UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

# Métodos para a resolução de sistemas de equações lineares

Versão final após defesa

**António Fernando Segunda**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
**Matemática para Professores**
(2° ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Pinto Rebelo

**Covilhã, junho de 2018**

# Agradecimentos

Na concretização deste trabalho, muitas pessoas contribuíram e influenciaram de forma directa e indirecta. Aqui desde já deixo a minha sincera gratidão, reconhecendo que este apoio foi fundamental e extremamente valoroso. Um agradecimento especial:

A Deus todo poderoso pela benção da vida e forças quando eu precisei.

À memória dos meus pais João Segunda e a Alice Antónia Namutuela pela vida, pela ternura, pelo amor absoluto e pelos ensinamentos;

Ao meu filho Cristiano Adalberto Raúl Segunda por suportar a minha ausência.

Ao meu irmão Alberto Segunda e às minhas irmãs Maria de F. Segunda, Teresa M. Segunda e Delfina Segunda pela força, apoio, atenção e carinho ao longo da minha estádio na Covilhã.

À restante familia pelo apoio dado ao longo de todo o trabalho.

Aos meus amigos pela amizade, companheirismo, disponibilidade e atenção prestada na realização do trabalho.

Ao meu orientador, Professor Doutor Paulo Jorge dos Santos Pinto Rebelo, por toda a orientação, apoio, amizade e companheirismo prestados durante a realização de todo o trabalho. Pela sua sinceridade e serenidade em avaliar e corrigir o trabalho.

# Resumo

O objectivo deste trabalho é o de apresentar vários métodos numéricos que nos permitem obter soluções aproximadas para sistemas de equações lineares. Os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel são deduzidos, as condições de convergência apresentadas. São apresentados alguns exemplos de aplicação e as soluções aproximadas são comparadas com a solução exacta.

# Palavras-chave

Sistemas de equações lineares algébricas; Métodos numéricos; Jacobi; Gauss-Seidel.

# Abstract

The aim of this work is to present sereval numerical methods that allow us to obtain approximate solutions to systems of linear equations. Jacobi and Gauss-Seidel methods are deduced and their convergence conditions presented. Two examples of application are presented and the approximate solutions are compared with the exact solution.



# Keywords

Linear systems of algebraic equations; Numerical methods.

# Conteúdo

# Lista de Figuras

# Lista de Notação

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Conjunto dos números Naturais |
| $\mathbb{Z}$ | Cojunto dos Números Inteiros |
| $\mathbb{Q}$ | Cojunto dos Números Racionais |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos Números Reais |
| $\mathbb{M}^{\mathbb{T}}$ | Representa a matriz transposta de $\mathbb{M}$ |
| $\mathbb{M}^{-\mathbb{1}}$ | Representa a matriz inversa de $\mathbb{M}$ |
| $\mathbb{I}_{\mathbb{n}}$ | Representa a matriz identidade |
| $0_n$ | Representa a matriz nula |
| $det\ \mathbb{M}$ | Representa o determinante de $\mathbb{M}$ |
| $\Delta x$ | Representa o avanço (passo) na variável $\mathbb{x}$, correspondente ao “espaço" |
| $\Delta t$ | Representa o avanço (passo) na variável $\mathbb{t}$, correspondente ao “tempo" |
| $\mathbb{u}_{\mathbb{k}}\left(\mathbb{t}\right)$ | Representa cada elemento da série de Fourier |
| $\mathbb{u}_{\mathbb{k}}\left(0\right)$ | Representa a condição inicial, para $1 \leqslant k \leqslant n$, onde $n \in \mathbb{N}$ |
| $\mathbb{n}$ | Representa o número de pontos a considerar no intervalo |
| $N$ | Representa o número de termos considerados na soma parcial da série de Fourier |

# Capítulo 1

## Breve introdução histórica à Álgebra Linear

Este capitulo é destinado a uma breve referência histórica do surgimento de sistemas de equações lineares e alguns dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares. Adotámos como referências principais nesta secção as referências [1], [4], [11] e [12].
A Álgebra linear é um ramo da matemática que surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares, sejam elas algébricas ou diferenciais. A Álgebra linear utiliza alguns conceitos e estruturas fundamentais da matemática como matrizes, vectores, espaços vectoriais, transformações lineares e determinantes.
Muitas das ferramentas básicas da Álgebra linear, particularmente aquelas relacionadas com a solução de sistemas de equações lineares, datam da antiguidade, como a eliminação "Gaussiana", citada pela primeira vez por volta do século II d.c., embora muitas dessas ferramentas não tenham sido isoladas e consideradas separadamente até os séculos XVII e XVIII. O método dos mínimos quadrados, usado pela primeira vez por Carl Friedrich Gauss no final do século XVIII, é uma aplicação inicial e significante das ideias da Álgebra linear.
As origens da Álgebra encontram-se na antiga Babilónia, cujos matemáticos desenvolveram um sistema aritmético avançado, com o qual puderam fazer cálculos algébricos. Com esse sistema eles foram capazes de aplicar fórmulas e calcular soluções para incógnitas numa classe de problemas que, hoje, seriam resolvidos como equações lineares, equações quadráticas e equações indeterminadas.
Os problemas apresentados nas tábuas Babilónicas e suas respectivas soluções são apresentadas sem algum símbolo para representar os números e estavam normalmente associados a questões da vida quotidiana ou da geometria. Como exemplo, podemos apresentar o seguinte problema:

"*Calcular o comprimento de um rectângulo conhecendo sua superfície*"

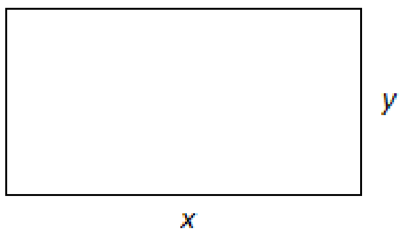



Figura 1.1: Representação de um problema presente nas tábuas Babilónicas.

Este problema pode ser traduzido pelo sistema de equações (não lineares);

Sabendo que

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & b \\ xy & = & a \end{array}\right. , \tag{1.1}$$

qual é o valor de $x$?

Encontrámos assim problemas que se reduzem a sistemas de duas equações a duas incógnitas, mais

frequentemente sendo uma equação linear e uma quadrática.
O método mais utilizado para resolução destes problemas seria o método por substituição. Também surge uma técnica aritmética do tipo "mudança de variáveis".
Por outro lado, a maioria dos matemáticos egípcios desta era e a maioria dos matemáticos indianos, gregos e chineses do primeiro milénio a.C. normalmente resolviam estas equações por métodos geométricos, como descrito no "*Papiro de Rhind*", "*Sulba Sutras*", os "*Elementos de Euclides*"e "*Os Nove Capítulos da Arte Matemática*".
Uma das seções da "*Aritmética*"que é dividida em nove seções, datada de 1000 a.C. (R'iu-Ch'ang Suam-Shu), trata de problemas que se transformam em sistemas de equações lineares a duas incógnitas. O método de resolução aparece como processo de eliminação ou de adição. Mais tarde (±1300 d.C.) certas técnicas chinesas para a resolução de problemas apresentam semelhanças com algoritmos "*matriciais*"de resolução de sistemas de equações lineares.
Os egípcios, assim como os Babilónios, também resolviam problemas da vida quotidiana sem, no entanto, apresentarem uma resolução explicita. Entre os problemas do "*Papyrus Rhind*"e de "*Moscovo*", há alguns enunciados modeláveis por sistemas simples de duas equações lineares a duas incógnitas.
Os estudos geométricos dos Gregos, consolidados nos Elementos, deram a base para a generalização de fórmulas, indo além da solução de problemas particulares para sistemas gerais para especificar e resolver equações.
*Diofanto* de Alexandria (nasceu entre 201 e 214 a.C - faleceu entre 284 e 298 a.C.) foi um matemático Grego. É considerado por muitos como sendo "o pai da álgebra". Desempenha na Álgebra um papel semelhante ao que Euclides ($360-295$ ac) tem na Geometria e Ptolomeu ($85-165$) na Astronomia. Aparentemente faleceu com 84 anos. Esta data é dada através de um poema da Antologia Grega, apresentada sob a forma de uma adivinha matemática, que se diz ter constituído o epitáfio do matemático Alexandrino, aparentemente escrito por um amigo, *Metrodorus*:

> "Aqui jaz o matemático que passou um sexto da sua vida como menino. Um doze avós da sua vida passou como rapaz. Depois viveu um sétimo da sua vida antes de se casar. Cinco anos após nasceu seu filho, com quem conviveu metade da sua vida. Depois da morte de seu filho, sofreu mais 4 anos antes de morrer"

Lendo com atenção o texto, obtemos a seguinte equação linear:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4. \tag{1.2}$$

Como $x$ representa sua idade, resolvendo a equação "sabemos"que ele faleceu com 84 anos.
Os trabalhos de *Diofanto* não estavam de acordo com a corrente dominante da ciência Grega e os seus trabalhos podem ter sofrido a influência de métodos matemáticos antigos, em particular da aritmética egipcia e da Álgebra Mesopotâmica.
Sabe-se que escreveu a "Aritmética", constituída por 13 livros, dois quais só chegaram seis até nós (em Grego) e "recentemente", descobriu-se uma versão árabe de quatro desses seis livros. Foi encontrada em Veneza por *Johann Müller* (matemático e astrónomo Alemão) em 1464 e a primeira tradução é devida a *Wilhelm Holzmann* (1532-1576).
De entre os vários (mais de uma centena) de problemas existentes no "Aritmética" devemos salientar os mais conhecidos, ver [4]:

- "*Decompor o quadrado* 16 *em dois quadrados*- Livro II, 8 (o mais conhecido);
- "*Encontrar quatro números cuja soma três a três seja, respectivamente, 22, 24, 27 e 20*- Livro I, 17;


Figura 1.2: *Diofanto* de Alexandria. Ver [4]

- “*Encontrar dois números quadrados tais que o seu produto somado a eles dê um número quadrado*- Livro II, 28;
- “*Encontrar três números tais que o produto de quaisquer dois somado ao terceiro seja um quadrado*- Livro III, 13;
- “*Encontrar três números tais que o produto de quaisquer dois somado à soma deles seja um quadrado*- Livro III, 15;

O modo particular de apresentar as “demonstrações"da obra de *Diofanto* (“Aritmética"), é uma caracteristica que muito a distingue da generalidade dos tratados Gregos de Matemática. Estas (“demonstrações") parecem mais ilustrações das proposições enunciadas onde *Diofanto* de modo a não deixarem dúvidas quanto à validade geral do argumento apenas apresenta casos particulares.
Nos seis livros preservados, *Diofanto* utiliza um novo sistema de abreviações para potências de números, para relações e operações, como por exemplo uma incognita (que é designada por *aritmo*), que era representada por um símbolo parecido com a letra Grega $\zeta$, o quadrado como $\Delta^{\gamma}$, o cubo como $K^{\gamma}$, a adição de termos era representados por justaposição adequada dos símbolos para os termos, e a subtração representada por uma abreviação de uma só letra colocada antes dos termos a serem subtraidos.
Apesar do sistema de notação por ele desenvolvido, este sistema não foi adoptado pela generalidade dos matemáticos e não influenciou sistemas posteriormente desenvolvidos, mas proporcionou-lhe uma manipulação das relações algébricas muito mais fácil do que a permitida pela apresentação em que não eram apresentados de forma específica.
O nome “Álgebra"surgiu de um tratado escrito por *Mohammed Ben Musa*, um matemático nascido por volta de 900 d.C. O seu trabalho intitulado “*Al-gjabr Wa'l-mocábala*", ou “*O livro sumário sobre cálculos por transposição e redução*"é um trabalho extremamente didático e com o objectivo de ensinar soluções para os problemas matemáticos quotidianos de então. A palavra “Al-jabr"da qual Álgebra foi derivada e significa “reunião", “conexão"ou “complementação". A palavra “*Al-jabr*"significa, literalmente, “a reunião de partes quebradas". Foi traduzida para o latim quase

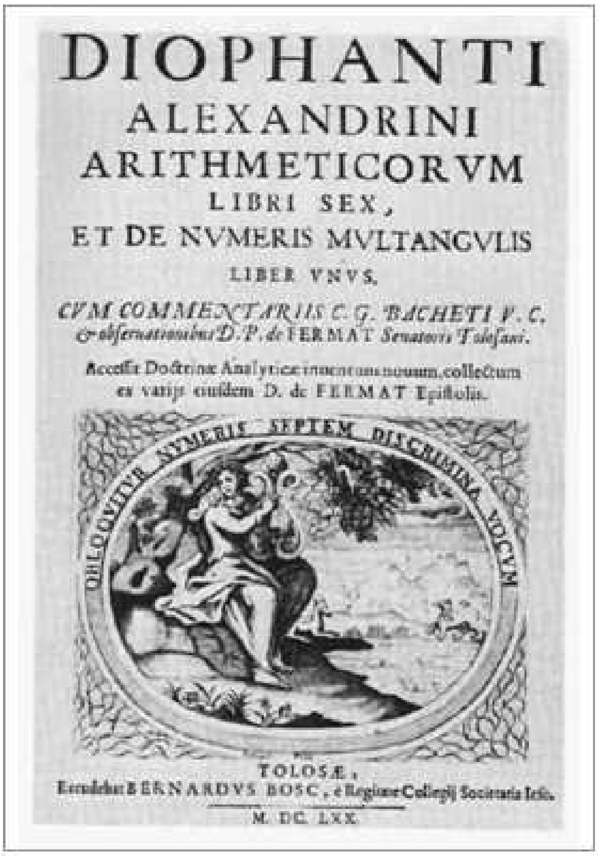



Figura 1.3: Capa da Aritmética, [5].

quatro séculos depois, com o título "*Ludus Algebrae et Almucgrabalaeque*".
Em 1140, *Robert de Chester* traduziu o título árabe para o latim, como "*Liber Algebrae et almucabala*". No século XVI, é encontrado em inglês como "*Algiebar and Almachabel*", e em várias outras formas, mas foi finalmente encurtado para Álgebra. As palavras, tal como foi indicado anteriormente, significam "restauração e oposição".
No "*Kholâsat Al-Hisâb*"("*Essência da Aritmética*"), *Behâ Eddin* (cerca de 1600 d.C.) escreve: "o membro que é afectado por um sinal de menos será aumentado e o mesmo adicionado ao outro membro, isto sendo Álgebra; os termos homogéneos e iguais serão então cancelados, isto sendo Al-muqâbala".
O desenvolvimento matemático árabe deu-se a partir do século VII, d.C. A cidade de Bagdade é um importante centro científico com numerosas bibliotecas ricas em obras gregas, indianas, etc. Podem-se considerar dois momentos do desenvolvimento:

i) Nos séculos VII e VIII (d.C.) os matemáticos árabes investiram na matemática grega e oriental, graças à tradução de numerosas obras da antiguidade;

ii) A partir do século IX, forma-se uma "cultura matemática árabe".

