UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

O tema “Geometria no Plano e no Espaço” no programa de Matemática A do 10º ano. As médias geométrica, aritmética e harmónica.

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

Rita Alexandra da Fonseca Isidoro

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário da Universidade da Beira Interior

Orientador Científico: Professor Doutor Rui Pacheco

Covilhã, junho de 2013

Agradecimentos

À Professora Isabel Cunha, Diretora de Curso do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior. Agradecida pela simpatia, disponibilidade de atendimento, ajuda e encorajamento.

Ao Professor Rui Pacheco, do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior, meu Orientador Científico. Agradecida pela sugestão do tema do trabalho científico a desenvolver e pela disponibilidade em desenvolvê-lo comigo. E pelo acompanhamento e orientação.

Ao Professor José Monteiro, meu Orientador Cooperante, que tive oportunidade de conhecer na Escola Secundária Nuno Álvares, aquando da frequência das aulas do Estágio Pedagógico. Agradecida pelo acompanhamento ao longo destes meses de trabalho, pelas sugestões e pelas críticas, no sentido de me aperfeiçoar.

Aos meus pais, por toda a educação, formação e condições de estudo que me permitiram chegar até aqui, os meus ternos agradecimentos.

Ao meu irmão, Pedro, e cunhada, Nelma, pela colaboração, amizade e interesse em que conseguisse chegar até ao fim.

Aos colegas e amigos, que se interessaram e se preocuparam ou me apoiaram.

Aos professores e funcionários da Escola Secundária Nuno Álvares, pela simpatia, ajuda e atenção sempre que foi preciso.

Com amizade, muito agradecida a todos.

Resumo

O presente relatório pretende dar cumprimento às exigências consignadas no Regulamento Específico da Iniciação à Prática Profissional do 2º Ciclo em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, da Universidade da Beira Interior.

O trabalho a desenvolver divide-se em dois capítulos:

- O capítulo I incide sobre aspetos científicos e didáticos na área da docência. Far-se-á uma descrição sumária do estágio pedagógico e do trabalho desenvolvido dentro e fora da sala de aula. Apresenta-se a planificação de 6 aulas de 90 minutos correspondente ao tema GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO, cujos subtemas são vetores no plano e no espaço e aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos, do programa de Matemática A de 10º ano para os cursos de Ciências e Tecnologias.

- No capítulo II discutimos a definição, propriedades, contextualização nos programas curriculares e aplicações das médias geométrica, aritmética e harmónica. Particular enfoque será dado a uma consequência da desigualdade fundamental entre as médias.

Palavras-chave: Geometria no plano e no espaço, vetores, planificação, média aritmética, média geométrica, média harmónica, teorema da desigualdade entre a média aritmética, geométrica e harmónica, teorema da desigualdade de Cauchy-Schwarz, programas curriculares.

Abstract

The objective of this report is to fulfil the requirements in the specific Regulation of the Introduction to the Professional Practice of the 2nd grade of the teaching of Mathematics in the 3rd grade of the Ensino Básico e Secundário (Basic and Secondary level) integrated in the cycle of studies aiming at the Master in teaching, of University of Beira Interior.

The work I am about to develop is divided into 2 chapters:

Chapter one – deals with scientific and teaching issues. There will be a summary of the teacher training period along with the work done inside and outside the classroom. There will be a summary of the teacher training period along with the work done inside and outside the classroom. There will also be six lesson plannings, each lasting 90 minutes, corresponding to the topic of GEOMETRY IN PLAN AND SPACE – Vectors in plan and space, vector calculation applied to the demonstration of properties of polygons, that belong to the school programme of Mathematics of the 10th form, in scientific and technological courses.

Chapter two – means are defined and examples of practical applications fully integrated in the school programme will be displayed. There will be an approach of the inequality of the means.

Keywords: Geometry in plan and space, vectors, plannings, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, Inequality between geometric, arithmetic and harmonious means Theorem, Cauchy – Schwarz inequality Theorem, school programme.

Índice

Lista de figuras

Lista de tabelas

Introdução

No início do estágio, o Professor José Monteiro, Orientador Cooperante, apresentou a Escola Secundária Nuno Álvares em Castelo Branco. Desde o início do ano letivo foi sentida uma boa recetividade por parte da Direção, funcionários e professores em geral.

A prática profissional do professor envolve uma grande diversidade de aspetos, entre os quais devemos destacar a prática letiva de contacto com os alunos e os seus conhecimentos científicos. Deste modo, o trabalho encontra-se dividido em dois capítulos: no capítulo I é descrita a prática de ensino supervisionada e no capítulo II é desenvolvido um trabalho científico. No que concerne à vertente pedagógica, são apresentadas as planificações correspondentes a um período de regência de uma subunidade didática de 10.º ano, segundo as orientações que constam no programa de Matemática A emanado do Ministério da Educação e Ciência. No primeiro período foi lecionado o subtema VETORES LIVRES NO PLANO E NO ESPAÇO correspondente a seis blocos de 90 minutos cada; no sentido de completar este subtema, foi acordado com o Professor José Monteiro que seriam lecionados mais três blocos de 90 minutos cada no segundo período.

Dá-se ênfase à análise e reflexão das tarefas propostas aos alunos, ao modo como os recursos foram utilizados na sala de aula, nas estratégias utilizadas e na compreensão dos conhecimentos e sua aplicação. Assim, no presente trabalho teve lugar uma reflexão crítica sobre as aulas correspondentes a um período de regência. Para tal, foram utilizados vários recursos e estratégias, de modo a incentivar os alunos para a importância da aprendizagem. O recurso às Novas Tecnologias permitiu facilitar e melhorar a comunicação entre o professor e os alunos.

Atualmente espera-se muito da Escola e em particular dos professores, enquanto transmissores do conhecimento. Não basta ao professor apenas saber transmitir conhecimentos/ensinar. É necessário que o professor tenha uma boa formação científica, adequada e atualizada. Neste sentido, foi elaborado com a colaboração do Orientador Científico, Professor Rui Pacheco, um trabalho de investigação em torno das médias geométrica, aritmética e harmónica. A escolha deste tema deve-se não só ao facto de estar inserido explicitamente em todos os programas curriculares do ensino básico e secundário, mas também ao interesse das suas aplicações e da matemática que lhe subjaz. Numa primeira fase, apresenta-se a definição de cada uma das médias, assim como exemplos de aplicações destes conceitos em situações da vida real. Posteriormente foi feita a contextualização das médias nos programas curriculares, recorrendo a exemplos retirados dos manuais escolares. Numa segunda fase, que tem como base um capítulo do livro Proofs from THE BOOK, provamos a desigualdade fundamental entre as três médias e damos uma aplicação desta desigualdade sobre a relação entre a área limitada pelo gráfico de uma função num dado intervalo e o respetivo triângulo tangencial. Discutimos ainda uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz ao problema da localização dos zeros de polinómios.

Capítulo I - Prática de Ensino Supervisionada

Neste capítulo, para além de uma descrição sumária do trabalho desenvolvido no Estágio Pedagógico (secção 1.1), apresentamos também a planificação detalhada de 6 aulas de 90 minutos correspondentes a um período de regência (subsecções 1.2.1 a 1.2.6), inseridas no tema GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO, contemplado no Programa de Matemática A do 10.º ano. Após cada planificação fazemos uma análise e reflexão crítica da aula correspondente.

1.1 Descrição sumária do trabalho desenvolvido no Estágio Pedagógico

Antes do início das aulas foi realizada uma reunião de Núcleo de Estágio (constituído pelo Orientador Cooperante, Professor José Monteiro, Orientador Científico, Professor Rui Pacheco, Diretora de Curso, Professora Isabel Cunha e alunas estagiárias), que decorreu na Covilhã. Nesta reunião foi dado conhecimento do regulamento específico da iniciação à prática profissional do 2º ciclo em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, onde constam as orientações relativas à organização geral da Prática de Ensino Supervisionada, nomeadamente o número mínimo de aulas a lecionar por cada aluna estagiária, planificações de aulas e os respetivos prazos de entrega aos orientadores.

Posteriormente foram realizadas reuniões informais com o Orientador Cooperante, Professor José Monteiro, onde se procedeu à distribuição das turmas do Orientador pelas alunas estagiárias durante o ano letivo 2012/2013 e dos conteúdos programáticos a lecionar nas respetivas turmas. Foi dada a conhecer a planificação trimestral das aulas pelo Orientador Cooperante. A referida planificação baseia-se no Programa emanado do Ministério da Educação e Ciência.

Foi estabelecido que as alunas estagiárias iriam planificar as suas aulas e seguidamente estas iriam ser entregues (segundo o regulamento estipulado) aos orientadores, Orientador Científico, Professor Rui Pacheco e Orientador Cooperante, Professor José Monteiro, para posteriormente serem analisadas e discutidas. Coube-me lecionar a turma 10ºB da disciplina de Matemática A do curso de Ciências e Tecnologia e a turma 10ºG do curso de Matemática Aplicadas às Ciências Sociais - a planificação das aulas correspondentes a um período de regência refere-se à turma 10ºB.

Em todas as planificações segui as indicações metodológicas dos programas de Matemática A e de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, tendo em conta o desenvolvimento das competências transversais sugeridas no programa e o acompanhamento do manual escolar dos alunos. A análise dos manuais escolares adaptados pela Escola Secundária Nuno Álvares encontra-se em anexo (anexo 1).

Coube-me igualmente participar, na qualidade de observadora, em reuniões da Escola, nomeadamente, reuniões de Conselho de Grupo, de Conselhos de Turma (avaliação) e sectoriais. A participação nestas reuniões contribuiu para compreender melhor o funcionamento da Escola e conhecer atividades de aprendizagem que podem melhorar o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos. Na reunião do Conselho de Turma tive acesso a documentos relativos à caraterização do percurso escolar dos alunos, o que permitiu um melhor conhecimento dos mesmos.

Participei na correção de testes de avaliação (MACS), referentes aos alunos da turma 10ºG e na elaboração de exercícios para fichas de trabalho de ambas as turmas.

Através das aulas assistidas do Orientador Cooperante, Professor José Monteiro, sempre que possível, recorri às estratégias por ele utilizadas, com a finalidade de cativar os alunos e transmitir conhecimentos. Segue-se uma breve descrição relativamente às 18 aulas previstas na PES, lecionadas nas turmas 10ºB e 10ºG, anteriormente mencionadas:

No primeiro período lecionei o subtema VETORES LIVRES NO PLANO E NO ESPAÇO correspondente a 6 blocos de 90 minutos cada à turma 10.ºB. Na primeira aula, introduziram-se as definições de vetor livre, representante de um vetor, vetor simétrico, norma de um vetor e soma de um ponto com um vetor; com estas definições foram resolvidos exercícios de forma a consolidar os conhecimentos adquiridos. Na segunda aula deu-se continuidade ao trabalho desenvolvido na primeira aula e foram introduzidas as propriedades de operações com vetores, nomeadamente, adição de vetores, propriedades da adição de vetores e multiplicação de um vetor por um número real no plano. No sentido de os alunos compreenderem as noções dadas esta aula foi essencialmente prática, com a resolução de exercícios relativos aos conteúdos acima mencionados. Na terceira aula foi concluído o estudo das propriedades dos vetores e introduzida a definição de vetores colineares. Seguidamente os alunos resolveram uma questão-aula com a finalidade de uma prévia preparação do subtema APLICAÇÃO DO CÁLCULO VETORIAL À DEMONSTRAÇÃO DE PROPRIEDADES DE POLÍGONOS. Com esta questão-aula pretendia-se que os alunos soubessem identificar o quadrilátero em causa. No restante tempo da aula os alunos resolveram exercícios sobre os conteúdos dados nas aulas anteriores. Na quarta aula foram resolvidos exercícios sobre a Aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos, pretendia-se que os alunos deduzissem propriedades sobre a soma das diagonais de um paralelogramo; num outro exercício pretendia-se que ao analisar a figura geométrica os alunos conseguissem provar que se tratava de um trapézio. Também foram resolvidos exercícios sobre as propriedades dos vetores enunciadas anteriormente, tal como a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição de vetores, norma de um vetor, propriedade associativa da adição de vetores, vetores colineares – foi importante o aluno ter percebido que quando os vetores são colineares são paralelos e têm a mesma direção. No final desta aula foram distribuídas fichas de trabalho aos alunos para consolidar os conhecimentos adquiridos sobre vetores no plano e no espaço. A quinta aula teve início com a resolução de exercícios relacionados com a Aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos, exemplificando com um exercício que as diagonais de um paralelogramo se bissetam. Posteriormente foi demonstrada no quadro uma propriedade para aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos, pretendendo-se que o aluno deduza propriedades de triângulos usando vetores. No primeiro período corrigi o teste de avaliação dos alunos numa aula de 90 minutos.

Já no segundo período, a sétima aula deu continuidade à aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos, pretendendo-se desta vez que o aluno deduza propriedades de quadriláteros usando vetores. Na oitava aula as mesmas definições aplicadas aos vetores no plano foram aplicadas aos vetores relativamente ao espaço: componentes e coordenadas de um vetor num referencial ortonormado, igualdade de vetores, soma de um ponto com um vetor, adição de vetores, produto de um número real por um vetor, ponto médio de um segmento de reta e norma de um vetor. Por último, na nona aula, de modo a consolidar o estudo dos vetores livres no plano e no espaço de forma a deduzir propriedades de polígonos (triângulos e quadriláteros) foram resolvidos exercícios variados e dada aos alunos uma ficha de trabalho.

No segundo período as 6 aulas de 90 minutos lecionadas à turma 10ºG inseriram-se no Tema Estatística. Na primeira aula foi utilizado o computador para mostrar aos alunos diapositivos elucidativos sobre distribuições bidimensionais, diagrama de dispersão, tipos de correlação linear e exemplos. Ensinei os alunos a trabalhar com as máquinas de calcular gráficas para representar os diagramas de dispersão, de acordo com os exemplos descritos no manual escolar. Na segunda aula consolidaram-se os conhecimentos adquiridos, através da realização de exercícios com recurso à máquina de calcular. Na aula seguinte referiram-se exemplos de relações de causa-efeito e introduziu-se a definição de reta de regressão linear com os objetivos de os alunos compreenderem a existência da relação linear existente entre duas variáveis e fazer previsões do valor de uma das variáveis, conhecendo o valor correspondente da outra variável. Associada à reta de regressão linear foi explicado aos alunos o conceito de centro de gravidade de uma distribuição bidimensional. Foram também dadas instruções aos alunos para traçarem a reta de regressão linear com a máquina de calcular gráfica. Na quarta aula foi dada a definição de coeficiente de correlação linear e foram exibidas através de diapositivos as propriedades do coeficiente de correlação. Foram resolvidos exercícios sobre o coeficiente de correlação para averiguar a relação causa-efeito entre duas variáveis. Foram dadas instruções aos alunos para traçarem o centro de gravidade na máquina de calcular gráfica. Já na quinta aula fez-se referência às limitações da reta de regressão linear e do coeficiente de correlação linear. Para consolidar estes conteúdos, os alunos resolveram vários exercícios do manual. Na última aula deste bloco foram esclarecidas as dúvidas que os alunos apresentavam relativas aos trabalhos de casa. Finalmente foram representados graficamente dados bivariados, de tipo qualitativo, por meios de tabelas de contingência. Ainda houve tempo para resolver com os alunos uma ficha de trabalho sobre todos os conteúdos lecionados.

No terceiro período lecionei novamente à turma do 10ºB quatro aulas de 90 minutos inseridas no tema ESTATÍSTICA. Na primeira aula foi feita uma introdução à evolução histórica do conceito de Estatística e a sua aplicação em situações da vida real. A aula foi essencialmente teórica. Foi feita uma breve recapitulação de conteúdos lecionados em anos anteriores relativamente a conceitos que têm continuidade no 10º ano. No final da aula os alunos resolveram exercícios sobre a seleção de uma amostra aleatória recorrendo à calculadora. Na segunda aula foram relembrados e exemplificados os conceitos de variável quantitativa e variável qualitativa. Depois os alunos resolveram exercícios sobre interpretação gráfica de dados, no sentido de desenvolver a capacidade de interpretar e comunicar através da exploração de situações reais. Na terceira aula os alunos resolveram exercícios sobre a construção de tabelas de frequências, designadamente frequências absolutas, frequências relativas, frequências absolutas acumuladas e frequências relativas acumuladas. Foi útil a visualização de um CD-ROM para que os alunos compreendessem que a apresentação gráfica das conclusões de estudos estatísticos pode induzir a conclusões que não correspondem à realidade. Na última aula os alunos resolveram exercícios e tarefas do manual sobre os conteúdos lecionados de modo a consolidar os conhecimentos adquiridos.

Atividades Extra Curriculares

Relativamente às atividades Extra Curriculares, coube-me participar na vigilância das Olimpíadas de Matemática [Categoria Júnior – 6º/7º anos (1ª Eliminatória e 2ª Eliminatória); Categoria A - 8º/9º anos (1ª Eliminatória e 2ª Eliminatória); Categoria B – 10º/12º anos (1ª Eliminatória e 2ª Eliminatória)] – (anexo 2). Acompanhei os alunos da turma 10ºB a uma Palestra sobre a pobreza que decorreu no dia 31 de Janeiro de 2013, na Biblioteca Municipal de Castelo Branco.

O professor tem o dever de se manter atualizado em termos de conhecimento profissional, científico, pedagógico e didático inerente à Matemática, a fim de aprender boas práticas educativas. Destacam-se iniciativas para adquirir e atualizar o conhecimento profissional, frequentando várias sessões de formação:

1 - "Sessão prática e de discussão - Simetria e transformações geométricas", dinamizada pela Professora Rita Bastos, do Grupo de Trabalho de Geometria da APM e da Escola António Arroio, destinada a Professores de Matemática do 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Decorreu no dia 22 de Setembro de 2012, na Covilhã (anexo 3 - certificado);

2 - "Curso introdutório de Estatística (Descritiva) com Excel", dinamizado pela Professora Maria Eugénia Graça Martins, do Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, destinada a Professores de

Matemática do 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico e do Ensino Secundário – promovida pelo Núcleo Regional da Covilhã da Associação de Professores de Matemática, que decorreu na Escola Secundária Campos Melo – Covilhã, no dia 27 de Outubro de 2012 (anexo 4 - certificado).

1.2 Planificação do subtema VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

A tabela seguinte resume os conteúdos, objetivos e metodologias para este subtema

Tabela 1: Planificação do subtema vetores no plano e no espaço

Conteúdos	Objetivos	Metodologias	N.º de aulas (1 aula = 90 min.)
-Noção de vetor. -Vetores no plano e no espaço. -Operações com vectores. -Coordenadas e componentes de um vetor no plano e no espaço. -Norma de um vetor. -Vetores colineares. -Ponto médio de um segmento de reta no plano e no espaço. -Aplicações do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos.	-Determinar a soma de dois vectores aplicando a regra do paralelogramo ou a regra do triângulo. -Escrever um vetor como diferença de dois pontos. -Determinar a soma de um ponto com um vetor e a soma de dois vectores. -Determinar o produto de um número real por um vetor. -Escrever as coordenadas e as componentes de um vetor no plano e no espaço. -Determinar um vetor colinear com outro. -Resolver problemas envolvendo os conceitos de norma e de colinearidade entre vetores. -Determinar o ponto médio de um segmento de reta no plano e no espaço. -Resolver problemas usando a geometria vetorial.	-Interpretar esquemas; -Explorar diapositivos; -Pesquisar informação; -Justificar determinadas proposições por mais de um processo; - Explorar atividades relacionadas com imagens de modo a exprimir corretamente o raciocínio; -Aproveitar as analogias e as diferenças no tratamento analítico do plano e do espaço; -Resolver exercícios e problemas do manual; -Resolver atividades de consolidação.	8 Aulas

Relembramos que a noção de vetor já consta nos programas curriculares de Matemática do 8º ano e de Física e Química no 9º ano.

