

Aproximação Numérica de Equações Diferenciais Parciais com p -Laplaciano e Memória

Belchior César Xavier Mário

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Matemática e Aplicações
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor José Carlos Matos Duque
Co-orientador: Prof. Doutor Rui Manuel Pires Almeida

Júri:
Prof. Doutor Paulo Jorge da Silva Almeida
Prof^a. Doutora Sílvia Alexandra Alves Barbeiro
Prof^a. Doutora Ana Leonor Mestre Vicente Silvestre
Prof. Doutor Mauro António Rincon
Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Pinto Rebelo
Prof. Doutor José Carlos Matos Duque

Covilhã, 19 de junho de 2023

Declaração de Integridade

Eu, Belchior César Xavier Mário, que abaixo assino, estudante com o número de inscrição D1697, do Curso de Doutoramento em Matemática e Aplicações da Faculdade de Ciências, declaro ter desenvolvido o presente trabalho e elaborado o presente texto em total consonância com o **Código de Integridades da Universidade da Beira Interior**.

Mais concretamente afirmo não ter incorrido em qualquer das variedades de Fraude Académica, e que aqui declaro conhecer, que em particular atendi à exigida referenciação de frases, extratos, imagens e outras formas de trabalho intelectual, e assumindo assim na íntegra as responsabilidades da autoria.

Universidade da Beira Interior, Covilhã, 13 de julho de 2023.

Atentamente,

Belchior C. X. Mário

Dedicatória

Aos meus filhos por todos os momentos!

Agradecimentos

Passado um longo período de formação, quero manifestar os meus agradecimentos a todos que direta ou indiretamente contribuíram para concluir mais esta etapa da minha formação académica, nomeadamente:

- ao centro de todo meu ser, O Eterno Deus, pelo dom da vida e pela soberania com que Ele dirige a minha;
- à minha esposa Helena e aos meus filhos, Belchior e Alberto Mário, pela compreensão nas minhas ausências e por muito fazerem para que tudo fosse possível, transformando o sonho perdido num Conto de Fadas inusitado;
- aos meus pais, César e Valentina Mário, pessoas extremamente bondosas e que desde o ventre, me incutiram valores insondáveis, pelas orações e jejuns, para iniciar os meus estudos académicos superiores;
- aos meus queridos irmãos Ricardo, Anacleto, Mariano, Maria, Fidel, Silvestre, Benvinda e Sara Mário, por estarem ao meu lado nos momentos mais difíceis, sempre que precisei levantar-me para trilhar mais um percurso;
- aos meus orientadores Prof. Doutor José Duque e Prof. Doutor Rui Almeida, por aceitarem este desafio, revelando profissionalismo, conhecimento, incentivo e contribuições valiosas, mas, principalmente por nunca desistirem de mim quando tudo parecia perdido;
- ao casal Maravilha Cassoco, por estar sempre presente e por todos os momentos;
- aos meus companheiros, amigos e colegas, particularmente o João Sousa, Lufuakenda Kiendi, Teófilo Chihaluca e outros; um agradecimento especial por todos os momentos e por me aconselharem a não desistir ao primeiro obstáculo;
- a todos os colegas do Departamento de Métodos Quantitativos da Faculdade de Economia da Universidade José Eduardo dos Santos, pelas longas conversas construtivas e instrutivas;
- à Coordenação do Curso de Doutoramento em Matemática e Aplicações, e a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior, o meu reconhecimento e gratidão pelos ensinamentos.

A todos, o meu muito obrigado!

Este trabalho foi parcialmente apoiado pelos projetos de pesquisa: Grant UID/MAT/00212/2019 - financiado pelo FEDER através do - Programa Operacional Factores de Competitividade, FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia e Grant BID/ICI-FC/Santander Universidades-UBI/2015.

Resumo

Neste trabalho, faz-se um estudo sobre a aplicação do método dos elementos finitos na resolução de uma equação diferencial parcial não linear do tipo parabólico com memória da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds + f(x, t), & \forall (x, t) \in Q = \Omega \times]0, T], \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

onde u_0 , g e f são funções dadas, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um domínio limitado com fronteira Lipschitz-contínua. O p -Laplaciano $\Delta_p u$ é dado por

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 2 < p < \infty$$

e

$$y(x, t) = \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds$$

é o termo de memória da equação integrodiferencial evolutiva. O problema é escrito numa formulação fraca como um sistema de uma equação parabólica e uma equação de Volterra. Em seguida, o sistema é discretizado na variável espacial, usando o método dos elementos finitos com base de Lagrange de grau $r \geq 1$ e demonstra-se a existência, unicidade, estabilidade e a convergência das soluções do problema semidiscreto. O método de Crank-Nicolson, juntamente com a quadratura dos Trapézios, são aplicados para discretizar a variável do tempo. Para a solução de cada método, são estabelecidas a existência, unicidade, estabilidade e a ordem de convergência. Dois esquemas de ponto fixo estáveis e convergentes são propostos para resolver o sistema de equações algébricas não lineares resultante e, para ilustrar os resultados teóricos e a aplicabilidade do método, são apresentados alguns resultados numéricos simulados em ambiente Matlab. A ordem de convergência, alguns comportamentos assintóticos e efeitos de localização das soluções são estudados numericamente através da apresentação de vários exemplos.

Palavras-chave

Método dos elementos finitos, método de Crank-Nicolson, equação integrodiferencial, p -Laplaciano, termo de memória, polinômios de Lagrange, simulação.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Abstract

In this work, a study is carried out on the application of the finite element method for solving a nonlinear parabolic partial differential equation with memory of the form

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \int_0^t g(t-s)\Delta_p u(x,s)ds + f(x,t), & \forall (x,t) \in Q = \Omega \times]0, T], \\ u(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

where u_0 , g and f are given functions, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded domain with Lipschitz-continuous boundary. The p -Laplacian $\Delta_p u$ is given by

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 2 < p < \infty$$

and

$$y(x,t) = \int_0^t g(t-s)\Delta_p u(x,s)ds$$

is the memory term of the evolutionary integral differential equation. The problem is written in a weak formulation as a system of a parabolic equation and a Volterra equation. Then the system is discretized in the spatial variable using the finite element method with Lagrange basis of degree $r \geq 1$ and the existence, uniqueness, stability and convergence of solutions of the semi-discrete problem are demonstrated. The Crank-Nicolson method, together with the Trapezoidal quadrature are applied to discretize the time variable. For the solution of each method, the existence, uniqueness, stability and convergence order are established. Two stable and convergent fixed-point schemes are proposed to solve the resulting nonlinear algebraic system of equations and, to illustrate the theoretical results and the applicability of the method, some numerical results, simulated in a Matlab environment, are presented. The convergence order, some asymptotic behavior and location effects of the solutions are studied numerically through the presentation of several examples.

Keywords

Finite element method, Crank-Nicolson method, integro-differential equation, p -Laplacian, memory term, Lagrange polynomials, simulation.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Fundamentos Matemáticos	9
2.1	Notações, conceitos básicos e espaços funcionais	9
2.2	Lemas e teoremas fundamentais	11
2.3	Espaços dos elementos finitos	13
3	Equação Parabólica com p-Laplaciano e Memória	15
3.1	Equação integrodiferencial com termo não linear	15
3.1.1	Existência e unicidade de soluções	15
3.1.2	Propagação com velocidade finita	17
3.1.3	Tempo de espera	18
3.1.4	Exemplo de soluções que não obedecem ao princípio do máximo .	19
3.2	Equação integrodiferencial sem termo não linear	21
3.2.1	Problema auxiliar	21
3.3	Formulação fraca do problema	23
4	Discretização no Espaço	25
4.1	Solução do problema semidiscreto	25
5	Discretização no Tempo	33
5.1	Método de Crank-Nicolson	33
5.2	Formulação totalmente discreta	34
6	Resultados Numéricos	57
6.1	Bases de Lagrange	57
6.2	Convergência de h e δ	60
6.3	Comportamento assintótico da solução	63
6.3.1	Oscilações na direção do tempo	63
6.3.2	Extinção e decaimento	65
6.3.3	Estabilidade da solução	66
6.3.4	Oscilações na direção do espaço	68
6.4	Propagação com velocidade finita	69
6.5	Propriedade do tempo de espera	70
7	Conclusões e Trabalho Futuro	71
	Bibliografia	73

Lista de Figuras

6.1	Análise de convergência de ordem $r = 1, 2, 3$ para $p = 3$ (à esquerda) e $p = 4$ (à direita).	61
6.2	Análise de convergência de ordem δ para $p = 3$ e $p = 4$	61
6.3	Análise de convergência de ordem h para $r = 1, 2, 3$ (à esquerda) e de δ para $r = 4$ (à direita) com $p = 3$	62
6.4	Oscilações na direção do tempo, $p = 1.5$	63
6.5	Oscilações na direção do tempo, $p = 2$	64
6.6	Oscilações na direção do tempo, $p = 4$	64
6.7	Extinção e decaimento, $p = 1.5$	65
6.8	Extinção e decaimento, $p = 2$	65
6.9	Extinção e decaimento, $p = 4$	66
6.10	Estabilidade, $p = 1.5$	66
6.11	Estabilidade, $p = 2$	67
6.12	Estabilidade, $p = 4$	67
6.13	Oscilações na direção do espaço, $p = 1.5$	68
6.14	Oscilações na direção do espaço, $p = 2$	68
6.15	Propagação com velocidade finita	69
6.16	Propriedade do tempo de espera	70

Capítulo 1

Introdução

Ao longo dos anos, várias equações diferenciais têm sido utilizadas para descrever sistemas químicos, biológicos, físicos e ecológicos. Uma das mais conhecidas é a equação de reação-difusão, que é uma equação diferencial parcial parabólica da forma

$$u_t - \operatorname{div}(a \nabla u) - f = 0,$$

onde f é uma função vetorial e a uma matriz $d \times d$ de funções não lineares chamadas termo de reação e difusão, respetivamente. Com o desenvolvimento da ciência e da técnica, esse tipo de equações deixou de ser um bom modelo para alguns casos particulares e surgiu, então, o p -Laplaciano que melhora o modelo.

Equações diferenciais parciais envolvendo o operador p -Laplaciano têm sido intensamente estudadas ao longo das últimas décadas e existe uma extensa literatura dedicada às equações com o p -Laplaciano, podemos consultar, por exemplo, os trabalhos [7, 29] para um levantamento da teoria. O operador denotado por Δ_p , também chamado pseudo Laplaciano, aparece naturalmente na modelação matemática de muitos fenómenos físicos e é definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 < p < \infty,$$

onde o termo $|\nabla u|^{p-2}$ é entendido como um coeficiente de difusão não linear definido como

$$|\nabla u|^{p-2} = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_d} \right)^2 \right)^{\frac{p-2}{2}}.$$

A forma do p -Laplaciano corresponde também à derivada de Fréchet em $W_0^{1,p}(\Omega)$ do funcional

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx,$$

para mais detalhes, consulte por exemplo, o trabalho [63] na secção 2.5. O p -Laplaciano é um operador não linear que se reduz ao Laplaciano usual, no caso $p = 2$ e é de grande interesse teórico por ser protótipo para o estudo das diversas equações envolvendo operadores monótonos, hemi-contínuos e degenerados [43]. O operador p -Laplaciano também aparece em muitas aplicações de interesse, por exemplo, nos ramos da ciência e da engenharia, como fluxos em meios porosos [17], materiais power-law [10], difusão não linear e filtração [52], fluidos não newtonianos [38] ou fluência de torção elástico-plástico [53]. Em [16], pode encontrar-se uma descrição sobre a origem do operador p -Laplaciano.

Laos estudou o problema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (a(x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + b(x) |u|^{p-2} u &= f(x, u), \\ x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u = 0, \end{aligned}$$

onde $1 < p < d$ e $\Omega(\subset \mathbb{R}^d)$ é o complemento de um domínio limitado com fronteira $C^{1,\delta}$, tal que $0 < \delta < 1$. Provou a existência de soluções por via da aplicação da teoria

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

do ponto crítico [66]. Em [18], estudaram a existência de soluções não triviais para o problema $\Delta_p u = |u|^{p-2}u$, num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com a condição de fronteira não linear $|\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial \mathbf{n} = f(u)$ e provaram os resultados baseando-se em argumentos variacionais e topológicos.

Glowinski et al. [39], estudaram o método de aproximação numérica dos elementos finitos para alguns problemas de fronteira não linear da forma

$$-\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f, \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde $1 < p < +\infty$ e provaram que o método iterativo usado para resolver os problemas aproximados permitia lidar com outros problemas não lineares das áreas da física e da mecânica. Os autores provaram ainda uma convergência de $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{p-1}})$ na norma $W^{1,p}$. Posteriormente, Chow [24] melhorou esta ordem, provando a taxa de convergência $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{p}})$. Em 1993, assumindo uma regularidade mais forte para a solução fraca, Barrett e Liu [15] estudaram, utilizando o método das aproximações dos elementos finitos lineares contínuos, o problema de encontrar u , tal que

$$-\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f, \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } u = g \text{ sobre } \partial\Omega,$$

em que $p \in]1, \infty[$, f e g são funções conhecidas e provaram o limite de erro ótimo como $\mathcal{O}(h)$ em $W^{1,p}$.

Lew et al. [42], apresentaram um método de aproximação dos elementos finitos e de penalização, para calcular numericamente o valor próprio do problema

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 1 < p < \infty,$$

onde λ_1 é obtido minimizando o funcional $\int_{\Omega} |\nabla u|^p / \int_{\Omega} |u|^p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda_1(p)$ definido pelo princípio variacional da forma

$$\lambda_1(p) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|u\|_p = 1}} \|\nabla u\|_p^p.$$

Provaram a convergência, com a apresentação de resultados numéricos. Guang-an et al. [68], estudaram um modelo envolvendo o p -Laplaciano, com $1 < p \leq 2$, que podia ser usado para simular fenômenos de interface e provaram que o método de aproximação dos elementos finitos é incondicionalmente estável. Os autores apresentaram exemplos para demonstrar a estabilidade e a precisão do método e os resultados apresentados indicavam que a evolução de energia diminui acentuadamente quando p aumenta.

Embora as equações diferenciais parciais sejam muito comuns para modelar vários sistemas da ciência e da engenharia, em alguns casos de transferência de calor [45], difusão gasosa [55], dinâmica de reatores nucleares [50] ou finanças matemáticas [1] é necessário refletir os efeitos da história passada do sistema no modelo. Uma forma de incorporar este efeito no modelo foi a inclusão de um termo integral na equação diferencial parcial básica que leva a uma equação diferencial parcial integral da forma

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = \int_0^t B u(s) ds + f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times]0, T], \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times]0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

onde $\int_0^t Bu(s)ds$ é o chamado termo de memória. Em geral, este tipo de integral podia refletir a memória e outros mecanismos em sistemas dinâmicos e tem uma importância especial, pois leva a novas propriedades e dificuldades. As equações do tipo (1.1) revelaram-se bons modelos para uma variedade de problemas recentes, nas áreas de dinâmica de reatores nucleares, viscoelasticidade, biomecânica, derretimento de polímeros, compressão em meios porosos e epidemias.

Em [21], apresentaram os fundamentos práticos da equação integrodiferencial e as estimativas de regularidade do problema de valor iniciais com condições na fronteira

$$\begin{cases} u_t + Au = \int_0^t Bu(s)ds + f, & (x, t) \in \Omega \times]0, T], \\ u = 0, & \partial\Omega \times]0, T], \\ u(0) = u_0, & \Omega, \end{cases}$$

onde A é um operador uniformemente elíptico de segunda ordem e B é um operador diferencial parcial arbitrário de segunda ordem. Os autores consideraram a inclusão do integral de Volterra como uma perturbação do problema puramente parabólico e com a intenção de explicar a importância do termo de memória, considerou-se um caso especial

$$u_t = \int_0^t K(t-s)\Delta u(s)ds + f,$$

onde, se $K(t) = 1$, após diferenciação em relação a t , leva às equações das ondas e se $K(t)$ é a função Delta de Dirac, torna-se uma equação do calor.

Em 2017, Akilandeswari et al. [3], estudaram a existência de soluções para equações integrodiferenciais parciais fracionárias não lineares com a condição de fronteira de Dirichlet. Os resultados são demonstrados usando o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder e o teorema de Arzela-Ascoli. Ezzinbi et al. [36] provaram os resultados de existência e regularidade de soluções para equações integrodiferenciais parciais com condições não locais da forma

$$\begin{cases} u_t = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t, u(t)), & t \in [0, a], \\ u(0) = u_0 + g(u), \end{cases}$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear fechado num espaço de Banach $(X, |\cdot|)$ e $(B(t))_{t \geq 0}$ é uma família de operadores lineares fechados em X . Para os autores, a parte não linear do problema é assumida como uma função Lipschitz-contínua em relação ao segundo argumento. Em [37], estudaram a existência e regularidade de soluções das equações integrodiferenciais parciais funcionais com domínio não denso e ilustraram a teoria do operador com a apresentação de exemplos teóricos.

Outras questões relacionadas com a existência e propriedades de soluções para equações do tipo

$$u_t - Au = \int_0^t g(t-s)Bu(s)ds + f, \quad (1.2)$$

onde A e B são operadores simétricos definidos positivos de segunda ordem e g o termo de memória, por exemplo, podem ser consultados em [13, 28, 44, 47, 60]. As equações integrodiferenciais são um estado intermediário das equações de calor e equações da onda que possivelmente possui as características duplas, ou seja, propaga-se com velocidade finita, por exemplo.

A primeira contribuição para a solução numérica da equação diferencial parcial integral foi feita por J. Douglas e B. Jones [31] usando o método das diferenças finitas e, muitos resultados nessa direção foram publicados e escritos por Brunner [20]. Naturalmente, numa equação integrodiferencial, a presença do integral de Volterra também causa algumas novas dificuldades, tanto na análise teórica como na análise de computação numérica. Desde os trabalhos de DiBenedetto [29], considerável atenção tem sido dedicada à resolução numérica da equação diferencial parcial integral, como exemplo, podemos citar alguns trabalhos recentes.

Thomé et al. [62], estudaram o método dos elementos finitos (MEF) espacialmente discretos para resolver problemas da forma

$$\begin{cases} u_t + Au = \int_0^t B(t, s)u(s)ds + f, & \Omega \times]0, T], \\ u = 0, & \partial\Omega \times]0, T], \\ u(\cdot, 0) = v, & \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $u = u(x, t)$ é uma função em $\bar{\Omega} \times]0, T]$, Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^d com fronteira $\partial\Omega$, A é um operador diferencial parcial elíptico de segunda ordem e $B = B(t, s)$ é um operador diferencial parcial de segunda ordem.

Mustapha et al. [46], apresentaram uma solução numérica de equações integrodiferenciais parabólicas do tipo

$$\begin{cases} u_t + Au(t) + BAu(t) = f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde A é um operador elíptico linear, B é um operador de Volterra dado por

$$Bv(t) = \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} b(s)v(s)ds, \quad 0 < \alpha < 1,$$

e b é uma função contínua em $[0, T]$. Os autores estudaram ainda o método descontínuo de Galerkin para a discretização no tempo e no espaço. Guignard et al. [40], apresentaram uma análise de erro dos elementos finitos, realizada a uma classe de problemas elípticos lineares e não lineares. Usaram uma abordagem de perturbação, onde a solução exata era expandida até a uma certa ordem em relação ao parâmetro que controlava a quantidade de aleatoriedade e ilustraram o problema de difusão caracterizado por um número finito de variáveis aleatórias e a derivação de estimativas de erro à posteriori entre a solução exata e a solução aproximada. Yousuf [65], apresentou um método numérico fortemente estável e um tratamento detalhado para a consistência, estabilidade e convergência do método proposto. Provou a eficiência, precisão e confiabilidade do método através de abordagens teórica e a apresentação de resultados numéricos para uma equação diferencial parcial integral.

Para encontrar a solução aproximada de uma equação diferencial parcial integral linear, Avazzadeh et al. [11] aplicaram funções de base radial e o método das diferenças finitas. Em [12], um método de colocação baseado em multiwavelets linear de Legendre é desenvolvido para soluções numéricas da equação diferencial parcial integral. As equações apresentaram inúmeras aplicações no mundo da ciência e o método numérico proposto apresentava resultados que confirmaram a sua precisão, eficiência e robustez do método. Em [56], é proposto o MEF no espaço e um método de Crank-Nicolson no tempo para analisar uma equação diferencial parcial integral linear. Usando operadores

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

de reconstrução, eles obtiveram ordem ótima para estimativas de erros à posteriori. Em [64], são apresentadas algumas técnicas de discretização baseadas em elementos finitos e discretização temporal totalmente implícita para a resolução da equação diferencial parcial integral parabólica com memória não linear. A ordem de convergência provou ser $\mathcal{O}(h^r + \delta)$ para polinômios de grau $r - 1$. Com relação às simulações numéricas do p -Laplaciano, usando o MEF, constatou-se que a regularidade das soluções limita as taxas de convergência.

Recentemente, em [30] é estudado um MEF adaptativo para uma equação diferencial parcial (EDP) com p -Laplaciano usando funções lineares contínuas por partes e mostrou um erro de convergência linear. Os autores de [26] propuseram um método híbrido descontínuo de Galerkin para o p -Laplaciano usando polinômios de grau $r > 0$. As experiências numéricas mostraram ordem ótima de convergência. No que diz respeito às aproximações numéricas para a solução do problema (1.2), vários métodos já foram aplicados. Para uma revisão do MEF aplicado às equações diferenciais parciais integrais, referimo-nos, por exemplo, ao livro [21] e suas referências. O método dos volumes finitos foi estudado em [58]. O método de colocação com splines em [51]. O MEF mistos em [59]. O método descontínuo de Galerkin em [46]. Um método pseudoespectral foi investigado em [61].

O MEF é uma ferramenta numérica para resolver problemas de equações diferenciais. A ideia básica do método é dividir, inicialmente, o domínio do problema, em subdomínios de dimensões finitas, chamados elementos finitos e o conjunto de todos os subdomínios é conhecido como malha. No MEF, cada elemento possui um determinado número de pontos nodais, dependendo do seu tipo (triangular, linear, quadrático, etc). Nos nós comuns aos diferentes elementos, o valor das variáveis do problema é o mesmo, independentemente do elemento que esteja a ser considerado. No MEF, os problemas de valores da fronteira são reescritos como problemas variacionais e é utilizado o método de Galerkin para resolver os problemas de forma aproximada. Almeida et al. [4, 5, 32], estabeleceram a convergência, propriedades e ordens de erro para as soluções totalmente discretas de uma classe de equações não lineares de reação-difusão não locais, usando MEF linearizado e de Crank-Nicolson-Galerkin com aproximações polinomiais de grau arbitrário.

Neste trabalho estuda-se a equação integrodiferencial evolutiva com p -Laplaciano e memória da forma

$$u_t(x, t) - \Delta_p u(x, t) = \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds + f(x, t), \quad (1.4)$$

onde f e g são funções dadas. Este tipo de equações surgem na descrição matemática de propagação de calor em materiais com memória, onde o fluxo de calor pode depender do histórico do processo. Além do problema comum do termo memória, cuja discretização no tempo força um grande volume de cálculos e o consumo de memória, o problema (1.4) também apresenta uma nova dificuldade ao conter o p -Laplaciano que torna o termo de memória não monótono. Devido à presença da não linearidade, é ainda mais difícil encontrar soluções analíticas para esses problemas. Na prática, a simulação numérica torna-se um meio crucial para estudar a dinâmica deste tipo de equações. A importância do nosso trabalho está no estudo da interação entre o p -Laplaciano e o termo de memória não linear (ver para mais detalhes [8]).