A obra de "*Al Klwarizmi*", publicada no século IX, trata da resolução de problemas antigos bem como a de outros problemas da vida quotidiana da época. Nela és ao resolvidos problemas que se transformam em equações do 1° e do 2° grau com coeficientes positivos. Encontramos nela métodos de resolução de problemas ligados a sistemas de equações com várias incógnitas, alguns dos quais indeterminados. O método utilizado nesta obra corresponde à actual técnica de substituição. É o

estudo de equações e de sistemas aritméticos que evolui para a álgebra.
Os Árabes levaram a palavra *al-jabr* para Espanha, um algebrista sendo um restaurador ou alguém que conserta ossos quebrados. Por isso, *Miguel de Cervantes* em Dom Quixote (II, cap. 15) é feita menção a "um algebrista que atendeu ao infeliz Sansão". Em certo tempo não era raro ver sobre a entrada de uma barbearia as palavras "Algebrista y Sangrador"(Smith, Vol. 2, páginas 389-90).
O uso mais antigo da palavra "Álgebra"no inglês em seu sentido matemático foi por *Robert Recorde* no "*The Pathwaie to Knowledge*"("O Caminho para o Conhecimento") em 1551: "também a regra da falsa posição, que traz exemplos não somente comuns, mas alguns pertinentes à regra da Álgebra".
"Álgebras"(no plural) aparece em 1849 no "*Trigonometry and Double Algebra*"("Trigonometria e Dupla Álgebra") de *Augustus de Morgan*:

> "*É mais importante que o estudante tenha em mente que, com uma excepção, nenhuma palavra ou sinal de aritmética ou Álgebra tem um átomo de significado ao longo deste capítulo, cujo objecto são os símbolos, e suas leis de combinação, dando uma Álgebra simbólica (página 92) a qual pode daqui em diante se tornar a gramática de cem álgebras significativas e distintas. [Colecção de Matemática Histórica da Universidade de Michigan].*"

A linguagem utilizada no quotidiano tem métodos de atribuição instantâneo de significado a termos contraditórios. Portanto, ela tem analogias mais fortes com uma Álgebra (se houvesse uma tal coisa) na qual estão pré-organizadas regras para explicar novos símbolos contraditórios à medida que surgem, do que em uma [Álgebra] na qual uma única instância deles leva a uma imediata revisão de todo o dicionário.
Começou a ser usada na Europa para designar os sistemas de equações com uma ou mais incógnitas a partir do século XI.
O assunto começou a tomar sua forma actual em meados do século XIX, que viu muitas noções e métodos de séculos anteriores abstraídas e generalizadas como o início da Álgebra abstracta. Matrizes e tensores foram introduzidos como objectos matemáticos abstractos e bem estudados na virada do século XX. O uso de tais objectos na relatividade geral, estatística e mecânica quântica fez muito para espalhar o assunto para além da matemática pura.
A notação algébrica utilizada hoje normalmente por nós começou com François Viète e foi configurada na forma actual por René Descartes.
No século I da era cristã, foi publicado na China um livro intitulado "*Jiuzhang Suanshu*"(*Os Nove Capítulos da Arte Matemática*).
Pela influência que causou em toda a matemática oriental, essa obra é muitas vezes comparada aos Elementos de *Euclides*. Os "*Nove Capítulos*"são constituídos por 246 problemas de aritmética e geometria mas a sua referência neste capítulo, dedicado à resolução de sistemas lineares, tem a ver com o facto de aí ter sido descrita uma forma sistemática de resolver sistemas lineares com coeficientes positivos.
Um aspecto importante a salientar neste trabalho é o de que as operações eram efectuadas com o auxílio de pequenos paus dispostos numa folha de papel. Através de manipulações sobre esses paus, a técnica proposta era em todo semelhante ao método da decomposição de Gauss, (apresentado, somente, no século XIX!). As operações eram efectuadas sobre os coeficientes do sistema o que confere à técnica um estatuto de uma proto-Álgebra linear. De salientar que os chineses, já desde essa altura, usavam um sistema de numeração de posição, com recurso ao uso de um quadrado em branco para representar o *zero*. Para cada questão apresentada é apenas apresentada uma solução

Figura 1.4: Uma página do tratado “Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala", de Al-Khwarizmi.

não existindo qualquer referência ao processo de resolução. Uma explicação para este facto é que o livro poderá ter sido utilizado apenas como livro de texto.

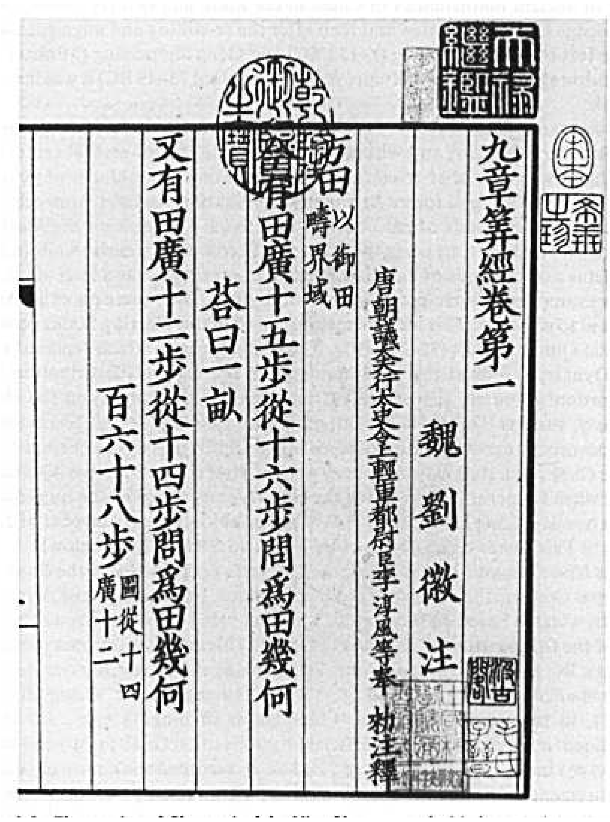
O livro trata da resolução de problemas utilizando o *Teorema de Pitágoras*, proporcionalidade, cálculo de área do círculo e volume da esfera, determinação de raízes quadradas e cúbicas e resolução de problemas pelo método que é designado por *falsa posição*.

No século XIII o matemático chinês Zhu Shijie publicou uma obra intitulada “*Suanxue Qimeng*"(“Introdução à Ciência do Cálculo") onde aperfeiçoou o método de resolução de sistemas lineares proposto nos “*Nove Capítulos*", não se libertando, contudo, do recurso aos pauzinhos para efectuar as contas. Este livro teve também o mérito de ter sido estudado, muito mais tarde, pelo matemático japonês Seki Takakazu (1642-1708).

Esta imagem, 1.6 contém tabelas dos coeficientes binomiais e dos números de Bernoulli.

Inspirado por esta obra, *Takakazu* generalizou a Álgebra chinesa libertando-a do recurso aos paus. O cálculo proposto por este ilustre matemático (na obra “*Kaikendai no Hô*") não restringe o número de incógnitas e estabelece regras gerais, em vez de resolver casos particulares.

Uma outra importante contribuição feita por *Takakazu* foi a introdução da noção de determinante no seu livro “*Kaifukudai no Hô*". A “noção"de determinante, cuja teoria foi estudada de forma sistemática por *Charles Jacobi* (1804 − 1851), precedeu a de matriz que só foi considerada como um ente matemático por *William Rowan Hamilton* (1805-1856) no seu livro “*Lectures on Quaterni-*



九章筭經卷第一 魏 劉 徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勅注釋

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

百六十八步 圖從十四廣十二

Figura 1.5: Primeira página do primeiro capitulo do livro Nove Capítulos de Arte Matemática.

*ons*". No entanto, a resolução de sistemas de equações lineares já tinha sido considerada por vários autores no ocidente, sendo de destacar o contributo de *Carl Friedrich Gauss* (1777-1875). Na sua obra "*Theoria Motus*"(1809) Gauss apresentou uma técnica de resolução de sistemas lineares, que apareceu no contexto de um problema de mínimos quadrados, que não é mais do que o método de eliminação que todos conhecemos e que hoje tem o seu nome.

Mais tarde, Gauss apresentou um processo iterativo para resolver sistemas lineares de grande dimensão, antecipando o procedimento conhecido por método de *Gauss-Seidel*. Para além dos contributos de Gauss, devemos ainda salientar os trabalhos de *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813), *Pierre Simon Laplace* (1749-1827) e *Charles Jacobi* (1804-1851). Refira-se que *Jacobi*, baseado nos trabalhos de Gauss sobre mínimos quadrados, efectuou vários trabalhos sobre sistemas lineares tendo também influenciado um seu aluno alemão *Ludwig Seidel*. Estes dois matemáticos resolveram vários problemas usando métodos iterativos que foram "baptizados"com os seus nomes.

A teoria de matrizes foi posteriormente desenvolvida e melhorada por *Arthur Cayley* (1821-1895) e *James Joseph Sylvester* (1814-1899) (a quem se deve a introdução do termo "*matriz*"), tendo progredido de forma espectacular até ao início do século XX. Foi para a teoria de matrizes que o físico *Heisenberg* apelou, em 1925, quando fundou a Mecânica Quântica.

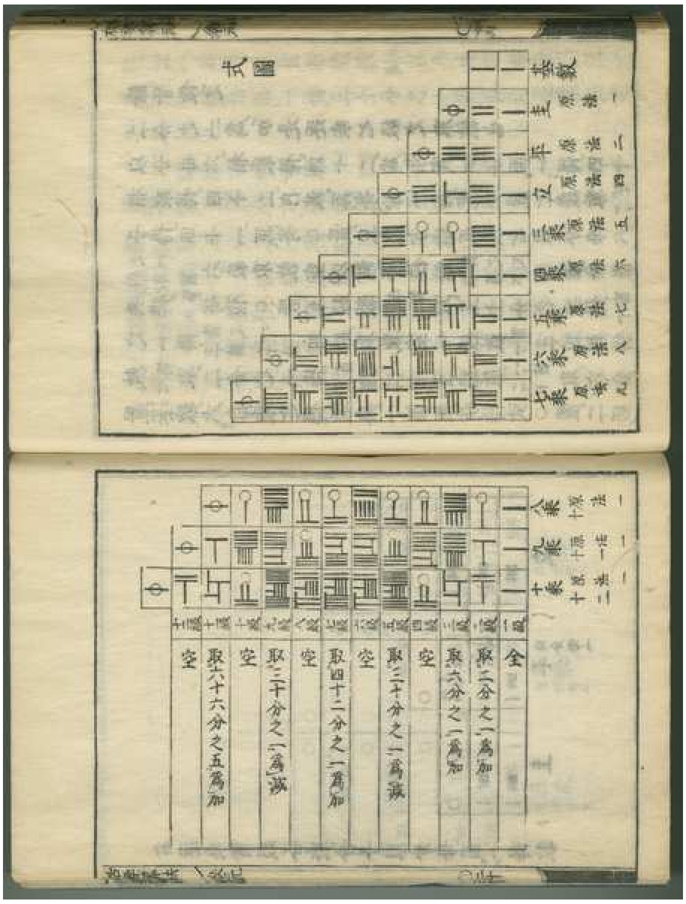


Figura 1.6: Página do livro de Seki.

# Capítulo 2

# Sistemas de Equações

Os sistemas de equações lineares constituem um relevante tema de estudo devido à sua importância em Matemática Aplicada. Muitos problemas, por exemplo, nas áreas de Engenharia conduzem à necessidade de resolver sistemas de equações lineares.
Na secção que se segue iremos fazer uma breve referência sobre alguns conceitos, como equação linear, sistemas de equações lineares e solução de um sistema de equações lineares.

## 2.1 Sistemas de $n$ equações lineares a $n$ incógnitas

**Definição 2.1.1** ([3]). *Chama-se equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a uma expressão da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são constantes reais*[1].

**Definição 2.1.2** ([3]). *Chama-se sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a um conjunto finito de equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ou seja*

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. . \tag{2.1}$$

*Em (2.1), as constantes (habitualmente reais) $a_{ij}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n$ são designadas por coeficientes do sistema, as constantes $b_i$ (habitualmente reais) para $1 \leqslant i \leqslant n$ são designadas por termos independentes e os $x_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ são as incógnitas do sistema.*

**Nota 2.1.1.** *Neste trabalho vamos estudar unicamente métodos para resolver sistemas de equações lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.*

**Nota 2.1.2.** *O sistema (2.1) pode ainda ser apresentado na forma (mais concisa):*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.2}$$

**Definição 2.1.3** ([3]). *Chama-se solução de um sistema de equações lineares a um conjunto de valores atribuídos às incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de tal forma que satisfazem todas as equações. O conjunto de todas as soluções possíveis é chamado de* ***conjunto solução****. No caso em que as equações têm a mesma solução, elas dizem-se* ***compatíveis****. Caso contrário, dizem* ***incompatíveis****.*
*Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se têm o mesmo conjunto e solução.*

Um sistema de equações algébricas lineares pode ser classificado das seguintes formas:

1. *Sistema Possível e Determinado*: É um sistema que possui uma única solução. Esse sistema é designado por *sistema possível* e suas equações de *equações compatíveis*.

[1] Eventualmente podem ser números complexos. A abordagem a esse tipo de problemas encontra-se fora dos objectivos deste trabalho.

2. *Sistema Possível Indeterminado*: É um sistema que admite uma infinidade de soluções.

3. *Sistema Impossível*: É o sistema que não admite soluções: É designado por *sistema impossível* e suas equações como *equações incompaveis*.

## 2.2 Resolução de Sistemas de equações

Uma questão fundamental em Álgebra Linear é a resolução de sistemas de equações lineares. Como vimos anteriormente, os sistemas de equações lineares ocorrem nos mais diversificados domínios da matemática aplicada. Em problemas concretos podem ocorrer sistemas de grandes dimensões cuja resolução obriga à utilização de meios computacionais. Por exemplo, em problemas de estruturas de Engenharia Civil, Engenharia Mecânica, Engenharia Aeronáutica, etc é necessário resolver sistemas de equações lineares cuja matriz dos coeficientes tem ordem 1000 ou superior, ou a matriz é esparsa (tem muitos zeros), pelo que métodos como o método de substituição, cálculo pela inversa ou regra de Cramer não são de aplicação razoável pois a aplicação de alguns é impraticável ou a sua utilização envolve um esforço computacional excessivo ou então, devido à propagação de erros. É portanto essencial conhecer algoritmos eficientes de resolução de sistemas lineares.

