



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Geometria Analítica no Plano Pensar e ensinar Geometria

Regina Maria da Silva Tomé Guimarães

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
**Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico
e no Ensino Secundário**
(2º ciclo de estudos)

Orientadora Científica: Prof^a Doutora Sandra Margarida Pinho da Cruz Bento

Covilhã, outubro de 2014

Dedicatória

*Aos meus pais,
aos meus filhos Diogo e Duarte,
por serem quem são na minha vida.*

Agradecimentos

À professora doutora Sandra Margarida Pinho da Cruz Bento, pela presença em cada momento, pelas orientações e sugestões preciosas dadas em tempo oportuno, pelas palavras de motivação.

À professora Maria Isaura Fazendeiro Mendes, por me ter acolhido, por toda a orientação, ensino, apoio, disponibilidade e amizade que me proporcionou ao longo deste ano de estágio.

À Diretora da Escola Secundária Campos Melo, professora Isabel Fael, aos colegas de Grupo, colegas de Departamento, funcionários e a todos com quem privei, por todo o carinho e atenção demonstrados.

Aos alunos do 9ºB, 10ºG e 12ºA, por me permitirem uma experiência de ensino tão abrangente.

Aos meus colegas de estágio Manuel Feijão e Cristina Maria Martins, pelo percurso e aprendizagem que efetuamos juntos.

Aos meus amigos de início desta caminhada, Flávio Escada e Tânia Pacheco, por sempre me incentivarem a chegar ao fim.

Aos meus pais e filhos, pela sua presença e palavras de força.

À minha irmã Vânia, por todo o apoio.

Ao professor doutor Helder Vilarinho, por tudo o que me ensinou e por não me ter deixado desistir deste sonho.

À professora doutora Isabel Cunha, pelas palavras de carinho e de força com que sempre me presenteou.

A todos os outros que de alguma forma estiveram presentes e me ajudaram a chegar aqui.

O meu grande obrigado a todos!

Resumo

Nos capítulos dedicados ao trabalho científico, dada a importância da proatividade do professor no ensino da Matemática, apresenta-se um olhar pela forma como o pensamento algébrico e o pensamento geométrico são desenvolvidos. É feita uma incursão pela história da Geometria, passando pela Geometria Euclidiana e detalhando o objetivo e conceitos fundamentais da Geometria Analítica. Inclui-se a resolução de alguns problemas que mostram a aplicação destes conceitos. Faz-se também referência a alguns pontos relativos ao Seminário I e Seminário II que evidenciam a arte de fazer Matemática e a simbiose entre a Álgebra e a Geometria.

No capítulo destinado à Prática de Ensino Supervisionado, apresenta-se uma descrição do Estágio Pedagógico, com indicação das principais atividades extracurriculares desenvolvidas, seminários e cursos de formação frequentados e incluem-se as planificações de seis aulas subordinadas aos temas: *Equações, Circunferência, Trigonometria do Triângulo Retângulo do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico - 9ºano e Introdução ao Cálculo Diferencial II e Trigonometria e Números Complexos do Programa de Matemática A do 12º ano, para os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e Ciências Sócioeconómicas.*

Palavras-chave

Álgebra. Geometria. Geometria Euclidiana. Geometria Analítica. Referencial Cartesiano. Ponto. Reta. Distância. Ângulo. Triângulo. Circunferência. Trigonometria. Equação. Função. Derivada. Curva.

Abstract

Given the importance of the teacher's proactivity in Mathematics teaching, the chapters concerning scientific work are dedicated to how algebraic thought and geometric thought are developed. An incursion into Geometry history is carried out, focusing on Euclidean Geometry and specifying the objective and fundamental concepts of Analytic Geometry. The resolution of some problems, which show the application of these concepts, is included. Some aspects concerning Seminar I and Seminar II are also referred, highlighting the art of doing mathematics and the symbiosis between algebra and geometry.

In the chapter dedicated to Supervised Teaching Practice, a description of the pedagogic training is presented, with the indication of the main extracurricular activities developed, seminars and training courses attended and the planning of six classes is also included under the following themes: Equations, Circumference, Right Triangle Trigonometry from the New Mathematics Program for the 9th grade, and Introduction to Differential Calculus II, and Trigonometry and Complex Numbers from the Mathematics A Program for the 12th grade of Scientific and Humanistic Courses, in the areas of Science and Technology and Socioeconomic Sciences.

Keywords

Algebra. Geometry. Euclidean Geometry. Analytic Geometry. Cartesian referential. Point. Straight Line. Distance. Angle. Triangle. Circumference. Trigonometry. Equation. Function. Derivative. Curve.

Conteúdo

Introdução	1
1 Pensar e ensinar Geometria	3
1.1 Duas formas de pensar matematicamente	3
1.1.1 O pensamento algébrico	3
1.1.2 O pensamento e os conceitos geométricos	7
1.1.3 A perspectiva do NPMEB	10
1.1.4 Um olhar pelo ensino da Geometria no Secundário	11
1.1.5 Metodologias, materiais e recursos	12
1.2 Geometria - Passos de uma evolução histórica	13
1.3 A Geometria de Euclides	21
1.3.1 Os Elementos de Euclides	21
1.3.2 Os 5 postulados de Euclides	22
1.4 Geometria Analítica no Plano	23
1.4.1 Referencial cartesiano	24
1.4.2 Quatro quadrantes no plano	26
1.4.3 Ponto médio de um segmento de reta	27
1.4.4 Distância entre dois pontos	28
1.4.5 Condição de perpendicularidade de dois segmentos de reta	30
1.4.6 Cosseno de um ângulo entre duas direções	32
1.4.7 Equações que definem uma reta no plano	34
1.4.8 Equação da circunferência	36
1.4.9 Distância de um ponto a uma reta	37
1.4.10 Área de um triângulo	39
1.4.11 Problemas	41
1.5 O poder da representação geométrica	49
1.6 Síntese	51
2 Seminários de investigação Matemática	53
2.1 Enquadramento dos temas	53
2.2 Sangaku - Desafios Matemáticos nos Templos do Japão	55
2.3 Álgebra e Geometria com triângulos de Herão	61
2.3.1 Questão de partida	61
2.3.2 O conjunto dos triângulos com área e semiperímetro iguais	65
2.3.3 Triângulos e Funções Cúbicas	71
2.3.4 Resposta à questão de partida	77
2.4 Apreciação geral	79
3 Prática de Ensino Supervisionada	81
3.1 Caracterização	81
3.2 Início do Estágio Pedagógico	83
3.3 Reuniões	83
3.4 Prática de Ensino Supervisionada	85
3.5 Observações gerais sobre a PES	87

3.6	Planificações	89
3.6.1	Planificação Aula 3 ◊ Equações - 9º ano	91
3.6.2	Planificação Aula 4 ◊ Circunferência - 9ºano	99
3.6.3	Planificação Aula 5 ◊ Circunferência - 9º ano	105
3.6.4	Planificação Aula 6 ◊ Introdução ao cálculo diferencial II - 12º ano	113
3.6.5	Planificação Aula 7 ◊ Trigonometria e Números Complexos - 12º ano	131
3.6.6	Planificação Aula 8 ◊ Trigonometria no triângulo retângulo - 9º ano	147
3.7	Atividades extraletivas	157
3.8	Seminários e Formação	159
3.9	Conclusões	161
	Bibliografia	163
A	Anexos	167
A.1	Ficha de Trabalho - Aula 5	167

Lista de Figuras

1.1	Níveis do pensamento geométrico de van Hiele.	8
1.2	Círculo de nove pontos.	15
1.3	Círculo de nove pontos: tangente internamente ao círculo inscrito e tangente externamente aos três círculos exinscritos.	16
1.4	Círculo de nove pontos - teorema de Feuerbach.	17
1.5	Referencial cartesiano.	25
1.6	Quatro quadrantes no plano.	26
1.7	Ponto médio de um segmento de reta.	27
1.8	Distância entre dois pontos (a).	28
1.9	Distância entre dois pontos (b).	29
1.10	Perpendicularidade de dois segmentos de reta (a).	30
1.11	Perpendicularidade de dois segmentos de reta (b).	31
1.12	Cosseno de um ângulo entre duas direções (a).	32
1.13	Cosseno de um ângulo entre duas direções (b).	33
1.14	Cosseno de um ângulo entre duas direções (c).	33
1.15	Gráfico da reta $y = ax + b$	34
1.16	Circunferência.	36
1.17	Distância entre duas retas.	37
1.18	Distância de um ponto a uma reta.	38
1.19	Altura de um triângulo.	39
1.20	Triângulos congruentes.	40
1.21	Paralelogramo (a).	41
1.22	Paralelogramo (b).	42
1.23	Retas concorrentes	43
1.24	Tangente do menor ângulo entre duas retas.	44
1.25	Raio da circunferência inscrita num triângulo (a).	45
1.26	Raio da circunferência inscrita num triângulo (b).	46
2.1	<i>Sangaku</i> colocado no santuário Mizuho em 1800.	55
2.2	<i>Sangaku</i> colocado no santuário Dewasanzan em 1823.	55
2.3	<i>Sangaku</i> colocado no santuário Sugawara em 1854.	56
2.4	<i>sangaku</i> colocado no altar de Katayamahiko em 1873.	56

Introdução

O ensino de Geometria ocupa um espaço importante no currículo de Matemática. Desde o início do percurso escolar até ao 12º ano de escolaridade, os alunos percorrem um caminho de aprendizagem que começa pelo reconhecimento de formas geométricas, propriedades das formas, relações entre as propriedades, passando depois para a demonstração de propriedades através de uma série de argumentos dedutivos. O raciocínio geométrico e a visualização espacial são capacidades que devem ser desenvolvidas ao longo dos vários anos de ensino, e que, conjuntamente com o desenvolvimento do pensamento algébrico, promovem a eficácia no ensino-aprendizagem da Geometria.

Geometria e Álgebra são dois ramos do saber matemático que se entrelaçam, numa grande simbiose, na resolução de problemas geométricos. O Capítulo I pretende dar ênfase à importância do desenvolvimento adequado do pensamento geométrico. Para o efeito, são apresentados os resultados das pesquisas efetuadas por Pierre van Hiele e Dima van Hiele-Geldof, com base no livro *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula*. [36] A Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico dos van Hiele assenta em **quatro níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico**. É também feita uma abordagem sobre a importância do **simbolismo no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Faz-se uma breve análise dos programas do Ensino Básico e Secundário para uma melhor perceção de como é abordado o ensino da Geometria, focando também alguns pontos no que respeita ao ensino de Álgebra. Descrevem-se **metodologias, materiais e recursos** que podem ser utilizados para ajudar no correto desenvolvimento do pensamento geométrico em cada nível de ensino.

É feita uma incursão pela **História da Geometria**, com uma chamada de atenção para o **Teorema de Feuerbach**. Apresenta-se sucintamente a **Geometria Euclidiana** e no ponto relativo à **Geometria Analítica** são abordados vários conceitos matemáticos com o intuito de mostrar como factos geométricos podem ser expressos de forma analítica. Incluem-se alguns problemas cuja resolução é feita de forma sintética e/ou analítica. Faz-se menção do **poder da representação geométrica** de conceitos algébricos, lembrando que esta relação estabelece uma **unificação entre dois campos: o analítico e o geométrico**.

No Capítulo 2 são apresentados os Seminários de Investigação Matemática. O **Seminário I** tem por nome **Desafios Matemáticos nos Templos do Japão** e o **Seminário II** denomina-se de **Álgebra e Geometria com Triângulos de Herão**. Estes seminários, abordando conceitos matemáticos do currículo do 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, reforçam a interligação entre Geometria e Álgebra presente na resolução de problemas de Geometria.

No Capítulo 3, dedicado à **Prática de Ensino Supervisionada**, é feita a caracterização da mesma no que respeita à Escola, Orientadores, Núcleo de Estágio e Turmas onde teve lugar. São apresentadas as **planificações** de seis aulas que lecionei, as **atividades extraletivas** promovidas pelo Núcleo de Estágio, os **seminários e cursos de formação** que frequentei.

Foi um ano de trabalho intenso e de muita aprendizagem. Deixo neste Relatório de Estágio o meu legado para que sirva de incentivo a todos os que veem na Matemática uma paixão e têm a vontade de a partilhar, promovendo o ensino da mesma com a sabedoria da mente e com a mestria do coração.

Capítulo 1

Pensar e ensinar Geometria

Aprender como melhor auxiliar os estudantes a acreditar que a matemática faz sentido e que eles mesmos podem dar sentido à matemática, é um compromisso excitante e um processo permanente. Isso requer o conhecimento obtido pelas pesquisas, a sabedoria compartilhada pelos colegas profissionais, e as inspiradoras ideias oriundas das suas próprias experiências diárias com os estudantes.

Jonh van Walle

1.1 Duas formas de pensar matematicamente

No currículo português, nos vários níveis de ensino, o foco para o desenvolvimento do raciocínio algébrico e geométrico está sempre presente. No que respeita ao 3º ciclo do Ensino Básico e ao Ensino Secundário, os programas incluem unidades didáticas orientadas para estas duas vertentes da Matemática: a Álgebra e a Geometria. Temos, por exemplo, no 9º ano as Unidades Didáticas: *Equações, Circunferência, Trigonometria no Triângulo Retângulo* e no 12º ano os Temas: *Introdução ao Cálculo Diferencial II, Trigonometria e Números Complexos*. Temas estes lecionados nas minhas aulas (Capítulo 3).

Para que o ensino e a aprendizagem sejam mais frutíferos para professores e alunos é importante olhar para estas duas formas de pensamento e para o modo como se caracterizam e desenvolvem.

Jonh van Walle [45] um reconhecido matemático americano que também passou pela direção do NCTM¹, apresenta, no seu livro *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de professores em sala de aula*. [36], considerações importantes sobre o ensino da Matemática, nomeadamente sobre o modo como se caracterizam e desenvolvem o pensamento geométrico e o pensamento algébrico. Destas ideias relevo as seguintes.

1.1.1 O pensamento algébrico

O pensamento algébrico ou raciocínio algébrico envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativo e explorar conceitos de padrão e de função. Longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o pensamento algébrico abrange toda a Matemática e é essencial para a tornar útil na vida quotidiana.

James J. Kaput (1942-2005), um especialista no desenvolvimento da Álgebra para os vários níveis de ensino, destaca que "é difícil encontrar uma área da Matemática que não envolva principalmente generalizar e formalizar de algum modo. De facto, esse tipo de raciocínio está no coração da Matemática como uma ciência de padrão e ordem." [36, p. 288]

¹National Council of Teachers of Mathematics

Kaput descreve cinco formas diferentes de raciocínio algébrico:

1. Generalização da aritmética e de padrões em toda a Matemática.
2. Uso significativo de simbolismo.
3. Estudo da estrutura no sistema de numeração.
4. Estudo de padrões e funções.
5. Processo de modelagem matemática, que integra as quatro anteriores.

Assim, o pensamento algébrico não é uma ideia singular, mas é composto de diferentes formas de pensamento e de compreensão do simbolismo. Existe uma concordância geral de que devemos começar o desenvolvimento dessas formas de pensar desde o início do percurso escolar de modo que os estudantes aprendam a pensar produtivamente com as poderosas ideias da Matemática, ou seja, que eles possam pensar matematicamente.

O processo de criar generalizações numéricas e aritméticas começa na pré-primária e continua enquanto os alunos aprendem sobre todos os aspectos numéricos e operatórios, nomeadamente, o significado das operações. A fim de fazer generalizações é útil usar o simbolismo. Deste modo, as generalizações, bem como uma compreensão de variáveis e do simbolismo são ambas desenvolvidas ao mesmo tempo.

O simbolismo no desenvolvimento do pensamento algébrico

O sinal de igualdade

O sinal de igualdade é um dos símbolos mais importantes na Aritmética elementar, na Álgebra e em toda a Matemática. É o principal modo de representar as relações no nosso sistema numérico e a compreensão da sua utilização abre caminho para o trabalho com outras relações entre os números. Quando um aluno observa, compreende e usa relações numéricas entre os dois lados do sinal de igualdade em vez de calcular as quantidades, o pensamento envolvido é chamado de pensamento relacional. Este vai além do cálculo e em vez disso concentra-se na forma como uma operação ou conjunto de operações se relaciona com as outras.

Variáveis

As variáveis são um dispositivo de representação extremamente poderoso que permite a expressão de generalizações. Ao trabalharem com expressões envolvendo variáveis, os alunos aprendem a trabalhar com símbolos. A necessidade de compreensão da igualdade nas equações não pode ser menosprezada, e deve ficar bem estabelecida nos últimos anos do Ensino Básico. Uma forma de desenvolver esta compreensão é a exploração de proposições verdadeiras ou falsas.

Propriedades sobre as operações

A aprendizagem das propriedades sobre as operações, não só acrescenta mais ferramentas de cálculo aos alunos, mas também enriquece a sua compreensão do sistema numérico e fornecem uma base para níveis muito mais elevados de abstração. As propriedades do sistema numérico podem ser construídas pelos alunos. Através de proposições verdadeiras ou falsas aprendem a argumentar e a estabelecer a veracidade de determinadas conjecturas. "Tentar estabelecer uma conjectura é uma forma significativa de raciocínio algébrico e está no coração do que significa fazer Matemática". [36, p. 294]

Padrões repetitivos

Os padrões são encontrados em todas as áreas da Matemática. Aprender a procurar por padrões, descrevê-los, traduzi-los e ampliá-los é parte do fazer Matemática e do pensar algebricamente. Os padrões numéricos são uma fonte de oportunidades para os alunos expandirem a sua compreensão dos padrões matemáticos. As sequências, padrões que envolvem uma progressão em cada passo, baseadas numa regra particular, promovem desafios apropriados ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde a pré-primária e ao longo dos vários ciclos de ensino. Com as sequências, os alunos procuram por uma generalização ou relação algébrica que lhes dirá qual o elemento que ocupará qualquer lugar da sequência. O trabalho efetuado com as sequências constitui uma porta de entrada para o estudo das funções.

Representação gráfica

A introdução da representação gráfica é mais um simbolismo que contribui para a compreensão do conceito de função. A relação funcional representada de uma forma visual estabelece uma ponte entre o pensamento algébrico e o pensamento geométrico, com desenvolvimento de ambos.

1.1.2 O pensamento e os conceitos geométricos

A Geometria tem vindo a ganhar um novo olhar e importância no currículo do Ensino Básico. Esta mudança deve-se a dois fatores fundamentais. Por um lado, à influência da NCTM, que em 1989 iniciou o Movimento das Normas Curriculares e, por outro, à crescente atenção que tem sido dada à perspetiva teórica, que tem ajudado, os professores, a compreender como os alunos raciocinam sobre conceitos espaciais. As normas da NCTM defendem a noção de que **todos os alunos podem desenvolver as suas habilidades e compreensão geométricas** [36, p. 439].

1.1.2.1 O desenvolvimento do pensamento geométrico

Para o correto desenvolvimento do pensamento geométrico, é fundamental propor consistentemente, e ao longo dos vários anos de ensino, experiências geométricas ricas em formas e que permitam estabelecer relações espaciais. É também importante pensar sobre os objetivos da Geometria em termos de dois referenciais bem diferentes:

- **o raciocínio espacial ou sentido espacial** - modo como os estudantes pensam e raciocinam sobre formas e espaços;
- **o conteúdo específico** - é o conteúdo no seu sentido mais tradicional, ou seja, saber sobre retas, triângulos, simetria, e assim por diante.

É necessário compreender ambos os aspetos de raciocínio e de conteúdo em Geometria para auxiliar melhor os alunos a ampliar e desenvolver o seu pensamento geométrico. Nem todas as pessoas pensam sobre as ideias geométricas da mesma forma. Certamente, nós não somos todos iguais, mas somos todos capazes de crescer e desenvolver a nossa habilidade de pensar e raciocinar em contextos geométricos.

A pesquisa de dois educadores holandeses, Pierre van Hiele e Dima van Hiele-Geldof, tem fornecido ideias quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas. Este trabalho teve início em 1959, mas permaneceu praticamente desconhecido, nos Estados Unidos e na maioria dos países ocidentais, durante duas décadas. Entretanto, a teoria dos van Hiele tornou-se o fator mais influente no currículo de Geometria norte-americano e de diversos países.

1.1.2.2 Os níveis do pensamento geométrico de van Hiele

Este modelo consiste numa hierarquia, de cinco níveis, dos modos de compreensão de ideias espaciais. Cada um dos níveis descreve os **processos de pensamento** usados em contextos geométricos. Uma diferença significativa de um nível para o seguinte são os objetos de pensamento sobre os quais somos capazes de pensar geometricamente. **Os produtos de pensamento em cada nível são os objetos de pensamento do nível seguinte.**

A Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico dos van Hiele

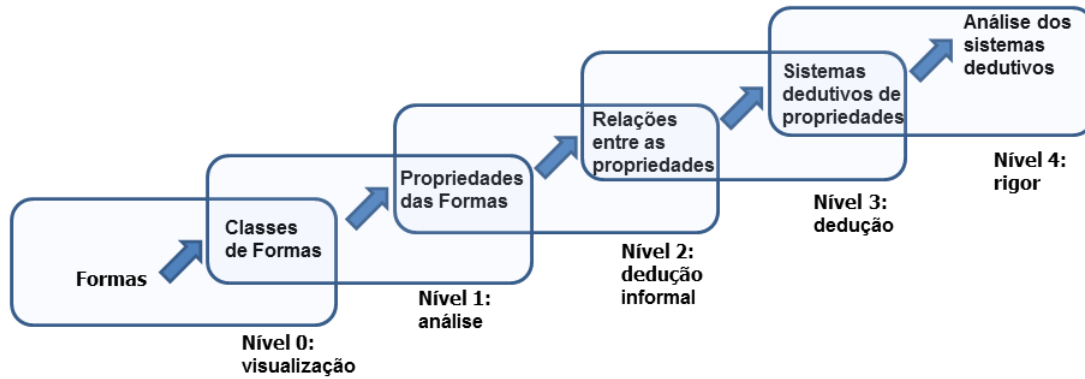


Figura 1.1: Níveis do pensamento geométrico de van Hiele.

Os níveis são sequenciais, ou seja, para chegar a qualquer nível acima do Nível 0, o aluno deve percorrer todos os níveis anteriores. A experiência geométrica é o fator fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico e avanço através dos níveis. Se o ensino ou a linguagem estiverem num nível superior ao do estudante haverá uma falta de comunicação. Se os alunos forem obrigados a lidar com objetos de pensamento que não foram ainda construídos no nível anterior podem ser forçados a uma aprendizagem mecânica, marcada pela repetição e memorização sem compreensão.

- **Nível 0: visualização** (Formas → Classes das Formas)

Os alunos reconhecem e nomeiam as figuras, baseadas nas suas características globais e visuais. Neste nível, é a "aparência" da forma que a define. Os alunos estabelecem classes ou agrupamentos de formas "parecidas", tais como: triângulos, retângulos, prismas, cilindros e assim por diante.

- **Nível 1: análise** (Classes de Formas → Propriedades das Formas)

Neste nível, os alunos começam a ter noção das propriedades que definem cada forma, são capazes de pensar, por exemplo, sobre o que define um retângulo (quatro lados, lados opostos paralelos, lados opostos com o mesmo comprimento, quatro ângulos retos, diagonais congruentes).

- **Nível 2: dedução informal** (Propriedades das Formas → Relações entre as propriedades)

Verifica-se uma maior habilidade para estabelecer um raciocínio do tipo "se ... então" e as formas podem ser classificadas usando apenas uma quantidade mínima de características. Por exemplo, "quatro lados congruentes e pelo menos um ângulo reto" pode ser suficiente para definir um quadrado. Os alunos no Nível 2 serão capazes de observar relações entre as propriedades de objetos geométricos.

- **Nível 3 - dedução** (Relações entre as propriedades → Sistemas dedutivos de propriedades)

No Nível 2, produzem-se conjeturas envolvendo as relações entre as propriedades. Essas conjeturas estão corretas? São verdadeiras? Quando esta análise começa a ocorrer, os alunos começam a sentir a necessidade de um sistema lógico - com axiomas, definições, teoremas, corolários - a partir do qual outras verdades geométricas podem ser deduzidas. Um estudante pode claramente observar que as diagonais de um retângulo se bissetam, como um aluno de um nível de pensamento inferior, mas, no Nível 3, aquele parte para a demonstração desta observação através de uma série de argumentos dedutivos.

- **Nível 4 - rigor** (Sistemas dedutivos de propriedades → Análise dos sistemas dedutivos)

No nível mais elevado da Teoria dos van Hiele, os objetos de atenção são os próprios sistemas axiomáticos, não apenas as deduções dentro de um sistema. Há uma apreciação das distinções e relações entre diferentes sistemas axiomáticos, por exemplo, a Geometria Esférica e a Geometria no Plano têm, cada uma, o seu conjunto próprio de axiomas e teoremas. Deste nível, resultam comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da Geometria. Este é o nível de um estudante do ensino superior que estuda Geometria como um ramo da Matemática.

1.1.3 A perspectiva do NPMEB

Em Portugal, o NPMEB² (2007) [30] procurou uma melhor articulação e coerência no trabalho com os *Números e Operações* e a *Geometria* ao longo dos três ciclos do Ensino Básico, reforçando que os alunos devem "*ser capazes de usar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos, nos mais diversos contextos*". [30, p. 9]

O NPMEB pretendeu valorizar e dar mais visibilidade à Álgebra, que é introduzida como tema programático nos 2º e 3º ciclos. No 1º ciclo, propõe-se uma iniciação ao **pensamento algébrico**, por exemplo, com o estudo de sequências numéricas e padrões geométricos. Nos anos subsequentes este estudo é aprofundado com ênfase sobretudo no desenvolvimento do pensamento algébrico, entendido como envolvendo quer as capacidades de abstração, representação simbólica e generalização, quer de exploração e modelação de situações de contextos variados, com recurso à linguagem e procedimentos próprios da Álgebra. [17, p. 6]

No 1º ciclo, a Geometria vem associada ao tema *Medida*. O programa dá ênfase à **visualização**³ e à compreensão de **propriedades**⁴ de figuras geométricas, entendidas como elementos essenciais para o **desenvolvimento do sentido espacial**. Este trabalho incide sobre figuras no plano e no espaço, cuja diversidade e complexidade vai aumentando ao longo da escolaridade. O mesmo acontece com as transformações geométricas cujo estudo começa logo nos primeiros anos, sendo progressivamente alargado e aprofundado. O trabalho em Geometria é ainda considerado de particular importância para o **desenvolvimento da argumentação e raciocínio matemáticos**, incluindo, nos anos mais avançados, a noção de demonstração. [17, p. 6]

No 2º ciclo, os alunos descrevem e representam figuras uni e bidimensionais e modelos sólidos dando-se atenção às suas **propriedades e relações**⁵. [30, p. 51]

O 3º ciclo tem como propósito de ensino, no âmbito da Geometria, o desenvolvimento nos alunos do sentido espacial, com ênfase na visualização e compreensão de **propriedades e relações** relativas a figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão das transformações geométricas e da **noção de demonstração**⁶, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos. [30, p. 51]

O NPMEB indica os seguintes Temas para o estudo de Geometria no 3º ciclo:

- Triângulos e quadriláteros. *7º ano*
- Semelhanças. *7º ano*
- Sólidos geométricos. *8º ano*
- Isometrias. *8º ano*
- Teorema de Pitágoras. *8º ano, 9º ano*
- Circunferência. *9º ano*
- Trigonometria no triângulo retângulo. *9º ano*

²Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico

³Nível 0 de van Hiele

⁴Nível 1 de van Hiele

⁵Nível 2 de van Hiele

⁶Nível 3 de van Hiele

1.1.4 Um olhar pelo ensino da Geometria no Secundário

No Ensino Secundário, a *Geometria no Plano e no Espaço* surge como Unidade Didática no 10º ano, no Programa de Matemática A, e inclui tópicos de Geometria Sintética e Métrica, Geometria Analítica e Vetorial, e Trigonometria, com as competências de cálculo numérico a elas associadas. [11, p. 2]

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver no estudante uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstratos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver no estudante capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita. É aconselhável que os estudantes realizem pequenas investigações e façam depois relatórios utilizando linguagem matemática rigorosa (o que não significa que o estudante deva recorrer exclusiva ou prioritariamente à linguagem simbólica). Tanto em Geometria Plana como em Geometria no Espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções que estão em jogo, com prejuízo absoluto do ponto de vista axiomático. [11, p. 24]

No Programa de Matemática A do 11º ano [12] continua o ensino da Geometria com a Unidade Didática: *Geometria no Plano e no Espaço II*. São objeto de estudo a trigonometria, funções trigonométricas, focando a resolução de problemas que envolvem triângulos, o estudo do círculo trigonométrico e a resolução de algumas equações trigonométricas simples.

O tempo deve ser dedicado à compreensão dos conceitos e às aplicações ligadas a problemas reais, reduzindo-se a ênfase em exercícios de cálculo. Espera-se que, sempre que seja possível, os estudantes apropriem conceitos e técnicas matemáticas, de tal modo que, face a problemas realistas, possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias. A continuação do estudo da Geometria, com a noção de produto escalar e suas aplicações, ligado à resolução de problemas, deve permitir ao aluno melhorar as suas capacidades de visualização e representação, aumentando a sua intuição geométrica. [12, p. 1]

O Programa de Matemática A do 12º [13] ano propõe a Unidade Didática: Trigonometria e Números Complexos, onde são abordadas as *funções trigonométricas* e os *números complexos*.

Com pretexto de responder a problemas de resolubilidade algébrica amplia-se o conceito de número. As operações com números complexos, nas formas algébrica e trigonométrica são aproveitadas para que o estudante compreenda melhor as diferentes representações analíticas para domínios definidos geometricamente, bem como para dominar as relações entre operações algébricas e transformações geométricas. [13, p. 7]

1.1.5 Metodologias, materiais e recursos

No ensino da Geometria e para um correto desenvolvimento do pensamento geométrico em cada nível de ensino, é importante a escolha de materiais e recursos adequados. Deve fazer-se, sempre que possível, uma chamada de atenção para a visualização ou aplicação no mundo real dos conceitos a ensinar e propor a resolução de problemas que realcem esta ligação. É também importante a exploração de aspetos históricos que acrescentem valor à aprendizagem e contextualizem a evolução da Geometria ao longo dos tempos. A utilização adequada das tecnologias de informação no ensino da Geometria é um fator catalisador da aprendizagem, pois a construção e visualização dinâmica de conceitos matemáticos promovem uma melhor compreensão dos mesmos.

Estas indicações estão presentes no NPMEB:

O estudo da Geometria deve ter como base tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas, e de operar com elas. [30, p. 36]

No estudo da Geometria e das grandezas geométricas deve tomar-se como ponto de partida situações do quotidiano dos alunos, recorrendo, por exemplo, a azulejos, e outros artefactos de cerâmica, a tapeçarias ou pintura e ao próprio corpo humano. [30, p. 36]

*A utilização de materiais manipuláveis tem um papel importante na aprendizagem da Geometria. Estes materiais permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos. Geoplanos, tangrans, pentaminós, peças poligonais encaixáveis, espelhos, miras, modelos de sólidos geométricos, puzzles, mosaicos, régua, esquadros e compassos são materiais especificamente apropriados para a aprendizagem da Geometria. O computador possibilita explorações que podem enriquecer as aprendizagens no âmbito deste tema, nomeadamente através de *aplets*⁷ desenvolvidos com software de Geometria Dinâmica e permitir a realização de jogos e outras atividades de natureza interativa.* [30, p. 21]

Dado que a Geometria e a Medida estão directamente relacionadas com as actividades matemáticas mais antigas em que o ser humano se envolveu, o seu estudo possibilita a exploração de aspectos históricos (a Matemática como actividade de resolução de problemas práticos em algumas civilizações e também como actividade predominantemente intelectual, para os Gregos). [30, p. 36]

⁷Pequenos programas.

1.2 Geometria - Passos de uma evolução histórica

A palavra *geometria* deriva das palavras gregas *geos* (terra) e *metron* (medida), esta denominação deve a sua origem à necessidade do Homem em medir terrenos, desde os tempos remotos.

De entre todos os ramos da Matemática, a Geometria tem sido o mais sujeito a mudanças de gosto de uma época para outra.

Os antigos egípcios, chineses, babilónios, romanos e gregos usavam a Geometria para tipografia, navegação, astronomia e outras aplicações práticas. Os gregos procuravam sistematizar as noções geométricas então conhecidas através do estabelecimento de razões lógicas para cada noção e para o seu inter-relacionamento. Vários matemáticos, como Tales (600 a.C.), Pitágoras (540 a.C.), Platão (390 a.C.) e Aristóteles (350 a.C.) desenvolveram um trabalho de sistematização de noções e princípios geométricos, que culminou com o livro *Elementos*, de Euclides.

[32, p.1]

Euclides nasceu em Alexandria por volta de 300 anos a.C. Nessa época, Alexandria vivia momentos de grande atividade científica. Após a fundação do grande império de Alexandre, o Grande, surgiu gradualmente a necessidade de compilar todo o conhecimento trazido ao sistema científico nos últimos séculos. Este facto criou em Alexandria um sistema de instrução que corresponde a certas áreas do ensino superior dos dias de hoje.

Ao escrever os *Elementos*, por volta de 325 a.C., Euclides quis compilar uma enciclopédia do conhecimento geométrico acumulado até ao momento. Euclides atingiu uma posição notável em relação aos conhecimentos matemáticos do momento.

A Geometria teve o seu apogeu na Grécia Clássica, mas este desfez-se ao mesmo tempo que se deu a queda de Roma, tendo recuperado parte do tempo perdido na Arábia e na Europa da Renascença.

Paralelamente aos passos dados na Geometria, do mundo árabe ganha relevo o nome de Musa al-Khowarizmi (780-850), que, tal como Euclides, se tornou familiar na Europa Ocidental. Este sábio escreveu dois livros sobre Aritmética e Lógica que tiveram um papel muito importante na história da Matemática. Através do seu livro, *Al-jabr Wa'l muqabalah*, deixou-nos uma palavra familiar. Desse título surge o termo *álgebra*, e foi graças a esse livro que, mais tarde, a Europa aprendeu o ramo da Matemática que tem esse nome. Diofante de Alexandria (200 a.C.) é, por vezes, chamado o pai da Álgebra, mas esse título pertence mais a al-Khowarizmi. [3, p. 155-156]

Durante o segundo terço do século XVII, a França tornou-se o indisputado centro da Matemática. [3, p. 229]

Um dos mais proeminentes vultos da história da Matemática do século XVII foi o francês René Descartes (1596-1650), a quem fica ligada a criação da Geometria Analítica. Descartes publicou, em 1637, a sua célebre obra *O discurso do método para bem conduzir o raciocínio e pesquisar a verdade científica*. No campo da Matemática, Descartes publicou a obra *A Geometria*, apresentada não como um trabalho isolado, mas antes como um dos três apêndices do *Discurso do Método*. Nesta obra, que marca a origem da Geometria Analítica, Descartes combinava a Geometria e a Álgebra de modo a formarem um conhecimento superior a qualquer outro que até então era conhecido. A utilização conjunta da Álgebra e da Geometria possibilitou a interpretação geométrica de resultados algébricos, o que facilitou novas descobertas. Os métodos da

Geometria Analítica podem ser usados para provar alguns teoremas de Geometria Plana.

Descartes foi muito mais longe do que os seus predecessores na interpretação geométrica da Álgebra. *A Geometria* é considerado o texto matemático mais antigo que um estudante de hoje pode ler sem ter dificuldades com a notação utilizada. Descartes utilizava letras do início do alfabeto para parâmetros e as do fim como incógnitas, adaptou a notação exponencial a estas e utilizava os símbolos germânicos + e -. Contudo, em vez de pensar nos parâmetros e incógnitas como números, Descartes pensava neles como segmentos. [3, p. 232]

Descartes dizia que "***todo o problema de Geometria pode facilmente ser reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certos segmentos basta para a construção***". [3, p. 231]

A obra de Descartes é frequentemente descrita como a *aplicação da Álgebra à Geometria*, mas na verdade poderia ser caracterizada como sendo "*a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica*". A primeira secção de *A Geometria* é intitulada de "*Como os cálculos de aritmética se relacionam com operações de Geometria*" e a segunda secção descreve "*Como a multiplicação, a divisão, e a extração de raízes quadradas são efetuadas geometricamente*". Aqui Descartes fazia o que até certo ponto tinha sido feito de al-Khowarizmi a W. Outghred (1574-1660): **fornecia um correspondente geométrico de operações algébricas**. [3, p. 232]

O seu método em *A Geometria* consiste em partir de um problema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geometricamente. Descartes insistia que, na solução geométrica de uma equação, deviam ser usados apenas os meios mais simples e apropriados ao grau da equação. Por exemplo, para funções quadráticas, retas e círculos bastam; para cúbicas e quárticas, secções cónicas. [3, p. 233] **O princípio fundamental da Geometria Analítica** - a descoberta de que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares geométricos - aparece no segundo livro. [3, p. 236]

A Geometria Analítica criada por Descartes constituiu um marco decisivo na enorme evolução científica que ocorreu no século XVII, tornando-o uma referência nas gerações posteriores de cientistas e filósofos. [16, p. 74]

Em Inglaterra tentou-se, especialmente durante o fim do século XVIII devolver aos *Elementos de Euclides* a sua posição outrora gloriosa, mas foi uma batalha perdida. Também durante o período da Revolução Francesa, através dos esforços de Gaspar Monge (1746-1818) e Lazare Carnot (1753-1823), houve alguns sintomas de reavivamento da Geometria pura. No entanto, a redescoberta quase explosiva da Geometria como um ramo vivo da Matemática surgiu principalmente no início do século XIX. A *École Polytechnique* teve um papel essencial nesse movimento. [3, p. 369]

A história da Geometria do século XIX está cheia de casos de descoberta e redescoberta. Um desses exemplos é o *círculo de nove pontos*. Jean-Victor Poncelet (1788-1867) e Julien Brianchon (1785-1864) publicaram juntos um artigo (na *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées de Gergonne* de 1820-1821) que continha uma prova do teorema:

O círculo que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos vértices de um triângulo sobre os lados opostos, passa também pelos pontos médios desses lados assim como pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ponto de interseção das perpendiculares.