A falta de monotonicidade no termo de memória da equação (1.4) inviabiliza o uso da maioria das técnicas disponíveis e muito bem desenvolvidas. Antontsev e seus coautores

estudaram o problema (1.4) com um termo de fonte não linear $\Theta(x, t, u)$, substituindo a equação por um sistema composto por uma equação de reação-difusão e uma equação integral. Os autores provaram que para $\max\{1, \frac{2d}{d+2}\} < p < \infty$, $g, g' \in L^2(0, T)$ e $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $f \in L^2(Q)$, o problema admite uma solução fraca que é local ou global no tempo dependendo da taxa de crescimento de $\Theta(x, t, s)$, quando $|s| \rightarrow \infty$. Eles estabeleceram condições de unicidade e também provaram que para $p > 2$ e $s\Theta(x, t, s) \leq 0$, as perturbações nos dados se propagam com velocidade finita e o efeito do tempo de espera é possível [8].

Talvez justificado por suas várias aplicações físicas, o problema (1.4) com p dependendo de x está a atrair atenção considerável, consulte por exemplo [9, 41, 67], onde questões sobre solvabilidade e as propriedades das soluções são abordadas.

Em [6], Almeida et al., apresentaram um novo método misto dos elementos finitos para equação integrodiferencial parabólica com p -Laplaciano e memória. Nesse trabalho são estabelecidas a existência, unicidade e regularidade das soluções discretas. Limites de erro dependendo do parâmetro p também são obtidos e são feitas algumas simulações para ilustrar a ordem de convergência. Em [33], dando continuidade ao trabalho desenvolvido em [6], são propostos dois esquemas do método do ponto fixo estáveis e convergentes para resolver o sistema de equações algébricas não lineares. Usando a implementação em ambiente Matlab, são analisados a ordem de convergência com a apresentação de resultados numéricos e alguns exemplos para ilustrar numericamente os vários comportamentos assintóticos e os efeitos de localização das soluções.

Um dos objetivos deste trabalho é estudar a aplicação do MEF de [5] e [32] aplicados a EDP não linear do problema (1.4) com memória. Ainda neste trabalho pretendemos fazer o estudo da convergência do MEF, complementado com o método de Crank-Nicolson e a quadratura dos Trapézios, por fim, analisar os resultados computacionais obtidos em ambiente Matlab.

As razões que estiveram na base de escolhermos o MEF com bases de Lagrange são a versatilidade, a capacidade em lidar com domínios irregulares, a sua precisão e o pouco esforço computacional de implementação do método.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1, apresenta-se o tema a estudar, com referências à respectiva revisão da literatura, contextualizando-o e dando evidência a pertinência do mesmo. No capítulo 2, introduzem-se alguns conceitos matemáticos básicos e notações que serão fundamentais durante todo trabalho. No capítulo 3, apresentamos um estudo teórico da equação integrodiferencial parabólica com p -Laplaciano e memória. São apresentados ainda a existência e unicidade de soluções, o problema auxiliar e a formulação fraca do problema a ser estudado durante todo trabalho. No capítulo 4, é apresentado o desenvolvimento da discretização da variável espacial e demonstra-se a existência, unicidade, estabilidade de soluções e a convergência do problema semidiscreto. No capítulo 5, apresentamos o desenvolvimento da discretização da variável tempo, a dedução da aplicação do método de Crank-Nicolson e a formulação totalmente discreta do problema em estudo. Demonstra-se a existência, unicidade, estabilidade e a convergência de soluções discretas. É deduzida a ordem de convergência do método e é apresentado um método do ponto fixo para resolver o sistema de equações algébricas não lineares. No capítulo 6, são apresentadas várias simulações em ambiente Matlab, para estudarmos o erro, a estabilidade e a convergência do método. É feita uma análise da influência do parâmetro e do termo de memória nas propriedades de soluções. Finalmente, termina-se com as conclusões e o trabalho futuro, sem esquecer uma lista de referências que constituem bibliografia alargada e necessária sobre o tema do trabalho

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

desenvolvido.

Alguns dos resultados obtidos neste trabalho foram apresentados em seminários na Universidade da Beira Interior, como em conferências internacionais “V Ciclo de Conferências da Faculdade de Ciências: Trilhos da Ciência, em Covilhã, Janeiro, 2017, Portugal” e “12th International ISAAC Congress, Universidade de Aveiro, de 29 de Julho a 2 de Agosto, 2019, Portugal”. Foram submetidos e publicados os artigos [6] “A Mixed Finite Element Method for a Class of Evolution Differential Equations with p -Laplacian and Memory” em *Applied Numerical Mathematics* e [33] “Numerical Solution for a Class of Evolution Differential Equations with p -Laplacian and Memory” em *Journal of Computational and Applied Mathematics*.

Capítulo 2

Fundamentos Matemáticos

Este capítulo tem o propósito de apresentar as notações e os conceitos utilizados. São também incluídos alguns resultados frequentemente citados no trabalho. As demonstrações são omitidas e para cada resultado é apresentado uma referência específica (para mais detalhes, consultar por exemplo [15, 19, 22, 23, 24, 27, 34, 35, 43, 49, 54]).

2.1 Notações, conceitos básicos e espaços funcionais

Esta secção está dedicada à apresentação das notações e introdução de conceitos usados no trabalho. Ao longo do presente trabalho, as diferentes constantes que forem independentes dos parâmetros utilizados são todas denotadas apenas por C .

Se $x = (x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ consideramos $|x| = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}$.

A bola aberta de raio r centrada em x é denotada por $B_r(x)$ e a bola fechada por $\bar{B}_r(x)$. O conjunto dos pontos interiores de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ denota-se por $\text{int}(\Omega)$ e a fronteira por $\partial\Omega$. O fecho do conjunto Ω é denotado por $\bar{\Omega}$.

Define-se por simplex o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^d : x = \alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_d v_d, \alpha_0 + \dots + \alpha_d = 1, \alpha_i \geq 0, v_i \in \mathbb{R}^d\}.$$

A derivada fraca (generalizada ou no sentido das distribuições) de ordem α da distribuição u é denotada por $D^\alpha u$.

As derivadas fracas, até à ordem k , de uma função $u \in C^k(\bar{\Omega})$ são iguais às derivadas clássicas de u , por isso denotar-se-á por

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, e $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, tanto a derivada fraca como a derivada clássica.

Denota-se por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right),$$

o vetor gradiente de u e por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right),$$

o operador gradiente. Por outro lado

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

denota o Laplaciano de u . Se $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$, então o divergente de \mathbf{u} é definido por

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Relativamente aos espaços de funções serão utilizadas as notações usuais. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável à Lebesgue. Denota-se por $|\Omega| = \operatorname{meas}(\Omega)$ a medida de Lebesgue de Ω .

Para $p \in [1, +\infty[$, $L^p(\Omega)$ denota o espaço linear de todas as funções u mensuráveis em Ω para as quais

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

$L^\infty(\Omega)$ é o espaço linear de todas as funções u mensuráveis em Ω para as quais

$$\operatorname{ess\,sup}(u) = \inf \left\{ \sup_{x \in \Omega \setminus Z} |u(x)| : Z \subset \Omega, \operatorname{meas}(Z) = 0 \right\} < \infty.$$

A norma do espaço $L^\infty(\Omega)$ é

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}(u).$$

Seja $k \geq 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Denota-se por $W^{k,p}(\Omega)$ o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que as suas derivadas fracas até à ordem k são também elementos de $L^p(\Omega)$, ou seja,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| = 0, \dots, k\}.$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ pode ser equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^k \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u|.$$

Define-se também em $W^{k,p}(\Omega)$ a seminorma

$$|u|_{W^{k,p,j}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty \text{ e } 0 \leq j \leq k.$$

No presente trabalho, interpreta-se $W_0^{k,p}(\Omega)$ como o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$, tais que $D^\alpha u = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $|\alpha| \leq k-1$. Denota-se também $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

$|\cdot|_{W^{k,p,k}(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{k,p}(\Omega)$. Em particular, denota-se

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Os problemas de evolução são descritos, de modo geral, por funções da forma $u = u(x, t)$, onde $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ é o espaço e $t > 0$ é o tempo. Neste trabalho, o tempo é tratado separadamente do espaço. Vamos considerar, quando conveniente, $u(t) = u(\cdot, t)$ como uma função dependente do tempo e com valores num determinado espaço funcional, X .

Para $1 \leq p \leq \infty$ define-se $L^p(a, b; X)$ como sendo o espaço das funções $u : [a, b] \rightarrow X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{para } 1 \leq p \leq \infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \text{ess sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Denota-se por $C^0([a, b]; X)$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e com valores em X .

O espaço $C^0([a, b]; X)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{C^0([a,b];X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X.$$

A derivada da função $u : [a, b] \rightarrow X$ em t_0 é denotada por $\frac{du}{dt}(t_0) = u_t(t_0)$.

Para $k = 1, 2, \dots$ e $p \in [1, \infty]$, define-se

$$W^{k,p}(a, b; X) = \{u \in L^p(a, b; X) : \frac{d^j u}{dt^j} \in L^p(a, b; X), \quad j = 1, \dots, k\},$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(a,b;X)} = \left(\sum_{j=1}^k \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L^p(a,b;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De uma forma semelhante, podem definir-se os espaços $C^k([a, b]; X)$ das funções contínuas e diferenciáveis, em t , até à ordem k , no intervalo $[a, b]$ e com valores em X .

2.2 Lemas e teoremas fundamentais

Nesta secção, enunciam-se alguns resultados que são essenciais nas demonstrações. Começamos por apresentar algumas desigualdades frequentemente usadas no trabalho.

Lema 2.1 (Young, [35], p622). Sejam $a, b \geq 0$, $1 < p$, $p' < +\infty$ e $\epsilon > 0$ números reais, então

$$ab \leq \frac{\epsilon a^p}{p} + \frac{\epsilon^{1-p'} b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Lema 2.2 ([14], p526; [23], p7). Para cada $p > 1$ e $\delta \geq 0$, existem três constantes positivas C_1, C_2 e C_3 , tal que para cada $\zeta, \gamma \in \mathbb{R}^d$, $\zeta \neq \gamma$, temos:

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

1.

$$||\zeta|^{p-2} \zeta - |\gamma|^{p-2} \gamma| \leq C_1 |\zeta - \gamma|^{1-\delta} (|\zeta| + |\gamma|)^{p-2+\delta};$$

2.

$$(|\zeta|^{p-2} \zeta - |\gamma|^{p-2} \gamma, \zeta - \gamma)_{\mathbb{R}^d} \geq C_2 |\zeta - \gamma|^{2+\delta} (|\zeta| + |\gamma|)^{p-2-\delta};$$

3. Se $p > 2$,

$$(|\zeta|^{p-2} \zeta - |\gamma|^{p-2} \gamma, \zeta - \gamma)_{\mathbb{R}^d} \geq C_3 |\zeta - \gamma|^p.$$

Teorema 2.3 ([35], p287). Se $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, então $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

Teorema 2.4 (Brouwer, [57], p37). Seja $A : \bar{B}_\rho(x) \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua e $(A(x), x) \geq 0$, $\forall x \in \partial \bar{B}_\rho(x)$. Então A tem um zero em $\bar{B}_\rho(x)$.

Teorema 2.5 (Green, [48], p9). Seja Ω um conjunto convexo limitado com fronteira Lipschitz-contínua e seja $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx,$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior à fronteira de Ω .

Lema 2.6 (Gronwall, [48], p5). Suponha-se que h é contínua em $[a, b]$, r integrável em $]a, b[$ e $h, r \geq 0$ quase em toda a parte em $]a, b[$. Se y é uma função contínua em $[a, b]$ e satisfaz a inequação

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t r(s)y(s) \, ds, \quad t \in [a, b],$$

então

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)r(s)e^{\int_s^t r(\tau) \, d\tau} \, ds, \quad t \in [a, b].$$

Lema 2.7 (Gronwall discreto). Se y_n, w_n e z_n são sucessões não negativas e

$$y_n \leq w_n + \sum_{k=0}^{n-1} z_k y_k, \quad \text{para } n \geq 0,$$

então

$$y_n \leq w_n + \sum_{k=0}^{n-1} w_k z_k \exp\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} z_j\right), \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demonstração

Aplicando o Teorema 4.1.1 de [2] com a desigualdade $1 + x \leq e^x$ obtemos o pretendido. ■

Lema 2.8 (Diferenciação numérica, [54], p155). Sejam $w \in C^3([a, b])$ e $\delta > 0$, então para $t_0 \in]a, b[$,

$$\frac{dw}{dt}(t_0) = \frac{w(t_0 + \delta) - w(t_0 - \delta)}{2\delta} - \frac{\delta^2}{6} \frac{d^3 w}{dt^3}(\xi),$$

com $\xi \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Teorema 2.9 (Regra dos Trapézios, [54], p196). Seja $w(t)$ uma função contínua em $[a, b]$. Considere a partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, de espaçamento $\delta = \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. A regra dos Trapézios é dada por

$$\int_a^b w(t)dt = \frac{b-a}{2n} \left(w(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} w(t_i) + w(b) \right) - \frac{(b-a)\delta^2}{12} \frac{d^2w}{dt^2}(\xi),$$

onde $\xi \in]a, b[$.

2.3 Espaços dos elementos finitos

Neste secção, são apresentados alguns resultados importantes sobre a estimativa de erro de interpolação e desigualdades inversas envolvendo o conjunto dos polinómios de grau $r \geq 1$ (para mais detalhes ver [25]).

Definição 2.10 (Polinómios de Lagrange, [54], p79). Sejam $\{x_0, \dots, x_n\}$, nós distintos de $\Omega \in \mathbb{R}$, os polinómios

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, \dots, n,$$

definem-se por polinómios de Lagrange relativos aos nós $\{x_0, \dots, x_n\}$.

Teorema 2.11 (Fórmula de Lagrange, [54], p79). O polinómio interpolador p de grau menor ou igual a n que interpola a função $u(x)$ nos nós distintos $\{x_0, \dots, x_n\}$ é dado por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)u(x_k).$$

Lema 2.12 (Erro de interpolação, [54], p92). Seja $u \in C^{n+1}(\bar{\Omega})$ e p_n o polinómio de grau menor ou igual a n que interpola u nos nós distintos $\{x_0, \dots, x_n\}$ contidos no intervalo $\Omega \subset \mathbb{R}$. Então, para qualquer ponto $x \in \bar{\Omega}$, existe um valor $\xi \in \bar{\Omega}$ dependente de $\{x_0, \dots, x_n\}$, de x e de u , tal que

$$e_n(x) \equiv u(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}(\xi)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

De um modo geral, considere $\mathcal{T}_h = \{T_0, \dots, T_m\}$ uma partição regular em simplexes de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com parâmetro h e o espaço $\mathcal{S}^h \subset H_0^1(\Omega)$, definido por

$$\mathcal{S}^h = \{w \in C^0(\Omega) : w(x) = 0, x \in \partial\Omega, w(x)|_{T_k} \in \mathcal{P}_r(T_k), k = 0, \dots, m\},$$

onde $\mathcal{P}_r(T_k)$ é o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a r definido em T_k . Denotamos por Π_h , o operador de interpolação em \mathcal{S}^h , definido por

$$\Pi_h u = \sum_{k=0}^n w_k u(x_k),$$

onde $\{w_0, \dots, w_n\}$ é uma base de \mathcal{S}^h .

Lema 2.13 ([25], p124). Se $\Pi_h : H^{r+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^h$ é um operador de interpolação, então

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s \|u\|_{H^s(\Omega)}, \quad 1 \leq s \leq r+1,$$

com $u \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e C é uma constante positiva.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Lema 2.14 (Estimativas inversa, [25], p142). Seja $u^h \in \mathcal{S}^h$, então existe uma constante C independente de h , tal que

$$\|\nabla u^h\|_{L^2(T_k)} \leq Ch^{-1} \|u^h\|_{L^2(T_k)}$$

e

$$\|\nabla u^h\|_{L^\infty(T_k)} \leq Ch^{-\frac{d+2}{2}} \|u^h\|_{L^2(T_k)}, \quad T_k \in \mathcal{T}_h.$$

Capítulo 3

Equação Parabólica com p -Laplaciano e Memória

Neste capítulo, faz-se um estudo teórico da equação integrodiferencial parabólica com p -Laplaciano e memória. São apresentados a equação integrodiferencial com termo não linear, a equação integrodiferencial sem termo não linear, o problema auxiliar e a formulação fraca do problema a ser estudada no referido trabalho.

3.1 Equação integrodiferencial com termo não linear

Nesta secção, apresentamos alguns resultados sobre existência e unicidade, propagação com velocidade finita e o efeito do tempo de espera da solução u . Os resultados foram desenvolvidos e provados por Antontsev e coautores e podem ser encontrados em [7, 8]. A sua inclusão aqui serve para melhor análise e compreensão do nosso trabalho, conforme veremos nas próximas secções.

3.1.1 Existência e unicidade de soluções

Considere a equação integrodiferencial evolutiva com a condição de Dirichlet da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds + \Theta(x, t, u) + f(x, t), & Q = \Omega \times]0, T], \\ u = 0, & \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é o domínio limitado com a condição de fronteira Lipschitz-contínua, $g(s)$ é o termo de memória e Θ é uma função dada.

Definição 3.1. Uma função $u(x, t)$ diz-se de solução fraca do problema (3.1) se:

1. $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W$, $u_t \in L^2(Q)$, $\Delta_p u \in L^2(Q)$, $u(x, 0) = u_0(x)$;
2. Para cada função teste $w \in W$, temos

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(u_t w + \nabla w \cdot \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u + \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s)|^{p-2} \nabla u(s) ds \right) \right) dx dt \\ & = \int_Q (f + \Theta(x, t, u)) w dx dt, \end{aligned}$$

onde $W = L^2(Q) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ e $L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Considere o problema (3.1) e assumindo

$$g, g' \in L^2(0, T), \quad f \in L^2(Q), \quad u_0 \in L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \quad (3.2)$$

$\Theta(x, t, r)$ uma função de Carathéodory satisfazendo a condição de crescimento

$$|\Theta(x, t, r)| \leq B|r|^{\sigma-1} \text{ com } \sigma \in]1, \infty[, \quad B = \text{const} > 0, \quad \forall (x, t) \in Q. \quad (3.3)$$

Lema 3.2 (Estimativa em tempo global). Suponha que as condições (3.2)-(3.3) sejam satisfeitas e

$$\begin{cases} 1 < \sigma \leq 2, \\ \max \left\{ 1, \frac{2d}{d+2} \right\} < p, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2 < \sigma \leq 1 + \frac{p}{2}, \\ 2 < p. \end{cases} \quad (3.4)$$

Então, para cada $T < \infty$, tem-se

$$\sup_{(0,T)} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^p(Q)}^p \leq C \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1 \right)$$

e

$$\begin{aligned} & \|u_t\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))}^p + \operatorname{ess\,sup}_{(0,T)} \|u\|_{L^{2(\sigma-1)}(\Omega)}^{2(\sigma-1)} \\ & \leq C \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)}^p + 1 \right), \end{aligned}$$

onde a constante C depende de $d, T, |\Omega|, B, p, \sigma$ e

$$\|u\|_{L^{2(\sigma-1)}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^{2(\sigma-1)} dx \right)^{\frac{1}{2(\sigma-1)}}.$$

Lema 3.3 (Estimativa em tempo local). Suponha que as condições (3.2)-(3.3) sejam satisfeitas e os expoentes p, σ satisfazem cada uma das condições:

1.

$$\max \left\{ 1, \frac{2d}{d+2} \right\} < p < d, \quad \max \left\{ 2, 1 + \frac{p}{2} \right\} < \sigma \leq 1 + \frac{1}{2} \frac{dp}{d-p};$$

2.

$$d \leq p, \quad \max \left\{ 2, 1 + \frac{p}{2} \right\} < \sigma < \infty.$$

Então, existe $T_{\max} \in]0, T[$, tal que para todo $t \in]0, T_{\max}[$, obtém-se

$$\begin{aligned} & \|u_t\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla u\|_{L^\infty(0,t;L^p(\Omega))}^p + \|u\|_{L^\infty(0,t;L^{2(\sigma-2)}(\Omega))}^p \\ & \leq C \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + 1 \right), \end{aligned}$$

com a constante $C = C(d, T, |\Omega|, B, p, \sigma)$.

Teorema 3.4 (Existência). Suponha que

$$f \in L^2(Q), \quad u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad g, g' \in L^2(0, T), \quad p > \max \left\{ 1, \frac{2d}{2+d} \right\}.$$

Se Θ satisfaz a condição de crescimento (3.3), então o problema (3.1) tem pelo menos uma solução fraca no sentido da Definição 3.1. Pelas condições do Lema 3.2, esta é uma solução global que existe em todo intervalo de tempo $[0, T]$ e, pelas condições do Lema 3.3, a solução existe em todo intervalo de tempo $]0, T[$ com $T < T_{\max}$.

Teorema 3.5 (Unicidade). Vamos supor que

$$\begin{aligned} & 1 < p < \infty, \quad g, g' \in L^2(0, T), \\ & |\Theta(x, t, u_1) - \Theta(x, t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|, \quad L = \operatorname{const} > 0. \end{aligned}$$

Então, o problema (3.1) tem no máximo uma solução fraca.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

3.1.2 Propagação com velocidade finita

Uma solução $u(x, t)$ ter propriedade de propagação com velocidade finita, significa dizer que, se a solução inicial é nula numa bola, então existe um intervalo de tempo no qual a região onde a solução é nula varia com velocidade finita.

Definição 3.6 (Propagação com velocidade finita). Seja $u_0 = 0$ em $B_r(x_0)$. Diz-se que a solução possui a propriedade de propagação com velocidade finita, se existir uma função $\rho(t) > 0$ e $t_* > 0$, tal que

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \text{em } B_{\rho(t)}(x_0), \quad \forall t \in [0, t_*].$$

A propriedade de propagação com velocidade finita é local e depende apenas da estrutura não linear do problema (3.1), conforme veremos mais adiante.

Suponhamos que a solução fraca do problema (3.1) satisfaz

$$\bar{b}(\rho, T) + E(\rho_0, T) = \operatorname{ess\,sup}_{(0, T)} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(B_{\rho_0})}^2 + \int_{Q_{\rho_0, T}} |\nabla u|^p dx dt \leq L, \quad (3.5)$$

onde L é uma constante finita e

$$\begin{aligned} E(\rho, t) &= \int_0^t \int_{S_\rho} |\nabla u|^p dS dt, \quad b(\rho, t) = \int_{B_\rho} u^2(x, t) dx, \quad \bar{b}(\rho, t) = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in (0, t)} b(\rho, \tau), \\ B_{\rho_0}(x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| < \rho\}, \quad S_\rho = \partial B_\rho(x_0), \quad Q_{\rho, t} = B_\rho(x_0) \times]0, t[, \\ S_{\rho, t} &= S_\rho(x_0) \times]0, t[, \quad \rho \in]0, \rho_0[. \end{aligned}$$

Lema 3.7. Seja $B_{\rho_0}(x_0) \subset \Omega$. Suponha que

$$u_0(x) = 0 \quad \text{em } B_{\rho_0}, \quad f \equiv 0 \quad \text{em } Q_{\rho_0}, \quad g \in L^p(0, T).$$

Então, para cada solução local fraca do problema (3.1) satisfazendo a condição (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} b(\rho, t) + E(\rho, t) - \int_0^t \int_{B_\rho} u \Theta(x, t, u) dx dt \\ &= \int_0^t \int_{S_\rho} u(\tau) |\nabla u(\tau)|^{p-2} \nabla u(\tau) \cdot \nu dS d\tau \\ & \quad - \int_0^t \int_{B_\rho} \nabla u(\tau) \int_0^\tau g(\tau - s) |\nabla u(s)|^{p-2} \nabla u(s) ds dx d\tau \\ & \quad + \int_0^t \int_{S_\rho} u(\tau) \int_0^\tau g(\tau - s) |\nabla u(s)|^{p-2} \nabla u(s) \cdot \nu ds dS d\tau, \end{aligned}$$

$\forall \rho \in]0, \rho_0[, \forall t \in]0, T[,$ onde ν denota o vetor unitário normal de S_ρ .