Vamos de, seguida apresentar alguns métodos habitualmente utilizados quando o número de equações é reduzido ou quando é necessário resolver vários sistemas em que a matriz dos coeficientes é a mesma.

Vamos então apresentar métodos que permitem resolver sistemas de equações lineares na forma:

$$AX = B, \tag{2.3}$$

onde $A$ é a matriz dos coeficientes, $X$ a coluna com as incógnitas e $B$ a coluna com os termos independentes. Neste trabalho vamos considerar dois tipos de métodos:

1. Os métodos directos, que nos permitem obter a solução do sistema após um número finito de operações. Como exemplo deste tipo de métodos, temos o método de Gauss, o método "explícito", que envolve o cálculo da inversa da matriz $A$, a aplicação da teoria dos determinantes, via matriz adjunta ou a Regra de Cramer.

2. Os métodos indirectos são métodos que nos fornecem unicamente aproximações para a solução. Este tipo de métodos é utilizado para a resolução de sistemas de grandes dimensões (por exemplo em que o número de incógnitas é superior a 40)que aparecem em problemas de Engenharia.

   Para resolver o sistema $AX = B$ os métodos iterativos partem de uma aproximação inicial, que será designada por $X^{(0)}$ e constroem uma sucessão de aproximações sucessivas

   $$X^{(1)},\ X^{(2)},\ X^{(3)},\ X^{(4)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots$$

   que "esperamos"[2] seja convergente para a solução exacta $X$ do sistema. No que se segue, suponhamos que $A$ é regular e ainda que $a_{ii} \neq 0$ para $i = \overline{1, n}$. Caso tal não ocorra, podemos alterar a ordem das equações de modo a garantir essa condição.

[2] Obviamente sob certas condições é possível garantir a convergência da sucessão obtida para a solução exata. O "valor"do erro depende do objetivo pretendido e do critério considerado.

## 2.3 Normas de matrizes e condicionamento

Nesta secção nos ocuparemos na definição de alguns conceitos e proposições de normas. Nesta secção utilizaremos as seguintes referências [1],[3],[6] e [7].
Para além da instabilidade numérica que decorre da propagação de erros de arredondamento, podem também surgir problemas de mau condicionamento. Para podermos analisar convenientemente o problema do condicionamento é necessário introduzir o conceito de norma de um vector e de norma de uma matriz.
Seja $E$ um espaço vectorial real isto é, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

**Definição 2.3.1** ([1],[3]). *Chama-se produto interno ou escalar em $E$ a uma aplicação de*

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \to & (x|y) \end{array}$$

*tal que*

**P$_1$ )** $(x|x) \geq 0$ *e* $(x|x) = 0$ *sse* $x = 0$.

**P$_2$ )** $(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$, *linearidade no primeiro argumento.*

**P$_3$ )** *Se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(y|x) = (x|y)$

**Definição 2.3.2** ([1],[3]). *Chama-se espaço euclidiano (ou unitário) a um espaço linear de dimensão finita, real (ou complexo) onde se define um produto interno.*

**Exemplo 2.3.1.** 1. *Em* $\mathbb{R}^n$, *usando as coordenadas dos vectores na base canónica,* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *temos um produto interno,*

$$(x|y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

*Em* $\mathbb{R}^3$, *temos*

$$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

**Definição 2.3.3** ([1],[3]). *Num espaço com produto interno chama-se norma do vector $x$ ao escalar*

$$||x|| = (x|x)^{\frac{1}{2}}.$$

**Exemplo 2.3.2.** 1. *Em* $\mathbb{R}^n$, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$;

**Proposição 2.3.1.** 1. *Se $E$ é real, o produto interno é uma forma bilinear.*

2. $(x|0) = (0|x) = 0$

3. *Se*

$$(x|y) = 0, \ \ \forall y \in E$$

*então* $x = 0$. *Da mesma forma se* $(y|x) = 0, \ \ \forall y \in E$ *então* $x = 0$ *Basta ter em conta que* $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

**Proposição 2.3.2.** **N$_1$)** $||x|| = 0$ *sse* $x = 0$ *e* $||x|| \geq 0, \ \ x \in E$.

**N$_2$)** $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \ \ \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$.

**N$_3$)** *A desigualdade triangular,*

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||;$$

**N$_4$)** *A desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|(x|y)| \leq ||x||||y||.$$

Vamos em primeiro lugar apresentar algumas normas de vectores e depois são apresentadas algumas normas de matrizes. Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Então define-se

a) $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$,

b) $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$,

c) $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

**Definição 2.3.4** ([1])**.** *Seja $\| \cdot \|$ uma norma vectorial em $\mathbb{R}^n$. A norma da matriz $A$ induzida pela norma vectorial é:*

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|A\mathbf{x}\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \tag{2.4}$$

*Como exemplo de normas de matrizes podemos apresentar as seguintes:*

*a)* $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$;

*b)* $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;

*c)* $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$.

**Exemplo 2.3.3.** *Calcule $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ e $\|.\|_E$ da matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**

$$\|A\|_1 = \max\{|1| + |0| + |5|; |2| + |3| + |-1|; |-1| + |-1| + |1|\} = \max\{6; 6; 3\} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|1| + |2| + |-1|; |0| + |3| + |-1|; |5| + |-1| + |1|\} = \max\{4; 4; 7\} = 7$$

$$\|A\|_E = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2; 0^2 + 3^2 + (-1)^2; 5^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{43} = 6.55743852$$

Nos exemplos apresentados nesta dissertação vamos utilizar a norma $\|A\|_E$.

**Definição 2.3.5** ([1], [14])**.** *Designamos por raio espectral, $\rho$ de uma matriz $A$ ao valor*

$$\rho(A) = \max_{i=1,2,\ldots,n} |\lambda_i| \tag{2.5}$$

*onde $\lambda_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ são os valores próprios de $A$.*

**Teorema 2.3.1.** *[[1], [14], ] Seja $A$ uma matriz quadrada. Então,*

*a) Para qualquer norma matricial $\|\cdot\|$ temos*

$$\rho(A) \leq \|A\|, \tag{2.6}$$

**Demonstração 1.** *Se $\lambda$ é valor próprio de $A$ e $X$ um vector próprio de $A$ associado a $\lambda$, tem-se*

$$AX = \lambda X, \qquad X \neq 0. \tag{2.7}$$

*Donde*

$$|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\|. \tag{2.8}$$

*Dividindo (2.8) por $\|X\|$ obtemos*

$$|\lambda| \leq \|A\|. \tag{2.9}$$

*Portanto*

$$\rho(A) = \max |\lambda| \leq \|A\| \tag{2.10}$$

■

*b) Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe sempre uma norma induzida $\|\cdot\|$, tal que :*
$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.
*Ou seja, o raio espectral é o ínfimo do conjunto das normas induzidas de uma matriz.*

**Demonstração 2.** *Ver [14], pag.12, cap.1*

Ao resolver um sistema linear

$$AX = B$$

podemos ter problemas de:

1. *Condicionamento*: se o problema for mal condicionado, essas técnicas de pesquisa de *pivot* deixam de ser úteis, já que um problema mal condicionado será sempre numericamente instável. Portanto, interessa identificar quais os sistemas que nos podem trazer problemas de condicionamento;

2. *Estabilidade numérica*: os problemas de estabilidade numérica estão relacionados com o algoritmo que utilizamos para resolver o sistema. Por exemplo, para evitar os problemas de instabilidade numérica, é habitual considerar o método de Gauss com pesquisa de *pivot*.

Supondo que nos era dado, não o vector $B$ mas uma sua aproximação $\tilde{B}$. Vamos estudar a influência desse erro nos resultados obtidos, uma vez que em vez do valor exacto obtemos um valor aproximado $\tilde{X}$, que é a solução do sistema aproximado

$$A\tilde{X} = \tilde{B}. \tag{2.11}$$

As normas previamente apresentadas permitem-nos estabelecer uma medida de comparação entre os erros vectoriais, definindo-se os erros do mesmo modo que no caso escalar,

a) Erro Absoluto de $\tilde{X}$: $\|E_{aX}\| = \left\|X - \tilde{X}\right\|$;

b) Erro Relativo de $E_{rX}$: $\|E_{rX}\| = \dfrac{\left\|X - \tilde{X}\right\|}{\|X\|}$,

relativamente a uma norma induzida.
Para estabelecermos a relação entre os erros relativos dos dados e os erros relativos dos resultados é importante estabelecer um conceito que está relacionado com a norma de matrizes: o número de condição.

**Definição 2.3.6** ([1]). *Designa-se por número de condição de uma matriz $A$ relativamente à norma $\|\cdot\|$ ao número:*

$$\kappa = Cond(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \geq 1. \tag{2.12}$$

**Teorema 2.3.2** ([13]). *Se $\|E\| < 1$ onde a norma de matriz $\|.\|$ é tal que $\|I\|=1$ ($I$ denota a matriz identidade), então a matriz $I + E$ é invertível e*

$$\frac{1}{1 + \|E\|} \leq \left\|(I + E)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|E\|}. \tag{2.13}$$

**Demonstração 3.** *Por (2.6) se $\|E\| < 1$ então todos os valores próprios $\lambda_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) de $E$ verificam $|\lambda_i| < 1$. Os valores próprios de $I + E$ são dados por $1 + \lambda_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) logo $I + E$ não tem nenhum valor próprio igual a zero. Consequentemente $I + E$ é invertível.*
*Nota-se que sendo $(I + E)(I + E)^{-1} = I$ resulta $(I + E)^{-1} = -E(I + E)^{-1} + I$.*
*Donde*

$$\left\|(I + E)^{-1}\right\| \leq \left\|-E(I + E)^{-1}\right\| + \|I\| \leq \|E\| \left\|(I + E)^{-1}\right\| + 1. \tag{2.14}$$

*Logo $(1 - \|E\|) \left\|(I + E)^{-1}\right\| \leq 1$ e consequentemente $\left\|(I + E)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{(1-\|E\|)}$. Por outro lado, de $I = (I + E)^{-1} + E(I + E)^{-1}$ vem*

$$1 \leq \left\|(I + E)^{-1}\right\| + \left\|E(I + E)^{-1}\right\| \leq (1 + \|E\|) \left\|(I + E)^{-1}\right\|, \tag{2.15}$$

*donde*

$$\frac{1}{1 + \|E\|} \leq \left\|(I + E)^{-1}\right\|. \tag{2.16}$$

*Resultado análogos podem ser obitidos para a matriz $I - E$.*

■

**Teorema 2.3.3** ([13]). *Seja $A$ uma matriz invertível e seja $\delta A$ uma "perturbação" da matriz $A$, tal que*

$$\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

*Então,*

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}\right). \tag{2.17}$$

**Demonstração 4.** *Consideramos o sistesma $AX = B$. Suponhamos que são conhecidas apenas aproximações para os elementos de $A$ e $B$. Pretendemos determinar a variação $\delta X$ na solução do sistema tal que*

$$(A + \delta A)(X + \delta X) = (B + \delta B). \tag{2.18}$$

*De (2.18) vem*

$$AX + \delta AX + A\delta X + \delta A\delta X = B + \delta B. \tag{2.19}$$

*Dado que* $AX = B$ *então*

$$(A + \delta A)\,\delta X = \delta B - \delta AX \tag{2.20}$$

*Denotando* $A^{-1}\delta A = E$ *tem-se* $(A + \delta A) = A + AA^{-1}\delta A = A\,(I + E)\,.$
*Além disso sendo* $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ *então* $\|E\| < 1$ *e* $A + \delta A$ *é invertivel.*
*Donde, de (2.20) vem*

$$\delta X = (A + \delta A)^{-1}\,(\delta B - \delta AX)\,. \tag{2.21}$$

*Do teorema (2.3.2) tem-se*

$$\left\|(I + E)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{(1 - \|E\|)} \leq \frac{1}{(1 - \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|)}. \tag{2.22}$$

*Assim dado que* $(A + \delta A)^{-1} = (I + E)^{-1}\,A^{-1}$ *tem-se de (2.17)*

$$\|\delta X\| \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{(1 - \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|)}\,(\|\delta B\| + \|\delta A\|\,\|X\|)\,. \tag{2.23}$$

*De* $AX = B$ *vem* $\|B\| = \|AX\| \leq \|A\|\,\|X\|$ *e*

$$\frac{1}{\|X\|} \leq \frac{\|A\|}{\|B\|} \qquad (X \neq 0) \tag{2.24}$$

*De 2.23 e 2.24, obtemos*

$$\begin{aligned}
\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} &\leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta B\|}{\|X\|} + \|\delta A\|\right) \\
&\leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\left(\frac{\|A\|\,\|\delta B\|}{\|B\|} + \|\delta A\|\right) \\
&= \frac{\|A\|\left\|A^{-1}\right\|}{1 - (\|A\|\,\|A^{-1}\|)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).
\end{aligned}$$

*Atendendo 2.12 temos*

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta B\|}{\|B\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right). \tag{2.25}$$

■

**Nota 2.3.1.** *Quando o número de condição é grande, o problema de resolução do sistema* $AX = B$ *é mal condicionado, isto é, pequenas variações nos elementos de* $A$ *e* $B$ *podem causar grande variação relativa na solução.*

# Capítulo 3

# Métodos directos

Como exemplo de métodos directos, podemos referir o método de Gauss, os métodos que envolvem a decomposição da matriz dos coeficientes como um produto de várias matrizes, (por exemplo a decomposição em $LU$), a utilização da matriz inversa. Estes métodos são pouco práticos para a resolução de sistemas de equações lineares que aparecem em problemas de Engenharia, pois o número de equações é muito elevado ($n \geq 40$). É impraticável aplicar o método de substituição a um sistema de equações lineares com um número de equações e incógnitas elevado.
Quando o determinante da matriz dos coeficientes é um número muito próximo de zero, os métodos directos **não funcionam bem** (o facto de se dividir um número por outro muito próximo de zero, pode provocar erros de arredondamento ...).
O método de Gauss é baseado numa "redução"do sistema dado a um sistema equivalente cuja matriz dos coeficientes é triangular superior. Tal sistema pode então ser resolvido por substituição inversa. Tal redução é feita efectuando operações sobre as filas da matriz dos coeficientes. Para evitar a propagação de erros, aquando da aplicação deste método é habitual escolher-se o *pivot* (elementos da diagonal principal). As técnicas para a escolha do *pivot* são as seguintes:

a) Na chamada escolha parcial de *pivot*, no início do passo $k$, é escolhido o *pivot* $a_{pk}$ tal que

$$|a_{pk}| = \max_{k \leq i \leq n} (|a_{ik}|) .$$

Se $p \neq k$ as linhas $p$ e $k$ são trocadas entre si.

b) Na chamada escolha total de *pivot*, no início do passo $k$, é escolhido o *pivot* $a_{pr}$ tal que

$$|a_{pr}| = \max_{k \leq i, k \leq j \leq n} (|a_{ij}|) .$$

Se $p \neq k$ as linhas $p$ e $k$ são trocadas entre si. Se $r \neq k$ as colunas $r$ e $k$ são trocadas entre si. (mas de modo a obter um sistema equivalente). A acumulação de erros de arredondamento é menor quando e utiliza a escolha total de *pivot*. No entanto, o esforço computacional é superior.