[3, p. 371]

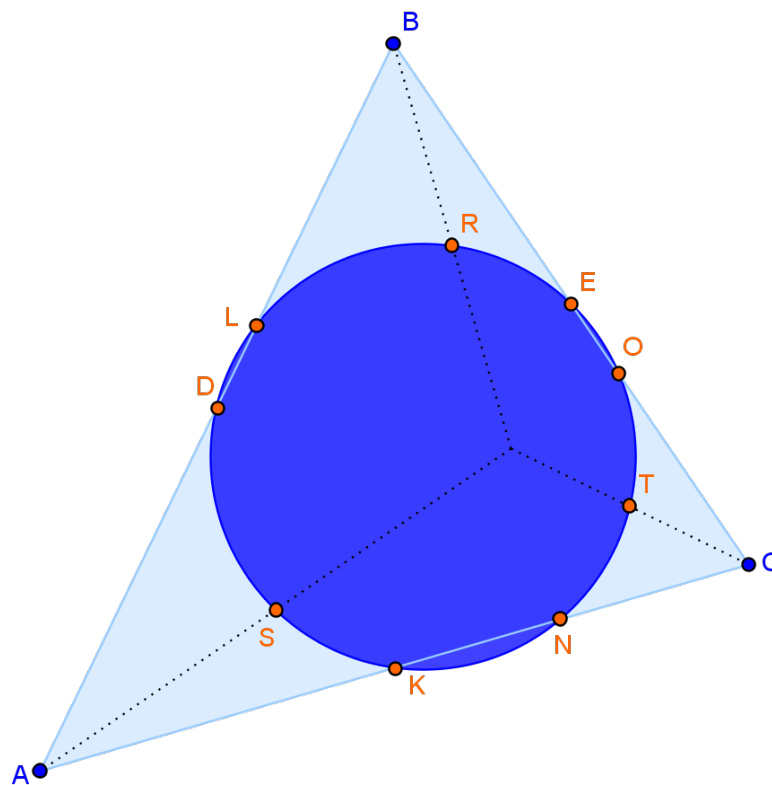


Figura 1.2: Círculo de nove pontos.

Este teorema não tem o nome Brianchon nem Poncelet, mas o de Karl Feuerbach (1800-1834). O matemático alemão, trabalhando independentemente, publicou o **Teorema de Feuerbach** em 1822, que diz:

Teorema 1 (Feuerbach). *O círculo de nove pontos de qualquer triângulo é tangente internamente ao círculo inscrito e tangente externamente aos três círculos exinscritos.*

[3, p. 371]

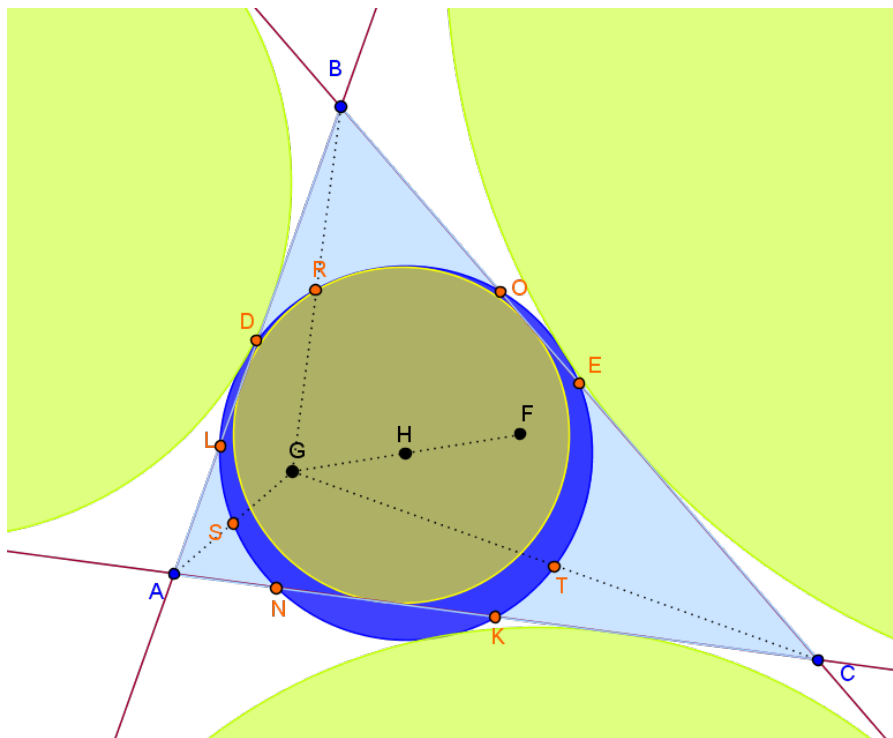


Figura 1.3: Círculo de nove pontos: tangente internamente ao círculo inscrito e tangente externamente aos três círculos exinscritos.

O geometra americano Julian Coolidge (1873-1942) chamou este de "**o mais belo teorema da Geometria elementar descoberto desde o tempo de Euclides**".

[3, p. 371]

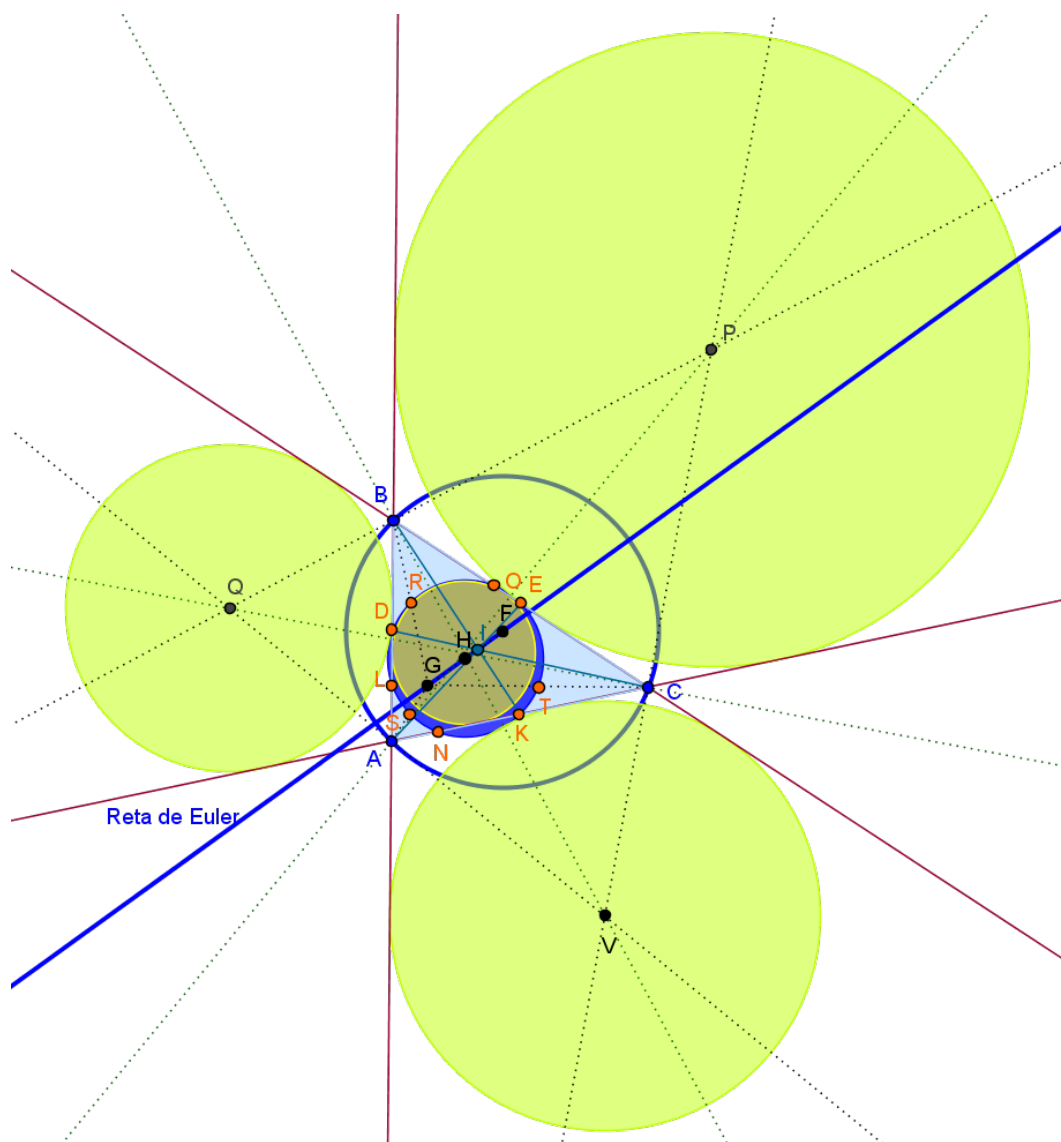


Figura 1.4: Círculo de nove pontos - teorema de Feuerbach.

Na Figura 1.4 temos:

$\triangle ABC$

F - circuncentro de $\triangle ABC$

G - ortocentro de $\triangle ABC$

H - ponto médio de $[F, G]$ e centro do círculo de nove pontos

I - baricentro de $\triangle ABC$

D - ponto médio de $[A, B]$

E - ponto médio de $[B, C]$

K - ponto médio de $[A, C]$

R - ponto médio de $[B, G]$

S - ponto médio de $[A, G]$

T - ponto médio de $[C, G]$

P - centro da circunferência exinscrita tangente a $[B, C]$

Q - centro da circunferência exinscrita tangente a $[A, B]$

V - centro da circunferência exinscrita tangente a $[A, C]$

É de notar que o círculo de nove pontos possui algumas propriedades fascinantes:

- passa pelo ponto médio de cada lado do triângulo (três pontos), pelos "pés" das alturas (três pontos) e pelos pontos médios determinados pelo *ortocentro* e os vértices do triângulo (três pontos);
- o centro do círculo está sobre a *reta de Euler*⁸ e é o ponto médio entre o *ortocentro* e o *circuncentro* do triângulo;
- a circunferência de Feuerbach de um triângulo é homotética em relação à circunferência circunscrita a esse triângulo, esta *homotetia*⁹ de razão 2 tem o centro no *ortocentro* do triângulo;
- é tangente internamente ao círculo inscrito ao triângulo e tangente externamente aos círculos exinscritos (é esta a descoberta que leva ao *teorema de Feuerbach*).

Repare-se ainda que as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$ contêm as alturas do triângulo $[PQV]$.

É de salientar que o encanto destes teoremas sustentou considerável investigação na Geometria de triângulos e círculos durante todo o século XIX.

[3, p. 371]

Passemos agora um olhar pelas realizações na Geometria Analítica durante este período.

Monge foi considerado o especialista moderno em Geometria em geral e Julius Plücker (1801-1868) tornou-se o primeiro especialista em Geometria Analítica em particular. As primeiras publicações de Monge em 1826, na *Annales de Gergonne*, foram principalmente sintéticas, mas empenhado na sua controvérsia com Poncelet abandonou o campo dos sintetistas e tornou-se o mais prolífero dos geómetras analíticos, defendendo que "*os métodos algébricos eram preferíveis aos puramente geométricos*". [3, p. 373]

Contudo, a Geometria não-eucliana continuou por várias décadas a ser um aspeto da Matemática um tanto à margem até ser completamente integrada através das ideias notavelmente gerais de Riemman (1826-1866), que apresentava uma ampla visão de todo o domínio da Geometria. Entre as regras mais importantes na Geometria, Riemman apontou a regra para achar a distância entre dois pontos que estão infinitamente próximos um do outro. [3, p. 377]

Riemman conseguiu uma unificação da Geometria, especialmente a nível da Geometria Diferencial, ou Geometria "da pequena vizinhança". A Geometria Analítica, ou "em grande", não sofreu grandes alterações. [3, p. 378]

Félix Klein (1849-1925) foi o sucessor de Plücker no entusiasmo pela Geometria Analítica. A sua obra tomou uma direção unificadora da diversidade dos novos resultados da pesquisa. Klein ficou profundamente impressionado com as possibilidades unificadoras do conceito de grupo e

⁸Nome atribuído ao matemático Leonhard Euler. É a linha que passa pelo *ortocentro*, *circuncentro* e *baricentro* de um triângulo qualquer.

⁹*Homotetia* é uma transformação de semelhança ou simplesmente semelhança. Dados um ponto O no plano ε e um número $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a *homotetia* de centro em O e razão λ transforma cada ponto $P \in \varepsilon$ no ponto P' , colinear com O e P , tal que $OP' = \lambda OP$ (OP e OP' representam distâncias orientadas). [1, p. 124]

desenvolveu um programa, *Erlanger Programm*, que descrevia a Geometria como "o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações". Este programa, que a princípio teve apenas circulação limitada, veio a ter, antes do fim do século, grande influência em todo o mundo matemático. A influência persistente do *Erlanger Programm* pode ainda hoje ser percebida em quase qualquer tratado geral de Geometria moderna. Assim, a idade áurea da Geometria moderna, que começara tão auspiciosamente em França na *École Polytechnique* com a obra de Lagrange (1736-1813), Monge e Poncelet, atingiu o seu auge na Alemanha na Universidade de Gottingen, através da pesquisa e inspiração de Gauss (1777-1855), Riemann e Klein. [3, p. 379-381]

Há muitos enfoques novos de Geometria pelo fim do século XIX que são usualmente classificados como versões da Geometria algébrica. Por volta de 1920, a maior parte dos esforços "algebro-geométricos" começaram a ser superados pelo enfoque puramente algébrico, que dominou a Geometria algébrica por várias décadas, com generalidade e abstração crescentes.

1.3 A Geometria de Euclides

A Geometria Euclidiana, também designada de *Sintética*, trabalha diretamente com as figuras, sem o auxílio de coordenadas.

1.3.1 Os Elementos de Euclides

Os *Elementos de Euclides* não são um compêndio de todo o conhecimento geométrico da época; ao contrário, trata-se de um texto introdutório cobrindo toda a Matemática elementar, isto é, Aritmética (no sentido de "Teoria dos Números"), Geometria Sintética (de pontos, retas, círculos e esferas) e Álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica). A arte de calcular não está incluída, pois não era parte da instrução na universidade; nem o estudo das cônicas ou de curvas planas de maior grau, pois essa era parte da Matemática mais avançada. Proclo (412) descreve os *Elementos*, em relação com o resto da Matemática, como as letras do alfabeto em relação com a linguagem. [3, p. 72]

Félix Klein (1849) traz à discussão este assunto considerando que "os *Elementos* foram meramente uma introdução ao estudo da Geometria e da própria Matemática". Tratavam a Matemática da forma que era necessário para o momento, em função da escola platônica e tinham como objetivo uma preparação para estudos filosóficos em geral. Klein considera que a ênfase foi colocada no trabalho sobre as conexões lógicas, enquanto todas as aplicações práticas foram postas de lado, estabelecendo a Geometria como um sistema fechado. Refere ainda que a razão subjacente para a sobreavaliação errônea dos *Elementos de Euclides* é uma *crença equivocada quanto ao espírito do conhecimento na Grécia*, difundida por um longo tempo, e que com grande maestria incutiu que as suas realizações deveriam permanecer um modelo supremo e inatingível. Este facto conduziu ao culto pelos *Elementos de Euclides*. Em oposição, Klein afirma que "apesar dos Gregos trabalharem de forma frutuosa, não somente em Geometria, mas também nos mais variados campos da Matemática, hoje estamos além deles em tudo e certamente na Geometria". Para reforçar o caráter limitado do material dos *Elementos de Euclides*, Klein compara Euclides com o mais eminente dos matemáticos Gregos, Arquimedes, (250 a.C). Confia-nos que, *em contraste marcante com o espírito de controlo nos Elementos de Euclides, Arquimedes mostra uma capacidade bastante desenvolvida para o cálculo numérico*. A preocupação de Euclides era a compilação e sistematização de conhecimento já disponível, enquanto que Arquimedes foi um grande investigador e pioneiro que em todo o seu trabalho trouxe avanços no conhecimento. [22, p. 188-189]

Apesar desta visão de Félix Klein, "os *Elementos de Euclides* é uma obra intensamente estudada ao longo dos tempos, cujo valor é inegável" [20, p. 54], e que ainda hoje constitui um suporte de vários conteúdos matemáticos do currículo de Matemática.

Como referem Borsuk e Szmielew (Foundations of geometry, 1960):

"Se o valor de um trabalho científico pode ser medido pelo tempo durante o qual ele mantém a sua importância, então os *Elementos de Euclides* são a obra científica mais válida de todos os tempos." [40, p. 1]

Nos *Elementos de Euclides*, partindo das propriedades mais elementares de retas e ângulos, somos conduzidos à congruência de triângulos (Livro I, proposição 4), ao Teorema de Pitágoras (Livro I, proposição 47), à construção da mediatriz de um segmento de reta (Livro I, proposição 10), à construção da bissetriz de um ângulo (Livro I, proposição 9), à construção da tangente a uma circunferência (Livro I, proposição 18). Conceitos que fazem parte do programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico.

1.3.2 Os 5 postulados de Euclides

Os Postulados ou Axiomas são proposições geométricas específicas. "Postular" significa "pedir para aceitar". Assim, Euclides pede que sejam aceites as **cinco proposições geométricas** que formula nos seus postulados.

Elementos de Euclides Livro I
Postulados [18, p. 2]

1. Pode-se traçar uma linha reta entre quaisquer dois pontos.
2. Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para formar uma reta.
3. Pode-se construir uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta, ao interseccionar outras duas retas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.
(É este o célebre **5º Postulado de Euclides**).

1.4 Geometria Analítica no Plano

A Geometria Analítica no Plano tem por base a utilização de um sistema de coordenadas. Cada ponto é definido pelas suas coordenadas e as figuras são definidas por relações entre essas coordenadas, contrapondo com a Geometria Euclidiana ou Sintética, em que se trabalha diretamente com as figuras, sem o auxílio de coordenadas. Com a Geometria Analítica, quer a Geometria quer a Álgebra ganharam um novo ímpeto. Por um lado, recorrendo a um sistema de coordenadas, os métodos algébricos podem ser utilizados no estudo da Geometria e na resolução de problemas geométricos e, por outro, a representação gráfica de equações algébricas permite uma maior compreensão dos conceitos algébricos.

No currículo português, até ao 9º ano de escolaridade, o ensino da Geometria segue os princípios da Geometria Euclidiana. A noção de referencial cartesiano é introduzida no 7º ano, mas somente com o objetivo de dar início ao estudo das funções. O ensino da Geometria Analítica começa no 10º ano, com a *Unidade Didática: Geometria no Plano e no Espaço I* (Programa de Matemática A [11]), continua no 11º ano com a *Unidade Didática: Geometria no Plano e no Espaço II* [12] e no 12º ano com a *Unidade Didática: Trigonometria e Números Complexos* [13].

De acordo com os *Níveis do pensamento geométrico de van Hiele*, e tendo em conta o currículo nacional, é expectável que os alunos tenham atingido os vários patamares dos modos de compreensão das ideias espaciais como se mostra na seguinte tabela.

Ano de escolaridade	Níveis do pensamento geométrico de van Hiele
Pré-Primária, 1º e 2º anos	Nível 0
3º, 4º e 5º anos	Níveis 0 e 1
6º, 7º ano e 8ºanos	Níveis 1 e 2
9º ano	Níveis 2 e 3
10º, 11º e 12º anos	Nível 3

Nível 0: visualização; Nível 1: análise; Nível 2: dedução informal; Nível 3: dedução.

Quer isto dizer que, no início do estudo da Geometria Analítica, os alunos deverão encontrar-se, em termos de desenvolvimento do pensamento geométrico, no **Nível 3 - dedução**. Neste estágio de ensino-aprendizagem da Geometria, são utilizados vários argumentos dedutivos para obter outras verdades geométricas. **A demonstração matemática de conceitos geométricos ganha uma nova dimensão.**

◇ ◇ ◇

Faz-se de seguida uma abordagem de vários conceitos matemáticos¹⁰ que nos mostra como factos geométricos podem ser expressos de forma analítica. Partindo de demonstrações simples para outras mais complexas, permitimos que os alunos ganhem, de uma forma estruturada, agilidade mental para aplicarem os conhecimentos de Geometria Analítica que vão adquirindo, na resolução de problemas de Geometria e na dedução de outros resultados geométricos.

A aplicação de processos dedutivos para representar de forma algébrica conceitos de Geometria desenvolve a capacidade de utilizar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos.

¹⁰Com base no estudo feito ao livro de Elon Lages Lima [24].

Começando com a caracterização de referencial cartesiano, definem-se através de expressões algébricas: ponto médio de um segmento de reta, distância entre dois pontos, condição de perpendicularidade de dois segmentos de reta, cosseno de um ângulo entre duas direções, equações que definem uma reta no plano, equação da circunferência, distância de um ponto a uma reta e área de um triângulo.

Pontos, retas, ângulos, triângulos, circunferências, conceitos já conhecidos da Geometria Euclidiana, são fundamentais para efetuar construções geométricas como as que observamos no **Seminário I** e que aqui **ganham forma analítica**.

Para um melhor enquadramento dos conceitos matemáticos apresentados, é indicado o ano de escolaridade em que são estudados numa perspectiva analítica.

1.4.1 Referencial cartesiano

◇ Conceito matemático estudado em Geometria no Plano e no Espaço I - 10º ano ◇

Dados os pontos A, B quaisquer, ao comprimento do segmento de reta AB chama-se **distância entre os pontos A e B** e representa um número real.

A noção de distância entre dois pontos permite introduzir coordenadas sobre uma reta, ou seja, representar os pontos da reta por meio de números reais. Para tal, há que orientar a reta e escolher um dos seus pontos como origem. Definido na reta um sentido de percurso, chamado positivo, o sentido inverso chama-se negativo.

Um **eixo** é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O , chamado **origem**. Todo o eixo E pode ser posto, de modo natural, em correspondência biunívoca com o conjunto \mathbb{R} dos números reais do seguinte modo:

- À origem O do eixo faz-se corresponder o número zero.
- A cada ponto X de E situado à direita de O corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$ =distância de X à origem=comprimento do segmento de reta OX .
- Aos pontos situados à esquerda de O correspondem números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias desses pontos à origem.

No estudo dos números reais, a cada $X \in \mathbb{R}$ faz-se corresponder um ponto X sobre o eixo E . Em Geometria Analítica, o processo é inverso, procura-se associar a cada ponto do eixo E um número, chamado a sua **coordenada**. Para estabelecer esta correspondência, admitimos que exista a noção de **distância entre dois pontos** desse eixo, isto é, que tenha sido fixada uma unidade de comprimento.

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano consiste num par de eixos perpendiculares (eixos cartesianos) Ox e Oy contidos nesse plano, com a mesma origem O . Ox chama-se o **eixo das abcissas** e Oy é o **eixo das ordenadas**. O sistema é indicado com a notação Oxy e denomina-se de **referencial cartesiano** ortogonal.

A definição de um sistema de coordenadas no plano Π permite estabelecer uma correspondência biunívoca $\Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde \mathbb{R}^2 é o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais. A cada ponto P do plano Π corresponde um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os números x e y são as coordenadas do ponto P relativamente ao sistema Oxy : x é a abcissa e y é a ordenada de P .

O ponto $O = (0, 0)$, origem do sistema de coordenadas, tem ambas a abcissa e a ordenada iguais a zero. Assim, a ele corresponde o par $(0, 0) \in \mathbb{R}$. Se x é a abcissa e y é a ordenada do ponto P , o ponto P' de coordenadas $(x, 0)$ chama-se a *projeção de P sobre o eixo Ox* enquanto o ponto P'' , de coordenadas $(0, y)$ é chamado a *projeção de P sobre o eixo Oy* .

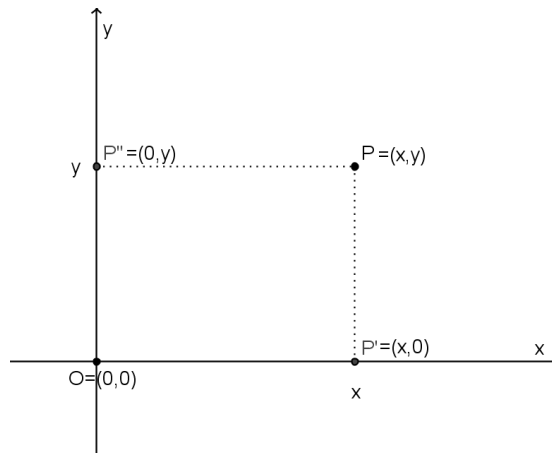


Figura 1.5: Referencial cartesiano.

O emprego de coordenadas no plano serve dois propósitos que se complementam. O primeiro é o de **atribuir um significado geométrico a factos de natureza numérica**, como o comportamento de uma função real de variável real, que ganha muito em clareza quando se olha para o seu gráfico. O segundo propósito do uso de coordenadas vai no sentido oposto: recorre-se a elas com a finalidade de **resolver problemas de Geometria**. Este é o **objetivo da Geometria Analítica**. No primeiro caso, a ênfase recai sobre a correspondência $\mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi$ e no segundo sobre a sua inversa $\Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$. Na prática, estes dois pontos de vista entrelaçam-se: **para estabelecer os factos iniciais da Geometria Analítica usam-se os resultados básicos da Geometria Euclidiana**.

1.4.2 Quatro quadrantes no plano

◇ Conceito matemático estudado em Geometria no Plano e no Espaço I - 10º ano ◇

Fixado o sistema de coordenadas Oxy no plano Π , o plano fica decomposto em quatro regiões, a cada uma das quais se chama **quadrante**. O primeiro quadrante é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O segundo quadrante é formado pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leq 0$ e $y \geq 0$. O terceiro, pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leq 0$ e $y \leq 0$. Os pontos $P = (x, y)$ com $x \geq 0$ e $y \leq 0$ formam o quarto quadrante.

A partir daqui, começa a ser evidente a forma como podemos **exprimir um facto geométrico de forma analítica**.

Fixado o sistema de coordenadas Oxy no plano Π , o primeiro e o terceiro quadrantes formam dois ângulos retos, opostos pelo vértice. Considerando o sistema de coordenadas Oxy os pontos $P = (x, y)$ da bissetriz¹¹ r , comum a estes dois ângulos, são equidistantes dos lados dos ângulos, logo têm abcissa e ordenada iguais (ambas positivas no primeiro quadrante e ambas negativas no terceiro). Assim, $P = (x, y)$ pertence a r se e só se, $x = y$. Analogamente, um ponto $Q = (x, y)$ pertence à bissetriz r' comum ao segundo e quarto quadrantes, se e só se, $x = -y$. Estamos a definir um conjunto de pontos que corresponde a uma reta no plano.

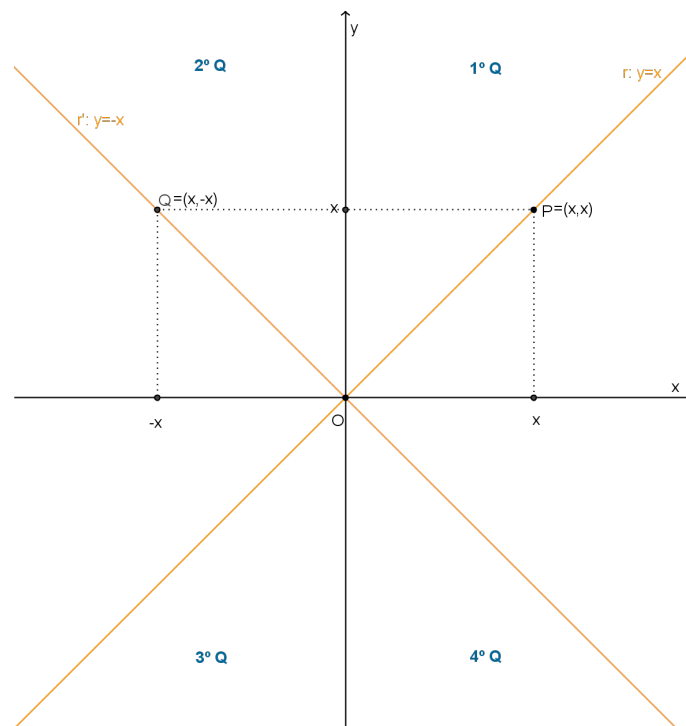


Figura 1.6: Quatro quadrantes no plano.

¹¹Semireta que divide um ângulo em dois ângulos iguais.

1.4.3 Ponto médio de um segmento de reta

- ◇ Conceito matemático estudado, de modo analítico, em Geometria no Plano e no Espaço I - 10º ano ◇

Outro **facto geométrico** que podemos **expressar de uma forma analítica** é o **ponto médio de um segmento de reta**.

Dados dois pontos $A = (a, b)$ e $A' = (a', b')$ as coordenadas do ponto médio $M = (x, y)$ do segmento de reta AA' são dadas por:

$$x = \frac{a + a'}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{b + b'}{2}$$

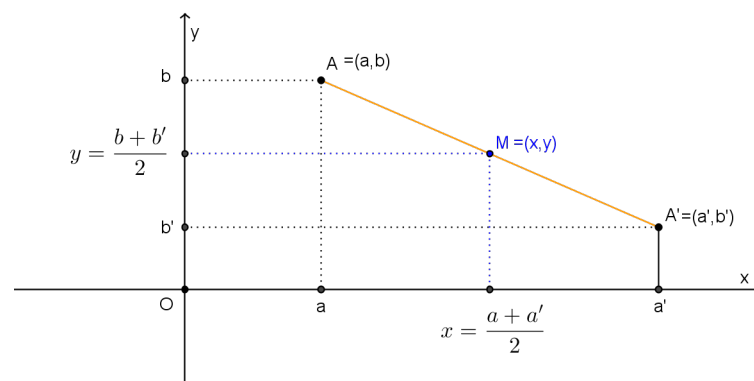


Figura 1.7: Ponto médio de um segmento de reta.

1.4.4 Distância entre dois pontos

- ◇ Conceito matemático estudado, de modo analítico, em Geometria no Plano e no Espaço I - 10º ano ◇

Se dois pontos $P = (x, y)$ e $Q = (x', y)$ têm a mesma ordenada y então a distância $d(P, Q)$ entre eles é igual à distância $|x' - x|$ entre as *projeções* sobre o eixo Ox . Analogamente, se $P = (x, y)$ e $Q' = (x, y')$ têm a mesma abscissa x então $d(P, Q') = |y' - y| =$ distância entre as *projeções* de P e Q' sobre o eixo Oy .

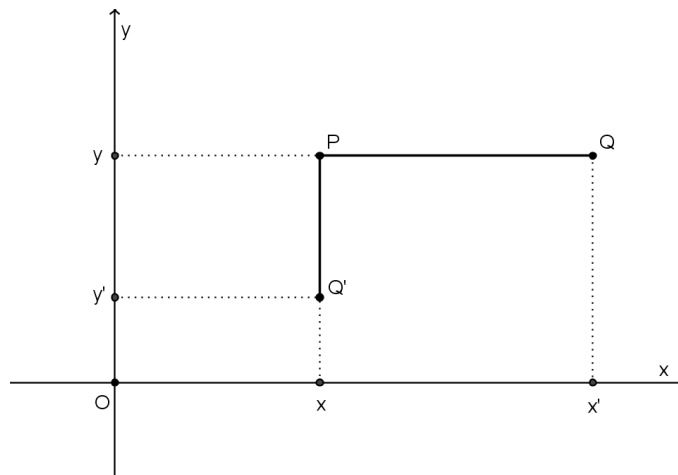


Figura 1.8: Distância entre dois pontos (a).

Por outro lado, se $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ têm abscissas e ordenadas diferentes então, considerando o ponto $S = (u, y)$, vemos que $[PSQ]$ é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $[PQ]$.

Como P e S têm a mesma ordenada e S e Q a mesma abscissa tem-se:

$$d(P, S) = |x - u| \quad \text{e} \quad d(S, Q) = |y - v|$$

e pelo Teorema de Pitágoras vem:

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S, Q)^2$$

logo,

$$d(P, Q)^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

ou seja,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

é a fórmula da distância entre o ponto $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$.

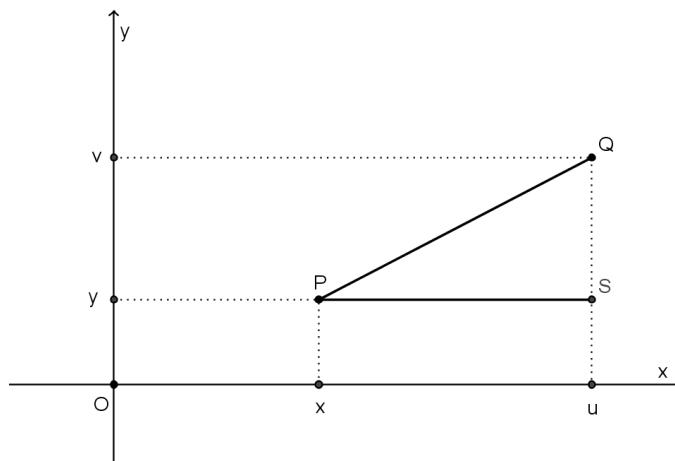


Figura 1.9: Distância entre dois pontos (b).

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y)$ à origem $O = (0, 0)$ é dada por:

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A fórmula da distância entre dois pontos, dada em termos das coordenadas desses pontos, serve de ponto de partida para um grande número de resultados da Geometria Analítica.

1.4.5 Condição de perpendicularidade de dois segmentos de reta

- ◇ Conceito matemático estudado, em termos vetoriais, em Geometria no Plano e no Espaço II - 11º ano ◇

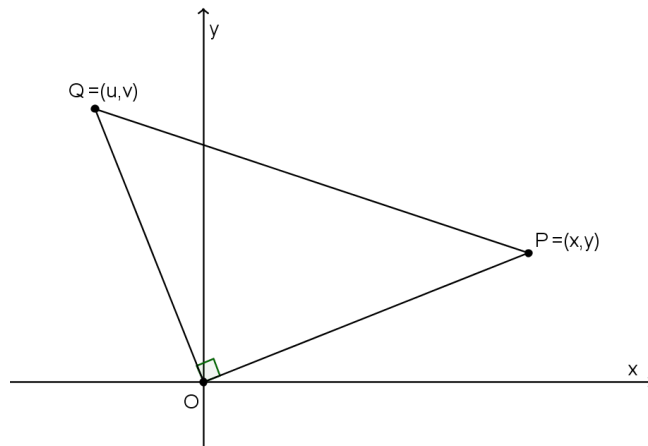


Figura 1.10: Perpendicularidade de dois segmentos de reta (a).

Pelo **Teorema de Pitágoras**, os segmentos de reta OP e OQ são perpendiculares, se e só se,

$$d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2$$

Pela fórmula da distância entre dois pontos podemos reescrever esta equação como:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2$$

ou seja,

$$ux + vy = 0$$

Esta igualdade expressa a condição necessária e suficiente para que os segmentos de reta OP e OQ sejam perpendiculares quando O é a origem, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$.

Consideremos agora $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$, com $A \neq A'$ e $C \neq C'$. Fazendo a translação dos segmentos AA' e CC' de modo a que os pontos A e C coincidam com a origem $O = (0, 0)$ e mantendo a mesma direção, obtemos os pontos $A'' = (\alpha, \beta)$ e $C'' = (\gamma, \delta)$ tais que OA'' é paralelo a AA' e OC'' é paralelo a CC' .

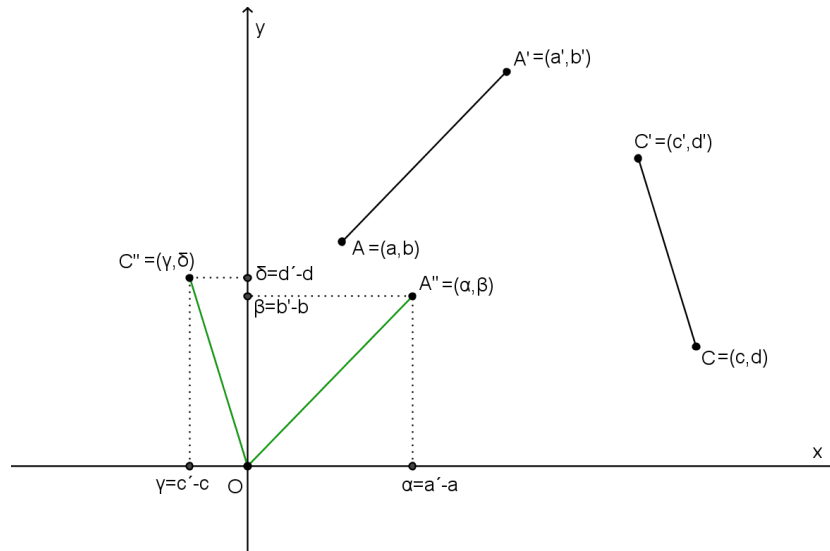


Figura 1.11: Perpendicularidade de dois segmentos de reta (b).

Como $[AA']$ é equipolente¹² a $[OA'']$ temos $\alpha = a' - a$ e $\beta = b' - b$, e como $[CC']$ é quipolente a $[OC'']$ temos $\gamma = c' - c$ e $\delta = d' - d$. Por outro lado os segmentos AA' e CC' são perpendiculares se, e somente se, $OA'' \perp OC''$, ou seja $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

Assim, a condição de perpendicularidade dos segmentos de reta AA' e CC' , é dada por:

$$(a' - a)(c' - c) + (b' - b)(d' - d) = 0$$

Uma característica geométrica é expressa desta forma numa equação algébrica.

¹²Dois segmentos de reta dizem-se equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

1.4.6 Cosseno de um ângulo entre duas direções

◇ Conceito matemático estudado em Geometria no Plano e no Espaço II - 11º ano, numa abordagem vetorial ◇

A condição de perpendicularidade é um caso particular da fórmula que nos permite obter o cosseno de um ângulo entre duas direções. Sabemos que duas retas são perpendiculares se e só se, o cosseno do ângulo entre as mesmas é igual a zero. Então, se $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ forem pontos situados à distância 1 da origem $(0, 0)$ e se α e β forem, respetivamente, as medidas em radianos dos ângulos formados pelo eixo Ox com os segmentos OP e OQ , temos:

$$x = \cos \alpha, y = \sin \alpha, u = \cos \beta \text{ e } v = \sin \beta$$

O ângulo do segmento OP com o segmento OQ mede $\theta = \beta - \alpha$ radianos. Pela fórmula do cosseno da diferença:

$$\cos \theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = ux + vy$$

ou seja:

$$\cos \theta = ux + vy$$

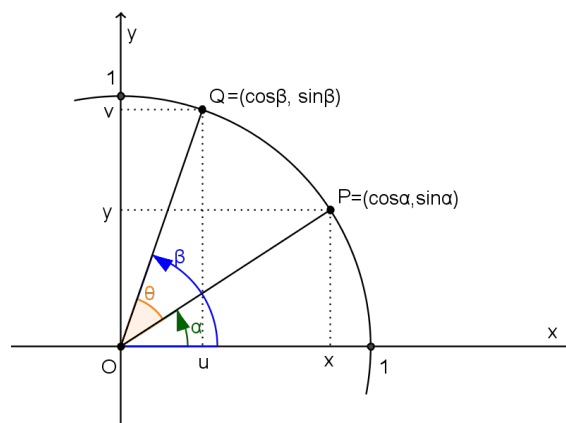


Figura 1.12: Cosseno de um ângulo entre duas direções (a).

