



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

ANÁLISE DE PLACAS DE BETÃO PRÉ-ESFORÇADO COM BASE NO MODELO DE TRELIÇA COM AMOLECIMENTO

(Versão final após defesa pública)

Ana Rita Batisti Lyrio

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil
(Ciclo de estudos integrado)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo
Coorientador: Prof. Doutor Bernardo Horowitz

Covilhã, novembro de 2017

Agradecimentos

A realização desta dissertação seria mais dificultada se eu não tivesse recebido o precioso apoio de algumas pessoas às quais não posso deixar de manifestar o meu sincero agradecimento.

Ao Professor Doutor Luís Bernardo, orientador científico desta dissertação, por todo o ensino, encorajamento e dedicação transmitidos desde o início do meu percurso académico. Muito obrigada pela disponibilidade e paciência.

Agradeço ao Professor Doutor Bernardo Horowitz, coorientador desta dissertação, pela disponibilidade, comentários e observações que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho. Ao Mestre Jordlly Silva, muito obrigada pelo interesse e apoio sempre demonstrado, bem como os esclarecimentos e sugestões dados para complementar a dissertação.

Obrigada também ao Macedo, César e Juan, pela ajuda na programação do código em MATLAB.

À Carla, que realiza indescritivelmente o seu papel de mãe e amiga, com amor e garra sobrenaturais, sem me deixar faltar nada. Ao meu pai Nelcimar, que sempre me colocou os pés no chão, o meu sincero agradecimento. Ao meu padrasto e amigo, Álvaro, obrigada pela oportunidade e apoio incondicional.

À minha irmã, que dividiu angústias e soube me ouvir durante todos esses anos.

Aos amigos de curso, que me fizeram sentir sempre em casa. Em especial à Patrícia Marques, Lucília Seixas, Paula Salvado, Adriana Domingos, Leonor Gorjão e Leonor Maganinho.

Por último, agradeço ao Bernardo Cerquido, por todas as nossas conversas sobre a temática, pela sua ajuda e prontificação em tudo que precisei.

Resumo

Neste trabalho é estudado o comportamento de placas de betão pré-esforçado solicitados ao corte puro com base no modelo de treliça com amolecimento. Para tal, o *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM) para placas de betão armado é generalizado com vista a prever o comportamento global de placas de betão pré-esforçado.

Para isso, o trabalho apresenta o RA-STM modificado para placas de betão pré-esforçado. O modelo incorpora também novas relações constitutivas para os materiais, baseadas em estudos mais recentes, com o intuito de melhorar a previsão do modelo e estender as suas previsões ao comportamento pós-pico de placas ao corte. Para a validação do modelo proposto, a análise numérica realizada é dividida em duas partes. A primeira incorpora análises paramétricas onde foram estudadas a influência de algumas variáveis de estudo, designadamente: o nível e direção do pré-esforço, a taxa mecânica de armadura ordinária e total, e a resistência do betão. Na segunda parte, o modelo RA-STM modificado com pré-esforço foi validado através de análises comparativas com resultados experimentais disponíveis na literatura existente para placas de betão pré-esforçado sujeitas ao corte.

Como procedimento de solução para o RA-STM modificado, em substituição dos procedimentos originais onde a solução é obtida por tentativa e erro, é adotado e implementado um procedimento eficiente que se mostrou apropriado para os objetivos deste trabalho.

Palavras-chave

Placas, betão pré-esforçado, corte, procedimento de solução eficiente, modelo de treliça com amolecimento, RA-STM.

Abstract

In this dissertation, the behavior of prestressed concrete (PC) membrane elements submitted to pure shear were studied based on the softened truss model. To this end, the Rotating-Angle Softened Truss Model (RA-STM) for reinforced concrete (RC) were generalize to predict the overall behavior of prestressed concrete plates.

Therefore, this work presents the modified RA-STM for prestressed concrete plates. The model also incorporates new constitutive relationships for materials based on more recent studies, in order to improve the prediction of the model and to extend its predictions to the post-peak behavior of plates to the shear. For the validation of the proposed model, the numerical analysis performed is divided in two parts. The first part incorporates parametric analyzes where the influence of some variables as the level and direction of the prestress, the mechanical ratio of ordinary and total reinforcement steel, and the resistance of the concrete were studied. In the second part, the theoretical results obtained from the refined RA-STM are compared with some experimental results found in the literature.

As a solution procedure for the modified RA-STM, in replacement of the original procedures, where the solution is obtained by a trial and error calculation, an efficient procedure is adopted and implemented being suitable for the purposes of this study.

Keywords

Plates; Prestressed concrete; Shear; Efficient solution procedure; Softened truss model; RA-STM.

Índice

Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 Enquadramento	1
1.2 Modelos analíticos para a análise de placas de betão estrutural	3
1.2.1 Revisão bibliográfica sobre modelos analíticos para simular o comportamento ao corte de placas de betão pré-esforçado.....	5
1.3 Justificação do tema do trabalho e objetivos propostos	6
1.4 Organização do documento	8
Capítulo 2 - Modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável - RA-STM	9
2.1 Introdução	9
2.2 Descrição do modelo	10
2.2.1 Equilíbrio das tensões.....	12
2.2.2 Compatibilidade das deformações.....	15
2.3 Relações constitutivas dos materiais.....	16
2.3.1 Betão submetido à compressão	16
2.3.2 Armaduras ordinárias submetidas à tração	22
2.3.3 Armaduras de pré-esforço submetida à tração.....	24
2.4 Modelo de treliça elástico linear	32
2.4.1 Carregamento proporcional.....	33
2.5 Procedimento de solução	35
2.5.1 Equações adicionais	35
2.5.2 Equação não linear de estimativa inicial (<i>FMCTM</i>)	36
2.5.3 Sistema de equações não lineares do RA-STM.....	37
2.5.4 Algoritmo de solução proposto.....	37
Capítulo 3 - Análises Paramétricas e Validação do RA-STM modificado.....	41
3.1 Introdução	41
3.2 Análises paramétricas.....	41
3.2.1 Placas de resistência normal	42
3.2.2 Placas de alta resistência	43
3.2.3 Resumo das características das placas escolhidas	45
3.2.4 Definição dos níveis de pré-esforço	46
3.3 Análise da influência das variáveis de estudo	50
3.3.1 Nível e direção do pré-esforço	50
3.3.2 Resistência à compressão do betão	53
3.3.3 Taxa de armadura	55

3.3.4	Análise suplementar - Ângulo de inclinação das escoras	59
3.4	Análises comparativas com resultados experimentais	60
3.4.1	Placas pré-esforçadas ensaiadas por Laskar et al. [24]	61
3.4.1.1	Ajustamentos do modelo para a análise comparativa	62
3.4.1.2	Análises comparativas com Laskar et al. [24]	64
3.4.1.3	Gráficos de comportamento	64
3.4.1.4	Análise do comportamento das placas em função do parâmetro η'	73
3.4.2	Placas pré-esforçadas analisadas por Marti e Meyboom [23]	74
3.4.2.1	Análises comparativas com Marti e Meyboom [23]	75
3.4.2.2	Gráficos de comportamento	75
3.5	Análise da resistência ao corte	76
3.6	Eficiência computacional	77
3.7	Conclusões preliminares.....	78
Capitulo 4 - Conclusões e propostas para trabalhos futuros		79
4.1	Introdução	79
4.2	Conclusões	79
4.2.1	Análises paramétricas	79
4.2.2	Análises comparativas com resultados experimentais	80
4.3	Propostas para trabalhos futuros	82
Bibliografia		83
Anexos		87

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Simplificação de estruturas de betão armado em elementos do tipo placa [1].	1
Figura 1.2 - Esquema das forças locais para um estado plano de tensão.	3
Figura 2.1 - Exemplo geral de uma placa sujeita ao corte [2].	10
Figura 2.2 - Elemento bidimensional de betão pré-esforçado sujeito esforços de membrana. Adaptado de [19].	13
Figura 2.3 - Comparação entre curvas σ - ϵ do betão à compressão.	19
Figura 2.4 - Comparação entre estudos de Belarbi e Hsu [12] e Hsu e Mo [1] para a contribuição da extensão de tração na contabilização do efeito de amolecimento.	20
Figura 2.5 - Relações σ - ϵ para a armadura isolada e para a armadura embebida no betão. Adaptado de [13].	24
Figura 2.6 - Conceito de descompressão do betão [37] [38].	26
Figura 2.7 - Curva σ - ϵ baseada na equação de Ramberg-Osgood.	27
Figura 2.8 - Curva σ - ϵ da armadura de pré-esforço [40].	29
Figura 2.9 - Comparação entre a curva σ - ϵ linear e não linear.	30
Figura 2.10 - Zona de cruzamento das curvas.	30
Figura 2.11 - Comparação entre a curva σ - ϵ linear e não linear após calibração.	32
Figura 2.12 - Zona de intersecção das curvas após calibração.	32
Figura 2.13 - Relação entre as solicitações e a tensão principal de tração através dos coeficientes de proporcionalidade. Adaptado de [1].	34
Figura 2.14 - Fluxograma do procedimento proposto: modelo RA-STM modificado com pré-esforço.	40
Figura 3.1 - Características das placas ensaiadas por Pang e Hsu [13].	42
Figura 3.2 - Características das placas ensaiadas por Zhang e Hsu [14]	44
Figura 3.3 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal): placa VA2 [14]	51
Figura 3.4 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal e transversal): placa VA2 [14].	52
Figura 3.5 - Influência da direção de pré-esforço: placa VA2 [14].	53
Figura 3.6 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$ (pré-esforço numa direção). Placa VA1 [14].	54
Figura 3.7 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$ (pré-esforço nas duas direções). Placa VA1 [14].	54
Figura 3.8 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$ (pré-esforço numa direção). Placa A2 [13].	55
Figura 3.9 - Curvas $\sigma_D - \gamma_{LT}$ (pré-esforço em duas direções). Placa VA2 [14].	55

Figura 3.10 - Curvas $\sigma_S - \gamma_{LT}$ para a armadura ordinária longitudinal (pré-esforço nas duas direções). Placa VA2 [14].	57
Figura 3.11 - Curvas $\sigma_S - \gamma_{LT}$ para a armadura ordinária longitudinal (pré-esforço nas duas direções): comparação entre as placas A2, VA1 e VA2.	57
Figura 3.12 - Curvas $\sigma_S - \gamma_{LT}$ para as armaduras ordinárias (longitudinal e transversal) (pré-esforço numa direção). Placa VA2 [14].	58
Figura 3.13 - Curvas $f_{ps} - \gamma_{LT}$ (pré-esforço nas duas direções). Placa VA2 [14].	59
Figura 3.14 - Curvas $\alpha_D - \varepsilon_D$ (pré-esforço numa direção). Placa A2 [13].	60
Figura 3.15 - Geometria e referenciais das placas ensaiadas por Laskar et al. [24].	61
Figura 3.16 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-1 [24].	65
Figura 3.17 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-2 [24].	65
Figura 3.18 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-3 [24].	65
Figura 3.19 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-4 [24].	66
Figura 3.20 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-5 [24].	66
Figura 3.21 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$: placa TA-1 [24].	67
Figura 3.22 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$: placa TA-2 [24].	67
Figura 3.23 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$: placa TA-3 [24].	68
Figura 3.24 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$: placa TA-4 [24].	68
Figura 3.25 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$: placa TA-5 [24].	68
Figura 3.26 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_R$: placa TA-1 [24].	69
Figura 3.27 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_R$: placa TA-2 [24].	69
Figura 3.28 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_R$: placa TA-3 [24].	70
Figura 3.29 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_R$: placa TA-4 [24].	70
Figura 3.30 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_R$: placa TA-5 [24].	70
Figura 3.31 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-1 [24].	71
Figura 3.32 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-2 [24].	71
Figura 3.33 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-3 [24].	72
Figura 3.34 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-4 [24].	72
Figura 3.35 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-5 [24].	72
Figura 3.36 - Geometria e referenciais das placas ensaiadas por Meyboom [22] e analisadas por Marti e Meyboom [23].	74
Figura 3.37 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa PP2 [23].	76

Lista de Tabelas

Tabela 2.1- Extensão $\varepsilon_{ps0.7pu}$ associada à parte linear da curva $\sigma - \varepsilon$ da armadura de pré-esforço.	30
Tabela 3.1 - Características das placas da série A [13].	43
Tabela 3.2 - Características das placas da série VA [14].	44
Tabela 3.3 - Características das placas escolhidas para as análises paramétricas.	45
Tabela 3.4 - Reforço Longitudinal (PL) - Taxa de armadura de pré-esforço por placa e nível.	48
Tabela 3.5 - Reforço Longitudinal e transversal (PL_PT) - Taxa de armadura de pré-esforço por placa e nível.	48
Tabela 3.6 - Reforço Longitudinal (PL) - Taxa total de armadura por placa e nível.	49
Tabela 3.7 - Reforço Longitudinal e transversal (PL_PT) - Taxa total de armadura por placa e nível.	49
Tabela 3.8 - Características das placas da série TA (armadura longitudinal), Laskar et al. [24].	62
Tabela 3.9 - Características das placas da série TA (armadura transversal), Laskar et al. [24].	62
Tabela 3.10 - Armaduras mínimas de corte para as placas TA-1 a TA-5.	63
Tabela 3.11 - Características das placas da série PP [23].	75
Tabela 3.12 - Análise comparativa da resistência ao corte.	77

Lista de Acrónimos

ACI	<i>American Concrete Institute</i>
CA-STM	<i>Combined Action Softened Truss Model</i>
CEB	<i>Comité Euro-International du Béton</i>
FA-STM	<i>Fixed-Angle Softened Truss Model</i>
HSC	<i>High Strength Concrete</i>
MCTM	<i>Mohr Compatibility Truss Model</i>
NP	<i>Norma Portuguesa</i>
NSC	<i>Normal Strength Concrete</i>
RA-STM	<i>Rotating-Angle Softened Truss Model</i>
SMM	<i>Softened Membrane Model</i>
SMM-PC	<i>Softened Membrane Model for Prestressed Concrete</i>
STM	<i>Softened Truss Model</i>
VA-TM	<i>Variable Angle Truss Model</i>

Simbologia

Alfabeto Latino

A_c	Área da secção de betão
A_h	Área da zona vazada da secção de betão
A_s	Área de armadura ordinária
A_{sl}	Área de armadura ordinária longitudinal
A_{sp}	Área total da armadura de pré-esforço por direção
A_{st}	Área de armadura ordinária transversal
A_{spL}	Área de armadura de pré-esforço longitudinal
A_{spT}	Área de armadura de pré-esforço transversal
A_{st}	Área de armadura ordinária transversal
B	Segundo coeficiente para o cálculo de σ_1
C	Terceiro coeficiente para o cálculo de σ_1
E_s	Módulo de Elasticidade do aço
E_c	Módulo de Elasticidade do betão
E_{ps}	Módulo de Elasticidade da armadura de pré-esforço
E'_{ps}	Módulo de elasticidade de Ramberg-Osgood
F_{MCTM}	Função resíduo do MCTM
F_{RA-STM}	Função resíduo do RA-STM
f_{ck}	Tensão característica do betão à compressão
f_{cr}	Tensão de fissuração do betão à tração
f'_c, f_{cm}	Valor médio da resistência à compressão do betão
f_s, f_y	Tensão no aço das armaduras
f_L	Tensão na armadura longitudinal da placa
f_T	Tensão na armadura transversal da placa
f_{LP}	Tensão na armadura de pré-esforço longitudinal da placa
f_{pi}	Tensão inicial na armadura de pré-esforço
f_{ps}, f_p	Tensão na armadura de pré-esforço
f_{pu}	Tensão última da armadura de pré-esforço
f_{TP}	Tensão na armadura de pré-esforço transversal da placa
$f_{ps0.1\%}$	Tensão limite convencional de proporcionalidade da armadura de pré-esforço

$f_{psL0.1\%}$	Tensão limite convencional de proporcionalidade da armadura de pré-esforço longitudinal
$f_{psT0.1\%}$	Tensão limite convencional de proporcionalidade da armadura de pré-esforço transversal
f_{sy}	Tensão de cedência da armadura ordinária
f_{syL}	Tensão de cedência da armadura ordinária longitudinal
f_{syT}	Tensão de cedência da armadura ordinária transversal
m_L	Coefficiente de proporcionalidade longitudinal
m_{LT}	Coefficiente de proporcionalidade ao corte
m_T	Coefficiente de proporcionalidade transversal
n_{max}	Número máximo de pontos
S	Primeiro coeficiente para o cálculo de σ_1

Alfabeto Grego

α_1	Ângulo fixo
α_2	Complemento do ângulo fixo
α_D	Complemento do ângulo variável
α_R	Ângulo variável
$\Delta\varepsilon_{ps}$	Diferença entre extensões calculadas pela equação linear e não-linear
$\Delta\varepsilon_D$	Incremento entre as iterações
γ_{LT}	Distorção da placa
ε_0	Extensão correspondente ao pico de tensão no betão
ε	Extensão
ε_{cu}	Extensão última do betão à compressão
ε_D	Extensão principal de compressão na placa
ε_{dec}	Extensão na armadura de pré-esforço na descompressão do betão
ε_L	Extensão da armadura longitudinal da placa
ε_{ps}	Extensão na armadura de pré-esforço
ε_{psi}	Extensão de tração inicial na armadura de pré-esforço
$\varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}}$	Extensão correspondente à tensão última na armadura de pré-esforço
$\varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}-L}$	Extensão correspondente à tensão última na armadura de pré-esforço pela equação linear

$\varepsilon_{ps0.7pu-NL}$	Extensão correspondente à tensão última na armadura de pré-esforço pela equação não-linear
ε_R	Extensão principal de tração na placa
ε'_s	Extensão na armadura ordinária na descompressão do betão
ε_s	Extensão no aço das armaduras
ε_{si}	Extensão inicial de compressão nas armaduras ordinárias na aplicação do pré-esforço
$\varepsilon_{ps0.1\%}$	Extensão correspondente ao limite convencional de proporcionalidade
ε_T	Extensão da armadura transversal da placa
ζ	Coefficiente de amolecimento
η	Relação ente as forças resistentes nas armaduras na direção longitudinal e transversal
μ	Fator redutor de escala das tensões aplicadas na placa
ρ	Taxa mecânica de armadura
ρ_L	Taxa mecânica de armadura longitudinal na placa
ρ_T	Taxa mecânica de armadura transversal na placa
ρ_{PL}	Taxa mecânica de armadura de pré-esforço na direção longitudinal
ρ_{PT}	Taxa mecânica de armadura de pré-esforço na direção transversal
σ	Tensão normal
σ_1	Tensão principal de tração no elemento de betão armado
σ_2	Tensão principal de compressão no elemento de betão armado
σ_D	Tensão principal de compressão no betão na placa
σ_L	Tensão longitudinal aplicada na placa
σ_L^c	Componente da tensão longitudinal aplicada no betão
σ_R	Tensão principal de tração no betão na placa
σ_T	Tensão transversal aplicada na placa
σ_T^c	Componente da tensão transversal aplicada no betão
τ_{LT}	Tensão tangencial aplicada na placa
τ_{LT}^c	Componente da tensão tangencial aplicada no betão

Capítulo 1 - Introdução

1.1 Enquadramento

Com o intuito de prever o comportamento global de estruturas complexas (geometria, carregamento, estados de tensão, etc.) em betão estrutural, é corrente na prática da engenharia de estruturas analisá-las através da combinação de elementos mais simples. Estruturas complexas como, por exemplo, estruturas de confinamento nuclear, coberturas em casca de grande vão, plataformas marítimas, tabuleiros de pontes, paredes resistentes em edifícios, entre outras (Figura 1.1), são compostas pela combinação de elementos planos (ou quase planos) compostos por betão e barras de aço dispostas geralmente em direções ortogonais. Devido à baixa resistência do betão à tração, a ocorrência de fissuração, mesmo para baixos níveis de carregamento, é uma situação normal, pelo que o comportamento das estruturas de betão deve ser analisado em estado fissurado, mesmo que tal comportamento seja complexo dado o seu caráter não-linear.

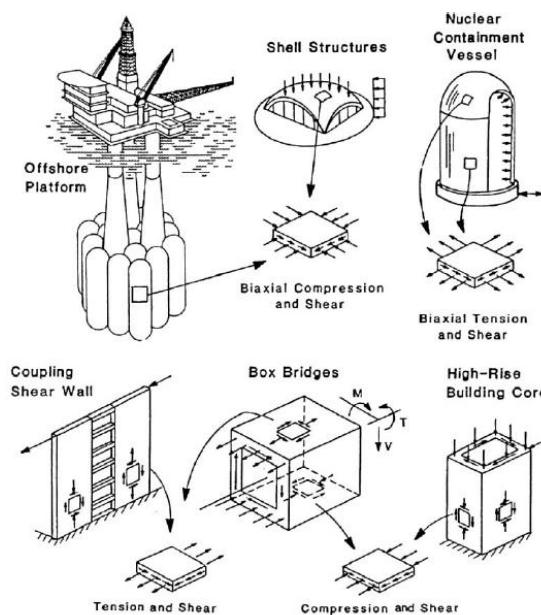


Figura 1.1 - Simplificação de estruturas de betão armado em elementos do tipo placa [1].

A fim de resolver esta problemática, muitas vezes a análise das estruturas de betão é simplificada mediante a análise de elementos planos submetidos às tensões aplicadas no seu próprio plano, denominados por placas ou painéis. Estas tensões planas provocam esforços de membrana. Torna-se necessário prever com a maior exatidão possível a resposta destes elementos simples para, posteriormente, extrapolar o comportamento global de estruturas maiores e mais complexas.

Para a análise de placas, a interação entre os materiais constituintes (betão e aço) e a forma como é feita a transferência de tensão entre os materiais constituem as bases dessa análise, a partir da qual é possível prever o comportamento dos elementos, designadamente em estado fissurado. A questão relacionada com a problemática da fissuração torna-se ainda mais importante quando as direções das armaduras não coincidem com as direções das tensões principais, ou seja, a tensão principal de tração, responsável pela fissuração do betão, não se encontra na mesma direção que as armaduras dispostas no elemento. Esta situação ocorre frequentemente em placas de betão armado submetidas predominantemente ao corte, como é o caso das placas analisadas neste trabalho (corte puro) [2].

A fim de considerar a problemática da fissuração e tendo em conta a baixa resistência do betão à tração, conforme apresentado e discutido posteriormente ao longo deste trabalho, o modelo apresentado considera a fissuração das placas desde o início do carregamento. Esta medida é válida se se pretender essencialmente estudar o comportamento pós-fissuração das placas.

É hoje corrente a incorporação de pré-esforço em estruturas do tipo das referidas no início da presente secção. Tal deve-se ao facto desta técnica de construção permitir, quando aplicada de forma racional, um melhor comportamento em serviço das estruturas, uma redução das dimensões dos elementos estruturais e um aumento da resistência última. Isto também é válido para placas sujeitas ao corte. Neste caso, a tensão inicial de compressão devido ao pré-esforço, combinada com a tensão tangencial induzida pelo corte, resulta num estado de tensão biaxial (compressão + corte) que atrasa a fissuração. Para além disso, após a decompressão, a armadura de pré-esforço, com a sua reserva de resistência, passa a funcionar como armadura passiva, contribuindo para o aumento da resistência última do elemento.

Tendo por base o exposto anteriormente, justifica-se a importância do estudo comportamental de placas de betão pré-esforçado submetidas a esforços de membrana.

As placas pertencem ao grupo das estruturas laminares planas, por terem duas dimensões consideravelmente superiores à terceira (espessura). A designação de placa é utilizada quando o carregamento é aplicado no seu próprio plano, gerando apenas esforços de membrana. A Figura 1.2 ilustra o esquema de carregamento neste tipo de elementos, onde as grandezas utilizadas para descrever o comportamento do elemento são as tensões σ_x , σ_y e $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Em virtude do tipo de carregamento pode admitir-se que o elemento está submetido a um estado plano de tensão ($\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$).

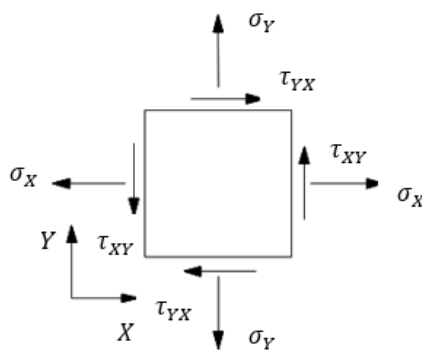


Figura 1.2 - Esquema das forças locais para um estado plano de tensão.

A análise do comportamento de um elemento plano de betão armado sujeito a esforços de membrana não é um problema com resolução trivial [3]. Collins *et al.* em 1985 [4] relatam que, numa competição internacional, com a participação de 43 especialistas mundiais em pesquisa sobre simulações numéricas aplicadas ao betão armado, não foi possível prever o comportamento carga *versus* deformação de placas retangulares simplesmente armadas com uma margem de erro inferior a 15%. Ficou evidente que o insucesso das previsões era fortemente dependente das relações tensão-deformação empregues para os materiais. Neste sentido, ao longo das últimas décadas têm sido desenvolvidos modelos para tentar resolver este problema. Tais modelos encontram-se resumidos na secção seguinte, constituindo os mesmos a base para o desenvolvimento do modelo proposto no presente trabalho.

1.2 Modelos analíticos para a análise de placas de betão estrutural

Tendo em vista o conceito de elementos de membrana, pode-se referir que a grande vantagem em estudar elementos mais simples 2D (placas) é a sua simplificação em relação ao comportamento mais complexo dos elementos tridimensionais (3D), como por exemplo vigas.

Ritter em 1899 [5] e Mörsch em 1902 [6] propuseram o conceito original de modelo de treliça plana, que serviu de base para outros modelos analíticos desenvolvidos posteriormente. De entre tais estudos, destaca-se o trabalho realizado por Thomas Hsu e a sua equipa no *Universal Panel Tester* na Universidade de Houston (Hsu *et al.* [7]). O referido autor, ao longo de vários anos e tendo por base os resultados experimentais obtidos em diversos ensaios com placas de betão armado, maioritariamente ensaiadas ao corte, desenvolveu vários modelos analíticos, calibrando-os de acordo com os comportamentos observados experimentalmente. Com base nos resultados destes ensaios, Hsu em 1988 [8] desenvolveu o modelo denominado de *Softened Truss Model (STM)*, onde já era contabilizado o efeito de amolecimento do betão (*softening effect*), observado pela primeira vez por Robinson e Demorieux em 1972 [9]. Os referidos autores constataram que, em placas solicitadas a um estado de tensão de corte

puro, a lei constitutiva do betão à compressão nas escoras era modificada em resultado da fissuração gerada pela tração perpendicular.

O STM considera que, no estado fissurado, a direção das fissuras é igual à direção das tensões principais no elemento de betão. Contudo, Hsu em 1993 [10] observou que a direção da primeira fissura é determinada de acordo com as tensões principais antes da fissuração, o que em geral é diferente da direção das tensões principais após a fissuração. De facto, com o aumento da carga, surgem novas fissuras com diferentes orientações em virtude da rotação da direção das tensões principais no estado pós-fissurado e em resultado da redistribuição interna de tensões e das condições de compatibilidade. Tal efeito é particularmente evidenciado em elementos com armaduras não equilibradas nas duas direções. Esta observação conduziu à modificação do modelo previamente estabelecido, tendo sido desenvolvido por Belarbi e Hsu em 1994 [11] e em 1995 [12], e por Pang e Hsu em 1995 [13], um novo modelo que passou a ser designado de *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM). Neste modelo, Belarbi e Hsu [11] estabeleceram condições para contabilizar o betão à tração, de modo a incorporar efetivamente o *stiffening effect* (efeito de enrijecimento). Pang e Hsu em 1995 [13] também contribuíram de forma a contabilizar a incorporação do efeito de ferrolho. Posteriormente, novas relações tensão-deformação para o betão à compressão foram estabelecidas por Zhang e Hsu em 1998 [14], contribuindo para o desenvolvimento do modelo de treliça plano.

Todavia, os modelos de treliça com ângulo variável não consideravam a pequena contribuição do betão ao corte uma vez que o referencial base assumido para o estabelecimento das equações de equilíbrio e de compatibilidade é o das direções principais das tensões internas para qualquer nível de carregamento. No entanto, essa pequena contribuição realmente existe devido à resistência oferecida pelos agregados ao longo das fissuras e também porque a direção real das fissuras não é exatamente igual à direção das tensões principais de compressão [15]. Para incorporar a relação tensão-deformação para o betão ao corte, Pang e Hsu em 1996 [16] e Hsu e Zhang em 1997 [17] propuseram o *Fixed-Angle Softened Truss Model* (FA-STM). Neste modelo, o referencial para estabelecer as equações possui um ângulo fixo, que é igual ao ângulo das direções principais das tensões externas aplicadas ao elemento. Uma vez que após a fissuração do elemento as armaduras começam a ser solicitadas e o ângulo do sistema de coordenadas definido pelas tensões principais no elemento de betão tende a desviar-se do ângulo do sistema de coordenadas das tensões externas aplicadas no elemento de betão armado, desenvolvem-se tensões tangenciais segundo o referencial fixo. Por esse motivo, no FA-STM torna-se necessário incorporar a lei constitutiva do betão ao corte. Contudo, devido a este refinamento, este modelo é analiticamente mais complicado comparativamente com o RA-STM, sendo as equações de equilíbrio e de compatibilidade, bem como o procedimento de cálculo, mais complexos.

Segundo Hsu e Mo em 2010 [1], os modelos anteriormente apresentados não conseguem ainda prever adequadamente o comportamento pós-pico da curva tensão tangencial (τ) - distorção (γ) das placas devido ao facto do efeito de *Poisson* no estado fissurado não ser considerado. Com base em resultados experimentais, Hsu e Zhu [18] conseguiram quantificar o efeito de *Poisson* caracterizando-o através das chamadas relações Hsu/Zhu, propondo o Modelo designado por *Softened Membrane Model* (SMM), o qual constitui um refinamento do FA-STM.

O FA-STM pode ser considerado modelo mais simples que o SMM. No entanto, FA-STM não consegue prever corretamente o ramo descendente das curvas de carga-deformação [1]. No presente trabalho, em detrimento da utilização de um modelo analítico mais simples, decidiu-se utilizar o modelo RA-STM.

De modo a refinar e generalizar o RA-STM, o mesmo é estendido ao caso de placas com pré-esforço (unidirecional ou bidirecional) e o procedimento original de cálculo é otimizado. Para este último objetivo, é adotado e adaptado o procedimento eficiente proposto por Silva e Horowitz em 2015 [19] e por Silva em 2016 [20]. São também adotadas adequadas relações constitutivas para os materiais, designadamente para o betão à compressão e para as armaduras à tração, pretendendo-se melhorar o modelo para a previsão do comportamento último, bem como o modelo possa ser aplicável a placas executadas com betões de alta resistência.

1.2.1 Revisão bibliográfica sobre modelos analíticos para simular o comportamento ao corte de placas de betão pré-esforçado

No interesse do trabalho proposto, foram encontradas na literatura consultada apenas dois estudos experimentais sobre o comportamento de placas de betão pré-esforçadas sujeitas ao corte. As principais condicionantes encontradas e justificadas pelos autores para a escassez de estudos experimentais estão relacionadas com a dificuldade associada à realização deste tipos de estudos, englobando o alto custo do equipamento necessário para a realização de ensaios controlados bem como a complexidade associada à fabricação de placas de betão pré-esforçado [21].

No primeiro estudo, Meyboom em 1987 [22] apresentou os resultados de três placas ensaiadas na Universidade de Toronto. Este estudo foi revisto posteriormente por Marti em Meyboom em 1992 [23] onde, com base nos resultados dos testes, os autores estudaram a influência do pré-esforço no comportamento de placas de betão reforçadas ortogonalmente e submetidas à força de corte no seu plano. Como conclusão, os referidos autores observaram que o pré-esforço aumenta a carga correspondente à fissuração, reduz o ângulo da direção das tensões principais após a fissuração e aumenta a carga última. No referido estudo, as respostas experimentais foram comparadas com as respostas previstas por análises lineares, não-lineares e de limite (cálculo da carga última), conforme indicado pelos autores. No entanto,

segundo Laskar *et al.* [24], o estudo de Meyboom em 1987 [22] possui várias deficiências. Primeiro, os autores não forneceram todas as propriedades dos materiais. Segundo, a forma como é contabilizado o efeito do pré-esforço na lei constitutiva do betão à compressão não foi clarificada. Terceiro, os ramos descendentes para as curvas de comportamento experimentais não puderam ser obtidos pois o dispositivo de ensaio não estava equipado com um sistema servo-controlado para permitir o controlo das deformações.

Posteriormente, Laskar *et al.* em 2007 [24] ensaiaram cinco placas pré-esforçadas unidirecionalmente, estando estas submetidas tanto a carregamentos sequenciais (série TE), como a carregamentos proporcionais (série TA). Esta última série foi a considerada para o presente estudo uma vez que o modelo teórico considera apenas a situação de carregamento proporcional. O objetivo do estudo dos referidos autores prendeu-se em validar o modelo SMM para placas com pré-esforço, propondo o chamado *Softened Membrane Model for Prestressed Concrete* (SMM-PC). Como conclusão, os referidos autores propuseram um novo coeficiente de correção (W_p) para o coeficiente de amolecimento (ζ), afetando o comportamento do betão à compressão e melhorando os resultados experimentais para validação do modelo. No presente trabalho, o coeficiente de amolecimento, bem como os seus limites de validade, será estudado para o RA-STM modificado com pré-esforço.

De entre os modelos analíticos encontrados na literatura para simular o comportamento de placas pré-esforçadas, os procedimentos de cálculo utilizados para resolver o sistema de equações não lineares e prever o comportamento das placas pré-esforçadas baseiam-se em técnicas de tentativa e erro, as quais podem exigir um grande esforço de cálculo e também perder eficiência devido ao grande número de parâmetros estimados. Por esse motivo, em alternativa, neste trabalho também é adotado e implementado um procedimento de cálculo mais eficiente.

Os resultados experimentais dos dois estudos anteriormente referidos serão utilizados no presente trabalho para validar o modelo teórico proposto.

1.3 Justificação do tema do trabalho e objetivos propostos

Como referido anteriormente, a aplicação de pré-esforço em placas induz tensões de compressão que, combinadas com as tensões no plano devido ao carregamento, resultam num estado biaxial de tensão que atrasa a fissuração do betão e aumenta a resistência ao corte do elemento. Por isso, é importante incorporar o pré-esforço para o estudo de modelos comportamentais de placas.

O pré-esforço aplicado pode ser unidirecional ou bidirecional. O primeiro caso é bastante frequente na prática, como por exemplo em vigas contínuas. O segundo caso, apesar de menos frequente, pode ocorrer em situações específicas. Refere-se por exemplo as

coberturas em cúpula de estruturas de contenção nuclear e também o caso das almas das vigas de secções em caixão em pontes em zonas próximas aos apoios. No primeiro exemplo, a utilização de pré-esforço bidirecional é mais efetiva para a verificação da segurança à ação de acidente correspondente à explosão do reator nuclear. No segundo exemplo, o elevado valor de esforço transversal junto aos apoios pode requerer a aplicação de pré-esforço adicional na direção vertical. Tendo por base o exposto, é importante prever o caso geral com pré-esforço bidirecional para o estudo de modelos comportamentais de placas.

Tendo por base o exposto na Secção 1.2.1, verifica-se ser necessário continuar a desenvolver novos modelos analíticos e refinar os modelos existentes de forma a prever com maior rigor a resposta de placas de betão estrutural solicitadas por vários níveis e combinações de solicitações no seu plano. Assim, o trabalho desenvolvido nesta dissertação vai ao encontro dessa necessidade, tendo por objetivo generalizar o RA-STM para placas com pré-esforço e, a partir de propostas de trabalhos anteriores [19][20], implementar um procedimento de solução eficiente com o auxílio do *software* MATLAB e adotar relações constitutivas adequadas para os materiais. Para a implementação do pré-esforço, a formulação do RA-STM é revista e é também incorporada uma relação tensão (σ) - extensão (ϵ) adicional para as armaduras de pré-esforço em tração.

O novo procedimento de solução baseia-se em reformular o procedimento de cálculo como um sistema de equações não lineares com restrições, resolvendo-o através de algoritmos do *toolbox* de otimização disponíveis no MATLAB. As variáveis primárias, utilizadas para a resolução do sistema de equações, foram escolhidas de forma a tornar o procedimento mais eficiente.

Com base no referido e de acordo com as atuais necessidades vigentes ao avanço do modelo, o trabalho apresentado nesta dissertação pode ser dividido nos seguintes objetivos principais:

- Generalizar o RA-STM para placas com pré-esforço e implementar um procedimento de solução eficiente tendo por base o procedimento proposto por Silva e Horowitz em 2015 [19] e Silva em 2016 [20];
- Perceber a influência de algumas variáveis condicionantes no comportamento pós-fissuração das placas, designadamente: a resistência à compressão do betão (incluindo betões de alta resistência e de resistência normal), direção do pré-esforço (unidirecional e bidirecional), nível de pré-esforço aplicado e taxa de armadura ordinária e total (incluindo a armadura de pré-esforço). Para tal, foram realizadas análises paramétricas no MATLAB para simular o comportamento das placas e estudar as suas respostas consoante a alteração e tendências destas variáveis de estudo;

- Validar a versão proposta nesta dissertação para o RA-STM tendo por base a comparação das previsões obtidas com alguns resultados experimentais relativos a placas sujeitas ao corte, os quais foram recolhidos na bibliografia (Marti e Meyboom em 1992 [23] e Laskar *et al.* em 2007 [24]).

1.4 Organização do documento

Nesta subsecção é apresentada a organização da dissertação com uma descrição sumária do conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo 1 apresenta-se e enquadra-se o tema da dissertação.

No Capítulo 2 é apresentado o modelo *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM), proposto originalmente por Belarbi e Hsu em 1994 [11] e 1995 [12] e Pang e Hsu em 1995 [13], assim como as alterações introduzidas com o objetivo de generalizar o modelo para placas de betão armado com pré-esforço (unidirecional ou bidirecional). É também implementado um procedimento de solução eficiente tendo por base estudos anteriores ([19] [20]), sendo este implementado em MATLAB.

No Capítulo 3 apresenta-se o estudo da influência do pré-esforço através do modelo RA-STM, sendo desenvolvido em duas partes. Na primeira, decidiu-se complementar o presente trabalho com análises paramétricas para melhor compreender o efeito do pré-esforço no comportamento de placas submetidas ao corte puro. Tais análises incluem várias variáveis de estudo, conforme referido anteriormente. De forma complementar, com o intuito de validar a versão proposta para o RA-STM, apresentam-se análises comparativas com os resultados experimentais de 2 placas ensaiadas por Meyboom em 1987 [22] e analisadas por Marti e Meyboom em 1992 [23] (série PP), bem como 5 placas ensaiadas por Laskar *et al.* em 2007 [24] (série TA).

Finalmente, no Capítulo 4 são apresentadas as principais conclusões do estudo realizado e apresentam-se indicações e recomendações para futuros trabalhos.

Capítulo 2 - Modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável - RA-STM

2.1 Introdução

Com o intuito de facilitar a análise de estruturas mais complexas, é muito utilizado o conceito de associação e sobreposição de efeitos. Na resistência dos materiais e na análise estrutural, por exemplo, muitas abordagens de cálculo foram e continuam a ser desenvolvidas baseadas nesse princípio.

No presente trabalho, o princípio da sobreposição de efeitos também foi utilizado na aplicação do modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável - RA-STM (*Rotating Angle - Softened Truss Model*). Este modelo é baseado nos três princípios da mecânica das estruturas: equilíbrio das tensões, compatibilidade das deformações e relações constitutivas médias para os materiais [1]. Para os dois primeiros, as respectivas equações foram obtidas através da análise da circunferência de Mohr, enquanto que o último foi estabelecido através da adoção de curvas σ (tensão) - ε (deformação) para os materiais, designadamente curvas regularizadas para os aços das armaduras ordinárias e de pré-esforço tendo em conta o efeito de enrijecimento, e também uma curva para o betão tendo em conta o efeito de amolecimento devido ao estado biaxial de tensão.

No âmbito da resolução desses tipos de problemas, com caráter não linear, é comum ser utilizado o método de tentativa e erro no procedimento de solução. Contudo, apesar da eficácia do procedimento, quando o resultado desejado não é encontrado, o sistema repete o processo para outra iteração até que seja atingida a meta ou seja evidenciada a insolubilidade do problema. O fator tempo de execução faz, portanto, com que a eficiência do método possa ser colocada em causa, mostrando-se uma opção muitas vezes inviável.

De forma a contornar esta questão, neste trabalho é proposto um procedimento eficiente para estimar o comportamento carga-deformação de placas quadrangulares de betão armado pré-esforçado submetidas ao corte (Figura 2.1), tendo por base a extensão de um procedimento eficiente anteriormente proposto por Silva e Horowitz em 2015 [19] e Silva em 2016 [20] para placas de betão armado submetidas ao corte. Na análise dos resultados foi incluído o comportamento pós-pico, além da possibilidade da placa ser composta por betão de alta resistência (*High Strength Concrete* - HSC) ou de resistência normal (*Normal Strength Concrete* - NSC). Para tal, o procedimento de cálculo foi formulado em termos da resolução de equações não lineares e como método de resolução foi utilizado o programa de cálculo MATLAB e seus algoritmos do *toolbox* de otimização. Desta forma, conseguiu-se resolver a

parte não linear do procedimento de cálculo tendo por base uma estimativa inicial utilizando o *Mohr Compatibility Truss Model* (MCTM) em regime elástico linear e não fissurado.

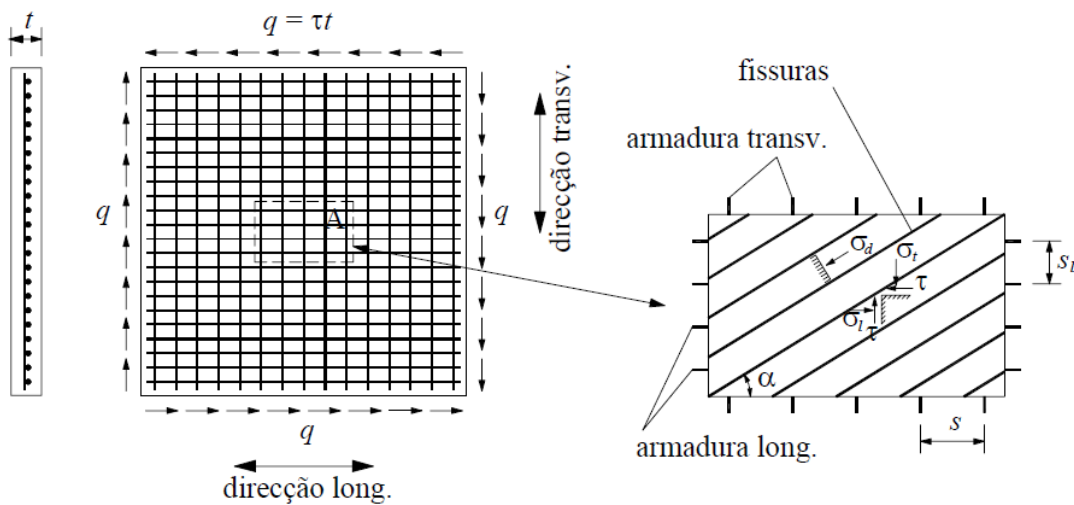


Figura 2.1 - Exemplo geral de uma placa sujeita ao corte [2].

Relativamente ao efeito do pré-esforço, o comportamento das placas ao corte assemelha-se ao das vigas pré-esforçadas quando submetidas à torção. Sabe-se que nestas vigas o efeito do pré-esforço aumenta a resistência à fissuração, sendo este comportamento também evidenciado nas placas. Esse atraso no aparecimento das fissuras no betão deve-se ao estado biaxial a que o elemento fica sujeito (efeito de compressão + efeito de corte), como será exposto na próxima secção. Para além disso, também a resistência última do elemento estrutural é aumentada devido à participação da armadura de pré-esforço para o equilíbrio.

Este capítulo descreve o procedimento de cálculo proposto bem como as equações necessárias para resolver de forma mais eficiente os tipos de problemas abordados neste trabalho, associados às placas pré-esforçadas submetidas ao corte. A validação do modelo tendo por base resultados experimentais, bem como algumas análises paramétricas realizadas, são apresentados no Capítulo 3. Para reduzir os problemas de convergência numérica do procedimento do cálculo, alguns ajustes às leis constitutivas dos materiais tiveram que ser feitos. Por exemplo, a lei constitutiva da armadura de pré-esforço foi regularizada na passagem da parte linear para a parte não linear.