1.2.1 Planificação da aula nº1

<table>
<tr><td>Data: 29/11/2012
Ano: 10º</td><td colspan="2">Hora: 10:15
Turma: B</td><td>Sala: 7
Aula nº: 63 e 64</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Unidade didática</td></tr>
<tr><td colspan="4">Geometria analítica.</td></tr>
<tr><td>Sumário:
Vetores no plano e no espaço: a norma, soma de dois vetores, vetor simétrico e soma de um ponto comum vetor.
Resolução de exercícios.</td><td></td><td colspan="2">Material:
Quadro, giz, manual adoptado [3] e computador.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Conteúdos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Vetores livres no plano e no espaço.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Conhecimentos e Capacidades Específicas (o aluno deve ser capaz de)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Consolidar o estudo dos vetores livres no plano e no espaço de forma a que o aluno deduza propriedades de polígonos (triângulos e quadriláteros);
Exprimir e fundamentar opiniões.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Pré-requisitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Noção de segmento de reta orientado.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Estratégias</td></tr>
<tr><td colspan="4">Recorrer a exemplos e exercícios do manual e respetivas análises e resoluções;
Utilizar o computador para apresentar as definições;
Solicitar os alunos para a resolução de exercícios no quadro e também para participar;
Esclarecer questões e/ou dúvidas, colocadas pelos alunos.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Referências</td></tr>
<tr><td colspan="4">[3], [4].</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Webgrafia</td></tr>
<tr><td colspan="4">www.dgidc.min-edu.pt</td></tr>
</table>

Serão desenvolvidas as seguintes competências transversais, de acordo com o programa de Matemática do 10º ano e suas orientações metodológicas:

- Comunicação Matemática (presente na resolução de exercícios e no trabalho de grupo em pares);
- Tecnologia e Matemática (durante a apresentação de definições com a utilização do computador);
- Lógica e Raciocínio Matemático (na resolução de exercícios);
- Aplicações e Modelação Matemática (através da participação dos alunos que o cálculo vetorial está, não só relacionado com a Matemática, mas também está relacionado com a Física).

Desenvolvimento da aula

A aula tem início com uma breve introdução sobre vetores e questionam-se os alunos sobre algumas noções de vetores e a sua aplicação em anos letivos anteriores.

Seguidamente, e com a finalidade de introduzir a noção de vetor, faz-se uma revisão da definição de segmento de reta orientado (referindo os conceitos: origem, extremidade, direção, sentido e comprimento) – com a colaboração dos alunos desenham-se no quadro alguns segmentos de reta e depois segmentos de reta orientados.

Com a finalidade de explicar a noção de direção e sentido de um vetor é analisada a figura 1.

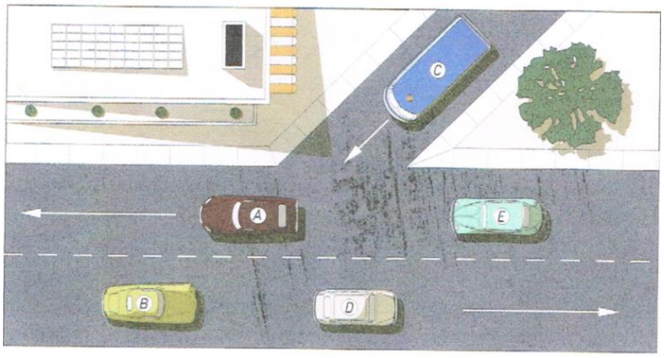


Figura 1: Direção e sentido das viaturas A,B,C,D e E .

Seguidamente fala-se sobre translações, afirmando que uma translação fica caracterizada se conhecermos a direção, o sentido e o deslocamento (aqui, solicitam-se os alunos para indicarem exemplos de translações).

Pede-se aos alunos para fazerem uma translação de um quadrado associado a um vetor e a professora circula pela sala para observar os trabalhos dos alunos, esclarecendo eventuais dúvidas. Depois será dada a definição de vetor, conforme o diapositivo:

Definição: Ao conjunto de todos os segmentos de reta orientados do plano ou do espaço que têm a **mesma direção**, o **mesmo sentido** e o **mesmo comprimento** chama-se **vetor livre** ou simplesmente **vetor**.

Para consolidar o que é dito, serão propostos os seguintes exercícios - os alunos devem resolver esses exercícios individualmente.

<u>**Exercício nº1**</u>

Na figura 2 está representado um quadrado [ABCD].

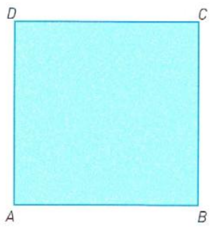


Figura 2: Quadrado [ABCD].

1. Indica, usando letras da figura:
1.1. Dois vetores com a mesma direção;
1.2. Dois vetores com direções diferentes.
2. Quantos segmentos orientados são definidos pelos quatro vértices do quadrado? E quantos vetores?

Resolução:

1.1. Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm a mesma direção.

1.2. Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CB}$ têm direções diferentes.

2. Há 12 segmentos de reta orientados: $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{BD}$; há 8 vetores: $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CA}$.

Exercício nº2

Observa a figura 3 onde estão representados seis paralelogramos geometricamente iguais. Dos segmentos orientados representados na figura, identifica os que representam o mesmo vetor.

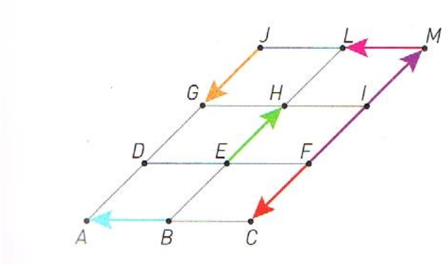


Figura 3: Seis paralelogramos geometricamente iguais.

Resolução:

Tem-se $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{FC}$ e $\overrightarrow{FM} = 2\,\overrightarrow{EH}$.

Serão solicitados alunos para corrigir estes exercícios no quadro. Com a resolução destes exercícios é importante referir na aula que "um vetor é caracterizado por uma direção, um sentido e um comprimento" e depois desenhar no quadro vários vetores para identificar vetores representantes do mesmo vetor; também é importante referir que quando dois vetores têm a mesma direção, então são paralelos. Definir-se-á de seguida, vetor simétrico, com recurso a outro diapositivo:

Definição: Ao vetor que tem a mesma direção, o mesmo comprimento e sentido oposto de $\vec{u}$, chama-se **vetor simétrico** de $\vec{u}$ e representa-se por - $\vec{u}$.

Com a finalidade de consolidar as definições introduzidas, desenhar-se-ão no quadro dois pares de vetores simétricos com diferentes representações, por exemplo, $\vec{u}$ e -$\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ e

$\overrightarrow{BA}$ (referindo que $\overrightarrow{BA}$= - $\overrightarrow{AB}$). Novamente definir-se-á norma de um vetor, conforme o diapositivo:

Definição: Chama-se **norma** de um vetor $\vec{u}$ à medida do seu comprimento e representa-se por $\|\vec{u}\|$.

São feitas as seguintes considerações:

- $\|\vec{u}\|$ é um número real não negativo ($\|\vec{u}\| \in R_0^+$),
- $\|\vec{u}\|$ = 0 se o vetor $\vec{u}$ for o vetor nulo (representa-se por $\vec{0}$).

Resolver-se-á o exercício 3 para que os alunos calculem as normas de vetores. Durante a resolução deste exercício a professora circula pela sala e observa as resoluções dos alunos.

Exercício nº3

Observa a figura 4 na qual estão representados vários vetores.

Determina as normas dos vetores $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ e $\vec{h}$, representados na figura.

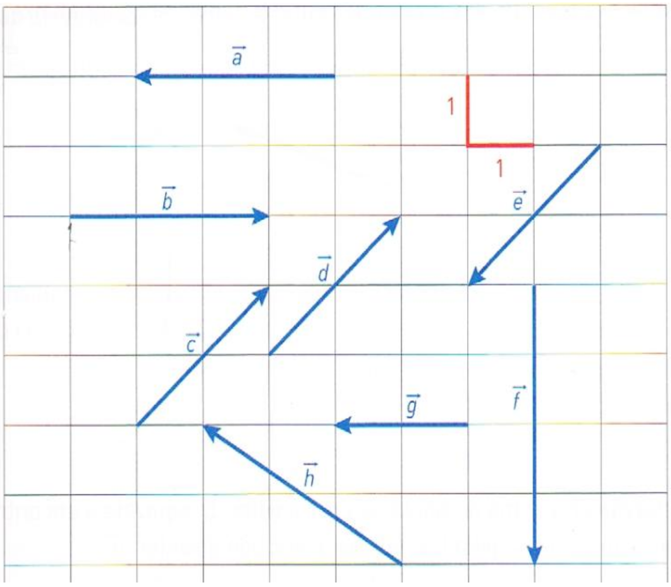


Figura 4: Representação gráfica de vetores.

Resolução:

Por aplicação do Teorema de Pitágoras,

$$\|\vec{c}\|^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 = 4 + 4 \Leftrightarrow \|\vec{c}\|^2 = 8 \Leftrightarrow \|\vec{c}\| = \sqrt{8} \vee \|\vec{c}\| = -\sqrt{8}$$

Logo,

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Analogamente,

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{d}\| = \|\vec{e}\| = 2\sqrt{2}.$$

$$\|\vec{f}\| = 4,\ \|\vec{g}\| = 2.$$

Por aplicação do Teorema de Pitágoras,

$$\|\vec{h}\|^2 = 3^2 + 2^2 \Leftrightarrow \|\vec{h}\|^2 = 9 + 4 \Leftrightarrow \|\vec{h}\|^2 = 13 \Leftrightarrow \|\vec{h}\| = \sqrt{13} \lor \|\vec{h}\| = -\sqrt{13}.$$

Logo,

$$\|\vec{h}\| = \sqrt{13}.$$

Por último, é introduzido o conceito **soma de um ponto com um vetor:**

Definição A soma do ponto A com o vetor $\vec{u}$ é a imagem do ponto A pela translação associada ao vetor $\vec{u}$.

Deste modo, tem-se:

$$A + \vec{u} = Á;$$

$$\overrightarrow{AÁ} = \vec{u}.$$

<u>Exercício nº4</u>

Na figura 5 está representado o hexágono regular [HEXAGO].

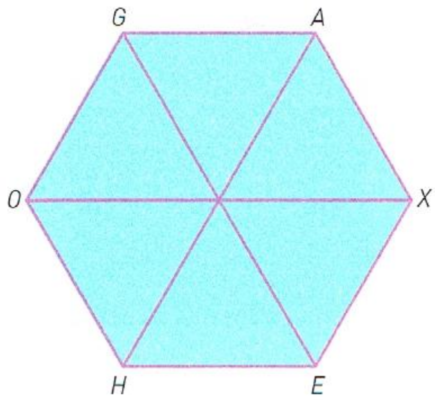


Figura 5: Hexágono regular [HEXAGO].

Completa as seguintes igualdades:

4.1. A + $\overrightarrow{OH}$ = …;

4.2. … + $\overrightarrow{XO}$ = O;

4.3. H + … = A;

4.4. … + $\overrightarrow{XA}$ = O.

<u>Resolução</u>:

4.1. A + $\overrightarrow{OH}$ = X;

4.2. X + $\overrightarrow{XO}$ = O;

4.3. H + $\overrightarrow{HA}$ = A;

4.4. H + $\overrightarrow{XA}$ = O.

Análise e reflexão da aula

Sendo esta a primeira aula sobre a introdução do conceito de vetor, pretende-se que o aluno reveja os seus conhecimentos sobre vetores. A escolha dos exercícios nº1 e nº2 permite dar a conhecer as várias representações que um vetor pode ter, assim como compreender conceitos, tais como, direção e sentido. Já o exercício nº3 permite efetuar o cálculo da norma de um vetor. Com o exercício nº4 pretende-se compreender o conceito soma de um ponto com um vetor, reconhecendo que a soma de um ponto com um vetor é um ponto. Sendo este um conteúdo de difícil compreensão por parte dos alunos, este exercício facilitou o objetivo pretendido porque permite a compreensão dos conteúdos programáticos, ajudando os alunos no processo de ensino/aprendizagem. Todos os exercícios apresentados são considerados bons exemplos, os quais permitem o desenvolvimento do cálculo mental, do raciocínio e da aplicação de conhecimentos matemáticos a novas situações (por exemplo, a aplicação do Teorema de Pitágoras). Houve, no entanto, alguma dificuldade por parte dos alunos, na compreensão deste tema.

A apresentação em Powerpoint favoreceu a exposição de várias definições, por exemplo, a definição de vetor, vetor simétrico e norma de vetor, ajudando os alunos na compreensão deste tema (anexo8-diapositivos sobre o conceito e propriedades de vetores).

A planificação da aula terminou em tempo previsto.

1.2.2 Planificação da aula nº2

Data: 03/12/2012 **Ano:** 10º	**Hora:** 11:55 **Turma:** B	**Sala:** 7 **Aula nº:** 65 e 66
Unidade didática		
Geometria analítica.		
Sumário: Operações com vetores: adição de vetores. Propriedades da adição de vetores. Multiplicação de um vetor por um número real. Resolução de exercícios.		**Material:** Quadro, giz e manual adoptado [3].
Conteúdos		
Vetores livres no plano e no espaço.		
Conhecimentos e Capacidades Específicas (o aluno deve ser capaz de)		
Consolidar o estudo dos vetores livres no plano e no espaço de forma a que o aluno deduza propriedades de polígonos (triângulos e quadriláteros); Exprimir e fundamentar opiniões.		
Pré-requisitos		
Noção de vetor; Soma de um ponto com um vetor.		
Estratégias		
Recorrer a exercícios do manual e respetivas análises e resoluções; Solicitar os alunos para a resolução de exercícios no quadro e também para participar; Esclarecer questões e/ou dúvidas, colocadas pelos alunos.		
Referências		
[3]		
Webgrafia		
www.dgidc.min-edu.pt		

Serão desenvolvidas as seguintes competências transversais, de acordo com o programa de Matemática do 10º ano e suas orientações metodológicas:

- Comunicação Matemática (presente na resolução de exercícios e na discussão dos conteúdos lecionados;
- Tecnologia e Matemática (durante a apresentação de definições com a utilização do computador);
- Resolução de Problemas e Atividades Investigativas (presente na resolução de exercícios).

Desenvolvimento da aula

No início da aula faz-se uma recapitulação da aula anterior, no sentido de recordar as definições dadas: noção de vetor, vetor simétrico, norma de um vetor e soma de um ponto com um vetor. De seguida explicar-se-á como calcular a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, através de dois processos:

➢ Processo 1: na extremidade do vetor representante de $\vec{u}$ coloca-se a origem de um representante de $\vec{v}$ – regra do triângulo;

➢ Processo 2: os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão aplicados no mesmo ponto - regra do paralelogramo.

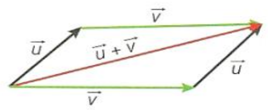
São registadas no quadro as propriedades da adição de vetores: propriedade comutativa, propriedade associativa, existência de elemento neutro, existência de elemento simétrico e diferença entre vetores, tal como o manual refere.

Propriedades da adição de vetores

A adição de vetores goza das propriedades:

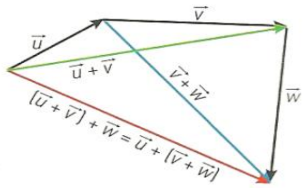
Comutativa

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Associativa

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



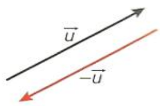
Existência de elemento neutro

O vetor nulo é o elemento neutro da adição de vetores.

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, qualquer que seja o vetor $\vec{u}$.

Existência de elemento simétrico

$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja o vetor $\vec{u}$.



Diferença entre vetores

Para determinar $\vec{u} - \vec{v}$, basta adicionar a $\vec{u}$ o simétrico de $\vec{v}$.

Ou seja:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Posteriormente serão resolvidos pelos alunos os seguintes exercícios.

<u>**Exercício nº5**</u>

Na figura 6 está representado um paralelogramo [ABCD].

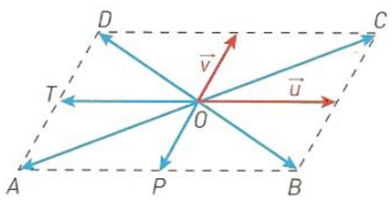


Figura 6: Paralelogramo [ABCD].

Utiliza as letras da figura para indicar um representante de:

5.1. $-\vec{u}$; **5.2.** $-\vec{v}$; **5.3.** $\vec{u}+\vec{v}$; **5.4.** $\vec{u}-\vec{v}$; **5.5.** $\vec{v}-\vec{u}$; **5.6.** $-\vec{u}-\vec{v}$.

Resolução:

5.1. $\overrightarrow{OT}$, por exemplo; **5.2.** $\overrightarrow{OP}$, por exemplo; **5.3.** $\overrightarrow{OC}$, por exemplo;

5.4. $\overrightarrow{OB}$, por exemplo; **5.5.** $\overrightarrow{OD}$, por exemplo; **5.6.** $\overrightarrow{OA}$, por exemplo.

Exercício nº6

Observa a figura 7 onde estão representados nove paralelogramos geometricamente iguais.

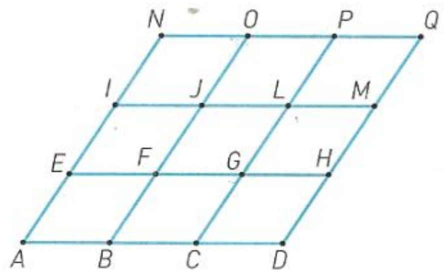


Figura 7: Paralelogramos geometricamente iguais.

Completa as seguintes igualdades:

6.1. $B+\overrightarrow{BD}=\ldots$;

6.2. $\ldots+\overrightarrow{JP}=M$;

6.3. $\ldots-\overrightarrow{NP}=F$;

6.4. $B+\ldots=M$;

6.5. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GJ}=\ldots$;

6.6. $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{LI}=\ldots$;

6.7. $\overrightarrow{HF}-\overrightarrow{LJ}=\ldots$;

6.8. $\overrightarrow{PG}-\ldots=\overrightarrow{PO}$;

6.9. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PO}=\ldots+\overrightarrow{PO}=\ldots$;

6.10. $\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{NJ}+\ldots=\ldots$;

6.11. $\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{GP}=\ldots$;

6.12. $\overrightarrow{FQ}+\ldots=\vec{0}$.

Resolução:

6.1. $B+\overrightarrow{BD}=D$;

6.2. $G+\overrightarrow{JP}=M$;

6.3. $H-\overrightarrow{NP}=F$;

6.4. $B+\overrightarrow{BM}=M$;

6.5. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{BF}$;

6.6. $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{AF}$;

6.7. $\overrightarrow{HF}-\overrightarrow{LJ}=\overrightarrow{HG}$;

6.8. $\overrightarrow{PG}-\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{PO}$;

6.9. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{DL}+\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{DG}$;

6.10. $\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{NI}$;

6.11. $\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{AO}$;

6.12. $\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{QF}=\vec{0}$.

De modo a que os alunos saibam aplicar conhecimentos são indicados os exercícios 6.10, 6.11 e 6.12 para trabalho de casa.

No final da aula, dá-se início ao conteúdo Multiplicação de um número real por um vetor, tal como o manual refere.

Vetores colineares

Os vetores representados na figura 8 têm todos a mesma direção.

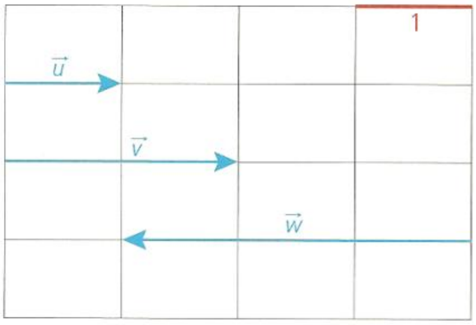


Figura 8: Multiplicação de um número real por um vetor.