Se, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ forem pontos diferentes de $O = (0, 0)$, em que os comprimentos dos segmentos OP e OQ não são necessariamente iguais a 1, e tomarmos:

$$s = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad t = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

então os pontos $P' = (sx, sy)$ e $Q' = (tu, tv)$ estão sobre os segmentos OP e OQ , respetivamente, com:

$$d(O, P') = d(O, Q') = 1$$

pois,

$$d(O, P') = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = 1$$

$$\text{e } d(O, Q') = \sqrt{\frac{u^2}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{u^2 + v^2}} = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^2 + v^2}} = 1$$

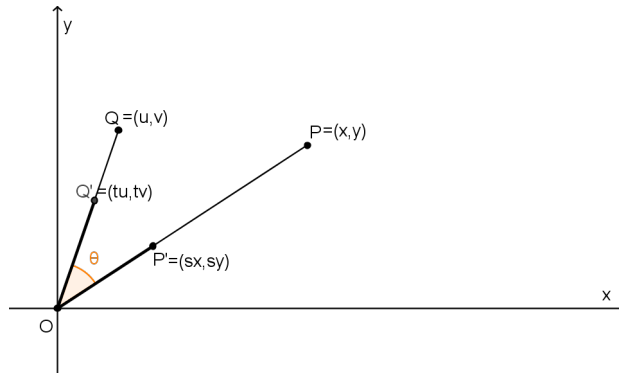


Figura 1.13: Cosseno de um ângulo entre duas direções (b).

Como o ângulo θ entre os segmentos de reta OP e OQ é o mesmo que entre os segmentos de reta OP' e OQ' vem:

$$\cos \theta = tu \cdot sx + tv \cdot sy = st(ux + vy) \text{ }^{13}$$

ou seja,

$$\cos \theta = \frac{ux + vy}{\sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Esta é a fórmula do cosseno do ângulo entre os segmentos de reta OP e OQ , onde $O = (0, 0)$, $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$. Como $\cos \theta = \cos(-\theta)$ é indiferente considerar o ângulo orientado de $[OP]$ para $[OQ]$ ou vice-versa.

Se tivermos dois segmentos de reta AA' e CC' com extremidades distintas e quisermos obter o cosseno do ângulo entre eles, em função das coordenadas $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$ efetuamos a translação de $[AA']$ e $[CC']$ de modo que A e C fiquem sobre o ponto O , obtendo $[OA'']$ e $[OC''']$ paralelos a $[AA']$ e $[CC']$ respetivamente.

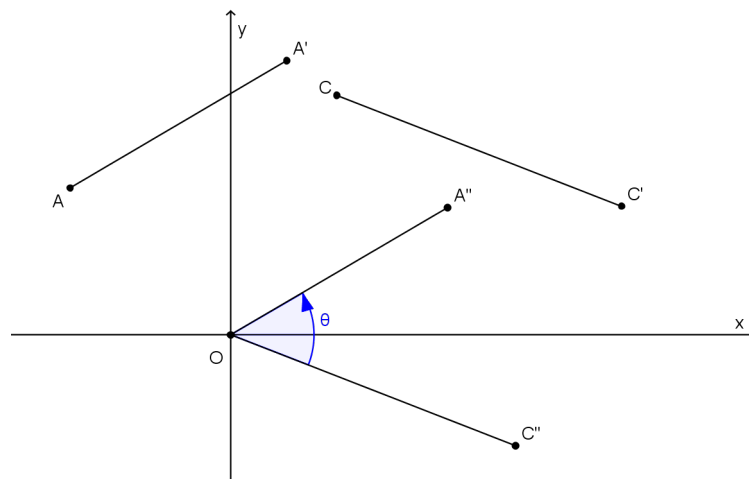


Figura 1.14: Cosseno de um ângulo entre duas direções (c).

O ângulo entre $[AA']$ e $[CC']$ é o mesmo que entre $[OA'']$ e $[OC''']$. Dado que $A'' = (a' - a, b' - b)$ e $C''' = (c' - c, d' - d)$, se θ for o ângulo entre $[AA']$ e $[CC']$ tem-se:

$$\cos \theta = \frac{(a' - a)(c' - c) + (b' - b)(d' - d)}{\sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2} \cdot \sqrt{(c' - c)^2 + (d' - d)^2}}$$

¹³O . é utilizado para realçar a multiplicação de fatores.

Esta fórmula permite obter o cosseno de um ângulo entre dois *segmentos orientados*¹⁴. Se A fosse o ponto inicial do primeiro segmento e C do segundo, o ângulo entre eles seria o suplemento de θ e o cosseno mudaria de sinal.

1.4.7 Equações que definem uma reta no plano

◊ Conceito matemático estudado em Geometria no Plano e no Espaço I - 10º ano ◊

- $y = ax + b$; $a \neq 0$ e $b \neq 0$ (equação reduzida)

Dado o ponto $P = (x, y)$ no plano, $y = ax + b$ se, e só se, P pertence à reta r que tem inclinação (ou declive) a e interseca o eixo Oy no ponto $(0, b)$, de ordenada b . Este tipo de equação representa retas que não são paralelas ao eixo Oy , isto é, retas que não são verticais.

A *inclinação* de uma reta não vertical é dada por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são pontos de r com abcissas distintas x_1 e x_2 . Este número a é o mesmo, não importa que pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) se tomem sobre a reta r (com $x_1 \neq x_2$) pois é a tangente do ângulo α que o eixo Ox forma com a reta r .

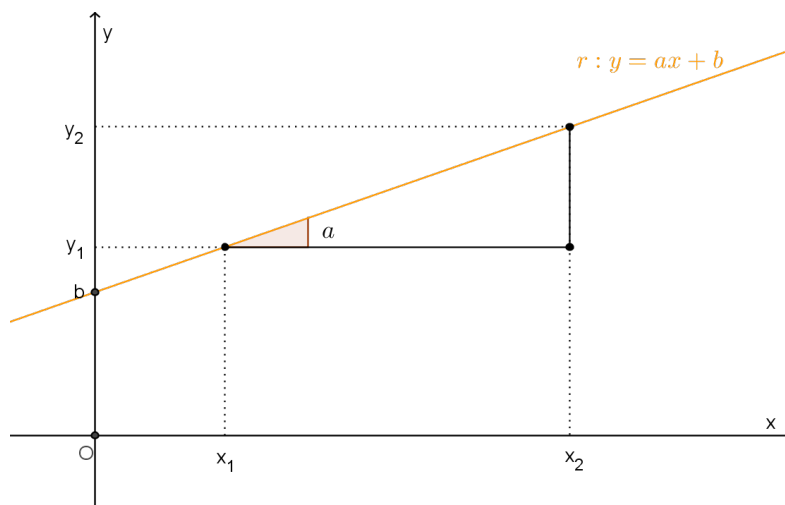


Figura 1.15: Gráfico da reta $y = ax + b$.

A reta r é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $y = ax + b$, isto significa que r é o gráfico da *função afim* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$.

- $y = b$; $b \neq 0$

É a reta formada por todos os pontos $P = (x, b)$, ou seja, é a reta paralela ao eixo Ox e que interseca o eixo Oy no ponto $(0, b)$.

¹⁴Um segmento de reta diz-se *orientado* quando se escolheu um dos pontos extremos para ser o início do segmento de reta e outro para designar o fim do mesmo.

- $y = ax; a \neq 0$

Representa uma reta com inclinação a e que passa na origem $O = (0, 0)$ do referencial, r é o gráfico de uma *função linear* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$.

- $ax + by = c; a \neq 0$ e $b \neq 0$

O conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by = c$ é uma reta, pois esta equação equivale a:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

A equação da reta é fundamental para a resolução de problemas de Geometria por métodos analíticos.

1.4.8 Equação da circunferência

◇ Conceito matemático estudado em Geometria no Plano e no Espaço I - 10º ano ◇

A circunferência de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$ é o conjunto Γ formado pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $d(A, P) = r$. Assim, $P = (x, y)$ pertence a Γ se, e só se:

$$\begin{aligned}d(A, P) &= r \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} &= r \\ \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2\end{aligned}$$

Esta é a equação da circunferência.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

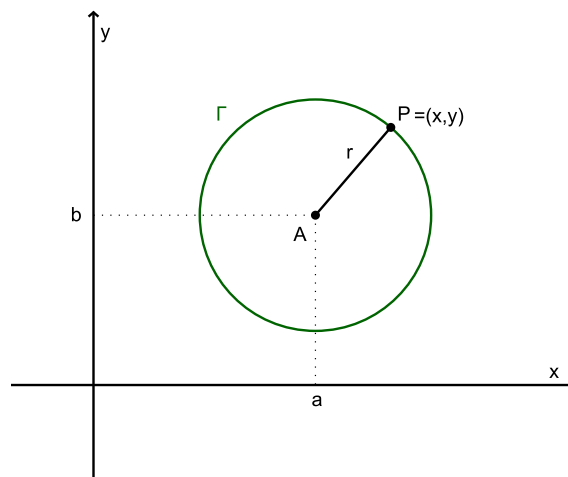


Figura 1.16: Circunferência.

No caso particular em que o centro da circunferência é a origem $O = (0, 0)$, a equação assume a forma simplificada:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

1.4.9 Distância de um ponto a uma reta

Nos programas portugueses de Geometria este conceito não é abordado. É aqui inserido para sustentar a apresentação do cálculo da área de um triângulo, no ponto 1.4.10, também de uma forma diferente da que é ensinada em Portugal. São abordagens que, não sendo lecionadas no currículo português, constituem uma mais-valia pois enriquecem a formação do professor.

◇ ◇ ◇

Sabendo a fórmula de cálculo da *distância entre dois pontos* e a equação da reta, determinamos a *distância de um ponto a uma reta*.

Para determinar a distância de um ponto a uma reta determinemos primeiro a distância entre as retas paralelas $r : ax + by = c$ e $r' : ax + by = c'$. Ambas são perpendiculares à reta $t : bx - ay = 0$, que passa pela origem e as intersecta nos pontos P e Q respetivamente. As coordenadas desses pontos são obtidas resolvendo os sistemas:

$$P: \begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad Q: \begin{cases} ax + by = c' \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

Obtém-se:

$$P = \left(\frac{ac}{a^2 + b^2}, \frac{bc}{a^2 + b^2} \right) \quad \text{e} \quad Q = \left(\frac{ac'}{a^2 + b^2}, \frac{bc'}{a^2 + b^2} \right)$$

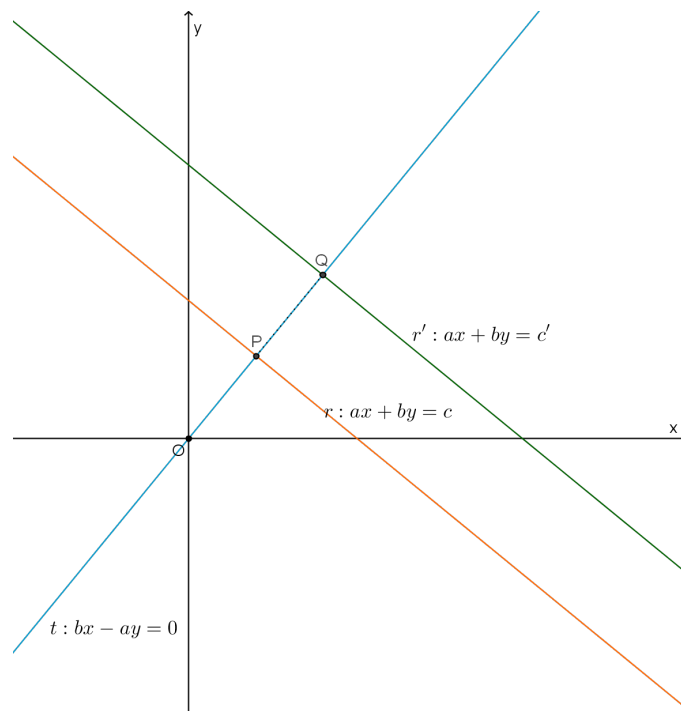


Figura 1.17: Distância entre duas retas.

A distância entre as duas retas dadas, r e r' , é a distância entre os pontos $P \in r$ e $Q \in r'$:

$$\begin{aligned}
 d(P, Q) &= \sqrt{\left(\frac{ac}{a^2 + b^2} - \frac{ac'}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a^2 + b^2} - \frac{bc'}{a^2 + b^2}\right)^2} \\
 \Leftrightarrow d(P, Q) &= \sqrt{\left(\frac{ac - ac'}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{bc - bc'}{a^2 + b^2}\right)^2} \Leftrightarrow d(P, Q) = \sqrt{\frac{a^2(c - c')^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2(c - c')^2}{(a^2 + b^2)^2}} \\
 \Leftrightarrow d(P, Q) &= \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c - c')^2}{(a^2 + b^2)^2}} \Leftrightarrow d(P, Q) = \sqrt{\frac{(c - c')^2}{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \\
 & d(P, Q) = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
 \end{aligned}$$

Para calcular a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta r definida por $ax + by = c$, observamos que a reta paralela a r passando por P tem a equação $ax + by = c'$, onde $c' = ax_0 + by_0$, e que a distância de P a r é igual à distância entre essas duas retas paralelas.

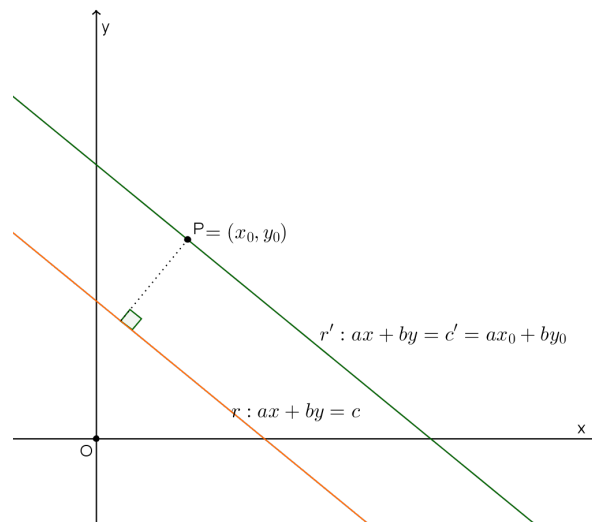


Figura 1.18: Distância de um ponto a uma reta.

Assim, a distância do ponto $P = (x_0, y_0)$ à reta $ax + by = c$ é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.4.10 Área de um triângulo

◇ Conceito matemático estudado no 6º ano (2º ciclo) ◇

Os triângulos são figuras básicas da Geometria: a resolução de quase todos os problemas de Geometria elementar passa pela comparação de dois ou mais triângulos; e a demonstração de certas propriedades fundamentais em Geometria é feita considerando triângulos adequados.

Paulo Ventura Araújo [1, 18]

◇ ◇ ◇

O NPMEB referencia a aprendizagem do cálculo da área de um triângulo no currículo do 2º ciclo do Ensino Básico, sendo aplicada a fórmula: $\text{Área}_{\Delta} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$.

Apresenta-se aqui outra forma de cálculo da área de um triângulo utilizando as coordenadas dos vértices do mesmo. Note-se, também, que no **Seminário I** é utilizada a fórmula de Herão para determinar a área de um triângulo sabendo o seu perímetro. Temos assim vários métodos analíticos para o mesmo objetivo geométrico.

◇ ◇ ◇

Consideremos um triângulo $[A_1A_2A_3]$ em que o vértice $A_3 = (0,0)$ é a origem. Sejam $A_1 = (a_1, b_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2)$. Suponhamos que o lado $[A_1A_3]$ não é vertical, isto é, que $a_1 \neq 0$. Seja $[A_1A_3]$ a base do triângulo.

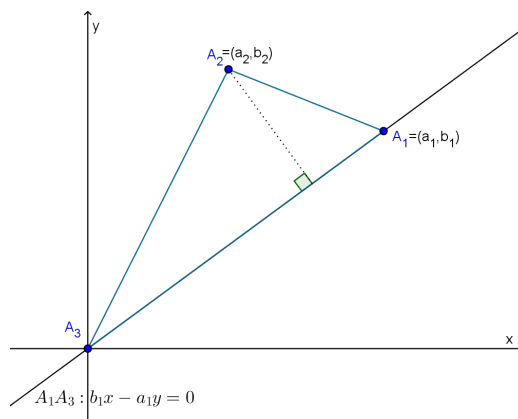


Figura 1.19: Altura de um triângulo.

A distância de A_2 até à reta A_1A_3 é a **altura** de $\triangle A_1A_2A_3$. Como a equação da reta A_1A_3 é $b_1x - a_1y = 0$ temos:

$$d(A_2, A_1A_3) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

e

$$d(A_2, A_1A_3) = \frac{|b_1a_2 - a_1b_2|}{\sqrt{b_1^2 + (-a_1)^2}}$$

logo,

$$\text{área de } \triangle A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \times \frac{|b_1a_2 - a_1b_2|}{\sqrt{b_1^2 + (-a_1)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\text{área de } \triangle A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} |a_1b_2 - a_2b_1|$$

No caso geral, consideremos um triângulo $[A_1A_2A_3]$ onde os vértices $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$ e $A_3 = (a_3, b_3)$ são pontos quaisquer. A partir da origem O traçamos os segmentos OP e OQ , respectivamente equipolentes a $[A_3A_1]$ e $[A_3A_2]$, logo $P = (c_1, d_1)$ e $Q = (c_2, d_2)$, com $c_1 = a_1 - a_3$, $d_1 = b_1 - b_3$, $c_2 = a_2 - a_3$, $d_2 = b_2 - b_3$. O triângulo $[OPQ]$ é congruente¹⁵ ao triângulo $[A_1A_2A_3]$.

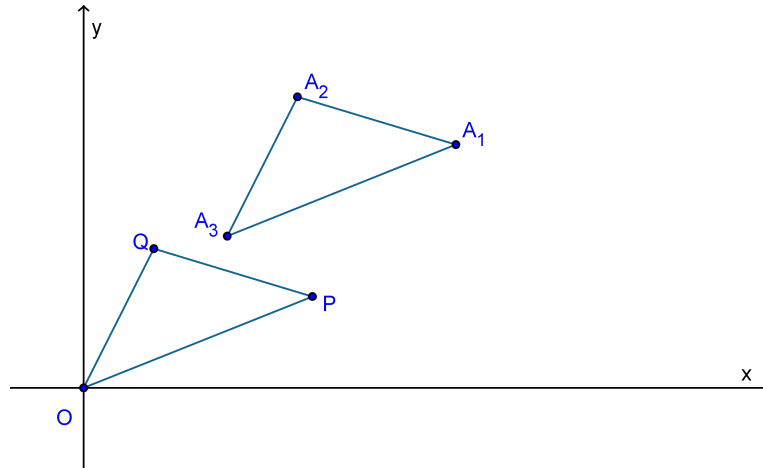


Figura 1.20: Triângulos congruentes.

Assim, vem:

$$\text{área de } \triangle A_1A_2A_3 = \text{área de } \triangle OPQ = \frac{1}{2} |c_1d_2 - c_2d_1|$$

ou seja,

$$\text{área de } \triangle A_1A_2A_3 = |(a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3)|$$

Esta é a fórmula para obter a área de um triângulo qualquer, dadas as coordenadas dos seus três vértices.

¹⁵Pelo critério LLL dois triângulos são congruentes se os três lados de um forem congruentes aos três lados do outro. [1, 18]

1.4.11 Problemas

Com o intuito de mostrar a aplicação de alguns conceitos de Geometria Analítica, incluem-se quatro problemas retirados do livro *A Matemática do Ensino Médio - Geometria Analítica Plana* [24]. Para os problemas 1 e 4, apresenta-se uma resolução de forma analítica e outra recorrendo simplesmente à Geometria Euclidiana. Dependendo do objetivo que se pretende com o problema e do ano de escolaridade a que se quer aplicar, também a resolução pode ter um cariz analítico ou sintético.

Problema 1) Prove que a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais. [24, Problema 10]

Resolução 1: Vamos resolver o problema de forma sintética (sem recorrer ao uso de coordenadas).

(da minha autoria)

Objetivo do problema: Promover a utilização do Teorema de Pitágoras.

Aplicável a partir do 9º ano.

Começemos por construir o paralelogramo $[ABCD]$ como na figura 1.21.

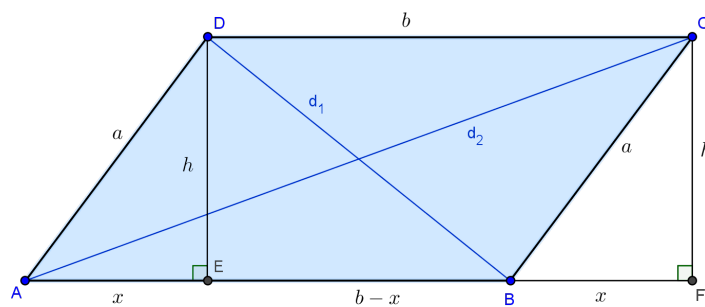


Figura 1.21: Paralelogramo (a).

Apliquemos o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ADE]$, $[BDE]$ e $[ACF]$.

$$\triangle ADE \rightarrow a^2 = x^2 + h^2 \quad (1)$$

$$\triangle BDE \rightarrow d_1^2 = (b-x)^2 + h^2 \Leftrightarrow d_1^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \quad (2)$$

$$\triangle ACF \rightarrow d_2^2 = (x+b-x+x)^2 + h^2 \Leftrightarrow d_2^2 = (x+b)^2 + h^2 \Leftrightarrow d_2^2 = x^2 + 2bx + b^2 + h^2 \quad (3)$$

Somando (2) e(3) vem:

$$d_1^2 + d_2^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 + x^2 + 2bx + b^2 + h^2 \Leftrightarrow d_1^2 + d_2^2 = 2b^2 + 2(x^2 + h^2),$$

por (1) temos:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2b^2 + 2a^2$$

ou seja,

$$2b^2 + 2a^2 = d_1^2 + d_2^2.$$

A soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais. c.q.d.

Resolução 2:

O mesmo problema, agora com uma resolução analítica, com recurso a coordenadas.
(da minha autoria)

Objetivo do problema: Promover a resolução de problemas geométricos de forma analítica.
Aplicável a partir do 10º ano.

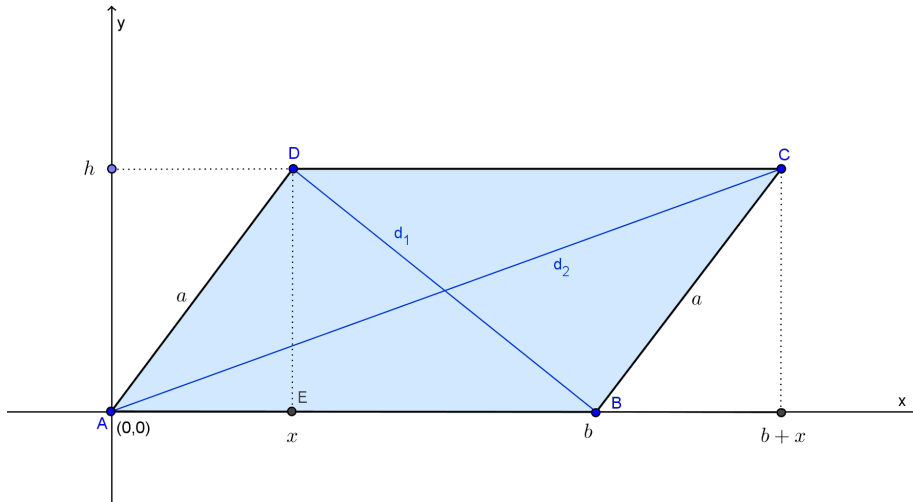


Figura 1.22: Paralelogramo (b).

Dado o referencial cartesiano Oxy consideremos o paralelogramo $[ABCD]$ como na figura. Os vértices de $[ABCD]$ têm as coordenadas:

$$A = (0, 0)$$

$$B = (b, 0)$$

$$C = (b + x, h)$$

$$D = (x, h)$$

Pretende-se demonstrar que:

$$2b^2 + 2a^2 = d_1^2 + d_2^2$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos (p. 29) temos:

$$a = d(A, D) = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$d_1 = d(A, C) = \sqrt{(b+x)^2 + h^2}$$

$$d_2 = d(B, D) = \sqrt{(b-x)^2 + (0-h)^2}$$

Logo,

$$2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2 + h^2})^2 + 2b^2 = (\sqrt{(b+x)^2 + h^2})^2 + (\sqrt{(b-x)^2 + (0-h)^2})^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + h^2) + 2b^2 = (b+x)^2 + h^2 + (b-x)^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2h^2 + 2b^2 = b^2 + 2bx + x^2 + h^2 + b^2 - 2bx + x^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2h^2 + 2b^2 = 2x^2 + 2h^2 + 2b^2 \text{ P. V.}$$

c.q.d.

Problema 2) O que representa a equação: $(x + y - 3)(3x - y - 1) = 0$?

[24, Problema 33]

Objetivo do problema: Representar um conjunto de pontos do plano de forma algébrica.

Aplicável a partir do 10º ano.

Resolução:

(de acordo com [25, p. 283])

$$(x + y - 3)(3x - y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 3 = 0 \vee 3x - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 3 - x \vee y = 3x - 1$$

Logo, a equação $(x + y - 3)(3x - y - 1) = 0$ representa o conjunto dos pontos do plano formado pela reunião das retas $y = 3 - x$ e $y = 3x - 1$.]

como podemos observar na figura 1.23.

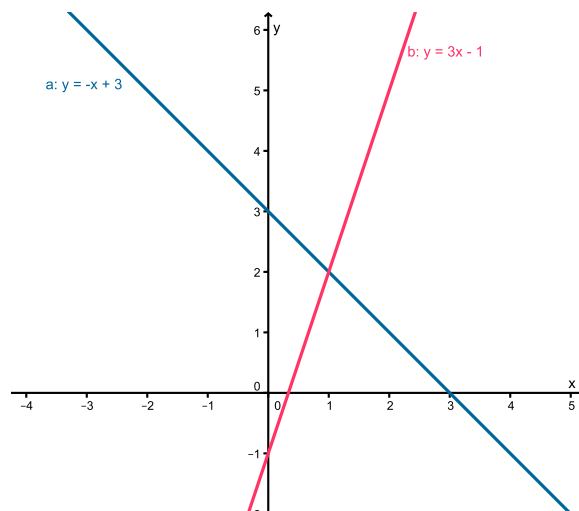


Figura 1.23: Retas concorrentes

Problema 3) Seja θ o menor ângulo formado pelas retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$.

Mostre que $\tan \theta = \left| \frac{a - a'}{1 + aa'} \right|$.

[24, Problema 36]

Objetivo do problema: Recordar/aplicar o conceito de declive de uma reta e utilizar a fórmula da tangente da diferença. *Aplicável no 12º ano.*

Resolução:

(de acordo com [25, p. 284])

As inclinações (declives) a e a' das retas dadas são as tangentes dos ângulos que cada reta forma com o eixo Ox e θ é a diferença entre esses dois ângulos ou o suplemento dessa diferença (o que for agudo entre os dois).

Seja α o ângulo que a reta $y = ax + b$ faz com Ox e seja β o ângulo que a reta $y = a'x + b'$ faz com Ox . Aplicando a fórmula da **tangente da diferença** vem:

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \left| \frac{a - a'}{1 + aa'} \right|$$

c.q.d.

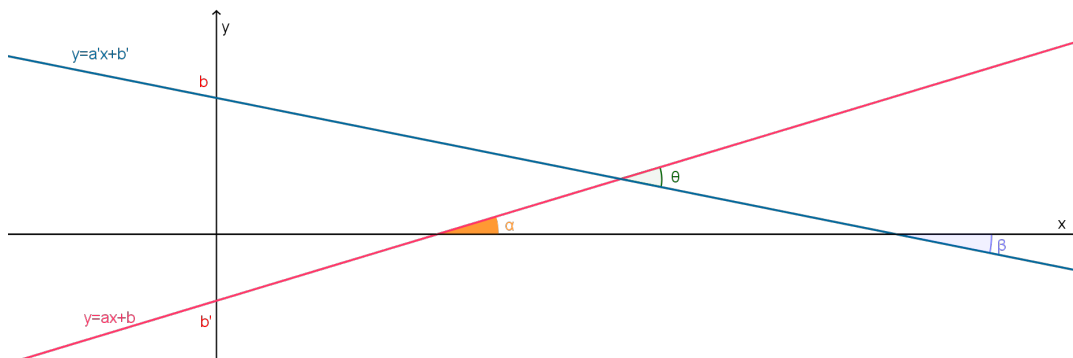


Figura 1.24: Tangente do menor ângulo entre duas retas.

Problema 4) Calcule o raio da circunferência inscrita num triângulo retângulo cujos catetos medem b e c . [24, Problema 52]

Resolução 1:

Resolução por métodos analíticos.

(de acordo com [25, p. 287])

Objetivo do problema: Promover a utilização de conceitos de Geometria Analítica na resolução de problemas (utilização da equação de uma reta e da expressão que define a distância de um ponto a uma reta). *Aplicável a partir do 10º ano.*

Consideremos um sistema de coordenadas no qual o vértice do ângulo reto é $A = (0, 0)$ e os outros dois vértices são $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$. Os lados do triângulo $[ABC]$ são tangentes à circunferência inscrita, logo o centro da mesma é o ponto $P = (x, x)$, tal que a distância $d(P, BC) = x$.

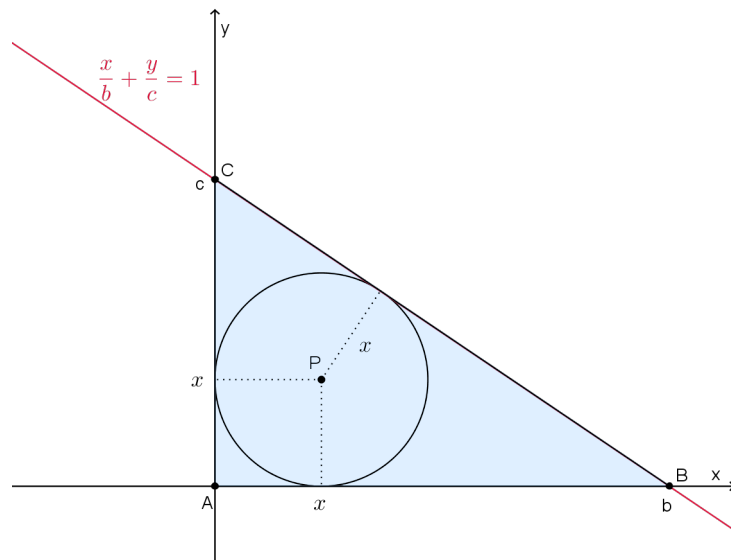


Figura 1.25: Raio da circunferência inscrita num triângulo (a).

Como a equação da reta BC é $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$, tem-se:

$$d(P, BC) = \frac{\left| \frac{x}{b} + \frac{x}{c} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}$$

Como o ponto P está abaixo da reta BC vem:

$$d(P, BC) = \frac{1 - \left(\frac{x}{b} + \frac{x}{c}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}$$

Resolvendo a equação $d(P, BC) = x$, temos:

$$x = \frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}}$$

Resolução 2:

Resolução com base na Geometria Euclidiana, sem recurso a um sistema de coordenadas. Enquadra-se na forma de resolução dos problemas de *Sangaku* apresentados no **Seminário I**.
(da minha autoria)

Objetivo do problema: Promover a resolução de problemas de Geometria com recurso a conceitos matemáticos estudados no 3º ciclo do Ensino Básico (critérios de semelhança de triângulos, bissetriz de um ângulo, circunferência inscrita num triângulo, reta tangente a uma circunferência, Teorema de Pitágoras). *Aplicável a partir do 9º ano.*

Consideremos um triângulo $[ABC]$ e a circunferência k nele inscrita, de raio x .

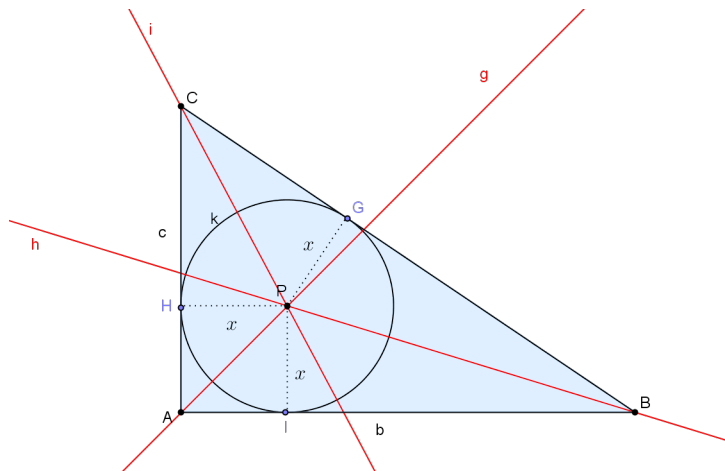


Figura 1.26: Raio da circunferência inscrita num triângulo (b).

Seja P o *incentro* de $\triangle[ABC]$, centro da circunferência k , ou seja é o ponto de interseção das *bissetrizes* dos ângulos internos de $\triangle ABC$.

Sejam G , H e I os pontos de tangência da circunferência k com os lados de $\triangle ABC$.

Como $[PG]$ e $[PI]$ são raios da circunferência k , $\overline{PG} = \overline{PI} = x$ (1).

$[PG] \perp [BG]$ e $[PI] \perp [BI]$, pois o raio da circunferência é perpendicular à reta tangente à mesma, no ponto de tangência. Assim, $\widehat{PGB} = \widehat{PIB}$ (2).

$\widehat{PBG} = \widehat{PBI}$ (3), uma vez que $P \in h$ e h é bissetriz de \widehat{ABC} .

Logo, tendo em conta (1), (2) e (3) e pelo critério LAA¹⁶: $\triangle PBI$ e $\triangle PBG$ são congruentes.

Do mesmo modo se conclui que $\triangle PAH$ é congruente a $\triangle PAI$ e $\triangle PCH$ é congruente a $\triangle PCG$.

Pelo que, $\overline{AH} = \overline{AI} = x$; $\overline{IB} = \overline{BG} = b - x$; $\overline{CH} = \overline{CG} = c - x$.

¹⁶Congruência do ângulo adjacente ao lado e congruência do ângulo oposto ao lado.

Aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\Leftrightarrow [(b-x) + (c-x)]^2 = b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c-2x)^2 = b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow b+c-2x = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b+c - \sqrt{b^2 + c^2}}{2}$$

Supondo que $b = 4$ e $c = 6$ vamos determinar x pela fórmula obtida por métodos analíticos, resolução 1, e pela fórmula obtida por aplicação de Geometria Sintética, resolução 2.

1) Aplicando a fórmula obtida na Resolução 1 vem:

$$x = \frac{bc}{b+c + \sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \times 6}{4+6 + \sqrt{4^2 + 6^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24}{10 + \sqrt{52}}$$

$$x \approx \frac{24}{17,211}$$

$$x \approx 1,394$$

2) Aplicando a fórmula obtida na Resolução 2 vem:

$$x = \frac{b+c - \sqrt{b^2 + c^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4+6 - \sqrt{4^2 + 6^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 - \sqrt{52}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2,789}{2}$$

$$x \approx 1,394$$

Dois métodos de resolução, o mesmo resultado.

1.5 O poder da representação geométrica

A representação geométrica de conceitos algébricos é um facilitador inequívoco da aprendizagem. A visualização geométrica promove o desenvolvimento da argumentação, do pensamento algébrico e da capacidade de resolução de problemas.

Um conceito que ganhou uma nova dimensão com a sua representação geométrica é o de *função*.

Definição: *Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se:*

$$y = f(x),$$

se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y a variável dependente.

A definição analítica de função consiste em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor a de x um valor b de y . Por exemplo, $y = 10x^2$.

A definição geométrica de uma função passa pela utilização do plano definido pelos dois eixos cartesianos Ox e Oy de forma a fazer construções geométricas que definam correspondências entre as duas variáveis, isto é, construções que definam funções $y = f(x)$.

Assim, de toda a função, seja qual for o modo como é definida, podemos sempre construir a sua *imagem geométrica* ou *representação geométrica*.

O conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos (conjuntos de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade). [4, p. 130]

Esta relação permite uma **tradução de leis analíticas em leis geométricas** estabelecendo uma **unificação entre dois campos, o analítico e o geométrico**.

Nesta unificação, realizada de há três séculos para cá, reside um dos factos mais dramáticos, mais importantes e mais profundos da história do Conhecimento. [4, p. 131]

Outro conceito que ganhou projeção com a sua representação geométrica é o de *número complexo*. A propósito da importância da representação geométrica dos números complexos, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) refere que os números complexos foram mal aceites durante muitos anos e apenas admitidos como expediente de cálculo, sem "dignidade numérica" e que esta só foi reconhecida quando se conseguiu uma "realização visual" dos mesmos. [38, p. 76]

1.6 Síntese

O pensamento algébrico e o pensamento geométrico devem ser desenvolvidos desde o início do percurso escolar. O pensamento algébrico abrange toda a Matemática e envolve as capacidades de abstração, representação simbólica e generalização, bem como a exploração e modelação de situações com recurso à linguagem algébrica. O pensamento geométrico tem a ver com a forma como são estabelecidas habilidades e a compreensão geométricas. Dado que a Geometria tem como referenciais o raciocínio espacial e o seu conteúdo específico, é necessário compreender ambos os aspetos para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico nos alunos. Os programas de Matemática apresentam orientações onde a Álgebra e a Geometria estão presentes ao longo dos vários anos do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Os conteúdos e as metodologias de ensino propostas vão no sentido do desenvolvimento equilibrado e integrado destas duas formas de pensar matematicamente.

Em Portugal, a Geometria ganhou um novo ímpeto com o NPMEB, que dá ênfase à visualização e à compreensão de propriedades de figuras geométricas, essenciais para o desenvolvimento do sentido espacial. O NPMEB salienta ainda que o trabalho em Geometria é de particular importância para o desenvolvimento da argumentação e do raciocínio matemáticos.

O pensamento algébrico e o pensamento geométrico estão claramente presentes e em simbiose na Geometria Analítica. Esta caracteriza-se pelo estudo da Geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da Álgebra e da Análise e contrasta com a abordagem sintética da Geometria Euclidiana, em que é utilizado o raciocínio dedutivo a partir de axiomas e teoremas para obter proposições verdadeiras. A *Geometria no Plano e no Espaço* surge como Unidade Didática nos 10º e 11º anos, do programa de Matemática A e os seus conceitos são utilizados noutras unidades de aprendizagem, nomeadamente, *Funções*, *Introdução ao Cálculo Diferencial*, e *Trigonometria e Números Complexos*.