2.2 Descrição do modelo

O modelo não linear de base utilizado no presente trabalho é o modelo de treliça com amolecimento e ângulo variável RA-STM (*Rotating Angle - Softened Truss Model*) proposto por Hsu e Mo em 2010 [1]. Como o próprio nome sugere, o modelo incorpora duas características fundamentais: primeiro, o comportamento não linear (ângulo variável), e em segundo, o efeito de amolecimento do betão.

Em 1969, Lampert e Thurlimann [25] desenvolveram um estudo, tendo por base os trabalhos desenvolvidos por Rausch em 1929 [26], e incorporaram no modelo da analogia da treliça espacial de Rausch a possibilidade do ângulo de inclinação das escoras variar, dando origem ao *Variable Angle Truss Model* (VATM). Em 1985, Hsu e Mo [27] incorporaram neste modelo o efeito do amolecimento do betão e mostraram que este modelo podia ser alargado para o caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme sujeitas à torção pura, utilizando o conceito de descompressão do betão. No caso das placas, o modelo de treliça é inteiramente válido uma vez que, para uma análise em Estado Limite Último, se admite que os elementos estão plenamente fissurados, mesmo no caso de estarem fortemente pré-esforçados.

A extensão do modelo proposto por Hsu e Mo [1] para a inclusão do pré-esforço é lógica desde que as relações constitutivas dos materiais sejam complementadas com a participação da armadura de pré-esforço. Quando utilizado pré-esforço, ocorre um aumento da resistência à fissuração do elemento estrutural quando sujeito ao corte ou à torção. Neste caso, a tensão inicial de compressão combinada com a tensão tangencial induzida pelo corte ou momento torsor resulta num estado de tensão biaxial (compressão + corte) que atrasa a fissuração. Para além disso, após a descompressão a armadura de pré-esforço, com a sua reserva de resistência, passa a funcionar como armadura passiva, contribuindo para o aumento da resistência última do elemento.

O modelo RA-STM, o qual incorpora as leis constitutivas propostas por Belarbi e Hsu [11][12], prevê o comportamento pré-pico de placas de betão armado sujeitas ao corte ou a estados biaxiais de tensão. A limitação do modelo para calcular o comportamento pós-pico é apresentada por Silva [19] [20] e justificada por Hsu e Mo [1] pelo facto do mesmo não ter em conta o efeito de *Poisson* no estado fissurado do betão. Um estudo posterior realizado por Hsu e Zhu [18] tentou solucionar esta problemática. Nesse estudo, o efeito de *Poisson* em estado fissurado foi quantificado para placas de betão armado e foi incorporado no modelo teórico, tendo sido desenvolvido o modelo designado por modelo de membrana com amolecimento (*Softened Membrane Model* (SMM) para o corte.

No presente trabalho, o modelo RA-STM com a adição do efeito do pré-esforço foi também estudado para além do comportamento pós-pico das placas ao corte. Esta análise mostra-se viável quando se altera o critério de paragem do procedimento de cálculo, prevendo a possibilidade de serem atingidos, na lei constitutiva do betão à compressão, valores superiores aos da extensão de compressão correspondente ao valor da resistência de pico. Adicionalmente, foi imposto um número elevado de pontos calculados na previsão da resposta das placas. Desta forma, ainda que o modelo não incorpore diretamente o efeito de *Poisson* para o estado fissurado do betão, foi possível prever o comportamento pós-pico mediante o cálculo de um ramo descendente nas curvas de comportamento, como poderá ser comprovado no decorrer deste trabalho.

O presente trabalho utiliza o modelo proposto por Silva [20] baseado no RA-STM, o qual deriva do STM, modificado com a adição do pré-esforço e para placas de betão de resistência normal ou de alta resistência. O objetivo é prever o comportamento global de placas pré-esforçadas sujeitas aos estados de tensões tangenciais induzidas por um carregamento ao corte, incluindo os casos em que o pré-esforço é disposto numa ou em ambas as direções.

O modelo RA-STM desenvolvido por Hsu e Mo [1] é baseado no conceito de ângulo variável, definido no referencial R-D associado às direções principais (ver Figura 2.2(e)). Adicionando a esse modelo o efeito do pré-esforço, é necessário rever as equações inicialmente estabelecidas de modo a contabilizar esse efeito. Desta forma, serão adicionadas às equações de equilíbrio as forças nas armaduras de pré-esforço (na direção longitudinal e transversal) e será considerada uma lei constitutiva adicional para o aço das armaduras de pré-esforço com vista ao cálculo das tensões nestas armaduras a partir das deformações. Refere-se que, sendo o objetivo prever essencialmente o comportamento último das placas, não serão diretamente contabilizadas as tensões iniciais induzidas pelo pré-esforço, ou seja, é assumido que a descompressão do betão já ocorreu.

2.2.1 Equilíbrio das tensões

A Figura 2.2 ilustra a condição imposta para o equilíbrio de tensões apresentado no modelo RA-STM. Tal condição é representada pela sobreposição de efeitos entre um elemento bidimensional de betão simples submetido a esforços de membrana que provocam um estado biaxial de tensão (Figura 2.2 (b)), com uma malha de armadura ordinária e de pré-esforço sujeitas às forças de tração (Figura 2.2 (c)). Os eixos L e T apresentados na Figura 2.2 representam as direções das armaduras (ordinárias e de pré-esforço) longitudinais e transversais, respetivamente.

Relativamente às tensões resultantes dos esforços de membrana apresentadas no elemento bidimensional de betão pré-esforçado, estas estão representadas no referencial L-T. As tensões σ_L, σ_T e τ_{LT} , representam, respetivamente, a tensão normal longitudinal, a tensão normal transversal e a tensão de corte ou tangencial.

Ao separar o betão das armaduras para simular a sobreposição de efeitos, as referidas tensões são subdivididas nas tensões σ_L^c, σ_T^c e τ_{LT}^c referentes à contribuição isolada do elemento de betão simples (Figura 2.2(b)), $\rho_L f_L$ e $\rho_T f_T$ referentes à contribuição das armaduras ordinárias, $\rho_{PL} f_{LP}$ e $\rho_{PT} f_{TP}$ referentes à contribuição das armaduras de pré-esforço, estando as armaduras representadas longitudinalmente e transversalmente (Figura 2.2(c)). Nesta sequência, σ_L^c e σ_T^c representam a tensão normal no betão na direção longitudinal e transversal, τ_{LT}^c a tensão de corte no betão, f_L e f_T são as tensões na armadura ordinária longitudinal e transversal, ρ_L e ρ_T as taxas mecânicas das armaduras ordinárias, f_{PL} e f_{PT} as tensões nas armaduras de pré-

esforço na direção longitudinal e transversal da placa, ρ_{PL} e ρ_{PT} as taxas mecânicas das armaduras de pré-esforço.

Seguem-se algumas considerações sobre o desenvolvimento do modelo de cálculo seguidamente proposto. Como o modelo apresentado tem em conta a fissuração das placas desde o início do carregamento, procedeu-se à análise do comportamento das armaduras no estado fissurado do betão. Na região das fissuras, as armaduras são submetidas às deformações transversais em relação ao eixo da barra, relacionadas com mecanismos de corte e flexão local das barras causados pela distorção angular da placa. Tal comportamento das armaduras é denominado por efeito de ferrolho [28].

O Boletim 230 do Código Modelo CEB 1996 [29] refere que, para o caso das placas submetidas ao corte puro, como a armadura é acompanhada por um sistema de fissuração regular com cargas distribuídas de forma uniforme, o efeito ferrolho não se torna ativo. Essa conclusão também foi obtida por Hsu e Mo [1] e Hsu e Zhu [18] tendo por base ensaios experimentais. Os referidos autores concluíram que a ação do efeito de ferrolho tem uma influência desprezável no comportamento das placas de betão armado. Por isso, este efeito não foi considerado no presente trabalho.

Relativamente às convenções adotadas, considera-se que a um valor positivo de σ_L e σ_T corresponde uma tensão normal de tração e a um valor negativo corresponde uma tensão de compressão. Para a tensão τ_{LT} , considera-se que a um valor positivo correspondem os sentidos indicados na Figura 2.2(a).

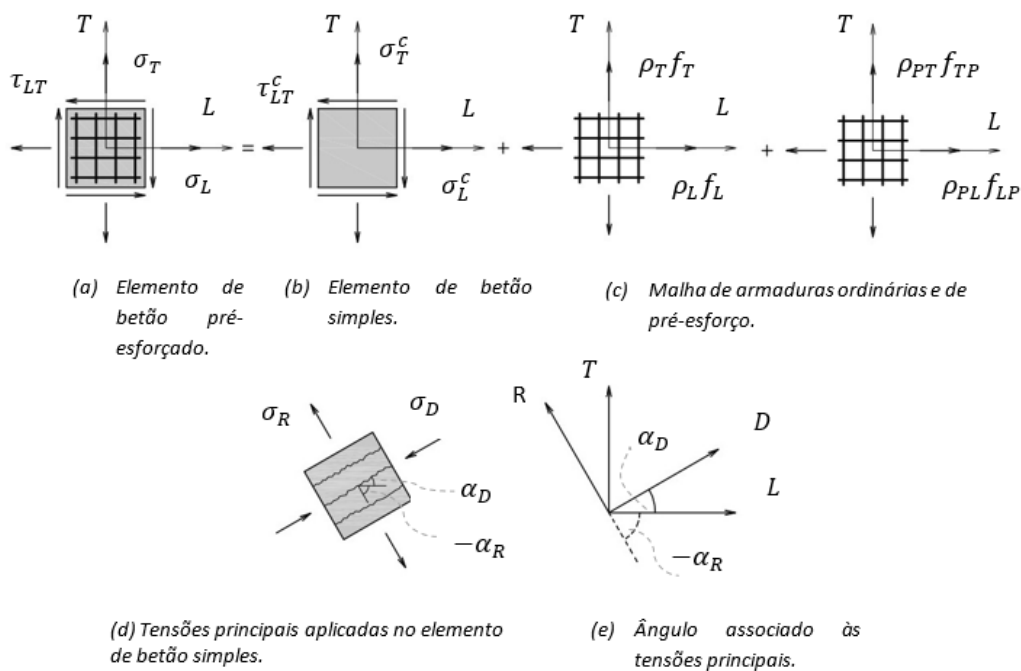


Figura 2.2 - Elemento bidimensional de betão pré-esforçado sujeito esforços de membrana. Adaptado de [19].

A partir do conceito de sobreposição e equilíbrio de tensões, e, em relação ao referencial L-T ilustrado na Figura 2.2, pode-se obter a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_L^c \\ \sigma_T^c \\ \tau_{LT}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_L f_L + \rho_{PL} f_{LP} \\ \rho_T f_T + \rho_{PT} f_{TP} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.1$$

As tensões aplicadas no elemento de betão simples, σ_L^c , σ_T^c e τ_{LT}^c , podem ser obtidas a partir das tensões principais de tração e compressão do betão (σ_R e σ_D) e do ângulo das direções principais α_R , conforme apresenta a Figura 2.2(d). Segundo Hsu e Mo [1], o ângulo α_R é denominado como ângulo variável pois o mesmo varia quando o elemento de betão armado é sujeito a esforços de membrana incrementados e que variam proporcionalmente, afastando-se dos 45° iniciais para a inclinação das escoras de betão.

Tendo em vista a tendência do padrão de fissuração, com as fissuras perpendiculares à direção principal de tração, e sendo assumido que as placas em estudo estão fissuradas, optou-se neste trabalho, à semelhança do adotado por Silva [20] e Silva e Horowitz [19], por utilizar o complemento do ângulo variável α_D , relacionado com a direção principal de compressão.

Essa mudança do ângulo variável α_R para o seu complemento α_D é permitida pois α_R é reduzido por simplificação ao primeiro quadrante trigonométrico, conforme esquematizado na Figura 2.2(e), e no qual as Eq. 2.2 a Eq. 2.4 são válidas.

$$tg^2 \alpha_D = 1/tg^2 \alpha_R \quad 2.2$$

$$cos^2 (\alpha_D) = sen^2 (\alpha_R) \quad 2.3$$

$$sen(\alpha_D) = cos(\alpha_R) \quad 2.4$$

Assim, as equações desenvolvidas por Hsu e Mo [1] apresentadas ao longo deste trabalho, que tiveram por base o ângulo variável, serão alteradas no sentido de incorporarem o complemento do ângulo, da mesma forma como realizado por Silva e Horowitz [19] e obedecendo às condições impostas nas Eq. 2.2 a Eq. 2.4.

De forma a facilitar a análise das placas segundo o modelo RA-STM , considera-se que os valores de tensão e deformação no elemento de betão e nas armaduras representam valores médios ao longo de um padrão de fissuras suficientemente extenso, ou seja, as tensões e extensões médias são aqui entendidas como tensões e extensões medidas ao longo de um comprimento suficientemente grande que inclui várias fissuras [30]. Esta consideração é

assumida pois sabe-se que o comportamento das tensões e respectivas deformações variam ao longo da placa devido à descontinuidade provocada por estas mesmas fissuras.

Para relacionar os referenciais R-D e L-T, com a ajuda da circunferência de Mohr, a equação abaixo transforma as coordenadas das tensões na placa de betão simples para as tensões principais.

$$\begin{bmatrix} \sigma_L^c \\ \sigma_T^c \\ \tau_{LT}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_D) & \text{sen}^2(\alpha_D) & 2\text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) \\ \text{sen}^2(\alpha_D) & \cos^2(\alpha_D) & -2\text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) \\ -\text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) & \text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) & \cos^2(\alpha_D) - \text{sen}^2(\alpha_D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_D \\ \sigma_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.5$$

Substituindo a transformação de coordenadas apresentada na Eq. 2.5 na Eq. 2.1 podem-se obter as seguintes equações de equilíbrio ilustradas através da Eq. 2.6.

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_D) & \text{sen}^2(\alpha_D) & 2\text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) \\ \text{sen}^2(\alpha_D) & \cos^2(\alpha_D) & -2\text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) \\ -\text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) & \text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) & \cos^2(\alpha_D) - \text{sen}^2(\alpha_D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_D \\ \sigma_R \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_L f_L + \rho_{PL} f_{LP} \\ \rho_T f_T + \rho_{PT} f_{TP} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.6$$

Como já referido anteriormente, a participação do betão à tração é desprezada no modelo RA-STM, pelo que a tensão principal de tração σ_R é considerada nula. Fazendo essa alteração na Eq. 2.6 e reorganizando os termos, obtêm-se as equações de equilíbrio para o modelo RA-STM apresentadas por Hsu e Mo [1] em função da tensão principal de compressão no betão (σ_D), do complemento do ângulo variável (α_D) e da participação das armaduras ordinárias e de pré-esforço em ambas direções ($\rho_L f_L, \rho_{PL} f_{LP}, \rho_T f_T$ e $\rho_{PT} f_{TP}$).

$$\sigma_L = \sigma_D \cos^2(\alpha_D) + \rho_L f_L + \rho_{PL} f_{LP} \quad 2.7$$

$$\sigma_T = \sigma_D \text{sen}^2(\alpha_D) + \rho_T f_T + \rho_{PT} f_{TP} \quad 2.8$$

$$\tau_{LT} = -\sigma_D \text{sen}(\alpha_D)\cos(\alpha_D) \quad 2.9$$

2.2.2 Compatibilidade das deformações

As três equações de equilíbrio derivadas anteriormente foram baseadas na transformação das tensões entre o referencial R-D e o referencial L-T (Eq. 2.5). De forma semelhante, as equações de compatibilidade para as deformações podem ser obtidas pelo mesmo processo (Eq. 2.10).

Os parâmetros ε_L e ε_T representam as extensões lineares médias para a direção longitudinal e transversal, respetivamente, enquanto γ_{LT} representa a distorção da placa, ou seja, a deformação por corte. Com a resolução da Eq. 2.10 obtêm-se as extensões principais no referencial R-D, ε_D e ε_R sendo elas de compressão e tração, respetivamente.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_D) & \sin^2(\alpha_D) & 2\sin(\alpha_D)\cos(\alpha_D) \\ \sin^2(\alpha_D) & \cos^2(\alpha_D) & -2\sin(\alpha_D)\cos(\alpha_D) \\ -2\sin(\alpha_D)\cos(\alpha_D) & 2\sin(\alpha_D)\cos(\alpha_D) & 2\cos^2(\alpha_D) - 2\sin^2(\alpha_D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_D \\ \varepsilon_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.10$$

Hsu e Mo [1] definiram, a partir da Eq. 2.10, o que foi designado por 1º princípio da invariância das deformações, o qual se encontra apresentado através da Eq. 2.11. Como poderá ser comprovado no decorrer deste trabalho, esta equação mostra-se imprescindível para a resolução do procedimento de cálculo proposto, pois relaciona as incógnitas mediante uma relação matemática simples e precisa.

$$\varepsilon_L + \varepsilon_T = \varepsilon_D + \varepsilon_R \Leftrightarrow \varepsilon_R = \varepsilon_L + \varepsilon_T - \varepsilon_D \quad 2.11$$

A relação expressa pela terceira linha da Eq. 2.10 fornece a deformação de corte no sistema L-T, sendo esta apresentada, de forma mais simplificada, através da Eq. 2.12

$$\gamma_{LT} = 2(\varepsilon_R - \varepsilon_D)\sin(\alpha_D)\cos(\alpha_D) \quad 2.12$$

2.3 Relações constitutivas dos materiais

Relativamente aos materiais a serem incorporados no modelo RA-STM em estudo, em termos gerais tem-se a participação do betão à compressão e das armaduras ordinárias e de pré-esforço longitudinais e transversais à tração. A incorporação do comportamento dos referidos materiais é realizada mediante as respetivas leis constitutivas médias. Salienta-se que a relação constitutiva do betão à compressão foi alterada por forma a contabilizar o efeito da armadura de pré-esforço, designadamente através do coeficiente de amolecimento.

2.3.1 Betão submetido à compressão

Como já referido anteriormente, para solucionar a problemática da caracterização das tensões locais com grande variação espacial, o estudo das tensões para as placas de betão armado sujeitos a esforços no seu próprio plano foi realizado mediante a utilização de relações constitutivas médias.

Os exemplos de modelação mais usuais consideram, na fase fissurada, o comportamento isolado do betão e das armaduras tendo em conta as suas tensões (σ) e extensões (ϵ), conduzindo à necessidade de estabelecer relações entre ambas [31].

Torna-se então necessário assumir uma relação σ - ϵ para caracterizar o comportamento real do betão nas escoras. Essa relação, juntamente com as relações de compatibilidade das deformações e de equilíbrio das tensões compõem os três princípios da mecânica das estruturas necessários para a análise através do modelo de treliça de ângulo variável.

Relativamente ao betão à compressão, as relações σ - ϵ mais simples são obtidas a partir de ensaios de compressão uniaxial e as curvas associadas têm habitualmente um desenvolvimento parabólico. Contudo, tais relações não têm em conta o efeito do amolecimento do betão (*softening effect*). Este efeito deve ser considerado sempre que o elemento de betão armado esteja sujeito preponderantemente ao corte, como ocorre por exemplo em placas ao corte e nas paredes das secções de vigas sujeitas à torção. O efeito de amolecimento traduz a influência das tensões transversais de tração no comportamento do betão à compressão nas escoras, conduzindo a uma redução da resistência do betão e da correspondente capacidade de deformação. Assim, no modelo teórico em estudo, a resistência do betão nas escoras é inferior àquela medida nos provetes cilíndricos ensaiados à compressão uniaxial devido justamente à presença das tensões transversais que provocam fissuração diagonal [32]. A incorporação do efeito de amolecimento do betão à compressão dá origem a uma relação constitutiva média.

Hognestad em 1952 [33] foi um dos primeiros autores a propor uma relação constitutiva para o betão à compressão, expressa através da Eq. 2.13. Contudo, esta relação não se pode ser utilizada no presente capítulo pois foi calibrada a partir de ensaios com carregamento de compressão uniaxial, diferente do estado de tensão biaxial em estudo, que induz o efeito do amolecimento [20].

$$\sigma_D = f'_c \left[2 \left(\frac{\epsilon_D}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_D}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \quad 2.13$$

O efeito do amolecimento do betão foi estudado por Hsu e Mo em 1985 [27] [32] e, posteriormente, por Belarbi e Hsu em 1991 e 1995 [34] [12], cujos estudos deram origem a um grande avanço no modelo de treliça com ângulo variável. Neste modelo, a incorporação do referido efeito não linear é contabilizada através de uma nova curva σ - ϵ , cuja equação incluía um fator de amolecimento (ζ), o qual afetava tanto a tensão máxima ($\zeta f'_c$) como a correspondente extensão ($\zeta \epsilon_0$).

Segundo Belarbi e Hsu [12], a curva σ - ϵ é composta por dois ramos, sendo o primeiro ascendente, traduzido pela Eq. 2.14, e o outro descendente, traduzido pela Eq. 2.15.

$$\sigma_D = \zeta f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad \frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} \leq 1 \quad 2.14$$

$$\sigma_D = \zeta f'_c \left[1 - \left(\frac{(\varepsilon_D/\zeta \varepsilon_0) - 1}{(2/\zeta) - 1} \right)^2 \right] \quad \frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} > 1 \quad 2.15$$

Em 2001, Zhu *et al.* [35] propuseram uma alteração no denominador da Eq. 2.15. Os autores observaram a partir de resultados experimentais que a curva pós-pico ($\varepsilon_D/\zeta \varepsilon_0 > 1$) era na realidade mais linear. Os referidos autores propuseram então uma nova equação, onde a constante 2 foi alterada para 4, conforme ilustrado através da Eq. 2.16.

$$\sigma_D = \zeta f'_c \left[1 - \left(\frac{(\varepsilon_D/\zeta \varepsilon_0) - 1}{(4/\zeta) - 1} \right)^2 \right] \quad \frac{\varepsilon_D}{\zeta \varepsilon_0} > 1 \quad 2.16$$

Nas equações anteriores, f'_c representa o valor da resistência à compressão do betão, ε_0 a extensão associada e ε_D a extensão à compressão do betão. No presente trabalho, o valor de f'_c foi interpretado como sendo o valor de f_{cm} , que traduz o valor da tensão média de resistência à compressão uniaxial do betão. O parâmetro ζ representa o coeficiente redutor que tem em conta o efeito de amolecimento. No procedimento original proposto por Hsu e Mo [1], o coeficiente ζ foi definido através da Eq. 2.17, a qual será comentada mais adiante.

$$\zeta = 1/\sqrt{1 + 600\varepsilon_R} \quad 2.17$$

A Figura 2.3 compara as curvas obtidas a partir da Eq. 2.13, Eq. 2.14, Eq. 2.15 e Eq. 2.16. Ressalta-se que o modelo RA-STM com pré-esforço desenvolvido neste trabalho foi baseado no ramo ascendente estudado por Belarbi e Hsu [12] (Eq. 2.14) e no ramo descendente proposto por Zhu *et al.* [35] (Eq. 2.16).

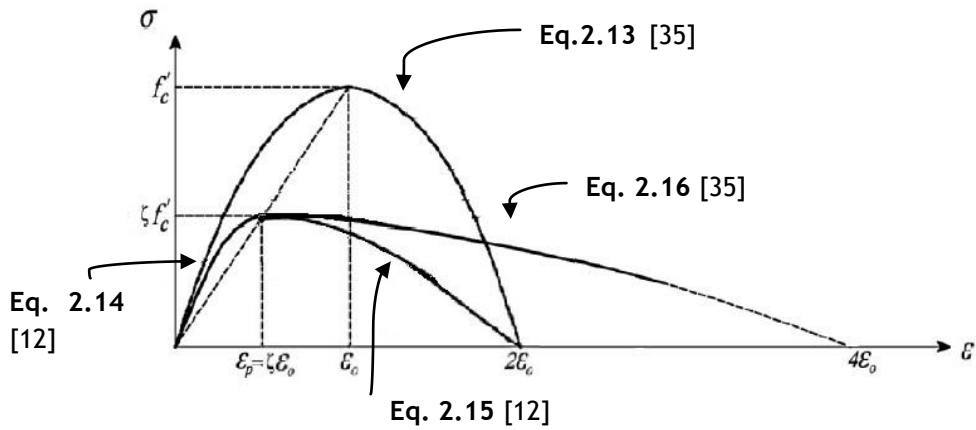


Figura 2.3 - Comparação entre curvas σ - ϵ do betão à compressão.

Para contabilizar o efeito de amolecimento para os betões de alta resistência (com resistências características superiores a cerca de 50 MPa), Zhang e Hsu [14] propuseram a Eq. 2.18, utilizada posteriormente por Zhu *et al.* em 2001 [35], que resultou de um estudo com betões até 100 MPa, relacionando o coeficiente de amolecimento com f'_c , a extensão média à tração do betão (ϵ_R) e a relação de tensões na direção longitudinal e transversal (η'):

$$\zeta = \left(\frac{5.8}{\sqrt{f'_c (\text{MPa})}} \leq 0.9 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{400\epsilon_R}{\eta'}}} \right) \quad 2.18$$

Sendo η' dependente do valor de η , e sendo este dado por:

$$\eta = \frac{\rho_L f_{syL} - \sigma_L}{\rho_T f_{syT} - \sigma_T} \quad 2.19$$

Onde:

$$\begin{cases} \eta' = \eta \text{ se } \eta \leq 1 \\ \eta' = \frac{1}{\eta} \text{ se } \eta > 1 \end{cases} \quad 2.20$$

Nas equações anteriores, ρ_L , ρ_T , f_{syL} e f_{syT} representam, respetivamente, as taxas de armadura ordinária longitudinal e transversal (rácio entre a área de armadura ordinária na respetiva direção e a área da secção de betão, $\rho_L = A_{sl}/A_c$ e $\rho_T = A_{st}/A_c$), e a tensão de cedência da armadura ordinária longitudinal e transversal. As tensões normais longitudinais e transversais externas aplicadas são representadas por σ_L e σ_T , respetivamente. Contudo, nos ensaios de placas ao corte puro $\sigma_L = \sigma_T = 0$.

Zhang e Hsu [14] referem ainda que, para tensões de compressão inferiores a 42 MPa, o primeiro termo da Eq. 2.18 é superior a 0.9. Ao ultrapassar esse valor e para estes casos, o valor do primeiro termo deve ser igual ao limite imposto. Para os casos onde as tensões são superiores a 42 MPa, o valor do primeiro termo é sempre inferior ao limite imposto. Estando o

referido termo escrito em função de f'_c , é desta forma contabilizado o comportamento de elementos executados por betões de alta resistência.

Relativamente ao segundo termo da Eq. 2.18, os referidos autores concluíram que ζ deveria diminuir com o aumento do parâmetro ε_R , de modo a ter em conta o nível de fissuração. Belarbi e Hsu em 1995 [12] incorporaram inicialmente esse efeito através da parcela $1/(\sqrt{1+400\varepsilon_R})$. No mesmo ano, Pang e Hsu [13] também aproveitaram o mesmo valor de referência. Contudo, existem na bibliografia estudos que utilizam outra relação: Hsu e Mo em 2010, numa versão recente do modelo RA-STM com modificações para a incorporação do pré-esforço, propuseram $1/(\sqrt{1+600\varepsilon_R})$. Como pode ser observado na Figura 2.4, o valor proposto por Hsu e Mo [1] é mais conservativo. Porém, na intenção de retratar o comportamento mais real da placa, optou-se por utilizar a parcela proposta por Belarbi e Hsu [12], por constituir um valor mais próximo do médio dos valores medidos experimentalmente.

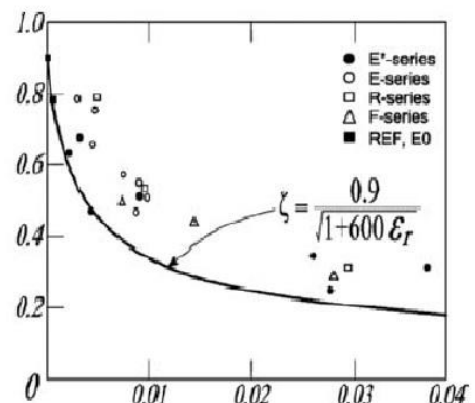
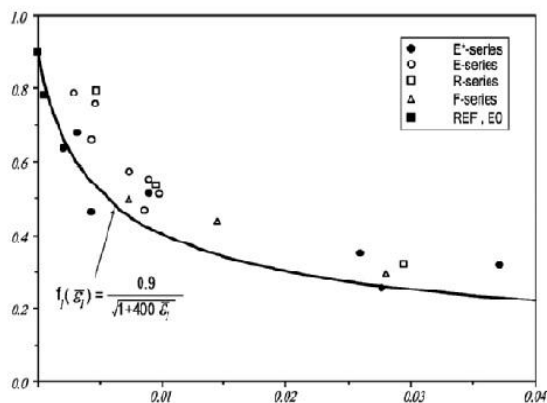
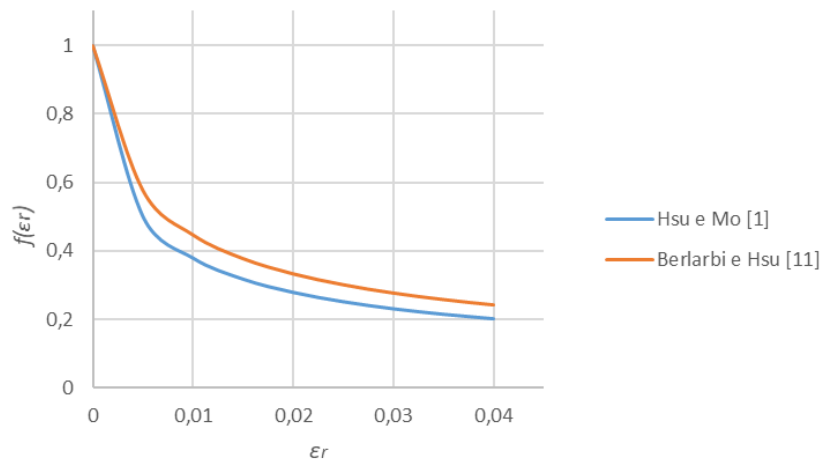


Figura 2.4 - Comparação entre estudos de Belarbi e Hsu [12] e Hsu e Mo [1] para a contribuição da extensão de tração na contabilização do efeito de amolecimento.

O fator η foi inicialmente estudado por Pang e Hsu [13] para o modelo RA-STM, os quais propuseram o intervalo de validade $0.4 < \eta < 2.5$. Posteriormente, Zhang e Hsu [14] comprovaram a aplicabilidade deste intervalo para placas com resistência de betões até 100 MPa. De igual forma, o intervalo de aplicabilidade do fator η' para a proposta inicial é de $0.4 < \eta' < 1$, tendo por base a Eq. 2.20.

Pang e Hsu em 1996 [16] estudaram o comportamento de placas submetidas ao corte puro, tendo realizado ensaios com 13 placas reforçadas com armaduras orientadas à 45° em relação ao referencial L-T. A partir dos resultados experimentais obtidos, os autores viabilizaram o proposto no segundo termo da Eq. 2.18.

Bernardo *et. al.* em 2012 [36] realizaram um estudo comparativo para encontrar qual a relação constitutiva para o betão à compressão que melhor se adequava ao modelo de treliça espacial. Para isso, os autores analisaram os resultados obtidos a partir do modelo de treliça com ângulo variável (VATM) para a previsão do comportamento último de vigas de betão armado sujeitas à torção, tendo por base 21 relações σ - ϵ para o betão comprimido nas escoras propostas por vários autores. Os autores concluíram que um dos modelos teóricos mais adequados era aquele que incorporava a relação σ - ϵ para o betão comprimido nas escoras proposta por Belarbi e Hsu em 1991 [34] com os fatores de redução propostos por Zhang e Hsu em 1998 [14] para ter em conta o efeito de amolecimento.

No presente trabalho, o modelo proposto foi desenvolvido tanto para placas produzidas com betão de alta resistência (HSC) como de resistência normal (NSC). Sabe-se que o comportamento global de placas compostas por betão de alta resistência difere do comportamento de placas compostas por betão de resistência normal devido às diferenças de constituição dos referidos betões. Assim, o efeito do amolecimento do betão é também diferenciado nos dois casos.

Ainda no que se refere à relação constitutiva para o betão à compressão no modelo RA-STM proposto, torna-se necessário realizar neste trabalho uma correção do fator η . Este fator de redução tem em conta a relação entre as tensões resistentes nas armaduras na direção longitudinal e transversal do modelo. Assim, deve ser considerada a contribuição das armaduras de pré-esforço, tendo em vista que estas se comportam como simples armaduras passivas após a descompressão do betão [14]. O fator η corrigido vem dado por:

$$\eta = \frac{\rho_L f_{syL} + \rho_{PL} f_{psL0.1\%}}{\rho_T f_{syT} + \rho_{PT} f_{psT0.1\%}} \quad 2.21$$

Na equação anterior, $f_{psL0.1\%}$ e $f_{psT0.1\%}$ representam as tensões limites convencionais de proporcionalidade a 0,1% para a armadura longitudinal e transversal de pré-esforço, respetivamente, conforme ilustrado na Figura 2.7. Os parâmetros ρ_{PL} e ρ_{PT} são definidos como sendo as taxas mecânicas da armadura de pré-esforço em cada direção e são calculados

da mesma forma como para a armadura ordinária ($\rho_{PL} = A_{spL}/A_c$ e $\rho_{PT} = A_{spT}/A_c$, onde A_{spL} e A_{spT} são as áreas totais de armadura de pré-esforço na respetiva direção).

Se as taxas de armadura em cada direção, tanto ordinária como de pré-esforço, forem desequilibradas, o fator η é diferente da unidade, sendo inversamente proporcional ao coeficiente ζ .

2.3.2 Armaduras ordinárias submetidas à tração

Relativamente às armaduras ordinárias em tração, é importante salientar que estas, tanto na direção longitudinal como transversal, se encontram inseridas no betão, pelo que não devem ser utilizadas relações que derivaram simplesmente de ensaios à tração uniaxial de provetes de armaduras. Devem antes ser utilizadas relações médias que representam o comportamento das armaduras ao longo de um comprimento suficiente do elemento de betão para incluir várias fissuras. Desta forma, estas relações incorporam de forma indireta o efeito da participação do betão tracionado entre fissuras e a interação entre o betão e as armaduras ordinárias. Este efeito é denominado por efeito de enrijecimento (*stiffening effect*).

Na apresentação do modelo original, Hsu e Mo [1] propuseram uma relação constitutiva bilinear com patamar horizontal para o comportamento da armadura ordinária (Eq. 2.22 e Eq. 2.23). A relação σ - ε representa um comportamento elasto-plástico perfeito onde E_s é o valor médio do módulo de elasticidade da armadura ordinária e ε_s a sua extensão associada.

$$f_s = E_s \varepsilon_s \quad \varepsilon_s < \varepsilon_{sy} \quad 2.22$$

$$f_s = f_y \quad \varepsilon_s \geq \varepsilon_{sy} \quad 2.23$$

Porém, a relação anterior foi baseada no comportamento do varão isolado à tração simples, ou seja, sem a participação do betão entre fissuras. Foi então proposto por Pang e Hsu em 1995 [13] uma relação média bilinear simples para a curva σ - ε para a armadura ordinária inserida no betão, traduzida pelas Eq. 2.24 e Eq. 2.25. Esta é a relação constitutiva utilizada no presente trabalho.

$$f_s = E_s \varepsilon_s \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_y' \quad 2.24$$

$$f_s = (0.91 - 2BN)f_{sy} + (0.02 + 0.25BN)E_s \varepsilon_s \quad \varepsilon_s > \varepsilon_y' \quad 2.25$$

Onde:

$$\varepsilon_y' = f_y'/E_s \quad 2.26$$

$$f_y' = (0.93 - 2BN)f_{sy} \quad 2.27$$

$$BN = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}} \right)^{1.5} \quad 2.28$$

$$f_{cr} = 0.313\sqrt{f_{cm}(MPa)} \quad 2.29$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \geq 0.15\% \quad 2.30$$

Nas equações anteriores, f_{cr} é a tensão média de rotura do betão à tração e f_{cm} o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão. Os parâmetros f_s (valor de tensão na armadura ordinária), ε_s (extensão de tração), ρ (taxa mecânica de armadura) e f_{sy} (tensão de cedência à tração da armadura ordinária) podem diferenciar-se para a direção longitudinal e transversal.

Substituindo a Eq. 2.27 na Eq. 2.26 e considerando ε_y a deformação associada à tensão de cedência da armadura, vem:

$$\varepsilon_{y'} = \frac{(0.93 - 2BN)f_y}{E_s} = (0.93 - 2BN)\varepsilon_y \quad 2.31$$

A Eq. 2.31 é importante pois não incorpora a tensão de cedência nem o módulo de elasticidade da armadura ordinária, substituindo-os pelo valor da extensão de cedência, calculada previamente através da Eq. 2.24.

A Figura 2.5 compara graficamente as relações constitutivas traduzidas pelas equações anteriores e relacionadas com o comportamento da armadura individual e da armadura embebida em betão. A partir da Figura 2.5 é importante salientar alguns aspetos, dentre eles a inferioridade do valor para a tensão f_s dada pela Eq. 2.25. Também sobressai a diferença de comportamento para valores superiores ao limite de elasticidade. Enquanto a relação que considera a armadura isolada prevê um patamar horizontal de cedência após ε_{sy} , a relação para a armadura embebida no betão prevê um efeito de enrijecimento através de uma linha inclinada após $\varepsilon_{y'}$ (Eq.2.26). Como pode ser observado através da Eq. 2.31, a extensão $\varepsilon_{y'}$ é reduzida através do fator $(0.93 - 2BN)$, de forma a contabilizar o efeito do betão tracionado entre fissuras.

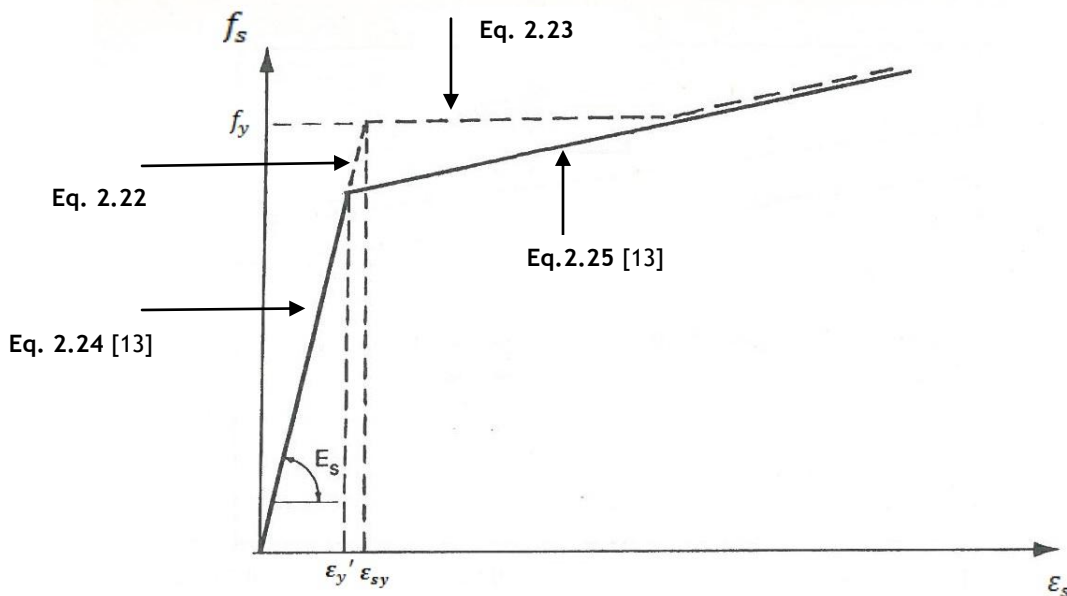


Figura 2.5 - Relações σ - ϵ para a armadura isolada e para a armadura embebida no betão. Adaptado de [13].

2.3.3 Armaduras de pré-esforço submetida à tração

Em 1985, Hsu e Mo [37] estudaram o comportamento de vigas com pré-esforço longitudinal submetidas à torção pura tendo por base um modelo de treliça espacial com amolecimento. Os autores consideraram a participação das armaduras de pré-esforço para o equilíbrio na direção longitudinal e consideraram o estado de tensão induzido inicialmente para calcular a deformação inicial da armadura longitudinal ordinária.

No presente trabalho será feita uma análise análoga para o caso em estudo (placas ao corte), onde o elemento bidimensional de betão armado pode ser pré-esforçado na direção longitudinal e/ou transversal. Portanto, será tido em conta o estado de tensão inicial das armaduras de pré-esforço em ambas as direções para prever as deformações nas armaduras ordinárias.

Hsu e Mo em 1985 [37] consideraram ainda o efeito da descompressão do betão. Este efeito ocorre quando o momento torsor externo aplicado na viga produz uma força equivalente de tração longitudinal que anula a força de compressão instalada no betão devido ao pré-esforço. Nesse instante, o efeito inicial do pré-esforço é anulado e a força de tração passa a ser absorvida na sua totalidade pela armadura de pré-esforço, uma vez que nesse instante a extensão no betão e na armadura ordinária é nula [37]. Posteriormente ao efeito de descompressão ocorrer, as armaduras de pré-esforço passam a funcionar como armaduras ordinárias (passivas). Hsu e Mo assumiram que o modelo proposto só modelava o comportamento da viga à torção após a descompressão do betão. O referido anteriormente

pode também ser aplicado ao caso de placas de betão pré-esforçado submetidas a um estado de corte.

O modelo estudado nesse trabalho foi proposto originalmente por Hsu em 1984 [38] e reformulado por Pang e Hsu em 1995 [13], sendo mais recentemente utilizado por Silva em 2016 [20]. O trabalho desenvolvido surge com o sentido expandir o modelo eficiente proposto por Silva [20] para o caso de placas com pré-esforço.

Da mesma forma como assumido por Hsu em 1984 [38] para o modelo de treliça espacial, considerou-se no presente trabalho que o comportamento da placa seria estudada somente após o efeito de descompressão do betão ter ocorrido. Assumindo esta hipótese, a placa com pré-esforço em ambas direções irá comportar-se como uma placa de betão armado reforçada com armadura adicional em ambas as direções. O efeito das tensões iniciais devidas ao pré-esforço será contabilizado para o cálculo da deformação nas armaduras de pré-esforço.

Ao incorporar o conceito de descompressão para o modelo RA-STM modificado com pré-esforço, torna-se necessário conhecer previamente a tensão instalada nas armaduras de pré-esforço (f_{ps}), tendo por base a respetiva extensão (ε_{ps}), a qual pode ser calculada a partir da Eq. 2.32.

$$\varepsilon_{ps} = \varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s \quad 2.32$$

Na equação anterior, ε_{dec} é a extensão na armadura de pré-esforço na descompressão do betão e ε'_s é a extensão na armadura ordinária após a descompressão. Como o modelo é estendido para incorporar pré-esforço nas duas direções, os parâmetros f_{ps} , ε'_s , ε_{dec} e ε_{ps} deverão ser diferenciados para a direção longitudinal e transversal.

De modo a justificar a Eq. 2.32, Hsu em 1984 [38] e posteriormente Hsu e Mo 1985 [37] ilustraram a relação entre a curva σ - ε para a armadura ordinária e de pré-esforço, ambas incorporadas no elemento em estudo, a qual pode ser observada na Figura 2.6. Como os autores desenvolveram o modelo somente para pré-esforço na direção longitudinal, os índices dos parâmetros aparecem referentes a essa orientação.

Quando o pré-esforço é aplicado, existe uma extensão inicial de compressão nas armaduras ordinárias (ε_{si}) e uma extensão de tração inicial na armadura de pré-esforço (ε_{psi}). Essa condição é representada pelo ponto A da Figura 2.6. Essas extensões podem ser obtidas a partir da Lei de Hooke (Eq. 2.33) e do princípio de homogeneização da secção (Eq. 2.34).

O momento torsor correspondente ao ponto D é designado por momento torsor de descompressão. Para lá deste momento torsor, a viga comporta-se como uma viga ordinária de betão armado.