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$$

$$\|\vec{v}\| = \|2\vec{u}\| = 2\ \|\vec{u}\| = 2$$

Sendo $\vec{v} = 2\vec{u}$, conclui-se que o vetor $\vec{v}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\vec{u}$ e $\|\vec{v}\| = 2\ \|\vec{u}\|$.

Definição Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se existe um número real $k \neq 0$, tal que $\vec{v} = k\ \vec{u}$.

Multiplicação de um número real por um vetor

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $k \neq 0$, então, acerca do vetor $k\vec{u}$ pode afirmar-se que:

- tem a mesma direção de $\vec{u}$;
- tem o mesmo sentido de $\vec{u}$, se $k>0$ e sentido oposto ao de $\vec{u}$, se $k<0$;
- $\|k\vec{u}\|=|k|\ \|\vec{u}\|$.

Cumpridos os objetivos pretendidos, nas aulas seguintes será possível continuar com a realização de exercícios.

Análise e reflexão da aula

Os vários exercícios de aplicação resolvidos durante a aula tiveram como finalidade a consolidação de conhecimentos adquiridos por parte dos alunos.

Com os exercícios nº5 e nº6, cujo objetivo era o cálculo da soma de vetores e aplicação das propriedades da adição de vetores, notou-se que alguns alunos tiveram dificuldade na sua resolução. Face a esta situação, houve necessidade de elaborar exercícios diversificados, no sentido de que os alunos consigam interligar os temas, refletir e consolidar as aprendizagens.

1.2.3 Planificação da aula nº3

Data: 04/12/2012 **Ano:** 10º	**Hora:** 13:30 **Turma:** B	**Sala:** 7 **Aula nº:** 67 e 68
Unidade didática		
Geometria analítica.		
Sumário: Continuação do sumário da lição anterior. Aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos. Resolução de exercícios.		**Material:** Quadro, giz e manual adoptado [3].
Conteúdos		
Vetores livres no plano e no espaço.		
Conhecimentos e Capacidades Específicas (o aluno deve ser capaz de)		
Consolidar o estudo dos vetores livres no plano e no espaço de forma a deduzir propriedades de polígonos (triângulos e quadriláteros); Resolver problemas; Desenvolver o raciocínio matemático; Exprimir e fundamentar opiniões.		
Pré-requisitos		
Noção de vetor.		
Estratégias		
Recorrer a exercícios do manual e respetivas análises e resoluções; Solicitar os alunos para a resolução de exercícios no quadro e também para participar; Esclarecer questões e/ou dúvidas, colocadas pelos alunos.		
Referências		
[3]		
Webgrafia		
www.dgidc.min-edu.pt		

Serão desenvolvidas as seguintes competências transversais, de acordo com o programa de Matemática do 10º ano e suas orientações metodológicas:

- Comunicação Matemática (presente na resolução de exercícios e no trabalho de grupo em pares);
- Resolução de Problemas e Atividades Investigativas (presente na resolução de problemas);
- Lógica e Raciocínio Matemático (presente na resolução de exercícios e/ou problemas e nas demonstrações que esses exercícios pressupõem).

Desenvolvimento da aula

A aula tem início com o registo das resoluções dos alunos relativas aos exercícios propostos para trabalho de casa.

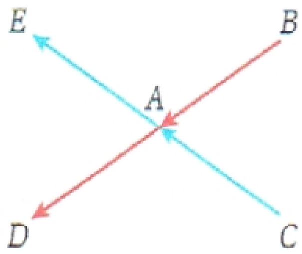
No sentido de consolidar os conhecimentos dados na aula anterior, solicita-se um aluno para ler no manual as propriedades da multiplicação de um número real por um vetor.

No prosseguimento da aula é pedido aos alunos para resolver individualmente o exercício nº7, com marcação de tempo. As resoluções deste exercício serão recolhidas a fim de serem corrigidas.

Exercício nº7

Considere três pontos, A, B e C, não alinhados. Marcaram-se os pontos D e E, tais que:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \text{ e } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA}$$



7.1. Justifica que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$.

7.2. Como classificas o quadrilátero [BEDC]?

Resolução:

7.1.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EA} \left(\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD} \text{ e } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EA}\right)$$

$$= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ED}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}.$$

7.2. O quadrilátero [BEDC] é um paralelogramo, pois os lados [BC] e [ED] são paralelos e geometricamente iguais, assim como os lados [EB] e [DC] são paralelos e geometricamente iguais. Para isso, é necessário mostrar que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DC}$.

A igualdade $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$ foi anteriormente demonstrada (7.1).

Por outro lado:

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} \left(\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA}\right) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{DC}, \text{ logo, } \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DC}.$$

Deste modo concluiu-se que o quadrilátero [BEDC] é um paralelogramo, como se queria provar.

De seguida pretende-se que os alunos trabalhem aos pares na resolução do exercício que se segue:

Exercício nº8

Observa a figura 9.

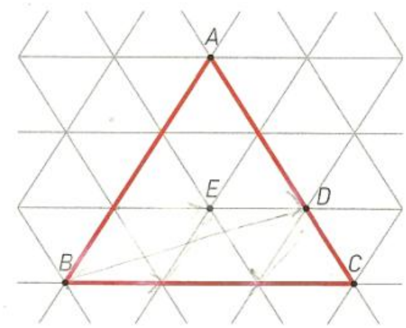


Figura 9: Triângulo [ABC].

8.1. Calcula:

8.1.1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$; **8.1.2.** $\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; **8.1.3.** $3\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE}$; **8.1.4.** $\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

8.2. Determina os números a e b de modo que:

8.2.1. $\overrightarrow{BE} = a\,\overrightarrow{BC} + b\,\overrightarrow{BA}$; **8.2.2.** $\overrightarrow{BD} = a\,\overrightarrow{BC} + b\,\overrightarrow{BA}$; **8.2.3.** $\overrightarrow{DE} = a\,\overrightarrow{BC} + b\,\overrightarrow{BA}$.

Resolução:

8.1.1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$;

8.1.2. $\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EB}$;

8.1.3. $3\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CE}$;

8.1.4. $\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$;

8.2.1. $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ $\left(\text{logo, } a = b = \frac{1}{3}\right)$;

8.2.2. $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$;

8.2.3. $a = -\frac{1}{3}$ e $b = 0$.

Não sendo possível resolver os exercícios 8.2.2. e 8.2.3. no tempo previsto marca-se o trabalho de casa para a próxima aula.

Análise e reflexão da aula

No sentido de cativar a atenção dos alunos para a melhoria das suas aprendizagens e consolidar os conhecimentos previamente adquiridos, foram resolvidos nesta aula exercícios diversificados. Por sua vez, a resolução destes exercícios foi útil para detetar as dificuldades dos alunos. A escolha do exercício nº7 deve-se, essencialmente, à diversidade de caminhos e conhecimentos matemáticos que ela desenvolve nos alunos no sentido de descobrir, explorar, investigar, pensar…; por outro lado, o exercício nº8 permitiu uma aprendizagem de conteúdos adquiridos nas aulas anteriores tais como as propriedades da adição de vetores (comutativa, associativa, existência de elemento neutro, existência de elemento simétrico e diferença entre vetores). Concluindo, estes exercícios serviram para desenvolver nos alunos um raciocínio espacial, capacidade para explorar conjeturas, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstratos.

Notou-se, porém, alguma dificuldade na resolução do exercício nº7, pois a generalidade dos alunos não conseguiu articular o cálculo vetorial com a dedução de propriedades da figura geométrica em causa.

1.2.4 Planificação da aula nº4

<table>
<tr><td>Data: 06/12/2012
Ano: 10º</td><td colspan="2">Hora: 10:15
Turma: B</td><td>Sala: 7
Aula nº: 69 e 70</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Unidade didática</td></tr>
<tr><td colspan="4">Geometria analítica.</td></tr>
<tr><td>Sumário:
Correção do trabalho de casa.
Aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos. Resolução de exercícios.</td><td></td><td colspan="2">Material:
Quadro, giz, manual adoptado e ficha de trabalho.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conteúdos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Vetores livres no plano e no espaço.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conhecimentos e Capacidades Específicas (o aluno deve ser capaz de)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Consolidar o estudo dos vetores livres no plano e no espaço de forma a deduzir propriedades de polígonos (triângulos e quadriláteros);
Resolver problemas;
Desenvolver o raciocínio matemático;
Exprimir e fundamentar opiniões.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Pré-requisitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Noção de vetor.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Estratégias</td></tr>
<tr><td colspan="4">Recorrer a exercícios do manual e respetivas análises e resoluções;
Solicitar os alunos para a resolução de exercícios no quadro e também para participar;
Esclarecer questões e/ou dúvidas, colocadas pelos alunos.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Referências</td></tr>
<tr><td colspan="4">[3], [11]</td></tr>
<tr><td colspan="4">Webgrafia</td></tr>
<tr><td colspan="4">www.dgidc.min-edu.pt</td></tr>
</table>

Serão desenvolvidas as seguintes competências transversais, de acordo com o programa de Matemática do 10º ano e suas orientações metodológicas:

- Comunicação Matemática (presente na resolução de exercícios e no trabalho de grupo e em pares);

- Resolução de Problemas e Atividades Investigativas (presente na resolução de problemas);

- Lógica e Raciocínio Matemático (durante a resolução de exercícios e/ou problemas e nas demonstrações que esses exercícios pressupõem).

Desenvolvimento da aula

No início da aula faz-se uma apreciação global das resoluções feitas pelos alunos, relativas ao exercício nº7, resolvido na aula anterior.

Exercício nº9

Considere um paralelogramo [PQRS], representado na figura 10.

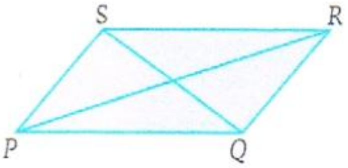


Figura 10: Paralelogramo [PQRS].

9.1. Mostre que $\overrightarrow{PR}$ + $\overrightarrow{SQ}$ = 2 $\overrightarrow{PQ}$.

Seguidamente são resolvidos os seguintes exercícios:

Exercício nº10

Na figura 11 está representado um triângulo equilátero [ACF] decomposto em quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais.

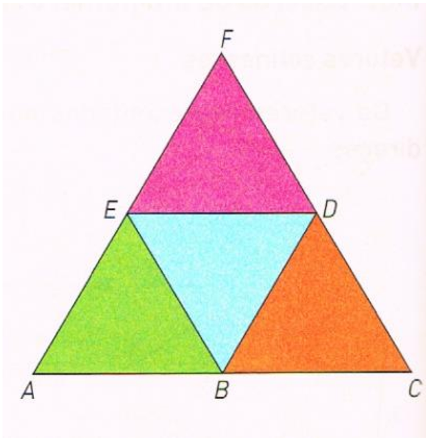


Figura 11: Triângulo equilátero [ACF].

10.1. Recorrendo a letras da figura, identifica o vetor representado por:

10.1.1. $\overrightarrow{CD}$ + $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EF}\right)$;

10.1.2. $\overrightarrow{BA}$ - 2 $\overrightarrow{DE}$;

10.1.3. $\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}\right)$ - $\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right)$.

10.2. Dá exemplos de três vetores não colineares cuja soma seja o vetor nulo.

Resolução:

10.1.1. $\overrightarrow{CD}$ + $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EF}\right)$ = $\overrightarrow{CD}$ + $\overrightarrow{BE}$ = $\overrightarrow{CD}$ + $\overrightarrow{DF}$ = $\overrightarrow{CF}$;

10.1.2. $\overrightarrow{BA}$ - 2 $\overrightarrow{DE}$ = $\overrightarrow{BA}$ + 2 $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{AB}$;

10.1.3. $(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB})$ - $(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})$ = $\overrightarrow{EB}$ - $\overrightarrow{DB}$ = $\overrightarrow{EB}$ + $\overrightarrow{BD}$ = $\overrightarrow{ED}$.

10.2. Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{DB}$.

Exercício nº11

Utilizando vetores representados no quadrilátero da figura 12 completa os espaços:

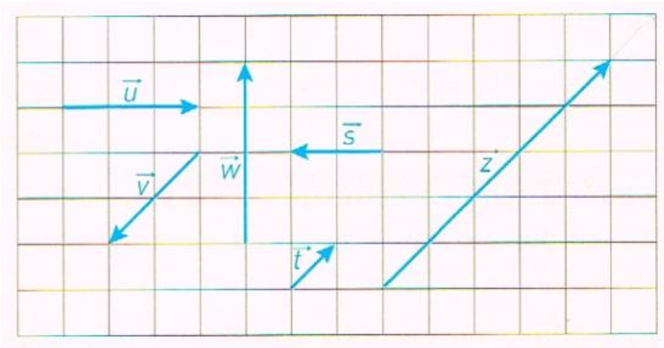


Figura 12: Representação gráfica de vetores.

11.1 $\vec{u}$ = … $\vec{s}$; **11.2** $\|\vec{w}\|$ = 2 $\|…\|$; **11.3** … $= -\frac{1}{2}\vec{v}$

11.4 $\vec{z}$ = … $\vec{t}$; **11.5** $\vec{v}$ =… $\vec{z}$; **11.6** $\|\vec{s}\|$ = … $\|\vec{u}\|$

Exercício nº12

Na figura 13 está representado um octaedro regular.

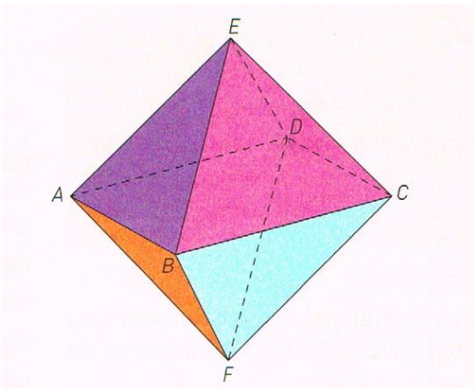


Figura 13: Octaedro regular.

Recorrendo a letras da figura, identifica o vetor representado por:

12.1. $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BE}$;

12.2. $\overrightarrow{BD}$ - $\overrightarrow{BA}$;

12.3. $\overrightarrow{EB}$ + $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD})$.

Resolução:

12.1. $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{BE}$ = $\overrightarrow{AE}$;

12.2. $\overrightarrow{BD}$ - $\overrightarrow{BA}$ = $\overrightarrow{BD}$ + $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{BD}$ + $\overrightarrow{DC}$ = $\overrightarrow{BC}$;

12.3. $\overrightarrow{EB} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ED}$.

Será analisada a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição de vetores. Para tal, é utilizado o seguinte exemplo: $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A aula termina com a resolução do exercício nº13:

<u>**Exercício nº13**</u>

Observe a figura 14. Sabe-se que $\overline{OP} = \frac{1}{3}\overline{OA}$ e $\overline{OQ} = \frac{1}{3}\overline{OB}$.

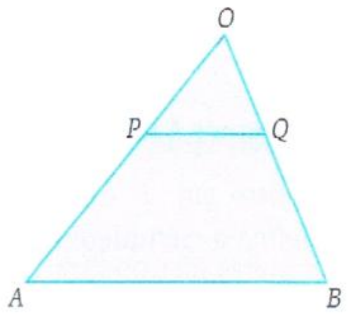


Figura 14: Triângulo [AOB].

13.1 Prove que [ABQP] é um trapézio.

<u>**Resolução:**</u>

Para mostrar que [ABQP] é um trapézio, temos que provar que tem dois lados paralelos ([QP] e [AB]).

Assim, basta provar que os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos.

Deste modo, temos:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Sendo $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, isto significa que $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares e portanto são paralelos, donde [ABQP] é um trapézio, como se pretende provar.

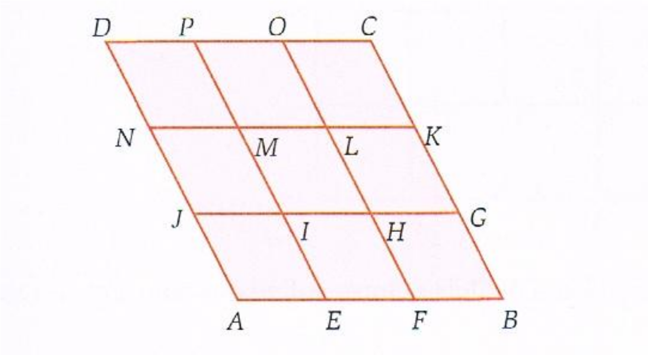
Finalmente serão distribuídas aos alunos uma ficha de trabalho com exercícios variados sobre vetores no plano e no espaço.

Ficha de trabalho - Matemática A

06/12/12 - 10º ANO

Nome:____ Nº____ Turma: ____

1. Considere o paralelogramo [ABCD] dividido em nove paralelogramos geometricamente iguais:



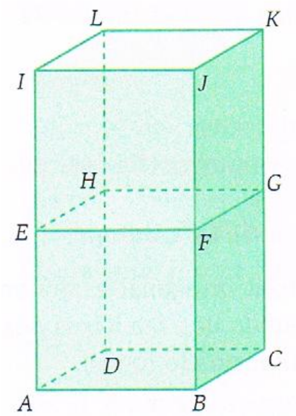
1.1. Usando as letras da figura indique dois vetores cuja soma seja o vetor:

a) $\overrightarrow{NA}$; **b)** $\overrightarrow{MK}$; **c)** $\overrightarrow{OF}$; **d)** $\overrightarrow{DM}$; **e)** $\overrightarrow{AL}$; **f)** $\overrightarrow{IB}$.

1.2. Copie e complete:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HO}=\cdots$; **b)** $\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{OL}=\cdots$; **c)** $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{PG}=\cdots$; **d)** $\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{FK}=\cdots$; **e)** … + $\overrightarrow{MG}$ = $\overrightarrow{NE}$; **f)** $\overrightarrow{NI}+\cdots=\overrightarrow{FG}$.

2. O sólido da figura é composto por dois cubos com uma face comum. A partir dos pontos indicados na figura calcule:



2.1. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BG}$; **2.2.** $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{HD}$; **2.3.** $\overrightarrow{HF}-\overrightarrow{LI}$; **2.4.** $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DL}$; **2.5.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{CB}$.

3. Assinala a alternativa correta:

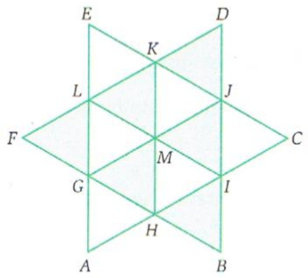
3.1. A figura é formada por vários triângulos equiláteros.

(A) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FJ}$;

(B) $G + \overrightarrow{DJ} = H$;

(C) $F - \overrightarrow{CH} = K$;

(D) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}$.



3.2.

O ponto F divide $[DC]$ na razão de $1 : 3$.

$\overrightarrow{DC} = \vec{x}$ e $\overrightarrow{DA} = \vec{y}$.

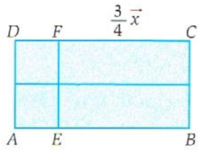
Então, $\overrightarrow{AF}$ é igual a:

(A) $\vec{x} + \frac{\vec{y}}{2}$;

(B) $2(\vec{x} + \vec{y})$;

(C) $\frac{\vec{x} + \vec{y}}{2}$;

(D) $\frac{1}{4}\vec{x} - \vec{y}$.



3.3.

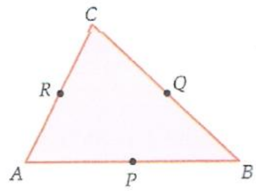
$[ABC]$ é um triângulo qualquer. P , Q e R são os pontos médios de $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respetivamente.