Por outro lado, a Geometria Analítica é o fundamento das áreas mais modernas da Geometria, incluindo Geometria Algébrica, Diferencial, Discreta e Computacional, sendo muito utilizada na Física e na Engenharia. Em geral, o sistema de coordenadas cartesianas é usado para manipular equações para planos, retas, curvas e círculos, geralmente em duas dimensões - Geometria Analítica no Plano. A Geometria Analítica ensinada nos programas escolares pode ser explicada de uma forma mais simples: ela diz respeito à definição e representação de formas geométricas de modo numérico e à extração de informação numérica dessa representação.

Capítulo 2

Seminários de investigação Matemática

2.1 Enquadramento dos temas

Os Seminários de investigação matemática I e II, elaborados durante este ano de Estágio, abordam problemas cuja resolução envolve a aplicação de conceitos algébricos e geométricos do 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário.

A resolução de equações para demonstração ou obtenção de determinados resultados está presente nos dois seminários, como característica intrínseca do "fazer matemática".

O Seminário I - *Desafios Matemáticos nos Templos do Japão* tem por base o artigo [Sangaku-Desafios Matemáticos nos Templos do Japão](#) de Margarida Matias Pinto, publicado na revista *A Gazeta da Matemática* em 2011 [29]. Apesar de serem parte de uma história já por muitos esquecida ou até desconhecida, estes desafios matemáticos vindos dos templos do Japão constituem um vasto rol de problemas que podem ser utilizados no ensino do currículo de Matemática dos dias de hoje.

O Seminário I enquadra-se nos princípios da Geometria Sintética/Euclidiana, uma vez que não são usados sistemas de coordenadas.

A resolução algébrica dos problemas apresentados neste seminário envolve os seguintes conceitos matemáticos:

- Distância de um ponto a uma reta. 8º ano
- Critérios de semelhança de triângulos. 8º ano
- Critérios de congruência de triângulos. 8º ano
- Casos notáveis da multiplicação. 8º ano
- Teorema de Pitágoras. 8º, 9º ano
- Mediatriz de um segmento de reta. 9º ano
- Bissetriz de um ângulo. 5º ano, 9º ano
- Reta tangente a uma circunferência. 5º ano, 9º ano
- Circunferência inscrita num triângulo. 9º ano
- Circunferência circunscrita a um triângulo. 9º ano
- Trigonometria do triângulo retângulo. 9º ano
- Racionalização do denominador. 10º ano
- Equações de 1º grau. 7º ano
- Equações de 2º grau. 8º ano (eq. incompletas), 9º ano (eq. completas)
- Fórmulas trigonométricas. 12º ano

O Seminário II - *Álgebra e Geometria com Triângulos de Herão* tem por base os artigos: "*Heron Triangles and Moduli Spaces*" publicado na revista *Mathematics Teacher* em 2008 [33] e o artigo "*Heron Triangles and Elliptic Curves*" [39] do projeto Klein [46], cuja tradução foi efetuada por Elfrida Ralha e publicada na revista *Gazeta da Matemática* em 2010, com o nome "*Os triângulos de Herão e as curvas elípticas*" [31].

Um problema de congruência de triângulos colocado por um grupo de matemáticos americanos, do projecto *Focus on Math* [41], conduziu a uma investigação que envolve vários conceitos do currículo do 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Geometria e Álgebra ajudam a responder à questão:

Triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro são necessariamente congruentes?

O nome **triângulos de Herão** surge pelo facto dos investigadores utilizarem, como ponto de partida para o seu estudo, triângulos em que as medidas dos lados e a área são definidos por um número racional.

As construções geométricas elaboradas para dar vida a este estudo seguem os princípios da Geometria Analítica.

Ao longo deste trabalho foram aplicados os seguintes conceitos matemáticos do programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico [30] e do Ensino Secundário [13]:

- Critérios de semelhança de triângulos. 8º ano
- Equações (completas) do segundo grau e Fórmula Resolvente. 9º ano
- Reta tangente a uma circunferência. 9º ano
- Bissetriz de um ângulo. 9º ano
- Circunferência inscrita num triângulo. 9º ano
- Razões trigonométricas no triângulo retângulo. 9º ano
- Relação entre seno, cosseno e tangente da amplitude de ângulos agudos. 9º ano
- Continuidade de uma função em pontos não isolados do domínio. 12º ano
- Corolário do Teorema de Bolzano. 12º ano
- Função derivada. 12º ano
- Função segunda derivada. 12º ano
- Estudo da derivada e segunda derivada de funções cúbicas. 12º ano
- Estudo dos extremos de uma função. 12º ano
- Estudo do sentido da concavidade de uma função. 12º ano
- Seno, cosseno e tangente da soma (ou diferença) de dois ângulos. 12º ano

2.2 Sangaku - Desafios Matemáticos nos Templos do Japão

Sangaku são tábuas de madeira pintadas com problemas matemáticos, penduradas em templos budistas ou outros edifícios religiosos, serviam de oferta aos Deuses como forma de agradecimento pela resolução de problemas do dia a dia e como forma de publicar novos resultados matemáticos ou propor novos problemas.

O livro *Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry* [19] apresenta uma narrativa histórica de Matemática tradicional japonesa com a recolha de problemas de *sangaku* e é merecedor de um olhar atento.

A maioria dos *sangaku* envolve problemas de Geometria Euclidiana nos quais círculos, triângulos, quadrados, elipses, cones, cilindros se interseitam. Contudo alguns apresentam problemas algébricos envolvendo a resolução de equações polinomiais com duas ou mais variáveis. Seguem-se imagens que nos mostram a beleza da Matemática nestas obras de arte.



Figura 2.1: *Sangaku* colocado no santuário Mizuho em 1800.



Figura 2.2: *Sangaku* colocado no santuário Dewasanzan em 1823.



Figura 2.3: *Sangaku* colocado no santuário Sugawara em 1854.



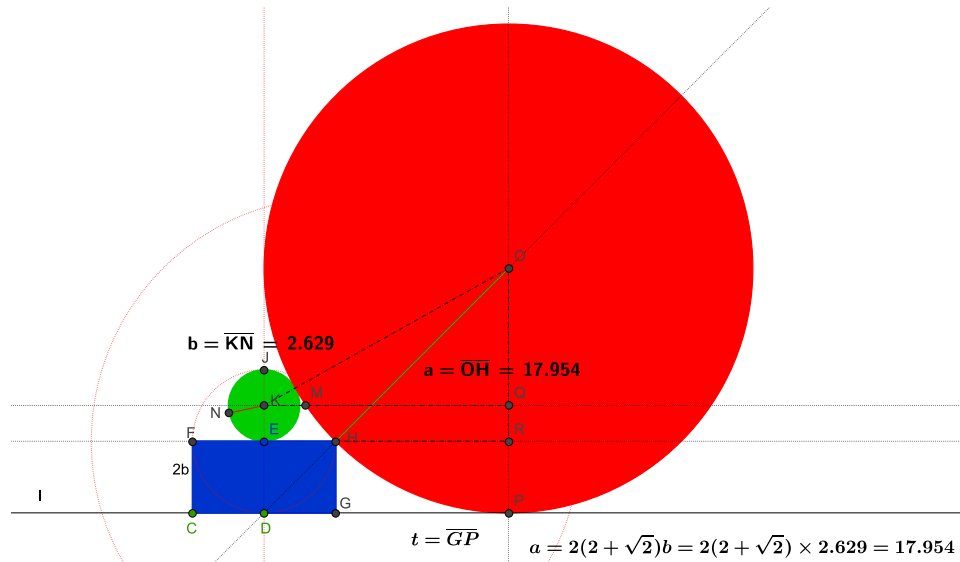
Figura 2.4: *sangaku* colocado no altar de Katayamahiko em 1873.

Dos oito problemas que figuram no Seminário I selecionam-se os seguintes:

Problema 1 Um pequeno círculo de raio b está posicionado no ponto de contacto entre dois quadrados de lado $2b$ que por sua vez estão "assentes" na reta l . Um círculo maior de raio a é tangente à reta l , ao quadrado mais próximo, e ao círculo pequeno. Determina a em função de b . [19, p.101]

Este problema foi encontrado no santuário Shimizu em 1828.

Construção geométrica:



Resolução algébrica:

Seja $a = \overline{OH}$ o raio da circunferência maior e $b = \overline{KN}$ o raio da circunferência pequena. Seja $t = \overline{GP}$ como se observa na figura.

Pelo **Teorema de Pitágoras** $\overline{OK}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{KQ}^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 = (a-3b)^2 + (t+2b)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2 \times 3ab + 9b^2 + (t+2b)^2 \Leftrightarrow 8ab - 8b^2 = (t+2b)^2$ (1).

Pelo **Teorema de Pitágoras** $\overline{OH}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{HR}^2 \Leftrightarrow a^2 = (a-2b)^2 + t^2 \Leftrightarrow a^2 = a^2 - 2 \times 2ab + 4b^2 + t^2 \Leftrightarrow 4ab - 4b^2 = t^2$ (2).

Resolvendo conjuntamente as **equações de 2º grau (1) e (2)** vem: $2t^2 = (t+2b)^2$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4bt - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4 \times (-4)b^2}}{2} \Leftrightarrow t = 2b \pm 2b\sqrt{2} \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t = 2b + 2b\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow t = 2b(1 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow t = \frac{2b(1 + \sqrt{2}) \times (1 - \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \frac{2b(1 - (\sqrt{2})^2)}{1 - \sqrt{2}} \Leftrightarrow t = \frac{2b}{\sqrt{2} - 1}$$

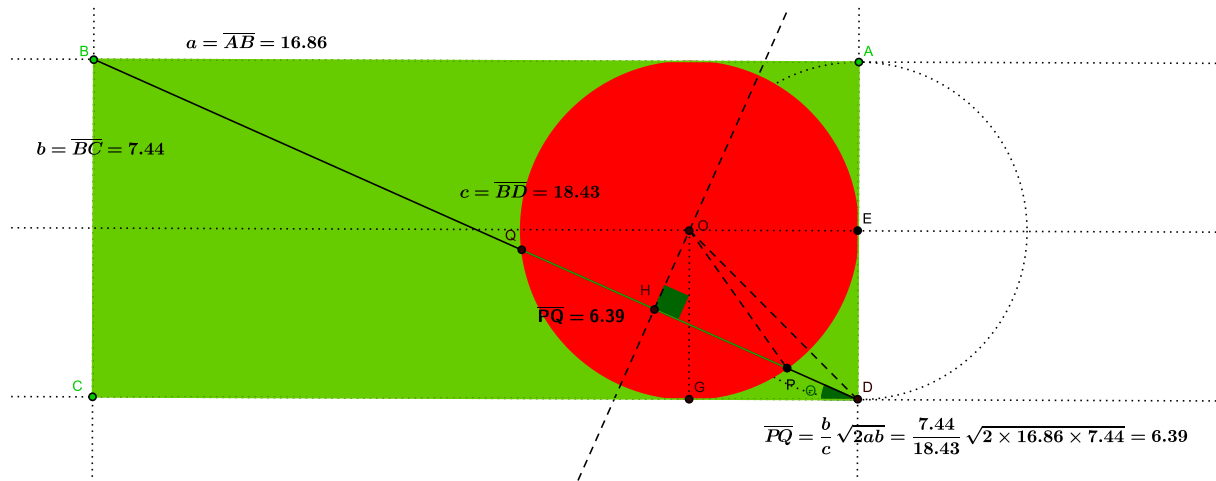
Substituindo t na equação (2) vem: $4ab - 4b^2 = \left(\frac{2b}{\sqrt{2} - 1}\right)^2 b^2 \Leftrightarrow a = \frac{b}{(\sqrt{2} - 1)^2} + b$

$$\Leftrightarrow a = \frac{b}{(3 - 2\sqrt{2})} + b \Leftrightarrow a = \frac{b + b(3 - 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2})} \Leftrightarrow a = \frac{b + b(3 - 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2})} \times \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{(3 + 2\sqrt{2})} \Leftrightarrow a = 2(2 + \sqrt{2})b$$

Problema 2 Consideremos um retângulo $[ABCD]$, com $\overline{AB} > \overline{BC}$ e um círculo inscrito no mesmo de forma a tocar três lados, $[AB]$, $[AD]$, e $[DC]$. A diagonal $[BD]$ intersesta o círculo em dois pontos P e Q . Determina a distância \overline{PQ} em função de \overline{AB} e \overline{BC} . [19, p.114]

Este problema data de 1805 e foi encontrado no santuário Suwa.

Construção geométrica:



Resolução algébrica:

Seja $[ABCD]$ um retângulo com $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, a diagonal $c = \overline{BD}$ e $\angle BDC = \theta$.

O raio do círculo é $\overline{OE} = \overline{OG} = \overline{OP} = \frac{b}{2}$ (1).

Pelo Teorema de Pitágoras $\overline{OD}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{OD} = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \overline{OD} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4}}_{\overline{OD} > 0} \Leftrightarrow \overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2} b$ (2). Aplicando as razões trigonométricas tem-se:

$$\sin(45^\circ - \theta) = \frac{\overline{OH}}{\overline{OD}} \Leftrightarrow \overline{OH} = \sin(45^\circ - \theta) \times \frac{\sqrt{2}}{2} b.$$

Pelas fórmulas trigonométricas $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\beta\sin\alpha$, logo

$$\overline{OH} = [\sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta] \frac{\sqrt{2}}{2} b \Leftrightarrow \overline{OH} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right] \frac{\sqrt{2}}{2} b \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{b}{2} (\cos \theta - \sin \theta).$$

Aplicando as razões trigonométricas tem-se: $\overline{OH} = \frac{b}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c} \right)$ (3).

Pelo Teorema de Pitágoras $\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HP}^2 \Leftrightarrow \overline{HP} = \pm \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2}$ \Leftrightarrow por(1)e(3)

$$\overline{HP} = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left[\frac{b}{2} \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right)\right]^2} \Leftrightarrow \overline{HP} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \frac{(a-b)^2}{c^2}} \Leftrightarrow \overline{HP} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{c^2 - a^2 + 2ab - b^2}{c^2}}.$$

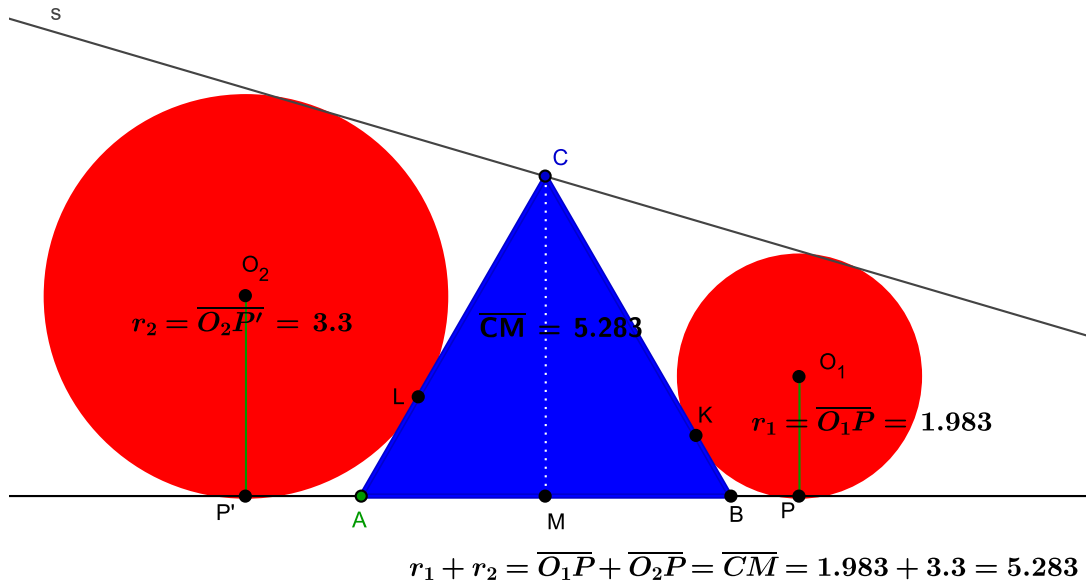
Pelo Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$, logo $\overline{HP} = \frac{b}{2c} \sqrt{2ab}$.

Como $\overline{PQ} = 2\overline{HP}$ tem-se: $\overline{PQ} = \frac{b}{c} \sqrt{2ab}$.

Problema 3 O $\triangle ABC$ é equilátero. A reta s contém o vértice C . A circunferência O_1 com raio r_1 é tangente a BC , AB e s . A circunferência O_2 com raio r_2 é tangente a AC , AB e s . Mostrar que quando s varia, $r_1 + r_2$ é constante e igual à altura do $\triangle ABC$. [21, p. 16]

Este problema pertence a um sangaku colocado no templo Fukusima em 1885.

Construção geométrica:

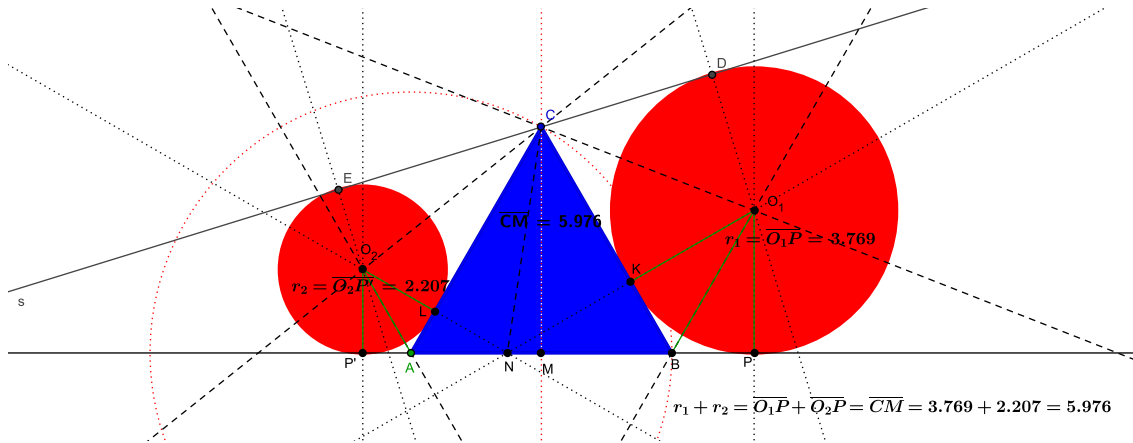


Observações:

É de notar a semelhança na construção geométrica deste *sangaku*, de 1885, e o triângulo e respectivas circunferências exinscritas no Teorema de Feuerbach, de 1822 (pág. 16 deste relatório).

Resolução algébrica:

Seja $h = \overline{CM}$ a altura do triângulo $[ABC]$. Seja r_1 o raio da circunferência com centro em O_1 .
 Seja r_2 o raio da circunferência com centro em O_2 . Seja s a reta que contém C . N é o ponto de interseção da reta AB com a reta perpendicular a $[BC]$ no ponto de tangência K e de interseção da reta AB com a reta perpendicular a $[AC]$ no ponto de tangência L .



$\triangle ABC$ é equilátero logo $\hat{ABC} = 60^\circ$, como $\angle ABC$ e $\angle PBC$ são **ângulos suplementares**

$\hat{PBC} = 120^\circ$. (1)

Como AB e BC são tangentes, à circunferência de centro em O_1 , por B então $\triangle O_1KB$ e $\triangle O_1PK$ são **congruentes**

[1, p.42-43], logo $O_1\hat{BK} = O_1\hat{BP}$ e por (1) $O_1\hat{BK} = 60^\circ$. Assim, $O_1\hat{BK} = \hat{ABC} = N\hat{BK} = 60^\circ$

(2).

Como o raio é perpendicular à **tangente à circunferência** no ponto de tangência,

$O_1\hat{KB} = N\hat{KB} = 90^\circ$ (3).

$[KB]$ é comum a $\triangle O_1KB$ e $\triangle NKB$ (4).

Por (2), (3) e (4), pelo **critério ALA**, $\triangle O_1KB$ e $\triangle NKB$ são **congruentes**,

logo $\overline{O_1K} = \overline{NK} = r_1$ (5).

Do mesmo modo se mostra que $\triangle O_2LA$ e $\triangle NLA$ são **congruentes**, logo $\overline{O_2L} = \overline{NL} = r_2$ (6).

$N\hat{AL} = N\hat{BK} = 60^\circ$ e $A\hat{LN} = N\hat{KB} = 90^\circ$, logo $\triangle NLA$ e $\triangle NKB$ são **semelhantes**.

Pelas **razões trigonométricas** $\frac{\overline{NK}}{\overline{NB}} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow \overline{NB} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{NK} \stackrel{\text{por(5)}}{\Leftrightarrow} \overline{NB} = \frac{2}{\sqrt{3}} r_1$ (7) e $\frac{\overline{NL}}{\overline{AN}} = \sin 60^\circ$

$\Leftrightarrow \overline{AN} = \frac{2}{\sqrt{3}} \overline{NL} \stackrel{\text{por(6)}}{\Leftrightarrow} \overline{AN} = \frac{2}{\sqrt{3}} r_2$ (8). $\overline{AN} + \overline{NB} = \overline{AB} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} r_2 + \frac{2}{\sqrt{3}} r_1 = \overline{AB} \Leftrightarrow$

$r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB}$ (9). Pelo **Teorema de Pitágoras** $\overline{AC}^2 = (\frac{\overline{AB}}{2})^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = \overline{AC}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}$

$\Leftrightarrow h^2 = \overline{AB}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4} \Leftrightarrow h = \pm \sqrt{\frac{3\overline{AB}^2}{4}} \stackrel{h>0}{\Leftrightarrow} h = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB}$ (10). Por (9) e (10) $r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = h$.

2.3 Álgebra e Geometria com triângulos de Herão

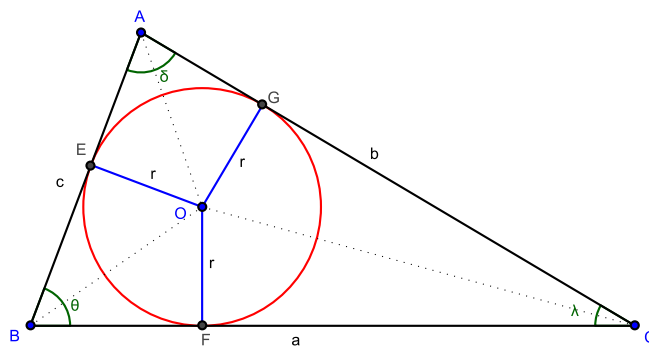
2.3.1 Questão de partida

Se dois triângulos tiverem a mesma área e o mesmo perímetro são necessariamente congruentes?

Herão de Alexandria (75 d.C.) desenvolveu uma fórmula que permite determinar a área de um triângulo através da medida dos comprimentos dos três lados. [10, p. 121].

Teorema 2 (Herão). A área de um triângulo $[ABC]$, com medidas dos lados a , b e c , é dada por $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Demonstração: Consideremos o triângulo $[ABC]$ de lados a , b e c ; a **circunferência inscrita** de raio r e os ângulos internos δ , θ e λ . O é o **incentro** de $\triangle ABC$.



Pretendemos demonstrar que a área A de $\triangle ABC$ é dada pela expressão:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (2.1)$$

onde $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Vamos começar por demonstrar que:

$$A = rs \quad (2.2)$$

Somando as áreas dos triângulos $[OBA]$, $[OCA]$ e $[OBC]$ temos:

$$A = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = r \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = rs, \text{ ou seja, } \boxed{A = rs}.$$

Como "os pontos de contacto das duas tangentes a uma dada circunferência tiradas por um mesmo ponto exterior P estão à mesma distância de P" [1, p. 43] temos:

$$\overline{CG} = s - c, \overline{EB} = s - b \text{ e } \overline{AE} = s - a \quad (2.3)$$

Aplicando as razões trigonométricas vem:

$$\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{r}{s-c}, \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{s-b} \text{ e } \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{r}{s-a} \quad (2.4)$$

Dado que $\delta + \theta + \lambda = \pi$ então $\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$.

Pelas fórmulas trigonométricas do seno e cosseno da diferença de dois ângulos vem:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)} = \frac{1}{\tan \lambda}, \text{ logo:}$$

$$\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right] = \frac{1}{\tan\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}$$

Aplicando a fórmula trigonométrica da tangente da soma de dois ângulos temos:

$$\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1 - \tan\left(\frac{\delta}{2}\right)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) em (2.5) obtemos:

$$\frac{r}{s-c} = \frac{(s-a)(s-b) - r^2}{r[(s-a) + (s-b)]} \quad (2.6)$$

que se pode reescrever como:

$$r^2(s-b + s-a) = (s-a)(s-b)(s-c) - r^2(s-c) \quad (2.7)$$

Do mesmo modo, $\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)$ e $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)$,

logo,

$$r^2(s-c + s-b) = (s-a)(s-b)(s-c) - r^2(s-a) \quad (2.8)$$

e

$$r^2(s-a + s-c) = (s-a)(s-b)(s-c) - r^2(s-b) \quad (2.9)$$

Adicionando (2.7), (2.8), (2.9) e tendo em conta que $2s = a + b + c$, concluímos que:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad (2.10)$$

Assim, substituindo (2.10) em (2.2) temos (1.2), ou seja:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

2.3.2 O conjunto dos triângulos com área e semiperímetro iguais

Para encontrarmos triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro podemos:

- Definir o conjunto dos triângulos como o subconjunto de todos os ternos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ correspondentes às medidas dos três lados do triângulo. Note-se que nem todos os pontos em \mathbb{R}^3 correspondem a um triângulo; por exemplo, todas as coordenadas têm de ser positivas.
- Definir as coordenadas, no conjunto dos triângulos, usando a amplitude de ângulos em vez de comprimentos.

Todo o triângulo tem uma circunferência inscrita cujo raio r se relaciona com a área A e o semiperímetro s da seguinte forma:

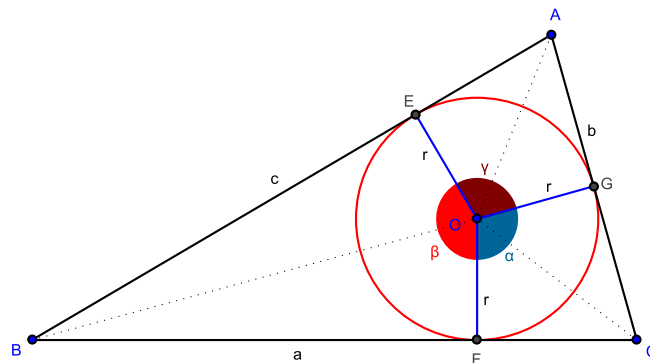
$$A = rs \quad (2.11)$$

como já vimos na demonstração do Teorema de Herão.

A equação (2.11) diz-nos que se dois triângulos têm a mesma área e o mesmo semiperímetro, então o raio da circunferência inscrita em cada um deles é igual.

A circunferência inscrita num triângulo pode servir para parametrizar o conjunto dos triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro.

Para parametrizar este conjunto de triângulos vamos considerar o triângulo $[ABC]$, utilizar os ângulos formados pelos três raios da circunferência inscrita, α , β e γ (como na figura) e definir s em função destes ângulos.



"Os pontos de contacto das duas tangentes a uma dada circunferência tiradas por um mesmo ponto exterior P estão à mesma distância de P" [1, p. 43], logo,

$$\overline{AE} = \overline{AG}, \overline{BE} = \overline{BF}, \overline{CF} = \overline{CG} \text{ e } r = \overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OG},$$

pelo que temos três pares de triângulos congruentes (critério LLL):

$$\triangle OAE \text{ e } \triangle OAG, \triangle OBF \text{ e } \triangle OBE, \triangle OCF \text{ e } \triangle OCG.$$

Consideremos $\overline{AE} = d$.

Aplicando as **razões trigonométricas** temos,

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{d}{r} \Leftrightarrow d = r \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right);$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b-d}{r} \Leftrightarrow b-d = r \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow b = r \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right);$$

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{c-d}{r} \Leftrightarrow c-d = r \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \Leftrightarrow c = r \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + r \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right);$$

$$a = (c-d) + (b-d) \Leftrightarrow a = r \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + r \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Logo,

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \Leftrightarrow$$

$$s = r \left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right) \quad (2.12)$$

As equações (2.11) e (2.12) permitem-nos concluir que:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{s^2}{A} \quad (2.13)$$

(2.13) pode ser reescrita como uma equação que define uma **curva no plano**:

a curva que parametriza todos os triângulos com área A e semiperímetro s .

$$\text{Seja } x = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), y = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \text{ e } z = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

$$\text{Como } \alpha + \beta + \gamma = 2\pi, \text{ vem } \frac{\gamma}{2} = \pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \text{ e}$$

$$z = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\pi - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\right) = -\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)} = -\frac{x+y}{1-xy}. \\ &\text{fórmulas trigonométricas} \end{aligned}$$

Seja $k = \frac{s^2}{A}$ (constante). A equação (2.13) pode escrever-se como:

$$x+y - \frac{x+y}{1-xy} = k, \text{ ou seja,}$$

$$x^2y + xy^2 - kxy = -k \quad (2.14)$$

que representa uma **curva elíptica**.

Como $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ e $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ os pontos da curva (2.14) que representam um triângulo de área A e semiperímetro s encontram-se numa região do plano onde $x > 0$, $y > 0$, o que em termos de coordenadas se refere a pontos (x, y) no primeiro quadrante.

- $x = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $y = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$ satisfazem a equação cúbica (2.14) e determinam

$$z = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right);$$

- as soluções desta equação cúbica no 1º quadrante correspondem às tangentes de dois dos ângulos definidos pela circunferência inscrita num triângulo e determinam a tangente do terceiro;
- a circunferência inscrita parametriza, por sua vez, os triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro.

(como observamos na demonstração do Teorema de Herão)

◇ ◇ ◇

A propósito da equação cúbica (2.14) ser uma **curva elíptica**, importa referir o seguinte :

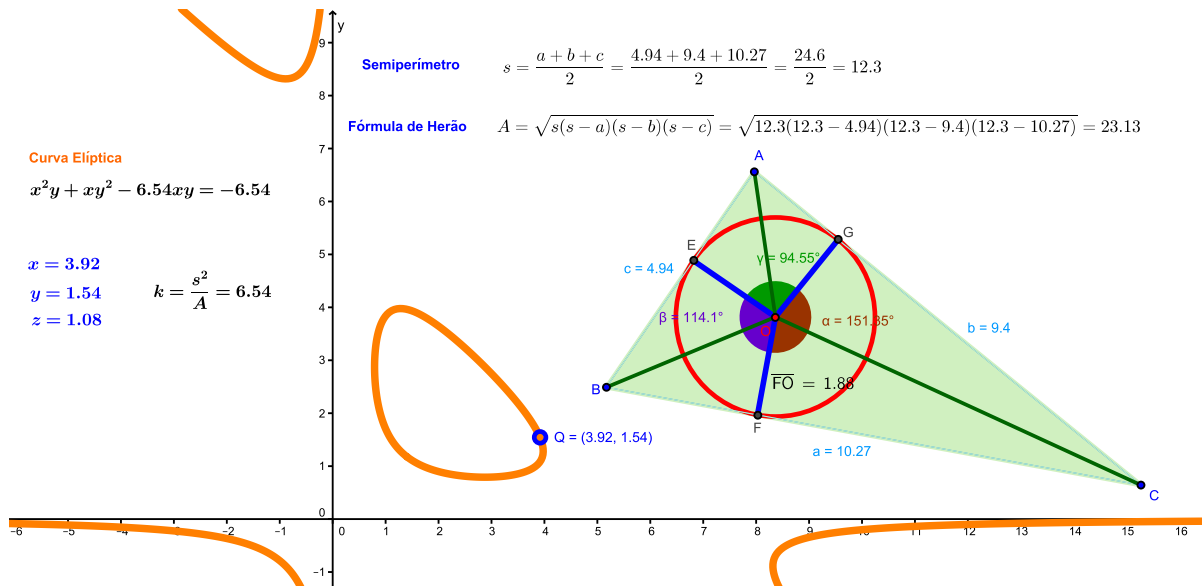
- é definida por uma equação polinomial de 3º grau, de duas variáveis;
- é interseçada por uma linha reta em exatamente 3 pontos;
- as *curvas elípticas* não são elipses, mas surgem no estudo de uma classe específica de funções chamadas *funções elípticas*.

Observação:

- o grau da equação que define uma curva pode ser geometricamente interpretado como o número de pontos em que uma linha reta interseca a curva.

2.3.2.1 Da Geometria para a Álgebra

O triângulo $[ABC]$ determina o ponto Q na curva elíptica $x^2y + xy^2 - 6.21xy = -6.21$.



- Admitindo que procuramos triângulos cuja **circunferência inscrita tem raio 1**, as medidas dos lados do triângulo são, de acordo com os passos efetuados para obter a equação (2.12):

$$a = y + z, b = x + z \text{ e } c = x + y,$$

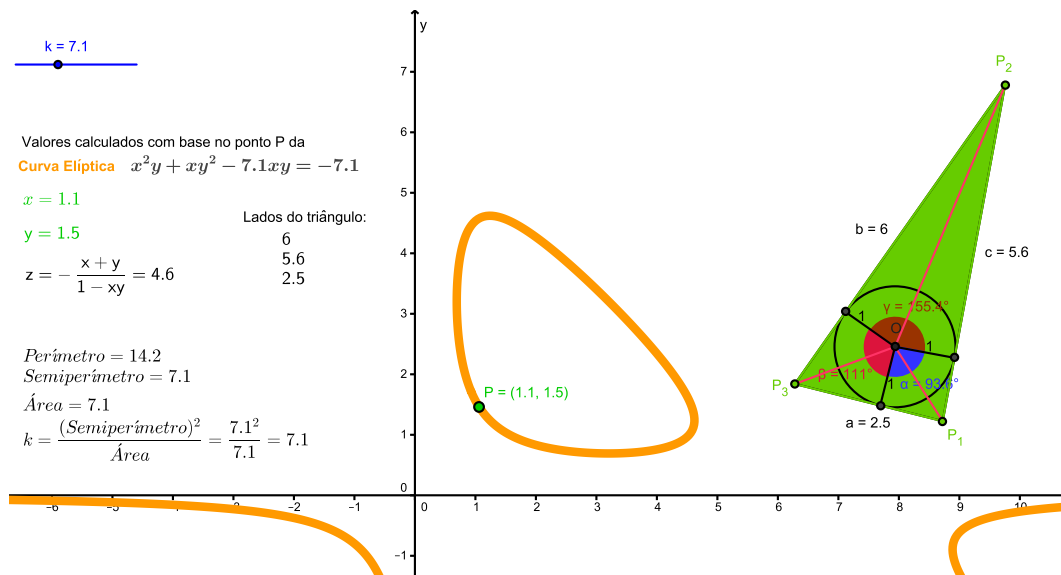
onde,

$$x = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), y = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \text{ e } z = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

2.3.2.2 Da Álgebra para a Geometria

Seja s o semiperímetro de um triângulo $\triangle P_1P_2P_3$ e A a área desse triângulo.

Consideremos a curva elíptica $x^2y + xy^2 - kxy = -k$ (2.14), com $k = \frac{s^2}{A} \in \mathbb{R}^+$ e $x, y, k \in \mathbb{R}^+$.



A curva elíptica $x^2y + xy^2 - kxy = -k$, com $k = \frac{s^2}{A}$ e $x, y, k \in \mathbb{R}^+$, parametriza o conjunto de triângulos com a mesma área A e semiperímetro s .

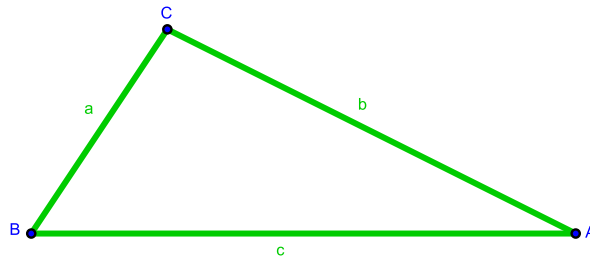
Para cada valor de k encontramos uma infinidade de triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro que não são congruentes.

2.3.3 Triângulos e Funções Cúbicas

2.3.3.1 Da Geometria para a Álgebra

Encontrar uma função cúbica que parametriza triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro.

Consideremos o triângulo $[ABC]$ de lados $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, com semiperímetro s e área A .



De acordo com a [fórmula de Herão](#) temos $A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ e $b = 2s - a - c$, de onde,

$$A^2 = s(s-a)(s-(2s-a-c))(s-c) \quad (2.15)$$

Resolvendo em ordem a a através da [fórmula resolvente](#) vem:

$$a = \frac{2s-c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{A^2}{s(s-c)}} \quad (2.16)$$

Para que o triângulo exista tem de se verificar:

$$\frac{c^2}{4} - \frac{A^2}{s(s-c)} \geq 0 \quad (2.17)$$

que se pode reescrever como:

$$f(c) = -sc^3 + s^2c^2 - 4A^2 \geq 0 \quad (2.18)$$

$$f'(c) = -3sc^2 + 2s^2c$$

$c = \frac{2}{3}s$ é um zero positivo de f' , logo,

f tem um **extremo relativo ou local** em $c = \frac{2}{3}s$.

$$f''(c) = -6sc + 2s^2$$

$$f''\left(\frac{2}{3}s\right) = -6s\left(\frac{2}{3}s\right) + 2s^2 = -2s^2 < 0$$

$c = \frac{2}{3}s$ é ponto de **máximo local** de f .

Temos,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}s\right) &= -s\left(\frac{2}{3}s\right)^3 + s^2\left(\frac{2}{3}s\right)^2 - 4A^2 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 s^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 s^4 - 4A^2 \\ &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] s^4 - 4A^2 = \left[\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\right] s^4 - 4A^2 = \frac{4}{27}s^4 - 4A^2 \end{aligned}$$

Por (2.18) $f(c) \geq 0$, em particular,

$$f\left(\frac{2}{3}s\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{27}s^4 - 4A^2 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 \leq \frac{s^4}{27}$$

Então, para qualquer triângulo com área A e semiperímetro s verifica-se a condição:

$$A^2 \leq \frac{s^4}{27} \quad (2.19)$$

Pelo **Corolário do Teorema de Bolzano**:

se f é contínua em $[a, b] \wedge f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists r \in]a, b[: f(r) = 0$.

Consideremos $f(c) = -sc^3 + s^2c^2 - 4A^2$ como em (2.18);

f é contínua em $[0, s]$ porque é uma **função polinomial**.

Aplicando o **Corolário do Teorema de Bolzano** no intervalo $[0, s]$ temos:

$$f(0) = -4A^2 < 0 \wedge f\left(\frac{2}{3}s\right) > 0 \Rightarrow \exists r_1 \in \left]0, \frac{2}{3}s\right[: f(r_1) = 0 \text{ e}$$

$$f(s) = -s^4 + s^4 - 4A^2 < 0 \wedge f\left(\frac{2}{3}s\right) > 0 \Rightarrow \exists r_2 \in \left]\frac{2}{3}s, s\right[: f(r_2) = 0, \text{ pelo que } r_1 \text{ e } r_2 \text{ são duas}$$

raízes positivas de f .