Lema 3.8. Sejam satisfeitas as condições do Lema 3.7 e considere

$$s \Theta(x, t, s) \leq 0 \quad \text{para } s \in \mathbb{R} \text{ e } (x, t) \in Q_{\rho_0, T}. \quad (3.6)$$

Então, $E(\rho, t)$ satisfaz a desigualdade diferencial para $\rho \in]0, \rho_0[,$ tal que

$$\frac{1}{2} b(\rho, t) + E(\rho, t) \leq \left(1 + t^{\frac{1}{p'}} \|g\|_{L^p(0, T)}\right) \|u\|_{L^p(S_{\rho, t})} (E_\rho(\rho, t))^{\frac{1}{p'}} + t^{\frac{1}{p'}} \|g\|_{L^p} E(\rho, t),$$

onde E e b são funções de ρ e dependem de t como parâmetro.

Teorema 3.9 (Propagação com velocidade finita). Seja $p > 2$ e $g \in L^p(0, T)$. Sejam

$$t_* = \min \left\{ 1, \frac{1}{(2\|g\|_{L^p(0,T)})^{\frac{p}{p-1}}} \right\}, \quad \rho_0^{-p\delta} \leq t_*, \quad \delta = - \left(1 + \frac{d(p-2)}{2p} \right).$$

Suponha $u_0 = 0$ em B_{ρ_0} e $f = 0$ em $Q_{\rho_0, T}$. Se Θ satisfaz a condição (3.6), então toda solução local fraca do problema (3.1) em $Q_{\rho_0, T}$ satisfazendo (3.5) possui a propriedade de propagação com velocidade finita

$$u(x, t) = 0, \quad B_{\rho(t)}(x_0), \quad t \in]0, t_*[,$$

onde $\rho(t)$ é dado por

$$\rho^\mu(t) = \max \left\{ 0, \rho_0^\mu - \frac{M\mu t_*^{\frac{1}{p-1}}}{1-\gamma} L^{1-\gamma} t^{\frac{1-\theta}{p-1}} \right\},$$

com as constantes definidas por

$$M = \left(CL_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \right)^{\frac{p}{p-1}}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{\theta}{p} - \frac{1-\theta}{2} \right) \frac{p}{p-1} \in]0, 1[\quad (3.7)$$

e

$$0 \leq E^{1-\gamma}(\rho, t) \leq E^{1-\gamma}(\rho_0, t) - \frac{1-\gamma}{M} t^{-\frac{1-\theta}{p-1}} t_*^{-\frac{1}{p-1}} \frac{1}{\mu} (\rho_0^\mu - \rho^\mu), \quad \mu = 1 - \frac{p\delta}{p-1} > 1. \quad (3.8)$$

3.1.3 Tempo de espera

Dizer que uma solução $u(x, t)$ tem propriedade de tempo de espera, significa dizer que, se a solução inicial é nula numa bola, então existe um intervalo de tempo finito em que a região onde a solução é nula, se mantém constante.

Definição 3.10 (Tempo de espera). Seja $u_0 = 0$ numa bola $B_r(x_0)$ e assumimos que $B_r(x_0)$ toca o conjunto $\text{supp } u_0$ no ponto ξ . Diz-se que a solução $u(x, t)$ tem propriedade de tempo de espera no ponto ξ , se $u(x, t) = 0$ em $B_r(x_0)$ para todo $t \in [0, t_*]$.

Considere a situação em que existem $R > 0$ e $\rho_0 \in]0, R[$, tais que para algum ponto $x_0 \in \Omega$, então

$$B_R \subseteq \Omega, \quad u_0 \equiv 0 \text{ em } B_{\rho_0}, \quad f \equiv 0 \text{ em } Q_{\rho_0, T}. \quad (3.9)$$

Os suportes de u_0, f estão contidos em $\Omega \setminus B_{\rho_0}$ e $Q \setminus Q_{\rho_0, T}$. Supondo agora que u_0 e f são suficientemente planos próximo à fronteira de seus suporte, então existe $\epsilon > 0$, tal que

$$F(\rho, t) = \|u_0\|_{L^2(B_\rho)}^2 + \|f\|_{L^2(Q_{\rho, t})}^2 \leq \epsilon \left(\rho - \rho_0 \right)_+^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad \forall \rho \in]\rho_0, R[, \quad t \in]0, T[, \quad (3.10)$$

com expoente

$$\nu = \frac{p}{2(p-1)} \left(1 + \frac{p-2}{p} \theta \right) < 1$$

e a condição

$$\theta = \frac{d(p-2)+2}{d(p-2)+2p} < 1 \quad \text{e} \quad \delta = - \left(1 + \frac{d(p-2)}{2p} \right) < -1.$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Teorema 3.11 (Tempo de espera). Seja u uma solução local fraca do problema (3.1), com $p > 2$ e $\Theta(x, t, u)$ satisfazendo a condição (3.6). Seja a condição (3.5) satisfeita com a constante L . Assume que os dados u_0, f satisfazem (3.9) e (3.10) com a constante ϵ . Se ϵ for suficientemente pequeno, então existe $t_* \in]0, T[$ que depende de $L, \|g\|_{L^p(0, T)}$ e ϵ , tal que

$$u(x, t) = 0, \quad \text{em } B_{\rho_0} \times]0, t_*[.$$

3.1.4 Exemplo de soluções que não obedecem ao princípio do máximo

Para a equação do calor temos o seguinte Teorema.

Teorema 3.12 (Princípio do máximo forte para a equação do calor). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto e limitado. Seja $u : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $u|_{\Omega \times]0, T[} \in C^{2,1}(\Omega \times]0, T[)$ satisfaz

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times]0, T[.$$

Então

$$\max_{(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]} u = \max_{(x,t) \in \partial\Omega \times [0, T] \cup \bar{\Omega} \times \{0\}} u \quad (3.11)$$

e

$$\min_{(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]} u = \min_{(x,t) \in \partial\Omega \times [0, T] \cup \bar{\Omega} \times \{0\}} u. \quad (3.12)$$

De um modo geral, dizemos que a solução de um problema parabólico obedece ao princípio do máximo, se satisfizer (3.11) e (3.12).

O exemplo a seguir mostra que em geral as soluções do problema linear (3.1) não obedecem ao princípio do máximo para o caso $p = 2$.

Considere o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \int_0^t g(t-s) \Delta u ds, & Q = \Omega \times]0, T[, \\ u = 0, & \partial\Omega, \\ u(x, 0) = c_0 \psi(x), & \Omega, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde ψ é uma função própria não negativa e limitada do problema de Dirichlet para o operador

$$-\Delta \psi = \lambda \psi \text{ em } \Omega, \quad \psi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad \lambda > 0.$$

Para mais pormenores sobre a existência e propriedades de ψ podemos sugerir, por exemplo, o livro [35] na secção 6.5.

Suponhamos que a solução do problema (3.13) tem a forma $u = c(t)\psi(x)$ com o coeficiente $c(t)$ definido pelas condições

$$c'(t) + \lambda c(t) = -\lambda \int_0^t g(t-s)c(s)ds, \quad c(0) = c_0. \quad (3.14)$$

Assumimos que o termo de memória tem a forma $g(s) = \mu e^{-\alpha s}$ com $\mu = \text{const}$ e $\alpha = \text{const} > 0$, de modo que $g'(t-s) = -\alpha g(t-s)$. Mostra-se que para diferentes escolhas dos parâmetros μ e α , o problema (3.1) com a mesma função inicial não negativa e limitada $u_0(x) = c_0 \psi(x)$, $c_0 = \text{const} > 0$, admite soluções ilimitadas, soluções que

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

mudam de sinal ou oscilam em torno de zero quando $t \rightarrow \infty$. Logo não obedece ao princípio do máximo. Diferenciando o problema (3.13) em relação a t , temos

$$c''(t) + (\lambda + \alpha)c'(t) + \lambda(\mu + \alpha)c(t) = 0, \quad c(0) = c_0, \quad c'(0) = -\lambda c_0. \quad (3.15)$$

A única solução do problema, é apresentada explicitamente para os vários casos, conforme abaixo se enumera:

1. Se

$$(\lambda + \alpha)^2 > 4\lambda(\mu + \alpha),$$

a equação caraterística tem duas raízes reais diferentes, tal que

$$s_{1,2} = -\frac{\lambda + \alpha}{2} \pm \sqrt{(\lambda + \alpha)^2 - 4\lambda(\mu + \alpha)},$$

onde a solução é dada por

$$c(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}, \quad a_i = \text{const.}$$

Para a solução da equação, existem três possibilidades:

- (a) Se $\mu + \alpha < 0$, então $c(t)$ é ilimitado quando $t \rightarrow \infty$;
- (b) Se $\mu + \alpha = 0$, então $c(t) = a_1 + a_2 e^{-(\lambda + \alpha)t} \rightarrow a_1$ quando $t \rightarrow \infty$;
- (c) Se $\mu + \alpha > 0$, então $c(t)$ decai exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$.

2. No caso

$$(\lambda + \alpha)^2 = 4\lambda(\mu + \alpha),$$

a equação caraterística tem apenas uma raiz real $s = -\frac{\lambda + \alpha}{2}$ e

$$c(t) = c_0 e^{-\frac{\lambda + \alpha}{2}t} - \frac{c_0}{2}(\lambda - \alpha)t e^{-\frac{\lambda + \alpha}{2}t} = c_0 \left(1 - (\lambda - \alpha)\frac{t}{2} \right) e^{-\frac{\lambda + \alpha}{2}t}.$$

Se $\alpha < \lambda$, a solução é positiva para $t < \frac{2}{\lambda - \alpha}$ e negativa se $t > \frac{2}{\lambda - \alpha}$.

3. Se

$$(\lambda + \alpha)^2 < 4\lambda(\mu + \alpha),$$

as raízes da equação caraterística são números complexos

$$s_{1,2} = -\frac{\lambda + \alpha}{2} \pm iR, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda(\mu + \alpha) - (\lambda + \alpha)^2}$$

e a solução do problema (3.15) é representada na forma

$$c(t) = c_0 e^{-\frac{\lambda + \alpha}{2}t} \cos(Rt) - \frac{c_0}{2R}(\lambda - \alpha)e^{-\frac{\lambda + \alpha}{2}t} \sin(Rt).$$

Esta solução decai exponencialmente, mas não preserva o sinal se $\alpha = \lambda$ e μ satisfizer a desigualdade $\mu > 0$.

3.2 Equação integrodiferencial sem termo não linear

Nesta secção, apresentamos o problema a ser estudado neste trabalho. Vamos considerar a equação sem termo não linear com $p > 2$ e transformá-la na forma de um problema auxiliar, apresentando também a respetiva formulação fraca.

Considere a equação integrodiferencial evolutiva com a condição homogênea de Dirichlet na fronteira

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \int_0^t g(t-s)\Delta_p u(x,s)ds + f(x,t), & \forall (x,t) \in Q = \Omega \times]0,T], \\ u(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.16)$$

onde u_0 , g e f são funções dadas, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um domínio limitado com fronteira Lipschitz-contínua. O p -Laplaciano $\Delta_p u$ é dado por

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 2 < p < \infty$$

e

$$y(x,t) = \int_0^t g(t-s)\Delta_p u(x,s)ds$$

é o termo de memória da equação integrodiferencial evolutiva.

O problema (3.16) aparece, por exemplo, na descrição matemática de propagação de calor em materiais com memória, onde o fluxo de calor depende da história do processo. Considere o problema (3.16) e assumindo

$$g, g' \in L^2(0,T), \quad f \in L^2(Q), \quad u_0 \in L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega),$$

está provado em [8] que o problema (3.16) tem uma solução fraca e que esta é única. Para retirar a conclusão anterior basta verificar que $\Theta \equiv 0$ verifica as condições exigidas.

3.2.1 Problema auxiliar

Prova-se facilmente que se a solução u tiver regularidade suficiente, o termo de memória satisfaz a equação integral

$$y(x,t) = - \int_0^t g(t-s)y(x,s)ds + f_2(x,t,u), \quad (3.17)$$

onde f_2 é o operador não linear não local da forma

$$\begin{aligned} f_2(x,t,u(x,t)) = & u(x,t)g(0) - u_0(x)g(t) + \int_0^t g'(t-s)u(x,s)ds \\ & - \int_0^t g(t-s)f(x,s)ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De facto pegando na equação

$$u_t - \Delta_p u = \int_0^t g(t-s)\Delta_p u(x,s)ds + f(x,t)$$

e escrevendo-a na forma

$$\Delta_p u = - \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds + u_t - f(x, t),$$

fazendo convolução com g vem

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds \\ &= - \int_0^t g(t-s) \int_0^s g(s-\tau) \Delta_p u(x, \tau) d\tau ds + \int_0^t g(t-s) u_s(x, s) ds \\ & - \int_0^t g(t-s) f(x, s) ds. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Integrando por partes o segundo termo do lado direito da equação (3.19), temos

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds \\ &= - \int_0^t g(t-s) \int_0^s g(s-\tau) \Delta_p u(x, \tau) d\tau ds + g(0)u(x, t) - g(t)u_0(x) \\ & + \int_0^t g'(t-s)u(x, s) ds - \int_0^t g(t-s)f(x, s) ds, \end{aligned}$$

o que significa que

$$y(x, t) = \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds,$$

satisfaz a equação

$$y(x, t) = - \int_0^t g(t-s)y(x, s) ds + f_2(x, t),$$

com $f_2(x, t)$ definido em (3.18).

Suponhamos o problema (3.16), vamos dividir a equação

$$u_t - \Delta_p u = \int_0^t g(t-s) \Delta_p u(x, s) ds + f(x, t), \quad (3.20)$$

no sistema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = y + f(x, t), \\ y = - \int_0^t g(t-s)y(x, s) ds + f_2(x, t, u(x, t)). \end{cases} \quad (3.21)$$

Para a construção da solução do problema (3.16), vamos considerar o problema auxiliar de encontrar o par (u, y) que satisfaz as condições

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = y(x, t) + f(x, t), & \forall (x, t) \in Q, \\ y(x, t) = - \int_0^t g(t-s)y(x, s) ds + f_2(x, t, u), & \forall (x, t) \in Q, \\ u(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \Omega, \\ y(x, 0) = 0, & \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.22)$$

Relativamente às condições iniciais para y , olhando para equação (3.17) facilmente concluímos

$$y(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

3.3 Formulação fraca do problema

Considere o espaço das funções teste $H_0^1(\Omega)$. Se multiplicarmos a primeira equação do problema (3.22) por $w \in H_0^1(\Omega)$ e integrarmos em Ω , temos

$$\int_{\Omega} u_t w dx - \int_{\Omega} \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) w dx = \int_{\Omega} y w dx + \int_{\Omega} f w dx. \quad (3.23)$$

Aplicando o Teorema de Green no segundo termo do lado esquerdo da equação (3.23) e usando a definição do espaço $H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$\int_{\Omega} u_t w dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} y w dx + \int_{\Omega} f w dx.$$

Se multiplicarmos a segunda equação do problema (3.22) por $v \in L^2(\Omega)$ e integrarmos em Ω , obtém-se

$$\int_{\Omega} y v dx = - \int_{\Omega} v \int_0^t g(t-s) y(x, s) ds dx + \int_{\Omega} f_2(x, t, u) v dx.$$

Então, ficamos com o sistema

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_t w dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} y w dx + \int_{\Omega} f w dx, \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} y v dx = - \int_{\Omega} v \int_0^t g(t-s) y(x, s) ds dx + \int_{\Omega} f_2 v dx, \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.24)$$

Um par de funções limitadas e mensuráveis $(u(x, t), y(x, t))$ é uma solução fraca do problema de valor inicial (3.22), com dado inicial u_0 limitado e mensurável, se o sistema (3.24) for válido para todos os $(w, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Definição 3.13. Diz-se que (u, y) é solução fraca do problema integrodiferencial evolutivo (3.22), se:

1. $u \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(Q)$, $\nabla u \in L^p(Q)$, $y \in L^2(Q)$, $u(x, 0) = u_0(x)$, $y(x, 0) = 0$, $x \in \Omega$;
2. Para cada função teste, $(w, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, as igualdades no sistema (3.24) são válidas.

Assim, daqui em diante, assumimos que o problema (3.22) possui uma única solução fraca, com regularidade suficiente para realizar os cálculos necessários nas próximas secções.

Capítulo 4

Discretização no Espaço

Neste capítulo, apresentamos o desenvolvimento da discretização da variável espacial e demonstra-se a existência, unicidade e estabilidade de soluções e a convergência do problema semidiscreto.

4.1 Solução do problema semidiscreto

O problema semidiscreto associado a (3.22), é encontrar $(u^h, y^h) \in (\mathcal{S}^h)^2$, $\forall t \in [0, T]$, de tal modo que $u^h \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, $u_t^h \in L^2(Q)$, $y \in L^2(Q)$ e satisfaz as condições

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_t^h w^h dx + \int_{\Omega} |\nabla u^h|^{p-2} \nabla u^h \cdot \nabla w^h dx = \int_{\Omega} y^h w^h dx + \int_{\Omega} f w^h dx, \forall w^h \in \mathcal{S}^h, \\ \int_{\Omega} y^h v^h dx = - \int_{\Omega} v^h \int_0^t g(t-s) y^h(x, s) ds dx + \int_{\Omega} f_2^h v^h dx, \forall v^h \in \mathcal{S}^h, \end{cases} \quad (4.1)$$

com

$$u^h(x, 0) = u_0^h = \Pi_h u_0, \quad y^h(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

e

$$u^h(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T].$$

Nota-se que o problema (4.1) tem uma solução. De facto, da segunda equação obtemos uma solução $y^h(u^h)$ que é substituída na primeira equação para dar uma solução $u^h(x, t)$. Substituindo a última solução em $y^h(u^h)$, dá-nos a solução $y^h(x, t)$ (para mais detalhes ver [8]).

A seguir vamos apresentar o Teorema que nos permite concluir que o problema semidiscreto (4.1) tem uma única solução.

Teorema 4.1 (Unicidade). Se $g, g' \in L^\infty(0, T)$, então a solução do problema semidiscreto (4.1) é única.

Demonstração

Suponha que (u_1^h, y_1^h) e (u_2^h, y_2^h) são duas soluções do problema semidiscreto (4.1). Subtraindo a equação de y_2^h da equação de y_1^h , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h) v^h dx &= - \int_{\Omega} v^h \int_0^t g(t-s) (y_1^h - y_2^h) ds dx + g(0) \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h) v^h dx \\ &\quad + \int_{\Omega} v^h \int_0^t g'(t-s) (u_1^h - u_2^h) ds dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Seja $v^h = y_1^h - y_2^h \in \mathcal{S}^h$. Como g e g' são limitados, podemos aplicar a desigualdade de Young em (4.2) e assim obter

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{6} \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx + C \int_0^t \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx ds + \frac{1}{6} \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx + \frac{1}{6} \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx + C \int_0^t \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx \\ & \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx ds + C \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx + C \int_0^t \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx ds. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aplicando o lema de Gronwall em (4.3), tem-se

$$\int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx \leq C \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx + C \int_0^t \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx ds. \quad (4.4)$$

Usando os mesmos procedimentos para o caso u_1^h e u_2^h , temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ((u_1^h)_t - (u_2^h)_t) w^h dx + \int_{\Omega} \left(|\nabla u_1^h|^{p-2} \nabla u_1^h - |\nabla u_2^h|^{p-2} \nabla u_2^h \right) \cdot \nabla w^h dx \\ & = \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h) w^h dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Seja $w^h = u_1^h - u_2^h \in \mathcal{S}^h$. Aplicando a desigualdade de Young em (4.5), usando a equação (4.4) e o Lema 2.2, tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx + C \int_{\Omega} |\nabla u_1^h - \nabla u_2^h|^p dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx \leq C \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx + C \int_0^t \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx ds. \quad (4.6)$$

Integrando a equação (4.6) de 0 a t e observando que $u_1^h(x, 0) - u_2^h(x, 0) = 0$, obtém-se

$$\int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx ds + C \int_0^t \int_0^s \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx d\xi ds,$$

o que nos permite escrever

$$\int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx ds + Ct \int_0^t \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx ds,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx \leq C(1+t) \int_0^t \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx ds.$$

Agora, seja $\zeta(t) = \int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx \geq 0$. Isso implica que $\zeta(t) \leq C \int_0^t \zeta(s) ds$ e $\zeta(0) = 0$. Pelo lema de Gronwall, $\zeta(t) = 0$ para cada $t \in [0, T]$, ou seja,

$$\int_{\Omega} (u_1^h - u_2^h)^2 dx = 0, \quad u_1^h = u_2^h \text{ em } L^2(\Omega).$$

Voltando a y , da equação (4.4), obtemos

$$\int_{\Omega} (y_1^h - y_2^h)^2 dx = 0, \quad \text{para cada } t \in [0, T],$$

que prova o pretendido. ■

O Teorema a seguir permite-nos constatar que a solução do problema semidiscreto (4.1) é estável.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Teorema 4.2 (Estabilidade). Seja $(u^h, y^h) \in \mathcal{S}^h \times \mathcal{S}^h$, solução do problema (4.1) e $g, g' \in L^\infty(0, T)$. Então, para cada $t \in [0, T]$

$$\|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u^h\|_{L^p(Q)}^p \leq C\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(Q)}^2 \quad (4.7)$$

e

$$\|y^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(Q)}^2,$$

onde

$$C = C(T, \|g\|_{L^\infty(0,T)}, \|g'\|_{L^\infty(0,T)}).$$

Demonstração

Como y^h é solução do problema (4.1), então

$$\int_{\Omega} y^h v^h dx = - \int_{\Omega} v^h \int_0^t g(t-s) y^h(x, s) ds dx + \int_{\Omega} f_2 v^h dx.$$

Para $v^h = y^h \in \mathcal{S}^h$, então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (y^h)^2 dx &= - \int_{\Omega} y^h(x, t) \int_0^t g(t-s) y^h(x, s) ds dx + g(0) \int_{\Omega} u^h y^h dx \\ &\quad - g(t) \int_{\Omega} u_0^h y^h dx + \int_0^t g'(t-s) \int_{\Omega} u^h(x, s) y^h(x, t) dx ds \\ &\quad - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} f(x, s) y^h(x, t) dx ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aplicando a desigualdade de Young na equação (4.8), temos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (y^h)^2 dx \\ &\leq - \int_{\Omega} y^h(x, t) \int_0^t g(t-s) y^h(x, s) ds dx + C|g(0)|^2 \int_{\Omega} (u^h)^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y^h)^2 dx \\ &\quad + C|g(t)|^2 \int_{\Omega} (u_0^h)^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y^h)^2 dx + C \int_{\Omega} \left(\int_0^t g'(t-s) u^h(x, s) ds \right)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y^h)^2 dx + C \int_{\Omega} \left(\int_0^t g(t-s) f(x, s) ds \right)^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y^h)^2 dx \end{aligned}$$

e usando o facto de g e g' serem limitados, tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} (y^h)^2 dx \\ &\leq - \int_{\Omega} y^h(x, t) \int_0^t g(t-s) y^h(x, s) ds dx + C \int_{\Omega} (u^h)^2 dx + C \int_{\Omega} (u_0^h)^2 dx \\ &\quad + C \int_0^t \int_{\Omega} (u^h(x, s))^2 dx ds + C \int_0^t \int_{\Omega} (f(x, s))^2 dx ds \\ &\leq - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} y^h(x, t) y^h(x, s) dx ds + C \int_{\Omega} (u^h)^2 dx + C \int_{\Omega} (u_0^h)^2 dx \\ &\quad + C \int_0^t \int_{\Omega} (u^h(x, s))^2 dx ds + C \int_0^t \int_{\Omega} (f(x, s))^2 dx ds. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aplicando a desigualdade de Young em (4.9), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y^h(x, t))^2 dx \\ & \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (y^h(x, s))^2 dx ds + \frac{1}{4} \int_{\Omega} (y^h(x, t))^2 dx + C \int_{\Omega} (u^h)^2 dx + C \int_{\Omega} (u_0^h)^2 dx \\ & + C \int_0^t \int_{\Omega} (u^h)^2 dx ds + C \int_0^t \int_a f^2 dx ds, \end{aligned} \quad (4.10)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (y^h)^2 dx & \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (y^h(x, s))^2 dx ds + C \int_{\Omega} (u^h)^2 dx + C \int_{\Omega} (u_0^h)^2 dx \\ & + C \int_0^t \int_{\Omega} (u^h)^2 dx ds + C \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx ds. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aplicando o lema de Gronwall em (4.11), temos

$$\int_{\Omega} (y^h)^2 dx \leq C \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2. \quad (4.12)$$

Agora, considerando a primeira equação do problema (4.1), com $w^h = u^h$, tem-se

$$\int_{\Omega} u_t^h u^h dx + C \int_{\Omega} |\nabla u^h|^p dx = \int_{\Omega} y^h u^h dx + \int_{\Omega} f u^h dx. \quad (4.13)$$

Aplicando a desigualdade de Young em (4.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^h)^2 dx + C \int_{\Omega} |\nabla u^h|^p dx & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y^h)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^h)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^h)^2 dx, \end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\nabla u^h\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \leq \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + C \int_0^t \|u^h(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\nabla u^h\|_{L^p(\Omega)}^p \\ & \leq C \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Integrando a equação (4.14) de 0 a t , temos

$$\begin{aligned}
 & \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\nabla u^h\|_{L^p(Q)}^p \\
 & \leq C \int_0^t \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C(t)\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \int_0^s \|u^h(x, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau ds \\
 & + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\
 & \leq C \int_0^t \|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|u^h(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\
 & \leq C \int_0^t \|u^h(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Ignorando o segundo termo do lado esquerdo, já que é não-negativo e aplicando o lema de Gronwall em (4.15), tem-se

$$\|u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2.$$

Usando esta estimativa em (4.15), completa a prova de (4.7). Finalmente, da equação (4.12), obtém-se

$$\|y^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2,$$

onde

$$C = C(T, \|g\|_{L^\infty(0,T)}, \|g'\|_{L^\infty(0,T)}),$$

como desejado. ■

O Teorema a seguir permite-nos constatar que as soluções dos problemas (3.24) e (4.1) convergem.

