UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Resolução de Tarefas no Tema *Números e Operações* do 3.º Ciclo do Ensino Básico

Marta Andreia Fonseca Filipe

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática
no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
(2.º ciclo de estudos)

Orientadora: Prof.ª Dra. Patrícia Damas Beites

Covilhã, junho de 2013

Agradecimentos

Gostaria de expressar o meu profundo agradecimento à Prof.ª Dra. Patrícia Damas Beites, pela forma como orientou este trabalho desde o primeiro momento, pela sua amabilidade e disponibilidade constantes, e pela exigência e rigor científico que me transmitiu.

Resumo

Assistimos a um mundo em constante evolução e mudança. É exemplo disso o desenvolvimento da Matemática, patente na sua história, desde há milhões de anos. Particularmente, o ensino da Matemática, através de investigações e experiências, sofreu também, ao longo dos tempos, diversas transformações, refletindo-se nos programas da disciplina. Em 2007 foi homologado o Programa de Matemática para o Ensino Básico atualmente em vigor, o qual veio promover o recurso a atividades de exploração, de investigação e de resolução de problemas em sala de aula.

Com os naturais desafios diários e agora com novas indicações metodológicas, o professor é levado a refletir sobre a sua prática profissional questionando-se sobre diversos aspetos. Uma atitude assim reflexiva culmina, muitas vezes, através de investigações, num desenvolvimento e conhecimento profissional significativo.

O presente estudo foi norteado pelas seguintes questões de investigação: (1) Quais as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de tarefas que não são exercícios, nomeadamente problemas, no tema *Números e Operações* do 3.º Ciclo do Ensino Básico?; (2) Com vista a ultrapassar essas dificuldades, o que posso melhorar ao nível da minha prática profissional?.

A proposta pedagógica foi constituída por um conjunto de tarefas, aplicadas no ano letivo 2011/2012, nos 7.º e 9.º anos de escolaridade. Para o estudo, seguiu-se uma metodologia de investigação qualitativa, usando a narração multimodal como instrumento de recolha de dados e de desenvolvimento profissional reflexivo.

Os alunos foram recetivos a tarefas que não são exercícios, mas revelaram dificuldades em estruturar um método de resolução. Na discussão das resoluções, os alunos tiveram dificuldade em comunicar os seus raciocínios e, por vezes, o sucesso de implementação da tarefa ficou condicionado pela falta de conhecimentos prévios que já deviam estar consolidados.

No entanto, o professor não se pode resignar quando as aulas não correspondem às suas expetativas. Cabe ao professor proporcionar aos alunos a experiência com tarefas de vários tipos, no sentido de diferentes graus de dificuldade e abertura, e, nomeadamente, com as que não são exercícios. Por outro lado, o mesmo deve promover uma metodologia de ensino-aprendizagem adequada para a resolução dessas tarefas, orientando os alunos para uma, cada vez maior, autonomia.

Palavras-Chave: Números, Operações, Resolução de Tarefas, Narração Multimodal, Desenvolvimento Profissional Reflexivo.

Abstract

We are witnessing a world in constant evolution and change. One example is the development of Mathematics, evident in its history, from millions of years ago. Particularly, the teaching of Mathematics through researches and experiments, also suffered, over time, several transformations, reflected in the programs of the discipline. In 2007 the current existing Mathematics for Basic Education Program was approved, which came to promote the use of activities of exploration, research and problem solving in the classroom.

With the natural daily challenges and now with recent methodological guidelines, the teacher is led to reflect on his professional practice questioning about several aspects. Such well reflective attitude often culminates through research, in a significant professional development and knowledge.

This study was guided by the following research questions: (1) What are the difficulties faced by students in solving tasks that are not exercises, including problems, within the theme *Numbers and Operations* included in the third cycle of basic education?; (2) In order to overcome these difficulties, what can I improve at the level of my professional practice?.

The pedagogical proposal consisted of a group of tasks, implemented in the academic year 2011/2012, at the 7th and 9th grades. For the study, we used a qualitative approach, using multimodal narrative as a tool for gathering research data and promoting a professional reflective development.

Students were receptive to tasks that are not exercises, but showed difficulties to structure a solving method. In the discussion of the resolutions, the students found it hard to express their logics and, sometimes, successful implementation of the task was conditioned by the lack of prior knowledge that should have been already consolidated.

However, the teacher cannot resign when classes do not meet his expectations. The teacher has to provide students experience with different types of tasks, in order to various degrees of difficulty and openness, and, in particular, with those that are not exercises. On the other hand, it should promote a teaching-learning methodology suitable for the resolution of those tasks, guiding students for an increasing autonomy.

Keywords: Numbers, Operations, Tasks Solving, Multimodal Narrative, Professional Reflective Development.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Acrónimos

APM	Associação de Professores de Matemática
CNEB	Currículo Nacional do Ensino Básico
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PMEB	Programa de Matemática do Ensino Básico
SPIEM	Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática
SPM	Sociedade Portuguesa de Matemática
PISA	Programme for International Student Assessment

CAPíTULO 1

Considerações Introdutórias

A resolução de problemas, facilmente associada à Matemática, nem sempre ocupou um lugar de destaque no ensino. Em Portugal, só a partir de 1988, em rutura com o movimento da Matemática Moderna, foram dados passos significativos na valorização da resolução de problemas no currículo de Matemática. Esta mudança deu origem a novos planos curriculares do Ensino Básico e do Ensino Secundário e consequentemente, em 1991, a novos programas para a disciplina de Matemática.

No caso particular do 3.º Ciclo do Ensino Básico, apesar do Programa de 1991 ter sido recebido com muito entusiasmo, levantou críticas nomeadamente no que diz respeito à definição das finalidades e dos objetivos. Ponte *et al.* referem que "O programa de Matemática de 1991 contém uma formulação pouco cuidada destes aspetos [finalidades e objetivos] e tem pouca preocupação em explicitar a sua importância e o seu papel em relação com os diferentes tópicos e orientações metodológicas." ([**62**], p. 199).

Vieram depois a ser tomadas medidas com vista a colmatar lacunas no programa de Matemática do Ensino Básico, como a publicação do Currículo Nacional do Ensino Básico (CNEB), já revogado em 2011, e a implementação do Plano de Ação para a Matemática. Este último resultou, em 2007, na homologação de um novo programa, denominado de Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) neste trabalho. No Programa de 1991 já era dado destaque à resolução de problemas, mas o PMEB veio valorizar ainda mais esta vertente, atribuindo-lhe características investigativas e exploratórias.

Internacionalmente, a discussão em torno da resolução de problemas começou mais cedo. Esta capacidade "(...) vem a ser a primeira das dez áreas de aptidões básicas propostas pelo National Council of Supervisors of Mathematics (1978) – onde se assume que "aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar Matemática" (p. 148) (...)" e, na Agenda para a Ação, a National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), recomenda, em primeiro lugar, que "(...) A resolução de problemas seja o foco (*focus*) da Matemática escolar nos anos 80" (NCTM, 1980, p. 1)." (NCTM, [**33**], p. 291 e 292).

Mas já em 1945, George Pólya, através do livro *How to solve it*, destacou-se na abordagem a uma metodologia de resolução de problemas, elaborada em torno de quatro etapas: compreensão do problema, conceção de um plano, execução do plano e reflexão sobre toda a resolução. Nesta metodologia, Pólya também se refere ao papel do professor na condução de todo o processo nomeadamente, na orientação dos alunos.

Como já referido, atualmente, no PMEB, a resolução de problemas merece especial atenção, sendo uma das três capacidades transversais aí definidas, "(...) vista neste programa como uma capacidade matemática fundamental (...)" ([**23**], p. 8). Mas é também um objetivo geral e uma metodologia a ter em conta, pois "(...) não só é um importante objetivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos." ([**23**], p. 8).

Historicamente, foi na procura de soluções de problemas colocados ao Homem, na forma de necessidades e desafios que, gradualmente, se deu o desenvolvimento da Matemática. Esta, na base de toda a evolução científica e tecnológica que hoje conhecemos, desenvolveu-se com maior ou menor rapidez consoante a evolução das sociedades, destacando-se neste trabalho povos como os egípcios, os babilónios, os árabes e os europeus. Veja-se, por exemplo, a necessidade da criação, por parte dos egípcios, dos números fracionários para medições exatas dos terrenos nas margens do Nilo.

A Matemática resultava então como meio para solucionar problemas do dia a dia. Neves compara as dificuldades muitas vezes sentidas pelos alunos com as dificuldades sentidas pelos povos no passado. Concretamente, esta autora refere que "(...) muitas das dificuldades que os estudantes sentem na aprendizagem de alguns conceitos são paralelas às que foram sentidas quando eles surgiram, e as reticências que colocam relativamente a noções mais delicadas (...) são semelhantes às sentidas ao longo da História." ([**46**], p. 2).

A História da Matemática pode contribuir para o enriquecimento das aulas, promovendo a compreensão dos factos, dos conceitos e provocando a curiosidade nos alunos. O PMEB não deixa esta questão de fora valorizando a História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem. A sua abordagem é referida na concretização das finalidades e dos objetivos aí definidos, considerando que "(...) a História da Matemática pode evidenciar o desenvolvimento de determinadas ideias matemáticas, apresentando-a como uma ciência viva e em evolução." ([**23**], p. 6).

Cabe ao professor encontrar "(...) formas de introduzir a História da Matemática na sua aula, (...), facultando aos alunos a experimentação da necessidade dos novos conceitos, tal como foi experimentado ao longo dos tempos." ([**46**], p. 2). Na maioria das vezes, é o trabalho realizado em sala de aula que molda a atitude dos alunos face à Matemática, o que nos remete para a importância das práticas profissionais dos professores.

As práticas dos professores são abrangentes e daí poderem ser divididas em diferentes grupos, como fazem Ponte e Serrazina: "(...) (i) práticas letivas, (ii) práticas profissionais na instituição e (iii) práticas de formação." ([**56**], p. 51). Mas no que a este trabalho diz respeito, importa destacar as práticas letivas, que se dividem em três outros grupos: "(...) (i) as tarefas propostas, (ii) os materiais utilizados, (iii) a comunicação na sala de aula, (iv) as práticas de gestão curricular e (v) as práticas de avaliação." ([**56**], p. 52).

Ainda em [**56**] é referido o projeto *Matemática 2001*, de 1998, da Associação de Professores de Matemática (APM), sobre um inquérito realizado a professores. Relativamente ao tipo de tarefas propostas pelos professores, os exercícios surgem em primeiro lugar, em seguida os problemas e, no fim da lista, as "(...) situações com um caráter mais aberto e desafiante (...)" ([**56**], p. 52). A este propósito, Ponte e Serrazina alertam para os diferentes significados que podem ser atribuídos a esta variedade de tarefas, pois nem todos os professores distinguem da mesma forma, por exemplo, um problema de um exercício.

Ponte atribui quatro dimensões às tarefas, "O seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução." ([**54**], p. 27). Atendendo às duas primeiras dimensões, resulta depois a divisão das tarefas em exercícios, explorações, problemas e investigações. Daqui se conclui, por exemplo, que um problema é uma tarefa fechada e difícil, e um exercício é igualmente fechado mas fácil.

Outra tipificação pode ser feita tendo em conta as "(...) "referências" que visam levar os estudantes a produzirem significados para os conceitos e atividades matemáticas." ([**78**], p. 31). Para Skovsmose, em [**78**], as tarefas, que denomina de "questões e atividades matemáticas", dividem-se entre exercícios e cenário para investigação, definido por "(...) ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação" ([**78**], p. 27) e "(...) que convida os alunos a formularem questões e a procurarem explicações.", ([**78**], p. 30). Estas tarefas são classificadas, segundo o tipo de referências, ou seja, referências à Matemática pura, referências à semirrealidade e referências à realidade. Nos cenários de investigação com referências à semirrealidade, apesar de serem contextualizados em situações do dia a dia, "(...) somente as quantidades mensuradas são relevantes." ([**78**], p. 32), onde o objetivo final será a resolução da tarefa sem colocar em questão os aspetos qualificáveis.

O PMEB privilegia metodologias de ensino centradas no aluno, onde "(...) A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor. (...) Por isso, o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas (...)" ([**23**], p. 8). Impõe-se por isso um desafio aos professores na seleção do tipo de tarefas, na forma de as aplicar e como conduz todo o trabalho em sala de aula, tendo em conta, para além dos documentos orientadores, como o programa e as metas, todos os fatores que influenciam a definição de estratégias, nomeadamente o contexto escolar.

Nem sempre os resultados que um professor espera das suas aulas ou de atividades nelas desenvolvidas correspondem às suas expetativas. Muitas vezes esta perceção obtém-se dos resultados na avaliação dos alunos e, noutras, no interesse e empenho por estes demonstrado. Tais situações levam o professor a interrogar-se sobre as suas decisões e o seu desempenho. Importa por isso uma atitude, por parte destes profissionais, de "(...) exploração constante da prática e a sua permanente avaliação e reformulação." ([**53**], p. 5). Ponte observa que esta análise é feita, na maioria das vezes, de forma intuitiva, sendo a investigação "(...) um processo privilegiado de construção do conhecimento. A investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente." ([**53**], p. 6).

Com o enquadramento apresentado, no presente estudo procura-se identificar e compreender as dificuldades que experimentam os alunos em tarefas não simultaneamente fáceis e fechadas. Reflete-se ainda sobre a possibilidade de melhorar a prática do professor com vista a superar essas dificuldades. Assim, neste trabalho de investigação pretende-se então dar resposta às seguintes questões:

(1) Quais as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de tarefas que não são exercícios, nomeadamente problemas, no tema *Números e Operações* do 3.º Ciclo do Ensino Básico?
(2) Com vista a ultrapassar essas dificuldades, o que posso melhorar ao nível da minha prática profissional?

Tendo em conta a natureza desta investigação, a metodologia investigativa adotada, seguindo [**13**], é do tipo qualitativo e interpretativo, sendo a Narração Multimodal o instrumento de recolha de dados. A escolha relaciona-se com a pretensão de estudar um fenómeno no seu ambiente natural e em toda a sua complexidade. A professora, também investigadora, formou parte do quotidiano das turmas em que foram aplicadas as tarefas. Assim, ocorreu uma observação participante. A seleção das turmas e do tema *Números e Operações* prendeu-se exclusivamente com questões práticas, nomeadamente temporais, de conciliação da atividade profissional com a realização do trabalho.

Foram selecionadas duas turmas do 3.º Ciclo do Ensino Básico – 7.º e 9.º anos de escolaridade – onde foram aplicadas a cada uma três tarefas com diferentes tipologias, de acordo com o PMEB. A condução do trabalho desenvolvido em sala de aula, teve em conta as orientações do modelo de resolução de problemas de Pólya. Trata-se de um importante instrumento de trabalho que atribui aos alunos o papel central da aula, ajudando-os na aquisição de novos conhecimentos, consolidação de outros e desenvolvimento de estratégias de resolução.

A ferramenta de recolha de dados escolhida permite uma descrição pormenorizada da mediação do professor (modo como propõe tarefas, como organiza o trabalho nas aulas, recursos utilizados, posturas, ...) na sala de aula, da participação dos alunos e, nalguns casos, dos resultados alcançados. Em consequência de "(...) uma observação mais profunda dos acontecimentos na sala de aula relativos às ações do professor enquanto mediador das aprendizagens dos alunos (...)" ([**41**], p. 24), o professor com uma atitude reflexiva melhora as suas práticas letivas, levando-o a "(...) responder perante novas situações de modo transformado e informado." ([**41**], p. 24). Consequentemente, evolui profissionalmente no sentido da melhoria das aprendizagens dos alunos em ambiente de sala de aula.

Para além do enquadramento teórico, questões investigativas e metodologia apresentadas neste Capítulo 1, o trabalho é formado por mais quatro capítulos. Estes últimos focam os aspetos na sinopse seguinte de cada um.

Capítulo 2 – Os Números e as Operações ao longo dos Tempos

Breve resenha histórica sobre a Matemática desde a Pré-História até ao século XX, com especial ênfase para os números e suas operações. Aqui são referidos alguns nomes incontornáveis pelo contributo que deram para a evolução desta ciência.

Capítulo 3 – O Tema *Números e Operações* no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Neste capítulo analisa-se a evolução do ensino da Matemática em Portugal, que culminou com um novo programa para o Ensino Básico em 2007. Este programa é aqui analisado em detalhe, com destaques particulares para o Tema *Números e Operações* e resolução de problemas.

Capítulo 4 – Práticas Letivas no Tema *Números e Operações*

Apresentam-se narrações multimodais de aulas de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico, nas quais o professor foi observador participante. Em cada uma das aulas, foram propostas tarefas, de diferentes tipos e referências, no contexto do tema *Números e Operações*.

Capítulo 5 – Considerações Finais

A partir das narrações multimodais do capítulo precedente, reflete-se sobre a prática letiva do professor com vista a uma melhor perceção da realidade das aulas. São identificadas formas mais ou menos eficazes de promover as aprendizagens pretendidas. Nomeadamente, resulta uma análise global à implementação das tarefas e também uma apreciação, em particular, de cada uma delas.

Importa ainda referir que, neste trabalho, foi assegurado e respeitado o anonimato e confidencialidade dos alunos. Por último, todas as condições foram previamente acordadas com o Órgão de Gestão da escola, com os Encarregados de Educação e com os próprios alunos.

CAPíTULO 2

Os Números e as Operações ao longo dos Tempos

Desde 1772, aquando da Reforma das universidades, o aspeto histórico da Matemática tem estado presente no ensino da mesma em Portugal. Prova disso é a referência, considerada uma das primeiras no mundo, ao uso da História da Matemática no ensino, no ano mencionado, nos Estatutos da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Como refere Carvalho e Silva, indica-se, a respeito da cadeira de Álgebra do segundo ano: "3 Para facilitar melhor a entrada nella, e segurar o fruto das Lições: Principiará o Professor pelos Prolegomenos respectivos: Dando huma idéa circumstanciada do seu objecto, e dos meios, que applica para conseguir o fim, que se propõe: Mostrando a sua origem, e progressos: E fazendo hum Resumo da historia da mesma Algebra pelas Epocas mais notaveis della. 4 Em particular mostrará a razão, por que os Antigos, sem embargo de terem conhecido as Regras Fundamentaes da Analyse, e de serem dotados de tão grande engenho, não tiráram della as vantagens prodigiosas, que decubríram os Modernos; faltando-lhes o Instrumento da Analysis, que he a Algebra." (Monteiro da Rocha, [**17**]).

Fauvel, em [**28**], refere-se às muitas vozes que alertam para a importância da História no ensino da Matemática, mas que ainda assim não se refletem na prática. Uma das razões apontadas pelo referido autor é a falta de formação de base dos professores sobre a História da Matemática e a metodologia a usar com os seus alunos. Outras razões podem ser apontadas, tais como a escassa informação histórica nos manuais, ou as apresentações nos mesmos longe de serem rigorosas e envolventes, e o facto da formação contínua dos professores não privilegiar este tema.

O recurso à História da Matemática é considerado, cada vez mais, com maior riqueza educativa no ensino da disciplina de Matemática. Destacam-se algumas razões que justificam esta asserção: "Ajuda a aumentar a motivação para aprender; Humaniza a Matemática; Muda a perceção que os alunos têm da Matemática; Proporciona oportunidades para realizar investigações; (...); Encoraja os bons alunos a ir mais longe (...)." ([**28**], p. 17).

O atual Programa de Matemática do Ensino Básico é claro no que respeita à necessidade de abordar a História da Matemática em sala de aula. Pode-se ler que "Os alunos devem ser capazes de apreciar a Matemática. Isto é, devem ser capazes de (...) mostrar conhecimento da História da Matemática e ter apreço pelo seu contributo para a cultura e para o desenvolvimento da sociedade contemporânea." ([**23**], p. 6). O Currículo Nacional do Ensino Básico, revogado em 2011, em [**21**], refere que os alunos devem contactar com aspetos da História da Matemática e reconhecer o papel da Matemática no desenvolvimento científico.

Neste capítulo apresenta-se uma abordagem sucinta, como resultado de uma revisão de livros e artigos, da História da Matemática. Trata-se de um trabalho de pesquisa que permite a obtenção de uma visão global da História da Matemática, com maior destaque no que respeita à evolução dos números, em particular dos sistemas de numeração, e da Álgebra, no que se refere às operações e à resolução de equações. Das referências bibliográficas selecionadas, em especial de autores como Carl Boyer, Victor Katz e Dirk Struik, resulta um percurso histórico desde a Idade da Pedra até ao final do século XX. Neste destacam-se as contribuições de diversos povos para o desenvolvimento da Matemática aliado à evolução da sociedade.

1. Os Primórdios

A noção de número remete-nos para tempos longínquos como a Idade da Pedra, há mais de dois milhões de anos. Nesta fase da Pré-História, o Homem começa a construir o conceito de contagem e, consequentemente, de número, onde estava implícita a operação aritmética adição. A Idade da Pedra divide-se principalmente em dois períodos, o Paleolítico e o Neolítico.

No período Paleolítico, também conhecido por Idade da Pedra Lascada, a sobrevivência do Homem dependia apenas do que a Natureza oferecia, através da recolha de frutos e raízes. A necessidade de contagem era reduzida e, sem sistema de escrita, o registo limitava-se a marcas em varas de madeira e em ossos. O mais antigo exemplo destes registos é num osso de lobo (Fig. 1), encontrado em 1937 na Morávia, gravado com 55 entalhes.

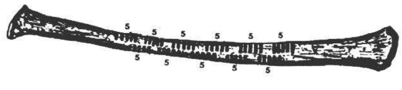


FIGURA 1. Representação de um osso com entalhes, [**11**].

O período Neolítico, também designado por Idade da pedra Polida, caracteriza-se, entre outros aspetos, pela transição da recolha de alimentos para a sua produção. Deu-se início à agricultura, à domesticação de animais e à manufatura, em particular na criação de peças em cerâmica. O modo de vida do Homem alterou-se significativamente tendo este adotado um estilo sedentário, fixando-se nas margens dos rios e criando aí sociedades cada vez mais organizadas. A evolução destas sociedades implicou a intensificação de transações comerciais e a criação de órgãos de administração organizados. A Matemática primordial surge então como facilitadora dos cálculos, desde a administração das colheitas, transações comerciais, à gestão dos impostos. Desenvolve-se assim a Aritmética e a medição que deram posteriormente origem à Álgebra e à Geometria, respetivamente.

Destacam-se dois povos impulsionadores da evolução matemática, são eles os egípcios e os babilónios, nos quais me vou centrar. Foi através de registos em papiros e placas de barro que chegou até nós informação sobre os mesmos. Depois destes povos, desenvolveram-se e expandiram-se grandes impérios, como o Árabe e, mais tarde, no contexto do domínio do continente europeu, o Romano. Também será abordado, ao longo do presente capítulo, o contributo da Grécia Antiga.

2. Egito

Os conhecimentos que temos sobre a Matemática egípcia provêm de dois grandes documentos: o papiro de Rhind e o papiro de Moscovo.

O papiro de Rhind, tem o nome do antiquário escocês Henry Rhind, que o comprou numa cidade à beira do Nilo em 1858. Este é também designado por papiro de Ahmes, o nome do escriba que o redigiu por volta de 1650 a.C. Trata-se de um documento com oitenta problemas resolvidos, essencialmente do dia-a-dia, tais como o preço do pão ou a alimentação do gado. Refira-se ainda que este papiro se encontra no British Museum em Londres.

O papiro de Moscovo, também conhecido como papiro Golenischev, foi escrito por um escriba desconhecido por volta de 1890 a.C.. O referido papiro foi comprado por Vladimir Golenischev no Egito, no ano de 1893. Este documento conserva-se até hoje no Museu Pushkin em Moscovo, daí o seu nome. Saliente-se também que o seu conteúdo não difere muito do que se mencionou para o papiro de Rhind.

A escrita nestes papiros denomina-se hierática, uma derivação da escrita hieroglífica, mais simples e adaptada para escrever rapidamente com pena e tinta sobre folhas de papiro. No entanto, nomeadamente em documentos oficiais, a escrita utilizada era a hieroglífica. Em particular, no sistema de numeração hieroglífica utilizava-se a base dez e recorria-se à repetição.

Os egípcios repetiam um traço vertical para escrever os números de 1 a 9 e tinham símbolos específicos para as diferentes potências de 10, nomeadamente desde 10 até 10^6. Todos os números eram escritos por combinação desses símbolos, mas de uma forma não posicional. Na tabela e figura que se seguem podem ser observados estes símbolos e dois exemplos de um número em escrita hieroglífica.

𓁨	𓆐	𓂭	𓆼	𓍢	𓎆	𓏺
10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1

Tabela 1. Representação de alguns números em escrita hieroglífica.

Figura 2. Número 23145 representado em escrita hieroglífica e em escrita hieroglífica alternativa, respetivamente.

A numeração hierática difere da hieroglífica pela introdução de símbolos especiais para representar dígitos e múltiplos de potências de base dez, como se observa na Fig. 3. Desta forma evitavam a repetição dos elementos.

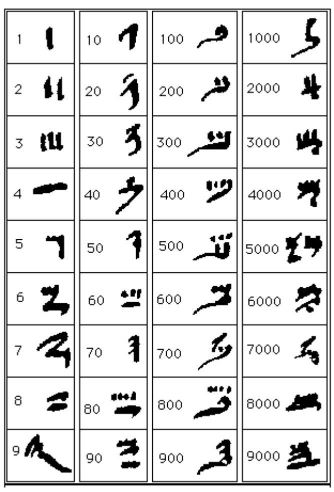


Figura 3. Representação de números em escrita hierática, [**26**].

As terras nas margens dos rios eram extremamente férteis, pelo que aí se desenvolveu a agricultura e se instalaram povoações. Por volta do ano 3.000 a.C., o faraó Sesóstris mandou repartir as margens do rio Nilo entre os seus habitantes. Dadas as frequentes cheias do rio, que ocorriam entre junho e novembro, as suas margens ficavam inundadas, o que fazia com que se perdessem as marcações que dividiam as parcelas de terreno. Sempre que tal acontecia, o faraó mandava os seus funcionários, chamados de esticadores de corda, determinarem por medida a extensão exata da perda verificada. Para tal usavam cordas nas quais assinalavam uma determinada unidade de medida e, depois de esticadas, verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados dos terrenos. Este método nem sempre era eficaz, pois raramente cabia um número inteiro de vezes dessa unidade de medida num certo lado do terreno. Foi desta forma que os egípcios criaram a noção de número fracionário, surgindo as frações unitárias, isto é, do tipo $\frac{1}{n}$ (com $n \in \mathbb{N}$). Na escrita hieroglífica, a notação para estas frações era uma forma oval sobre um número natural, tal como mostra a Fig. 4.

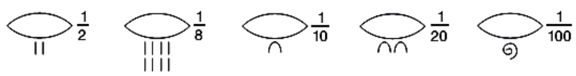


FIGURA 4. Frações egipcias, [**31**].

As frações não unitárias eram representadas por somas de frações unitárias, como sucede no papiro de Rhind. Segundo Boyer, em [**14**], este documento começa com uma tabela que apresenta cada fração do tipo $\frac{2}{n}$ (para $n \in \mathbb{N}$, ímpar, compreendido entre 5 e 101) como a soma de frações unitárias.

EXEMPLO 2.1. *Para $n \in \{5, 43, 59\}$, $\frac{2}{n}$ escreve-se como soma das frações unitárias subsequentes.*

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}, \quad \frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}.$$

No que se refere às operações aritméticas, no Egito, a fundamental era a adição. Quanto à multiplicação, esta operação era feita por duplicações do número como se exemplifica de seguida. O mesmo sucedia com a divisão (inteira), como se constata, nomeadamente, em [**14**] e [**46**]. Abaixo encontra-se também um exemplo.

EXEMPLO 2.2. Multiplicação de 71 por 19 pelo processo da duplicação.

$71 + 71 = 142$ (2 vezes)

$142 + 142 = 284$ (4 vezes)
$284 + 284 = 568$ (8 vezes)
$568 + 568 = 1136$ (16 vezes)
$1136 + 142 + 71 = 1349$ ($16+2+1 = 19$ vezes)

Logo, $71 \times 19 = 1349$.

Exemplo 2.3. Divisão de 185 por 5 pelo processo da duplicação.

$5 + 5 = 10$ (2 vezes)
$10 + 10 = 20$ (4 vezes)
$20 + 20 = 40$ (8 vezes)
$40 + 40 = 80$ (16 vezes)
$80 + 80 = 160$ (32 vezes)

Assim, $\frac{185}{5} = \frac{160+20+5}{5} = \frac{160}{5} + \frac{20}{5} + \frac{5}{5} = 32 + 4 + 1 = 37.$

Os babilónios também aplicavam a duplicação, com regras e definições também no domínio empírico, para multiplicar e dividir. Mais tarde, Leibniz referiria o fundamento do procedimento, ou seja, todos os números poderem ser escritos como soma de potências de base 2. No artigo *Explication de l'Arithmétique Binaire*, de 1703, este matemático apresenta um estudo completo sobre o sistema de numeração binário. Neste, cada número é representado por muitos algarismos, desvantagem compensada pela velocidade de cálculo numa máquina (calculadora, computador).

3. Mesopotâmia

Geograficamente, a civilização Mesopotâmica ou Babilónica situava-se entre o rio Tigre e o rio Eufrates, no chamado crescente fértil, atual Iraque e terras circundantes. A referida civilização desenvolveu-se no mesmo período que a egípcia. Na época não havia infraestruturas de comunicação entre os povos mais distantes, pelo que o desenvolvimento destas civilizações deu-se em separado.

No século III a.C., os babilónios (também chamados de povos mesopotâmicos) já usavam um sistema de numeração, o sistema posicional sexagesimal, baseado no número 60. De acordo com as fontes consultadas, as razões que levaram os babilónios à escolha do número 60 como base não estão determinadas. Para Boyer, em [**14**], uma das razões pode-se prender com o facto de o número 60 ter uma extensa lista de divisores, propriedade facilitadora no trabalho de medições e cálculo.

O sistema numérico sexagesimal era escrito em placas de barro com o auxílio de objetos em formato de cunha. Esta forma deu o nome de escrita cuneiforme ao sistema de escrita babilónico. Os babilónios inventaram a notação posicional e tal permitiu-lhes usar apenas dois símbolos (com eventuais repetições) para representar qualquer número natural. Utilizavam um símbolo para representar as unidades e um outro para as dezenas, tal como ilustrado a seguir na Fig. 5.

O sistema posicional faz com que o valor numérico de um símbolo varie consoante o lugar que ocupa. A notação babilónica, com a diferença da base e de não utilizar o número zero , é muito próxima da que atualmente usamos, embora com ambiguidades. Os números de 1 a 59 (Fig. 5) eram representados por agrupamento simples, usando um sistema aditivo e, a partir do número 60, usavam a base 60 e o sistema posicional (Fig. 6).

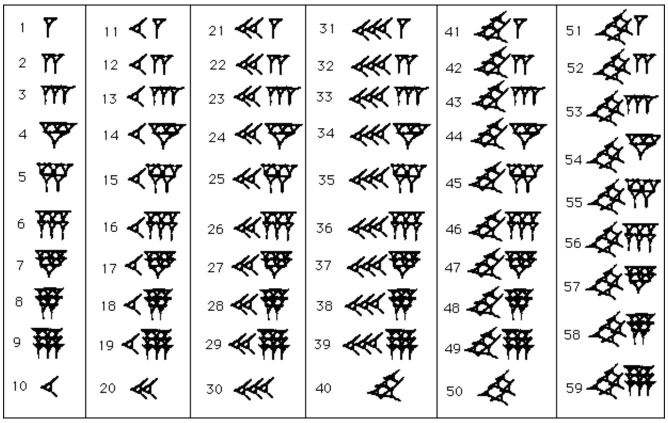


FIGURA 5. Números de 1 a 59 representados em escrita cuneiforme, [**48**].

FIGURA 6. Número $424000 = 1 \times 60^3 + 57 \times 60^2 + 46 \times 60 + 40$ representado em escrita cuneiforme, [**48**].

Para além do sistema de numeração mencionado, os babilónios desenvolveram técnicas relevantes para a resolução de equações de grau inferior ou igual a quatro, atribuindo valores específicos aos coeficientes. Estas equações resultavam da resolução de problemas concretos mas, segundo Struik, [**83**], os seus métodos indicam que já conheciam o caso geral. No entanto, não se encontram nem justificações das regras, nem definições precisas nos documentos da Matemática dos babilónios.

Os babilónios desenvolveram também técnicas para calcular a raiz quadrada e a raiz cúbica, e conheciam as relações entre os lados de um triângulo retângulo. Uma prova disso é o conteúdo da tábua maior a que pertence a Plimpton 322 (Fig. 7). O nome desta última provém do editor George Arthur Plimpton, que a comprou por volta de 1922 ao negociante de peças arqueológicas Edgar J. Banks.

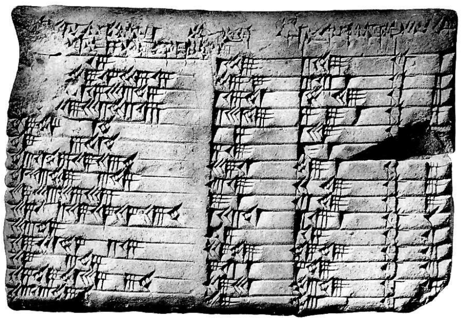


FIGURA 7. Números babilónicos na tábua Plimpton 322, [**48**].

A tábua Plimpton 322 contém uma tabela de números, com quatro colunas e quinze linhas, em notação sexagesimal babilónica. Um dos primeiros investigadores a tentar perceber uma eventual interligação do conteúdo das várias colunas da Plimpton foi o alemão Otto Neugebauer. Da reconstrução das colunas, Neugebauer concluiu que a referida tábua contém uma lista de ternos pitagóricos, ou seja, para alguns números naturais w, l, d, tem-se $w^2 + l^2 = d^2$.

As operações aritméticas fundamentais eram tratadas de modo semelhante ao usado hoje à exceção da divisão, a qual era efetuada pela multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor. Note-se assim uma evolução quando pensamos, por exemplo, na divisão por duplicação dos egípcios, técnica que os babilónios também aplicaram numa fase inicial.

4. Grécia Antiga

Enquanto declinava o desenvolvimento da cultura egípcia e mesopotâmica, surgiam novas culturas ao largo do Mediterrâneo. Um conjunto de cidades ao longo da bacia do mar Egeu até ao mar Jónico, que se formaram por volta de 2800 a.C., constituiram a Grécia Antiga, aproximadamente na mesma época da construção das pirâmides egípcias.

4. Grécia Antiga

Os povos da antiga Grécia eram de natureza pioneira e curiosa e, dada a sua localização geográfica, viajaram pelo Egito e Mesopotâmia onde tomaram conhecimento da cultura matemática aí desenvolvida. Foi o que aconteceu com os primeiros nomes associados à Matemática grega, Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, aos quais são atribuídas diversas descobertas de relevo.

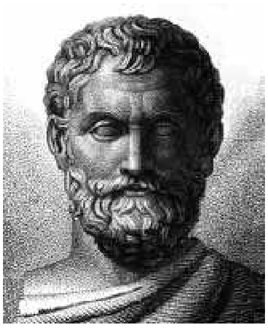


FIGURA 8. Tales de Mileto (624-548 a.C.), [**48**].

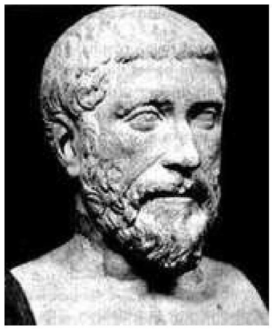


FIGURA 9. Pitágoras de Samos (580-500 a.C.), [**48**].

Sabe-se pouco sobre a vida e a obra de Tales. Chegaram até nós estórias cuja veracidade é impossível de determinar, mas ilustram Tales como "(...) um homem de rara inteligência e como o primeiro filósofo (...) o primeiro dos Sete Sábios." ([**14**], p. 31).

A Geometria dos babilónios e egípcios reduzia-se a formas e relações geométricas de caráter indutivo resultante de processos como, por exemplo, a marcação de terrenos. Segundo alguns historiadores, embora não seja algo totalmente aceite, Tales deu origem ao método dedutivo em Geometria. Tal é justificado em [**14**] através da atribuição a Tales da demonstração dos cinco teoremas que se enunciam a seguir.

TEOREMA 2.4. *Qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.*

TEOREMA 2.5. *Uma circunferência é bissectada por qualquer um dos seus diâmetros.*

TEOREMA 2.6. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*

TEOREMA 2.7. *Pares de ângulos opostos, formados por duas retas que se intersetam, são iguais.*

TEOREMA 2.8. *Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais, respetivamente, a dois ângulos e a um lado do outro, então os triângulos são congruentes.*

Enquanto Tales se centrou na Geometria, Pitágoras e os seus discípulos distinguiram-se sobretudo no estudo dos números. Para Pitágoras o Universo era constituído por números, sendo-lhe atribuída a frase "Tudo é número". Esta ideia é, no fundo, a base da civilização dos nossos dias, onde a Matemática é vista por muitos como a base da ciência.

Pitágoras fundou a Escola Pitagórica dedicada a estudos religiosos, científicos e filosóficos. Não é possível separar as descobertas de Pitágoras das dos seus discípulos, pois na escola os conhecimentos eram considerados como adquiridos em comum. Entre diversas características especiais atribuídas aos números, por Pitágoras e seus seguidores, destacam-se a seguir algumas.

- Número 1: gerador dos números e número da razão.
- Número 2: primeiro número par ou feminino e número da opinião.
- Número 3: primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto de unidade e diversidade.
- Número 4: número da justiça ou retribuição, indicando o ajuste de contas.
- Número 5: número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros feminino e masculino; média aritmética de cada um dos pares 1 e 9, 2 e 8, 3 e 7, 4 e 6, representado por Teão de Esmirna (130 d.C) através da tabela subsequente.