(A) $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{RC} - \overrightarrow{AB}$;

(B) $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP}$;

(C) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BQ}$;

(D) $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{AB}$.



3.4.

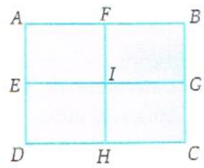
Considere o retângulo $[ABCD]$ dividido em quatro retângulos geometricamente iguais.

(A) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CD}$;

(B) $\overrightarrow{DI} - \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{DE}$;

(C) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DC}$;

(D) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BE}$.



3.5.

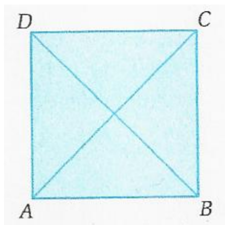
Sabe-se que $[ABCD]$ é um quadrado.

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$;

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$;

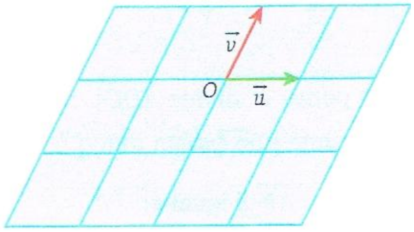
(C) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA}$;

(D) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

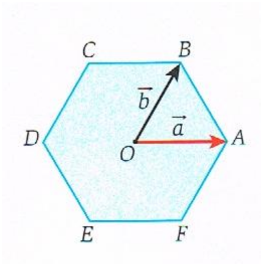


4. Copie para o seu caderno a seguinte figura e assinale os pontos de C a P tais que:

- $\overrightarrow{OE} = \vec{u} - 2\vec{v}$;
- $\overrightarrow{OC} = 2\vec{u} - \vec{v}$;
- $\overrightarrow{OG} = -\vec{u}$;
- $\overrightarrow{OI} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$;
- $\overrightarrow{OK} = -\vec{u} - \vec{v}$;
- $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$;
- $\overrightarrow{OD} = 2\vec{u} + \vec{v}$;
- $\overrightarrow{OH} = -\vec{u} - 2\vec{v}$;
- $\overrightarrow{OF} = -2\vec{u} + \vec{v}$;
- $\overrightarrow{OY} = -\vec{u} + \vec{v}$;
- $\overrightarrow{OM} = -\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$;
- $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}(\vec{u} - \vec{v})$.



5. A figura seguinte representa um hexágono regular de centro O, [ABCDEF]:



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

5.1. Escreva $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EC}$ usando os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

5.2. Copie a figura e represente os pontos Y, K e L, sabendo que:

$\overrightarrow{OY} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{OK} = \vec{b} - 2\vec{a}$ e $\overrightarrow{OL} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

5.3. Escreva $\overrightarrow{LK}$ usando os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

5.4. Classifique o quadrilátero [ABKL] e justifique a sua resposta.

5.5. Sabendo que o perímetro do hexágono [ABCDEF] é igual a $12\sqrt{3}$ cm, determine a área do quadrilátero [ABKL].

Resolução:

1.1

a) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{NJ}$ e $\overrightarrow{JA}$ $(\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{NA})$.

b) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{MO}$ e $\overrightarrow{OK}$ $(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{MK})$.

c) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{OH}$ e $\overrightarrow{HF}$ $(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{OF})$.

d) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{DP}$ e $\overrightarrow{PM}$ $(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{DM})$.

e) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{NL}$ $(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NL} = \overrightarrow{AL})$.

f) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{IG}$ e $\overrightarrow{GB}$ $(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{IB})$.

1.2

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK}$;

b) $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{JE}$;

c) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{AF}$;

d) $\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{MC}$;

e) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{NE}$;

f) $\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{FG}$.

2.

2.1 $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FK} = \overrightarrow{EK}$;

2.2 $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JF} = \overrightarrow{AF}$;

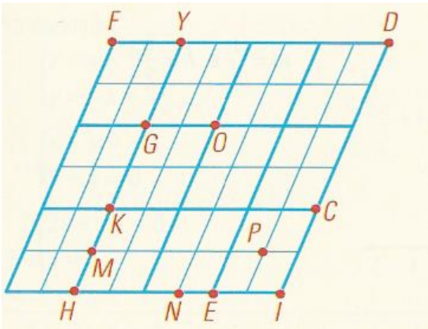
2.3 $\overrightarrow{HF} - \overrightarrow{LI} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{HG}$;

2.4 $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$;

2.5 $\frac{1}{2}\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IH}$.

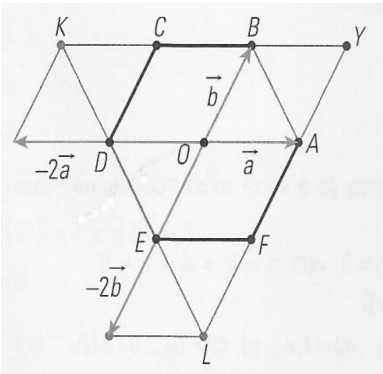
3.1 Opção (C); **3.2** Opção (D); **3.3** Opção (A); **3.4** Opção (B); **3.5** Opção (C).

4.



5.1 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{2b} - \vec{a}$.

5.2



5.3 $\overrightarrow{LK} = 3\vec{b} - 3\vec{a}$.

5.4 O quadrilátero [ABKL] é um trapézio isósceles: [AB] / / [KL] e $\|\overrightarrow{BK}\| = \|\overrightarrow{AL}\|$.

5.5 Área do trapézio [ABKL] = $\frac{B+b}{2} \times h = \frac{8\sqrt{3}}{2} \times 6 = 24\sqrt{3}$ cm^2.

B: Base maior do trapézio: $6\sqrt{3}$ cm; b: Base menor do trapézio: $2\sqrt{3}$ cm; h: Altura do trapézio: 6 (=2×3) cm.

Análise e reflexão da aula

A resolução de problemas contribui fundamentalmente para desenvolver a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente, justificar processos de resolução, confirmar conjeturas e de as justificar. Neste sentido e tendo em vista a possibilidade de resolver problemas de Geometria no Plano, poder-se-á praticar o raciocínio dedutivo e desenvolver a capacidade de visualizar - intrínseco ao Programa de Matemática do Ensino Secundário. Para tal foram escolhidos os exercícios nº9 e nº13, nos quais se pretende que o aluno deduza propriedades de figuras geométricas (usando triângulos e quadriláteros) usando vetores e explorando a ligação do cálculo vetorial.

A resolução do exercício nº13 permitiu aos alunos depararem-se com formas diferentes de resolução de exercícios, o que contribuiu para aprofundar os conceitos. A realização dos exercícios nº10, nº11 e nº12 foi feita com a colaboração dos alunos - não surgiram grandes dificuldades na resolução destes exercícios. O trabalho de grupo e em pares por parte dos alunos também favoreceu a comunicação matemática.

1.2.5 Planificação da aula nº5

<table>
<tr><td>Data: 10/12/2012
Ano: 10º</td><td colspan="2">Hora: 11:55
Turma: B</td><td>Sala: 7
Aula nº: 71 e 72</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Unidade didática</td></tr>
<tr><td colspan="4">Geometria analítica.</td></tr>
<tr><td>Sumário:
Aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos.
Resolução de exercícios.</td><td></td><td colspan="2">Material:
Quadro, giz, manual adoptado.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Conteúdos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Vetores livres no plano e no espaço.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Conhecimentos e Capacidades Específicas (o aluno deve ser capaz de)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Consolidar o estudo dos vetores livres no plano e no espaço de forma a deduzir propriedades de polígonos (triângulos e quadriláteros);
Resolver problemas;
Desenvolver o raciocínio matemático;
Exprimir e fundamentar opiniões.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Pré-requisitos</td></tr>
<tr><td colspan="4">Noção de vetor.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Estratégias</td></tr>
<tr><td colspan="4">Resolver exercícios dados em aulas anteriores;
Recorrer a exercícios do manual e respetivas análises e resoluções;
Solicitar os alunos para a resolução de exercícios no quadro e também para participar;
Esclarecer questões e/ou dúvidas, colocadas pelos alunos.</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">Referências</td></tr>
<tr><td colspan="4">[3], [11]</td></tr>
</table>

Serão desenvolvidas as seguintes competências transversais, de acordo com o programa de Matemática do 10º ano e suas orientações metodológicas:

- Comunicação Matemática (presente na resolução de exercícios e na discussão da matéria a lecionar);

- Resolução de Problemas e Atividades Investigativas (presente na resolução de problemas);

- Lógica e Raciocínio Matemático (durante a resolução de exercícios e/ou problemas e nas demonstrações que esses exercícios pressupõem).

Desenvolvimento da aula

Dada a necessidade de explicar a resolução do exercício nº9, analisado na aula anterior, de forma correta e inequívoca, este exercício é novamente resolvido no quadro pela professora estagiária.

Exercício nº9

Considere um paralelogramo [PQRS], representado na figura 15.

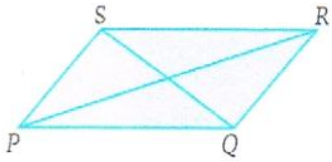


Figura 15: Paralelogramo [PQRS].

9.1.Mostre que $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{SQ} = 2\,\overrightarrow{PQ}$.

Resolução:

Cálculos auxiliares:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR};\ \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ};\ \overrightarrow{QR} = -\ \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{PS}.$$

Tem-se:

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} = 2\,\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SP} =$$
$$= 2\,\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SP} = 2\,\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PP} = 2\,\overrightarrow{PQ} + \vec{0} = 2\,\overrightarrow{PQ}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{SQ} = 2\,\overrightarrow{PQ},$$

como se pretende provar.□

Seguidamente é resolvido o exercício nº14:

Exercício nº14

Prove que as diagonais de um paralelogramo se bissetam.

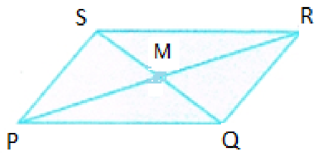


Figura 16: Paralelogramo [PQRS].

Sugestão: Prove que se M é ponto médio da diagonal [PR], então $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MS}$, isto é, M também é o ponto médio da diagonal [SQ].

Demonstração:

Suponhamos que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MR}$; então $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{MR}$ ([PQRS] é um paralelogramo e $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MR}$ = $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS}$ (Propriedade comutativa da adição de vetores) = $\overrightarrow{MS}$.

Daqui decorre a igualdade $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MS}$, ou seja, M é o ponto médio da diagonal [SQ].

Seguidamente são entregues as resoluções do exercício nº7 aos alunos, dado em aulas anteriores, e feitas as respetivas correções pela professora com a colaboração dos alunos. Uma vez que é pedido para classificar o quadrilátero [BEDC] e a generalidade dos alunos não respondeu corretamente, há necessidade de rever o conceito de paralelogramo e outras figuras geométricas relacionadas com o paralelogramo (por exemplo, o retângulo e o quadrado).

Posteriormente é demonstrada no quadro pela professora estagiária uma propriedade para aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos, como se exemplifica:

PROPRIEDADE 1

Seja [ABC] um triângulo em que M e N são os pontos médios dos lados [AC] e [BC], respetivamente.

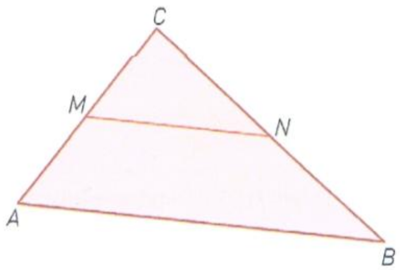


Figura 17: Triângulo [ABC].

Então:

[MN] é paralelo a [AB];

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Demonstração:

Para provar que [MN] é paralelo a [AB] basta provar que os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares.

$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MN}$ (1).

Mas $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Então, substituindo em (1), tem-se $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MN}$.

Mas $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Então, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Os vetores $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares.

Logo, pode concluir-se que [MN] e [AB] são paralelos. Como $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, conclui-se que:

$$\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\| = \left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$$

Daqui resulta que $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Nos restantes minutos da aula são entregues aos alunos os testes de avaliação.

Análise e reflexão da aula

Com esta aula pretendeu-se que os alunos desenvolvam o raciocínio e o pensamento científico, exercitem e desenvolvam esquemas e estruturas de pensamento e conhecimento mais elevado. A escolha dos problemas, assim como a demonstração da propriedade foi uma forma para incentivar os alunos a descobrir relações entre conceitos de Matemática (destacam-se os problemas sobre paralelogramos), validar conjeturas e fazer raciocínios demonstrativos.

Nos temas de Geometria, tal como o Programa de Matemática A de 10º ano refere, "procura-se um equilíbrio entre a Geometria por via intuitiva e a Geometria Analítica, de modo a desenvolver tanto o raciocínio geométrico direto como a resolução de problemas de geometria por via algébrica, sem esquecer o desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica"; deste modo, a escolha dos exercícios referidos foi importante, na medida em que ajudou os alunos a fazerem a ligação da visualização geométrica com o raciocino analítico.

Apesar de verificar que os alunos manifestavam grandes dificuldades na compreensão destes temas, solicitei-os para fazerem um esforço no sentido de os interligar, de modo a refletir e a consolidar as aprendizagens.

1.2.6 Planificação da aula nº6

Data: 03/01/2013 **Ano:** 10º 76	**Hora:** 10:15 **Turma:** B		**Sala:** 7 **Aula nº:** 75 e
Unidade didática			
Geometria analítica.			
Sumário: Aplicações do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos.		**Material:** Quadro, giz, ficha de trabalho e manual adoptado.	
Conteúdos			
Vetores livres no plano e no espaço.			
Conhecimentos e Capacidades Específicas (o aluno deve ser capaz de)			
Consolidar o estudo dos vetores livres no plano e no espaço de forma a deduzir propriedades de polígonos (triângulos e quadriláteros); Resolver problemas; Desenvolver o raciocínio matemático; Exprimir e fundamentar opiniões.			
Pré-requisitos			
Noção de vetor.			
Estratégias			
Resolver exercícios dados em aulas anteriores; Recorrer a exercícios do manual e respetivas análises e resoluções; Solicitar os alunos para a resolução de exercícios no quadro e também para participar; Esclarecer questões e/ou dúvidas, colocadas pelos alunos.			
Referências			
[3]			

Serão desenvolvidas as seguintes competências transversais, de acordo com o programa de Matemática do 10º ano e suas orientações metodológicas:

- Comunicação Matemática (presente na resolução de exercícios e na discussão da matéria a lecionar);

- Resolução de Problemas e Atividades Investigativas (presente na resolução de problemas);

- Lógica e Raciocínio Matemático (durante a resolução de exercícios e/ou problemas e nas demonstrações que esses exercícios pressupõem).

Nota: No dia 11 de Dezembro fiz a correção do teste de avaliação aos alunos. Como tal, a continuação do estudo dos vetores no plano e no espaço foi feita na primeira aula do segundo período.

Desenvolvimento da aula

A propriedade 1, demonstrada em aulas anteriores, é novamente relembrada.

De seguida, é resolvido no quadro pela professora estagiária o exercício nº15.

Exercício nº15:

Condições da figura:

- [ABCD] é um paralelogramo;
- M é o ponto médio de [AD];
- N é o ponto médio de [BC].

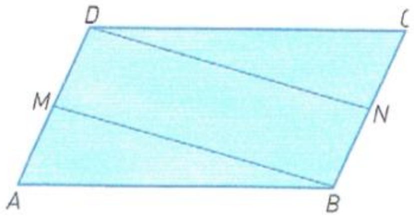


Figura 18: Paralelogramo [ABCD].

15.1 Mostra que [MBND] é um paralelogramo.

Resolução:

O quadrilátero [MBND] é um paralelogramo se os lados [MB] e [DN] são paralelos e geometricamente iguais, assim como os lados [NB] e [DM] são paralelos e geometricamente iguais. Para isso, é necessário mostrar que:

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DN} \text{ e } \overrightarrow{NB}=\overrightarrow{DM}.$$

Tem-se:

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DN}.$

Logo,

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DN}.$$

Por outro lado:

$$\overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DM}$$

Logo,

$$\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{DM}.$$

Deste modo concluiu-se que [MBND] é um paralelogramo.

Depois da resolução deste exercício é distribuída aos alunos uma ficha de trabalho para resolverem individualmente o exercício nº16. As resoluções deste exercício serão recolhidas a fim de serem corrigidas.

Exercício nº16:

Observa a figura 19 onde se verificam as seguintes condições:

- D é o ponto médio de [AC]
- E é o ponto médio de [BC]
- $\overline{DE}$=$\overline{EF}$

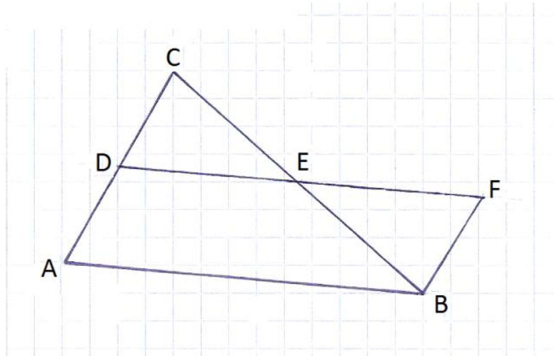


Figura 19: Figura geométrica representada pelos pontos A, B, C, D, E e F.

16.1. Mostra que [ABFD] é um paralelogramo.

[ABFD] é um paralelogramo se os lados [DF] e [AB] são paralelos e geometricamente iguais, assim como os lados [DA] e [BF] são paralelos e geometricamente iguais. Para isso, é necessário mostrar que $\overrightarrow{DF}$=$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DA}$=$\overrightarrow{FB}$.

Resolução 1:

Como D é o ponto médio de [AC] e E é o ponto médio de [BC], tem-se:

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

Sendo $\overline{DE}$=$\overline{EF}$, então:

$$\overrightarrow{DF} = 2\,\overrightarrow{DE} = 2\left(\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AB}.$$

Por outro lado,

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD},$$

Mas,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FB}.$$

Sendo

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD}\ ,\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FB}$$

Resulta

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FB}.$$

Resolução 2:

Ao provar a igualdade $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FB}$ na resolução anterior, poder-se-á provar a igualdade $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB}$, sem recorrer à propriedade 1.

Deste modo,

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} \Leftrightarrow \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AF}.$$

Por outro lado,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DF} + \vec{0} = \overrightarrow{DF}.$$

Daqui resulta

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}.$$

Quer a resolução 1, quer a resolução 2, mostram que:

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FB}\ ,\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DF}$$

e portanto que [ABFD] é um paralelogramo.

Depois da resolução deste exercício será demonstrada outra propriedade (Propriedade 2), fundamental na aplicação do cálculo vetorial à demonstração de propriedades de polígonos.

PROPRIEDADE 2

Seja [ABCD] um quadrilátero convexo, em que M, N, S e T são pontos médios dos seus lados.

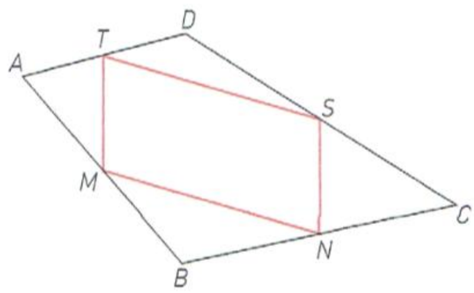


Figura 20: Quadrilátero convexo [ABCD].

Então, o quadrilátero [MNST] é um paralelogramo.

Demonstração:

Para provar que [MNST] é um paralelogramo, basta provar que:

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{NM} \text{ e } \overrightarrow{SN} = \overrightarrow{TM}.$$

Ao traçar a diagonal [AC], o quadrilátero [ABCD] fica dividido nos triângulos [ACD] e [ABC].

