Beta Decay with CUORICINO. *Astropart.Phys.*, 34:822–831, 2011. arXiv:1012.3266. 75

- [Alt13] Guido Altarelli. Collider Physics within the Standard Model: a Primer. 2013. arXiv:1303.2842. 1
- [AW98] Paul T Anastas and John C Warner. *Green chemistry: theory and practice*. Oxford University Press, 1998. 93
- [Aza02] A. Azapagic. *Handbook of green chemistry and technology*. Wiley. com, 2002. 95
- [Bar11] A.S. Barabash. SuperNEMO double beta decay experiment. 2011. arXiv:1112.1784. 75
- [BB11] A.S. Barabash and V.B. Brudanin. Investigation of double beta decay with the NEMO-3 detector. *Phys.Atom.Nucl.*, 74:312–317, 2011. arXiv:1002.2862. 75
- [BDN⁺06] Ankur Bordoloi, Biju M Devassy, PS Niphadkar, PN Joshi, and SB Halligudi. Shape selective synthesis of long-chain linear alkyl benzene (lab) with almcm-41/beta zeolite composite catalyst. *Journal of Molecular Catalysis A: Chemical*, 253(1):239–244, 2006. 96
- [BG12] S.M. Bilenky and Carlo Giunti. Neutrinoless double-beta decay: A brief review. *Mod.Phys.Lett.*, A27:1230015, 2012. arXiv:1203.5250. xiii, 73, 74, 75, 86, 88
- [Bil10] Samoil Bilenky. *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*. Springer, 2010. 44, 46, 48, 57
- [BMO07] Ch Baerlocher, Lynne B McCusker, and David H Olson. *Atlas of zeolite framework types*. Access Online via Elsevier, 2007. xiv, 96
- [DHMW13] G. Drexlin, V. Hannen, S. Mertens, and C. Weinheimer. Current direct neutrino mass experiments, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/293986>. xiii, 64, 66, 67, 68
- [DLB⁺05] Biju M Devassy, F Lefebvre, Walter Böhringer, Jack Fletcher, and SB Halligudi. Synthesis of linear alkyl benzenes over zirconia-supported 12-molybdophosphoric acid catalysts. *Journal of Molecular Catalysis A: Chemical*, 236(1):162–167, 2005. 97
- [DLH05] Biju M Devassy, F Lefebvre, and SB Halligudi. Zirconia-supported 12-tungstophosphoric acid as a solid catalyst for the synthesis of linear alkyl benzenes. *Journal of Catalysis*, 231(1):1–10, 2005. 97
- [EV02] Steven R. Elliott and Petr Vogel. Double beta decay. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, 52:115–151, 2002. arXiv:hep-ph/0202264v1. 73
- [FHKS13] Amand Faessler, Rastislav Hodak, Sergey Kovalenko, and Fedor Simkovic. Search for the Cosmic Neutrino Background and KATRIN. 2013. arXiv:1304.5632. 59
- [FLM07] G. Fiorentini, M. Lissia, and F. Mantovani. Geo-neutrinos and earth’s interior. , 453:117–172, December 2007. arXiv:0707.3203. xv, 59
- [G⁺12] A. Gando et al. Measurement of the double- β decay half-life of ^{136}Xe with the KamLAND-Zen experiment. *Phys.Rev.*, C85:045504, 2012. arXiv:1201.4664. 75
- [GHMT06] Ariel Goobar, Steen Hannestad, Edvard Mortsell, and Huitzu Tu. A new bound on the neutrino mass from the sdss baryon acoustic peak. *JCAP*, 0606:019, 2006. arXiv:astro-ph/0602155. 74

- [GS08] Claus Grupen and Boris Shwartz. *Particle detectors*, volume 26. Cambridge University Press, 2008. 58
- [Han04] Moo-Young Han. *A Story of light: A Short introduction to quantum field theory of quarks and leptons*. World Scientific, 2004. 1
- [Har02] M. A. Harmer. *Handbook of green chemistry and technology*. Wiley. com, 2002. 94
- [Har12] J. Hartnell. Neutrinoless Double Beta Decay with SNO+. 2012. arXiv:1201.6169v1. 78
- [HM08] Francis Halzen and Alan D Martin. *Quarks and Leptons: An introductory Course in Modern Particle Physics*. Wiley. com, 2008. 1
- [KBB⁺05] Ch. Kraus, B. Borschein, L. Borschein, J. Bonn, B. Flatt, et al. Final results from phase II of the Mainz neutrino mass search in tritium beta decay. *Eur.Phys.J.*, C40:447–468, 2005. arXiv:hep-ex/0412056. 67
- [KKDB⁺01] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Dietz, L. Baudis, G. Heusser, I.V. Krivosheina, et al. Latest results from the Heidelberg-Moscow double beta decay experiment. *Eur.Phys.J.*, A12:147–154, 2001. arXiv:hep-ph/0103062. 75
- [KVI01] Joseph A Kocal, Bipin V Vora, and Tamotsu Imai. Production of linear alkylbenzenes. *Applied Catalysis A: General*, 221(1):295–301, 2001. 96, 97
- [Loz12] V. Lozza. Scintillator phase of the SNO+ experiment. *J.Phys.Conf.Ser.*, 375:042050, 2012. arXiv:1201.6599v1. 78
- [Mac09] D. J. Macquarrie. *Catalytic Asymmetric Friedel-Crafts Alkylations*. Wiley. com, 2009. xiii, xiv, 94, 95
- [MK93] T. Mayer-Kuckuk. *Física Nuclear*. Fundação Calouste Gulbenkian, 1993. 70
- [MS08] Brian Martin and Graham Shaw. *Particle physics*, volume 45. Wiley. com, 2008. xiii, 1, 38, 61, 73
- [OOC11] H. M. O’Keeffe, E. O’Sullivan, and M. C. Chen. Scintillation decay time and pulse shape discrimination in oxygenated and deoxygenated solutions of linear alkylbenzene for the SNO+ experiment. 2011. arXiv:1102.0797. 78
- [SAH07] Roger A Sheldon, Isabella Arends, and Ulf Hanefeld. *Green chemistry and catalysis*. John Wiley & Sons, 2007. xv, 93, 94
- [Sar12] Xavier Sarazin. Review of double beta experiments. 2012. arXiv:1210.7666. xiii, 78, 79
- [TDS06] Bejoy Thomas, Bibhuti B. Das, and S. Sugunan. Rare earth exchanged (ce³⁺, la³⁺ and re³⁺) hy zeolites as solid acid catalysts for the synthesis of linear alkyl benzenes. *Microporous and Mesoporous Materials*, 95(13):329 – 338, 2006. 96
- [W⁺10] R. Wendell et al. Atmospheric neutrino oscillation analysis with sub-leading effects in Super-Kamiokande I, II, and III. *Phys.Rev.*, D81:092004, 2010. arXiv:1002.3471. 85
- [W⁺12] Michael Wurm et al. The next-generation liquid-scintillator neutrino observatory LENA. *Astropart.Phys.*, 35:685–732, 2012. arXiv:1104.5620v3. xiii, 59, 87, 88

- [WZ13] Christian Weinheimer and Kai Zuber. Neutrino Masses. 2013. arXiv:1307.3518v1. xv, 72
- [Zub12] Kai Zuber. *Neutrino physics*, volume 2. CRC Press, 2012. xv, 44, 60, 69, 72, 82