



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Covilhã | Portugal

Departamento de Ciências Aeroespaciais

CONTROLO ÓPTIMO ROBUSTO DE OSCILADORES CAÓTICOS

Dissertação para Obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Aeronáutica

Sandra Clara Rodrigues Antunes

Orientador:

Professor Doutor Kouamana Bousson

Covilhã, Portugal
Junho, 2009

CONTROLO ÓPTIMO ROBUSTO DE OSCILADORES CAÓTICOS

Resumo: O presente trabalho dedica-se ao estudo do comportamento e controlo de sistemas com características caóticas. A contribuição deste passa pelo tratamento do controlo numa forma robusta com a projecção de controladores que eliminem ou que procurem estabilizar o sistema quando sujeitos às indesejáveis perturbações, incertezas ou ruídos a que muitos componentes estão expostos. A dedicação a este tema leva a que na actualidade haja um progresso na modelação de sinais em componentes com um comportamento caótico. Para a realização deste estudo foi considerado o oscilador caótico de *Chua-Matsumoto* para gerar de modo activo sinais de ondas portadoras. O controlo é moldado numa forma robusta usando-se as técnicas de linearização óptima, de controlo quadrático robusto e tendo a noção de estabilização linear de sistemas não lineares, de modo a obter controladores capazes de suportar o problema de instabilidade nos movimentos oscilatórios presentes nas ondas que dão entrada nos modelos caóticos. É desenvolvida uma abordagem sobre o sistema em malha fechada em busca de uma garantia de estabilidade e desempenho robusto deste mesmo. Os controladores desenvolvidos foram simulados e testados revelando um desempenho óptimo das técnicas implementadas.

Palavras-chave: controlo robusto, linearização óptima, osciladores caóticos, decaotização.

ROBUST OPTIMAL CONTROL OF CHAOTIC OSCILLATORS

Abstract: This work is dedicated to the study of behavior and control of systems with chaotic characteristics. The contribution is the treatment of robust control with the design of controllers to deal with the system in case of disturbances and model uncertainties that many components are exposed to. The dedication to this issue leads to an improvement in timeliness by the modeling of signals with chaotic dynamics. In this study, Chua-Matsumoto's oscillator was considered for the active generation of carrier signals using optimal robust control methods based on optimal linearization of the oscillator model. We developed an approach to the closed loop system in search of a guarantee of stability and robust performance of the system. The developed controllers were simulated and tested showing optimal performance of the implemented methods.

Keywords: robust control, optimal linearization, chaotic oscillators, dechaotization.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Controlo Robusto	3
2.1	Método de <i>Kharitonov</i>	6
2.2	Controlo H_∞	8
2.2.1	Espaço de Funções	12
2.2.2	Cálculo das Normas Infinitas	14
2.2.3	Problema de Controlo Robusto para Problemas de Controlo H_∞	15
2.3	Método de Lin	17
3	Controlo Ótimo Robusto Baseado na Linearização Ótima	19
3.1	Regulador Linear Quadrático (LQR)	19
3.2	Linearização Ótima	21
3.2.1	Densificação de Domínios	21
3.2.2	Linearização	22
4	Controlo Robusto do Oscilador de Chua-Matsumoto	23
4.1	Sistemas Caóticos	23
4.2	Osciladores	24
4.3	O Oscilador de <i>Chua-Matsumoto</i>	25
4.3.1	Descrição do Modelo	26
4.4	Projecto do Controlador	30
4.5	Estabilização do Oscilador de <i>Chua-Matsumoto</i>	32
4.6	Geração de Sinais Sinusoidais com o Oscilador de <i>Chua-Matsumoto</i>	33
4.6.1	Onda Sinusoidal Pura	33
4.6.2	Onda Periódica	34
4.7	Geração de Sinais Quadrados com o Oscilador de <i>Chua-Matsumoto</i>	35
5	Conclusões, Discussões e Perspectivas Futuras	37
	Bibliografia	39

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de Blocos de um Sistema Autónomo de Voo	5
2.2	Trajectória de Um Sistema Sob o Efeito de Controlo Robusto e Não Robusto	6
2.3	Configuração Geral de um Sistema com Realimentação	9
2.4	Incertezas - Teorema do Ganho Pequeno	16
4.1	Efeito Borboleta Teorizado por <i>Edward Lorenz</i> em 1963	24
4.2	Circuito de <i>Chua-Matsumoto</i>	26
4.3	Curva Característica do Circuito de <i>Chua-Matsumoto</i>	27
4.4	Simulação do Modelo Original	29
4.5	Simulação do Modelo Original - 3D	29
4.6	Decaotização do Sistema Não Linear Original	32
4.7	Simulação da Onda Sinusoidal	34
4.8	Simulação da Onda Periódica	35
4.9	Simulação da Onda Quadrada	36

Abreviaturas e Símbolos

<i>DME</i>	: Distance Measuring Equipment
<i>ILS</i>	: Instrument Landing System
<i>LQR</i>	: Regulador Linear Quadrático
<i>MIMO</i>	: Multiple Input Multiple Output
<i>MIT</i>	: Massachusetts Institute of Technology
<i>SISO</i>	: Single Input Single Output
<i>UAV</i>	: Unmanned Aerial Vehicle
<i>VOR</i>	: Very Omnidirectional Range
A, \tilde{A}	: Matriz de Estados
B, \tilde{B}	: Matriz de Controlo
C	: Matriz de Estados de Observação
D	: Matriz de Controlo de Observação
I	: Matriz Identidade
J_z	: Matriz Jacobiana
K	: Matriz de Transferência de Controlo
P	: Matriz <i>Lyapunov</i>
Q	: Matriz Positivamente Definida ou Semi-Definida Hermitiana ou Real e Simétrica
qq^T	: Matriz Positivamente Semi-definida ($q \in \mathbb{R}^n$)
QQ^T	: Matriz Positivamente Semi-definida e Simétrica ($Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$)
R	: Matriz Positivamente Definida Hermitiana ou Real e Simétrica
t	: Tempo, tempo normalizado
x	: Vector de Estados
\dot{x}	: Modelo de Estados
x_{eq}	: Ponto de Equilíbrio (estados)
u	: Vector de Controlo
u_{eq}	: Ponto de Equilíbrio (controles)
$V(\cdot, \cdot)$: Função de <i>Lyapunov</i>
y	: Modelo de Saída de Observação
$\eta(\cdot)$: Vector Aleatório - representa as incertezas no modelo próximo do próprio sistema físico
$\xi(\cdot)$: Vector Aleatório - caracteriza as incertezas nas medidas efectuadas sobre o sistema
\mathbb{C}	: Conjunto de Números Complexos
\mathbb{R}	: Conjunto de Números Reais

- Σ : Função que representa a dinâmica de um sistema, também pode ser apresentado por $f(.,.)$
- \approx : Aproximadamente Igual
- $\|\cdot\|$: Norma Euclidiana
- $\|\cdot\|_{\infty}$: Norma Infinita

Introdução

Actualmente, o estudo do comportamento de sistemas com características caóticas tem vindo a merecer uma maior atenção das comunidades científicas e tecnológicas. A investigação nesta área não se deve apenas aos desafios teóricos que provêm destes estudos, prende-se também pelas aplicações que podem ter na prática.

Mas o porquê da análise do controlo óptimo para sistemas com um design de controlo robusto? Quais as suas aplicações práticas? As primeiras aplicações foram em torno do amortecimento robusto para a estabilidade de sistemas que apresentavam algum ruído ou vibração. São muitos os exemplos que se podem dar neste âmbito, desde a construção de edifícios, de estruturas com alguma flexibilidade, veículos e condições em que operam, componentes eléctricos e electrónicos. Considerando o caso das aeronaves, as suas aplicações podem passar pelos sistemas de controlo integrantes dos aviónicos, cujos resultados podem ser melhorados e por conseguinte tornar os aparelhos mais estáveis no seu desempenho. Em todos estes exemplos é importante saber chegar a um método que reduza estas vibrações para alcançar o seu controlo e equilíbrio.

Têm vindo a ser desenvolvidos muitos trabalhos em torno do controlo de sistemas com características caóticas, as vastas aplicações justificam o estudo de optimização para melhores desempenhos. Na indústria, ainda é usual o uso de técnicas de controlo clássico, mas como alternativa já são estudadas técnicas que visam obter sistemas mais estáveis num domínio de estabilização qualitativamente mais alargado, nomeadamente com uso da linearização óptima, tal como foi analisado por *Bousson e Quintiães* [1], usando, neste caso, o método de densificação de domínios [2] desenvolvido por *Bousson e Correia*. Contudo, *Kihás e Marquez* [3], haviam lançado propostas quantitativas para a obtenção da distância existente entre um modelo não linear e uma aproximação linear, usando-se a norma quadrática no espaço de funções (chamada de norma \mathcal{L}_2), mas a sua aplicação requer ainda um aperfeiçoamento do método sobretudo no que diz respeito à sua aplicação em sistemas sujeitos a incertezas. Portanto, para uma aplicação prática, é necessária a projecção de controladores robustos que garantam as especificações de estabilidade e desempenho dos sistemas, mesmo quando estão expostos a condições muito adversas.

No que se refere à aplicação de controlo robusto, autores como *Van der Schaft* [4] efectuaram estudos sobre a análise de \mathcal{L}_2 de sistemas não lineares e o estado não linear de realimentação do controlo H_∞ . *Zames* [5] desenvolveu uma técnica de cálculo conhecida como ganho pequeno (*small gain*) que nos permite analisar a robustez de um sistema, particularmente quando este se encontra num espaço H_∞ .

Este trabalho tem como objectivo o controlo activo e robusto de um oscilador caótico, de forma a garantir o controlo, estabilidade, estabilização e desempenho robusto deste, apesar de distúrbios, ruídos e incertezas que o sinal possa ter na sua de modelagem. Desta

forma, pretende-se obter uma melhoria do desempenho de sistemas portadores de sinais como o de *Chua-Matsumoto*. O interesse em estudar este oscilador passa pela simplicidade da sua configuração e pelas aplicações que estes tem nos sistemas aviónicos, nomeadamente em componentes como os VOR (*Very Omnidirectional Range*), ILS (*Instrument Landing System*), DME (*Distance Measuring Equipment*), entre outros. Os osciladores são uma base de funcionamento de variados sistemas electrónicos, com o avanço da tecnologia é conveniente que estes sejam eficientes, que resistam a elevados períodos de tempo de funcionamento e de preferência sem aquecerem dificultando o seu funcionamento, para isso, um oscilador que seja facilmente estabilizado não necessita de sincronização ou de acoplamentos de outros circuitos para o conseguir.

Atendendo ao objectivo do estudo, e após esta primeira introdução, o trabalho é organizado por diversos capítulos que explicam com base teórica os conceitos que nos levam até à sua aplicação.

O capítulo 2 aborda numa primeira instância a teoria de controlo, desde o seu aparecimento até à medida que se sentiu necessidade de analisar e tentar encontrar métodos de controlo para estabilizar variadíssimos sistemas que por si só não se estabilizam sem uma análise mais precisa. São analisados sucessivamente o método de *Kharitonov*, o método de H_∞ e o método de *Lin* [6].

No capítulo 3 apresenta-se um método de controlo óptimo robusto que se baseia na linearização óptima e numa modificação do método de regulador linear quadrático (LQR).

Na secção 4 é feita uma abordagem em torno de sistemas designados como caóticos, nomeadamente os osciladores. É apresentada uma aplicação de todos os conceitos teóricos anteriormente descritos. Para o efeito é considerado um modelo simples, o oscilador de *Chua-Matsumoto* [7]. Com a ajuda de simulações são estudados os comportamentos deste oscilador e desenvolvida uma análise robusta do controlo e da sua estabilização.

As conclusões e propostas futuras de trabalho dão lugar ao capítulo 5.

Controlo Robusto

Quando é considerada a teoria de controlo existem diversos ramos ligados a esta área, cujo propósito passa pela análise de estabilidade de sistemas sujeitos às mais variadas condições. Facto que nos leva a uma procura de fundamentos para o seu controlo, que por sua vez são proporcionados pela teoria clássica de controlo.

Existe uma diversidade de sistemas que necessitam de controlo, estes dependem da configuração e objectividade de cada um para realizar as suas funções, podem existir parâmetros que variam e consequentemente a modelação dos sinais também têm de variar para corrigir tendências menos desejadas.

Neste capítulo pretende-se equacionar e definir as noções matemáticas primordiais usadas numa análise óptima e/ou robusta, bem como compreender em que medida é que se pode afirmar que estamos na presença de um controlador ou controlo robusto.

Existem diversas classes de sistemas a serem analisados, os métodos mais usuais e apresentados neste trabalho tratam de sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*).

Considere-se um sistema dinâmico descritos pela Equação 2.1,

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (2.1)$$

onde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de continua e de *Lipschitz* [8]¹ que simula a dinâmica interna do sistema considerado. Atendendo que $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ é um vector de estados e $u \in \mathbb{R}^m$ é o vector de controlo do sistema.

A teoria de controlo tem um ponto de vista diferente do clássico, note-se que a teoria clássica procura desfrutar de teoremas que aplicados a equações diferenciais visam estudar a dependência das soluções para equações como a 2.1 relativamente ao parâmetro de controlo u , são sistemas com um modelo linear SISO (*Single Input Single Output*) possuidores de uma arquitectura simplificada, usando como principal ferramenta de trabalho as transformadas de *Laplace*. Para a teoria de controlo, primeiro é estabelecido um objectivo que a equação diferencial deverá cumprir tendo em conta um determinado controlo u e, com esse propósito, é seguido até ser alcançado ou até encontrar um controlo que nos permita realizar tal fim. Esta procura pode ser desenvolvida por, pelo menos, dois modos distintos de resolução [9]:

1. *Controlo em circuito aberto*: Onde se procura um controlo u como função do tempo $u(t) = [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, isto é, o controlo depende apenas do tempo t e não do estado x ;

¹Por definição diz-se que uma função é de *Lipschitz* se: $\exists L > 0 : \forall x, y \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$. Por caracterização, funções pertencentes a classes C^1 e com $\|\nabla f(x)\| \leq M, \forall x$, temos deste modo uma função de *Lipschitz*. Para as funções pertencentes a classes C^2 , a função é de *Lipschitz*.