1	4	7
2	5	8
3	6	9

TABELA 2. Tabela de Teão de Esmirna, [**87**].

- Número 6: número da criação.
- Numero 7: único número entre os primeiros dez que não é divisor nem múltiplo de nenhum dos outros números.
- Número 10: o mais sagrado, venerado pelos pitagóricos, representava o Universo.

Baseado em autores antigos, Vasconcellos, em [**87**], afirma que foi Pitágoras que distinguiu a Aritmética (tratamento teórico das propriedades abstratas dos números) da Logística (arte de cálculo com a resolução de problemas sobre números concretos). Os pitagóricos interessaram-se sobretudo pelas propriedades dos números e relações entre eles.

Como já ficou patente no misticismo dos números, os pitagóricos também fizeram a distinção entre números pares e ímpares, bem como a distinção entre números primos e compostos. De entre os compostos definiram os números perfeitos, abundantes, deficientes e amigos.

Exemplo 2.9. Os números 6 e 28 são números perfeitos, pois cada um é igual à soma de seus divisores:
$6 = 1 + 2 + 3$,
$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$.

Exemplo 2.10. Observe-se que $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ é o conjunto dos divisores próprios de 12 cuja soma é 16, maior que 12, logo 12 é um número abundante.

Exemplo 2.11. Tendo em conta que $\{1, 2, 5\}$ é o conjunto dos divisores próprios de 10, cuja soma é 8, menor que 10, tem-se que 10 é um número deficiente.

Exemplo 2.12. Os números 220 e 284 dizem-se amigos. De facto, $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$ é o conjunto dos divisores próprios de 220, cuja soma é 284. A soma dos divisores próprios de 284, os elementos do conjunto $\{1, 2, 4, 71, 142\}$, é por sua vez 220.

Com ligação à Geometria, a aritmética pitagórica dedicou-se ainda ao estudo dos números figurados. Estes são números representados por conjuntos de pontos com configurações geométricas, onde a quantidade de pontos agrupados representa um número, como ilustram os exemplos subsequentes.

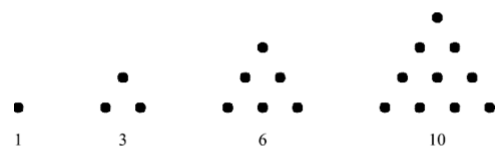


Figura 10. Os primeiros quatro números triangulares.

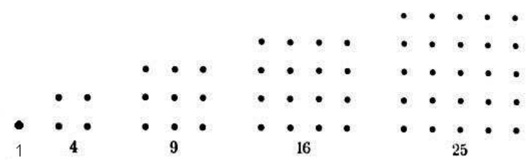


FIGURA 11. Os primeiros cinco números quadrados.

Observe-se que, na figura anterior, cada esquema quadrado é constituído por dois esquemas triangulares representados por dois números triangulares consecutivos. Enuncia-se de seguida, o teorema que estabelece esta propriedade.

TEOREMA 2.13. *Todo o número quadrado, superior a 1, exprime-se como a soma de dois números triangulares consecutivos.*

Segundo Almeida, em [**4**], no início, toda a Matemática Grega baseava-se nos números naturais, procurando representações numéricas exatas. O pensamento matemático foi abalado pela descoberta de que o lado e a diagonal de um quadrado eram incomensuráveis. De facto, "(. . .) a descoberta da irracionalidade da diagonal do quadrado de lado 1 provocou uma grande crise filosófica, contemporânea praticamente aos paradoxos sobre o infinito de Zenão." (Cousquer, [**4**], p. 49). Ainda de acordo com a mesma referência, daí em diante, os gregos passaram a separar o conceito de número inteiro do conceito de grandeza, este último fundamentalmente dependente da Geometria.

Destacável foi também Diofanto de Alexandria (século III), do qual, à semelhança de Tales e Pitágoras, pouco se sabe em relação à sua vida. Segundo um enigma de uma coleção de problemas datada do século V ou VI, Diofanto terá vivido 84 anos: "Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte da sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após o seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou a sua vida." (Cohen e Drabkin, [**14**], p. 121).

Diofanto escreveu *Arithmetica* (Fig.12), obra dedicada essencialmente à resolução exata de problemas através de equações e constituída por treze livros dos quais, segundo [**27**], hoje apenas se conhecem 10. De Diofanto há a destacar a adoção original de notações para abreviações de potências, relações de igualdade e operações de números, o que muito lhe facilitou a manipulação das relações algébricas.

Diofanto é considerado por muitos o pai da Álgebra, mas, tal como explica Boyer, assim não deve ser considerado, pois apesar da notação introduzida, "A *Arithmetica* não é uma exposição sistemática sobre as operações algébricas (...). Em vez disso é uma coleção de cerca de 150 problemas, todos estudados em termos de exemplos numéricos específicos. (...) nem se faz um esforço para achar todas as soluções possíveis." ([**14**], p. 123).

FIGURA 12. Capa da *Arithmetica* de Diofanto, numa edição de 1670, [**48**].

No que respeita ao sistema de numeração dos gregos, Almeida, em [**4**], afirma que coexistiram vários sistemas, dos quais se destacam o ático e o jónico.

O sistema ático teve por base seis símbolos (um, cinco, dez, cem, mil e dez mil), onde os cinco últimos símbolos provêm das iniciais dos nomes em grego, e outros quatro símbolos para evitar demasiadas repetições. Esta última característica constitui algo a que um sistema de caráter aditivo obriga. O sistema não era posicional, pelo que aos símbolos era-lhes atribuído o seu valor independentemente da posição que ocupavam. No entanto, segundo Almeida, a convenção era ordenar os símbolos por ordem decrescente do seu valor da esquerda para a direita.

ΧΗΗΗΔΔΓ

FIGURA 13. Número 1325 representado no sistema de numeração ático.

O sistema jónico consistia num sistema de numeração alfabético por usar os símbolos do alfabeto grego, com mais três letras arcaicas extra, stigma, koppa e sampi, atualmente em desuso. Os valores eram atribuídos segundo a ordem do alfabeto.

α	β	γ	δ	ϵ	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Tabela 3. Representação de alguns números no sistema de numeração jónico.

$$\pi\zeta$$

Figura 14. Número 87 representado no sistema de numeração jónico.

Quando o número era superior ou igual a 1000 colocava-se um sinal semelhante a um acento, abaixo e à esquerda da sequência de símbolos, como se observa na tabela seguinte.

$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\epsilon$	,ϛ	$,\zeta$	$,\eta$	$,\theta$
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Tabela 4. Representação de alguns números, superiores ou iguais a 1000, no sistema de numeração jónico.

$,\theta$ ϡ ϟ θ

Figura 15. Número 9999 representado no sistema de numeração jónico.

Dos quatro sistemas de numeração mencionados até aqui, o egípcio e o ático eram os menos evoluídos. De facto, seriam esses os mais demorados devido à necessidade de repetição de símbolos. Só com o sistema precursor, criado pelos hindus e divulgado pelos árabes, do que conhecemos hoje, se teriam todas as características desejáveis num sistema de numeração: simplicidade, não repetitividade e posicionalidade.

5. Império Árabe

O Império Árabe teve a sua origem no Islamismo, religião fundada pelo profeta Maomé no século VII. Antes disso, a Arábia era composta por povos semitas que viviam em diferentes tribos. Em 622 Maomé foge dos seus adversários políticos e religiosos de Meca para Medina, mas regressa a Meca em 630 falecendo dois anos depois. Após a morte de Maomé, os seus sucessores expandiram o Império Árabe através de diversas conquistas. Em menos de um século conquistaram o Império Romano do Oriente, a Pérsia e a Síria, a Palestina, a Mesopotâmia, o Egito, Tunis e parte da Península Ibérica. Em 1001 chegaram à Índia. Desta forma espalharam o Islamismo e a língua árabe, ao mesmo tempo que apreenderam novas culturas.

A capital do Império Árabe foi inicialmente em Damasco sendo transferida em 772, pelo califa al-Mansur, para Bagdad, que se tornou num grande centro cultural onde eram promovidas as artes e as ciências. Sob o reinado de Harun ar-Rasid, foi criada uma importante biblioteca onde guardaram diversos manuscritos provenientes das conquistas árabes e onde acorriam, de diversas regiões, sábios e tradutores.

Após a morte de Harun ar-Rasid, em 813, o seu filho Al-Mamum continuou a obra do pai, fundando uma academia com o nome de "Casa da Sabedoria". Aqui estudavam-se e traduziam-se para árabe diversas obras científicas, entre as quais, textos hindus. Nesta academia trabalhou o matemático e astrónomo Mohammed ibu-Musa Al-Khwarizmi, que veio a ter um papel muito importante na história da Matemática.

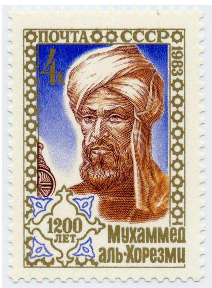


FIGURA 16. Al-Khwarizmi (780-850), num selo da antiga URSS, [**48**].

Al-Khwarizmi, através das obras provenientes da Índia, estudou o sistema de numeração, os cálculos e a representação do zero dos hindus. Escreveu várias obras sobre Matemática e Astronomia, entre as quais, um tratado de aritmética cujo título da tradução é *Algorithmi de numero Indorum*. Nesta obra, Al-Khwarizmi introduz os dez símbolos hindus para representar os algarismos, explica como escrever um número no sistema decimal posicional hindu-árabe e como operar com eles. Estas novas regras de operações ficaram conhecidas, devido ao seu nome, por algorismi e, posteriormente, pelas designações algorismo ou algoritmo.

O nome do título de mais uma das suas obras, *Al-jabr Wa ´l Muqabalah*, também trouxe até nós outra palavra, a álgebra. De facto, esta obra trata da resolução de equações, em especial, de grau dois. Começa com uma explicação sobre o sistema posicional do sistema numérico e daí passa para seis capítulos onde, em cada um, resolve um tipo de equação de grau dois, nos casos em que as equações têm uma raiz positiva, tal como se descreve a seguir: Quadrados iguais a raízes; Quadrados iguais a números; Raízes iguais a números; Quadrados mais raízes iguais a números; Quadrados mais números iguais a raízes; Raízes mais números iguais a quadrados.

Cada situação tem sempre três ilustrações para os casos em que o coeficiente de termo variável é igual, menor ou maior que 1. Nota-se ainda a necessidade de uma comprovação geométrica: "Já dissemos o bastante, no que se refere a números, sobre os seis tipos de equações. Agora, porém, é necessário que demonstremos geometricamente a verdade dos mesmos problemas que explicamos com números." (Al-Khwarizmi, [**14**], p. 157). Para exemplificar o referido, veja-se o raciocínio seguinte.

Exemplo 2.14. *Considere-se a equação*

$$x^2 + 10x = 39,$$

onde "(...) uma raiz quadrada e 10 são iguais a 39 unidades. A questão, portanto, neste tipo de equação é sobre o seguinte: qual é o quadrado que combinado com dez das suas raízes dará uma soma total de 39? A maneira de resolver este tipo de equação é tomar metade das raízes que acabei de mencionar. As raízes do problema são 10. Portanto, tomar 5, que multiplicado por ele próprio dá 25, um montante que adicionado a 39 dá 64. Tendo tomado então a raiz quadrada desse que é 8, subtrair metade das raízes, que é 5, sobra 3. O número três, portanto, representa uma raiz deste quadrado, que por si só, é claro, é 9. Nove é portanto o quadrado", [**48**].

Al-Khwarizmi começa a demonstração geométrica com um quadrado de lado x*, com área* x^2*. A esta soma* $10x$*, o que é feito pela adição de quatro retângulos de largura* $\frac{10}{4}$ *e comprimento igual a* x (Fig.17).

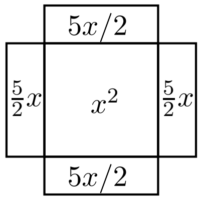


Figura 17. Adição de quatro retângulos de largura $\frac{5}{2}$.

Obtém-se então um quadrado de área $x^2 + 10x$ que é igual a 39. Para completar o quadrado, adicionam-se quatro pequenos quadrados de área $\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$ (Fig. 18).

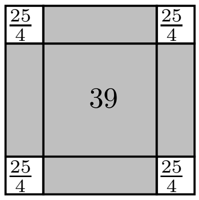


Figura 18. Adição de quatro quadrados de lado $\frac{5}{2}$.

Assim, o quadrado final tem área $4 \times \frac{25}{4} + 39 = 25 + 39 = 64$, donde o lado do quadrado é 8. Este corresponde ao comprimento $\frac{5}{2} + x + \frac{5}{2}$, pelo que $x + 5 = 8$, dando $x = 3$.

A ciência árabe entra em declínio muito rapidamente, com início no fim do século XI. As causas, segundo Boyer, em [**14**], parecem estar nos inúmeros conflitos devidos ao excesso de frações políticas e religiosas.

6. Europa

A partir do final do século VI a.C. e ao longo de oito séculos, os romanos foram expandindo o seu território, que se veio a tornar num grande e poderoso império – o Império Romano. No século II d.C. o Império Romano estendia-se por três continentes. Abarcava toda a bacia do mediterrâneo, confinado a norte pelos rios Reno e Danúbio, a sul abrangia toda a faixa litoral do norte de África e o Egito e, na parte oriental, a Síria, a Judeia e a Ásia Menor. Em 395, com a morte do imperador

Teodósio, o império foi dividido politicamente em Império Romano do Ocidente (com capital em Roma) e Império Romano do Oriente (com capital em Constantinopla). Desta divisão resultou a estagnação do desenvolvimento do Ocidente, enquanto que o Oriente se tornou no centro da civilização.

Depois da queda do Império do Ocidente, em 476, e com o fim da autoridade imperial, a Igreja Católica desempenhou um importante papel na regulação das sociedades. Eram os bispos que muitas vezes mantinham a ordem, promoviam a justiça e representavam as populações. Os homens do Clero e alguns laicos eram dos poucos que sabiam ler e escrever. Um destes homens laicos foi Severino Boécio (480-524), que escreveu diversos textos de retórica, gramática e lógica. Ele também traduziu obras da Matemática grega, facto que apoia a teoria defensora da origem grega dos símbolos do repetitivo sistema de numeração romano. Os seus textos tiveram grande influência e foram uma fonte para o ensino da altura.

O clima matemático que se viveu a seguir foi-se deteriorando, passando quatro séculos, época que normalmente é denominada por Idade das Trevas. É então que surge um matemático destacável, Gerbert d'Aurillac (945-1003), que mais tarde se tornou no Papa Silvestre II. Responsável pelo despoletar de um novo interesse pela Matemática, terá sido o primeiro a ensinar, na Europa, os números indo-árabes devido a um possível contacto que teve com a cultura moura em Espanha. Na realidade, a História, no que respeita à introdução dos números indo-árabes na Europa, não é totalmente clara, afirma Boyer em [**14**].

Mas foi o século XIII, no período da Idade Média, que representou maior progresso. Foi quando surgiram as primeiras grandes cidades comerciais como Génova, Pisa, Veneza, Milão e Florença, com relações comerciais com o mundo árabe. Através destas relações os mercadores passam a estudar a cultura e a ciência árabes. Foi exemplo disso Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci. Sendo o pai mercador e com negócios no norte de África, teve oportunidade de viajar pelo Egito, Síria e Grécia. Ficou a conhecer os métodos algébricos árabes e os números indo-árabes.

De regresso do Oriente, Fibonacci acabou de escrever a obra *Liber Abaci* (Livro do Ábaco) em 1202, a qual contém informações aritméticas e algébricas. O referido livro representa um meio pelo qual o sistema de numeração indo-árabe foi também introduzido e expandido na Europa Ocidental. Fibonacci escreveu "(...) quando fui introduzido na arte dos nove símbolos indianos por meio de um ensino notável, cedo o conhecimento dessa arte se tornou um prazer acima de qualquer outro." (Fibonacci, [**3**], p. 25).

FIGURA 19. Leonardo Fibonacci (1180-1250), [**48**].

Em *Liber Abaci*, depois de expor os processos algorítmicos, Fibonacci dedica-se à exploração de problemas. O mais interessante e que, segundo Boyer em [**14**], mais inspirou os futuros matemáticos, foi aquele que dá origem ao que chamamos hoje de sequência de Fibonacci. O enunciado original deste problema é: *"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"*. A sequência tem a seguinte representação:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, u_n, \ldots, \text{ onde } u_1 = u_2 = 1 \text{ e } u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3.$$

Esta sequência tem muitas propriedades interessantes, como por exemplo, dois termos consecutivos são primos entre si e o quociente entre eles converge para o número áureo, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. A sua aplicação também não deixa de ser curiosa, por exemplo, em questões de filotaxia. Por último, não se pode deixar de referir o interesse que esta sequência ainda suscita nos dias de hoje, sendo o jornal *The Fibonacci Quarterly*, em [**29**], prova disso.

Passaram dois séculos e inicia-se, na Europa Ocidental, uma fase de declínio no progresso da Matemática, muito devido à catástrofe da Peste Negra, à Guerra dos Cem Anos e à Guerra das Rosas. Estes acontecimentos precipitaram o fim de um tempo que se caracterizou pela sua longevidade e por alguns paradoxos sociais e científicos, conjugando momentos de avanço e retrocesso. Em simultâneo, a Oriente, em 1453, assiste-se à queda de Constantinopla, o que suscita a noção de "Fim de uma Era". Termina a Idade Média que se desenrolou ao longo de dez séculos na

Europa. Culmina um Tempo com distinto desenvolvimento nos dois lados da Europa, a Oriente e a Ocidente, mas cujos momentos iniciais coincidiram, bem como os finais.

Seguiu-se a Idade Moderna que se inicia com o movimento do Renascimento, caraterizado pela redescoberta da filosofia, da literatura e da ciência da antiguidade aliada à evolução científica. Registaram-se profundas transformações culturais, sociais, económicas, políticas e religiosas que caracterizam a transição do Feudalismo para o Capitalismo. Este movimento começou em Itália e difundiu-se por toda a Europa durante os séculos seguintes.

Deram-se profundas transformações na organização da sociedade, nomeadamente nas trocas comerciais mais complexas. Esta economia emergente levou à necessidade de uma Matemática mais desenvolvida para responder às novas exigências (letras de crédito, cálculos de juros, etc). Segundo Katz, em [**37**], no início do século XIV, os abacistas (que mais tarde vieram dar lugar aos algoristas) escreviam textos de Matemática para ensinar os mercadores e seus filhos. Nomeadamente, eles ensinavam o sistema posicional decimal indo-árabe e os algoritmos para o usar.

Os referidos novos métodos de cálculo revelaram-se vantajosos dado que requeriam apenas papel e pena, permitindo o registo de todos os cálculos, a sua posterior verificação e ainda a eventual retificação. Para além dos algoritmos de cálculo, os mercadores também treinavam a resolução de problemas, na sua maioria, sobre comércio, como o que se exemplifica de seguida.

EXEMPLO 2.15. *Um problema de textos de ábacos italianos é o seguinte:*
"Se 8 braccia de tecido valem 11 florins, quanto valem 97 braccia?" ([**37**], p. 478).

No início do século XV os abacistas começam a usar abreviaturas para as incógnitas. Antes escreviam *cosa* para coisa, *censo* para quadrado e *radice* para raiz, e, segundo Katz, em [**37**], passam a escrever c, ce e R, respetivamente. No final do mesmo século, em Itália, um dos últimos abacistas foi Luca Pacioli (1445-1514) que introduziu as abreviaturas p e m para mais e menos (*più* e *meno*) respetivamente. Mas as notações na época ainda eram muito variadas, dependendo de cada autor. Só em meados do século XVII ficou formado o simbolismo algébrico moderno, o que revela uma mudança lenta na notação.

Pacioli escreveu *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionlita* (1494) que, segundo Katz, em [**37**], é o mais completo texto matemático do seu tempo e Boyer, em [**14**], afirma ser considerada hoje a primeira obra impressa de Álgebra. Em *Summa*, que resultou de um resumo de obras suas não publicadas e do conhecimento geral da época, Pacioli aborda quatro áreas, a Aritmética, a Álgebra, a Geometria Euclidiana e a Contabilidade. Foi Pacioli que segundo Aires, em [**3**], escreveu o primeiro texto europeu sobre a utilização do zero, onde descreve, por exemplo, que o zero é o elemento absorvente da multiplicação e o elemento neutro da adição.

Em França, contemporâneo de Pacioli, surge Nicolas Chuquet (1445-1488), um homem destacável da época que escreveu *Triparty en la science des nombres* (1484), a primeira Álgebra pormenorizada publicada em França, e que "(...) em nível de importância foi talvez o mais notável desde *Liber Abaci* de Fibonacci (...)", ([**14**], p. 189).

Triparty divide-se em três partes: a primeira consta de uma explicação do sistema posicional indo-árabe e dos vários algoritmos para as operações aritméticas básicas (números inteiros e frações comuns); a segunda trata o cálculo de raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos e raízes cúbicas de inteiros com muitos dígitos; por fim, a terceira parte, diz respeito à Álgebra, como trabalhar com polinómios e resolver vários tipos de equações, conforme descrito em [**14**].

Exemplo 2.16. *Chuquet encontra uma regra para encontrar números intermédios de dois números vizinhos, tantos quantos se deseje. Nomeadamente para encontrar uma fração entre duas frações adicionam-se os numeradores e os denominadores. Assim um número entre* $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{5}{6}$ *é* $\frac{7}{9}$.

Exemplo 2.17. *Chuquet, para encontrar raízes de polinómios, utiliza o método de aproximação ilustrado em* [**37**]. *Considere-se*

$$x^2 + x = 39\tfrac{13}{81}.$$

5 é demasiado pequeno e 6 demasiado grande, então Chuquet tenta sucessivamente $5\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $5\frac{3}{4}$ *e* $5\frac{4}{5}$, *até que tenta* $5\frac{7}{9}$ *que é a solução da equação.*

No tratamento das raízes, Chuquet também recorre ao método de aproximação referido no exemplo precedente. Assim, determina a raiz de um número, através de várias tentativas. O facto de não encontrar a solução exata, revela que já tinha a noção da irracionalidade dos números.

Surge com Chuquet uma nova notação para potências da incógnita, sendo esta indicada por um expoente associado ao coeficiente do termo. Por exemplo, para o que escrevemos hoje ax^2, Chuquet escreve a^2. Ainda referente a este trabalho de Chuquet, Katz, em [**37**], afirma que, pela primeira vez numa obra europeia, surgem expoentes zero e números negativos. De seguida, exemplifica-se a notação usada para coeficiente e expoente negativos.

EXEMPLO 2.18. *Chuquet escreve* -3^{-2} *do seguinte modo*

$$\overline{m}3^{2\overline{m}}.$$

Na resolução de equações, Chuquet inova nas técnicas de resolução, generalizando as regras de Al-Khwarizmi, para equações de qualquer grau. Por exemplo, dá a solução da equação $cx^m = bx^{m+n} + x^{m+2n}$ como sendo $x = \sqrt[n]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}}$. Observe-se como se obtém a referida solução, em notação atual:

$$\begin{aligned}
&cx^m = bx^{m+n} + x^{m+2n} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow cx^m - bx^{m+n} - x^{m+2n} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^m(c - bx^n - x^{2n}) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^m = 0 \vee c - bx^n - x^{2n} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^{2n} + bx^n - c = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^n = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2+4c}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^n = -\tfrac{b}{2} \pm \sqrt{\tfrac{b^2}{4} + \tfrac{4c}{4}} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^n = -\tfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{b}{2}\right)^2 + c}.
\end{aligned}$$

Katz, em [**37**], afirma que Chuquet nem sempre aceita soluções negativas e nunca considera o zero como solução, como se observa no exemplo supra. Mas "Ao escrever $.4.^1 egaulxa\overline{m}.2.^0$ (isto é $4x = -2$) Chuquet estava pela primeira vez exprimindo um número negativo isolado numa equação algébrica." ([**14**], p. 190).

Chuquet apresenta ainda uma outra inovação. No que respeita a um sistema possível e indeterminado, de duas equações com três incógnitas, afirma que tem soluções múltiplas. A técnica utilizada, no exemplo que se segue, recorre, na designação atual, ao grau de indeterminação.

EXEMPLO 2.19. *Para resolver o sistema,*

$$\begin{cases} x + y = 3z \\ x + z = 5y \end{cases},$$

primeiro Chuquet dá o valor de 12 a x *para encontrar* $y = 3\frac{3}{7}$ *e* $z = 5\frac{1}{7}$*. Depois escolhe 8 para* y*, obtendo* $x = 28$ *e* $z = 12$*. Assim, ele diz que "(...) o número escolhido, por si só, determina a reposta variada."* (Chuquet, [**37**], p. 441).

Noutros países da Europa, nomeadamente na Alemanha e na Inglaterra, também a Matemática era objeto de estudo e aí surgiram nomes significativos para a História pelas suas contribuições. Na Alemanha, a palavra *coss* para incógnita foi de tal maneira marcante que a Arte da Coss, segundo Katz, em [**37**], ou a Arte Cóssica, segundo Boyer, em [**14**], foram os nomes dados à Álgebra. As origens da Álgebra germânica são italianas, o que se reflete, por exemplo, no uso dos símbolos italianos p e m, para adição e subtração, respetivamente.

No início do século XVI surgem diversas álgebras alemãs, das quais Boyer, em [**14**], destaca a *Coss* (1525), escrita por Chistoff Rudolff (1499-1545) e a *Arithmetica integra* (1544), de Michael Stifel (1487-1567).

Katz refere em [**37**], que, à semelhança da obra de Chuquet, a primeira parte da *Coss* incluía os fundamentos do sistema posicional indo-árabe e também uma secção que listava as potências não negativas de 2. Ao contrário da notação de Chuquet para expoentes, Rudolff usava abreviaturas dos nomes das potências. Segundo Katz, em [**37**], *Coss* foi das mais antigas obras a incluir pela primeira vez os símbolos de $+$ e - para a adição e a subtração, respetivamente. Estes símbolos já tinham sido usados, mas para representar excesso e defeito, na obra de Johann Widman em 1489.

Chistoff Rudolff também introduziu o moderno símbolo de raiz quadrada, adaptando-o para distinguir raiz quadrada de raiz cúbica, e trabalhou pormenorizadamente as operações com raízes. Na segunda parte de *Coss* dedica-se à resolução de equações algébricas, fazendo uma classificação em 8 categorias.

A *Arithmetica integra* de Stifel, foi, segundo Boyer, em [**14**], a mais importante de todas as álgebras alemãs do século XVI, cujos aspetos mais importantes foram o tratamento dos números negativos, radicais e potências. Michael Stifel foi o primeiro a reduzir várias formas padrão da equação quadrática na única forma $x^2 = bx + c$, onde b e c são ambos positivos ou de sinais contrários. Em [**37**] consta que a solução apresentada foi $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ (sinal negativo apenas possível para b positivo e c negativo), forma equivalente à usual $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4c}}{2}$.

No que respeita aos números negativos, Stifel chamava-os de *numeri absurdi*, conhecendo bem as suas propriedades, e em relação aos números irracionais, dizia que estavam "(...) escondidos sob uma espécie de nuvem de infinitude." (Stifel, [**14**], p. 193).

Na Inglaterra do século XVI, Robert Recorde (1510-1558) foi praticamente o único matemático de importância , afirma Boyer em [**14**]. A sua primeira obra é *Ground of Arts* (1541) que inclui, com aplicações comerciais, cálculos por ábaco e algoritmos. Foi o primeiro a introduzir o símbolo =, "(...) porei, como faço geralmente na prática, um par de paralelas, ou linhas gémeas de igual comprimento, assim, = , porque nenhumas duas coisas não podem ser mais iguais." (Recorde, [**37**], p. 447).

De volta a Itália, em 1545 foi publicada a *Ars Magna* (Fig.20), a obra matemática mais importante de Gerolamo Cardano (1501-1576), principalmente dedicada à resolução de equações cúbicas e quárticas. Segundo Boyer, a *Ars Magna* "(...) causou tal impacto sobre os algebristas que o ano de 1545 frequentemente é tomado como marco do início do período moderno na Matemática." ([**14**], p. 193).

FIGURA 20. Capa da *Ars Magna* de Gerolamo Cardano, [**72**].

A sugestão para Cardano resolver a equação cúbica foi-lhe dada por Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido por Tartaglia (1500-1557). Mas a verdade, segundo Boyer, em [**14**], é que nenhum dos opositores, Cardano e Tartaglia, foi o primeiro a fazer a descoberta da resolução da equação cúbica. O referido autor atribui-a a Spicione de Ferro (1465-1526), professor de Matemática em Bolonha, desconhecendo-se quando foi feita, mas que a revelou, antes da sua morte a um estudante, António Maria Fior, que Boyer descreve como um medíocre matemático. De facto, Estrada *et al.*, em [**27**], descreve que no livro *Ars Magna* Cardano conta que foi Scipione de Ferro a descobrir um método de resolução das equações cúbicas, mas que tinha sido mantido em segredo. No que respeita às equações quárticas, Cardano refere que foi Ludovico Ferrari (1522-1565), com quem trabalhou, que inventou a regra para as resolver, divididas em diferentes casos, num total de vinte.

Na época as novas descobertas eram mantidas em segredo para serem lançadas em forma de problemas aos seus rivais, numa espécie de duelos, e desta forma alcançarem fama e recompensas em dinheiro. Um destes duelos opôs Tartaglia e Fior, em que cada um lançou trinta questões para que o opositor as resolvesse. Tartaglia conseguiu resolver as questões propostas por Fior, mas o contrário não aconteceu. Fior, segundo Boyer, em [**14**], só conhecia as equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$, mas Tartaglia já sabia resolver equações do tipo $x^3 + px^2 = q$.

No final do século XVI a Europa já dominava a resolução das equações cúbicas e quárticas, descobertas marcantes na história da Matemática, que estimulou muitos a trabalhar no desenvolvimento desta ciência.

Da nova geração fazem parte nomes como: os italianos Galileu Galilei (1564-1642) e Boaventura Cavalieri (1598-1647); os ingleses Henry Briggs (1561-1639), Thomas Harriot (1560-1621) e William Oughtred (1574-1660); os flamencos Simon Stevin (1548-1620) e Albert Girard (1590-1633); da Escócia, John Napier; da Suiça, Jobst Burgi (1552-1632); e Johann Kepler (1571-1630) da Alemanha. Mas, segundo Boyer, em [**14**], a figura central foi François Viète e Katz acrescenta que foi "Um dos primeiros homens de talento a exibir a nova álgebra com clareza e simplicidade (...)" ([**37**], p. 464).

FIGURA 21. François Viète (1540-1603), [**48**].

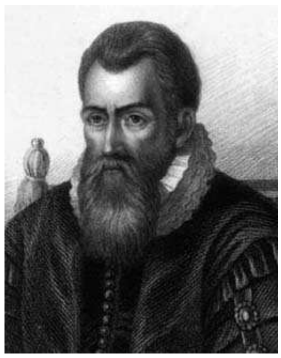


FIGURA 22. John Napier (1550-1617), [**48**].

Viète de facto contribuiu para importantes avanços da Matemática, em áreas como a Álgebra e a Aritmética, entre outras. Uma das mais notáveis contribuições foi a definição de uma nova forma de simbolismo, manipulando tanto letras como números, tal como demonstra a afirmação: "Os termos dados são distinguidos das incógnitas por símbolos, gerais e facilmente reconhecíveis, como designar grandezas desconhecidas pela letra A e as outras vogais E, I, O, U e Y, e os termos dados pelas letras B, G, D e as outras consoantes." (Viète , [**37**], p. 465).

A obra central de Viète sobre teoria das equações encontra-se em *Dois Tratados sobre o Reconhecimento e Emenda de Equações.* Aqui transforma vários tipos de equações em poucas formas canónicas e depois mostra como as resolver, mas sempre restringido a soluções positivas. Segundo Aires, em [**3**], Viéte demonstra que se pode passar de uma igualdade para outra através da divisão e multiplicação, bastando para isso dividir ou multiplicar ambos os membros de uma equação pelo mesmo valor. Cada termo de uma equação passou a ser encarado como um objeto matemático que pode ser adicionado, subtraído, multiplicado ou dividido.

Viète percebia que havia relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação, mas era "(...) prejudicado por sua recusa em aceitar coeficientes ou raízes negativos." ([**14**], p. 209). Foi Albert Girard, na sua obra *Invention nouvelle en l'algébre* (1816), que admitindo raízes negativas e imaginárias, enunciou a relação entre raízes e coeficientes no Teorema Fundamental da Álgebra, cuja primeira demonstração é atribuída ao matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss.

Teorema 2.20. *Teorema Fundamental da Álgebra*

"Para todo o polinómio $f \in \mathbb{R}[x]$ de grau n, existe um corpo $\mathbb{K}$, uma extensão de $\mathbb{R}$, tal que f tem exatamente n zeros (não necessariamente distintos) em $\mathbb{K}$." ([**25**], p. 99).

O enunciado de Girard, equivalente ao precedente, diz "Qualquer equação algébrica (...) admite tantas soluções como a denominação da maior quantidade indicada. E a primeira fação das soluções é igual ao coeficiente da segunda maior quantidade, a segunda fação delas é igual ao coeficiente da terceira maior quantidade, (...), e por aí adiante, de forma a que a última fação é igual ao termo termo constante – tudo isto de acordo com os sinais que podem ser notados na ordem alternada." ([**37**], p. 562).

Na Aritmética, Viète desatacou-se pelo o uso de frações decimais e recomendou-as em vez das frações sexagesimais. De facto, "Sexagesimais e múltiplos de sessenta devem ser pouco, ou nunca, usados, e milésimos e milhares, centésimos e centenas, décimos e dezenas, e progressões semelhantes ascendentes e descendentes, usadas frequentemente ou exclusivamente." (Viète, [**14**], p. 207).

Mas quem mais insistiu no uso destas frações foi Simon Stevin, um engenheiro de Bruges. Até ao Renascimento, os textos que faziam uma abordagem ao sistema posicional indo-árabe, referiam-se a números inteiros, frações sexagesimais e outras comuns, mas nunca a frações decimais, tal como é referido em [**37**]. Rudolff já tinha escrito frações decimais usando uma linha vertical para separar a parte inteira da parte decimal, mas foi Stevin quem, através de uma das suas obras, *De Thiende* (1585), explicou como trabalhar com frações decimais, divulgando-as.

Stevin afirmou que todas as operações com frações decimais eram possíveis, como se de números inteiros se tratasse. Aos números inteiros chamava-lhes *começo* e atribuía-lhes o símbolo ⓪, a cada décima parte da unidade chamava *primo* e escrevia o símbolo ①, a cada décima parte do *primo* chamava *segundo*, com o símbolo ②, e assim sucessivamente. Desta forma, Stevin introduz o conceito de números decimais e descreve as quatro operações básicas e o cálculo de raízes quadradas e cúbicas. Em vez de escrever as expressões decimais com um denominador, ele escrevia com os símbolos referidos anteriormente, por cima ou depois de cada algarismo, indicando desta forma a sua classe. Vejam-se os seguintes exemplos de aproximação de π.

Exemplo 2.21. *Em* [**14**] *surge a aproximação* $3,1416$ *de* π *na notação de Stevin,*

$$3⓪1①4②1③6④.$$

Exemplo 2.22. *O número* $\frac{4375}{10000}$ *escrito, por Stevin, na forma* 4①3②7③5④*, que na notação atual se escreve* $0,4375$.

Esta notação rapidamente caiu em desuso com John Napier (1550-1617), que introduz na obra *Descriptio* (1616) a notação que hoje conhecemos (uma vírgula ou ponto a separar a parte inteira da parte decimal de um número). Mas onde Napier se destacou foi na invenção dos logaritmos, que resultaram da simplificação de complexas multiplicações e divisões. Como descreve Boyer, em [**14**], para numa progressão geométrica de potências inteiras de um dado número se manterem os termos próximos, era necessário que esse número fosse muito próximo de 1. Napier decidiu então utilizar o número $1 - 10^{-7} = 0,9999999$ e, para evitar o trabalho com casas decimais, multiplicou todas as potências por 10^7. Assim, se $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, então L é o logaritmo de Napier do número N.

Henry Briggs (1561-1630), um professor de Oxford, reconheceu as vantagens em utilizar os logaritmos mas considerou a base de Napier inconveniente. Em 1915 convidou Napier para o visitar na Escócia, onde discutiram modificações ao método dos logaritmos, como a mudança para uma base decimal, e estabeleceram as seguintes igualdades: $\log(1) = 0$ e $\log(10) = 1$.

Briggs continuou a trabalhar no cálculo dos logaritmos em base decimal e, em 1617, apresentou a tabela de logaritmos dos números de 1 a 1000, calculados até à décima quarta casa decimal. Mais tarde, em *Arithmetica logarithmica* (1624), Briggs completou o trabalho anterior dando os logaritmos dos números de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000.

Durante o segundo terço do século XVII, Boyer em [**14**], identifica René Descartes e Pierre Fermat, como as principais figuras da época, mas também se refere a Evangelista Torricelli (1608-1647), a Giles Persone de Soberval (1602-1675), a Girard Desargues (1591-1661) e a Blaise Pascal (1623-1662), nomes que marcaram um dos períodos mais importantes da história da Matemática. Daqui em diante a Matemática passou a desenvolver-se, já não à custa das exigências económicas, políticas e sociais, mas sim devido à sua própria natureza.

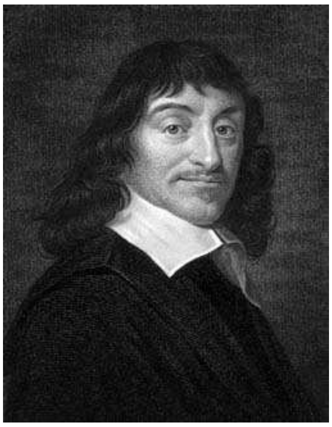


FIGURA 23. René Descartes (1596–1650), [**48**].