Vamos de seguida definir alguns tipos de matrizes que poderemos considerar em alguns exemplos deste trabalho.

**Definição 3.0.1** ([1])**.** *Uma matriz $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ diz-se diagonal dominante se*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{1 \leq j \leq, j \neq i} |a_{ij}| , \quad j = \overline{1, n} \tag{3.1}$$

*e diz-se estritamente diagonal dominante se*

$$|a_{ii}| > \sum_{1 \leq j \leq, j \neq i} |a_{ij}| , \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.2}$$

**Nota 3.0.1.** *Num sistema $AX = B$ em que $A$ é estritamente diagonal dominante, não é necessário efectuar a escolha parcial de pivot pois ela está garantida à partida.*

O método de eliminação de Gauss consiste em condensar a matriz dos coeficientes até se obter uma matriz triangular superior e depois, procedendo à substituição inversa, determinar os valores das incógnitas pela ordem $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. .

## 3.1 Sistemas triangulares

Consideremos um sistema de $n$ equações com $n$ incógnitas cuja matriz dos coeficientes é triangular superior invertível.(isto é $a_{ii} \neq 0$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right. . \tag{3.3}$$

Da última equação de (4.6) obtemos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Substituindo o valor de $x_n$ na penúltima equação segue-se que

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}},$$

e assim sucessivamente até se obter

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}.$$

Este método é designado por método de substituição inversa (a matriz dos coeficientes é triangular superior). Quando a matriz dos coeficientes é triangular inferior invertível, o método é designado por método de substituição directa. (em primeiro lugar obtemos o valor de $x_1$).

## 3.2 Sistemas tridiagonais

Consideremos o sistema $AX = B$ em que $A = [a_{ij}]$ com $a_{ij} = 0$ para $|i - j| \geq 2$, isto é,

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & & & & \\ l_2 & d_2 & u_2 & & & \\ & l_3 & d_3 & u_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & u_{n-1} \\ & & & & l_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Gauss, desenvolveu um algoritmo para calcular a solução de sistemas triangulares, que passamos a indicar:

para $k$ de 1 até $n-1$ fazer

$$m \to \frac{l_{k+1}}{d_k}$$

$$d_{k+1} \to d_{k+1} - mu_k$$

$$b_{k+1} \to b_{k+1} - mb_k$$

$$x_n \to \frac{b_n}{d_n}$$

para $k$ de $n-1$ até 1 fazer

$$x_k \to \frac{(b_k - u_k x_{k+1})}{d_k}$$

**Exemplo 3.2.1.** *Aplique o algoritmo de Gauss ao sistema tridiagonal $AX = B$ com*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad e \; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**

Como $n = 3$, $k = 1, 2$.

Para $k = 1$ temos

$$\begin{aligned} m &= \frac{l_2}{d_1} = 1 \\ d_2 &= d_2 - mu_1 = 5 - 1 \times 1 = 4 \\ b_2 &= b_2 - mb_1 = 5 - 1 \times 3 = 2 \end{aligned}$$

Para $k = 2$,

$$\begin{aligned} m &= \frac{l_3}{d_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ d_3 &= d_3 - mu_2 = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) = 1 \\ b_3 &= b_3 - mb_2 = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = 3 \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_3 = \frac{b_3}{d_3} = 3, \;\; x_2 = \frac{b_2 - u_2 x_3}{d_2} = \frac{2 - (-2) \times 3}{4} = 2, \; x_1 = \frac{b_1 - u_1 x_2}{d_1} = \frac{3 - 1 \times 2}{1} = 1.$$

## 3.3 Métodos de eliminação compacta

Esta secção é dedicada à aplicação de dois métodos de resolver o problema de resolver sistemas de equações lineares em que a matriz dos coeficientes é comum. Neste caso, a única diferença reside na coluna dos termos independentes.

As principais referências utilizadas nesta secção são [1], [6], [7], [13], [18] e [16]

### 3.3.1 Decomposição LU

Vamos considerar que no sistema de equações lineares

$$AX = B \tag{3.5}$$

a matriz dos coeficientes se pode escrever como o produto de duas matrizes,

$$A = LU, \tag{3.6}$$

onde $L$ é uma matiz triangular inferior, cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e $U$ uma matriz triangular superior. Assim, substituindo (3.6) em (3.5) temos

$$LUX = B. \tag{3.7}$$

Designando

$$UX = Y, \tag{3.8}$$

vem, substituindo em (3.7), obtemos

$$LY = B. \tag{3.9}$$

Assim, calculada a decomposição $LU$ da matriz $A$, o sistema (3.9) é resolvido por substituição directa e, calculado $Y$, o sistema (3.9) é resolvido por substituição inversa para obter $X$.
Para resolver um novo sistema $AX = C$ é apenas necessário resolver $LY = C$ por substituição directa e $UZ = Y$ por substituição inversa.

**Teorema 3.3.1.** *Seja $A$ uma matriz de ordem $n$ e $A_k$ o bloco formado pelas primeiras $k$ linhas e pelas primeiras $k$ colunas de $A$. Suponha-se que $\det(A_k) \neq 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Então, existe uma e uma única matriz triangular inferior $L$, cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1, e uma matriz triangular $U$ tal que $A = LU$.*

**Demonstração 5.** *Se $n = 1$, isto é, $A = (a_{11})$, então $L = (1)$ e $U = (u_{11})$.*
*Logo $L$ e $U$ são univocamente determinadas.*
*Suponha-se o teorema válido quando a ordem da matriz $A$ é $n-1$ tendo-se $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$.*
*Definamos o fraccionamos de $A$ em blocos como se segue*

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & c \\ l & u_{nn} \end{bmatrix},$$

*onde $c$ é uma matriz coluna de $n-1$ elementos e $l$ uma matriz linha de $n-1$ elementos. Consideremos em $L$ e $U$ fraccionamentos análogos*

$$L = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_{n-1} & u \\ 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Então*

$$LU = \begin{bmatrix} L_{n-1}U_{n-1} & L_{n-1}u \\ mU_{n-1} & mu + u_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Por hipotese a decomposição $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$ é única. Como $A_{n-1}$ não é singular, nem $L_{n-1}$ nem $U_{n-1}$ são singulares.*

*Assim de $L_{n-1}u = c$ obtem-se uma solução única $u$. De $mU_{n-1} = l$ obtem-se uma solução única $m$. De $mu + u_{nn} = a_{nn}$ vem $u_{nn} = a_{nn} - mu$.* ■

Os elementos das matrizes $L$ e $U$ são dados por

- $u_{1j} = a_{1j}, \ \ (j = 1, 2, \ldots, n)$
- $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}, \ \ (i = 2, 3, \ldots, n)$
- $u_{ij} = a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}, \ \ (i = 2, 3, \ldots, n; j = i, i+1, \ldots, n)$
- $l_{ji} = \dfrac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}}{u_{ii}}, \ \ (i = 2, 3, \ldots, n-1; j = i+1, i+2, \ldots, n)$

**Nota 3.3.1.** *Esta forma de calcular a decomposição $LU$ pode ser completada se se tiver $u_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$.*
*Mas tal verificar-se-á se a hipotese formulada no teorema (3.3.1), $\det(A_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ fôr satisfeita.*

**Teorema 3.3.2.** *Os elementos pivot $u_{ii} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ são diferentes de zero se e só se $\det(A_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.*

**Demonstração 6.** *Se $n = 1$ então $A_1 = u_{11}$ e o teorema é válido.*
*Assumimos $\det(A_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$. Conseguentemente $u_{ii} \neq 0, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$.*
*Se $\det(A_i) \neq 0, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$, pelo teorema (3.3.1) $A_n$ admite a decomposição $A_n = L_nU_n$ sendo $L_n$ e $U_n$ univocamente determinadas.*
*Donde*

$$det(A_n) = det(L_n)\, det(U_n) = det(U_n).$$

*Isto é*

$$det(A_n) = u_{11}u_{11}\ldots u_{nn}. \tag{3.10}$$

*Sendo $u_{ii} \neq 0, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$, de (3.10) conclui-se imediatamente que $det(A_n) = 0$ se e só se $u_{nn} = 0$* ■

**Nota 3.3.2.** *Em resumo, o sistema $AX = B$ pode ser resolvido do seguinte modo:*

$$AX = B \Leftrightarrow LUX = B \leftrightarrow \begin{cases} UX & = & Y \\ LY & = & B \end{cases},$$

*depois,*

*i) Resolvendo em primeiro lugar o sistema $LY = B$, calcula-se $Y$ (por substituição directa);*

*ii) Resolvendo em seguida o sistema $UX = Y$, calcula-se $X$ (por substituição inversa).*

**Exemplo 3.3.1.** *Resolva o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 3 \\ -x_1 - 3x_2 & = & 2 \end{cases} \tag{3.11}$$

*utilizando a decomposição $LU$.*

**Resolução:**
A decomposição em $LU$ da matriz $A$ é

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \equiv LU$$

Logo, o sistema $AX = B$ fica

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Então,

i) Seja $Y = UX$ e vamos resolver o sistema $LY = B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $[y_1 \ \ y_2 \ \ y_3]^T = [0 \ \ 3 \ \ 0.5]^T$. A solução deste sistema foi obtida utilizando a substituição directa.

ii) Depois, é necessário resolver o sistema $UX = Y$ sendo $Y = [0 \ \ 3 \ \ 0.5]^T$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

que utilizando a substituição inversa permite obter a solução

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a solução do sistema $AX = B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{é } X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.3.2.** *Utilizando a decomposição LU resolva o sistema* $AX = B$, *em que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**
A decomposição em $LU$ da matriz $A$ é

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \equiv LU.$$

Logo, o sistema $AX = B$ fica

$$\begin{aligned} AX &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= (LU)\,X \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então,

i) Seja $Y = UX$ e vamos resolver o sistema $LY = B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $[y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \;\; y_4]^T = [8 \quad -9 \quad 26 \quad -26]^T$. A solução deste sistema foi obtida utilizando a substituição directa.

ii) Depois, é necessário resolver o sistema $UX = Y$ sendo $Y = [8 \quad -9 \quad 26 \quad -26]^T$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 26 \\ -26 \end{bmatrix}$$

que utilizando a substituição inversa permite obter a solução

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

### 3.3.2 Decomposição de Cholesky

A decomposição de Cholesky é um outro modo de decompor a matriz. Neste caso, a matriz $A$ é decomposta como produto de uma matriz triangular superior $U$ com a sua transposta, isto é,

$A = U^T U$ . Esta decomposição só é possivel se a matriz $A$ for simétrica [1] e definida positiva.

**Definição 3.3.1** ([2])**.** *Se os determinantes das submatrizes principais, $A_i$, de ordem $i$, para $i = 1, ..., n$, de uma matriz $A$, de $n$, são positivos, então $A$ diz-se definida e positiva.*

Os elementos de $U$ são dados por

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \quad u_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{kj}^2}, \qquad j = 2, \ldots, n \tag{3.13}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right), \quad i = 2, \ldots,\ n, \quad j = i+1, \ldots,\ n \qquad u_{ij} = 0,\ i > j \tag{3.14}$$

**Exemplo 3.3.3.** *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

*Vamos*

*i) verificar se $A$ satisfaz as condições da decomposição de Cholesky;*

*ii) decompor $A$;*

*iii) resolver o sistema $AX = B$, sabendo que $B = [0\ \ 6\ \ 5]^T$.*

**Resolução:**

i) A matriz $A$ é simetrica pois

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} = A^T$$

Vamos verificar se $A$ é definida e positiva.

$$\det(A_1) = 4 > 0, \ \ \det(A_2) = 36 > 0 \ \ e \ \ \det(A_3) = \det(A) = 36 > 0.$$

Logo a matriz $A$ satisfaz as condições da decomposição de Cholesky.

ii) Utilizando 3.13 e 3.14 temos;

[1] A matriz $A$ diz-se simetrica se $A = A^T$, ver [8]

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= \sqrt{4} = 2 \\
u_{12} &= \frac{a_{12}}{u_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \\
u_{13} &= \frac{a_{13}}{u_{11}} = \frac{-4}{2} = -2 \\
u_{22} &= \sqrt{a_{22} - u_{12}^2} = \sqrt{10 - 1^2} = 3 \\
u_{23} &= \frac{1}{u_{22}}(a_{23} - u_{12}u_{13}) = \frac{1}{3}(4 - 1 \times (-2)) = 2 \\
u_{33} &= \sqrt{a_{33} - (u_{13}^2 + u_{23}^2)} = \sqrt{9 - ((-2)^2 + 2^2)} = 1.
\end{aligned}
$$

Logo, a decomposição de $A$ fica.

$$
A \equiv \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv U^T U
$$

iii) Resolvendo o sistema $AX = B$ temos

$$
\begin{aligned}
AX &\equiv \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \left(U^T U\right) x \\
&= \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Seja $Y = UX$ e vamos resolver o sistema $U^T Y = B$, isto é,

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

cuja solução é $[y_1 \ \ y_2 \ \ y_3]^T = [0 \ \ 2 \ \ 1]^T$. A solução deste sistema foi obtida utilizando a substituição directa.