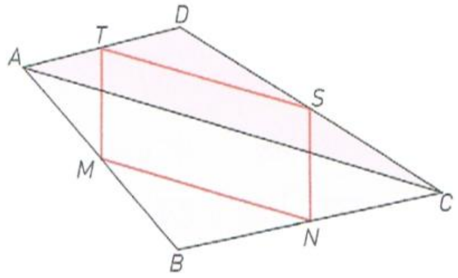


Figura 21: Quadrilátero [ABCD].

Recorrendo à propriedade 1 sabe-se que:

$$\overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} \text{ e } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{CA}}.$$

Daqui resulta

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{NM}.$$

Para provar que $\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{TM}$, recorre-se a um raciocínio análogo ao anterior.

Ao traçar a diagonal [DB], o quadrilátero fica dividido nos triângulos [BCD] e [BDA].

Recorrendo de novo à propriedade 1 sabe-se que:

$$\overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{DB}} \text{ e } \overrightarrow{TM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{DB}}.$$

Daqui resulta

$$\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{TM}.$$

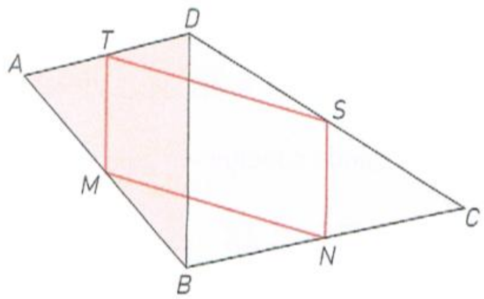


Figura 22: Quadrilátero [ABCD].

Sendo

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{NM} \text{ e } \overrightarrow{SN} = \overrightarrow{TM}$$

Então [MNST] é um paralelogramo.

Ao enunciar a propriedade 2 é explicado aos alunos a definição de polígono convexo para perceberem a noção de quadrilátero convexo.

Para sintetizar é resolvido o seguinte exercício:

Exercício nº 17

[ABCD] é um paralelogramo;

[AC] é uma diagonal do paralelogramo;

$\overline{AM}$=$\overline{CN}$.

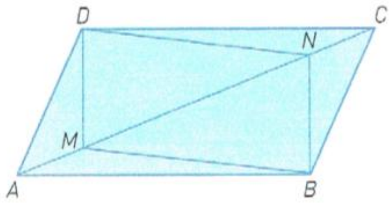


Figura 23: Paralelogramo [ABCD].

17.1. Mostre que [MBND] é um paralelogramo.

Resolução:

Para provar que [MBND] é um paralelogramo, basta provar que $\overrightarrow{MB}$ = $\overrightarrow{DN}$ e $\overrightarrow{DM}$ = $\overrightarrow{NB}$.

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = - \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{CD} = - (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD}) = - \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{DN}.$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CN} = - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NB}.$$

Logo,

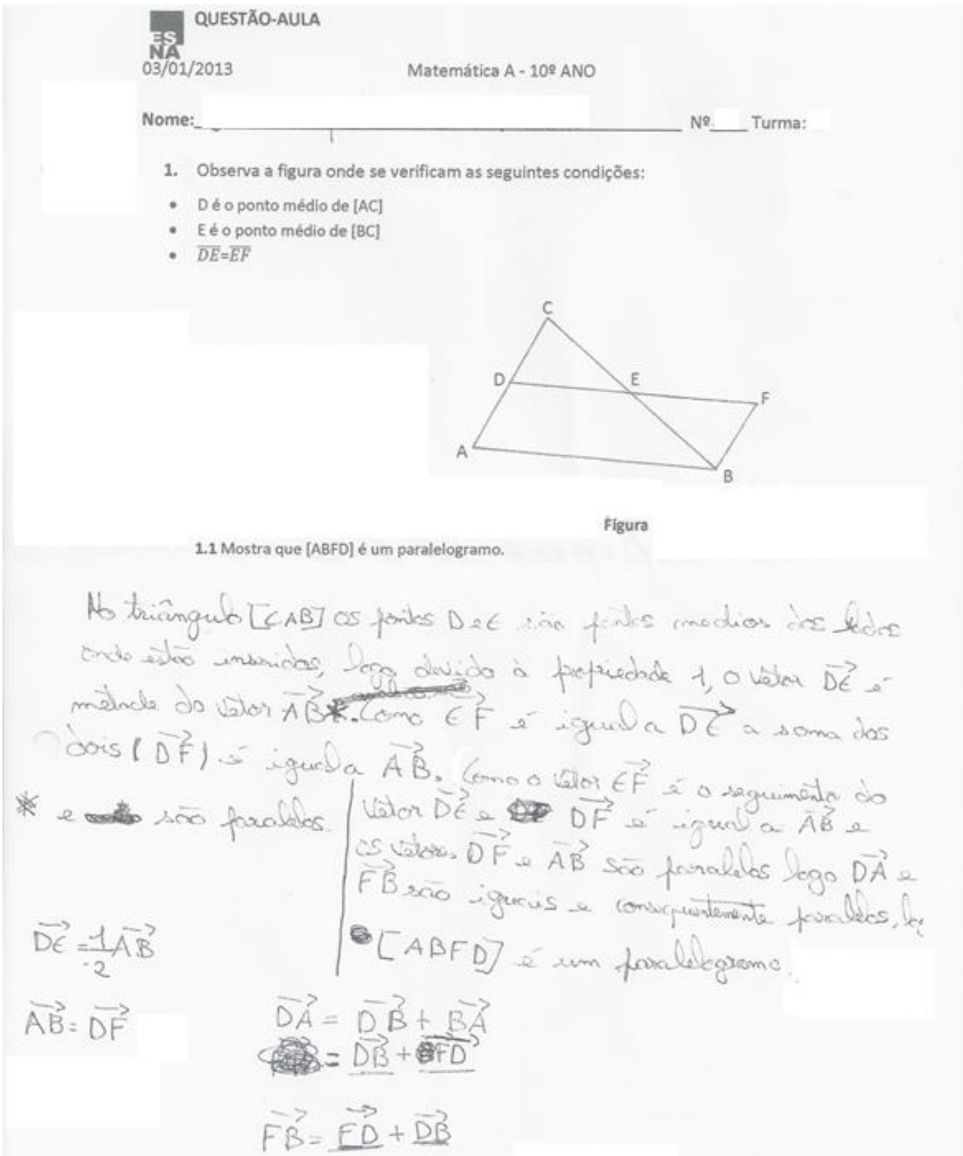
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN} \text{ e } \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}.$$

Análise e reflexão da aula

Esta aula foi uma aula conclusiva do estudo dos vetores no plano.

A demonstração da propriedade 2 foi importante, na medida em que a sua compreensão ajuda o aluno a deduzir propriedades de figuras geométricas (usando triângulos e quadriláteros), evidenciadas no exercício nº17.

Para consolidar estes conhecimentos foi escolhido o problema nº16, que os alunos resolveram individualmente. Pude constatar, pela generalidade das respostas, que os alunos apresentavam dificuldades em justificar processos de demonstração, encadear raciocínios e justificar conjeturas. No entanto, alguns alunos conseguiram desenvolver o raciocínio matemático, exprimir e fundamentar as suas opiniões, o que está evidenciado pela resolução do problema, feita por um aluno.


QUESTÃO-AULA

ESNA

03/01/2013 Matemática A - 10º ANO

Nome:___ Nº___ Turma:

1. Observa a figura onde se verificam as seguintes condições:
   - D é o ponto médio de [AC]
   - E é o ponto médio de [BC]
   - $\overline{DE}=\overline{EF}$

Figura

1.1 Mostra que [ABFD] é um paralelogramo.

No triângulo [CAB] os pontos D e E são pontos medios dos lados onde estão inseridos, logo devido à propriedade 1, o vetor $\vec{DE}$ é metade do vetor $\vec{AB}$*. Como $\vec{EF}$ é igual a $\vec{DE}$ a soma dos dois ($\vec{DF}$) é igual a $\vec{AB}$. Como o vetor $\vec{EF}$ é o seguimento do vetor $\vec{DE}$ e $\vec{DF}$ é igual a $\vec{AB}$ e os vetores $\vec{DF}$ e $\vec{AB}$ são paralelos logo $\vec{DA}$ e $\vec{FB}$ são iguais e consequentemente paralelos, logo [ABFD] é um paralelogramo.

* e [illegible] são paralelos.

$\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{AB} = \vec{DF}$

$\vec{DA} = \vec{DB} + \vec{BA}$

$= \vec{DB} + \vec{FD}$

$\vec{FB} = \vec{FD} + \vec{DB}$

Figura 24: Resolução do problema nº16 por um aluno.

1.3 Reflexão acerca do trabalho realizado na Prática de Ensino Supervisionada

Refletindo globalmente sobre toda a atividade desenvolvida no Estágio Pedagógico, gostaria de focar alguns pontos que considero fundamentais. As atividades letivas mostram-se planificadas e preparadas cuidadosamente de acordo com a especificidade de cada turma. Todas as tarefas aplicadas tiveram em conta o cumprimento da planificação anual. Sempre que necessário, foram realizados ajustamentos às planificações, de acordo com as necessidades e o ritmo de aprendizagem dos alunos. Nas turmas lecionadas mostra-se privilegiado o rigor científico e o cumprimento programático.

Houve a preocupação de incluir em todas as aulas lecionadas as competências transversais inerentes ao programa de Matemática A do 10º ano e da Matemática Aplicada às Ciências Sociais do 10º ano. Faço referência à História da Matemática, quando é referida a evolução histórica da Estatística na turma 10ºG e Tecnologia e Matemática. Em ambas as turmas, recorri à utilização do computador e máquinas de calcular; nesse sentido, foi dada a explicação aos alunos de como utilizar as calculadoras para, por exemplo, representar graficamente diagramas de dispersão e traçar a reta de regressão linear aos alunos da turma 10ºG e construir tabelas de frequências aos alunos da turma 10ºB, entre outras funcionalidades. No entanto, foi fundamental a realização de fichas de trabalho, realização dos trabalhos de casa e a utilização do manual escolar dos alunos e outros manuais. As atividades extra-curriculares em que participei com os alunos contribuíram para uma maior empatia.

A relação pedagógica também está inerente à disponibilidade para atendimento e apoio aos alunos. Esta relação fortalece se os alunos sentirem que as suas dúvidas são esclarecidas, quer pessoalmente, ou então electronicamente (e-mail). Ao longo do ano letivo, sendo solicitada várias vezes, tive o cuidado de não deixar nenhum aluno sem resposta.

Relativamente às principais dificuldades dos alunos da turma 10ºB, para a qual são descritas 6 aulas correspondentes a um período de regência, consistiram em compreender o significado da direção e sentido de um vetor; calcular a norma de um vetor através da representação gráfica de vetores (muitos alunos não aplicavam o Teorema de Pitágoras); calcular a soma de dois vetores através dos processos descritos (regra do triângulo e regra do paralelogramo); identificar representantes de um mesmo vetor; interpretar a nomenclatura de um vetor (a título de exemplo, inicialmente, vários alunos indicavam $\overrightarrow{AB} = A - B$); demonstrar propriedades de figuras geométricas (triângulos e quadriláteros usando o cálculo vetorial) e consequentemente, justificar processos de demonstrações, encadear raciocínios e justificar conjeturas. As primeiras dificuldades foram superadas, pois os alunos já conseguiam uma melhor prestação escrita; porém, a dificuldade na demonstração mantém-se. Espera-se que a adaptação às tarefas por parte dos alunos se reflita na superação. A implementação de tarefas bastante diversificadas, assim como a prestação individual e de grupo dos alunos permitiram melhorar as suas aprendizagens. Ao longo desta fase de aplicação das tarefas, as principais dificuldades consistiram em dosear o grau de ajuda e definir a duração aceitável para a realização das tarefas.

Procedendo a um balanço final, considero que os objectivos inerentes às tarefas foram alcançados, na maioria dos alunos, conforme registo de questões aula e trabalhos realizados em casa.

A tabela 2 analisa, qualitativamente, os trabalhos escritos produzidos pelos alunos.

Tabela 2: Registo qualitativo dos trabalhos escritos desenvolvidos pelos alunos.

Legenda: V – realizou; X – não realizou; v – entregou a resolução no dia seguinte.

T.P.C.1	6.10, 6.11, 6.12	T.P.C._Facultativo	FT	Questão-aula (04/12/2012)
V	V	X	V	Satisfaz
V	X	X	X	Satisfaz razoavelmente
V	X	X	V	Satisfaz
V	V	X	V	Satisfaz
V	X	X	V	Satisfaz
V	X	V	V	Satisfaz
V	X	X	X	Satisfaz
V	V	X	V	Satisfaz
V	V	X	V	Satisfaz
V	V	V	V	Satisfaz
V	V	V	V	Satisfaz
V	V	X	V	Muito boa
V	V	X	X	Satisfaz
V	X	X	V	Satisfaz
X	X	X	V	Muito Insuficiente
V	V	X	V	Satisfaz
V	X	X	X	Satisfaz
X	X	X	X	Satisfaz
V	X	X	X	Muito Insuficiente
V	V	V	V	Satisfaz
X	X	X	V	Satisfaz
V	V	X	X	Muito boa
X	X	X	X	Satisfaz
V	V	X	V	Satisfaz
V	V	X	X	Satisfaz
V	X	X	V	Não satisfaz
V	X	X	X	Excelente
V	X	X	V	Satisfaz

Apesar de não haver aspetos negativos a acrescentar espero que a escola seja um espaço de aprendizagem de partilha e de criação… .

Capítulo II - As médias geométrica, aritmética e harmónica.

Apresenta-se a definição de cada uma das médias geométrica, aritmética e harmónica, assim como exemplos de aplicações destes conceitos em situações da vida real. Posteriormente foi feita a contextualização das médias nos programas curriculares, recorrendo a exemplos retirados dos manuais escolares. Tendo como base um capítulo do livro [1], provamos a desigualdade fundamental entre as três médias e damos uma aplicação desta desigualdade sobre a relação entre a área limitada pelo gráfico de uma função num dado intervalo e o respetivo triângulo tangencial. Por último, discutimos ainda uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz ao problema da localização dos zeros de polinómios.

2.1 Teoria das proporções nas artes visuais

Situando-nos no Renascimento, período da História da Europa que teve início em Itália e que assinalou o final da Idade Média e o início da Idade Moderna, introduziram-se mudanças significativas na cultura, sociedade, economia, política e religião, mas sobretudo nas artes, filosofia e ciências.

A redescoberta e a revalorização das referências culturais da antiguidade clássica conduziram as mudanças deste período em direção a um ideal humanista e naturalista. Na altura colocavam-se questões filosóficas como, **"Podem, por si só as relações puramente formais do design da construção de edifícios dar prazer?"**. Havia, por outro lado, quem discordasse…. Porém, se as formas do mundo exterior eram facilmente captadas pela observação, a proporção na arquitetura, a qual era baseada no uso dessas formas, gerava dificuldade. A Matemática inerente a estes fenómenos estava ainda por explorar! Contudo, indivíduos possuidores de grandes conhecimentos científicos, nomeadamente, gregos, não deixaram vestígios de como descreviam o sistema de proporções usados na sua arquitetura. Outrora, (século I a.C.) Vitrúvio, arquiteto e engenheiro romano, destacou-se com padrões de proporções e princípios conceptuais: "*utilitas*" (utilidade), "*venustas*" (beleza) e "*firmitas*" (solidez), que serviram de inspiração para a arquitetura clássica, a partir do Renascimento. Por outro lado, o matemático italiano Cardano, no século XVI, atribuiu a Vitruvius a teoria da proporção baseada na música. Também durante o Renascimento, o arquiteto e humanista italiano, Alberti, escreveu nos *Dez livros de Arquitetura*: "… e eu estou absolutamente convicto, dia após dia, da veracidade de Pitágoras, quando diz que a Natureza atua de forma consistente e com uma constante analogia em todas as operações: donde eu concluo que os mesmos números através dos quais a concordância dos sons que atingem os nossos ouvidos com encanto, são os mesmos que satisfazem os nossos olhos e a mente." Com efeito, Alberti usou a proporção fundamentada pela música para relacionar as três dimensões, altura, comprimento e largura. Um século depois, Palladio, notável arquiteto italiano, continuador de Vitruvius e Alberti, contrariamente a Vitruvius, apoia-se nas medidas que as construções clássicas da altura envolviam, evitando, por outro lado, a componente musical e outras ideias de Alberti, à exceção do uso da média aritmética, geométrica e harmónica, quando surgiu a necessidade de determinar a altura de quartos com abóbadas [13].

2.2 Média geométrica

Definição 2.2.1 A média geométrica de um conjunto de n números reais positivos, x_1, x_2, …, x_n, é a raiz de índice n do produto desses valores: $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, n ∈ IN.

Exemplo 2.2.2 A média geométrica dos números 9 e 4 é a raiz quadrada do produto desses números, $\sqrt{36}$ = 6.

Caracterização geométrica. Considere-se um retângulo cujos lados têm medidas de comprimento A e B. O quadrado que tem área igual à do retângulo dado é aquele cujo lado mede x = $\sqrt{AB}$. Dados dois segmentos de comprimentos A e B, para construir com régua não graduada e compasso um segmento de comprimento x = $\sqrt{AB}$ podemos proceder do seguinte modo. Começamos por construir um segmento de comprimento A+B. De seguida traçamos um semicírculo com diâmetro igual a A+B e raio R = (A+B)/2, de acordo com a figura.

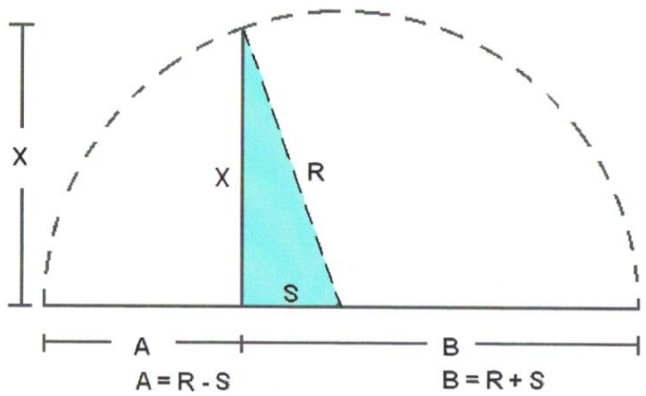


Figura 25: Construção de um quadrado e retângulo de igual área.

Recorrendo ao teorema de Pitágoras, vemos que

$$X^2 = R^2 - S^2 \Leftrightarrow X^2 = (R - S)\,(R + S) \Leftrightarrow X^2 = A.B \Leftrightarrow X = \sqrt{AB}.$$

Tendo em conta que o ângulo num ponto que subtende o diâmetro é recto, concluímos ainda que a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo recto é igual à altura relativa à hipotenusa.

Mais geralmente, dado um paralelepípedo retângulo cujas arestas medem **c**, **d** e **e**, o cubo que tem volume igual à do paralelepípedo é aquele cuja aresta mede y = $\sqrt[3]{c.d.e}$.

Aplicações da média geométrica

1 - Estrutura do corpo humano

Albrecht Dürer, além de matemático, geómetra, gravador e teórico de arte alemão, foi o mais famoso artista do Renascimento nórdico (século XVI), tornando-se um grande pintor, chegando a afirmar: "A nova arte deverá basear-se na Ciência, em particular na Matemática, como a mais exata, lógica e impressionante construtiva das Ciências"; escreveu quatro livros sobre as proporções no corpo humano - relacionava a média geométrica com as proporções no corpo humano estabelecendo a igualdade:

(distância do pescoço à anca) (distância do joelho ao tornozelo) = (distância da anca ao joelho)^2.

Exemplo 2.2.3 Se um investimento durante dois meses rende 2% no primeiro mês e 3% no segundo mês, qual é o rendimento médio mensal desse investimento?