Teorema 4.3 (Convergência). Sejam (u, y) e (u^h, y^h) , soluções dos problemas (3.24) e (4.1), respetivamente. Se $g, g' \in L^\infty(0, T)$, $u_0 \in H^{r+1}(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$, então, para cada $t \in [0, T]$

$$\|u(x, t) - u^h(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\frac{rp}{2(p-1)}} \tag{4.16}$$

e

$$\|y(x, t) - y^h(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\frac{rp}{2(p-1)}}, \tag{4.17}$$

onde a constante C não depende de h mas pode depender de g, u, y e suas derivadas.

Demonstração

Seja $t \in [0, T]$. Como (u, y) e (u^h, y^h) são soluções dos problemas (3.24) e (4.1), respetivamente, subtraindo a segunda equação de (4.1) à segunda equação de (3.24), com $v = v^h \in \mathcal{S}^h$, temos

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (y - y^h)v^h dx \\
 & = - \int_{\Omega} v^h \int_0^t g(t-s)(y(x, s) - y^h(x, s)) ds dx + \int_{\Omega} g(0)(u - u^h)v^h dx \\
 & - \int_{\Omega} g(t)(u_0 - u_0^h)v^h dx + \int_{\Omega} v^h \int_0^t g'(t-s)(u(x, s) - u^h(x, s)) ds dx.
 \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Escrevendo $(y - y^h) = (y - \Pi_h y) + (\Pi_h y - y^h) = \varphi + \psi$ e $(u - u^h) = (u - \Pi_h u) + (\Pi_h u - u^h) = \rho + \theta$, com $\Pi_h u$ a interpolação de u em \mathcal{S}^h , tem-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \psi v^h dx \\
 &= - \int_{\Omega} \varphi v^h dx - \int_{\Omega} v^h \int_0^t g(t-s) \varphi(x, s) ds dx + g(0) \int_{\Omega} \theta v^h dx \\
 &+ g(0) \int_{\Omega} \rho v^h dx - g(t) \int_{\Omega} (u_0 - u_0^h) v^h dx - \int_{\Omega} v^h \int_0^t g(t-s) \psi(x, s) ds dx \\
 &+ \int_{\Omega} v^h \int_0^t g'(t-s) \rho(x, s) ds dx + \int_{\Omega} v^h \int_0^t g'(t-s) \theta(x, s) ds dx. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Fazendo $v^h = \psi \in \mathcal{S}^h$ e aplicando a desigualdade de Young em (4.18), obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \psi^2 dx \\
 &\leq C(\epsilon) \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi^2 dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} \theta^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi^2 dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} \rho^2 dx \\
 &+ \epsilon \int_{\Omega} \psi^2 dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} (u_0 - u_0^h)^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi^2 dx \\
 &+ C(\epsilon) \int_{\Omega} \int_0^t \varphi^2 ds dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi^2 dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} \int_0^t \rho^2 ds dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi^2 dx \\
 &+ C(\epsilon) \int_{\Omega} \int_0^t \theta^2(x, s) ds dx + \epsilon \int_{\Omega} \psi^2 dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} \int_0^t \psi^2(x, s) ds dx,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \psi^2 dx \\
 &\leq C(\epsilon) \int_{\Omega} \varphi^2 dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} \rho^2 dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} \theta^2 dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} (u_0 - u_0^h)^2 dx \\
 &+ C(\epsilon) \int_{\Omega} \int_0^t \varphi^2 ds dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} \int_0^t \rho^2 ds dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} \int_0^t \theta^2(x, s) ds dx \\
 &+ C(\epsilon) \int_{\Omega} \int_0^t \psi^2(x, s) ds dx.
 \end{aligned}$$

Escolhendo ϵ de forma adequada e usando o Lema 2.13, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \psi^2 dx &\leq Ch^{2(r+1)} + C \int_{\Omega} \theta^2 dx + C \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx ds \\
 &+ C \int_0^t \int_{\Omega} \psi^2(x, s) dx ds. \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

Aplicando o lema de Gronwall em (4.19), temos

$$\int_{\Omega} \psi^2 dx \leq Ch^{2(r+1)} + C \int_{\Omega} \theta^2 dx + C(1+t) \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx ds. \tag{4.20}$$

Agora, subtraindo a primeira equação de (4.1) à primeira equação de (3.24), com $w = w^h \in \mathcal{S}^h$, tem-se

$$\int_{\Omega} (u_t - u_t^h) w^h dx + \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u^h|^{p-2} \nabla u^h \right) \cdot \nabla w^h dx = \int_{\Omega} (y - y^h) w^h dx,$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \theta_t w^h dx + \int_{\Omega} \left(|\nabla \Pi_h u|^{p-2} \nabla \Pi_h u - |\nabla u^h|^{p-2} \nabla u^h \right) \cdot \nabla w^h dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi w^h dx + \int_{\Omega} \psi w^h dx - \int_{\Omega} \rho_t w^h dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(|\nabla \Pi_h u|^{p-2} \nabla \Pi_h u - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \cdot \nabla w^h dx. \end{aligned}$$

Fazendo $w^h = \theta \in \mathcal{S}^h$, aplicando a desigualdade de Young e o Lema 2.2, obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx + C \int_{\Omega} |\nabla \theta|^p dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^2 dx \\ & + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla \theta|^p dx + C(\epsilon) \int_{\Omega} |\nabla \rho|^{\frac{p}{p-1}} dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx + C \int_{\Omega} |\nabla \theta|^p dx \\ & \leq C \int_{\Omega} \varphi^2 dx + C \int_{\Omega} \theta^2 dx + C \int_{\Omega} \psi^2 dx + C \int_{\Omega} \rho_t^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla \theta|^p dx \\ & + C(\epsilon) \int_{\Omega} |\nabla \rho|^{\frac{p}{p-1}} dx. \end{aligned}$$

Escolhendo ϵ de forma adequada e usando a estimativa de (4.20), temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx \\ & \leq C \int_{\Omega} \varphi^2 dx + Ch^{2(r+1)} + C \int_{\Omega} \theta^2 dx + C \int_{\Omega} \rho_t^2 dx + C \int_{\Omega} |\nabla \rho|^{\frac{p}{p-1}} dx \\ & + C \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Aplicando o Lema 2.13 em (4.21), tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \theta^2 dx \leq Ch^{2(r+1)} + Ch^{\frac{rp}{p-1}} + C \int_{\Omega} \theta^2 dx + C \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx ds. \quad (4.22)$$

Integrando a equação (4.22) em relação a t , obtém-se

$$\int_{\Omega} \theta^2 dx \leq Ch^{2(r+1)} + Ch^{\frac{rp}{p-1}} + C \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx ds + C \int_0^t \int_0^{\xi} \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx d\xi ds,$$

o que nos permite escrever

$$\int_{\Omega} \theta^2 dx \leq Ch^{2(r+1)} + Ch^{\frac{rp}{p-1}} + C \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx ds + Ct \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx ds,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \theta^2 dx \leq Ch^{2(r+1)} + Ch^{\frac{rp}{p-1}} + C(1+t) \int_0^t \int_{\Omega} \theta^2(x, s) dx ds. \quad (4.23)$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Aplicando o lema de Gronwall em (4.23), obtemos a desigualdade

$$\int_{\Omega} \theta^2 dx \leq Ch^{2(r+1)} + Ch^{\frac{rp}{p-1}}. \quad (4.24)$$

A equação (4.24) com a estimativa de ρ dada no Lema 2.13 prova (4.16). Substituindo a equação (4.24) em (4.20) e adicionando a estimativa de φ , obtemos (4.17) conforme o desejado. ■

A ordem de convergência obtida não é ótima, depende de p e da regularidade da solução. Quanto maior for o valor de p , menor a ordem de convergência, no entanto é limitada inferiormente por $\frac{r}{2}$. Se a solução tiver regularidade suficiente podemos obter uma ordem de convergência elevada aumentando o grau de aproximação.

Capítulo 5

Discretização no Tempo

Neste capítulo, apresentamos a discretização da variável tempo, a dedução do método de Crank-Nicolson e a formulação totalmente discreta do problema em estudo. Demonstra-se a existência, unicidade, estabilidade e a convergência de soluções discretas. É deduzida a ordem de convergência do método e é apresentado um método do ponto fixo para resolver o sistema de equações algébricas não linear.

O termo de memória será discretizado usando uma quadratura numérica e, para manter uma boa ordem de convergência, usamos o método de Crank-Nicolson juntamente com a quadratura dos Trapézios.

5.1 Método de Crank-Nicolson

Considere a partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, com passo $\delta = \frac{T}{N}$, de $[0, T]$. Avaliando (4.1), em $t = t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{t_{k+1}+t_k}{2}$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_t^h(x, t_{k+\frac{1}{2}}) w^h dx + \int_{\Omega} |\nabla u^h(x, t_{k+\frac{1}{2}})|^{p-2} \nabla u^h(x, t_{k+\frac{1}{2}}) \cdot \nabla w^h dx \\ &= \int_{\Omega} y^h(x, t_{k+\frac{1}{2}}) w^h dx + \int_{\Omega} f(x, t_{k+\frac{1}{2}}) w^h dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} y^h(x, t_{k+\frac{1}{2}}) v^h(x) dx \\ &= - \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} y^h(x, s) v^h(x) dx ds + g(0) \int_{\Omega} u^h(x, t_{k+\frac{1}{2}}) v^h(x) dx \\ & \quad - g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} u_0^h(x) v^h(x) dx + \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} u^h(x, s) v^h(x) dx ds \\ & \quad - \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} f(x, s) v^h(x) dx ds. \end{aligned}$$

Consideremos as aproximações

$$u_t^h(x, t_{k+\frac{1}{2}}) \approx \frac{u^h(x, t_{k+1}) - u^h(x, t_k)}{\delta} = \bar{\partial} u^{(k+\frac{1}{2})}, \quad 0 \leq k < N,$$

$$u^h(x, t_{k+\frac{1}{2}}) \approx \frac{u^h(x, t_{k+1}) + u^h(x, t_k)}{2} = \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})}, \quad 0 \leq k < N$$

e

$$y^h(x, t_{k+\frac{1}{2}}) \approx \frac{y^h(x, t_{k+1}) + y^h(x, t_k)}{2} = \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})}, \quad 0 \leq k < N.$$

Vamos agora aproximar os integrais no tempo, usando a quadratura dos Trapézios para que a ordem de precisão seja mantida. Para isso, aplica-se o Teorema 2.9 com

$$w(t) = g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t) \int_{\Omega} u^h(x, t) v^h(x) dx,$$

primeiro no intervalo $[0, t_k]$ com espaçamento δ e depois no intervalo $[t_k, t_{k+\frac{1}{2}}]$ com espaçamento $\frac{\delta}{2}$. Somando os dois e utilizando a aproximação de $u^h(x, t_{k+\frac{1}{2}})$, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} u^h(x, s) v^h(x) dx ds \\ & \approx \frac{\delta}{2} g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} u_0^h(x) v^h(x) dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} u^h(x, t_j) v^h(x) dx \\ & + \frac{3\delta}{4} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} u^h(x, t_k) v^h(x) dx + \frac{\delta}{8} g'(0) \int_{\Omega} u^h(x, t_k) v^h(x) dx \\ & + \frac{\delta}{8} g'(0) \int_{\Omega} u^h(x, t_{k+1}) v^h(x) dx = Q_{g'}(u^h). \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} y^h(x, s) v^h(x) dx ds \\ & \approx \frac{\delta}{2} g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} y_0^h(x) v^h(x) dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} y^h(x, t_j) v^h(x) dx \\ & + \frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} y^h(x, t_k) v^h(x) dx + \frac{\delta}{8} g(0) \int_{\Omega} y^h(x, t_k) v^h(x) dx \\ & + \frac{\delta}{8} g(0) \int_{\Omega} y^h(x, t_{k+1}) v^h(x) dx = Q_g(y^h). \end{aligned}$$

5.2 Formulação totalmente discreta

Para simplificar a notação, sempre que não houver perigo de confusão, iremos retirar o sobrescrito h e considerar uma função com o sobrescrito (j) , para representar esta função avaliada no instante $t = t_j$. O problema totalmente discreto é encontrar $(u^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \in (\mathcal{S}^h)^2$ solução das equações

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{\partial} u^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx + \int_{\Omega} \left| \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \cdot \nabla w^h dx &= \int_{\Omega} \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx \\ &+ \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx \quad (5.1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx \\ &= g(0) \int_{\Omega} \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx - g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} u_0^h(x) v^h dx - Q_g(y^h) + Q_{g'}(u^h) \\ & - I(f), \quad (5.2) \end{aligned}$$

onde

$$I(f) = \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} f(x, s) v^h(x) dx ds.$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Escrevendo a equação (5.2) na forma

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{8}g(0) \right) \int_{\Omega} y^{(k+1)} v^h dx \\
&= \left(\frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8}g(0) - \frac{1}{2} \right) \int_{\Omega} y^{(k)} v^h dx \\
&+ \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} y^{(j)} v^h dx + \frac{\delta}{2}g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} y_0 v^h dx + \left(-\frac{1}{2}g(0) \right. \\
&\left. - \frac{\delta}{8}g'(0) \right) \int_{\Omega} u^{(k+1)} v^h dx + \left(\frac{1}{2}g(0) - \frac{3\delta}{8}g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) - \frac{\delta}{8}g'(0) \right) \int_{\Omega} u^{(k)} v^h dx \\
&+ \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} u^{(j)} v^h dx + \left(-g(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\delta}{8}g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \right) \int_{\Omega} u_0^h v^h dx \\
&- \frac{\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(0)} v^h dx + \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(\frac{1}{2})} v^h dx \\
&+ \delta \sum_{j=1}^k g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{j+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(j+\frac{1}{2})} v^h dx + \frac{\delta}{2}g(0) \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx \tag{5.3}
\end{aligned}$$

é um sistema linear para $y^{(k+1)}$. Obtendo $y^{(k+1)}$ na equação (5.3), substituindo em (5.1), tem-se uma equação não linear para $u^{(k+1)}$ na forma

$$\begin{aligned}
& C \int_{\Omega} u^{(k+1)} w^h dx + \delta \int_{\Omega} |\nabla u^{(k+1)}|^{p-2} \nabla u^{(k+1)} \cdot \nabla w^h dx \\
&= C\delta \int_{\Omega} \mathcal{B} \left(x, u^{(0)}, \dots, u^{(k)}, y^{(0)}, \dots, y^{(k)}, f^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Seja $W = \{u \in \mathcal{S}^h : \nabla u \in L^p(\Omega)\}$ e $\mathcal{A} : W \rightarrow W$ contínua, tem-se

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}(u), u) = & C\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \\
& - C\delta \int_{\Omega} \mathcal{B} \left(x, u^{(0)}, \dots, u^{(k)}, y^{(0)}, \dots, y^{(k)}, f^{(k+\frac{1}{2})} \right) u dx. \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.5), obtém-se

$$(\mathcal{A}(u), u) \geq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p - C\delta\|\mathcal{B}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\delta}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ou seja,

$$(\mathcal{A}(u), u) \geq C_1 \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right) - C\delta\|\mathcal{B}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad C_1 = \min \left\{ C - \frac{\delta}{2}, \delta \right\}.$$

Seja $B_{\varrho}(0)$ em W com $\varrho = \frac{C\delta\|\mathcal{B}\|_{L^2(\Omega)}^2}{C_1}$, então $(\mathcal{A}(u), u) \geq 0$ para todo $u \in \partial B_{\varrho}(0)$ e pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer segue que a equação (5.4) tem uma solução em $\bar{B}_{\varrho}(0) \subset W$.

A seguir apresentamos o Teorema que mostra que o problema discreto (5.1)-(5.2) tem uma única solução.

Teorema 5.1 (Unicidade). Se $g, g' \in L^\infty(0, T)$, a solução do problema discreto (5.1)-(5.2) é única.

Demonstração

A prova é semelhante a do Teorema 4.1, mas é mais técnica. Suponha que $(u_1^{(k+1)}, y_1^{(k+1)})$ e $(u_2^{(k+1)}, y_2^{(k+1)})$ são duas soluções do problema (5.1)-(5.2). Subtraindo a equação de $y_2^{(k+1)}$ à equação de $y_1^{(k+1)}$, temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{8}g(0) \right) \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})v^h dx \\
 &= \left(\frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8}g(0) - \frac{1}{2} \right) \int_{\Omega} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)})v^h dx \\
 &+ \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} (y_1^{(j)} - y_2^{(j)})v^h dx + \frac{\delta}{2}g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} (y_1^{(0)} - y_2^{(0)})v^h dx \\
 &+ \left(-\frac{1}{2}g(0) - \frac{\delta}{8}g'(0) \right) \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})v^h dx \\
 &+ \left(\frac{1}{2}g(0) - \frac{3\delta}{8}g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) - \frac{\delta}{8}g'(0) \right) \int_{\Omega} (u_1^{(k)} - u_2^{(k)})v^h dx \\
 &+ \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} (u_1^{(j)} - u_2^{(j)})v^h dx \\
 &+ \left(-g(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\delta}{8}g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \right) \int_{\Omega} (u_1^{(0)} - u_2^{(0)})v^h dx. \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

Seja $v^h = y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)}$. Como g e g' são limitados, podemos aplicar a desigualdade de Young em (5.6), então

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx \\
 & \leq C \int_{\Omega} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)})^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} (y_1^{(j)} - y_2^{(j)})^2 dx \\
 & + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx + C \int_{\Omega} (y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx \\
 & + C \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx + C \int_{\Omega} (u_1^{(k)} - u_2^{(k)})^2 dx \\
 & + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} (u_1^{(j)} - u_2^{(j)})^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx \\
 & + C \int_{\Omega} (u_1^{(0)} - u_2^{(0)})^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx \leq C \int_{\Omega} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)})^2 dx + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} (y_1^{(j)} - y_2^{(j)})^2 dx \\
 & + C \int_{\Omega} (y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^2 dx + C \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx + C \int_{\Omega} (u_1^{(k)} - u_2^{(k)})^2 dx \\
 & + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} (u_1^{(j)} - u_2^{(j)})^2 dx + C \int_{\Omega} (u_1^{(0)} - u_2^{(0)})^2 dx. \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Agora, aplicando o lema de Gronwall discreto em (5.7), tem-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx \\
 & \leq C \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx + C \int_{\Omega} (u_1^{(k)} - u_2^{(k)})^2 dx + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} (u_1^{(j)} - u_2^{(j)})^2 dx \\
 & + C \int_{\Omega} (u_1^{(0)} - u_2^{(0)})^2 dx.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Considerando $w^h = \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})}$ na equação (5.1) e repetindo o procedimento para $u_1^{(k+1)}$ e $u_2^{(k+1)}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx - \int_{\Omega} (u_1^{(k)} - u_2^{(k)})^2 dx \\
 & + 2\delta \int_{\Omega} \left| \frac{(\nabla u_1^{(k+1)} - \nabla u_2^{(k+1)}) + (\nabla u_1^{(k)} - \nabla u_2^{(k)})}{2} \right|^p dx \\
 & = 2\delta \int_{\Omega} (\bar{y}_1^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}_2^{(k+\frac{1}{2})}) (\bar{u}_1^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{u}_2^{(k+\frac{1}{2})}) dx.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.9), temos

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx \\
 & \leq \int_{\Omega} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)})^2 dx + \frac{1}{3} \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx \\
 & + C \int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx + C \int_{\Omega} (u_1^{(k)} - u_2^{(k)})^2 dx + C \int_{\Omega} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)})^2 dx \\
 & + \frac{1}{3} \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx + C \int_{\Omega} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)})^2 dx \\
 & + C \int_{\Omega} (u_1^{(k)} - u_2^{(k)})^2 dx.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Aplicando o lema de Gronwall discreto na equação (5.10), tem-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx \\
 & \leq C \int_{\Omega} (u_1^{(k)} - u_2^{(k)})^2 dx + C \int_{\Omega} (u_1^{(k-1)} - u_2^{(k-1)})^2 dx + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Omega} (u_1^{(j)} - u_2^{(j)})^2 dx.
 \end{aligned}$$

Como $\zeta^{(k+1)} = \int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx \geq 0$ e $\zeta^{(0)} = 0$, podemos aplicar o lema de Gronwall discreto. Portanto, $\zeta^{(k)} = 0$ para cada $k \geq 0$ e assim

$$\int_{\Omega} (u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)})^2 dx = 0, \quad u_1^{(k+1)} = u_2^{(k+1)} \text{ em } L^2(\Omega). \tag{5.11}$$

Voltando a y e substituindo a equação (5.11) em (5.8), obtemos

$$\int_{\Omega} (y_1^{(k+1)} - y_2^{(k+1)})^2 dx = 0,$$

que prova o desejado. ■

O próximo Teorema prova que a solução do problema (5.1)-(5.2) é estável.