2. *Controlo em circuito fechado (realimentação ou feedback)*: Onde se procura um controlo u em função do estado, ou seja, $u = u(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Neste caso, embora também se tenha de conservar a existência de unicidade das soluções, isto é, para cada condição inicial do tipo $x(0) = x_0$ a função de controlo deverá ser pelo menos localmente integrável e limitada, diferenciando-se neste caso que estará ainda sujeito a restrições do tipo de controlo de classe C^1 .

Do ponto de vista prático, os sistemas com realimentação são os mais interessantes. No caso dos sistemas de malha aberta estes estão sujeitos ao controlo inicial não permitindo ao utilizador correcções ou intervenções em caso de perturbações do sistema que por vezes são imprevistas ou até mesmo quando as aplicações não são como as esperadas pelo modelo de aplicação teórico. Assim, a realimentação permite ao sistema ter uma regulação automática, corrigindo os seus parâmetros de entrada de modo a atingir o objectivo inicialmente traçado.

Uma aeronave é considerada como um sendo um sistema multivariável, ou seja, um sistema que possui diversas variáveis de entrada e saída.

A pilotagem duma aeronave desenvolve-se por meio de um conjunto de acções, particularmente na conjugação de movimentos de lemes, *flaps*, entre outros sistemas, com a funcionalidade de guiar a aeronave de um ponto inicial até ao seu destino, atendendo sempre às condições onde esta opera. O controlo de voo, pode ser definido como sendo a acção de pilotar uma aeronave de modo a seguir uma determinada trajectória de voo, ou mesmo de minimizar a discrepância existente entre os valores de referência e uma determinada variável de voo, tornando-o o mais seguro e económico possível. Relativamente a um sistema de controlo autónomo de voo, este é um sistema que poderá controlar a trajectória de voo sem a completa dependência do Homem. Actualmente, as aeronaves são automatizadas, apesar de não o serem a 100%, há sempre a ajuda do piloto para introduzir as referências de voo, tal como a velocidade, rumo, entre outras variáveis de entrada. Considere-se o caso de um UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*), a sua trajectória tem diversos *waypoints* a percorrer, mas para chegar a estes é necessário especificar algumas variáveis assim como a orientação do ponto de chegada que deverá alcançar. Para facilitar ao piloto esta conjugação de movimentos, que posteriormente resultam na direcção e seguimento da aeronave numa determinada rota, são tidos em conta os diagramas de blocos dos diversos subsistemas que compõem o sistema global que é o da aeronave, Figura 2.1.

O sistema representado na Figura 2.1 pode ser descrito por,

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) + \eta(x, u, t) \\ y = h(t, x, u) + \xi(x, u, t) \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde $\eta(\cdot)$ e $\xi(\cdot)$ são vectores aleatórios. $\eta(\cdot)$ representa as incertezas no modelo próximo do próprio sistema físico e $\xi(\cdot)$ caracteriza as incertezas nas medidas efectuadas sobre o sistema. O sistema Σ é dado pelo modelo de estado \dot{x} e pelo modelo, ou vector de saída, de observação y , a dependência das funções deste sistema vem a cargo dos vectores de estado x e de controlo u . Todos sabemos que na realidade os sistemas não são ideais, isto é, todos contêm incertezas, por mais que estas sejam pequenas ao ponto de serem desprezíveis, deste modo podemos representar o nosso modelo como se segue,

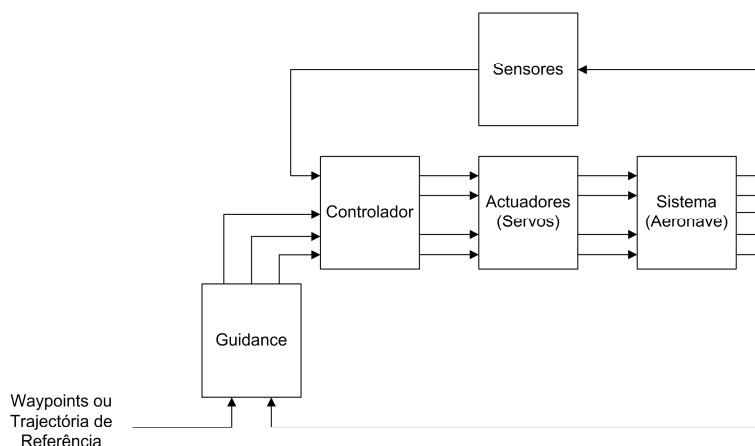


Figura 2.1: Diagrama de Blocos de um Sistema Autónomo de Voo

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}, \text{ com: } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Tendo em conta as incertezas reais a que os sistemas estão sujeitos temos uma área que lida com este tipo de problemas, para além das garantias dadas pela teoria de controlo óptimo relativamente à estabilidade, este garante ainda que o sistema pode ser controlado mesmo quando está sujeito a pequenas variações na sua modelação de sinais, podendo dar origem a grandes mudanças na sua estabilidade, ou seja, estamos na presença da análise do controlo robusto.

Podemos definir o controlo robusto como sendo um ramo da teoria de controlo que lida as incertezas entre o modelo real e o modelo nominal usados para o projecto de sistemas de controlo. Considere-se a Figura 2.2, imagine-se que esta corresponde à simulação da trajectória de uma aeronave na acção de subida até que esta chegue a um ponto de voo de cruzeiro como indica $x_{referencia}$, assumam-se que no momento de ascensão não sofre qualquer perturbação. Até um instante t^* a aeronave consegue controlar o seu movimento, mas nesse instante, por alguma razão, o sistema sofre uma perturbação. Dizemos que o sistema está sobre o efeito de controlo robusto se este cumprir com as condições:

1. Se o sistema resistir às perturbações impostas à trajectória que tinha inicialmente estipulada;
2. Se o controlo estabiliza o sistema mesmo em caso de perturbações;
3. Considerando um sistema dado por $\dot{x} = Ax + Bu$, mas por algum motivo passamos a ter um sistema $\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u$, onde $\|A - \tilde{A}\| \leq \eta_1$ e $\|B - \tilde{B}\| \leq \eta_2$. Diz-se que existe um controlo robusto se este consegue controlar o sistema mesmo sem ter o modelo exacto ou preciso do sistema. Isto é, mesmo que faltem parâmetros ou variáveis o sistema tem a capacidade de retomar o seu caminho.

Ou seja, pela Figura 2.2, após o instante t^* em que foi perturbado, a traço cheio está representado o sistema sobre a acção de um controlo robusto. A tracejado temos uma aeronave

que não consegue repor o seu objectivo e estabiliza num momento qualquer diferente do estipulado inicialmente.

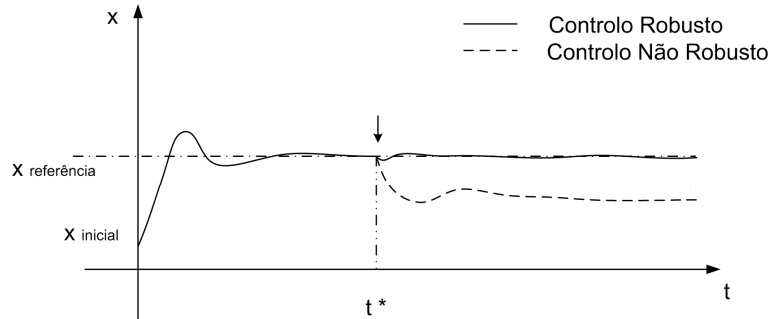


Figura 2.2: Trajectória de Um Sistema Sob o Efeito de Controlo Robusto e Não Robusto

A análise de projectos de sistemas dinâmicos são geralmente realizados segundo um método clássica (usando-se uma resposta frequencial) ou moderna (através das variáveis de estado). Mas e se forem consideradas incertezas no modelo matemático ou físico que as representa? Esta é uma abordagem que nos pode levar a ter maus desempenhos, ou levar-nos mesmo à instabilidade como é constatado no exemplo dado. Dentro deste panorama, o controlo robusto apresenta um conjunto de ferramentas matemáticas capazes de tratar as incertezas desse modelo, possibilitando ao projectista obter sistemas de controlo que garantem uma estabilidade e desempenho satisfatórios face a essa problemática. Os métodos de controlo robusto que serão abordados neste capítulo são, o Método de *Kharitonov*, o Método de Controlo H_∞ e o Controlo Robusto de *Lin*, sendo este um método que considera os conceitos de controlo óptimo.

2.1 Método de *Kharitonov*

O método de *Kharitonov* foi desenvolvido em 1979, este é um método excelente para desenvolver uma análise robusta de sistemas de controlo num domínio de funções traçadas a partir de polinómios. O método fornece as condições necessárias e suficientes para a estabilidade de sistemas dados por polinómios com a característica destes terem coeficientes incertos, podendo ser aplicado para fazer a prova de estabilidade com apenas quatro polinómios construídos a partir das incertezas que se queiram considerar.

Existem duas questões importantes no que diz respeito à possível aplicação do método, (1) Dado um conjunto de intervalos com muitos parâmetros, podemos verificar se o sistema é estável para todos os parâmetros possíveis? (2) Caso se confirme essa possibilidade, quantos valores desses parâmetros temos necessidade de verificar? [6].

Witold Pedrycz e Feng Lin [6], usaram o método de *Kharitonov*, considerando este sistemas com polinómios característicos, para dar resposta às questões colocadas. A título de exemplo, considere-se um polinómio qualquer,

$$f(a, b) = b_0 + b_1a + \dots + b_{n-1}a^{n-1} + b_na^n, \quad (2.4)$$

onde $b_i \in [b_i^-, b_i^+]$, $i = 1, 2, \dots, n$ são os coeficientes cujos valores são incertos, mas sabe-se à partida quais os seus limites inferiores e superiores. Faz-se uma abordagem ingênua a fim de verificar se num determinado conjunto de polinómios o sistema é estável para todos os parâmetros em que isso possa ser possível,

$$\psi = \{b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + b_3 a^3 : b_i \in [b_i^-, b_i^+], i = 0, 1, 2, \dots, n\}. \quad (2.5)$$

O conjunto descrito na equação 2.5 é finito e, como tal, não é possível verificar os seus elementos um a um. Usando o critério de *Routh-Hurwitz*, não há a necessidade de verificar elemento a elemento, pois sabemos à partida que os sistemas de terceira ordem são estáveis se e só se os coeficientes do seu polinómio característico satisfazem a seguinte condição,

$$b_0 > 0, b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0, b_1 b_2 > b_0 b_3. \quad (2.6)$$

Assim, todo o conjunto de polinómios Φ é estável, se e somente se, $b_0^- > 0, b_1^- > 0, b_2^- > 0, b_3^- > 0, b_1^- b_2^- > b_0^- b_3^-$, ou seja, por outras palavras, para verificar se para todos os polinómios são estáveis em Φ , precisamos apenas de verificar a estabilidade dos dois polinómios tal como os que se seguem,

$$\begin{cases} f_1 = b_0^- + b_1^- a + b_2^- a^2 + b_3^- a^3 \\ f_2 = b_0^+ + b_1^+ a + b_2^+ a^2 + b_3^+ a^3 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Neste caso em concreto são necessários apenas dois polinómios para verificar e determinar a estabilidade do sistema num conjunto finito de Φ . Geralmente é necessário determinar o número de polinómios necessários para efectuar a validação. Neste caso em particular temos dois polinómios que representam os dois vértices, ou pólos, relativos à região onde podem estar os possíveis valores dos parâmetros no espaço de parâmetros especificados.

Teorema 1.1 [6] *Considere-se dois polinómios de igual grau, com partes ímpares iguais e diferentes partes pares,*

$$\begin{aligned} f_1(s) &= f_1^e(s) + s f_1^o(s) \\ f_2(s) &= f_2^e(s) + s f_2^o(s) \end{aligned},$$

Destes polinómios, assumam-se que as partes reais satisfazem as seguintes condições,

$$f_1^e(j\omega) \leq f_2^e(j\omega), \text{ para todo } \omega \in [0, \infty),$$

Então para qualquer polinómio $f(s) = f^e(s) + s f^o(s)$, que satisfaz a condição,

$$f_1^e(j\omega) \leq f^e(j\omega) \leq f_2^e(j\omega), \text{ para todo } \omega \in [0, \infty),$$

temos um polinómio $f(s)$ estável.

Existe uma questão fundamental como essência para o uso do Teorema de *Kharitonov*, o conjunto de polinómios $\psi(s, b)$ qualquer, como é que se sabe que todos os polinómios que o integram são estáveis? É deste modo que passamos a ter um problema para resolver, mas não um problema qualquer, passamos a ter um problema de estabilidade robusto.

Note-se que o teorema de *Kharitonov* apresenta duas limitações bastante importantes: não trata da dependência entre coeficientes incertos do polinómio característico e, tendo em conta a sua forma original, só é aplicável a casos contínuos, assim sendo para a maioria os casos em que a sua aplicação é necessária, o teorema de *Kharitonov* fornece apenas as condições suficientes de aplicação [10]. Por essa razão, como já foi referido, não se verifica a estabilidade de polinómio em polinómio. Há assim a necessidade de encontrar um modo inteligente de resolver o problema tendo em conta um número finito de polinómios que determine de forma viável a estabilidade de todo o conjunto, sendo este possível ou não de ser encontrado.