Como $c = \frac{2}{3}s$ é um máximo local de f , então, $f(c) \geq 0, \forall c \in [r_1, r_2]$.

Assim e por (2.18):

Um triângulo com área A , semiperímetro s e um dos lados com medida c é parametrizado pela

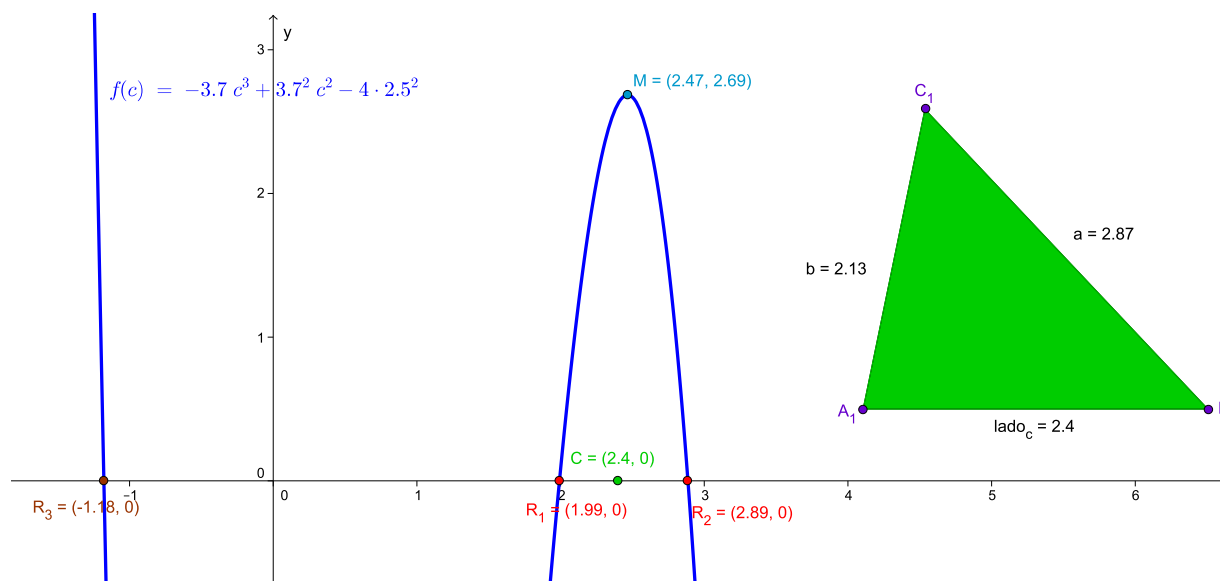
função cúbica:

$$f(c) = -sc^3 + s^2c^2 - 4A^2$$

$\forall c \in [r_1, r_2]$, com $c, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, sendo r_1 e r_2 raízes de f .

Consideremos os parâmetros A , a área, s , o semiperímetro de um triângulo $[A_1B_1C_1]$ e seja c a medida de um dos lados do mesmo. Os parâmetros A e s , juntamente com o lado c permitem determinar a medida dos outros lados, ver (2.16). Assim, os triângulos com área A e semiperímetro s são parametrizados pela função cúbica $f(c) = -sc^3 + s^2c^2 - 4A^2$.

Seja $R_1 = (x_1, 0)$ e $R_2 = (x_2, 0)$, x_1 e x_2 são duas raízes positivas de f . Seja $c = \text{lado}_c$ de $\triangle A_1B_1C_1$ a abscissa do ponto C . Verifica-se que o triângulo $[A_1B_1C_1]$ só fica definido para $\forall c \in [x_1, x_2]$.



2.3.3.2 Da Álgebra para a Geometria

Encontrar triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro a partir de uma função cúbica

Consideremos agora, o conjunto dos triângulos com área A , semiperímetro $s = 1$ e lados a, b, c .

Substituindo $s = 1$ em (2.15) definimos a função g :

$g(a) = A^2 = (1 - c)(1 - a)(1 - (2 - a - c)) = (1 - c)(-1 + c + a(2 - c) - a^2)$, onde c é uma constante.

$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - c = 0 \text{ (impossível porque } s = 1) \vee 2 - c - 2a = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2 - c}{2}$$

g tem um extremo relativo em $a = \frac{2 - c}{2}$.

$$g''(a) = 2c - 2$$

$$g''\left(\frac{2 - c}{2}\right) = 2c - 2 < 0 \text{ (} c < 1 \text{ uma vez que } s = 1)$$

$a = \frac{2 - c}{2}$ é ponto de máximo local.

Temos, $g\left(\frac{2 - c}{2}\right) = \left(\frac{c}{2}\right)^2 (1 - c)$.

Como $g(a) = A^2$, então o valor máximo para A é $\frac{c}{2}\sqrt{1 - c}$, ou seja,

$$A \leq \frac{c}{2}\sqrt{1 - c}$$

Então,

todos os triângulos com área A_0 e semiperímetro $s = 1$ são representados por um ponto (c_0, A_0)

no primeiro quadrante do plano- (c, A) , localizado sobre ou abaixo da curva:

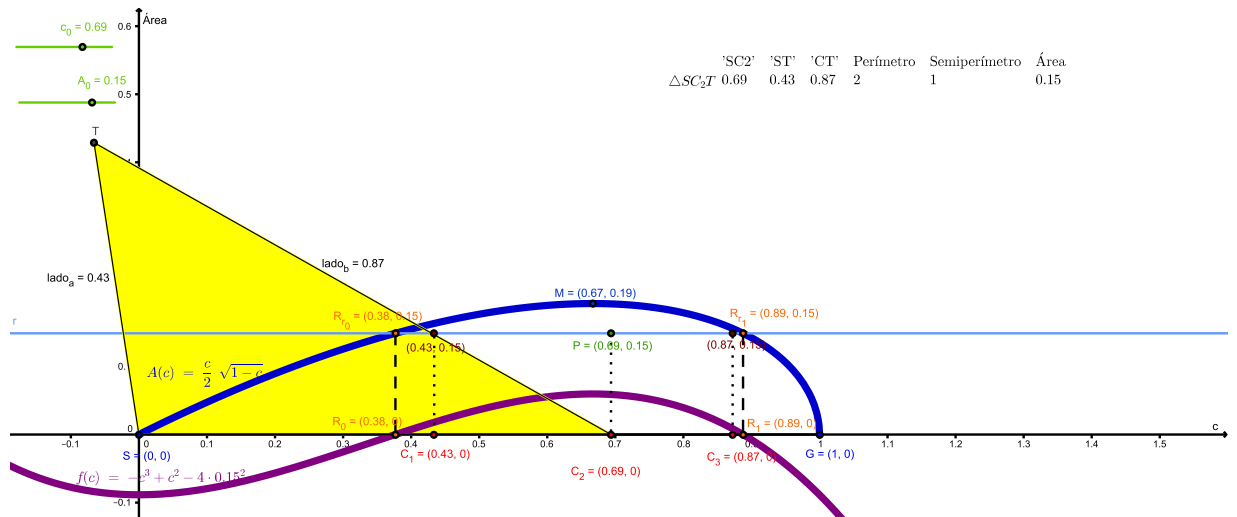
$$A = \frac{c}{2}\sqrt{1 - c} \quad (2.20)$$

Vejamos, agora, a representação geométrica deste facto algébrico.

Seja A_0 a área de um triângulo $\triangle SC_2T$, com semiperímetro $s = 1$ e c_0 a medida de um dos lados. Por (2.18), $f(c) = -c^3 + c^2 - 4A_0^2$. Por (2.20) $A = \frac{c}{2}\sqrt{1-c}$ maximiza a área de $\triangle SC_2T$.

O par (c_0, A_0) , tal que $A_0 \leq \frac{c_0}{2}\sqrt{1-c_0}$, identifica o $\triangle SC_2T$.

A reta r intersesta $A(c)$ em $R_{r_0} = (x_1, A_0)$ e $R_{r_1} = (x_2, A_0)$, x_1 e x_2 são raízes positivas da função cúbica $f(c)$.



2.3.4 Resposta à questão de partida

Um problema com triângulos conduziu a um estudo muito rico pelos conceitos matemáticos que envolve. **Triângulos com a mesma área e o mesmo perímetro não são necessariamente congruentes.** O conjunto de triângulos com área A e semiperímetro s , em que c é a medida de um dos lados, pode ser parametrizado por:

- **curvas elípticas:** $x^2y + xy^2 - kxy = -k$, com $k = \frac{s^2}{A}$ e $x, y, k \in \mathbb{R}^+$;
- **funções cúbicas:** $f(c) = -sc^3 + s^2c^2 - 4A^2$, $\forall c \in [r_1, r_2]$, com $c, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, sendo r_1 e r_2 raízes de f .

2.4 Apreciação geral

Os dois seminários incidiram sobre problemas matemáticos cuja resolução envolve a aplicação de vários conceitos lecionados no 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Estes problemas matemáticos evidenciam a ligação intrínseca entre a Geometria e a Álgebra e têm resoluções que promovem o desenvolvimento do pensamento geométrico e do pensamento algébrico que, como já referimos na Capítulo I, são fundamentais para o sucesso na aprendizagem de Geometria e do saber resolver problemas geométricos.

Os problemas de *Sangaku*, com triângulos, círculos, circunferências, entre outros objetos matemáticos, numa interligação geométrica enaltecadora da Geometria, são "peças" de arte que motivam os alunos para a aprendizagem, promovem a criatividade e o gosto pela Matemática.

Um problema de congruência de triângulos foi o ponto de partida para uma incursão por vários conceitos algébricos e geométricos. Equações, curvas elípticas, funções cúbicas, derivadas, extremos, continuidade, concavidade, surgem para dar resposta a uma questão, aparentemente simples e que assim nos conduz pelo mundo fascinante da demonstração matemática.

É de salientar que a construção geométrica de problemas num ambiente de Geometria Dinâmica foi fundamental para elaboração destes seminários. As ferramentas de GM favorecem o desenvolvimento da intuição geométrica, da capacidade de visualização e de retenção dos conhecimentos adquiridos, e constituem assim um excelente suporte ao ensino da Matemática.

Capítulo 3

Prática de Ensino Supervisionada

3.1 Caracterização

A *Prática de Ensino Supervisionada* (PES) decorreu de 2 de setembro de 2013 a 30 de junho de 2014 na *Escola Secundária Campos Melo* - ESCM, na Covilhã.

A PES visa completar o que estabelece o Despacho nº38/R/2013 da UBI e o Regulamento Específico do Estágio Pedagógico do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior, para o ano letivo de 2013/2014, no que respeita às especificidades do 2º ciclo em Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, relativamente à *Prática de Ensino Supervisionada*, genericamente designada por *Estágio* ou *Estágio Pedagógico* (EP).

A PES teve como orientadores:

Orientadora Cooperante: Prof^a Maria Isaura Fazendeiro Mendes, docente na *Escola Secundária Campos Melo* e Coordenadora do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais;

Orientadora Científica: Prof^a Doutora Sandra Margarida Pinho da Cruz Bento, docente na UBI.

O Núcleo de Estágio foi constituído por:

Maria Cristina Fernandes Martins,

Manuel Teodoro Agostinho Feijão

e por mim, Regina Maria da Silva Tomé Guimarães.

3.2 Início do Estágio Pedagógico

O EP teve início no dia 2 de setembro de 2014. O Núcleo de Estágio reuniu com a Orientadora Cooperante que indicou quais as turmas que lhe estavam atribuídas:

Ano	Turma	Programa	Número de alunos
9º	B	NPMEB [30]	24
12º	A	Matemática A [13]	25
10º	G	Curso Técnico de Organização de Eventos - Currículo adaptado	20

Nesta primeira reunião falámos também de:

- Critérios de avaliação.
- Plano Anual de Atividades.
- Programas a lecionar em cada ano.
- Reuniões a realizar para a planificação anual e de curto prazo.
- Reuniões a realizar: Geral, de Grupo e de Departamento.
- Horário para acompanhamento do EP.

3.3 Reuniões

Durante o ano letivo estive presente nas reuniões de Grupo (três), de Departamento (sete) e algumas de Conselho de Turma (nas de início do ano letivo e no final do 2º período, onde foi discutida a avaliação dos alunos nas várias disciplinas). Mensalmente recebi as informações do Conselho Pedagógico. Estas reuniões permitiram um abrir de horizontes sobre o meio escolar, em termos de planeamento, gestão de conflitos em sala de aula, dos processos de avaliação, da interação com as outras disciplinas e da interação com os pais, entre outros assuntos e orientações.

3.4 Prática de Ensino Supervisionada

Durante o ano letivo lecionei nove aulas, cinco no 9ºB, duas no 12º A e uma no 10ºG, como se descreve a seguir. A escolha dos temas para as aulas lecionadas, no 9ºB e no 12ºA, foi estabelecida pela Orientadora Científica, cujo objetivo foi a aproximação dos conteúdos a lecionar com os temas dos Seminários de Investigação Matemática I e II, do presente ano letivo (Capítulo 2).

A Orientadora Cooperante esteve presente em todas as aulas. A Orientadora Científica assistiu às aulas 2, 5, 6 e 7.

Aula 1

Data: 14.11.2013

Turma: 9º B

Unidade Didática: II - Funções

Tópico Central: Funções do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$

Sumário: Funções do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$ contexto geométrico.

Aula 2

Data: 18.11.2013

Turma: 9º B

Unidade Didática: II - Funções

Tópico Central: Funções do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$

Sumário: Estudo das funções $y = ax^2$, com $a \neq 0$, e análise do seu gráfico.

Aula 3

Data: 11.12.2013

Turma: 9º B

Unidade Didática: II - Equações

Tópico Central: Equações (completas) do 2º grau a uma incógnita.

Sumário: Início do estudo de equações (completas) do 2º grau a uma incógnita. Resolução de exercícios de aplicação.

Aula 4

Data: 20.02.2014

Turma: 9º B

Unidade Didática: IV - Circunferência

Tópico Central: Bissetriz de um ângulo.

Sumário: Bissetriz de um ângulo. Resolução de exercícios de aplicação.

Aula 5

Data: 24.02.2014

Turma: 9º B

Unidade Didática: IV - Circunferência

Tópico Central: Circunferência circunscrita a um triângulo. Circunferência inscrita num triângulo.

Sumário: Circunferência circunscrita a um triângulo. Circuncentro. Circunferência inscrita num triângulo. Incentro. Resolução de exercícios de aplicação.

Aula 6

Data: 31.03.2014

Turma: 12º A

Unidade Didática: IV - Introdução ao cálculo diferencial II

Tópico Central: Segunda derivada e aceleração. Segunda derivada e concavidade. Pontos de inflexão.

Sumário: Função derivada de segunda ordem ou segunda derivada. Interpretação física. Aceleração. Interpretação geométrica. Concavidade. Pontos de inflexão.

Aula 7

Data: 15.05.2014

Turma: 12º A

Unidade Didática: III - Trigonometria e Números Complexos

Tópico Central: Representação geométrica e vetorial dos números complexos. Adição e multiplicação de números complexos.

Sumário: Representação geométrica e vetorial dos números complexos. Coordenadas cartesianas. Adição e multiplicação de números complexos. Interpretação vetorial.

Aula 8

Data: 21.05.2014

Turma: 9º B

Unidade Didática: IV - Trigonometria no Triângulo Retângulo

Tópico Central: Relações entre razões trigonométricas.

Sumário: Relações entre o seno, cosseno e tangente da amplitude de um ângulo agudo. Relação fundamental da Trigonometria. Resolução de exercícios de aplicação.

Aula 9

Data: 30.05.2014

Turma: 10º G

Curso: Técnico de Organização de Eventos

Módulo: Programação linear

Tópico Central: Problemas de otimização

Sumário: Resolução de um problema de otimização.

3.5 Observações gerais sobre a PES

O trabalho de planificação de cada aula foi acompanhado pela Orientadora Cooperante que orientou para a melhor forma de apresentar e estruturar os conteúdos a lecionar, corrigindo os planos de aula, sempre que necessário, até estarem prontos para serem aplicados.

A Orientadora Científica assistiu às aulas 2, 5, 6 e 7, e validou os planos relativos a estas aulas. Os restantes planos de aula foram também enviados para a mesma.

Todas as sugestões dadas, quer pela Orientadora Cooperante quer pela Orientadora Científica, foram tidas em conta e constituíram uma mais-valia na minha aprendizagem em termos de planificação.

A experiência da prática letiva foi de um valor inestimável para o progresso na minha aprendizagem como futura professora de Matemática. A minha maior expectativa era a nível da gestão da sala de aula, mas, tomando as atitudes certas no momento oportuno, a gestão da turma acaba por decorrer de uma forma natural. A maior dificuldade tem a ver com a gestão do tempo, pois houve aulas em que o plano de aula não foi cumprido na totalidade.

Criei diversos materiais para as aulas utilizando o software de Geometria Dinâmica Geogebra, o que facilitou a visualização dos conceitos matemáticos em estudo, fomentando o desenvolvimento do pensamento geométrico. Sempre que possível fiz um enquadramento histórico dos temas apresentados. Quando apropriado, falei das relações entre os conceitos matemáticos em estudo e os conteúdos estudados noutras disciplinas.

O que de mais importante fica desta experiência: o plano é fundamental, ainda que por vezes seja necessário tomar algumas opções estratégicas durante a aula; há que dar atenção a todos os alunos na turma, verificando se estão a acompanhar os conteúdos apresentados e estimulando a sua participação na resolução de exercícios no quadro; é fundamental encontrar formas de motivar os alunos para a aprendizagem, pequenos vídeos sobre o tema em questão e a utilização de materiais de Geometria Dinâmica são boas escolhas. A nível dos conteúdos há que ter um domínio sobre o currículo dos vários anos letivos, para uma maior segurança e determinação na apresentação dos mesmos e no esclarecimento de dúvidas que podem surgir. Há que ter em atenção os documentos orientadores: programas, critérios de avaliação, metas curriculares, exames, para que o ensino-aprendizagem vá ao encontro do que é expectável pelo Ministério da Educação, em cada ano letivo. É importante o confronto entre vários manuais disponíveis para o ano letivo a lecionar, tendo em conta que nem sempre os manuais estão em sintonia com a linguagem utilizada nos documentos oficiais do programa.

Durante o ano letivo assisti a praticamente todas as aulas das três turmas, 9ºB, 10ºG e 12ºA. Resolvi todas as fichas de trabalho e testes que foram dados aos alunos. Esclareci dúvidas aos alunos, em sala de aula, sempre que solicitado pela Orientadora Cooperante. Estabeleceu-se uma boa empatia com todos os alunos.

Colaborei na correção dos testes diagnósticos do 9ºB. Vigiei o primeiro Teste Intermédio de 12º ano, na turma 12ºA, no dia 29.11.2013.

O Núcleo de Estágio esteve empenhado nas seguintes atividades:

- elaboração da planificação anual do 9º ano;
- elaboração da planificação anual do 12º ano;
- participação na planificação anual do 10ºG;
- participação na planificação de curto prazo do 9º, 12º e 10ºG;
- participação na elaboração das matrizes dos testes, dos testes e dos respectivos critérios de avaliação;
- elaboração da matriz do teste do 12ºano, de 27 de março, do respetivo teste, dos critérios de avaliação e da correção.

O facto de acompanhar três turmas, duas em anos de exames nacionais e uma do ensino profissional, proporcionou uma abrangência do "saber fazer" e "saber estar" em sala de aula. Cada turma tem as suas especificidades e em cada uma delas houve que aplicar as metodologias que permitissem uma melhor eficácia do ensino-aprendizagem. O acompanhamento, fora e dentro da sala de aula, da Orientadora Cooperante foi extremamente enriquecedor para a minha formação profissional.

3.6 Planificações

Planificar é traçar um caminho de forma a garantir o rumo da viagem em que embarcam professor e alunos em cada aula. Se um marinheiro não deixa a terra sem um mapa, um professor tem também de ter o seu mapa para agarrar o leme da aula com segurança e poder alterar sabiamente a rota se assim for necessário. A tripulação, os nossos alunos, esperam do seu comandante sabedoria, segurança, firmeza, flexibilidade e um bom plano é de facto imprescindível para satisfazer estes requisitos.

Regina Guimarães



Apresento de seguida seis planificações, selecionadas de entre as aulas que lecionei, por serem as que estão mais relacionadas com os conteúdos matemáticos abordados nos Seminários I e II, e com o tema do presente Relatório de Estágio.

Equações, ângulos, bissetriz, triângulos, circunferência, incentro, circuncentro, relações entre razões trigonométricas, relação fundamental da trigonometria, derivadas, extremos, concavidade, pontos de inflexão, estudo de funções cúbicas, coordenadas cartesianas, representação geométrica e vetorial de números complexos, são conceitos matemáticos que foram apresentados nas aulas cujas planificações aqui incluo.

Álgebra e Geometria, lado a lado, tornam a Matemática um caminho de aprendizagem e descoberta. Por trás da Geometria há um mundo algébrico de conceitos que nos revela números, equações, funções que até um dia eram só figuras. Com a Álgebra ganha-se o suporte que alicerça o que a Geometria confia aos olhos de quem a vê. É inegável a simbiose entre estas duas áreas tão importantes do saber matemático que se entrelaçam e complementam.

Indo ao encontro do que foi apresentado no Capítulo 1, o professor deve procurar incluir nas suas planificações: exercícios ou tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico e do pensamento geométrico. Tendo em conta a abrangência da Geometria, quer em termos dos conceitos que lhe são próprios, quer como suporte da representação geométrica de conceitos algébricos, é muito importante avaliar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. A aplicação da **Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico dos van Hiele** é uma forma de fazer esta avaliação. Tomando atenção a desajustes nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, o professor pode implementar ações adequadas e que permitam aos alunos em causa atingir o nível requerido para as situações de aprendizagem do momento. Deste modo garantimos maiores possibilidades de sucesso no ensino-aprendizagem do currículo de Geometria em cada ano letivo.

3.6.1 Planificação Aula 3 ◊ Equações - 9º ano

Unidade Didática II - Equações

Tópico Central - Equações (completas) do 2º grau a uma incógnita

Aulas nº: 57 e 58
Duração: 90 min.

Ano/Turma: 9ºB
Data: 11/12/2013

Sumário

Correção do TPC. Início do estudo de equações (completas) do 2º grau a uma incógnita.
Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Resolver equações do 2º grau incompletas utilizando: a noção de raiz quadrada, a decomposição em fatores e a lei do anulamento do produto.
- Recordar os casos notáveis da multiplicação de binómios.

Materiais e Recursos

- Manual adotado: Novo Espaço Parte 1 - Matemática A 9º ano [8]
- Quadro
- Marcador
- Quadro interativo
- Computador para o professor
- Videoprojetor
- Apresentação para projetar (*Apresentação_Aula_3.pdf*)

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Identificar se uma equação do 2º grau é completa ou incompleta.
- Representar uma equação na forma canónica.
- Resolver equações completas do 2º grau utilizando a noção de raiz quadrada, a decomposição em fatores e a lei do anulamento do produto.

Competências transversais

- Desenvolver nos alunos a linguagem e pensamento algébricos.
- Compreender o conceito de função e ser capaz de o usar em diversas situações.
- Desenvolver a capacidade de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a procedimentos algébricos.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

O professor utiliza o ficheiro *Apresentação_Aula_3.pdf* para projetar informação para os alunos.

Os exercícios foram retirados do manual adotado [8, p. 71,72,73].

Os exercícios resolvidos na aula serão corrigidos no quadro.

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

Quadro

Aulas nº 57 e 58

Data:11/12/2013

Sumário:

Correcção do TPC. Início do estudo de equações (completas) do 2º grau a uma incógnita.

Resolução de exercícios de aplicação.

O professor inicia a aula com a correção do TPC pelos alunos (*exercício 8. da ficha Equações do 2º grau - atividades diagnósticas*).

Quadro

Resolução do exercício 8 da ficha de trabalho:

8.1

$$5^2 = x^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = x^2 + 16 \Leftrightarrow 25 - 16 = x^2 \Leftrightarrow 9 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3, \text{ como } x > 0, x = 3.$$

8.2

$$(2 \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + x^2 \Leftrightarrow 4 \times 5 = 3 + x^2 \Leftrightarrow 20 - 3 = x^2 \Leftrightarrow 17 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 17 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{17}, \text{ como } x > 0, x = \sqrt{17}.$$

8.3

$$5^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow 25 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}, \text{ como } x > 0, x = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

O professor faz uma breve abordagem histórica referindo que:

A resolução de equações tem a sua origem associada à necessidade de resolver problemas. Na Grécia antiga recorria-se a técnicas geométricas para resolver equações do 2º grau.

Videoprojetor

- Dá-se o nome de **equação do 2º grau** a toda a equação que se pode representar na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ forma canónica, em que } a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ com } a \neq 0.$$

- Uma equação é do 2º grau quando o termo de maior grau é do 2º grau (após reduzir os termos semelhantes).

EXEMPLO: Na equação $4x^2 + 12x + 9 = 0$, $4x^2$ é o termo de 2º grau, $12x$ é o termo de grau 1 e 9 é o termo de grau zero. Esta equação de 2º grau diz-se **completa**, tem termo de grau 2, grau 1 e grau zero.

- Uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, diz-se **completa** se $b \neq 0$ e $c \neq 0$.
- Uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, diz-se **incompleta** se $b = 0$ ou $c = 0$.

Videoprojetor

Representação de equações **incompletas** do 2º grau:

- se $a \neq 0$; $b = 0$ e $c = 0$

$$ax^2 = 0$$

- se $a \neq 0$; $b = 0$ e $c \neq 0$

$$ax^2 + c = 0$$

- se $a \neq 0$; $b \neq 0$ e $c = 0$

$$ax^2 + bx = 0$$

O professor propõe a resolução do seguinte exercício do manual adotado [8, p. 71].

1. Representa cada uma das seguintes equações na forma canônica e indica se é completa ou incompleta.

1.1 $x(2x + 3) = 3x + 1$

1.2 $\frac{x(x + 1)}{4} = 3$

1.3 $\frac{x(x - 5)}{3} = 2x$

Quadro

Resolução:

1.1

$$x(2x + 3) = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0$$

Equação do 2º grau incompleta, $a \neq 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$.

1.2

$$\frac{x(x + 1)}{4} = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

Equação do 2º grau completa, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

1.3

$$\frac{x(x - 5)}{3} = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 6x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x = 0$$

Equação do 2º grau incompleta, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$.

[8, p. 71]

Quadro

Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a, c \neq 0$

Exemplo 1

Resolver a equação:

$$3x^2 - 27 = 0$$

Resolução:

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 3\}$$

Exemplo 2

A medida da área de um retângulo é 50. Qual é a medida do perímetro desse retângulo, sabendo que a medida de um dos lados é o dobro da medida do outro lado?

Resolução:

Se $x =$ largura do retângulo,

então $2x =$ comprimento do retângulo.

Sabe-se que $x \times 2x = 50$, ou seja, $2x^2 = 50$.

Resolvendo a equação tem-se:

$$2x^2 = 50 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = \pm 5 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5, \text{ como } x > 0 \text{ então, } x = 5.$$

A largura do retângulo é 5cm e o comprimento é $2 \times 5 = 10$ cm.

Resposta: O perímetro do retângulo é $2 \times 5 + 2 \times 10 = 30$ cm.

Videoprojetor

Uma equação do tipo $ax^2 + c = 0$, como $a, c \neq 0$ pode ter:

- duas soluções simétricas;
 - uma única solução (zero), se for do tipo $x^2 = 0$;
 - nenhuma solução se a e c tiverem o mesmo sinal.
-

[8, p. 72]

Quadro

Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a, b \neq 0$

Exemplo 3

Resolva a equação $5x^2 - 2x = 0$

Resolução:

$5x^2 - 2x = 0$ vamos fatorizar (transformar num produto de fatores) o primeiro membro da equação

$$\Leftrightarrow x(5x - 2) = 0 \text{ pela Lei do anulamento do produto}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 5x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left\{0, \frac{2}{5}\right\}$$

Exemplo 4

Resolve a equação $(x + 1)^2 - 16 = 0$.

Resolução:

Por decomposição em fatores: $(x + 1)^2 - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4^2 = 0 \text{ pelos casos notáveis de multiplicação de binómios}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 + 4)(x + 1 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \text{ pela Lei do anulamento do produto}$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{-5, 3\}$$

Utilizando a noção de raiz quadrada:

$$(x + 1)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x + 1) = \pm\sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \pm 4$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = -4 \vee x + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -4 - 1 \vee x = 4 - 1$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{-5, 3\}$$

É de notar que a resolução utilizando a noção de raiz quadrada é mais simples e mais rápida.

Quadro

Uma equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a, b \neq 0$, tem duas soluções sendo uma delas o zero.

Quadro

Resolve os exercícios 2.1, 2.2, 2.3 do manual p. 72

2. Considera a equação $(x + 3)^2 = 25$.

Copia para o teu caderno e completa as seguintes resoluções:

2.1

$$(x + 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 - \dots = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3 + \dots)(x + 3 - \dots) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \dots \vee x = \dots$$

2.2

$$(x + 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x + 3) = \sqrt{\dots} \vee (x + 3) = -\sqrt{\dots}$$

$$\Leftrightarrow (x + 3) = \dots \vee (x + 3) = -\dots$$

$$\Leftrightarrow x = \dots \vee x = \dots$$

Resolução:

2.1

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 - 5^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3+5)(x+3-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 2 & \\ \text{C.S.} &= \{-8, 2\} \end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow (x+3) = \sqrt{25} \vee (x+3) = -\sqrt{25} & \\ \Leftrightarrow (x+3) = 5 \vee (x+3) = -5 & \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -8 & \\ \text{C.S.} &= \{-8, 2\} \end{aligned}$$

Obs: A mesma equação e duas formas diferentes de resolução, 2.1 por decomposição em fatores e 2.2 utilizando a noção de raiz quadrada.

Resolve os exercícios

4.2, 4.3, 4.5, 4.7 do manual p. 73

4. Resolve, se possível, as equações incompletas do 2º grau.

4.2 $c^2 = 13c$

4.3 $-a^2 + 36 = 0$

4.5 $3x^2 + 7 = 0$

4.7 $9 - (x+2)^2 = 0$

Resolução:

4.2

$$\begin{aligned} c^2 = 13c &\Leftrightarrow c^2 - 13c = 0 \Leftrightarrow c(c-13) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \vee c - 13 = 0 \Leftrightarrow c = 0 \vee c = 13 \\ \text{C.S.} &= \{0, 13\} \end{aligned}$$

4.3

$$\begin{aligned} -a^2 + 36 = 0 &\Leftrightarrow -a^2 = -36 \Leftrightarrow a^2 = 36 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{36} \Leftrightarrow a = \pm 6 \Leftrightarrow a = -6 \vee a = 6 \\ \text{C.S.} &= \{-6, 6\} \end{aligned}$$

4.5

$$\begin{aligned} 3x^2 + 7 = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 = -7 \quad x^2 = \frac{-7}{3} \text{ eq. impossível em } \mathbb{R}. \\ \text{C.S.} &= \{\} \end{aligned}$$

4.7

$$\begin{aligned} 9 - (x+2)^2 = 0 &\Leftrightarrow -(x+2)^2 = -9 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow x+2 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x+2 = \pm 3 \Leftrightarrow x+2 = -3 \vee x+2 = 3 \\ \Leftrightarrow x = -3 - 2 \vee x = 3 - 2 &\Leftrightarrow x = -5 \vee x = 1 \\ \text{C.S.} &= \{-5, 1\} \end{aligned}$$

Resolve os exercícios

6.1, 6.3 do manual p. 73

6. Resolva as equações:

6.1. $(x - 3)^2 + 3 = 3(7 - 2x)$

6.3. $(2x + 3)(2x - 3) = 16$

Resolução:

6.1.

$$(x - 3)^2 + 3 = 3(7 - 2x) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 3 = 21 - 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 3 - 21 + 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 12 - 21 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

$$C.S. = \{-3, 3\}$$

6.3.

$$(2x + 3)(2x - 3) = 16 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow 4x^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow 4x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \vee x = \frac{5}{2}$$

$$C.S. = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição do tema.
- Colaboração com o professor e com os colegas na resolução dos exercícios propostos.
- Comportamento na sala de aula.

Referências

[7] [8] [26] [30]

3.6.2 Planificação Aula 4 ◊ Circunferência - 9ºano

Unidade Didática IV - Circunferência

Tópico Central - Bissetriz de um ângulo

Aula nº: 100
Duração: 45 min.

Ano/Turma: 9ºB
Data: 20/02/2014

Sumário

Bissetriz de um ângulo.
Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Noção de *distância de um ponto a uma reta*.

Materiais e Recursos

- Manual adotado: Novo Espaço Parte 2 - Matemática A 9º ano [9]
- Quadro
- Marcadores
- Quadro interativo
- Computador para o professor
- Videoprojetor
- Geogebra
- *Applets Geogebra: Aula4_dist_pont_reta.html, Aula4_bissetriz_1.html, Aula4_Ex31.html*

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Traçar a *bissetriz* de um ângulo.

Competências transversais

- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar.
- Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano.
- Desenvolver a capacidade de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

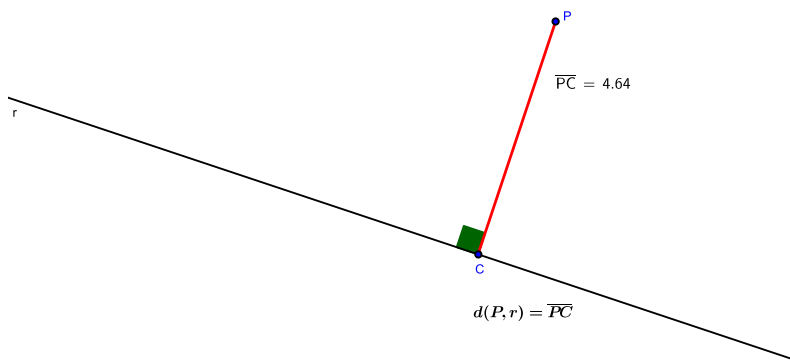
Aula nº 100 Data: 20/02/2014

Sumário:
Bissetriz de um ângulo.
Resolução de exercícios de aplicação.

O professor pergunta aos alunos o que é a *distância de um ponto a uma reta* e recorda o conceito.

Videoprojetor

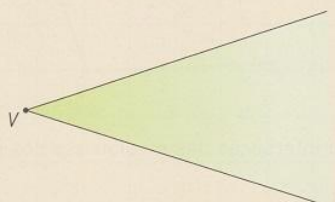
Distância de um ponto a uma reta
é o comprimento do segmento de reta perpendicular do ponto para a reta.



O professor propõe a resolução da seguinte tarefa.

Tarefa 8 - Exercício 1 [9, p. 26]

1. Na figura está representado um ângulo cujos lados são duas semirretas com origem no ponto V .



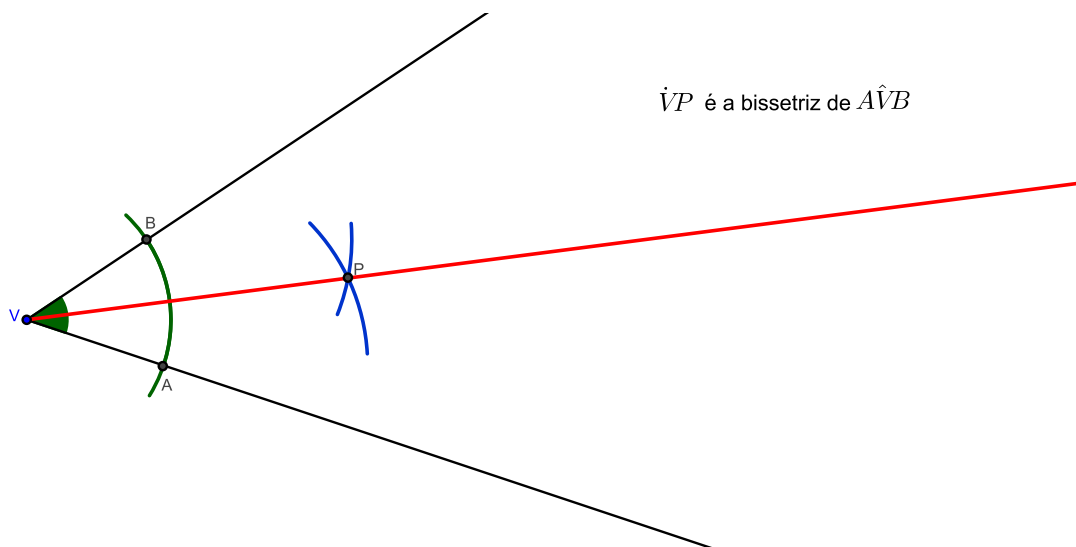
Reproduz a figura no teu caderno.

- 1.1. Traça uma circunferência de centro V . Designa por A e B os pontos de interseção dessa circunferência com os lados do ângulo.
- 1.2. Determina um ponto P , diferente de V , que pertença ao ângulo e que esteja a igual distância de A e de B .
- 1.3. Traça a semirreta de origem em V e que passa em P . Acabaste de traçar a bissetriz do ângulo dado.

O professor acompanha a resolução através do [aplet Aula4_bissetriz_1.html](#).

Resolução:

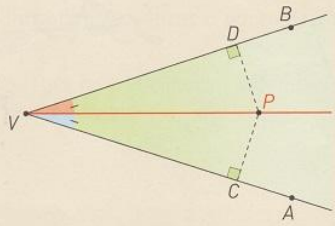
[Videoprojetor](#)



Bissetriz de um ângulo é a semirreta que o divide em dois ângulos congruentes, ou seja, é o lugar geométrico dos pontos do ângulo que estão à mesma distância dos seus lados.

O professor propõe a resolução da seguinte tarefa. **Tarefa 8 - Exercício 2** [9, p. 26]

2. Na figura está representado o ângulo AVB , a bissetriz desse ângulo e um ponto P da bissetriz.



2.1. Justifica que os triângulos VCP e VPD são congruentes.

2.2. Que relação existe entre as distâncias do ponto P a cada um dos lados do ângulo?

Resolução:

2.1

Os triângulos $[VCP]$ e $[VPD]$ são congruentes porque têm dois ângulos congruentes $\angle VCP = \angle VDP$ e $\angle CVP = \angle PVD$, e o lado $[VP]$ é comum.

2.2

Dado que os triângulos $[VCP]$ e $[VPD]$ são congruentes, os comprimentos dos lados $[CP]$ e $[DP]$ são iguais; logo, as distâncias do ponto P a cada um dos lados do ângulo são iguais.

O professor propõe a resolução do seguinte exercício do manual adotado, [9, p. 28].