Teorema 5.2 (Estabilidade). Seja $(u^{(k+1)}, y^{(k+1)}) \in \mathcal{S}^h \times \mathcal{S}^h$ solução do problema (5.1), (5.2). Se $g, g' \in L^\infty(0, T)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$, então, para cada $k \geq 0$

$$\|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C\delta \sum_{j=0}^k \|f^{(j+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e

$$\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C\delta \sum_{j=0}^k \|f^{(j+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

onde

$$C = C(T, \|g\|_{L^\infty(0,T)}, \|g'\|_{L^\infty(0,T)}).$$

Demonstração

Vamos considerar a equação (5.2) na forma

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{8}g(0)\right) \int_{\Omega} y^{(k+1)} v^h dx \\ &= \left(\frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8}g(0) - \frac{1}{2}\right) \int_{\Omega} y^{(k)} v^h dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} y^{(j)} v^h dx \\ &+ \frac{\delta}{2}g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} y_0 v^h dx + \left(-\frac{1}{2}g(0) - \frac{\delta}{8}g'(0)\right) \int_{\Omega} u^{(k+1)} v^h dx \\ &+ \left(\frac{1}{2}g(0) - \frac{3\delta}{8}g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) - \frac{\delta}{8}g'(0)\right) \int_{\Omega} u^{(k)} v^h dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} u^{(j)} v^h dx \\ &+ \left(-g(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\delta}{8}g'(t_{k+\frac{1}{2}})\right) \int_{\Omega} u_0^h v^h dx - \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} f(x, s) v^h dx ds. \quad (5.12) \end{aligned}$$

Considerando $v^h = y^{(k+1)}$, e como g e g' são limitados, podemos aplicar a desigualdade de Young em (5.12) e assim obter

$$\begin{aligned} & \|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C\|y^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{9}\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \|y^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{9}\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|y_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{1}{9}\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{9}\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{9}\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \|u^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{9}\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{9}\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{9}\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C\|y^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \|y^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \|u^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Aplicando o lema de Gronwall discreto em (5.13), temos

$$\begin{aligned} & \|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C\|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \|u^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ & \quad + C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Voltando agora à equação (5.1) e considerando $w^h = \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})}$, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u^{(k+1)})^2 dx - \int_{\Omega} (u^{(k)})^2 dx + 2C\delta \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u^{(k+1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^p dx \\ & = 2\delta \int_{\Omega} \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} dx + 2\delta \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} dx. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.15), obtém-se

$$\begin{aligned} & \|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{6}\|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C\|y^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{6}\|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|y^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C\delta\|f^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{6}\|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Substituindo $y^{(k+1)}$ e $y^{(k)}$ na equação (5.16), temos

$$\begin{aligned} & \|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \sum_{j=1}^{k-1} \|u^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C\delta\|f^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Aplicando o lema de Gronwall discreto em (5.17), tem-se

$$\|u^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C\delta \sum_{j=0}^k \|f^{(j+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Então, da equação (5.14), obtemos

$$\|y^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + C\delta \sum_{j=0}^k \|f^{(j+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

onde

$$C = C(T, \|g\|_{L^\infty(0,T)}, \|g'\|_{L^\infty(0,T)}),$$

que prova o teorema. ■

O Teorema a seguir permite verificar que as soluções dos problemas (3.24) e (5.1)-(5.2) convergem.

Teorema 5.3 (Convergência). Sejam (u, y) e $(u^{(k)}, y^{(k)})$, soluções dos problemas (3.24) e (5.1)-(5.2), respetivamente. Se $g, g' \in L^\infty(0, T)$ e $u_0 \in H^{r+1}(\Omega)$, então, para δ suficientemente pequeno

$$\|u(x, t_k) - u^{(k)}(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(h^{r+1} + \delta^2 + h^{\frac{rp}{2p-2}} + \delta^{\frac{p}{p-1}} \right)$$

e

$$\|y(x, t_k) - y^{(k)}(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(h^{r+1} + \delta^2 + h^{\frac{rp}{2p-2}} + \delta^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

onde a constante C não depende de h ou δ mas pode depender de g, u, y e suas derivadas.

Demonstração

Subtraindo (5.2) à segunda equação de (3.24), avaliada em $t = t_{k+\frac{1}{2}}$, com $v = v^h$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx \\ &= g(0) \int_{\Omega} \left(u^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx + g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} \left(u_0^h - u_0 \right) v^h dx \\ & \quad - \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} y(x, s) v^h(x) dx ds + Q_g(y^h) \\ & \quad + \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} u(x, s) v^h(x) dx ds - Q_{g'}(u^h) \\ &= g(0)I_1 + g(t_{k+\frac{1}{2}})I_2 + I_3 - I_4. \end{aligned}$$

Considerando $y(x, t_j) - y^{(j)} = \varphi(x, t_j) + \psi(x, t_j) = \varphi^{(j)} + \psi^{(j)}$ como antes, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx \\ &= \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \frac{y^h(x, t_{k+1}) + y^h(x, t_k)}{2} \right) v^h dx \\ &= \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \frac{y(x, t_{k+1}) + y(x, t_k)}{2} + \frac{y(x, t_{k+1}) + y(x, t_k)}{2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{y^h(x, t_{k+1}) + y^h(x, t_k)}{2} \right) v^h dx \\ &= \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \frac{y(x, t_{k+1}) + y(x, t_k)}{2} \right) v^h dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(y(x, t_{k+1}) - y^h(x, t_{k+1}) \right) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(y(x, t_k) - y^h(x, t_k) \right) v^h dx \\ &= \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \frac{y(x, t_{k+1}) + y(x, t_k)}{2} \right) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi(x, t_{k+1}) v^h dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi(x, t_{k+1}) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi(x, t_k) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi(x, t_k) v^h dx \\ &= \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^{(k+1)} v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^{(k)} v^h dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi^{(k+1)} v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi^{(k)} v^h dx \\ &= \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx + \int_{\Omega} \bar{\varphi}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx + \int_{\Omega} \bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Fazendo $u(x, t_j) - u^{(j)} = \rho(x, t_j) + \theta(x, t_j) = \rho^{(j)} + \theta^{(j)}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\Omega} \left(u^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(u^{(k+\frac{1}{2})} - \frac{u^h(x, t_{k+1}) + u^h(x, t_k)}{2} \right) v^h dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(u^{(k+\frac{1}{2})} - \frac{u(x, t_{k+1}) + u(x, t_k)}{2} \right) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x, t_{k+1}) v^h dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta(x, t_{k+1}) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x, t_k) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta(x, t_k) v^h dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(u^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{(k+1)} v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{(k)} v^h dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^{(k+1)} v^h dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^{(k)} v^h dx \\
 &= \int_{\Omega} \left(u^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx + \int_{\Omega} \bar{\rho}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx + \int_{\Omega} \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx.
 \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} y(x, s) v^h(x) dx ds - Q_g(y^h) \\
 &= \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} y(x, s) v^h(x) dx ds - Q_g(y) + Q_g(y) - Q_g(y^h),
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 &Q_g(y) - Q_g(y^h) \\
 &= \frac{\delta}{2} g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} (y_0 - y_0^h) v^h dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} (y(x, t_j) - y^h(x, t_j)) v^h dx \\
 &\quad + \frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} (y(x, t_k) - y^h(x, t_k)) v^h dx + \frac{\delta}{8} g(0) \int_{\Omega} (y(x, t_k) - y^h(x, t_k)) v^h dx \\
 &\quad + \frac{\delta}{8} g(0) \int_{\Omega} (y(x, t_{k+1}) - y^h(x, t_{k+1})) v^h dx \\
 &= \frac{\delta}{2} g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} (y_0 - y_0^h) v^h dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} \varphi^{(j)} v^h dx \\
 &\quad + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} \psi^{(j)} v^h dx + \left(\frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8} g(0) \right) \int_{\Omega} \varphi^{(k)} v^h dx \\
 &\quad + \frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} \psi^{(k)} v^h dx + \frac{\delta}{8} g(0) \int_{\Omega} \varphi^{(k+1)} v^h dx + \frac{\delta}{4} g(0) \int_{\Omega} \bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} u(x, s) v^h(x) dx ds - Q_{g'}(u^h) \\
 &= \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} u(x, s) v^h(x) dx ds - Q_{g'}(u) + Q_{g'}(u) - Q_{g'}(u^h),
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
& Q_{g'}(u) - Q_{g'}(u^h) \\
&= \frac{\delta}{2} g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} (u_0 - u_0^h) v^h dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} (u(x, t_j) - u^h(x, t_j)) v^h dx \\
&+ \frac{3\delta}{4} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} (u(x, t_k) - u^h(x, t_k)) v^h dx + \frac{\delta}{8} g'(0) \int_{\Omega} (u(x, t_k) - u^h(x, t_k)) v^h dx \\
&+ \frac{\delta}{8} g'(0) \int_{\Omega} (u(x, t_{k+1}) - u^h(x, t_{k+1})) v^h dx \\
&= \frac{\delta}{2} g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} (u_0 - u_0^h) v^h dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} \rho^{(j)} v^h dx \\
&+ \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} \theta^{(j)} v^h dx + \left(\frac{3\delta}{4} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8} g'(0) \right) \int_{\Omega} \rho^{(k)} v^h dx \\
&+ \frac{3\delta}{4} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} \theta^{(k)} v^h dx + \frac{\delta}{8} g'(0) \int_{\Omega} \rho^{(k+1)} v^h dx + \frac{\delta}{4} g'(0) \int_{\Omega} \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx,
\end{aligned}$$

e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx \\
&= - \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^{(k+1)} v^h dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^{(k)} v^h dx \\
&+ g(0) \int_{\Omega} \left(u^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right) v^h dx + \frac{g(0)}{2} \int_{\Omega} \rho^{(k+1)} v^h dx \\
&+ \frac{g(0)}{2} \int_{\Omega} \rho^{(k)} v^h dx + \int_{\Omega} \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx + g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} (u_0^h - u_0) v^h dx \\
&- \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} y(x, s) v^h dx ds + Q_g(y) - \frac{\delta}{2} g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} (y_0 - y_0^h) v^h dx \\
&- \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} \varphi^{(j)} v^h dx - \delta \sum_{j=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} \psi^{(j)} v^h dx \\
&- \frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} \varphi^{(k)} v^h dx - \frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} \psi^{(k)} v^h dx \\
&- \frac{\delta}{8} g(0) \int_{\Omega} \varphi^{(k)} v^h dx + \frac{\delta}{8} g(0) \int_{\Omega} \varphi^{(k+1)} v^h dx - \frac{\delta}{4} g(0) \int_{\Omega} \bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx \\
&- \int_0^{t_{k+\frac{1}{2}}} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} u(x, s) v^h dx ds - Q_{g'}(u) \\
&+ \frac{\delta}{2} g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} (u_0 - u_0^h) v^h dx + \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} \rho^{(j)} v^h dx \\
&+ \delta \sum_{j=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_j) \int_{\Omega} \theta^{(j)} v^h dx + \frac{3\delta}{4} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} \rho^{(k)} v^h dx \\
&+ \frac{3\delta}{4} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) \int_{\Omega} \theta^{(k)} v^h dx + \frac{\delta}{8} g'(0) \int_{\Omega} \rho^{(k)} v^h dx \\
&+ \frac{\delta}{8} g'(0) \int_{\Omega} \rho^{(k+1)} v^h dx + \frac{\delta}{4} g'(0) \int_{\Omega} \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas de erro da regra dos Trapézios, com $v^h = \bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}$ e aplicando a desi-

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

gualdade de Young, tem-se

$$\begin{aligned}
& \|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\epsilon)\|y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\varphi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\|\varphi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\|\varphi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\|u^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\|\rho^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\|\rho^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\|u_0^h - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\delta^4 \left(\|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|y_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|y_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \\
& + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|y_0 - y_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\delta^2 \sum_{j=1}^{k-1} \|\varphi^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2 \sum_{j=1}^{k-1} \|\psi^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\psi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\varphi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\varphi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \delta\frac{g(0)}{4}\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\delta^4 \left(\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \\
& + C(\epsilon)\delta^2\|u_0 - u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2 \sum_{j=1}^{k-1} \|\rho^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\delta^2 \sum_{j=1}^{k-1} \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\rho^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\delta^2\|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\rho^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\delta^2\|\rho^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& \left(1 - 25\epsilon + \frac{\delta g(0)}{4}\right) \|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq C(\epsilon)\|y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)(1 + 2\delta^2)\|\rho^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)(1 + \delta^2)\|\varphi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)(1 + 2\delta^2)\|\varphi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)(1 + \delta^2)\|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\|u^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)(1 + \delta^2)\|\rho^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2\|\psi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)(1 + \delta^2)\|u_0 - u_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2 \sum_{j=1}^{k-1} \|\rho^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2 \sum_{j=1}^{k-1} \|\varphi^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\delta^4 \left(\|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|y_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|y_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \\
& + C(\epsilon)\delta^2\|y_0 - y_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2 \sum_{j=1}^{k-1} \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\epsilon)\delta^2 \sum_{j=1}^{k-1} \|\psi^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C(\epsilon)\delta^4 \left(\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right). \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Pelo Lema 2.13, alguns limites de erro de interpolação (ver Lema 2.12) e escolhendo ϵ e δ apropriados, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C(h^{2(r+1)} + \delta^4) + C\|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \sum_{j=0}^k \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C\delta^2 \sum_{j=0}^k \|\psi^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} & \|\psi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C\|\psi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(h^{2(r+1)} + \delta^4) + C\|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \sum_{j=0}^k \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C\delta^2 \sum_{j=0}^k \|\psi^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Pelo lema de Gronwall discreto, obtém-se

$$\begin{aligned} & \|\psi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C(h^{2(r+1)} + \delta^4) + C\|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \sum_{j=0}^k \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(h^{2(r+1)} + \delta^4) \\ & \quad + C\|\bar{\theta}^{(k-\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \sum_{j=0}^{k-1} \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C\delta^2 \sum_{j=0}^{k-1} \left(C(h^{2(r+1)} + \delta^4) + C\|\bar{\theta}^{(j-\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|\theta^{(i)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq C(1 + \delta)(h^{2(r+1)} + \delta^4) + C\|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\theta^{(k-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C\delta^2 \sum_{j=0}^k \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^4 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{j-1} \|\theta^{(i)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C(1 + \delta)(h^{2(r+1)} + \delta^4) + C\|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\theta^{(k-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C(1 + \delta)\delta^2 \sum_{j=0}^{k-1} \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Agora, voltamos à equação para u . Subtraindo a equação (5.1) à primeira equação de (3.24), avaliada em $t = t_{k+\frac{1}{2}}$ e considerando $w = w^h \in \mathcal{S}^h$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(u_t^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{\partial}(u^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx \\ & + \int_{\Omega} \left(\left| \nabla u^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla u^{(k+\frac{1}{2})} - \left| \nabla(\bar{u}^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla(\bar{u}^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right) \cdot \nabla w^h dx \\ & = \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - (\bar{y}^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Neste caso

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(u_t^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{\partial}u^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx + \int_{\Omega} \left(\bar{\partial}u^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{\partial}(u^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx \\
& + \int_{\Omega} \left(\left| \nabla u^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla u^{(k+\frac{1}{2})} - \left| \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right) \cdot \nabla w^h dx \\
& + \int_{\Omega} \left(\left| \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} - \left| \nabla (\bar{u}^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla (\bar{u}^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right) \cdot \nabla w^h dx \\
& = \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx + \int_{\Omega} \left(\bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} - (\bar{y}^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx,
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\partial}\theta^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx \\
& + \int_{\Omega} \left(\left| \nabla \overline{\Pi_h u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \overline{\Pi_h u}^{(k+\frac{1}{2})} - \left| \nabla (\bar{u}^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla (\bar{u}^h)^{(k+\frac{1}{2})} \right) \cdot \nabla w^h dx \\
& = - \int_{\Omega} \left(u_t^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{\partial}u^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx - \int_{\Omega} \bar{\partial}\rho^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx \\
& - \int_{\Omega} \left(\left| \nabla u^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla u^{(k+\frac{1}{2})} - \left| \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right) \cdot \nabla w^h dx \\
& + \int_{\Omega} \left(\left| \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} - \left| \nabla \overline{\Pi_h u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \overline{\Pi_h u}^{(k+\frac{1}{2})} \right) \cdot \nabla w^h dx \\
& + \int_{\Omega} \left(y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})} \right) w^h dx + \int_{\Omega} \bar{\varphi}^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx + \int_{\Omega} \bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx.
\end{aligned}$$

Tomando $w^h = \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}$ e aplicando a desigualdade de Young, tem-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \bar{\partial}\theta^{(k+\frac{1}{2})} \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})} dx + C_2 \|\nabla \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^p(\Omega)}^p \\
& \leq C_{\epsilon_1} \|u_t^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{\partial}u^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon_1 \|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\epsilon_1} \|\bar{\partial}\rho^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + \epsilon_1 \|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon_2 \|\nabla \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^p(\Omega)}^p \\
& + C_{\epsilon_2} \left\| \left| \nabla u^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla u^{(k+\frac{1}{2})} - \left| \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p}{p-1}} \\
& + C_{\epsilon_2} \left\| \left| \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \bar{u}^{(k+\frac{1}{2})} - \left| \nabla \overline{\Pi_h u}^{(k+\frac{1}{2})} \right|^{p-2} \nabla \overline{\Pi_h u}^{(k+\frac{1}{2})} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p}{p-1}} \\
& + \epsilon_2 \|\nabla \bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^p + \epsilon_1 \|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\epsilon_1} \|y^{(k+\frac{1}{2})} - \bar{y}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& + C_{\epsilon_1} \|\bar{\varphi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon_1 \|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\epsilon_1} \|\bar{\psi}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon_1 \|\bar{\theta}^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.2 e o Lema 2.13, alguns limites numéricos de erro de diferenciação (ver Lema 2.8) e interpolação (ver Lema 2.12), e escolhendo $\epsilon_2 < \frac{C_2}{2}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\delta} \left(\|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \leq C\delta^4 + C\|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + Ch^{2(r+1)} + C\delta^{\frac{2p}{p-1}} + Ch^{\frac{rp}{p-1}} + C\delta^4 \\
& + Ch^{2(r+1)} + C\|\psi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|\psi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 & (1 - C\delta) \|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq (C\delta - 1) \|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^5 + C\delta h^{2(r+1)} + C\delta \delta^{\frac{2p}{p-1}+1} + C\delta h^{\frac{rp}{p-1}} + C\delta \|\psi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + C\delta \|\psi^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq (C\delta - 1) \|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^5 + C\delta h^{2(r+1)} + C\delta \delta^{\frac{2p}{p-1}+1} + C\delta h^{\frac{rp}{p-1}} \\
 & \quad + C\delta(1 + \delta) \left(h^{2(r+1)} + \delta^4 \right) + C\delta \|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \|\theta^{(k-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + C(1 + \delta) \delta^3 \sum_{j=0}^{k-1} \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & (1 - C\delta) \|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C\delta \left(h^{2(r+1)} + \delta^4 \right) + C\delta \left(\delta^{\frac{2p}{p-1}} + h^{\frac{rp}{p-1}} \right) + (C\delta - 1) \|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \|\theta^{(k-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + C\delta^3 \sum_{j=0}^{k-1} \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Para δ suficientemente pequeno, obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C\delta \left(h^{2(r+1)} + \delta^4 \right) + C\delta \left(\delta^{\frac{2p}{p-1}} + h^{\frac{rp}{p-1}} \right) - C\|\theta^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \|\theta^{(k-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + C\delta^3 \sum_{j=0}^{k-1} \|\theta^{(j)}\|_{L^2(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

Pelo lema de Gronwall discreto, temos

$$\|\theta^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta \left(h^{2(r+1)} + \delta^4 + h^{\frac{rp}{p-1}} + \delta^{\frac{2p}{p-1}} \right).$$

Voltando à equação de $\|\psi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\psi^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq C \left(h^{2(r+1)} + \delta^4 \right) + C\delta \left(h^{2(r+1)} + \delta^4 + h^{\frac{rp}{p-1}} + \delta^{\frac{2p}{p-1}} \right) \\
 & \quad + C(1 + \delta) \delta^2 \left(h^{2(r+1)} + \delta^4 + h^{\frac{rp}{p-1}} + \delta^{\frac{2p}{p-1}} \right).
 \end{aligned}$$

Finalmente, adicionando as estimativas de $\rho^{(k+1)}$ e $\varphi^{(k+1)}$ dadas pelo Lema 2.13, obtém-se o resultado desejado. ■

Notamos que em (5.18), se $g(0) \geq 0$, então δ pode ser qualquer valor positivo, caso contrário deveria ser $\delta < \frac{-4}{g(0)}$ suficientemente pequeno, por exemplo $\delta = \frac{-1}{g(0)}$ para $\epsilon = \frac{1}{100}$.

Para a resolução do sistema de equações algébricas não lineares, apesar de existirem vários métodos de resolução para o nosso problema, é proposto no nosso trabalho o método do ponto fixo, por ser simples de aplicar e de analisar a convergência.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Reescrevendo a equação (5.1) na forma

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{\Omega} u^{(k+1)} w^h dx + \delta \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u^{(k+1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla u^{(k+1)} + \nabla u^{(k)}) \cdot \nabla w^h dx \\
 & = \delta \int_{\Omega} (y^{(k+1)} + y^{(k)}) w^h dx + 2\delta \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx \\
 & + 2 \int_{\Omega} u^{(k)} w^h dx, \quad \forall w^h \in \mathcal{S}^h
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

e a equação (5.2) na forma

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{\delta}{4} g(0) \right) \int_{\Omega} y^{(k+1)} v^h dx - \left(2g(0) + \frac{\delta}{4} g'(0) \right) \int_{\Omega} u^{(k+1)} v^h dx \\
 & = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8} g(0) \right) \int_{\Omega} y^{(k)} v^h dx \\
 & + \delta \sum_{l=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_l) \int_{\Omega} y^{(l)} v^h dx + \frac{\delta}{2} g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} y^{(0)} v^h dx \\
 & + \left(\frac{1}{2} g(0) - \frac{3\delta}{4} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) - \frac{\delta}{8} g(0) \right) \int_{\Omega} u^{(k)} v^h dx \\
 & - \left(g(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\delta}{2} g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \right) \int_{\Omega} u^{(0)} v^h dx + \delta \sum_{l=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_l) \int_{\Omega} u^{(l)} v^h dx \\
 & + \frac{\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(0)} v^h dx + \frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(\frac{1}{2})} v^h dx \\
 & + \delta \sum_{m=1}^k g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{m+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(m+\frac{1}{2})} v^h dx \\
 & + \frac{\delta}{2} g(0) \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx, \quad \forall v^h \in \mathcal{S}^h,
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

obtemos um sistema de equações algébricas não linear com as incógnitas $(u^{(k+1)}, y^{(k+1)})$. Para resolver as equações (5.19) e (5.20), no caso $p > 3$, propomos o método do ponto fixo com o seguinte esquema iterativo: Dado $f, g, h, \delta, u^{(0)}, \dots, u^{(k)}, y^{(0)}, \dots, y^{(k)}$, consideremos $u^{(k+1)}$ e $y^{(k+1)}$, os limites das sucessões $(\mathcal{U}_{(n)})$ e $(\mathcal{Y}_{(n)})$, definidas por

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{\Omega} \mathcal{U}_{(n+1)} w^h dx + \delta \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} + \nabla u^{(k)}) \cdot \nabla w^h dx \\
 & = \delta \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} + y^{(k)}) w^h dx + 2\delta \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx \\
 & + 2 \int_{\Omega} u^{(k)} w^h dx, \quad \forall w^h \in \mathcal{S}^h
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \int_{\Omega} \mathcal{Y}_{(n+1)} v^h dx - \left(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0)\right) \int_{\Omega} \mathcal{U}_{(n+1)} v^h dx \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8}g(0)\right) \int_{\Omega} y^{(k)} v^h dx \\
 &+ \delta \sum_{l=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_l) \int_{\Omega} y^{(l)} v dx + \frac{\delta}{2}g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} y^{(0)} v^h dx \\
 &+ \left(\frac{1}{2}g(0) - \frac{3\delta}{4}g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) - \frac{\delta}{8}g(0)\right) \int_{\Omega} u^{(k)} v^h dx \\
 &- \left(g(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\delta}{2}g'(t_{k+\frac{1}{2}})\right) \int_{\Omega} u^{(0)} v^h dx + \delta \sum_{l=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_l) \int_{\Omega} u^{(l)} v^h dx \\
 &+ \frac{\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(0)} v^h dx + \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(\frac{1}{2})} v^h dx \\
 &+ \delta \sum_{m=1}^k g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{m+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(m+\frac{1}{2})} v^h dx \\
 &+ \frac{\delta}{2}g(0) \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} v^h dx, \quad \forall v^h \in \mathcal{S}^h, \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{U}_{(0)} = u^{(k)} \quad \text{e} \quad \mathcal{Y}_{(0)} = y^{(k)}. \tag{5.23}$$

O sistema (5.21)-(5.22) é um sistema linear que tem solução única.