O rendimento médio pode ser calculado utilizando a média geométrica dos fatores de crescimento, neste caso:

$$\sqrt{1{,}02 \times 1{,}03} \approx \sqrt{1{,}051} \approx 1{,}025.$$

Dessa forma, a taxa mensal de rendimento médio é de aproximadamente:

$$1{,}025 - 1 = 0{,}025 \text{ ao mês (ou equivalentemente, 2,5\% ao mês).}$$

Notas:

- No cálculo do valor de uma quantia aumentada de 2% pode-se multiplicar a quantia por 1,02.
- Analogamente, no cálculo do valor de uma quantia aumentada de 3% pode-se multiplicar a quantia por 1,03.
- Para saber o quanto a quantia aumentou, basta subtrair o valor da quantia, isto é, basta subtrair 1 do fator de correção. O resultado corresponde ao acréscimo.

Exemplo 2.2.4 Se um investimento rende 5% no primeiro mês, 3% no segundo mês e 7% no terceiro mês, qual é o rendimento médio mensal desse investimento?

Da mesma maneira que no exemplo anterior, o rendimento médio será dado pela média geométrica dos fatores de crescimento, ou seja, 1,05, 1,03 e 1,07. Logo, o rendimento médio será: $\sqrt[3]{1{,}05 \times 1{,}03 \times 1{,}07} - 1 = \sqrt{1{,}157} - 1 = 1{,}049 - 1 = 0{,}049$ ao mês, o que significa que o rendimento do investimento equivale a 4,9% ao mês.

Explicação para estes factos:

Sejam Q o dinheiro que foi depositado no banco, r_1 e r_2, as taxas de rendimento ao fim do primeiro e segundo mês, respectivamente. No fim do primeiro mês tem-se $Q + r_1Q$. No fim do segundo mês, ter-se-á

$$Q + r_1Q + r_2(Q + r_1Q) = Q + r_1Q + r_2Q + r_2\, r_1Q = Q(1 + r_1 + r_2 + r_2\, r_1) = Q(1 + r_1)\,(1 + r_2).$$

Seja r uma taxa fixa. No fim do primeiro mês tem-se $Q + rQ$; no fim do segundo mês, ter-se-á:

$$Q + rQ + r(Q + rQ) = Q + rQ + rQ + r^2Q = Q(1 + 2r + r^2) = Q(1+r)^2.$$

Então, se

$$Q(1+r)^2 = Q(1 + r_1)\,(1 + r_2),$$

obtém-se

$$1+r = \sqrt{(1 + r_1)(1 + r_2)},$$

donde,

$$r = \sqrt{(1 + r_1)(1 + r_2)} - 1,$$

é a taxa de rendimento média do investimento dos dois meses; analogamente

$$r = \sqrt{(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)} - 1$$

é a taxa de rendimento média do investimentos de três meses.

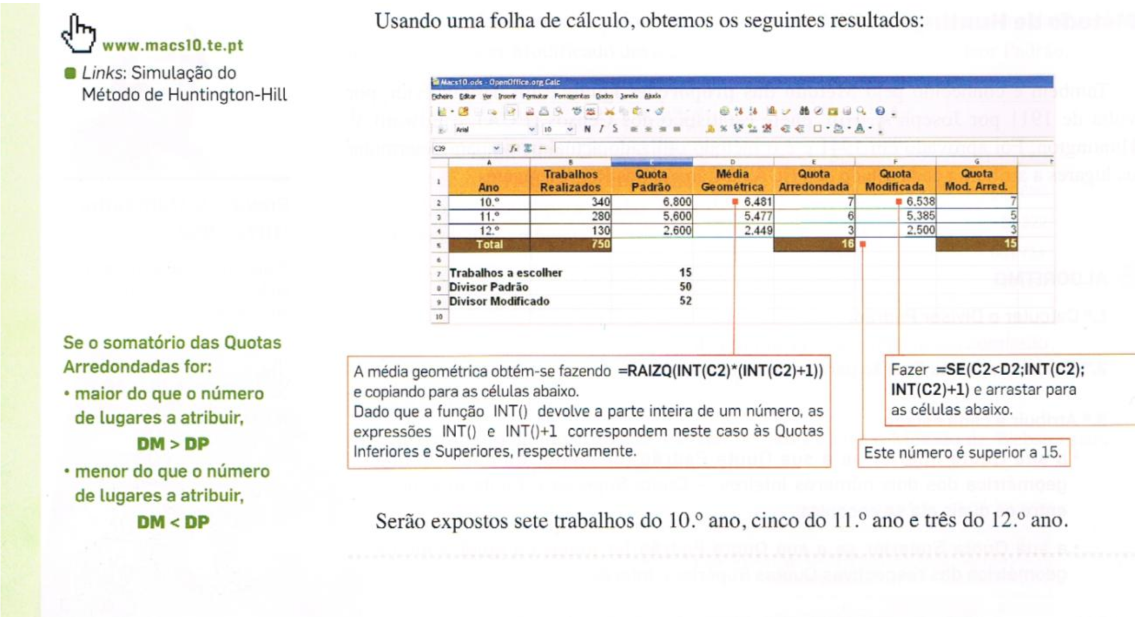
Exemplo 2.2.5 O seguinte exemplo foi retirado do manual adotado pela escola [8].
Uma escola de Artes vai expor e vender 15 trabalhos elaborados pelos seus alunos dos 10.º, 11.º e 12.º anos. O número de trabalhos a serem expostos, de cada ano, será calculado com base no número total de trabalhos elaborados em cada ano:

Tabela 3: Dados para a exposição dos 15 trabalhos realizados pelos alunos.

Ano	Trabalhos realizados
10.º	340
11.º	280
12.º	130

Aplicando o Método de Huntington-Hill, quantos trabalhos de cada ano serão expostos?

Resolução:



www.macs10.te.pt

Links: Simulação do Método de Huntington-Hill

Usando uma folha de cálculo, obtemos os seguintes resultados:

Macs10.ods - OpenOffice.org Calc

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ano	Trabalhos Realizados	Quota Padrão	Média Geométrica	Quota Arredondada	Quota Modificada	Quota Mod. Arred.
2	10.º	340	6,800	6,481	7	6,538	7
3	11.º	280	5,600	5,477	6	5,385	5
4	12.º	130	2,600	2,449	3	2,500	3
5	Total	750			16		15
6							
7	Trabalhos a escolher		15				
8	Divisor Padrão		50				
9	Divisor Modificado		52				
10							

A média geométrica obtém-se fazendo **=RAIZQ(INT(C2)*(INT(C2)+1))** e copiando para as células abaixo.
Dado que a função INT() devolve a parte inteira de um número, as expressões INT() e INT()+1 correspondem neste caso às Quotas Inferiores e Superiores, respectivamente.

Fazer **=SE(C2<D2;INT(C2);INT(C2)+1)** e arrastar para as células abaixo.

Este número é superior a 15.

Se o somatório das Quotas Arredondadas for:
- maior do que o número de lugares a atribuir, **DM > DP**
- menor do que o número de lugares a atribuir, **DM < DP**

Serão expostos sete trabalhos do 10.º ano, cinco do 11.º ano e três do 12.º ano.

Figura 26: Aplicação da média geométrica, recorrendo ao Método de Huntington-Hill.

2.3 Média aritmética

Definição 2.3.1 A média aritmética de um conjunto de n números reais, x_1, x_2,…, x_n é o quociente da soma desses números por n (denota-se por $\bar{x}$):

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exemplo 2.3.2 A média aritmética dos números 10, 41 e 55 é:

$$\bar{x} = \frac{10+41+55}{3} = \frac{106}{3} = 35,(3).$$

Aplicações da média aritmética

1- **Estatística**

A média aritmética é uma das principais medidas de tendência central ou de localização (parâmetros estatísticos que nos indicam os valores mais representativos de um conjunto de dados).

A média aritmética de um conjunto de dados obtém-se dividindo a soma dos dados observados pelo número total dos mesmos.

- Se os dados surgem numa tabela com as suas frequências absolutas f_i, multiplica-se cada dado x_i pela sua frequência e somam-se os resultados obtidos. Este resultado divide-se pelo número total de dados N.

$$\overline{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots + x_n f_n}{N} = \frac{\sum_i^n x_i f_i}{N}$$

- Se os dados surgem agrupados em intervalos com as suas frequências absolutas f_i, multiplica-se a marca da classe do intervalo pela sua frequência, somam-se os resultados obtidos e divide-se este total pelo número de dados.

Exemplo 2.3.3 O seguinte exemplo é retirado do manual [2].

A altura de 24 alunos do 3º ciclo medida em cm é:

160, 168, 164, 170, 162, 166, 172, 168, 164, 162, 160, 168, 170, 160, 162, 164, 160, 170, 160, 164, 168, 162, 160, 160.

Qual é a altura média do grupo?

Tabela 4: Dados relativos às alturas dos 24 alunos.

Dados x_i	Frequência absoluta (f_i)	$x_i.f_i$
160	7	1120
162	4	648
164	4	656
166	1	166
168	4	672
170	3	510
172	1	172

$$\bar{x} = \frac{1120+648+656+166+672+510+172}{24} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{3944}{24} \Leftrightarrow \ \bar{x} \approx 164{,}33\ (cm).$$

Exemplo 2.3.4 O seguinte exemplo é retirado do manual [2].

Os dados referentes ao número de livros lidos por ano, num conjunto de estudantes de 9º ano, refletem-se na seguinte tabela.

Tabela 5: Dados relativos ao número de livros lidos por ano.

x_i	f_i	$f_i\ x_i$
0	2	0
1	3	3
2	5	10
3	8	24
4	8	32
5	3	15
6	2	12
7	1	7

Vamos calcular a média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots+x_nf_n}{N} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{103}{32} \approx 3{,}22$$

significa que os estudantes lêem em média, 3 livros.

Exemplo 2.3.5 O seguinte exemplo é retirado do manual [8].

No Externato «Os Traquinas» verificou-se o tempo (em minutos) de sono na sesta da tarde, das crianças da classe dos três anos. Obtiveram-se os seguintes resultados:

60	90	85	73	82	91	63	75
65	72	83	89	70	62	78	95
64	76	102	86	92	94	100	61

Considerando os dados agrupados em classes (tabela que se segue) vamos calcular a média aritmética:

Tabela 6: Dados agrupados em classes, relativos ao tempo de sono (em minutos).

Classes	[60;68,5[	[68,5;77[	[77; 85,5[	[85,5;94[	[94;102,5[
Marca da classe (m_i)	64,25	72,75	81,25	89,75	98,25
f_i	6	5	4	5	4

A média aritmética é dada por:

$$\bar{x} \cong \frac{\sum_i^5 m_i f_i}{n} = \frac{6 \times 64{,}25 + 5 \times 72{,}75 + 4 \times 81{,}25 + 5 \times 89{,}75 + 4 \times 98{,}25}{24}$$

e portanto, $\bar{x} = \frac{1916}{24} \approx 79{,}8(3)$.

Atendendo à situação, significa que o tempo médio (em minutos) de sono é de aproximadamente 79,8 minutos.

Exemplo 2.3.6 Considere-se o seguinte exemplo, e respetiva resolução, que se refere ao cálculo da média aritmética, no 6º ano de escolaridade, retirado de um livro escolar [10]:

O grupo de trabalho da Joana é formado por quatro alunos do 6º D.

No dia em que estudavam a média do número de lápis que cada um tinha em cima da mesa. Calcula a média do conjunto de dados.

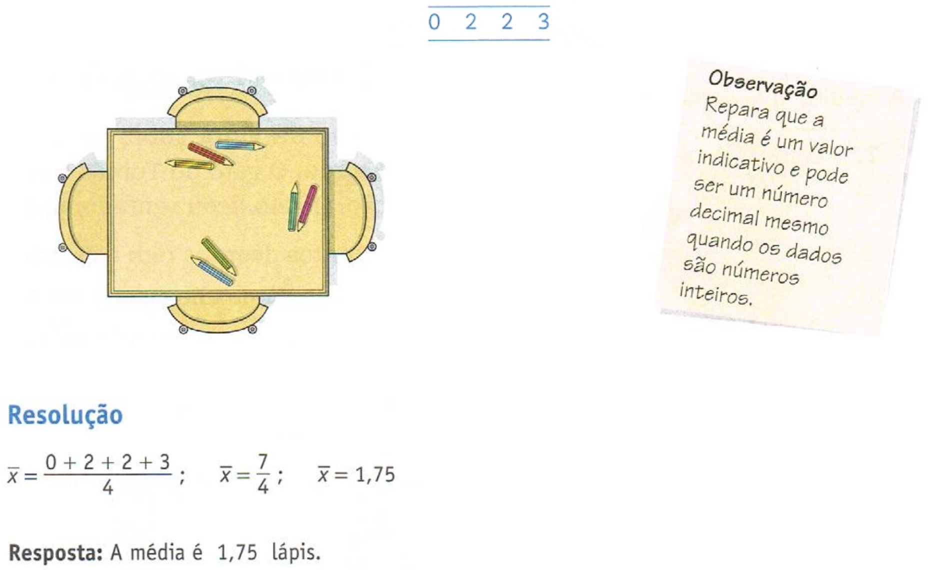


Figura 27: Proposta de resolução da média do número de lápis que cada aluno tem em cima da mesa.

2.4 Média harmónica

Definição 2.4.1 A média harmónica de um conjunto de n números reais positivos, x_1, x_2, …,x_n, é o quociente entre o número n desses valores e a soma dos inversos dos x_i´s,

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}:$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}, \ n \in \mathbb{N} \ (i \in \{1,2,\ldots,n\}).$$

Exemplo 2.4.2 Pretende-se calcular a velocidade v, no trajeto ida e volta da cidade A para a cidade B, sabendo que da cidade A para a cidade B foi percorrido o espaço $\overline{AB}$ com uma velocidade média constante v_1 e da cidade B para a cidade A foi percorrido o espaço $\overline{BA}$ com uma velocidade média constante v_2, conforme ilustra a figura:

Figura 28: Dados para determinar a velocidade média no trajeto ida e volta.

Da definição, tem-se $v_1 = \frac{\overline{AB}}{t_1}$ e $v_2 = \frac{\overline{BA}}{t_2}$ (t_1 é o tempo gasto no espaço percorrido $\overline{AB}$ e t_2 é o tempo gasto no espaço percorrido $\overline{BA}$), donde $t_1 = \frac{\overline{AB}}{v_1}$ e $t_2 = \frac{\overline{BA}}{v_2}$.

Por outro lado, $v = \frac{2\overline{AB}}{t}$, sendo $t = t_1 + t_2$.

Deste modo,

$$v = \frac{2\overline{AB}}{t} \Leftrightarrow v = \frac{2\overline{AB}}{t_1+t_2} \Leftrightarrow v = \frac{2\overline{AB}}{\frac{\overline{AB}}{v_1}+\frac{\overline{BA}}{v_2}} \Leftrightarrow v = \frac{2\overline{AB}}{\overline{AB}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)} \Leftrightarrow v = \frac{2}{\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)}.$$

Daqui se conclui que a velocidade média no trajeto ida e volta da cidade A para a cidade B é a média harmónica das velocidades v_1 e v_2 anteriormente definidas.

Exemplo 2.4.3 Consideremos a seguinte situação:

Uma torneira T_1 enche um tanque de volume V em t_1 horas e a torneira T_2 enche o mesmo tanque em t_2 horas. Em quanto tempo as duas torneiras enchem o tanque?

Vejamos a solução algebricamente:

Seja Q_1 o caudal da torneira T_1, ou seja, $Q_1 = \frac{V}{t_1}$. Analogamente para a torneira T_2, $Q_2 = \frac{V}{t_2}$. Abrindo ao mesmo tempo as duas torneiras, segue-se que Q, o caudal das duas torneiras, é dado por $Q = Q_1 + Q_2$, ou seja, $\frac{V}{t} = \frac{V}{t_1} + \frac{V}{t_2}$; daqui resulta $t = \frac{1}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}}$, ou seja, o tempo que as duas torneiras enchem o tanque é metade da média harmónica dos tempos t_1 e t_2 anteriormente definidos. Em particular, para t_1 = 12h e t_2 = 6h, temos $t = \frac{1}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}$ = 4h. Este problema pode ser resolvido geometricamente:

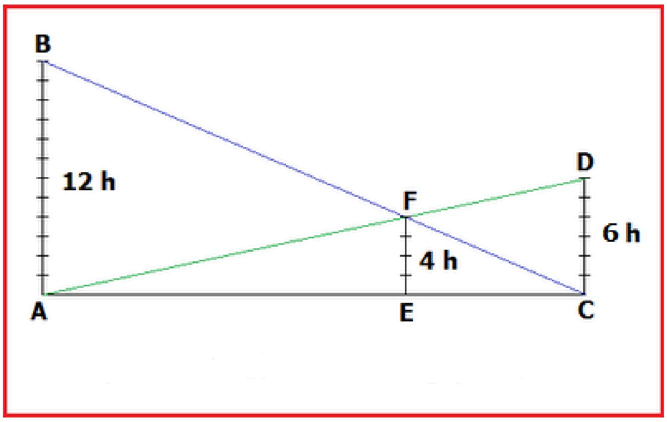


Figura 29: Representação gráfica para calcular o tempo que as duas torneiras enchem o tanque.

Analiticamente, esta situação é interpretada da seguinte forma:

Sendo b=|AB| e a=|CD|, considerem-se as retas representadas pelas cores azul e verde, dadas pelas respetivas equações; o eixo dos YY é orientado pelo vetor $\overrightarrow{AB}$ e o eixo dos XX é orientado pelo vetor $\overrightarrow{AC}$:

$$y = -ax + a \text{ e } y = bx.$$

Procure-se o ponto de interseção das retas:

$$y = -ax + a \wedge y = bx \Leftrightarrow -ax + a = bx \Leftrightarrow bx + ax = a \Leftrightarrow x(b+a) = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{b+a}.$$

Substituindo o valor de x em y, obtém-se:

$$y = \frac{ab}{b+a} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Isto significa que |FE| é metade da média harmónica entre os comprimentos |AB| e |CD|.

Médias paradoxais…

Há, por vezes, a tendência para calcular médias sem pensar se o está a fazer corretamente. De seguida, é dado um exemplo de um mau uso da média, que pode levar a situações paradoxais.

Imaginemos que temos cinco quadrados de lados 1,2,3,4 e 5 cm. Se calcularmos a média dos seus lados, chegamos à conclusão de que o lado do quadrado médio é 3 cm (=(1+2+3+4+5)/5). Consideremos agora as áreas desses quadrados. Se calcularmos a sua média, ou seja, a área do quadrado médio, o resultado é 11 cm^2 = (1+4+9+16+25)/5. Ou seja, o quadrado médio tem um lado de 3 cm e uma área de 11 cm^2.

Nota: Ao realizar médias de valores, deve-se começar por raciocinar antes de as calcular.

2.5 Contextualização nos atuais programas curriculares

No programa de Matemática do 2º Ciclo e 3ºCiclo a média aritmética insere-se no tema ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS; por sua vez, é um dos tópicos, cujo objetivo específico é: compreender e determinar a média aritmética de um conjunto de dados e indicar a sua adequação da sua utilização num dado contexto.

É referido também que a média aritmética só pode ser calculada para dados quantitativos.

Relativamente ao programa de Matemática no ensino secundário (Matemática A e Matemática B) a média aritmética insere-se no tema Estatística. Nas Indicações metodológicas pode ler-se o seguinte: " A título de exemplo referimos o facto de não ter qualquer sentido calcular a média para dados de tipo qualitativo, mesmo que as diferentes categorias assumidas pela variável em estudo estejam representadas por números", tal como se verificava no 2º Ciclo e 3ºCiclo.

Ainda no mesmo tema (Estatística) a média aritmética surge como sendo uma medida de localização de uma amostra; por outro lado, nas distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva) a média aritmética é intrínseca ao cálculo da determinação do centro de gravidade de um conjunto finito de pontos.