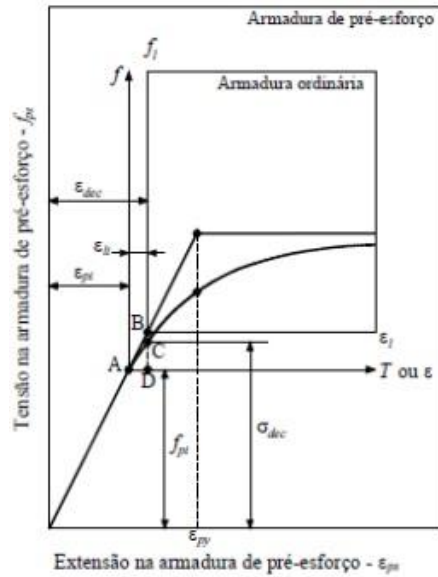


Figura 2.6 - Conceito de descompressão do betão [37] [38].

$$\varepsilon_{psi} = \frac{f_{pi}}{E_{ps}} \quad 2.33$$

$$\varepsilon_{si} = \frac{A_{sp} f_{pi}}{A_s (E_s - E_c) + E_c (A_c - A_h - A_{sp})} \quad 2.34$$

Onde:

f_{pi} - Tensão inicial na armadura de pré-esforço;

E_{ps} - Módulo de Elasticidade da armadura de pré-esforço;

A_{sp} - Área total da armadura de pré-esforço por direção;

A_s - Área total de armadura ordinária por direção;

E_c - Módulo de Elasticidade do betão;

A_c - Área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão;

A_h - Área da zona vazada da secção de betão ($A_h = 0$ em secções cheias)

A relação ilustrada na Figura 2.6 bem como as Eq. 2.33 e Eq. 2.34 são também válidas para placas pré-esforçadas submetidas ao corte (neste caso $A_h = 0$).

Hsu e Mo [37] referem que, para o caso das vigas, quando a armadura de pré-esforço é exagerada, o esmagamento do betão precederá a descompressão do betão, resultando numa extensão de compressão nos varões longitudinais da armadura ordinária para o momento torsor máximo. Neste caso, o modelo de treliça espacial utilizado como analogia, que assume

a viga como estando plenamente fissurada, é inválido. O mesmo pode ser referido para as placas.

A extensão de descompressão na armadura de pré-esforço representada na Figura 2.6 pelo ponto C, a qual se encontra incorporada na Eq. 2.32, pode ser calculada através de:

$$\varepsilon_{dec} = \varepsilon_{psi} + \varepsilon_{si} \quad 2.35$$

O cálculo de f_{ps} , da forma proposta inicialmente por Hsu [38], tem em conta duas fases. Uma primeira fase em que o comportamento das armaduras de pré-esforço tracionadas é elástico e linear ($f_{ps} = E_{ps}\varepsilon_{ps}$), até um valor de extensão limite proporcional igual, de acordo com Hsu, a 0.1% ($\varepsilon_{ps0.1\%}$). A tensão correspondente a esta extensão é $f_{ps0.1\%}$, a qual já tinha sido incorporada através da Eq. 2.21. A partir deste valor tem início a segunda fase, sendo a relação constitutiva para as armaduras de pré-esforço dada pela designada equação de Ramberg-Osgood (Eq. 2.36) conforme ilustrado na Figura 2.7.

$$f_{ps} = \frac{E_{ps}\varepsilon_{ps}}{\left[1 + \left(\frac{E_{ps}\varepsilon_{ps}}{f_{pu}}\right)^R\right]^{1/R}} \quad \varepsilon_{ps} > \varepsilon_{ps0.1\%} \quad 2.36$$

Na equação anterior, f_{pu} é a tensão última da armadura de pré-esforço e R é um coeficiente determinado através da seguinte metodologia, conforme apresentado por Hsu e Mo [37]:

- i. Escolhem-se 5 pontos da parte não linear da curva σ - ε experimental e são retiradas as extensões e tensões correspondentes;
- ii. Cada valor de coordenada (σ ; ε) é substituído na Eq. 2.36, sendo calculado o valor de R através de um processo iterativo;
- iii. O valor final de R é considerado como sendo a média aritmética dos cinco valores obtidos.

Para as suas análises, os referidos autores propuseram um valor de R igual a 4.38 para armaduras correntes de pré-esforço. Já anteriormente, Warwaruk em 1973 [39] proposto este valor com base em resultados de ensaios cabos correntes de pré-esforço.

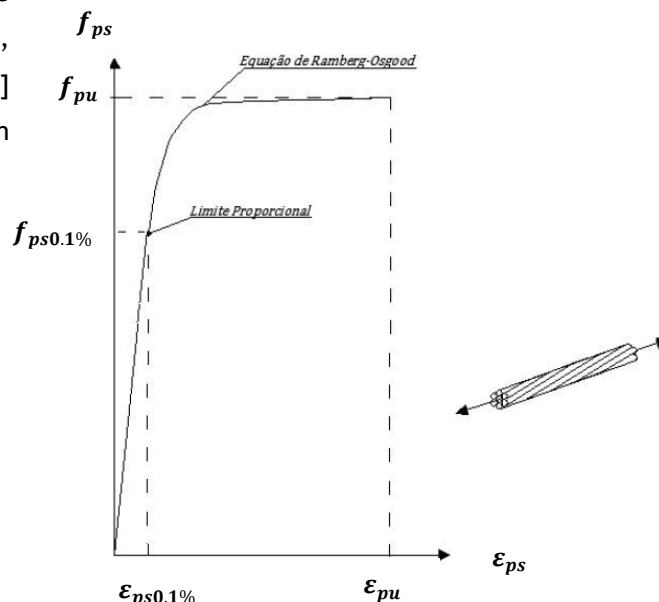


Figura 2.7 - Curva σ - ε baseada na equação de Ramberg-Osgood.

Em 1985, Hsu e Mo [37] definem também um novo limite de proporcionalidade, tomado como o valor da extensão correspondente a $0.7f_{pu}$ e denominado como $\varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}}$. Posteriormente, em 1991, Hsu [40] considerou um novo parâmetro E'_{ps} denominado por módulo de elasticidade de Ramberg-Osgood, assumido com o valor igual a 214 GPa. O parâmetro E'_{ps} foi ligeiramente aumentado para que a curva não linear coincida com a parte linear no ponto de transição. O valor do parâmetro de forma R também foi alterado e passou a valer 4.

Assim, tendo por base as modificações anteriores, as equações que definem a lei constitutiva da armadura de pré-esforço vêm (com $R = 4$):

$$f_{ps} = E_{ps}\varepsilon_{ps} \quad \varepsilon_{ps} \leq \varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}} \quad 2.37$$

$$f_{ps} = \frac{E'_{ps}\varepsilon_{ps}}{\left[1 + \left(\frac{E'_{ps}\varepsilon_{ps}}{f_{pu}}\right)^R\right]^{1/R}} \quad \varepsilon_{ps} > \varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}} \quad 2.38$$

Substituindo nestas duas equações a Eq. 2.32, obtém-se as equações finais que descrevem o comportamento das armaduras de pré-esforço, o qual também se encontra ilustrado na Figura 2.8.

$$f_{ps} = E_{ps}(\varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s) \quad \varepsilon_{ps} \leq \varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}} \quad 2.39$$

$$f_{ps} = \frac{E'_{ps}(\varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s)}{\left[1 + \left(\frac{E'_{ps}(\varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s)}{f_{pu}}\right)^R\right]^{1/R}} \quad \varepsilon_{ps} > \varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}} \quad 2.40$$

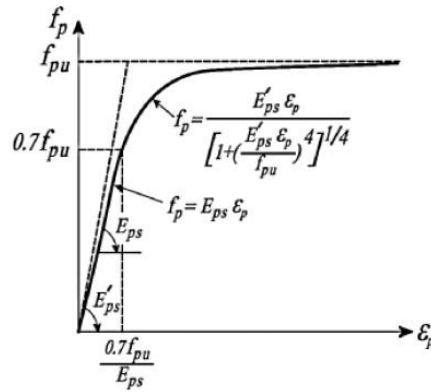


Figura 2.8 - Curva $\sigma - \epsilon$ da armadura de pré-esforço [40].

É importante observar o comportamento da curva $\sigma - \epsilon$ proposta de duas formas. Quando o termo (1) do denominador da Eq. 2.40 é omitido, a curva tende para a horizontal, assintoticamente à reta horizontal correspondente a $f_p = f_{pu}$. Quando termo do denominador da mesma equação $(E'_{ps}(\epsilon_{dec} + \epsilon'_s)/f_{pu})^R$ é omitido, a curva tende assintoticamente para a reta $f_{ps} = E'_{ps}(\epsilon_{dec} + \epsilon'_s)$.

Deve ser referido que para as armaduras de pré-esforço, a curva $\sigma - \epsilon$ (Eq. 2.39 e Eq. 2.40) não contabiliza o efeito de enrijecimento (*stiffening effect*). Este efeito não é significativo no comportamento das armaduras de pré-esforço na medida em que a variação de extensão ao longo do comprimento das armaduras é desprezável face à extensão introduzida nas mesmas no ato de aplicação do pré-esforço [41].

No presente trabalho, a utilização da curva descrita pela Eq. 2.39 e Eq. 2.40 originou alguns problemas de convergência. O motivo foi a descontinuidade na passagem entre estas curvas (Eq. 2.39 e Eq. 2.40). Apesar de Hsu e Mo terem alterado o valor do módulo de elasticidade da armadura de pré-esforço para evitar a descontinuidade, no trabalho em causa o valor de ϵ'_s sofre alterações em virtude das iterações devido ao processo de otimização do *toolbox* do MATLAB. Para contornar este problema, a curva teve que ser novamente calibrada para o presente trabalho. Para isso, procedeu-se ao cálculo do valor da tensão correspondente a $0.7f_{pu}$ e sua respetiva extensão para a componente linear da equação (Eq. 2.41). Os valores obtidos encontram-se resumidos na Tabela 2.1.

$$\epsilon_{ps\ 0.7f_{pu}-L} = \frac{0.7f_{pu}}{E_{ps}} \quad 2.41$$

Verifica-se que, para o mesmo valor de $\epsilon_{ps\ 0.7f_{pu}}$, as tensões obtidas a partir da equação linear (Eq. 2.39) e não linear (Eq. 2.40) não coincidem. Na Figura 2.9 foi traçada a parte inicial da curva linear da Eq. 2.39 e não linear da Eq. 2.40, e foi também traçado o nível correspondente a $0.7f_{pu} = 1302$ MPa. Os valores utilizados como fundamento para este cálculo são os apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1- Extensão $\epsilon_{ps0.7f_{pu}}$ associada à parte linear da curva $\sigma - \epsilon$ da armadura de pré-esforço.

E_{ps} [MPa]	f_{pu} [MPa]	$0.7f_{pu}$ [MPa]	Parte Linear (Eq. 2.41)
			$\epsilon_{ps0.7f_{pu}-L} = 0.7f_{pu} / E_{psL}$
195000	1860	1302	0.00668

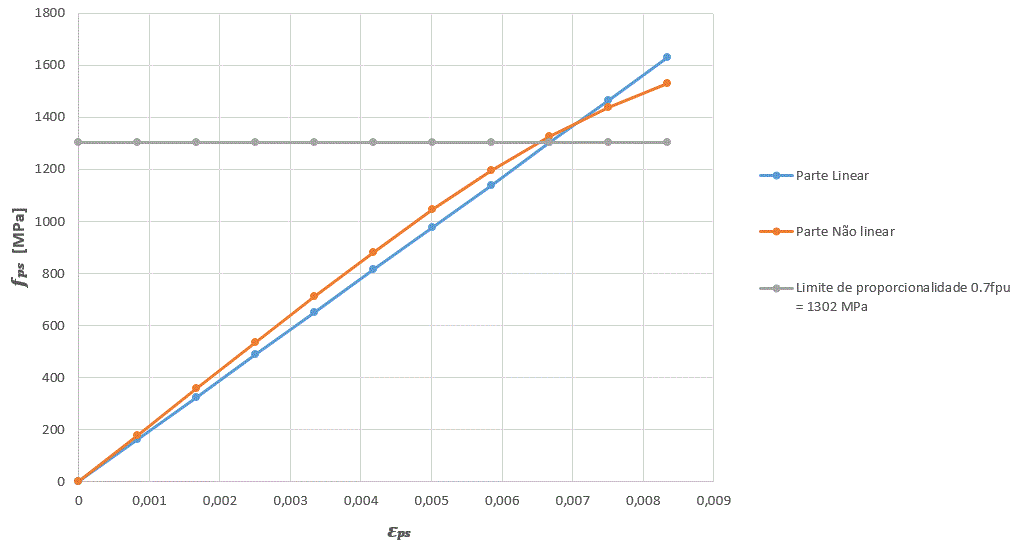
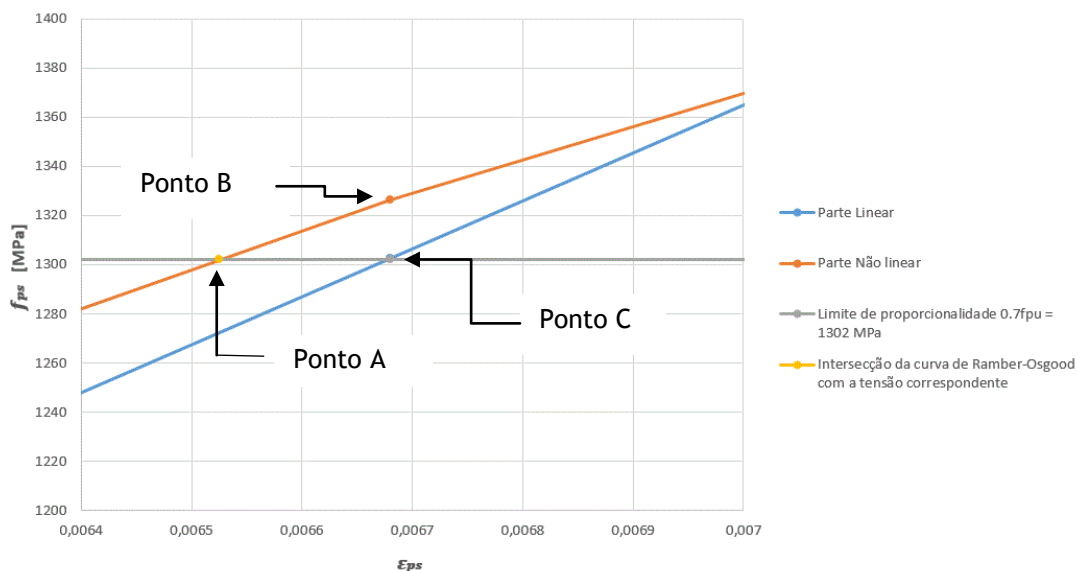


Figura 2.9 - Comparação entre a curva $\sigma - \epsilon$ linear e não linear.

Refere-se que, para comparar o desenvolvimento de ambas curvas, as mesmas foram calculadas para intervalos de extensões além do domínio de aplicabilidade. Ou seja, a Eq. 2.39 foi calculada para alguns valores de $\epsilon_{ps} > \epsilon_{ps0.7f_{pu}}$, enquanto a Eq. 2.40 foi calculada para alguns valores de $\epsilon_{ps} < \epsilon_{ps0.7f_{pu}}$.

A Figura 2.10 realça a zona de cruzamento das curvas:



Com base na Figura 2.10 e a fim de ultrapassar o problema da descontinuidade, para este trabalho foi proposto um ajustamento da curva de Ramberg-Osgood. A parte não linear foi transladada segundo o eixo das extensões de um valor $\Delta\varepsilon_{ps}$, de forma que o ponto inicial da curva não linear (ponto B) coincida com o ponto final da parte linear (ponto C). O ponto A traduz a intersecção da curva de Ramberg-Osgood (não linear) com o valor da tensão limite de proporcionalidade. É este ponto que deverá coincidir com o ponto C de forma a garantir a continuidade da curva. Em suma, o valor $\Delta\varepsilon_{ps}$ é calculado tendo por base as extensões correspondentes aos Pontos A e C (Figura 2.10).

O processo mais eficiente encontrado para calcular $\Delta\varepsilon_{ps}$ foi inverter o processo de cálculo baseado na Eq. 2.40, ou seja, calcular um novo valor de extensão para a equação não linear $\varepsilon_{ps0.7f_{pu-NL}}$, com o valor fixo de tensão $f_{ps} = 0.7f_{pu}$. Tal corresponde ao ponto A da Figura 2.10. A Eq. 2.42 traduz esse cálculo.

$$0.7f_{pu} = \frac{E'_{ps}\varepsilon_{ps}}{\left[1 + \left(\frac{E'_{ps}\varepsilon_{ps}}{f_{pu}}\right)^R\right]^{1/R}} \Leftrightarrow \varepsilon_{ps} = \varepsilon_{ps0.7f_{pu-NL}} = 0.00652 \quad \varepsilon_{ps} > \varepsilon_{ps0.7f_{pu}} \quad 2.42$$

O valor de $\Delta\varepsilon_{ps}$ será a diferença entre as extensões obtidas, correspondentes aos pontos A e C (Figura 2.10).

$$\Delta\varepsilon_{ps} = \varepsilon_{ps0.7f_{pu-L}} - \varepsilon_{ps0.7f_{pu-NL}} \quad 2.43$$

Abaixo, encontra-se ilustrado um exemplo de cálculo do valor de $\Delta\varepsilon_{ps}$ com base nos valores apresentados na Tabela 2.1.

$$\Delta\varepsilon_{ps} = 0.00668 - 0.00652 \Leftrightarrow \Delta\varepsilon_{ps} = 0.00016, \quad \therefore \Delta\varepsilon_{ps} > 0$$

Note-se que para o exemplo das armaduras de pré-esforço utilizadas neste trabalho, o valor de $\Delta\varepsilon_{ps}$ é sempre positivo. Tal conclusão é importante pois influencia diretamente a proposta de calibração da lei constitutiva para a armadura de pré-esforço apresentada.

Em suma, a curva calibrada de Ramberg-Osgood incorporada no modelo RA-STM modificado com pré-esforço fica descrita através da Eq. 2.44. Esta calibração mostrou-se viável e não apresentou problemas de convergência.

$$f_{ps} = \frac{E'_{ps}(\varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s - \Delta\varepsilon_{ps})}{\left[1 + \left(\frac{E'_{ps}(\varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s - \Delta\varepsilon_{ps})}{f_{pu}}\right)^R\right]^{1/R}} \quad \varepsilon_{ps} > \varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}} \quad 2.44$$

Como pode ser observado na Figura 2.11 e na Figura 2.12, a calibração da curva resolveu o problema da descontinuidade no ponto correspondente ao limite de proporcionalidade da tensão. Note-se que, com o acerto realizado, a curva não linear, depois de transladada, não intersesta mais a origem (ver Figura 2.11). Contudo, este aspeto não é relevante tendo em vista o seu domínio de aplicação corresponder a extensões superiores a $\varepsilon_{ps\ 0.7f_{pu}}$.

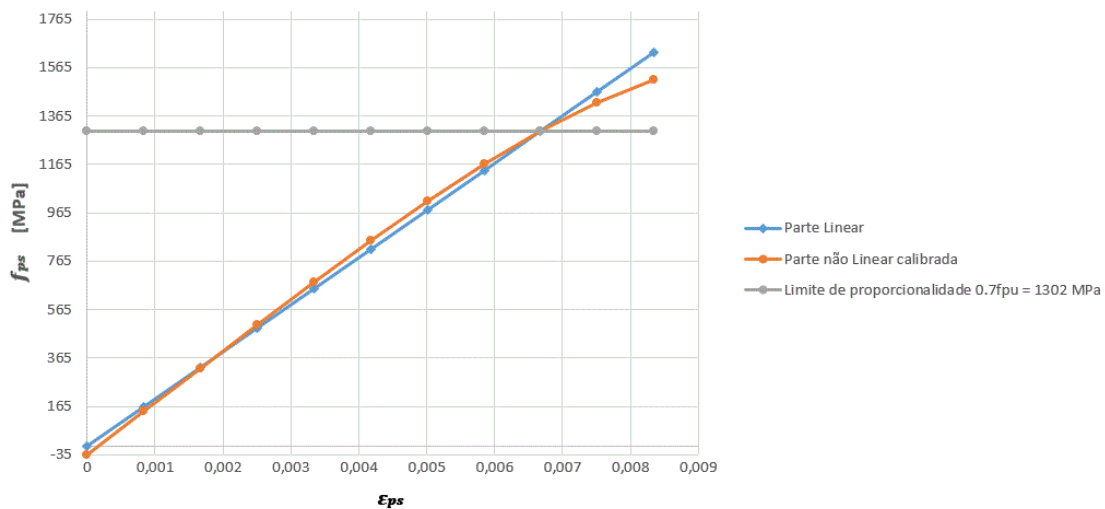


Figura 2.11 - Comparação entre a curva $\sigma - \varepsilon$ linear e não linear após calibração.

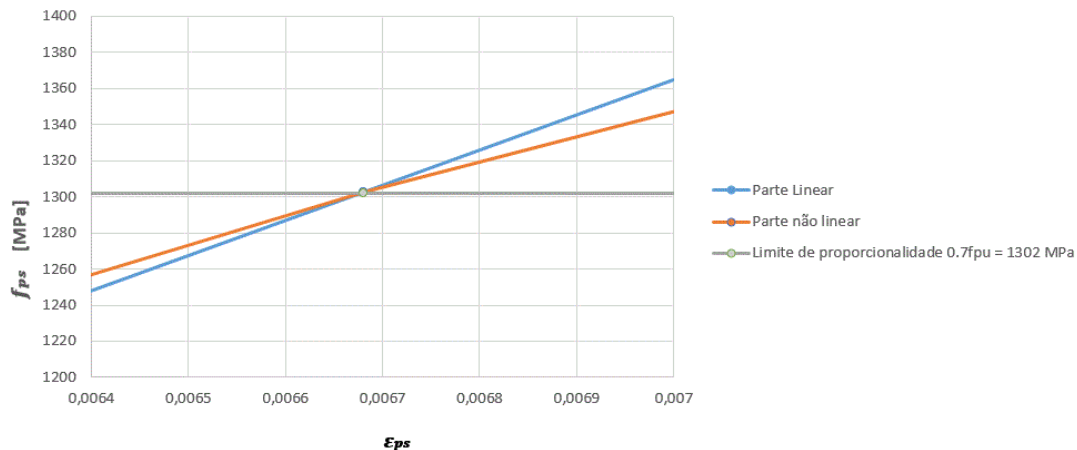


Figura 2.12 - Zona de intersecção das curvas após calibração.

2.4 Modelo de treliça elástico linear

A fim de simular o comportamento de placas pré-esforçadas sujeitas ao corte tendo por base o RA-STM modificado proposto, é necessário partir de uma estimativa inicial tendo por base um modelo mais simples. Entende-se como estimativa inicial o primeiro valor para o “arranque” do procedimento de cálculo. Para este trabalho, em semelhança ao proposto por

Silva e Horowitz [19] foi considerado o modelo MCTM (*Mohr Compatibility Truss Model*) [1], tendo em conta o efeito do pré-esforço.

Segundo Hsu e Mo [1] este modelo também é baseado nos três princípios da mecânica das estruturas e pode ser utilizado tanto para cargas de serviço quanto para carregamentos próximos ao início do escoamento da armadura.

A incorporação do efeito do pré-esforço é assumida de forma análoga ao RA-STM, uma vez que o MCTM é igualmente baseado nos três princípios da mecânica das estruturas referidos anteriormente. As equações de equilíbrio e compatibilidade permanecem iguais para o modelo RA-STM modificado com pré-esforço, sendo alteradas apenas as relações constitutivas dos materiais. São, portanto, calculados através da estimativa inicial, os valores de extensão na armadura longitudinal e transversal (ε_L e ε_T) e a extensão média de compressão no betão (ε_D).

Hsu e Mo [1] referem que se as leis que regem o comportamento dos materiais são baseadas em relações não lineares, a teoria se torna mais precisa, contudo, também se torna mais complexa. O objetivo de assumir o modelo MCTM para o cálculo da estimativa inicial constitui uma simplificação do método de cálculo, visto que o procedimento de cálculo associado ao modelo MCTM, ao ser regido simplesmente pela lei de Hooke, facilita os cálculos iniciais para o “arranque” do RA-STM.

Como poderá ser comprovado na Secção 2.5.2, o modelo MCTM que serve de modelo base para o cálculo da estimativa inicial incorpora a influência da armadura de pré-esforço, conduzindo à resolução de uma equação não linear (Eq. 2.68) com base nas equações de arranque, Eq. 2.65 a Eq. 2.67.

De forma similar ao considerado para o modelo RA-STM, no MCTM a tensão de tração do betão também é desprezada ($\sigma_R = 0$). De forma diferenciada, este modelo desconsidera o efeito do amolecimento do betão (válido para o RA-STM), adotando o comportamento elástico e linear perfeito tanto para o betão como para a armadura.

2.4.1 Carregamento proporcional

Sabe-se que em análises elásticas de elementos sujeitos a esforços de membrana, existe uma relação entre as tensões principais (σ_1, σ_2) no referencial 1-2 (rodado de α_1) e as tensões de membrana aplicadas no elemento de betão no referencial L-T (σ_L, σ_T e τ_{LT}). Essa relação é estabelecida através de coeficientes de proporcionalidade referidos na literatura [1] como m_L , m_T e m_{LT} , respetivamente. Os coeficientes recebem este nome pois relacionam de forma proporcional e simples as variáveis em estudo, como pode ser observado na Figura 2.13.

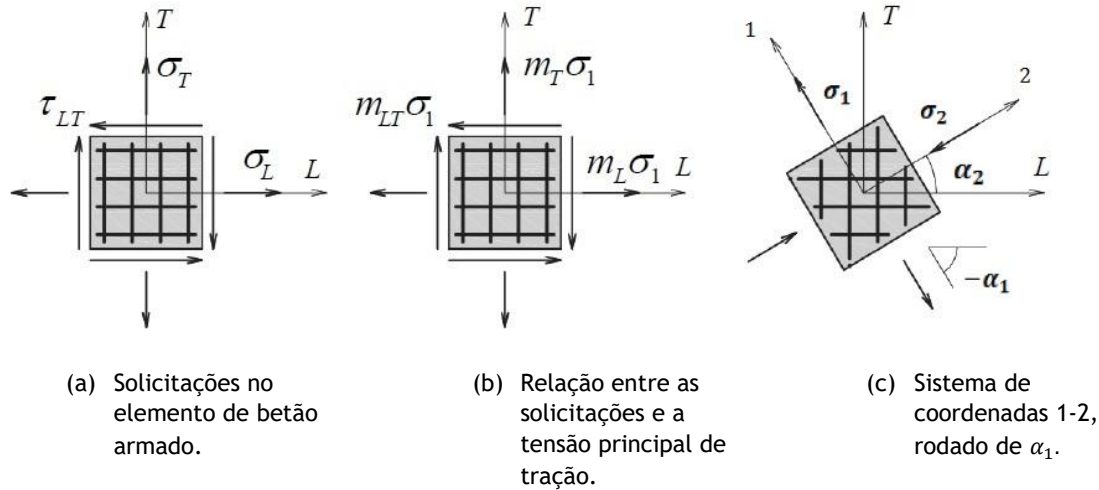


Figura 2.13 - Relação entre as solicitações e a tensão principal de tração através dos coeficientes de proporcionalidade. Adaptado de [1].

O ângulo α_1 apresentado na Figura 2.13(c) relaciona o referencial L-T com o referencial 1-2 e é conhecido como ângulo fixo pois não varia quando os esforços aplicados no elemento de betão aumentam proporcionalmente. Aplicando o conceito semelhante ao utilizado no RA-STM, as relações serão estabelecidas tendo por base o complementar do ângulo fixo, designado por α_2 .

Os coeficientes de proporcionalidade são, portanto, dados pelo rácio entre a tensão solicitante e a tensão principal de tração (Eq. 2.45 a Eq. 2.47). O conceito de carregamento proporcional é introduzido neste trabalho através destes coeficientes. Através destes, pode-se garantir que independentemente do estado de tensão a que a estrutura esteja submetida, a relação entre os esforços solicitantes é mantida.

$$m_L = \sigma_L / \sigma_1 \quad 2.45$$

$$m_T = \sigma_T / \sigma_1 \quad 2.46$$

$$m_{LT} = \tau_{LT} / \sigma_1 \quad 2.47$$

A tensão principal pode ser calculada através da circunferência de Mohr para as tensões, de acordo com a Eq. 2.48.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_L + \sigma_T}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_L - \sigma_T}{2}\right)^2 + \tau_{LT}^2} \quad 2.48$$

De acordo com Hsu e Mo [1], substituindo os coeficientes de proporcionalidade nas equações de equilíbrio fornecidas na Eq. 2.7 a Eq. 2.9, obtêm-se a seguintes equações:

$$m_L \sigma_1 - \rho_L f_L - \rho_{PL} f_{LP} = \sigma_D \cos^2(\alpha_D) \quad 2.49$$

$$m_T \sigma_1 - \rho_T f_T - \rho_{PT} f_{TP} = \sigma_D \text{sen}^2(\alpha_D) \quad 2.50$$

$$m_{LT} \sigma_1 = -(\sigma_D) \text{sen}(\alpha_D) \text{cos}(\alpha_D) \quad 2.51$$

Multiplicando a Eq. 2.49 pela Eq. 2.50, elevando ao quadrado a Eq. 2.51 e combinando os resultados, pode-se obter a equação quadrática a seguir:

$$(m_L \sigma_1 - \rho_L f_L - \rho_{PL} f_{LP})(m_T \sigma_1 - \rho_T f_T - \rho_{PT} f_{TP}) = (m_{LT} \sigma_1)^2 \quad 2.52$$

Definem-se ainda os seguintes parâmetros:

$$S = (m_L m_T - m_{LT}^2) \quad 2.53$$

$$B = [m_L(\rho_T f_T + \rho_{TP} f_{TP}) + m_T(\rho_L f_L + \rho_{PL} f_{LP})] \quad 2.54$$

$$C = (\rho_L f_L + \rho_{LP} f_{LP})(\rho_T f_T + \rho_{PT} f_{TP}) \quad 2.55$$

A solução da equação quadrática (Eq. 2.52) fica simplificada introduzindo os parâmetros anteriores através da Eq. 2.48, vindo:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2S} (B \pm \sqrt{B^2 - 4SC}) \quad 2.56$$

Esta equação é importante para o procedimento de cálculo do modelo utilizado neste trabalho pois é independente do ponto estudado, sendo apenas função de parâmetros fáceis de serem calculados, designadamente os coeficientes de proporcionalidade, as taxas mecânicas das armaduras e as respectivas tensões.

2.5 Procedimento de solução

2.5.1 Equações adicionais

Aplicando-se algumas relações trigonométricas juntamente com as equações de compatibilidade definidas pela Eq. 2.10, pode-se definir o ângulo α_D a partir das deformações nos sistemas L-T e R-D, como mostra a Eq. 2.57 e Eq. 2.58.

$$\text{sen}^2(\alpha_D) = \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} = \frac{\varepsilon_R - \varepsilon_T}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \quad 2.57$$

$$\text{cos}^2(\alpha_D) = \frac{\varepsilon_R - \varepsilon_L}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} = \frac{\varepsilon_T - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \quad 2.58$$

Torna-se importante referir que as duas equações acima ganham importância particular na parte do procedimento que envolve o modelo RA-STM, pois as relações estabelecidas entre as extensões fazem com que o ângulo α_D seja eliminado das equações de equilíbrio. Com isso, o processo de solução ganha estabilidade numérica e consegue encontrar mais facilmente a solução desejada. Após encontrar a solução, pode-se proceder ao cálculo de α_D através da Eq. 2.59. Em suma, o valor de α_D que conduz ao valor mínimo de distorção pode ser obtido derivando a Eq. 2.12 em relação ao próprio ângulo e igualando-a a zero, resultando em:

$$\alpha_D = \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_T - \varepsilon_D}}\right) \quad 2.59$$

2.5.2 Equação não linear de estimativa inicial (F_{MCTM})

Isolando os termos f_L , f_T e σ_D da Eq. 2.49, Eq. 2.50 e Eq. 2.51 respetivamente, obtém-se:

$$\sigma_D = \frac{-m_{LT}\sigma_1}{\text{sen}(\alpha_D)\text{cos}(\alpha_D)} \quad 2.60$$

$$f_L = \frac{-\sigma_D \text{cos}^2(\alpha_D) + m_L\sigma_1 - \rho_{PL}f_{LP}}{\rho_L} \quad 2.61$$

$$f_T = \frac{-\sigma_D \text{sen}^2(\alpha_D) + m_T\sigma_1 - \rho_{PT}f_{TP}}{\rho_T} \quad 2.62$$

Substituindo a Eq. 2.60 na Eq. 2.61 e na Eq. 2.62, e impondo as condições lineares dadas pela Eq. 2.22, tem-se:

$$\varepsilon_L = \frac{(-m_{LT} \cot g(\alpha_D) + m_L)}{E_s \rho_L} \sigma_1 - \frac{\rho_{PL} f_{LP}}{E_s \rho_L} \quad 2.63$$

$$\varepsilon_T = \frac{(-m_{LT} \text{tg}(\alpha_D) + m_T)}{E_s \rho_T} \sigma_1 - \frac{\rho_{PT} f_{TP}}{E_s \rho_T} \quad 2.64$$

$$\varepsilon_D = \frac{(-m_{LT})}{E_c \text{sen}(\alpha_D) \text{cos}(\alpha_D)} \sigma_1 \quad 2.65$$

Neste trabalho, os valores das extensões iniciais são fornecidos para o arranque do procedimento de cálculo, ou seja, ε_L , ε_T e ε_D são pontos iniciais a partir do qual o cálculo é iniciado, culminando na resolução da Eq. 2.68. Como os parâmetros f_{LP} e f_{TP} são calculados posteriormente, a Eq. 2.63 e Eq. 2.64 tiveram que ser ajustadas para valores da tensão inicial nas armaduras de pré-esforço (f_{LPi} e f_{TPi} , como apresentado na Secção 3.2.4 do presente trabalho), culminando nas equações a seguir (Eq. 2.66 e Eq. 2.67). Como a deformação ε_D não tem em conta os parâmetros em questão, manteve-se a mesma Eq. 2.65.

$$\varepsilon_L = \frac{(-m_{LT} \cot g(\alpha_D) + m_L)}{E_s \rho_L} \sigma_1 - \frac{\rho_{PL} f_{LPi}}{E_s \rho_L} \quad 2.66$$

$$\varepsilon_T = \frac{(-m_{LT} \text{tg}(\alpha_D) + m_T) \sigma_1}{E_s \rho_T} - \frac{\rho_{PT} f_{TPi}}{E_s \rho_T} \quad 2.67$$

A partir destas três últimas equações, que têm em conta a deformação inicial induzida pelo pré-esforço, e com base na Eq. 2.59, pode-se obter a equação não linear da estimativa inicial, denominada como função resíduo F_{MCTM} :

$$F_{MCTM} = \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_T - \varepsilon_D} - tg^2(\alpha_D) = 0 \quad 2.68$$

Esta equação finaliza o método de estimativa inicial imposto através do modelo MCTM. Na prática, a utilização do processo de otimização presente no *toolbox* do MATLAB encontra o valor de α_D otimizado, procede ao cálculo da equação não linear de estimativa inicial (F_{MCTM} , Eq. 2.68) e procede ao cálculo das extensões ε_D , ε_L e ε_T através das Eq. 2.65, Eq. 2.66 e Eq. 2.67.

2.5.3 Sistema de equações não lineares do RA-STM

Combinando a Eq. 2.49 com a Eq. 2.58, e a Eq. 2.50 com a Eq. 2.59, obtém-se a função resíduo F_{RA-STM} (Eq. 2.69). Esta constitui um sistema de equações não lineares sendo objetivo de resolução no final do procedimento de cálculo.

$$F_{RA-STM} = \begin{bmatrix} \sigma_D \frac{\varepsilon_T - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} - m_L \sigma_1 + \rho_L f_L + \rho_{PL} f_{LP} \\ \sigma_D \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_D}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} - m_T \sigma_1 + \rho_T f_T + \rho_{PT} f_{TP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.69$$

As duas variáveis primárias escolhidas para a resolução da equação anterior são as extensões na armadura ordinária longitudinal ε_L e transversal, ε_T .

2.5.4 Algoritmo de solução proposto

O algoritmo base utilizado por Hsu e Mo em 2010 [1], bem como o procedimento proposto por Silva em 2016 [20], serviram de base para a elaboração do algoritmo de solução utilizado no presente trabalho. Em ambos os procedimentos de cálculo referidos, a formulação utilizada é semelhante. Hsu e Mo em 2010 [1] propuseram um algoritmo onde os valores de ε_R e σ_1 são inicialmente assumidos, sendo verificados *à posteriori* através do método de tentativa e erro. Contudo, há que salientar que as estimativas iniciais desses parâmetros não seguem uma metodologia bem definida, ficando o processo condicionado à experiência do utilizador do algoritmo.

Na base do procedimento de cálculo utilizado neste trabalho, análogo ao proposto por Silva 2016 [20], está a resolução de um sistema de equações (Eq. 2.69), onde as incógnitas são as extensões longitudinais e transversais nas armaduras ordinárias, ε_L e ε_T . Para tal, estas incógnitas são previamente estimadas através do modelo de treliça elástico linear MCTM. Esta resolução é também condicionada pelo valor da deformação inicial de compressão da placa, ε_D , estando este diretamente relacionado com o nível de pré-esforço aplicado.

O fluxograma utilizado e implementado em MATLAB no presente trabalho encontra-se representado na Figura 2.14, constituindo o mesmo uma extensão do algoritmo para o procedimento de cálculo eficiente desenvolvido por Silva e Horowitz em 2015 [19] e Silva em 2016 [20] para incluir placas com pré-esforço. Para além da incorporação do pré-esforço no modelo, foram ainda incorporadas outras alterações às equações incluídas no procedimento de cálculo proposto pelos anteriores autores, as quais se encontram seguidamente resumidas:

- 1) Em substituição das relações elasto-plásticas para modelar o comportamento da armadura ordinária, foram utilizadas a Eq. 2.24 e Eq. 2.25 as quais têm em conta o fato das armaduras estarem embebidas no betão. O módulo de elasticidade do betão (E_c) foi calculado por correlação com o valor médio da resistência à compressão do betão (f_{cm} , em MPa), segundo a NP EN 1992-1-1 [42]:

$$E_c = 22 [(f_{cm})/10]^{0.3} \quad 2.70$$

- 2) Foi utilizado o valor médio (f_{cm}) ao invés do valor característico (f_{ck}) para caracterizar a resistência à compressão do betão. Estes valores foram relacionados através da Eq.2.71, segundo a NP EN 1992-1-1 [42].

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad 2.71$$

O desenvolvimento do processo iterativo abrangido neste trabalho foi elaborado de forma a calcular o número de pontos definido na linha de código. Com isso, para cada ponto da curva carga-deformação da placa, é necessário variar o valor selecionado de ε_D . Esta alteração é feita através de uma variação imposta pela função otimizadora utilizada.

Relativamente ao critério de paragem adotado, foi considerado que a rotura teórica ocorre quando a extensão do betão à compressão na escora atinge uma extensão última convencional (ε_{cu}). Esta é definida de acordo com a NP EN 1992-1-1 [42], tendo por base a distinção entre as classes de resistência do betão (normal e alta resistência).

$$\varepsilon_{cu} \leq 0.0035 \quad f_{cm} < 58 \text{ MPa} \quad 2.72$$

$$\varepsilon_{cu} \leq \left(2.6 + 35 \left[\frac{(90 - f_{cm})}{100} \right]^4 \right) \cdot 10^{-3} \quad f_{cm} \geq 58 \text{ MPa} \quad 2.73$$

Para iniciar o procedimento de cálculo são fornecidas as solicitações base (σ_L , σ_T e τ_{LT}). O valor de ε_D vai sendo incrementado desde zero até ao valor correspondente à condição imposta pelo critério de paragem. Apesar de Hsu e Mo [1] afirmarem que o modelo RA-STM não simula bem o comportamento pós pico das placas, neste trabalho o comportamento das placas foi calculado para valores da extensão ε_D limitados pelo critério de rotura, independentemente do pico de resistência da placa ter sido previamente alcançado ou não.

Para dar início ao procedimento de cálculo, o utilizador deve calcular previamente algumas propriedades mecânicas da placa (ver fluxograma, “cálculos preliminares” - Figura 2.14), além do valor da extensão inicial da armadura de pré-esforço (ε_{psi} – Eq. 2.33), da extensão inicial das armaduras ordinárias (ε_{si} – Eq. 2.34) e da extensão de descompressão (ε_{dec} – Eq. 2.35).

Com o objetivo de garantir que a estimativa inicial, através das extensões iniciais (ε_L , ε_T , e ε_D) calculadas com base no modelo MCTM, seja próxima da realidade, é imposto que as deformações iniciais sejam reduzidas. Para tal é utilizado um fator redutor igual a 10^{-3} . Assim que as incógnitas ε_L e ε_T são devolvidas ao processo iterativo, este fator é corrigido, multiplicando novamente as variáveis já otimizadas por $\mu = 10^3$. Para as próximas iterações do procedimento de cálculo, é somado um incremento de deformação $\Delta\varepsilon_D$ e, como ponto inicial para solução do novo sistema de equações não lineares, são usados os resultados da iteração anterior. Esse processo é repetido até que o número máximo de pontos n_{max} seja atingido ou até que a condição de deformação imposta pelo critério de paragem seja atingida.

Todo o cálculo relativo ao processo iterativo foi realizado de forma automática através da função *lsqnonlin*, presente no *toolbox* de otimização do MATLAB.

Capítulo 3 - Análises Paramétricas e Validação do RA-STM modificado

3.1 Introdução

No Capítulo 2, quando o modelo RA-STM foi modificado com a adição de pré-esforço, verificou-se desde logo, na literatura consultada, a existência limitada de resultados experimentais relativos a placas pré-esforçadas sujeitas ao corte, com vista a validar fidedignamente a extensão proposta para o modelo. Ainda assim, foram realizados estudos comparativos entre as previsões obtidas a partir do RA-STM modificado e os resultados experimentais encontrados na literatura, sendo estes apresentados por Pang e Hsu em 1995 [13], Zhang e Hsu em 1998 [14], Marti e Meyboom em 1992 [23] e Laskar *et al.* em 2007 [24].

Tendo em conta o referido anteriormente, para além da realização de análises comparativas com resultados experimentais, decidiu-se complementar o presente trabalho com análises suplementares para melhor compreender o efeito do pré-esforço no comportamento de placas sujeitas ao corte.

O presente capítulo encontra-se dividido em duas partes. Na primeira parte são realizadas análises paramétricas para compreender a influência da resistência do betão, além do nível e direção do pré-esforço sobre diversos parâmetros caracterizadores do comportamento das placas. Na segunda parte, com o objetivo de validar a extensão do modelo RA-STM proposto, as previsões obtidas com o RA-STM modificado são comparadas com dois resultados experimentais encontrados na literatura. As linhas de código que foram implementadas para estas duas partes do trabalho são apresentadas no Anexo deste trabalho (ver pág. 107).

3.2 Análises paramétricas

As variáveis de estudo consideradas para as análises paramétricas realizadas foram as seguintes: direção do pré-esforço, nível de pré-esforço, taxa mecânica de armadura ordinária e total, e resistência à compressão do betão (incluindo betão de resistência normal e de betão de alta resistência). Esta última variável foi tida em conta devido às diferenças notáveis observadas na forma da lei constitutiva para os referidos tipos de betões e pressupondo-se que tais diferenças têm influência na resposta das placas.

As placas que serviram de base para as simulações para as análises paramétricas foram ensaiadas em dois estudos, designadamente por Pang e Hsu em 1995 [13] (2 placas de resistência normal - NSC) e por Zhang e Hsu em 1998 [14] (2 placas de alta resistência- HSC).

De seguida, apresentam-se de forma resumida as características das placas anteriormente referidas.

3.2.1 Placas de resistência normal

O estudo de Pang e Hsu em 1995 [13] analisou experimentalmente o comportamento de 13 placas de betão armado de dimensões 55 x 55 x 7 in (1.4 x 1.4 x 0.178 m), reforçadas com armaduras à 45° em relação ao referencial 1-2 e sujeitas aos esforços de tração e compressão, conforme ilustrado na Figura 3.1. De entre as variáveis analisadas no referido estudo estão a percentagem de armadura e a relação entre a quantidade de armadura longitudinal e transversal.