O próximo Lema mostra que as sucessões são limitadas.

Lema 5.4. Sejam $\mathcal{U}_{(n+1)}$ e $\mathcal{Y}_{(n+1)}$, soluções dos sistemas (5.21) e (5.22). Se $f \in L^2(Q)$, $g, g' \in L^\infty(0, T)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ e δ é pequeno. Então

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 < C \tag{5.24}$$

e

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 < C, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.25}$$

onde

$$C = C \left(\|f\|_{L^2(Q)}^2, \|g\|_{L^\infty(0,T)}^2, \|g'\|_{L^\infty(0,T)}^2, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Demonstração

Para $n = 0$, as condições (5.24) e (5.25) são verdadeiras pela condição (5.23) e pelo Teorema 5.2. Suponha agora que $\mathcal{U}_{(l)}$ e $\mathcal{Y}_{(l)}$ satisfazem (5.24) e (5.25), para $l = 0, \dots, n$. Se

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

considerarmos (5.22) com $v^h = \mathcal{Y}_{(n+1)}$, então

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \int_{\Omega} \mathcal{Y}_{(n+1)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx \\
&= \left(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0)\right) \int_{\Omega} \mathcal{U}_{(n+1)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k)\right. \\
&+ \left.\frac{\delta}{8}g(0)\right) \int_{\Omega} y^{(k)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx + \delta \sum_{l=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_l) \int_{\Omega} y^{(l)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx \\
&+ \frac{\delta}{2}g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} y^{(0)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx + \left(\frac{1}{2}g(0) - \frac{3\delta}{4}g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k)\right. \\
&- \left.\frac{\delta}{8}g(0)\right) \int_{\Omega} u^{(k)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx - \left(g(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\delta}{2}g'(t_{k+\frac{1}{2}})\right) \int_{\Omega} u^{(0)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx \\
&+ \delta \sum_{l=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_l) \int_{\Omega} u^{(l)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx + \frac{\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(0)} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx \\
&+ \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(\frac{1}{2})} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx + \delta \sum_{m=1}^k g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{m+\frac{1}{2}}) \int_{\Omega} f^{(m+\frac{1}{2})} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx \\
&+ \frac{\delta}{2}g(0) \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} \mathcal{Y}_{(n+1)} dx. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.26) e o Teorema 5.2, temos

$$\left(1 + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C.$$

Se δ for suficientemente pequeno (somente para o caso $g(0) < 0$) e ϵ for adequado, tem-se

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C. \tag{5.27}$$

Voltando à equação (5.21), com $w^h = \mathcal{U}_{(n+1)} + u^{(k)}$, obtêm-se

$$\begin{aligned}
& 2\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} |\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} + \nabla u^{(k)}|^2 dx \\
&= \delta \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} + y^{(k)}) (\mathcal{U}_{(n+1)} + u^{(k)}) dx + 2\delta \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} (\mathcal{U}_{(n+1)} + u^{(k)}) dx \\
&+ \int_{\Omega} u^{(k)} (\mathcal{U}_{(n+1)} + u^{(k)}) dx - 2 \int_{\Omega} \mathcal{U}_{(n+1)} u^{(k)} dx. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.28), temos

$$2\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta^2\|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C, \tag{5.29}$$

o que nos permite escrever

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta^2\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 + C, \tag{5.30}$$

ou seja,

$$(1 - C\delta^2)\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta^2 + C.$$

Se δ for suficiente pequeno, tal que $(1 - C\delta^2) > 0$, então

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C.$$

Voltando à equação (5.27), obtemos

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C,$$

que prova o pretendido. ■

A seguir apresentamos o Teorema que mostra que as sucessões definidas por (5.21) e (5.22) são convergentes.

Teorema 5.5 (Convergência). Sob as condições do Lema 5.4, se δ e h satisfizerem (5.34), então as sucessões $(\mathcal{U}_{(n)})$ e $(\mathcal{Y}_{(n)})$ definidas por (5.21) e (5.22) são convergentes.

Demonstração

Subtraindo a equação (5.22) na iteração (n) à equação (5.22) na iteração $(n+1)$, temos

$$\left(1 + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)})v^h dx - \left(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0)\right) \int_{\Omega} (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)})v^h dx = 0.$$

Fazendo $v^h = \mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}$, então

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \left(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0)\right) \int_{\Omega} (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}) (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}) dx. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.31), tem-se

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0))^2}{2} \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0))^2}{2} \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ou seja,

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.32)$$

Subtraindo a equação (5.21) na iteração (n) à equação (5.21) na iteração $(n+1)$, obtém-se

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)})w^h dx + \delta \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} + \nabla u^{(k)}) \right. \\ & \left. - \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}) \right) \cdot \nabla w^h dx \\ &= \delta \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)})w^h dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)})w^h dx + \delta \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} - \nabla \mathcal{U}_{(n)}) \cdot \nabla w^h dx \\ &= -\delta \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} - \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} \right) (\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}) \cdot \nabla w^h dx \\ &+ \delta \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)})w^h dx. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Considerando $w^h = \mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}$, então

$$\begin{aligned}
 & 2\|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} |\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} - \nabla \mathcal{U}_{(n)}|^2 dx \\
 &= -\delta \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} - \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} \right) \\
 & \quad \times (\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}) \cdot (\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} - \nabla \mathcal{U}_{(n)}) dx \\
 & \quad + \delta \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}) (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}) dx. \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.33) e o Lema 2.14, temos

$$\begin{aligned}
 & 2\|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq \frac{\delta^2}{4} \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + \frac{\delta}{2} \left\| \left(\left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} - \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} \right) \cdot (\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + \frac{\delta}{2} \|\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} - \nabla \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & (1 - C\delta^2 - C\delta h^{-2}) \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C\delta h^{-(d+2)} \left\| \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} - \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Se $p > 3$, aplicando o Lema 2.2 e o Lema 2.14, tem-se

$$(1 - C\delta^2 - C\delta h^{-2}) \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta h^{-(d+2)(p-3)} \|\nabla \mathcal{U}_{(n)} - \nabla \mathcal{U}_{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ou seja,

$$(1 - C\delta^2 - C\delta h^{-2}) \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta h^{(d+2)(2-p)-2} \|\mathcal{U}_{(n)} - \mathcal{U}_{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Se δ e h forem suficientemente pequenos, tal que

$$(1 - C\delta^2 - C\delta h^{-2}) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{C\delta h^{(d+2)(2-p)-2}}{1 - C\delta^2 - C\delta h^{-2}} < 1, \tag{5.34}$$

então

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\mathcal{U}_{(n)} - \mathcal{U}_{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \text{com } 0 < C < 1. \tag{5.35}$$

Iterando a equação (5.35), obtém-se

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C^n \|\mathcal{U}_{(1)} - \mathcal{U}_{(0)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Voltando à equação (5.32), obtemos

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

que prova o desejado. ■

Nota 5.6. A condição (5.34) é bastante restritiva na escolha de δ e h tornando-se impraticável para valores altos de p . No entanto, constatou-se nas simulações práticas que é possível obter convergência para valores de δ e h aceitáveis. Pensamos que esta discrepância deve estar relacionada com a regularidade da solução e que para soluções mais regulares (por exemplo, gradiente limitado essencialmente) esta condição pode ser reduzida a $\delta < Ch^2$ que é bastante mais prático.

Para resolver o sistema de equações algébricas não linear (5.19) e (5.20), para o caso $2 < p \leq 3$, tendo em consideração a utilização do método do ponto fixo, vamos substituir a equação (5.21) por

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} \mathcal{U}_{(n+1)} w^h dx + \delta \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} \left(\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)} \right) \cdot \nabla w^h dx \\ & = \delta \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} + y^{(k)}) w^h dx + 2\delta \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} w^h dx \\ & + 2 \int_{\Omega} u^{(k)} w^h dx, \quad \forall w^h \in \mathcal{S}^h. \end{aligned} \quad (5.36)$$

O sistema (5.22) e (5.36) é um sistema linear e tem única solução para cada $n \in \mathbb{N}$. O Lema a seguir mostra que as sucessões definidas por (5.22) e (5.36) são limitadas.

Lema 5.7. Sejam $\mathcal{U}_{(n+1)}$ e $\mathcal{Y}_{(n+1)}$, soluções dos sistemas (5.22) e (5.36). Se $f \in L^2(Q)$, $g, g' \in L^\infty(0, T)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ e se δ e h satisfizerem (5.39). Então, temos as condições (5.24) e (5.25).

Demonstração

Para $n = 0$, as condições (5.24) e (5.25) são verdadeiras pela condição (5.23) e pelo Teorema 5.2. Suponha agora que $\mathcal{U}_{(l)}$ e $\mathcal{Y}_{(l)}$ satisfazem (5.24) e (5.25), para $l = 0, \dots, n$. Se considerarmos $v^h = \mathcal{Y}_{(n+1)}$ em (5.22) e argumentarmos como no Lema 5.4, temos

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C. \quad (5.37)$$

Considerando a equação (5.36), com $w^h = \mathcal{U}_{(n+1)}$, então

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} \left(\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)} \right) \cdot \nabla \mathcal{U}_{(n+1)} dx \\ & = \delta \int_{\Omega} \mathcal{Y}_{(n+1)} \mathcal{U}_{(n+1)} dx + \delta \int_{\Omega} y^{(k)} \mathcal{U}_{(n+1)} dx + 2\delta \int_{\Omega} f^{(k+\frac{1}{2})} \mathcal{U}_{(n+1)} dx \\ & + 2 \int_{\Omega} u^{(k)} \mathcal{U}_{(n+1)} dx. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.38), tem-se

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C\delta \|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \|y^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{6} \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + C\delta^2 \|f^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{6} \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \|\nabla \mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + C\delta \left\| \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} \left(\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{6} \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} - C\delta - C\delta h^{-2} \right) \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C\delta^2 \|y^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \|f^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \\
 & \quad + C\delta \left\| \left| \nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)} \right|^{p-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C\delta^2 \|y^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \|f^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta \|\nabla \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^{2(p-1)} + C\delta \\
 & \quad + C.
 \end{aligned}$$

Utilizando a imersão $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{2(p-1)}(\Omega)$ e o Lema 2.14, temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} - C\delta - C\delta h^{-2} \right) \|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq C\delta^2 \|y^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta^2 \|f^{(k+\frac{1}{2})}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u^{(k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta h^{(d+2)(1-p)} \|\mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^{2(p-1)} \\
 & \quad + C\delta + C.
 \end{aligned}$$

Se $(\frac{1}{2} - C\delta - C\delta h^{-2}) > 0$, então

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta + C\delta h^{(d+2)(1-p)} \|\mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^{2(p-1)} + C.$$

Se

$$\delta < Ch^{(d+2)(p-1)}, \tag{5.39}$$

pela hipótese indutiva, obtém-se

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C.$$

Voltando à equação (5.37), obtemos

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C,$$

que prova o pretendido. ■

O Teorema a seguir permite concluir que as sucessões definidas por (5.22) e (5.36) são convergentes.

Teorema 5.8 (Convergência). Sob as condições do Lema 5.7, se δ e h satisfizerem (5.44), então as sucessões $(\mathcal{U}_{(n)})$ e $(\mathcal{Y}_{(n)})$ definidas por (5.22) e (5.36) são convergentes.

Demonstração

Subtraindo a equação (5.22) na iteração (n) à equação (5.22) na iteração $(n+1)$, temos

$$\left(1 + \frac{\delta}{4}g(0) \right) \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)})v^h dx - \left(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0) \right) \int_{\Omega} (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)})v^h dx = 0.$$

Fazendo $v^h = \mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}$, então

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{\delta}{4}g(0) \right) \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & = \left(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0) \right) \int_{\Omega} (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}) (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}) dx. \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.40), tem-se

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0))^2}{2} \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}g(0)\right) \|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(2g(0) + \frac{\delta}{4}g'(0))^2}{2} \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ou seja,

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.41)$$

Subtraindo a equação (5.36) na iteração (n) à equação (5.36) na iteração $(n+1)$, obtém-se

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}) w^h dx + \delta \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}) \right. \\ & \left. - \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}) \right) \cdot \nabla w^h dx = \delta \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}) w^h dx. \end{aligned}$$

Considerando $w^h = \mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}$, então

$$\begin{aligned} & 2 \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\delta \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}) \right. \\ & \left. - \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}) \right) \cdot (\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} - \nabla \mathcal{U}_{(n)}) dx \\ & + \delta \int_{\Omega} (\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}) (\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}) dx. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Aplicando a desigualdade de Young em (5.42), temos

$$\begin{aligned} & 2 \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \delta \left\| \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n)} + \nabla u^{(k)}) \right. \\ & \left. - \left| \frac{\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}}{2} \right|^{p-2} (\nabla \mathcal{U}_{(n-1)} + \nabla u^{(k)}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \delta \|\nabla \mathcal{U}_{(n+1)} - \nabla \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + C \delta^2 \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Aplicando o Lema 2.2 e o Lema 2.14 em (5.43), tem-se

$$\left(\frac{3}{2} - C\delta^2 - C\delta h^{-2}\right) \|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta h^{(d+2)(2-p)-2} \|\mathcal{U}_{(n)} - \mathcal{U}_{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Se δ e h forem apropriados, tal que

$$\left(\frac{3}{2} - C\delta^2 - C\delta h^{-2}\right) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{C\delta h^{(d+2)(2-p)-2}}{\frac{3}{2} - C\delta^2 - C\delta h^{-2}} < 1, \quad (5.44)$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

então

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\mathcal{U}_{(n)} - \mathcal{U}_{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \text{com } 0 < C < 1. \quad (5.45)$$

Iterando a equação (5.45), temos

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C^n \|\mathcal{U}_{(1)} - \mathcal{U}_{(0)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

Voltando à equação (5.41), obtemos

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

que prova o desejado. ■

As observações da Nota 5.6, também são válidas para o Teorema 5.8.

Para fins práticos, podemos considerar um valor pequeno de tol e usar esses esquemas até que

$$\|\mathcal{U}_{(n+1)} - \mathcal{U}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 < tol$$

e

$$\|\mathcal{Y}_{(n+1)} - \mathcal{Y}_{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 < tol.$$

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Neste capítulo, são apresentados as bases de Lagrange e as várias simulações em ambiente Matlab, para estudarmos o erro, a estabilidade e a convergência do método. É feita uma análise da influência do parâmetro e do termo de memória nas propriedades de soluções. Apresentamos também alguns exemplos, onde são tratadas as várias formas de estudarmos a convergência, o comportamento assintótico, a propagação com velocidade finita e o efeito do tempo de espera do problema em estudo. Iremos considerar o caso unidimensional, porque é a melhor forma de ilustrarmos graficamente o comportamento da solução em estudo. Embora o trabalho não tivesse abordado o caso $1 < p < 2$, vamos realizar algumas simulações, de forma a analisar numericamente o comportamento da solução.

6.1 Bases de Lagrange

Nesta secção, é aplicado o MEF com bases de Lagrange ao problema discretizado no capítulo anterior. Para simplificar a notação, vamos considerar $\varphi'_i(x)$ como a derivada de $\varphi_i(x)$ em relação a x .

Seja $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ a base lagrangeana de \mathcal{S}^h associada a partição \mathcal{T}_h . Considere as equações (5.1) e (5.2), usando as representações $u^h(x, t_k) = \sum_{i=1}^n U_i(t_k)\varphi_i(x)$, $y^h(x, t_k) = \sum_{i=1}^n Y_i(t_k)\varphi_i(x)$ e $w^h(x) = \sum_{j=1}^n W_j\varphi_j(x)$, com W_j arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{U_i(t_{k+1})\varphi_i(x) - U_i(t_k)\varphi_i(x)}{\delta} \right) W_j\varphi_j(x) dx \\
 & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\left| \frac{U_i(t_{k+1})\varphi'_i(x) + U_i(t_k)\varphi'_i(x)}{2} \right|^{p-2} \right. \\
 & \times \left. \left(\frac{U_i(t_{k+1})\varphi'_i(x) + U_i(t_k)\varphi'_i(x)}{2} \right) \right) W_j\varphi'_j(x) dx \\
 & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{Y_i(t_{k+1})\varphi_i(x) + Y_i(t_k)\varphi_i(x)}{2} \right) W_j\varphi_j(x) dx \\
 & + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f(x, t_{k+\frac{1}{2}}) W_j\varphi_j(x) dx.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Definindo as matrizes

$$A(t) \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad A(i, j) = \int_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^n U_k(t)\varphi'_k(x) \right|^{p-2} \varphi'_i(x)\varphi'_j(x) dx,$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

$$M \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad M(i,j) = \int_{\Omega} \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$$

e

$$F(t) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad F(i) = \int_{\Omega} f(x,t)\varphi_i(x)dx,$$

com

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Aplicando matrizes em (6.1), tem-se

$$M\partial\bar{U}^{(k+\frac{1}{2})} + A^{(k+\frac{1}{2})}\bar{U}^{(k+\frac{1}{2})} = M\bar{Y}^{(k+\frac{1}{2})} + F^{(k+\frac{1}{2})},$$

o que nos permite escrever

$$\frac{1}{\delta}MU^{(k+1)} - \frac{1}{\delta}MU^{(k)} + \frac{1}{2}A^{(k+\frac{1}{2})}U^{(k+1)} + \frac{1}{2}A^{(k+\frac{1}{2})}U^{(k)} = \frac{1}{2}MY^{(k+1)} + \frac{1}{2}MY^{(k)} + F^{(k+\frac{1}{2})},$$

ou seja,

$$\left(2M + \delta A^{(k+\frac{1}{2})}\right) U^{(k+1)} - \delta MY^{(k+1)} = \left(2M - \delta A^{(k+\frac{1}{2})}\right) U^{(k)} + \delta MY^{(k)} + 2\delta F^{(k+\frac{1}{2})}. \quad (6.2)$$

O esquema (5.21) aplicado em (6.2) é dado por

$$(2M + \delta A(\mathcal{U}_{(n)})) \mathcal{U}_{(n+1)} - \delta M\mathcal{Y}_{(n+1)} = (2M - \delta A(\mathcal{U}_{(n)})) U^{(k)} + \delta MY^{(k)} + 2\delta F^{(k+\frac{1}{2})}$$

e o esquema (5.36) aplicado em (6.2) é dado por

$$2M\mathcal{U}_{(n+1)} - \delta M\mathcal{Y}_{(n+1)} = -\delta A(\mathcal{U}_{(n)})\mathcal{U}_{(n)} + (2M - \delta A(\mathcal{U}_{(n)})) U^{(k)} + \delta MY^{(k)} + 2\delta F^{(k+\frac{1}{2})}.$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Usando os procedimentos de (6.1) em (5.2), com $v^h(x) = \sum_{j=1}^n V_j \varphi_j(x)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{Y_i(t_{k+1})\varphi_i(x) + Y_i(t_k)\varphi_i(x)}{2} \right) V_j \varphi_j(x) dx \\
&= g(0) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{U_i(t_{k+1})\varphi_i(x) + U_i(t_k)\varphi_i(x)}{2} \right) V_j \varphi_j(x) dx \\
&- g(t_{k+\frac{1}{2}}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} U_i(0)\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx \\
&+ \frac{\delta}{2} g(t_{k+\frac{1}{2}}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} Y_i(0)\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx \\
&+ \delta \sum_{n=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_n) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} Y_i(t_n)\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx \\
&+ \left(\frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8} g(0) \right) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} Y_i(t_k)\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx \\
&+ \frac{\delta}{8} g(0) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} Y_i(t_{k+1})\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx \\
&- \frac{\delta}{2} g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} U_i(0)\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx \\
&- \delta \sum_{n=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_n) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} U_i(t_n)\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx \\
&- \left(\frac{3\delta}{4} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8} g'(0) \right) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} U_i(t_k)\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx \\
&- \frac{\delta}{8} g'(0) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} U_i(t_{k+1})\varphi_i(x) V_j \varphi_j(x) dx + I(f), \tag{6.3}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
& I(f) \\
&= \int_0^{t_{\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} f(x, s) v^h dx ds + \sum_{m=1}^k \int_{t_{m-\frac{1}{2}}}^{t_{m+\frac{1}{2}}} g(t_{k+\frac{1}{2}} - s) \int_{\Omega} f(x, s) v^h dx ds \\
&\approx \frac{\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}}) \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f(x, t_0) V_j \varphi_j(x) dx + \frac{3\delta}{4} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{\frac{1}{2}}) \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f(x, t_{\frac{1}{2}}) V_j \varphi_j(x) dx \\
&+ \delta \sum_{m=1}^k g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{m+\frac{1}{2}}) \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f(x, t_{m+\frac{1}{2}}) V_j \varphi_j(x) dx \\
&+ \frac{\delta}{2} g(0) \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} f(x, t_{k+\frac{1}{2}}) V_j \varphi_j(x) dx.
\end{aligned}$$

Como as constantes V_j são arbitrárias, aplicando matrizes em (6.3), temos

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{8}g(0) \right) MY^{(k+1)} + \left(-\frac{1}{2}g(0) + \frac{\delta}{8}g'(0) \right) MU^{(k+1)} \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8}g(0) \right) MY^{(k)} + \delta \sum_{m=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_m) MY^{(m)} \\
 &+ \frac{\delta}{2}g(t_{k+\frac{1}{2}})MY^{(0)} + \left(\frac{1}{2}g(0) - \frac{3\delta}{4}g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) - \frac{\delta}{8}g(0) \right) MU^{(k)} \\
 &- \left(g(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\delta}{2}g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \right) MU^{(0)} + \delta \sum_{m=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_m) MU^{(m)} \\
 &+ \frac{\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}})F^{(0)} + \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{\frac{1}{2}})F^{(\frac{1}{2})} + \delta \sum_{m=1}^k g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{m+\frac{1}{2}})F^{(m+\frac{1}{2})} \\
 &+ \frac{\delta}{2}g(0)F^{(k+\frac{1}{2})}
 \end{aligned}$$

e o esquema (5.22) corresponde em

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{1}{2}g(0) + \frac{\delta}{8}g'(0) \right) MU_{(n+1)} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{8}g(0) \right) M\mathcal{Y}_{(n+1)} \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{\delta}{8}g(0) \right) MY^{(k)} + \delta \sum_{m=1}^{k-1} g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_m) MY^{(m)} \\
 &+ \frac{\delta}{2}g(t_{k+\frac{1}{2}})MY^{(0)} + \left(\frac{1}{2}g(0) - \frac{3\delta}{4}g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) - \frac{\delta}{8}g(0) \right) MU^{(k)} \\
 &- \left(g(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\delta}{2}g'(t_{k+\frac{1}{2}}) \right) MU^{(0)} + \delta \sum_{m=1}^{k-1} g'(t_{k+\frac{1}{2}} - t_m) MU^{(m)} \\
 &+ \frac{\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}})F^{(0)} + \frac{3\delta}{4}g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{\frac{1}{2}})F^{(\frac{1}{2})} + \delta \sum_{m=1}^k g(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{m+\frac{1}{2}})F^{(m+\frac{1}{2})} \\
 &+ \frac{\delta}{2}g(0)F^{(k+\frac{1}{2})}.
 \end{aligned}$$

6.2 Convergência de h e δ

Neste exemplo, é apresentado o estudo da convergência para h e δ , usando as bases de Lagrange de grau 1, 2, 3 e 4. Uma vez que as soluções fornecidas por Antonev et al. [8] não são fáceis de calcular explicitamente, definimos aqui uma solução apropriada e calculamos a função f correspondente. Consideramos

$$\Omega =]0, 1[, \quad T = 0.1, \quad u(x, t) = (x(1-x))^2 e^{-t}, \quad g(\xi) = \lambda e^{-\xi} \quad \text{e} \quad \lambda = 1,$$

onde $tol = 10^{-9}$ é a tolerância do método de ponto fixo e f é calculado tal que u é a solução exata.