A evolução do cálculo foi estimulada pela publicação de *La Géométrie* (1637) de Descartes. Esta obra faz uma unificação da Álgebra e da Geometria que, segundo Struik, em [**83**], consistiu na criação da «Geometria Analítica». Ainda de acordo com esta referência, este ramo da Matemática desenvolveu-se sob a influência desta obra, apesar de não ter sido o único texto a tratar este assunto. Saliente-se ainda que, na referida obra, não existem explicitamente «eixos cartesianos», não são deduzidas equações da reta e das secções cónicas, para além do facto de grande parte do livro consistir numa teoria de equações algébricas.

O método *standard* de dividir um polinómio original por $x - \alpha$ foi explicado pela primeira vez, por Descartes, no terceiro livro de *La Géométrie*. O mesmo sucede com a regra de como determinar o número de raízes positivas e de raízes negativas, a que chamou raízes verdadeiras e falsas. Ainda no que às raízes diz respeito, Descartes utiliza a expressão "pode ter", pois apenas admite as raízes distintas e também porque, pelo menos inicialmente, não considera raízes imaginárias. Mostra também como as equações podem ser construídas conhecendo as suas soluções, como se observa nos exemplos seguintes.

EXEMPLO 2.23. *O produto, que resulta da multiplicação membro a membro, das equações* $x - 2 = 0$ *e* $x - 3 = 0$ *é* $x^2 - 5x + 6 = 0$. *Da multiplicação desta pelo polinómio* $x - 4 = 0$ *resulta uma equação de grau* 3 *com as soluções* $2, 3$ *e* 4.

EXEMPLO 2.24. *Multiplicar, membro a membro, a equação* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *pela equação* $x + 5 = 0$ *com solução negativa (ou falsa), resulta numa equação de grau 3.*

Descartes concluiu ainda que um polinómio é sempre divisível por um binómio e, desta forma, consegue-se obter uma redução de grau por fatorização, considerada a primeira afirmação do Teorema da Fatorização.

Segundo Boyer, em [**14**], a obra de Descartes pode ser caraterizada como a tradução de soluções algébricas em linguagem geométrica, tendo em conta os títulos da primeira e segunda secções da obra *La Géométrie*: "Como os cálculos da aritmética se relacionam com operações de geometria" e "Como a multiplicação, a divisão, e a extração de raízes quadradas são efetuadas geometricamente", respetivamente.

A notação de Descartes já se assemelha à que conhecemos hoje em dia pois foi ele que, segundo Aires, em [**3**], sugeriu as primeiras letras do alfabeto (a, b, c) para as quantidades fixas e as letras finais (x, y, z) para as incógnitas. Consolidou ainda os símbolos para indicar as operações aritméticas.

Rival de Descartes a nível de capacidade matemática, na opinião de Boyer, em [**14**], foi Fermat, um homem que se dedicou à Matemática por prazer já que a sua formação foi em Direito. Pierre de Fermat, influente em diversas áreas, destacou-se na Teoria dos Números, pelo que Boyer, em [**14**], o considera seu fundador.

A Fermat atraíram-no os números perfeitos e amigáveis, os números figurados, os quadrados mágicos, as tríades de Pitágoras, a divisibilidade, mas fundamentalmente os números primos. Um dos grandes desafios da época era a procura de fórmulas que gerassem apenas números primos e critérios para determinar se um dado número era ou não primo. Fermat enunciou a seguinte propriedade, cuja recíproca não é verdadeira, demonstrada mais tarde por Leonard Euler (1707-1783).

Teorema 2.25. *"Se p é primo e a é primo com p, $a^{p-1} - 1$ é divisível por p."* ([**14**], p. 244).

Figura 24. Pierre de Fermat (1601-1665), [**48**].

Provou alguns dos seus teoremas pelo método que denominou de "descida infinita", uma espécie de indução ao contrário, tendo sido dos primeiros a utilizá-lo. Este consiste em mostrar que uma propriedade ou relação não se verifica para nenhum número natural, provando que, se ela se verificar para um dado número, será também válida para um menor, obtendo-se assim uma sucessão estritamente decrescente de números naturais, o que é impossível.

Exemplo 2.26. *Aplico o método da "descida infinita" a um familiar problema – a prova de que $\sqrt{2}$ não é racional.*

Demonstração: Suponhamos que $\sqrt{2}$ é um número racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros positivos. Segue-se que $a^2 = 2b^2$ e então $\sqrt{2} = \frac{2b-a}{a-b}$ é um número racional de denominador menor que b e cujo quadrado é 2. Com efeito:

- *Como $a = b\sqrt{2}$ vem $a - b < b \Leftrightarrow a < 2b \Leftrightarrow b\sqrt{2} < 2b \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2$.*
- *Elevando ao quadrado a expressão $\frac{2b-a}{a-b}$, simplificando e tendo em conta que $a = b\sqrt{2}$, vem $\left(\frac{2b-a}{a-b}\right)^2 = \frac{6b^2-4\sqrt{2b^2}}{3b^2-2\sqrt{2b^2}} = 2$*

Obtemos assim uma sucessão estritamente decrescente de denominadores naturais. Contradição.

O referido método foi usado para provar que nenhum cubo é a soma de dois cubos, isto é, não existem x, y e $z \in \mathbb{N}$, tais que $x^3 + y^3 = z^3$. Enunciou uma generalização desta propriedade que ficou conhecida como o último ou o grande Teorema de Fermat.

Teorema 2.27. *Grande Teorema de Fermat*
Não existem x, y *e* $z \in \mathbb{N}$ *tais que* $x^n + y^n = z^n$ *se* $n \in \mathbb{N}$ *é superior a* 2.

Numa pequena anotação, na margem de uma página da sua cópia da obra *Arithmetica* de Diofanto, Fermat refere que estava na posse da demonstração desta conjetura, mas esta nunca foi encontrada. Apesar de surgirem provas de casos particulares deste enunciado, da autoria de diversos matemáticos, haveria que esperar mais de 350 anos para se ter uma demonstração. Esta, da autoria do matemático Andrew Wiles, foi publicada em 1995, nos artigos [**84**] e [**89**] de um volume especial do *Annals of Mathematics*.

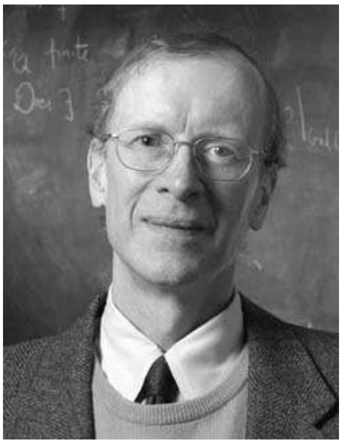


Figura 25. Andrew Wiles (1953-), [**48**].

Sucessor de Fermat, como entusiasta da Teoria dos Números, foi Carl Friedrich Gauss, que afirmou, na sua obra *Disquisitiones Arithmeticae*, “O problema de distinguir números primos de números compostos e de representar os últimos nos seus divisores primos é conhecido como um dos mais importantes e úteis em aritmética (...). A dignidade da própria ciência parece exigir que todos os meios possíveis sejam explorados para obter a solução (desse) problema tão elegante e celebrado.” (Gauss, [**47**], p. 73).

Em 1799, na sua tese de Doutoramento, Gauss apresentou a primeira demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, tal como já foi referido anteriormente. Fez diversas demonstrações, mas só na última supôs que os coeficientes do polinómio pudessem ser complexos.

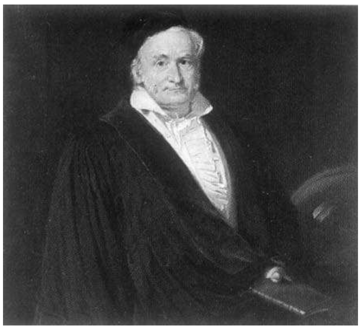


FIGURA 26. Carl Friedrich Gauss (1777-1855), [**48**].

Outro teorema a destacar, já conhecido do tempo de Euclides mas demonstrado por Gauss em *Disquisitiones arithmeticae*, foi o Teorema Fundamental da Aritmética, que se enuncia.

TEOREMA 2.28. *Teorema Fundamental da Aritmética*
Todo o número natural maior que 1 pode ser escrito de uma e uma só maneira como produto de números primos, com os fatores escritos por ordem não decrescente.

Boyer refere-se a este teorema como "(...) um dos princípios básicos que continuam a valer no domínio de integridade dos inteiros de Gauss." ([**14**], p. 346). Os chamados inteiros de Gauss são números na forma $a + bi$ onde a e b são números inteiros, que formam um anel comutativo, com identidade $1 \neq 0$, que não possui divisores de zero.

Ao contrário da Teoria dos Números, que estuda o conjunto discreto dos números naturais (trata de inteiros ou, mais genericamente, razões de inteiros – números racionais), a Análise, descrita por Boyer como o estudo de processos infinitos, trata de grandezas contínuas.

Estrada *et al.*, em [**27**], destaca, na história do Cálculo Infinitesimal, a disputa entre Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz acerca da prioridade da sua invenção. Globalmente é considerado que cada um criou o seu cálculo sem conhecer o do outro, tendo sido Newton o primeiro a descobrir e Leibniz o primeiro a publicar resultados. Estrada *et al.* ainda elege Leonard Euler como a figura dominante do século XVIII com a sua obra *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), onde o conceito de função adquiriu o lugar central na Análise Matemática.

Figura 27. Isaac Newton (1642-1727), [**48**].

Figura 28. Gottfried Leibniz (1646-1716), [**48**].

Newton e Leibniz deram origem a duas diferentes correntes, descritas em [**27**]: a escola britânica, adepta de Newton e do seu método das fluxões, e a escola continental, partidária do cálculo diferencial de Leibniz. Os ingleses Brook Taylor (1685-1731) e Colin MacLaurin (1698-1746) trouxeram desenvolvimentos ao método das fluxões de Newton e, no continente europeu, Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) foram seguidores do cálculo de Leibniz.

No século XVIII, próspero em novos resultados, foi quando se registou, segundo [**27**], um rápido desenvolvimento das técnicas do Cálculo Infinitesimal. De facto, as aplicações a estudos de fenómenos físicos levaram ao aparecimento de novos ramos da Matemática, como a teoria das Equações Diferenciais e a Geometria Diferencial.

Outros nomes que em [**27**] merecem referência são Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), que pretendeu desenvolver o cálculo a partir do conceito de limite, e Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), que apresentou uma conceção do cálculo baseada no desenvolvimento das funções em séries de potências.

Já no século XIX, Boyer descreve o ano de 1872 como um ano de "festa" dadas as contribuições feitas na aritmetização da Análise. Estas culminaram com investigações de meio século sobre a natureza da função e do número. Este século ficou marcado pela discussão profunda de conceitos tão importantes como, por exemplo, os de função, de limite, de série convergente, de continuidade, de derivada e de integral.

Boyer, tendo em conta os artigos que Augustin Louis Cauchy (1789-1857) escreveu no *Journal da École Polytechnique* e no *Comptes Rendus* da Académie, descreveo, em [**14**], como o fundador efetivo da Teoria de Funções. Com os seus três livros *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) e *Leçons sur le calcul differentiel* (1829), Cauchy tornou fundamental o conceito de limite já definido por d'Alembert. Mas a forma foi mais precisa, definiu infinitésimo como uma variável dependente e definiu a derivada de $y = f(x)$. Apresentam-se, de seguida, duas dessas definições.

Definição 2.29. *Limite*
"Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite dos outros todos." (Cauchy, [**14**], p. 355).

Definição 2.30. *Infinitésimo*
"Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando o seu valor numérico diminuiu indefinidamente de modo a convergir para o limite zero." (Cauchy, [**14**], p. 355).

O trabalho dos séculos XVIII e XIX, que ficou conhecido como aritmetização da Análise, culmina, segundo [**27**], com os trabalhos de Karl Weierstrass (1815-1897). Este é considerado por Boyer, em [**14**], o mais importante analista em Berlim na segunda metade do século XIX. Um artigo sobre funções abelianas trouxe-lhe notoriedade, o que o levou a tornar-se professor da Universidade de Berlim, exercendo forte influência através das suas publicações, dos seus cursos e dos seus alunos. Weierstrass procurou separar o Cálculo da Geometria onde para isso seria necessário dar uma definição de número.

A Itália, que entretanto tinha estagnado em novos desenvolvimentos da Matemática, volta a surgir com o nome de Giuseppe Peano (1858-1932), hoje conhecido devido aos axiomas de Peano. Peano procurou uma linguagem simples e ao mesmo tempo rigorosa, que levou à introdução de símbolos tais como $\in$ (pertence à classe de), $\bigcup$ (soma lógica ou união), $\bigcap$ (produto lógico ou interseção) e $\supset$ (contém), tal como descrito em [**14**]. Em *Arithmetics principianova methodo exposita* (1889), definiu os seguintes axiomas para os números naturais.

(1) Zero é um número.

(2) Se a é um número então o sucessor de a, $a + 1$, é também um número.

(3) Zero não é o sucessor de um número.

(4) Dois números cujos sucessores são iguais são eles próprios iguais.

(5) Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de cada número de S, então todo o número está em S.

O último axioma é o que denominamos hoje por Princípio de Indução Matemática.

Aires, em [**3**], acrescenta ainda os seguintes axiomas, também formulados no século XIX, mas sem identificar o seu autor.

(1) Para quaisquer m e n, $m + n = n + m$ e $m \times n = n \times m$ (propriedade comutativa da adição e multiplicação).

(2) Para quaisquer m, n e k, $k(m+n) = (km) + (kn)$ (propriedade distributiva da multipicação em relação à adição).

(3) Para cada m, $m + 0 = m$ (existência de elemento neutro da adição).

(4) Para todos os n, existe um número k de tal modo que $n+k = 0$ (existência de elemento simétrico).

Era fundamental para a Análise Matemática clarificar o conceito de número. Neste campo contribuíram Richard Dedekind e Georg Cantor, que conduziram à criação da Teoria dos Conjuntos.

Figura 29. Richard Dedekind (1831-1916), [**48**].

Figura 30. Georg Cantor (1845-1918), [**48**].

Dedekind, em 1858, quando começou a dar aulas em Zurique deparou-se com o facto de a Análise, ao se basear na Geometria, ter falta de rigor, pelo que deveria ser desenvolvida apenas através da Aritmética. Observou, por exemplo, que teoremas fundamentais sobre limites poderiam ser provados rigorosamente sem recurso à Geometria, afirma Boyer em [**14**].

À semelhança de Peano, Dedekind também investigou a construção dos números naturais. No trabalho referido acima, Dedekind caracterizou os números naturais, como um conjunto de *coisas* ou "objetos do nosso pensamento" com a seguinte definição de conjunto: "Acontece muito frequentemente que diferentes coisas a, b, c,... por alguma razão podem ser consideradas de um ponto de vista comum, podem ser associadas na mente, e dizemos que formam um conjunto S... Tal conjunto S como um objeto do nosso pensamento é igualmente uma coisa; fica completamente determinado quando relativamente a todas as coisas é possível determinar se é elemento de S ou não." (Dedekind, [**37**], p. 950).

Para além dos números naturais, Dedekind apresenta a definição do conjunto dos números reais, menos vasta que a anterior e descrita por Nogueira *et al.*, em [**47**], da seguinte forma:

Definição 2.31. *Um número real α é um corte de $\mathbb{Q}$, isto é, α é identificado com um par (A, B) em que*

$$A = \{\tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \tfrac{p}{q} < \alpha\} \text{ e } B = \{\tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} : \tfrac{p}{q} \geq \alpha\}.$$

E ainda "(...) define no conjunto dos números reais uma relação $<$ e extensões naturais das operações de adição e produto, compatíveis com as que existem nos racionais." ([**47**], p. 107).

No início do século XX, Bertrand Russell (1872-1970) "(...) notou que como qualquer das duas classes A e B de Dedekind é univocamente determinada pela outra, uma só basta para a determinação de um número real.", ou seja "(...) todo o número real nada mais é que um segmento do sistema dos números racionais." ([**14**], p. 391).

Vejamos a diferença dos dois pensamentos na definição do número irracional $\sqrt{2}$. Com Dedekind, no conjunto A pomos todos os números racionais negativos e positivos cujos quadrados são inferiores a 2 e em B pomos todos os racionais positivos cujos quadrados são superiores ou iguais a 2. Esta partição de todos os números racionais define o número irracional $\sqrt{2}$. Já para Russell, $\sqrt{2}$ pode ser definido como um segmento ou subclasse do conjunto dos números racionais formado por todos os números racionais positivos cujos quadrados são menores que 2 e por todos os números racionais negativos.

Cantor, segundo Nogueira *et al.*, em [**47**], elogiou os argumentos de Dedekind mas considerava ser pouco prático utilizá-los e daí elaborou uma nova construção dos reais, baseada em sucessões de Cauchy. Cantor considerou que duas sucessões de Cauchy, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionais, definem o mesmo real se a sucessão das diferenças $(r_n - s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para zero. Ele definiu o conjunto dos números reais como o menor conjunto que inclui $\mathbb{Q}$ e tal que toda a sucessão de Cauchy, formada por racionais, é convergente, ou seja, $\mathbb{R}$ é o complementado de $\mathbb{Q}$.

Dedekind e Cantor, que eram correspondentes e chegaram a conhecer-se pessoalmente, deram outras notáveis contribuições para a Matemática, como a definição de infinito.

DEFINIÇÃO 2.32. *Infinito*

"Diz-se que um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo, caso contrário S é finito." (Dedekind, [**14**], p. 392).

Segundo David Hilbert (1862-1943), "(...) a definição de Dedekind e Weierstrass dos conceitos aritméticos fundamentais e o trabalho de Cantor levaram a uma "aritmetização da Teoria das Funções"(...)" ([**14**], p. 423). Para Boyer, em [**14**], uma nova perspetiva da Matemática como ciência surgiu com Hilbert, que veio dar ênfase à abstração, aritmetização e desenvolvimento lógico de conceitos e teorias matemáticas. De acordo com [**3**], o *programa* de Hilbert – uma abordagem matemática essencialmente abstrata, formalista, reduzida a um número finito de axiomas consistentes – era ambicioso. A ideia de Hilbert, para além de que a Matemática era isenta de contradições, era a de que para cada problema há sempre uma solução.

Mas a filosofia de Hilbert foi destronada por Kurt Gödel (1906-1978), que em 1931 provou o Teorema da Incompletude. Neste, segundo Aires, [**3**], Gödel mostra que nenhum sistema axiomático pode ser perfeito e que será sempre incompleto, pois haverá proposições que não poderão ser provadas através dos axiomas. Tal teorema teve implicações no pensamento científico da época. Alan Turing, inspirado na noção de incompletude de Gödel e num problema de Hilbert – problema de decisão – lançado em 1900 num congresso em Paris, dedica-se à construção de uma máquina de computação lógica. Esta máquina, que ficou conhecida por máquina de Turing, tinha como objetivo saber se através de um algoritmo seria possível provar, de uma forma matemática e sistematizada, a veracidade ou a falsidade de uma dada proposição, tal como descreve Aires, em [**3**]. No artigo *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, publicado em 1936, Turing conclui que tal algoritmo não existe.

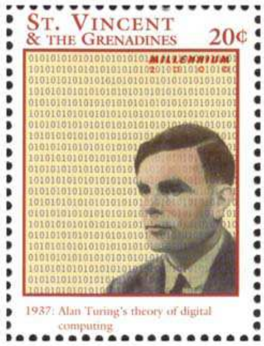


FIGURA 31. Alan Turing (1912-1954), num selo comemorativo, [**48**].

A criação da máquina de Turing foi o primeiro passo para a evolução dos computadores, progresso que em poucas décadas trouxe até nós as novas tecnologias que hoje conhecemos e das quais tanto dependemos. Tratou-se de uma evolução muito rápida quando comparada com tantos acontecimentos aqui descritos, alguns deles levando séculos a produzir resultados.

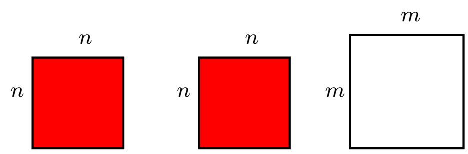
Também não se pode deixar de referir a utilização dos computadores na demonstração de resultados, nomeadamente o Teorema das Quatro Cores. A prova deste não foi aceite por todos, esperando-se uma demonstração "clássica". A mesma contestação surge com as chamadas demonstrações visuais, como a, assim classificada por alguns, de Stanley Tennenbaum. Nesta, apresentada por John Conway em [**18**], demonstra-se a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Conway, em [**18**], refere-se às demonstrações como algo que resulta de questões que se colocam ao Ser Humano. Dá como exemplo a questão "(...) a Terra é redonda ou plana." ([**18**], p. 36). Constata que este tipo de questões não surgem numa mesa redonda, a debater o tema, mas sim, neste caso particular, de alguém a quem, após observação da posição das estrelas, lhe parece haver uma rotação da Terra. Da mesma forma, o Homem também se questionou se a medida dos lados do quadrado estava relacionada com a sua diagonal. Ao aprofundar o tema, para que se tratasse de uma realidade, não poderia lidar apenas com números racionais.

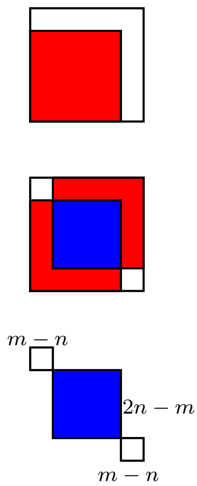
EXEMPLO 2.33. *Seguindo* [**18**], *suponha-se que* $\sqrt{2}$ *é um número racional. Desta forma,* $\sqrt{2}$ *pode escrever-se na forma*

$$\sqrt{2} = \tfrac{m}{n} \text{ com } m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m \text{ o menor possível.}$$

Então $2n^2 = m^2$ *e, geometricamente, tem-se que a soma das áreas de dois quadrados de lado igual a* n *é igual à área de um quadrado de lado igual a* m*. Considerem-se então dois quadrados de lado igual a* n *e um quadrado de lado igual a* m*, onde* $n < m$*.*



Se a soma das áreas dos dois quadrados de lado igual a n *é igual à área do quadrado de lado igual a* m*, então o quadrado branco (de lado igual a* m*) é preenchido duas vezes pelo quadrado vermelho (de lado igual a* n*). Sobre o quadrado branco coloquem-se os dois quadrados vermelhos como se segue, intersetando-se estes na zona identificada a azul.*



Como, por hipótese, a área do quadrado branco é igual à soma das áreas dos quadrados vermelhos, então a zona resultante a branco terá área igual à área azul. Algebricamente, tem-se:

$(2n - m)^2 = 2(m - n)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4n^2 - 4nm + m^2 = 2(m^2 - 2mn + n^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n^2 = m^2.$

Mas $2n - m < m$*. De facto, se* $2n - m \geq m$ *então* $n \geq m$*, o que é uma contradição. Construiu-se assim um quadrado (azul) de lado inferior a* m *tal que* $(2n - m)^2 = 2(m - n)^2$*. Mas* m *é o menor natural que satisfaz a condição* $2n^2 = m^2$*, chegando-se a uma contradição com a minimalidade de* m*. Logo,* $\sqrt{2}$ *não é um número racional.*

Mas a evolução da Matemática continua nas mais diversas áreas, havendo problemas em aberto mais ou menos recentes. Um deles é a conjetura de Riemann que se insere na Teoria dos Números, área conhecida por gerar problemas de enunciado simples mas de difícil resolução. A referida hipótese enuncia que os zeros não triviais da função zeta de Riemann pertencem à chamada reta crítica dada por $Re(z) = \frac{1}{2}$, onde $z \in \mathbb{C}$. Assumindo a validade de uma generalização da conjetura para L-funções de Dirichlet, nomeadamente em [**70**], foram deduzidas consequências, entre elas uma que providencia um teste rápido de primalidade. O futuro o dirá.

CAPíTULO 3

O Tema *Números e Operações* no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Num momento em que se acabou de generalizar, a todos os anos de escolaridade do Ensino Básico, um novo programa de Matemática, importa dar um contributo para responder às principais preocupações de um professor perante esse facto. Nomeadamente, saber o que muda e compreender essas mudanças, no sentido de perceber as suas implicações na aprendizagem dos alunos.

Neste contexto torna-se relevante, em primeiro lugar, fazer um breve percurso histórico, desde meados do século XX, sobre a estrutura curricular do Ensino Básico em Portugal e focar os momentos decisivos na mudança do ensino da Matemática. De facto, a par das mudanças verificadas na sociedade, as políticas educativas foram-se ajustando e implicando diferentes finalidades no ensino. No que respeita ao ensino da Matemática, retrocederei até ao pensamento pedagógico de Bento de Jesus Caraça, passando pela reforma curricular levada a cabo por José Sebastião e Silva. Ambos marcaram as finalidades do ensino da Matemática, o primeiro, através dos seus discursos contributivos e, o segundo, pelas mudanças que implementou.

Mais tarde, na década de 80, foram levadas a cabo diversas iniciativas motivadas pelo insucesso na disciplina de Matemática, incumprimento dos programas e pela investigação que decorria a nível internacional, nomeadamente pelo NCTM. Este movimento veio desencadear um conjunto de questões que se ligavam tanto ao ensino como à aprendizagem da Matemática, discutidas no seio da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) e da Associação de Professores de Matemática (APM). Foram publicados novos programas da disciplina no início dos anos 90, que vieram a corresponder à maioria das expetativas da altura, com mudanças positivas que destacarei neste capítulo.

Em 2006, com o principal objetivo de melhorar o ensino da Matemática, o Ministério da Educação definiu um plano de ação para a referida disciplina, tendo como uma das linhas de ação a de proceder ao reajustamento do programa para a Matemática em todo o Ensino Básico. Neste sentido, em 2007 é homologado o PMEB, que no ano letivo 2012/2013 foi generalizado a todos os anos de escolaridade.

É sobre o programa de 2007 que versará a segunda parte deste capítulo, numa tentativa de contribuir para a sua interpretação e concretização em sala de aula. Importa, em primeiro lugar, compreender como se encontra organizado e, em segundo lugar, conhecer as finalidades e os objetivos que devem orientar o ensino da Matemática em todos os ciclos do Ensino Básico. Referem-se ainda o ponto de vista de Kilpatrick, especialista internacional em currículo de Matemática, e os pareceres da APM e da SPM.

Tratando-se de um documento que promove novas práticas de ensino e aprendizagem, será feita uma referência às orientações metodológicas gerais do programa, o que inovam em relação às anteriores e serão analisados outros documentos que complementam o programa, em particular as Metas Curriculares. Depois de abordados estes aspetos, a fase seguinte será a de conhecer cada um dos temas matemáticos e capacidades transversais do PMEB. Neste sentido será aprofundado o tema *Números e Operações* no 3.º Ciclo, onde incidirão as tarefas aplicadas em contexto de sala de aula e apresentadas num outro momento deste trabalho.

A ordem pela qual os temas são abordados pode variar entre dois percursos descritos nos Percursos Temáticos de Aprendizagem, um documento paralelo ao PMEB e indissociável deste. Aqui é indicado que "O facto de um tópico, subtópico ou objetivo de aprendizagem estar presente num dado ano, não significa que ele não possa ser abordado em anos anteriores, através de situações que preparam o caminho para a sua posterior aprendizagem." ([**22**], p. 1). Apesar da forma como o PMEB se encontra organizado ser facilitador do entendimento de cada tema ao longo dos três ciclos, os Percursos Temáticos de Aprendizagem reforçam a importância da articulação entre ciclos, que ficará enriquecida através da colaboração entre os professores dos diferentes ciclos, na medida em que permite decidir o percurso temático a seguir e conhecer, em profundidade, como cada tema foi abordado e que consequências se retiraram daí. Em particular, o tema *Números e Operações*, presente em todos os ciclos, "(...) tem por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo." ([**23**], p. 7). Em comparação com o programa de 1991, "(...) enfatiza-se o desenvolvimento do sentido de número e perspetiva-se o trabalho com as operações aritméticas e os seus algoritmos de modo bastante diferente." ([**61**], p. 3). A resolução de problemas, sobre a qual versa a última secção, para além de uma capacidade transversal do PMEB, é também uma das abordagens ao tema *Números e Operações* sugerida nas indicações metodológicas. No entanto, esta pode transformar-se numa atividade rotineira se não se tiver em conta todo o tipo de tarefas que podem ser propostas neste âmbito, e às quais o PMEB também faz referência. Para além de problemas, são indicados exercícios, explorações e investigações. Esta catalogação é clarificada por Ponte, em [**55**], segundo o grau de abertura e dificuldade. As várias abordagens e a diversidade de situações que o professor pode propor proporcionarão atividades desafiantes e enriquecedoras para os alunos.

1. Percurso Histórico dos Programas de Matemática

As mudanças vão marcando a sociedade e, a par disso, as políticas educativas e o modo como se encaram as finalidades do ensino, em particular da disciplina de Matemática. O ensino em Portugal tem sofrido diversas reformas, motivadas por resultados insatisfatórios, movimentos internacionais e mudanças nas finalidades a que se propõe.

Referindo-se anos 40 e 50, Ponte, em [**52**], caracteriza o ensino da Matemática como sendo de memorização, com ênfase nos processos de mecanização e cálculo, sem promover o espírito crítico. Os alunos tinham de saber demonstrações de cor e resolver repetitivamente extensas listas de exercícios. Este tipo de ensino não teve resultados satisfatórios, sendo a disciplina de Matemática a que obtinha os piores, com o maior número de negativas.

A referida metodologia foi criticada por Bento de Jesus Caraça que segundo Ponte, em [**52**], deixou importantes reflexões sobre o ensino da Matemática. De facto, Caraça (Fig. 1) rejeitava tanto a conceção da Matemática desligada da realidade quotidiana, como as posturas idealistas que atribuiam à Matemática uma origem puramente racional. Esta posição fica patente nas seguintes afirmações: "É claro que existem na Matemática, como aliás em qualquer outro ramo da Ciência, «problemas próprios», nascidos exclusivamente dela e só acessíveis aos seus especialistas. Mas não é menos verdade que, considerada a Matemática como um todo em evolução, lhe desaparece inteiramente o caráter de domínio fechado e bastando-se a si próprio e, pelo contrário, se descortinam bem claramente as ligações àquele conjunto comum de preocupações, problemas e realizações que determinam, em última análise, a marcha do pensamento e da civilização." (Caraça, [**16**], p. 293); "A Ciência pode ser encarada sob dois aspetos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspeto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspeto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. (...) A Ciência (...) aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social.", (Caraça, [**15**], p. XIII).

FIGURA 1. Bento de Jesus Caraça (1901-1948), [**69**].

No início dos anos 60, apesar do regime salazarista que vigorava na época, de caráter conservador, havia alguns elementos com uma visão industrializadora que possibilitaram alterações no sistema educativo. De entre as mesmas, destacam-se o alargamento da escolaridade obrigatória e a instituição da coeducação. No que respeita à Matemática, inicia-se uma reforma curricular com alteração dos conteúdos, uma nova abordagem e ainda uma nova linguagem. Esta mudança deveu-se ao movimento internacional da Matemática Moderna, que tinha interesse em ensinar Matemática pura para fazer dos alunos bons matemáticos, com uma sólida preparação para o ensino superior, como descrito em [**33**]. Em Portugal, foi José Sebastião e Silva (Fig. 2) que esteve à frente da referida reforma curricular.

Figura 2. José Sebastião e Silva (1914-1972), [**68**].

Saliente-se que o movimento foi alavancado por Nicolas Bourbaki, pseudónimo para um grupo de matemáticos fundado em 1934 (Fig. 3), que escreveu uma série de livros que expunham a Matemática Avançada Moderna. Na sua maioria franceses, de acordo com Aczel em [**2**], Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, René de Possel e André Weil foram os fundadores do grupo cujo primeiro encontro decorreu no ano de 1934 em Paris.

Figura 3. Grupo de matemáticos no congresso Bourbaki em 1938. Da esquerda para a direita, Simone Weil (a acompanhar Andre), Charles Pison, Andre Weil (atrás), Jean Dieudonne (sentado), Claude Chabauty, Charles Ehresmann e Jean Delsarte.

O trabalho de unificação dos conhecimentos matemáticos, desenvolvido por grupos de matemáticos, foi fundamental para o esforço conceptual da mencionada reforma curricular. Assim, a característica distintiva do novo currículo é a reformulação dos conteúdos habituais da Matemática Escolar em termos da Teoria de Conjuntos. De facto, segundo Bourbaki, podia construir-se toda a Matemática a partir do início, constituído pelas noções elementares e intuitivas de conjuntos e de operações (uniões e interseções) entre os mesmos. Deste modo, este foi o tópico tratado no primeiro livro (Fig. 4) da autoria de Bourbaki, no qual surge a notação universal atual, inventada por André Weil, para conjunto vazio: $\emptyset$, uma letra do alfabeto norueguês que Weil conhecia das suas viagens.

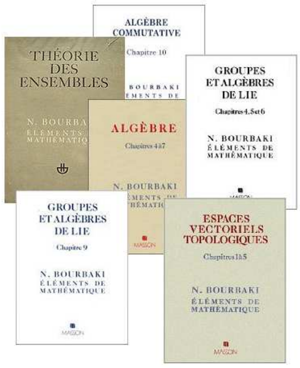


FIGURA 4. Capas de obras da autoria de Bourbaki, entre as quais *Théorie des ensembles*, [**42**].

Contrariando a visão muito formalista e pura do ensino da Matemática noutros países, seguidores também do movimento da Matemática Moderna, Sebastião e Silva "Via a Matemática não como um conjunto de técnicas a dominar mas como um meio de conseguir a formação integral de um cidadão." (Sebastião e Silva, [**77**]). Ele preocupava-se com os métodos de ensino, e salientou que "A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, (...), e procurar, pelo contrário, seguir o método ativo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta." (Sebastião e Silva, [**77**]).

A introdução em Portugal das Matemáticas Modernas deu-se lentamente, através de experiências pedagógicas em turmas piloto que se prolongaram por muito tempo, dada a falta de decisão em alterar os programas. Segundo Matos e Valente, em [**86**], provavelmente através do Ministro Galvão Teles (1917-2010), com o Decreto-lei n.º 47.587 de 10/03/1967, foi possível a realização dessas experiências pedagógicas. Estas implicaram uma inovação educativa, com a aprovação de novos métodos de ensino e manuais produzidos sob a coordenação de Sebastião e Silva. Mostrando a sua preocupação com a importância das aplicações da Matemática, dizia que "É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de mais nobre e vital no ensino." e que "O professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um *professor de matematização*, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos." (José Sebastião e Silva, [**77**]).

O movimento da Matemática Moderna trouxe muitas mudanças no ensino da Matemática, mas o seu principal propósito, o de melhorar as aprendizagens para o acesso ao ensino superior, não foi conseguido. No início dos anos 70 foram elaborados novos programas também à luz do mesmo movimento, mas onde desapareceram as aplicações da Matemática e a promoção do espírito crítico. Com todas estas mudanças, os resultados dos alunos continuaram a ficar aquém do desejado, o que veio trazer preocupação, proporcionando momentos de discussão.

O sistema educativo, segundo Valente e Matos em [**86**], tinha diversos subsistemas, todos eles "experimentais". Em diferentes níveis de ensino havia uns com aulas de Matemática Moderna, outros com Matemática Clássica e ainda outros na transição. Ao mesmo tempo, noutros países começava-se a questionar esta reforma. Matos e Valente, em [**86**], destacam o início tardio das aulas de Matemática em muitas escolas do país e o consequente incumprimento dos programas. Em 1977, para minorar esta situação são publicados novos programas onde se incluiam Programas Mínimos, uma lista de tópicos que todas as escolas deveriam abordar. Os incumprimentos sucessivos dos programas continuaram, ao longo da década de 80, a provocar alterações aos programas.

A grande rutura com o movimento da Matemática Moderna inicia-se com a reativação da SPM, com o primeiro congresso em 1980 e, em 1986, com a criação da APM. Um dos momentos marcantes nesta mudança foi, segundo Ponte, em [**52**], o Seminário de Vila Nova de Milfontes em 1988, organizado pela APM, onde foram discutidas as normas do NCTM. Ponte salienta as três propostas que resultaram deste seminário:

(1) "valorizar objetivos curriculares referentes a capacidades (resolução de problemas e raciocínio matemático) e atitudes positivas em relação à Matemática;
(2) dar prioridade, na sala de aula, a tarefas ricas e desafiantes, envolvendo resolução de problemas, explorações matemáticas, raciocínio e comunicação;

(3) encarar o programa e os manuais como instrumentos de trabalho e não como prescrições a seguir cegamente." ([**52**], p. 8).

Este momento de discussão foi considerado como uma "(...) das mais importantes realizações até hoje, sobre a *Renovação do currículo de Matemática* (...)." ([**33**], p. 7).

Em 1989 são publicados em Diário da República os Novos Planos Curriculares do Ensino Básico e Secundário (Decreto-Lei n.º 286/89, 29 de agosto), que a Lei de Bases do Sistema Educativo (Lei n.º 46/86) previa no n.º 1 do artigo 59. Em 1990, para o 1.º ciclo, e em 1991, para os 2.º e 3.º Ciclos, são aprovados novos programas para a disciplina de Matemática. Nestes programas, cuja referência doravante se cingirá a 1991, a resolução de problemas, a exploração e a experimentação assumem destaque e, admite-se, com certas e devidas limitações, o uso das novas tecnologias. É notória a preocupação que houve em incluir as ideias e perspetivas que resultaram em forma de propostas, acima descritas, do Seminário de Vila Nova de Milfontes.