Considere-se o polinómio dado na Equação 2.4. Pretende-se saber se todos os polinómios inseridos no conjunto são estáveis, ou seja, se o sistema é robustamente estável. Por outras palavras, considerando um vector de coeficientes incertos $b = [b_0, \dots, b_n]$, e um conjunto de possíveis valores para b dado por $P = [b_0^-, b_0^+] \times \dots \times [b_n^-, b_n^+]$. Note-se que P nada tem a ver com a matriz que se obtém com a aplicação da equação de *Riccati*. Pode-se definir o conjunto de polinómios como um conjunto finito dado por,

$$\psi(s, b) = \varphi(s, b) : b \in P. \quad (2.8)$$

Para verificar se $\varphi(s, b)$ é estável para todo $\varphi(s, b) \in \psi(s, b)$, tem-se de efectuar a verificação dos quatro polinómios de *Kharitonov*,

$$\begin{aligned} k_1(s) &= b_0^- + b_1^- s + b_2^+ s^2 + b_3^+ s^3 + b_4^- s^4 + b_5^- s^5 + \dots \\ k_2(s) &= b_0^- + b_1^+ s + b_2^+ s^2 + b_3^- s^3 + b_4^- s^4 + b_5^+ s^5 + \dots \\ k_3(s) &= b_0^+ + b_1^- s + b_2^- s^2 + b_3^+ s^3 + b_4^+ s^4 + b_5^- s^5 + \dots \\ k_4(s) &= b_0^+ + b_1^+ s + b_2^- s^2 + b_3^- s^3 + b_4^+ s^4 + b_5^+ s^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Teorema 1.2 [6] *O conjunto de polinómios $\psi(s, b)$ tem como propriedade que cada polinómio do designado conjunto é estável, se e só se os quatro polinómios de Kharitonov forem estáveis.*

2.2 Controlo H_∞

A fim de desenvolver uma análise robusta da linha de controlo, quando se está na presença de um problema com realimentação, considera-se para a sua análise um controlo de H_∞ .

O espaço H_∞ conhecido como espaço de *Hardy* denota um espaço de *Banach* (normado completo). Consiste em ter todas as funções analíticas com uma variável complexa limitada no semi-plano complexo, composto por números com partes reais positivas [11].

Define-se a norma de H_∞ como sendo uma norma de aplicação a matrizes de transferência e, nesta medida, a sua noção não é generalizada directamente para sistemas não lineares. No entanto, quando traduzida para o domínio do tempo, a norma de H_∞ é, nada mais, do que a norma de \mathcal{L}_2 induzida (a partir da entrada das funções-tempo até às saídas das funções-tempo para o estado inicial zero). Esta norma é também muito adequado para sistemas não lineares, é de facto este comumente chamado de ganho \mathcal{L}_2 do sistema não linear [4].

O objectivo da aproximação de H_∞ é de minimizar a função de transferência com norma H_∞ [6], ou seja, dado um determinado sistema não linear, o controlo H_∞ não linear pretende estabilizar assintoticamente o sistema em malha fechada e atenuar a influencia das entradas externas u na variável controlada b . Existem problemas que são resolvidos de uma forma robusta. Será assim discutida nesta secção a forma de efectuar uma aproximação para um controlo robusto, usando a essa norma H_∞ .

Na presente secção é apresentada a teoria envolvente do controlo H_∞ não linear, são apresentadas as principais definições, teoremas e corolários. Teoria esta que se baseia no trabalho de *A. J. Van der Schaft* [4], cuja investigação teve lugar em 1992, com um trabalho relacionado com a análise do ganho \mathcal{L}_2 sistemas não lineares e estados de realimentação como o da Figura 2.3 e controlo H_∞ não lineares.

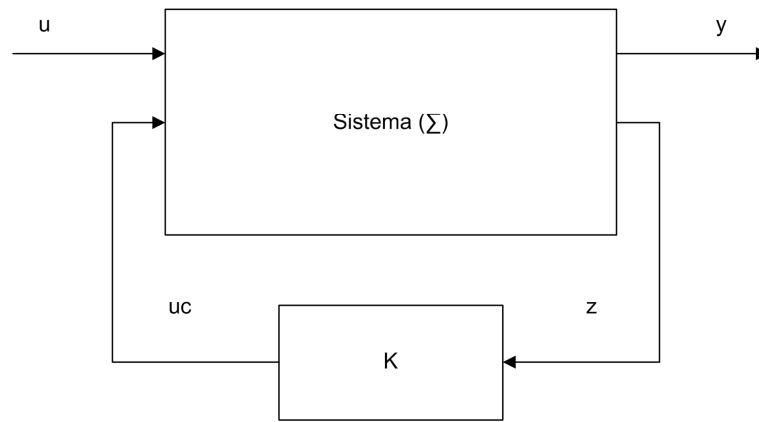


Figura 2.3: Configuração Geral de um Sistema com Realimentação

Considere-se um sistema não linear simples pertencente a C^∞ [4], dado por,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j \\ y_j = h_j(x) \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, j = 1, \dots, p$ e $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. $x = (x_1, \dots, x_n)$ são as coordenadas locais do espaço de estados do nosso sistema, Assume-se a existência de um ponto de equilíbrio pertencente a M , ou seja, $x_0 \in M$, podemos resumir a expressão 2.3. Tendo em conta este facto passamos a ter $f(x_0) = 0$ e $h(x_0) = 0$, com estas simplificações o nosso sistema é dado por,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}, \text{ com: } u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p, x \in M. \quad (2.11)$$

Note-se que qualquer sistema linear que seja perturbado com um determinado sinal constante, após um determinado período de tempo transiente, apresenta uma resposta com a mesma frequência da entrada, mas com uma amplitude diferente e um ligeiro atraso na sua fase [11].

Considerando então o sistema dado, para uma análise robusta, tem-se de ter em conta as perturbações a que este poderá estar sujeito, assim, introduzindo as perturbações dadas

por d e considerando uma matriz $n \times q$ dada por $K(x)$ tem-se,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + k(x)d \\ y = h(x) \end{cases}, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p, x \in M, d \in \mathbb{R}^q. \quad (2.12)$$

Aplicando uma determinada realimentação ao sistema 2.3, tem-se o designado fecho da malha,

$$u = l(x), l(x_0) = 0. \quad (2.13)$$

Pode-se considerar o sistema em malha fechada 2.12, e 2.13, considerando também o seu ganho \mathcal{L}_2 segundo as perturbações d para um determinado vector bloco de saídas, neste caso observações, $y = h(x)$ e entradas $u = l(x)$, isto é, o ganho \mathcal{L}_2 de,

$$d \xrightarrow{\text{sistema de malha fechada}} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ l(x) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Definição 1.1 [4]. *Através da realimentação de estados na entrada dos sistemas, pode-se encontrar uma solução para problemas de controlo H_∞ não linear óptimo, Esta solução é encontrada, se existir, um valor pequeno $\gamma^* \geq 0$ tal que para qualquer $\gamma > \gamma^*$ exista um estado de realimentação tal como em 2.12 para qualquer ganho \mathcal{L}_2 de d para $\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$ é inferior ou igual γ .*

Note-se que a definição dada é apenas para controlo não linear, para casos de controlo H_∞ lineares esta é diferente. É também requerido que o sistema seja estável de forma assintótica. Certamente que no caso não linear, também gostaríamos de ter um sistema como o considerado na Definição (1.1) de modo a que este fosse assintoticamente estável.

Teorema 1.3 [4]. *Considere-se o sistema não linear com algumas perturbações, tal como está descrito na equação 2.12. Sendo $\gamma > 0$ e supondo que existe uma solução $V \geq 0$ para a equação de Hamilton-Jacobi,*

$$\frac{\partial V}{\partial x} x f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} k(x) k^T(x) - g(x) g^T(x) \right] \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (x) + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) = 0. \quad (2.15)$$

Ou a inequação de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial V}{\partial x} x f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} k(x) k^T(x) - g(x) g^T(x) \right] \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (x) + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0. \quad (2.16)$$

Ambas com $V(x_0) = 0$. Então o sistema de malha fechada para uma realimentação,

$$u = -g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} (x). \quad (2.17)$$

Tem um ganho \mathcal{L}_2 (de d para $\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$) é inferior ou igual γ .

A desigualdade de *Hamilton-Jacobi* aparece para os problemas de controlo H_∞ não linear, da mesma forma que a equação de *Riccati* está para os problemas de controlo óptimo linear. Observe-se ainda que para sistemas não lineares, a norma-2 induzida existe mas não é igual à norma H_∞ , isto porque não existe norma H_∞ para operadores não lineares. Por esta razão e talvez pelo facto da interpretação no domínio do tempo ser o mesmo para sistemas lineares, a extensão não linear do problema de controlo H_∞ , ou seja, o problema de minimização do ganho \mathcal{L}_2 , costuma ser referido na literatura como sendo controlo H_∞ não linear. Seria mais correcto dizer que se tem um ganho de \mathcal{L}_2 induzido, mas no entanto é usada também a outra forma para o referir [11].

Corolário 1.1 [4]. *Suponha-se que existe uma solução $V \geq 0$ para as equações 2.15 e 2.16. Considere-se ainda o sistema dado na forma $\dot{x} = f(x)$ com a saída $y = h(x)$, sendo dado por $u = -g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x}(x)$ o estado inicial de observação. Então $V > 0$ para $x \neq x_0$ e o sistema de malha fechada dado por 2.12 e 2.13 (com $d(t) \equiv 0$) é localmente assintoticamente estável. Assuma-se adicionalmente que V é adequado ao problema, então dizemos que o sistema de malha fechada é globalmente assintoticamente estável.*

Linearizando-se o sistema dado pela equação 2.12 temos o modelo linearizado que se segue, considerando um ponto x_0 ,

$$\dot{\bar{x}} = F\bar{x} + G\bar{u} + K\bar{d}, \quad (2.18)$$

onde F , G e H são definidos como sendo a primeira derivada num ponto x_0 no caso de F e H e $g(x_0)$ no caso de G , ou seja, $F = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, $G = g(x_0)$ e $H = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0)$ respectivamente. Relativamente a K este é dado por $K = k(x_0)$.

Teorema 1.4 [4]. *Assumindo que (H, F) é detectável. Sendo $\gamma > 0$, então existe realimentação linear para o sistema,*

$$\bar{u}c = L\bar{x}. \quad (2.19)$$

Tal que o sistema de malha fechada 2.18 e 2.19 é, tendo como entrada \bar{d} e as saídas (\dot{y}, \dot{u}) , assintoticamente estável e o ganho \mathcal{L}_2 é menor ou igual a γ se e só se existir uma solução $P \geq 0$ para a equação algébrica de Riccati,

$$F^T P + P F + P \left(\frac{1}{\gamma^2} K K^T - G G^T \right) P + H^T H = 0. \quad (2.20)$$

Além do mais, o ganho \mathcal{L}_2 é menor do que γ , se e só se existir uma solução $P \geq 0$ para a equação 2.20, que satisfaz,

$$\sigma \left(F - G G^T P + \frac{1}{\gamma^2} K K^T P \right) \subset C^-. \quad (2.21)$$

E, se $P \geq 0$ é uma solução para 2.20, então se escolhermos um $L = -G^T P$ o sistema de malha fechado dado por 2.18 e 2.19 é assintoticamente estável e um ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ (respectivamente $< \gamma$ se existir uma solução \dot{P} para as expressões 2.20 e 2.21).

Proposição 1.1 [4] *Tendo $\gamma > 0$. Suponha-se que existe uma boa realimentação $u = l(x), l(x_0) = 0$, para a equação 2.12 tal que o ganho \mathcal{L}_2 do sistema não linear com malha fechada dado por,*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)l(x) + k(x)d \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = h(x) \\ u = l(x) \end{cases}. \quad (2.22)$$

É $\leq (<)\gamma$. Então o sistema de realimentação linear $\dot{u} = L\dot{x}$, com $L := \left(\frac{\partial l}{\partial x}\right)(x_0)$, para a expressão dada em 2.18 resulta em um sistema linear de malha fechada com ganho $\leq (<)\gamma$.

A maior dificuldade encontra-se na determinação de leis para sistemas de controlo H_∞ não linear, é a de encontrar a sua região de validade, já é possível resolver e obter soluções para as equações de *Hamilton-Jacobi* e assim obter a distância entre um modelo não linear e a sua aproximação linear, no âmbito de uma aproximação \mathcal{L}_2 [3], mas no entanto validar o seu domínio onde a estabilidade se mantém é ainda um caso em estudo. Assim, para controlos do tipo H_∞ são efectuados estudos de aplicação destes, mas validados localmente segundo um domínio ou região definidos. Entenda-se que quando se refere a região de validade de um controlador, significa que estamos a falar da região do espaço de estados onde se requer que sejam mantidas a estabilidade e o desempenho do sistema.

2.2.1 Espaço de Funções

Começamos esta secção recordando algumas noções matemáticas. A definição de produto interno de vectores é dado por,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

No espaço Euclidiano C^n , é definido por,

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}^T y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i, \quad (2.24)$$

onde \bar{x} representa o conjugado de x . O conceito de produto interno pode ser estendido para o espaço vectorial infinito V em torno de C^n como será mostrado. O produto interno sobre V é uma função complexa: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow C$.

Satisfazendo as condições que se seguem para todo o $x, y, z \in V$ e $\alpha, \beta \in C$:

1. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$ (linearizado);
2. $\langle x, y \rangle = \langle \bar{x}, y \rangle$ (conjugado simétrico);
3. $\langle x, x \rangle > 0$, se $x \neq 0$ (não negatividade).

Note-se que $\langle x, x \rangle$ é real, porque pela simetria da condição (2): $\langle x, y \rangle = \langle x, \bar{y} \rangle$. Dois vectores x, y no espaço do produto interno V são ortogonais, denotado por $x \perp y$, se $\langle x, y \rangle = 0$.

Um espaço vectorial V com um produto interno é chamado de espaço do produto interno. O produto interno reduz-se à norma,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (2.25)$$

O espaço do produto interno tem as propriedades que se seguem:

1. $|\langle x, x \rangle| = \|x\| \times \|y\|$ (desigualdade de *Cauchy-Schwarz*);
2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$;
3. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (se $x \perp y$).