Relativamente ao 11º ano, as médias aritmética, geométrica e harmónica estão enquadradas no tema Sucessões Reais: estas médias definem-se a partir das progressões aritméticas e geométricas.

Definição 2.5.1 Um conjunto de números reais, $x_1,x_2, x_3, \ldots$, diz-se que é uma progressão aritmética se verifica a seguinte propriedade: a diferença entre qualquer número e o seu sucessor é constante, isto é, $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \ldots$.

Consequentemente $x_1 + x_3 = 2\, x_2$, $x_2 + x_4 = 2\, x_3$, …e assim sucessivamente, cada número no conjunto é a média aritmética do seu sucessor e do seu antecessor. Assim, um termo de uma progressão aritmética é sempre a média aritmética do termo que o antecede e do termo que o sucede. Mais geralmente, para $n \in \mathbb{N}$, a média aritmética de um conjunto de n números reais, $x_1, x_2,\ldots, x_n$, é o quociente da soma desses números por n (denota-se por $\bar{x}$):

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Definição 2.5.2 Um conjunto de números reais, $y_1,y_2, y_3, \ldots$, diz-se que é uma progressão geométrica se verifica a seguinte propriedade: a razão entre qualquer número e o seu antecessor é constante, isto é, $y_2 / y_1 = y_3 / y_2 = y_4 / y_3 = \ldots$.

Consequentemente, $y_1.y_3 = y_2^2$, $y_2.y_4 = y_3^2$, …e assim sucessivamente. Assim, um termo de uma progressão geométrica é sempre a média geométrica do termo que o antecede e do termo que o sucede. Mais geralmente, para $n \in IN$, a média geométrica de um conjunto de n números reais, $y_1, y_2,\ldots, y_n$ é a raiz de índice n do produto desses valores: $\sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n}$, $n \in IN$.

Definição 2.5.3 O conjunto de números reais positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ diz-se que é uma progressão harmónica se o conjunto dos seus inversos, $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, for uma progressão aritmética.

Deste modo, um termo de uma progressão harmónica é sempre a média harmónica do termo que o antecede e do termo que o sucede. Mais geralmente, para $n \in IN$, a média harmónica de um conjunto de n números reais positivos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, é o quociente entre o número n desses valores e a soma dos inversos dos a_i´s:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \ n \in IN \ (i \in \{1,2,\ldots,n\}).$$

No 12.º ano de escolaridade, a média aritmética está enquadrada no tema Distribuições de Probabilidade, sendo neste contexto, uma estatística que se calcula a partir de uma amostra.

2.6 Desigualdade entre as médias

Teorema 2.6.1 Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos. Então:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

Dá-se a igualdade em ambos os lados, se e só se todos os x_i`s forem iguais, para cada $i \in \mathbb{N}$.

<u>**Demonstração**</u>:

A demonstração, feita por indução, é atribuída a Cauchy. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos. Seja P(n) uma expressão verdadeira para certo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n): x_1 x_2 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

Para n=2, P(n) é verdadeira:

$$x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x_1 x_2 \leq \frac{{x_1}^2+{x_2}^2+2x_1x_2}{4} \Leftrightarrow 4x_1x_2 \leq {x_1}^2+{x_2}^2+2x_1x_2 \Leftrightarrow$$
$$0 \leq {x_1}^2+{x_2}^2-2x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 \geq 0.$$

Provem-se as seguintes condições, que provam o resultado:

(1) P(n) => P(n-1);

(2) P(n) $\wedge$ P(2) => P(2n).

Para provar (1), seja:

$$A := \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n-1}.$$

Então:

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} x_k\right) A \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_k + A}{n}\right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n.$$

Consequentemente,

$$\prod_{k=1}^{n-1} x_k \leq A^{n-1} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_k}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Para provar (2):

Tem-se $\prod_{k=1}^{2n} x_k = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right).\left(\prod_{k=n+1}^{2n} x_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right)^n.\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x_k}{n}\right)^n =$

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x_k}{n}\right)\right)^n \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{x_k}{n}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} x_k}{2n}\right)^{2n}.$$

Para provar a desigualdade

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

considerem-se $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$.

Então, pela desigualdade anteriormente provada, resulta:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

A igualdade em ambos os lados verifica-se facilmente.□

A desigualdade entre as médias pode ainda ser vista como uma consequência do seguinte resultado.

Teorema 2.6.2 Dados números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$, com $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, temos

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \leq p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

<u>**Demonstração**</u>: Denote-se a expressão $x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}$ por G e a expressão $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$ por A.

Suponhamos que $x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Tem-se $x_1 \leq G \leq x_n$ e por isso existe k ∈ ℕ, tal que:

$$x_k \leq G \leq x_{k+1}.$$

Segue-se que:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \int_{x_i}^{G} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G}\right) dt + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{x_i} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t}\right) dt \geq 0.$$

Reescrevendo esta desigualdade obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{x_i} \frac{1}{G} dt \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{x_i} \frac{1}{t} dt. \ (1)$$

Tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{x_i} \frac{1}{G} dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{x_i - G}{G} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{G} - \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{A}{G} - 1$$

Por outro lado, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{x_i} \frac{1}{t} dt = \sum_{i=1}^{n} p_i (\log x_i - \log G) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \log G =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log x_i^{p_i} - \log G \sum_{i=1}^{n} p_i = \log \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} - \log G = \log G - \log G = 0.$$

Reescrevendo (1) obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{x_i} \frac{1}{G} dt \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{G}^{x_i} \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow \frac{A}{G} - 1 \ \geq 0 \Leftrightarrow A \ \geq \ G.$$

Sendo,

$$\sum\nolimits_{i=1}^{k} p_i \int_{x_i}^{G} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G}\right) dt + \sum\nolimits_{i=k+1}^{n} p_i \int_{G}^{x_i} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t}\right) dt = 0$$

então os integrais são todos nulos e consequentemente $x_1 = x_2 = \cdots = G$, como se pretende mostrar. □

De facto, ao considerar $p_i = \frac{1}{n}$ na desigualdade;

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \leq p_1 x_1 + p_2 x_{2+\cdots+} p_n x_n$$

obtém-se a desigualdade entre a média geométrica e a média aritmética.

Vejamos agora uma aplicação da desigualdade das médias. Como ponto de partida, o conhecimento das propriedades elementares da parábola de equação f(x) = 1 - x^2 vai permitir compreender o teorema relativo à integração de funções polinomiais que posteriormente se irá enunciar. Considere-se a parábola de equação f(x) = 1 - x^2, no intervalo [-1,1]. Associa-se a f(x) o triângulo tangente e o retângulo tangente, como mostra a figura 30:

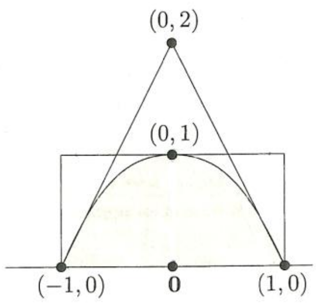


Figura 30: Triângulo tangente e retângulo tangente a f(x) no intervalo [-1,1].

A área limitada pela parábola no intervalo [-1,1] vem dada por

$$A = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

As áreas T e R do triângulo e retângulo, respetivamente, são ambas iguais a 2. Consequentemente,

$$\frac{R}{A} = \frac{T}{A} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Paul Erdös e Tibor Gallai, matemáticos húngaros, indagaram-se sobre o que aconteceria quando f(x) é um polinómio real de grau n, com f(x)>0, para x ∈ (-1,1) e f(-1) = f(1) = 0. Considere-se a área $A = \int_{-1}^{1} f(x)dx$. Supondo que f(x) assume em (-1,1) o seu valor máximo em **b**, então R=2f(b).

O triângulo tangente
A área T do triângulo é precisamente y_0, onde (x_0,y_0) é o ponto de interseção das tangentes. A equação destas tangentes é $y = f'(-1)(x+1)$ e $y = f'(1)(x-1)$, $$x_0 = \frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}$$ e portanto $y_0 = f'(1)\left(\frac{f'(1)+f'(-1)}{f'(1)-f'(-1)} - 1\right) = f'(1)\left(\frac{f'(1)+f'(-1)}{f'(1)-f'(-1)} - \frac{f'(1)-f'(-1)}{f'(1)-f'(-1)}\right) = \frac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1)-f'(-1)}.$

Em geral, $\frac{R}{A}$ e $\frac{T}{A}$ não são majorados ou minorados. Considere-se a seguinte função f(x), para x ∈ (-1,1):

$$f(x) = 1 - x^{2n};$$

então

$$T = 2n,\ A = \int_{-1}^{1}(1 - x^{2n})dx = \left[x - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right) = 2 - \frac{2}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1}.$$

Tem-se,

$$\frac{T}{A} = \frac{2n}{\frac{4n}{2n+1}} = \frac{2n(2n+1)}{4n} = \frac{4n^2+2n}{4n} > n.$$

(T é a área do triângulo tangente a f em (-1,1))

Por outro lado, R=2 (R é a área do retângulo tangente a f em (-1,1)).

Analogamente,

$$\frac{R}{A} = \frac{2}{\frac{4n}{2n+1}} = \frac{2(2n+1)}{4n} = \frac{4n+2}{4n} \to 1\ (n \to \infty).$$

Entretanto, Erdös e Gallai mostraram que, para polinómios f(x) que apenas têm raízes reais, $\frac{T}{A}$ e $\frac{R}{A}$ são majoradas ou minoradas, sendo f(x)>0, x ∈ (-1,1) e verificando-se a igualdade f(-1) = f(1) = 0; em 1940, o matemático húngaro, George Pólya, explicou como a primeira desigualdade do teorema que se segue pode ser provada pela desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica.

Teorema 2.6.3 Seja f(x) um polinómio de variável real de grau ≥2 com apenas raízes reais, tal que f(x)>0 para $x \in (-1,1)$ e f(-1) = f(1) = 0. Então:

$$\frac{2}{3}T \leq A \leq \frac{2}{3}R.$$

Dá-se a igualdade em ambos os casos apenas para n=2.

<u>**Demonstração**</u> $\left(\frac{2}{3}T \leq A\right)$:

Dado que f(x) tem apenas raízes reais e nenhuma delas está no intervalo (-1,1), f(x) pode ser escrito na forma:

$$f(x)=(1-x^2)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x) \text{ com } \alpha_i \geq 1,\ \beta_j \geq 1.$$

Consequentemente

$$A = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x)\,dx.$$

Fazendo uma mudança de variável $x \to -x$, a igualdade anterior pode ser reescrita na forma:

$$A = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\prod_i(\alpha_i + x)\prod_j(\beta_j - x)\,dx.$$

Por aplicação da desigualdade da média aritmética e a média geométrica resulta:

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left[(1-x^2)\prod_i(\alpha_i - x)\prod_j(\beta_j + x) + (1-x^2)\prod_i(\alpha_i + x)\prod_j(\beta_j - x)\right]dx$$

$$\geq \int_{-1}^{1}(1-x^2)\sqrt{\prod_i(\alpha_i^2 - x^2)\prod_j(\beta_j^2 - x^2)}\,dx$$

$$\geq \int_{-1}^{1}(1-x^2)\sqrt{\prod_i(\alpha_i^2 - 1)\prod_j(\beta_j^2 - 1)}\,dx \geq \frac{4}{3}\sqrt{\prod_i(\alpha_i^2 - 1)\prod_j(\beta_j^2 - 1)}.$$

Ao calcular $f'(1)$ e $f'(-1)$(supondo que $f'(1)$, $f'(-1) \neq 0$, senão T=0 e a desigualdade $\frac{2}{3}T \leq A$ seria trivial) obtém-se:

$$f'(1) = -2\prod_i(\alpha_i - 1)\prod_j(\beta_j + 1) \text{ e } f'(-1) = 2\prod_i(\alpha_i + 1)\prod_j(\beta_j - 1).$$

Da desigualdade anterior, resulta

$$A \geq \frac{2}{3}\sqrt{-f'(1)f'(-1)}.$$

Aplicando a desigualdade entre a média harmónica e a média geométrica a $-f'(1)$ e a $f'(-1)$, obtém-se:

$$A \geq \frac{2}{3}\frac{2}{\frac{1}{-f'(1)}+\frac{1}{f'(-1)}} = \frac{4}{3}\frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1)-f'(-1)} = \frac{2}{3}T, \text{ como se pretende mostrar.}\square$$

Exemplo 2.6.3.1 Um exemplo de função não polinomial que verifica a desigualdade do teorema é a função $g(x)=(1-x^2)\cos x$, cujo domínio é o intervalo [-1,1]. De facto:

- g(x)>0 para $x \in (-1,1)$ e g(-1)=g(1)=0; $g'(x) = -2x\cos x-(1-x^2)\sin x$.

- $g'(1) \approx -1{,}08$ e $g'(-1) \approx 1{,}08$;
- $T = \frac{2\times(-1{,}08)1{,}08}{2\times(-1{,}08)} = 1{,}08 \Leftrightarrow \frac{2}{3}T = 0{,}72$;
- $A = \int_{-1}^{1} (1\text{-}x^2)\cos x\,dx = \left[3\sin x - (x^2\sin x + 2x\cos x)\right]_{-1}^{1} \approx 0{,}602337 + 0{,}602337 \approx 1{,}205$.
- R= 2 (=2×1), em que 1 é o máximo da função h no intervalo (-1,1).

Logo, $\frac{2}{3}T \leq A \leq \frac{2}{3}R$, pois, 0,72<1,205<1,3.

Exemplo 2.6.3.2 Outro exemplo de função não polinomial que verifica a desigualdade do teorema é a função $h(x)=(1\text{-}x^2)e^x$, cujo domínio é o intervalo [-1,1]. Tem-se:

- $h(x)>0$ para $x \in (-1,1)$ e $h(-1)=h(1)=0$; $h'(x) = -2xe^x+(1\text{-}x^2)e^x = e^x(1\text{-}x^2 - 2x)$.
- $h'(1) = -2e$ e $h'(-1) = 2e^{-1}$;
- $T = \frac{4e^{-1}}{e\text{-}e^{-1}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}T = \frac{8}{3}\frac{e^{-1}}{e\text{-}e^{-1}} = \frac{8}{3}\frac{1}{e^2-1} \approx 0{,}4173 \Leftrightarrow \frac{2}{3}T \approx 0{,}4173$.
- $\int_{-1}^{1} (1\text{-}x^2)e^x dx = \left[-e^x(x\text{-}1)^2\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{e} \approx 1{,}47151$.
- $R \approx 2\times1{,}254 \approx 2{,}508$ em que 1,254 é o máximo da função h no intervalo (-1,1).

Logo, $\frac{2}{3}T \leq A \leq \frac{2}{3}R$, pois 0,4173<1,47151<1,672.

2.7 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Outra desigualdade que desempenha um papel determinante em qualquer nível da Análise Matemática é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.7.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$ um produto interno num espaço vetorial real V (munido da norma $|\vec{a}|^2 := \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle$). Então, $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle^2 \leq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$; a igualdade dá-se se e só se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente dependentes.

<u>Demonstração</u>:

Sejam V um espaço vetorial real e $\vec{a}$ e $\vec{b} \in V$.

Considere-se a função quadrática $\left|x\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = x^2|\vec{a}|^2 + 2\,x\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + |\vec{b}|^2$ na variável $x \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que $\vec{a} \neq \vec{0}$ e seja $\vec{b} = \Lambda\vec{a}$, com um certo $\Lambda \in \mathbb{R}$, isto é $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente dependentes.

Então $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle^2 = \langle \vec{a}, \Lambda\vec{a}\rangle^2 = \langle \vec{a}, \Lambda\vec{a}\rangle.\langle \vec{a}, \Lambda\vec{a}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle.\langle \Lambda\vec{a}, \Lambda\vec{a}\rangle = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$, isto é, $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

Por outro lado, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, então

$$\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|^2 > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, considerando $x = -\frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|^2}$ e substituindo na expressão anterior, obtém-se:

$$\left(-\frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|^2}\right)^2 . |\vec{a}|^2 - 2\frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|^2}.\langle \vec{a},\vec{b}\rangle + \left|\vec{b}\right|^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{|\vec{a}|^2} - 2\frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{|\vec{a}|^2} + \left|\vec{b}\right|^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2}{|\vec{a}|^2} + \left|\vec{b}\right|^2 > 0 \ \Leftrightarrow \langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2 < \ |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2$$

Logo,

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle^2 \leq \ |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2$$

como se pretende provar. □

É particularmente importante o teorema que em seguida se demonstra, na medida em que nos dá ideia da localização dos zeros de polinómios. Na demonstração do teorema está presente a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema 2.7.2 Suponhamos que as raízes do polinómio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ são reais. Então as raízes pertencem ao intervalo cujos extremos são:

$$-\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}{}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}} \ \text{ e } -\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}{}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}.$$

<u>Demonstração</u>:

Sejam y, y_1, y_2, …, y_{n-1} as raízes do polinómio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$.

Então, o polinómio pode escrever-se na forma:

$(x-y)(x-y_1)\ldots(x-y_{n-1})$. Usando o método dos coeficientes indeterminados tem-se:

$$-a_{n-1} = y + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \text{ e } a_{n-2} = y(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + \textstyle\sum_{i<j} y_i y_j.$$

Por outro lado,

$$a_{n-1}{}^2 - 2\,a_{n-2} - y^2 = \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} y_i{}^2$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy aos (n-1)-úplos $(y_1,\ y_2, \ldots, y_{n-1})$ e (1, … ,1), obtém-se:

$$(a_{n-1} + y)^2 = (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})^2 \leq (y_1{}^2 + y_2{}^2 + \cdots + y_{n-1}{}^2).(n-1) =$$
$$= (n-1)(a_{n-1}{}^2 - 2\,a_{n-2} - y^2)$$

isto é,

$$(a_{n-1} + y)^2 \leq \ (n-1)(a_{n-1}{}^2 - 2\,a_{n-2} - y^2) \Leftrightarrow$$
$$a_{n-1}{}^2 + 2a_{n-1}y + y^2 \leq na_{n-1}{}^2 - 2na_{n-2} - ny^2 - a_{n-1}{}^2 + 2\,a_{n-2} + y^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 + (n-1)y^2 + 2a_{n-1}y + 2(n-1)a_{n-2} + a_{n-1}{}^2 - (n-1)a_{n-1}{}^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$ny^2 + 2a_{n-1}y + 2(n-1)a_{n-2} + (1-n+1)a_{n-1}{}^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}{}^2 \leq 0$$

Consequentemente os zeros $y_1,\ y_2, \dots, y_{n-1}$ pertencem ao intervalo cujos extremos são as raízes da equação $y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}{a_{n-1}}^2 = 0$:

$$-\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{{a_{n-1}}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}} \text{ e } -\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{{a_{n-1}}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}},$$

como se pretende mostrar. □

Exemplo 2.7.2.1 O polinómio f(x) = x^3-13x^2+56x-80 tem os zeros 4 (de multiplicidade 2) e 5 no intervalo $\left[\frac{11}{3}, 5\right]$. (O zero de multiplicidade 1 é o extremo do intervalo.)

Exemplo 2.7.2.2 O polinómio g(x) = x^2-6x+8 tem os zeros 2 e 4 no intervalo [2,4]. (Para o grau n=2, os zeros coincidem com os extremos do intervalo e são obtidos pela fórmula resolvente.)

Referências

[1] Aigner, Martin; Ziegler, Günter M.; Proofs from THE BOOK; third edition, Springer, 2004

[2] Almodóvar, José António; Peinado, Mª.Dolores Álvarez; Ramos, Mª. Jesús Argüello; Atance, Pilar Garcia; Martos, José Gil; Sanchéz, Yolanda González; Falo, Miguel Marqués; López, Ana Yolanda Miranda; Checa, Andrés Nortes; Sanz, Susana Parra; Peinado, Manuela Redondo; Boto, Mª. Teresa Sánchez; García, Teresa Santos; Serrano, Daniel Santos; Isaías, Alexandra Azevedo; Martinho, Emanuel. ENCICLOPÉDIA DO ESTUDANTE 06 MATEMÁTICA II. 2005 Santillana Educação, SL.