A renovação dos programas era tão desejada como fica patente num editorial da revista *Educação Matemática* (Fig. 5), que começa com a frase: "Finalmente, os programas antigos vão acabar!".

FIGURA 5. Capa da revista *Educação e Matemática*, n.º 19/20 (1991), [**6**].

Na época, a APM considerou que eram "(...) programas mais interessantes e motivadores" e que "Valorizam o papel ativo do aluno no decorrer da sua aprendizagem e propõe metodologias de trabalho diferentes, mais envolventes e mais desafiantes." (APM, [**8**]).

Segundo Ponte, em [**52**], estes programas trouxeram um grande progresso comparativamente ao que havia até então, mas "(...) muitas das *orientações curriculares* não têm expressão efetiva no dia a dia escolar." ([**52**], p. 19). O método expositivo e a realização exaustiva de exercícios eram uma prática comum, refletida nos maus resultados dos alunos em "(...) tarefas de ordem mais complexa, que exigem algum raciocínio, flexibilidade e espírito crítico." ([**52**], p. 19). Esta constatação pode estar relacionada com o processo difícil e moroso, por parte dos professores, de apropriação de novas orientações curriculares, nomeadamente as de natureza metodológica, e a sua concretização em sala de aula.

Exemplo 3.1. *Considere-se a questão 6 do estudo PISA 2000, no qual o índice de sucesso dos estudantes portugueses foi de 0,59.*

"Um lavrador planta macieiras num padrão quadrangular. A fim de proteger as árvores do vento, planta coníferas à volta do pomar. Esta situação está ilustrada no diagrama abaixo representado, no qual se pode ver a disposição das macieiras e das coníferas para um número qualquer (n) de filas de macieiras:" ([**67**], p. 25).

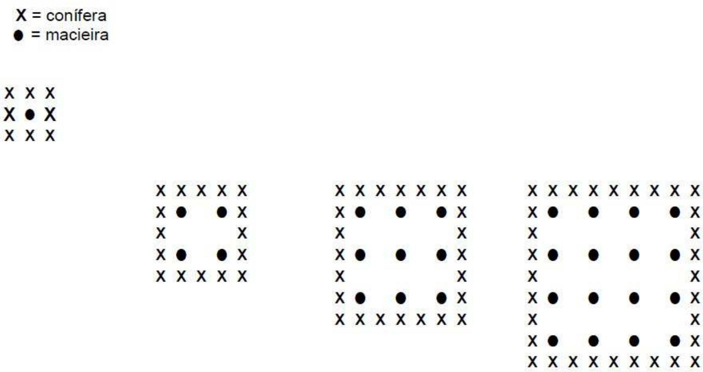


Figura 6. Esquema da disposição das macieiras para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, [**67**].

Complete a tabela

n	Número de macieiras	Número de coníferas
1	**1**	**8**
2	**4**	
3		
4		
5		

Figura 7. Tabela para preenchimento, [**67**].

Ainda segundo Ponte, não houve instrumentos diretos para avaliar estes programas no que respeita aos resultados dos alunos. Esta avaliação acabou por ser feita de forma indireta através de estudos internacionais, como o Programme for International Student Assessment (PISA), que indicaram "(...) deficiências significativas nas aprendizagens dos alunos portugueses." ([**52**], p. 9).

Uma crítica feita aos programas de 1991 por parte de Ponte, em [**52**], é a falta de uma verdadeira definição no que respeita às finalidades do ensino da Matemática. "Associada a esta indefinição, surge alguma ambiguidade quanto às expectativas que devem existir em relação à aprendizagem dos alunos, sobretudo no ensino básico e sobretudo no 3.º ciclo." ([**52**], p. 21). Esta indefinição veio a ser corrigida em 2001 pelo CNEB, revogado pelo Despacho n.º 17169/2011, que veio definir um conjunto de competências essenciais para o Ensino Básico, tanto de caráter geral como específicas, para cada uma das áreas disciplinares ou disciplinas, com modificações significativas, em particular nas finalidades e objetivos de aprendizagem.

No que respeita à Matemática, o CNEB descreve-a como "(...) um património cultural da humanidade e um modo de pensar." ([**21**]. p. 57). Salienta-se ainda que "Ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à Matemática." ([**21**], p. 57), reforçando a utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar. O CNEB introduziu modificações curriculares importantes, valorizando a noção de competência matemática e também a forma como apresenta os temas matemáticos a abordar. Este documento desenvolve as competências matemáticas em quatro grandes domínios: Números e Cálculo; Geometria; Estatística e Probabilidades; Algebra e Funções.

Em 2006, o Ministério da Educação definiu um Plano de Ação para a Matemática, tendo como uma das ações a de proceder ao reajustamento e às especificações programáticas para a Matemática em todo o Ensino Básico. Uma medida a tomar para a concretização desta ação foi a elaboração de novos Programas de Matemática para os três ciclos do Ensino Básico, que culminou com a homologação, em dezembro de 2007, do Programa de Matemática do Ensino Básico.

2. Novo Programa de Matemática do Ensino Básico

O novo programa constitui um reajustamento do Programa de Matemática para o Ensino Básico do início dos anos noventa, o que não invalidou a introdução de significativas mudanças. Encontra-se disponível na página da *internet* da Direção-Geral da Educação, em [**24**], na forma de documento único, ao qual se associam diversos materiais de apoio. A elaboração do mesmo esteve a cargo de uma equipa proveniente de todos os níveis de ensino, perspetivando desde logo a articulação entre os três ciclos.

FIGURA 8. Capa do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007.

Pode-se considerar uma divisão do documento em duas partes: indicações programáticas globais, comuns aos três ciclos, e indicações programáticas por ciclo. Na primeira destacam-se a definição das finalidades e dos objetivos gerais para o ensino da Matemática, que fixam as principais metas para esse ensino, os temas matemáticos e as capacidades transversais.

Temas Matemáticos	**Capacidades Transversais**
Números e operações	Resolução de problemas
Geometria (e Medida)	Raciocínio matemático
Álgebra (2.º e 3.º ciclos)	Comunicação matemática
Organização e tratamento de dados	

TABELA 1. Temas Matemáticos e Capacidades Transversais, [**23**].

Na segunda, para cada tema, os ciclos encontram-se organizados da seguinte forma:

- Introdução: Introdução ao tema (1.º ciclo) ou articulação com o ciclo anterior (2.º e 3.º Ciclos);
- Propósito principal de ensino: Orientação principal do tema;
- Objetivos gerais de aprendizagem;
- Indicações metodológicas: Abordagem, Tarefas e recursos, e Conceitos específicos;

- Tópicos, objetivos específicos e notas.

No final do documento encontram-se cinco quadros temáticos, correspondentes aos quatro temas e às capacidades transversais, a bibliografia e o recursos, com referências para aprofundamento dos temas, orientações do programa e materiais, tais como *software* e jogos.

O novo programa, tratando-se como já referido de um reajustamento do anterior, tomou este e o CNEB como ponto de partida. Das mudanças introduzidas destaca-se a formulação das finalidades e dos objetivos do ensino da Matemática. As finalidades e os objetivos gerais do novo programa, mais claros e específicos, pretendem promover a articulação entre ciclos e estabelecer a ligação com o CNEB, nomeadamente através da valorização dos aspetos ligados à apreciação da Matemática, às conexões dentro e fora dela e ao desenvolvimento da autonomia dos alunos.

O atual PMEB enuncia duas finalidades fundamentais para o ensino da Matemática: "a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados. (...) b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência." ([**23**], p. 3), associadas a um conjunto de nove objetivos gerais.

A primeira finalidade inclui a compreensão dos conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos, e a capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contextos matemáticos e não matemáticos; capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática, a capacidade de abstração e de generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos e a capacidade de comunicar em Matemática. Da segunda finalidade fazem parte a autoconfiança, a autonomia, o à-vontade e a segurança, o interesse pela Matemática e a compreensão desta ciência como elemento da cultura, incluindo aspetos da sua história.

Às finalidades enunciadas associa-se um conjunto de objetivos gerais que contemplam, no seu conjunto, o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes. Mas, diferentemente dos programas de 1991, não são apresentados em categorias separadas associadas a estes três domínios, permitindo deste modo uma visão integradora. Os objetivos gerais, que pretendem clarificar o significado e o alcance das finalidades enunciadas, constituem igualmente metas de aprendizagem que o ensino da Matemática deve visar e encontram-se formulados em termos de resultados esperados por parte dos alunos. Os objetivos estão interligados entre si e sem uma relação de ordem pois, se o conhecimento de fatos básicos é uma condição para a compreensão da Matemática, também a compreensão da Matemática contribui para o conhecimento dos fatos básicos.

No que respeita às orientações metodológicas gerais do PMEB, estas revelam-se inovadoras no que toca às práticas dos professores, muito embora venha "(...) dar legitimidade às práticas profissionais de muitos professores que já valorizam os aspetos que este documento sublinha." ([**60**], p. 100). Os alunos passam a ter um papel mais ativo em detrimento do papel central do professor, devendo ser eles o elemento central, construindo o seu conhecimento através de ação, reflexão e consolidação da informação. O PMEB sugere tarefas que incluem situações do quotidiano e de outras áreas do saber, não obrigatoriamente em contextos matemáticos. Desta forma, Ponte, em [**60**], sugere que a aula deva ser dividida em quatro momentos: apresentação clara da tarefa; trabalho autónomo na tarefa (em pares ou em pequenos grupos); apresentação do trabalho dos alunos, promovendo a discussão e a argumentação dos resultados obtidos; por último, síntese das principais ideias aprendidas (preferencialmente, pelo professor e pelos alunos em conjunto).

A comunicação matemática passa a ter um papel com maior destaque pois, no momento referido anteriormente, "(...) o professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas. (...) Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas." ([**23**], p. 9). Em suma, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, para além de objetivos de aprendizagem, constituem assim orientações metodológicas importantes para o professor estruturar as atividades a desenvolver na aula.

Kilpatrick, em [**38**], considera que a apresentação pormenorizada das orientações metodológicas gerais, para além da gestão curricular e da avaliação, é significativa e constitui uma boa ajuda para os professores porem estas novas ideias em prática. O PMEB está alinhado com o que vai acontecendo noutros países no que toca à aquisição e utilização do conhecimento matemático, ao desenvolvimento de atitudes positivas em relação à Matemática bem como a sua valorização. Segundo o mesmo autor, os objetivos gerais e os seus tópicos vão também ao encontro das normas e diretivas internacionais para o currículo de Matemática. Kilpatrick foca que é importante que estes objetivos sejam abordados em simultâneo uma vez que se relacionam e se reforçam mutuamente.

A organização por ciclos na segunda parte do programa, abdicando da estrutura anual, acarreta, segundo Kilpatrick, em [**38**], confusão no que respeita à altura em que certo tópico deve ser ensinado, mas cuja organização melhora o ensino. A APM, em [**7**], por sua vez, considera que o programa na forma de documento único para os três ciclos permite uma visão global e, consequentemente, promove uma melhor articulação entre o trabalho dos professores dos três ciclos. Em cada um destes, há uma divisão em quatro temas, o que não significa que tenham o mesmo peso em cada ciclo. Veja-se o caso do tema *Álgebra*, que no 1.º ciclo está inserido no tema *Números e Operações*, por exemplo no subtópico sequências com objetivos de caráter algébrico, mas nos 2.º e 3.º ciclos é tratado como tema autónomo, ao contrário do que acontecia anteriormente.

O tema *Números e Operações*, presente ao longo dos ciclos, assenta fundamentalmente na promoção da compreensão dos números e operações, do desenvolvimento do sentido de número e da fluência no cálculo. Neste tema, o PMEB inova nas representações fracionária e decimal dos números racionais, que surgem agora em paralelo. Kilpatrick refere que nunca observou tal representação em simultâneo noutro país e mostra-se curioso em ver como vai ser conseguido, referindo que "Embora pareça uma ideia razoável, interrogo-me não só sobre o modo como os professores vão orquestrar estes dois sistemas de representação, mas também se os alunos serão capazes de aprender ambos em simultâneo." ([**38**], p. 52).

A Geometria, com peso semelhante nos três ciclos, no 1.º ciclo está associada à Medida, e vem privilegiar o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos. A Estatística vem agora mais desenvolvida através do tema *Organização e Tratamento de Dados* e introduz novos conteúdos, com mais relevância no 1º ciclo. Kilpatrick questiona-se se a Medida, assim associada à Geometria no 1.º Ciclo, terá "(...) o peso que merece." ([**38**], p. 51). No que se refere ao tema *Organização e Tratamento de Dados*, considera o aparecimento da Probabilidade tardio (só no 3.º ciclo), tendo em conta, nomeadamente, as recomendações do NCTM. No entanto, menciona que tal está de acordo com o que sucede noutros países.

A SPM, no seu parecer sobre o novo PMEB, em janeiro de 2008, faz uma apreciação muito crítica ao documento. Apesar de muitos aspetos referidos aquando da discussão pública do documento terem sido corrigidos, ainda há matérias onde, segundo a SPM, se mantêm erros. Refere-se, por exemplo, ao uso da calculadora, pois considera que "(...) enquanto se está a aprender a tabuada e as operações elementares o recurso à calculadora deve ser impedido." ([**79**], p. 2), e desta forma, o programa não a deveria considerar obrigatória no 1.º Ciclo, "(...) onde ela apenas deve ter, se tiver, uma presença ocasional." ([**79**], p. 2).

A SPM refere ainda a pouca atenção dada aos algoritmos pois considera haver uma resistência ao domínio dos tradicionais, considerados "(...) os mais simples e rápidos e os menos suscetíveis de erro." ([**79**], p. 3). Considera ainda que "O Programa continua a insistir em demasia em procedimentos *ad hoc* e protela a memorização da tabuada e o treino dos algoritmos tradicionais. Assim, prolongam-se as deficiências de cálculo e prejudicam-se os automatismos. São dificuldades que se arrastam pela vida fora e que os alunos deveriam enfrentar e ultrapassar cedo." ([**79**], p. 3). A SPM chamou ainda à atenção para a definição de metas, de conhecimentos e capacidades a atingir pelos alunos, considerando-as pouco claras, o que torna o documento de uso difícil.

A mencionada falta de metas veio a ser corrigida em 2009, com a definição de um conjunto de 42 metas de aprendizagem para a Matemática de 3.º ciclo (tal como para outras disciplinas, desde o pré-escolar até ao secundário). Estas encontram-se divididas em vários domínios e subdomínios, organizadas a partir dos quatro temas do PMEB e definidas por anos, através de metas intermédias. A divisão das metas por anos não tem caráter rígido, dependendo das opções de desenvolvimento curriculares tomadas, considerando que haverá metas que podem ser atingidas mais cedo pelo aluno. Este documento resulta num instrumento de apoio à gestão do currículo, auxiliando os professores na planificação das atividades, mas não se tratando de um documento de natureza programática, não substitui o programa.

A SPM faz algumas críticas ao documento das metas, alertando para a necessidade de estabelecer metas precisas, verificáveis e bem estruturadas, objetivo que este documento não alcança. Para além de considerar a linguagem pouco precisa, refere que o documento "(...) confunde metas com processos, repisando uma prática pedagógica nefasta que a SPM tem criticado. Veja-se, por exemplo, a página 11: 'Constrói, justificando o processo usado e memoriza as tabuadas do 2, 5, 10, 4, 3 e 6.' (sic!). Tudo isto corresponde a uma teoria pedagógica que menoriza os objetivos de conhecimento matemáticos e enfatiza os processos de ensino." ([**80**], p. 2), e "(...)

confunde também metas de aprendizagem concretas com objetivos vagos que têm causado danos, precisamente pelo seu caráter ambíguo e pretensamente ambicioso que conduz a uma desorganização do ensino." ([**80**], p. 3).

Novas metas, denominadas de Metas Curriculares, foram disponibilizadas na página da *internet* do Ministério da Educação e Ciência em junho de 2012, em consulta pública até ao final do mês de julho do mesmo ano. A versão final é de caráter indicativo para o ano letivo 2012/2013, servindo como base de trabalho para a planificação das atividades, e de utilização obrigatória para o ano letivo seguinte. Também divididas por domínios e subdomínios, distinguem-se das anteriores pela forma, esta mais formal, objetiva e avaliável, e pela organização do documento (Ciclo – Ano de escolaridade – Domínio (Tema) – Subdomínio – Objetivo geral – Descritores). O facto de se encontrarem divididas por anos de escolaridade, à partida tão rígida, já foi alvo de diversas críticas.

Guimarães refere que "(...) com a imposição de uma lógica de percursos curriculares por ano de escolaridade a nível nacional, as novas metas levantam sérios constrangimentos e limitações. Como também as levanta o acentuado espartilhamento e pulverização do que nelas é proposto para o ensino e a aprendizagem, favorecendo a perca de uma visão de conjunto, de um sentido global ou dos propósitos principais do que se ensina (e aprende) em Matemática. E, consequentemente, em minha convicção, prejudicando uma aprendizagem com compreensão, integrada e articulada." ([**34**], p. 1).

Na introdução do documento destacam-se três aspetos, a referência às revisões e às capacidades transversais, e o significado dos verbos aplicados aos descritores. Sobre as revisões, as metas mencionam a necessidade de as fazer aos "(...) objetivos gerais e descritores correspondentes a anos de escolaridade anteriores. Estes pré-requisitos não se encontram explicitados no texto, devendo o professor identificá-los consoante a necessidade, a pertinência e as características próprias de cada grupo de alunos." ([**12**], p. 2). No que se refere às capacidades transversais, é esclarecido que estas são observadas ao longo dos descritores (de forma explícita ou subentendida), mas, para Teixeira, em [**85**], estas praticamente desaparecem. Nos verbos que iniciam alguns descritores nunca aparece o verbo compreender, facto observado por muitos, tais como Teixeira, em [**85**], e Guimarães, em [**34**].

Para além dos autores já referidos, a reação à proposta destas novas metas também gerou opiniões divergentes entre a Sociedade Portuguesa de Investigação em

Educação Matemática (SPIEM) e a SPM, como noticiado em [**9**]. A SPIEM referiu através de um comunicado que "Globalmente, as metas curriculares propostas constituem-se como um corpo de indicações não articuladas nem fundamentadas, desatualizadas e formuladas com linguagem nem sempre adequada e clara.", ([**82**], p. 2). A SPM, através do seu presidente Miguel Abreu, em declarações ao jornal Público em [**9**], considera que as metas "contribuirão decisivamente para uma melhoria sustentada" das aprendizagens.

No parecer produzido pela SPM, [**81**], esta posição está patente em todo o documento. Considera o programa vago nas definições dos conceitos de Matemática, facto que as metas vêm uniformizar e definir com precisão, para além de que "(...) especificam de forma clara e precisa os conhecimentos e capacidades que os alunos devem adquirir e desenvolver sobre cada um dos conceitos matemáticos do programa." ([**81**], p. 2). O referido parecer destaca ainda a clareza com que os descritores de metas são apresentados indo de encontro ao programa.

Opinião antagónica tem a SPIEM, que, em [**82**], faz uma análise detalhada e organizada segundo os temas matemáticos definidos no PMEB. Segundo esta sociedade, as novas metas não estão de acordo com o programa em vigor. É exemplo disso o tema *Números e Operações*, onde as novas metas não vão de encontro ao propósito principal de ensino e a alguns objetivos específicos. O cálculo mental é desconsiderado assim como a representação de números racionais na forma de percentagem. Ainda no que respeita aos números racionais, mas na representação facionária, as metas têm abordagens "(...) abstratas, desajustadas do nível de desenvolvimento cognitivo de alunos deste nível de escolaridade.". Para além deste desfasamento, a SPIEM refere ainda que as novas metas introduzem novos objetivos relativos aos números reais, não contemplados no programa: "As operações com os números irracionais não fazem parte do programa que apenas sugeria a simplificação de algumas expressões simples com radicais (...)" ([**82**], p. 3). O uso das tecnologias, em particular da calculadora, também é destacado, na medida em que se trata de uma ferramenta que vem enriquecer algumas temáticas, e que foi banida das metas curriculares propostas. A SPIEM menciona ainda o desajustamento das metas às diferentes faixas etárias, que põem em causa as aprendizagens dos alunos.

Os autores do programa, para além de Guimarães, também se pronunciaram num parecer conjunto, e concluem que "(...) estas novas metas, em muito do que se propõem alterar face ao que os professores têm vindo a procurar concretizar na sua prática de ensino, no quadro do programa de Matemática em vigor, não apenas não trazem esclarecimento ou apoio relevantes, como prejudicam o bom desenvolvimento dessa prática com consequências negativas para a aprendizagem dos alunos.", ([**64**], p. 1).

O PMEB, para além das metas, de aprendizagem ou curriculares consoante o documento em vigor, é complementado pelos Percursos Temáticos de Aprendizagem (última atualização em novembro de 2008). Estes "(...) constituem possíveis sequências para o desenvolvimento do trabalho letivo com o novo programa de Matemática. Cada um dos percursos é apresentado esquematicamente sob a forma de uma sequência de tópicos e subtópicos matemáticos, distribuídos por anos de escolaridade em cada ciclo, indicando as balizas temáticas do trabalho a realizar." ([**22**], p. 1). Os referidos percursos são flexíveis, pois permitem a cada escola a introdução de alterações que considere necessárias de acordo com as características da sua comunidade escolar e da consequente gestão curricular. Os mesmos destacam ainda as principais diferenças entre os dois documentos existentes sobre as metas curriculares. No contexto do tema *Números e Operações*, referem o esvaziamento do cálculo mental que deveria ser desenvolvido nos alunos. Esta é uma das capacidades consideradas, no PMEB, como fundamentais para a aprendizagem da Matemática com compreensão.

Também para complementar o PMEB, foram disponibilizados, na página de *internet* da Direção-Geral da Educação, materiais de apoio. Estes são constituídos por: brochuras para cada tema, mas nem sempre para todos os ciclos; propostas de tarefas para os três ciclos; outros materiais, tais como textos e planos de aula.

Por último há ainda a mensionar a adoção de manuais escolares, que servem como uma importante base de trabalho, tanto na planificação das atividades letivas, como no trabalho com os alunos, quer em contexto de sala de aula quer fora da mesma. Apesar disto, os materiais disponibilizados, acima referidos, devem continuar a ser merecedores de consulta. De facto, os manuais para o Ensino Básico são interpretações do PMEB e, portanto, devem ser utilizados com espírito crítico.

3. Algumas Especificidades do Tema

O PMEB propõe o tratamento do tema *Números e Operações* ao longo dos três ciclos, variando em termos da extensão e da profundidade dos conceitos numéricos trabalhados. Para o referido tema, o PMEB define como propósito principal de ensino o de "Desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos." ([**23**], p. 15). No tema *Números e Operações*, este propósito é expresso da mesma forma nos três ciclos e constitui o rumo que deve orientar o ensino respeitante ao tema.

Está patente, ao longo do programa, uma forte valorização do desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. O anterior programa já se referia à sua utilização como um tipo de cálculo e tendo em conta a situação em causa, mas o PMEB dá-lhe uma maior relevância e explicita o modo como ele pode ser trabalhado. Por exemplo, nas indicações metodológicas para o 1.º ciclo, sugere que sejam praticadas rotinas de cálculo mental. No 2.º ciclo é recomendado que este tipo de cálculo deva ser alvo de muita atenção, dada "(...) a importância de um bom domínio a este nível para o desenvolvimento da autoconfiança e desembaraço dos alunos, essenciais para a aprendizagem neste tema e em particular na resolução de problemas." ([**23**], p. 33).

Nos 1.º e 2.º ciclos são definidos objetivos específicos no que ao cálculo mental diz respeito, privilegiando a utilização das propriedades das operações. Já no 3.º ciclo a referência ao cálculo mental é menos evidenciada, recomendando que as tarefas propostas devam proporcionar aos alunos "(...) o desenvolvimento da sua capacidade de cálculo numérico (mental, escrito e usando a calculadora), de escolher o processo de cálculo numérico mais adequado a cada situação, de decidir quanto à utilização de valores exatos ou aproximados e de avaliar a ordem de grandeza e a adequação da solução encontrada para determinado problema ou questão." ([**23**], p. 49).

Os **Objetivos gerais de aprendizagem** no tema *Números e Operações*, no que se refere ao 3.º ciclo, determinam que os alunos devam:

- "compreender e ser capazes de usar as propriedades dos números inteiros e racionais, e desenvolver a noção de número real;
- ser capazes de operar com números racionais, usar as propriedades das operações no cálculo e compreender os seus efeitos nos números;
- ser capazes de estimar e calcular resultados aproximados, de apreciar ordens de grandeza e de avaliar a razoabilidade de um resultado;
- desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito;

- ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos." ([**23**], p. 48).

O tema *Números e Operações* é constituído por um amplo conjunto de tópicos referentes aos números naturais e racionais nos 1.º e 2.º ciclos, e aos irracionais, estendendo-os ao conjunto dos números reais no 3.º ciclo. No 1.º ciclo, o referido tema também envolve o tópico referente às regularidades, que nos 2.º e 3.º ciclos é integrado no tema de Álgebra. Saliente-se que, desde a infância, as crianças já têm uma noção intuitiva de contagem, o que favorece a compreensão dos números naturais, mas o grau de complexidade aumenta à medida que são introduzidos novos números. No 1.º ciclo, os alunos: desenvolvem o sentido de número; adquirem uma compreensão dos números naturais e da sua representação no sistema de numeração decimal; trabalham com frações de forma intuitiva; começam a usar os símbolos para indicar relações entre números ($=$, $>$ e $<$); desenvolvem a compreensão das operações elementares, bem como a destreza de cálculo com números naturais e racionais não negativos na representação decimal.

No 2.º ciclo é aprofundada a compreensão dos números inteiros e dos números racionais positivos, bem como das suas operações. Nos números inteiros não negativos, os alunos abordam os números primos e compostos, a decomposição em fatores primos, o m.d.c. (máximo divisor comum) e o m.m.c. (mínimo múltiplo comum) de dois números, critérios de divisibilidade e as potências de expoente inteiro positivo, tendo as potências de base 10 um tratamento particular. Estes eram, na sua maioria, anteriormente trabalhados no 3.º ciclo. No que respeita aos números inteiros negativos, estes continuam a ser introduzidos no final do 2.º ciclo. O trabalho com números racionais não negativos, iniciado no 1.º ciclo na sua representação decimal e na forma de frações de modo intuitivo, é ampliado no 2.º ciclo onde a representação fracionária ganha importância.

No 3.º ciclo, o tema em questão tem por base a promoção e compreensão dos números e operações, o desenvolvimento do sentido de número, bem como a fluência no cálculo. De um modo geral, o estudo dos números e operações é alargado, como se explica a seguir. Para além dos números inteiros e dos números racionais não negativos, são introduzidos os números racionais negativos e os irracionais, tal como no anterior programa, para chegar a $\mathbb{R}$. A principal diferença está no momento em que os números racionais são introduzidos, indicação essa, dada nos Percursos Temáticos de Aprendizagem. Concretamente, no antigo programa, o tema "Os números racionais" é abordado no 7.º ano com os subtemas "Números racionais relativos" e "Operações em $\mathbb{Q}$", enquanto que, segundo as indicações dadas nos Percursos temáticos de aprendizagem, o mesmo tema é introduzido no 8.º ano. Veja-se na seguinte tabela a articulação entre o programa e os Percursos Temáticos de Aprendizagem.

PMEB	**Percursos Temáticos**
Representar números racionais na reta numérica e por dízimas infinitas periódicas.	Representação, comparação e ordenação.
Comparar e ordenar números racionais representados nas formas decimal e fracionária.	Operações, propriedades e regras operatórias.
Representar e comparar números racionais positivos em notação científica.	Potências de base e expoente inteiro (incluindo a regra de potência da potência).
Conhecer as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{Q}$ e usá-las no cálculo.	
Efetuar operações com potências de base racional (diferente de zero) e expoente inteiro.	
Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais.	

Tabela 2. O tópico *Números racionais* no PMEB e nos Percursos Temáticos de Aprendizagem, [**23**] e [**22**].

Note-se que no PMEB, para cada ciclo, "(...) na introdução de cada tema matemático e das capacidades transversais, é apresentada a articulação entre o programa do ciclo em questão e o do ciclo anterior relativa a esse tema ou capacidade." ([**23**], p. 1). Ainda assim, os professores dos três ciclos de escolaridade devem, preferencialmente, em vários momentos do ano letivo, promover encontros de articulação entre eles, fundamentalmente no início e final de ano. Particularmente no 3.º ciclo, não se pode ignorar os conhecimentos adquiridos bem como as metodologias implementadas pelo corpo docente dos ciclos anteriores. Esta tarefa é cada vez mais facilitada pelas novas unidades orgânicas, mais alargadas, constituídas por estabelecimentos de vários ciclos de ensino, conhecidas por agrupamentos e, mais recentemente, por mega-agrupamentos, que pressupõe que os alunos percorram desde a pré-escola até ao ensino secundário a mesma escola, mesmo tratando-se de edifícios não contíguos. Assim, várias questões devem ser colocadas aos professores nestes momentos de trabalho, entre elas:

- Qual o percurso temático de aprendizagem adotado?
- Que tipo de tarefas foram aplicadas e quais as suas características?
- Que algoritmos foram trabalhados?
- Que estratégias de cálculo mental foram aplicadas?
- Em que tópicos os alunos revelaram maiores dificuldades? Que estratégias foram aplicadas para as combater?

É comum encontrar ainda professores que revelam algum desconhecimento acerca dos conteúdos e metodologias aplicados nos ciclos precedentes. A minha experiência profissional já me permitiu lecionar aos dois anos de escolaridade do 2.º ciclo e trabalho de apoio pedagógico no 1.º ciclo, a um grupo de alunos do 3.º ano de escolaridade. Tais oportunidades revelaram-se enriquecedoras na medida em que me permitiu conhecer o trabalho desenvolvido no cálculo mental e na resolução de problemas, melhorando a perceção das estratégias de ensino-aprendizagem desenvolvidas nos 1.º e 2.º ciclos. Este tipo de oportunidades não é prática habitual na distribuição de serviço por parte dos órgãos de gestão, por isso é importante uma efetiva e eficiente articulação entre ciclos para uma verdadeira continuidade educativa.

As indicações metodológicas sugerem a resolução de problemas e a investigação de regularidades numéricas, como as principais atividades a desenvolver, por forma a dar consecução ao propósito principal de ensino do tema e aos objetivos gerais para o 3.º ciclo acima descritos. Desta forma, as tarefas propostas devem incluir a exploração e investigação de situações numéricas, situações de ligação a contextos científicos de outras áreas do saber e do quotidiano, mas também exercícios destinados a consolidação de aspetos rotineiros de aprendizagem dos números e operações. As tarefas devem também permitir o desenvolvimento das capacidades de cálculo numérico, de decisão quanto ao tipo de cálculo a usar, bem como a decisão quanto à utilização de valores exatos ou aproximados. O PMEB chama à atenção para a importância de "(...) discutir com os alunos as vantagens e limitações das aproximações nos vários contextos em que é pertinente considerá-las." ([**23**], p. 49).

Também se faz referência à análise de dizimas infinitas periódicas e não periódicas como introdução ao estudo dos números reais, sugerindo a discussão de alguns casos de irracionalidade e, nos casos de alunos com melhor desempenho, "(...) analisar uma demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$." ([**23**], p. 49). Sobre esta última indicação, a APM considerou que, em vez de se dirigir aos melhores alunos, deveria tratar-se de "(...) uma demonstração curta e relativamente simples, a fazer com todos os alunos e com a vantagem de evidenciar a matemática, junto de cada aluno, também como uma ferramenta abstrata poderosa." ([**7**], p. 23). A APM refere ainda que o tema *Números e Operações*, no 3.º ciclo, "(...) parece limitar-se bastante ao cálculo e menos ao sentido das operações." ([**7**], p. 23).

4. Resolução de Problemas no Tema

O destaque dado à resolução de problemas tem maior amplitude no PMEB, quando comparado com os programas anteriores. Para além da resolução de problemas nunca ter sido uma atividade de destaque no ensino da Matemática até então, Abrantes, em [**1**], considera também que nunca se centrou aí a aprendizagem. Para este autor, a resolução de problemas estava diretamente associada à resolução de equações, com uma abordagem limitada, variando apenas no grau de complexidade. Na mesma referência, Abrantes dá a demonstração como um exemplo de "(...) uma excelente atividade de resolução de problemas." ([**1**], p. 9).

O PMEB refere-se à demonstração como um dos objetivos gerais do ensino da Matemática, como uma capacidade transversal no âmbito do Raciocínio matemático e ainda como uma das orientações metodológicas. Enquanto capacidade transversal aos três ciclos, goza de uma perspetiva de continuidade e evolução, como fica claro na pretensão: "À medida que os alunos progridem nos diversos ciclos de ensino as suas justificações devem ser mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objetos." ([**23**], p. 5).

Uma das indicações metodológicas, sugeridas no tema *Números e Operações* do PMEB, é, tal como já referido na secção anterior, "(...) a demonstração, por redução ao absurdo, da irracionalidade da $\sqrt{2}$." ([**23**], p. 50). Tendo em conta [**1**], a mencionada indicação metodológica remete-nos para uma outra capacidade transversal definida no PMEB: a Resolução de problemas. Esta, para além de constituir um dos objetivos gerais do ensino da Matemática, considerada "(...) uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático." ([**23**], p. 6), é também um objetivo específico ao longo dos vários temas e ciclos.

Importa, neste momento, perceber o que é um problema e em que medida as tarefas são um tipo de problemas ou, pelo contrário, um problema é um tipo de tarefas. Encontram-se, em bibliografia de referência, diversas definições de problema, das quais se apresentam duas:

- "(...) um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel." (NCTM, [**76**], p. 2);
- "(...) problema é uma situação, quantitativa ou outra, com a qual se confronta um indivíduo ou grupo, na procura de uma solução, para a qual não tem prontamente resposta." (Krulik e Rudnik, [**76**], p. 2).

Mas não serão estas definições redutoras de toda a atividade investigativa que pode ser desenvolvida em sala de aula? O PMEB, no que diz respeito ao tema *Números e Operações* no 3.º Ciclo do Ensino Básico, diversifica nas sugestões metodológicas. De facto, propõe o recurso a tarefas que "(...) devem incluir, de forma equilibrada, a resolução de problemas e a exploração e investigação de situações numéricas, bem como exercícios destinados a consolidar aspetos rotineiros da aprendizagem dos números e operações (...)." ([**23**], p. 48).

A distinção entre problemas, explorações, investigações e exercícios é clarificada por Ponte, em [**55**]. Estas atividades, denominadas de tarefas, são classificadas segundo o seu grau de dificuldade e a sua abertura. O grau de dificuldade diz respeito ao ponto de vista por parte dos alunos, que pode ser, de acordo com a tipificação ilustrada na Fig. 9, Fácil ou Difícil. Ainda segundo a mesma tipificação, a tarefa pode ser de caráter Fechado ou Aberto, ou seja, "Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas." ([**58**], p. 8). O facto de muitas vezes ser difícil avaliar o grau de dificuldade de uma tarefa aberta, leva, segundo o mesmo autor, em [**55**], a chamar investigações a todas as tarefas de caráter aberto.

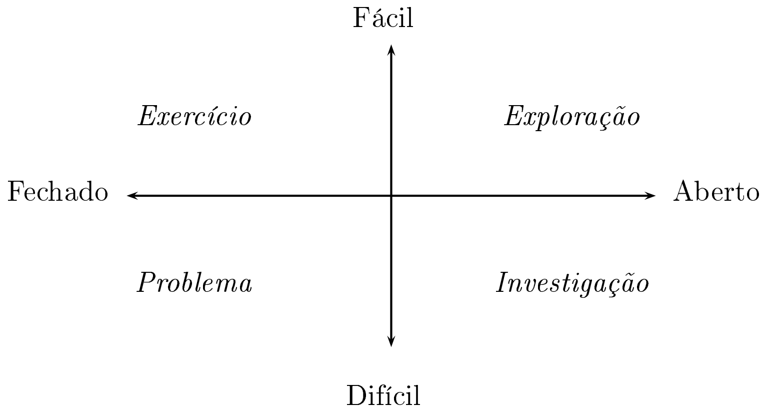


Figura 9. Tipos de tarefas em função da dificuldade e da abertura, [**55**].

De acordo com o esquema da Fig. 9, Ponte considera que um problema é uma tarefa fechada e difícil (3.º quadrante): é claro o que é pretendido determinar e os dados a utilizar, mas é difícil obter a solução, ou seja, é difícil a sua resolução. Para Ponte, "A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato (...) Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar (...) será um exercício. Caso contrário (...) será antes um problema." ([**58**], p. 4).

Quando se fala em resolução de problemas, uma referência incontornável é o livro [**50**] (Fig. 10), de George Pólya (Fig. 11) que, inclusive, surge na bibliografia do PMEB. Segundo este autor, a resolução de um problema resulta de um trabalho que deve percorrer quatro fases, sendo elas: compreensão do problema, conceção de um plano, execução desse plano e, por fim, a reflexão sobre toda a resolução.

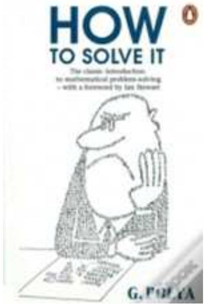


Figura 10. Capa do livro *How to solve it* de George Pólya, [**32**].

FIGURA 11. George Pólya (1887–1985), [**48**].

Perante um novo problema, o primeiro passo a tomar é então compreendê-lo. Aqui a seleção do problema proposto pode ser determinante, pois, para além da sua compreensão, Pólya considera que o aluno deve "(...) desejar (...) resolvê-lo." ([**50**], p. 7). A partir de uma boa compreensão do problema, o aluno está em condições de identificar a incógnita, os dados e as condições. Se o problema o justificar, pode também ilustrá-lo com uma ou mais figuras. No recurso a esta estratégia, a notação a adotar na(s) figura(s) deve ser cuidadosamente escolhida para não comprometer os passos seguintes. Para a definição da incógnita o professor pode auxiliar o aluno, procurando fazê-lo indiretamente com questões como "Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar?" ([**50**], p. 4). A partir daqui deverá ser delineada uma estratégia de resolução do problema – o estabelecimento de um plano – a fase, porventura, mais difícil e ao mesmo tempo mais desafiante.