Exercício 31

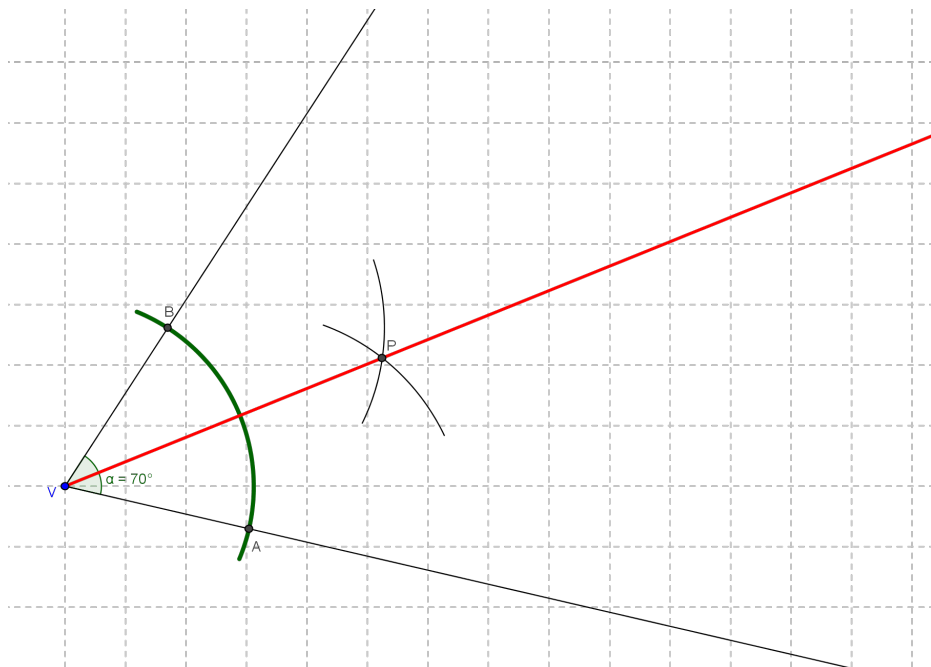
Constrói um ângulo com 70° de amplitude e, com régua e compasso, traça a bissetriz desse ângulo.

O professor mostra o *aplet* *Aula4_Ex31.html* explicando os vários passos da resolução do exercício.

Videoprojetor

Resolução:

31.



Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição do tema.
- Colaboração com o professor e com os colegas na resolução dos exercícios propostos.
- Comportamento na sala de aula.
- Controlo do trabalho de casa na aula seguinte.

Referências

[9] [30]

3.6.3 Planificação Aula 5 ◊ Circunferência - 9º ano

Unidade Didática IV - Circunferência

Tópico Central - Circunferência circunscrita a um triângulo. Circunferência inscrita num triângulo.

Aulas nº: 101 e 102
Duração: 90 min.

Ano/Turma: 9ºB
Data: 24/02/2014

Sumário

Circunferência circunscrita a um triângulo. Circuncentro.
Circunferência inscrita num triângulo. Incentro.
Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Construção e identificação dos lugares geométricos: *circunferência, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento de reta.*

Materiais e Recursos

- Manual adotado: Novo Espaço Parte 2 - Matemática A 9º ano [9]
- Quadro, marcadores, quadro interativo, computador para o professor, videoprojetor,
- Geogebra e Applets Geogebra: *Aula5_mediatrix.html, Aula5_Circunferencia_Circunscrita.html, Aula5_Ex30.html, Aula5_Circunferencia_Inscrita.html, Aula5_Ex33.html*
- Ficha de trabalho: *Ficha_Trabalho_Circunferencia_Triangulo.pdf*

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Desenhar a *circunferência circunscrita* a um triângulo.
- Identificar o *circuncentro* como o ponto de interseção das *mediatrizes* dos lados de um triângulo.
- Desenhar a *circunferência inscrita* num triângulo.
- Identificar o *incentro* como o ponto de interseção das *bissetrizes* dos ângulos internos de um triângulo.

Competências transversais

- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar.
- Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano.
- Desenvolver a capacidade de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

Videoprojetor

Aulas nº: 101 e 102

Data: 24/02/2014

Sumário:

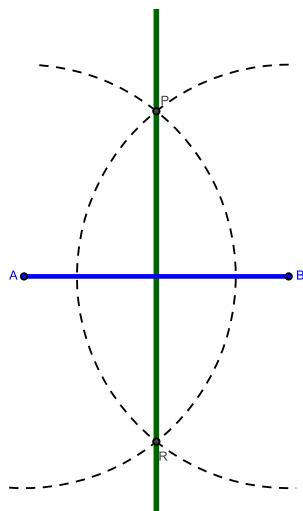
Circunferência circunscrita a um triângulo. Circuncentro.

Circunferência inscrita num triângulo. Incentro.

Resolução de exercícios de aplicação.

O professor pergunta aos alunos como se desenha a *mediatriz de um segmento de reta* e recorda o conceito.

Videoprojetor



A reta r é Mediatriz de $[AB]$.

Mediatriz de um segmento de reta AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de A e de B .

O professor propõe a resolução da Tarefa 1 da ficha de trabalho "Circunferências e Triângulos".

Tarefa 1:

1.1 Desenha um triângulo $[ABC]$.

1.2 Traça as mediatrizes dos seus três lados. Elas interseitam-se num ponto O , marca esse ponto.

1.3 Desenha a circunferência de centro em O e que passa por A .

1.4 Observa que esta circunferência passa pelos três vértices do triângulo. Explica porquê.

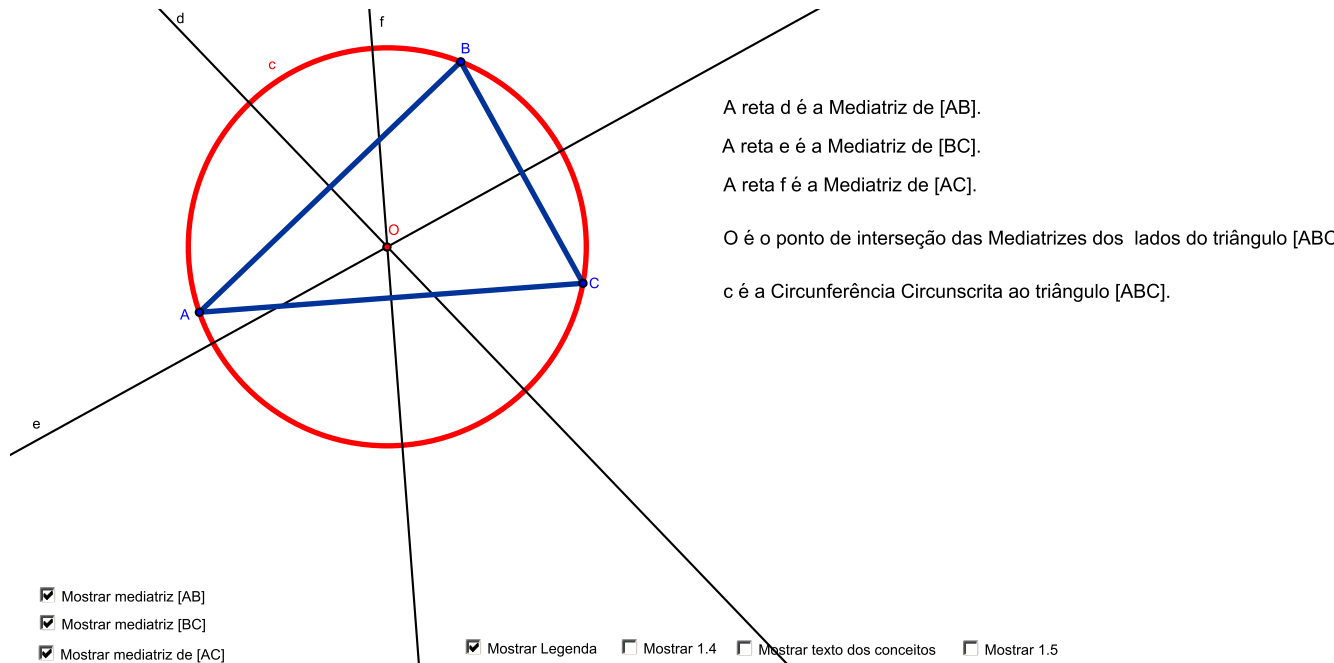
1.5 Se tivesses traçado somente duas mediatrizes, terias conseguido desenhar a circunferência anterior?

Explica a tua resposta.

Resolução:

O professor mostra o *applet Aula5_Circunferencia_Circunscrita.html* explicando os vários passos da resolução da tarefa.

Videoprojetor



O professor escreve a resolução da alínea 1.4.

Quadro

1.4 A circunferência passa pelos três vértices do triângulo [ABC] porque o centro O é o ponto de interseção das mediatrizes dos três lados do triângulo (O é equidistante aos pontos A, B, C, por definição de Mediatriz).

O professor apresenta os seguintes conceitos.

Videoprojetor

A circunferência que passa pelos três vértices de um triângulo diz-se **Circunferência Circunscrita ao triângulo e o seu centro é o **Circuncentro** do triângulo.**

O professor escreve a resolução da alínea 1.5 e utiliza o *aplet Aula5_Circunferencia_Circunscrita.html* para mostrar, através da construção, que para definir o centro da circunferência circunscrita basta traçar as mediatrizes de dois lados do triângulo.

Quadro

1.5 Sim. Basta traçar as mediatrizes de dois lados do triângulo $[ABC]$ porque as mediatrizes dos três lados de um triângulo interseccionam-se no mesmo ponto chamado **circuncentro** do triângulo.

O professor propõe a resolução do seguinte exercício [9, p. 25].

Exercício 30:

Considera o triângulo $[ABC]$ tal que:

- $\overline{AB} = 6\text{cm}$
- $\angle BAC = 40^\circ$
- $\angle CBA = 70^\circ$

30.1 Constrói o triângulo $[ABC]$.

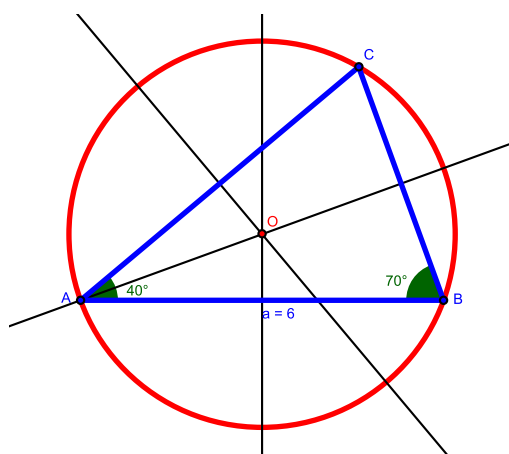
30.2 Constrói a circunferência circunscrita ao triângulo.

30.3 Determina a medida da amplitude do arco AB da circunferência circunscrita ao triângulo.

Resolução:

O professor mostra o *aplet Aula5_Ex30.html* explicando os vários passos da resolução do exercício.

Videoprojetor



O professor escreve a resolução da alínea 30.3.

30.3 $\angle ACB = 180^\circ - (40^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, logo, $\widehat{AB} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$

O professor propõe a resolução da Tarefa 2 da ficha de trabalho "Circunferências e Triângulos".

Tarefa 2:

2.1 Desenha um triângulo $[ABC]$.

2.2 Traça as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$. Elas interseitam-se num ponto O , marca esse ponto.

2.3 Desenha a circunferência que é tangente a um dos lados do triângulo e cujo centro é o ponto O .

2.4 Esta circunferência é tangente aos três lados do triângulo. Explica porquê.

2.5 Se tivesses traçado apenas duas bissetrizes, terias conseguido traçar a circunferência anterior? Explica a tua resposta.

Resolução:

O professor mostra o *applet* *Aula5_Circunferencia_Inscrita.html*, explicando os vários passos da resolução da tarefa.

Videoprojetor

$\hat{A}D$ é a bissetriz de $\hat{B}AC$
 $\hat{B}E$ é a bissetriz de $\hat{A}BC$
 $\hat{C}F$ é a bissetriz de $\hat{A}CB$
 O é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.
 c é a Circunferência Inscrita ao triângulo $[ABC]$.

Mostrar bissetriz de $\sphericalangle BAC$
 Mostrar bissetriz de $\sphericalangle ABC$
 Mostrar bissetriz de $\sphericalangle ACB$
 Mostrar Legenda
 Mostrar 2.4
 Mostrar texto dos conceitos
 Mostar 2.5

O professor escreve a resolução da alínea 2.4.

Quadro

2.4 A circunferência é tangente aos lados do triângulo $[ABC]$ porque o centro O é o ponto de interseção das bissetrizes dos três ângulos internos do triângulo $[ABC]$. Assim, esse ponto está a igual distância dos lados de cada um dos ângulos do triângulo.

O professor apresenta os seguintes conceitos.

Videoprojetor

A circunferência que é tangente aos três lados de um triângulo diz-se **Circunferência Inscrita num triângulo e o seu centro tem o nome de **Incentro** do triângulo.**

O professor escreve a resolução das alínea 2.5 e utiliza o *applet Aula5_Circunferencia_Inscrita.html* para mostrar, através da construção, que para definir o centro da circunferência inscrita basta traçar a bissetriz de dois ângulos internos do triângulo.

Quadro

2.5 Sim. Basta traçar a bissetriz de dois ângulos internos do triângulo $[ABC]$ porque as bissetrizes dos três ângulos internos do triângulo interseccionam-se num ponto chamado **incentro** do triângulo.

O professor propõe a resolução do seguinte exercício [9, p.28].

Exercício 33:

33. Constrói um triângulo equilátero

33.1 Determina o circuncentro e o incentro do triângulo.

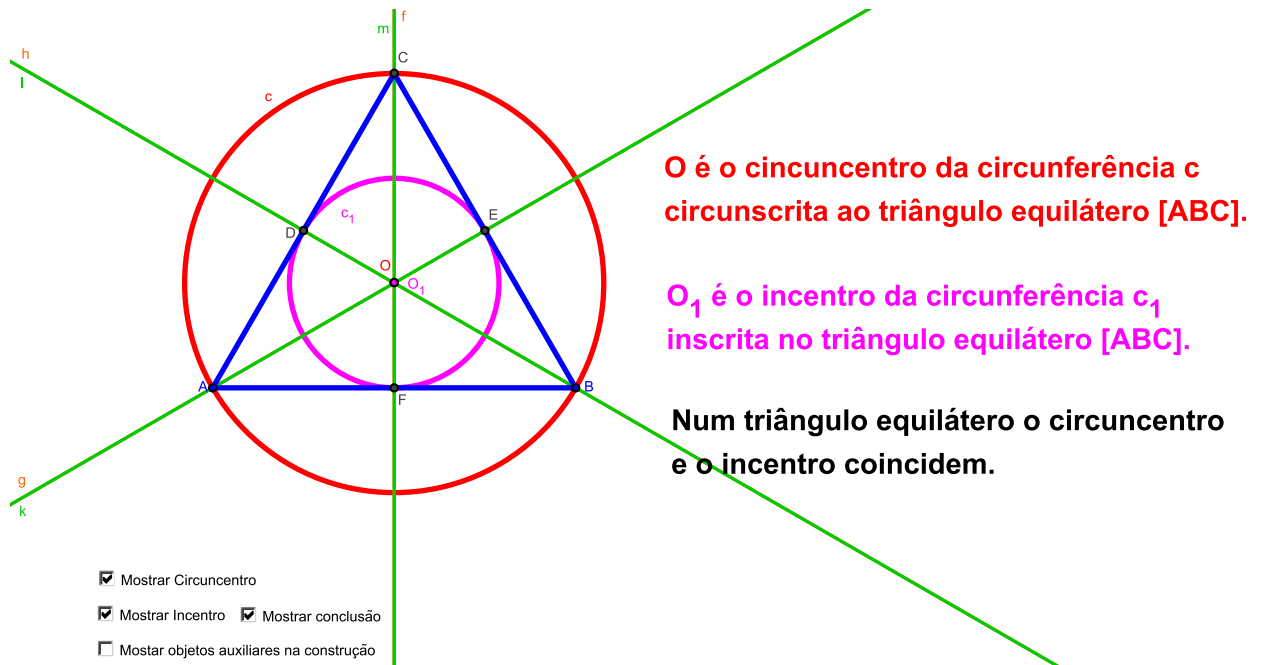
33.2 Repete a construção para outros triângulos equiláteros.

33.3 Atendendo aos resultados obtidos, estabelece uma conjectura para os triângulos equiláteros.

Resolução:

O professor mostra o *apliet Aula5_Ex33.html* explicando os vários passos da resolução do exercício.

Videoprojetor



Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição do tema.
- Colaboração com o professor e com os colegas na resolução dos exercícios propostos.
- Comportamento na sala de aula.

Referências

[5] [9] [30]

3.6.4 Planificação Aula 6 ◊ Introdução ao cálculo diferencial II - 12º ano

Unidade Didática IV - Introdução ao cálculo diferencial II

Tópico Central - Segunda derivada e aceleração.

Segunda derivada e concavidade.

Pontos de inflexão.

Aulas nº: 141 e 142

Duração: 90 min.

Ano/Turma: 12ºA

Data: 31/03/2014

Sumário

Função derivada de segunda ordem ou segunda derivada.

Interpretação física. Aceleração.

Interpretação geométrica. Concavidade.

Pontos de inflexão.

Pré-Requisitos

- Calcular o valor da derivada de uma função num ponto ou reconhecer que a função não é derivável nesse ponto.
- Interpretar o conceito de derivada do ponto de vista físico e do ponto de vista geométrico.
- Caracterizar a função derivada usando, ou não, as regras de derivação.

Materiais e Recursos

- Manual adotado [37].
- Quadro ; marcadores; quadro interativo; computador para o professor; videoprojetor.
- Geogebra e *applet Aula6_Funcao_1.html*; ficheiro *Apresentacao_Aula_6.pdf*.

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Calcular a segunda derivada de uma função usando, ou não, as regras de derivação.
- Interpretar a segunda derivada num ponto como a aceleração instantânea nesse ponto.
- Determinar o sentido da concavidade do gráfico de uma função através do estudo da segunda derivada.
- Identificar os pontos de inflexão de uma função, onde o gráfico muda o sentido da concavidade, como os pontos onde a segunda derivada é zero e muda de sinal.
- Determinar os extremos de uma função através do estudo da segunda derivada.

Competências transversais

- Analisar situações da vida real, identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.
- Desenvolver a capacidade de encontrar estratégias adequadas para a resolução de problemas e de comunicar e raciocinar matematicamente.
- Desenvolver a visualização, o raciocínio geométrico e a capacidade de o usar.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

As indicações [Quadro](#) ou [Videoprojetor](#) referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

Aulas nº: 141 e 142

[Videoprojetor](#)

Data: 31/03/2014

Sumário:

Função derivada de segunda ordem ou segunda derivada.
Interpretação física. Aceleração.
Interpretação geométrica. Concavidade.
Pontos de inflexão.

O professor começa a aula apresentando a definição de segunda derivada de uma função.

[Videoprojetor](#)

Função derivada de 2ª ordem ou segunda derivada.

Seja f uma função real de variável real e seja $f'(a)$ a sua derivada no ponto de abscissa a .

Definição:

À derivada de f' no ponto a chama-se **segunda derivada** ou **derivada de segunda ordem** de f no ponto a e representa-se por $f''(a)$:

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

ou

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

desde que o limite exista.

Definição:

Se f' é derivável em todos os pontos de um conjunto C , (ou seja se $f''(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in C$) pode definir-se em C uma função que se chama **segunda derivada** ou **derivada de segunda ordem** de f e que associa a cada ponto de C o valor da derivada de f' nesse ponto.

$$f'' : C \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f''(x)$$

Também se usam para representar a segunda derivada as seguintes notações $D^2 f$ e $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

O professor propõe a resolução do exercício 399 do manual adotado, [37], alíneas a) e c).

Exercício 399 - pág. 187

Define a segunda derivada de:

a) $f(x) = (2x - 1)^3$

c) $h(x) = \frac{x}{\ln x}$

Quadro

Resolução:

a)

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$$f'(x) = ((2x - 1)^3)' = 3(2x - 1)^2(2x - 1)' = 3(2x - 1)^2 \times 2 = 6(2x - 1)^2$$

$$(ku)' = ku'$$

$$f''(x) = (6(2x - 1)^2)' = 6 \times 2(2x - 1)(2x - 1)' = 12(2x - 1) \times 2 = 24(2x - 1) = 48x - 24$$

c)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u.v'}{v^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{x' \ln x - x(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - x \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}\right)' = \frac{(\ln x - 1)'(\ln x)^2 - (\ln x - 1)((\ln x)^2)'}{(\ln x)^4} \\ &= \frac{(\ln x)'(\ln x)^2 - (\ln x - 1)(2 \ln x)(\ln x)'}{(\ln x)^4} = \frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2 - (\ln x - 1)(2 \ln x \frac{1}{x})}{(\ln x)^4} \\ &= \frac{\frac{\ln x}{x}(\ln x - 2(\ln x - 1))}{(\ln x)^4} = \frac{\ln x(\ln x - 2 \ln x + 2)}{x(\ln x)^4} = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \end{aligned}$$

O professor recorda que dada uma função f e a sua derivada f' :

a velocidade instantânea num ponto é o valor de f' nesse ponto.

Interpretação física.

Aceleração.

O professor apresenta a interpretação física de segunda derivada.

Videoprojetor

Dada uma função f e a sua derivada f' , quando a variável independente é o tempo, a expressão:

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

representa a **taxa média de variação da velocidade** no intervalo $[a, a+h]$ e chama-se **aceleração média** no intervalo $[a, a+h]$.

O seu limite quando $h \rightarrow 0$, se existir, chama-se **aceleração instantânea** no ponto a .

Ou seja,

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \text{aceleração (instantânea) no ponto } a.$$

O professor propõe a resolução do exercício 415 do manual adotado, [37].

Exercício 415 - pág. 200

A distância percorrida por um paraquedista t segundos depois de ter aberto o paraquedas é dada em metros, aproximadamente, por:

$$d(t) = 25 + 6t - 25e^{-1,7t}$$

Determina a aceleração na queda, 3 segundos depois de se abrir o paraquedas (arredondada às centésimas do metro).

Resolução:

$$d(t) = 25 + 6t - 25e^{-1,7t}$$

$$v(t) = d'(t) = (25 + 6t - 25e^{-1,7t})' = 0 + (6t)' - (25e^{-1,7t})' = 6 - 25(e^{-1,7t})' = 6 - 25e^{-1,7t} \times (-1,7t)' = 6 - 25e^{-1,7t}(-1,7) = 6 + 42,5e^{-1,7t}$$

Ou seja, $v(t) = 6 + 42,5e^{-1,7t}$.

$$a(t) = d''(t) = v'(t) = (6 + 42,5e^{-1,7t})' = 0 + 42,5(e^{-1,7t})' = 0 + 42,5e^{-1,7t} \times (-1,7t)' = 42,5e^{-1,7t} \times (-1,7) = -72,25 \times e^{-1,7t}$$

Ou seja, $a(t) = -72,25 \times e^{-1,7t}$.

Vem então, $a(3) = -72,25 \times e^{-1,7 \times 3} = -0,44m/s^2$

Interpretação geométrica.

Concavidade.

O professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Exercício 1:

Considera a função $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$, de domínio \mathbb{R} .

Calcula:

a) $f'(x)$

b) $f''(x)$

Resolução:

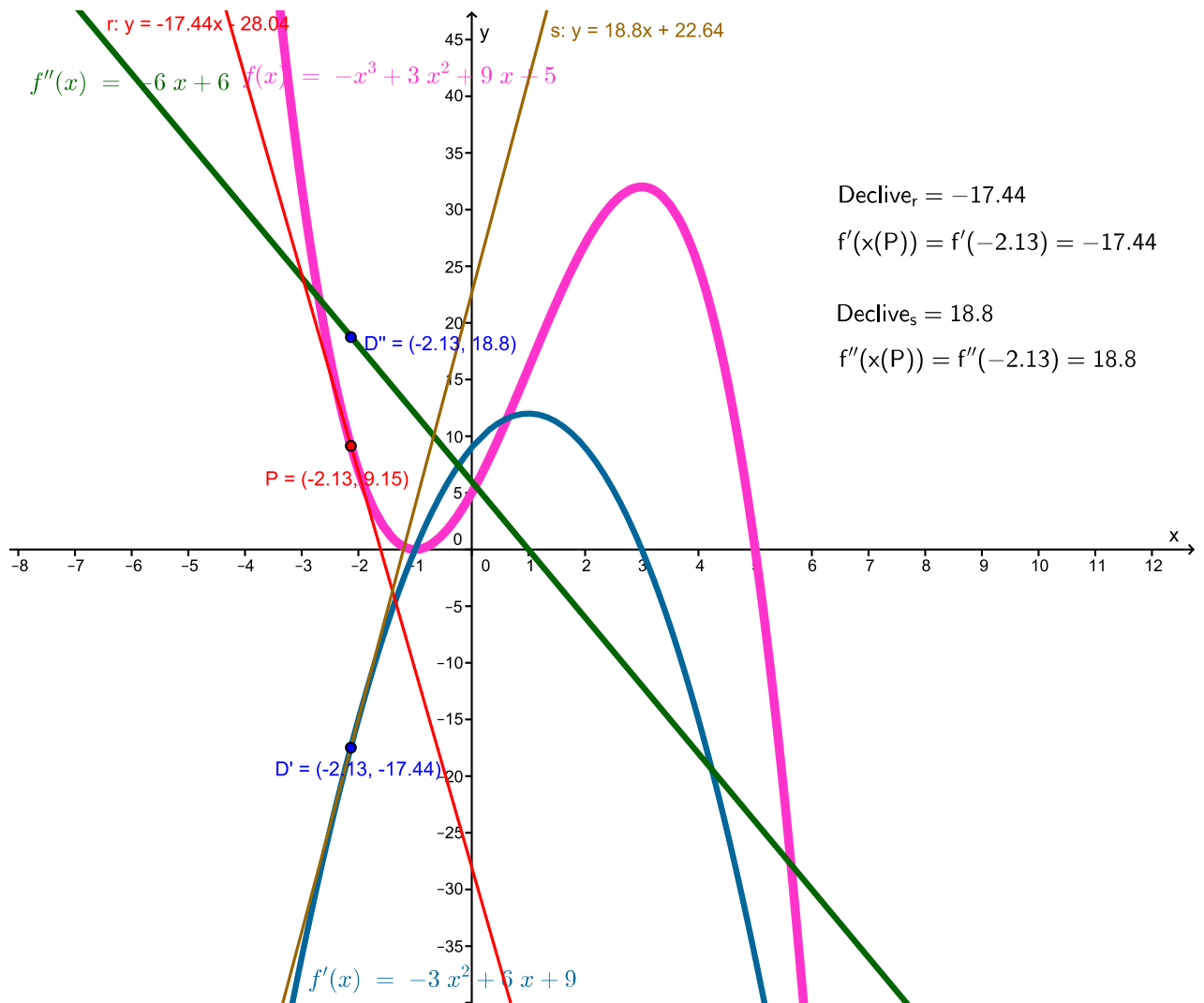
a) $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$

b) $f''(x) = -6x + 6$

O professor refere que o exercício 1 serve de ponto de partida para o estudo da concavidade do gráfico de uma função f a partir da segunda derivada f'' .

O professor mostra o *applet Aula6_Funcao_1.html* com: a função cúbica $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$; $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$; $f''(x) = -6x + 6$; a reta r tangente a f no ponto P e a reta s tangente a f' no ponto D' (f' , f'' , r e s podem ser "mostradas/ocultadas").

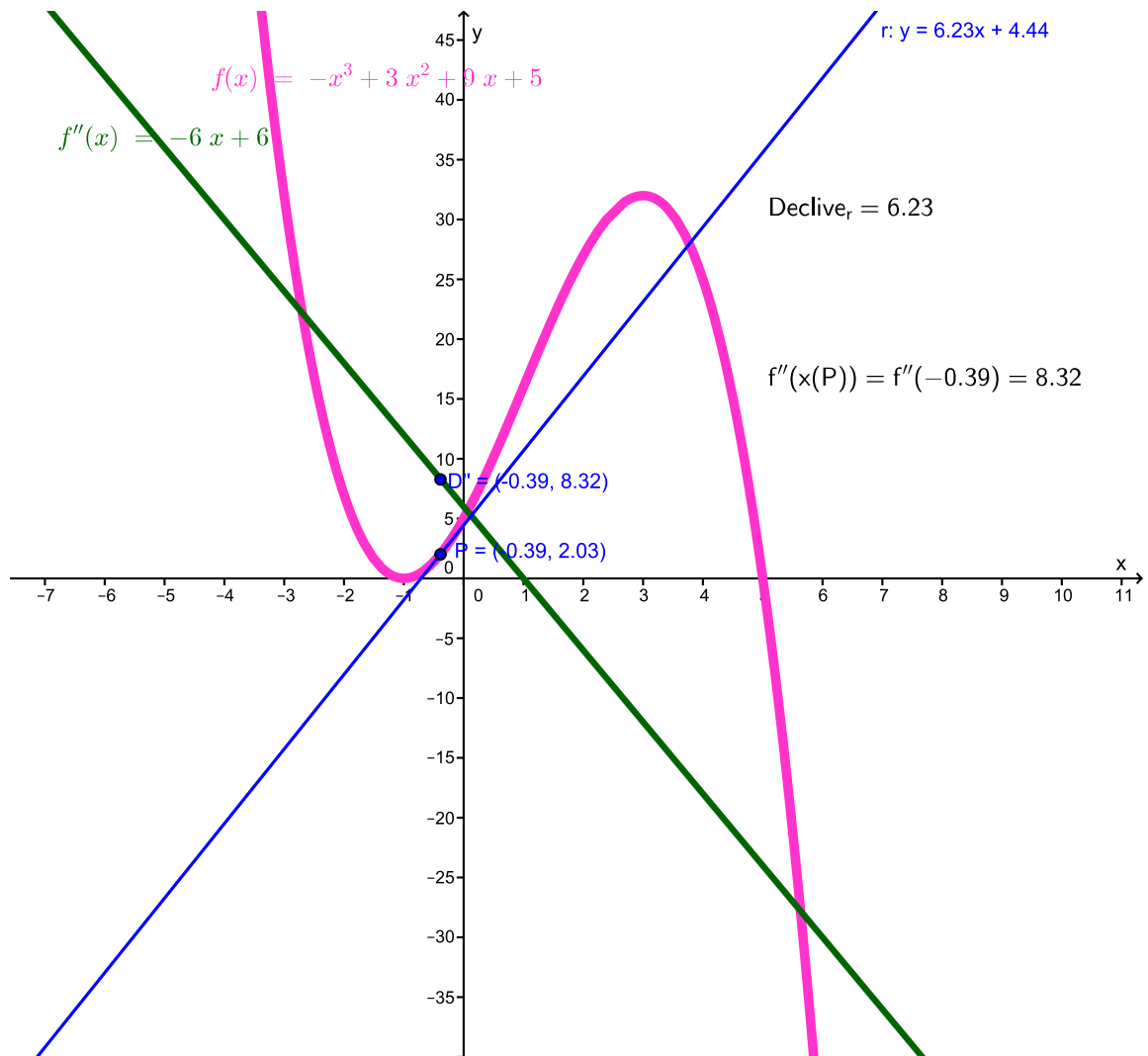
O professor apresenta a interpretação geométrica de segunda derivada.



Videoprojetor

Geometricamente, a segunda derivada de uma função f no ponto de abscissa a é numericamente igual ao declive da reta tangente ao gráfico da função f' no ponto de abscissa a .

O professor apresenta o caso em que o gráfico da função está sempre acima de qualquer reta tangente.

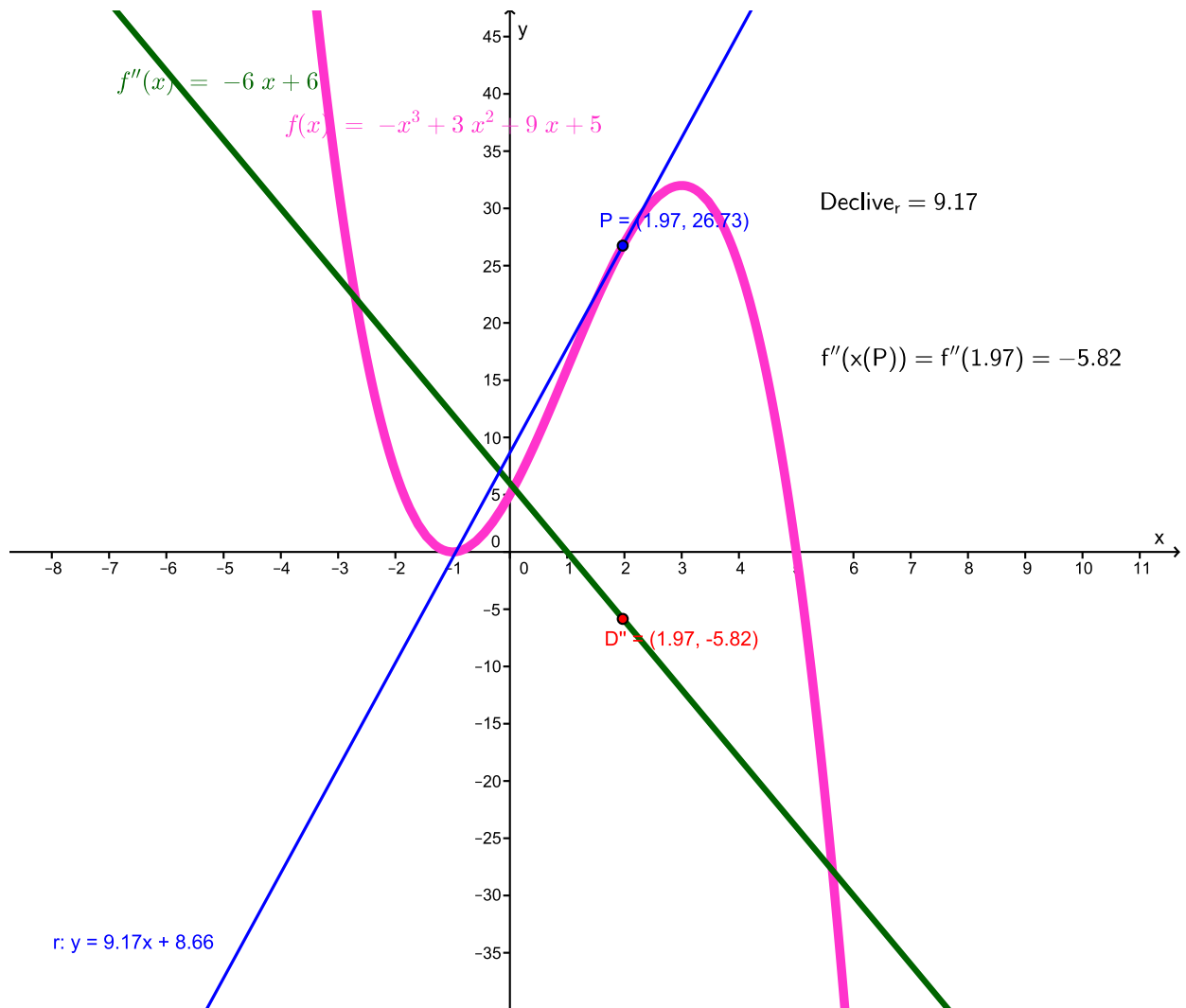


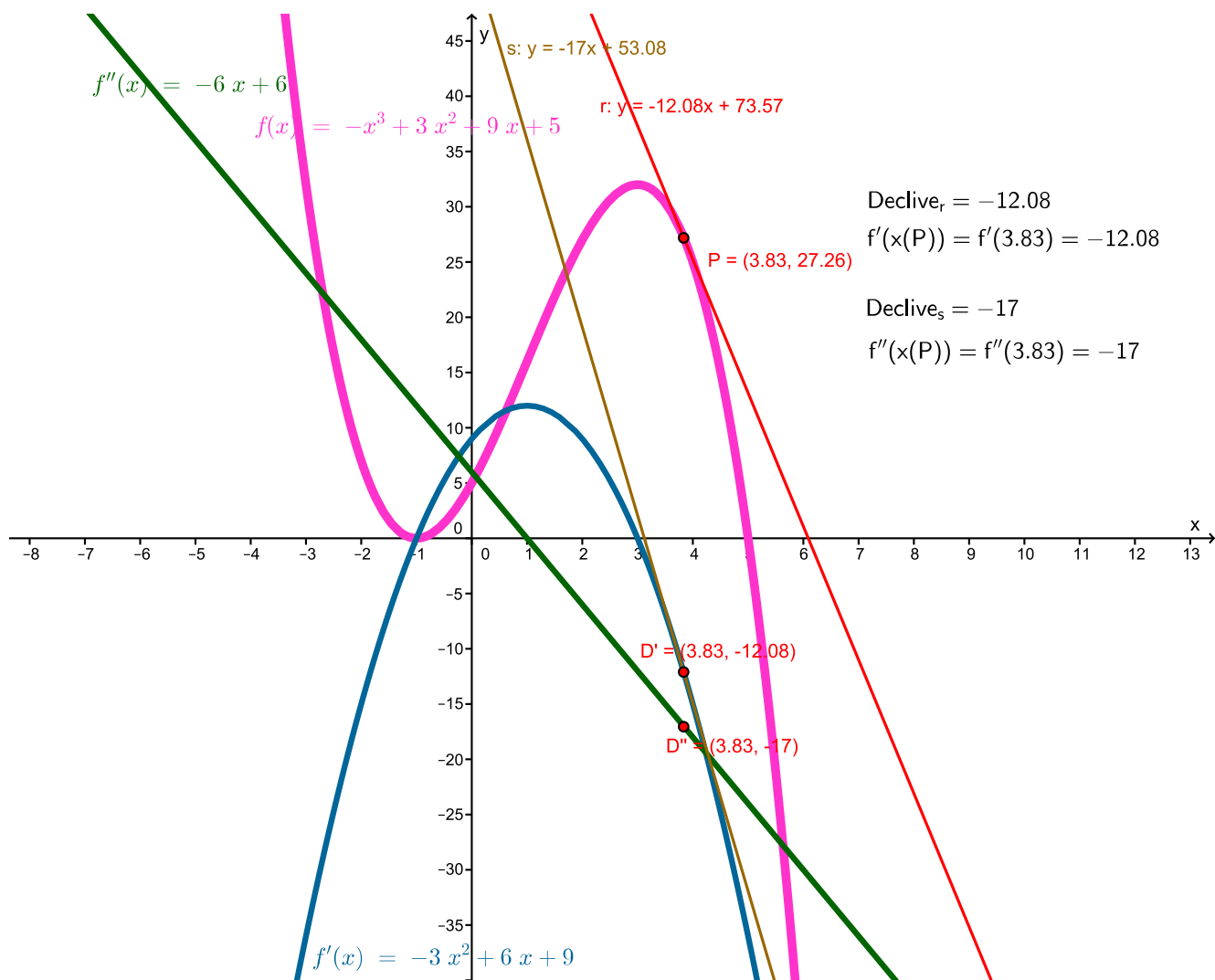
Videoprojetor

Se num intervalo $]a, c[$, do domínio de uma função f , a curva do gráfico da função está sempre acima de qualquer reta tangente, diz-se que, em $]a, c[$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima.