Recorde-se que um espaço métrico M é dito como completo, ou de *Cauchy*, se todas as seqüências, cujos elementos se tornam estreitos como progressão da mesma seqüência, dos pontos em M tem um limite sendo este também em M . Intuitivamente, um espaço métrico M é considerado completo se este não tiver quaisquer buracos. Por exemplo, os números racionais não são completos, isto porque, por exemplo, falha em $\sqrt{2}$, embora que com *Cauchy* podemos construir uma seqüência de números racionais que convergem para esse valor em falha.

Com os conceitos básicos descritos, discuta-se agora os diversos espaços de funções com valores complexos ao longo do tempo t .

Considere-se o conjunto de todas as funções complexas f , num intervalo $[a, b]$. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, cujo valor absoluto elevado à p -ésima potência tem um integração finita *Lebesgue*, isto é, a p -norma definida abaixo, existe.

$$\|f\|_p = \left(\int_b^a |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty. \quad (2.26)$$

Claramente, este espaço é um espaço dimensional infinito de *Banach*, sendo denotado como $L_p[a, b]$. Em particular temos $L_\infty[a, b]$ é o conjunto de funções limitadas quase sempre sobre $[a, b]$, cuja norma é dada por,

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} = \inf \{ B \geq 0 : |f(t)| \leq B \text{ para todo } t \in [a, b] \}. \quad (2.27)$$

Considere-se as funções complexas de frequências complexas $s \in \mathbb{C}$. Sendo $D \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto aberto, assim $s_0 \in D$ sendo este um ponto em D . Seja $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida em D . Diz-se que F é analítica em s_0 se este for diferenciável em s_0 e na sua vizinhança. Por outro lado, diz-se que F é analítica em D se esta for analítica em todos os pontos de D . As funções analíticas possuem as propriedades que se seguem,

1. Se F é analítica em s_0 , então a sua derivada, em qualquer ordem, existe e é contínua em todo o s_0 ;

2. Se F é analítica em s_0 , então esta tem uma representação em série de potências em s_0 ;
3. Se F é uma representação em séries de potências em s_0 , então esta é analítica em s_0 .

Por exemplo, uma função de transferência estável é analítica na metade direita do plano complexo.

Usa-se $L_\infty(jR)$ para indicar o espaço de *Banach* para todas as funções de valorização complexa $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, sendo estas limitadas pelo eixo imaginário jR cuja norma é dada por,

$$\|F\|_\infty = \text{Sup}_{w \in \mathbb{R}} |F(jw)|. \quad (2.28)$$

Utilizamos a notação de H_∞ que descrever o sub-espaço de $L_\infty(jR)$, onde a função F é analítica e limitada na metade do lado direito do plano complexo. Para as funções em H_∞ podemos mostrar o seguinte,

$$\text{Sup}_{\text{Re}(s) \geq 0} |F(s)| = \text{Sup}_{w \in \mathbb{R}} |F(jw)| = \|F\|_\infty, \quad (2.29)$$

onde F é a transformação de *Laplace* de $f : L[f(t)] = F(s)$. Para $L_\infty(jR)$, substituindo na equação 2.28,

$$\|F\|_\infty = \text{Sup}_{w \in \mathbb{R}} \bar{\sigma} |F(jw)|, \quad (2.30)$$

onde $\bar{\sigma} |F(jw)| = \max \sqrt{\lambda(\overline{F(jw)}^T) F(jw)}$ é o maior valor singular de $F(jw)$, com $\lambda(\cdot)$ a denotar os valores próprios.

Para H_∞ , substituímos a equação 2.29 por,

$$\text{Sup}_{\text{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma} (F(s)) = \text{Sup}_{w \in \mathbb{R}} \bar{\sigma} (F(s)) = \|F\|_\infty. \quad (2.31)$$

2.2.2 Cálculo das Normas Infinitas

A forma de calcular a norma infinita H_∞ , é um pouco difícil, mas relativamente fácil de verificar. Pois, para todo o $\gamma > 0$, a veracidade de $\|G\|_\infty < \gamma$ é definida pelo teorema que se segue,

Teorema 1.5 [6] *Seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Então $\|G\| < \gamma$ se e só se $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ e se a matriz que se segue tiver os valores próprios no eixo imaginário,*

$$\begin{bmatrix} A + BV^{-1}D^T C & BV^{-1}B^T \\ -C^T(I + DV^{-1}D^T)C & -(A + BV^{-1}D^T C)^T \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

onde $V = \gamma^2 I - D^T D$

Algoritmo [6]

Entrada: Uma matriz real e racional da função de transferência $G(s)$ e uma tolerância de percentagem δ .

Saída: Norma infinita dada por $\|G\|_\infty$ com um erro inferior a δ .

Passo 1. Encontrar uma realização de $G(s)$,

$$G(s) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Passo 2. Escolher um limite superior $\bar{\gamma}$ e um limite inferior $\underline{\gamma}$ tal que $\underline{\gamma} < \|G\|_\infty < \bar{\gamma}$ (por exemplo, podemos escolher um limite inferior zero e um superior que seja suficientemente grande).

Passo 3. Se $(\bar{\gamma} - \underline{\gamma})/\bar{\gamma} < 2\delta$,

Então: $\|G\|_\infty = (\bar{\gamma} + \underline{\gamma})/2$ e pára. Senão $\gamma = (\bar{\gamma} + \underline{\gamma})/2$ e passamos para o passo 4.

Passo 4. Procurar todos os valores próprios de,

$$\begin{bmatrix} A + BV^{-1}D^TC & BV^{-1}B^T \\ -C^T(I + DV^{-1}D^T)C & -(A + BV^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}.$$

Passo 5. Se existirem valores próprios no eixo imaginário,

Então: $\underline{\gamma} = \gamma$. Senão: $\bar{\gamma} = \gamma$.

Passo 6. Volta ao passo 3.

2.2.3 Problema de Controlo Robusto para Problemas de Controlo H_∞

As leis de controlo que consideram incertezas são designadas como leis de controlo robusto. Para formular e resolver estes problemas, segundo um método de resolução usando o controlo H_∞ , usamos o teorema do ganho pequeno (*small gain*). O método foi desenvolvido por *George Zames* em 1996, com o intuito de analisar a estabilidade de sistema de controlo MIMO, na presença de perturbações destruturadas [5].

Considerando um sistema qualquer com incertezas. Suponha-se que podemos separar a incerteza nominal do sistema numa realimentação, como é mostrado na Figura 2.4.

onde $\Delta(s)$ são as perturbações impostas ao sistema. Numa fase de projecto interessa saber o quanto podemos perturbar o sistema, qual o limite máximo de perturbação sem que o sistema entre em instabilidade. Este é um problema que pode ser em parte resolvido pelo Teorema do ganho pequeno.

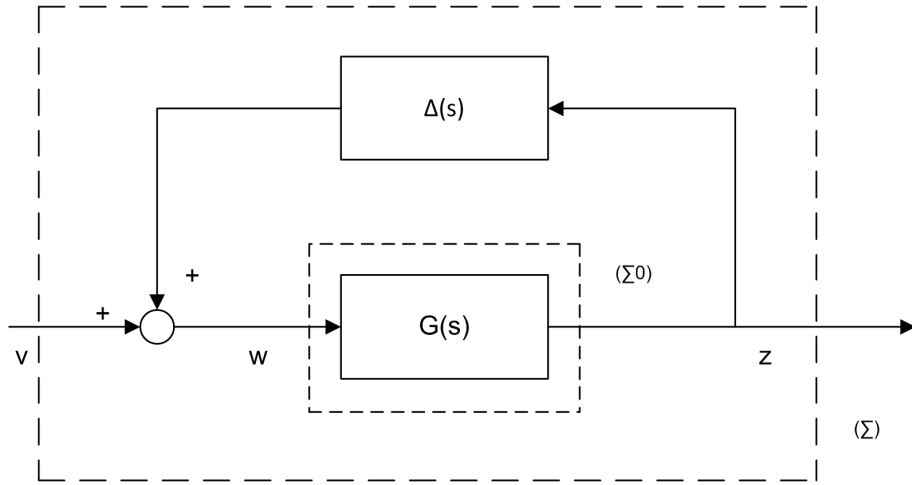


Figura 2.4: Incertezas - Teorema do Ganho Pequeno

Definição 1.2 [5] Considere-se uma entrada m e uma saída n , num sistema com uma de função transferência de $G(s)$ (dada por uma matriz $n \times m$). Sendo $p = \min(m, n)$. Os valores singulares (SVs) de $G(s)$ são definidos como,

$$\sigma_i [G(s)] = \sqrt{\lambda_i [G(s)^T G(s)]} \text{ com } i=1, k, p, \quad (2.33)$$

onde $\lambda_i[\cdot]$ nos dá os valores próprios da matriz. Note que os valores próprios são em função de s (uma variável da transformada de Laplace). Os valores singulares são sempre não negativos e geralmente dispostos em ordem decrescente, ou seja, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$.

Definição 1.3 [5] Considere-se uma entrada m e uma saída n , num sistema com uma de função transferência de $G(s)$ (dada por uma matriz $n \times m$). A norma infinita de $G(j\omega)$ é dada por,

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_1 [G(j\omega)], \quad (2.34)$$

ou seja, a norma infinita da função de transferência é igual ao maior valor singular da função de transferência assumindo todas as frequências.

Teorema 1.6 [6] Considerando o sistema dado pela Figura 2.4, podemos analisar a robustez deste usando o teorema de Ganho Pequeno. Onde $G(s)$ é uma função de transferência, assumida como sendo estável com $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$ para qualquer $\gamma > 0$. Então o sistema perturbado (em malha fechada) é estável para qualquer que seja a perturbação imposta, isto desde que $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$.

Assim, considerando um espaço de controlo H_∞ , diz-se que a função de transferência pertence a este espaço se esta for estável (ou seja, tendo todos os seus pólos com partes reais negativas), continua, analítica e limitada em \mathbb{C}^+ .

2.3 Método de Lin

Considerando sistema de carácter não linear, é sabido que o estudo do controlo robusto para este sistemas é mais complexo. Geralmente a abordagem de controlo robusto é aplicado mais a sistemas com características lineares, sendo em alguns casos de não linearidade quase impossível a sua aplicação. No entanto, esse não é o caso quando se considera uma aproximação de controlo óptimo. Na sequência do estudo do controlo para sistemas não lineares, *Lin* [6] apresenta um método de controlo que visa não só fazer uma análise do forro robusto deste como aproveita também os conceitos de controlo óptimo para melhorar os seus resultados.

Para ilustrar o desenvolvimento do método utilizado por *Lin*, considere-se o sistema não linear, com presença de incertezas, dado na forma [6],

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u + B(x)f(x), \quad (2.35)$$

onde $A(x)$ e $B(x)$ são matrizes da função não linear, sendo $x : A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x : B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Será assumido que o controlo u dá entrada de forma linear no sistema. Considere-se ainda o modelo de incertezas presente no sistema dinâmico dado por $B(x)f(x)$. Adopte-se as seguintes hipóteses,

Hipótese 2.1 - $A(0) = 0$ e $f(0) = 0$ então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio (que será o único equilíbrio se o problema de controlo robusto tiver solução).

Hipótese 2.2 - A incerteza $f(x)$ é delimitada; assim, existe uma função não negativa $f_{max}(x)$, tal que $\|f(x)\| \leq f_{max}(x)$.

O nosso objectivo é resolver o seguinte problema de controle robusto para estabilizar o sistema sob a presença de incertezas.

Problema 2.1 - Controlo Robusto

Procura-se uma lei de controlo $u = u_0(x)$ que realimente o sistema em malha fechada, tal que,

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u_0(x) + B(x)f(x). \quad (2.36)$$

Sendo este globalmente e assintoticamente estável para todas a incertezas $f(x)$ e satisfaça a Hipótese 2.2. O problema de controlo robusto descrito será resolvido indirectamente, transformando-o num problema de controlo óptimo.

Problema 2.2 - Controlo Óptimo

Considere-se o sistema nominal dado por,

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u. \quad (2.37)$$

Tem-se de procurar uma lei de controlo de realimentação $u = u_0(x)$ que minimize a seguinte função de custo,

$$\int_0^{\infty} (f_{max}(x)^2 + x^T x + u^T u) dt. \quad (2.38)$$

A relação entre o problema de controlo robusto e o problema de controlo óptimo é descrito no teorema que se segue,

Teorema 1.7 [6] *Se existir uma solução para o problema 2.2 de controlo óptimo, então essa solução será também solução do problema de controlo robusto 2.1.*

Controlo Óptimo Robusto Baseado na Linearização Óptima

Neste capítulo vai-se considerar o projecto de controladores quadráticos robustos com base em modelos optimamente linearizados.

3.1 Regulador Linear Quadrático (LQR)

Consideremos o sistema linear,

$$\dot{x} = Ax + Bu \text{ com } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (3.1)$$

Num projecto de controlador quadrático, interessa escolher o vector de controlo $u(t)$ para que um critério de desempenho (J_z) seja minimizado, sabendo que este último é definido por,

$$J(u) = \int_0^{\infty} L(x, u) dt, \quad (3.2)$$

onde $L(u, x)$ é uma função quadrática de x e u .

Nos reguladores lineares quadráticos interessa parametrizar o vector de controlo como uma função linear do vector de estado, isto é,

$$u = -Kx, \quad (3.3)$$

onde K é uma matriz com m linhas e n colunas (com $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$).

Portanto, o dimensionamento de um controlador resume-se em determinar os elementos de uma matriz K de modo a minimizar o critério de desempenho J_z quando o controlo for escolhido segundo a Equação 3.3.