Para estabelecer o plano há que refletir sobre os dados e a incógnita e, a partir daí, definir uma estratégia para a sua determinação. Nesta fase, Pólya reforça o papel do professor no auxílio ao aluno, proporcionando-lhe um trabalho autónomo mas intervindo no seu progresso. No caso de não ser verificável uma evolução no sentido da definição da estratégia, a intervenção do professor pode passar por uma questão do tipo "*Conhece um problema relacionado?*" ([**50**], p. 9). Caso tal não se adeque, o professor pode sempre sugerir a reformulação do problema ou a procura de outros, tendencialmente mais simples, dos quais os alunos já poderão ser conhecedores da sua resolução, sugerindo "Se não conseguir resolver o problema, procure antes resolver um problema relacionado." ([**50**], p. 10).

A propósito da intervenção do professor, Fonseca *et al.*, em **[30]**, sugerem que, perante as questões colocadas pelos alunos na procura de auxílio, "(...) o professor não deverá emitir opiniões muito concretas mas sim incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjeturas." (**[30]**, p. 95). Será também um momento propício para o professor promover, entre os alunos, a discussão e troca de opiniões e ideias, através de questões do tipo "O que te leva a pensar isso? ou Porque não concordas com a ideia do teu colega?" (**[30]**, p. 95).

Depois do plano delineado, será a vez de o por em prática, tratando-se, para Pólya, da fase mais fácil de todo este processo. Eventualmente, esta fase poder-se-á revelar mal sucedida caso o aluno se esqueça do plano, consequência de não ter sido elaborado por si mas sim de o ter recebido através de colegas ou, de uma abordagem demasiado explícita, do professor. Outro motivo que pode levar ao insucesso desta fase é o facto do plano poder não ser adequado, o que terá forçosamente de levar à fase anterior para elaborar um novo plano. Esta etapa culmina na obtenção da solução do problema remetendo para a quarta fase – a reflexão.

A reflexão passa pela verificação crítica dos resultados obtidos (solução do problema). Concretiza-se, por exemplo, na análise sobre a adequação dos resultados ao problema inicial e dos procedimentos adotados até aqui. É nesta fase que também se procede à correção de eventuais erros cometidos nos passos anteriores. Este trabalho poderá servir também para refletir se "*É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*" (**[50]**, p. 14), justificando o trabalho investido nesta resolução e promovendo ligações com outros problemas.

O PMEB, no caso particular do tema *Números e Operações* do 3.º Ciclo, orienta para tarefas que permitam aos alunos "(...) o desenvolvimento da sua capacidade de cálculo numérico (mental, escrito e usando a calculadora), de escolher o processo de cálculo numérico mais adequado a cada situação, de decidir quanto à utilização de valores exatos ou aproximados e de avaliar a ordem de grandeza e a adequação da solução encontrada para determinado problema ou questão. Na resolução de problemas numéricos, como nas tarefas de exploração e investigação, é importante que os alunos tenham um tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjeturas, descrever processos e justificá-los com progressivo rigor." (**[23]**, p. 49). Estas indicações podem ser postas em prática através do modelo de resolução de problemas de Pólya, que promove, para além da perceção de que um problema pode ser resolvido de diferentes formas, a resolução de diferentes problemas com recurso à mesma estratégia.

A seleção de um problema a propor na sala de aula, ou até mesmo fora dela, dever ter em conta diversos critérios, em particular, o tipo de alunos em causa (a faixa etária, os seus interesses e motivações, entre outras), o tema a trabalhar e os objetivos a que se propõe. Neste âmbito, Schoenfeld, em [**74**], sugere ter em conta uma "*estética dos problemas*", atribuindo-lhes quatro propriedades a ter em conta. Para este autor, na sua estrutura, os problemas devem ser, preferencialmente, de fácil compreensão, com possibilidade de diferentes abordagens e estratégias de resolução e, visando o trabalho futuro, devem proporcionar a introdução de novos conceitos e "(...) devem servir, se possível, como "germens" para "honestas e boas" explorações matemáticas." ([**74**], p. 69).

As tarefas, excluindo aqui os exercícios, concretizam-se em aulas com dinâmicas exploratória e investigativa, onde a "A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno (...)" ([**23**], p. 8). Por sua vez requerem, por parte do professor, um papel determinante tanto na seleção das tarefas a propor, como na forma como conduz toda a atividade na sala de aula. Este tipo de trabalho tende a promover aulas marcantes com aprendizagens significativas dos alunos, onde estes são diretamente implicados no desenvolvimento das mesmas. Em muitas destas, o modelo de Pólya poderá constituir o fio condutor do processo de ensino-aprendizagem.

No capítulo seguinte serão exploradas seis tarefas em dois dos anos do 3.º Ciclo do Ensino Básico – 7.º e 9.º anos de escolaridade. Na seleção das tarefas foi tido em conta o PMEB, e, na sua aplicação, podem-se identificar muitos dos procedimentos aqui descritos. As mesmas visam a aprendizagem integrada em contextos com referências à matemática pura, à semirrealidade e à realidade. Estas referências fazem parte dos ambientes de aprendizagem propostos por Skovsmose em [**78**], onde o autor defende que o ideal é conseguir que os alunos passem pelos diferentes tipos de tarefas, desde os exercícios até às investigações, nos vários contextos com as referências mencionadas. Este investigador considera que só assim os alunos se podem desenvolver integralmente em Matemática.

CAPíTULO 4

Práticas Letivas no Tema *Números e Operações*

Para levar a cabo as novas orientações metodológicas do Programa de Matemática, os professores, na sua maioria, devem assumir uma atitude de mudança, repensando as suas práticas pedagógicas. A resolução de problemas surge agora como objetivo de aprendizagem e também como orientação metodológica no desenvolvimento das aulas. O ensino-aprendizagem da Matemática deve ser baseado não só em exercícios, mas também noutras tarefas, tais como problemas, investigações e explorações, tipificação descrita por Ponte em [**54**].

Esta diversidade de abordagens, uma prática recorrente na planificação das minhas aulas ao longo dos anos, tem levado a que me confronte com a resistência dos alunos a tarefas que não são exercícios. Surgiu então a necessidade de investigar sobre a minha prática e sobre a atitude dos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico face às tarefas acima mencionas, de forma a procurar responder às questões investigativas indicadas na Introdução. De facto, Ponte refere que a investigação dos profissionais "(...) contribui, antes de mais, para o esclarecimento e resolução dos problemas. Além disso, proporciona o desenvolvimento profissional dos respetivos atores e ajuda a melhorar as organizações em que eles se inserem." ([**57**], p. 38).

As duas turmas referidas neste capítulo frequentavam, no ano letivo 2011/2012, uma o 7.º e outra o 9.º ano de escolaridade no Agrupamento de Escolas de Miraflores, no concelho de Oeiras, nas quais fui professora da disciplina de Matemática. O referido Agrupamento serve a população das freguesias de Algés e de Linda-a-Velha, que laboralmente se pautam por uma forte ligação ao setor terciário. A população escolar caracteriza-se fundamentalmente pela sua heterogeneidade, em muito devido ao reflexo dos novos fluxos migratórios a que Portugal tem estado sujeito.

Para o estudo levado a cabo, utilizei essencialmente, como instrumento de recolha de dados, as narrações multimodais. Cada uma destas caracteriza-se do seguinte modo:

(1) "É uma narrativa. Representa uma história descrita pelo professor de forma detalhada, representando os acontecimentos que se deram à volta de cada tarefa, constituindo uma forma de sistematizar a informação;
(2) Representa uma perceção o mais isenta possível (noticing), porque tenta identificar e narrar os fenómenos ocorridos, objetivamente e sem juízo de valor;
(3) É multimodal, porque se suporta em variados tipos de dados que são utilizados na sua construção, de forma a compor a narração em várias dimensões." ([**41**], p. 18).

Na primeira fase recolhi dados através da gravação ou captação de imagens das aulas (vídeo, áudio e fotografia), dos documentos produzidos pelos alunos e dos meus registos. Na segunda fase visionei as gravações, nos casos em que se aplicava, e organizei os documentos recolhidos, nalguns casos comparando-os. Em casos concretos, apresentam-se episódios enriquecidos progressivamente com os vários elementos multimodais, tais como fotografias, documentos dos alunos, material do professor, silêncios, gestos, ...

O presente capítulo encontra-se dividido em duas secções, a primeira referente ao 7.º ano de escolaridade e a segunda ao 9.º. Por sua vez, cada secção encontra-se estruturada em duas partes: a contextualização e a descrição. Na primeira apresento uma breve caracterização da sala de aula, da turma e das aulas. A descrição das tarefas aplicadas surge na segunda, onde elaboro a narração de cada aula com episódios.

Para promover o envolvimento dos alunos nas tarefas, procurei em cada turma criar um ambiente propício a que todos os alunos apresentassem as suas dúvidas, sugestões e hipóteses, sem constrangimentos e confiando na valorização das suas intervenções. Assim, segui a visão de Ponte quando diz que "Decisivo para o êxito deste tipo de trabalho, é o modo como o professor responde às dúvidas dos alunos, dando-lhes atenção e encorajamento sem lhes dar diretamente a resposta, e o modo como se formulam as questões, envolvendo toda a turma e pondo os alunos a argumentar uns com os outros." ([**54**], p. 30).

Baseei-me ainda no livro [**50**], no qual Pólya apresenta uma metodologia de resolução de problemas na sala de aula. Ele explora várias ideias orientadoras, organizadas em diferentes etapas, onde o papel do professor é determinante no auxílio aos seus alunos e na forma como conduz todo o processo de ensino-aprendizagem.

Pólya considera que "O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa na sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante.*" ([**50**], p. 4). Destaca ainda a importância das questões colocadas pelo professor, em forma de indagações, com dois propósitos, "(...) primeiro, auxiliá-lo [o aluno] a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio" ([**50**], p. 6).

Desta forma, na aplicação das tarefas propostas, dei especial importância, para além da sua escolha, ao discurso na sala de aula. Tentei promover o envolvimento dos alunos na sua aprendizagem, quer através de orientações, dirigindo o raciocínio matemático, quer através de questões mais ou menos diretas, ou mesmo solicitando aos alunos a explicação sobre as suas conclusões.

1. Resolução de Tarefas no 7.º Ano de Escolaridade

A turma do 7.º ano de escolaridade, na qual se levou a cabo o estudo, é constituída por 18 alunos, dos quais, dois com Necessidades Educativas Especiais, em que apenas um frequenta as aulas (a tempo parcial), e dois que se encontram a repetir o ano. O total de alunos, com idades compreendidas entre os 11 e os 14 anos, divide-se ainda em 7 do sexo masculino e 11 do sexo feminino.

O Projeto Curricular desta turma identificava como inibidores de aprendizagem as seguintes características:

- Comportamento tendencialmente perturbador do bom funcionamento das aulas;
- Dificuldade em trabalhar em grupo;
- Diferentes ritmos de trabalho/aprendizagem;
- Alguns alunos revelam dificuldades ao nível de organização/métodos de estudo;
- Alguns alunos revelam dificuldades a nível da expressão escrita e oral e não se empenham o suficiente quer nas atividades a desenvolver dentro da sala de aula, quer na realização dos trabalhos de casa.

Como aspetos facilitadores da aprendizagem destacavam-se:

- A maioria dos alunos revela um bom ritmo de aprendizagem;
- Existe uma boa relação interpessoal entre a maioria dos alunos;

- Alguns alunos são empenhados e envolvem-se com interesse nas atividades propostas;
- Alguns alunos são muito responsáveis;
- A grande maioria dos pais envolve-se no processo de ensino aprendizagem.

A turma tem uma sala de aula fixa onde decorrem a maioria das aulas. Esta sala é constituída por mesas de um e de dois lugares, organizada convencionalmente (Fig. 1). Dispõe de um quadro branco, de um projetor fixo e de um computador na mesa do professor, como de resto, em todas as salas da escola. Trata-se de uma sala de largura reduzida e pouca luz natural.

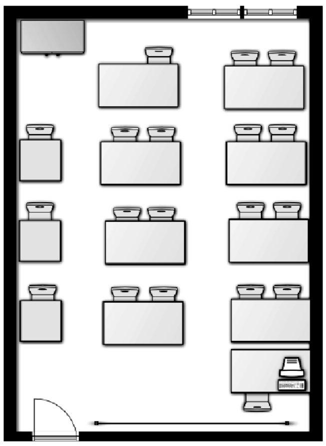


FIGURA 1. Planta da sala de aula da turma do 7.º ano.

No âmbito do estudo, a esta turma foram propostas três tarefas: "Voo em V", "Autocarros" e "Sequência de Fibonacci". Apresentei-as todas em forma de ficha de trabalho, distribuídas a todos os alunos, os quais, após uma breve introdução, as deveriam resolver a pares, com o colega de carteira. O desenvolvimento das três tarefas teve uma estrutura semelhante e, à medida que os alunos as concluíam, eu verifiquei as conclusões de cada grupo, havendo lugar, ao longo dos trabalhos, a troca de ideias (professora–grupo de alunos; alunos–alunos). As aulas foram estruturadas em quatro partes: Introdução à tarefa (professora); Resolução da tarefa (alunos a pares); Discussão dos resultados (alunos e professora); Registo das resoluções de cada questão no quadro (professora).

1. Resolução de Tarefas no 7.º Ano de Escolaridade

1.1. Tarefa 1: "Voo em V". A tarefa "Voo em V" (ver Anexo I) foi a primeira a ser proposta, constituída por seis questões sobre a mesma problemática. Esta foi retirada da brochura SEQUÊNCIAS E FUNÇÕES – Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo, 7.º ano – disponibilizada pela Direção-Geral da Educação em [**63**].

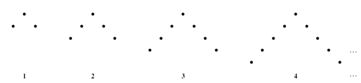


FIGURA 2. Composição de imagens relativas à Tarefa 1.

Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis vantagens para o voo das aves e dos aviões. Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os quatro primeiros termos: (Fig. 2) Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos. a. Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência? b. Quantos pontos tem a 100.ª figura (termo de ordem 100) desta sequência? c. Existe, nesta sequência, alguma figura com 86 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde. d. Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde. e. Escreve uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência. f. Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

FIGURA 3. Excerto da Tarefa 1.

Depois de trabalhado o tópico *Sequências e Regularidades*, apresentei à turma a presente atividade como consolidação dos conteúdos e aferição dos conhecimentos adquiridos. Eu esperava que os alunos estivessem familiarizados com a tarefa no seu geral e com a tipologia das questões em particular.

Com a tarefa propunha-me que os alunos atingissem os seguintes objetivos:

- analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação;
- verificar se um número é, ou não, termo de uma sequência;
- determinar ordens correspondentes a vários termos;
- determinar um termo geral de uma sequência.

Os alunos receberam com recetividade e interesse a tarefa proposta e, rapidamente passaram para a sua resolução. Apesar da indicação de que seria para trabalhar a pares, os alunos iniciaram a sua resolução individualmente e assim prosseguiram até a concluírem. Chamei à atenção de que deveriam trabalhar a pares, mas, dadas as circunstâncias, não impus caráter obrigatório. Dada a facilidade com que encararam cada questão, os alunos acabaram por não sentir necessidade de procurar o colega para colaborar na resolução e também não solicitaram a minha ajuda. Os alunos, no geral, envolveram-se intensamente na tarefa, notório no facto de que os primeiros a concluir o fizeram em 5 minutos. Dada a rapidez com que 3 alunos terminaram a tarefa, solicitei-lhes as folhas de respostas para verificar se efetivamente teriam concluído a tarefa e/ou se tinham respondido ao pretendido. Acabei por verificar que, de facto, a tarefa tinha sido concluída com sucesso pelos mesmos. Depois deste momento, todos os restantes alunos foram concluindo a tarefa até ao máximo de 15 minutos. Depois da conclusão da tarefa por parte da turma, lancei as sucessivas questões à turma e todos responderam com sucesso mas com diferentes métodos de resolução, registados no quadro, tal como se descreve de seguida.

Questão a. (Qa)

Nesta questão foram dois os alunos a representar geometricamente o quinto termo da sequência (Fig. 4) para dar resposta à mesma.

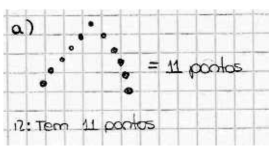


FIGURA 4. Resolução do aluno 7B para (Qa).

As restantes respostas dividiram-se em dois tipos: aqueles que perceberam que a figura seguinte tinha mais dois pontos que a anterior (Fig. 5); a maioria que determinou logo o termo geral da sequência e acabou por responder às questões seguintes recorrendo ao mesmo (Fig. 6 e Fig. 7).

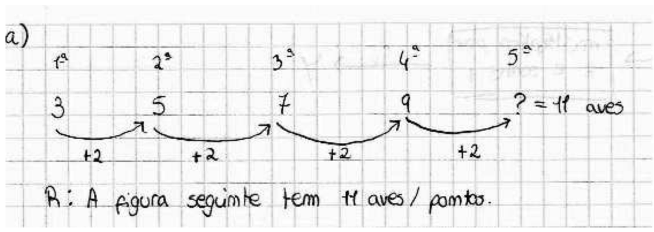


Figura 5. Resolução do aluno 7C para (Qa).

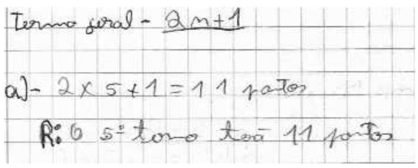


Figura 6. Resolução do aluno 7D para (Qa).

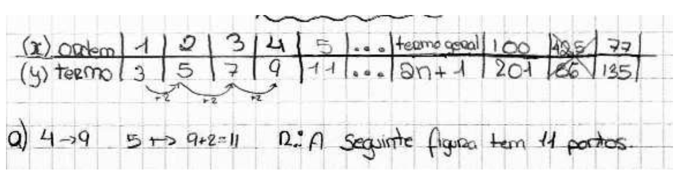


Figura 7. Resolução do aluno 7E para (Qa).

Questão b. (Qb)

Esta questão foi resolvida com recurso ao termo geral, sendo indicado explicitamente (Fig. 8 e Fig. 9) pelos alunos ou não (Fig. 10).

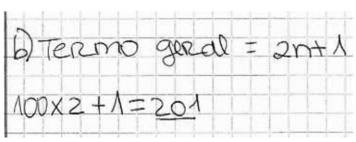


Figura 8. Resolução do aluno 7G para (Qb).

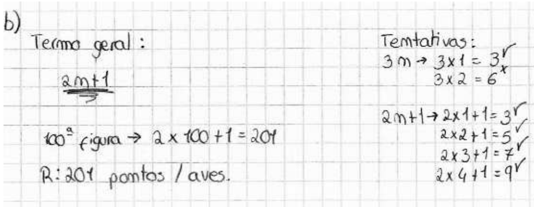


FIGURA 9. Resolução do aluno 7C para (Qb).

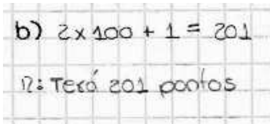


FIGURA 10. Resolução do aluno 7B para (Qb).

Questões c. (Qc) e d. (Qd)

Na primeira destas questões, (Qc), houve três tipos de respostas: aqueles que observaram que o número é par e a sequência é de números ímpares (Fig. 12); os que testaram algumas ordens e concluíram que nenhum dos termos tomará o valor 86 (Fig. 13 e Fig. 11); e ainda aqueles que observaram uma ordem não natural, o que contradiz a definição de sequência (Fig. 14 e Fig. 15). Na segunda questão, (Qd), surgiram dois tipos de resolução: por tentativa (Fig. 13); fazendo o inverso das operações do termo geral (Fig. 12, Fig. 14 e Fig. 15).

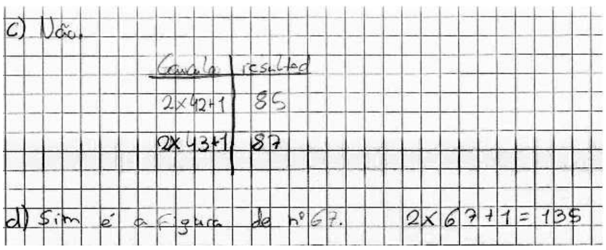


FIGURA 11. Resolução do aluno 7F para (Qc) e (Qd).

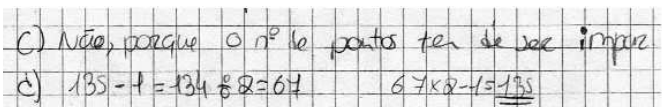
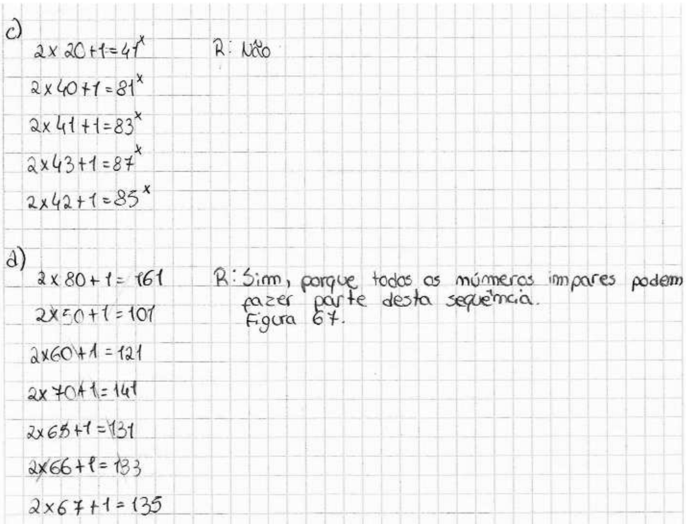


FIGURA 12. Resolução do aluno 7H para (Qc) e (Qd).


c)
2x20+1=41
2x40+1=81
2x41+1=83
2x43+1=87
2x42+1=85
R: Não

d)
2x80+1=161
2x50+1=101
2x60+1=121
2x70+1=141
2x65+1=131
2x66+1=133
2x67+1=135
R: Sim, porque todos os números ímpares podem fazer parte desta sequência. Figura 67.

FIGURA 13. Resolução do aluno 7C para (Qc) e (Qd).

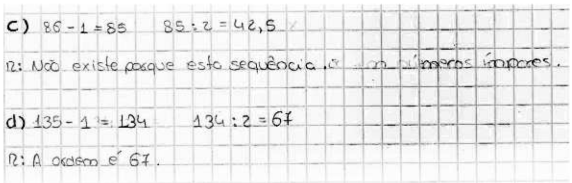

c) 86 - 1 = 85   85 : 2 = 42,5
R: Não existe porque esta sequência é de números ímpares.
d) 135 - 1 = 134   134 : 2 = 67
R: A ordem é 67.

FIGURA 14. Resolução do aluno 7B para (Qc) e (Qd).

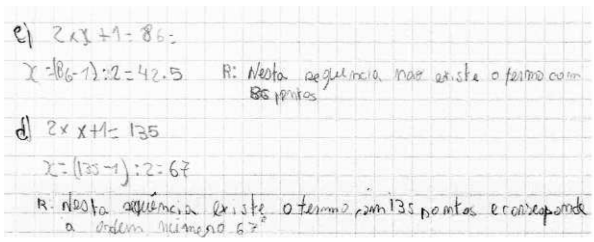

c) 2×x+1 = 86
x = (86-1):2 = 42.5   R: Nesta sequência não existe o termo com 86 pontos
d) 2×x+1 = 135
x = (135-1):2 = 67
R: Nesta sequência existe o termo com 135 pontos e corresponde a ordem número 67.

FIGURA 15. Resolução do aluno 7A para (Qc) e (Qd).

Questões e. (Qe) e f. (Qf)

Estas duas questões deram azo a alguma confusão nos alunos. Os alunos assumiram que a primeira se referia ao termo geral e depois não sabiam o que responder na segunda, achando estranho que ambas as questões solicitassem o mesmo. Só um aluno escreveu em linguagem natural a lei de formação da sequência (Fig. 16) e outro escreveu, também em linguagem natural, a expressão $2n + 1$ (Fig. 17). Os restantes alunos responderam à questão (Qe) com o termo geral da sequência (Fig. 18, Fig. 19 e Fig. 20).

As respostas à segunda destas questões acabou por ser bastante curiosa. Muitos alunos foram ao caderno diário relembrar a expressão analítica e as respostas foram variadas. Na Fig. 18 o aluno representou através de um esquema, utilizado numa aula anterior, o "funcionamento" de uma função, as ordens (a entrar na caixa) e os respetivos termos (a sair da caixa), depois da transformação por $2n+1$. Na mesma aula em que foi exposto o esquema referido, também foram esquematizadas as operações a efetuar para determinar a imagem de um valor através de uma determinada função. Foi este o esquema (Fig. 19 e Fig. 20) utilizado por outros alunos.

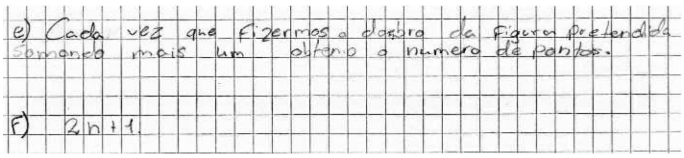


Figura 16. Resolução do aluno 7F para (Qe) e (Qf).

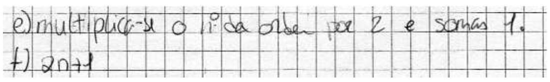


Figura 17. Resolução do aluno 7H para (Qe) e (Qf).

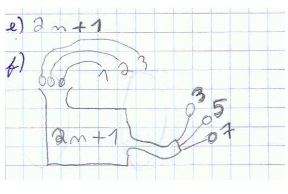


Figura 18. Resolução do aluno 7D para (Qe) e (Qf).

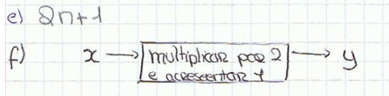


Figura 19. Resolução do aluno 7E para (Qe) e (Qf).

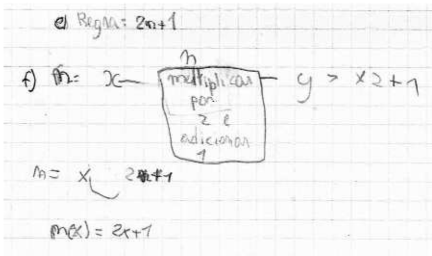


FIGURA 20. Resolução do aluno 7A para (Qe) e (Qf).

1.2. Tarefa 2: "Autocarros (mmc e mdc)". Na tarefa "Autocarros" (ver Anexo II), foram apresentadas duas situações problemáticas, sob a mesma temática, das quais, a primeira foi resolvida em contexto de sala de aula e a segunda proposta como tarefa para casa. Esta consistiu numa atividade na qual se pretendia que os alunos aplicassem os seus conhecimentos sobre múltiplos e divisores sem tal estar explícito.

Com a presente tarefa propunha-me que os alunos atingissem os seguintes objetivos:

- identificar os dados, as condições e o objetivo do problema;
- conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;
- explicar e justificar processos, resultados e ideias matemáticas;
- exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios;
- decompor números naturais;
- decompor em fatores primos;
- compreender as noções de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de dois números e determinar o seu valor.

Como em todas as propostas que constituíam um desafio, os alunos mostraram-se recetivos e interessados. Dei a indicação de que a tarefa teria que ser realizada a pares, pelo que a planta da sala de aula teve que ser reajustada. Os alunos ficaram sentados com um colega de carteira à exceção de um grupo que ficou com três elementos. A aluna com Necessidades Educativas Especiais, dadas as características da tarefa, trabalhou individualmente uma ficha de trabalho adaptada, proposta pela equipa de Ensino Especial.

1. (Q1) A empresa City Express une as cidades de Lisboa e Covilhã numa linha regular de autocarros. Para evitar esperas desnecessárias aos seus passageiros, decidiu colocar uma máquina de venda automática de bilhetes na estação de Sete Rios (Lisboa). Se a máquina vender unicamente bilhetes para o trajeto Lisboa-Covilhã e vice-versa, calcula qual é o preço do bilhete, sabendo que custa mais de 1 euro e que em dois dias consecutivos o total de vendas da máquina foi de 1105 e 1482 euros, respetivamente.
2. (Q2) Da central de camionagem de Sete Rios partem duas linhas de autocarros, a primeira parte a cada 12 minutos e a segunda a cada 20 minutos. Sabe-se que às 6 horas partem, em simultâneo, dois autocarros, um de cada linha. a. (Q2a) A que horas volta a coincidir a partida dos autocarros das duas linhas? b. (Q2b) Quantos autocarros terão partido de cada linha até às horas indicadas em a.?

FIGURA 21. Excerto da Tarefa 2.

Após a minha leitura do enunciado, foi necessário esclarecer que o preço do bilhete de ida é igual ao preço de volta.

Rapidamente um aluno perguntou o que se segue.

Aluno 7F: Podemos usar várias regras? Regra de três simples e isso?

Eu anuí e aproveitei para salientar que poderiam usar qualquer tipo de estratégia de resolução que considerassem adequada.

No grupo do aluno 7D já tinham interpretado o problema e, na tentativa de saberem se estavam no caminho certo, surgiu a pergunta seguinte.

Aluno 7D: Aqui estamos a pensar somar este [1105] e este [1482] e dividir por qualquer coisa. Não é?

Eu questionei sobre o que pretendiam com a soma dos dois valores e um rapidamente respondeu.

Aluno 7D: Vou ter o total dos dois dias. E para saber o preço do bilhete, como é mais de 1 euro, tenho que dividir por alguma coisa.

Passados 10 minutos abordei a mesa do aluno 7B.

Professora: O que já fizeram?

Aluno 7B: Já tirámos os dados. 1105 euros de ida e 1482 euros de volta.

A resposta do aluno 7B revela que o enunciado não foi bem interpretado, apesar de que, neste caso, a interpretação do aluno não interfere com a resolução do problema.

A inquietação e a frustração começou-se a instalar um pouco por toda a sala de aula, notório, por exemplo, nos seguintes comentários.

Aluno 7I: Este é um exercício do 10.º ano ou da universidade.

Aluno 7H: Não estou a perceber nada disto. Só tenho três dados! São só três números. É quase impossível resolver um problema com três números.

Passados 18 minutos ouve-se a seguinte exclamação.

Aluno 7A: Já sei!

Dirigi-me à mesa do aluno e questionei-o sobre a sua resolução.

Aluno 7A: Então 1105 a dividir por 85 dá 13 e 1482 a dividir por 114 dá 13.

Apesar de o aluno não explicar como obteve os valores 85 e 114, a resolução no caderno estava correta (Fig. 22).

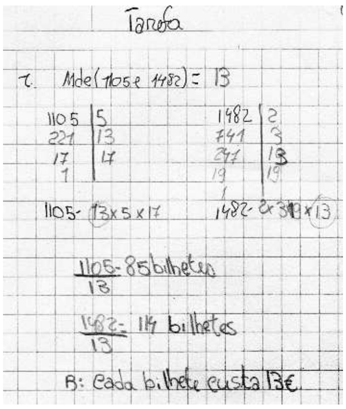


Figura 22. Resolução do aluno 7A para (Q1).

Nos grupos dos alunos 7H e 7G ainda não havia uma estratégia para a resolução do problema.

Aluno 7H: Não estou a perceber nada. Já ouvi falar em mdc e mmc e não estou a perceber nada.

Aluno 7G: É difícil.

Professora: Pensem ao contrário. Definam um preço e construam o problema ao contrário.

Três minutos depois ...

Aluno 7D: 1105 é o número total de bilhetes vendidos vezes o preço de cada bilhete. E o 1482 é o número total de bilhetes vendidos vezes o preço de cada bilhete.

Solicitei ao aluno 7D a partilha, com a turma, da sua conclusão e reforcei como se segue.

Professora: O que é que há aqui em comum?

Turma: O preço de cada bilhete!

Professora: Se souber o preço de cada bilhete, o que conseguimos saber?

Aluno 7D: O número de pessoas.

Professora: O número de bilhetes.

Aluno 7F: Se soubermos o preço de cada bilhete sabemos quantas pessoas compraram o bilhete. Então se soubermos quantas pessoas compraram o bilhete conseguimos ter a resposta.

O grupo do aluno 7F acabou por descobrir o preço de cada bilhete por tentativa erro. Com o seu colega de grupo, o aluno 7C, e com a ajuda da calculadora, começaram a testar os divisores a partir de 10, e desta forma rapidamente chegaram à resposta pretendida.

A dada altura, e com as dificuldades sentidas, os alunos começaram a partilhar informações entre grupos, o que levou a conhecerem em parte a resolução do aluno 7A. Souberam que passaria pela fatorização em números primos e pela procura do máximo divisor comum, sem, no fundo, perceberem o objetivo final.

Estabeleci um diálogo com o aluno 7H.

Professora: Porquê mdc?

Aluno 7H: Porque é o máximo divisor comum.

Professora: E porquê? Porque tem que ser um divisor comum?

Aluno 7H:: Como é que hei de explicar?! Ou seja, ao dividirmos este [1105] por este [1482] e vice-versa vai dar um número decimal. Nós temos que achar um número certo.

O aluno 7D, com o colega de grupo, dirigiu-se a mim com a sua explicação.

Aluno 7D: Descobrimos com a calculadora o máximo divisor deste [1105] que dá 85 e o máximo divisor deste [1482] que dá 114 e 1105 a dividir por 85 dá 13 e 1482 a dividir por 114 também.

Professora: E o que representa neste caso o 85?

Aluno 7D: O número de pessoas.

Apesar de interpretar corretamente os valores, estes foram obtidos já com o auxílio de resoluções de colegas.

Passados 45 minutos desde o início da tarefa, e tendo em conta o insucesso na resolução da maioria dos alunos, fiz a resolução no quadro incentivando os alunos a participarem na sua construção.

Apresenta-se de seguida a resolução do aluno 7C conforme foi exposta no quadro da sala de aula (Fig. 23).

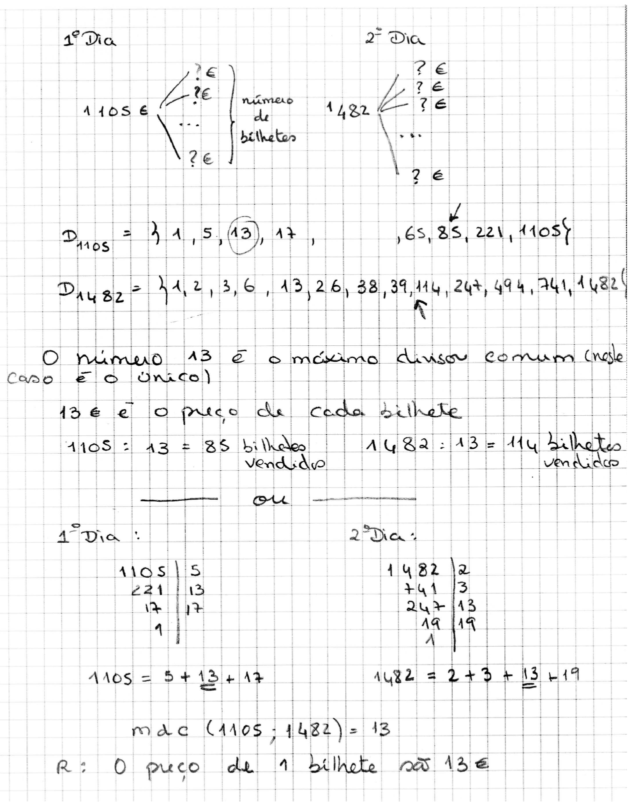


Figura 23. Correção de (Q1) copiada do quadro.

Observe-se que o aluno, nesta resolução, mesmo acompanhando o trabalho desenvolvido no quadro, ao copiar para o seu caderno comete um erro. Nas fatorizações dos números 1105 e 1482, ao invés de multiplicar os seus fatores primos, usou o sinal da adição. Esta situação revela, para além de desatenção, falta de conhecimento sobre a fatorização de números naturais.

Perante esta constatação, junto do aluno, chamei-o à atenção para se o que estava escrito no quadro correspondia ao registado no caderno. Alertei também a turma para a importância de estarem atentos quando copiam do quadro. Aproveitando ainda esta situação, reforcei a ideia da fatorização dos números em fatores primos, recorrendo às fatorizações dos números 1105 e 1482, e que a palavra fatorização está associada à operação de multiplicação.

A segunda parte da tarefa, (Q2), dividida em duas alíneas, foi resolvida em casa e entregue na aula seguinte em formato de papel. Entregaram todos os alunos à exceção de três. Todas as respostas entregues foram consideradas corretas. Seguem-se dois exemplos de resposta (Fig. 24 e Fig. 25).

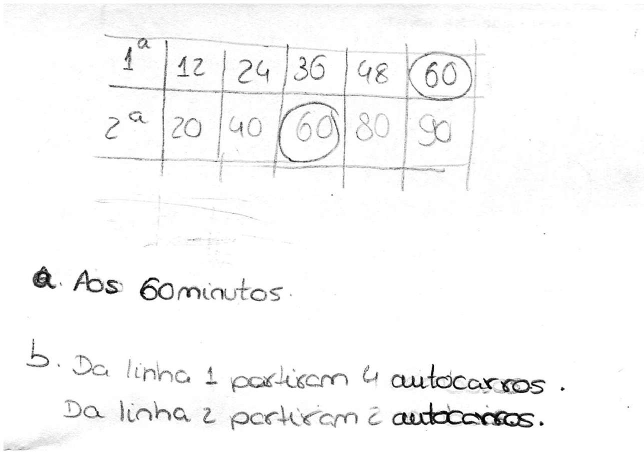


FIGURA 24. Resolução do aluno 7B para (Q2).