Primeiro estudamos a convergência para h . Fixando um valor pequeno de $\delta = 10^{-5}$, variando os valores de h e calculando o erro L^2 correspondente, com a fórmula

$$L^2 \text{ error} = \left(\int_{\Omega} (u(x, T) - U^{(N)}(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

construímos os gráficos da figura 6.1. Podemos observar ainda que o método converge e a ordem numérica de convergência é 2 para os polinómios de grau 1, 3 para os polinómios de grau 2 e 4 para o grau 3. Importa realçar que a ordem de convergência observada está de acordo com o Teorema 5.3.

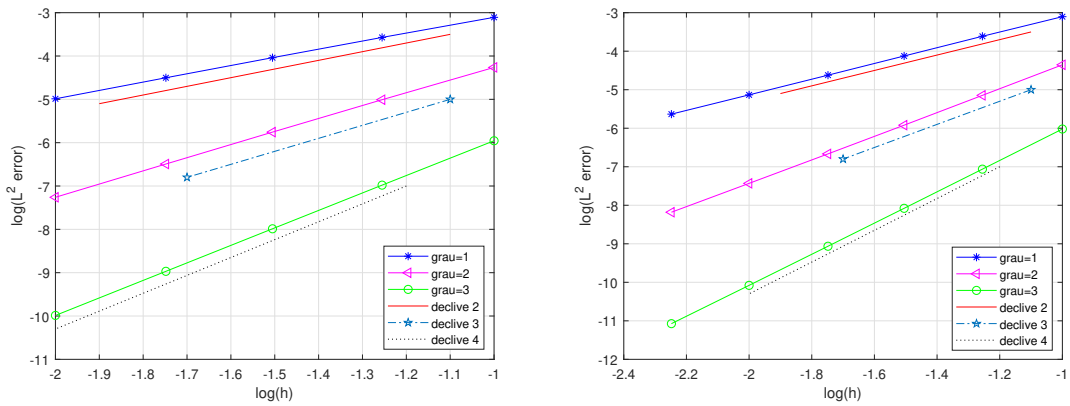


Figura 6.1: Análise de convergência de ordem $r = 1, 2, 3$ para $p = 3$ (à esquerda) e $p = 4$ (à direita).

Para o método do ponto fixo convergir, h e δ devem satisfazer as condições dos Teoremas 5.5 e 5.8, e de facto, para algumas combinações de h e δ , o método não convergiu neste exemplo. Portanto, não podemos fixar um valor pequeno de h e variar δ . Como a solução é um polinómio de grau 4, se definirmos o grau da solução aproximada, também 4, a solução será exata para x e podemos medir o erro para δ . Fixando $r = 4$, $h = 10^{-1}$ e variando δ , construímos o gráfico da figura 6.2. Assim, a partir do gráfico da figura 6.2, concluímos que a ordem de convergência é 2 para $p = 3$ e $p = 4$ como esperado.

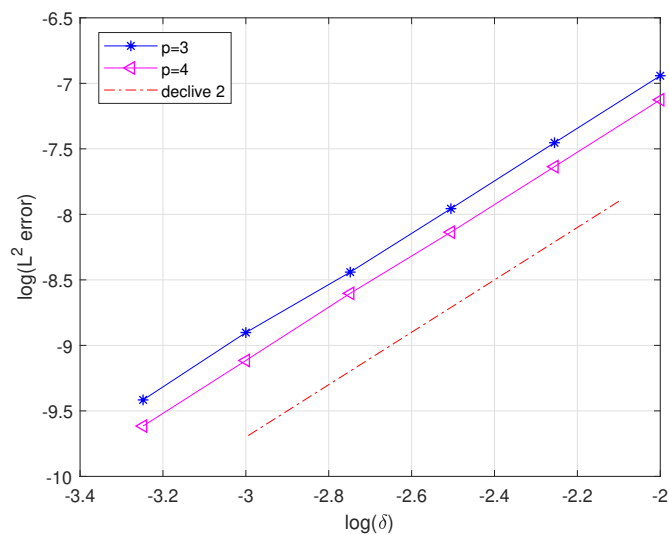


Figura 6.2: Análise de convergência de ordem δ para $p = 3$ e $p = 4$.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

Num outro exemplo, consideramos

$$\Omega =]0,1[, \quad T = 0.1, \quad u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-t}, \quad g(\xi) = \lambda e^{-\xi} \quad \text{e} \quad \lambda = 1,$$

onde $tol = 10^{-9}$ é a tolerância do método do ponto fixo e f é calculado tal que u é a solução exata. Primeiro estudamos a convergência para h . Fixando um valor pequeno de $\delta = 10^{-5}$, variando os valores de h e calculando o erro L^2 correspondente, construímos os gráficos da figura 6.3. Podemos observar ainda que o método converge e a ordem numérica de convergência é aproximadamente 2, 3 e 4 para polinômios de grau 1, 2 e 3, respectivamente. No entanto, considerando um valor alto para r , podemos tomar um valor baixo para h mantendo o erro baixo para h , o que permite a medição do erro para δ . Fixando $r = 4$ e $h = 10^{-1}$ e variando δ , construímos o gráfico da figura 6.3 e observamos que a ordem de convergência é 2, para $p = 3$, como esperado.

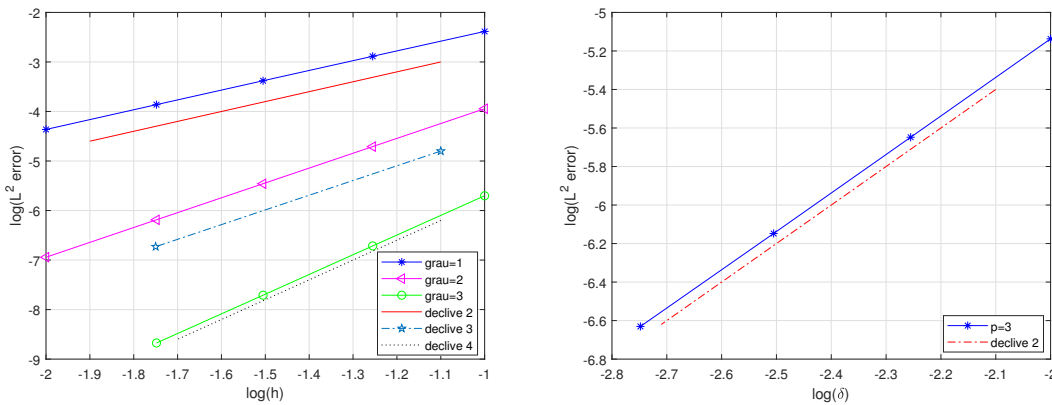


Figura 6.3: Análise de convergência de ordem h para $r = 1, 2, 3$ (à esquerda) e de δ para $r = 4$ (à direita) com $p = 3$.

6.3 Comportamento assintótico da solução

Neste exemplo, estudamos o comportamento assintótico da solução $u(x)$ para vários casos, conforme descrito abaixo. Consideramos

$$u_0(x) = 1 - x^4, \quad g(\xi) = \lambda e^{-\xi}, \quad f = 0, \quad \Omega =]-1, 1[, \quad r = 1, \quad T = 3,$$

com

$$tol = 10^{-9}, \quad h = 0.2 \quad e \quad \delta = 0.001.$$

Para entender melhor o comportamento assintótico da solução, definimos a função de energia

$$b(t) = \int_{-1}^1 U^2(x, t) dx$$

e simulamos com os valores de $p = 1.5, 2$ e 4 .

6.3.1 Oscilações na direção do tempo

Para λ positivo (neste caso $\lambda = 10$), a solução decai e desenvolve oscilações na direção do tempo violando o princípio do máximo, como podemos ver nas figuras 6.4, 6.5 e 6.6. A velocidade de decaimento depende do valor de p .

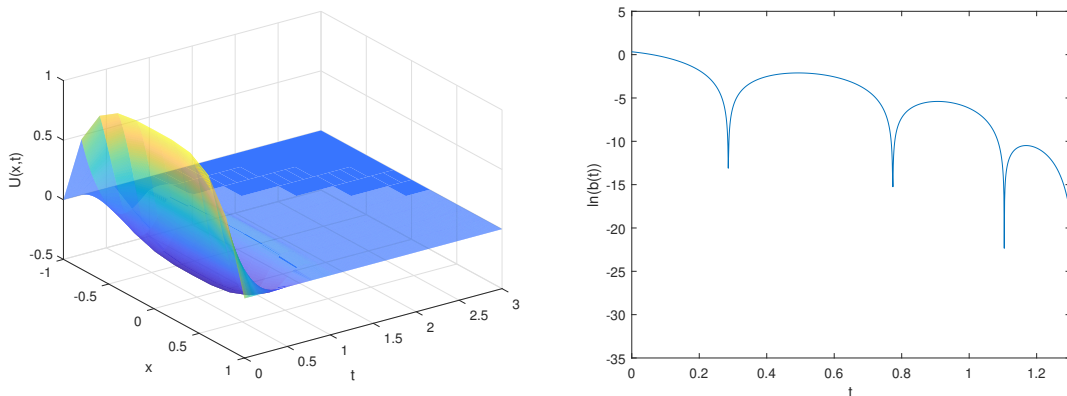


Figura 6.4: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 1.5$.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

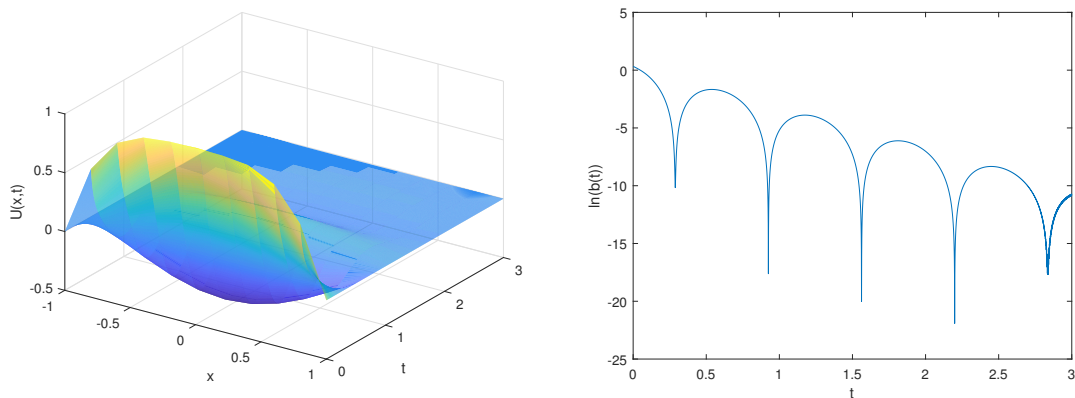


Figura 6.5: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 2$.

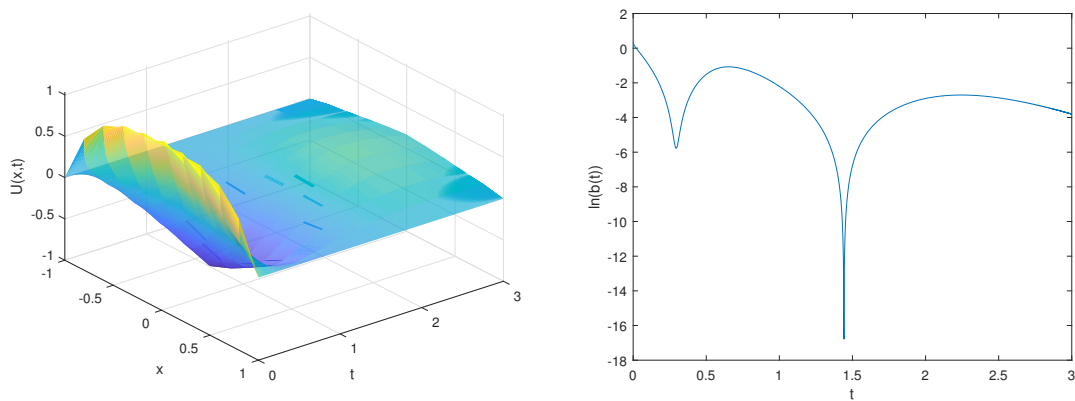


Figura 6.6: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 4$.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

6.3.2 Extinção e decaimento

Para a equação de calor ($p = 2$) e a ausência de memória ($\lambda = 0$), o decaimento exponencial é bem conhecido. Assim, para o caso $p = 1.5$ observamos uma extinção, enquanto para $p = 4$ tivemos um decaimento, conforme ilustrado nas figuras 6.7, 6.8 e 6.9.

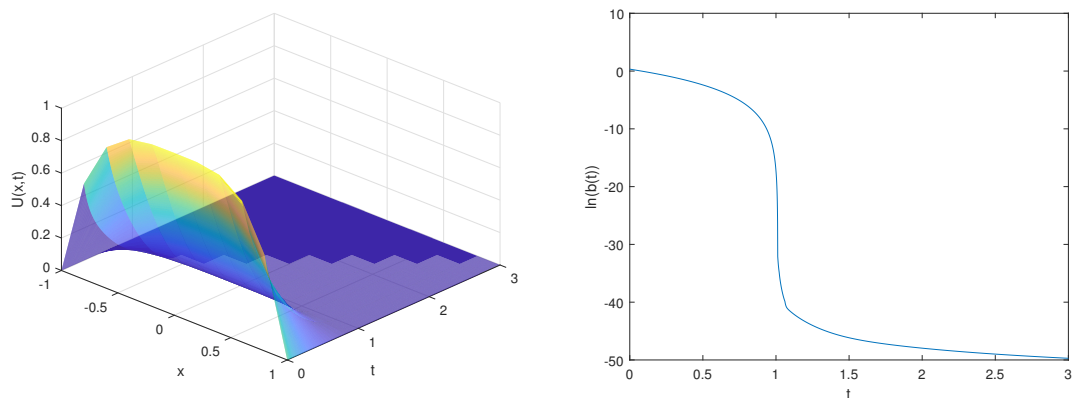


Figura 6.7: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 1.5$.

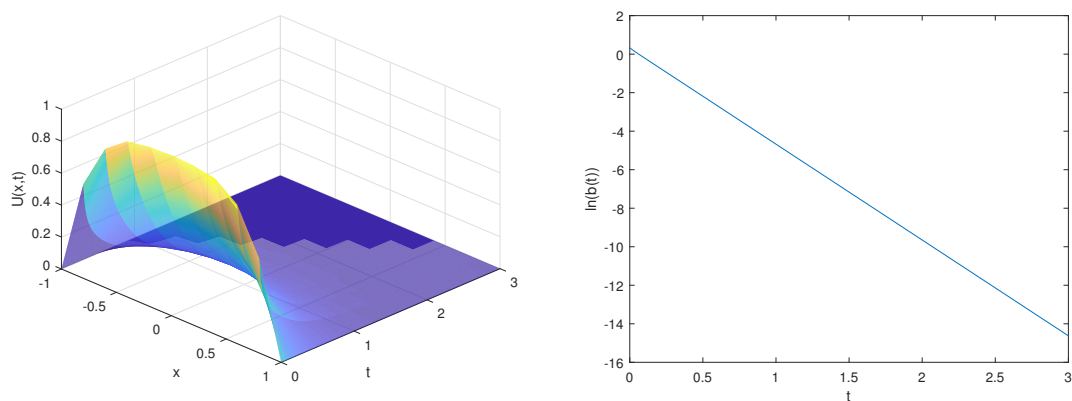


Figura 6.8: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 2$.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

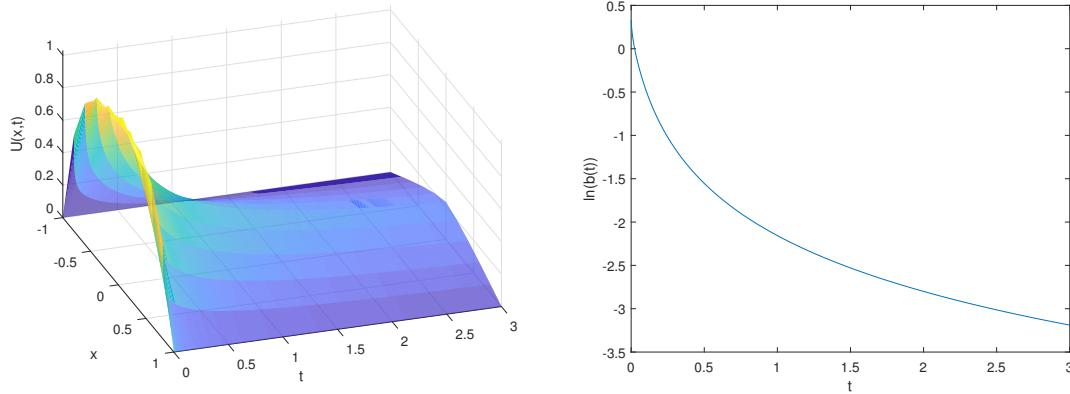


Figura 6.9: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 4$.

6.3.3 Estabilidade da solução

Para λ negativo com módulo pequeno (neste caso $\lambda = -1$), a solução decai com o tempo e aproxima-se de uma solução estável. No entanto, a velocidade de decaimento e a estabilidade assintótica dependem de p , conforme ilustrado nas figuras 6.10, 6.11 e 6.12.

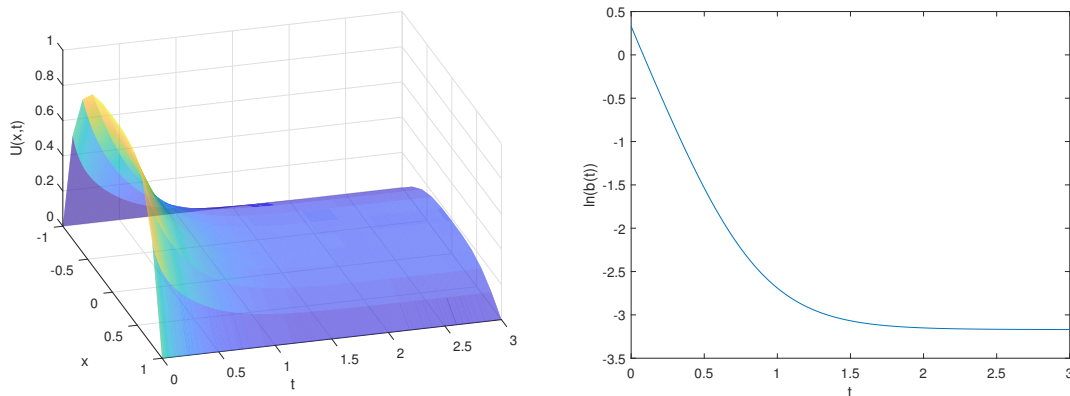


Figura 6.10: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 1.5$.

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

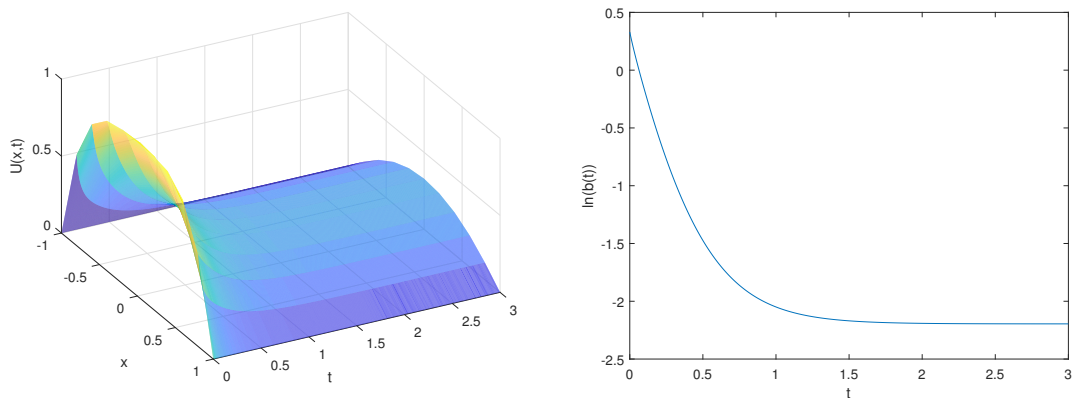


Figura 6.11: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 2$.

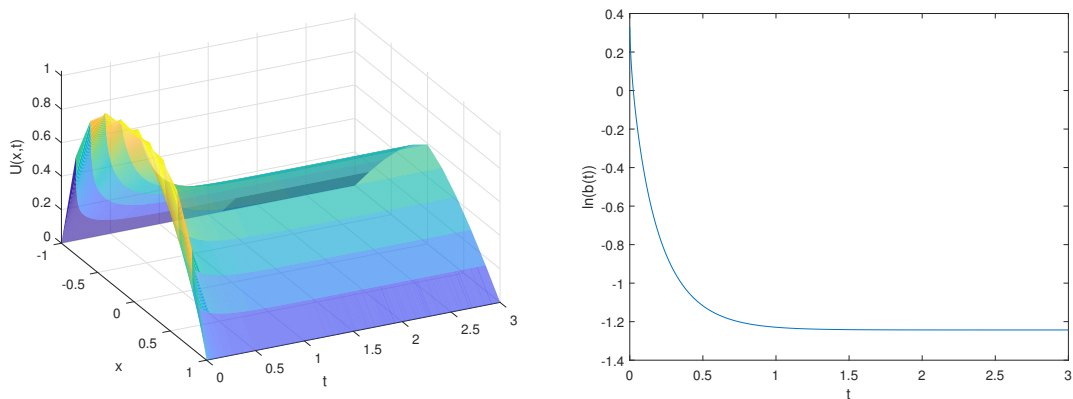


Figura 6.12: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 4$.

6.3.4 Oscilações na direção do espaço

Para λ negativo com módulo grande (neste caso $\lambda = -10$), a solução desenvolve oscilações na direção do espaço que aumentam com o tempo, violando também o princípio do máximo, como podemos ver nas figuras 6.13 e 6.14.

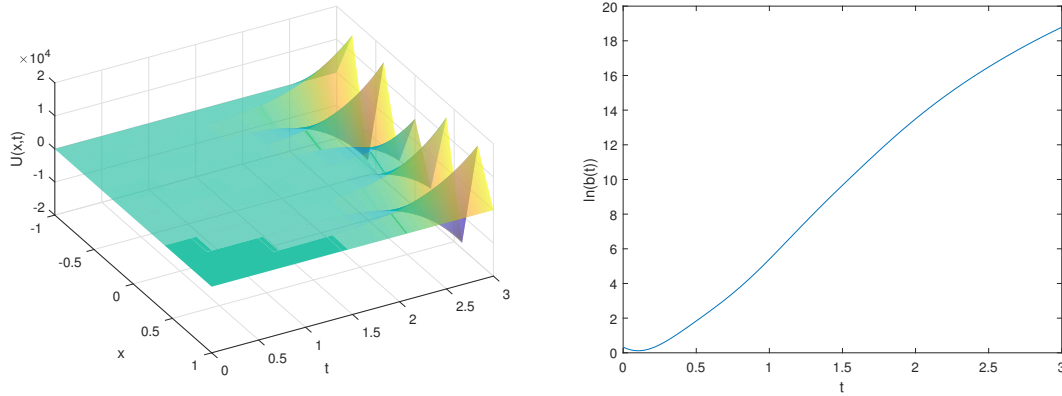


Figura 6.13: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 1.5$.

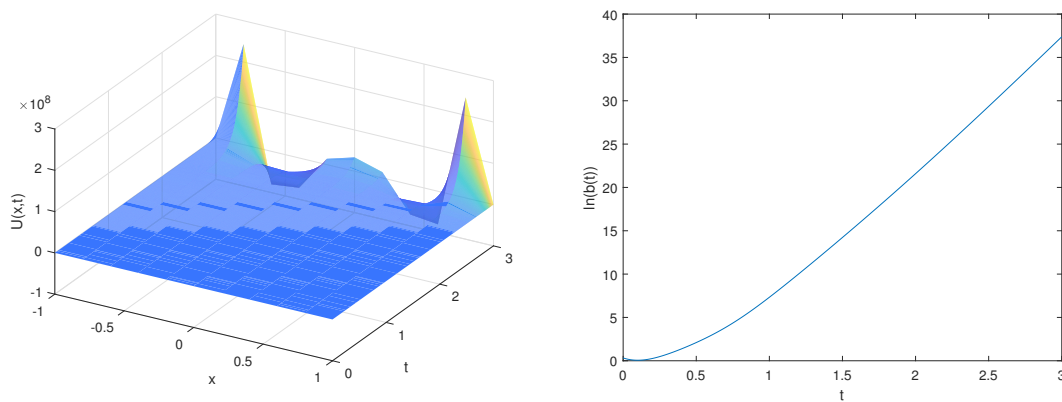


Figura 6.14: Solução obtida (à esquerda) e a função $b(t)$ (à direita) com $p = 2$.