[3] Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues, Novo Espaço Matemática A, décimo ano, Parte 1, Porto Editora;

[4] Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues, Novo Espaço Matemática A, décimo ano, Caderno do Professor, Porto Editora;

[5] Dias, Carla; Ferreira, Jorge; Lagoa, Jorge; Leandro, Salustio, Realmat; MATEMÁTICA A, DÉCIMO ANO, Volume 2, Plátano Editora;

[6] Figueira, Mário S.R.; FUNDAMENTOS DE ANÁLISE INFINITESIMAL – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, 1996; Editores: Mário S.R. Figueira e L.Trabucho

[7] Herbart, Johann Friedrich; PEDAGOGIA GERAL; Fundação Calouste Gulbenkian, 4ª Edição, 1971

[8] Longo, Elisabete; Branco, Isabel; MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS 10.º ANO. 2010 Texto Editores, Lda. 1.ª Edição, 2.ª tiragem

[9] Martins, Maria Eugénia Graça; Monteiro, Cecília; Viana, José Paulo; Turkman, Maria Antónia Amaral; PROBABILIDADES E COMBINATÓRIA – 12.º ANO DE ESCOLARIDADE; 1ª Edição Setembro de 2009; Edição Ministério da Educação; Lisboa

[10] Neves, Maria Augusta Ferreira; Guerreiro, Luís; Leite, António; Silva, Jorge Nuno, MATEMÁTICA A 10º ANO (ESTATÍSTICA), Porto Editora; 1ª edição (2ª Reimpressão – 2012)

[11] Neves, Maria Augusta Ferreira; Guerreiro, Luís; Leite, António; Silva, Jorge Nuno, MATEMÁTICA A 10º ANO (GEOMETRIA I), Porto Editora; 1ª edição (2ª Reimpressão – 2012)

[12] Neves, Maria Augusta Ferreira; Faria, Luísa; PREPARAÇÃO PARA A PROVA DE AFERIÇÃO 2011 – MATEMÁTICA 6º. ANO; Porto Editora

[13] Pedoe, Daniel; GEOMETRY AND THE VISUAL ARTS. 1976 Dover Publications, Inc., New York

[14] http://pt.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy

[15] **http://en.wikipedia.org/wiki/Tibor_Gallai**

[16] www.dgidc.min-edu.pt

[17] http://pt.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya

[18] http://pt.wikipedia.org/wiki/Paul_Erd%C5%91s

[19] www.wikipedia + vitruvius+cardano+palladio+alberti

[20] www.if.ufrgs.br/~lang/

[21] http://fatosmatematicos.blogspot.pt/2010/01/fatos-da-media-harmonica.html

[22] http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1155/4/ProgramaMatematica.pdf

[23] http://www.dgidc.minedu.pt/ensinosecundario/index.php?s=directorio&pid=2&letra=M

Anexos

Anexo 1 – Análise dos manuais escolares adoptados na escola

Da análise feita aos manuais adotados:

Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues, Novo Espaço Matemática A, décimo ano, Parte 1, Porto Editora; 1ª edição (2ª Reimpressão – 2012)

Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues, Novo Espaço Matemática A, décimo ano, Parte 2, Porto Editora; 1ª edição (2ª Reimpressão – 2012)

Há a referir o seguinte:

1. Rigor linguístico, científico e conceptual

a) Quanto ao rigor linguístico - utilizam corretamente a Língua Portuguesa, utilizam o vocabulário apropriado e uma linguagem adequada e inteligível;

b) Quanto ao rigor científico – transmitem a informação correta, atualizada, sem erros, confusões ou situações que induzam a erros e confusões.

c) Quanto ao rigor conceptual – não empregam terminologias erradas ou que não sejam de uso corrente das disciplinas, não usam conceitos incorretos, imprecisos e em contexto inadequado;

d) Produtos multimédia.

2. Conformidade com os programas e orientações curriculares

e) Apresentam informação correspondente aos conteúdos nucleares dos programas em vigor, bem como várias propostas de atividades didáticas e de avaliação das aprendizagens, podendo incluir orientações de trabalho para o professor;

f) Proporciona a integração transversal da educação para a cidadania, no que se refere a: resolução de problemas e atividades investigativas, comunicação Matemática, História da Matemática e Tecnologia e Matemática.

3. Qualidade científica e didático-pedagógica.

g) Facultar a informação adequada e em linguagem adaptada ao nível etário dos alunos a que se destina;

h) Apresentam uma organização coerente;

i) Apresentam figuras, ilustrações necessárias e adequadas, sem erros ou sem situações que induzam ao erro.

Por tudo isto considera-se que os manuais estão bem elaborados, constituindo, deste modo, um instrumento adequado, de apoio ao ensino, à aprendizagem e à promoção do sucesso educativo.

Anexo 2 Enunciados referentes às Olimpíadas de Matemática

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - 1ª Eliminatória - 7.11.2012 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Na última semana de aulas, a Escola Divertida organizou diversas atividades para os alunos.

   (a) Na corrida de obstáculos, o corredor que chegou três lugares à frente do penúltimo, chegou dois lugares à frente do sétimo. Quantos corredores participaram?

   A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

   (b) No torneio de xadrez, em cada ronda, cada participante jogava contra outro e quem perdia o jogo era eliminado. Se houvesse um número ímpar de jogadores numa ronda, escolhia-se à sorte o jogador que passava diretamente à ronda seguinte. No torneio houve 100 jogos. Quantos jogadores participaram?

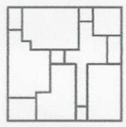
   A) 50 B) 51 C) 99 D) 100 E) 101

   (c) Um quebra-cabeças com a forma de paralelepípedo era formado por 3 peças com 4 cubinhos cada uma, como se representa na figura. Qual é a forma da peça branca?

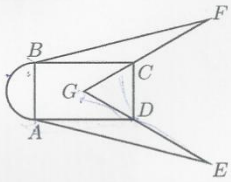
   (d) Na figura apresenta-se a forma de um puzzle geométrico. Os alunos calcularam a soma dos perímetros de todas as peças e obtiveram 126 cm. Qual é a área, em cm^2, do quadrado original?

   A) 81 B) 100 C) 126 D) 144 E) 196

2. A Raquel lançou dardos a um alvo dividido em 3 partes. Acertar na parte vermelha vale 10 pontos, na cor de laranja 8 e na amarela 5. Todos os lançamentos da Raquel atingiram o alvo, tendo acertado tantas vezes na região vermelha como na região laranja. A Raquel obteve um total de 99 pontos. Quantos lançamentos fez?

3. No seu aniversário, o João recebeu um tangram especial e construiu uma nave, representada na figura seguinte. Depois de construída a nave, o João reparou que $[ABCD]$ é um retângulo, $[GCD]$ um triângulo equilátero e $\overline{AD} = \overline{DE}$. Qual é a amplitude dos ângulos internos dos triângulos que fazem parte do tangram do João?



4. A escola da Isabela tem um mostrador de três algarismos indicando os dias que faltam para o fim das obras. Esse mostrador tem um defeito e por vezes alguns algarismos apagam-se. Hoje a Isabela reparou que, entre os três números que se formam quando se apaga um algarismo, apenas um é ímpar; entre os três números que se formam quando se apagam dois algarismos, apenas um é par. A Isabela escreveu por ordem crescente todos os números de três algarismos com essas propriedades. Reparou então que o número de dias que faltam para o fim das obras fica no centro desta lista, com tantos números acima como abaixo dele. Quantos dias faltam para o fim das obras?

spm

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2013 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

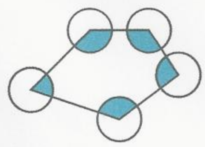
1. (a) A Laura tinha 100 rebuçados, numerados de 1 a 100. A Laura deu ao Pedro todos os rebuçados cujo número é múltiplo de 5 e de seguida distribuiu pela família todos os rebuçados restantes cujo número era par. Com quantos rebuçados ficou a Laura?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

(b) A Laura tem sete palitos diferentes de $2, 4, 6, 7, 8, 9$ e 10 cm de comprimento. De todos os retângulos que ela pode formar usando os sete palitos, qual é a maior área, em cm^2, que ela pode obter?

A) 102 B) 126 C) 130 D) 140 E) 152

(c) O Pedro e a Laura foram jantar a uma pizzaria com os amigos. Vieram para a mesa cinco pizzas iguais e as primeiras cinco fatias foram cortadas, com cinco cortes unindo os centros das pizzas, da forma indicada na figura. As fatias indicadas correspondem, no total, a quantas pizzas?



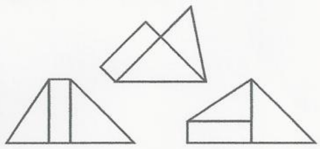
A) $1,25$ B) $1,5$ C) $1,75$ D) 2 E) $2,25$

(d) A Laura construiu um dado e colocou pintas nas faces, de modo que estas ficaram numeradas de 1 a 6. Na figura apresentam-se três imagens desse dado. Que números estão nas faces opostas ao 1 e ao 4, respetivamente?

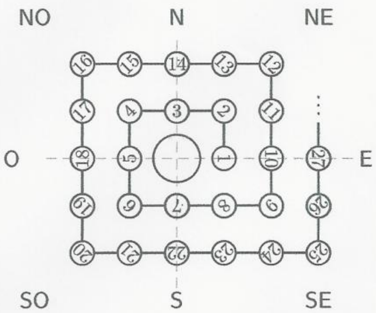
A) 5 e 3 B) 6 e 3 C) 3 e 6 D) 2 e 5 E) 5 e 2

2. O José tinha guardados no sótão 10 caixotes, cada um com 20 livros. Um dia reparou que alguns dos caixotes se estavam a estragar e decidiu reciclá-los, distribuindo os livros que estavam neles, de forma igual, por cada um dos caixotes restantes. No final sobraram 4 livros. Quantos caixotes o José decidiu reciclar?

3. A Helena está a brincar com três peças de um puzzle. Duas têm a forma de um triângulo retângulo, e a terceira tem a forma de um retângulo. A Helena repara que, com as três peças, consegue formar as figuras ao lado. A peça triangular menor tem a mesma área do retângulo e a peça triangular maior tem 3 cm^2 de área. Qual é a área do retângulo?



4. As ruas da cidade *Ponto Verde* têm dez mil candeeiros solares numerados a partir do centro da cidade. Cada candeeiro é disposto num de oito sentidos diferentes: norte, sul, este, oeste, nordeste, noroeste, sudeste e sudoeste, como indicado na figura. Assim, por exemplo, o candeeiro 21 está no sentido sudoeste, o candeeiro 22 está no sentido sul e o candeeiro 23 no sentido sudeste. Em que sentido está disposto o candeeiro com o número 2013?



OLIMPÍADAS

PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - 1° Eliminatória - 7.11.2012 - Categoria A - 8°/9° anos

Duração: 2 horas

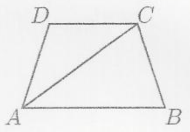
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. O Francisco quer fazer um bolo usando apenas leite, açúcar e farinha, segundo a seguinte receita: o peso da farinha deve ser o dobro do peso do leite e o peso do açúcar deve ser um terço do peso da farinha. Para que a massa do bolo pese 1100 g, qual a quantidade de leite, em gramas, que o Francisco deve usar?

2. A Raquel lançou dardos a um alvo dividido em 3 partes. Acertar na parte vermelha vale 10 pontos, na cor de laranja 8 e na amarela 5. A Raquel falhou o alvo um quarto das vezes que lançou, tendo acertado tantas vezes na região vermelha como na região laranja. A Raquel obteve um total de 200 pontos. Quantos lançamentos fez a Raquel?

3. Na figura seguinte, os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos, tendo-se $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$. Determina a amplitude de $\measuredangle ADC$.



4. Numa carruagem de um comboio estavam seis pessoas: o Amílcar, a Beatriz, a Catarina, o Daniel, o Eduardo e a Fernanda. Durante a viagem repararam que cada um deles tinha o mesmo número de amigos nessa carruagem. De quantas formas pode isto acontecer?

XXXI OPM - 1° Eliminatória - 7.11.2012 - Categoria A - 8°/9° anos

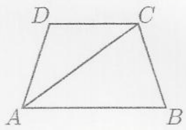
Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. O Francisco quer fazer um bolo usando apenas leite, açúcar e farinha, segundo a seguinte receita: o peso da farinha deve ser o dobro do peso do leite e o peso do açúcar deve ser um terço do peso da farinha. Para que a massa do bolo pese 1100 g, qual a quantidade de leite, em gramas, que o Francisco deve usar?

2. A Raquel lançou dardos a um alvo dividido em 3 partes. Acertar na parte vermelha vale 10 pontos, na cor de laranja 8 e na amarela 5. A Raquel falhou o alvo um quarto das vezes que lançou, tendo acertado tantas vezes na região vermelha como na região laranja. A Raquel obteve um total de 200 pontos. Quantos lançamentos fez a Raquel?

3. Na figura seguinte, os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos, tendo-se $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$. Determina a amplitude de $\measuredangle ADC$.



4. Numa carruagem de um comboio estavam seis pessoas: o Amílcar, a Beatriz, a Catarina, o Daniel, o Eduardo e a Fernanda. Durante a viagem repararam que cada um deles tinha o mesmo número de amigos nessa carruagem. De quantas formas pode isto acontecer?

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2013 - Categoria A - 8º/9º anos

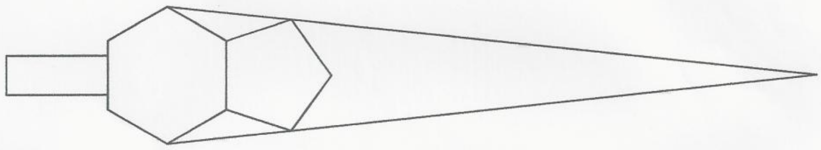
Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. O José tinha guardados no sótão 26 caixotes, cada um com 36 livros. Um dia reparou que alguns dos caixotes se estavam a estragar e decidiu reciclá-los, distribuindo os livros que estavam neles, de forma igual, por cada um dos caixotes restantes. No final sobraram 8 livros. Quantos caixotes o José decidiu reciclar?

2. O Alexandre e o César combinaram jogar, em cada dia de uma semana, uma partida de ténis de mesa. Uma vitória no primeiro dia vale um ponto, uma vitória no segundo dia vale dois pontos, uma vitória no terceiro dia vale três pontos, e assim sucessivamente, até ao sétimo dia, no qual uma vitória vale sete pontos. Cada derrota vale sempre zero pontos e nunca há empates. Uma forma de o César obter mais pontos do que o Alexandre é, por exemplo, ganhar no segundo, sexto e sétimo dias. De quantas formas pode o César obter mais pontos do que o Alexandre?

3. A espada do rei Artur tem a lâmina decorada por um hexágono e um pentágono regulares, como mostra a figura. Qual é a amplitude do ângulo da ponta da espada do rei Artur?



4. Numa caixa, $3/5$ dos objetos são feios e $3/7$ são inúteis. Deitaram-se fora todos os objetos simultaneamente feios e inúteis e juntaram-se alguns objetos simultaneamente bonitos e úteis. Depois disto, apenas $1/4$ dos objetos eram feios e $1/9$ eram inúteis. Qual a razão entre o número final e o número inicial de objetos simultaneamente bonitos e úteis?

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - 1ª Eliminatória - 7.11.2012 - Categoria B - 10º/12º anos

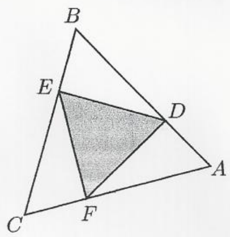
Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Qual é a soma de todos os inteiros positivos n que têm resto 15 ao dividir 141 por n?

2. Numa carruagem de um comboio estavam seis pessoas: o Amílcar, a Beatriz, a Catarina, o Daniel, o Eduardo e a Fernanda. Durante a viagem repararam que cada um deles tinha o mesmo número de amigos nessa carruagem. De quantas formas pode isto acontecer?

3. Na figura seguinte, os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são equiláteros, $\overline{AD} = 1$ e $\overline{CE} = 2$. Determina a área de $[DEF]$.



4. À volta de uma lâmpada foram dispostas outras 2012 lâmpadas, numa circunferência. Em cada uma das lâmpadas da circunferência foi colocado um interruptor que altera o estado (de acesa para apagada ou de apagada para acesa) dessa lâmpada, das duas lâmpadas adjacentes, e ainda da lâmpada central. Inicialmente todas as lâmpadas estavam apagadas, exceto uma das lâmpadas da circunferência. Pretende-se, carregando numa sequência de interruptores, apagar a lâmpada inicialmente acesa e acender apenas uma das outras lâmpadas. Para que lâmpadas é possível fazer isto?

spm

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

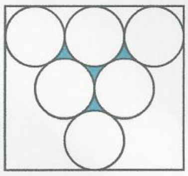
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2013 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Na figura seguinte o retângulo tem 6 cm de comprimento e contém seis circunferências com o mesmo raio, tangentes entre si e aos lados do retângulo. Qual é a área da região assinalada?



2. Numa caixa, $3/5$ dos objetos são feios e $3/7$ são inúteis. Deitaram-se fora todos os objetos simultaneamente feios e inúteis e juntaram-se alguns objetos simultaneamente bonitos e úteis. Depois disto, apenas $1/4$ dos objetos eram feios e $1/9$ eram inúteis. Qual a razão entre o número final e o número inicial de objetos simultaneamente bonitos e úteis?

3. Quantas circunferências distintas passam por pelo menos três vértices do quadriculado seguinte?

4. No Parlamento do Viracasaquistão, 2013 deputados reúnem-se numa mesa circular. Para votar uma lei, na primeira ronda, cada deputado apresenta o seu sentido de voto. Em cada ronda subsequente, cada deputado muda o seu sentido de voto se, na ronda anterior, o sentido de voto de ambos os seus vizinhos foi contrário ao seu; caso contrário, mantém-no. Uma decisão final será tomada quando o sentido de voto de todos os deputados for igual ao da ronda anterior. Qual é o número máximo de rondas necessárias para que os deputados tomem a decisão final?

Anexo 3 Certificado de frequência da sessão de formação "Simetria e transformações geométricas"

APM
Associação de Professores de Matemática

Núcleo Regional da Covilhã

Sessão prática e de discussão
Simetria e transformações geométricas

Certificado de Participação

Declara-se que Rita Alexandra da Fonseca Isidoro participou na sessão" **Simetria e transformações geométricas**", realizada na Universidade da Beira Interior, no dia 22 de Setembro de 2012, e dinamizada por **Rita Bastos.**

Covilhã, 22 de Setembro de 2012

P'la Comissão Coordenadora do Núcleo da Covilhã

Núcleo da Covilhã

Anexo 4 Certificado de frequência da sessão de formação “Curso introdutório de Estatística (Descritiva) com Excel”

APM
Associação de Professores de Matemática

Núcleo Regional da Covilhã

Curso Introdutório de Estatística (Descritiva) com Excel

Certificado de Participação

Declara-se que Rita Alexandra da Fonseca Isidoro participou no

" **Curso Introdutório de Estatística (Descritiva) com Excel**", realizada na Escola Secundária Campos Melo da Covilhã, no dia 27 de Outubro de 2012, e dinamizada por **Maria Eugénia Graça Martins.**

Covilhã, 27 de Outubro de 2012

P'la Comissão Coordenadora do Núcleo da Covilhã

Associação de Professores de Matemática
Núcleo da Covilhã