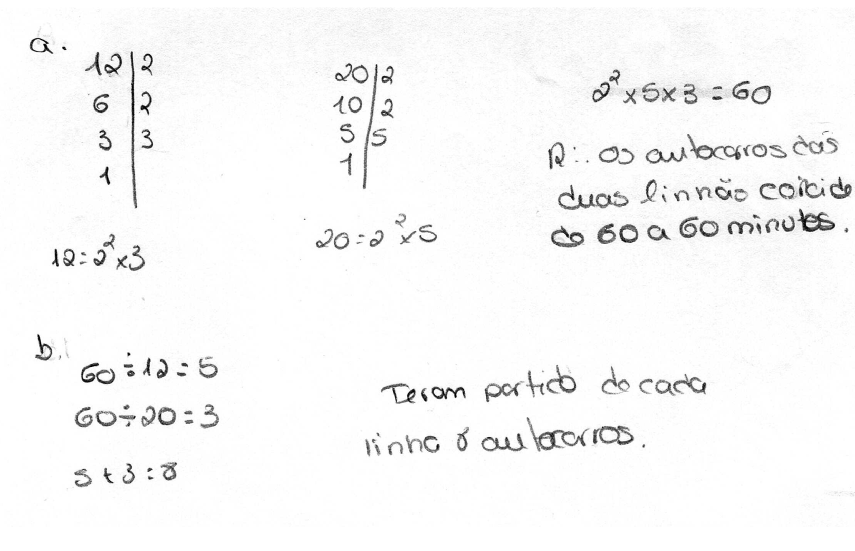


FIGURA 25. Resolução do aluno 7K para (Q2).

1.3. Tarefa 3: "Sequência de Fibonacci". A tarefa "Sequência de Fibonacci" (ver Anexo III), precedida de uma contextualização histórica, foi constituída por um único problema dividido em duas questões similares. Esta tarefa, apesar de não ser referida no PMEB, consta de uma temática frequentemente abordada nos manuais escolares no âmbito do estudo de sequências e regularidades. Justificou-se a sua abordagem, através de uma tarefa, tanto pela relevância histórica que apresenta como pelo desafio que pode ser lançado aos alunos na sua interpretação.

A tarefa foi proposta na última semana do segundo período, enquanto que o tópico de *Sequências e Regularidades* foi abordado no final do primeiro período.

Com a presente tarefa propunha-me que os alunos atingissem os objetivos:

- conhecer aspetos da história da Matemática;
- definir uma sequência por recorrência;
- conhecer a sequência de Fibonacci;
- desenvolver persistência na procura de soluções perante uma situação nova.

> Supõe que se coloca um casal de coelhos num recinto do qual não podem sair. No primeiro mês de vida, o casal de coelhos é ainda muito novo para se reproduzir. A partir do segundo mês, este casal torna-se fértil e dá origem a um novo casal (macho e fêmea) que nasce no mês seguinte. Este processo repete-se todos os meses com cada casal de coelhos.
> Ao fim de cinco meses, admitindo que não morre nenhum coelho, quantos casais de coelhos haverá no recinto? E ao final de sete meses? Obs.: Usa, para te auxiliar, os recortes de coelhos.

Figura 26. Excerto da Tarefa 3.

Dividi a turma em 7 grupos de dois alunos e 1 de três, aos quais foi distribuída a tarefa em papel e um conjunto de 30 casais de coelhos, também em papel (Fig. 27), para manipulação e eventual esquematização da situação problemática.

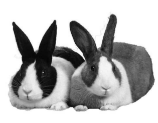


Figura 27. Casal de coelhos.

A tarefa foi recebida com entusiasmo e rapidamente os alunos interessaram-se pelo seu enunciado. Eu li a tarefa e expliquei que poderiam usar os recortes dos casais de coelhos bem como a mesa de trabalho para a exploração do desafio. Questionei ainda toda a turma sobre o ponto de partida com o objetivo de direcionar e estimular o início do raciocínio.

Professora: Qual é a situação inicial?

Aluno 7H: Um casal de coelhos.

Decorridos 10 minutos, já sete dos oito grupos discutiam a estratégia de resolução do problema podendo-se observar, espalhados pelas mesas de trabalho, casais de coelhos com diversas disposições.

Enquanto eu circulava pela sala de aula, os alunos aproveitavam para colocar algumas questões, todas relacionadas com a mesma dificuldade na interpretação do enunciado.

Aluno 7A: Eles nascem e a partir do segundo mês tornam-se férteis. Mas os outros coelhos só nascem no mês seguinte?

Aluno 7C: O primeiro casal ainda pode ter mais filhos, ou não?

Aluno 7H: Tenho uma dúvida, o primeiro casal reproduz-se no próximo mês?

Aluno 7D: Os filhos também só podem ter filhos no segundo mês?

Perante estas questões, optei por me dirigir a toda a turma reforçando a ideia de que os coelhos só se conseguem reproduzir no segundo mês de vida e que a partir daí se reproduzem mensalmente.

Notaram-se algumas dificuldades no diálogo entre os pares. Quando um aluno começava a esquematizar a reprodução dos coelhos nem sempre o(s) colega(s) conseguia(m) acompanhar o raciocínio. Isto prova que é um problema com diversas formas de abordagem, como veremos adiante, nem sempre claras para os demais.

Após 30 minutos foi possível observar as seguintes resoluções.

FIGURA 28. Resolução dos alunos 7H e 7L.

Este esquema estava muito bem construído e representava na perfeição a reprodução dos coelhos. Porém a pergunta que se impunha era que quantidade de casais de coelhos existiriam ao fim de 5 e de 7 meses. Estes alunos consideraram o nascimento dos coelhos como o momento "1" e não o momento "0", como era esperado.

O primeiro casal que consta à esquerda acabou de nascer e daí no mês seguinte haver um espaço em branco que representa o mês até atingir a idade fértil. No terceiro momento (3ª coluna) nasce um casal de coelhos. Na 4ª coluna, o casal da 3ª coluna ainda não pode procriar e por isso apenas nasce um casal do primeiro casal de coelhos. Na 5ª coluna temos dois casais de coelhos em idade fértil e, assim sendo, nascem mais dois. Na 6ª e 7ª colunas, pela mesma ordem de ideias, temos 3 e 5 casais de coelhos em idade fértil respetivamente, representando-se o nascimento de 3 e 5 casais de coelhos. Falta portanto uma coluna que represente o 7º mês que teria o nascimento de oito casais. Assim sendo, as suas respostas ficaram desfasadas um mês, tendo os alunos indicado 5 como o número de casais de coelhos existentes ao fim de 5 meses e 13 ao fim de 7 meses.

Segue-se uma resolução que, em termos de esquema e raciocínio, é muito idêntica à anterior. Contudo, os alunos, para além do erro na catalogação do momento zero, baralharam-se ao querer, desde início, fazer o esquema logo para os 7 meses. Este facto induziu ao "esquecimento" da reprodução dos casais de coelhos que entretanto foram nascendo.

FIGURA 29. Resolução dos alunos 7C e 7F.

Dois alunos fizeram uma esquematização que se revelou surpreendente, tanto pela imagem visual como pelo raciocínio que lhe está associado. O que à primeira vista parece um esquema sem nexo e muito pouco estruturado, numa segunda apreciação mostra-se de extrema simplicidade.

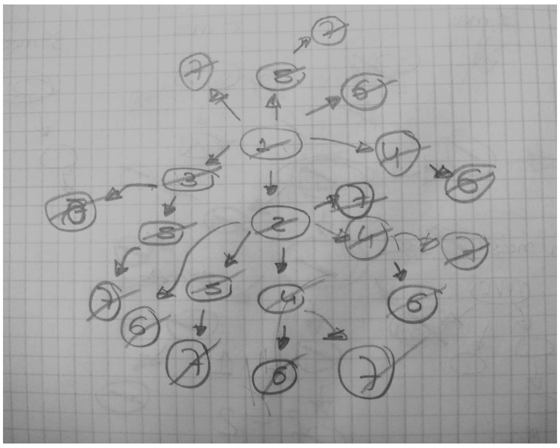


FIGURA 30. Resolução dos alunos 7B e 7J – primeiro esquema.

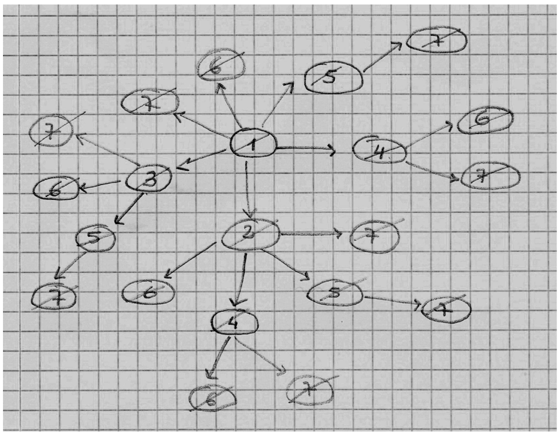


FIGURA 31. Resolução dos alunos 7B e 7J – segundo esquema.

A resolução da Fig. 30 continha erros e, após reformulação, obtiveram o esquema da Fig. 31, desta vez totalmente correto. Repare-se que as respostas às duas questões do enunciado podem ser obtidas através deste esquema contando o número de nós com valor menor ou igual a 5, para responder à primeira questão, e a totalidade de nós, para responder à segunda questão.

Os nós correspondem aos casais de coelhos nascidos no mês neles inscrito e as setas indicam a descendência de cada um dos nós (casal de coelhos), que por sua vez remetem para novos nós com a indicação do mês de nascimento do novo casal.

Dos restantes cinco grupos, um não conseguiu dar início à resolução e os outros quatro apresentaram esquemas de difícil compreensão e que os próprios alunos não conseguiam explicar, como se exemplifica de seguida (Fig. 32, Fig. 33 e Fig. 34).

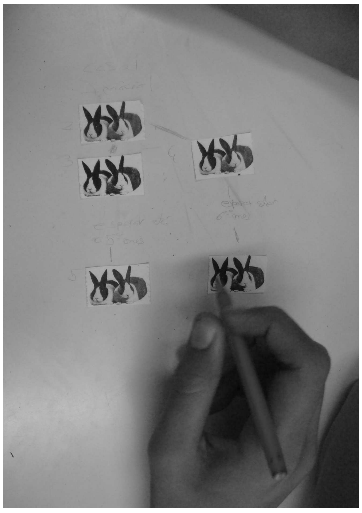


Figura 32. Resolução incorreta I.

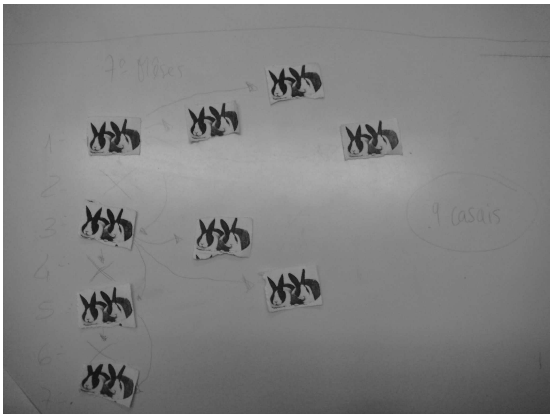


Figura 33. Resolução incorreta II.

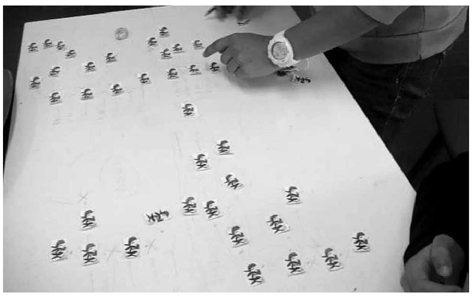


Figura 34. Resolução incorreta III.

Dado que apenas 35% dos alunos compreenderam a evolução da sequência, eu avancei para a resolução da tarefa, usando para tal os mesmos recortes de casais de coelhos afixados num placar. Comecei por identificar os meses na vertical usando também recortes em papel (Fig. 35) e de seguida questionei a turma sobre a situação inicial.

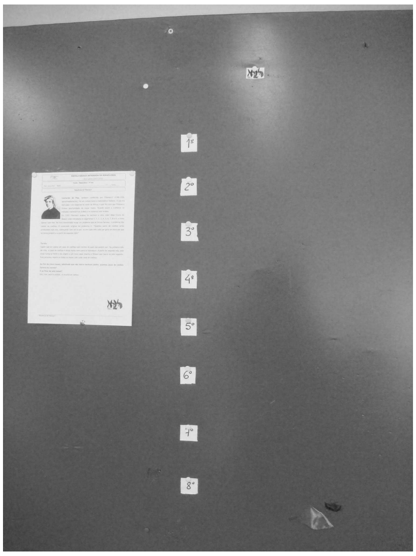


FIGURA 35. Placar da sala antes da resolução.

Professora: Qual é a situação inicial?

Vários alunos: Um casal de coelhos.

Rapidamente afixei um casal de coelhos antes da barra cronológica e entre vários comentários destaca-se um.

Aluno 7B: Pois, ainda não têm um mês. Acabaram de nascer!

Interrogando a turma, fomos em conjunto, acrescentando os casais de coelhos na linha cronológica. Com a exceção de dois alunos, todos participaram ativamente nesta construção, o que levou a momentos de alguma confusão e discussão, na maioria pela dificuldade, a partir do 4º mês, em identificar os casais férteis e não férteis.

Após a construção da sequência para os primeiros 5 meses, resultou o esquema da Fig. 36, que todos os alunos registaram no caderno diário. Após este momento continuámos a construção da sequência até aos 7 meses, que foi novamente registada no caderno diário. Por último e como curiosidade, ainda determinámos o número de coelhos no 8º mês, que apenas ficou construído no placar dada a limitação de espaço e organização da maioria dos cadernos.

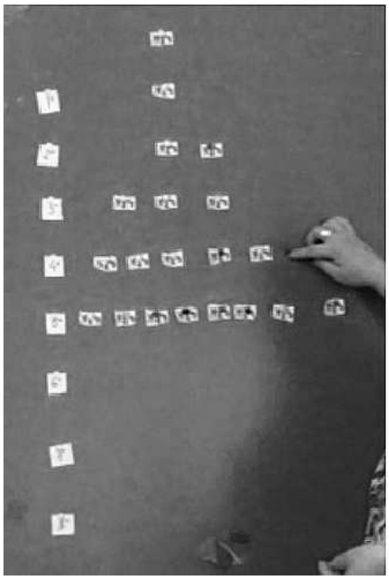


Figura 36. Placar da sala com a resposta do número de casais de coelhos ao fim de cinco meses.

2. Resolução de Tarefas no 9.º Ano de Escolaridade

A turma do 9.º ano de escolaridade, onde se realizou o estudo, é constituída por 18 alunos, com idades compreendidas entre os 13 e os 17 anos. Nestes há 9 alunos do sexo feminino e 9 do sexo masculino, um dos quais com Necessidades Educativas Especiais (Síndrome de Asperger) com currículo específico individual.

Um dos alunos está a frequentar o 9.º ano pela segunda vez e, dos restantes dezassete, sete já ficaram retidos ao longo do seu percurso escolar. No 7.º ano de escolaridade foram, desde logo, diagnosticadas grandes lacunas no que diz respeito às competências essenciais de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Esta situação refletia-se também pelo elevado número de alunos que transitaram para o 7.º ano com nível inferior a três na disciplina de Matemática. Trinta e sete porcento dos alunos transitaram para o 9.º ano com nível inferior a três.

Na turma do 9.º em questão foram identificados como inibidores de aprendizagem as seguintes características:

- falta de empenho nas atividades propostas na aula;
- poucos hábitos de trabalho autónomo, essenciais para o nível de ensino em que se encontram;
- resistência à aprendizagem, bem como alguns comportamentos desajustados;

- comportamento agitado e falta de concentração.

A turma não tem no seu horário uma sala fixa, mas todas as salas têm a mesma tipologia: janelas grandes em todo o comprimento de um lado da sala, mesas de dois lugares, um quadro branco, um computador e um projetor fixos.

A planta da sala de aula foi definida pelo conselho de turma, e é ajustada ao longo do ano letivo conforme o comportamento dos alunos (Fig. 37). O aluno com Síndrome de Asperger, muito bem integrado na turma, manteve o mesmo lugar ao longo do ano, sozinho na primeira mesa de uma das filas.

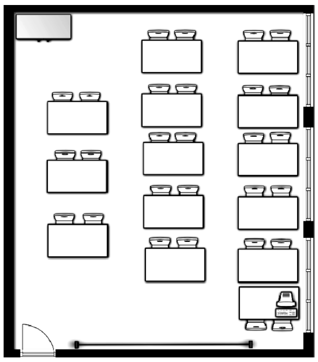


FIGURA 37. Planta da sala de aula da turma do 9.º ano.

No contexto do estudo, a esta turma foram propostas três tarefas: "Demonstração I", "Demonstração II" e "Fórmula Resolvente". À semelhança do que sucedeu no 7.º ano, as tarefas foram distribuídas em forma de ficha de trabalho a todos os alunos. As primeiras basearam-se na mesma metodologia, que consistiu na sua resolução em conjunto com indagações da minha parte e participação dos alunos. A terceira tarefa, após uma breve introdução, foi resolvida a pares, numa fase inicial, e depois por mim, no quadro, com troca de ideias (professora–grupo de alunos; alunos–alunos).

2.1. Tarefa 1: "Demonstração I". A tarefa "Demonstração I" foi realizada em duas partes. A primeira parte, nos últimos 35 minutos de uma aula, foi dedicada à biografia de Gauss e como, em criança, calculou a soma dos primeiros 100 números naturais. A segunda parte foi realizada numa aula de 45 minutos e consistia em demonstrar que raiz quadrada de dois é um número irracional.

Com a presente tarefa propunha-me que os alunos atingissem os seguintes objetivos:

- conhecer aspetos da história da Matemática;

- compreender a função da demonstração;
- desenvolver a capacidade de abstrair e de generalizar;
- utilizar corretamente os termos hipótese e tese;
- conhecer o Teorema Fundamental da Aritmética;
- consolidar as propriedades dos números naturais, racionais e suas operações.

A realização da tarefa, na qual já era dada a indicação de que o método a usar na demonstração seria o de redução ao absurdo, foi feita oralmente com registo na folha, em espaços previamente definidos para o efeito (ver Anexo IV). O quadro foi utilizado para exposição de exemplos, registo de propriedades necessárias para a tarefa e acompanhamento de alguns passos que exigiam cálculo.

Os alunos já tinham conhecimento sobre em que consistia a demonstração de um resultado e sobre algumas das diferentes formas de realizar uma demonstração. Na aula anterior foram apresentados dois tipos de demonstração: indução e redução ao absurdo. Para ilustrar este último método foi demonstrada a propriedade "Se p^2 é par então p é par, com $p \in \mathbb{N}$". Para tal, os alunos criaram um separador no caderno diário com o tema "Teoremas e demonstrações". Antes da demonstração, propus aos alunos a experimentação de casos particulares, que os levou a conjeturar as propriedades analisadas.

Solicitei ao aluno 9E a leitura da biografia de Johann Carl Gauss que constava na ficha distribuída e, após esta leitura, questionei os alunos se estavam recordados de, no ano anterior, terem calculado a soma dos primeiros 100 números naturais. Os alunos recordavam-se mas já não tinham presente como o tinham feito. Registei então no quadro a expressão $1+2+3+4+\ldots\cdots+97+98+99+100$ que reconheceram. A partir daqui questionei sobre a soma das parcelas $i+1$ e $100-i$, $i \in \{0, \ldots, 49\}$, e concluímos que $1+2+3+4+\ldots\ldots+97+98+99+100 = 101 \times 50 = 5050$. O esquema construído no quadro (Fig. 38) foi registado no espaço destinado, na ficha de trabalho, para o efeito.

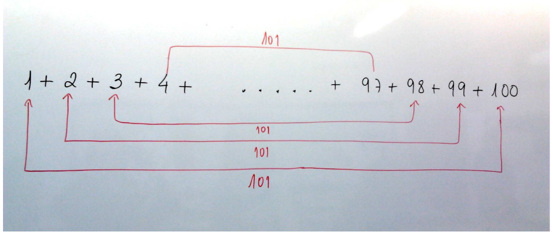


FIGURA 38. Representação, no quadro, da soma dos 100 primeiros números naturais.

Nesta altura passei à leitura do parágrafo seguinte e ajudei a clarificar o enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética através de dois exemplos (os números 24 e 210), recordando a fatorização de um número em fatores primos.

Depois de reforçar a importância da prova da veracidade de teoremas e propriedades, dei início à demonstração de "A raiz quadrada de 2 é um número irracional", informando, tal como estava descrito, que recorreríamos ao método de redução ao absurdo, e que se descreve de seguida.

Professora: E o método de redução ao absurdo consta em quê?

Aluno 9A: Raiz quadrada de 2 não é um número irracional.

Professora: Consta em negar a tese, neste caso assumir, supor que raiz quadrada de 2 não é um número irracional. Suponhamos que raiz quadrada de dois não é um número irracional.

Solicitei aos alunos a leitura em voz alta de cada passo da demonstração.

Aluno 9C: Se raiz quadrada de dois é um número racional, então pode escrever-se na forma...

Professora: Então a raiz quadrada de dois pode ser escrita na forma?

Aluno 9B acompanhado por alguns colegas: Fração.

Professora: Qualquer fração?

Aluno 9B: Fração irredutível.

O aluno 9D continuou a leitura já com a frase devidamente completa.

Aluno 9D: Se raiz quadrada de dois é um número racional, então pode escrever-se na forma de fração irredutível.

A noção de fração irredutível levantou algumas questões na aula que levou a um desvio da demonstração, tal como se transcreve de seguida.

Professora: Então vamos escrever raiz quadrada de dois na forma de uma fração irredutível. Vamos assumir que é uma fração do tipo $\frac{a}{b}$. a e b têm que ser números?

Vários alunos: Números naturais.

Vários alunos: Números fracionários.

Professora: O numerador tem que ser um número fracionário?

Aluno 9E: Ahh não!

Aluno 9F: Números inteiros.

Professora: Muito bem aluno 9F! O numerador e o denominador têm que ser números inteiros, têm que pertencer ao conjunto $\mathbb{Z}$. Mas o b não pode ser o quê?

Vários alunos: Zero.

Professora: E porque é que o b não pode ser zero?

Aluno 9G: Porque não faz sentido.

Professora: Não faz sentido porquê?

Aluno 9G: Não se pode dividir.

Professora: b tem que ser diferente de zero porque é impossível dividir por zero, é impossível dividir alguma coisa por nada. Porque é que afirmo de seguida que a e b não podem ter nenhum fator [primo] em comum?

Silêncio.

Professora: Se a e b tivessem um fator em comum?

Silêncio.

Professora: Deem-me um exemplo de uma fração em que o numerador e o denominador tenham um fator em comum.

Aluno 9A: $\frac{10}{10}$.

Passei a registar no quadro.

Professora: $\frac{10}{10}$ é a unidade. Outra diferente!

Aluno 9H: $\frac{5}{10}$.

Professora: Qual é o fator em comum a 5 e a 10?

Aluno 9E acompanhado por alguns colegas: 2.

Professora: O 2?

Aluno 9C: Sim.

Aluno 9E: o 5?

Professora: O 5! O 5 e o 10 têm o 5 como fator em comum. E como transformo a fração em irredutível?

Aluno 9E acompanhado por alguns colegas: Dividimos por 5.

Aluno 9E: 5 a dividir por 5 e 10 a dividir por 5.

Professora: Fica portanto $\frac{1}{2}$, que é uma fração?

Vários alunos: Irredutível.

Professora Reparem que agora 1 e 2 não têm nenhum fator [primo] em comum, ou seja, não são divisíveis pelo mesmo número. Deem-me agora um exemplo de uma fração em que o numerador e o denominador tenham um fator em comum, ou seja, sejam divisíveis pelo mesmo número, e que seja irredutível.

Silêncio.

Professora: Talvez não seja possível... Aluno 9I, dá-me um exemplo de uma fração redutível, ou seja, uma em que o numerador e denominador sejam divisíveis pelo mesmo número.

O aluno 9I nao respondeu, eu insisti e acabei por direcionar a questão a outro aluno.

Professora: Aluno 9B?

Aluno 9B: $\frac{2}{4}$.

Professora: Aluno 9I, porque é que esta fração que o aluno 9B sugeriu é uma fração cujo numerador e denominador têm um fator em comum, ou seja, são divisíveis por um mesmo número?

Aluno 9I: 2.

Professora: O numerador e denominador são divisíveis por 2. Simplificando fica $\frac{1}{2}$. Deem-me mais um exemplo de outra fração cujo numerador e denominador tenham um fator em comum.

Aluno 9E: $\frac{3}{6}$.

Professora: Qual o fator em comum a 3 e a 6?

Aluno 9J: 3.

Professora: Simplificando esta fração fica?

Aluno 9B: $\frac{1}{2}$.

Professora: Conseguem encontrar alguma fração irredutível em que o numerador e denominador tenham fatores em comum?

Aluno 9A: Não.

Professora: Se a fração é irredutível já não é possível dividir o numerador e denominador pelo mesmo número. Concordam?

Vários alunos: Sim.

Prossegui, com os alunos, a demonstração.

Professora: Numa fração irredutível, o numerador e o denominador já não têm fatores em comum, por isso ao dizer que raiz de 2 se escreve na forma $\frac{a}{b}$ e que esta fração é irredutível, temos que ter algumas garantias. a tem que ser um número?

Aluno 9E: Inteiro.

Professora: E o b um número?

Vários alunos: Inteiro.

Professora: E?

Vários alunos: Diferente de zero.

Professora: E que a e b não têm fatores em comum. Continuando...

Escrevi no quadro: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ e reproduzi oralmente.

O aluno 9K continuou a leitura.

Aluno 9K: Vamos analisar esta fração, isto é, a natureza do numerador [a] e do denominador [b]. Para nos desfazermos do símbolo de raiz, na igualdade precedente, elevamos ambos os membros ao quadrado.

Professora: Recordam-se? Para nos desembaraçar-mos de uma raiz numa equação, isolamos a raiz num dos membros e elevamos ambos ao quadrado. Então elevem ambos os membros a 2.

Alguns alunos perceberam o que se pretendia, outros escreveram $\sqrt{2} = (\frac{a}{b})^2$. Regressei ao quadro para explicar que tinha que ser em ambos os membros.

Professora: Temos a seguinte igualdade $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ [registo no quadro]. Se me quero desfazer da raiz, o que faço?

Vários alunos: Elevamos ao quadrado.

Professora: Mas, atenção! Numa equação, se efetuarmos alguma operação num dos membros, temos que fazer o mesmo ao outro membro. Lembram-se que têm que manter o equilíbrio entre os dois membros como se fosse uma balança!

Escrevi o procedimento no quadro: $\sqrt{2}^2 = (\frac{a}{b})^2$.

Professora: O que acontece agora?

Aluno 9B: Corta corta.

Professora: Exatamente, a raiz corta com o quadrado, ou seja, simplifica! E como fica?

Aluno 9B: $2^2 = (\frac{a}{b})^2$.

O aluno 9I não estava a evoluir e eu detive-me junto dele para recordar a noção de raiz e por que é que $\sqrt{2}^2 = 2$.

Professora: Retomando a nossa igualdade. Aluno 9L, qual o próximo passo na nossa demonstração?

Aluno 9L: Aplicando as propriedades das potências fica.

Professora: Que regra vamos aplicar aluno 9L?

Silêncio.

Professora: O que é que podemos fazer naquela potência? (aponta para o quadro).

Silêncio.

Professora: Quem é que ajuda o aluno 9L?

Aluno 9B: Eu. Eu acho que fica, como os expoentes são iguais, a menos b. Não, a a dividir por b.

Professora: Estás a confundir! Vamos relembrar as regras das potências.

Escrevi então no quadro as regras das potências.

O aluno 9H estava a escrever as regras no espaço da demonstração. Chamei-o à atenção e sugeri-lhe que escrevesse ao lado, aproveitando para verificar as fichas dos restantes alunos.

Enquanto alguns alunos estavam a escrever as regras no corpo da demonstração, outros já estavam a evoluir corretamente com três notações distintas:

$2 = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$;

$2 = \frac{a^2}{b^2}$;

$\frac{a^2}{b^2}$.

Professora: Têm que manter os dois membros da igualdade. Aluno 9G lê o que escreveste.

Aluno 9G: $2 = \frac{a^2}{b^2}$ [2 igual a a ao quadrado sobre b ao quadrado].

Registei a igualdade no quadro.

Professora: A igualdade anterior é equivalente a esta.

Tendo em conta as descontinuidades na elaboração da demonstração devido às dificuldades dos alunos, e para reforçar o que tinha sido trabalhado, recapitulei toda a demonstração desde o início até aqui. Depois prossegui, com os alunos, a demonstração.

Professora: Vamos então reduzir ambos os membros da igualdade ao mesmo denominador.

Observei que o aluno 9M escreveu $\frac{2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$.

Professora: Aluno 9M, ter 10 euros é o mesmo que ter 10 euros a dividir por 2?

Aluno 9M: Não.

Professora: Podes então, de um momento para o outro, passar de 2 para $\frac{2}{b^2}$?

Silêncio.

Conhecendo as dificuldades do aluno, passei para o seguinte exemplo no quadro: $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$.

Professora: Para somar duas frações temos que?

Aluno 9B: Reduzir ao mesmo denominador.

Professora: Aluno 9M, como fica?

Com a minha ajuda e a dos colegas foi calculada a soma.

Professora: Aluno 9M, $\frac{10}{15}$ é diferente de $\frac{2}{3}$?

Aluno 9M: Sim.

Professora: Valem valores diferentes?

Silêncio.

Decidi então exemplificar com dois círculos, onde num representei $\frac{10}{15}$ e noutro $\frac{2}{3}$, (Fig. 39).

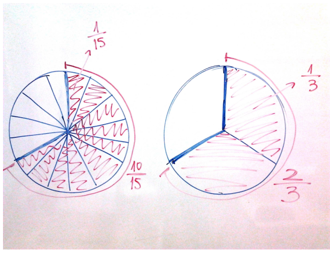


FIGURA 39. Representação esquemática de $\frac{10}{15}$ e de $\frac{2}{3}$.

Professora: Afinal aluno 9M, as frações são equi...

Aluno 9M: Equivalentes.

Professora: As frações são equivalentes, valem o mesmo!

De volta à igualdade $2 = \frac{a^2}{b^2}$ reforcei que não se podem limitar a dividir o primeiro membro por b^2. No quadro reduzi ambos os membros da igualdade ao mesmo denominador: $\frac{2b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$.

Professora: E agora posso?

Vários alunos: Pode cortar.

Professora: E como fica aluno 9D?

Aluno 9D: $2b^2 = a^2$.

Recapitulei todos os passos desde $2 = (\frac{a}{b})^2$.

Professora: Chegámos a uma expressão simples! $2b^2 = a^2$ que é equivalente a $a^2 = 2b^2$.

Chamei à atenção que a^2 é um número e que esse número é duas vezes um outro número.

Professora: O que me dizem sobre números na forma $2v$?

Obtive respostas pouco claras, nomeadamente "É o dobro", e na maioria impercetíveis.

Professora: Leiam lá o que vem escrito a seguir.

Alguns alunos lêem alto.

Professora: Então o que dizem sobre a^2?

Alunos 9A e 9N: É par.

Professora: Muito bem. Agora registem no espaço da vossa ficha e leiam o que vem a seguir.

Depois de consultarem o caderno diário, foi o aluno 9N que primeiro identificou a propriedade a que se refere a tarefa. A mesma tinha sido abordada numa aula anterior. Todos os alunos escreveram na ficha: Se p^2 é par então p é par, com $p \in \mathbb{N}$.

Professora: Então se a^2 é par, o que me dizem sobre a paridade de a?

Vários alunos: É par.

A 15 minutos do final da aula, o aluno 9L chama a atenção que a aula está a chegar ao fim.

Professora: Se a é par pode ser escrito de que forma?

Aluno 9A: a^2.

Professora: Não.

Aluno 9A: b^2?

Professora: Não. Vamos recuar e ver a definição de número par. Qualquer número par escreve-se da forma?

Aluno 9O: $p = 2k$.

Professora: Mas neste caso não lhe chamamos p mas sim a. Então como fica?

Aluno 9O: $a = 2k$.

Professora: Voltando à nossa última igualdade, $2b^2 = a^2$ [registo no quadro], vamos substituir a por $2k$. Como fica aluno 9P?

Silêncio.

Professora: Vamos lá aluno 9P, onde tens o a substitui por $2k$.

Com ajuda do colega do lado, aluno 9Q, o aluno 9P concluiu a substituição. Pareceu que o aluno disse bem mas, tal como outros alunos, escreveu $2k^2$.

Professora: Atenção que o expoente tem que se aplicar não só ao k mas também ao 2. Para isso usam um parênteses.

Escrevi no quadro: $2b^2 = (2k)^2$.

Professora: Continuando a demonstração, desenvolvam agora a potência $(2k)^2$.

Chamei a atenção dos alunos para a aplicação da regra das potências e percorri as mesas observando a sua aplicação. Muitos alunos escreveram $4k$. Corrigi o erro referido nos lugares.

Professora: Chegámos então a $2b^2 = 4k^2$. Que sugestão se segue?

Aluno 9D acompanhado de alguns colegas: Dividindo ambos os membros da igualdade por 2.

Procedi então à divisão, no quadro, de ambos os membros por 2: $\frac{2b^2}{2} = \frac{4k^2}{2} \Leftrightarrow b^2 = 2k^2$.

Professora: Reparem agora que b^2 é da forma 2 vezes um número. Posto isto, o que me dizem sobre a paridade de b?

Aluno 9B: É par.

Professora: Exatamente. Preencham a afirmação na vossa ficha.

Depois de um momento de pausa, prossegui.

Professora: Então a e b são números pares, certo?

Vários alunos: São.

Professora: Se a e b são número pares podem ser divididos por que número?

Aluno 9O: Por 2.

Professora: Então se a e b são divisíveis por 2, $\frac{a}{b}$ é irredutível?

Aluno 9B e aluno 9O: Não.

Professora: Então há aqui uma contradição. No início da demonstração dissemos que $\frac{a}{b}$ era irredutível.

Aluno 9D, aluno 9E e aluno 9O: Isso é a redução ao absurdo!

Aluno 9E: A raiz de dois não é racional!

Professora: Chegámos a uma contradição, ou seja, partimos de uma afirmação e agora chegámos a uma contradição, um absurdo. Leva-nos então a concluir, como disse o aluno 9E, que a raiz quadrada de dois não é racional. Completem agora os espaços do final da demonstração.

2.2. Tarefa 2: "Demonstração II". Em sequência da tarefa anterior, propus aos alunos uma segunda demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ através do Teorema Fundamental da Aritmética, com o qual já tinham tido contacto.

Com a presente tarefa propunha-me que os alunos atingissem os seguintes objetivos:

- compreender a função da demonstração;
- desenvolver a capacidade de abstrair e de generalizar;
- utilizar corretamente os termos hipótese e tese;
- consolidar as propriedades dos números naturais e racionais, e suas operações;
- aplicar o Teorema Fundamental da Aritmética;

- compreender que pode haver mais do que uma demonstração para um mesmo resultado.

Tal como na primeira demonstração, apresentei aos alunos uma ficha já com a demonstração pré-feita, a qual os alunos completaram com o meu auxílio. Tendo em conta a similitude com a tarefa "Demonstração I", os passos iniciais foram dados com sucesso. Importou nesta tarefa salientar um passo da demonstração que se transcreve a seguir.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, p e q podem ser escritos como ___.
Procura escrever a afirmação anterior em linguagem matemática.
$p =$
$q =$

FIGURA 40. Excerto da Tarefa 2.

Recorrendo à tarefa anterior, todos os alunos conseguiram, com sucesso, completar a primeira frase. A título de exemplo veja-se uma resolução na Fig. 41.

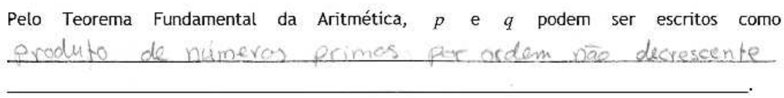

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, p e q podem ser escritos como produto de números primos por ordem não decrescente.

FIGURA 41. Resolução do aluno 9C.

Verifiquei a dificuldade dos alunos para escrever, em linguagem simbólica, p e q como produto de números primos por ordem não decrescente. De facto, não registei nenhum caso de sucesso na resposta. Foram 8 os alunos que conseguiram concretizar uma resposta a esta questão. Todos os outros alunos não registaram nada.

De entre as tentativas de resposta algumas revelaram a preocupação em identificar os fatores como números primos, dando essa indicação: escrevendo os números primos (Fig. 42) ou identificando as letras como tal (Fig. 43).

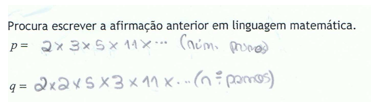

Procura escrever a afirmação anterior em linguagem matemática.
$p = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times \cdots$ (núm. primos)
$q = 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 11 \times \cdots$ (nº primos)

FIGURA 42. Resolução do aluno 9O.

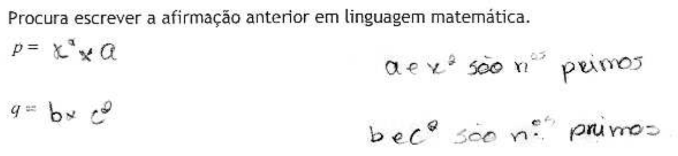


Figura 43. Resolução do aluno 9A.

Na resolução da Fig. 44, apesar de terem sido identificados os fatores como números primos, houve uma tentativa em escrever um produto de fatores utilizando as letras do alfabeto, mas repetindo a mesma fatorização para p e q. Tal como na resolução da Fig. 42, o aluno não distinguiu os dois números.