Depois, é necessário resolver o sistema $UX = Y$ sendo $Y = [0 \ \ 2 \ \ 1]^T$, isto é,

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

e utilizando a substituição inversa permite obter a solução

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução do sistema $AX = B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.3.3 A decomposição QR

Seja $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ uma matriz quadrada[2]. A decomposição ortogonal de $A$ consiste em obter uma matriz $Q \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ortogonal e uma matriz $R \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ triangular superior, tais que:

$$A = QR. \tag{3.15}$$

A decomposição QR também pode ser utilizada na resolução de sistemas lineares.
Se $A$ for a matriz dos coeficientes do sistema $Ax = b$, então:

$$AX = B \Leftrightarrow (QR)X = B \Leftrightarrow Q^T QRX = Q^T b \Leftrightarrow RX = Q^T B \tag{3.16}$$

uma vez que $Q^T Q = I_n Q^T Q = I_n$, pois $Q$ é ortogonal.
A vantagem deste processo sobre a factorização $LU$ é que este é mais estável numericamente devido a ortogonalidade da matriz $Q$. Temos que

$$A = QR \Leftrightarrow Q^T A = R \text{ e } Q^T B = B \Leftrightarrow Q^T B = \bar{B} \tag{3.17}$$

e sabemos que $\|QX\| = \|X\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, a multiplicação de uma matriz ou vetor por uma matriz ortogonal não altera o tamanho dos vetores coluna de $A$ e do vetor constante $b$, ou seja, não amplia erros de arredondamento ou incertezas nos dados associados à matriz $A$ e ao vetor $b$ do sistema linear. Além disso, esta factorização não requer estratégias de "pivoteamento". O seguinte teorema garante a existência dos fatores $Q$ e $R$ para uma matriz $A$ regular. Se exigirmos que $R$ tenha diagonal positiva, então é possível demonstrar que os fatores $Q$ e $R$ são únicos, caso contrário isto não ocorre. Podemos enunciar o seguinte resultado

**Teorema 3.3.3.** *Se $A$ é uma matriz com colunas linearmente independentes, então $A$ pode ser escrita de modo único da forma:*

$$A = QR \tag{3.18}$$

*onde $Q$ é ortogonal e $R$ é triangular superior com diagonal positiva.*

**Demonstração 7.** *Como as colunas de $A$ são linearmente independentes, então $A$ é regular e, portanto, a matriz $A^T A$ é simétrica definida positiva. Então, existe e é única a factorização de Cholesky da matriz $A^T$. Seja:*

$$A^T A = R^T R \tag{3.19}$$

[2]Devemos salientar que esta condição não é necessária. A matriz pode ser do tipo $(n, m)$ com $n \geq m$.

*Devemos salientar que designamos o fator de Cholesky à parcela $R^T$, pois desta forma temos que a matriz $R$ é triangular superior com diagonal positiva. Devemos ainda salientar que também que* $\det(R) \neq 0$, *pois seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal e sua diagonal é positiva, portanto, $R$ é inversível. Considere então $Q = AR^{-1}$, assim temos:*

$$Q = AR^{-1} \Leftrightarrow A = QR$$

*e obtemos a factorização $QR$ de $A$. É necessário mostrar que a matriz $Q$ é ortogonal:*

$$Q^T Q = (AR^{-1})^T (AR^{-1}) = (R^{-1})^T A^T A R^{-1} = (R^T)^{-1} R^T R R^{-1} = I \tag{3.20}$$

*Na penúltima igualdade usamos os fatos: $A^T A = R^T R$ e $(R^{-1})^T = (R^T)^{-1}$. Portanto, a matriz $Q$ é ortogonal.*
*Para mostrar a unicidade da factorização devemos considerar $A = Q'R'$ onde $Q'$ é ortogonal, ou seja, $(Q')^T Q' = I(Q')^T Q' = I$ e $R'$ é triangular superior com diagonal positiva. Então*
*Na penúltima igualdade usamos os fatos: $A^t A = R^t R$ e $(R^{-1})^T = (R^T)^{-1}$. Portanto, a matriz $Q$ é ortogonal.*
*Para mostrar a unicidade da factorização devemos considerar $A = Q'R'$ onde $Q'$ é ortogonal, ou seja, $(Q')^T Q' = I(Q')^t Q' = I$ e $R'$ é triangular superior com diagonal positiva. Então:*

$$A^T A = (Q'R')^T (Q'R') = (R')^T (Q')^T Q'R' = (R')^T R'$$

*pelo que onde $(R')t(R')^T$ é triangular inferior com diagonal positiva. Mas, a factorização de Cholesky de $A^T A$ é única e, portanto, $R = R'$ e $Q' = A(R')^{-1} = AR^{-1} = Q$. Logo, a factorização $QR$ de $A$ existe e é única.* ■

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt é um método utilizado para converter uma conjunto arbitrário de um espaço vetorial em um conjunto ortogonal. É claro que os vetores da base ortogonal podem ser ortonormalizados, produzindo então uma base ortonormal. A construção deste processo mostra um importante resultado de que todo espaço vetorial não nulo de dimensão finita possui uma base ortonormal.

**Exemplo 3.3.4.** *Utilizando a decomposição $QR$ determina a solução de mínimos quadrados do sistema de equações lineares $AX = B$ dado por*

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 & = 5 \\ x_1 + \quad\quad x_3 & = 4 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 & = 8 \end{cases} \tag{3.21}$$

**Resolução:** Onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

A decomposição em $QR$ da matriz $A$ é

$$A = QR \equiv \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{22}} & \frac{7}{\sqrt{22}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}.$$

Portanto o sistema $AX = B$, fica

$$QRX = B \equiv \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{22}} & \frac{7}{\sqrt{22}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}. \qquad (3.22)$$

Então $RX = Q^T B$, vamos determinar a expressão $Q^T B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{43}{\sqrt{22}} \\ \frac{15}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$$

de modo que o sistema $RX = Q^T B$ fica

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{22}} & \frac{7}{\sqrt{22}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{43}{\sqrt{22}} \\ \frac{15}{\sqrt{11}} \end{bmatrix},$$

e utilizando o método de substituição inversa permite obter a solução de minimos quadrados

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

# Capítulo 4

# Métodos iterativos

Estes (atendendo a secção 2.2), são utilizados para sistemas de grandes dimensões que aparecem em problemas de engenharia ou seja em casos, em que a matriz dos coeficiente é esparsa. Nesta secção nos ocuparemos em deduzir a formula iterativa, de apresentar alguns critérios de paragem, condições de convergência dos métodos iterativos e a descrição e exemplos de aplicação dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel. Para está secção utilizamos as seguintes referências [1],[4] [6], [9], [7], [10], [12] e [14]

Os métodos a seguir descritos são apropriados para sistemas de grande dimensão, cuja matriz dos coeficientes é esparsa, isto é, que tem muitos zeros.

Seja

$$AX = B \tag{4.1}$$

um sistema de Cramer com $n$ equações e $n$ incógnitas. A matriz $A$ pode ser escrita na forma

$$A = M - N, \tag{4.2}$$

sendo $M$ e $N$ matrizes de ordem $n$ e $M$ é invertível. Substituindo no sistema temos

$$\begin{aligned} (M - N)\,X &= B && (4.3)\\ \text{ou} & && \\ MX &= NX + B && (4.4)\\ \text{donde} & && \\ X &= M^{-1}(NX + B) && (4.5) \end{aligned}$$

Assim, a solução do sistema é o ponto fixo de (4.5).

**Teorema 4.0.1.** *Se $\left\|M^{-1}N\right\| < 1$ a sucessão definida pela iteração*

$$X^{(k+1)} = M^{-1}\left(NX^{(k)} + B\right), \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{4.6}$$

*converge para o ponto fixo de (4.5) qualquer se seja $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

**Demonstração 8.** *Como $X = GX + H$ e $X^{(k+1)} = GX^{(k)} + H$, onde $G = M^{-1}N$ e $H = M^{-1}B$, verifica-se que*

$$\begin{aligned} X - X^{(k+1)} &= GX + H - \left(GX^{(k)} + H\right) \\ &= G\left(X - X^{(k)}\right), \end{aligned}$$

*Assim por aplicações sucessivas, segue que*

$$
\begin{aligned}
X - X^{(k+1)} &= G\left(X - X^{(k)}\right) \\
&= G^2\left(X - X^{(k-1)}\right) \\
&\vdots \\
&= G^k\left(X - X^{(0)}\right), \ k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}
$$

*Donde*

$$
\begin{aligned}
\left\|X - X^{(k)}\right\| &\leq \left\|G^k\left(X - X^{(0)}\right)\right\| \\
&\leq \|G^k\| \left\|\left(X - X^{(0)}\right)\right\|
\end{aligned}
$$

*Atendendo que*

$$
\begin{aligned}
\left\|G^k\right\| &= \|G \times G \times \ldots \times G\| \\
&\leq \|G\| \times \|G\| \times \ldots \times \|G\| \\
&= \|G\|^k.
\end{aligned}
$$

*Portanto*

$$
\left\|X - X^{(k)}\right\| \leq \|G\|^k \left\|\left(X - X^{(0)}\right)\right\|.
$$

*Como* $\|G\| < 1$*, podemos afirmar que* $\lim_{k\to+\infty} \|G\|^k = 0$.
*Resultando então que*

$$
\lim_{k\to+\infty} \left\|X - X^{(k)}\right\| = 0.
$$

■

Os critérios de paragem habitualmente utilizados em (4.6) são

i) Critério do erro absoluto: $\left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\| \leq \varepsilon$;

ii) Critério do erro relativo: $\left\|X^{(n)} - X^{(n-1)}\right\| \leq \varepsilon \|X^n\|$;

iii) Critério do número máximo de iteracções: $n = nmax$;

para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

## 4.1 Condições de Convergência

Neste secção faremos apresentação das condições de convergência dos métodos iterativos. Tanto o método de Jacobi como o método de Gauss-Seidel, são métodos do tipo

$$X^{(n+1)} = GX^{(n)} + H.$$

A matriz $G$ é designada por matriz de iteração do método. Em ambos os métodos, como vimos anteriormente, a partir de um vector inicial $X^{(0)}$, obtemos as aproximações para a solução, $X$. Deste modo, se $X$ é a solução exacta e $X^{(n+1)}$ uma sua aproximação, obtemos da relação

$$X - X^{(n+1)} = G\left(X - X^{(n+1)}\right),$$

ou seja

$$\begin{aligned}
e^{(n+1)} &= Ge^{(n)} \\
&= G^2e^{(n-1)} \\
&\vdots \\
&= G^{n+1}e^{(0)}
\end{aligned}$$

que exprime o vector erro $e^{(n+1)}$ da iteração $(n+1)$ em função do vector erro da aproximação inicial, $e^{(0)}$. Portanto,

$$e^{(n)} = G^n e^{(0)}, n = 1, 2, \dots \tag{4.7}$$

Podemos então apresentar a

**Definição 4.1.1.** *O método iterativo diz-se convergente se*

$$\lim_n e^{(n)} = 0.$$

**Teorema 4.1.1.** *É condição necessária e suficiente para que o método iterativo, de matriz de iteração $G$ seja convergente que*

$$\lim_n G^{(n)} = 0. \tag{4.8}$$

**Demonstração 9.** *Atendendo $X = GX + H$*

$$e^{(n+1)} = \left(GX - GX^{(n+1)}\right) = Ge^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

*Assim por aplicações sucessivas, segue que:*

$$e^{(n)} = G^n e^{(0)}, n = 1, 2, \dots \tag{4.9}$$

*e, como tal,*

$$\lim_n e^{(n)} = 0 \Leftrightarrow \lim_n G^{(n)} = 0, \tag{4.10}$$

*o que prova o pretendido.* ■

**Teorema 4.1.2.** *Dada uma matriz $G$, as suas sucessivas potências $G^n$, $n = 1, 2, \dots$ convergem para a matriz nula se e só se os valores próprios de $G$ forem, em módulo, menores que* 1.

Um outro critério para verificar a convergência do método iterativo é o seguinte: a partir da matriz $A$ definamos as quantidades $R_i$, por

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se, $R = \max_i \ R_i < 1$ então o método de Jacobi ou de Gauss-Seidel é convergente.
Em resumo,

a) Erro

$$E_a(x^{(k)}) \leq \frac{\|G\|}{1 - \|G\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad \text{ou} \quad E_a(x^{(k)}) \leq \frac{\|G\|^k}{1 - \|G\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

b) Condições de convergência: A matriz $A$ do sistema tem que ser estritamente diagonal dominante ou a matriz de iteração $G$ verificar a condição $\|G\| < 1$.

## 4.2 Método de Jacobi

### 4.2.1 Breve referência à vida de Jacobi

Nesta secção vamos fazer uma breve referência à vida e alguns trabalhos desenvolvidos por Jacobi. *Karl Gustav Jacobi*, nasceu em 10 de Dezembro de 1804 em Postsdam e faleceu prematuramente em Berlim a 18 de Fevereiro de 1851, foi um matemático alemão relevante do século XIX, que viveu grande parte da sua vida nas cidades de Konigsber e de Berlim.
Jacobi aos vinte e um anos obteve o doutoramento em Matemática sobre "Fracções Parciais e Topicos relacionados". Lecionava na Universidade de Berlim a disciplina Cálculo de superfícies curvas.
Jacobi desenvolveu seus trabalhos nas áreas relacionados com a Teoria dos Números, a Análise real e complexa, a Mecânica e os sistemas de equações lineares.
Aos vinte e dois anos Jacobi tornou-se professor da Universidade de Konigsberg e nas suas aulas mantinha muitas vezes os alunos encantados. Um ano depois foi promovido devido alguns trabalhos publicados sobre teoria dos números (relativos à reciprocidade cúbica). Segundo [10][1]:

> "Infelizmente, a falência financeira da familia, sua pouca saúde e um discurso político imprudente que levou o governo a acabar com seu cargo, deixaram Jacobi num estado lastimável ao final de sua vida. Embora seja principalmente conhecido por seu trabalho teórico, ele realizou importante trabalho em Mecânica e Astronomia e foi nesse contexto que primeiro apareceu seu método de iteração."