De modo a estudar o tipo de rotura associada a cada placa, os referidos autores consideraram os seguintes 4 níveis de reforço: subarmado, parcialmente subarmado na direção longitudinal, parcialmente subarmado na direção transversal e sobre-armado.

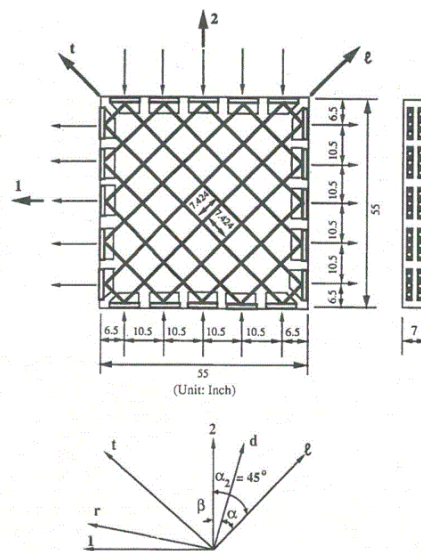


Figura 3.1 - Características das placas ensaiadas por Pang e Hsu [13].

De entre as 13 placas estudadas, todas foram submetidas a um ensaio equivalente ao corte puro em relação ao referencial L-T (referencial ℓ - t na Figura 3.1). As placas foram divididas em 3 séries: Série A com 4 placas com percentagens de armaduras iguais nas duas direções, Série B com 6 placas com percentagens diferentes de armaduras nas duas direções e Série C com 3 placas nas referidas condições da Série A, variando somente o modo de aplicação da carga.

Como referido anteriormente, o ensaio realizado submeteu as placas de acordo com o carregamento ilustrado na Figura 3.1 (trações e compressões segundo o referencial 1-2). O estado de tensão equivalente em corte puro no referencial L-T foi estabelecido quando as armaduras foram posicionadas à 45° em relação ao referencial 1-2. Tendo isso em

consideração, foram aplicadas nas placas das séries A e B esforços de tração e compressão de igual magnitude e de forma proporcional, enquanto na série C o carregamento foi realizado de forma sequencial. Como o objetivo deste trabalho se traduz na análise de placas que estejam sujeitas ao carregamento proporcional, e com taxas mecânicas de armadura ordinárias iguais ou semelhantes em ambas direções, as placas da série A foram escolhidas para a análise paramétrica. A Tabela 3.1 resume as características destas placas.

Tabela 3.1 - Características das placas da série A [13].

	Placa	f_{cm} [MPa]	ρ_L	ρ_T	f_{syL} [MPa]	f_{syT} [MPa]	$n^{(1)}$	$\alpha^{(2)}$	Tipo de rotura
NSC	A1	42.20	0.00596	0.00596	444.80	444.80	1	45°	Frágil
	A2	41.23	0.01193	0.01193	462.64	462.64	1	45°	Dúctil
	A3	41.64	0.01789	0.01789	446.43	446.43	1	45°	Dúctil
	A4	42.47	0.02982	0.02982	469.80	469.80	1	45°	Frágil

(1) O fator n traduz a relação entre as forças resistentes nas armaduras longitudinais e transversais ($n = \rho_L f_{syL} / \rho_T f_{syT}$). Para forças equivalentes, n é igual a unidade.

(2) Ângulo que relaciona o referencial 1-2 com o referencial L-T segundo o qual estão dispostas as armaduras.

Como se pode observar na Tabela 3.1, o valor do reforço de cada placa condicionou o seu tipo de rotura. Pang e Hsu [13] mostraram através das curvas tensão de corte - distorção (curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$), que rácios entre taxas de armadura inferiores a 0.6% conduzem a uma rotura do tipo frágil do elemento por insuficiência de armadura (caso da placa A1). Uma situação idêntica (rotura frágil) acontece quando a placa é sobre-armada, como o caso da placa A4, onde foi observado que a tensão na armadura não atingiu a cedência antes do esmagamento do betão à compressão. Para as placas A2 e A3, as taxas de armadura conduziram a uma rotura dúctil, apresentando um comportamento desejado (as armaduras entraram em cedência antes do esmagamento do betão à compressão). O comportamento geral destas placas pode ser dividido em três fases: fase elástica antes da fissuração do betão, fase pós-fissuração e comportamento plástico após a cedência das armaduras.

Tendo por base os comportamentos na rotura anteriormente referidos, decidiu-se escolher para a análise paramétrica uma placa com rotura dúctil e outra com rotura frágil por esmagamento do betão à compressão, culminando assim na escolha das placas A2 e A4. Para estas duas placas, Pang e Hsu [13] apresentaram as curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ experimentais e teóricas, as quais foram aproveitadas para as análises comparativas com as curvas obtidas a partir do RA-STM modificado proposto neste trabalho. Os respetivos valores encontrados na bibliografia [13] encontram-se apresentadas na Tabela A1 e Tabela A2 do Anexo.

3.2.2 Placas de alta resistência

O estudo de Zhang e Hsu de 1998 [14] analisou experimentalmente 14 placas de betão armado com dimensões 55 x 55 x 7 in (1.397 x 1.397 x 0.178 m), reforçados com armaduras orientadas

à 45° e 90° em relação ao referencial 1-2 e sujeitos a esforços de tração e compressão, conforme mostra a Figura 3.2.

De entre as 14 placas foram criadas 3 séries: série VE com armaduras dispostas à 90° com $\rho_L \neq \rho_T$, série VA com armaduras dispostas à 45° com $\rho_L = \rho_T$ e série VB com armaduras dispostas à 45° com $\rho_L \neq \rho_T$. Com o intuito de realizar uma análise comparativa, foram escolhidas a partir deste estudo placas com taxas mecânicas de armadura ordinária iguais e armaduras dispostas à 45°. Assim, optou-se por simular placas pertencentes à série VA.

A Tabela 3.2 apresenta as características das placas da Série VA ensaiadas por Zhang e Hsu [14]. Esta série incorpora as seguintes placas: uma placa com taxa de armadura baixa (VA0), uma placa com taxa de armadura elevada (VA4) e três placas com valores intermédios para a taxa de armadura (VA1, VA2 e VA3). Os referidos autores citam ainda os limites para os valores da taxa de armadura, sendo estes $\rho_{min} = 0.78\%$ e $\rho_{max} = 4.2\%$ [14].

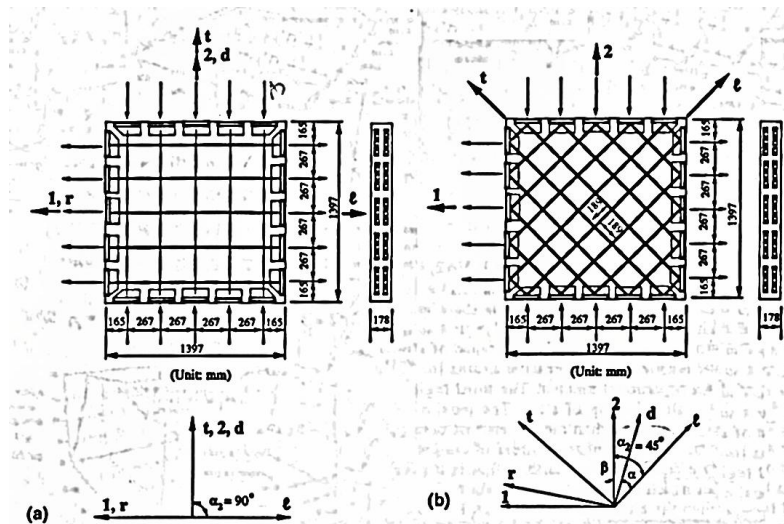


Figura 3.2 - Características das placas ensaiadas por Zhang e Hsu [14]

Tabela 3.2 - Características das placas da série VA [14].

	Placa	f_{cm} [MPa]	ρ_L	ρ_T	f_{syL} [MPa]	f_{syT} [MPa]	$n^{(1)}$	$\alpha^{(2)}$	Tipo de rotura
NSC	VA0	98.80	0.0600	0.0600	445	445	1	45°	Frágil
	VA1	95.10	0.0120	0.0120	445	445	1	45°	Muito dúctil
	VA2	98.20	0.0239	0.0239	409	409	1	45°	Muito dúctil
	VA3	94.60	0.0359	0.0359	455	455	1	45°	Dúctil
	VA4	103.10	0.0524	0.0524	470	470	1	45°	Frágil

(1) O fator n traduz a relação entre as forças resistentes nas armaduras longitudinais e transversais ($n = \rho_L f_{syL} / \rho_T f_{syT}$). Para forças equivalentes, n é igual a unidade.

(2) Ângulo que relaciona o referencial 1-2 com o referencial L-T segundo o qual estão dispostas as armaduras.

Para a análise comparativa a realizar no presente trabalho, consideraram-se apenas as placas com taxas mecânicas de armadura compatíveis com as taxas mecânicas já determinadas na Secção 3.2.1. No estudo realizado, os autores Zhang e Hsu [14] observaram, com base nas curvas experimentais $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$, que as placas VA1 e VA2 apresentaram um comportamento muito dúctil na rotura, enquanto que à medida que aumenta a taxa de armadura de pré-esforço a ductilidade diminui. Independente da ductilidade do elemento, e atendendo à condicionante das taxas mecânicas nas duas direções terem de ser próximas, as placas VA1 e VA2 foram escolhidas para complementar o estudo comparativo a realizar no presente trabalho.

De forma análoga ao apresentado na Secção 3.2.1, os dados teóricos e experimentais destas duas placas são apresentados na Tabela A4 do Anexo.

3.2.3 Resumo das características das placas escolhidas

De forma resumida, a Tabela 3.3 apresenta as características das placas escolhidas para as análises paramétricas. Estas placas foram simuladas inicialmente sem pré-esforço ($\rho_{PL} = \rho_{PT} = 0$) e com níveis crescentes da taxa de armadura de pré-esforço. Relativamente ao valor da tensão de corte (τ_{LT}) aplicada a placa, deve ser referido um aspeto importante. Segundo o conceito de coeficiente de proporcionalidade, o qual está na base do procedimento de cálculo do modelo utilizado, pode-se garantir que, independentemente do estado de tensão a que a placa esteja submetida, a relação entre os esforços atuantes é mantida. Essa relação conservada advém da simplificação do cálculo da tensão principal (σ_1) para o caso de placas sujeitas ao corte puro, onde os valores de σ_L e σ_T são nulos e a Eq. 2.48 é simplificada na Eq. 3.1. Nesta equação, o valor de σ_1 iguala o valor de τ_{LT} . Aplicando a Eq. 2.47, o valor da constante de proporcionalidade ao corte (m_{LT}) fica igual à unidade ou ao seu simétrico. Tal razão serve de justificativa para os valores considerados para τ_{LT} na linha de código apresentada no Anexo (ver página 107).

Salienta-se também que, após os coeficientes de proporcionalidade serem calculados no modelo, a tensão principal volta a ser calculada através da Eq. 2.56, ficando em função somente destes coeficientes, tensões e taxas de armaduras.

Tabela 3.3 - Características das placas escolhidas para as análises paramétricas.

	Placa	f_{cm} [MPa]	ρ_L [%]	ρ_T [%]	$f_{syL} = f_{syT}$ [MPa]
NSC	A2	41.20	1.19	1.19	462.64
	A4	42.47	2.98	2.98	469.74
HSC	VA1	95.10	1.20	1.20	445.00
	VA2	98.20	2.39	2.39	409.00

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_L + \sigma_T}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_L - \sigma_T}{2}\right)^2 + \tau_{LT}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{\tau_{LT}^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \tau_{LT} \quad 3.1$$

3.2.4 Definição dos níveis de pré-esforço

Como já foi referido na Secção 2.3.3, o efeito de um estado de corte puro aplicado numa placa pré-esforçada resulta numa força de tração que alivia as tensões de compressão iniciais instaladas no betão devido à transferência da força de pré-esforço. No momento em que a força de tração iguala a força de compressão instalada no betão, toda a força longitudinal passa a ser absorvida pela armadura de pré-esforço. A partir deste momento (descompressão do betão), a placa pré-esforçada comporta-se como uma placa de betão armado. Recorde-se que o RA-STM modificado, no sentido de incorporar o pré-esforço, apenas contempla a fase pós-descompressão da placa, pelo que o modelo proposto será apenas validado a partir da descompressão do betão.

Para que o procedimento de cálculo do RA-STM modificado se inicie, é necessário calcular previamente a extensão de descompressão da placa (ε_{dec} , Eq. 2.35). Contudo, de entre outros parâmetros, esta extensão depende da área total da armadura de pré-esforço utilizada em cada direcção (A_{sp_i} , Eq. 2.34). Esta área depende da força total de pré-esforço aplicada no elemento (F_p , Eq. 3.5). Assim, para melhor compreensão do efeito que o pré-esforço provoca na placa quando aplicado numa determinada direcção, nas análises paramétricas o procedimento de cálculo para o RA-STM inclui duas situações: a primeira incorpora armadura de pré-esforço apenas na direcção longitudinal (PL), vindo $\rho_{PL} > 0$ e $\rho_{PT} = 0$, enquanto que a segunda incorpora armadura de pré-esforço em ambas as direcções (PL_PT) com percentagens iguais ($\rho_{PL} = \rho_{PT} > 0$).

Para compreender o efeito que o aumento do nível de pré-esforço provoca no comportamento da placa, para cada situação anteriormente referida, o nível de pré-esforço foi aumentado gradativamente, o qual conduziu, conseqüentemente, ao aumento gradual das percentagens de armadura de pré-esforço. Segundo o Código Americano ACI 318-R-14 [43], utilizado neste trabalho para estabelecer o critério máximo de pré-esforço, o valor da tensão máxima devido ao pré-esforço a que o betão pode estar sujeito (f_{cp}) é definido pela Eq. 3.2, tendo o objetivo de reduzir os efeitos não lineares da fluência no betão devido à compressão e controlar os níveis de deformação.

$$f_{cp}^{ACI-max} = 0.45f'_c \quad 3.2$$

Tendo em conta o limite máximo anterior, foram simulados 8 níveis de pré-esforço, sendo eles os seguintes: 2.5%, 5%, 7.5%, 10%, 15%, 20%, 30% e 45% do valor de f'_c (conforme apresentado na Tabela A5 e Tabela A6 do Anexo). Como pode-se observar com estes níveis definidos, os intervalos de pré-esforço considerados não são constantes. Como se poderá verificar nos resultados posteriormente apresentados, a variação de 5% para 10% de f'_c introduz diferenças significativas na resposta das placas, pelo que se achou conveniente reduzir os intervalos para esses níveis de pré-esforço.

Para cada nível escolhido para f_{cp} , procedeu-se ao cálculo da força total na armadura de pré-esforço (F_p), sendo determinada através do produto entre a tensão no betão devido ao pré-esforço (f_{cp}) e a área da secção transversal de betão da placa (A_c):

$$F_p = f_{cp} A_c \quad 3.3$$

Segundo o Código Americano ACI 318-R-14 [43], a tensão máxima na armadura de pré-esforço, imediatamente após a transferência da força de pré-esforço é dada pela Eq. 3.4, onde é relacionada diretamente com a tensão última da armadura de pré-esforço (f_{pu}).

$$f_{pi-max}^{ACI} = 0.7f_{pu} \quad 3.4$$

Tendo por base as equações anteriores, é possível calcular a área da armadura de pré-esforço (A_{sp}) para cada nível de pré-esforço escolhido:

$$A_{sp} = \frac{F_p}{f_{pi-max}^{ACI}} = \frac{f_{cp} A_c}{0.7f_{pu}} \quad 3.5$$

Após o cálculo da área de armadura total de pré-esforço, pode ser calculada a tensão inicial na armadura de pré-esforço (f_{pi}) através da Eq. 3.6, a qual é utilizada para o cálculo da extensão de descompressão (Eq. 2.33 e Eq. 2.34) e também na equação da estimativa inicial (Secção 2.5.2), designadamente na Eq. 2.66 e Eq. 2.67.

$$f_{pi} = \frac{F_p}{A_{sp}} \quad 3.6$$

É importante referir que, independentemente do nível de pré-esforço adotado, o valor inicial da tensão na armadura de pré-esforço é igual à tensão máxima dada pela Eq. 3.4.

Os cálculos detalhados dos valores de f_{cp} , F_p , e A_{sp} para as 4 placas analisadas, tanto para o pré-esforço em uma direção como em duas direções, podem ser consultados nos anexos deste trabalho (ver Tabela A5 a Tabela A10 do Anexo). A seguir, seguem-se tabelas resumo com os

valores adotados para as taxas mecânicas das armaduras de pré-esforço, por direção e nível de pré-esforço.

Tabela 3.4 - Reforço Longitudinal (PL) - Taxa de armadura de pré-esforço por placa e nível.

		Pré-esforço na direção longitudinal							
		ρ_{PL1}	ρ_{PL2}	ρ_{PL3}	ρ_{PL4}	ρ_{PL5}	ρ_{PL6}	ρ_{PL7}	ρ_{PL8}
		2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	0.0019	0.0038	0.0057	0.0075	0.0113	0.0151	0.0226	0.0339
	VA1	0.0018	0.0037	0.0055	0.0073	0.0110	0.0146	0.0219	0.0329
NSC	A2	0.0008	0.0016	0.0024	0.0032	0.0048	0.0063	0.0095	0.0143
	A4	0.0008	0.0016	0.0024	0.0033	0.0049	0.0065	0.0098	0.0147

Tabela 3.5 - Reforço Longitudinal e transversal (PL_PT) - Taxa de armadura de pré-esforço por placa e nível.

		Pré-esforço na direção longitudinal e transversal							
		ρ_{PL1}	ρ_{PL2}	ρ_{PL3}	ρ_{PL4}	ρ_{PL5}	ρ_{PL6}	ρ_{PL7}	ρ_{PL8}
		2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	0.0009	0.0019	0.0028	0.0038	0.0057	0.0075	0.0113	0.0170
	VA1	0.0009	0.0018	0.0027	0.0037	0.0055	0.0073	0.0110	0.0164
NSC	A2	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.0024	0.0032	0.0048	0.0071
	A4	0.0004	0.0008	0.0012	0.0016	0.0024	0.0033	0.0049	0.0073

Por forma a realizar uma análise comparativa para as placas com pré-esforço nas duas direções (pré-esforço equilibrado), foram utilizados metade dos níveis de pré-esforço (em cada direção) comparativamente às placas com pré-esforço numa só direção. Ou seja, o pré-esforço total, ou a área total de armadura de pré-esforço, é igual independentemente da direção do pré-esforço. O objetivo é avaliar a efetividade do pré-esforço para as duas situações descritas: pré-esforço total numa só direção ou pré-esforço distribuído em ambas as direções. Refere-se que para ambas as situações descritas, os estados de tensão não são equivalentes, pois enquanto nas placas com pré-esforço equilibrado o valor do ângulo das escoras de betão (α_D) se mantém aproximadamente constante, no caso das placas com as armaduras de pré-esforço desequilibradas este ângulo varia, como poderá ser comprovado no decorrer deste trabalho.

Como depois da descompressão as armaduras de pré-esforço passam a funcionar como armaduras passivas (ordinárias), a Tabela 3.6 e a Tabela 3.7 apresentam a quantidade total de armadura nas placas (incluindo as armaduras de pré-esforço e as armaduras ordinárias),

por nível e por direção de pré-esforço. Para tal, foi necessário proceder a homogeneização da taxa mecânica de armadura de pré-esforço, de acordo com a Eq. 3.7, onde A_{sp_i} traduz a área de armadura de pré-esforço na direção i em análise (longitudinal ou transversal).

$$\rho_{total} = \frac{A_s}{A_c} + \frac{A_{sp_i}}{A_c} \cdot \frac{f_{ps0.1\%}}{f_{sy}} \quad 3.7$$

Tabela 3.6 - Reforço Longitudinal (PL) - Taxa total de armadura por placa e nível.

		ρ_{total} para pré-esforço na longitudinal									
		ρ_L	ρ_T	$\rho_{total 1}$	$\rho_{total 2}$	$\rho_{total 3}$	$\rho_{total 4}$	$\rho_{total 5}$	$\rho_{total 6}$	$\rho_{total 7}$	$\rho_{total 8}$
				2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	0.0239	0.0239	0.0316	0.0393	0.0470	0.0547	0.0701	0.0855	0.1163	0.1625
	VA1	0.012	0.012	0.0189	0.0257	0.0326	0.0394	0.0531	0.0668	0.0942	0.1353
NSC	A2	0.0119	0.0119	0.0148	0.0176	0.0205	0.0234	0.0291	0.0348	0.0462	0.0634
	A4	0.0298	0.0298	0.0329	0.0359	0.0390	0.0420	0.0481	0.0542	0.0664	0.0847

Tabela 3.7 - Reforço Longitudinal e transversal (PL_PT) - Taxa total de armadura por placa e nível.

		ρ_{total} para pré-esforço nas duas direções									
		ρ_L	ρ_T	$\rho_{total 9}$	$\rho_{total 10}$	$\rho_{total 11}$	$\rho_{total 12}$	$\rho_{total 13}$	$\rho_{total 14}$	$\rho_{total 15}$	$\rho_{total 16}$
				2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	0.0239	0.0239	0.0277	0.0316	0.0354	0.0393	0.0470	0.0547	0.0701	0.0932
	VA1	0.012	0.012	0.0154	0.0189	0.0223	0.0257	0.0326	0.0394	0.0531	0.0737
NSC	A2	0.0119	0.0119	0.0134	0.0148	0.0162	0.0176	0.0205	0.0234	0.0291	0.0376
	A4	0.0298	0.0298	0.0313	0.0328	0.0344	0.0359	0.0390	0.0420	0.0481	0.0573

Resumindo, as análises paramétricas seguidamente apresentadas têm por base 4 modelos de placas (A2, A4, VA1 e VA2) reforçadas com diferentes níveis e áreas de armaduras de pré-esforço, em uma ou em ambas direções. Como objetivo principal, visa-se analisar o comportamento das placas simuladas tendo por base as seguintes 4 variáveis:

- 1) Influência do nível de pré-esforço até ao limite normativo (Eq. 3.2);
- 2) Influência da direção do pré-esforço: efetividade de pré-esforçar em uma só direção ou em ambas as direções, com a mesma quantidade total de pré-esforço;
- 3) Influência da taxa de armadura ordinária e total (incluindo a armadura de pré-esforço);

- 4) Influência da resistência do betão (betão de resistência normal e de alta resistência).

3.3 Análise da influência das variáveis de estudo

Nesta secção são apresentados os resultados das análises paramétricas realizadas tendo por base o RA-STM modificado com a adição do pré-esforço. De uma forma geral, pode referir-se que as previsões comportamentais obtidas com o referido modelo se mostram congruentes com o esperado em geral.

Os resultados são apresentados tendo por base cada uma das quatro variáveis de estudo analisadas. Quando julgado necessário, são também discutidos a influência de outros parâmetros para explicar os resultados apresentados.

3.3.1 Nível e direção do pré-esforço

Quanto ao nível de pré-esforço, como referido anteriormente, as placas foram simuladas para intervalos maiores de variação de pré-esforço. No entanto, após se ter verificado a grande influência dos níveis mais baixos de pré-esforço no comportamento global das placas, foi decidido refinar os intervalos para os níveis mais baixos de pré-esforço assumidos. Assim, tendo em conta o referido anteriormente e também o limite normativo de $45\%f_{cm}$ (Eq. 3.2) assumido para o nível máximo de pré-esforço, o estudo do acréscimo de pré-esforço compreende oito níveis, sendo os mesmos aplicados a todas as placas. Os níveis considerados foram os seguintes: 2,5%, 5%, 7,5%, 10%, 15%, 20%, 30% e 45%, em relação ao valor de f_{cm} .

Relativamente à direção do pré-esforço, como já referido anteriormente, foram separadamente consideradas as situações com pré-esforço somente numa direção (longitudinal) ou em ambas as direções (longitudinal e transversal). Os níveis de pré-esforço anteriormente referidos foram assumidos para estas duas situações. Os referidos níveis foram designados de 1 a 8 para a situação de pré-esforço somente na direção longitudinal e 9 a 16 para o pré-esforço na direção longitudinal e transversal.

O comportamento global das 4 placas em estudo é retratado através das curvas de comportamento teóricas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$, as quais são expostas no decorrer do trabalho. Especificamente para o estudo da influência do nível de pré-esforço, foi utilizado como base a placa VA2 ensaiada por Zhang e Hsu em 1998 [14] (Figura 3.3 e Figura 3.4).

A Figura 3.3 representa as curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ da placa simulada quando o pré-esforço é apenas aplicado na direção longitudinal, enquanto a Figura 3.4 apresenta as mesmas curvas para o pré-esforço aplicado nas duas direções. As referidas figuras incluem também, para a placa original sem pré-esforço, a curva experimental (VA2 - curva com marcadores vermelho) e a curva teórica calculada por Zhang e Hsu em 1998 [14] (RA-STM [14] - linha contínua preta)

tendo por base o modelo RA-STM original sem procedimento eficiente e sem o pré-esforço. Os valores para o traçado destas curvas são apresentados na Tabela A 3 do Anexo.

A Figura 3.3 inclui também a curva teórica calculada tendo por base o RA-STM com procedimento eficiente para a situação sem pré-esforço (RA-STM ($\rho_{PL} = 0$)) - marcador azul). Observa-se que esta curva é bastante próxima tanto da curva teórica calculada por Zhang e Hsu em 1998 [14] como da curva experimental da placa sem pré-esforço. Desta forma, o RA-STM modificado com pré-esforço é validado para a placa em estudo.

A partir da Figura 3.3 observa-se que, independente do nível de pré-esforço, as curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ apresentam a forma esperada em relação à influência do nível de pré-esforço no comportamento de uma placa típica ao corte, estando de acordo com o observado em estudos anteriores [13] [14]. De uma forma geral, quando o pré-esforço está aplicado em uma direção, e até certo nível de pré-esforço (aproximadamente $15\%f_{cm}$), a resistência ao corte da placa aumenta notavelmente com o nível de pré-esforço. A partir do referido nível, observa-se que a resistência não aumenta, passando inclusive a diminuir à medida que o nível de pré-esforço continua a aumentar. Para os níveis mais baixos de pré-esforço, correspondentes às placas com menores taxas de armadura de pré-esforço, observa-se um comportamento dúctil. No entanto, a ductilidade tende a reduzir gradualmente à medida que o nível de pré-esforço aumenta. Tal comportamento é evidenciado pela redução da capacidade de deformação inelástica da placa, sob níveis elevados de carregamento, à medida que o nível de pré-esforço aumenta.

Tendo por base as observações anteriores, do ponto de vista da resistência ao corte das placas, aparenta existir um valor máximo do nível de pré-esforço compatível com o aumento da resistência, quando o pré-esforço é aplicado numa só direção. Neste estudo, tal nível aparenta rondar um pré-esforço correspondente a $15\%f_{cm}$.

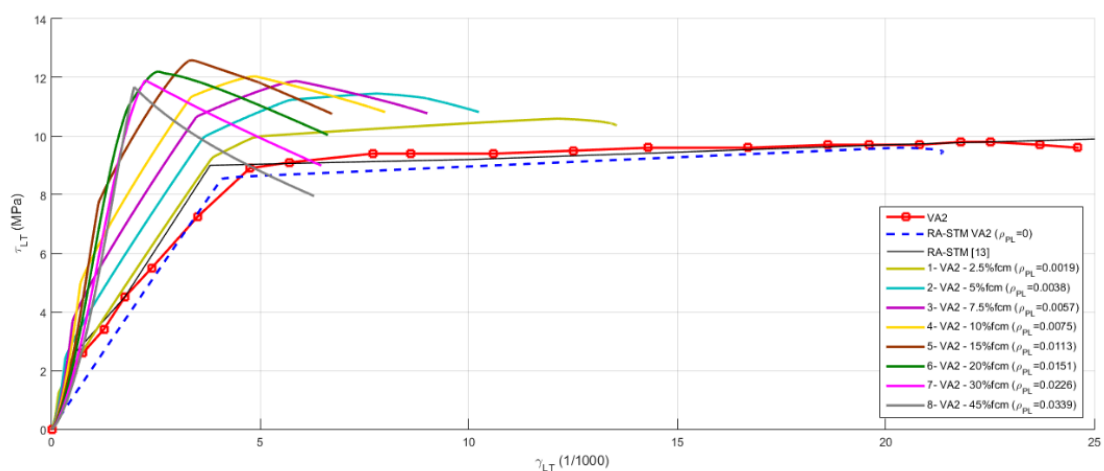


Figura 3.3 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal): placa VA2 [14]

A Figura 3.4 apresenta as curvas para uma situação de pré-esforço em ambas as direções. Apesar de, na generalidade, as curvas se apresentarem semelhantes ao anteriormente analisado, existem diferenças notórias provenientes da aplicação do pré-esforço em duas direções. Comparativamente ao pré-esforço disposto numa só direção, quando o pré-esforço é repartido nas duas direções não se verifica mais a redução da resistência da placa ao corte para níveis mais elevados de pré-esforço. Como, para cada nível de pré-esforço, as placas incorporam a mesma quantidade total de pré-esforço e de armadura correspondente, os resultados obtidos mostram que é mais vantajoso pré-esforçar nas duas direções em comparação a concentrar o pré-esforço apenas em uma direção (apesar da maior dificuldade em termos construtivos).

Para além da observação anterior, o gráfico apresentado na Figura 3.4 mostra que, em comparação com a Figura 3.3 e para um determinado nível de pré-esforço, e particularmente para as placas com maiores taxas de armadura de pré-esforço, a resistência ao corte é maior em relação à situação em que o pré-esforço está apenas disposto em uma direção.

Em suma, estas observações mostram que o estado de tensão de uma dada placa devido ao pré-esforço (com determinado nível de pré-esforço aplicado), nas situações estudadas na Figura 3.3 e Figura 3.4, não são equivalentes. As observações anteriores poderão ser explicadas devido ao efeito favorável do estado biaxial de tensão provocados pela existência de armadura de pré-esforço em ambas as direções, no caso do pré-esforço aplicado nas duas direções.

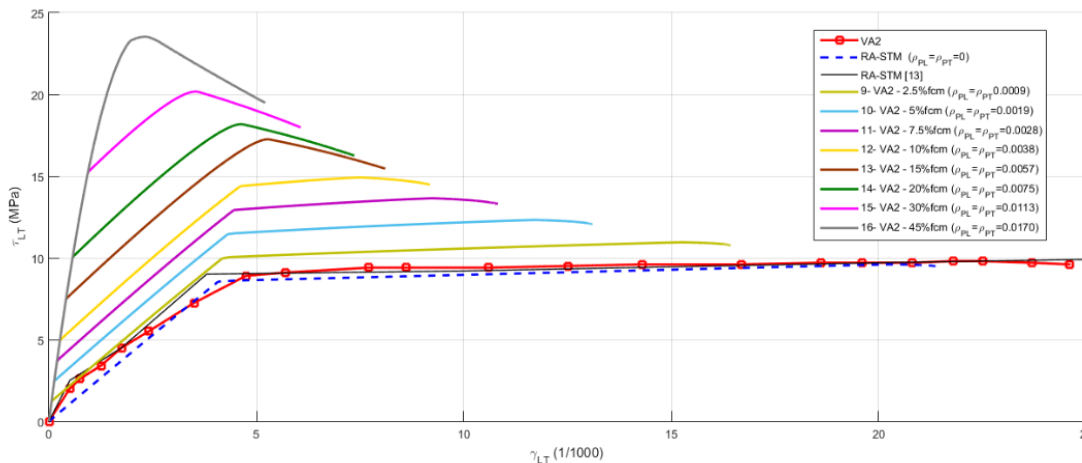


Figura 3.4 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal e transversal): placa VA2 [14].

De modo a analisar melhor o efeito da direção do pré-esforço, a Figura 3.5 apresenta as curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ da placa em estudo (placa VA2) para três níveis de pré-esforço (2,5%, 10% e 30% em relação à f_{cm}), aplicado numa só direção ou em ambas as direções. Assim, o gráfico incorpora no total seis curvas, sendo três curvas relativas ao pré-esforço aplicado somente na direção longitudinal (linhas a cinza) e três curvas para o pré-esforço (com o mesmo nível) aplicado nas duas direções (linhas a verde).

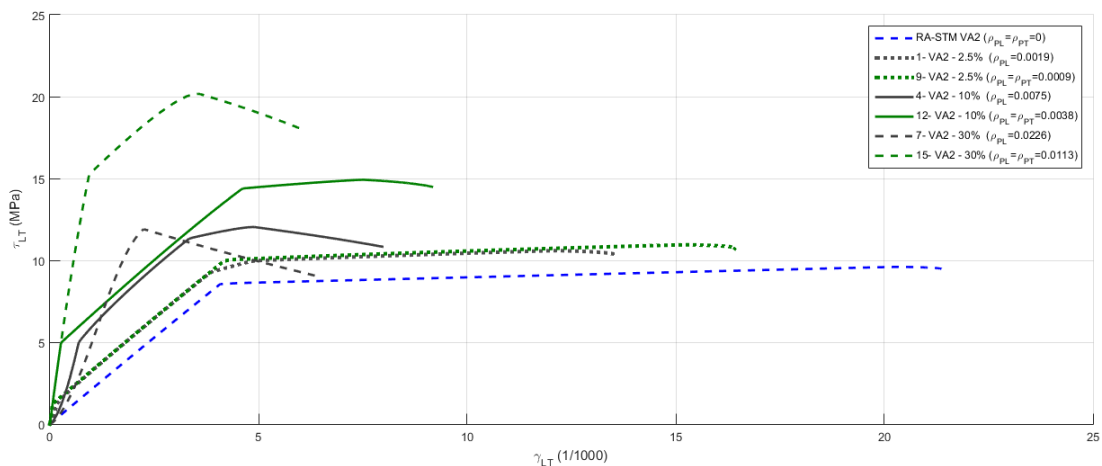


Figura 3.5 - Influência da direção de pré-esforço: placa VA2 [14].

A escolha das curvas foi condicionada de modo a poder comparar placas com iguais quantidades totais de armadura de pré-esforço, independentemente desta armadura ser aplicada numa ou em duas direções. Como se pode observar a partir da Figura 3.5, comprova-se que a aplicação do pré-esforço em duas direções é mais efetiva no aumento da resistência das placas comparativamente com a aplicação de pré-esforço em apenas uma direção. A efetividade do pré-esforço aplicado em ambas as direções é mais notória para placas com maiores níveis de pré-esforço e, por isso, com maiores taxas de armadura de pré-esforço.

3.3.2 Resistência à compressão do betão

Relativamente ao comportamento do betão à compressão nas escoras, recorde-se que o modelo teórico inclui a lei constitutiva traduzida através da Eq. 2.14 e Eq. 2.18, sendo a mesma representada pela curva $\sigma_D - \varepsilon_D$, a qual incorpora o efeito de amolecimento do betão.

Na prática, e como já foi referido na Secção 2.2.3.1, o efeito do amolecimento do betão provoca uma diminuição da resistência efetiva do betão, sendo este efeito condicionante caso a rotura tenda a ocorrer pelo betão à compressão e não pelas armaduras à tração. Para tal, a lei constitutiva do betão à compressão considera um coeficiente de amolecimento (ζ), o qual depende, de entre outros fatores, da relação entre as forças resistentes nas armaduras em ambas as direções, incluindo a armadura de pré-esforço. Segundo este critério, se o pré-esforço é aplicado em ambas as direções, as taxas mecânicas são iguais nas duas direções, pelo que o valor de η fica igual à unidade e o valor do coeficiente que traduz o efeito de amolecimento toma o seu valor máximo (Eq. 2.21). De modo contrário, quando o pré-esforço é aplicado apenas numa direção, a correção imposta pela Eq. 2.20 faz com que ζ seja inferior. Em conclusão, o valor do coeficiente de amolecimento diminui com o aumento do desequilíbrio do pré-esforço. Consequentemente, a tensão à compressão do betão nas escoras (σ_D) atinge maiores valores para a situação de pré-esforço em ambas as direções e, por isso, a placa apresenta maior resistência ao corte. Tal pode ser observado, para cada nível de pré-

esforço e em particular para placas com maior nível de pré-esforço (nos quais a rotura é essencialmente condicionada pelo betão nas escoras), na Figura 3.6 e Figura 3.7 seguidamente apresentadas e relativas ao estudo da placa VA1.

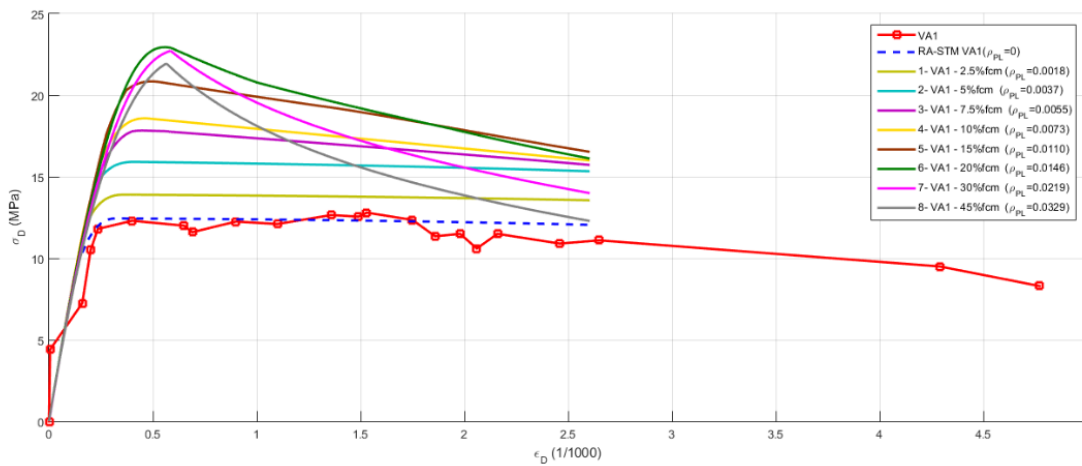


Figura 3.6 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$ (pré-esforço numa direção). Placa VA1 [14].

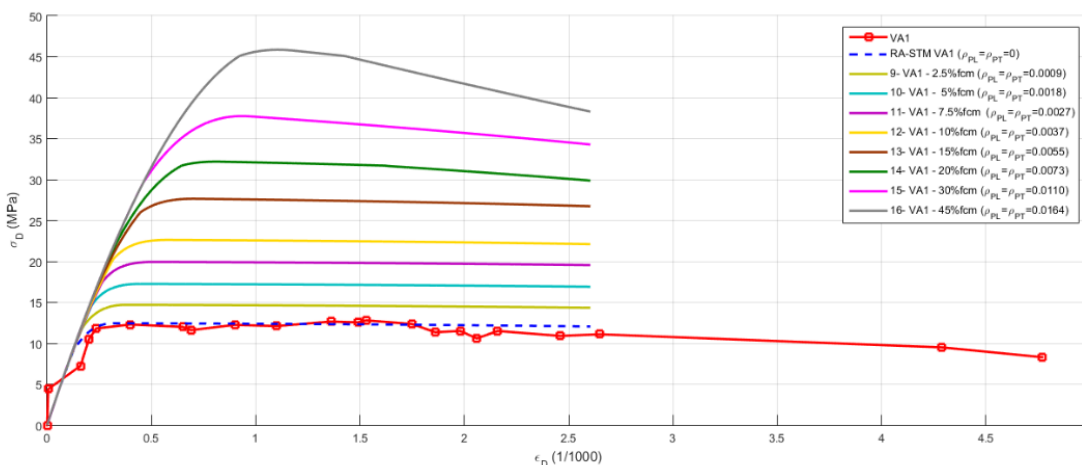


Figura 3.7 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$ (pré-esforço nas duas direções). Placa VA1 [14].

Para analisar a influência da resistência do betão, comparou-se duas placas com taxas mecânicas de armadura ordinária próximas e com pré-esforço numa direção, sendo elas a placa VA1 (Figura 3.6) e a placa A2 (Figura 3.8). Além de se observar uma tendência já esperada, que é a da placa com betão de alta resistência (placa VA1) apresentar valores maiores para σ_D , observa-se também uma outra tendência quando o nível de pré-esforço aumenta. Observa-se que a placa de alta resistência VA1 (Figura 3.6) apresenta a curva $\sigma_D - \varepsilon_D$ pós-pico (descendente) mais inclinada em relação a placa A2 para os maiores níveis de pré-esforço (Figura 3.8). Esta tendência justifica-se em virtude do carácter mais frágil do betão de alta resistência à compressão, após a cedência, comparativamente ao betão de resistência normal.

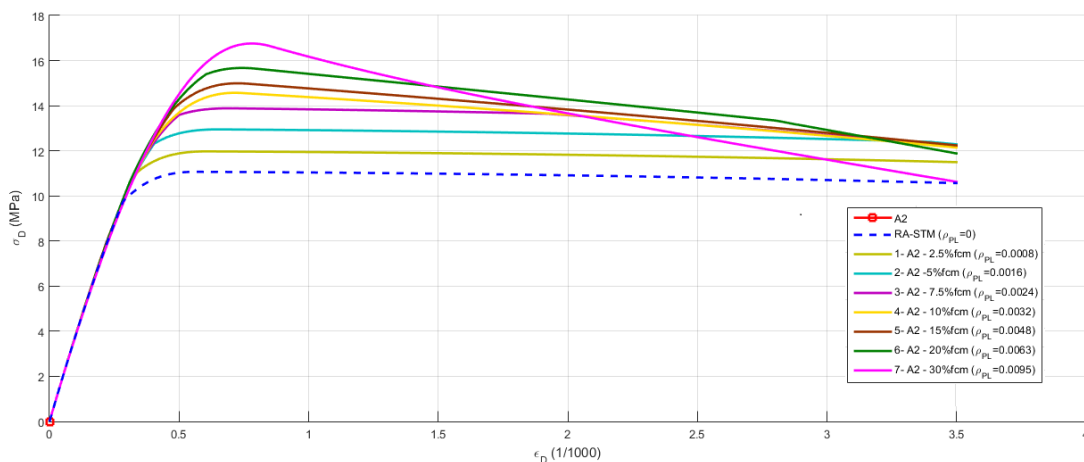


Figura 3.8 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$ (pré-esforço numa direção). Placa A2 [13].

Relativamente à influência do nível de pré-esforço na resposta do betão à compressão na escora, a Figura 3.9 mostra que, à medida que aumenta o nível de pré-esforço, a sollicitação do betão à compressão nas escoras é maior, tornando a sua participação mais efetiva e conduzindo a um maior aproveitamento do betão. Isto ocorre porque, ao aumentar o pré-esforço na placa, a cedência das armaduras ordinárias é atrasada em virtude da influência da área de armadura de pré-esforço, pelo que a sollicitação do betão à compressão nas escoras aumenta, elevando também a capacidade de carga da placa.

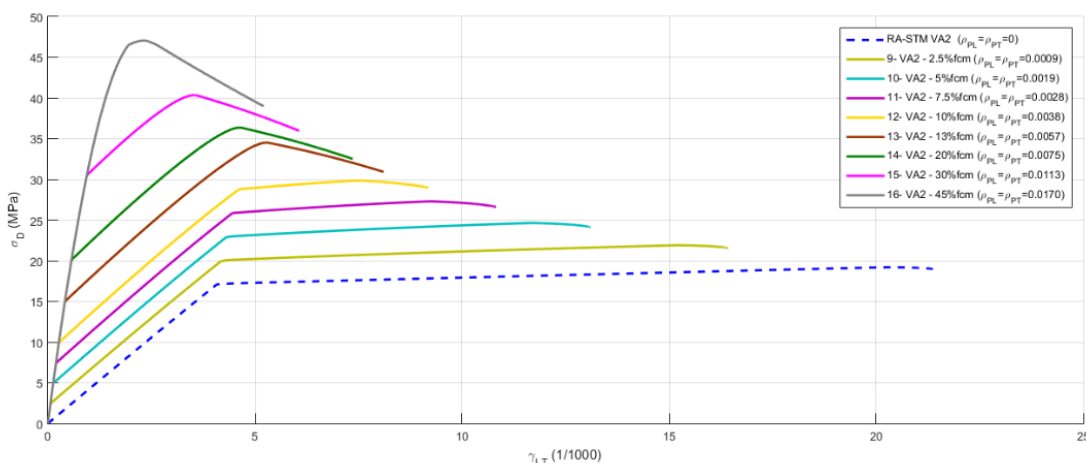


Figura 3.9 - Curvas $\sigma_D - \gamma_{LT}$ (pré-esforço em duas direções). Placa VA2 [14].