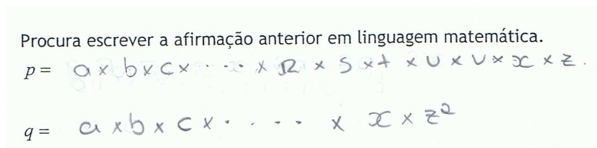


Figura 44. Resolução do aluno 9D.

Houve ainda respostas sem sentido algum e que revelaram que o aluno não compreendeu o que lhe era pedido, como se constata na resolução da Fig. 45.

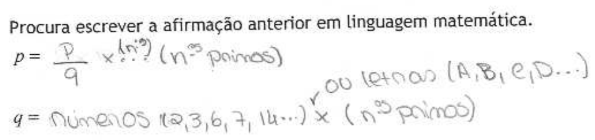


Figura 45. Resolução do aluno 9M.

Recolhi as folhas onde foram registadas as respostas anteriores e, depois, distribuí as páginas 3 e 4 da tarefa. Prosseguimos para a página 3 onde já estavam escritos p e q como produto de números primos. Os alunos ficaram surpreendidos com o aspeto das fatorizações, mas, dado o esforço feito em obter o mesmo resultado, compreenderam o que lhes era apresentado, com a ajuda de uma breve exploração minha no quadro.

A continuação da demonstração, à semelhança da anterior, elaborou-se através do preenchimento de espaços que se revelaram mais fáceis de concretizar levando a que a demonstração se concluísse, a partir da página 3, em 20 minutos. Não tendo registado áudio nem vídeo, dos apontamentos tomados, registei que os alunos consideraram esta demonstração mais "fácil" que a anterior.

2.3. Tarefa 3: "Fórmula Resolvente". A tarefa "Fórmula Resolvente" consistiu num conjunto de três problemas históricos resolvidos através de equações do 2.º grau e, posteriormente, da demonstração da fórmula resolvente. Já tinha sido trabalhada, nas aulas anteriores, a resolução de equações incompletas do 2.º grau, pelo que esta tarefa tinha, como objetivo, introduzir as equações completas do 2.º grau e a fórmula resolvente. Propunha-me ainda que os alunos interpretassem e resolvessem problemas geométricos e algébricos envolvendo equações do 2.º grau.

Após a introdução à tarefa e leitura, ambas realizadas por mim, dos três problemas propostos, dei 30 minutos para que os alunos relessem os problemas e iniciassem a sua resolução. Sugeri, depois de introduzida a tarefa, que poderia ser útil representar as figuras geométricas sugeridas em cada um dos problemas.

Problema A. Papiro de Moscou: Calcular a base de um retângulo cuja altura é igual a 3/4 de sua base e cuja área é igual a 12.
Problema B. Tábua babilónica: Achar o lado de um quadrado se a sua área menos o seu lado é 870.
Problema C. Sulvasutras: A oitava parte de um bando de macacos, elevada ao quadrado, brinca num bosque. Além disso, 12 dos macacos podem ser vistos sobre uma colina. Qual é o número total de macacos?

FIGURA 46. Excerto da Tarefa 3.

Passados os 30 minutos, 6 alunos ainda não tinham iniciado a resolução de nenhum dos problemas propostos na tarefa. Apresentam-se de seguida algumas resoluções de alunos que conseguiram dar alguns passos no referido espaço de tempo. Nuns casos os dados foram mal interpretados, noutros foram bem recolhidos e o problema mal equacionado, e noutros casos o problema foi bem equacionado mas não resolvido.

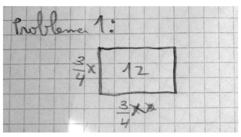


FIGURA 47. Recolha de dados do Problema A pelo aluno 9R.

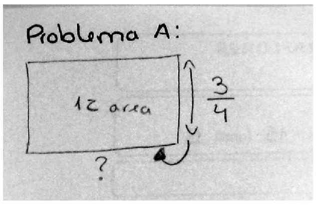


Figura 48. Recolha de dados do Problema A pelo aluno 9M.

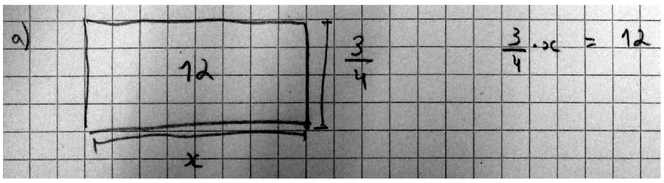


Figura 49. Equação incorreta do Problema A pelo aluno 9N.

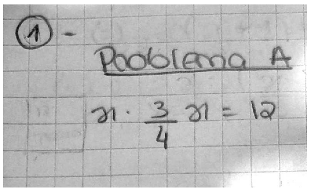


Figura 50. Equação correta do Problema A pelo aluno 9E.

De seguida apresentam-se dois casos de alunos que equacionaram e resolveram a equação, mas só um concretizou a resolução do problema. O aluno 9B errou na resolução da equação (Fig. 51) e o aluno 9E cometeu apenas um erro na apresentação do conjunto solução da equação (Fig. 52).

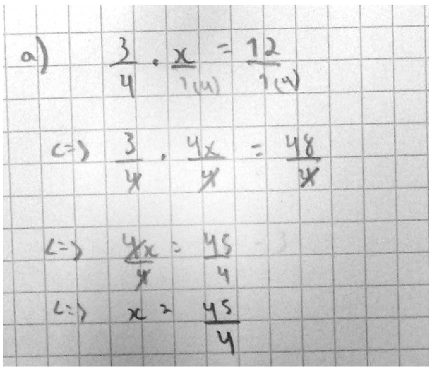


Figura 51. Equação correta, mas mal resolvida, pelo aluno 9B.

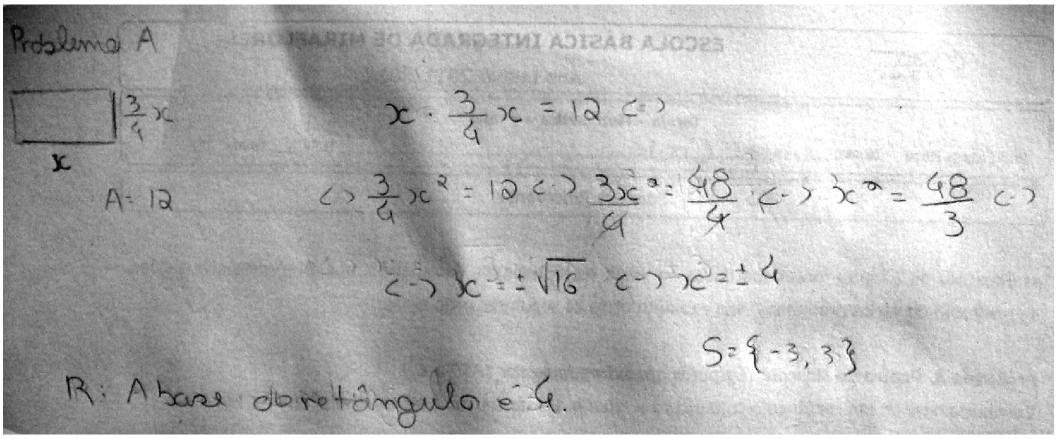


FIGURA 52. Equação correta do Problema A pelo aluno 9E.

Seguiu-se a exploração no quadro, interagindo com os alunos.

Professora: Vamos ler novamente o primeiro problema. Calcular a base de um retângulo cuja altura é igual a $\frac{3}{4}$ da sua base e cuja área é igual a 12. O que começamos por fazer?

Aluno 9E: Desenhar um retângulo.

Após esta intervenção, reproduzi um retângulo no quadro.

Professora: O que pretendemos saber neste problema aluno 9I?

Aluno 9I: É calcular a base vezes a altura.

Professora: O que é pedido?

Aluno 9M: A base.

Professora: O que é a base do retângulo? É a nossa?

Aluno 9A: Incógnita.

Denotei, no retângulo do quadro, a base pela letra x.

Professora: O que nos é dado?

Aluno 9A: Altura é igual a $\frac{3}{4}$ da sua base.

No retângulo já mencionado, denotei a a altura por $\frac{3}{4}x$.

Professora: E que outra informação é dada?

Aluno 9I: A área.

Aluno 9M: Que é 12.

Professora: Como se calcula a área de um retângulo?

Surgem alguma hesitação e respostas atrapalhadas mas corretas.

Escrevi no quadro $A = \text{base} \times \text{altura}$.

Professora: Então qual é a condição? A equação? Sabendo que a área é 12...

9B: $\frac{3}{4}x = 12$. Não! $x \times \frac{3}{4}x = 12$.

Registei então no quadro $x \times \frac{3}{4}x = 12$.

Professora: A multiplicação goza de que propriedade?

Aluno 9J: Distributiva.

Professora: Distributiva em relação à adição. Mais? Que propriedades da multiplicação vocês conhecem?

Vários alunos: Comutativa.

Professora: E o que significa a propriedade comutativa da multiplicação?

Silêncio.

Professora: Vamos lá!

Aluno 9N: É comum.

Professora: É comum?! Aluno 9G?

Aluno 9G: Podem-se trocar os fatores.

Professora: Muito bem! Como é possível ouvir respostas como "comum"? Fico comovida com algumas respostas! Aluno 9A, como simplificaste o primeiro membro?

Aluno 9A: Fica $\frac{3}{4}x^2 = 12$ [três quartos de x ao quadrado igual a 12].

Registei o que disse o aluno.

Professora: E depois?

Aluno 9A: E depois isso é uma equação muito incompleta.

Professora: Muito incompleta não! Incompleta. Tem um termo de grau...

Aluno 9A: Dois.

Professora: E um termo? In...

Aluno 9A: Independente.

Professora: Como se resolvem equações deste tipo?

Aluno 9A: Põe-se em evidência.

Professora: Em evidência? Em evidência não! No primeiro membro só temos uma parcela, o que é que podes por em evidência? Só podes pôr um elemento em evidência quando ele está comum a duas ou mais parcelas!

Eu quero isolar o x^2 no primeiro membro. Tenho aqui este coeficiente. O $\frac{3}{4}$ está a fazer o quê no primeiro membro?

Aluno 9B: A multiplicar.

Professora: Passa para o segundo membro a?

Aluno 9B: Dividir.

Professora: E dividir por uma fração é o mesmo que multiplicar pela sua?

Silêncio.

Repeti a pergunta três vezes.

Aluno 9E: Inversa.

Simplifiquei a equação no quadro, onde o produto 12×4 e o quociente $\frac{48}{3}$ foi solicitado aos alunos.

Professora: Como desembaraço o quadrado?

Aluno 9J: A raiz.

Professora: A raiz como?

Aluno 9E: Mais ou menos raiz de 16.

Registei $x = \pm\sqrt{16}$ no quadro.

Professora: E quanto é a raiz de 16?

Vários alunos: 4.

Professora: Então $-\sqrt{16}$ é -4. Tem duas soluções. E estas duas soluções são ambas solução do problema?

Vários alunos: Não.

Professora: Então qual é a solução do problema?

Vários alunos: 4.

Professora: Vamos lá responder... A base do retângulo mede 4.

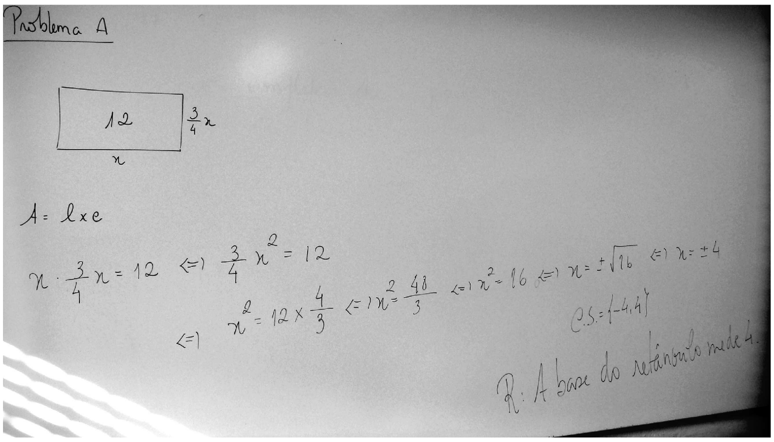


Figura 53. Resolução correta do Problema A no quadro.

Depois de decorridos 45 minutos da aula passei à correção, em conjunto com os alunos, do Problema B da tarefa.

Professora: Problema B, achar o lado de um quadrado se a sua área menos o seu lado é 870. Aluno 9F, como é que pensaste?

Aluno 9F: Fiz um quadrado...

Desenhei um quadrado no quadro e depois, observando a resolução do aluno, ajudei-o na sua exposição.

Professora: E depois indentificaste quê?

Aluno 9F: O lado mede x.

Professora: Ambos os lados medem x. E depois?

Aluno 9F: E A [área do quadrado] menos x é igual a 870.

Professora: A?

Aluno 9F: Ah não...

Professora: Quanto é a área?

Aluno 9F: x^2

Registei $x^2 - x = 870$ no quadro.

Professora: Esta equação é?

Vários alunos: É completa.

Professora: Vamos passar o 870 para o primeiro membro.

Registei no quadro $x^2 - x - 870 = 0$.

Professora: Trata-se de uma equação completa do segundo grau. Tem um termo de grau... [apontando para x^2]

Vários alunos: Dois.

Professora: Tem um termo de grau... [apontando para x]

Vários alunos: Um.

Professora: E um termo... [apontando para 870]

Vários alunos: Independente.

Professora: Já sabemos resolver estas equações?

Vários alunos: Não.

Professora: Por enquanto ainda não.

No que respeita a este problema, apenas 6 alunos iniciaram a sua resolução. A maioria porque não concluiu o Problema A e por isso não avançou para o seguinte. Alguns alunos usaram esse argumento para não fazerem mais nada e tentarem conversar com os colegas que também não estavam a trabalhar. Quando abordados pela professora afirmavam sempre que estavam a pensar.

Apresentam-se de seguida duas tentativas de resolução que, devido à notação, não lhes permitiriam resolver posteriormente a equação. De facto, os alunos não exprimiram ou o lado, ou a área e o lado, em função de x.

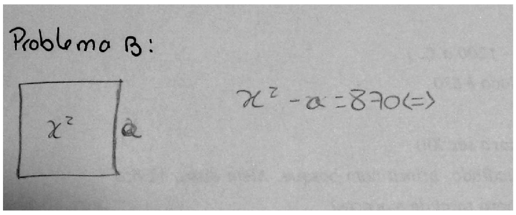


Figura 54. Equação do Problema B pelo aluno 9M.

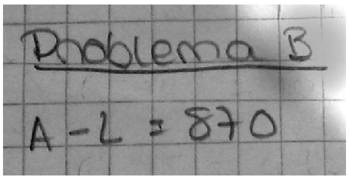


Figura 55. Equação do Problema B pelo aluno 9E.

A resolução da Fig. 56 foi uma das consideradas totalmente corretas.

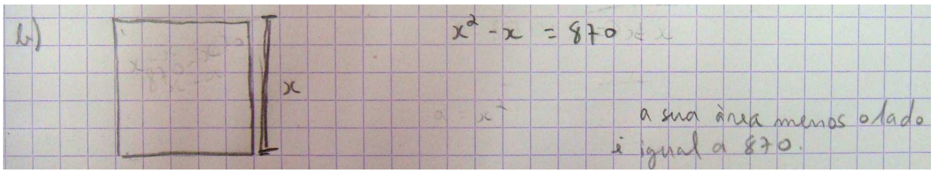


Figura 56. Equação do Problema B pelo aluno 9N.

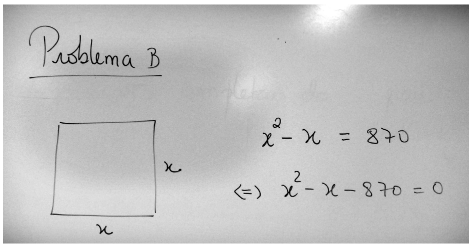


Figura 57. Resolução correta do Problema B no quadro.

Após 50 minutos, desde o início da aula, iniciei a correção do Problema C, o qual só três alunos resolveram e, destes, apenas um com sucesso.

Professora: Vamos passar agora ao problema C. Prestem atenção. A oitava parte de um bando de macacos, elevada ao quadrado, brinca num bosque. Além disso, 12 dos macacos podem ser vistos sobre uma colina. Qual é o número total de macacos? Vão ter mais 10 minutos para pensarem neste problema.

No decurso do referido tempo, circulei pela sala para observar a evolução dos alunos. Apresentam-se dois exemplos de resposta, um dos quais aquele que concluiu com sucesso o problema no que diz respeito à escrita da equação inicial.

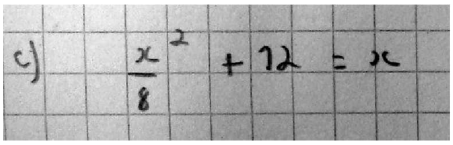


Figura 58. Equação incorreta do Problema C pelo aluno 9N.

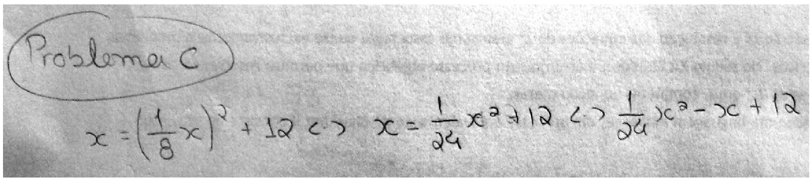


Figura 59. Equação inicial correta do Problema C pelo aluno 9E.

Passados 10 minutos retomei a correção do problema.

Professora: Vamos então retomar a correção. Pelo que vi não avançaram muito mais. Reparem que os macacos estão divididos em dois grupos: a oitava parte ao quadrado brinca num bosque e 12 estão na colina. Qual é o número total de macacos. 9C...

Aluno 9C: x? x é o total.

Professora: O que é x?

Aluno 9C: O número total de macacos.

Professora: Muito bem.

Registei no quadro x: número total de macacos.

Professora: Que informação podemos tirar mais do enunciado?

Aluno 9Q: A oitava parte.

Professora: Como é que escrevo a oitava parte dos macacos?

Silêncio.

Professora: Como é que escrevo a oitava parte de x?

9C: Oito ao quadrado.

Professora: Não.

Alunos não identificados: Vezes oito.

Professora: Também não.

Aluno 9C: A dividir por oito.

Professora: Isso. x sobre oito é a oitava parte de x. Uma de oito. Lamento mas não vou repetir o 5.º ano. Então fica a oitava parte ou um oitavo de x. E fica só assim? Mais?

Aluno 9G: Ao quadrado.

Professora: Muito bem.

Passei a registar no quadro $(\frac{1}{8}x)^2$: macacos a brincar.

Professora: E 12 macacos estão?

Aluno 9J: Na colina.

Registei no quadro, de seguida, 12: macacos na colina.

Professora: Qual é a condição que nos é dada?

Silêncio

Professora: Qual é a condição que nos dão?

O aluno 9G quis responder e para isso pôs o braço no ar.

Professora: Diz aluno 9G!

Aluno 9G: x é igual a $(\frac{1}{8}x)^2$ mais 12.

Professora: Exatamente.

Escrevi então no quadro $x = (\frac{1}{8}x)^2 + 12$.

Professora: Pode-se escrever esta equação na forma?

Aluno 9G: Canónica.

Considerei oportuno recordar uma das regras das potências: $(ab)^2 = a^2b^2$.

Professora: Vamos lá reescrever a equação.

No quadro escrevi uma equação equivalente à obtida.

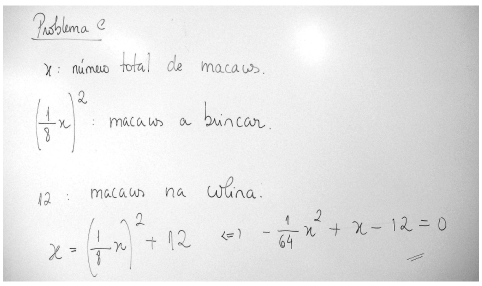


FIGURA 60. Resolução correta do Problema C no quadro.

A 20 minutos do final da aula, propus aos alunos a realização da última parte da tarefa que consistia, depois de apresentar a equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, na demonstração da fórmula resolvente. Para este trabalho foram dadas as várias etapas, de modo a proporcionar a maior autonomia possível nos alunos:

(1) Muda o termo c para o segundo membro da equação;

(2) Multiplica ambos os membros por $4a, a \neq 0$;

(3) Adiciona b^2 aos dois membros;

(4) Fatoriza o primeiro membro;

(5) Se $b^2 - 4ac \geq 0$ podes desembaraçar do quadrado o primeiro membro;

(6) Resolve a equação em ordem a x.

Acompanhei a resolução nos lugares dos alunos tendo detetado maiores dificuldades nas seguintes etapas: (2) e (4).

Senti a necessidade, por parte dos alunos, de rever a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e os casos notáveis da multiplicação, através de uma exposição no quadro, acompanhada de exemplos. Esta situação levou a que a conclusão e correção da demonstração fosse realizada na aula seguinte.

Na aula seguinte registou-se que, de entre os 18 alunos, 9 não fizeram o trabalho proposto para casa, na sua maioria alunos que falhavam com regularidade a execução dos trabalhos de casa. De entre os que fizeram, apenas um concluiu com sucesso o pretendido e, dos restantes, três concluíram todos os passos sugeridos mas com erros, e cinco não realizaram o penúltimo passo em diante, não tento tido sucesso no anterior.

Dadas as características da turma e da proposta de trabalho, solicitei ao aluno que tinha obtido sucesso no trabalho (aluno 9G) que, no quadro, escrevesse a demonstração da fórmula resolvente e, de seguida, expliquei cada etapa. No final senti novamente necessidade de recordar o quadrado do binómio, recorrendo para tal a dois exemplos, ilustrando como passar de um trinómio para o quadrado de um binómio.

CAPíTULO 5

Considerações Finais

Desde a Agenda do NCTM (1980), as questões relacionadas com a resolução de problemas no currículo da Matemática tornaram-se um objeto de discussão e interesse. Em Portugal, Abrantes refere-se à década de 80, do século passado, como aquela em que "(...) artigos, comunicações em encontros, propostas de trabalho e mesmo experiências concretas sobre a resolução de problemas têm surgido a um ritmo crescente." ([**1**], p. 7).

Nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* pode ler-se que "A resolução de problemas não só constitui um objetivo de aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática", ([**45**], p. 57). Esta asserção fica patente no PMEB, que "(...) apresenta ainda diversas orientações metodológicas gerais, com destaque para a necessidade da diversificação de tarefas e dando atenção particular a tarefas que assumam um caráter desafiante (...)" ([**60**], p. 100).

No tema *Números e Operações*, o programa sugere que as tarefas incluam "(...) de forma equilibrada, a resolução de problemas e a exploração e investigação de situações numéricas, bem como exercícios destinados a consolidar aspetos rotineiros da aprendizagem dos números e operações (...)" ([**23**], p.48).

Perante as inovadoras orientações do PMEB, em comparação com o seu antecessor, e para ir de encontro às indicações metodológicas aí descritas, os professores devem procurar repensar as suas práticas letivas. Deste modo, nomeadamente analisando as tarefas e a comunicação, promovem a melhoria do ensino da Matemática e, consequentemente, a melhoria das aprendizagens dos seus alunos.

Esta atitude de mudança começa por uma reflexão pessoal, que se deverá extender a um trabalho conjunto com os seus pares, no seio do grupo disciplinar. Mas, apesar de sentir uma colaboração nas escolas cada vez maior, o meu trabalho, enquanto professora, acaba por se revestir de um caráter isolado dentro da sala de aula, com poucas interferências externas. Esta situação leva a que, para além dos alunos, o professor não tenha um outro olhar sobre as suas aulas que contribua para uma análise crítica e construtiva do seu trabalho. O professor deve então procurar identificar os problemas com que se depara, questionar-se e, por sua vez, procurar meios de encontrar respostas e possíveis soluções. Este trabalho tenderá dessa forma a melhorar a sua prática como docente e a enriquecê-lo profissionalmente.

Ao longo dos últimos anos, fui-me colocando diversas questões que resultaram essencialmente do trabalho desenvolvido na sala de aula e das consequentes reações dos alunos. Na proposta de tarefas do tipo problema, investigação ou exploração, os alunos revelavam uma atitude significativamente distinta quando comparada com a apresentada face à proposta de exercícios. Na maioria das vezes tal refletia-se na pouca predisposição para a realização das tarefas ou pouca iniciativa para começar a sua resolução. Tais resistências levaram-me a questionar sobre *o porquê* e em como eu poderia contribuir para inverter esta realidade. A procura de respostas culminou na realização deste trabalho investigativo, recorrendo à reflexão a partir das narrações multimodais de algumas aulas, feitas no Capítulo 4.

Neste estudo foram propostas seis atividades matemáticas em forma de tarefas, com referências à Matemática pura e à semi-realidade, tipificadas em problemas, investigações e explorações. Na seleção das tarefas procurei que fossem relevantes e significativas para os alunos. Estas tarefas foram aplicadas ao longo do ano letivo 2011/2012, de acordo com os temas da disciplina, indicados para cada ano de escolaridade, e tendo em conta a mobilização das três capacidades transversais à aprendizagem da Matemática, procurando ir de encontro ao propósito principal do ensino para o tema *Números e Operações*. Apresenta-se, na seguinte tabela, a tipificação das mesmas, quanto à dificuldade e à abertura, segundo Ponte em [**55**], bem como as referências de cada uma, segundo Skovsmose em [**78**].

Ano	Tarefa	Tipificação	Referência
7.º	Tarefa 1 – “Voo em V”	Exploração	Semi-realidade
7.º	Tarefa 2 – “Autocarros”	Problema	Semi-realidade
7.º	Tarefa 3 – “Sequência de Fibonacci”	Investigação	Semi-realidade
9.º	Tarefa 1 – “Demonstração I”	Problema	Matemática pura
9.º	Tarefa 2 – “Demonstração II”	Problema	Matemática pura
9.º	Tarefa 3 – “Fórmula resolvente”	Investigação	Matemática pura

TABELA 1. Tipificação das tarefas propostas e as suas referências.

As aulas, onde foram propostas as tarefas mencionadas, foram filmadas, sendo esta a única alteração ao ambiente de sala de aula normalmente desenvolvido com cada turma. As tarefas tiveram como suporte material fotocopiado e o trabalho foi, na sua maioria, desenvolvido em pequenos grupos durante toda uma aula, rotinas estas a que os alunos já estavam acostumados. No que diz respeito à tipologia das tarefas, foi a turma do 7.º ano que mais estava familiarizada com tarefas de caráter mais investigativo e exploratório, atribuído ao facto de ser um ano de escolaridade já abrangido pelo PMEB, cujo manual adotado, [**19**], seguia esta tendência. Para a turma de 9.º ano, ainda ao abrigo do Programa de 1991 e dada a sua caracterização, este tipo de tarefas revelou-se diferente do trabalho que normalmente lhes era proposto.

Apesar de se pretender que estas aulas tivessem um cariz normal, no decurso do processo de ensino-aprendizagem, o facto de serem gravadas criou alguma alteração às rotinas dos alunos. No 7.º ano criou uma grande excitação no início de cada aula, que nalguns alunos aumentou a sua timidez, ao contrário do que aconteceu com a turma do 9.º ano, que levou a uma maior predisposição para a participação oral. No geral, este facto gerou alguma agitação no início de cada aula, rapidamente ultrapassada depois dos procedimentos normais, como a preparação dos materiais e a abertura da lição.

Em cada tarefa, e em vários momentos, aproximei-me da metodologia de resolução de problemas de Pólya, seguindo algumas das suas sugestões. Por exemplo, para ajudar a compreender o pretendido nas tarefas, comecei por ler o enunciado, cabendo depois aos alunos uma nova leitura e início do trabalho. Esta opção teve em conta que, quando é proposta uma atividade, os alunos não a iniciam em simultâneo. Há sempre aqueles que tendem a protelar o início do trabalho. Ao caber ao professor a leitura do enunciado, faz com que toda a turma obtenha a informação ao mesmo tempo, permitindo-me também reforçar alguns aspetos ou enriquecer a tarefa com alguma informação adicional. No 7.º ano, a leitura em voz alta por parte de um aluno não é muitas vezes acompanhada pelos colegas, o mesmo já não se verificando a nível de um 9.º ano. Verifico que no 7.º ano, na leitura em voz alta para toda a turma, os alunos ainda revelam pouca fluência e precisão.

Ainda assim, nem sempre as questões propostas foram inteiramente compreendidas. Para ultrapassar esta dificuldade inicial, intervim através de indagações junto dos alunos e, nalguns casos, auxiliei-os através de desenhos ou esquemas, ilustrativos das situações em causa. Veja-se por exemplo a Tarefa 3 do 9.º ano, "Fórmula Resolvente".

Com o modelo de Pólya como referência, as fases seguintes, conceção de um plano de resolução e execução do mesmo, nem sempre foram claras e sequenciais como sugerido pelo autor. Por exemplo, no 7.º ano, nas Tarefas 2 e 3, "Autocarros" e "Sequência de Fibonacci", a conceção do plano e sua execução parecem estar fundidas numa só, mas com discussões ricas, com vários avanços e retrocessos. Na Tarefa 3 do 9.º ano, ficou clara a falta de definição de um plano. Foi na sua correção que foi discutida e definida uma estratégia de resolução de cada etapa.

A conclusão das tarefas, com exceção da "Demonstração I" e "Demonstração II", deu-se com a sua resolução no quadro. Esta resolução coube-me a mim, ao contrário do que habitualmente faço, quando se tratam de exercícios ou correção dos trabalhos de casa. Quando um aluno resolve uma questão no quadro, para além de não prender a atenção dos colegas, a forma como apresenta os seus raciocínios, estratégias e conclusões, pode deixar de lado os alunos que evidenciaram mais dificuldades, por não entenderem como o colega se organizou no quadro. Uma resolução feita pelo professor permite uma maior organização e explicação, ao alcance de todos os alunos, cuja construção é feita com o contributo de todos, podendo o professor solicitar a participação de algum aluno em particular. Esta prática "(...) tanto em pequenos grupos como em coletivo, é uma via importante para estimular a reflexão dos alunos, conduzir à sistematização de ideias e processos matemáticos (...)" ([**23**], p. 62).

Apesar das resoluções terem sido feitas ou enriquecidas com o contributo dos alunos, depois de obtidas as soluções pretendidas, o trabalho de cada tarefa foi dado por terminado. Não houve assim espaço para outras análises, sendo a reflexão sobre a resolução a fase do modelo de Pólya menos bem conseguida. Foi através das narrações multimodais que pude rever este e todos os acontecimentos da sala de aula, fazendo-me identificar alguns aspetos a ter em conta no futuro. Ressaltou ainda a importância de fazer deste tipo de tarefas uma atividade mais rotineira de modo a promover uma maior autonomia nos alunos, envolvendo-os cada vez mais nas suas aprendizagens, atribuindo-lhes cada vez mais o lugar central em cada aula.

Os aspetos mais específicos, que dizem respeito a cada tarefa e à reflexão sobre a minha prática profissional, são agora analisados.

Tarefa “Voo em V”.

Na leitura do enunciado da tarefa, tratando-se de uma sequência que representava o voo de aves com configuração em “V”, enriqueci a situação em estudo referindo-me a este tipo de voo. Efetivamente, o voo com configuração em “V” poupa energia e, como se refere em [88], “This advantage is probably a principal reason for the evolution of flight formation in large birds that migrate in groups.”.

Esta tarefa foi aplicada no final da unidade, o que provavelmente lhe retirou alguma riqueza, dado que a exploração dos conteúdos abordados já tinha sido feita. Os alunos resolveram muito rapidamente a tarefa que se deveu ao domínio das ferramentas que lhes permitiram ir de encontro ao solicitado, sem a necessidade de uma exploração profunda da sequência numérica.

A dificuldade detetada foi nas duas últimas questões. O objetivo da primeira era escrever a regra em linguagem natural, enquanto a segunda visava traduzir a regra por simbologia algébrica. Como os alunos já tinham trabalhado as expressões algébricas e as passaram a entender como uma regra de formação de uma sequência numérica, não perceberam a distinção entre regra e expressão.

Pode-se considerar então que esta tarefa acabou por se transformar num exercício e não numa exploração, acabando por fazer uma aferição dos conhecimentos já adquiridos e consolidar alguns aspetos, mas que, para este efeito, haveria outras tarefas mais adequadas. No futuro, esta tarefa deverá ser aplicada no início da unidade.

Tarefa “Autocarros”.

Esta tarefa criou uma dinâmica de trabalho em sala de aula muito intensa, em que todos os alunos se sentiram envolvidos. A primeira questão revelou-se muito desafiante e inicialmente os alunos sentiram que seria de fácil resolução. Com o passar do tempo, este entusiasmo foi dando lugar a alguma impaciência que acabou por se revelar, no que à sua resolução diz respeito, ao insucesso da mesma. Interpreto que tal se deveu à falta de compreensão do sentido da divisão e da falta, no passado, de diferentes experiências que envolvessem situações problemáticas com recurso à divisão, em vez do mero treino do algoritmo. De referir que esta turma frequentou o 1.º e o 2.º Ciclos do Ensino Básico ao abrigo do antigo programa.

Penso que as dificuldades reveladas nesta tarefa deixarão de existir num futuro próximo com o trabalho que está a ser desenvolvido com a implementação do PMEB. Nomeadamente a nível do 1.º Ciclo, onde se trabalha a partir do concreto para os abstrato, tendo "(...) como ponto de partida situações relacionadas com a vida do dia-a-dia." ([**23**], p. 13). Veja-se por exemplo que, ao contrário do programa anterior, agora a divisão começa a ser trabalhada logo no primeiro ano de escolaridade, "(...) com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais (...)" ([**23**], p. 15).

A segunda questão desta tarefa, proposta como trabalho de casa, revelou-se bem sucedida. Tal poderá dever-se a, neste caso, se tratarem as noções de múltiplo e mínimo múltiplo em comum. Note-se também que isso se pode dever ao facto de os alunos estarem mais familiarizados com a formulação da questão, uma vez que já tinham sido trabalhadas situações similares.

Há ainda a observar a transcrição da resolução da primeira questão desta tarefa (Fig. 23). No momento que detetei o erro limitei-me a chamar à atenção da incorreção cometida e da falta de concentração do aluno. Poderia ter aproveitado para questionar o aluno, nomeadamente, sobre o resultado de $5+13+17$ e se correspondia à igualdade $1105 = 5 + 13 + 17$ registada. Penso agora que tal iniciativa iria ter maior repercussão na aprendizagem do aluno em causa. De facto, teria sido o aluno a detetar o erro e não a autoridade do professor a corrigi-lo.

Tarefa "Sequência de Fibonacci".

Esta tarefa proporcionou uma aula muito entusiasta com muito trabalho de colaboração entre os elementos de cada grupo. Apesar de nem todos os grupos terem conseguido obter sucesso na resposta às questões colocadas, as interações em pequeno grupo foram muito ricas.

Fui procurando observar o desenvolvimento de cada grupo, constatando que todos estavam muito empenhados na tentativa de encontrar a solução ao solicitado. Destaca-se que os alunos estavam sempre muito convictos das suas estratégias mas revelavam dificuldades em as explicar. Ao tentarem fazê-lo, apercebi-me que dentro do mesmo grupo havia pontos de vista diferentes para o mesmo esquema apresentado, o que gerou momentos de confusão entre os vários elementos. Esta situação levou a que eu tivesse dificuldade em auxiliar os alunos na correção dos seus procedimentos acabando, nalguns casos, por sugerir o reinício da resolução. Noutros foi fácil detetar os erros cometidos, como na resolução da Fig. 32. Aqui, onde é identificável o número de casais de coelhos após um, dois e três meses, verifica-se que, no terceiro mês, os alunos não acrescentaram mais um casal de coelhos bebés, descendente do primeiro casal da sequência.

Tendo em conta o trabalho desenvolvido por cada grupo e a todos os retrocessos ocorridos, o tempo que restou da aula foi dedicado à construção da sequência em grande grupo, através da fixação de casais de coelhos num placar. Tendo assim sido concluída a aula, não considerei necessário voltar à tarefa na aula seguinte.

Numa nova aplicação desta tarefa, formularia as questões de forma diferente. Ou seja, em vez de uma questão única – Ao fim de cinco meses, admitindo que não morre nenhum coelho, quantos casais de coelhos haverá no recinto? E ao final de sete meses? – subdividiria em três ou mais questões independentes e começaria por questionar quantos casais de coelhos haveria ao fim de um mês. Eventualmente poderia ser interessante, nos grupos que não estivessem a conseguir organizar o pensamento após várias tentativas, facultar um esquema que os auxiliasse. Um exemplo de esquema poderia ser o que se encontra na tabela seguinte, que se apresentaria não preenchido mas com a sugestão de representar cada casal de coelhos adultos e cada casal de coelhos bebés por $\bullet$ e $\circ$, respetivamente.

Mês	Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4	Mês 5	Mês 6	Mês 7
	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
			$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
				$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
					$\circ$	$\bullet$	$\bullet$
					$\circ$	$\bullet$	$\bullet$
						$\circ$	$\bullet$
						$\circ$	$\bullet$
						$\circ$	$\bullet$
							$\circ$
							$\circ$
							$\circ$
							$\circ$
							$\circ$
Total de coelhos	1	1	2	3	5	8	13

TABELA 2. Adaptação do esquema em [**5**], p. 153, onde cada bola preta representa um casal de coelhos adultos e cada bola branca indica um casal de coelhos bebés.

Tarefa “Demonstração I”.