O "estar acima de qualquer reta tangente" significa que à medida que x aumenta, a reta tangente à curva vai rodando de tal forma que o seu declive vai sempre aumentando, assim f' é crescente e a 2ª derivada f'' é positiva em $]a, c[$.

O professor apresenta o caso em que curva do gráfico da função está sempre abaixo de qualquer reta tangente.





Videoprojetor

Se num intervalo $]c, d[$, do domínio de uma função f , a curva do gráfico da função está sempre abaixo de qualquer reta tangente, diz-se que, em $]c, d[$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

O "estar abaixo de qualquer reta tangente" significa que à medida que x aumenta, a reta tangente à curva vai rodando de tal forma que o seu declive vai sempre diminuindo, assim f' é decrescente e a 2ª derivada f'' é negativa em $]c, d[$.

O professor apresenta o seguinte Teorema.

Videoprojetor

Teorema:

Dada uma função f duas vezes derivável num intervalo $]a, b[$, o gráfico de f tem a **concavidade virada para cima**, em $]a, b[$, se

$$\forall x \in]a, b[, f''(x) \geq 0,$$

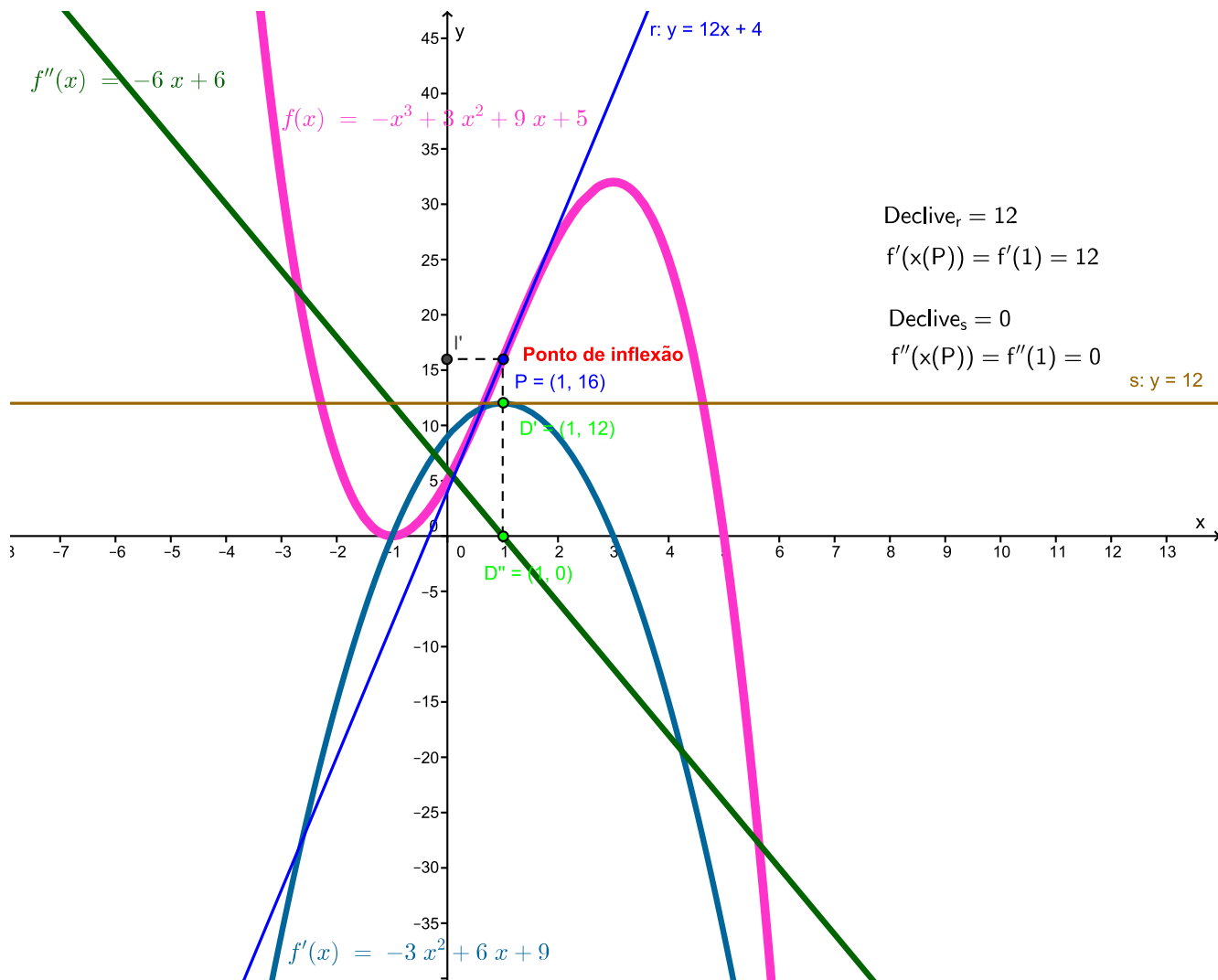
e tem a **concavidade virada para baixo**, em $]a, b[$, se

$$\forall x \in]a, b[, f''(x) \leq 0.$$

Ou seja, a concavidade do gráfico de f está virada para cima ou para baixo, num dado intervalo, conforme f' seja crescente ou decrescente nesse intervalo.

Pontos de inflexão.

Através do *applet* `Aula6_Funcao_1.html` o professor apresenta o conceito de **ponto de inflexão** de uma função.



Videoprojetor

Definição:

Se f é uma função contínua num intervalo aberto I e derivável em I (ou em $I \setminus \{c\}$), dizemos que f tem um **ponto de inflexão** em c se o gráfico de f muda o sentido da concavidade no ponto $(c, f(c))$.

Videoprojetor

Teorema:

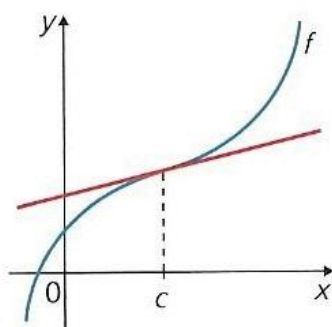
Seja f uma função com segunda derivada em todos os pontos de um intervalo aberto I . Seja $c \in I$. Se $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f , então $f''(c) = 0$.

Notas:

i) Sendo f uma função contínua num intervalo aberto, os pontos de inflexão são:

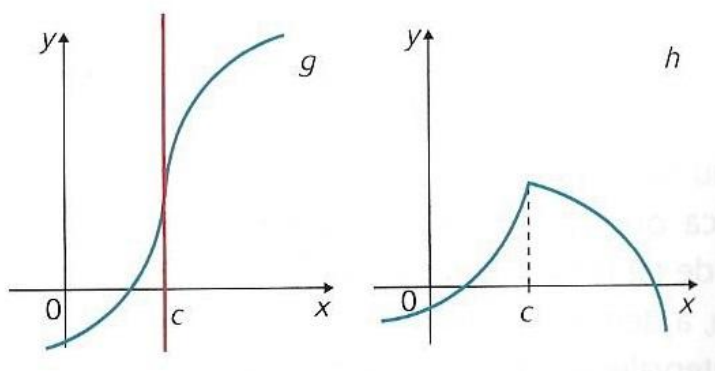
- os zeros da 2ª derivada onde há mudança de sinal, que correspondem às abscissas dos extremos de f' ;
- os pontos onde não há 2ª derivada, mas existe 2ª derivada numa vizinhança à esquerda e noutra à direita do ponto, com sinais diferentes (ou nula num deles).

ii) No ponto onde o gráfico da função muda o sentido da concavidade, ou seja, no ponto de inflexão, o gráfico da função é "atravessado" pela reta tangente.



iii) O anulamento da 2ª derivada não é condição suficiente para a existência de ponto de inflexão; tem de haver mudança de sinal.

iv) Pode ser ponto de inflexão um ponto onde não há segunda derivada. No exemplo da função g , na figura abaixo, tem-se $g'(c) = +\infty$ o que quer dizer que não existe $g''(c)$ e no caso da função h nem sequer existe a primeira derivada no ponto c .



O professor propõe a resolução do **exercício 417** do manual, [37, p. 201].

417 Considera a representação gráfica da função f .

Resolva as condições:

a) $f'(x) \geq 0$

b) $f(x) \cdot f''(x) \leq 0$

Videoprojetor

Resolução:

a)

Vamos elaborar uma tabela para estudar o sinal de f' .

x	$-\infty$	-2		0		1		2		3	$+\infty$
sinal de f	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
variação de f	\nearrow	0	\nearrow	<i>máx.</i>	\searrow	0	\searrow	<i>mín.</i>	\nearrow	0	\nearrow
sinal de f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$$f'(x) \geq 0 \text{ em }]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$$

b)

Vamos elaborar uma tabela para estudar o sinal de f'' .

x	$-\infty$	-2		0		1		2		3	$+\infty$
sinal de f	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
concavidades do gráfico de f	\frown					<i>P.I.</i>	\smile				
sinal de f''	$-$					0	$+$				
sinal de $f(x) \cdot f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

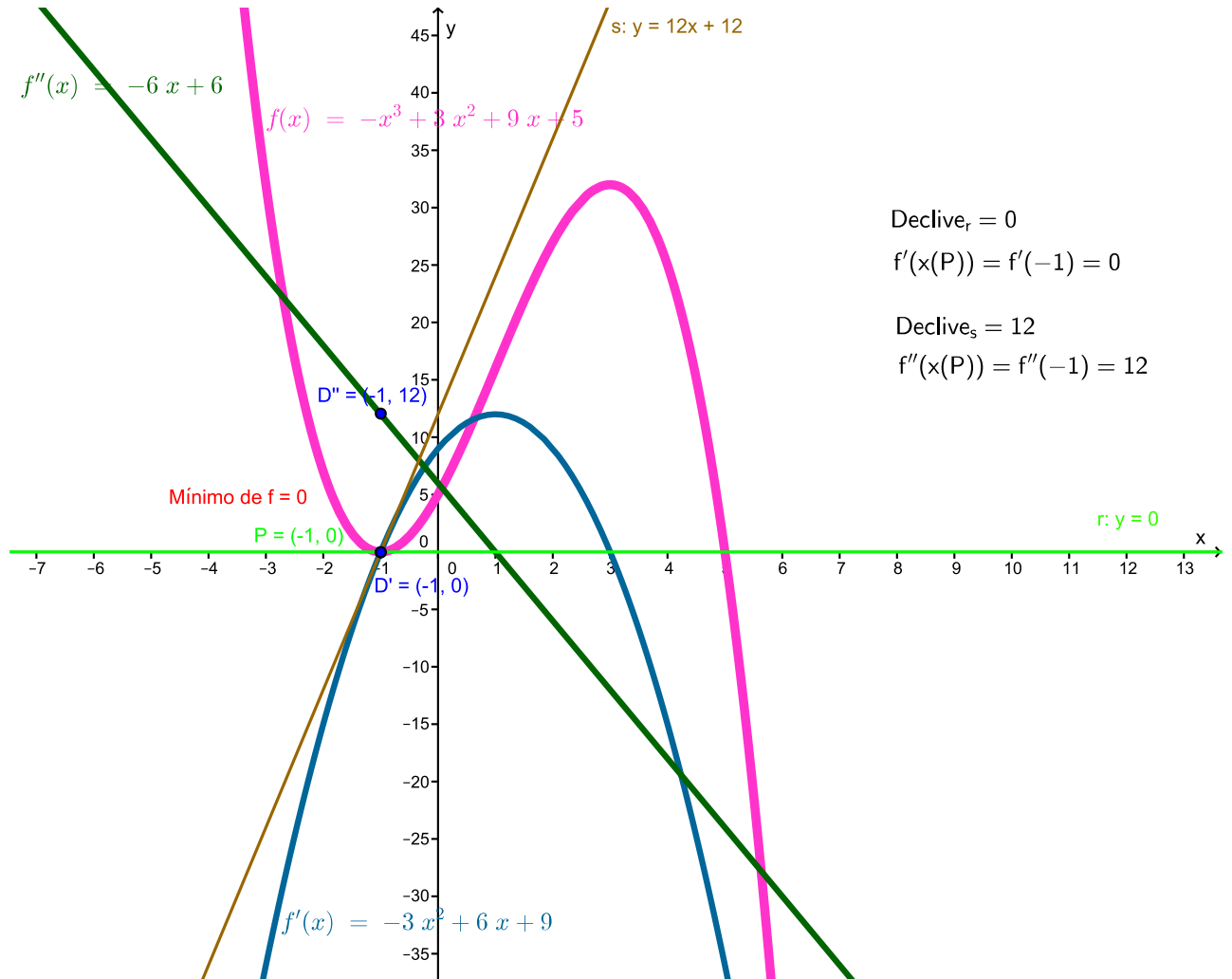
$$f(x) \cdot f''(x) \leq 0 \text{ em } [-2, 3]$$

O professor utiliza o *applet Aula6_Funcao_1.html* para mostrar como a partir do estudo da segunda derivada de uma função f se podem determinar os extremos de f .

Caso em que f é derivável num intervalo $]a, b[$ contendo c , com $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$:
 f tem um máximo relativo em $(c, f(c))$.



Caso em que f é derivável num intervalo $]a, b[$ contendo c , com $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$:
 f tem um mínimo relativo em $(c, f(c))$.



Videoprojetor

Teste da segunda derivada:

Supondo que f é derivável num intervalo $]a, b[$ contendo c e $f'(c) = 0$:

- se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo relativo em $(c, f(c))$;
- se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo relativo em $(c, f(c))$.

O professor propõe a resolução do seguinte exercício.

Videoprojetor

Exercício 2

Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = x^4 - 12x^2 + 1$.

a) Estude a concavidade do gráfico de f e determine se existem os pontos de inflexão.

b) Use o teste da segunda derivada para determinar os extremos relativos de f .

Quadro

Resolução:

a) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 1$

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua porque é uma função polinomial.

$$f'(x) = (x^4 - 12x^2 + 1)' = 4x^3 - 24x$$

$$f''(x) = (4x^3 - 24x)' = 12x^2 - 24$$

A função f tem segunda derivada finita em \mathbb{R} , logo os pontos de inflexão, se existirem, serão zeros de f'' .

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
sinal de f''	+	0	-	0	+
concavidades do gráfico de f	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

O gráfico da função tem a **concavidade voltada para cima** em $] -\infty, -\sqrt{2}]$ e $[\sqrt{2}, +\infty[$.

O gráfico da função tem a **concavidade voltada para baixo** em $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Vamos calcular o valor da função f nos pontos onde há mudança no sentido da concavidade.

$$f(-\sqrt{2}) = -19 \text{ e } f(\sqrt{2}) = -19$$

Os pontos $(-\sqrt{2}, -19)$ e $(\sqrt{2}, -19)$ são **pontos de inflexão** do gráfico de f .

b)

A função f é derivável em \mathbb{R} , logo os pontos onde podem existir extremos de f (pontos críticos) são os zeros de f' .

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 24x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6}.$$

Vamos estudar o sinal da segunda derivada.

$$f''(x) = 12x^2 - 24$$

$$f''(0) = -24 < 0$$

$$f''(-\sqrt{6}) = 48 > 0$$

$$f''(\sqrt{6}) = 48 > 0$$

Vamos calcular o valor da função f em cada um dos pontos críticos.

$$f(0) = 1$$

$$f(-\sqrt{6}) = -35$$

$$f(\sqrt{6}) = -35$$

ponto crítico de f	$f'(c)$	$f''(c)$	sinal de $f''(x)$	$f(c)$	conclusão
$-\sqrt{6}$	0	48	+	-35	-35 é um mínimo relativo de f
0	0	-24	-	1	1 é um máximo relativo de f
$\sqrt{6}$	0	48	+	-35	-35 é um mínimo relativo de f

A função tem um máximo relativo para $x = 0$, que é 1.

A função tem um mínimo relativo para $x = -\sqrt{6}$ e $x = \sqrt{6}$, que é -35.

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição do tema.
- Colaboração com o professor e com os colegas na resolução dos exercícios propostos.
- Comportamento na sala de aula.

Referências

[13] [15] [27] [37]

3.6.5 Planificação Aula 7 ◊ Trigonometria e Números Complexos - 12º ano

Tema III - Trigonometria e Números Complexos

Tópico Central - Representação geométrica e vetorial dos números complexos.
Adição e multiplicação de números complexos.
Interpretação Vetorial.

Aulas nº: 165 e 166
Duração: 90 min.

Ano/Turma: 12ª A
Data: 15/05/2014

Sumário

Representação geométrica e vetorial dos números complexos. Coordenadas cartesianas.
Adição e multiplicação de números complexos. Interpretação vetorial.

Pré-Requisitos

- Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.
- Efetuar operações com vetores.

Materiais e Recursos

- Manual adotado [38].
- Quadro ; marcadores; quadro interativo; computador para o professor; videoprojetor.
- Ficheiro *Apresentacao_Aula_7.pdf*.

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Representar geometricamente os números complexos no plano, num referencial cartesiano.
- Reconhecer que o referencial cartesiano é também chamado de plano complexo.
- Efetuar a adição de números complexos e representar a imagem vetorial da mesma.
- Efetuar a multiplicação de números complexos e representar a imagem vetorial da mesma.

Competências transversais

- Analisar situações da vida real, identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.
- Desenvolver a capacidade de encontrar estratégias adequadas para a resolução de problemas e de comunicar e raciocinar matematicamente.
- Desenvolver a visualização, o raciocínio geométrico e a capacidade de o usar.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

Videoprojetor

Aulas nº: 165 e 166

Data: 15/05/2014

Sumário:

Representação geométrica e vetorial dos números complexos. Coordenadas cartesianas.
Adição e multiplicação de números complexos. Interpretação vetorial.

O professor começa a aula com a apresentação de informação histórica sobre a representação geométrica dos números complexos.

Videoprojetor

- O primeiro passo para a representação geométrica dos números complexos foi dado por Gaspar Wessel, um topógrafo norueguês, em finais do século XVIII.
- Passados alguns anos, o francês Jean Robert Argand tem a mesma ideia e é a ele que é frequentemente atribuída a glória da "realização visual" dos números complexos, ou seja, da representação geométrica dos mesmos.
- Em 1811, Carl Gauss explica que assim como se podem representar todos os números reais sobre uma linha reta, do mesmo modo se podem representar os números complexos (os reais mais os imaginários) sobre um plano.

Manual p. 76

O professor inicia a apresentação de conteúdos sobre a representação geométrica e vetorial dos números complexos.

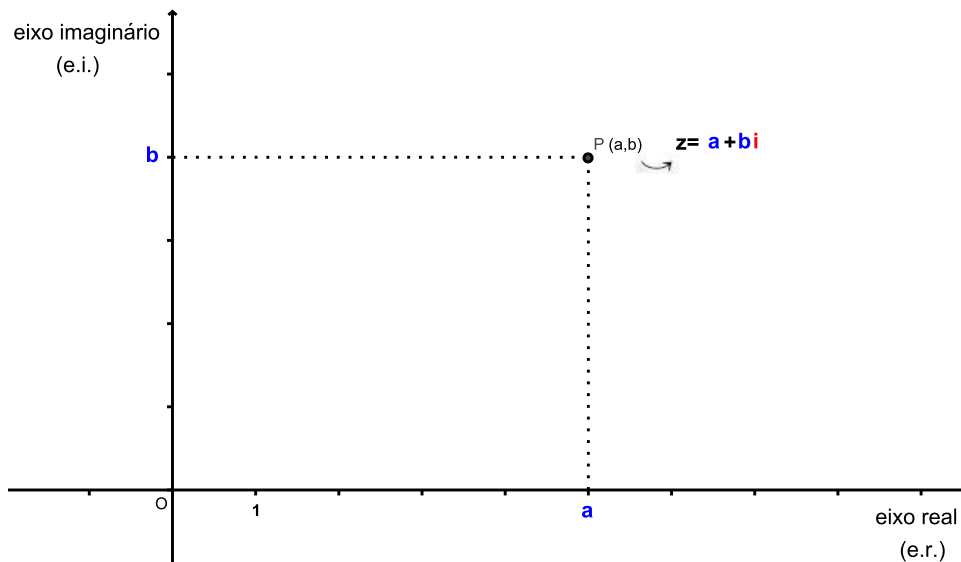
Representação geométrica e vetorial dos números complexos.

Sabemos que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e o conjunto dos pontos do plano onde se fixa um referencial ortonormado. Ou seja,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow P(x, y)$$

Como um número complexo se escreve na forma $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ podemos fazer corresponder ao número complexo $z = x + yi$ o ponto P de coordenadas (x, y) .

Considera-se, no plano, um referencial cartesiano tradicional Oxy para representar geometricamente os números complexos designado por **plano complexo**, também conhecido como *plano de Argand* ou *Argand-Gauss*.

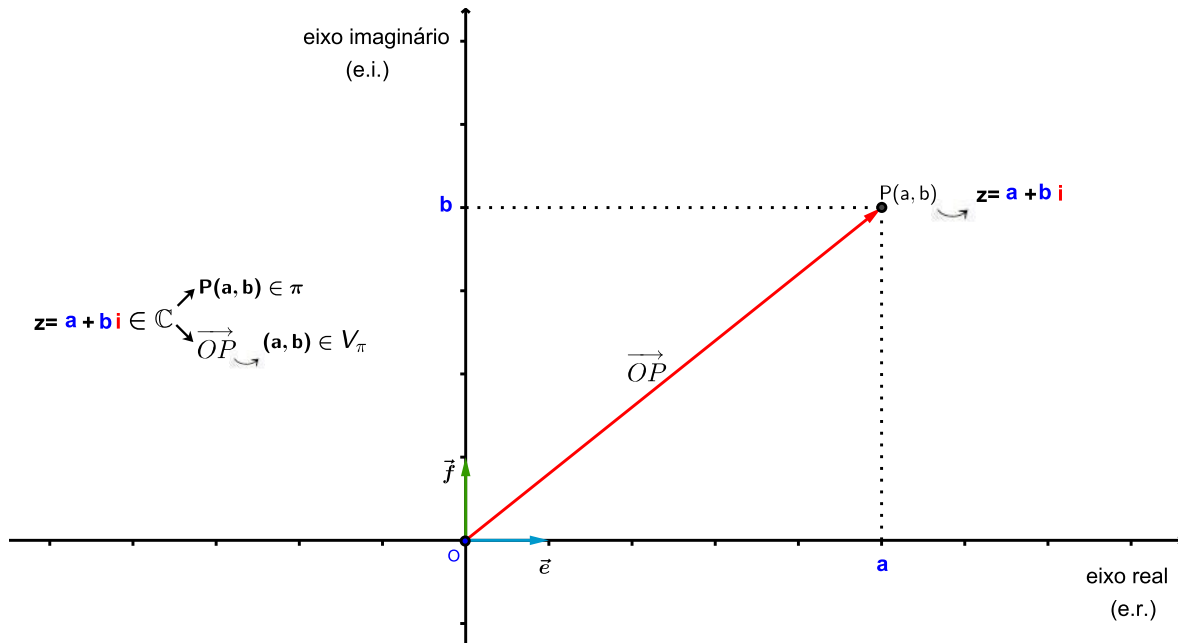


No eixo Ox (designado de **eixo real**, e.r. ou $\text{Re}(z)$) representa-se a parte real do número complexo e no eixo Oy (designado de **eixo imaginário**, e.i. ou $\text{Im}(z)$) representa-se o coeficiente da parte imaginária.

Quadro

Consideremos um referencial o.n. (O, \vec{e}, \vec{f}) , num plano π .

A cada número complexo $z = a + bi$ corresponde um e um só ponto P de abscissa a e ordenada b e um e um só vetor \vec{OP} de coordenadas a e b .



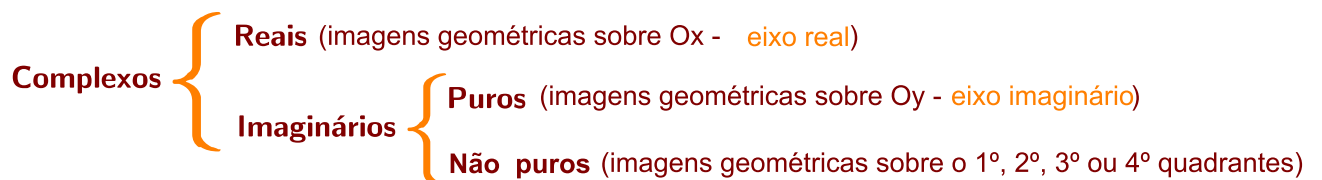
Videoprojetor

Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, então:

- o ponto $P(a, b)$ é a sua **representação geométrica**, **imagem geométrica**, ou **afixo** de z .
- o vetor $\vec{OP} \mapsto (a, b)$ é a sua **representação vetorial**, **imagem vetorial** ou **afixo vetorial** de z .

No **plano complexo**, as imagens geométricas dos números reais ficam representadas no eixo das abscissas (**eixo real**). As imagens geométricas dos imaginários puros ficam representadas no eixo das ordenadas (**eixo imaginário**).

Esquemáticamente tem-se:



O professor propõe a resolução dos exercícios 187 e 188 do manual adotado, [38, p. 77].

Exercício 187

Identifica a representação algébrica dos números complexos cuja imagem geométrica é cada um dos seguintes pontos:

- a) $P(-2, 5)$
- b) $Q(5, -1)$
- c) $R(0, 2)$
- d) $S(-\sqrt{2}, 0)$

Quadro

Resolução:

- a) $-2 + 5i$
- b) $5 - i$
- c) $2i$
- d) $-\sqrt{2}$

Exercício 188

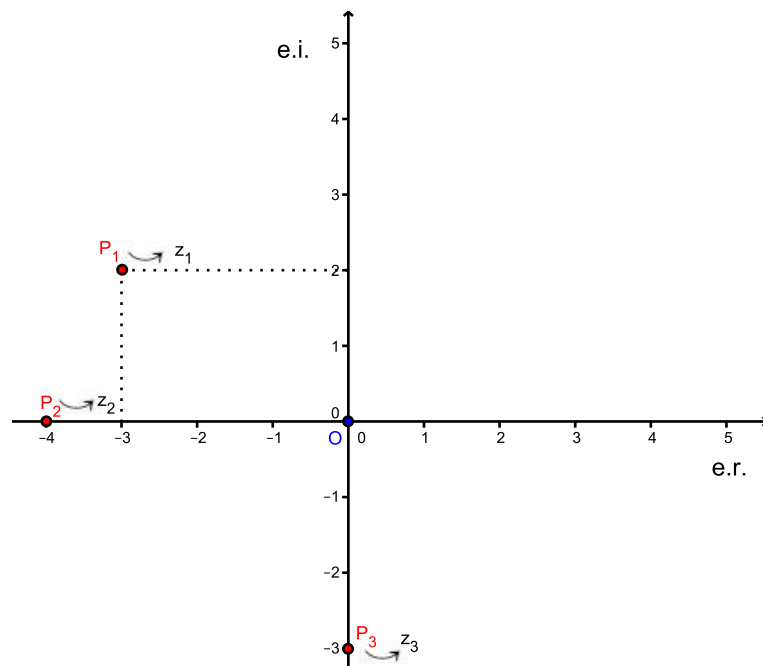
Representa no plano complexo as imagens geométricas de:

- a) $z_1 = -3 + 2i$
- b) $z_2 = -4$
- c) $z_3 = -3i$

Quadro

Resolução:

- a) $z_1 = -3 + 2i \rightsquigarrow P_1(-3, 2)$
- b) $z_2 = -4 \rightsquigarrow P_2(-4, 0)$
- c) $z_3 = -3i \rightsquigarrow P_3(0, -3)$



Adição de números complexos.

Interpretação vetorial.

O professor propõe a resolução da atividade 12 do manual adotado, [38, p. 77]

Atividade 12 - Números complexos no plano

1. Representa no plano complexo as imagens geométricas de $z = 5 + 2i$ (P), do seu conjugado (Q) e do seu simétrico (R).

Indica quais as transformações geométricas que permitem obter Q e R a partir de P .

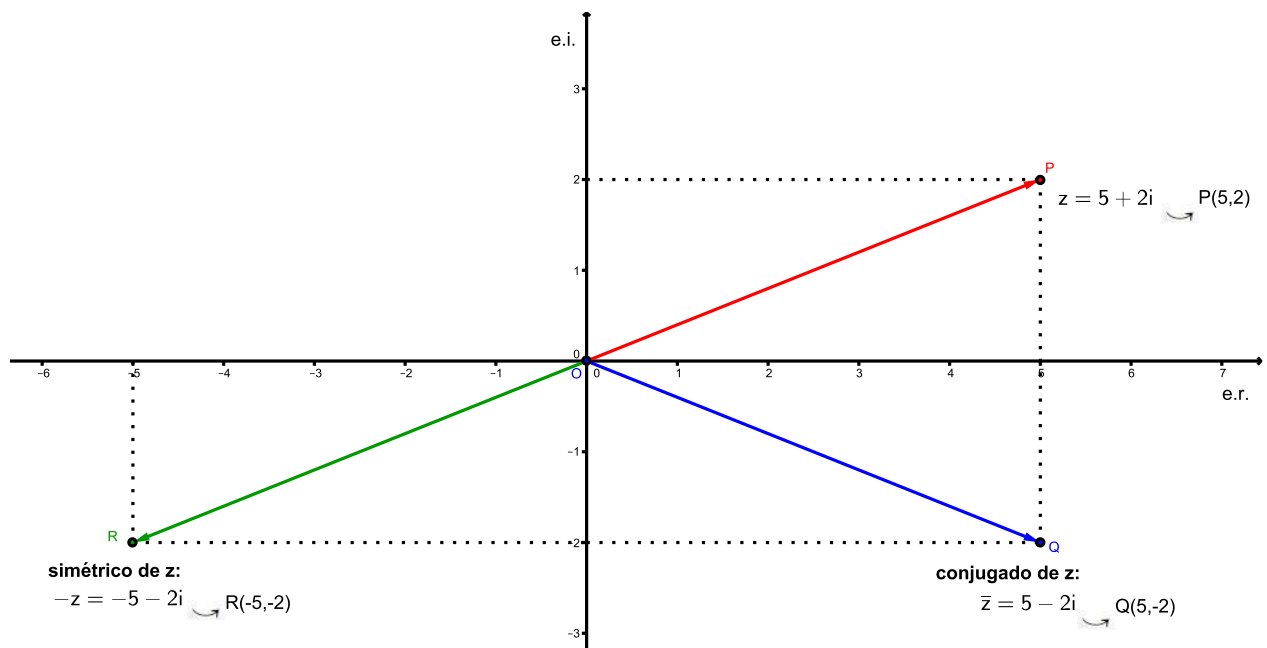
2. Considera dois números complexos quaisquer e calcula a sua soma. Representa vetorialmente cada um dos números e a soma dos dois. Consegues estabelecer alguma relação entre os vetores? Qual?

3. Recorda que concluíste, por via algébrica, que a soma de dois complexos conjugados é um número real. Interpreta esse facto em termos de representação vetorial. Qual a característica do vetor soma que traduz que ele é imagem de um número real?

Quadro

Resolução:

1.



Atividade 12 - p. 77

1.

O conjugado de z , \bar{z} , é obtido através de uma **simetria de reflexão** de P em relação ao **eixo real**.

O simétrico de z , R , é obtido através de uma **simetria de reflexão** de P em relação ao **eixo real**, de onde se obtém Q , seguida de uma **simetria de reflexão** de Q em relação ao **eixo imaginário**.

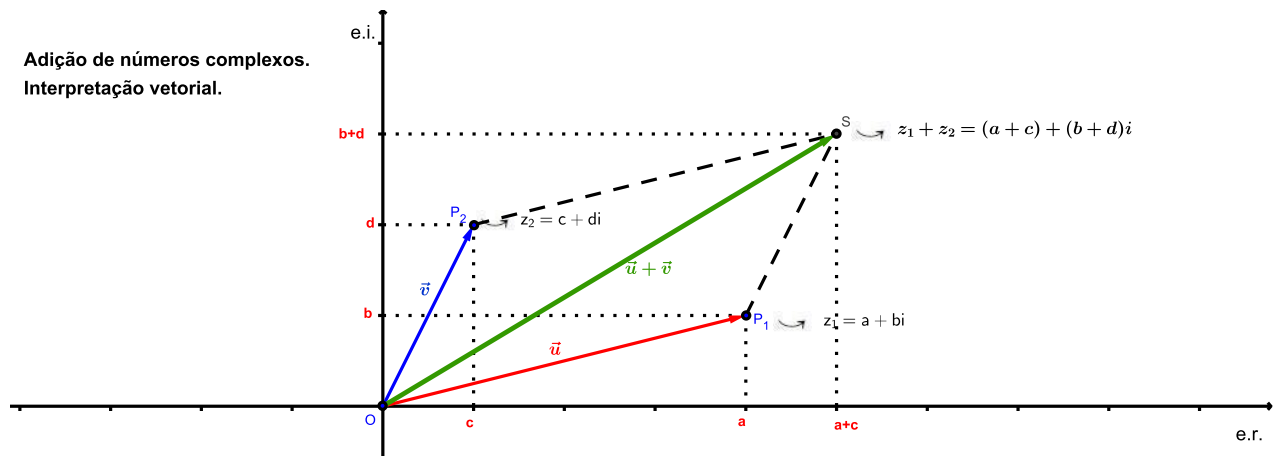
- Números complexos **conjugados** têm imagens geométricas **simétricas em relação ao eixo real**.
- Números complexos **simétricos** têm imagens geométricas **simétricas em relação à origem do referencial**.

Quadro

2. Consideremos: $z_1 = a + bi \rightsquigarrow P_1(a, b)$ e $z_2 = c + di \rightsquigarrow P_2(c, d)$.

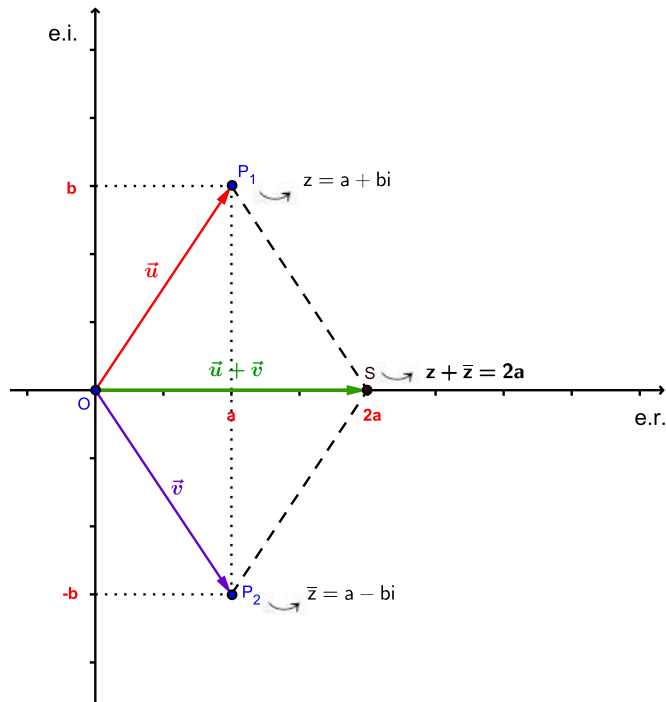
Temos, $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + b) + (c + d)i$.

Vamos fazer a representação vetorial de z_1 , z_2 e $z_1 + z_2$.



No plano complexo, o afixo vetorial da soma de dois números complexos é igual à soma dos afixos vetoriais desses complexos.

3. Consideremos $z = a + bi$, então $\bar{z} = a - bi$ e $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$.
 Vamos fazer a representação geométrica de z , \bar{z} e $z + \bar{z}$.



A soma de dois números complexos conjugados é um número real, em termos de representação vetorial isto significa que o vetor soma está sobre o eixo real, isto é, tem origem na origem do referencial e extremidade num ponto situado sobre o eixo real, é um vetor do tipo $\vec{w} = (x, 0)$, onde $x \in \mathbb{R}$.

O professor propõe a resolução do exercício 191 do manual adotado, [38, p. 78].

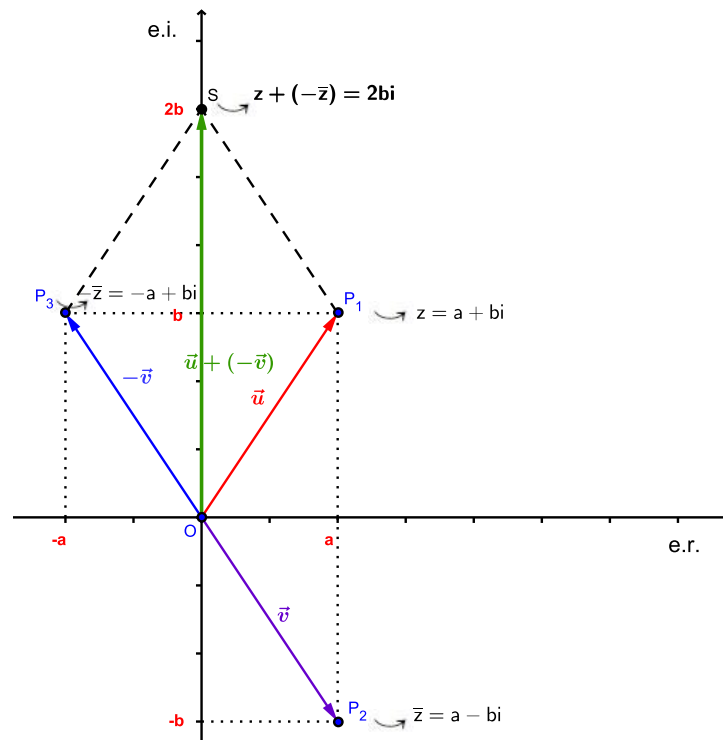
Exercício 191

Considera um número complexo qualquer $z = a + bi$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
Soma vetorialmente z e $-\bar{z}$ e interpreta o resultado obtido.

Quadro

Resolução:

Seja $z = a + bi \rightsquigarrow P_1(a, b)$, então $\bar{z} = a - bi \rightsquigarrow P_2(a, -b)$ e $-\bar{z} = -a + bi \rightsquigarrow P_3(-a, b)$.



- $z + (-\bar{z})$ é um imaginário puro, a sua imagem vetorial é um vetor com origem na origem do referencial e extremidade num ponto sobre o eixo imaginário.

Multiplicação de números complexos.

Interpretação vetorial.

O professor propõe a resolução da atividade 13, alínea 1., do manual adotado, [38, p. 78].