3.3.3 Taxa de armadura

A partir das 4 placas analisadas, foi também realizada uma análise tendo por base as taxas mecânicas de armaduras ordinárias e total (incluindo a armadura de pré-esforço).

A Figura 3.10 à Figura 3.12 ilustram as curvas tensão nas armaduras ordinárias (σ_s) versus distorção (γ_{LT}) para três tipos de placas (VA2, A2 e VA1). Observa-se que o aumento do nível de pré-esforço gera uma aparente translação das curvas segundo o eixo da distorção. Este comportamento numérico é evidenciado somente para as curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$. Para tentar perceber este comportamento, verificou-se primeiramente, após a análise das curvas $\sigma_s - \varepsilon_s$ para as referidas armaduras ordinárias (Figura A3 do Anexo), que as mesmas apresentam um traçado normal e esperado. Estas curvas apresentam uma relação elástica e linear, a começar na origem, seguida de patamar de cedência com enrijecimento, não existindo translação segundo o eixo das extensões em função do nível de pré-esforço. O comportamento atípico anteriormente observado tão pouco é visualizado nas curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ para as mesmas placas. Conclui-se que o comportamento atípico observado nas curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$ ocorre pelo fato dos gráficos da Figura 3.10 a Figura 3.12 relacionarem duas variáveis de natureza distinta e tratamento diferente no procedimento de cálculo. A primeira é associada ao comportamento de um material isolado constituinte das placas, a deformação do aço das armaduras ordinárias (ε_s), sendo esta variável otimizada através da função *lsqnonlin* para resolver a Eq. 2.69. A segunda associa o comportamento da placa de betão pré-esforçado na sua totalidade, analisando uma deformação global do elemento (γ_{LT}). Esta diferença entre a natureza das variáveis explica a razão pela qual, quando é feita uma análise similar à das Figura 3.10 a Figura 3.12 para as armaduras de pré-esforço (Figura 3.13) não é observada nenhuma translação segundo o eixo das deformações. De facto, a tensão nas armaduras de pré-esforço não sofre nenhum processo de otimização, iniciando a sua iteração para valores ligeiramente superiores a f_{pi} , como apresentado na Secção 2.2.3.3. Por tudo isto, ao comportamento atípico observado nas curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$ não deve ser atribuído nenhum significado físico real.

Na Figura 3.10 encontram-se ilustradas as curvas para a placa VA2 quando o pré-esforço é aplicado em ambas as direções. Refere-se que estando as armaduras equilibradas, apenas se realizou a análise para uma das armaduras, sendo esta a longitudinal. Observa-se que a solicitação das armaduras ordinárias vai diminuindo à medida que o nível de pré-esforço aumenta. Observa-se também que, a partir de um determinado nível de pré-esforço (entre 10% e 15% de f_{cm}), as armaduras ordinárias deixam de atingir a tensão de cedência, evidenciando um comportamento aproximadamente linear até à carga máxima da placa (ver Figura A.3 do Anexo). Esta observação justifica o carácter mais frágil da rotura para as placas com maiores níveis de pré-esforço.

Além disso, esta observação pode ser explicada em virtude de, com o aumento da área de armadura de pré-esforço (associada ao nível de pré-esforço) existe uma maior quantidade de armadura passiva total na placa. Desta forma, a área de armadura ordinária inicial torna-se menos significativa quando a área total de armadura passiva aumenta, isto é, quando o nível de pré-esforço aumenta.

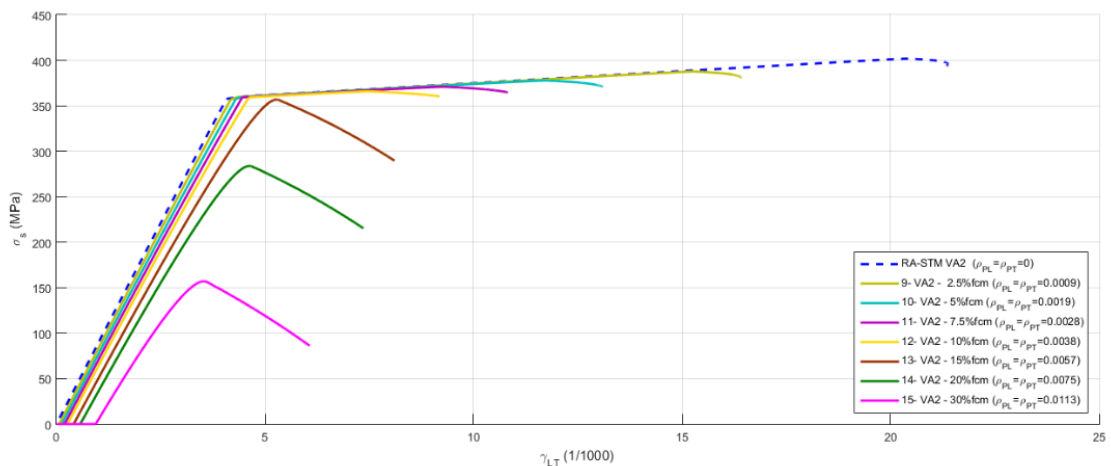


Figura 3.10 - Curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$ para a armadura ordinária longitudinal (pré-esforço nas duas direções). Placa VA2 [14].

Com um comportamento diferenciado, as armaduras ordinárias da placa A4 são solicitadas sempre em regime elástico, independente do nível de pré-esforço aplicado. Este comportamento justifica-se pelo facto desta placa possuir a maior taxa de armadura ordinária. Em consequência disso, a placa apresenta sempre uma rotura frágil (ver Figura A.19 e Figura A. 20 do Anexo).

Em relação à quantidade de armadura ordinária, verificou-se que para as placas com menores taxas mecânicas (A2: $\rho_L = \rho_T = 1.19$ e VA1: $\rho_L = \rho_T = 1.20$), a cedência destas armaduras ocorreu para limites superiores comparativamente às placas com maiores quantidades de armadura ordinária. Ou seja, no caso das placas A2 e VA1, a cedência das armaduras ordinárias ocorreu para um pré-esforço de $30\%f_{cm}$, enquanto que para a placa VA2 ($\rho_L = \rho_T = 2.39$) tal ocorreu para aproximadamente $15\%f_{cm}$, conforme pode ser observado na Figura 3.11.

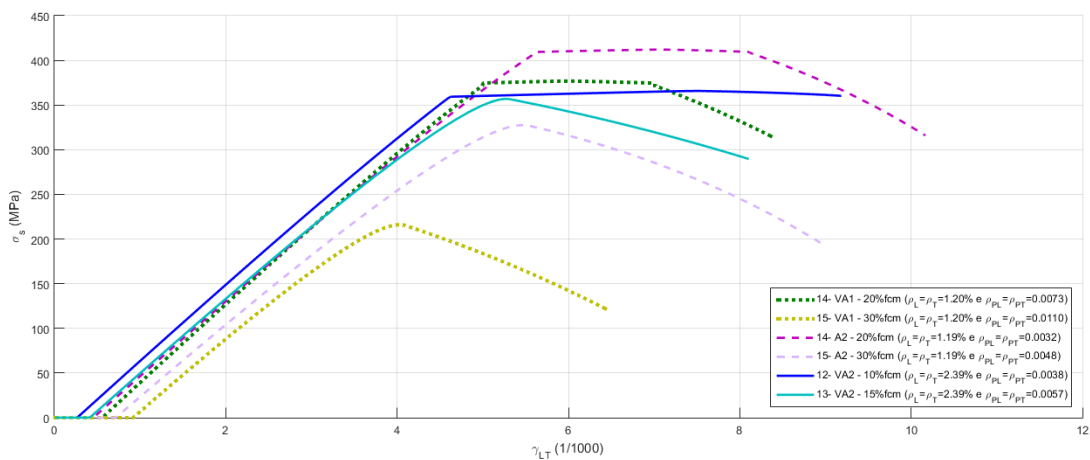


Figura 3.11 - Curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$ para a armadura ordinária longitudinal (pré-esforço nas duas direções): comparação entre as placas A2, VA1 e VA2.

Em relação à participação das armaduras de pré-esforço, pode ser observado um comportamento comum às quatro placas estudadas. Observa-se que, quando o pré-esforço é aplicado somente na direção longitudinal, existe um forte desequilíbrio na sollicitação das armaduras ordinárias em ambas as direções. A Figura 3.12 relaciona o comportamento das armaduras ordinárias na direção longitudinal e transversal, comprovando que, para um determinado nível de distorção da placa, a armadura ordinária transversal é mais solicitada que a armadura ordinária longitudinal, podendo inclusive entrar em cedência. Este comportamento mantém-se mesmo quando o nível de pré-esforço é aumentado. Esta observação pode ser explicada pelo forte desequilíbrio que existe entre a quantidade de armadura transversal e a quantidade total e efetiva de armadura longitudinal, a qual incorpora também a armadura de pré-esforço. Bernardo em 2003 [2] também observou este mesmo comportamento em vigas solicitadas à torção com pré-esforço longitudinal, sendo que a explicação avançada pelo autor é a mesma atrás referida.

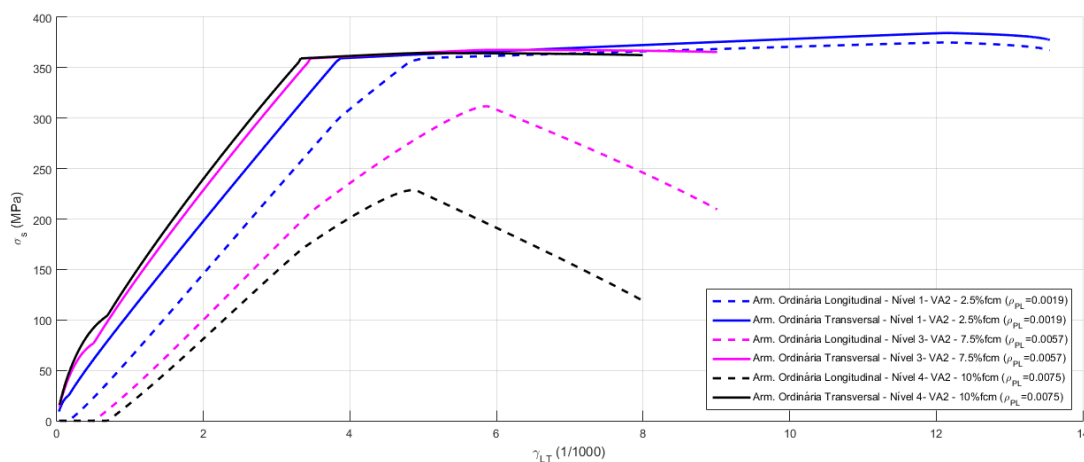


Figura 3.12 - Curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$ para as armaduras ordinárias (longitudinal e transversal) (pré-esforço numa direção). Placa VA2 [14].

A Figura 3.13 apresenta o gráfico tensão na armadura de pré-esforço (f_{ps}) versus distorção da placa (γ_{LT}) para níveis crescentes de pré-esforço. A referida figura mostra, como seria de esperar, que as tensões adicionais (resultantes do carregamento da placa) na armadura de pré-esforço (f_{ps}) são maiores quanto menor a diferença entre a quantidade de armadura ordinária e de pré-esforço. Com o aumento do nível de pré-esforço, essa diferença se torna maior e a tensão na armadura de pré-esforço diminui.

Comparações entre os valores de f_{ps} na Figura 3.13 mostram que, para taxas mecânicas de armadura de pré-esforço inferiores, os valores das distorções da placa atingem maiores magnitudes. Note-se também que, a partir da análise dessa mesma figura, verifica-se que o valor da tensão inicial das armaduras de pré-esforço não começa em f_{pi} . A tensão inicial é ligeiramente superior ao valor de f_{pi} , consoante o nível de pré-esforço considerado. Esta observação resulta de o modelo só iniciar o cálculo após a decompressão do betão, sendo

que até à descompressão do betão a tensão de tração nas armaduras de pré-esforço aumenta ligeiramente em relação à tensão inicial de pré-esforço (f_{pi}).

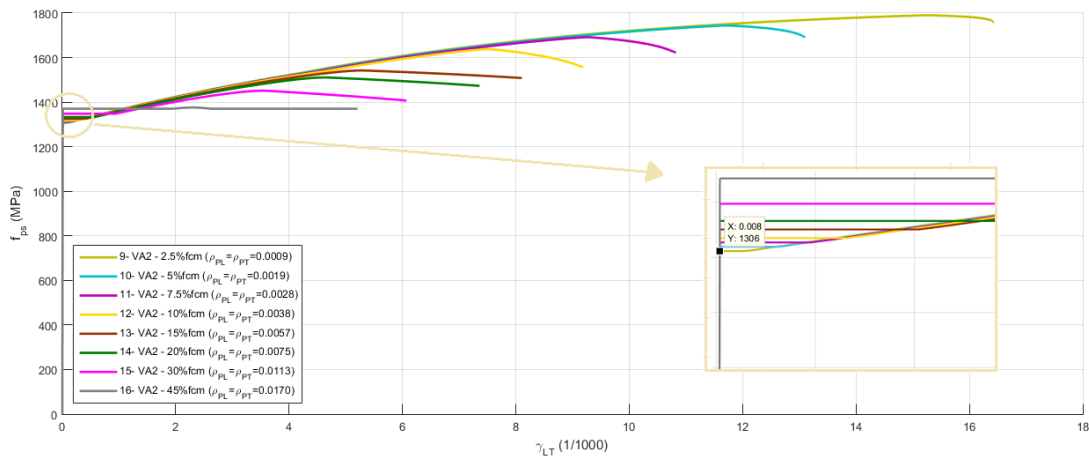


Figura 3.13 - Curvas $f_{ps} - \gamma_{LT}$ (pré-esforço nas duas direções). Placa VA2 [14].

3.3.4 Análise suplementar - Ângulo de inclinação das escoras

É sabido que, numa placa de betão armado fissurado ao corte, o ângulo das escoras de betão é determinado pela magnitude relativa das forças nas armaduras transversais e longitudinais [1]. No caso de placas com taxas de armaduras ordinárias iguais nas duas direções, e com propriedades mecânicas também iguais, espera-se que o referido ângulo ronde o valor teórico esperado teoricamente e observado experimentalmente [13], ou seja, 45°. No caso de placas com pré-esforço, tal também será verdade desde que o pré-esforço seja aplicado com a mesma quantidade de armadura nas duas direções e que as propriedades das armaduras de pré-esforço sejam também iguais nas duas direções. No caso de placas com pré-esforço apenas numa direção, tendo em vista que, após a fissuração do betão, a armadura de reforço passa a funcionar como simples armadura adicional passiva, existirá um forte desequilíbrio nas forças das armaduras em ambas as direções. Nesse sentido, espera-se que o ângulo das escoras desvie em relação aos 45°.

No entanto, foi demonstrado através de ensaios experimentais em vigas ao corte que ambas as armaduras podiam entrar em cedência para um determinado intervalo de relação entre a quantidade de armadura total longitudinal e transversal [38]. Para as placas sujeitas ao corte acontecem o mesmo [13]. Esta observação mostra que, para cargas elevadas, devem ocorrer redistribuições internas de tensões, as quais implicam a variação das direções principais de tensão. Desta forma, o ângulo das escoras deve sofrer uma variação ao longo do ensaio. Tal comportamento também acontece para placas com pré-esforço.

A Figura 3.14 relaciona o complemento do ângulo variável (α_D , ver Figura 2.2) com as extensões médias de compressão no betão (ε_D) para a placa A2. Observa-se que o modelo teórico prevê de fato uma variação da inclinação das escoras ao longo do carregamento. A

referida figura mostra também que o ângulo de inclinação da escora tende a estabilizar para valores afastados do teórico (45°), em virtude de a placa simulada apenas ter pré-esforço numa direção. Observa-se também que o afastamento em relação ao valor teórico é, em geral, maior à medida que o nível de pré-esforço aumenta. Isto já era esperado pois, se o nível de pré-esforço aumenta, também aumenta a área de armadura de pré-esforço, pelo que a relação entre os volumes de armaduras também aumenta.

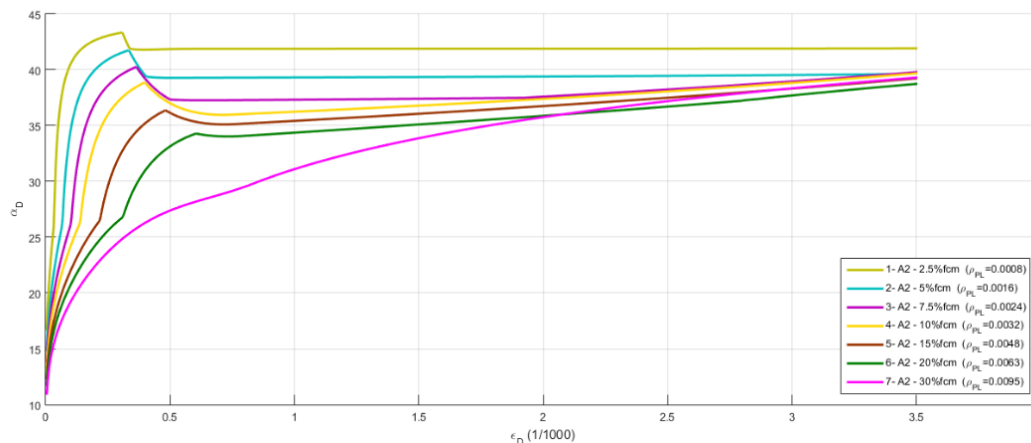


Figura 3.14 - Curvas $\alpha_D - \epsilon_D$ (pré-esforço numa direção). Placa A2 [13].

3.4 Análises comparativas com resultados experimentais

Para os objetivos desta secção foram analisados dois estudos encontrados na literatura com placas de betão pré-esforçado ensaiadas ao corte puro.

No primeiro, Marti e Meyboom em 1992 [23] basearam-se no estudo experimental de Meyboom em 1987 [22] para estudar a influência do pré-esforço em duas placas de betão armado sujeitas à esforços de membrana. No segundo, Laskar *et al.* em 2007 [24] ensaiaram cinco placas onde foram consideradas como variáveis de estudo a taxa de armadura de pré-esforço e a taxa de armadura ordinária. Lembra-se que, com base nos resultados experimentais obtidos, os referidos autores validaram no seu estudo o modelo teórico SMM (*Softened Membrane Model*) com a adição de pré-esforço na direção longitudinal, o qual foi designado por SMM-PC (*Softened Membrane Model for Prestressed Concrete*).

Salienta-se que para o estudo de Laskar *et al.* é apresentada uma equação para a armadura de pré-esforço calibrada de forma diferenciada consoante o modelo apresentado no estudo, discutida posteriormente.

De seguida, apresentam-se as características das placas referidas anteriormente e cujos os resultados experimentais servirão de base para uma análise comprativa com as previsões teóricas obtidas a partir do RA-STM modificado com pré-esforço.

3.4.1 Placas pré-esforçadas ensaiadas por Laskar *et al.* [24]

Laskar *et al.* [24] analisaram experimentalmente o comportamento de 5 placas de betão pré-esforçado com iguais dimensões (1.4 x 1.4 x 0.178 m). As placas foram reforçadas com armaduras longitudinais à 45° em relação ao referencial 1-2 quando sujeitas aos esforços de tração e compressão no seu plano, conforme ilustrado na Figura 3.15. As placas desta série foram designadas de “TA”, sendo numeradas de 1 a 5. Como ilustrado na Figura 3.15, a placa TA-5 incorporou apenas um plano de armadura de pré-esforço, enquanto os restantes incorporaram dois planos de armaduras. Segundo as direções em que o estado equivalente é de corte puro (eixos ℓ - t da Figura 3.15) as placas foram apenas pré-esforçadas numa direção (direção ℓ).

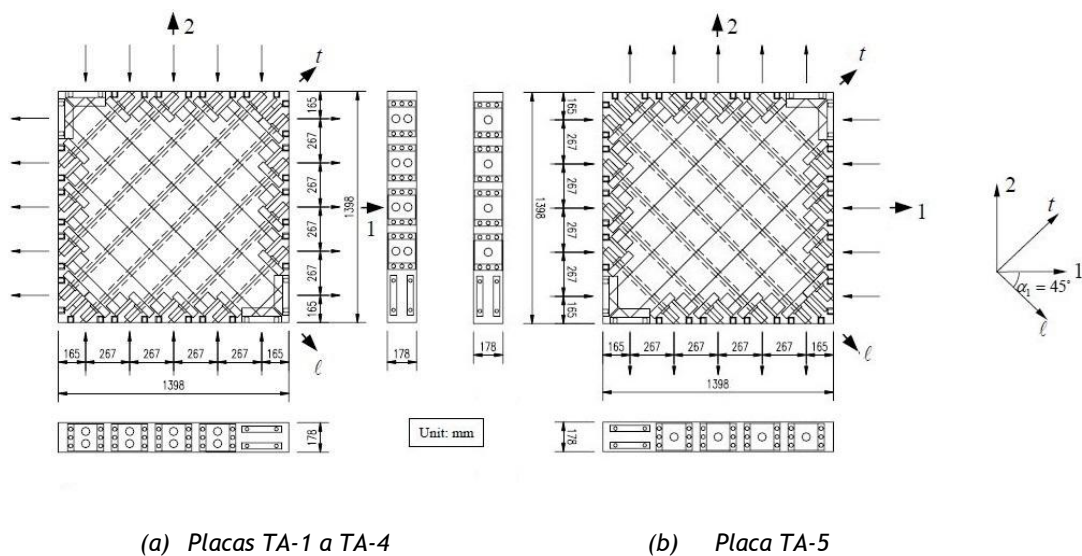


Figura 3.15 - Geometria e referenciais das placas ensaiadas por Laskar *et al.* [24].

A Tabela 3.8 apresenta resumidamente as características das cinco placas em estudo. Refere-se que, no estudo original, para as primeiras três placas da série (TA-1, TA-2 e TA-3) o estudo concentrou-se na análise da influência da taxa de armadura ordinária transversal, enquanto que para as placas TA-2, TA-4 e TA-5 o estudo focou-se no efeito da taxa de armadura de pré-esforço na direção longitudinal. Refere-se que as placas não incorporaram armadura ordinária na direção do pré-esforço e que a placa TA-2 é analisada tanto em uma análise quanto em outra.

A partir dos resultados experimentais obtidos, Laskar *et al.* [24] apresentaram as curvas de comportamento $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ para cada placa ensaiada. Os autores também apresentaram as curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$ para o betão comprimido nas escoras para cada placa. Tais curvas foram reproduzidas no presente trabalho para servir de base comparativa para a validação do modelo RA-STM modificado com pré-esforço, sendo seus valores apresentados na Tabela A 11 a Tabela A 15 do Anexo deste trabalho. Também foram reproduzidas as curvas teóricas

apresentadas por Laskar *et al.* [24], calculadas a partir do modelo SMM-PC, as quais serão também utilizadas para a análise comparativa proposta.

Tabela 3.8 - Características das placas da série TA (armadura longitudinal), Laskar *et al.* [24].

Painel	Betão		Armadura de pré-esforço na direção longitudinal					
	f_{cm} [MPa]	ε_0	f_{ci} [MPa]	ρ_{PL} [%]	Solução adotada	f_{pu} [MPa]	E'_{ps} [GPa]	E_{ps} [GPa]
TA-1	41.47	0.0021	8.3	0.84	2 \varnothing 6 in @189 mm	1793	209	200
TA-2	41.33	0.0019	8.3	0.84	2 \varnothing 6 in @189 mm			
TA-3	42.21	0.0019	8.3	0.84	2 \varnothing 6 in @189 mm			
TA-4	42.54	0.0021	5.8	0.59	2 \varnothing 5 in @189 mm			
TA-5	41.08	0.0021	8.3	0.42	1 \varnothing 6 in @189 mm			

Tabela 3.9 - Características das placas da série TA (armadura transversal), Laskar *et al.* [24].

Placa	Armadura ordinária na direção transversal				
	ρ_T [%]	Solução adotada	f_{syT} [MPa]	E_s [GPa]	η'
TA-1	0.42	2#3@189 mm	413.8	197.0	0.12
TA-2	0.77	2#4@189 mm	415.1	192.2	0.22
TA-3	1.54	4#4@189 mm	415.1	192.2	0.44
TA-4	0.77	#4@189 mm	415.1	192.2	0.31
TA-5	0.77	2#4@189 mm	415.1	192.2	0.43

$\varnothing 5$ in – diâmetro nominal: 13 mm
 $\varnothing 6$ in – diâmetro nominal: 15 mm
 #3 – diâmetro nominal: 9.52 mm
 #4 – diâmetro nominal: 12.7 mm

Tendo por base o RA-STM modificado com pré-esforço, foram calculadas as curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$, $\sigma_D - \varepsilon_D$, $\tau_{LT} - \varepsilon_R$ e $\tau_{LT} - \varepsilon_D$ com vista a serem comparadas com as respectivas curvas experimentais. Para os dois primeiros gráficos, também será comparado o modelo proposto neste trabalho com o modelo SMM-PC proposto por Laskar *et al.* em 2007 [24].

3.4.1.1 Ajustamentos do modelo para a análise comparativa

Para validar o RA-STM modificado proposto neste trabalho, tendo por base os resultados experimentais obtidos por Laskar *et al.* [24], tiveram que ser incorporados alguns ajustes no modelo teórico para a simulação das placas em estudo. Como nas placas não existe armadura ordinária longitudinal, verificou-se que o RA-STM modificado implementado em MATLAB apresentava problemas de convergência. Concluiu-se que não era possível considerar o valor de ρ_L nulo para a estimativa inicial segundo o modelo MCTM (Eq. 2.63).

Para resolver este problema, foi adotada uma armadura mínima de corte segundo a direção longitudinal, tendo o seu valor sido obtido tendo por base a NP EN 1992-1-1 [42] (Eq. 3.8). Esta opção pode ser considerada aceitável visto que a adição de uma armadura mínima não influencia notoriamente o comportamento global do elemento em estado limite último. Além

disso, a escolha de uma armadura mínima para o corte tem lógica uma vez que as placas a simular estão preponderantemente submetidas ao corte segundo as direções ℓ -t.

$$\rho_{w,min} = (0,08\sqrt{f_{ck}})/f_{yk} \quad 3.8$$

Na equação anterior o valor de f_{ck} é definido através da Eq. 2.71 e a tensão de cedência das armaduras ordinárias f_{yk} foi considerada igual ao valor médio apresentado pelos referidos autores, assumido o mesmo valor em ambas as direções.

Os valores calculados para a armadura mínima de corte encontram-se resumidos na Tabela 3.10. Para o valor da tensão de cedência da armadura mínima ordinária longitudinal (f_{syL}), considerou-se um valor igual ao da armadura ordinária transversal para cada placa.

Tabela 3.10 - Armaduras mínimas de corte para as placas TA-1 a TA-5.

	f_{cm} [MPa]	f_{ck} [MPa]	$f_{syL} = f_{yk}$ [MPa]	ρ_{min}	A_c [cm ²]	$A_{s,min}$ [cm ²]
TA-1	41.47	33.47	413.8	0.001118	2488.44	2.79
TA-2	41.33	33.33	415.1	0.001113		2.77
TA-3	42.21	34.21	415.1	0.001127		2.81
TA-4	42.54	34.54	415.1	0.001133		2.82
TA-5	41.08	33.08	415.1	0.001108		2.76

Foi também necessário incorporar uma alteração na lei constitutiva da armadura de pré-esforço. Laskar *et al.* [24] propuseram um novo parâmetro relativo à tensão última desta armadura (f_{pu}), inserido no procedimento de cálculo como f'_{pu} e sido atribuído o valor de 1862 MPa. Com essa modificação, houve a necessidade de reescrever as equações e limites de domínio para o ramo ascendente (Eq. 3.9) e descendente (Eq. 3.10) da armadura de pré-esforço tendo em conta os novos valores propostos de tensão última. Esta alteração, juntamente com o cálculo de $\Delta\varepsilon_{ps}$ resolvem de forma adequada o ajustamento da curva referente à lei constitutiva.

$$f_{ps} = E_{ps}(\varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s) \quad \varepsilon_{ps} < \frac{0.7f'_{pu}}{E_{ps}} \quad 3.9$$

$$f_{ps} = \frac{E'_{ps}(\varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s - \Delta\varepsilon_{ps})}{\left[1 + \left(\frac{E'_{ps}(\varepsilon_{dec} + \varepsilon'_s - \Delta\varepsilon_{ps})}{f_{pu}}\right)^R\right]^{1/R}} \quad \varepsilon_{ps} \geq \frac{0.7f'_{pu}}{E_{ps}} \quad 3.10$$

3.4.1.2 Análises comparativas com Laskar et al. [24]

Nesta secção são apresentadas as análises comparativas tendo por base as placas pré-esforçadas ensaiadas por Laskar et al. em 2007 [24], para validação do RA-STM modificado com pré-esforço.

As previsões obtidas com o modelo teórico proposto foram ao encontro das expectativas tendo em vista a forma congruente e lógica das curvas de comportamento, como pode ser observado na subsecção a seguir. Em complemento da análise gráfica, foi também realizada uma análise comparativa entre os valores experimentais e teóricos da resistência ao corte das placas (valores máximos registados), tendo por base alguns parâmetros estatísticos, designadamente: o valor medio (\bar{x}), o desvio padrão (s) e o coeficiente de variação (cv).

3.4.1.3 Gráficos de comportamento

Nesta secção são apresentadas algumas curvas de comportamento, teóricas e experimentais, para as cinco placas pré-esforçadas ensaiadas por Laskar et al. [24]. As curvas teóricas foram calculadas tendo por base o RA-STM modificado proposto neste trabalho, com os ajustamentos referidos na Secção 3.4.2. São seguidamente apresentados os gráficos $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ e $\sigma_D - \varepsilon_D$ para as 5 placas em estudo. De forma a completar o modelo desenvolvido também serão apresentados os gráficos $\tau_{LT} - \varepsilon_R$ e $\tau_{LT} - \varepsilon_D$ a comparar com os resultados teóricos do SMM-PC.

A Figura 3.16 a Figura 3.20 apresenta as curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ para cada placa estudada. De uma forma geral, pode observar-se que a forma das curvas teóricas previstas pelo RA-STM modificado (curvas azuis) é congruente com a das curvas experimentais (curvas vermelhas) e também com as curvas teóricas obtidas a partir do SMM-PC (curvas verdes), designadamente para maiores níveis de taxa mecânica de armadura ordinária (direção transversal). Confirma-se assim que, após a fissuração, o RA-STM modificado é capaz de prever corretamente as fases comportamentais das placas estudadas. Tais fases comportamentais tinham já sido analisadas na Secção 3.2. Relativamente à resistência ao corte para as placas TA-1 e TA-2, observam-se desvios maiores entre a curva prevista pelo RA-STM modificado e as restantes curvas, designadamente a experimental, e, sobretudo para a placa TA-1. Este assunto será retomado mais adiante. Outra diferença observada entre as curvas calculadas com o RA-STM modificado e as restantes curvas apresenta-se relaciona-se com os níveis de deformação na fase última comportamental. Em geral, o RA-STM modificado prevê menores deformações por corte para as placas. É de salientar que as referidas duas placas (TA-1 e TA-2) incorporam as maiores taxas de armadura de pré-esforço (0.84%), com valores baixos para a taxa de armadura ordinária transversal (0.42% para o TA-1 e 0.77% para o TA-2).

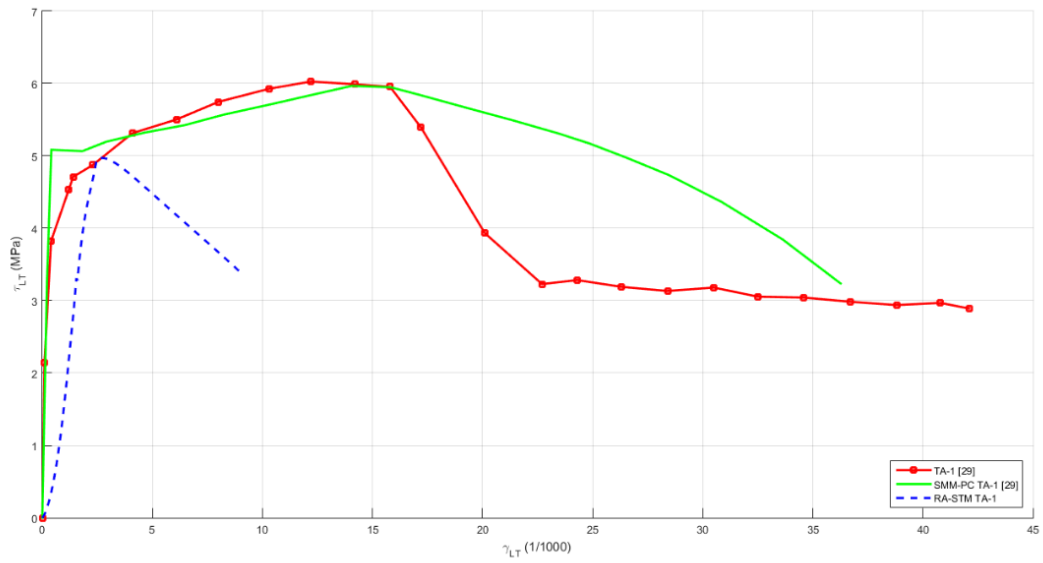


Figura 3.16 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-1 [24].

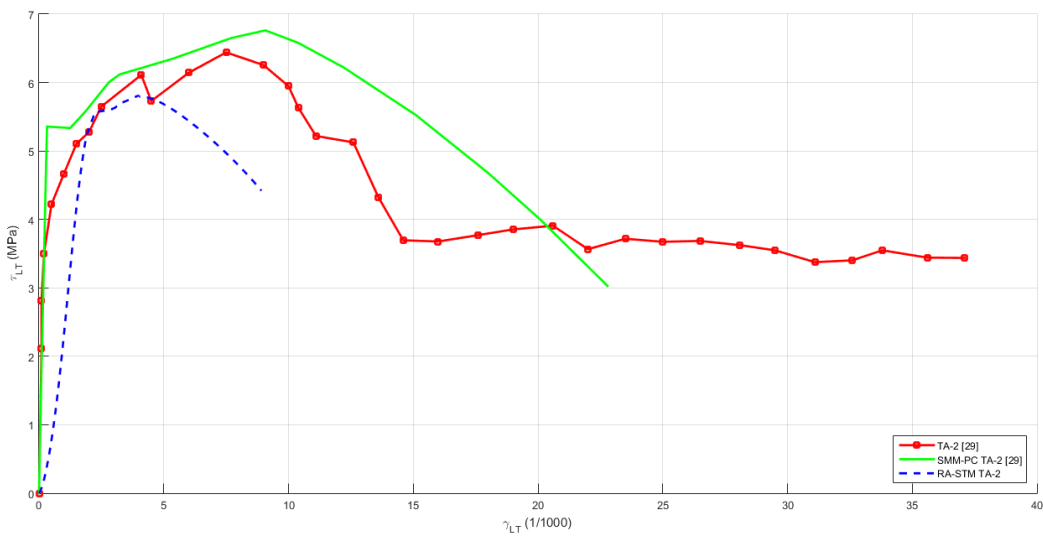


Figura 3.17 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-2 [24].

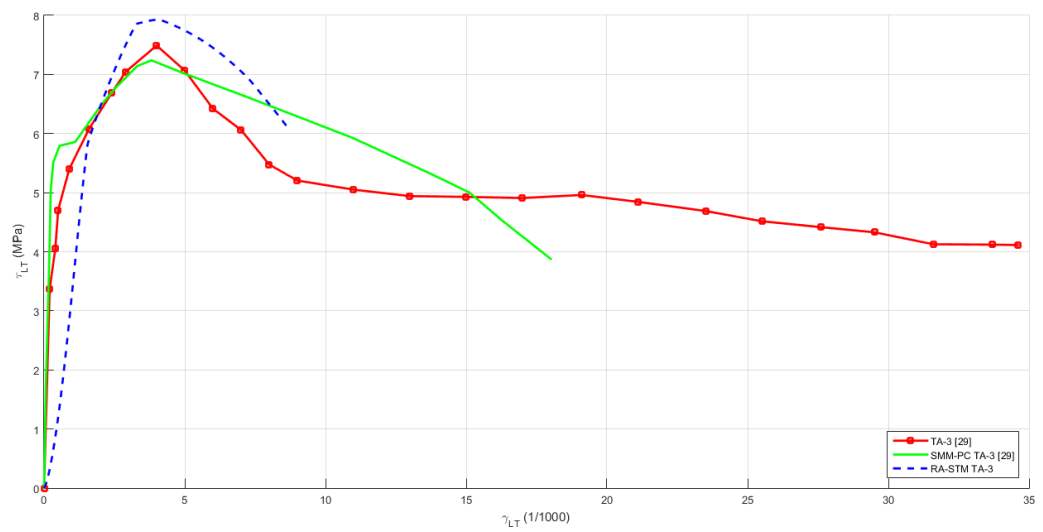


Figura 3.18 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-3 [24].

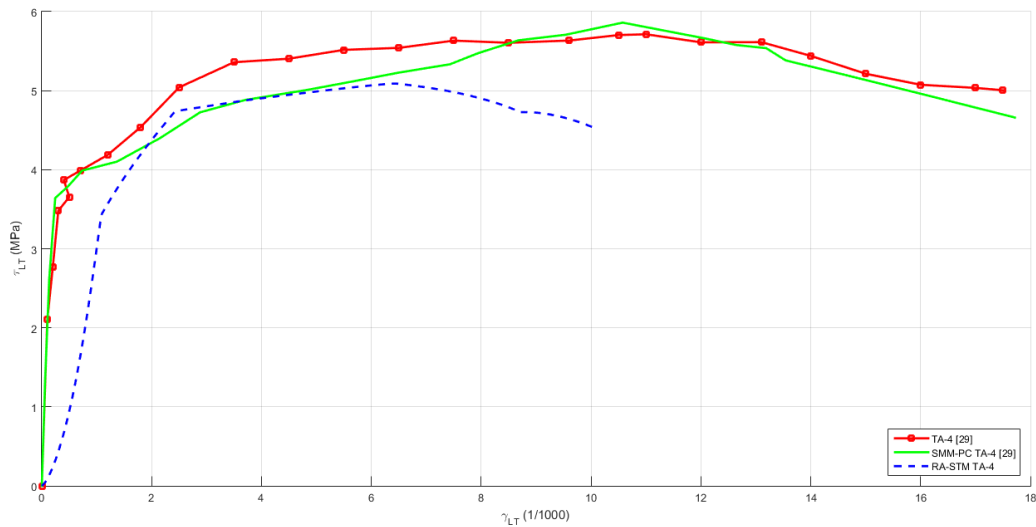


Figura 3.19 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-4 [24].

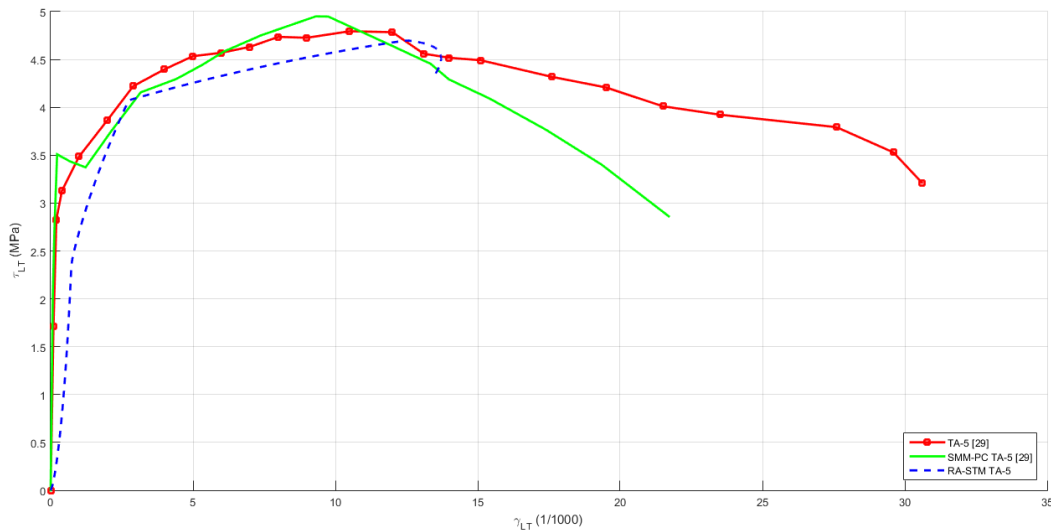


Figura 3.20 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa TA-5 [24].

Relativamente ao comportamento do betão à compressão nas escoras, a Figura 3.21 a Figura 3.25 mostram que as curvas teóricas calculadas com o modelo proposto (curvas azuis) são próximas das respetivas curvas experimentais (curvas vermelhas) e também com a curvas teóricas obtidas a partir do SMM-PC (curvas verdes).

Laskar *et al.* [24] observaram que a placa TA-3 (placa com maiores valores de taxa de armadura de pré-esforço e de armadura ordinária transversal) foi a única em que a armadura ordinária transversal não atingiu a cedência antes do pico de resistência (Figura 3.18). Os referidos autores explicam esta observação através das taxas elevadas de armadura ordinária e de pré-esforço em direções ortogonais, fazendo com que a armadura ordinária só atinja a cedência se a força transversal for muito inferior à força longitudinal, a qual depende do nível de pré-esforço e da quantidade de armadura de pré-esforço. Assim, para grandes níveis

de pré-esforço, e consequentes elevadas taxas de armadura de pré-esforço, o modo de rotura é tendencialmente mais frágil.

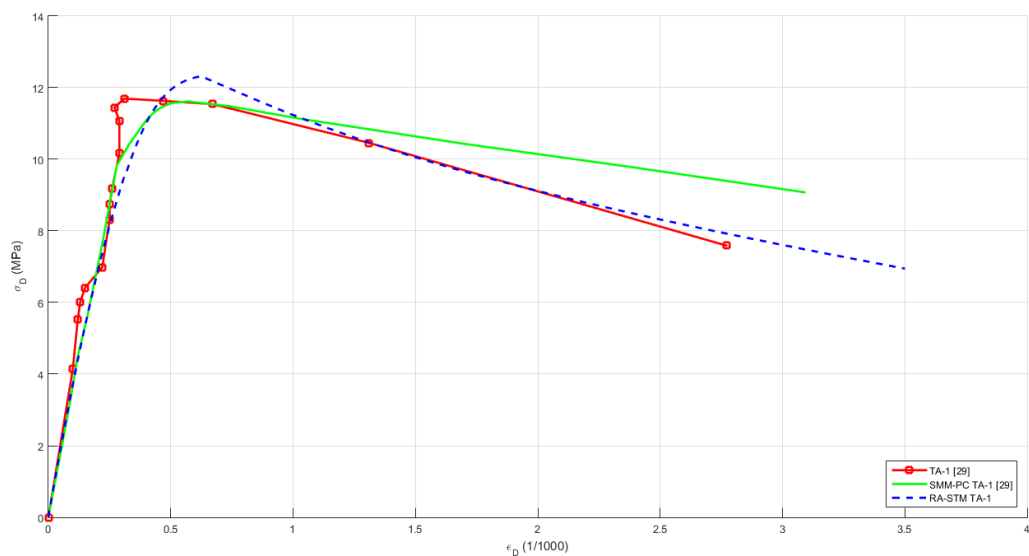


Figura 3.21 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$: placa TA-1 [24].

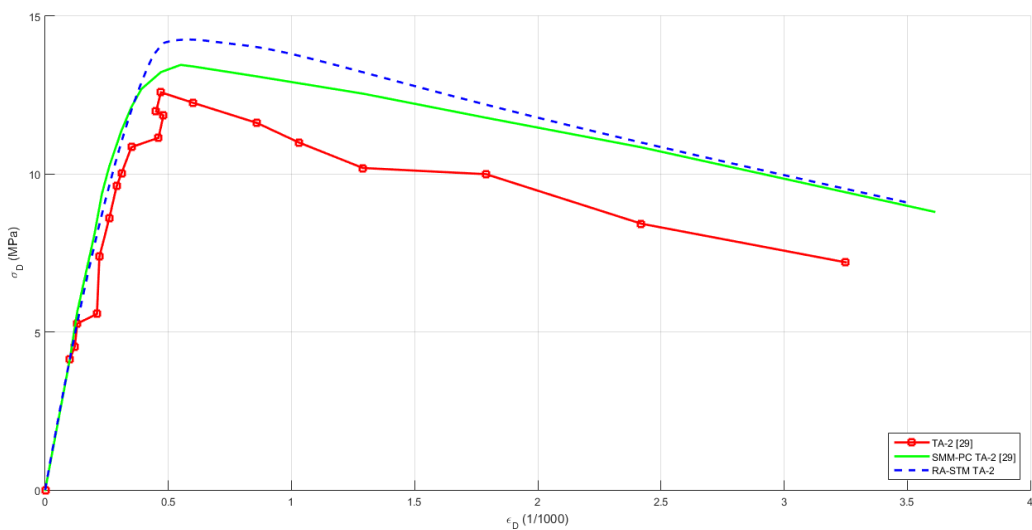


Figura 3.22 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$: placa TA-2 [24].