A expressão $L(x, u)$ na Equação 3.2 é supostamente quadrática em x e u . Portanto esta expressão pode ser escrita sob a seguinte forma,

$$K(x, u) = x^T Qx + u^T Ru, \quad (3.4)$$

onde Q é uma matriz simétrica e positivamente semi-definida, enquanto a matriz R é positivamente definida. Com a equação 3.4, a nova forma do critério de desempenho 3.2 é,

$$J(u) = \int_0^{\infty} x^T Qx + u^T Ru dt. \quad (3.5)$$

Substituindo a expressão de u da Equação 3.3 nas Equações 3.1 e 3.5, obtém-se respectivamente

$$\dot{x} = Ax - BKu = (A - BK)x, \quad (3.6)$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T(Q + K^T RK)x) dt. \quad (3.7)$$

A Equação 3.6 é a equação do sistema de malha fechada. Interessa, a seguir, achar uma função de *Lyapunov* V para o sistema de malha fechada sob a forma $V(x) = x^T Px$, sendo P uma matriz simétrica positivamente definida. Neste caso, a derivada no tempo desta função de *Lyapunov* deve ser igual à oposta da função a ser integrada na Equação 3.7, isto é,

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^T Px) = -x^T(Q + K^T RK)x. \quad (3.8)$$

Mas tem-se,

$$\frac{d}{dt}(x^T Px) = -\dot{x}^T Px + x^T P\dot{x}. \quad (3.9)$$

Portanto,

$$x [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x = -x^T (Q + K^T RK) x. \quad (3.10)$$

Para que esta equação diferencial seja estável é preciso que a matriz K satisfaça a seguinte equação (de *Lyapunov*),

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T RK). \quad (3.11)$$

A solução desta Equação é,

$$K = R^{-1} B^T P. \quad (3.12)$$

Portanto, pela Equação 3.3,

$$u = -Kx = -R^{-1} B^T Px. \quad (3.13)$$

Repare-se que neste caso, a matriz P da equação anterior deve ser tal que satisfaça a seguinte equação de *Riccati*,

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (3.14)$$

O método resume-se então a,

1. Achar P pela Equação de *Riccati* 3.14;
2. Substituir P na Equação 3.13 para achar o controlo ótimo que regule o sistema (e que minimize a função de custo na equação 3.2).

O método clássico de LQR acima apresentado permite controlar os sistemas para estabilizá-los na origem (ponto de equilíbrio). No entanto para estabilizar um sistema numa referência x_{ref} não necessariamente nula, ou para acompanhar uma trajectória é preciso recorrer ao método de LQR apresentado em [12] cuja extensão dá lugar à seguinte lei de controlo robusto (chamado Método de *Artstein*),

$$u = -R^{-1}B^T (P(x - x_{ref}(t)) + r), \quad (3.15)$$

onde,

$$\begin{aligned} r &= -(A^T - PBR^{-1}B^T)^{-1} Pz \\ z &= -Ax_{ref}(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pode constar neste controlador um sinal de entrada qualquer, ou seja, podemos gerar um sinal de entrada qualquer e verificar que na saída temos um resultado controlado e estabilizado.

3.2 Linearização Óptima

3.2.1 Densificação de Domínios

Tendo em conta os problemas que os métodos de linearização acarretam, houve a necessidade de controlar o domínio desses problemas.

O método de densificação do domínio baseia-se num processo que nos permite controlar o domínio do problema. O utilizador considera uma determinada "caixa" composta por diversas curvas de densificação que a preenche na totalidade. O processo consiste em determinar alguns pontos sobre as curvas estipuladas pelo usuário, com o benefício de reduzir o número de pontos usando o método de linearização óptima, sem que este prejudique os resultados em termos de precisão [2].

Definição 3.1 [2]. *Considere-se uma caixa (ou um hiper-rectângulo), dado por $B = \prod_{i=1}^r [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo real $J = [a, b]$. Então, a função $h : J \rightarrow B$ é dita como sendo uma curva densa α em B , se,*

$$\forall x \in B, \exists t \in J : \|h(t) - x\| \leq \alpha. \quad (3.17)$$

Existem diversos métodos para a construção destas curvas, sendo estas densas até uma dada taxa α na caixa determinada pelo utilizador. Vamos considerar a função $h : J = [0, 1] \rightarrow B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, definida como,

$$\forall \theta \in J, h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_n(\theta)), \quad (3.18)$$

com,

$$\begin{cases} h_1 = \frac{(b_1 - a_1)}{2} \cos(\alpha_1 \theta) + \frac{(a_1 + b_1)}{2} \\ h_2 = \frac{(b_2 - a_2)}{2} \cos(\alpha_2 \theta) + \frac{(a_2 + b_2)}{2} \\ \dots \\ h_n = \frac{(b_n - a_n)}{2} \cos(\alpha_n \theta) + \frac{(a_n + b_n)}{2} \end{cases} \quad \text{e } \alpha_n = \mu^{n-1} 2^n \pi. \quad (3.19)$$

3.2.2 Linearização

Assume-se que se pretende linearizar $\dot{x} = f(x, u)$ em torno do ponto de equilíbrio (x_e, u_e) . E então acham-se as matrizes A e B que minimizam,

$$J(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, b_{12}, b_{22}, \dots, b_{nn}) = \sum_{S=1}^N \|f(x_e + x_s, u_e + u_s) - Ax_s - Bu_s\|^2, \quad (3.20)$$

Sendo, $y = f(x_e + x, u_e + u)$ para cada $(x, u) \in D$, e onde S é um conjunto de pontos que densifique um determinado domínio D que contenha (x_e, u_e) .

Na verdade, a linearização óptima é um problema de aproximação óptima, no sentido em que é efectuada uma procura da melhor aproximação linear de um modelo não linear. Aproximação essa que reúne algumas características, nomeadamente no facto da função poder ser descontínua e, por outro lado, o problema é estabelecido mais no espaço de parâmetros de que num espaço de funções. Para resolver o problema, podemos o expor segundo um problema de regressão linear múltipla¹, considerando um vector de entrada dado por $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$, $C = [A \ B]$ e y dado por,

$$y = Cz. \quad (3.21)$$

Assim, segundo a teoria da regressão linear múltipla, obtemos a solução baseada na relação linear 3.21 dada por,

$$C = \left(\sum_{S=1}^N y_s z_s^T \right) \cdot \left(\sum_{S=1}^N z_s z_s^T \right)^{-1}, \quad (3.22)$$

onde Z_S são vectores determinados pelo método de densificação acima descrito.

¹Na regressão linear múltipla assume-se que existe uma relação linear entre uma variável dependente Y qualquer, as k variáveis independentes (ou regressoras) e x_j (com $j = 1, \dots, k$), sendo esta relação dada por: $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon$. Onde os $p = k + 1$ parâmetros β_j com $j = 0, 1, \dots, k$ são os coeficientes parciais de regressão e ε o erro aleatório

Controlo Robusto do Oscilador de Chua-Matsumoto

O Capítulo 4 apresenta na prática uma aplicação de todos os conceitos teóricos anteriormente descritos. Para o efeito é considerado um modelo sistema simples mas com característica de estado caóticas. A fim de resolver a problemática deste sistema, será aplicado um método de controlo análogo à apresentada por *Lin* no Capítulo 3, onde para além de ser efectuado um controlo robusto do sistema, este é desenvolvido considerando também uma forma óptima de controlo. Assim, com a introdução de diferentes sinais de entrada do bloco principal do sistema, são estudados os comportamentos do oscilador e desenvolvida uma análise robusta e óptima do controlo e da sua estabilização.

4.1 Sistemas Caóticos

O conceito de Caos está associado a um comportamento incerto ou instável de certos sistemas quando estes estão sujeitos a determinadas leis determinísticas (bastantes usadas para descrever alguns fenómenos da natureza quando estas são designadas como complexas na sua evolução temporal).

A sua teoria entrou em voga a partir dos anos 80, mas foi nos anos 60 que o meteorologista do MIT (Massachusetts Institute of Technology) com *Edward Lorenz* lançou algumas sementes com um estudo computacional dos padrões do tempo. Os fenómenos ditos "caóticos" são aqueles onde não há previsibilidade da sua ocorrência. Tendo em conta os parâmetros e variáveis de entrada num determinado sistema, os resultados deste podem surgir numa forma instável no que diz respeito à sua evolução temporal, ou seja, a causa da instabilidade pode dever-se à acção e/ou interacção de elementos que integram o sistema numa forma praticamente aleatória.

A ideia inicial para a teoria do caos passava pela idealização de que com pequenas variações nas condições de um ponto de um sistema dinâmico poderia ter consequências de proporções inimagináveis,

"O bater de asas de uma borboleta em Tóquio pode provocar um furacão em Nova Iorque."

Muitas das teorias tiveram de ser revistas mais tarde por serem alvo de incerteza relativamente à sua veracidade. O método lógico fez parte dessa análise que a ciência usou para chegar a verdades científicas.

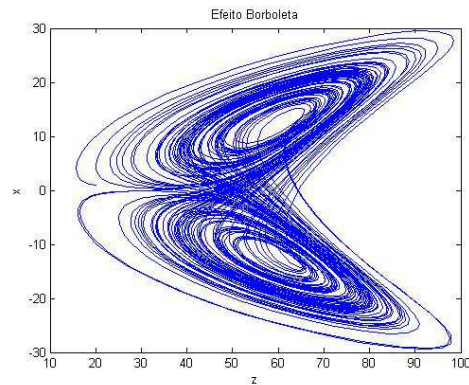


Figura 4.1: Efeito Borboleta Teorizado por *Edward Lorenz* em 1963

Os cálculos que envolvem a Teoria do Caos podem ser usados para compreender melhor os fenómenos ligados a diversas áreas, tais como a meteorologia, variações no mercado financeiro, a queda das gotas e inúmeras situações que subsistem no nosso dia-a-dia, sendo nesta evolução dos sistemas dinâmicos cruciais as condições iniciais a que estes se sujeitam. Atendendo a dinâmica caótica que pode ser explorada para a implementação de sistemas de comunicação eficientes e simples, por outras palavras, através da comunicação usando o sincronismo entre sistemas osciladores caóticos podemos transmitir informações adequadamente codificadas dentro de um conjunto invariante caótico [14].

Com o intuito de analisar a estabilização de um dado sistema portador de um fenómeno de estado caótico, consideramos circuitos com ligações aos sistemas de controlo de aeronaves, deste modo efectuamos esta análise de uma forma robusta relativamente ao sinal de saída dos osciladores caóticos. Neste Capítulo são desenvolvidas simulações em torno deste fenómeno utilizando o oscilador de *Chua-Matsumoto*.

4.2 Osciladores

Na electrónica, um oscilador é um circuito capaz de produzir um sinal repetitivo. Com o uso deste, pretende-se obter sistemas de oscilação que sejam estáveis e periódicos, mantendo-se uma frequência e uma forma de onda constantes. Os sinais mais comuns de serem produzidos por um oscilador são as ondas sinusoidais e as quadradas que se pretendem obter sem que haja a necessidade de aplicar sinais externos para as produzir. O seu funcionamento baseia-se num circuito amplificador e numa malha de realimentação positiva que induz uma instabilidade de operação que resulta na oscilação.

As aplicações dos osciladores em componentes electrónicos são vastas. A nível dos aviónicos estes podem ser parte integrante de sistemas de controlo e computadores que através de pulsos de relógio geram sinais essenciais para a obtenção dos dados requeridos ao sistema. Relativamente a ondas do forro material temos no caso das telecomunicações que também são usadas em aviónicos para obter e reproduzir ondas sonoras, os seus sinais possuem formas variadas que são utilizadas como portadoras. Podem existir também casos sem que se obtém sinais de ondas variadas que são usadas para testar e caracterizar circuitos

electrónicos e alguns dispositivos, que é o caso dos equipamentos de teste e medida.

Existem diversos tipos de osciladores electrónicos, os designados LC ¹ são dos mais comuns, destes destacam-se alguns dos mais conhecidos como o de *Armstrong*, *Clapp*, *Chua-Matsumoto*, *Colpitts*, *Hartley*, *Pierce*, *Vackar*, *Seiler*, ponte de *Wien*, entre outros. Um dos mais utilizados na indústria é o de *Colpitts*, sendo este um oscilador de alta frequência que à saída deverá obter um sinal com uma determinada frequência sem que exista uma entrada. *Hartley* é também bastante conhecido por ser possuidor de harmónicas bastante ricas, o que obriga a uma filtragem um pouco mais cuidada do sinal para eliminar algumas dessas harmónicas.

4.3 O Oscilador de *Chua-Matsumoto*

O oscilador de *Chua-Matsumoto* é um exemplo de um oscilador sinusoidal, simples, detentor de características não lineares, cuja dinâmica pode ser modulado por um sistema de equações diferenciais. Este circuito foi inventado em 1983 pelo *Dr. Leon Chua*.

Um oscilador sinusoidal pode ser considerado como sendo um conversor de potência contínua, fornecida por uma fonte de alimentação, em potência alterna, ou seja, segundo um sinal sinusoidal que irá excitar o circuito que o integra. As aplicações deste tipo de osciladores são vastas. Atendendo ao sector aeronáutico existem diversos componentes que integra algumas das ligações que se servem dos osciladores sinusoidais. Os princípios de funcionamento deste tipo de osciladores, dividem-se em duas famílias,

1. *Oscilador de Realimentação*, no caso dos osciladores com válvulas, amplificadores operacionais, transístores de junção bipolar e de efeito campo em que a oscilação é produzida por circuitos realimentados marginalmente estáveis;
2. *Osciladores de Resistência Negativa*, ou seja, quando a oscilação é provocada por circuitos detentores de dispositivos de resistência negativa. Exemplo disso, são os osciladores que apresentam resistência negativa em determinadas condições de polarização ou carga, como os díodos de túnel, os díodos de *Gunn* e os *Impatt*.

Sendo o circuito de *Chua-Matsumoto*, da Figura 4.2, portador de características caóticas, é efectuada uma análise robusta do comportamento do sistema. Analisa-se o sinal de saída do oscilador fazendo-se variar os sinais de entrada, modulados por sinais com diferentes tipos de onda. O circuito é constituído por uma bobine, dois condensadores e três resistências, sendo uma das resistências não linear. Podemos dividir o circuito em três partes [15]:

1. Uma bobine L (ligada em série com uma resistência), uma resistência R , dois condensadores C_1 e C_2 que o torna num circuito convencional de oscilação linear. Relativamente ao resto do circuito, em curto-circuito, pode dar-nos oscilações amortecidas.