### 4.2.2 Descrição do método de Jacobi

Nesta secção vamos descrever os procedimentos de resolução e resolver alguns exemplos utilizando o método de Jacobi. Este método foi desenvolvido por Carl Jacobi (1804-1851). Neste método, a partir da matriz dos coeficientes $A = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ vamos definir três matrizes:

i) $D = [d_{ij}]$ uma matriz diagonal;

ii) $L = [l_{ij}]$ uma matriz estritamente triangular inferior e;

iii) $L = [l_{ij}]$ uma matriz estritamente triangular superior

[1]Idem pag. 250

Figura 4.1: Karl Gustav Jacobi.

tais que

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se} \quad i = j \\ \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}, \quad l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se} \quad i > j \\ \\ 0 & \text{se} \quad i \leq j \end{cases}, \tag{4.11}$$

$$u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se} \quad i < j \\ \\ 0 & \text{se} \quad i \geq j \end{cases} \tag{4.12}$$

Então

$$A = D + (L + U). \tag{4.13}$$

Naturalmente, temos que supor que a matriz $D$ é invertível. Pelo teorema 4.0.1 basta garantir que

$$\left\| D^{-1} (L + U) \right\| < 1 \tag{4.14}$$

para que o limite da sucessão

$$X^{(k+1)} = D^{-1} \left[ -(L + U) X^{(k)} + B \right], \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{4.15}$$

seja a solução do sistema $AX = B$.
Este método pode ser apresentado na forma

$$X_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} X_j^{(k)}, \qquad i = 1, \ldots, \ n \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)X^{(k)} + D^{-1}B \qquad G = -D^{-1}(L + U) \tag{4.16}$$

**Exemplo 4.2.1.** *Consideremos o sistema de equações lineares* $AX = B$ *onde*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \ \ e \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Resolução:**
Para este problema temos as matrizes

$$L=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\ \text{e } D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

e

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix},\ -D^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

$$-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-0&0\end{bmatrix}\ \text{e } D^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Portanto, obtemos a formula recursiva

$$X^{(k+1)}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}X^{(k)}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Vamos considerar como aproximação inicial $x^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 0]^T$. Temos então:

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{19}{18}\\\frac{5}{18}\end{bmatrix}.$$

$$X^{(3)}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{19}{18}\\\frac{5}{18}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}\\\frac{25}{27}\\\frac{4}{27}\end{bmatrix}.$$

$$X^{(4)}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{9}\\\frac{25}{27}\\\frac{4}{27}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}\\\frac{61}{81}\\\frac{26}{81}\end{bmatrix}.$$

$$X^{(5)}=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{9}\\\frac{61}{81}\\\frac{26}{81}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{23}{81}\\\frac{197}{243}\\\frac{92}{243}\end{bmatrix}.$$

Assim, continuando podemos chegar a solução da equação dada por:

$$X=\begin{bmatrix}\frac{3}{13}\\\frac{11}{13}\\\frac{4}{13}\end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}\left\|X - X^{(5)}\right\|_E &\approx \sqrt{\left(\frac{3}{13} - \frac{23}{81}\right)^2 + \left(\frac{11}{13} - \frac{197}{243}\right)^2 + \left(\frac{4}{13} - \frac{92}{243}\right)^2} \\ &\approx 0.09546351.\end{aligned}$$

**Nota 4.2.1.** *Devemos salientar que o método converge apesar de que a matriz dos coeficientes não é diagonal dominante. No entanto, a matriz $M$, a matriz de recorrência, verifica a condição:*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\right)^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

*Esta condição garante a convergência do método. Para mais detalhes ver secção 4.1 e teorema 4.1.1.*

Portanto temos

**Exemplo 4.2.2.** *Utilizando o método de Jacobi, vamos determinar a solução do sistema de equações lineares $AX = B$ onde*

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 10 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\ \ e\ B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

*cuja solução exacta é* $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

**Resolução:**

Vamos verificar se o método de Jacobi converge para a solução do problema atendendo o teorema (4.0.1), istó é, (vamos utilizar a matriz iterativa, utilizando a norma euclidiana). A formula de recorrência do método de Jacobi é:

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}B;\ \ \mathrm{k} \in \mathbb{N}_0$$

e a matriz iterativa é;

$$G = -D^{-1}(L+U)$$

logo, fazendo a decomposição a matriz dos coeficiente $A$ e agrupar as matrizes triangular inferior e a matriz superior temos;

$$A = D + (L+U)$$

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 10 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

a matriz inversa de $D$ é

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

e a soma da matriz inferior e da matriz superior $(L + U)$ é

$$L + U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

assim sendo, a matriz iterativa $-D^{-1}(L + U)$ fica,

$$-D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{6} & -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{10} & 0 & -\dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{2}{9} & -\dfrac{1}{9} & 0 & \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} & -\dfrac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

calculando a norma Euclidiana da matriz iterativa vem;

$$\left\| -D^{-1}(L + U) \right\|_E \approx 0.589042069796999 < 1 \tag{4.26}$$

portanto o método converge para a solução exacta.

Podemos ainda verificar a convergencia do método pelo critério em que a matriz dos coeficientes, a matriz A é uma matriz estritamente diagonal dominante, isto é, o módulo de cada elemento da diagonal é superior à soma dos módulos dos elementos da mesma linha (coluna). De facto,

$$12 > 2 + 3 + 5, \quad 10 > |-1| + 1 + 2, \quad 9 > 2 + 1 + |-1| \quad \text{e } 7 > |-2| + 1 + 1.$$

o que verifica que a matriz é estritamente diagonal dominante por linhas.

Agora vamos a resolução do sistema pela fórmula de recorrência utilizando a relação (forma matricial do método de Jacobi),

$$X^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)\, X^{(k)} + D^{-1}B; \;\; \text{k} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x & y & z & t \end{bmatrix}^T.$$

Como

$$H = D^{-1}B = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4} \\ \\ -\dfrac{1}{10} \\ \\ -1 \\ \\ -\dfrac{1}{7} \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

e sustituindo (4.25) na formula de recorrência obtemos o seguinte processo iterativo;

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} \\ t^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \\ t^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7}. \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Considerando a condição inicial $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, vamos determinar $X^{(1)};\ \cdots;\ X^{(30)}$. Portanto temos

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ t^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \\ t^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7}. \end{bmatrix}$$

assim,

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}, \tag{4.29}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{105} \\ \frac{1}{280} \\ -\frac{299}{315} \\ -\frac{2}{35} \end{bmatrix}, \tag{4.30}$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{105} \\ \frac{1}{280} \\ -\frac{299}{315} \\ -\frac{2}{35} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{53}{5040} \\ \frac{22}{1575} \\ -\frac{735}{718} \\ -\frac{247}{17640} \end{bmatrix}, \tag{4.31}$$

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{53}{5040} \\ \frac{22}{1575} \\ -\frac{735}{718} \\ -\frac{247}{17640} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{47}{20954} \\ \frac{41}{66251} \\ -\frac{1289}{1286} \\ \frac{83}{18900} \end{bmatrix}, \tag{4.32}$$

e

$$X^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{47}{20954} \\ \frac{41}{66251} \\ -\frac{1289}{1286} \\ \frac{83}{18900} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{8891} \\ -\frac{37}{42563} \\ -\frac{1089}{1090} \\ -\frac{25}{63136} \end{bmatrix}, \tag{4.33}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$X^{(10)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{570645} \\ -\frac{1}{467141} \\ -1 \\ \frac{3}{891718} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{926793} \\ -\frac{1}{720766} \\ -\frac{460965}{460966} \\ -\frac{1}{582631} \end{bmatrix}, \tag{4.34}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$X^{(30)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-15} \\ -10^{-15} \\ -1 \\ -10^{-15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} \\ -1 \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.35}$$

Determinando o erro absoluto cometido na norma euclidiana para o vector pela 5ª iteração do método de Jacobi temos;

$$\begin{aligned} \left\| X - X^{(5)} \right\|_E &\approx \sqrt{\left(0 + \frac{12}{8891}\right)^2 + \left(0 + \frac{37}{42563}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1089}{1090}\right)^2 + \left(0 + \frac{25}{63136}\right)^2} \\ &\approx 0.00189107. \end{aligned}$$

Determinando o erro absoluto cometido na norma euclidiana para o vector pela 30ª iteração do método de Jacobi, temos;

$$\left\| X - X^{(30)} \right\|_E \approx 6.359601310784502 \times 10^{-17}.$$

## 4.3 Método de Gauss-Seidel

### 4.3.1 Breve referência à vida de Carl Friedrich Gauss

Nesta secção vamos fazer uma breve referência sobre vida e alguns trabalhos desenvolvidos por Gauss nos varios dominios da ciência.

Carl Friedrich Gauss, foi um matemático, astrônomo e físico alemão que nasceu em Braunschweig, a 30 de Abril de 1777, e, faleceu em Göttingen, a 23 de Fevereiro de 1855.

Gauss é oriundo de uma familia com poucos recursos financeiros, cujo o pai (Gerhard Diederich) tinha como profissão jardineiro e pedreiro e a mãe (Dorothea Benze) era analfabeta. Frequentou a escola pela primeira vez em 1784 (sete anos depois do seu nascimento) e em 1793 já tinha o seu primeiro trabalho em relação à Geometria (uma Geometria diferente da de Euclides).

Devido a sua genialidade, em 1794 Gauss por intermédio de seu amigo Bartels conheceu Carl Wilhelm Ferdinand (Duque de Brunswich) que financiou os seus estudos (no Collegium Carolinum) e o auxiliou financeiramente até ao dia da sua morte.

Gauss desenvolveu trabalhos nas seguintes áreas: Análise matemática, Astronomia, Geometria, Electromagnetismo, Teoria dos Números, tendo publicado " Disquisitions Arithmeticae"(livro finalizado aos 21 anos e dedicado ao Duque de Brunswich), e Álgebra (onde está prevista uma demonstração rigorosa do teorema fundamental da Álgebra).

Gauss trabalhou na Universidade de Gottingen como professor de astronomia onde permaneceu ao longo da sua vida. Aos trinta anos foi nomeado director do Observatório da Universidade.

O surgimento da teoria da relatividade de Einstein deve-se à um dos últimos trabalho de Gauss em relação à Geometria Diferencial.

Em 1795, na época com 18 anos, Gauss desenvolve o método dos mínimos quadrados, apesar de muito antes desta descoberta outros cientistas tenham tentado modelar dados. Para além de seu trabalho "Theria Motus"relacionar pela primeira vez a teoria das probabilidades com o método dos minimos quadrados, ele também discute o problema dos erros de arredondamento como "algo"que afecta a exactidão dos cálculos.

Gauss em 1814, apresenta o seu trabalho sobre o seu método de integração numérica ("Methous nova integralium valores per approximation invenienti").

Figura 4.2: Johann Carl Friedrich Gauss.

### 4.3.2 Breve referência à vida de Ludwig P. Von Seidel

Nesta secção vamos fazer uma breve referência à vida e alguns trabalhos desenvolvidos por Seidel.

Ludwig P. Von Seidel (1821- 1896), foi um físico e matemático alemão, filho de Justus Christian Felix Seidel e de Julie Reinhold.

Seidel foi um estudante e professor na Universidade de Berlim (Munique) onde Jacobi foi seu professor.

Seidel interessou-se em trabalhar com os métodos dos minimos quadrados descoberto por Gauss.

A designação de método de Gauss-Seidel deve-se à Seidel que publicou-o em 1874, pois muito antes de sua publicação este teve varios nomes, por exemplo Gauss descreveu pela primeira vez como método de aproximação, e em 1845, Gerling publicou-o no contexto de geometria e neste mesmo ano Jacobi publica seu método que tem uma semelhança com o método de Gauss-Seidel.

Figura 4.3: Ludwig P. Von Seidel.

### 4.3.3 Descrição do método de Gauss-Seidel

Nesta secção faremos tal como na secção 4.2.2 e utilizaremos as principais referências utilizadas na secção 4.2.2.
Este método é atribuído a Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896).
Tal como anteriormente (secção 4.2.2), vamos considerar as matrizes $D$, $L$ e $U$. Tem-se

$$A = (D + L) + U.$$

Fazendo a escolha

$$M = D + L, \quad N = -U,$$

obtemos o chamado método de Gauss Seidel.
Sendo

$$(D + L)\, X^{(k+1)} = -UX^{(k)} + B, \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

obtemos

$$X^{(k+1)} = D^{-1}\left[-LX^{(k+1)} - UX^{(k)} + B\right], \quad (k = 0, 1, \ldots)\,. \tag{4.36}$$

Se

$$\left\|(D + L)^{-1}\, U\right\| < 1 \tag{4.37}$$

a sucessão obtida converge para a solução exacta.
Este método pode ser apresentado na forma

$$X_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}, \qquad i = 1, \ldots\ n \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$X^{(k+1)} = -(D + L)^{-1} U X^{(k)} + (D + L)^{-1} B, \qquad G = -(D + L)^{-1} U$$

**Exemplo 4.3.1.** *Utilizando o método de Gauss-Seidel, resolva o problema 4.2.1. Considere como aproximação inicial* $X^0 = [0\ \ 0\ \ 0]^T$.

**Resolução:**
Neste caso temos as matrizes:

$$-\left(D+L\right)^{-1}U=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{2}{9} & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ e } \left(D+L\right)^{-1}B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

e portanto, a fórmula iterativa é dada por

$$X^{(k+1)}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{2}{9} & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix} X^{(k)}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{2}{9} \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Ou

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{2}{9} & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Ou equivalentemente,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(k+1)} & = & -\frac{1}{2}y^{(k)}+\frac{1}{2}z^{(k)}+\frac{1}{2} \\ y^{(k+1)} & = & -\dfrac{1}{6}y^{(k)}+\dfrac{1}{2}z^{(k)}+\dfrac{5}{6} \\ z^{(k+1)} & = & -\dfrac{2}{9}y^{(k)}-\dfrac{1}{3}z^{(k)}+\dfrac{2}{9} \end{array}\right. . \tag{4.39}$$

Como $X^0=[0\ \ 0\ \ 0]^T$, obtemos

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{2}{9} \end{bmatrix},$$

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix} \frac{7}{36} \\ \frac{7}{36} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},\ X^{(3)}=\begin{bmatrix} \frac{19}{72} \\ \frac{187}{216} \\ \frac{47}{162} \end{bmatrix},\ X^{(4)}=\begin{bmatrix} \frac{275}{1296} \\ \frac{1081}{1296} \\ \frac{103}{324} \end{bmatrix},\ X^{(5)}=\begin{bmatrix} \frac{209}{864} \\ \frac{849}{995} \\ \frac{393}{1303} \end{bmatrix},\ldots$$

Temos que

$$\begin{aligned}\left\|X - X^{(5)}\right\|_E &\approx \sqrt{\left(\frac{3}{13}-\frac{209}{864}\right)^2+\left(\frac{11}{13}-\frac{849}{995}\right)^2+\left(\frac{4}{13}-\frac{393}{1303}\right)^2}\\ &\approx 0.0145401\end{aligned}$$

**Nota 4.3.1.** *Uma vez que o método "aproveita"os resultados mais recentes, a fórmula (4.39) e o respectivo sistema são equivalentes à fórmula de recorrência:*

$$\left\{\begin{aligned} x^{(k+1)} &= -y^{(k)} + z^{(k)} \\ y^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}y^{(k)} + \frac{1}{3}z^{(k)} + \frac{2}{3} \\ z^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}y^{(k+1)} + \frac{1}{2}z^{(k)} + \frac{3}{2} \end{aligned}\right. \tag{4.40}$$

*Para obter esta representação, equivalente a (4.39), basta resolver cada equação em relação à incógnita que se encontra na "diagonal principal"de cada equação (primeira equação $x$, segunda equação $y$, ...) e depois ter em conta que na primeira equação obtemos o valor mais recente para $x$, que depois vamos substituir na segunda equação onde obtemos o valor mais recente para $y$ que depois são substituídos na terceira equação, onde obtemos o valor mais recente para $z$. Depois, repetimos o processo até satisfazer o critério de paragem conveniente.*

■

Vamos de seguida apresentar uma aplicação dos métodos referidos anteriormente a um sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é tridiagonal e diagonal dominante.