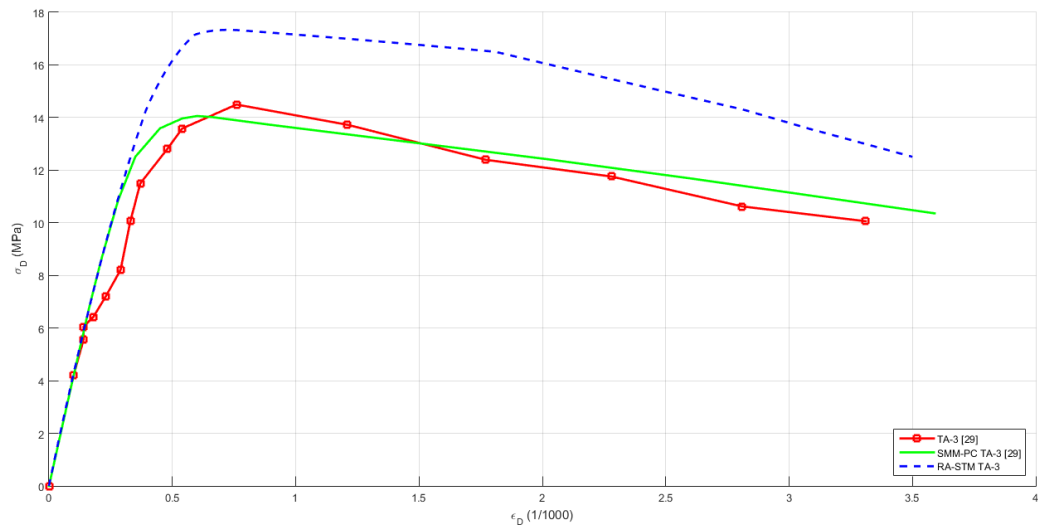


Figura 3.23 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$: placa TA-3 [24].

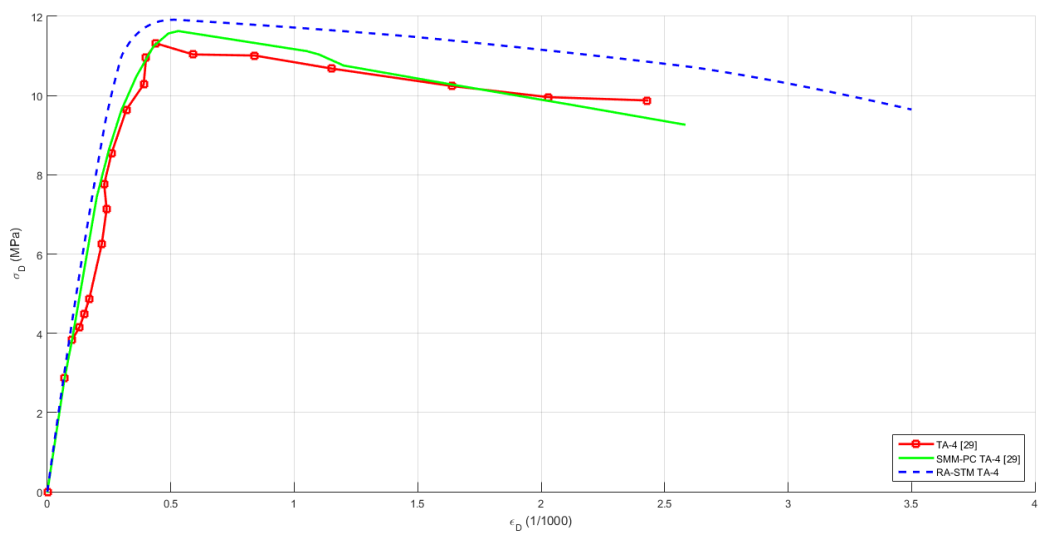


Figura 3.24 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$: placa TA-4 [24].

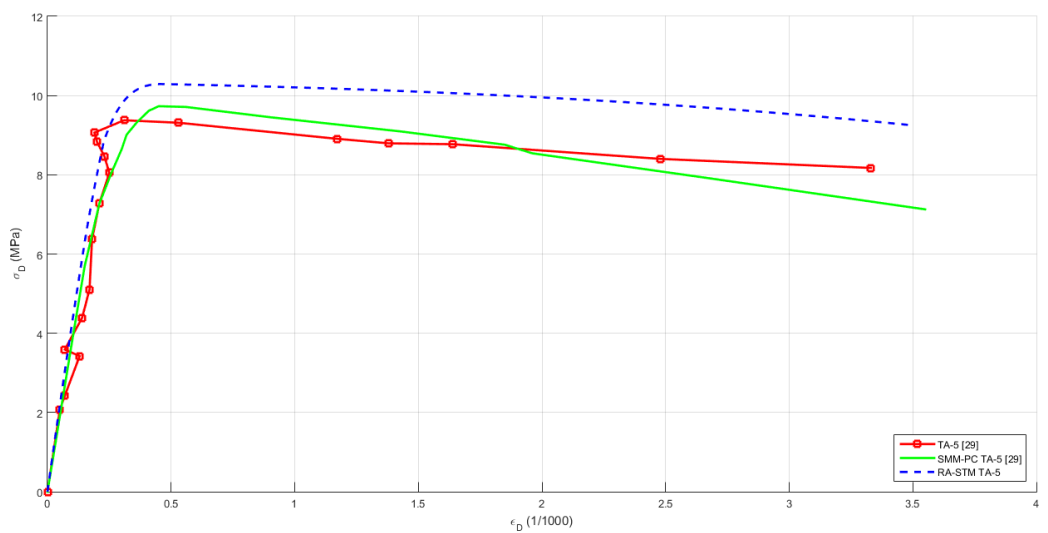


Figura 3.25 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$: placa TA-5 [24].

A Figura 3.26 a Figura 3.30 apresentam as curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_R$ (em que ε_R representa a extensão principal na direção de tração) para as 5 placas estudadas, designadamente, as curvas teóricas calculadas com o RA-STM modificado (curvas azuis) e as respetivas curvas experimentais (curvas vermelhas).

Em relação ao desenvolvimento das curvas apresentadas, observa-se que as curvas teóricas preveem o mesmo comportamento das curvas experimentais. Os erros associados à medição experimental das extensões principais de tração bem como o fato do RA-STM modificado não incorporar a resistência à tração do betão poderá explicar, em parte, as diferenças observadas entre as curvas teóricas e experimentais.

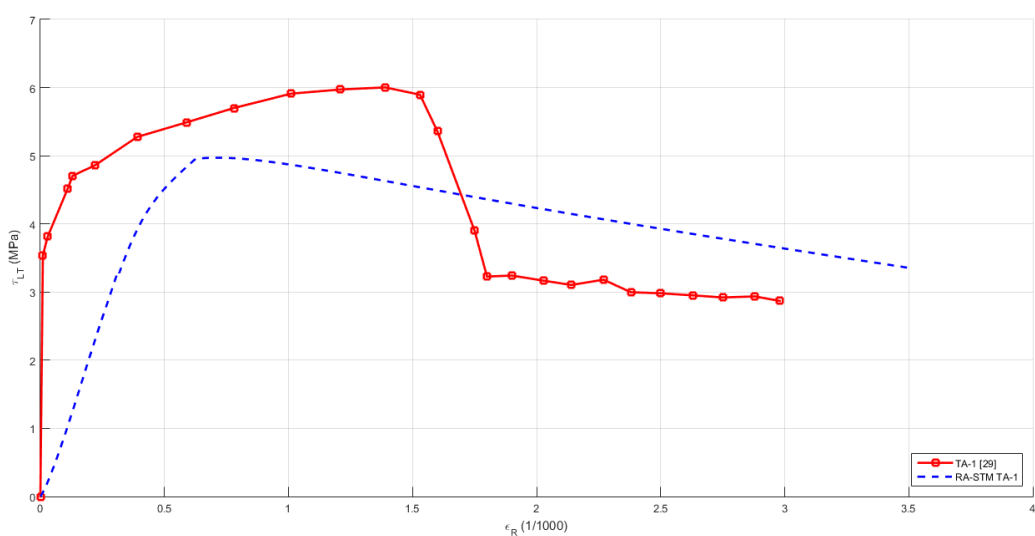


Figura 3.26 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_R$: placa TA-1 [24].

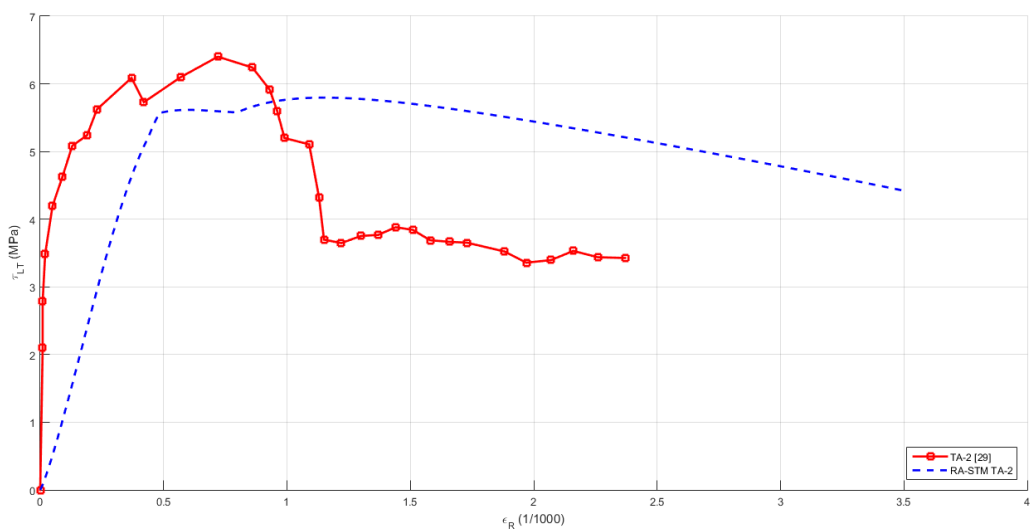


Figura 3.27 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_R$: placa TA-2 [24].

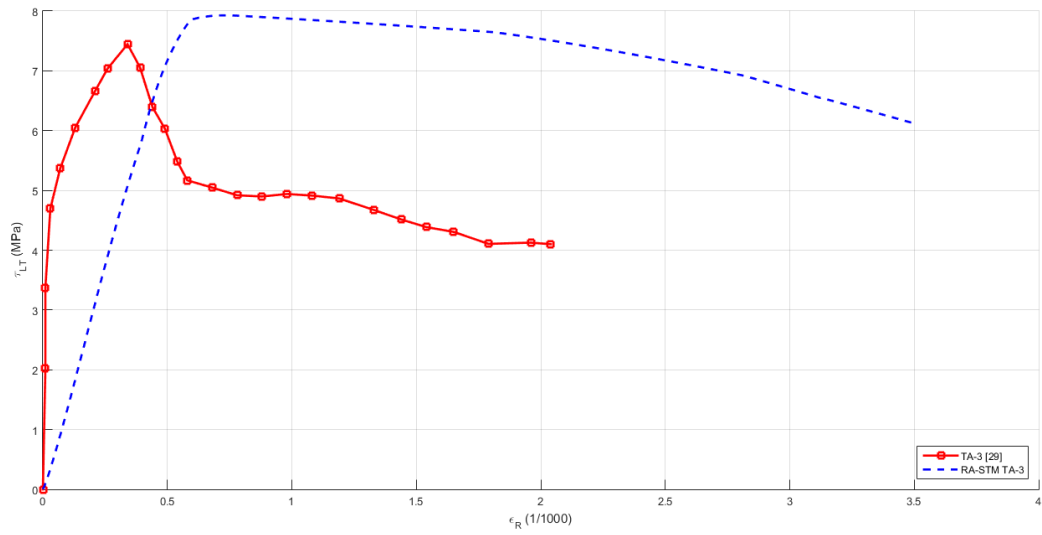


Figura 3.28 - Curvas $\tau_{LT} - \epsilon_R$: placa TA-3 [24].

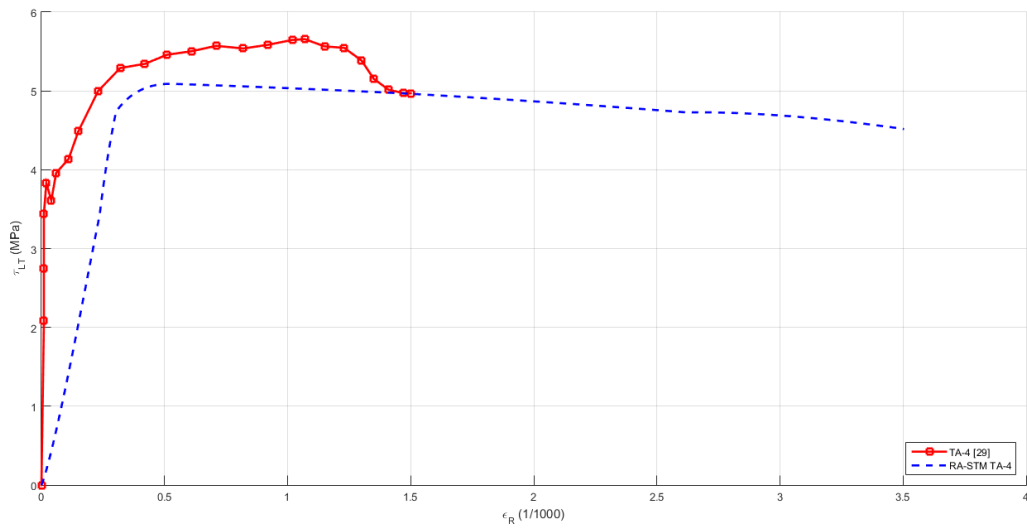


Figura 3.29 - Curvas $\tau_{LT} - \epsilon_R$: placa TA-4 [24].

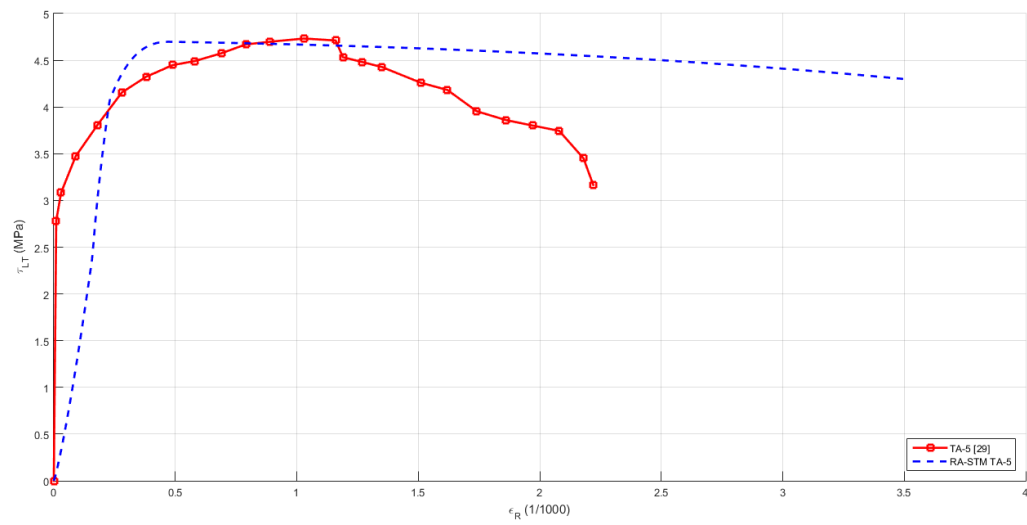


Figura 3.30 - Curvas $\tau_{LT} - \epsilon_R$: placa TA-5 [24].

De forma semelhante ao observado nas curvas anteriores, a Figura 3.31 à Figura 3.35 apresentam resultados similares para as curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$ (em que ε_D representa a extensão principal na direção de compressão).

Refere-se que a forma das curvas, tanto as curvas experimentais como as curvas teóricas, se assemelham muito à das curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$ anteriormente apresentadas. Isto deve-se, provavelmente, à relação existente entre a tensão de corte (τ_{LT}) e a tensão de compressão (σ_D), conforme traduz a Eq. 2.9.

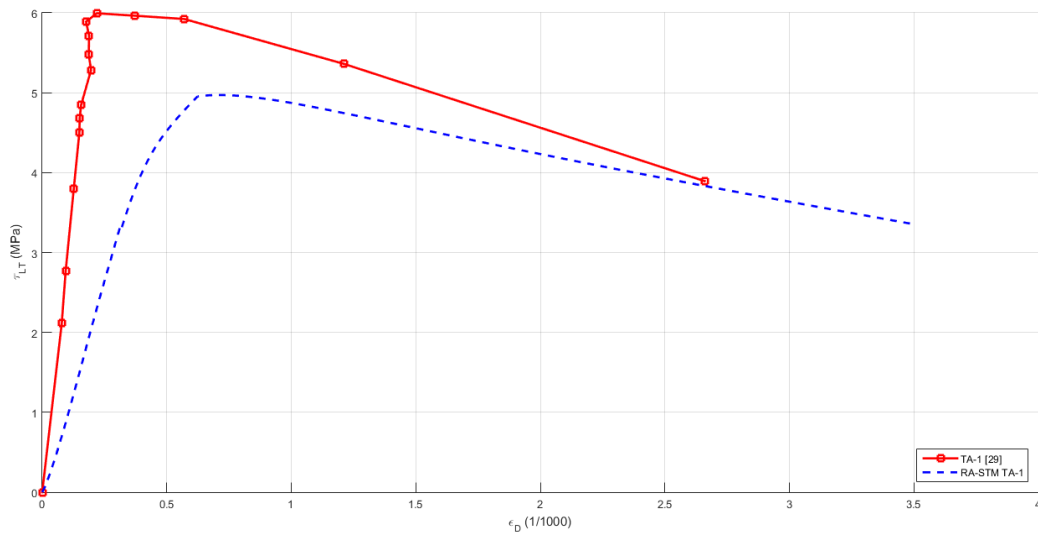


Figura 3.31 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-1 [24].

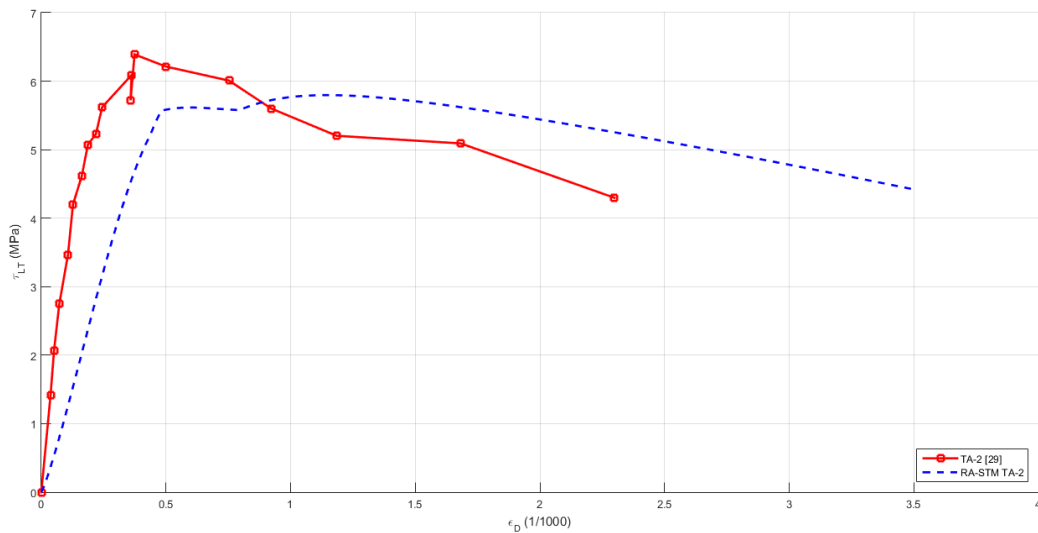


Figura 3.32 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-2 [24].

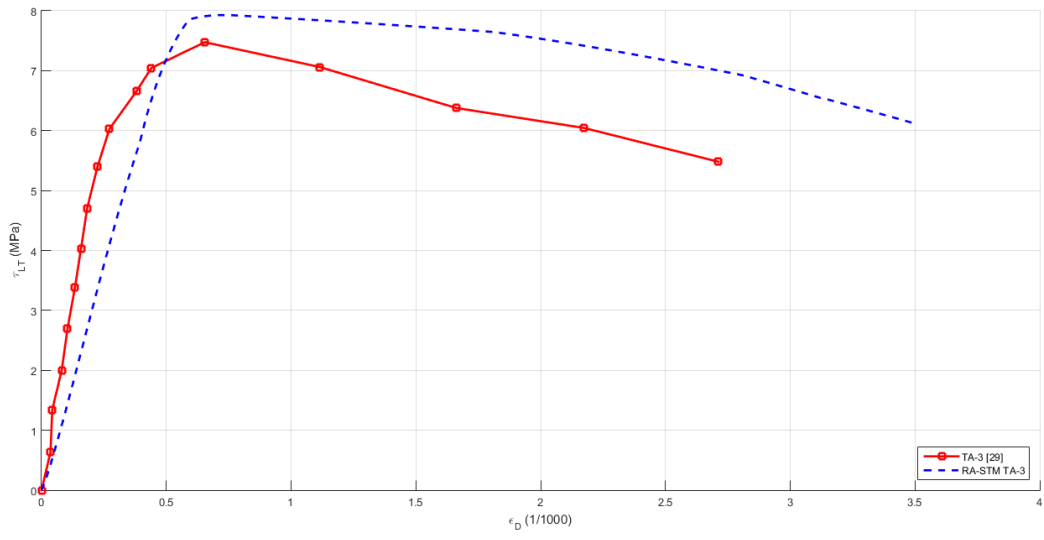


Figura 3.33 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-3 [24].

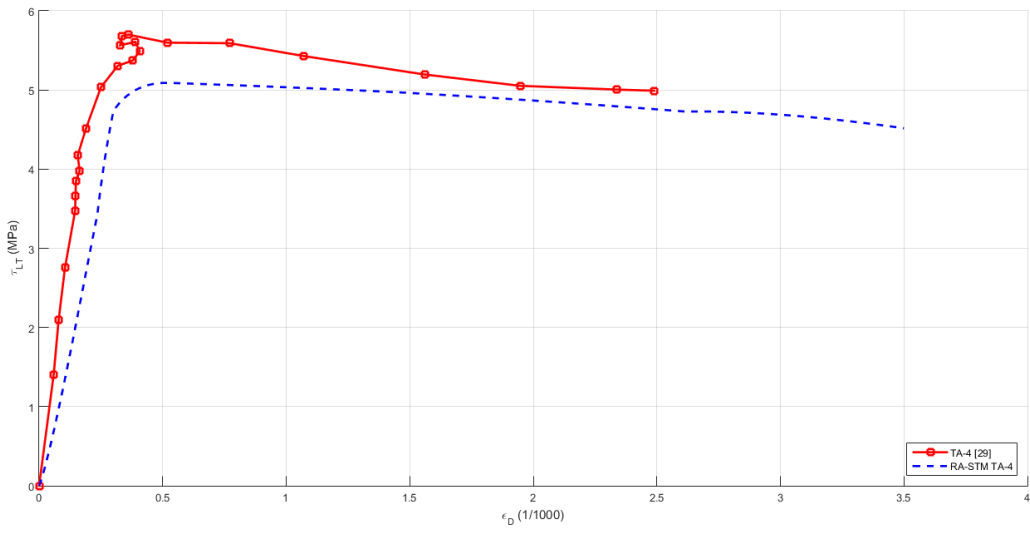


Figura 3.34 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-4 [24].

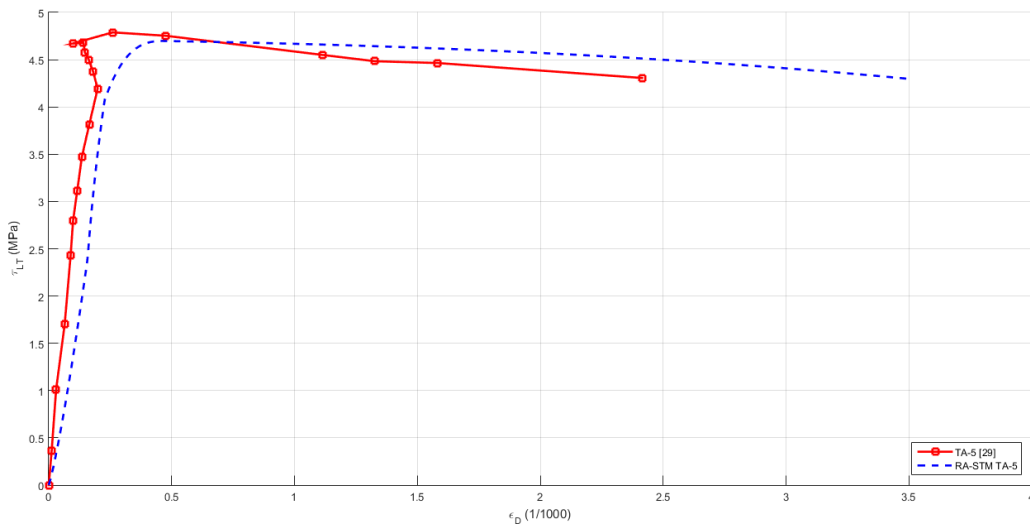


Figura 3.35 - Curvas $\tau_{LT} - \varepsilon_D$: placa TA-5 [24].

3.4.1.4 *Análise do comportamento das placas em função do parâmetro η'*

Como já referido anteriormente, contabilizando os valores da taxa de armadura e da respetiva tensão de cedência ou tensão limite convencional de proporcionalidade, o fator η (ou η') traduz a relação entre as forças resistentes totais das armaduras na direção longitudinal e transversal da placa. Para o caso das placas sem pré-esforço e para o modelo RA-STM, o intervalo de validade do parâmetro η' é de 0.4 a 1.0. Verificou-se que este intervalo não engloba o valor calculado de η' para três das placas analisadas, apresentando os valores de 0.12 para a placa TA-1, 0.22 para a placa TA-2 e 0.31 para a placa TA-4. Salienta-se que as restantes placas (TA-3 e TA-5) apresentam valores de η' iguais a 0.44 e 0.43, respetivamente, estando estes valores dentro do intervalo referido.

Uma vez que a Eq. 2.18 foi calibrada para o intervalo anteriormente indicado para η' , os resultados obtidos para as placas que não cumprem o limite inferior para η' (placas TA-1, TA-2 e TA-4) devam ser encarados com alguma reserva, uma vez que se espera que a consideração da influência do amolecimento pelo RA-STM modificado possa ser menos precisa. Pode-se verificar através da Eq. 2.18 que o parâmetro η' é inversamente proporcional ao coeficiente de amolecimento (ζ), pelo que menores valores de η' geram valores mais elevados para ζ , traduzindo-se num efeito de amolecimento mais desfavorável para a resistência do betão à compressão e, em consequência, numa menor resistência ao corte da placa. Para relacionar esta observação com os piores resultados observados para a placa TA-1 (para o qual o η' é o que se afasta mais do valor limite inferior igual a 0.4), foram realizados alguns cálculos adicionais. Verificou-se que, para a placa TA-1, para o qual η' é muito pequeno e, consequentemente, ζ é elevado, pequenas alterações no valor do parâmetro η' alteram bastante o comprimento do ramo ascendente da curva teórica $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ após o ponto de cedência, verificando-se um aumento da resistência da placa. Para a placa TA-2, as alterações observadas são menos significativas, enquanto que para a placa TA-4 quase não se observa influência.

A partir da Tabela 3.9 observa-se também que a placa TA-1 apresenta o valor mínimo de taxa de armadura ordinária transversal em relação às restantes placas da mesma série (0.42%). Recorde-se que, para esta placa, se observaram diferenças notáveis entre a resistência teórica calculada com o RA-STM e a resistência experimental. Observa-se também que o valor de 0.42% se encontra abaixo do valor mínimo de 0.6% recomendado por Pang e Hsu em 1995 [13] (Secção 3.2.1) e também de 0.78% recomendado Zhang em 1995 [44] e citado por Zhang e Hsu de 1998 [14] (Secção 3.2.2). Estas observações poderão também ajudar a explicar os piores resultados observados para a placa TA-1.

As observações anteriores parecem mostrar que existe uma gama de validade para os valores de η' que também deve ser imposta para as placas pré-esforçadas sujeitas a esforços de membrana, com o objetivo do RA-STM modificado conseguir prever adequadamente as suas

resistências. Os resultados também mostram que o modelo teórico pode conduzir a piores resultados para placas com pré-esforço quando a relação entre as forças resistentes nas armaduras (η) é muito pequena. Para apoiar estas afirmações, a partir da Figura 3.18 e Figura 3.20 pode-se observar que, para as placas TA-3 e TA-5, os quais cumprem os limites para os parâmetros anteriormente discutidos, as previsões do RA-STM são muito melhores. Os resultados para as placas TA-2 e TA-4, que não cumprem o limite mínimo apenas para o parâmetro η' , são bastante aceitáveis. Isso pode indicar que, para as placas pré-esforçadas, o limite mínimo anteriormente referido para η' (0.4) e calibrado para placas de betão armado, pode ser um pouco elevado.

3.4.2 Placas pré-esforçadas analisadas por Marti e Meyboom [23]

Marti e Meyboom em 1992 [23] analisaram o ensaio feito experimentalmente por Meyboom em 1987 [22] do comportamento de 3 placas de betão armado com iguais dimensões (1.524 x 1.524 x 0.287 m) designadas por PP1, PP2 e PP3. A variável em estudo foi a quantidade de pré-esforço orientado à 45°. A placa PP1 não incorporou pré-esforço, enquanto as placas PP2 e PP3 foram pré-esforçadas na direção longitudinal com 2.07 MPa e 4.40 MPa (tensão no betão), com taxas mecânicas de armadura de pré-esforço iguais a 0.293 e 0.586, respetivamente. Refere-se que a direção longitudinal considerada foi a direção x (à 45°) segundo à qual a armadura de pré-esforço foi colocada, conforme ilustrado na Figura 3.36.

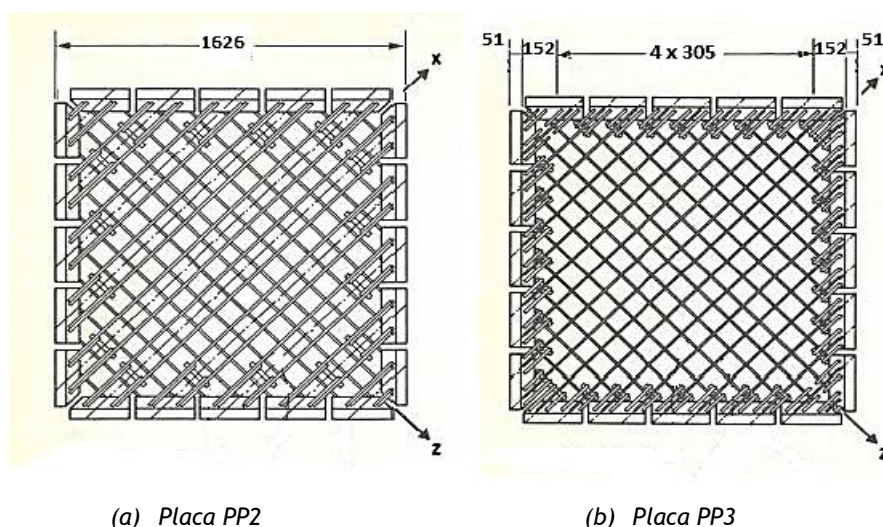


Figura 3.36 - Geometria e referenciais das placas ensaiadas por Meyboom [22] e analisadas por Marti e Meyboom [23].

Como o âmbito deste trabalho compreende estudar apenas placas pré-esforçadas, somente serão analisados os resultados das placas PP2 e PP3. A Tabela 3.11 resume as características das placas em análise. Refere-se que a placa PP3 apresenta taxas mecânicas de armaduras ordinárias iguais, enquanto que a placa PP2 apresenta um desequilíbrio entre as taxas mecânicas.

Tabela 3.11 - Características das placas da série PP [23].

Placa	Betão		Armadura de pré-esforço na direção longitudinal				Armadura ordinária na direção longitudinal e transversal					
	f_{cm} [MPa]	ϵ_0	ρ_{PL} [%]	Pré-esforço adotado [MPa]	E'_{ps} [GPa]	$f_{ps0.1\%}$ [MPa]	f_{pu} [MPa]	ρ_L [%]	ρ_T [%]	f_{syL} [MPa]	f_{syT} [MPa]	E_p [GPa]
PP2	28.1	0.00212	0.293	2.07	200	910	1793	1.295	0.647	486	480	200
PP3	27.7	0.00211	0.586	4.40				0.647		480		

De forma a validar o modelo RA-STM proposto neste trabalho foram retirados do estudo de Marti e Meyboom os valores necessários para o traçado das curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ das placas a analisar, os quais são apresentados na Tabela A 16 e Tabela A 17 do Anexo. De seguida, procede-se à comparação dos resultados teóricos obtidos com o RA-STM modificado com os resultados experimentais para as placas em estudo.

3.4.2.1 Análises comparativas com Marti e Meyboom [23]

Nesta secção são apresentadas as análises comparativas tendo por base as placas pré-esforçadas ensaiadas por Meyboom em 1987 [22] e apresentados posteriormente por Marti e Meyboom em 1992 [23], para validação do RA-STM modificado com pré-esforço. Conforme apresentado na Secção 1.2.1, deve ser lembrado que Laskar *et al.* [24] citam notórias deficiências realizadas no estudo de Marti e Meyboom [23].

Ainda assim, o modelo RA-STM modificado com pré-esforço foi utilizado para simular as duas placas de Meyboom [22] com pré-esforço. Para tal, foram utilizadas as leis constitutivas para o betão à compressão de acordo com o apresentado no Capítulo 2 (Eq. 2.14 e Eq. 2.16), bem como para a armadura ordinária embebida no betão (Eq. 2.24 e Eq. 2.25) e para a armadura de pré-esforço. Para estas armaduras tiveram de ser assumidos os seguintes valores: tensão última da armadura de pré-esforço utilizada no intervalo de domínio ($f'_{pu} = 1793 \text{ MPa}$, Eq. 3.9 e Eq. 3.10), coeficiente de calibração ($R=5$, Eq. 3.10) e tensão inicial da armadura de pré-esforço ($f_{pi} = 1255 \text{ MPa}$, Eq. 2.66 e Eq. 2.67) e tiveram que ser estabelecidos com valores lógicos, com semelhança aos valores utilizados por Laskar *et al.* no seu estudo, mas sem justificação experimental fornecida por Marti e Meyboom [23].

3.4.2.2 Gráficos de comportamento

A Figura 3.37 e a Figura 3.38 apresentam os gráficos $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ para as placas PP2 e PP3, os quais apresentam os pontos experimentais registados por Marti e Meyboom [23] bem como a respetiva variação resultante de 7 ensaios para cada placa pré-esforçada experimentalmente (marcadores vermelhos). As referidas figuras apresentam também as curvas teóricas obtidas a partir do modelo RA-STM modificado proposto neste trabalho (curvas azuis).

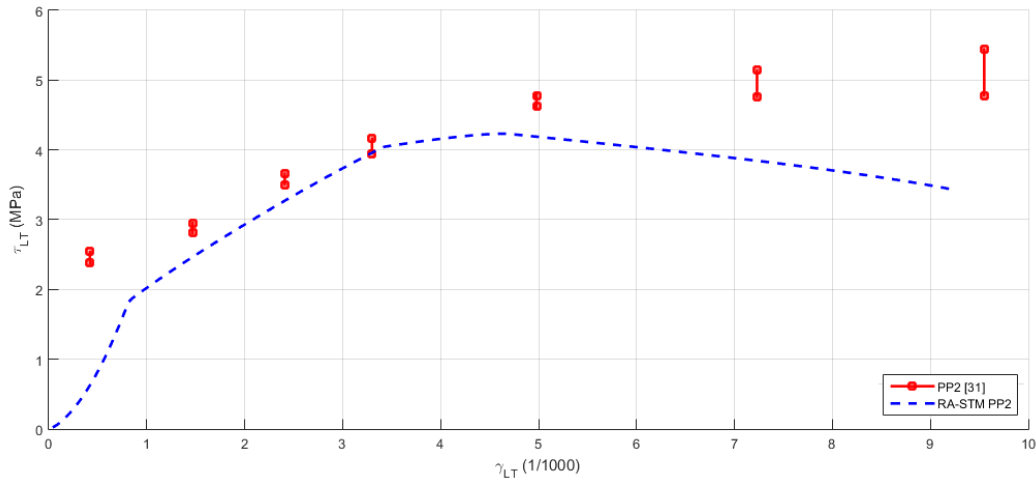


Figura 3.37 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa PP2 [23].

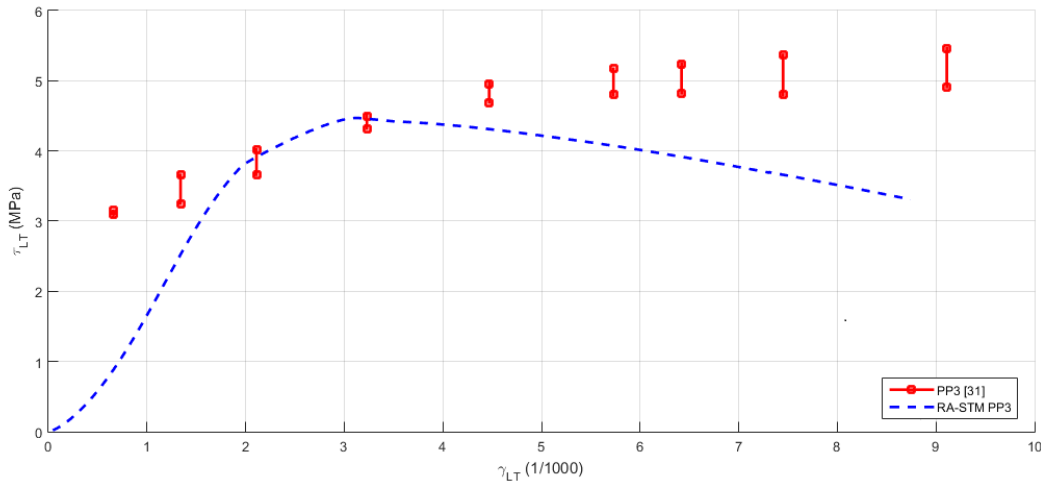


Figura 3.38 - Curvas $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$: placa PP3 [23].

De uma forma geral, pode observar-se que a forma das curvas teóricas previstas pelo RA-STM modificado (curvas azuis) é congruente com a variação do intervalo de valores provenientes dos pontos experimentais (marcadores vermelhos). Verifica-se, no entanto, que o modelo teórico subestima a resistência das placas simuladas e antecede o pico de resistência. Tal poderá dever-se às incertezas associadas aos valores assumidos neste trabalho para caracterizar o comportamento da armadura de pré-esforço, discutidos na secção anterior.

3.5 Análise da resistência ao corte

A análise comparativa entre os valores experimentais ($\tau_{LT\,exp}$) e teóricos ($\tau_{LT\,teo}$) calculados através do RA-STM modificado, do comportamento resistente ao corte das placas com pré-esforço analisadas tem por base o rácio entre os referidos valores ($\tau_{LT\,exp}/\tau_{LT\,teo}$). Para auxiliar na análise comparativa, foram calculadas a média (\bar{x}), o desvio padrão (s) e o coeficiente de variação (cv) do referido rácio, a partir da Eq. 3.10 a Eq. 3.12, respetivamente, onde n é o número total de placas analisadas.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad 3.11$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad 3.12$$

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\% \quad 3.13$$

Como já discutido na Secção 1.2.1, Laskar *et al.* [24] no seu estudo relataram várias deficiências no estudo de Marti e Meyboom [23]. Por estas razões, estes resultados experimentais são encarados com alguma reserva, pelo que não serão contabilizados para a análise estatística. Da mesma forma, devido aos incumprimentos encontrados para a placa TA-1 ensaiada por Laskar *et al.*, apresentadas e discutidas na Secção 3.4.1.4, optou-se por não considerar os resultados desta placa para a análise comparativa da resistência ao corte.

A Tabela 3.12 apresenta os valores anteriormente referidos e relativos as 4 placas restantes. Apesar do número de placas estudadas ser relativamente reduzido, é possível comprovar que o modelo teórico fornece valores aceitáveis para a resistência ao corte das placas pré-esforçadas. Observa-se que o RA-STM modificado subestima um pouco a resistência ao corte das placas ($\bar{x} = 1.07$), com uma dispersão de resultados aceitável ($cv = 7.87\%$).

Tabela 3.12 - Análise comparativa da resistência ao corte.

Placa	$\tau_{LT,exp}$ [kN/m ²]	$\tau_{LT,teo}$ [kN/m ²]	$\tau_{LT,exp}/\tau_{LT,teo}$
TA-2	6.44	5.80	1.11
TA-3	7.49	7.93	0.95
TA-4	5.71	5.09	1.12
TA-5	4.79	4.70	1.02
		\bar{x}	1.07
		s	0.08
		cv	7.87%

3.6 Eficiência computacional

As curvas teóricas calculadas a partir do modelo RA-STM com procedimento eficiente e modificado para placas com pré-esforço foram traçadas com base em mil pontos. Para as placas analisadas este número de pontos mostrou-se em geral suficiente para desenhar as curvas de comportamento das placas ao longo de todo o historial de carga, até ser atingido o critério de paragem (Eq. 2.72 e Eq. 2.73).

A eficiência computacional também se mostrou adequada. A resposta encontrada para as iterações foi obtida com rapidez, bem como os cálculos necessários com base no número de pontos e tamanho do passo escolhido (rácio entre o fator 4 e o número de pontos escolhidos).

O tempo de processamento médio alcançado pelo computador em executar o procedimento proposto foi, em média, de quinze segundos, sendo o processador utilizado um Intel® Core™ i7-4510U @ 2.60 GHz.

Com base na rapidez referida e na facilidade que o programa oferece em alterar dados para a combinação desejada, a metodologia apresentada constitui uma opção interessante para trabalhos futuros além de dinamizar a escolha do projetista.

3.7 Conclusões preliminares

De um modo geral, os resultados obtidos a partir do RA-STM modificado para as placas com pré-esforço estudadas ao longo do presente capítulo mostram que o modelo proposto aparenta ser adequado para a previsão do comportamento global pós-fissuração e da resistência de placas de betão pré-esforçadas submetidas ao corte. Para além disso, o modelo RA-STM modificado com procedimento de solução eficiente é de fácil implementação, requer menos esforço de cálculo e proporciona boa estabilidade quando comparado com outros procedimentos de solução baseados em técnicas de tentativa e erro.

A partir da análise comparativa com resultados experimentais, observou-se que, para elementos bidimensionais de betão armado sujeito a esforços de membrana, determinados parâmetros necessitam de cumprir limites convencionalmente já estabelecidos para placas de betão armado. Para o caso da extensão do RA-STM proposto, as placas necessitam de cumprir tais limites, embora se observe que os mesmos poderão não estar bem calibrados para placas com pré-esforço.

Refere-se também que a maioria das conclusões obtidas neste trabalho têm por base um número limitado de resultados experimentais, pelo que as mesmas devem ser aceites com alguma reserva e requerem novos estudos no futuro para confirmação. Para tal, resultados experimentais adicionais com placas pré-esforçadas submetidas a esforços de membrana, incluindo o caso particular de corte puro, são de grande necessidade.

Capítulo 4 - Conclusões e propostas para trabalhos futuros

4.1 Introdução

Neste capítulo, resumem-se as principais conclusões do presente trabalho e apresentam-se possíveis propostas de desenvolvimento e trabalhos futuros no âmbito do tema em estudo.