¹Oscilador composto por um bobine que armazena a energia em forma de campo magnético, e um condensador em paralelo que efectua o armazenamento da energia em forma de carga eléctrica. São osciladores mais sensíveis.

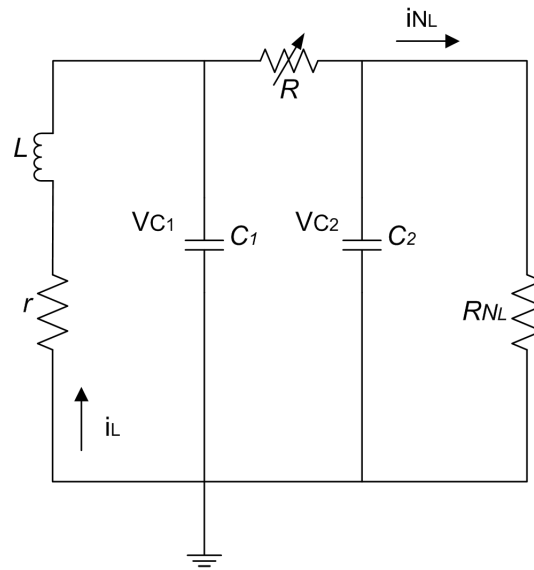


Figura 4.2: Circuito de *Chua-Matsumoto*

2. A *ampop* associada às resistências tem um efeito de resistência negativa com um tamanho $-R_1$. Sendo este ainda um elemento do circuito linear, por si só não é este elemento que vai dar origem ao caos, embora esta actue como uma fonte de energia para a dinâmica do sistema.
3. O díodo com a característica par dá-nos a não linearidade do circuito. Os díodos servem simplesmente para passar a corrente na resistência R_2 em paralelo com a resistência $-R_1$ quando a tensão ficar maior do que a que passa na voltagem.

A combinação entre os efeitos descritos no ponto 2 e 3 são o que nos dão, a não linear resistência negativa de valor $-R_1$ para $V < V_c$ e $-R_1R_2$ (ou $R_2 - R_1$) para $V > V_c$.

É difícil prever o efeito de não linearidade de um sistema. No caso do circuito da Figura 4.2, há questões que se colocam relativas ao seu comportamento, Será que a orbita persiste com um comportamento periódico ou quebra-se quando na presença do caos? Quais são as rotas do caos em que estas ocorrem? E por fim, qual é a natureza da dinâmica caótica do sistema?

Algumas destas questões são respondidas com os resultados práticos e optimizadas de modo a eliminar o seu estado caótico.

4.3.1 Descrição do Modelo

A dinâmica do modelo revela-se pela modelação das *Leis de Kirchoff*, nomeadamente pelas leis dos nós e das malhas, descrito através das equações de estado diferenciais de primeira ordem. Para mostrar o caos do sistema, ou seja, para o identificar como sendo um sistema caótico, é necessário haver três variáveis e respectivas equações e, como é claro, deve haver não linearidade no seu estado [13],

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{R}(V_{C_2} - V_{C_1}) - i_{NR}(V_{C_1}) \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{1}{R}(V_{C_1} - V_{C_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -V_{C_2} \end{cases} \quad (4.1)$$

As equações descritas envolvem equações para as tensões V_1 com C_1 , V_2 com C_2 e a corrente I através da bobine L . As equações devem preencher os requisitos,

1. A existência das três equações é dada pela inclusão de três elementos, nomeadamente C_1 , C_2 e L ;
2. A não linearidade no circuito vem na forma de resistência negativa, produzida pela ampop, díodos e as resistências associadas. Assim, a única não linearidade é dada pelo função $f(v_R)$.

A curva característica do sistema é linear por partes, cuja forma é em tudo depende do estado das condições de funcionamento, tais como o valor das correntes e tensões que percorrem o circuito. Este considerado como sendo um circuito autónomo, visto possuir apenas elementos electrónicos não variáveis no tempo e fontes de correntes constantes, contendo apenas três elementos energéticos.

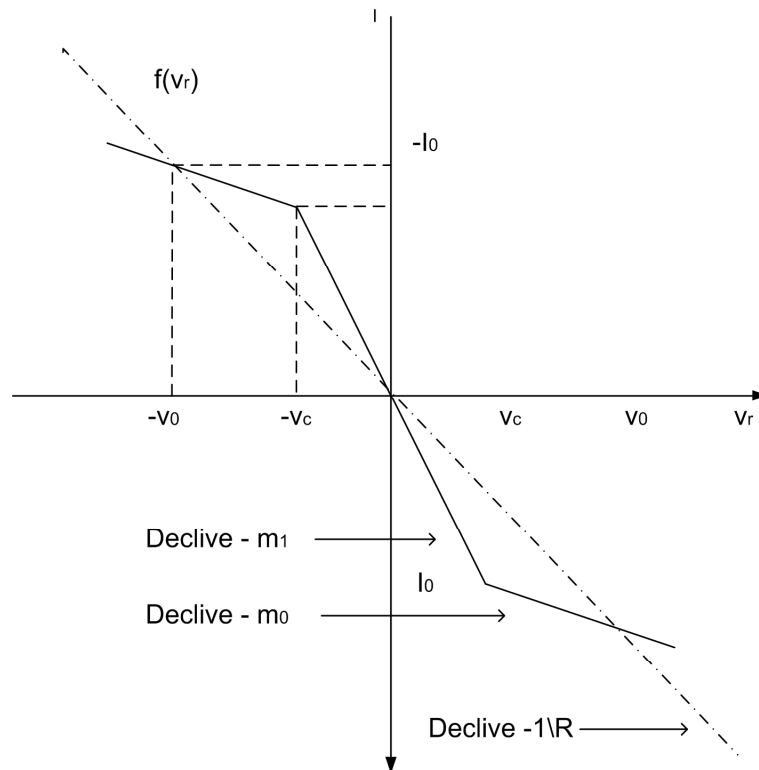


Figura 4.3: Curva Característica do Circuito de Chua-Matsumoto

Com os respectivos declives $m_0 = \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 * R_2}$ e $m_1 = \frac{1}{R_1}$, temos a função não linear $f(v_R)$, é dada por,

$$f(v_R) = m_0 v_R + \frac{1}{2}(m_1 - m_0) \{|v_R + v_0| - |v_R - v_0|\}. \quad (4.2)$$

Para os sinais *DC* (*Digital Converter*), os condensadores agem como circuitos abertos e a bobine como um curto-circuito, de modo que o ponto de funcionamento I_0 V_0 é dado por uma das duas intersecções da linha de carga $-1/R$ (inclinação ou declive da linha), com a não linear I - V característica. Pode-se visualizar este ponto estacionário de funcionamento se deixarmos passar no condensador C_2 um valor de $75nF$, por exemplo, quando as oscilações decaem e se vão afastando gradualmente. Para valores adequados de C_1 , C_2 e L estas soluções estacionárias, ou de pontos fixos, podem tornar-se instáveis para as oscilações e, em seguida, dar origem a uma dinâmica caótica. Numa primeira circulação, temos o exemplo o I_0 e V_0 estarem no ponto fixo, mas em seguida mudam para a frente e para trás consoante os valores oscilantes que se encontram entre os pontos $+I_0$, $+V_0$ e $-I_0$, $-V_0$.

Pode-se generalizar o modelo, ou seja, transformar as equações de estado do circuito de *Chua* em três equações diferenciais escalares, obtemos assim uma solução explícita do problema. Podemos usar esta solução para efectuar simulações computacionais usadas para verificar o comportamento do circuito através da trajectória do circuito. Resulta nas equações tal como se segue [7] [13],

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - f(x)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(x - 2ac), & \text{se } x \geq 2ac \\ -b\sin\frac{\pi x}{2a} + d, & \text{se } -2ac < x < 2ac \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac), & \text{se } x \leq -2ac \end{cases}, \quad (4.4)$$

$$d = \begin{cases} \pi, & \text{se } n \text{ for impar} \\ 0, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Observando o circuito físico e simulando-o, verifica-se que a orbita periódica sofre varias duplicações e bifurcações no seu período de simulação, sendo que em alguns casos onde não há equilíbrio do sistema este se torna ruidoso. Inicialmente o ruído é fraco, como o esperado para um período de duplicação da rota para o caos, mas perturbando a oscilação sobre V_0 , como por exemplo alterando o valor dos parâmetros fazendo-se aumentar a não linearidade, verificamos que a dinâmica começa a mudar aleatoriamente, oscilando entre os valores de V_0 e $-V_0$.

Analisando a Figura 4.4 da simulação do modelo de *Chua* verifica-se que não há uma progressão periódica do pulso da onda das componente simuladas, estas propagam-se ao longo do eixo mas sem repetição dos seus pulsos, possui uma oscilação espacial aleatória. Assim, não é possível neste caso caracterizar o comprimento de onda existente, pois é difícil localizar a distancia entre os dois pontos na mesma fase de vibração. Do ponto de vista matemático, podia-se designar a função de onda quando há uma repetição desta no espaço,

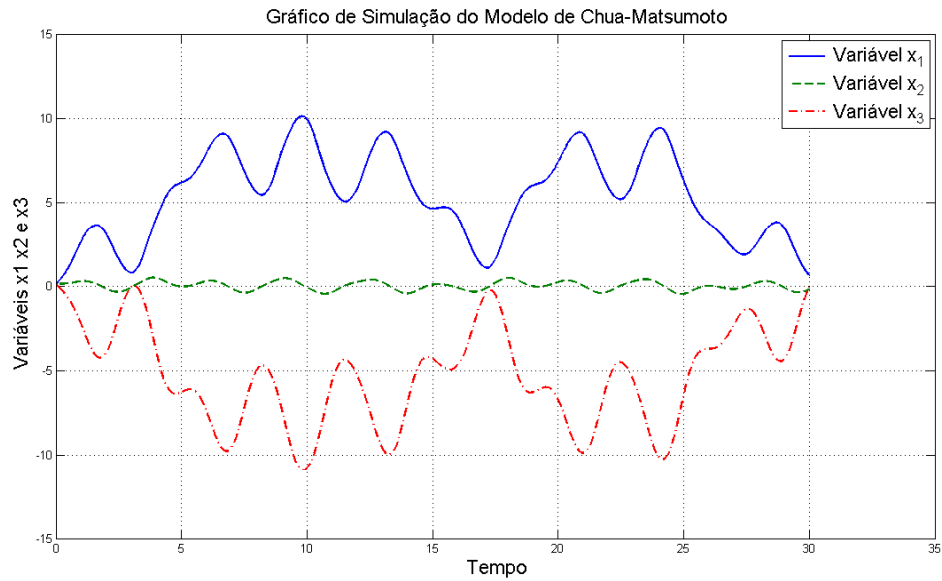


Figura 4.4: Simulação do Modelo Original

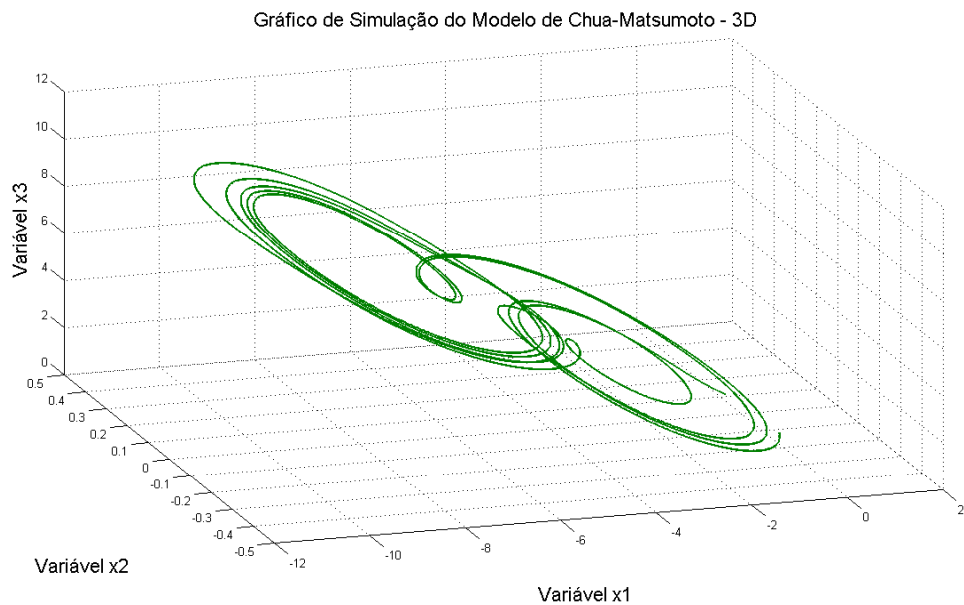


Figura 4.5: Simulação do Modelo Original - 3D

$$y(x, t) = y(x + \lambda, t) = y(x + 2\lambda, t) = \dots \quad (4.6)$$

Relativamente à Figura 4.5 verifica-se que os sete rolos (*scroll*) impostos na simulação

seguem uma determinada trajectória mas não a repetem pelo mesmo caminho, apresenta um gráfico descoordenado. Neste caso, visto não haver repetição dos ciclos de onda não é possível analisar os seus parâmetros, temos deste modo verificado o caos do sistema.