**Exemplo 4.3.2.** *Consideremos o sistema*

$$\left\{\begin{aligned} 5x + y &= 0 \\ 2x + 6y + z &= 0 \\ 2y + 8z + t &= 1 \\ 2z + 10t &= 5 \end{aligned}\right. \tag{4.41}$$

*a) Partindo da iteração inicial* $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ *determinar a decima iteração do sistema utilizando o método de Jacobi.*

***Resolução:***

*O método de Jacobi converge pois se verifica que a matriz é diagonal dominante,isto é,*

$$5 > 1,\ \ 6 > 2+1,\ \ 8 > 2+1 \quad e\ 10 > 2.$$

*Resolvendo o sistema pela forma não matricial ou seja vamos colocar cada equação em função de uma variavel distinta e aplicar a iteração do ponto fixo, isto é,*

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{(k+1)} & = & -\frac{1}{5}y^{(k)} \\[2ex]
y^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(k)} - z^{(k)}\right) \\[2ex]
z^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(k)} + t^{(k)}\right) \\[2ex]
t^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(k)}\right)
\end{array}
\right.
\tag{4.42}
$$

*Substituindo a iteração inicial* $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$*, em 4.42, obtemos;*

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{(1)} & = & -\dfrac{1}{5}y^{(0)} \\[2ex]
y^{(1)} & = & -\dfrac{1}{6}\left(-2x^{(0)} - z^{(0)}\right) \\[2ex]
z^{(1)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(0)} - t^{(0)}\right) \\[2ex]
t^{(1)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(0)}\right)
\end{array}
\right.
\Leftrightarrow
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{(1)} & = & -\frac{1}{5} \times 1 = -\dfrac{1}{5} \\[2ex]
y^{(1)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2 \times 1 - 1\right) = -\dfrac{1}{2} \\[2ex]
z^{(1)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2 \times 1 - 1\right) = -\dfrac{1}{4} \\[2ex]
t^{(1)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2 \times 1\right) = \dfrac{3}{10}
\end{array}
\right.
\tag{4.43}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{(2)} & = & -\frac{1}{5}y^{(1)} \\[2ex]
y^{(2)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(1)} - z^{(1)}\right) \\[2ex]
z^{(2)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(1)} - t^{(1)}\right) \\[2ex]
t^{(2)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(1)}\right)
\end{array}
\right.
\Leftrightarrow
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{(2)} & = & -\frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10} \\[2ex]
y^{(2)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2 \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) - 1\right) = \dfrac{13}{120} \\[2ex]
z^{(2)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 1\right) = -\dfrac{17}{80} \\[2ex]
t^{(2)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2 \times \left(-\dfrac{3}{10}\right)\right) = \dfrac{11}{20}
\end{array}
\right.
\tag{4.44}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{(3)} & = & -\frac{1}{5}y^{(2)} \\[2ex]
y^{(3)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(2)} - z^{(2)}\right) \\[2ex]
z^{(3)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(2)} - t^{(2)}\right) \\[2ex]
t^{(3)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(2)}\right)
\end{array}
\right.
\Leftrightarrow
\left\{
\begin{array}{lcl}
x^{(3)} & = & -\frac{13}{600} \\[2ex]
y^{(3)} & = & -\dfrac{11}{160} \\[2ex]
z^{(3)} & = & \dfrac{7}{240} \\[2ex]
t^{(3)} & = & \dfrac{183}{400}
\end{array}
\right.
\tag{4.45}
$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(4)} & = & -\frac{1}{5}y^{(3)} \\ y^{(4)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(3)} - z^{(3)}\right) \\ z^{(4)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(3)} - t^{(3)}\right) \\ t^{(4)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(3)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(4)} & = & \frac{11}{800} \\ y^{(4)} & = & \dfrac{17}{7200} \\ z^{(4)} & = & \dfrac{17}{200} \\ t^{(4)} & = & \dfrac{593}{1200} \end{array}\right. \tag{4.46}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(5)} & = & -\frac{1}{5}y^{(4)} \\ y^{(5)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(4)} - z^{(4)}\right) \\ z^{(5)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(4)} - t^{(4)}\right) \\ t^{(5)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(4)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(5)} & = & -\frac{17}{36000} \\ y^{(5)} & = & -\dfrac{3}{160} \\ z^{(5)} & = & \dfrac{141}{2251} \\ t^{(5)} & = & \dfrac{483}{1000} \end{array}\right. \tag{4.47}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(6)} & = & -\frac{1}{5}y^{(5)} \\ y^{(6)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(5)} - z^{(5)}\right) \\ z^{(6)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(5)} - t^{(5)}\right) \\ t^{(6)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(5)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(6)} & = & \frac{3}{800} \\ y^{(6)} & = & -\dfrac{71}{6905} \\ z^{(6)} & = & \dfrac{124}{1789} \\ t^{(6)} & = & \dfrac{1537}{3153} \end{array}\right. \tag{4.48}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(7)} & = & -\frac{1}{5}y^{(6)} \\ y^{(7)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(6)} - z^{(6)}\right) \\ z^{(7)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(6)} - t^{(6)}\right) \\ t^{(7)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(6)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(7)} & = & \frac{86}{41819} \\ y^{(7)} & = & -\dfrac{98}{7655} \\ z^{(7)} & = & \dfrac{443}{6648} \\ t^{(7)} & = & \dfrac{1280}{2633} \end{array}\right. \tag{4.49}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(8)} & = & -\frac{1}{5}y^{(7)} \\ y^{(8)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(7)} - z^{(7)}\right) \\ z^{(8)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(7)} - t^{(7)}\right) \\ t^{(8)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(7)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(8)} & = & \frac{57}{22262} \\ y^{(8)} & = & -\dfrac{129}{10940} \\ z^{(8)} & = & \dfrac{129}{1913} \\ t^{(8)} & = & \dfrac{566}{1163} \end{array}\right. \tag{4.50}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(9)} & = & -\frac{1}{5}y^{(8)} \\ \\ y^{(9)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(8)} - z^{(8)}\right) \\ \\ z^{(9)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(8)} - t^{(8)}\right) \\ \\ t^{(9)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(8)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(9)} & = & \frac{32}{13569} \\ \\ y^{(9)} & = & -\dfrac{221}{18276} \\ \\ z^{(9)} & = & \dfrac{1591}{23706} \\ \\ t^{(9)} & = & \dfrac{487}{1001} \end{array}\right. \tag{4.51}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(10)} & = & -\frac{1}{5}y^{(9)} \\ \\ y^{(10)} & = & \dfrac{1}{6}\left(-2x^{(9)} - z^{(9)}\right) \\ \\ z^{(10)} & = & \dfrac{1}{8}\left(1 - 2y^{(9)} - t^{(9)}\right) \\ \\ t^{(10)} & = & \dfrac{1}{10}\left(5 - 2z^{(9)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(10)} & = & \frac{31}{12818} \\ \\ y^{(10)} & = & -\dfrac{100}{8353} \\ \\ z^{(10)} & = & \dfrac{157}{2336} \\ \\ t^{(10)} & = & \dfrac{145}{298} \end{array}\right. \tag{4.52}$$

*E neste caso, temos que*

$$\left\|X - X^{(10)}\right\|_E \approx 4.537984715611180 \times 10^{-5}. \tag{4.53}$$

**Exemplo 4.3.3.** *Consideremos o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x + y \qquad\qquad & = & 0 \\ 2x + 6y + z \qquad & = & 0 \\ 2y + 8z + t & = & 1 \\ 2z + 10t & = & 5 \end{array}\right.$$

*a) Partindo da iteração inicial* $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ *determinar a decima iteração do sistema utilizando o método de Gauss-Seidel.*

**Resolução:**

O método de Gauss-Seidel converge pois se verifica que a matriz é diagonal dominante,isto é,

$$5 > 1, \;\; 6 > 2 + 1, \;\; 8 > 2 + 1 \quad \text{e } 10 > 2.$$

Resolvendo o sistema pela forma não matricial ou seja vamos colocar cada equação em função de uma variavel distinta e aplicar a iteração do ponto fixo, isto é,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(k+1)} & = & -\frac{1}{5}y^{(k)} \\ y^{(k+1)} & = & \frac{1}{6}\left(-2x^{(k+1)} - z^{(k)}\right) \\ z^{(k+1)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(k+1)} + t^{(k)}\right) \\ t^{(k+1)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(k+1)}\right) \end{array}\right. \tag{4.54}$$

Substituindo a iteração inicial $X^{(0)} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]^T$, em 4.54, obtemos;

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(1)} & = & -\frac{1}{5}y^{(0)} \\ y^{(1)} & = & -\frac{1}{6}\left(-2x^{(1)} - z^{(0)}\right) \\ z^{(1)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(1)} - t^{(0)}\right) \\ t^{(1)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(1)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(1)} & = & -\frac{1}{5} \times 1 = -\frac{1}{5} \\ y^{(1)} & = & \frac{1}{6}\left(-2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) - 1\right) = -\frac{1}{10} \\ z^{(1)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2 \times \left(-\frac{1}{10}\right) - 1\right) = \frac{1}{40} \\ t^{(1)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2 \times \left(\frac{1}{40}\right)\right) = \frac{99}{200} \end{array}\right. \tag{4.55}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(2)} & = & -\frac{1}{5}y^{(1)} \\ y^{(2)} & = & \frac{1}{6}\left(-2x^{(2)} - z^{(1)}\right) \\ z^{(2)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(2)} - t^{(1)}\right) \\ t^{(2)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(2)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(2)} & = & -\frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{50} \\ y^{(2)} & = & \frac{1}{6}\left(-2 \times \left(\frac{1}{50}\right) - 1\right) = -\frac{13}{1200} \\ z^{(2)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2 \times \left(-\frac{13}{1200}\right) - 1\right) = \frac{79}{1200} \\ t^{(2)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2 \times \left(-\frac{79}{1200}\right)\right) = \frac{721}{1481} \end{array}\right. \tag{4.56}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{(3)} & = & -\frac{1}{5}y^{(2)} \\ y^{(3)} & = & \frac{1}{6}\left(-2x^{(3)} - z^{(2)}\right) \\ z^{(3)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(3)} - t^{(2)}\right) \\ t^{(3)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(3)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{(3)} & = & \frac{13}{6000} \\ y^{(3)} & = & -\frac{47}{4019} \\ z^{(3)} & = & \frac{111}{1655} \\ t^{(3)} & = & \frac{526}{1081} \end{array}\right. \tag{4.57}$$

$$\begin{cases} x^{(4)} &= -\frac{1}{5}y^{(3)} \\ y^{(4)} &= \frac{1}{6}\left(-2x^{(4)} - z^{(3)}\right) \\ z^{(4)} &= \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(4)} - t^{(3)}\right) \\ t^{(4)} &= \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(4)}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(4)} &= \frac{56}{23943} \\ y^{(4)} &= -\frac{67}{5603} \\ z^{(4)} &= \frac{251}{3737} \\ t^{(4)} &= \frac{163}{335} \end{cases} \tag{4.58}$$

$$\begin{cases} x^{(5)} &= -\frac{1}{5}y^{(4)} \\ y^{(5)} &= \frac{1}{6}\left(-2x^{(5)} - z^{(4)}\right) \\ z^{(5)} &= \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(5)} - t^{(4)}\right) \\ t^{(5)} &= \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(5)}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(5)} &= \frac{52}{21743} \\ y^{(5)} &= -\frac{125}{10424} \\ z^{(5)} &= \frac{351}{5225} \\ t^{(5)} &= \frac{507}{1042} \end{cases} \tag{4.59}$$

$$\begin{cases} x^{(6)} &= -\frac{1}{5}y^{(5)} \\ y^{(6)} &= \frac{1}{6}\left(-2x^{(6)} - z^{(5)}\right) \\ z^{(6)} &= \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(6)} - t^{(5)}\right) \\ t^{(6)} &= \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(6)}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(6)} &= \frac{25}{10424} \\ y^{(6)} &= -\frac{492}{41015} \\ z^{(6)} &= \frac{744}{11075} \\ t^{(6)} &= \frac{507}{1042} \end{cases} \tag{4.60}$$

$$\begin{cases} x^{(7)} &= -\frac{1}{5}y^{(6)} \\ y^{(7)} &= \frac{1}{6}\left(-2x^{(7)} - z^{(6)}\right) \\ z^{(7)} &= \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(7)} - t^{(6)}\right) \\ t^{(7)} &= \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(7)}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{(7)} &= \frac{94}{39181} \\ y^{(7)} &= -\frac{86}{7169} \\ z^{(7)} &= \frac{35}{521} \\ t^{(7)} &= \frac{507}{1042} \end{cases} \tag{4.61}$$

$$\left\{\begin{array}{lcc} x^{(8)} & = & -\frac{1}{5}y^{(7)} \\ \\ y^{(8)} & = & \frac{1}{6}\left(-2x^{(8)} - z^{(7)}\right) \\ \\ z^{(8)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(8)} - t^{(7)}\right) \\ \\ t^{(8)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(8)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} x^{(8)} & = & \frac{86}{35845} \\ \\ y^{(8)} & = & -\frac{25}{2084} \\ \\ z^{(8)} & = & \frac{35}{521} \\ \\ t^{(8)} & = & \frac{507}{1042} \end{array}\right. \tag{4.62}$$

$$\left\{\begin{array}{lcc} x^{(9)} & = & -\frac{1}{5}y^{(8)} \\ \\ y^{(9)} & = & \frac{1}{6}\left(-2x^{(9)} - z^{(8)}\right) \\ \\ z^{(9)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(9)} - t^{(8)}\right) \\ \\ t^{(9)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(9)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} x^{(9)} & = & \frac{5}{2084} \\ \\ y^{(9)} & = & -\frac{25}{2084} \\ \\ z^{(9)} & = & \frac{35}{521} \\ \\ t^{(9)} & = & \frac{507}{1042} \end{array}\right. \tag{4.63}$$

$$\left\{\begin{array}{lcc} x^{(10)} & = & -\frac{1}{5}y^{(9)} \\ \\ y^{(10)} & = & \frac{1}{6}\left(-2x^{(10)} - z^{(9)}\right) \\ \\ z^{(10)} & = & \frac{1}{8}\left(1 - 2y^{(10)} - t^{(9)}\right) \\ \\ t^{(10)} & = & \frac{1}{10}\left(5 - 2z^{(10)}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} x^{(10)} & = & \frac{5}{2084} \\ \\ y^{(10)} & = & -\frac{25}{2084} \\ \\ z^{(10)} & = & \frac{35}{521} \\ \\ t^{(10)} & = & \frac{507}{1042} \end{array}\right. \tag{4.64}$$

.