Esta questão tem como objetivo a aprendizagem da multiplicação, por via vetorial, de um número complexo por: um número real qualquer, i e $-i$.

Atividade 13 - Complexos e vetores

1. Representa a imagem vetorial de $z = 5 + 2i$ (\overrightarrow{OP}) e também as imagens vetoriais de $2z$ (\overrightarrow{OQ}), $-3z$ (\overrightarrow{OR}), iz (\overrightarrow{OS}) e $-iz$ (\overrightarrow{OT}).

Relaciona os vetores \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{OR} , \overrightarrow{OS} e \overrightarrow{OT} com \overrightarrow{OP} e interpreta geometricamente as operações efetuadas sobre o número z .

Quadro

Resolução:

1.

$$z = 5 + 2i \curvearrowright \overrightarrow{OP} = (5, 2)$$

$$2z = 2(5 + 2i) = 10 + 4i \curvearrowright \overrightarrow{OQ} = (10, 4)$$

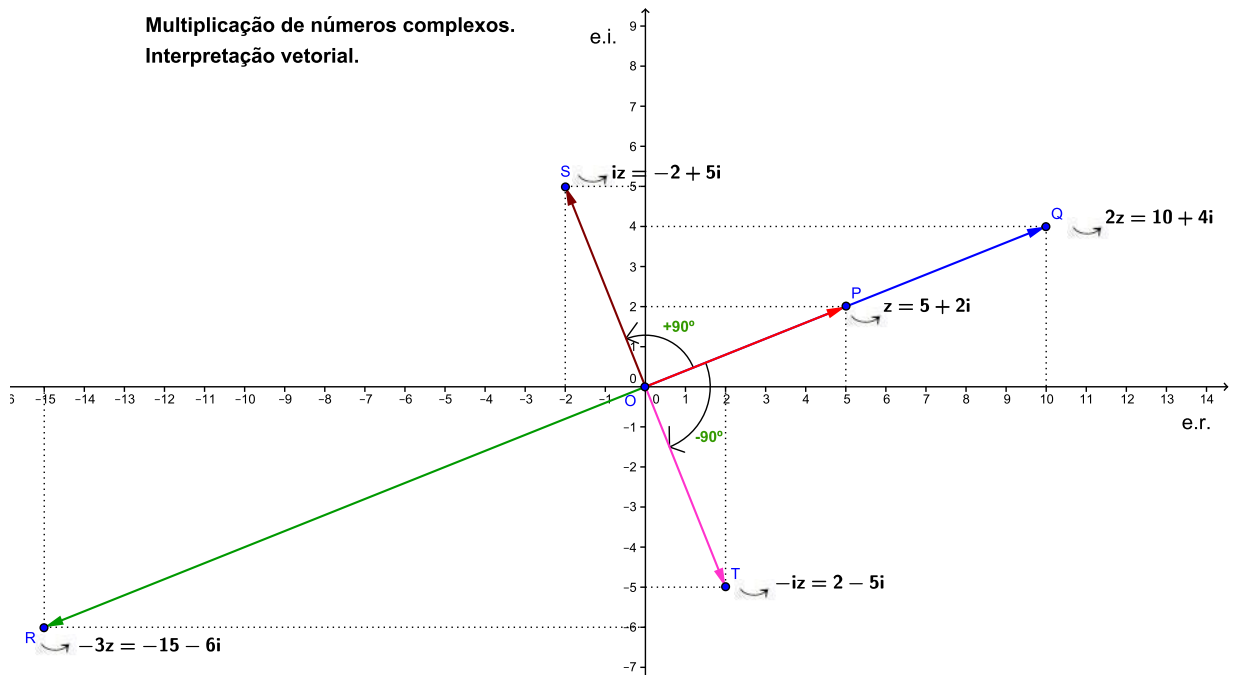
$$-3z = -3(5 + 2i) = -15 - 6i \curvearrowright \overrightarrow{OR} = (-15, -6)$$

$$iz = i(5 + 2i) = 5i + 2i^2 = -2 + 5i \curvearrowright \overrightarrow{OS} = (-2, 5)$$

$$-iz = -i(5 + 2i) = -5i - 2i^2 = 2 - 5i \curvearrowright \overrightarrow{OT} = (2, -5)$$

Atividade 13.1 - p. 78

Multiplicação de números complexos.
Interpretação vetorial.



Quadro

$||\vec{OQ}|| = |2| \times ||\vec{OP}||$; \vec{OQ} tem a mesma direção e o mesmo sentido de \vec{OP}

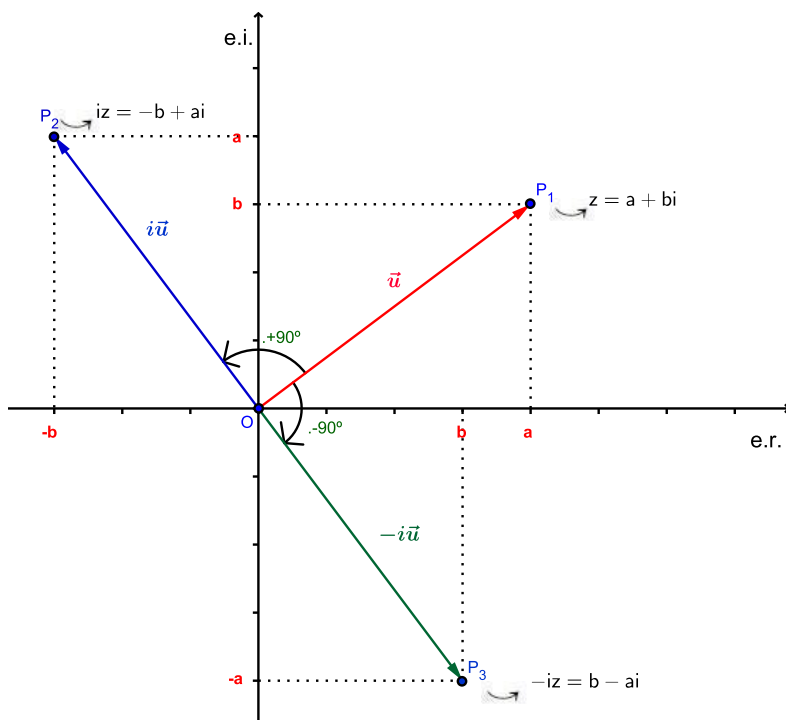
$||\vec{OR}|| = |-3| \times ||\vec{OP}||$; \vec{OR} tem a mesma direção de \vec{OP} e sentido oposto a \vec{OP}

$||\vec{OS}|| = ||\vec{OP}||$; \vec{OS} corresponde à rotação, de centro na origem do referencial, do vetor \vec{OP} , segundo um ângulo de 90° no sentido positivo.

$||\vec{OT}|| = ||\vec{OP}||$; \vec{OT} corresponde à rotação, de centro na origem do referencial, do vetor \vec{OP} , segundo um ângulo de 90° no sentido negativo.

Seja $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}(a, b)$ a imagem vetorial de z .

- A multiplicação de um número complexo z por k , corresponde ao produto do vetor que é a sua imagem vetorial por k ; $kz = ka + kbi$ e $k\vec{u} = (ka, kb)$.
- A multiplicação de um número complexo z por i , corresponde à rotação, de centro na origem do referencial, do vetor \vec{u} , segundo um ângulo de 90° no sentido positivo; $iz = -b + ai$ e $i\vec{u} = (-b, a)$.



- A multiplicação de um número complexo z por $-i$, corresponde à rotação, de centro na origem do referencial, do vetor \vec{u} , segundo um ângulo de 90° no sentido negativo; $-iz = b - ia$ e $-i\vec{u} = (b, -a)$

O professor mostra como efetuar, por via vetorial, a multiplicação de $z_1 = a + bi$ por $z_2 = c + di$.

Quadro

Multiplicação de $z_1 = a + bi$ por $z_2 = c + di$

Sejam $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ as imagens vetoriais de z_1 e z_2 . Então,

$$z_2 \times z_1 = (c + di) \times (a + bi) = \mathbf{c} (a + bi) + \mathbf{di} (a + bi)$$

O vetor \vec{m} correspondente a $z_2 \times z_1$ é $\vec{m} = c \vec{u} + di \vec{u}$, que é a soma de um vetor com a direção de \vec{u} ($c \vec{u}$) com outro que lhe é perpendicular ($di \vec{u}$).

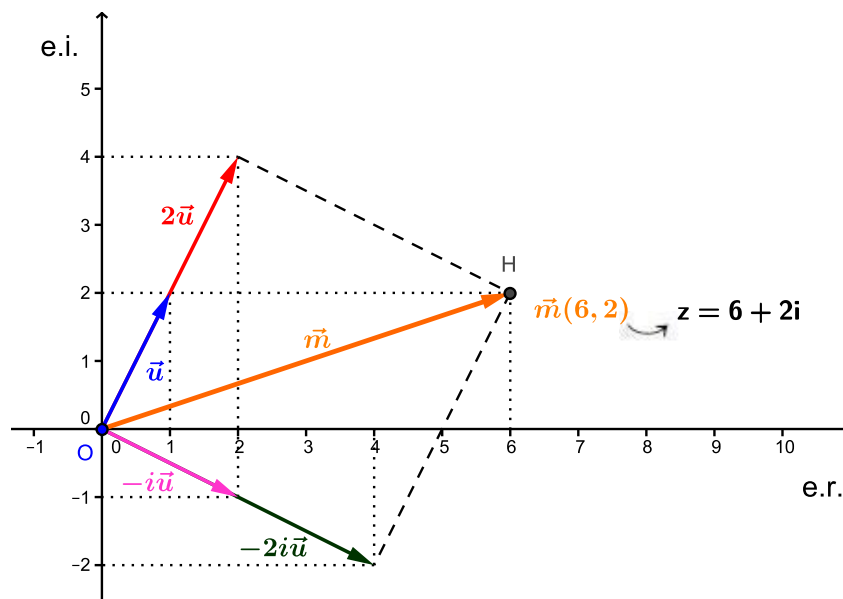
Vamos exemplificar com $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 - 2i$.

Temos $z_2 \times z_1 = (2 - 2i) \times (1 + 2i)$, $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{m} = 2 \vec{u} - 2i \vec{u}$.

Fazendo a representação geométrica temos:

Videoprojetor

Vamos representar $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{m} = 2 \vec{u} - 2i \vec{u}$.



\vec{m} é a representação vetorial do número complexo $z_2 \times z_1 = 6 + 2i$.

Efetuando a operação de forma algébrica temos,

$z_2 \times z_1 = z_1 \times z_2 = (1 + 2i) \times (2 - 2i) = 2 - 2i + 4i - 4i^2 = 2 + 2i + 4 = 6 + 2i$, coincide com o cálculo efetuado por via vetorial.

O professor propõe a resolução do exercício 193 do manual adotado, [38, p. 79].

Exercício 193

Considera os números complexos $z_1 = -2 + 3i$ e $z_2 = 3 - i$.

Efetua por via vetorial:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 \times z_2$

Confirma algebricamente os resultados.

Videoprojetor

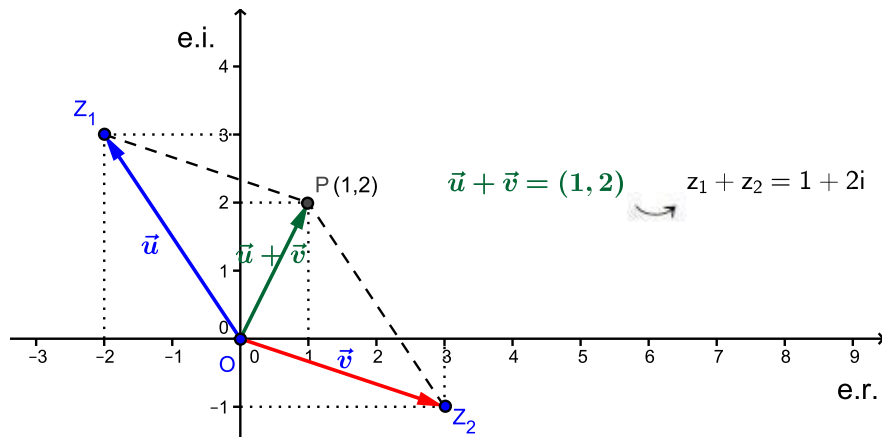
Resolução:

a)

$$z_1 = -2 + 3i \hookrightarrow \vec{u} = (-2, 3)$$

$$z_2 = 3 - i \hookrightarrow \vec{v} = (3, -1)$$

Cálculo de $z_1 + z_2$ por via vetorial:



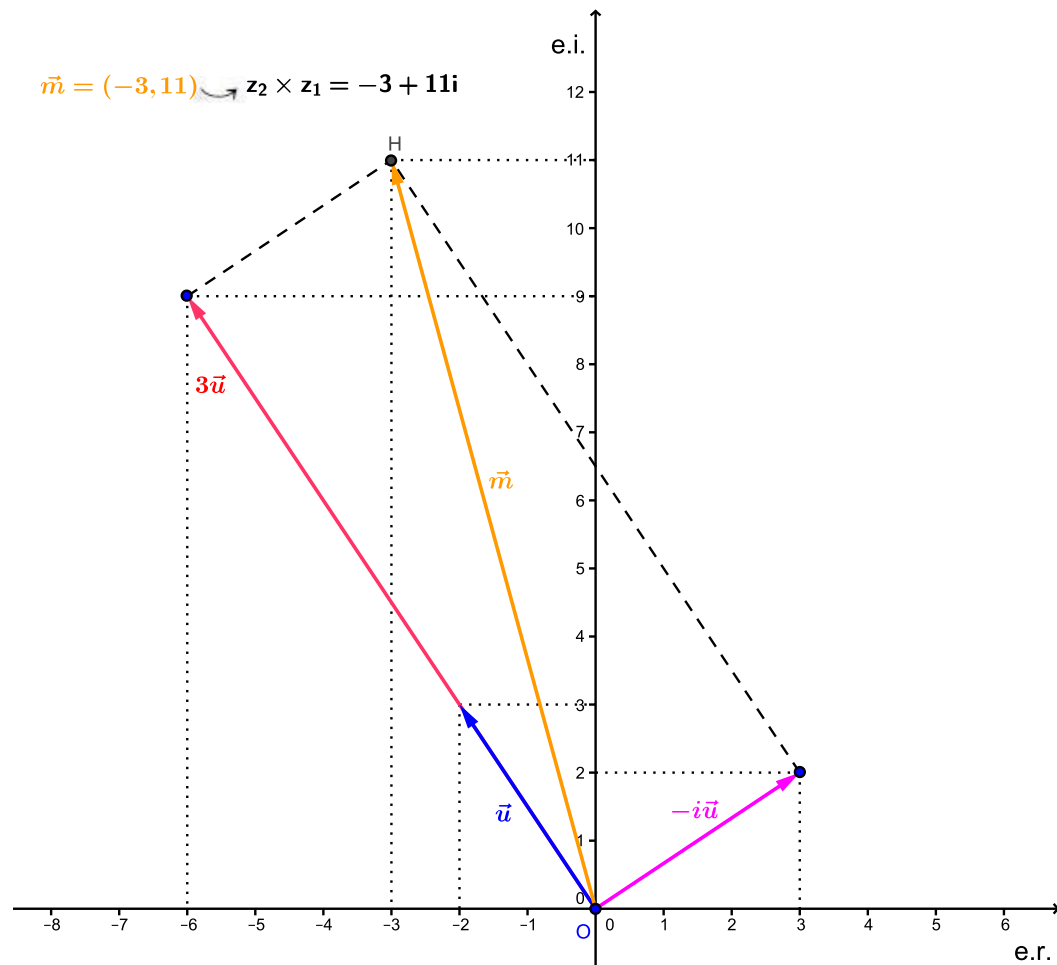
Cálculo de $z_1 + z_2$ por via algébrica:

$$z_1 + z_2 = -2 + 3i + 3 - i = 1 + 2i, \text{ coincide com o cálculo efetuado por via vetorial.}$$

b)

Cálculo de $z_1 \times z_2$ por via vetorial:

$$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1 = (3 - i) \times (-2 + 3i) \hookrightarrow \vec{m} = 3\vec{u} - i\vec{u}, \text{ onde } \vec{u} = (-2, 3).$$



Cálculo de $z_1 \times z_2$ por via algébrica:

$$z_1 \times z_2 = (-2 + 3i) \times (3 - i) = -6 + 2i + 9i - 3i^2 = -6 + 11i - 3(-1) = -6 + 11i + 3 = -3 + 11i, \text{ coincide com o cálculo efetuado por via vetorial.}$$

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição do tema.
- Colaboração com o professor e com os colegas na resolução dos exercícios propostos.
- Comportamento na sala de aula.

Referências

[13] [15] [38]

3.6.6 Planificação Aula 8 ◊ Trigonometria no triângulo retângulo - 9º ano

Unidade Didática VI- **Trigonometria no triângulo retângulo**

Tópico Central - **Relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo agudo**

Aulas nº: 144 e 145
Duração: 90 min.

Ano/Turma: 9ºB
Data: 21/05/2014

Sumário

Relações entre o seno, cosseno e tangente da amplitude de um ângulo agudo.
Relação fundamental da Trigonometria.
Resolução de exercícios de aplicação.

Pré-Requisitos

- Razões trigonométricas de ângulos agudos.

Materiais e Recursos

- Manual adotado: Novo Espaço. Parte 2 - Matemática A 9º ano [9]
- Quadro
- Marcadores
- Quadro interativo
- Computador para o professor
- Videoprojetor

Objetivos

No final da aula os alunos devem saber:

- Reconhecer e aplicar as relações entre o seno, cosseno e tangente da amplitude de um ângulo agudo.
- Reconhecer e aplicar a relação fundamental da Trigonometria.

Competências transversais

- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capaz de os usar.
- Compreender e ser capaz de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano.
- Desenvolver a capacidade de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos.

Conteúdos/Estratégias de ensino-aprendizagem

As indicações *Quadro* ou *Videoprojetor* referenciam informação que o aluno deve copiar para o caderno.

Aulas nº: 144 e 145 *Quadro*

Data: 21/05/2014

Sumário:

Relações entre o seno, cosseno e tangente da amplitude de um ângulo agudo.

Relação fundamental da Trigonometria.

Resolução de exercícios de aplicação.

Relações entre razões trigonométricas

O professor desenha um triângulo $[ABC]$, retângulo em C , cujas medidas de comprimento de cada um dos lados estão identificadas com as letras a , b e c , no qual assinala um dos ângulos agudos.

Videoprojetor

Considere-se um triângulo retângulo $[ABC]$ em que as medidas dos lados são representadas por a , b e c , conforme é indicado na figura, sendo α a amplitude do ângulo de vértice A

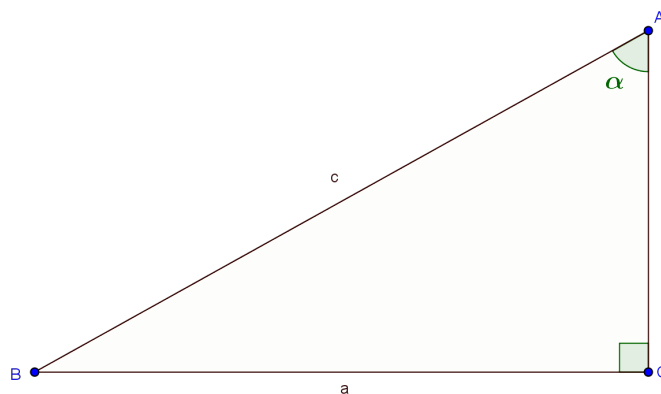


Fig. 1

O professor escreve no quadro:

Quadro

a) $\sin \alpha =$

b) $\cos \alpha =$

c) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$

d) $\tan \alpha =$

Os alunos terão de completar as igualdades, atendendo às letras da figura. Depois de escritas as igualdades, o professor pede aos alunos para estabelecerem uma relação entre o seno, o cosseno e a tangente de α e regista no quadro a relação pedida.

Quadro

a) $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

b) $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

c) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

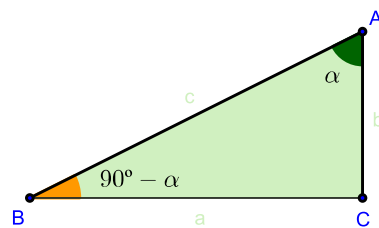
d) $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

O professor propõe a resolução do **exercício 18** do manual adotado, [9, p. 100].

Exercício 18.

Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.



A partir dos dados apresentados na figura, completa as igualdades no teu caderno.

18.1 $\sin \alpha = \dots$

18.2 $\cos(90^\circ - \alpha) = \dots$

18.3 $\sin(90^\circ - \alpha) = \dots$

18.4 $\cos \alpha = \dots$

18.5 $\tan \alpha = \dots$

18.6 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

Quadro

Resolução:

18.1.
 $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

18.2.
 $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$

O professor faz referência ao facto de $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$

18.3.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

18.4.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

O professor faz referência ao facto de $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$

18.5.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

18.6.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan \alpha$$

O professor propõe a resolução dos exercícios 19 e 20 do manual adotado, [9, p. 100].

Exercício 19

Em relação a um ângulo agudo de amplitude θ , sabe-se que:

- $\sin \theta = \frac{5}{13}$
- $\cos \theta = \frac{12}{13}$

Determina o valor de $\tan \theta$.

Exercício 20

Em relação a um ângulo agudo de amplitude α , sabe-se que:

- $\cos \alpha = \frac{15}{17}$
- $\tan \alpha = \frac{8}{15}$

Determina o valor de $\sin \alpha$.

Quadro

Resolução:

19.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{5}{12}$$

20.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{8}{15} \times \frac{15}{17} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{8}{17}$$

Relação fundamental da Trigonometria

O professor volta a projetar o triângulo da Fig. 1.

Quadro

Por aplicação do Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

Pelas razões trigonométricas temos:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ e } \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Como,

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = c \sin \alpha \text{ e } \cos \alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \cos \alpha,$$

substituindo em (1), vem:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow (c \sin \alpha)^2 + (c \cos \alpha)^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 (\sin \alpha)^2 + c^2 (\cos \alpha)^2 = c^2$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por c^2 ($c \neq 0$), obtemos:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \quad (2)$$

Notações:

$$(\sin \alpha)(\sin \alpha) = (\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha.$$

O mesmo se aplica às outras razões trigonométricas:

$$(\cos \alpha)(\cos \alpha) = (\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha \text{ e}$$

$$(\tan \alpha)(\tan \alpha) = (\tan \alpha)^2 = \tan^2 \alpha.$$

O professor refere que a equação (2) pode ser escrita como a seguir se indica e que esta igualdade é denominada de *Relação fundamental da Trigonometria*.

Videoprojector

Relação fundamental da Trigonometria

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

O professor propõe a resolução do **exercício 21** do manual adotado, [9, p. 101].

Exercício 21

Em relação a um ângulo agudo de amplitude β , sabe-se que $\sin \beta = 0,3$.

Determina o valor exato de:

21.1. $\cos \beta$

21.2 $\tan \beta$

Quadro

Resolução:

21.1

Pela relação fundamental da Trigonometria,

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta.$$

Sabemos que $\sin \beta = 0,3$, logo:

$$\cos^2 \beta = 1 - (0,3)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \beta = 1 - 0,09 \Leftrightarrow \cos^2 \beta = 0,91; \text{ como } \cos \beta > 0, \cos \beta = \sqrt{0,91}$$

21.2

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \Leftrightarrow \tan \beta = \frac{0,3}{\sqrt{0,91}} \Leftrightarrow \tan \beta = \sqrt{\frac{0,09}{0,91}}$$

O professor mostra como a partir da relação fundamental da Trigonometria se estabelece a relação entre a tangente de um ângulo agudo e o cosseno do mesmo.

Quadro

A partir da relação fundamental da Trigonometria ,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

dividindo ambos os membros da igualdade por $\cos^2 \alpha$, obtem-se:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \boxed{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}}$$

O professor propõe a resolução dos exercícios 23, 24 e 25 do manual adotado, [9, p. 102].

Exercício 23

Sabe-se que $\tan \beta = \frac{5}{2}$, sendo β a amplitude de um ângulo agudo.

Determina:

23.1 $\cos \beta$

23.2 $\sin \beta$

Exercício 24

Para um ângulo agudo de amplitude α indica, justificando, se é possível ter:

24.1 $\sin \alpha = \frac{3}{2}$

24.2 $\cos \alpha = 0,25$ e $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

24.3 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

24.4 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e $\tan \alpha = \sqrt{8}$

Exercício 25

Seja α a amplitude de um ângulo agudo tal que:

$$\tan \alpha = \sqrt{8}$$

Mostra que:

$$\sin \alpha \times \cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{9}$$

Quadro

Resolução:

23.1

Sabemos que $\tan \beta = \frac{5}{2}$ e

$$1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}, \text{ logo,}$$

$$1 + \frac{25}{4} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{29}{4} = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{4}{29}, \text{ como } \cos \beta > 0, \text{ então,}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

23.2

Pela relação fundamental da Trigonometria: $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$.

Como $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{29}}$, temos:

$$\sin^2 \beta + \frac{4}{29} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{4}{29} \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{25}{29}, \text{ como } \sin \beta > 0, \text{ vem:}$$

$$\sin \beta = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

24.1

Sabemos que $\sin \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$.

Como *medida da hipotenusa* > *medida do cateto*, então $\sin \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} < 1$.

Assim, não é possível ter $\sin \alpha = \frac{3}{2}$.

24.2

Pela relação fundamental da Trigonometria: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Se $\cos \alpha = 0,25$ e $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ temos:

$$0,25^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = 0,0625 + 0,9375 = 1$$

É verificada a relação fundamental da Trigonometria,

então é possível ter $\cos \alpha = 0,25$ e $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

24.3

Pela relação fundamental da Trigonometria: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Se $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ temos:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} \neq 1.$$

Não é satisfeita a relação fundamental da Trigonometria,

logo, não é possível ter $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

24.4

Sabemos que $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Se $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e $\tan \alpha = \sqrt{8}$, então:

$$1 + (\sqrt{8})^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow 9 = 9 \text{ P.V.}$$

Logo, é possível ter $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e $\tan \alpha = \sqrt{8}$.

25.

Sabemos que $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Se $\tan \alpha = \sqrt{8}$, temos:

$$1 + (\sqrt{8})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 = \frac{1}{9}, \text{ como } \cos \alpha > 0, \text{ então: } \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Sabemos que $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,

de onde $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha$, logo,

$$\sin \alpha = \sqrt{8} \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Assim temos:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{8}}{9} \text{ c.q.d.}$$

Avaliação

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos:

- Interesse demonstrado durante a aula.
- Participação durante a exposição do tema.
- Colaboração com o professor e com os colegas na resolução dos exercícios propostos.
- Comportamento na sala de aula.

Referências

[9] [30]

3.7 Atividades extraletivas

Desde o início do ano letivo que me envolvi na vida ativa da escola, tendo sugerido atividades para o PAA. Trabalhei com os meus colegas de estágio, com afinco e motivação, para os eventos atrás descritos. Criei materiais para os alunos e para controlo das próprias atividades, elaborei certificados e outra documentação necessária, dinamizei as atividades. A resposta dos alunos, da Orientadora Cooperante, bem como da Direção da escola, foi gratificante. O ano letivo não é só feito de aulas, deve ser complementado por atividades que criem nos alunos atitudes positivas em relação à escola e onde também possam aplicar e desenvolver os conhecimentos adquiridos.

Durante o EP o Núcleo de Estágio organizou e dinamizou as seguintes atividades:

Data	Atividade	Materiais elaborados	Participantes
10 de janeiro de 2014	ESCMdesafios (realizado no âmbito das comemorações do 130º aniversário da ESCM)	<ul style="list-style-type: none">• Fichas com vários desafios matemáticos, cujos resultados permitiam obter partes das coordenadas GPS do próximo local do jogo.• Documentação para registo dos resultados das equipas participantes e respetivos tempos.• Certificados para os organizadores e dinamizadores, vencedores de 1º, 2º, 3º lugares do Ensino Básico e Secundário e para os restantes participantes.	300 alunos inscritos.
14 de março de 2014	Dia do Pi	Frases alusivas ao Pi. Vídeos com a História do Pi. Faixa com a aproximação do número Pi (os alunos foram desafiados a acrescentar mais casas decimais).	Para todos os alunos.
24 de abril de 2014	Dia dos Departamentos	Jogos interativos. Elaboração de painel com quadriláteros feitos com areia colorida.	Para todos os alunos e pais.

10º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos

No dia 14 de março, acompanhei quatro alunos da ESCM para participarem no 10º Campeonato de Jogos Matemáticos, que teve lugar no Fundão.

O Núcleo de Estágio colaborou na preparação e seleção dos alunos para o Campeonato.

3.8 Seminários e Formação

Durante o presente ano letivo participei nos seguintes eventos de Matemática:

Data	Nome	Local
14.12.2013	Dia de Conferências Matemática do Planeta Terra 2013	Covilhã: UBI
10.01.2014	ESCMdesafios Organizado e dinamizado pelo Núcleo de Estágio de Matemática	Covilhã: ESCM, Praça do Município
14.03.2014	10º Campeonato de Jogos Matemáticos	Fundão
30.04.2014	Formação - Escola Virtual em contexto de ensino-aprendizagem	Covilhã: Escola Pêro da Covilhã
08.05.2014	M@UBI - De Ms Katharine O'Brien ao Haiku F. Craveiro de Carvalho. Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.	Covilhã: UBI
31.05.2014	IV Dia Geogebra Portugal: Para além de Euclides	Porto: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto
26.06.2014	M@UBI - Geometria: o seu papel no Ensino Básico e no Ensino Secundário Carlos Farias. Escola Secundária Quinta das Palmeiras.	Covilhã: UBI
26.06.2014	M@UBI - Melhor par aproximante de duas variedades lineares José Vitória. Universidade de Coimbra.	Covilhã: UBI

Ensinar é também estar continuamente a aprender e requer uma formação contínua de qualidade. Procurei e participei em eventos que acrescentaram valor aos meus conhecimentos e que me proporcionaram momentos de reflexão sobre a Matemática e a prática letiva.

3.9 Conclusões

O *Estágio Pedagógico*, nas suas variadas vertentes, já descritas neste relatório, proporcionou um ano de intensa atividade e aprendizagem. Apliquei conceitos teóricos de Didática da Matemática e desenvolvi, com a *Prática de Ensino Supervisionada*, a experiência em sala de aula que me permite avançar para a minha futura atividade como professora com confiança e motivação.

Ciente de que "ser professor" se constrói em cada dia, em cada aula, que cada turma tem as suas especificidades, que cada aluno tem uma personalidade própria e necessidades diferenciadas, espero que o meu caminho seja preenchido com muitas aulas, muitos alunos, plenas de ensino e aprendizagem mútuos.

◇ ◇ ◇

O professor tem nas suas mãos a linda tarefa de ensinar e ensinar não é só mostrar o caminho é também ajudar os alunos a descobri-lo, para que a aprendizagem seja uma motivante sensação de descoberta e criatividade.

Regina Guimarães

Bibliografia

- [1] Araújo, P. V. (2012). *Curso de Geometria*. Lisboa: Gradiva. 18, 39, 40, 60, 62, 65
- [2] Ash, A. & Gross, R. (2012). *Elliptic Tales*. Oxford: Princeton University Press.
- [3] Boyer, C. B. (2003). *História da Matemática*. Basil: Edgard Blucher, Ltda. 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21
- [4] Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática. Parte 2. Capítulo I. Secção 2*. Lisboa: Gradiva. 49
- [5] Conceição, A. & Almeida, M. (2012) *Matematicamente falando 9 - Matemática 9º ano. Livro do professor*. Porto: Areal Editores. 111
- [6] Constantino, A. (2009) *Sangaku*. Lisboa: Associação Ludus.
- [7] Correia, O., Passos, I. & Thudichum B. (2012). *Matemática em ação 9. Parte 1*. Lisboa: Raiz Editora. 98
- [8] Costa, B. & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço. Matemática A 9º ano. Parte 1*. Porto: Porto Editora. 91, 92, 94, 95, 98
- [9] Costa, B. & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço. Matemática A 9º ano. Parte 2*. Porto: Porto Editora. 99, 101, 102, 103, 105, 108, 110, 111, 147, 149, 150, 152, 153, 155
- [10] Dunham, W. (1991). *Journey through Genius - The Great Theorems of Mathematics*. Johannesburg: Penguin books. 61
- [11] Fonseca, C., Fonseca, M., Lopes, I., Martins, A. & Silva, J. C. (coord.) (2001). *Programa de Matemática A do 10º ano dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Sócioeconómicas*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário. 11, 23
- [12] Fonseca, C., Fonseca, M., Lopes, I., Martins, A. & Silva, J. C. (coord.) (2001). *Programa de Matemática A do 11º ano dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Sócioeconómicas*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário. 11, 23
- [13] Fonseca, C., Fonseca, M., Lopes, I., Martins, A. & Silva, J. C. (coord.) (2001). *Programa de Matemática A do 12º ano dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Sócioeconómicas*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário. 11, 23, 54, 83, 129, 145
- [14] Fuller, G. & Tarwater D. (1986). *Analytic Geometry*. USA: Addison-Wesley Publishing Company.
- [15] GAVE - Gabinete de Avaliação Educacional (2012). *Matemática A - Volume III - Funções e Complexos*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. 129, 145
- [16] Guerreiro, L., Leite, A., Neves, M. A. & Silva, J. N. (2010). *Matemática A 10º ano - Geometria I*. Porto: Porto Editora. 14
- [17] Guimarães, H. M. (Set. Out. 2009). *Educação e Matemática*. Nº 104, p. 3 - 7
http://www.apm.pt/files/_EM104_pp03-07_hq_4a895f530667c.pdf 10

- [18] Heath, T. L. (translation) (2010). *Euclid's Elements*. USA: Green Lion Press. 22
- [19] Hidetoshi, F. & Rothman, T. (2008) *Sacred Mathematics - Japanese Temple Geometry*. USA: Princeton University Press. 55, 57, 58
- [20] Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics. An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers. 21
- [21] Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Arithmetic Algebra and Analysis*. New York: Courier Corporation. 59
- [22] Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry*. New York: Courier Corporation. 21
- [23] Lehmann, I. & Posamentier, A. S. (2012). *The Secret of Triangles - A Mathematical Journey*. New York: Prometheus Books.
- [24] Lima, E. L., Carvalho P., Wagner E. & Morgado A. (2007). *A Matemática do Ensino Médio. Volume 3. Cap. 1 - Geometria Analítica Plana, p. 1-71*. Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática. 23, 41, 43, 44, 45
- [25] Lima, E. L., Carvalho P., Wagner E. & Morgado A. (2007). *A Matemática do Ensino Médio. Volume 4. Enunciados e Soluções dos Exercícios*. Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática. 43, 44, 45
- [26] Neves M. A., Raposo M. J., Silva A. & Silva J. (2012) *Matemática 9º ano. Parte 1*. Porto: Porto Editora. 98
- [27] Neves, A., Pereira, A. & Silva, J. (2012) *Matemática A - 12º ano. Funções III*. Porto: Porto Editora. 129
- [28] Neves, A., Pereira, A. & Silva, J. (2012) *Matemática A - 12º ano. Trigonometria*. Porto: Porto Editora.
- [29] Pinto, M. M. (2011) *Gazeta da Matemática* Nº 165, Artigo 346, p. 36 - 42 53
<http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=346>
- [30] Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Novo programa de matemática do ensino básico*. ME-DGIDC. 10, 12, 54, 83, 98, 103, 111, 155
- [31] Ralha, E. (Nov. 2010). *Gazeta da Matemática*. Nº 162, Artigo 303, p. 29 - 32
<http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=303> 54
- [32] Rich, B (1972). *Geometria Plana. Coleção Schaum*. Brasil: Editora McGraw-Hill, Ltda. 13
- [33] Rosenberg, S., Spillane, M. & Wulf, D. (May 2008). *Mathematics Teachers*. Volume 101, Issue 9, p. 656 - 663
https://rankin.instructure.com/courses/154463/files/14161446?module_item_id=3971591 54
- [34] Silva, J. N. (2012) *Gazeta de Matemática*, Nº 166, p. 6 - 7
<http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=350>
- [35] Silverman, J. H. (2009). *Graduate Texts in Mathematics. The Arithmetic of Elliptic Curves*. New York: Springer Science & Business Media.

- [36] Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental. Formação de professores e aplicação em sala de aula*. Brasil: Artmed. 1, 3, 5, 7
- [37] Viegas, C., Gomes, F. & Lima, Y. (2012). *Xeqmat12 - Volume 2. Matemática A - 12º ano*. Lisboa: Texto Editores. 113, 115, 116, 125, 129
- [38] Viegas, C., Gomes, F. & Lima, Y. (2012). *Xeqmat12 - Volume 3. Matemática A - 12º ano*. Lisboa: Texto Editores. 49, 131, 134, 136, 139, 140, 143, 145

Webgrafia

- [39] <http://blog.kleinproject.org/?p=4> 54
- [40] <http://pt.scribd.com/doc/216452062/K-Borsuk-and-W-Szmielew-Foundations-of-Geometry> 21
- [41] <http://www.focusonmath.org> 54
- [42] <http://www.maa.org/sites/default/files/0746834230078.di020712.02p0027m.pdf>
- [43] <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/TangentAndEquilateralTriangle.shtml#solution>
- [44] <http://www.mathunion.org/icmi/other-activities/klein-project/introduction/>
- [45] <http://www.nctm.org/resources/content.aspx?id=25082> 3
- [46] <http://www.projekt.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/klein/index.html> 54
- [47] http://wikis.zum.de/dmuw/Heron_Triangles_and_Elliptic_Curves
- [48] http://wikis.zum.de/dmuw/index.php?title=The_Klein_Project

Apêndice A

Anexos

A.1 Ficha de Trabalho - Aula 5

Ficha de Trabalho - Circunferências e Triângulos

Tarefa 1:

1.1 Desenha um triângulo $[ABC]$.

1.2 Traça as mediatrizes dos seus três lados. Elas interseccionam-se num ponto O , marca esse ponto.

1.3 Desenha a circunferência de centro em O e que passa por A .

1.4 Observa que esta circunferência passa pelos três vértices do triângulo. Explica porquê.

1.5 Se tivesses traçado somente duas mediatrizes, terias conseguido desenhar a circunferência anterior?

Explica a tua resposta.

Tarefa 2:

2.1 Desenha um triângulo $[ABC]$.

2.2 Traça as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$. Elas interseccionam-se num ponto O , marca esse ponto.

2.3 Desenha a circunferência que é tangente a um dos lados do triângulo e cujo centro é o ponto O .

2.4 Esta circunferência é tangente aos três lados do triângulo. Explica porquê.

2.5 Se tivesses traçado apenas duas bissetrizes, terias conseguido traçar a circunferência anterior?

Explica a tua resposta.