4.4 Projecto do Controlador

O modelo do oscilador é dado, na sua forma inicial, pelas equações diferenciais de primeira ordem 4.1 obtidas pelas Leis de *Kirchoff*. Para desenvolver as simulações pretendidas, as equações de estado diferenciais são transformadas em equações de estado escalares como está descrito em 4.3, sendo estas reveladoras da dinâmica do modelo. Note-se que sobre estas não está presente qualquer vector de controlo, ou seja, temos um sistema inicial sem realimentação, com entradas e saídas directas do seu sinal. Esta é uma das características de um oscilador, componente autónomo no seu funcionamento, sem necessidade de ter incluído sistemas de controlo nas suas equações de dinâmica do modelo. Com a implementação do controlo em duas das equações obtemos o modelo que será usado nas simulações de controlo e estabilização com a metodologia de controlo consideradas, a importância de introduzir variáveis de controlo u_1 e u_2 no sistema é a de perturbar de forma activa o seu sinal de portadora e verificar o seu comportamento perante a perturbação,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - f(x)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 + u_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

A fim de efectuar a simulação robusta e posterior controlo do comportamento caótico do oscilador de *Chua-Matsumoto*, considere-se as equações diferenciais dadas em 4.7 e os valores que se seguem para os parâmetros especificados nas equações [7],

$$\alpha = 10.814, \beta = 14, a = 1.3, b = 0.11, c = 7e \ d = 0, \quad (4.8)$$

A capacidade de estabilização do sistema perante uma determinada perturbação pode ser verificada considerando-se o método de LQR. Contudo, dada a problemática do sistema em causa foi efectuada uma análise robusta deste. O primeiro passo é linearizar o sistema e de seguida forçar o sistema com perturbações sob o seu estado de equilíbrio a fim de observar o comportamento deste. O estado é composto por,

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T. \quad (4.9)$$

As simulações são inicializadas considerando um ponto qualquer inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$, sendo este um ponto de partida para as simulações solicitadas. Note-se que os parâmetros com os valores a e b nada tem a ver com os da função de custo para determinação das curvas densificadoras. O método de controlo utilizado foi o LQR, mas com algumas alterações em relação ao método geralmente utilizado como se pode verificar pelo Capítulo 3. Para o método de linearização considerado, tendo sido este aplicado ao sistema original em torno das condições de equilíbrio assumidas, a obtenção das matrizes A e B pretendidas partiu do método de densificação de curvas. Através desta simulação

verificamos que o sistema é controlável, observável e completamente observável tendo em conta a caracterização de *Kalman* para cada um dos casos, note-se que ao verificarmos este aspecto ajuda-nos a verificar também a viabilidade do método de linearização usado,

$$A = \begin{bmatrix} 0.75003342509405 & 10.81037766623335 & 0.00007154526521 \\ 0.999999999999996 & -0.999999999999931 & 0.999999999999595 \\ -0.000000000000001 & -13.99999999999977 & -0.000000000000136 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.00475534140749 & -0.03295621862086 \\ 1.000000000000867 & 0.00000000006126 \\ 0.000000000000292 & 1.00000000002060 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Para projectar e estabilizar o sistema utilizamos o método dos reguladores lineares quadráticos mas de forma modificada. O designado método de mudança dos parâmetros de LQR é foi desenvolvido por *Artstein* [12], cuja extensão foi apresentado no Capítulo 3, tendo especial atenção às Equações 3.15 e 3.16 que nos permitem simular o modelo.

Pretende-se com este método encontrar uma matriz de ganho $K = -R^{-1}B^T P$, que satisfaça a equação de *Lyapunov*, onde a matriz P é solução da equação de *Riccati* dada em 3.14, e com a existência deste provamos que temos um controlador óptimo capaz de regular o sistema.

Relativamente às matrizes Q e R , estas foram assumidas como sendo iguais à matriz identidade, respectivamente,

$$K = \begin{bmatrix} 1.2194 & 0.0766 & 0.0402 \\ 0.0458 & 0.0002 & 0.0369 \end{bmatrix} \times 10^4, \quad (4.12)$$

$$P = \begin{bmatrix} 4.1826 & 0.1418 & 0.1424 \\ 0.1418 & 0.0083 & 0.0047 \\ 0.1424 & 0.0047 & 0.0084 \end{bmatrix} \times 10^5, \quad (4.13)$$

$$e = \begin{bmatrix} -1.7621 + 0.0223i \\ -1.7621 - 0.0223i \\ -1.7897 \end{bmatrix} \times 10^2. \quad (4.14)$$

Observando os valores próprios obtidos, pode-se retirar algumas conclusões acerca do sistema linearizado. Verifica-se que todos os valores próprios possuem partes reais negativas, o que significa que temos uma matriz de *Hurwitz*², logo podemos dizer que temos um sistema linearizado óptimo. O método de LQR modificado mostrou-se bastante atractivo, uma vez que foi encontrado um controlo óptimo que regula o sistema. O facto de 3.14 ter uma solução P implica que o sistema é estabilizável.

²O critério de *Hurwitz* diz que os valores próprios de uma matriz quadrada Z possuem parte real negativa se, e somente se, todos os coeficientes do polinómio característico de Z são positivos e se os determinantes $\Delta_j, j = 1, \dots, n$ referentes à matriz de *Hurwitz* são positivos.

4.5 Estabilização do Oscilador de *Chua-Matsumoto*

Entenda-se como decaotização o acto de eliminar o estado caótico do modelo não linear inicial. A estabilização do modelo considerado é desenvolvida segundo o método apresentado no Capítulo 3, onde é considerada a forma de estabilização linear para sistemas não lineares. O modelo não considera apenas a sua forma empírica de estudo, considera também uma determinada perturbação sobre este que está utilizada para controlar (decaotizar) o próprio sistema.

Ao em vez de se considerar o valor de controlo da extensão ao método de *Artstein*, consideramos que na entrada do sistema temos um controlo de $u = -K_{lqr}x$. Sendo assim apenas considerada a matriz de transferência de controlo que o método de LQR nos oferece. Na decaotização não se tem qualquer sinal a ser projectado sobre a entrada do sistema, é verificado com este processo o próprio sinal do sistema do qual é eliminado o seu estado de caos como consta nas figuras 4.4 e 4.5.

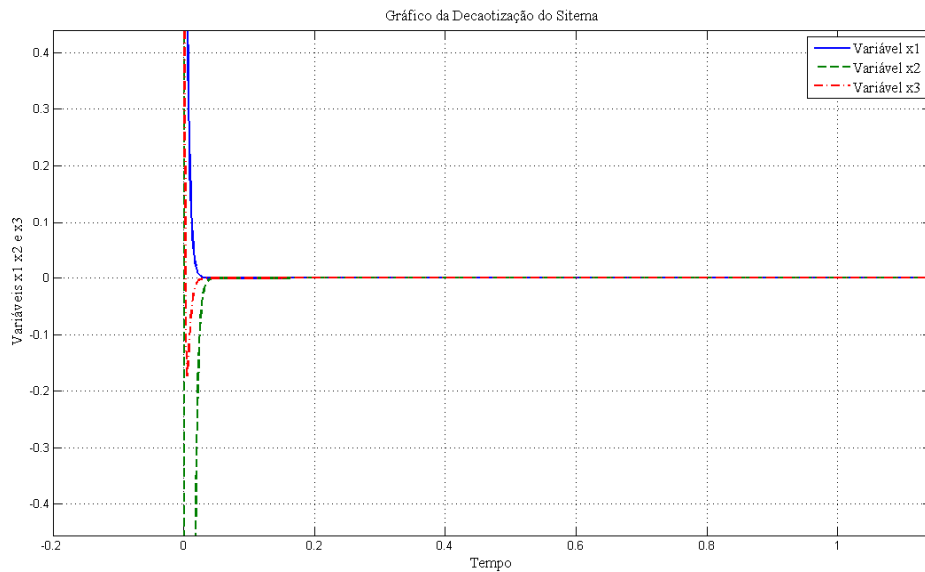


Figura 4.6: Decaotização do Sistema Não Linear Original

O caos pode ser eliminado através de perturbações periódicas. Pelo que se visualiza na Figura 4.6 que se obtém da simulação, averigua-se que, para todas as variáveis do sistema, o estado de caos é rapidamente suprimido. Podemos eliminar o caos através de perturbações periódicas.

4.6 Geração de Sinais Sinusoidais com o Oscilador de *Chua-Matsumoto*

4.6.1 Onda Sinusoidal Pura

Uma onda sinusoidal possui um movimento ondulatório e periódico, propagando-se segundo um sentido positivo do eixo. Quando se efectua um estudo de ondas sinusoidais podemos ter uma possível expressão matemática como a que se segue,

$$y(x, t) = f(x - \nu t) = A_{mp} \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(\frac{x}{\nu} - t \right) \right], \quad (4.15)$$

Neste caso, da expressão 4.15, temos uma onda que se propaga da esquerda para a direita com uma velocidade ν . Onde a amplitude da onda é dada por A_{mp} , permitindo-nos deste modo determinar se a onda é grande ou pequena. A chamada frequência angular é descrita através do período $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Analogamente, o número de onda é definido por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Assim, em função destas quantidades podemos reescrever a nossa função de onda sinusoidal que também pode vir na forma da equação 4.16 que se segue,

$$y(x, t) = A_{mp} \sin (kx - \omega t + \alpha). \quad (4.16)$$

Note-se que o circuito possui elementos como os díodos, estes são elementos passivos não lineares (não necessitam de ser alimentados) que sob o ponto de vista ideal comportam-se como um circuito fechado quando polarizados directamente e como um circuito aberto quando estão inversamente polarizados. As características não lineares dos díodos permitem-nos efectuar determinadas tarefas, tal como a rectificação de uma onda sinusoidal, o que não é possível obter com os componentes lineares. Na prática o díodo ideal não existe, na realidade existe dissipação de energia enquanto idealmente esta não existe. Mas o que nos interessa de momento é rectificação que poderá haver na onda gerada na entrada do sistema a ser controlado.

Na primeira simulação, foi gerada uma onda sinusoidal que dá entrada no sistema segundo o parâmetro x_1 , enquanto as outras componentes x_2 e x_3 dão entrada a zero. Como o interesse é de verificar o comportamento do oscilador com a geração de diferentes ondas, serão focados essencialmente os resultados de x_1 que é onde dará entrada a designada geração. Portanto, temos na entrada a onda sinusoidal dada por 4.17,

$$y(x_1, x_2, x_3) = \left[\sin(0.5t) \quad 0 \quad 0 \right]^T. \quad (4.17)$$

Na Figura 4.7 temos a representação das ondas sinusoidais que dão entrada x_{1ref} (referente à onda dada pela Equação 4.17) e saída x_1 no sistema, com o intuito de comparar o sinal de ambas verifica-se que estas possuem uma amplitude unitária, e a onda apresenta um movimento periódico com repetição de ciclos. Apura-se ainda que o erro existente entre o sinal de entrada e o de saída é muito pequeno, sendo estes bastante próximos, significa isto que o sistema controla bastante bem os sinais que nele dão entrada.

Com os resultados obtidos pode-se dizer que o sistema se comporta bem com a aplicação do método utilizado. Quanto ao estado de comportamento caótico do sistema, passa

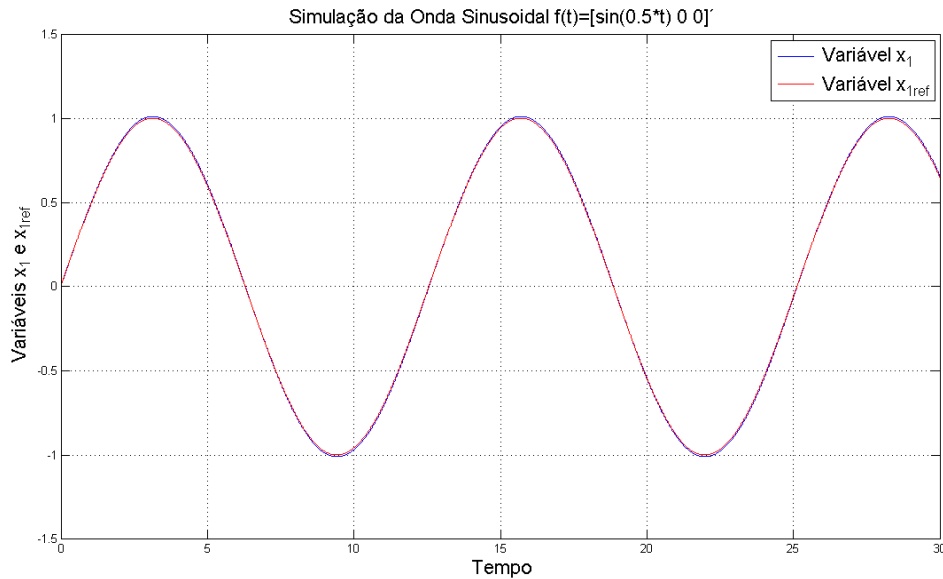


Figura 4.7: Simulação da Onda Sinusoidal

a ter um movimento controlado e com sobreposição dos sete ciclos, ou rolos, imposto inicialmente na simulação.

4.6.2 Onda Periódica

Considere-se um outro exemplo de onda 4.18, esta pode ser englobada no grupo de sinusoidais para análise do comportamento do oscilador. Neste caso a onda apresenta uma progressão que se repete no espaço e no tempo, ou seja, a onda avança a distância de um comprimento de onda num intervalo de tempo igual ao período. A dependência espaço-temporal dum onda advém do relacionando entre o parâmetro que caracterizam a repetição no espaço com o que caracteriza a oscilação no tempo. Assim, procede-se à simulação onde é gerada na entrada do sistema uma onda em x_{1ref} e observe-se o resultado obtido de x_1 ,

$$y(x_1, x_2, x_3) = \left[\frac{\sin(t) * \cos(2*t)}{2 + \sin(t)} \quad 0 \quad 0 \right]^T. \quad (4.18)$$

Analisando a Figura 4.8, tem-se a representação de x_{1ref} (referente à onda dada pela Equação 4.18) de referência, aquele que dá entrada no bloco oscilatório, e o x_1 de saída. Nas representações verificamos que ambas geram uma repetição periódica T da amplitude A_{mp} e comprimentos de onda λ . Quanto às entradas que deram no sistema a zero, resultam na saída numa aproximam também a zero, ou seja, existe uma boa estabilização do sistema, mesmo que este seja um sistema caracteristicamente caótico nas saídas os sinais não apresenta ruídos significativos e apura-se ainda que os sinais de entra e saída se aproximam bastante.