E neste caso, temos que

$$\left\| X - X^{(10)} \right\|_E \approx 2.208250992814310 \times 10^{-10}. \tag{4.65}$$

# Capítulo 5

# Aplicação às Engenharias

Consideremos o problema de valores iniciais para uma equação às derivadas parciais com condições de fronteira:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t & = & \varepsilon^2 u_{xx} + \displaystyle\int_0^L u\,(t,x)\,dx \\ \\ u\,(t=0,x) & = & u_0\,(x) \\ \\ u\,(t,0) & = & u\,(t,L) = 0 \end{array}\right. , \tag{5.1}$$

para $(t,x) \in [0,t_f] \times [0,L]$, $u_0\,(x)$ uma função suficientemente contínua.

Este problema pode ser interpretado como sendo um problema de transferência de calor com um termo fonte não local, isto é, a fonte interna de calor não se “limita"a cada ponto $(t,x)$ do domínio mas sim para todo o $x \in [0,L]$.

Vamos mostrar como encontrar uma solução aproximada para este problema utilizando em primeiro lugar Séries de Fourier e em segundo lugar os métodos de Jacobi ou Gauss-Seidel.

## 5.1 Solução via Fourier

Vamos supor que a solução exacta de (5.1) é da forma

$$u\,(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\,(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{5.2}$$

e vamos considerar uma sua aproximação da forma

$$u_N\,(t,x) = \sum_{k=1}^{N} u_k\,(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \tag{5.3}$$

Por uma questão de simplificação da notação, vamos representar a solução aproximada por $u\,(t,x)$. Temos então

$$u_t \approx \sum_{k=1}^{N} \dot{u}_k\,(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \text{ e } u_{xx} \approx -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{k=1}^{N} k^2 u_k\,(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \tag{5.4}$$

Então, temos

$$\int_0^L u\,(t,x)\,dx \approx \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^{N} u_k\,(t)\, \frac{(1-\cos(k\pi))}{k}. \tag{5.5}$$

Tendo em conta que

$$(1-\cos(k\pi)) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad k \text{ é ímpar} \\ \\ 0 & \text{se} \quad k \text{ é par} \end{cases} \tag{5.6}$$

a relação (5.5) só tem as funções de índice ímpar. Isto é, (5.5) é pode ser apresentado na forma

$$\begin{cases} \dfrac{2L}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\left(\frac{N+1}{2}\right)} \frac{u_{2k-1}(t)}{2k-1} & \text{se} \quad N \text{ ímpar,} \\ \\ \dfrac{2L}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\left(\frac{N}{2}\right)} \frac{u_{2k-1}(t)}{2k-1} & \text{se} \quad N \text{ par,} \end{cases} \tag{5.7}$$

Substituindo (5.4) e (5.5) na equação (5.1) obtemos a relação

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \dot{u}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) &= -\left(\frac{\varepsilon\pi}{L}\right)^2 \sum_{k=1}^{N} k^2 u_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &\quad + \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^{N} u_k(t) \frac{(1-\cos(k\pi))}{k}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Substituindo (5.4) e (5.5) em (5.1), multiplicando (5.8) por $\sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$, para $1 \leqslant i \leqslant N$ e integrando para $x \in (0, L)$, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\dot{u}_i(t) = -\left(\frac{i\varepsilon\pi}{L}\right)^2 u_i(t) + \frac{2L}{i\pi^2}(1-\cos(i\pi)) \sum_{k=1}^{N} u_k(t) \frac{(1-\cos(k\pi))}{k}, \tag{5.9}$$

para $1 \leqslant i \leqslant N$.

Vamos agora estudar quais são as condições iniciais para o sistema (5.9). Vamos supor que a condição inicial se pode escrever na forma

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \tag{5.10}$$

Uma aproximação $N$- dimensional é então da

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{N} u_k(0) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Multiplicando por $\sin\left(\dfrac{i\pi x}{L}\right)$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ e integrando em $x$, obtemos

$$\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \sum_{k=1}^{N} u_k(0) \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx.$$

Atendendo a que $\displaystyle\int_0^L \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2}\delta_{ik}$, segue-se que

$$u_i(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx, \; 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{5.11}$$

Considerando $u_0(x) = x(x-1)$ e $L = 1$. Temos então

$$\begin{aligned} u_i(0) &= 2\int_0^1 x(x-1)\sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)dx,\ 1 \leqslant i \leqslant N. \\ &= \frac{4}{\pi^3 i^3}\left(1-\cos(i\pi x)\right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

A condição inicial tem a seguinte representação gráfica:

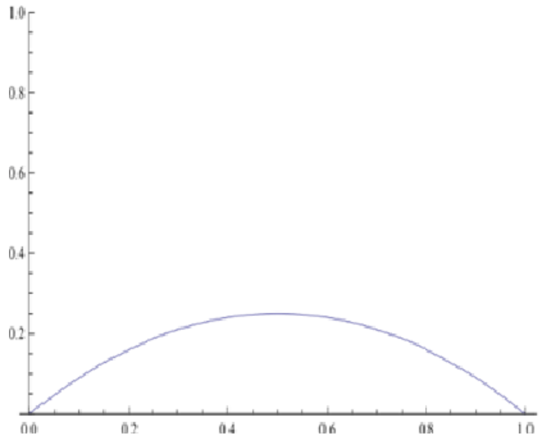



Figura 5.1: Condição inicial $u_0(x) = x(1-x)$, $t = 0$, $x \in [0,1]$

O sistema (5.9) pode ser apresentado na forma $\dot{U} = AU$ com condição inicial $U(0)$ dada por (5.11) que pode ser resolvido por pelo menos dois "métodos":

1. A matriz Exponencial, $e^{At}$;

   Neste caso, com $n = 6$ verificámos que a matriz $A$ tem um valor próprio positivo, pelo que $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = \infty$, $\forall x \in [0,L]$;

2. Métodos numéricos (Euler, Runge-Kutta, etc).

Uma outra abordagem para obter uma solução deste problema passa por utilizar o método de Crank-Nikolson. Este método leva à resolução de uma sucessão de sistemas de equações lineares da forma:

$$AU^{n+1} = BU^n,\ n = 0,1,2,\ldots \tag{5.13}$$

Este método foi desenvolvido por John Crank $(1919-2006)$ e Phyllis Nicolson $(1916-1968)$. É um método numérico de discretização que resulta pela média do método de Euler posterior, pressupondo que são conhecidos os valores de $u$ no instante $t = t_n$, mas não são conhecidos do instante $t = t_{n+1}$. A fórmula para o método é:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[F_i^{n+1}+F_i^n\right], \tag{5.14}$$

onde neste caso

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \varepsilon^2 u_{xx} + \int_0^L u(t,x)\,dx \\ &\equiv \varepsilon^2 u_{xx} + F_1(t) \end{aligned} \tag{5.15}$$

onde $F_1(t)$ é dado por

$$\int_0^L u(t,x)\,dx$$

que é aproximado por

$$\int_a^b u\left(t,x\right)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(u\left(t,x_0\right)+2\sum_{i=1}^{N-1}u\left(t,x_i\right)+u\left(t,x_n\right)\right). \tag{5.16}$$

Portanto, uma aproximação numérica para (5.1) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\varepsilon^2}{2\left(\Delta x\right)^2}\left[\left(u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}\right)+\left(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n\right)\right] \\ &\quad +\frac{\Delta x}{2}\left[\left(u_0^{n+1}+2\sum_{k=1}^{N-1}u_k^{n+1}+u_n^{n+1}\right)+\left(u_0^n+2\sum_{k=1}^{N-1}u_k^n+u_n^n\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.17}$$

O problema (5.1) pode ser discretizado da seguinte forma, a partir da qual, podemos obter as matrizes $A$, $U$ e $B$:

$$\begin{aligned} u\left(t_{i+1},x_j\right) &= u\left(t_i,x_j\right)+\frac{\varepsilon^2\Delta t}{\left(\Delta x\right)^2}\left(u\left(t_i,x_{j-1}\right)-2u\left(t_i,x_j\right)+u\left(t_i,x_{j-1}\right)\right) \\ &\quad +\left(\Delta x\right)\left(\Delta t\right)\sum_{k=1}^{n-1}u\left(t_i,x_k\right), \end{aligned} \tag{5.18}$$

uma vez que $u\left(t_i,x_0\right)=u\left(t_i,x_n\right)=0$.
Devemos ainda ter em conta que neste caso, os elementos da matriz $U_0$ são obtidos a partir dacondição inicial $u_0\left(x\right)=x\left(1-x\right)$ nos pontos considerados no intervalo $[0,L]=[0,1]$.
Portanto, uma solução aproximada para o problema é dada pela solução iterada do sistema

$$AU^{n+1}=BU^n \tag{5.19}$$

sendo $A$ a matriz dos coeficientes associados aos sistema (5.18).
Aplicando o método sucessivamente com um número elevado de elementos da malha, obtemos uma solução aproximada da solução do problema.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

O estudo detalhado de sistemas de equações lineares, sejam elas algébricas ou diferenciais, deu origem à um dos ramos da Matemática designada Álgebra linear.
A resolução de sistemas de equações lineares é um problema que existe desde os tempos remotos, como por exemplo a eliminação "Gaussiana", citada pela primeira vez por volta do século II d.c.
Os diferentes sistemas de equações lineares apresentados neste trabalho foram resolvidos pelos métodos Diretos, eliminação de Gauss e eliminação compacta (decomposição $LU$ e de Choleski) e pelos métodos Iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel.
O método de eliminação de Gauss permite calcular eficientemente a solução de um sistema de equações lineares com solução única, cuja a matriz dos coeficientes é densa e de dimensão média.
Para garantir a estabilidade do método de eliminação de Gauss deve ser utilizada a técnica de escolha de *pivot*.
No caso de um problema que consiste na resolução de vários sistemas de equações lineares com a mesma matriz dos coeficientes, é mais efeciente utilizar a eliminação compacta e acomulação de erros de arredondamento pode ser menor com um pequeno esforço adicional de cálculo.
Para a resolução de sistemas especiais, como sistemas triangulares (inferios e superiores), utiliza-se os mítedos de substituição direita no caso das matrizes dos coeficintes ser triangular inferior e o método de substituição inversa no caso contrário. No caso de sistemas tridiagonais tem algoritmos especialmente desenvolvidos e geralmente mais eficintes relativamente a eliminação de Gauss. Um sistema de equações lineares é mal condicionado, quando o número de condição da matriz dos coeficientes é grande, isto é, pequenas perturbações da matriz dos coeficientes e do vetor coluna dos termos independentes do sistema podem causar grandes variações na solução.
Quanto aos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel são apropriados para sistemas de grande dimensão, cuja a matriz dos coeficientes é esparsa.
Se o sistema de equações lineares cumprir com algumas condições de convergência, os métodos iterativos podem ser aplicados, uma vez que a convergência é garantida têm menos erros de arredondamento pois cada iteração $(X^k)$ pode ser considerada como exata quando utilizada no cálculo da próxima iteração $(X^{k+1})$ .
O método de Gauss-Seidel fornece melhores resultados que o método de Jacobi

# Bibliografia


[1] Paulo Rebelo, *Álgebra Linear e Numérica,* Serviços gráficos da Universidade da Beira Interior, 2017/2018. 1, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 29

[2] Paulo Rebelo, *Álgebra Linear e Numérica, Parte II,* Serviços gráficos da Universidade da Beira Interior, 2006. 24

[3] Paulo Rebelo & Ilda Rodrigues, *Álgebra Linear segundo as aulas do Prof. Doutor Sampaio Martins,* Serviços gráficos da Universidade da Beira Interior, 2016/2017. 9, 11

[4] `http://biografiaecuriosidade.blogspot.com/2016/02/` xi, 1, 2, 3, 29

[5] `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Diophantus-cover-Fermat.jpg` xi, 4

[6] Carlos J. S. Alves, *Resumo da matéria teórica de Análise Numérica,* `www.math.ist.utl.pt/~calves/`. 11, 19, 29

[7] Adérito Araujo, *Métodos Numéricos: Complementos e guia prático,* `http://www.mat.uc.pt/~alma/aulas/anem/sebenta/`. 11, 19, 29

[8] José Alberto Rodrigues *Análise Numérica: Introdução, Aplicação e Programação* Lisboa: Edições Sílibo, 2003. 24

[9] Edite Manuela da G.P. Fernandes, *Computação Numérica,* Braga: Universidade do Minho, 1997. 29

[10] Howard Anton & Robert C. Busby *Álgebra Linear Contemporânea* Porto Alegre: Bookman, 2006. 29, 32

[11] Maria F. Estrada & Carlos Correia De Sá, João Filipe Queiró & Maria Do Céu Silva, Maria José Costa *História da Matemática* Lisboa: Universidade Aberta, 2000. 1

[12] Carl B. Boyer *História da Matemática* Brazil : Editora Edgard Blucher LTDA, 1996. 1, 29

[13] Maria Raquel Valença, *Análise Numérica,* Lisboa: Universidade Aberta, 1996. 14, 19

[14] Eugene Isaacson & Herbert Bishop Keller, *Analysis of Numerical Methods,* Dover Publications 1993. 12, 13, 29

[15] C. T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations* (Frontiers in Applied Mathematics), Society for Industrial Mathematics (1987).

[16] Howard Anton & Chris Rorres, *Elementary Linear Algebra:Applications Version, 11th Edition* Wiley 2013. 19

[17] James Ward Brown & Ruelv. Churchill *Fourier series and boundary Value Problems, Fifth edition* Mathematicas and Statistics Series: McGraw-Hill international Editions , 1993

[18] William Ford, *Numerical Linear Algebra With Applications, First edition* 2015. 19