4.2 Conclusões

De seguida, apresentam-se as principais conclusões obtidas com base no trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação.

4.2.1 Análises paramétricas

Relativamente às análises paramétricas realizadas no Capítulo 3, o estudo da influência das variáveis em estudo consideradas deu origem a conclusões consistentes e esperadas, indo ao encontro de alguns resultados referenciados na literatura existente.

Relativamente à influência do nível de pré-esforço na resposta das placas submetidas ao corte, observou-se que as curvas comportamentais apresentam um desenvolvimento esperado consoante a variação do nível de pré-esforço aplicado. Através da Figura 3.3 e da Figura 3.4, observou-se que para níveis mais baixos de pré-esforço existe um comportamento dúctil da placa, que modifica consoante o aumento do pré-esforço. À medida que o nível de pré-esforço aumenta, o comportamento último é tendencialmente mais frágil. Relativamente à resistência ao corte das placas, aparenta existir um valor máximo do nível de pré-esforço compatível com o aumento da resistência, quando o pré-esforço é aplicado numa só direção. Neste estudo, tal nível aparenta rondar um pré-esforço correspondente à $15\%f_{cm}$ para os betões de alta resistência e 20% para betões de resistência normal, contudo os dados ficam condicionados a reduzida gama de placas comparadas. Observou-se também que, quando a armadura pré-esforçada está disposta em duas direções, a resistência ao corte tem maior magnitude comparativamente à situação com pré-esforço unidirecional e pré-esforço total igual.

Ao comparar o comportamento ao corte de duas placas com taxas mecânicas de armaduras ordinárias próximas ou iguais, com pré-esforço nas duas direções, sendo uma delas de alta resistência (VA1 - Figura A. 5 do Anexo) e outra de resistência normal (A2 - Figura A. 11 do Anexo), pode-se observar que a placa executada com betão de alta resistência apresenta uma rotura mais frágil comparativamente à placa executada com betão de resistência normal. Quando o pré-esforço é aplicado numa só direção, a partir da Figura A. 4 e Figura A. 9 do

Anexo, observa-se a mesma tendência, sendo maior a resistência ao corte quando o betão é de alta resistência.

Como referido na Secção 3.3.2, o valor do coeficiente de amolecimento diminui com o aumento do desequilíbrio do pré-esforço. Por esse motivo, os maiores valores de tensão no betão à compressão ocorrem para o pré-esforço equilibrado, ou seja, para o pré-esforço aplicado com a mesma quantidade em ambas as direções.

Comparando as curvas corte - distorção de placas com taxas mecânicas de armaduras ordinárias próximas, com o pré-esforço numa só direção e, sendo uma das placas de alta resistência (VA1 - Figura 3.6) e outra de resistência normal (A2 - Figura A. 9 do Anexo), verificou-se que, apesar de apresentarem um comportamento tendencialmente mais frágil, quando o pré-esforço se encontra aplicado em duas direções as placas apresentem uma maior participação do betão à compressão.

Por fim, quanto à influencia da quantidade de armadura ordinária e total (incluindo a de pré-esforço), observou-se, conforme esperado, que a solitação das armaduras ordinárias diminui à medida que aumenta o nível do pré-esforço, ou seja, à medida que aumenta a quantidade de armadura de pré-esforço. A Figura 3.5 mostra que, para uma mesma quantidade de armadura total de pré-esforço, é observado um comportamento tendencialmente mais frágil da placa quando o pré-esforço se encontra aplicado numa só direção.

Concluindo, tendo em vista a igualdade entre a quantidade total de pré-esforço e considerando o critério de maior resistência, dispor a armadura de pré-esforço em duas direções aparenta ser mais vantajoso. Contudo, salienta-se que esta solução não se destaca pela sua facilidade de execução.

4.2.2 Análises comparativas com resultados experimentais

A pesquisa desenvolvida neste estudo teve como objetivo final apresentar um procedimento de solução eficiente para calcular placas de betão pré-esforçado submetidas a esforços de membrana, em particular ao corte. Neste âmbito, alguns dos parâmetros considerados aparentam ser mais condicionantes para a resposta das placas.

Passa-se a discutir o caso da taxa mecânica de armadura ordinária transversal, onde os valores mínimos de 0.6% apresentado por Pang e Hsu [13] e 0.78% apresentado por Zhang e Hsu [14] são ambos superiores ao valor de referência da placa de betão pré-esforçado TA-1 ($\rho_T=0.42\%$). Esta observação aparenta ser a justificação para o comportamento condicionado observado da placa TA-1 ao corte.

Contudo, no decorrer do trabalho verificou-se que outros fatores também influenciam a resposta das placas simuladas. Como discutido na Secção 3.4.1.4, a relação entre as forças

resistentes totais das armaduras na direção longitudinal e transversal, descrita através do fator η (ou η'), é apresentada na literatura para um intervalo de validade que apenas foi estabelecido para placas de betão armado, sendo $0.4 < \eta' < 1$. Não foi encontrado na literatura o correspondente intervalo de validade para placas de betão pré-esforçado.

Da Tabela 3.9, as placas TA-1, TA-2 e TA-4 não cumprem o limite mínimo para η' . Este parâmetro está diretamente relacionado com o coeficiente de amolecimento do betão através da Eq. 2.18, sendo esta equação calibrada para o intervalo $0.4 < \eta' < 1$. Devida à esta relação, e no desconhecimento de intervalos de validade para placas pré-esforçadas, espera-se que a influência do efeito de amolecimento do betão não seja considerada com a devida precisão para essas placas tendo em conta a influência do pré-esforço na resposta do betão à compressão.

De forma a relacionar esta observação com os resultados menos bons observados para a placa TA-1, alguns cálculos adicionais foram realizados. Verificou-se que, para a placa TA-1, para a qual η' é muito pequeno, pequenas alterações em η' modificam profundamente o comprimento do ramo ascendente da curva teórica $\tau_{LT} - \gamma_{LT}$ após o ponto de cedência das armaduras. Para as placas TA-2 e TA-4, as mudanças observadas são muito menos significativas.

Para suportar as afirmações anteriores, a partir da Figura 3.18 e Figura 3.20 pode-se observar que para as placas TA-3 e TA-5, que cumprem os limites anteriores para ρ_T e η' estabelecidos para placas de betão armado, os resultados são muito melhores. Os resultados das placas TA-2 e TA-4, que não cumprem o limite mínimo para η' , são ainda assim bastante aceitáveis. Esta última análise pode indicar que, para as placas de betão pré-esforçado, o limite mínimo anteriormente referido para η' igual a 0.4 pode ser um pouco alto.

De forma geral, tendo por base as análises comparativas com os resultados experimentais das 7 placas de betão pré-esforçado encontradas na literatura, pode-se referir que o modelo RA-STM modificado mostrou-se adequado. As previsões teóricas obtidas evidenciaram uma concordância aceitável com os resultados experimentais das placas analisadas, designadamente através da análise da curva comportamental tensão tangencial (τ) - distorção (γ).

Em resultado da incorporação de leis constitutivas mais adequadas para os materiais e das alterações dos critérios de paragem, verificou-se ainda que o RA-STM modificado conseguiu calcular o comportamento pós-pico para algumas das placas simuladas, sem ter sido incorporado o efeito de *Poisson* para o estado fissurado nem a relação constitutiva do betão ao corte. Ainda relativamente a este assunto, deve-se referir que os melhores resultados do modelo SMM-PC simulados por Laskar *et al.* [24] devem-se ao fato do modelo proposto pelos referidos autores incorporar refinamentos adicionais, como o efeito de *Poisson* e a resistência

à tração do betão, além da incorporação de um novo coeficiente de correção (W_p) para o coeficiente de amolecimento (ζ). Conforme referido no Capítulo 3, o procedimento de solução do SMM-PC é baseado numa técnica de tentativa e erro e requer um grande esforço de cálculo.

Após a análise estatística da relação entre os valores teóricos e experimentais obtidos através da análise da resistência ao corte para as placas analisadas, verificou-se que o RA-STM modificado prevê adequadamente a resistência das placas, com uma média próxima da unidade e um coeficiente de variação bastante aceitável (7.87%).

Como apresentado na Secção 3.6, a incorporação do pré-esforço no modelo e o procedimento de solução eficiente proposto é simples de implementar, requer menos esforço de cálculo e proporciona boa estabilidade quando comparado com o método de cálculo baseado na técnica de tentativa e erro.

Por fim, deve referir-se que o modelo RA-STM modificado com solução eficiente foi verificado tendo por base poucos resultados experimentais relacionados com placas de betão pré-esforçado ao corte. Por esse motivo, a maioria das conclusões anteriores deve ser aceite com alguma reserva e requer confirmação no futuro. Para isso, são necessários resultados experimentais adicionais com placas pré-esforçadas.

4.3 Propostas para trabalhos futuros

Com base no exposto ao longo deste trabalho, considera-se de especial interesse o desenvolvimento futuro dos seguintes estudos:

- Realizar uma ampla campanha de ensaios experimentais com placas de betão pré-esforçado sujeitas a diferentes combinações de solitação no seu plano;
- Incorporar no modelo RA-STM com procedimento eficiente a relação constitutiva σ - ε para o betão à tração, de forma a prever com melhor exatidão o comportamento inicial das placas pré-esforçadas, melhorando assim a resposta do comportamento global destes elementos quando submetidos ao corte puro.
- Como discutido na Secção 3.4.1.4 e nas conclusões deste trabalho, é apresentada na literatura existente um intervalo de validade para o parâmetro η' , o qual foi definido para placas de betão armado. Como proposta para trabalhos futuros, propõe-se estabelecer, por via experimental e analítica, um novo intervalo de viabilidade para este parâmetro contabilizando o efeito do pré-esforço;
- Generalizar as modificações realizadas no *Rotating-Angle Softened Truss Model* (RA-STM) para o modelo *Combined Action Softened Truss Model* (CA-STM) proposto por Greene em 2006

[45] e Greene e Belarbi em 2009a [46] e 2009b [47], no âmbito de vigas sujeitas à torção com pré-esforço.

Bibliografia

- [1] T. T. C. Hsu and Y. L. Mo, *Unified theory of concrete structures*. 2010.
- [2] L. F. A. Bernardo, "Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência," Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra, 2003.
- [3] R. Alves De Souza, "Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para a análise de elementos de membrana em concreto estrutural," *Rev. Int. Metod. Numer. para Calc. y Disen. en Ing.*, vol. 29, no. 1, pp. 38–51, 2013.
- [4] M. P. Collins, F. J. Vecchio, and G. Mehlhorn, "An international competition to predict the response of reinforced concrete panels," *Can. J. Civ. Eng.*, vol. 12, no. 3, pp. 626–644, 1985.
- [5] W. Ritter, "Die Bauweise Hennebique," *Schweizerische Bauzeitung (Zürich)*, vol. 33, no. 7, pp. 59–61, 1899.
- [6] E. Mörsch, "Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie," p. 118, 1902.
- [7] T. T. C. Hsu, L. X. Zhang, and T. Gomez, "A Servo-Control System for Universal Panel Tester," *J. Test. Eval.*, vol. 23, no. 6, pp. 424–430, 1995.
- [8] T. T. C. Hsu, "Softened Truss Model Theory for Shear and Torsion," *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 85, no. (6), pp. 624–635, 1988.
- [9] J. M. Robinson and J. R. Demorieux, "Essais de Traction-Compression sur Modèles 20 d'Ame de Poutre en Béton Armé," 1972.
- [10] T. T. C. Hsu, "Unified Theory of Reinforced Concrete," *CRC Press*. Boca Raton, Florida, 1993.
- [11] A. Belarbi and T. T. C. Hsu, "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete," *Struct. J. Am. Concr. Inst.*, vol. 91, no. 4, July–August, pp. 465–474, 1994.
- [12] A. Belarbi and T. T. C. Hsu, "Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression," *Struct. J. Am. Concr. Inst.*, vol. 92, no. 5, September–October, pp. 562–573, 1995.
- [13] X. B. Pang and T. T. C. Hsu, "Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear," *Struct. J. Am. Concr. Inst.*, vol. 92, no. 6, November–December, p. 665–679., 1995.
- [14] L. X. Zhang and T. T. C. Hsu, "Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements," *J. Struct. Eng.*, vol. 124, no. 1, January, pp. 24–34, 1998.
- [15] X. B. Pang and T. T. C. Hsu, "Constitutive Laws of Reinforced Concrete in Shear," *Research Report UHCEE 92-1*, Dept. of Civil and Environmental Engineering, University of Houston, p. 187, 1992.
- [16] X. B. Pang and T. T. C. Hsu, "Fixed-Angle Softened-Truss Model for Reinforced Concrete," *Struct. J. Am. Concr. Inst.*, vol. 93, no. 2, pp. 197–207, 1996.
- [17] T. T. C. Hsu and L. X. Zhang, "Nonlinear Analysis of Membrane Elements by Fixed-Angle Softened-Truss Model," *Struct. J. Am. Concr. Inst.*, vol. 94, no. 5, pp. 483–492, 1997.
- [18] T. T. C. Hsu and R. R. H. Zhu, "Softened Membrane Model for Reinforced Concrete Elements in

- Shear," *Struct. J. Am. Concr. Inst.*, vol. 99, no. 4, pp. 460–469, 2002.
- [19] J. R. de B. Silva and B. Horowitz, "Procedimento eficiente para estimar o comportamento carga-deformação de elementos bidimensionais de concreto armado submetidos a esforços de membrana utilizando o modelo de treliça com ângulo variável," in *CILAMCE 2015 – XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2015.
- [20] J. R. de B. Silva, "Procedimento eficiente para análise de seções em concreto armado usando o modelo de treliça com amolecimento," Universidade Federal de Pernambuco, 2016.
- [21] C. H. Jeng and T. T. C. Hsu, "A softened membrane model for torsion in reinforced concrete members," *Eng. Struct.*, vol. 31, no. 9, p. 1944–1954., 2009.
- [22] J. Meyboom, "An Experimental Investigation of Partially Prestressed, Orthogonally Reinforced Concrete Elements Subjected to Membrane Shear," University of Toronto, Toronto, Canada., 1987.
- [23] P. Marti and J. Meyboom, "Response of Prestressed Concrete Elements to In-plane Shear Forces," *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 89, no. 5, pp. 503–5014, 1992.
- [24] A. Laskar, J. Wang, T. T. C. Hsu, and Y. L. Mo, "Rational Shear Provisions for AASHTO LRFD Specifications: Technical Report." p. 216, 2007.
- [25] P. Lampert and B. Thurlimann, "Torsions-Beige-Versuche an Stahlbetonbalken. Bericht," *Inst. fur Baustatik*, no. Nr. 6506-3, Institut fur Baustatik, ETH, Zurich, 1969.
- [26] E. Rausch, "Design of Reinforced Concrete in torsion (Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung)," Ph.D. Thesis, Berlin, 1929.
- [27] T. T. C. Hsu and Y. L. Mo, "Softening of Concrete in Torsional Members – Design Recommendations," *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 82, no. 4, July–August, pp. 443–452, 1985.
- [28] C. R. P. David, "Simulação numérica de painéis de concreto armado submetidos ao corte puro," Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.
- [29] CEB-FIP MODEL CODE 1990, *Comité Euro-International du Béton*. Suisse, 1990.
- [30] C. S. B. Taborda, "Efeito do Confinamento Axial no Comportamento de Vigas de Betão Estrutural sujeitas à Torção," Universidade da Beira Interior, 2012.
- [31] J. A. T. de F. Rodrigues, "Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT," Universidade da Beira Interior, 2011.
- [32] T. T. C. Hsu and Y. L. Mo, "Softening of Concrete in Torsional Members – Theory and Tests," *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 83, no. 3, May–June, pp. 290–303, 1985.
- [33] E. Hognestad, *What Do We Know About Diagonal Tension and Web Reinforcement in Concrete?*, Circular S., no. 64. University of Illinois, 1952.
- [34] A. Belarbi and T. T. C. Hsu, "Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression," *Res. Rep. UHCEE*, vol. 91, no. 2, University of Houston, Texas, 1991.
- [35] R. R. H. Zhu, T. T. C. Hsu, and J. Y. Lee, "Rational shear modulus for smeared-crack analysis of reinforced concrete," *Struct. J. Am. Concr. Inst.*, vol. 98, no. 4, July–August, pp. 443–450, 2001.
- [36] L. F. A. Bernardo, J. M. A. Andrade, and S. M. R. Lopes, "Softened Truss Model for Reinforced NSC and HSC Beams under Torsion: a Comparative Study," *Eng. Struct.*, vol. 42, pp. 278–296, 2012.
- [37] T. T. C. Hsu and Y. L. Mo, "Softening of Concrete in Torsional Members – Prestressed Concrete," *J. Am. Concr. Inst.*, vol. 82, no. 51, September–October, pp. 603–615, 1985.
- [38] T. T. C. Hsu, *Torsion of Reinforced Concrete*. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1984.

- [39] D. L. N. Rao and J. Warwaruk, "Prestressed Concrete I-Beams Subjected to Combined Loadings," *Struct. Eng. Rep.*, no. 46, p. 242, 1973.
- [40] T. T. C. Hsu, "Nonlinear Analysis of Membrane Elements," *Struct. J. Am. Concr. Inst.*, vol. 88, no. 57, September–October, pp. 552–561, 1991.
- [41] R. J. T. Costa, S. M. R. Lopes, and L. F. A. Bernardo, "Behaviour of RC Panels Under Shear," in *International Conference on Concrete for Structures*, 2005, pp. 269–276.
- [42] Comité Europeu de Normalização, "NP EN 1992-1-1 Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de Betão - Part 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios."
- [43] ACI Committee 318, *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-14) and Commentary (ACI 318R-14)*. American Concrete Institute, Detroit, MI, 2014.
- [44] L. X. Zhang, "Constitutive laws of reinforced elements with high strength forces," Dept. of Civil and Environmental Engineering, Univ. of Houston, Houston, 1995.
- [45] G. G. J. Greene, "Behavior of reinforced concrete girders under cyclic torsion and torsion combined with shear: experimental investigation and analytical models," Ph. D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Missouri-Rolla, USA, 2006.
- [46] G. G. J. Greene and A. Belarbi, "Model for RC members under torsion, bending and shear. I: Theory," *J. Eng. Mech.*, vol. 195, no. 9, pp. 961–969, 2009.
- [47] G. G. J. Greene and A. Belarbi, "Model for RC members under torsion, bending and shear. II: Model application and validation," *J. Eng. Mech.*, vol. 135, no. 9, pp. 970–977, 2009.

Anexos

Tabela A1 - Dados de plotagem e teóricos da placa A2 - Pang e Hsu [13].

Dados de plotagem: A2 Pang e Hsu [12]	ε_{plot}	0
	$\sigma_{D_{plot}}$	0
	$\varepsilon_{R_{plot}}$	0
	$A\sigma_{plot}$	0
	$\varepsilon_{L_{plot}}$	[0 0.0016 0.0019 0.002886 0.004730 0.0013190 0.0015864 0.0019]
	$\varepsilon_{T_{plot}}$	0
	$f_{sL_{plot}}$	[0 342.035 375.764 379.212 410.445 428.785 389.554 317.159]
	$f_{sT_{plot}}$	0
	α_{plot}	0
	τ_{plot}	[0 0.317 0.724 0.979 1.338 1.655 1.862 2.034 2.620 3.482 3.896 4.344 4.947 4.895 5.206 5.283 5.266 5.309 5.394]
γ_{plot}	[0 0 0 0 0.150 0.800 1.100 1.250 1.900 3.000 3.350 3.660 4.700 6.143 10.600 14.720 18.220 23.140 28.000]	
Dados teóricos [12]	τ_{teo}	[0 1.565 1.606 2.758 4.743 4.935 4.992 5.394]
	γ_{teo}	[0 0 0.800 2.100 4.000 6.000 11.000 28.000]

Tabela A2 - Dados de plotagem e teóricos da placa A4 - Pang e Hsu [13].

Dados de plotagem A4 Pang e Hsu [12]	ε_{plot}	0
	$\sigma_{D_{plot}}$	0
	$\varepsilon_{R_{plot}}$	0
	$A\sigma_{plot}$	0
	$\varepsilon_{L_{plot}}$	[0 0.000426 0.000520 0.000949 0.001309 0.001558 0.002261 0.002564]
	$\varepsilon_{T_{plot}}$	0
	$f_{sL_{plot}}$	[0 75.842 103.421 144.790 206.843 255.106 344.738 366.022]
	$f_{sT_{plot}}$	0
	α_{plot}	0
	τ_{plot}	[0 1.689 1.931 2.275 2.758 3.689 4.757 5.447 6.412 7.377 7.929 8.618 9.584 10.480 11.376]
γ_{plot}	[0 0.100 0.200 0.750 0.920 1.340 1.950 2.338 2.910 3.300 3.704 4.080 4.795 5.719 7.073]	
Dados teóricos [12]	τ_{teo}	[0 1.724 2.406 8.915 10.928 11.204]
	γ_{teo}	[0 0.100 0.750 4.000 5.282 5.540]

Tabela A3 - Dados de plotagem e teóricos da placa VA1 - Zhang e Hsu [14].

Dados de plotagem: VA1 Zhang e Hsu [13]	ε_{plot}	[0; -0.005; -0.16; -0.2; -0.235; -0.4; -0.65; -0.69; -0.9; -1.1; -1.36; -1.49; -1.53; -1.75; -1.86; -1.98; -2.06; -2.16; -2.46; -2.65; -4.29; -4.77]
	σ_{D_plot}	[0; -4.4; -7.25; -10.5; -11.8; -12.3; -12; -11.6; -12.25; -12.1; -12.65; -12.55; -12.8; -12.35; -11.35; -11.5; -10.6; -11.5; -10.9; -11.1; -9.5; -8.3]
	ε_L_plot	0
	ε_T_plot	0
	f_{sl_plot}	0
	f_{sT_plot}	0
	α_plot	0
	τ_plot	[0;0.75;1.4;2;2.8;3;3.25;3.7;3.9;4.4;5.1;5.6;5.7;5.7;5.8; 5.9;6;6;6.1;6.1;6.15;6.15;6.2;6.15;6.15;6.15; 6.2;6.15;5.9;6.15;6.3;5.7;5.3;4.8]
γ_plot	[0;0;0;0.2;0.4;1;1.75;2.5;2.9;3.3;4.2;5.3;6.3;8.3;10.2;12.4;14.5; 16.5;18.3;20.5;22.5;24.4;26.5;30.3;32.5;33.6;34.5; 36.2;38.3; 40.5;42.9;44.8;47.1;48.9]	
Dados teóricos [13]	τ_{teo}	[0; 4.8; 4.85; 5.3; 5.7; 6]
	γ_{teo}	[0;0.8; 3.5; 10; 30; 40; 50]

Tabela A4 - Dados de plotagem e teóricos da placa VA2 - Zhang e Hsu [14].

Dados de plotagem: VA2 Zhang e Hsu [13]	ε_{plot}	[0; -0.24; -0.61; -0.6; -0.67; -1.24; -1.42; -1.62; -2.36; -2.9; -3.52; -4.325; -4.33]
	σ_{D_plot}	[0; -6; -18; -19; -19.3; -17.75; -17.6; -16.9; -16.6; -16.15; -15.95; -15.9; -14.95]
	ε_L_plot	0
	ε_T_plot	0
	f_{sl_plot}	0
	f_{sT_plot}	0
	α_plot	0
	τ_plot	[0; 2; 2.6; 3.4; 4.5; 5.5; 7.25; 8.9; 9.1; 9.4; 9.4; 9.4; 9.5; 9.6; 9.6; 9.7; 9.7; 9.7; 9.8; 9.8; 9.7; 9.6]
γ_plot	[0; 0.5; 0.75; 1.25; 1.75; 2.4; 3.5; 4.75; 5.7; 7.7; 8.6; 10.6; 12.5; 14.3; 16.7; 18.6; 19.6; 20.8; 21.8; 22.5; 23.7; 24.6]	
Dados teóricos [13]	τ_{teo}	[0;2.5; 4.5; 9; 9.1; 9.2; 9.7; 9.9]
	γ_{teo}	[0;0.5; 1.75; 3.8; 6.8; 10; 20; 25]

Tabela A5 - ($f_{cp} - PL$) Reforço na direção longitudinal - Força de compressão no betão devido aos níveis de pré-esforço instalados.

		Níveis consoante a percentagem de $f_{cm} = f'_c$ [MPa] - (PL)											
		$f_{cm} = f'_c$ [MPa]	Dimensões dos painéis [cm]	A_c [cm ²]	$f_{cp-max}^{ACI} = 45\%f'_c$ [MPa]	f_{cp1}	f_{cp2}	f_{cp3}	f_{cp4}	f_{cp5}	f_{cp6}	f_{cp7}	f_{cp8}
						2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	98.20	139.7*139.7*17.8	2486.66	44.19	2.46	4.91	7.37	9.82	14.73	19.64	29.46	44.19
	VA1	95.10	139.7*139.7*17.8	2486.66	42.80	2.38	4.76	7.13	9.51	14.27	19.02	28.53	42.80
NSC	A2	41.23	140*140*17.8	2492.00	18.55	1.03	2.06	3.09	4.12	6.18	8.25	12.37	18.55
	A4	42.47	140*140*17.8	2492.00	19.11	1.06	2.12	3.19	4.25	6.37	8.49	12.74	19.11

Tabela A6- ($f_{cp} - PL_{PT}$) Reforço na direção longitudinal e transversal - Força de compressão no betão devido aos níveis de pré-esforço instalados.

		Níveis consoante a percentagem de $f_{cm} = f'_c$ [MPa] - (PL_PT)							
		$f_{cp9L} = f_{cp9T}$	$f_{cp10L} = f_{cp10T}$	$f_{cp11L} = f_{cp11T}$	$f_{cp12L} = f_{cp12T}$	$f_{cp13L} = f_{cp13T}$	$f_{cp14L} = f_{cp14T}$	$f_{cp15L} = f_{cp15T}$	$f_{cp16L} = f_{cp16T}$
		2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	1.23	2.46	3.68	4.91	7.37	9.82	14.73	22.10
	VA1	1.19	2.38	3.57	4.76	7.13	9.51	14.27	21.40
NSC	A2	0.52	1.03	1.55	2.06	3.09	4.12	6.18	9.28
	A4	0.53	1.06	1.59	2.12	3.19	4.25	6.37	9.56

Tabela A7 - ($F_p - PL$) Reforço na direção longitudinal - Força na armadura de pré-esforço.

		Força na armadura de pré-esforço por nível [KN] - (PL)							
		F_{P1}	F_{P2}	F_{P3}	F_{P4}	F_{P5}	F_{P6}	F_{P7}	F_{P8}
		2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	610.48	1220.95	1831.43	2441.90	3662.85	4883.80	7325.70	10988.55
	VA1	591.20	1182.41	1773.61	2364.81	3547.22	4729.63	7094.44	10641.66
NSC	A2	256.86	513.73	770.59	1027.45	1541.18	2054.90	3082.35	4623.53
	A4	264.59	529.18	793.76	1058.35	1587.53	2116.70	3175.06	4762.59

Tabela A8 - ($F_p - PL_{PT}$) Reforço na direção longitudinal e transversal- Força na armadura de pré-esforço.

		Força na armadura de pré-esforço por nível [KN] - (PL_PT)							
		$F_{P9L} = F_{P9T}$	$F_{P10L} = F_{P10T}$	$F_{P11L} = F_{P11T}$	$F_{P12L} = F_{P12T}$	$F_{P13L} = F_{P13T}$	$F_{P14L} = F_{P14T}$	$F_{P15L} = F_{P15T}$	$F_{P16L} = F_{P16T}$
		2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	305.24	610.48	915.71	1220.95	1831.43	2441.90	3662.85	5494.28
	VA1	295.60	591.20	886.81	1182.41	1773.61	2364.81	3547.22	5320.83
NSC	A2	128.43	256.86	385.29	513.73	770.59	1027.45	1541.18	2311.77
	A4	132.29	264.59	396.88	529.18	793.76	1058.35	1587.53	2381.29

Tabela A9 - ($A_{sp} - PL$) Reforço na direção longitudinal - Área de armadura de pré-esforço.

		Área de armadura de pré-esforço por nível de pré-esforço [cm ²] - (PL)									
		f_{pu} [MPa]	f_{pi-max}^{ACI} [MPa]	A_{sp1}	A_{sp2}	A_{sp3}	A_{sp4}	A_{sp5}	A_{sp6}	A_{sp7}	A_{sp8}
				2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	1860	1302	4.69	9.38	14.07	18.75	28.13	37.51	56.26	84.40
	VA1			4.54	9.08	13.62	18.16	27.24	36.33	54.49	81.73
NSC	A2			1.97	3.95	5.92	7.89	11.84	15.78	23.67	35.51
	A4			2.03	4.06	6.10	8.13	12.19	16.26	24.39	36.58

Tabela A10 - ($A_{sp} - PL_{PT}$) Reforço na direção longitudinal e transversal - Área de armadura de pré-esforço

		Área de armadura de pré-esforço por nível de pré-esforço [cm ²] - (PL _{PT})									
		f_{pu} [MPa]	f_{pi-max}^{ACI} [MPa]	$A_{sp9L} = A_{sp9T}$	$A_{sp10L} = A_{sp10T}$	$A_{sp11L} = A_{sp11T}$	$A_{sp12L} = A_{sp12T}$	$A_{sp13L} = A_{sp13T}$	$A_{sp14L} = A_{sp14T}$	$A_{sp15L} = A_{sp15T}$	$A_{sp16L} = A_{sp16T}$
				2.5%	5%	7.5%	10%	15%	20%	30%	45%
HSC	VA2	1860	1302	2.34	4.69	7.03	9.38	14.07	18.75	28.13	42.20
	VA1			2.27	4.54	6.81	9.08	13.62	18.16	27.24	40.87
NSC	A2			0.99	1.97	2.96	3.95	5.92	7.89	11.84	17.76
	A4			1.02	2.03	3.05	4.06	6.10	8.13	12.19	18.29

Tabela A 11 - Dados de plotagem e teóricos da placa TA-1 - Laskar et al. [24].

Dados de plotagem: TA-1	ε_{plot}	[-0.0010; -0.0012; -0.0013; -0.0015; -0.0022; -0.0025; -0.0025; -0.0026; -0.0029; -0.0029; -0.0027; -0.0031; -0.0047; -0.0067; -0.0131; -0.0277] *10 ²
	σ_D_{plot}	[-4.1482; -5.5176; -6.0191; -6.4136; -6.9829; -8.3016; -8.7438; -9.1762; -10.1611; -11.0747; -11.4474; -11.6959; -11.6320; -11.5432; -10.4593; -7.5918]
	τ_{plot}	[2.1392; 3.8245; 4.5290; 4.7091; 4.8750; 5.3147; 5.5032; 5.7459; 5.9268; 6.0273; 5.9896; 5.9544; 5.3937; 3.9335; 3.2286; 3.2839; 3.1909; 3.1331; 3.1808; 3.0552; 3.0426; 2.9848; 2.9389; 2.9690; 2.8911]
	γ_{plot}	[0.0001; 0.0004; 0.0012; 0.0014; 0.0023; 0.0041; 0.0061; 0.0080; 0.0103; 0.0122; 0.0142; 0.0158; 0.0172; 0.0201; 0.0227; 0.0243; 0.0263; 0.0284; 0.0305; 0.0325; 0.0346; 0.0367; 0.0388; 0.0408; 0.0421] *10 ³
	ε_D_{plot}	[0; 0.0000784; 0.0000942; 0.0001268; 0.0001491; 0.0001505; 0.0001562; 0.0001960; 0.0001868; 0.0001881; 0.0001758; 0.0002191; 0.0003704; 0.0005700; 0.0012108; 0.0026594] *10 ³
	$\tau_{\varepsilon_D}_{plot}$	[0; 2.114130; 2.771418; 3.801905; 4.500333; 4.685142; 4.846031; 5.284411; 5.474840; 5.712875; 5.888160; 5.994189; 5.96436; 5.922773; 5.361618; 3.894143]
	ε_R_{plot}	[0; 0.0001; 0.0003; 0.0011; 0.0013; 0.0022; 0.0039; 0.0059; 0.0078; 0.01010.0121; 0.0139; 0.0153; 0.0160; 0.0175; 0.0180; 0.0190; 0.0203; 0.0214; 0.0227; 0.0238; 0.0250; 0.0263; 0.0275; 0.0288; 0.0298] *10 ²
	$\tau_{\varepsilon_R}_{plot}$	[0; 3.5387; 3.8179; 4.5157; 4.7062; 4.8600; 5.2755; 5.4908; 5.7001; 5.9109; 5.9722; 6.0028; 5.8956; 5.3594; 3.9011; 3.2271; 3.2424; 3.1658; 3.1045; 3.1811; 2.9973; 2.9820; 2.9513; 2.9207; 2.9360; 2.8697]
Dados de plotagem: SMM-PC TA-1	τ_{smm}_{plot}	[0; 3.2702; 5.0844; 5.0654; 5.1954; 5.3201; 5.4253; 5.5694; 5.7192; 5.8395; 5.9670; 5.9480; 5.8477; 5.6583; 5.4945; 5.3096; 5.1711; 4.9710; 4.7361; 4.3687; 3.8454; 3.2371]
	γ_{smm}_{plot}	[0; 0.000213; 0.000412; 0.001822; 0.002906; 0.004623; 0.006476; 0.008239; 0.010478; 0.012203; 0.014057; 0.015828; 0.017076; 0.019342; 0.021339; 0.023450; 0.024857; 0.026567; 0.028452; 0.030830; 0.033630; 0.036262] *10 ³
	ε_{smm}_{plot}	[0; 0.0008; 0.0012; 0.0016; 0.0022; 0.0028; 0.0033; 0.0038; 0.0041; 0.0045; 0.0050; 0.0057; 0.0074; 0.0103; 0.0170; 0.0239; 0.0309] *10 ²
	$\sigma_D_{smm}_{plot}$	[0; 2.8904; 4.4948; 5.6385; 7.6295; 9.8362; 10.4174; 10.9034; 11.1751; 11.4109; 11.5682; 11.6182; 11.4824; 11.1322; 10.4317; 9.7759; 9.0786]

Tabela A 12 - Dados de plotagem e teóricos da placa TA-2 - Laskar et al. [24].

Dados de plotagem: TA-2	ε_{plot}	[-0.0010;-0.0012;-0.0013;-0.0021;-0.0022;-0.0026;-0.0029;-0.0031;-0.0035;-0.0046;-0.0048;-0.0045;-0.0047;-0.0060;-0.0086;-0.0103;-0.0129;-0.0179;-0.0242;-0.0325] *10 ²
	$\sigma_{D_{plot}}$	[-4.1418;-4.5360;-5.2658;-5.5736;-7.3840;-8.5989;-9.6166;-10.0318;-10.85241;-11.1497;-11.8588;-11.9832;-12.5882;-12.2574;-11.6180;-10.9996;-10.1926;-9.9968;-8.4298;-7.2064]
	τ_{plot}	[2.1175;2.8088;3.5059;4.2194;4.6684;5.1050;5.2740;5.6492;6.1120;5.7295;6.1425;6.4402;6.2545;5.9469;5.6282;5.2194;5.1252;4.3254;3.6953;3.6776;3.7707;3.8540;3.9082;3.5653;3.7175;3.6732;3.6859;3.6235;3.5485;3.3755;3.4021;3.5485;3.4420;3.4376]
	γ_{plot}	[0.0001;0.0001;0.0002;0.0005;0.0010;0.0015;0.0020;0.0025;0.0041;0.0045;0.0060;0.0075;0.0090;0.0100;0.0104;0.0111;0.0126;0.0136;0.0146;0.0160;0.0176;0.0190;0.0206;0.0220;0.0235;0.0250;0.0265;0.0281;0.0295;0.0311;0.0326;0.0338;0.0356;0.0371] *10 ³
	$\varepsilon_{D_{plot}}$	[0;0.000037;0.000051;0.000072;0.000107;0.000127;0.0001620.000187;0.000219;0.000244;0.000362;0.000358;0.000374;0.000499;0.000753;0.000922;0.001185;0.001682;0.002299] *10 ³
	$\tau_{\varepsilon_{D_{plot}}}$	[0;1.415308;2.067875;2.746328;3.468090;4.200749;4.611325;5.074593;5.229016;5.619981;6.089312;5.721521;6.390652;6.214206;6.007909;5.601106;5.202585;5.091572;4.297859]
	$\varepsilon_{R_{plot}}$	[0;0.0001;0.0001;0.0002;0.0005;0.0009;0.0013;0.0019;0.0023;0.0037;0.0042;0.0057;0.0072;0.0086;0.0093;0.0096;0.0099;0.0109;0.0113;0.0115;0.0122;0.0130;0.0137;0.0144;0.0151;0.0158;0.0166;0.0173;0.0188;0.0197;0.0207;0.0216;0.0226;0.0237] *10 ²
	$\tau_{\varepsilon_{R_{plot}}}$	[0;2.1009;2.7908;3.4846;4.1966;4.6258;5.0847;5.2407;5.6231;6.0874;5.7285;6.1002;6.4007;6.2407;5.9130;5.6008;5.1989;5.1053;4.3191;3.6979;3.6471;3.7525;3.7681;3.8812;3.8422;3.6890;3.6657;3.6524;3.5241;3.3575;3.3963;3.5310;3.4376;3.4271]
Dados de plotagem: SMM-PC TA-2	$\tau_{smm_{plot}}$	[0;1.626151;2.918397;3.929295;4.842540;5.356600;5.335595;5.566968;6.002623;6.117461;6.170340;6.345399;6.650704;6.761720;6.581311;6.220503;5.929069;5.521788;4.681786;4.000481;3.030045]
	$\gamma_{smm_{plot}}$	[0;0.000088;0.000169;0.000230;0.000286;0.000322;0.001252;0.001836;0.002798;0.003224;0.003715;0.005338;0.007714;0.009074;0.010378;0.012209;0.013421;0.015116;0.017992;0.020085;0.022784] *10 ³
	$\varepsilon_{smm_{plot}}$	[0;0.0010;0.0013;0.0020;0.0023;0.0026;0.0031;0.0035;0.0039;0.0047;0.0055;0.0060;0.0086;0.0129;0.0179;0.0242;0.0361] *10 ²
	$\sigma_{D_{smm_{plot}}}$	[0;4.1418;5.6373;8.0975;9.3720;10.2419;11.3867;12.1223;12.6889;13.2288;13.4567;13.4074;13.0914;12.5464;11.7829;10.8482;8.8061]

Tabela A 13 - Dados de plotagem e teóricos da placa TA-3 - Laskar et al. [24].

Dados de plotagem: TA-3	ε_{plot}	[-0.0010;-0.0014;-0.0014;-0.0018;-0.0023;-0.0029;-0.0033;-0.0037;-0.0048;-0.0054;-0.0076;-0.0121;-0.0177;-0.0228;-0.0281;-0.0331] *10 ²
	σ_{D_plot}	[-4.2131;-5.5611;-6.0516;-6.4243;-7.2004;-8.2092;-10.0650;-11.4963;-12.8093;-13.5835;-14.4936;-13.7248;-12.3953;-11.7584;-10.6222;-10.0596]
	τ_{plot}	[3.3760;4.0518;4.7057;5.4057;6.0804;6.6854;7.0458;7.4899;7.0651;6.4215;6.0611;5.4754;5.2051;5.0506;4.9412;4.9283;4.9090;4.9605;4.8442;4.6897;4.5160;4.4160;4.3293;4.1262;4.1198;4.1133]
	γ_{plot}	[0.0002;0.0004;0.0005;0.0009;0.0016;0.0024;0.0029;0.0040;0.0050;0.0060;0.0070;0.0080;0.0090;0.0110;0.0130;0.0150;0.0170;0.0191;0.0211;0.0235;0.0255;0.0276;0.0295;0.0316;0.0337;0.0346] *10 ³
	ε_{D_plot}	[0;0.000036;0.000043;0.000081;0.000104;0.000134;0.000158;0.000183;0.000224;0.000272;0.000381;0.000440;0.000654;0.001115;0.001663;0.002174;0.002712] *10 ³
	$\tau_{\varepsilon_D_plot}$	[0;0.637030;1.340261;2.002734;2.692970;3.383610;4.024838;4.703997;5.394183;6.026906;6.659174;7.044227;7.475283;7.061014;6.376438;6.044308;5.481155]
	ε_{R_plot}	[0;0.0001;0.0001;0.0003;0.0007;0.0013;0.0021;0.0026;0.0034;0.0039;0.0044;0.0049;0.0054;0.0058;0.0068;0.0078;0.0088;0.0098;0.0108;0.0119;0.0133;0.0144;0.0154;0.0165;0.0179;0.0196;0.0204] *10 ²
	$\tau_{\varepsilon_R_plot}$	[0;2.0250;3.3699;4.6995;5.3724;6.0519;6.6643;7.0389;7.4450;7.0577;6.3941;6.0325;5.4796;5.1687;5.0470;4.9186;4.8982;4.9400;4.9139;4.8656;4.6720;4.5127;4.3867;4.3059;4.1058;4.1264;4.1003]
Dados de plotagem: SMM-PC TA-3	τ_{smm_plot}	[0;1.739978;3.729814;5.049204;5.508944;5.792724;5.857628;6.125467;6.492150;6.772267;7.142975;7.239037;7.034330;6.597253;5.928494;5.329006;5.000454;4.531830;3.879049]
	γ_{smm_plot}	[0;0.000064;0.000177;0.000238;0.000324;0.000548;0.001103;0.001504;0.002043;0.002537;0.003308;0.003820;0.004885;0.007330;0.010956;0.013696;0.015120;0.016267;0.018001] *10 ³
	ε_{smm_plot}	[0;0.0008;0.0016;0.0021;0.0028;0.0035;0.0045;0.0054;0.0060;0.0066;0.0090;0.0202;0.0261;0.0359] *10 ²
	$\sigma_{D_smm_plot}$	[0;3.3713;6.6653;8.5367;10.8498;12.5103;13.5895;13.9645;14.0585;14.0183;13.7209;12.4170;11.6742;10.3590]

Tabela A 14 - Dados de plotagem e teóricos da placa TA-4 - Laskar et al. [24].

Dados de plotagem: TA-4	ε_{plot}	[-0.0007;-0.0010;-0.0013;-0.0015;-0.0017;-0.0022;-0.0024;-0.0023;-0.0026;-0.0032;-0.0039;-0.0040;-0.0044;-0.0059;-0.0084;-0.0115;-0.0164;-0.0203;-0.0243] *10 ²
	$\sigma_{D_{plot}}$	[-2.8774;-3.8303;-4.1556;-4.4942;-4.8736;-6.2455;-7.1287;-7.7612;-8.5454;-9.6454;-10.2800;-10.9692;-11.3173;-11.0375;-11.0102;-10.6830;-10.2394;-9.9595;-9.8768]
	τ_{plot}	[2.1019;2.7690;3.4809;3.6555;3.8692;3.9884;4.1872;4.5389;5.0417;5.3597;5.4044;5.5162;5.5410;5.6330;5.6056;5.6338;5.7034;5.7133;5.6115;5.6139;5.4400;5.2140;5.0745;5.0348;5.0050]
	γ_{plot}	[0.0001;0.0002;0.0003;0.0005;0.0004;0.0007;0.0012;0.0018;0.0025;0.0035;0.0045;0.0055;0.0065;0.0075;0.0085;0.0096;0.0105;0.0110;0.0120;0.0131;0.0140;0.0150;0.0160;0.0170;0.0175] *10 ³
	$\varepsilon_{D_{plot}}$	[0;0.000059;0.000079;0.000105*0.000146;0.000147;0.000149;0.000164;0.000156;0.000190;0.000250;0.000318;0.000379;0.000407;0.000389;0.000328;0.000335;0.000361;0.000519;0.000772;0.001069;0.001560;0.001947;0.002339;0.002489] *10 ³
	$\tau_{\varepsilon_{D_{plot}}}$	[0;1.408049;2.096806;2.761763;3.477930;3.657655;3.846199;3.980044;4.172897;4.516183;5.033803;5.304598;5.373346;5.488975;5.606910;5.565289;5.680918;5.699417;5.597666;5.590727;5.429512;5.195564;5.052322;5.004663;4.990432]
	$\varepsilon_{R_{plot}}$	[0;0.0001;0.0001;0.0001;0.0002;0.0004;0.0006;0.0011;0.0015;0.0023;0.0032;0.0042;0.0051;0.0061;0.0071;0.0082;0.0092;0.0102;0.0107;0.0115;0.0123;0.0130;0.0135;0.0141;0.0147;0.0150] *10 ²
	$\tau_{\varepsilon_{R_{plot}}}$	[0;2.0824;2.7498;3.4447;3.8297;3.6115;3.9606;4.1351;4.4872;4.9972;5.2902;5.3432;5.4585;5.5032;5.5719;5.5379;5.5847;5.6471;5.6566;5.5651;5.5457;5.3864;5.1530;5.0149;4.9717;4.9697]
Dados de plotagem: SMM-PC TA-4	$\tau_{smm_{plot}}$	[0;1.307595;2.607966;3.641807;3.786118;3.988682;4.101521;4.399047;4.725864;4.882710;5.012339;5.122333;5.227494;5.333774;5.474502;5.636675;5.707331;5.858899;5.861655;5.662335;5.577385;5.537570;5.383188;5.204461;4.938100;4.660275]
	$\gamma_{smm_{plot}}$	[0;0.000059;0.000134;0.000244;0.000473;0.000735;0.001367;0.002151;0.002882;0.003708;0.004855;0.005704;0.006494;0.007431;0.007945;0.008677;0.009538;0.010564;0.010568;0.012064;0.012644;0.013189;0.013542;0.014596;0.016134;0.017715] *10 ³
	$\varepsilon_{smm_{plot}}$	[0;0.0007;0.0010;0.0020;0.0025;0.0030;0.0036;0.0043;0.0049;0.0053;0.0105;0.0110;0.0120;0.0161;0.0213;0.0258] *10 ²
	$\sigma_{D_{smm_{plot}}}$	[0;2.8774;3.8303;7.4406;8.6508;9.6341;10.4778;11.2447;11.5669;11.6282;11.1220;11.0365;10.7581;10.3090;9.7578;9.2670]

Tabela A 15 - Dados de plotagem e teóricos da placa TA-5 - Laskar et al. [24].