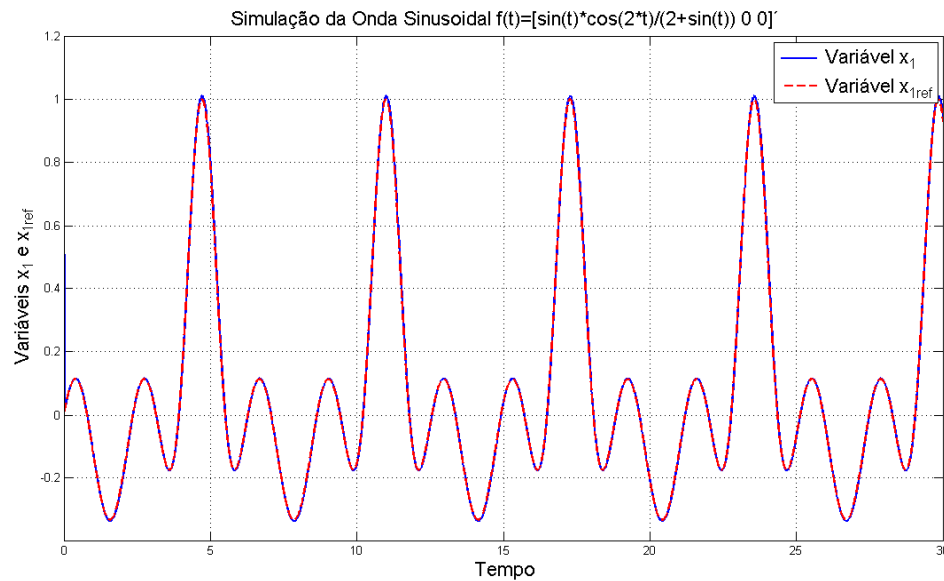


Figura 4.8: Simulação da Onda Periódica

4.7 Geração de Sinais Quadrados com o Oscilador de *Chua-Matsumoto*

Uma onda quadrada tem a característica de variar de um valor mínimo directamente para o valor máximo, sem passar por valores intermediários. Das ondas sinusoidais podemos obter outros tipos de onda através das séries de *Fourier*,

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \dots, \quad (4.19)$$

ou por outro lado, o primeiro período da onda pode ser descrito por como,

$$y(x) = \begin{cases} 1, & \text{de } 0 \text{ a } \pi \\ 0, & \text{de } \pi \text{ a } 2\pi \end{cases}. \quad (4.20)$$

As ondas quadradas são bastante usuais no processamento de sinais ou na electrónica, nomeadamente como referência de tempo nos chamados sinais de relógio. Esta aplicação é usada devidos às suas transições de sinais rápidas, aplicáveis em *triggers* de circuitos de lógica síncrona para intervalos de tempo precisos. Estas contêm uma grande faixa de harmónicas, podendo estas gerar alguma radiação electromagnética ou pulsos de correntes que dão origem a interferências nos circuitos mais próximos, podendo causar a estes ruídos ou erros nas sua saídas de dados.

Num caso real é impossível ter uma onda com uma mudança de estado baixo para cima, ou vice-versa, de modo limpo e instantâneo, pois para isso era necessário ter larguras de banda infinitas. Ou seja, sistemas que integrem sinais de onda quadrados apresenta

algumas limitações físicas relativamente à geração da forma da sua onda, nomeadamente na passagem do sinal das ondas para os níveis superiores e inferiores, respectivamente.

Considere-se a Equação 4.21, onde se tem a onda quadrada que se pretende gerar. Deste modo, designa-se como x_{1ref} a onda que dá entrada no sistema, após a sua passagem pelo sistema tem-se a onda resultante x_1 ,

$$y(x_1, x_2, x_3) = [\text{square}(0.5\pi t) \quad 0 \quad 0]^T. \quad (4.21)$$

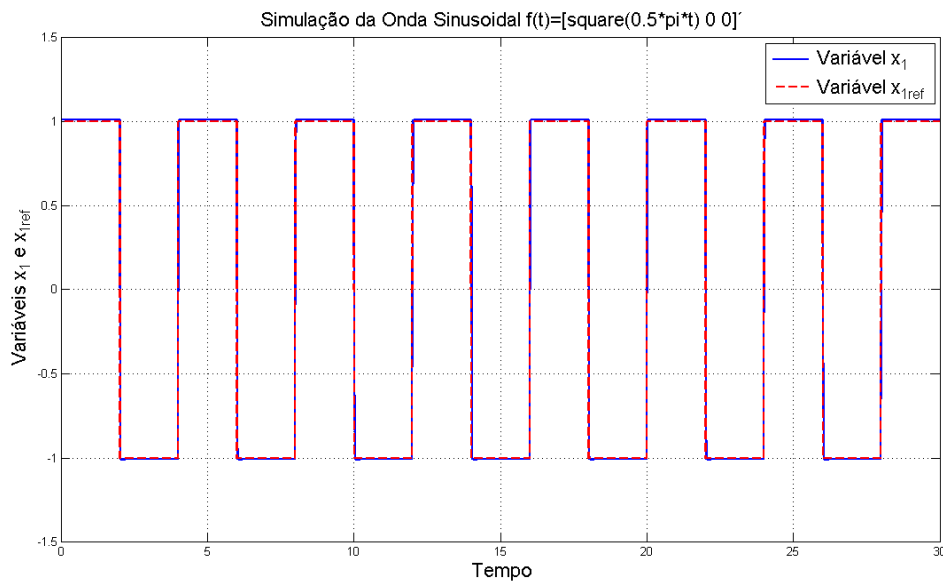


Figura 4.9: Simulação da Onda Quadrada

Analisando os resultados, tal como nas ondas anteriores existe uma boa estabilização do sistema. Na entrada é gerada um onda quadrada e após a sua passagem pelo sistema dito caótico apresenta na saída com uma onda perfeitamente quadrada. Portanto, verifica-se que o sistema consegue controlar com precisão, sem ruído, a onda quadrada que foi gerada. Conclui-se deste modo que temos um método de controlo robusto preciso, sendo que este apresenta resultados óptimos de utilização, controlando e aproximando bastante o resultado do objectivo inicialmente traçado.

Conclusões, Discussões e Perspectivas Futuras

O trabalho apresentado dedicou-se à análise do controlo óptimo robusto de sistemas com características caóticas. Os osciladores constituem a base de diversos sistemas electrónicos. Considerando a engenharia dos sistemas aviónicos, podem-se encontrar osciladores em diversos sistemas como por exemplo computadores, sistemas de controlo, nos componentes de telecomunicação ou radiodifusão.

O interesse de controlar um oscilador advém do emprego que estes vão ter na prática, a sua utilização serve para gerar sinais que com diversas formas e frequências podem transferir os seus sinais através de ondas sonoras ou por campos electromagnéticos, como por exemplo as ondas de rádio, luz visível ou outro tipo de onda, que estão na base de funcionamento de componentes como os VOR (*Very Omnidirectional Range*), ILS (*Instrument Landing System*), DME (*Distance Measuring Equipment*), entre outros. A sua configuração pode ser apresentada de variadíssimas formas consoante o resultado que se pretende do componente. Para viabilizar o método em análise foi considerado um oscilador de *Chua-Matsumoto*, este foi escolhido por ser um oscilador de configuração simples, por exemplo, este não possui nenhum amplificador, ou junção de outros circuitos para gerar e mostrar o resultado que dele se pretende.

No Capítulo 3 foi apresentada a metodologia desenvolvida neste projecto para o controlo óptimo e robusto tendo como base a linearização óptima. Para estabilizar o sistema foi projectado um controlador LQR modificado que em conjunto com a linearização óptima nos permitiu fazer uma análise óptima e robusta do controlo do sistema.

O que caracteriza um sinal produzido por um oscilador é a sua forma de onda, isto é, o modo como ocorrem as suas variações. Atendendo a este aspecto, foram geradas ondas sinusoidais e quadradas no desenvolvimento deste projecto.

As ondas sinusoidais são as que se encontram com mais frequência, sendo estas consideradas como tendo uma forma de onda "natural", representativas de muitos corpos que na maioria tende a ter esse tipo de vibração. A primeira aplicação passou por se gerar uma onda sinusoidal, que para efeitos de simulação deu entrada no sistema em forma de vector, nomeadamente no lugar de x_1 , relativamente aos outros parâmetros de x_2 e x_3 deram entrada a zero. Aplicando-se a metodologia desenvolvida obtiveram-se resultados bastantes satisfatórios, como se verificou na Figura 4.7, onde estão representadas as ondas de entrada e saída, do sistemas verificamos que estas quase coincidem um com a outra. Ou seja, o sistema é capaz de controlar o sinal que dá entrada no sistema gerando uma aproximação óptima do seu sinal de saída. Relativamente às saídas de x_2 e x_3 estas são aproximadamente nulas tal como o sinal que no sistema deu entrada.

Foi gerada uma outra onda periódica a fim de verificar se o sistema consegue repetir e gerar uma onda oscilante, mantendo a sua amplitude e período de forma sistemática. Este resultado verifica-se tal como foi apresentado pela Figura 4.8, para além do que as ondas de entrada e saída do sistema apresentam um erro muito pequeno de aproximação. Considerando os três parâmetros que caracterizam a dinâmica do oscilador, passamos a ter um sistema controlado

As ondas rectangulares são produzidas por circuitos capazes de ligar e desligar rapidamente. Analogamente aos resultados anteriores as ondas de entrada e saída são bastante próximas na medida que sendo este um tipo de onda que obtém mudanças bruscas de sinal, podia apresentar algum ruído junto à onda em causa, mas verifica-se que esta é gerada de forma límpida e periodicamente estável.

Com o intuito de procurar um controlador que estabiliza-se um sistema caótico, conclui-se que o objectivo foi cumprido e a metodologia desenvolvida apresenta excelentes resultados quando aplicados ao oscilador de *Chua-Matsumoto*. Conseguiu-se eliminar o seu estado caótico e por mais rolos que se incrementem na simulação, o sinal destes passam sempre pelo mesmo caminho, com a mesma frequência, amplitude, período e com uma aproximação bastante boa do modelo de onda gerada na entrada do sistema.

Note-se que o facto de ter sido usado o oscilador de *Chua-Matsumoto* não significa que o método foi elaborado em torno da dinâmica que o caracteriza. Esta foi apenas uma aplicação das muitas que se podem fazer a outros osciladores.

Outro tipo de ondas podem ser geradas futuramente com aplicação do método apresentado, nomeadamente a geração de ondas moduladas, tendo estas especial interesse no mundo da electrónica, sobretudo para as áreas de indústria aeronáutica e aeroespacial no que diz respeito aos sistemas de controlo que as integram, os aviónicos.

Sugere-se ainda a análise quantitativa do erro presente na linearização óptima aplicada, fazendo-se uma análise quantitativa entre o modelo não linear original e a aproximação linear óptima que se obtém. E por conseguinte estimar também os erros associados ao método neste trabalho desenvolvido.

Bibliografia

- [1] Bousson, K., Quintiães, M.S., An Optimal Linearization Approach to Spacecraft Attitude Stabilization, *International Review of Aerospace Engineering*, Vol.1, N0.6, December, 2008, pp.503-511. 1
- [2] Bousson, K., Correia, S.D., Optimization Algorithm Based on Densification and Dynamic Canonical Descent, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.191, N0.2, July, 2006, pp.269-279. 1, 21
- [3] Kihás, D., Marquez, H.J., Computing the Distance Between a Nonlinear Model and Its Linear Approximation: An \mathcal{L}_2 Approach, *Computers & Chemical Engineering*, Vol.28, N0.12, August, 2004, pp.2659-2666. 1, 12
- [4] Van der Schaft, A.J., \mathcal{L}_2 - Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ Control, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, VOL.37, NO.6, June, 1992, pp.770-784. 1, 8, 9, 10, 11, 12
- [5] Zames, G., Analyzing Control System Robustness, *IEEE Potentials*, VOL.21, NO.1, February/March, 2002, pp.16-19. 1, 15, 16
- [6] Lin, F., *Robust Control Design - An Optimal Control Approach*, John Wiley, 2007. 2, 6, 7, 8, 9, 14, 16, 17, 18
- [7] Boukabou, A., Chebbah, A., Belmahboul, A., Stabilizing Unstable Periodic Orbits of the Multi-Scroll Chua's Attractor, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol.12, N0.4, November, 2007, pp.469-477. 2, 28, 30
- [8] Abbaszadeh, M., Marquez, H.J., Robust H_∞ observer Design for Sample-data Lipschitz Nonlinear systems with exact and Euler Approximate Models, *Automatica*, Vol.44, NO.2, July, 2007, pp.799-806. 3
- [9] Zuben, V., *Tópicos Avançados: Controle Robusto, Controle Adaptativo e Controle Inteligente*, Notas de Aulas DCA/FEEC, Unicamp, Brasil, 2003. 3
- [10] Paiva, E.C., *Alocação de pólos Robusta com Rejeição a Perturbações Estocásticas*, MSc Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 1993. 8
- [11] Longhi, L.G., *Solução do Problema de Controle H_∞ não linear*, PhD Thesis, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2001. 8, 9, 11
- [12] Föllinger, O., *Regulation Technology*, Hüthig Heidelberg, 1990. 21, 31
- [13] Bilotta, E., Pantano, P., Stranges, F., A Gallery of Chua Attractors: Part I, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.17, N0.1, May, 2006, pp.1-60. 26, 28

- [14] Cleverson, M.P., *Controle e Sincronização de Sistemas Caóticos*, MSc Thesis, Centro Técnico Aeroespacial do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brasil, 2005. 24
- [15] Baptista, M.S., *Perturbando Sistemas Não Lineares - Uma abordagem ao Controlo de Caos*, PhD Thesis, Universidade de São Paulo - Instituto de Física, São Paulo, Brasil, 1996. 25