6.4 Propagação com velocidade finita

Neste exemplo, estudamos a propagação com velocidade finita da solução $u(x)$ para vários casos. Vamos considerar os dados

$$g(\xi) = \lambda e^{-\xi}, \quad \text{tol} = 10^{-9}, \quad h = 0.02, \quad \delta = 0.001, \quad p = 3, \quad r = 1$$

e

$$u_0(x) = \begin{cases} 10(x+1)(0.5+x)^2, & x \in [-1, -0.5[\\ 0, & x \in [-0.5, 0.5], \\ 10(1-x)(x-0.5)^2, & x \in]0.5, 1]. \end{cases}$$

Sabemos perfeitamente que a equação do calor não apresenta propagação com velocidade finita. No entanto, para $p = 3$ sem memória, isto é $\lambda = 0$, observamos esse efeito. A partir desse dado inicial que é zero entre -0.5 e 0.5 , verifica-se na figura 6.15 que o tamanho da região onde a solução é zero diminui com velocidade finita e essa velocidade depende do parâmetro λ (ver Definição 3.6).

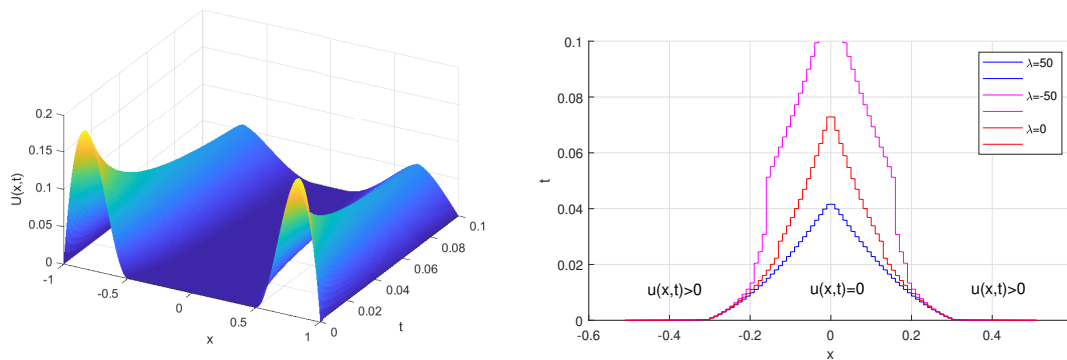


Figura 6.15: Solução obtida (à esquerda) e a evolução da fronteira (à direita).

6.5 Propriedade do tempo de espera

Finalmente, alterando a solução inicial em torno de 0.5 pudemos observar o efeito do tempo de espera. Os dados são

$$g(\xi) = \lambda e^{-\xi}, \quad tol = 10^{-9}, \quad h = 0.02, \quad \delta = 0.001, \quad p = 3, \quad r = 1$$

e

$$u_0(x) = \begin{cases} 100(x+1)(0.5+x)^7, & x \in [-1, -0.5[, \\ 0, & x \in [-0.5, 0.5], \\ 100(1-x)(x-0.5)^7, & x \in]0.5, 1]. \end{cases}$$

Comparando com o exemplo anterior, observamos que o tamanho da região onde a solução é zero permanece fixa por um curto período de tempo e após esse processo diminui com a velocidade finita, conforme ilustrado na figura 6.16. A memória também altera o tempo de espera (ver Definição 3.10).

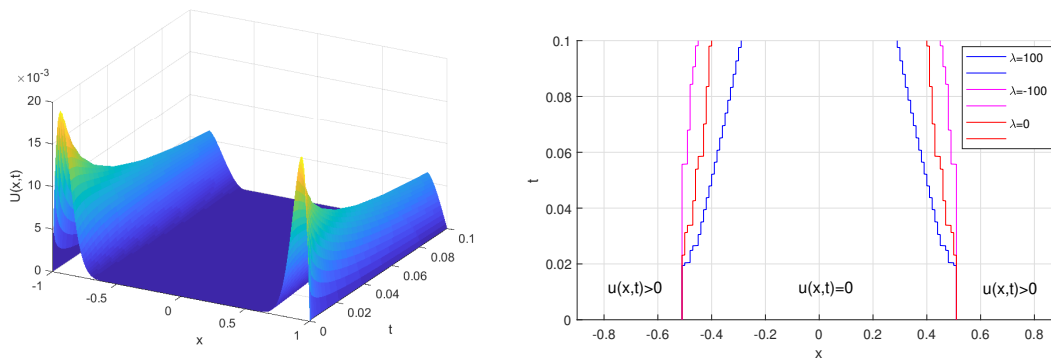


Figura 6.16: Solução obtida (à esquerda) e a evolução da fronteira (à direita).

Capítulo 7

Conclusões e Trabalho Futuro

No presente trabalho estudou-se a aplicação do método dos elementos finitos para a resolução de uma equação diferencial parcial não linear do tipo parabólico com p -Laplaciano e memória.

O método dos elementos finitos com base de Lagrange de grau $r \geq 1$, foi complementado com o método de Crank-Nicolson e a quadratura dos Trapézios, o p -Laplaciano e o termo de memória foram separados. Demonstramos a existência, unicidade e estabilidade das soluções sob as condições dadas.

Provamos a ordem de convergência em função do parâmetro p , do p -Laplaciano, nas normas clássicas e verificou-se que a ordem diminui conforme $p \rightarrow \infty$, mas é sempre maior que $\frac{r}{2}$ para h e maior que 1 para δ . Provamos ainda a existência, unicidade e estabilidade das soluções semidiscretas. Limites de erro dependendo do parâmetro p também são obtidos.

Estudou-se também um método do ponto fixo para resolver o sistema de equações algébricas não lineares. Para ilustrar os resultados teóricos, o método foi implementado num sistema computacional e os resultados numéricos obtidos estão em conformidade com os resultados esperados.

De uma forma geral, numericamente concluiu-se que a ordem de convergência para h está de acordo com o Teorema 5.3 e para o método do ponto fixo convergir, h e δ devem satisfazer algumas condições. Para o comportamento assintótico da solução $u(x)$, no caso λ positivo, a solução decai e desenvolve oscilações na direção do tempo violando o princípio do máximo. Para a equação de calor ($p = 2$) e a ausência de memória ($\lambda = 0$), o decaimento exponencial é bem conhecido. Para $p = 1.5$ observou-se uma extinção, enquanto para $p = 4$ tivemos um decaimento. Para λ negativo com módulo pequeno, a solução decai com o tempo e aproxima-se de uma solução estável. Para a propagação com velocidade finita da solução $u(x)$, no caso $p = 3$ sem memória, observou-se esse efeito. Finalmente, alterando a solução inicial em torno de 0.5 observou-se o efeito do tempo de espera.

Como trabalho futuro, pretende-se fazer um estudo para melhorar as estimativas, na perspectiva de obter melhores ordens de convergência. Pretendemos também, ainda encontrar um método eficiente, eficaz e robusto para resolver o sistema de equações algébricas não lineares e realizar um estudo semelhante para a equação (1.4), com p dependendo de x . O facto de que o $p(x)$ -Laplaciano não é homogêneo, torna o problema mais complicado do que o problema com p constante.

Bibliografia

- [1] Frederic Abergel and Remi Tachet. A nonlinear partial integro-differential equation from mathematical finance. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 27(3):907–917, 2010. 2
- [2] Ravi P. Agarwal. *Difference equations and inequalities*, volume 228 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, second edition, 2000. Theory, methods, and applications. 12
- [3] Aruchamy Akilandeewari, Krishnan Balachandran, Margarita Rivero, and Juan J. Trujillo. On the solutions of partial integrodifferential equations of fractional order. *Tbilisi Math. J.*, 10(1):19–29, 2017. 3
- [4] Rui M. P. Almeida, Stanislav N. Antontsev, and José C. M. Duque. On the finite element method for a nonlocal degenerate parabolic problem. *Comput. Math. Appl.*, 73(8):1724–1740, 2017. 5
- [5] Rui M. P. Almeida, José C. M. Duque, Jorge Ferreira, and Rui J. Robalo. The Crank-Nicolson-Galerkin finite element method for a nonlocal parabolic equation with moving boundaries. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 31(5):1515–1533, 2015. 5, 6
- [6] Rui M. P. Almeida, José C. M. Duque, and Belchior C. X. Mário. A mixed finite element method for a class of evolution differential equations with p -Laplacian and memory. *Appl. Numer. Math.*, 181:534–551, 2022. 6, 7
- [7] Stanislav Antontsev and Sergey Shmarev. *Evolution PDEs with nonstandard growth conditions*, volume 4 of *Atlantis Studies in Differential Equations*. Atlantis Press, Paris, 2015. Existence, uniqueness, localization, blow-up. 1, 15
- [8] Stanislav Antontsev, Sergey Shmarev, Jacson Simsen, and Mariza S. Simsen. On the evolution p -Laplacian with nonlocal memory. *Nonlinear Anal.*, 134:31–54, 2016. 5, 6, 15, 21, 25, 60
- [9] Stanislav Antontsev, Sergey Shmarev, Jacson Simsen, and Mariza Stefanello Simsen. Differential inclusion for the evolution $p(x)$ -Laplacian with memory. *Electron. J. Differential Equations*, pages Paper No. 26, 28, 2019. 6
- [10] C. Atkinson and C. R. Champion. Some boundary-value problems for the equation $\nabla \cdot (|\nabla\varphi|^{N-2}\nabla\varphi) = 0$. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 37(3):401–419, 1984. 1
- [11] Z. Avazzadeh, Z. Beygi Rizi, F. M. Maalek Ghaini, and G. B. Loghmani. A numerical solution of nonlinear parabolic-type Volterra partial integro-differential equations using radial basis functions. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 36(5):881–893, 2012. 4
- [12] Imran Aziz and Imran Khan. Numerical solution of partial integrodifferential equations of diffusion type. *Math. Probl. Eng.*, pages Art. ID 2853679, 11, 2017. 4
- [13] V. Barbu and M. A. Malik. Semilinear integro-differential equations in Hilbert space. *J. Math. Anal. Appl.*, 67(2):452–475, 1979. 3

- [14] John W. Barrett and W. B. Liu. Finite element approximation of the p -Laplacian. *Math. Comp.*, 61(204):523–537, 1993. 11
- [15] John W. Barrett and W. B. Liu. Finite element approximation of the parabolic p -Laplacian. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(2):413–428, 1994. 2, 9
- [16] Jiří Benedikt, Petr Girg, Lukáš Kotrla, and Peter Takáč. Origin of the p -Laplacian and A. Missbach. *Electron. J. Differential Equations*, pages Paper No. 16, 17, 2018. 1
- [17] Gabriella Bognár and Erika Rozgonyi. The local analytic solution to some nonlinear diffusion-reaction problems. *WSEAS Trans. Math.*, 7(6):382–395, 2008. 1
- [18] Julián Fernández Bonder and Julio D. Rossi. Existence results for the p -Laplacian with nonlinear boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 263(1):195–223, 2001. 2
- [19] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011. 9
- [20] Hermann Brunner. A survey of recent advances in the numerical treatment of Volterra integral and integro-differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 8(3):213–229, 1982. 4
- [21] Chuanmiao Chen and Tsimin Shih. *Finite element methods for integrodifferential equations*, volume 9 of *Series on Applied Mathematics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998. 3, 5
- [22] Michel Chipot. *Elements of nonlinear analysis*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. 9
- [23] Michel Chipot and Tetiana Savitska. Nonlocal p -Laplace equations depending on the L^p norm of the gradient. *Adv. Differential Equations*, 19(11-12):997–1020, 2014. 9, 11
- [24] S.-S. Chow. Finite element error estimates for nonlinear elliptic equations of monotone type. *Numer. Math.*, 54(4):373–393, 1989. 2, 9
- [25] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978. 13, 14
- [26] Bernardo Cockburn and Jiguang Shen. A hybridizable discontinuous Galerkin method for the p -Laplacian. *SIAM J. Sci. Comput.*, 38(1):A545–A566, 2016. 5
- [27] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1955. 9
- [28] M. G. Crandall, S.-O. Londen, and J. A. Nohel. An abstract nonlinear Volterra integrodifferential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 64(3):701–735, 1978. 3
- [29] Emmanuele DiBenedetto. *Degenerate parabolic equations*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993. 1, 4

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

- [30] Lars Diening and Christian Kreuzer. Linear convergence of an adaptive finite element method for the p -Laplacian equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(2):614–638, 2008. 5
- [31] Jim Douglas, Jr. and B. Frank Jones, Jr. Numerical methods for integro-differential equations of parabolic and hyperbolic types. *Numer. Math.*, 4:96–102, 1962. 4
- [32] José C. M. Duque, Rui M. P. Almeida, Stanislav N. Antontsev, and Jorge Ferreira. The Euler-Galerkin finite element method for a nonlocal coupled system of reaction-diffusion type. *J. Comput. Appl. Math.*, 296:116–126, 2016. 5, 6
- [33] José C. M. Duque, Rui M. P. Almeida, and Belchior C. X. Mário. Numerical solution for a class of evolution differential equations with p -Laplacian and memory. *J. Comput. Appl. Math.*, 428:Paper No. 115144, 2023. 6, 7
- [34] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004. 9
- [35] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. 9, 11, 12, 19
- [36] Khalil Ezzinbi and Saifeddine Ghnimi. Existence and regularity of solutions for some partial integrodifferential equations involving the nonlocal conditions. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 40(13):1532–1549, 2019. 3
- [37] Khalil Ezzinbi and Saifeddine Ghnimi. Existence and regularity for some partial neutral functional integrodifferential equations with nondense domain. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 43(4):2967–2987, 2020. 3
- [38] Xiaobing Feng and Hai-jun Wu. A posteriori error estimates and an adaptive finite element method for the Allen-Cahn equation and the mean curvature flow. *J. Sci. Comput.*, 24(2):121–146, 2005. 1
- [39] R. Glowinski and A. Marrocco. Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér.*, 9(no. , no. R-2):41–76, 1975. 2
- [40] Diane Guignard, Fabio Nobile, and Marco Picasso. A posteriori error estimation for elliptic partial differential equations with small uncertainties. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 32(1):175–212, 2016. 4
- [41] Ahmed Himadan. Well defined extinction time of solutions for a class of weak-viscoelastic parabolic equation with positive initial energy. *AIMS Math.*, 6(5):4331–4344, 2021. 6
- [42] Lew Lefton and Dongming Wei. Numerical approximation of the first eigenpair of the p -Laplacian using finite elements and the penalty method. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 18(3-4):389–399, 1997. 2

- [43] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969. 1, 9
- [44] R. C. MacCamy. Stability theorems for a class of functional differential equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 30(3):557–576, 1976. 3
- [45] R. K. Miller. An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory. *J. Math. Anal. Appl.*, 66(2):313–332, 1978. 2
- [46] K. Mustapha, H. Brunner, H. Mustapha, and D. Schötzau. An hp -version discontinuous Galerkin method for integro-differential equations of parabolic type. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(4):1369–1396, 2011. 4, 5
- [47] John A. Nohel. Nonlinear Volterra equations for heat flow in materials with memory. In *Integral and functional differential equations (Proc. Conf., West Virginia Univ., Morgantown, W. Va., 1979)*, volume 67 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 3–82. Dekker, New York, 1981. 3
- [48] A. Novotný and I. Straškraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, volume 27 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2004. 12
- [49] A. Novotný and I. Straškraba. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, volume 27 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2004. 9
- [50] B. G. Pachpatte. On a nonlinear diffusion system arising in reactor dynamics. *J. Math. Anal. Appl.*, 94(2):501–508, 1983. 2
- [51] Amiya Kumar Pani, Graeme Fairweather, and Ryan I. Fernandes. Alternating direction implicit orthogonal spline collocation methods for an evolution equation with a positive-type memory term. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(1):344–364, 2007/08. 5
- [52] J. R. Philip. n -diffusion. *Austral. J. Phys.*, 14:1–13, 1961. 1
- [53] Gérard A. Philippin. A minimum principle for the problem of torsional creep. *J. Math. Anal. Appl.*, 68(2):526–535, 1979. 1
- [54] Heitor Pina. Métodos numéricos. *Departamento de Engenharia Mecânica. IST*, 2010. 9, 12, 13
- [55] Marie-Lise Raynal. On some nonlinear problems of diffusion. In *Volterra equations (Proc. Helsinki Sympos. Integral Equations, Otaniemi, 1978)*, volume 737 of *Lecture Notes in Math.*, pages 251–266. Springer, Berlin, 1979. 2
- [56] G. Murali Mohan Reddy, Rajen Kumar Sinha, and José Alberto Cuminato. A posteriori error analysis of the Crank-Nicolson finite element method for parabolic integro-differential equations. *J. Sci. Comput.*, 79(1):414–441, 2019. 4
- [57] R. E. Showalter. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, volume 49 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. 12

Aproximação Numérica de EDP's com p -Laplaciano e Memória

- [58] Rajen K. Sinha, Richard E. Ewing, and Raytcho D. Lazarov. Some new error estimates of a semidiscrete finite volume element method for a parabolic integro-differential equation with nonsmooth initial data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(6):2320–2343, 2006. 5
- [59] Rajen K. Sinha, Richard E. Ewing, and Raytcho D. Lazarov. Mixed finite element approximations of parabolic integro-differential equations with nonsmooth initial data. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(5):3269–3292, 2009. 5
- [60] I. H. Sloan and V. Thomée. Time discretization of an integro-differential equation of parabolic type. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23(5):1052–1061, 1986. 3
- [61] Fairouz Tchier, Ioannis Dassios, Ferdous Tawfiq, and Lakhdar Ragoub. On the approximate solution of partial integro-differential equations using the pseudospectral method based on chebyshev cardinal functions. *Mathematics*, 9(3):286, Feb 2021. 5
- [62] Vidar Thomée and Nai Ying Zhang. Error estimates for semidiscrete finite element methods for parabolic integro-differential equations. *Math. Comp.*, 53(187):121–139, 1989. 4
- [63] Francesco Torre and Bernhard Ruf. Multiplicity of solutions for a superlinear p -Laplacian equation. *Nonlinear Anal.*, 73(7):2132–2147, 2010. 1
- [64] Wansheng Wang and Qingguo Hong. Two-grid economical algorithms for parabolic integro-differential equations with nonlinear memory. *Appl. Numer. Math.*, 142:28–46, 2019. 5
- [65] Muhammad Yousuf. Numerical solution of systems of partial integral differential equations with application to pricing options. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 34(3):1033–1052, 2018. 4
- [66] Lao Sen Yu. Nonlinear p -Laplacian problems on unbounded domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 115(4):1037–1045, 1992. 2
- [67] Khaled Zennir and Tosiya Miyasita. Lifespan of solutions for a class of pseudo-parabolic equation with weak-memory. *Alexandria Engineering Journal*, 59(2):957–964, 2020. 6
- [68] Guang-an Zou, Xue Wang, and Tony W. H. Sheu. Finite element analysis of a new phase field model with p -Laplacian operator. *Math. Comput. Simulation*, 185:134–152, 2021. 2

Índice de Notações

Geral

→ indica uma convergência

$$\operatorname{ess\,sup}(u) = \inf \left\{ \sup_{x \in \Omega \setminus Z} |u(x)| : Z \subset \Omega, \operatorname{meas}(Z) = 0 \right\}$$

$\operatorname{supp} v = \overline{\{x : v(x) \neq 0\}}$ é o suporte de v

$p' = \frac{p}{p-1}$ é o conjugado de $p > 1$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

Acrónimos

UBI Universidade da Beira Interior

MEF Método dos Elementos Finitos

EDP Equação Diferencial Parcial.

Conjuntos

$|\Omega| = \operatorname{meas}(\Omega)$ = medida de Lebesgue de Ω

$\mathcal{S}^h = \{w \in C^0(\Omega) : w(x) = 0, x \in \partial\Omega, w(x)|_{T_k} \in \mathcal{P}_r(T_k)\}$

$\operatorname{int}(\Omega)$ denota o interior de Ω

$\bar{\Omega}$ denota o fecho de Ω

$Q = \Omega \times]0, T]$

$\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω

$B_\varrho(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varrho\}$ é a bola de centro x_0 e raio ϱ .

Operadores

$D^\alpha u$ denota a derivada fraca de ordem α de u

$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ denota o divergente de u

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$ denota o vetor gradiente de u

$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$ denota o Laplaciano de u

$\Delta_p u$ denota o p -Laplaciano de u

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ denota a derivada (fraca ou forte) de u em relação à variável tempo

$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ denota a derivada forte de ordem α de u

$\Pi_h u$ denota o operador de interpolação de u em \mathcal{S}^h .

Espaços de Funções

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \text{ess sup } |u| < \infty\}$

$W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq \alpha \leq k\}$

$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$

$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$

$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$

$C^{k,\mu}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in C^k(\Omega) \text{ e } D^k u \text{ é Hölder contínua com expoente } \mu\}$

$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid \text{supp } v \text{ é um conjunto compacto}\}$

$L^p(a, b; X) = \{u :]a, b[\rightarrow X \mid u \text{ é mensurável e } \int_a^b \|u\|_X^p dt < \infty\}$

$W^{k,p}(a, b; X) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) \mid u \text{ é mensurável e } \int_a^b \|u\|_X^p dt < \infty\}$

$C^k([a, b]; X) = \{u : [a, b] \rightarrow X \mid u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$

$W^{-k,p}(\Omega)$ denota o espaço dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$

$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

$\mathcal{P}_r(T_k)$ é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a r definidos em T_k .

Normas e Seminormas

$|x|$ denota o módulo de $x \in \mathbb{R}$

$|x|$ denota a norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u|$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^k \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u|$$

$$\|u\|_{W^{k,p,j}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=j}^k \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty \text{ e } 0 \leq j \leq k$$

$$\|u\|_{C^0([a,b],X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X$$

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X < \infty$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(a,b;X)} = \left(\sum_{j=1}^k \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L^p(a,b;X)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Índice

- bases de Lagrange, 57
- convergência
 - de h e δ , 60
- definição
 - de polinômios de Lagrange, 13
 - de simplex, 9
 - de tempo de espera, 18
 - propagação com velocidade finita, 17
- desigualdade
 - de Young, 11
- espaços
 - dos elementos finitos, 13
- exemplo
 - de efeito do tempo de espera, 70
 - de estabilidade da solução, 66
 - de extinção e decaimento, 65
 - de oscilações na direção do espaço, 68
 - de oscilações na direção do tempo, 63
 - propagação com velocidade finita, 69
- existência e unicidade, 15
- formulação fraca do problema, 23
- formulação totalmente discreta, 34
- lema
 - da diferenciação numérica, 12
 - da estimativa em tempo global, 16
 - da estimativa em tempo local, 16
 - da estimativas inversa, 14
 - de Gronwall, 12
 - de Gronwall discreto, 12
 - do erro de interpolação, 13
- método
 - de Crank-Nicolson, 33
- problema auxiliar, 21
- problema semidiscreto, 25
- teorema
 - da convergência, 29, 40, 50, 53
 - da estabilidade, 27, 38
 - da existência, 16
 - da fórmula de Lagrange, 13
 - da regra dos Trapézios, 13
 - da unicidade, 16, 25, 36
 - de Brouwer, 12
 - de Green, 12
 - do princípio do máximo forte, 19
 - do tempo de espera, 19
 - propagação com velocidade finita, 18