Esta tarefa permitiu aos alunos o contacto com aspetos da Matemática para os quais não estavam sensibilizados, nomeadamente a importância das demonstrações na evolução da mesma e das condições. Este nível de abtração levou a que em vários momentos tivesse que recorrer a exemplos concretos para melhor compreensão.

A principal dificuldade detetada foi a falta de alguns pré-requisitos que levaram a desvios da demonstração na tentativa de ultrapassar essas lacunas, por exemplo, na referência à fração irredutível. Neste caso, quando foi introduzida uma fração irredutível não concreta e foram referidos os números sem fatores primos comuns, senti que havia oportunidade para explorar a noção de números primos entre si. Mas as dúvidas que emergiram nalguns alunos levou a que a exploração fosse feita noutro caminho, como a explicitação de frações equivalentes.

Considerei a tarefa determinante para estes alunos e a repetir em próximos anos. Para prevenir algumas dúvidas que surgiram nesta aula, será importante, numa aula introdutória a esta tarefa, dedicada à exploração de diferentes formas de realizar uma demonstração, reforçar alguns conhecimentos determinantes para a demonstração em causa. De facto, para turmas que revelem maiores dificuldades, será fundamental trabalhar antecipadamente alguns conhecimentos, nomeadamente, noção de número racional, mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum de dois números, frações equivalentes, simplificação de frações e regras operatórias de potências.

De realçar ainda o processo prévio de conjeturar que os alunos experenciaram. Este ocorreu como etapa prévia à tarefa em questão e antecedeu a demonstração, por absurdo, da propriedade: Se $p \in \mathbb{N}$ é tal que p^2 é par então p é par. No futuro procurarei criar mais oportunidades semelhantes a esta, pois “O raciocínio matemático é outra capacidade fundamental, envolvendo a formulação e o teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração.” ([**23**], p. 8).

Tarefa “Demonstração II”.

Na implementação da tarefa da segunda demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, devido a indisponibilidade de meios para fazer o registo áudio da resolução da tarefa, só tomei notas de campo ao longo da aula e, posteriormente, recolhi as resoluções dos alunos de onde destaquei os aspetos mais relevantes. Daí a narração multimodal ter sido mais curta para esta tarefa.

Aqui os alunos conseguiram fazer mais passos sem a minha ajuda por já terem a experiência da demonstração anterior. Foram mais autónomos, limitando-me a auxiliá-los nos seus lugares e a fazer alguns esclarecimentos no quadro, como a explicação das fatorizações de p e q, e o reforço das três últimas afirmações: "$2q^2$ tem um número total ímpar de fatores"; "p^2 tem um número total par de fatores" e "$2q^2 = p^2$".

Como já referi, demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ será uma tarefa a repetir em próximos anos, mas considero que deverei apenas propor uma. Parece-me que a primeira demonstração permite mais explorações do que a segunda, optando por essa para voltar a implementar em sala de aula. A segunda demonstração, matematicamente mais elegante mas menos clara para esta faixa etária, poderia ser proposta, mas a um grupo de alunos com melhor desempenho, como tarefa para realizar em casa e a explorar numa aula de apoio.

No PMEB pode ler-se que "Os alunos com melhor desempenho matemático podem analisar uma demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$." ([**23**], p. 49), mas penso que esta demonstração deverá ser proposta a todos os alunos. Com maior ou menor autonomia, e mesmo com muitas dificuldades, este tipo de tarefa trará sempre benefícios para os alunos. Nomeadamente, contacto com o método de redução ao absurdo, oportunidades de exploração e, com a propriedade auxiliar, para conjeturar.

Tarefa "Fórmula Resolvente".

A última tarefa, embora não estando enquadrada no tema *Números e Operações*, foi introduzida neste trabalho por se tratar de um conjunto de três problemas históricos que os alunos exploraram individualmente.

Refletindo sobre a narração multimodal associada a esta tarefa, apercebi-me que recorro a expressões imprecisas na resolução de equações. Pensando que estou a facilitar o processo de resolução, disse "Passa para o segundo membro", em vez de aplicar corretamente o princípio da multiplicação, devendo dizer "Dividir os dois membros por" ou "multiplicar os dois membros por". No presente ano letivo encontro-me a lecionar ao 7.º ano e esta reflexão conduziu a que, no trabalho agora desenvolvido, tenha maior cuidado na linguagem utilizada na resolução de equações.

No primeiro problema proposto nesta tarefa, foi importante ver que nem todas as soluções matemáticas de uma equação são soluções de um problema resolvido com essa equação e num certo contexto. Ainda assim, poderia ter explorado mais a solução algébrica -4 pois poderá ter havido alunos que não tenham entendido o porquê de apenas se considerar o número 4 como solução do problema. Nesta sequência teria sido também interessante, para além de dizer a resposta final (base $= 4$), ver que o resultado a que se chegou fazia sentido, ou seja, segundo a quarta etapa do modelo de Pólya, validar o resultado obtido. Podia ter feito:

base $= x = 4$

altura $= \frac{3}{4}x = 3$

3 é, de facto, $\frac{3}{4}$ (3 das 4 partes) de 4.

É bom habituar os alunos a fazer este tipo de verificações para que sejam críticos em relação aos resultados obtidos.

Já na última parte da tarefa, onde pretendia que os alunos demonstrassem a Fórmula Resolvente, nomeadamente no quarto passo, onde se lê "Fatoriza o primeiro membro", pretendia que os alunos passassem de $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$ para $(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$. Em alunos com melhor desempenho, poderia acontecer que, neste passo, apresentassem $4a^2(x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = -4ac + b^2$ onde $-\frac{b}{2a}$, com $a \neq 0$, é a raiz de multiplicidade algébrica 2 do polinómio $4a^2x^2 + 4abx + b^2 \in \mathbb{R}[x]$. Para evitar que tal acontecesse, teria sido melhor que, no quarto passo, sugerisse "Escreve sob a forma de uma expressão de caso notável". Por outro lado, esta alternativa de formulação, mais objetiva, orientaria melhor os alunos para concretizarem o que lhes era solicitado.

Os alunos, na sua generalidade, revelaram pouca iniciativa e empenho na resolução desta tarefa. Apesar de ser importante dar tempo aos alunos para eles tentarem começar as tarefas propostas, eu deveria ter insistido mais, junto de cada aluno, para que iniciasse uma tentativa de resolução e, eventualmente, indicar pistas para um caminho. Estas poderiam ter resultado de uma melhor comunicação na sala de aula, através da colocação de questões adequadas para as mesmas surgirem.

Mais uma vez, nesta turma, revelaram-se algumas dificuldades em conteúdos anteriores (casos notáveis e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição). Se assim não fosse, penso que a última parte da tarefa poderia ter sido bem sucedida e concluída na aula.

Para além da análise reflexiva das narrações multimodais, onde me foi possível percorrer os vários acontecimentos da sala de aula, e de onde resultaram diversas conclusões, retiram-se outras consequências de um trabalho com este cariz investigativo.

A minha prática profissional fica também marcada pelo trabalho de pesquisa feito em bibliografia de referência. Esta tarefa melhorou a minha perceção sobre todo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, e promoveu a construção do meu conhecimento sobre o mesmo.

Para Ponte, a investigação do professor sobre a sua prática "(...) pode contribuir fortemente para (...) o desenvolvimento organizacional das respetivas instituições, bem como gerar importante conhecimento sobre os processos educativos, útil para outros professores, para os educadores académicos e para a comunidade em geral." ([**53**], p. 13). Considero por isso que, para além deste trabalho individual, é igualmente importante, introduzir nas escolas novos conhecimentos resultantes de investigações, promovendo a mudança de práticas, a fim de melhorar a eficácia do trabalho docente e, consequentemente, a qualidade do ensino. Cabe-me continuar a contribuir, agora com novos conhecimentos, para essa melhoria.

O desenvolvimento deste trabalho também implicou uma significativa redescoberta sobre a História da Matemática, já refletida no presente ano letivo. No âmbito da interdisciplinariedade entre Matemática, História e Artes e Técnicas do Fogo, foi proposto aos alunos a elaboração de um trabalho, em barro, com numeração no sistema de escrita babilónico, ou seja, em escrita cuneiforme. Nestas placas de barro os alunos escreveram o ano letivo, o número de aluno e o ano de escolaridade (Fig. 1). Da minha parte, para além de ter dedicado uma aula de 45 minutos a uma breve abordagem histórica sobre os sistemas de numeração dos egípcios, babilónios e gregos, também participei numa das oficinas, onde reproduzi a imagem da Fig. 6 do Capítulo 2, (Fig. 2).

Figura 1. Placa em barro, com números representados em escrita cuneiforme.

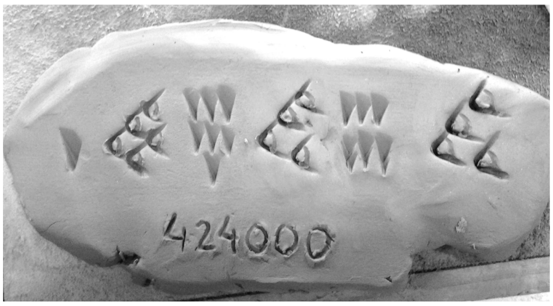


Figura 2. Placa em barro, com o número 424000 representado em escrita cuneiforme.

Finalizado este trabalho, sinto necessidade de continuar a investigar a temática das tarefas em sala de aula, bem como vertentes indissociáveis (seleção, implementação, comunicação, ...). Para além da maior importância que passei a atribuir a este aspeto das práticas letivas e à investigação em Educação Matemática, tal motivação decorre também de, no presente ano letivo, trabalhar com alunos com um excelente desempenho na disciplina de Matemática, sempre muito recetivos a tarefas que não são meros exercícios.

Mas, ao contrário das turmas onde esta investigação incidiu, com apenas 18 alunos, atualmente leciono a turmas com 29 alunos, alguns dos quais com muitas dificuldades. É para estes que são, prioritariamente, dirigidas as estratégias de melhoria de resultados. Neste contexto, o professor tem poucas oportunidades para promover as aprendizagens daqueles que revelam melhor desempenho sem, evidentemente, negligenciar os demais.

Este desafio tornar-se-á maior tendo em conta que o Ministério da Educação e Ciência apresentou em abril de 2013 uma proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico, a entrar em vigor no ano letivo 2013/2014. Apesar deste ministério a considerar um reajustamento do PMEB, a APM opõe-se à revogação deste. No que diz respeito à resolução de problemas, a APM refere, através de um parecer, que nesta proposta "(...) menoriza-se o papel fundamental que esta atividade pode assumir na aprendizagem matemática, contrariando perspetivas curriculares internacionais e nacionais. (...) A formulação proposta adota uma visão redutora da resolução de problemas que deixa de fora elementos importantes da experiência matemática." ([**10**], p. 2 e 3).

Fica assim mais uma questão em aberto, que será merecedora de especial atenção.

Bibliografia

[1] Abrantes, P. (1989), Um (bom) problema (não) é (só)..., *Educação e Matemática*, (8), 7–10 e 35.

[2] Aczel, A. D. (2007), *The artist and the mathematician*, High Stakes Publishing, Spain.

[3] Aires, L. M. (2010), *Uma História da Matemática. Dos Primeiros Agricultores a Alan Turing, dos Números ao Computador*, Edições Sílabo, Lisboa.

[4] Almeida, F. M. (2007), *Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe*, Tese de Mestrado, Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, `http://www.fc.up.pt/fcup/contactos/teses/t_000369009.pdf`, página digital consultada em 2011.

[5] André, C. e Ferreira, F. (2000), *Matemática Finita*, Universidade Aberta, Lisboa.

[6] APM (1991), *Gabinete técnico da APM*, `http://www.apm.pt/portal/index_loja.php?id=21650&page=17&special_args=%7Bvalues%7Dfamilia_id%3D33657%7B%2Fvalues%7D`, página digital consultada em 2013.

[7] APM (2007), *Parecer da APM – Programa de Matemática do Ensino Básico*, `http://www.apm.pt/files/_Parecer_PMEB_APM_470523a69e366.pdf`, página digital consultada em 2012.

[8] APM, *Reflexão Critica sobre o Programa de Matemática do 3º Ciclo*, `http://www.apm.pt/apm/posicoes.htm`, página digital consultada em 2012.

[9] APM (2012), *Metas Curriculares, Ensino Básico, Matemática*, `http://m.publico.pt/Detail/1554591`, página digital consultada em 2012.

[10] APM (2012), *PARECER DA DIREÇÃO DA ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A PROPOSTA DE PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO BÁSICO*, `http://www.apm.pt/files/_PARECER_DirAPM_51a9dad0e1549.pdf`, página digital consultada em 2013.

[11] Basso, M. V. de A. *et al.* (s.d.), `http://www.pead.faced.ufrgs.br/sites/publico/eixo4/matematica/videos/numeros/numeros_operacoes/complementar_2.htm`, página digital consultada em 2011.

[12] Bivar, A., Grosso, C. e Timóteo, C. (2012), *Metas Curriculares, Ensino Básico, Matemática*, `http://www.portugal.gov.pt/media/643611/prop_metas_eb_matematica_vf.pdf`, página digital consultada em 2012.

[13] Bogdan, R. e Biklen, S. (2010), *Investigação qualitativa em educação*, Porto Editora, Porto.

[14] Boyer, B. C. (1996), *História da Matemática*, Edgard Blucher, São Paulo.

[15] Caraça, B. de J. (1975), *Conceitos fundamentais da Matemática*, Gráfica Brás Monteiro Ltda, Lisboa.

[16] Caraça, B. de J. (1978), *Bento de Jesus Caraça: conferências e outros escritos*, Tipografia António Coelho Dias, Lisboa.

[17] Carvalho e Silva, J. (1997), http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/histmatprogr2.html, página digital consultada em 2012.

[18] Conway, J. (2005), The power of mathematics, *Power*, Cambridge, New York, 36–50.

[19] Costa, B. e Rodrigues, E., (2010), *Novo Espaço 7*, Porto Editora, Lisboa.

[20] DEB (1991), *Programa de Matemática - Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem*, Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação, http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/data/ensinobasico/Documentos/Programas/programa_matematica03.pdf, página digital consultada em 2011.

[21] DEB (2001), *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais*, Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação, http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio_simbolopercentagem_20Recursos2/Attachments/84/Curriculo_Nacional.pdf, página digital consultada em 2012.

[22] DEB (2008), *Novo Programa de Matemática – 1º, 2º e 3º Ciclos - Percursos temáticos de aprendizagem*, Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação, http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Percursos_aprendizagem.pdf, página digital consultada em 2010.

[23] DEB (2008), *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação, http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf, página digital consultada em 2012.

[24] DGE (2012), *Percursos temáticos de aprendizagem*, http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71#i, página digital consultada em 2012.

[25] Ebbinghaus, H.-D. *et al.* (1995), *Numbers*, Springer, New York.

[26] Elena (2007), http://cleoppatra.com/category/escritura, página digital consultada em 2011.

[27] Estrada, M. *et al.* (2000), *História da Matemática*, Universidade Aberta, Lisboa.

[28] Fauvel, J. (1997), A utilização da História em Educação Matemática, *Relevância da História no Ensino da Matemática – Caderno 1 do GTHEM*, APM, Lisboa, 15–20.

[29] Fibonacci Association, *The Fibonacci Quarterly*, http://www.fq.math.ca/index.html, página digital consultada em 2012.

[30] Fonseca, H., Brunheira, L. e Ponte, J. P. da, (1999), As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática, *Actas do ProfMat 1999*, 91-101, APM, Lisboa.

[31] Frade, J. (s.d.), http://matedanse.no.sapo.pt/pagina3A.htm, página digital consultada em 2011.

[32] Grupo Porto Editora (s.d.), *Ficha de How To Solve It*, http://www.wook.pt/ficha/how-to-solve-it/a/id/112172, página digital consultada em 2013.

[33] Guimarães, H. (2011), Depois da Matemática Moderna: passos do discurso curricular sobre a resolução de problemas em Portugal, *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática*, 291–300, APM, Lisboa.

[34] Guimarães, H. (2012), *As novas metas curriculares de Matemática para o Ensino Básico – algumas observações críticas*, http://www.apm.pt/files/200299_Henrique_Guimaraes_5002ec5575e32.pdf, página digital consultada em 2012.

[35] Guimarães, H. M. e Matos, J. M. (1991), *A pretexto da Reforma*, http://www.apm.pt/portal/index.php?id=29466&rid=23944, página digital consultada em 2012.

[36] Holz, A. V. (2010), *O Enigma de Fermat. Três séculos de desafio à Matemática*, RBA, Barcelona.

[37] Katz, V. (2010), *História da Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[38] Kilpatrick, J. (2009), Programa de Matemática do Ensino Básico: O olhar de um especialista internacional em currículo de Matemática, *Educação e Matemática*, (105), 50–52.

[39] Laczkovich, M. (2001), *Conjecture and Proof*, The Mathematical Association of America, Washington, DC.

[40] Lagarto, M. (2008), *História da Matemática Árabe*, http://www.malhatlantica.pt/mathis/arabes/arabes.htm, página digital consultada em 2011.

[41] Lopes, J. B. *et al.* (2010), *Investigação sobre a Mediação de professores de Ciências Físicas em sala de aula*, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

[42] Mastin, L. (2010), *20TH CENTURY MATHEMATICS - WEIL*, http://www.storyofmathematics.com/20th_weil.html, página digital consultada em 2012.

[43] Menezes, L. e Carreira, S. (2009), Números: Desenvolvimento curricular e tecnologia, *Actas do XIX EIEM*, SEM-SPCE, editores C. Costa *et al.*, 1–14.

[44] NCTM (1980), *An Agenda for Action. Recommendations for School Mathematics of the 1980s*, http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17278, página digital consultada em 2013.

[45] NCTM (2007), *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, APM, Lisboa.

[46] Neves, E. F. (2007), *Episódios da História da Matemática para o Ensino*, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa.

[47] Nogueira, J. E. *et al.* (2004), *Contar e fazer contas – Uma introdução à Teoria dos Números*, Gradiva, Lisboa.

[48] O'Connor, J. J. and Robertson, E. F. (1996-2009), *The MacTutor History of Mathematics archive*, www-history.mcs.st-and.ac.uk, página digital consultada em 2012.

[49] Pasqualotti, A. (1998), http://usuarios.upf.br/~pasqualotti/hiperdoc/matematica.htm, *Contando a história da Matemática - a invenção dos números*, página digital consultada em 2011.

[50] Pólya, G. (1945), *How to solve it*, tradução de parte do livro por Ponte, J. P. da, Princeton, Princeton University Press, http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/polya%2077.pdf, página digital consultada em 2012.

[51] Ponte, J. P. da (1993), A Educação Matemática em Portugal: Os Primeiros Passos, *Quadrante*, 2 (2), 95–126.

[52] Ponte, J. P. da (2002), *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?*, Texto de uma Conferência realizada no Seminário sobre "O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas", promovido pelo Conselho Nacional de Educação.

[53] Ponte, J. P. da (2002), Investigar a nossa própria prática, In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, APM, Lisboa, 5–28.

[54] Ponte, J. P. da (2003), Investigar, ensinar e aprender, *Actas do ProfMat 2003*, 25–39.

[55] Ponte, J. P. da (2004), Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional, In E. Castro & E. Torre (Eds.), *Investigación en educación matematica*, Universidad da Coruña, Coruña, 61–84.

[56] Ponte, J. P. da e Serrazina, L. (2004), Práticas profissionais dos professores de Matemática, *Quadrante*, 2 (13), 51–74.

[57] Ponte, J. P. da (2004), Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática, *Educar em Revista*, (24), 37–66.

[58] Ponte, J. P. da (2005), Gestão curricular em Matemática, In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, APM, Lisboa, http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf, página digital consultada em 2013.

[59] Ponte, J. P. da (2006), Números e álgebra no currículo escolar, In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*, Lisboa, SEM-SPCE, 5–27.

[60] Ponte, J. P. da (2009), O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico, *Interacções*, 5 (12), 96–114.

[61] Ponte, J. P. da e Serrazina, L. (2009), O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança, *Educação e Matemática*, (105), 2–6.

[62] Ponte, J. P. da *et al.* (2006), *Programas de matemática no 3º ciclo do ensino básico: um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal*, Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa, Lisboa.

[63] Ponte, J. P. da, Matos, A. e Branco, N. (2012), *SEQUÊNCIAS E FUNÇÕES – Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo, 7.º ano*, http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/023_Sequencia_Sequencias_e_Funcoes_NPMEB_3c7.pdf, página digital consultada em 2012.

[64] Ponte, J. P. da *et al.* (2012), *Sobre as Novas Metas Curriculares de Matemática*, http://www.apm.pt/files/_parecer_metas_4ffc0d6933616.pdf, página digital consultada em 2012.

[65] PRISTEM (s.d.), *Bourbaki*, http://matematica.unibocconi.it/articoli/bourbaki, página digital consultada em 2012.

[66] Professores das turmas piloto do 9.º ano de escolaridade (2011), *Equações do 2.º grau a uma incógnita – Proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano - 3.º ciclo*, http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/063-cadeia-Equa%C3%A7%C3%B5es-2%20%C2%BAgrau.pdf, página digital consultada em 2012.

[67] Ramalho, G. (2002), *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses, Pisa 2000 – Programme for International Student Assessment*, http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33&fileName=conceitos_literacia_matematica.pdf, página digital consultada em 2012.

[68] Reis, F. (2003), *Sebastião e Silva (1914-1972)*, http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/p22.html, página digital consultada em 2012.

[69] Rosa, R. (2001), *Bento de Jesus Caraça. Um Homem Para Todos os Tempos*, http://resistir.info/rui/bj_caraca.html, página digital consultada em 2012.

[70] Rosen, K. (1999), *Elementary Number Theory and its applications*, Addison-Wesley, United States of America.

[71] Santos, C., Neto, J. e Silva, J. (2007), *A Álgebra + Jogo Alquerque*, Edimpresa, Lisboa.

[72] Santos, J. C. (2011), *Ars Magna*, http://pt.wikipedia.org/wiki/Ars_Magna, página digital consultada em 2011.

[73] Santos, R. J. (2012), *Introdução ao LaTeX*, http://www.mat.ufmg.br/~regi/topicos/intlat.pdf, consultada em 2012.

[74] Schoenfeld, A. (1996), Porquê toda esta agitação acerca da resoluçao de problemas?, In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática*, APM, Projeto MPT, Lisboa, 61–72.

[75] Serrazina, L., *Metas de Aprendizagem, Ensino Básico - 3.º Ciclo/Matemática*, Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação, http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/ensino-basico/metas-de-aprendizagem/metas/?area=7&level=6, página digital consultada em 2012.

[76] Serrazina, L. (s.d.), *RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS*, http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Problemas_texto_Coord.pdf, página digital consultada em 2013.

[77] Silva, J. C. (s.d.), *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva*, http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html, página digital consultada em 2012.

[78] Skovsmose, O. (2001), Cenários para investigação, In D. Moreira (Ed.), *Matemática e comunidades: a diversidade social no ensino-aprendizagem da Matemática*, Lisboa, Sociedade Portuguesa de Ciências da educação e Instituto de Inovação Educacional, 26–40.

[79] SPM (2008), *Parecer da APM – Programa de Matemática do Ensino Básico*, http://www.spm.pt/files/Microsoft%20Word%20-%20ParecerSPM_ProgramaBasico_Jan2008(2).pdf, página digital consultada em 2012.

[80] SPM (2010), *PARECER DA SPM SOBRE O PROJECTO DE METAS DE APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO BÁSICO*, http://www.spm.pt/files/outros/parecer_metas20100705.pdf, página digital consultada em 2012.

[81] SPM (2012), *PARECER DA SPM SOBRE O DOCUMENTO METAS CURRICULARES – MATEMÁTICA – ENSINO BÁSICO* http://www.spm.pt/files/outros/Metas-parecer-GEBS-23jul2012.pdf, página digital consultada em 2012.

[82] SPIEM (2012), *Parecer sobre o documento "Metas Curriculares para o Ensino Básico - Matemática"*, http://www.apm.pt/files/200299_SPIEM_PARECER_FINAL_METAS_CURRICULARES_500ebf3b9e854.pdf, página digital consultada em 2012.

[83] Struik, D. J. (1997), *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa.

[84] Taylor, R. and Wiles, A. (1995), Ring theoretic properties of certain Hecke algebras, *Annals of Mathematics*, 141(3), 553–572.

[85] Teixeira, P. (2012), *As novas metas curriculares de Matemática para o Ensino Básico – algumas observações críticas.* http://www.apm.pt/files/200299_Paula_Teixeira_5002eb556a6b8.pdf, página digital consultada em 2012.

[86] Valente, W. R. e Matos, J. M. (2010), *A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos*, Unidade de Investigação, Educação e Desenvolvimento, Lisboa, 1–8.

[87] Vasconcellos, F. A. (2009), *História das matemáticas na antiguidade*, Associação Ludus, Lisboa.

[88] Weimerskirch, H. *et al.* (2001), *Energy saving in flight formation*, http://www.nature.com/nature/journal/v413/n6857/abs/413697a0.html, página digital consultada em 2013.

[89] Wiles, A. (1995), Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Annals of Mathematics*, 141(3), 443–551.

Índice Remissivo

Índice de Autores

Anexos

Anexo I - Tarefa: “Voo em V”

ESCOLA BÁSICA INTEGRADA DE MIRAFLORES

Ano Letivo 2011/2012

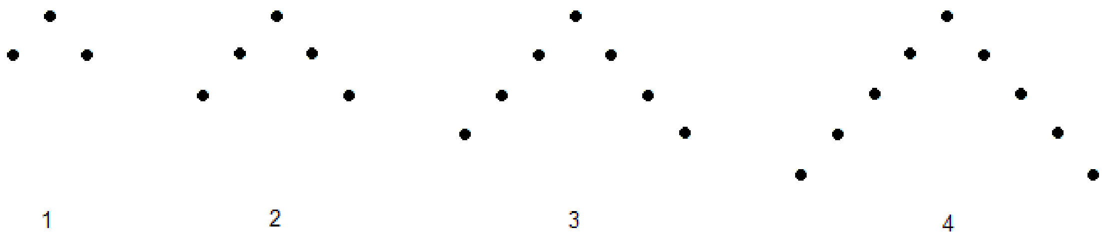
Tarefa – Matemática – 7º ano

Prof.ª: Marta Filipe   Nome: ______________________________ n.º ____ Turma ____

Voo em “V”

Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em “V”. Diversas equipas de cientistas têm investigado esta organização, procurando compreender as possíveis vantagens para o voo das aves e dos aviões.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os quatro primeiros termos:



Responde às perguntas seguintes, apresentando o teu raciocínio por palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

a) Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?
b) Quantos pontos tem a 100.ª figura (termo de ordem 100) desta sequência?
c) Existe, nesta sequência, alguma figura com 86 pontos? Se existir, indica a ordem que lhe corresponde.
d) Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.
e) Escreve uma regra que permita determinar o número de pontos de qualquer figura desta sequência.
f) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

Anexo II - Tarefa: “Autocarros”

Tarefa – Matemática – 7º ano

Profª.: Marta Filipe Nome: ____ n.º ____ Turma ____

Autocarros

1. A empresa City Express une as cidades de Lisboa e Covilhã numa linha regular de autocarros. Para evitar esperas desnecessárias aos seus passageiros, decidiu colocar uma máquina de venda automática de bilhetes na estação de Sete Rios (Lisboa).
Se a máquina vender unicamente bilhetes para o trajeto Lisboa-Covilhã e vice-versa, calcula qual é o preço do bilhete, sabendo que custa mais de 1€ e que em dois dias consecutivos o total de vendas da máquina foi de 1105 e 1482 euros, respetivamente.

2. Da central de camionagem de Sete Rios partem duas linhas de autocarros, a primeira parte a cada 12 minutos e a segunda a cada 20 minutos.
Sabe-se que às 6 horas partem, em simultâneo, dois autocarros, um de cada linha.

a. A que horas volta a coincidir a partida dos autocarros das duas linhas?

b. Quantos autocarros terão partido de cada linha até às horas indicadas em **a.**?

Anexo III - Tarefa: "Sequência de Fibonacci"

Tarefa – Matemática – 7º ano

Prof.ª: Marta Filipe Nome: ____ n.º ____ Turma ____

Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa, também conhecido por Fibonacci (1180-1250, aproximadamente), foi um comerciante e matemático italiano. O pai era mercador com negócios no norte de África, o que fez com que Fibonacci tivesse oportunidade de viajar muito, ficando assim a conhecer os métodos matemáticos árabes e os números indo-árabes.

Em 1202, Fibonacci acabou de escrever a obra *Liber Abaci* (Livro do Ábaco) onde introduziu os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e como operar com eles. No livro mencionado surge um problema que se tornou famoso: o problema dos casais de coelhos. O enunciado original do problema é: "Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Tarefa:

Supõe que se coloca um casal de coelhos num recinto do qual não podem sair. No primeiro mês de vida, o casal de coelhos é ainda muito novo para se reproduzir. A partir do segundo mês, este casal torna-se fértil e dá origem a um novo casal (macho e fêmea) que nasce no mês seguinte. Este processo repete-se todos os meses com cada casal de coelhos.

Ao fim de cinco meses, admitindo que não morre nenhum coelho, quantos casais de coelhos haverá no recinto?

E ao final de sete meses?

Obs.: Usa, para te auxiliar, os recortes de coelhos.

Anexo IV - Tarefa: “Demonstração I”

Tarefa – Matemática – 9º ano

Prof.ª: Marta Filipe Nome: ______________________________ n.º ____ Turma ____

Demonstração I

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Proveniente de uma família humilde, Gauss desde cedo revelou ser uma criança prodígio.

Já ouviste na aula de Matemática um episódio revelador de como, ainda muito jovem, Gauss já dominava com facilidade os números.

O professor de Gauss, quando este tinha cerca de dez anos, propôs à turma o seguinte problema: "Escrevam todos os números de 1 a 100 e depois vejam quanto dá a sua soma." Gauss, em pouco tempo, deu a resposta (5050) e explicou como a tinha obtido.

Recordando esta estória descreve aqui o raciocínio levado a cabo por Gauss.

Os primeiros resultados da investigação de Gauss foram publicados, em 1801, no livro intitulado **Disquisitiones Arithmeticae.** Neste trabalho Gauss provou alguns teoremas donde se destaca o **Teorema Fundamental da Aritmética** que diz:

"Todo o número natural maior que 1 pode ser escrito de uma e uma só maneira como produto de números primos, com os fatores escritos por ordem não decrescente".

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/gauss/gauss.htm

Os resultados que usas na Matemática foram descobertos e provados por alguém, normalmente, um matemático que se tornou famoso. O Teorema Fundamental da Aritmética é um exemplo disso. É através de alguns teoremas que se provam outros teoremas ou propriedades.

“A raiz quadrada de 2 é um número irracional.”

Demonstração:

Vamos recorrer ao método de redução ao absurdo.

Suponhamos que a raiz quadrada de 2 não é ___________________________________, ou seja, é ___________________________.

Se raiz quadrada de dois é um número racional, então pode escrever-se na forma ____________ __________________________________.

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ em que $a,b \in Z$ não têm nenhum fator em comum e $b \neq 0$.

Vamos analisar esta fração, isto é, a natureza do numerador (a) e do denominador (b).

Para nos desfazermos do símbolo de raiz, na igualdade precedente, elevamos ambos os membros ao quadrado:

Aplicando as propriedades das potências fica:

Reduzindo todos os termos da equação ao mesmo denominador obtemos:

Recorda:

Números pares são todos os números escritos na forma $p=2k$.

Números ímpares são todos os números escritos na forma $i=2k+1$, $k \in Z$.

Que conclui sobre a paridade de a^2?

a^2 é ____________________________________.

No separador “Teoremas e demonstrações” do teu caderno diário, provámos uma propriedade sobre os números pares. Descreve-a aqui.

____

____

Tendo em conta esta propriedade, que concluis sobre a paridade de a?

a é ___________________________________.

Se a é par então pode ser escrito na forma $a =$_____.

Substituindo em $2b^2 = a^2$,

ficamos com ____________________________.

Desenvolvendo a potência chega-se a

$2b^2 = 4t^2$

e, dividindo ambos os membros das igualdade por 2,

Que concluis sobre a paridade de b?

b _______________________________________.

Mas sendo a e b números pares, ____ é um fator comum a a e a b, pelo que a fração $\frac{a}{b}$ não é ______________________, o que contradiz a nossa hipótese.

Logo a raiz quadrada de 2 não é ________________.

Assim concluímos que ____.

Anexo V - Tarefa: “Demonstração II”

Tarefa – Matemática – 9º ano

Prof.ª: Marta Filipe Nome: ______________________________ n.º ____ Turma ____

Demonstração II

Na Tarefa "Demonstração I" ficaste a conhecer o Teorema Fundamental da Aritmética, provado por Gauss no livro Disquisitiones Arithmeticae. Na mesma demonstraste que a raiz quadrada de 2 é um número irracional.

Muitas vezes há mais do que uma demonstração para um resultado!

Vais descobrir agora como se pode utilizar o Teorema Fundamental da Aritmética para demonstrar que raiz de 2 é irracional.

Lê atentamente e completa os espaços na demonstração (incompleta) subsequente.
Mais uma vez vamos recorrer ao método de redução ao absurdo.

"A raiz quadrada de 2 é um número irracional."

Demonstração:
Pelo método de redução ao absurdo, suponhamos que ___________________________
____.

Se raiz quadrada de dois é um número racional, então pode escrever-se na forma:

$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ em que $p,q \in Z$ não têm nenhum fator em comum e $q \neq 0$.

A partir de $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, chega à igualdade $2q^2 = p^2$:

Transcreve aqui o Teorema Fundamental da Aritmética (ver Tarefa "Demonstração I"):
____
____.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, p e q podem ser escritos como

____

____.

Procura escrever a afirmação anterior em linguagem matemática.

$p =$

$q =$

De agora em diante, considera a seguinte notação para as fatorizações de p e q:

$$p = \underbrace{p_1 \cdot p_1 ... p_1}_{t_1} \cdot \underbrace{p_2 \cdot p_2 \cdots p_2}_{t_2} \cdot \underbrace{p_3 \cdot p_3 \cdots p_3}_{t_3} \cdots\cdots \underbrace{p_s \cdot p_s \cdots p_s}_{t_s},$$

em que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_s$ são primos distintos, com $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_s \in IN$.

$$q = \underbrace{q_1 \cdot q_1 \cdots q_1}_{v_1} \cdot \underbrace{q_2 \cdot q_2 \cdots q_2}_{v_2} \cdot \underbrace{q_3 \cdot q_3 \cdots q_3}_{v_3} \cdots\cdots \underbrace{q_r \cdot q_r \cdots q_r}_{v_r},$$

em que $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_r$ são primos distintos, com $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_s \in IN$.

Elevando p e q ao quadrado,

$p^2 =$ (1)

$q^2 =$ (2)

Em (1), quantas vezes aparece o número primo p_1? ____________________________________.

E o número primo p_2? ____.

...

E o número primo p_s ? ____.

Quanto à paridade, em (1), cada primo aparece um número ____________ de vezes, donde, o número total de fatores é um número ___________.

É possível tirar a mesma conclusão para a fatorização de q^2? ______________________________.

Tendo em conta a fatorização em (2), completa:

$2q^2 =$

Se, quanto à paridade, a fatorização de q^2 tem um número total _____________ de fatores, a fatorização de $2q^2$ tem um número total ________________ de fatores.

Recapitulando, tem-se:

- $2q^2$ tem um número total _______________ de fatores,
- p^2 tem um número total _______________ de fatores,
- $2q^2 = p^2$.

Que podes concluir sobre as três afirmações anteriores?

Recorda o início da demonstração e o método em uso (redução ao absurdo).

Como terminas esta demonstração?

Anexo VI - Tarefa: “Fórmula Resolvente”

Tarefa – Matemática – 9º ano

Prof.ª: Marta Filipe Nome: ______________________________ n.º ____ Turma ____

Fórmula Resolvente

As equações do 2.º grau foram abordadas ao longo da História da Matemática, por diferentes civilizações, na resolução de vários problemas. São exemplo disso os seguintes problemas:

Problema A. Papiro de Moscou, (Egípcios, aproximadamente 1890 a.C.)
Calcular a base de um retângulo cuja altura é igual a 3/4 de sua base e cuja área é igual a 12.

Problema B. Tábua babilónica (Babilónicos, 1950 a.C. - 1200 a.C.)
Achar o lado de um quadrado se a sua área menos o seu lado é 870.

Problema C. Sulvasutras (Hindus, séc. XII)
A oitava parte de um bando de macacos, elevada ao quadrado, brinca num bosque. Além disso, 12 dos macacos podem ser vistos sobre uma colina. Qual é o número total de macacos?

Lê atentamente cada um dos problemas históricos enunciados acima.

1. Traduz cada um deles por uma equação.

2. Resolve cada uma das equações anteriores e indica a solução de cada um dos problemas.
Se a equação que obtiveste é uma equação completa do 2.º grau será necessário utilizar a Fórmula Resolvente, que irás demonstrar em baixo.

O matemático e astrónomo Al-Khwarizmi (780-850) deu contributos importantes para a resolução de equações. Apresentou técnicas para resolver equações de diversos tipos, como por exemplo,

Quadrados mais números iguais a raízes,

que, em notação atual, se escreve, $ax^2 + c = bx \quad (a \neq 0)$.

Considera a equação completa do 2º grau:

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

(Muda o termo c para o segundo membro da equação)

(Multiplica ambos os membros por $4a,\ a \neq 0$)

(Adiciona b^2 aos dois membros)

(Fatoriza o primeiro membro)

(Se $b^2 - 4ac \geq 0$ podes desembaraçar do quadrado do primeiro membro)

(Resolve a equação em ordem a x)

FÓRMULA RESOLVENTE: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$, $(a \neq 0)$

Tarefa adaptada de ***Equações do 2.º grau a uma incógnita***, em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/algebra03sequencia.htm