Dados de plotagem: TA-5	ε_{plot}	[-0.0005;-0.0007;-0.0013;-0.0007;-0.0014;-0.0017;-0.0018;-0.0021;-0.0025;-0.00232;-0.0020;-0.0019;-0.0031;-0.0053;-0.0117;-0.0138;-0.0164;-0.0248;-0.0333] *10 ²
	σ_D_{plot}	[-2.0743;-2.4236;-3.4245;-3.5880;-4.3917;-5.1051;-6.3701;-7.2823;-8.0491;-8.4663;-8.8341;-9.0645;-9.3766;-9.3134;-8.9090;-8.7938;-8.7715;-8.4009;-8.1730]
	τ_{plot}	[1.7113;2.8281;3.1311;3.4866;3.8684;4.2211;4.3975;4.5343;4.5702;4.6321;4.7362;4.7264;4.7948;4.7851;4.5603;4.5179;4.4919;4.3187;4.2079;4.0112;3.9233;3.7930;3.5291;3.2131]
	γ_{plot}	[0.0001;0.0002;0.0004;0.0010;0.0020;0.0029;0.0040;0.0050;0.0060;0.0070;0.0080;0.0090;0.0105;0.0120;0.0131;0.0140;0.0151;0.0176;0.0195;0.0215;0.0235;0.0276;0.0296;0.0306] *10 ³
	ε_D_{plot}	[0;0.000012;0.000030;0.000065;0.000089;0.000099;0.000116;0.000135;0.000165;0.000199;0.000181;0.000163;0.000147;0.000141;0.000098;0.000260;0.000476;0.001115;0.001327;0.001581;0.002414] *10 ³
	$\tau_{\varepsilon_D}_{plot}$	[0;0.365346;1.010266;1.703109;2.429199;2.796658;3.115346;3.474420;3.815117;4.194067;4.369897;4.498361;4.578853;4.678480;4.671198;4.788921;4.753095;4.550107;4.483645;4.465054;4.306580]
	ε_R_{plot}	[0;0.0001;0.0003;0.0009;0.0018;0.0028;0.0038;0.0049;0.0058;0.0069;0.0079;0.0089;0.0103;0.0116;0.0119;0.0127;0.0135;0.0151;0.0162;0.0174;0.0186;0.0197;0.0208;0.0218;0.0222] *10 ²
	$\tau_{\varepsilon_R}_{plot}$	[0;2.7819;3.0835;3.4723;3.8085;4.1552;4.3233;4.4490;4.4910;4.5751;4.6696;4.6984;4.7327;4.7117;4.5330;4.4805;4.4280;4.2599;4.1821;3.9552;3.8606;3.8017;3.7451;3.4509;3.1672]
Dados de plotagem: SMM-PC TA-5	τ_{smm}_{plot}	[0;1.988305;2.748599;3.509252;3.435904;3.373009;3.743467;4.156094;4.296016;4.440923;4.584589;4.750968;4.950161;4.948201;4.645234;4.454937;4.291455;4.093453;3.767343;3.401383;2.862037]
	γ_{smm}_{plot}	[0;0.000072;0.000136;0.000227;0.000674;0.001227;0.002110;0.003161;0.004413;0.005310;0.006098;0.007382;0.009312;0.009749;0.011971;0.013344;0.013989;0.015405;0.017388;0.019351;0.021708] *10 ³
	ε_{smm}_{plot}	[0;0.0010;0.0015;0.0021;0.0026;0.0030;0.0032;0.0036;0.0041;0.0045;0.0056;0.0090;0.0143;0.0185;0.0196;0.0266;0.0355] *10 ²
	$\sigma_D_{smm}_{plot}$	[0;3.8163;5.6827;7.2782;8.0703;8.6450;9.0112;9.3144;9.6175;9.7311;9.7122;9.4533;9.0933;8.7585;8.5432;7.9269;7.1273]

Tabela A 16 - Dados de plotagem placa PP2 - Marti e Meyboom [23].

Dados de plotagem: PP2	$\sum_{i=1}^7 \tau_i(i, 1)$	[2.54;2.95;3.66;4.16; 4.78;5.14;5.44]
	$\sum_{i=1}^7 \tau_i(i, 2)$	[2.38;2.81;3.50;3.95;4.62;4.76;4.78]
	$\sum_{i=1}^7 \gamma_i$	[0.42;1.47;2.41;3.30;4.98;7.23;9.55]

Tabela A 17 - Dados de plotagem placa PP3 - Marti e Meyboom [23].

Dados de plotagem: PP3	$\sum_{i=1}^{10} \tau_i(i, 1)$	[3.15;3.66;4.02;4.50;4.96;5.17;5.24;5.37;5.46;5.50]
	$\sum_{i=1}^{10} \tau_i(i, 2)$	[3.09;3.25;3.66;4.32;4.69;4.80;4.82;4.80;4.91;4.94]
	$\sum_{i=1}^{10} \gamma_i$	[0.66;1.34;2.11;3.23;4.47;5.73;5.73;6.42;6.42; 7.45;9.11;12.14]

PLACA VA2

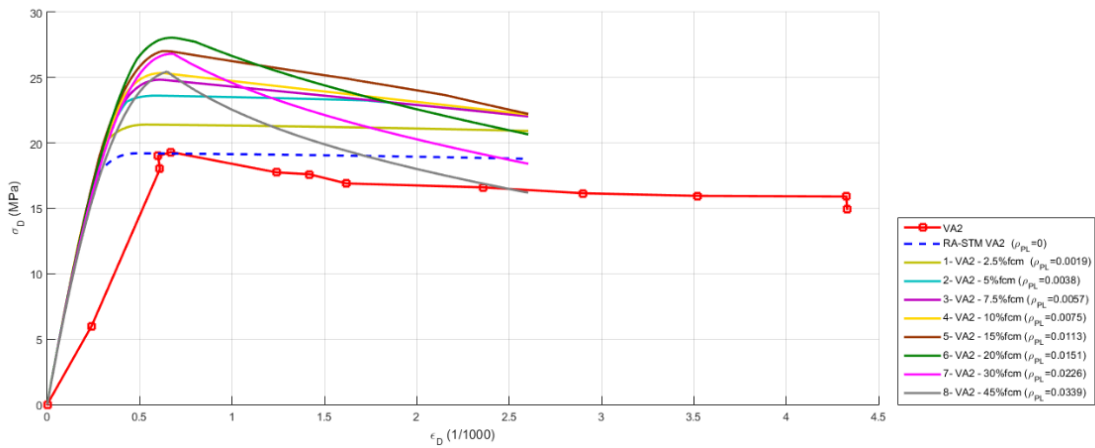


Figura A. 1 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$ (pré-esforço numa direção). Placa VA2 [14]

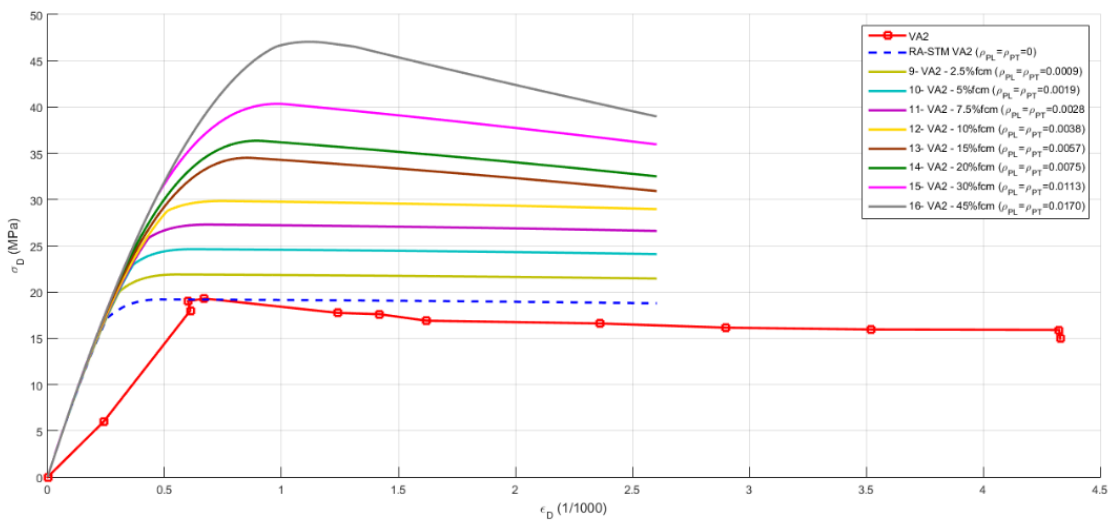


Figura A. 2 - Curvas $\sigma_D - \varepsilon_D$ (pré-esforço nas duas direções). Placa VA2 [14].

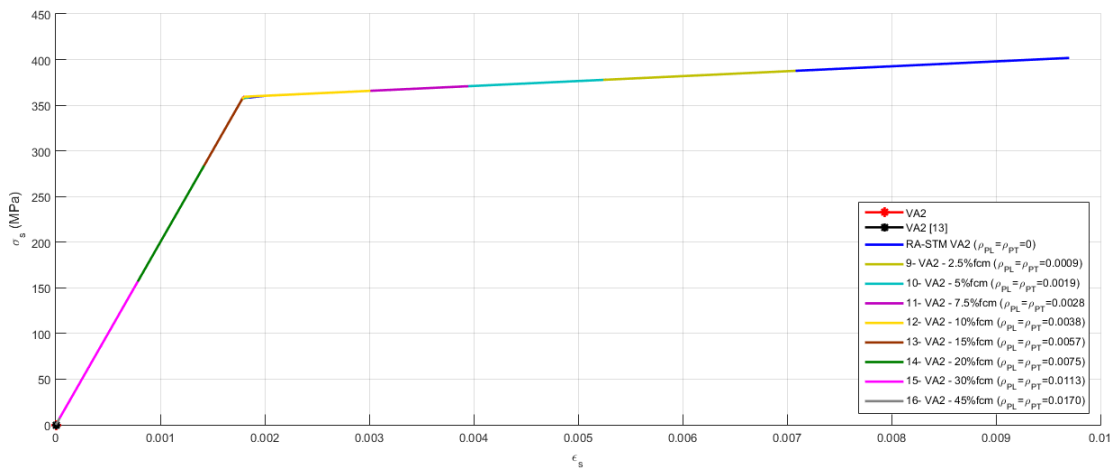


Figura A.3 - Curva $\sigma_s - \varepsilon_s$ (pré-esforço nas duas direções). Placa VA2 [14].

PLACA VA1

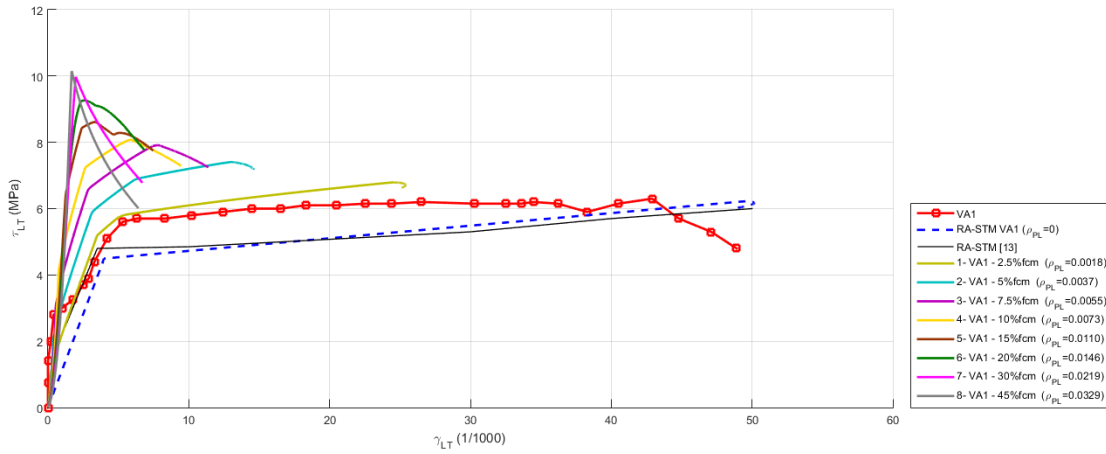


Figura A. 4 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal). Placa VA1 [14].

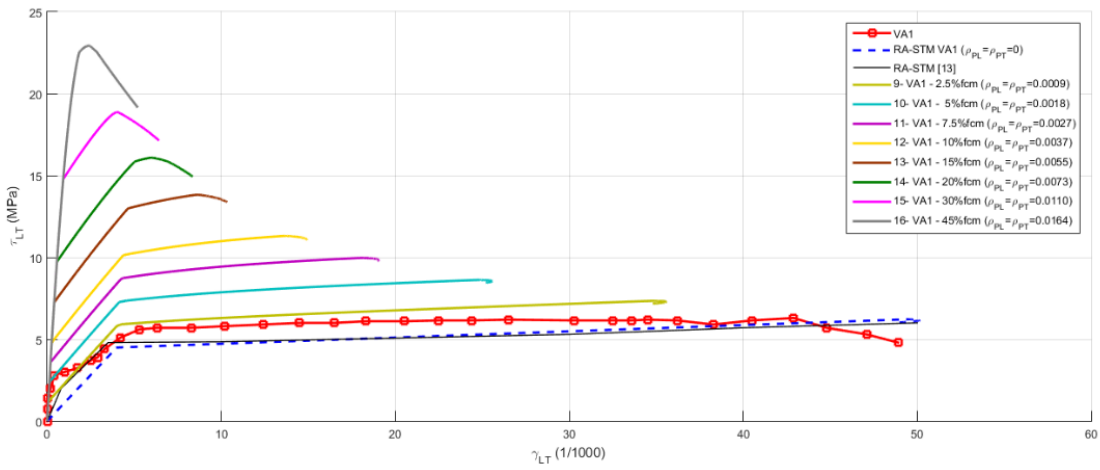


Figura A. 5 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal e transversal). Placa VA1 [14].

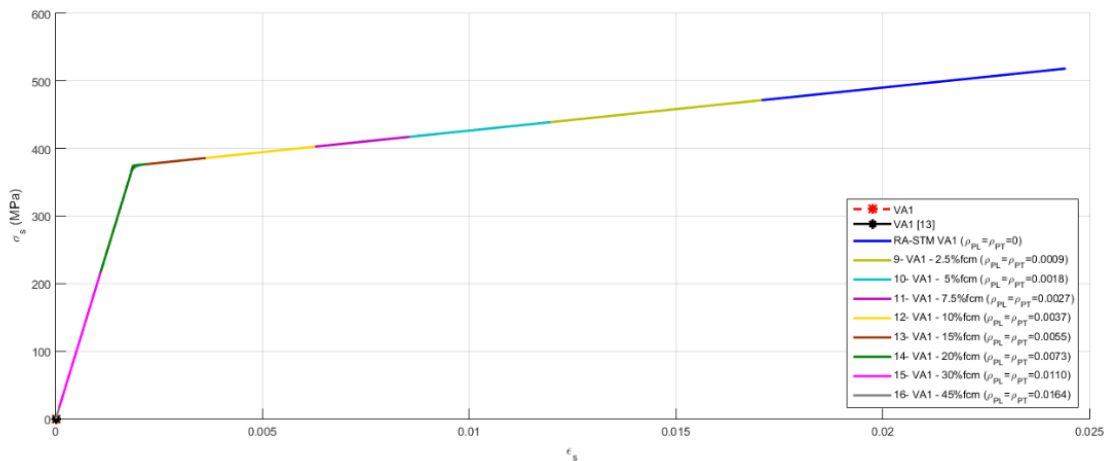


Figura A. 6 - Curva $\sigma_s - \epsilon_s$ (pré-esforço nas duas direções). Placa VA1 [14].

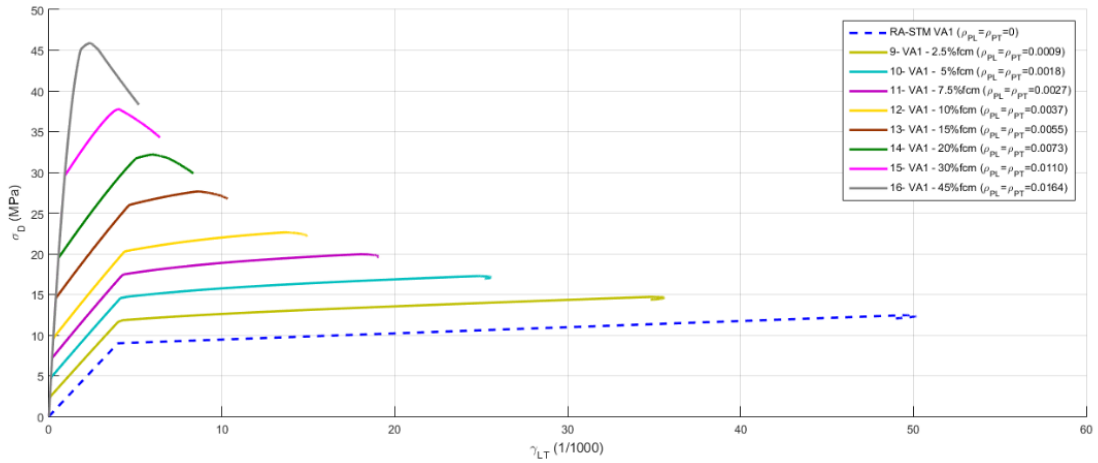


Figura A. 7 - Curvas $\sigma_D - \gamma_{LT}$ (pré-esforço em duas direções). Placa VA1 [14].

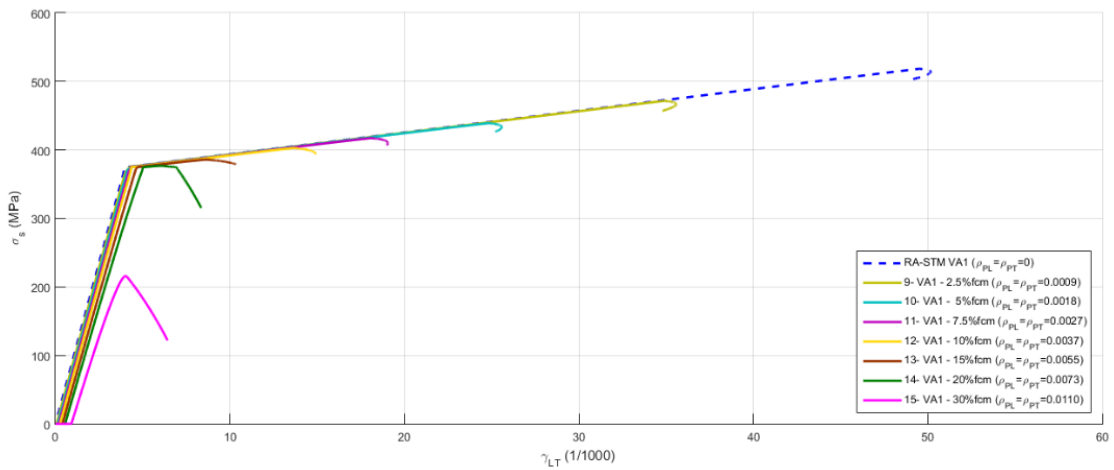


Figura A. 8 - Curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$ para a armadura ordinária longitudinal (pré-esforço nas duas direções). Placa VA1 [14].

PLACA A2

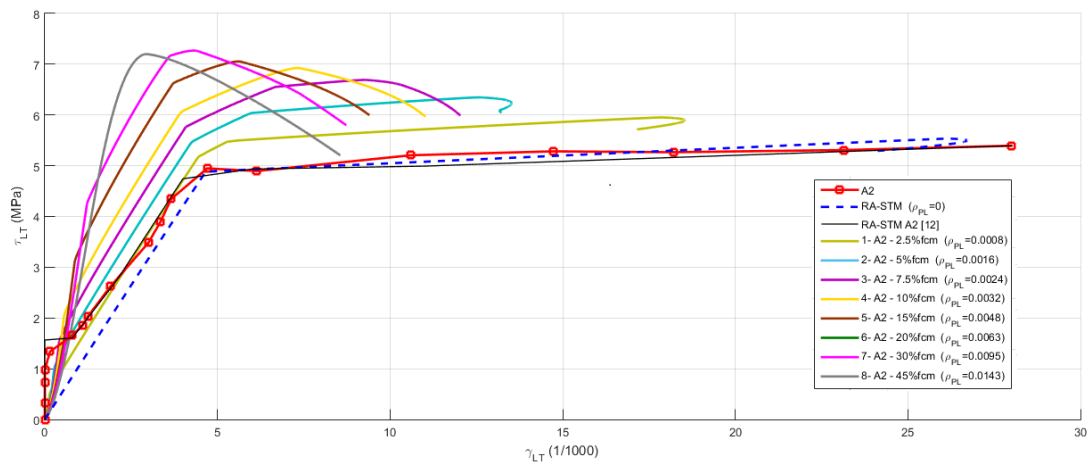


Figura A. 9 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal). Placa A2 [13].

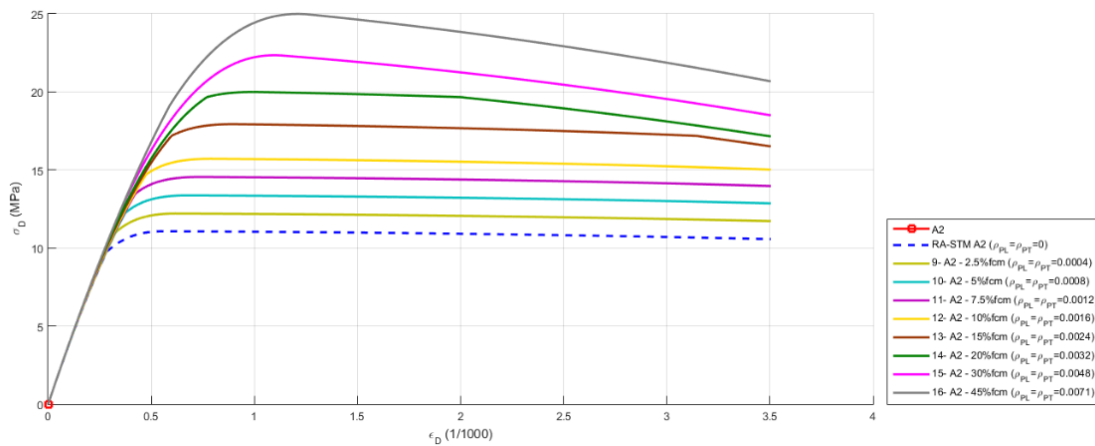


Figura A. 10 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$ (pré-esforço em duas direções). Placa A2 [13].

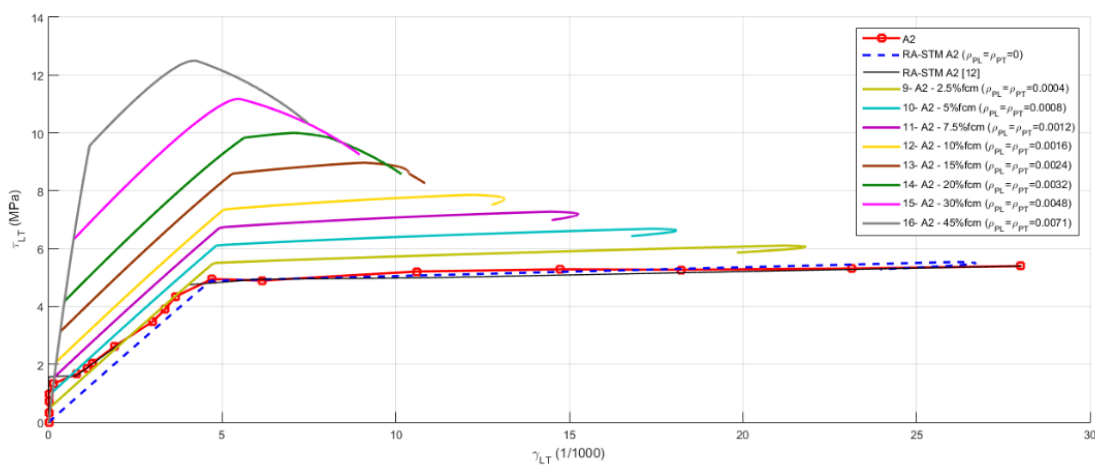


Figura A. 11 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal e transversal). Placa A2 [13].

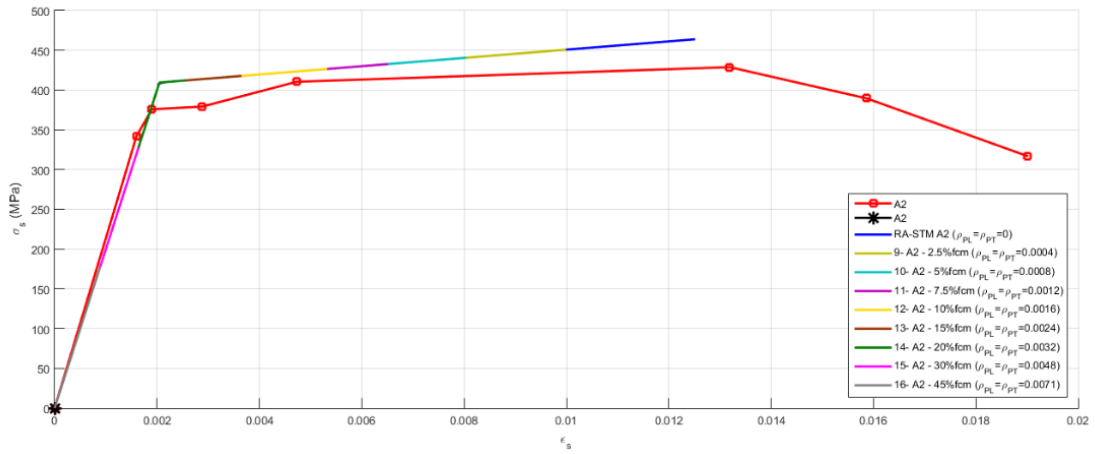


Figura A. 12 - Curva $\sigma_s - \epsilon_s$ (pré-esforço nas duas direções). Placa A2 [13].

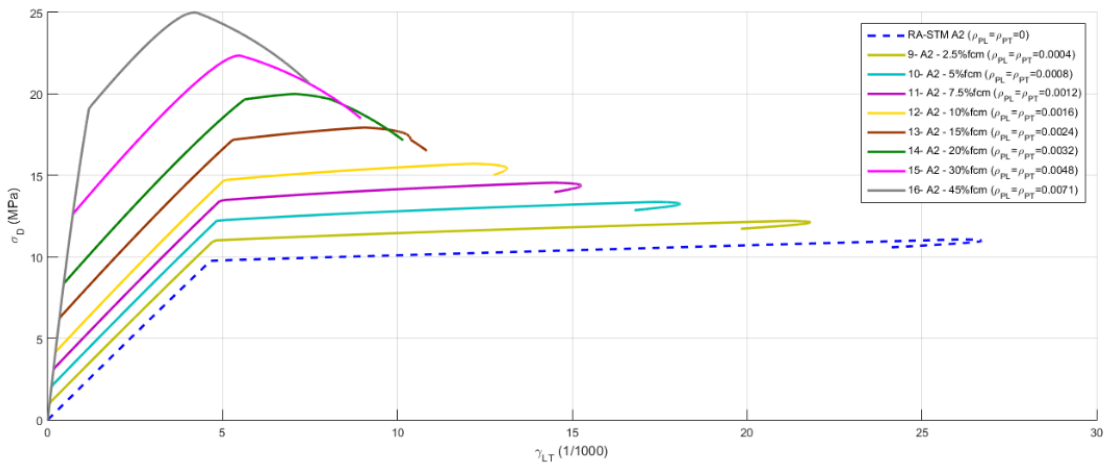


Figura A. 13 - Curvas $\sigma_D - \gamma_{LT}$ (pré-esforço em duas direções). Placa A2 [13].

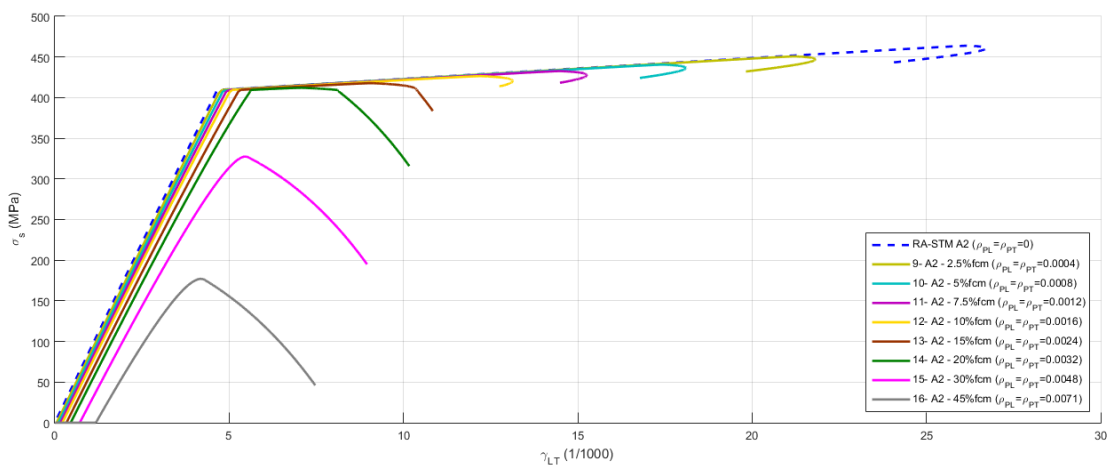


Figura A. 14 - Curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$ para a armadura ordinária longitudinal (pré-esforço nas duas direções). Placa A2 [13].

PLACA A4

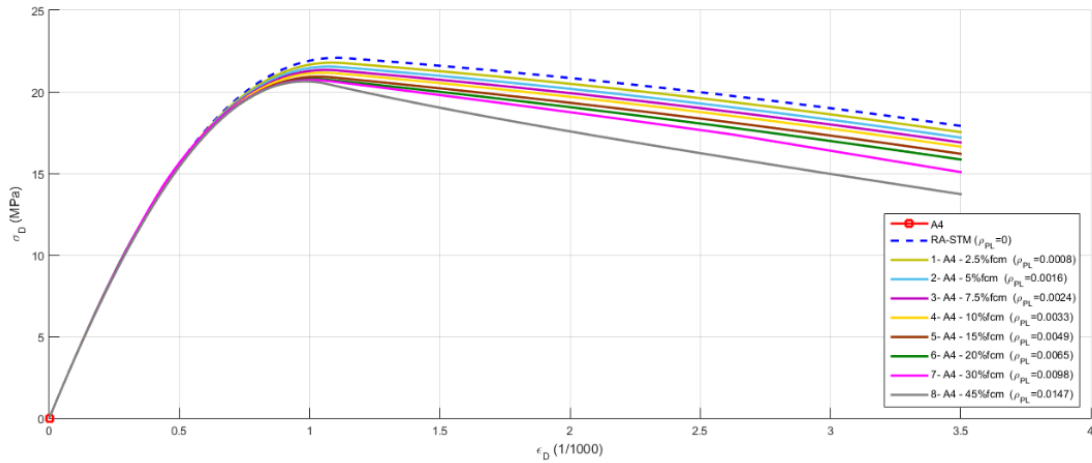


Figura A. 15 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$ (pré-esforço em uma direção). Placa A4 [13].

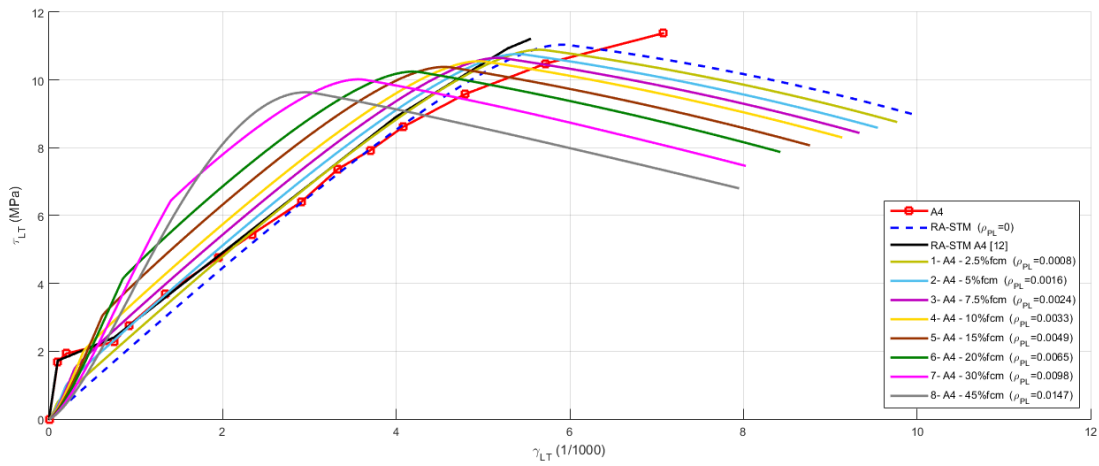


Figura A. 16 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal). Placa A4 [13].

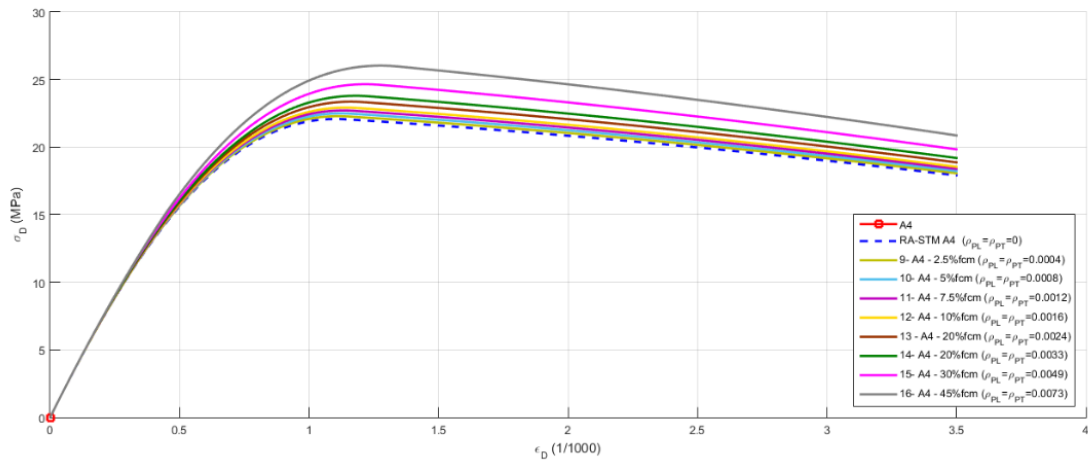


Figura A. 17 - Curvas $\sigma_D - \epsilon_D$ (pré-esforço nas duas direções). Placa A4 [13].

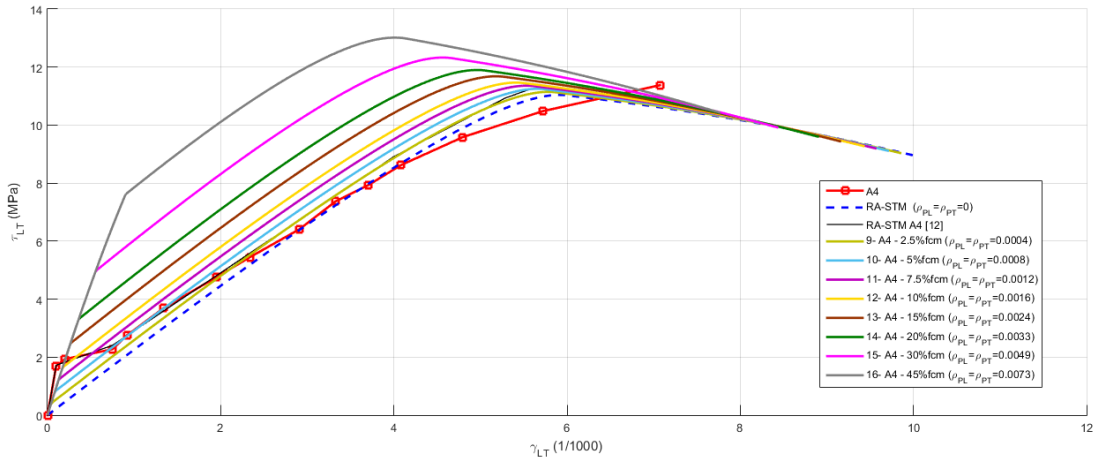


Figura A. 18 - Influência do nível de pré-esforço (direção longitudinal e transversal). Placa A4 [13].

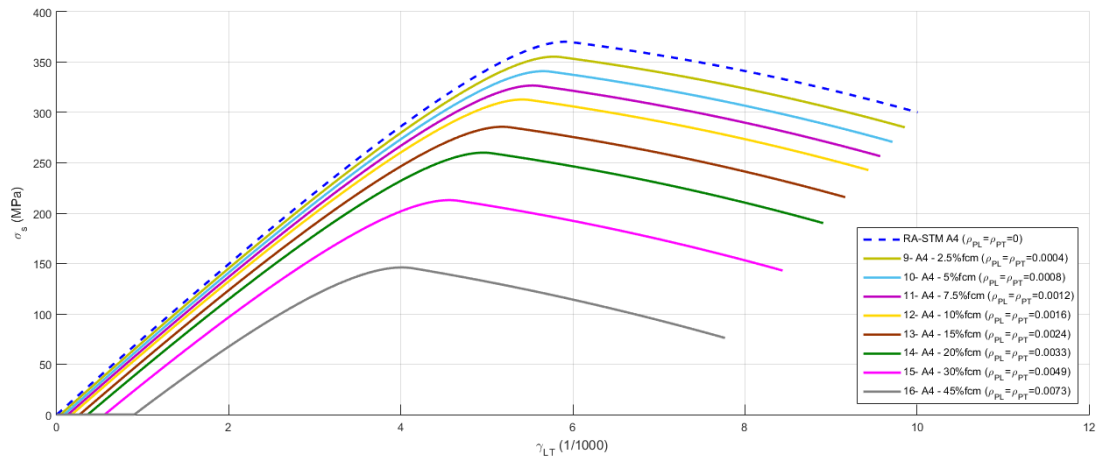


Figura A. 19 - Curvas $\sigma_s - \gamma_{LT}$ para as armaduras ordinárias (longitudinal e transversal) (pré-esforço nas duas direções). Placa A4 [13].

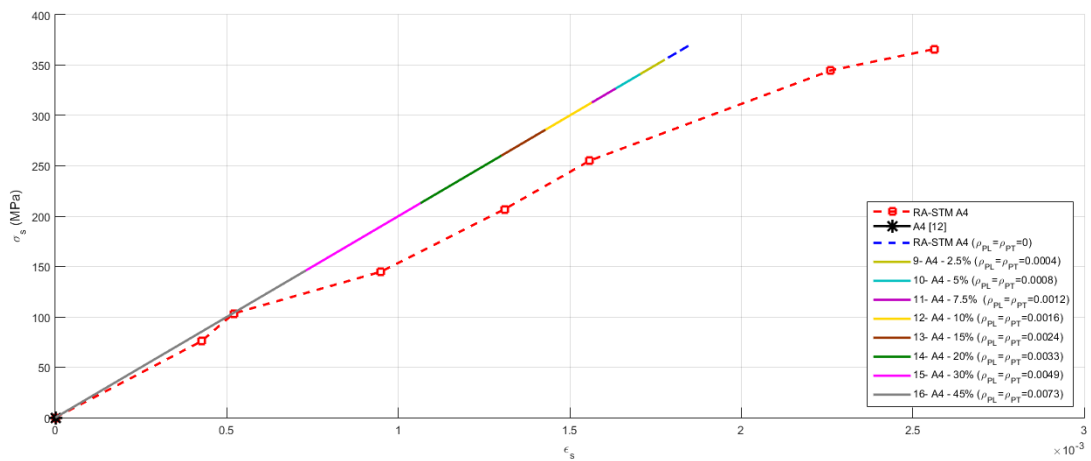


Figura A. 20 - Curva $\sigma_s - \epsilon_s$ (pré-esforço nas duas direções). Placa A4 [13].

```

% Procedimento eficiente para o cálculo do comportamento carga-deformação de
% placas de betão pré-esforçado utilizando o RA-STM

%Início
clear all; clc;

%Dados de entrada e escolha da placa
DADOS_INICIAIS;

tic;
%Cálculo da estimativa inicial (MCTM)
alfaD1 = (lsqnonlin(@(alfaD) MCTM_PLACA(alfaD),0.01,[],0))*180/pi;

%Vetores finais e solução
COMP_PLACA;

%Plotagem
toc; PLOT_PLACA;

```

```

function DADOS_INICIAIS

global INDD

disp('Selecione os dados iniciais');
disp(' ');
disp('1 - VA2 - HSC: fcm= 98.2 MPa - Zhang e Hsu (1998)');
disp('2 - A4 - NSC: fcm= 42.47 MPa - Pang e Hsu (1995)');
disp('3 - VA1 - HSC: fcm= 95.1 MPa - Zhang e Hsu (1998)');
disp('4 - A2 - NSC: fcm= 41.23 MPa - Pang e Hsu (1995)');
disp('5 - TA-1 - NSC: fcm=41.47 MPa - Laskar, A. et al. (2007)');
disp('6 - TA-2 - NSC: fcm=41.33 MPa - Laskar, A. et al. (2007)');
disp('7 - TA-3 - NSC: fcm=42.21 MPa - Laskar, A. et al. (2007)');
disp('8 - TA-4 - NSC: fcm=42.54 MPa - Laskar, A. et al. (2007)');
disp('9 - TA-5 - NSC: fcm=41.08 MPa - Laskar, A. et al. (2007)');
disp('10 - PP2 - NSC: fcm=28.10 MPa - Marti e Meyboom (1992)');
disp('11 - PP3 - NSC: fcm=27.70 MPa - Marti e Meyboom (1992)');
disp(' ');
disp('0 - Sair');
disp(' ');
INDD = input('Escolha uma opção: ');

if INDD > 0
    switch INDD
        case 1
            VA2;
        case 2
            A4;
        case 3
            VA1;
        case 4
            A2;
        case 5
            TA_1;
        case 6
            TA_2;
        case 7
            TA_3;
        case 8
            TA_4;
        case 9
            TA_5;
        case 10
            PP2;
        case 11
            PP3;
    end
end
end

```

```

%Sub-rotina da placa VA1, estudado por Zhang e Hsu (1998)

global a b c d e f g m
global AsL AsT ApsT ApsL Aps Ac roL roT roPL roPT ElpsL ElpsT EpsL EpsT Es Ec
global ePiL ePiT eLiL eLiT edecL edecT yL yT dET dEL zL zT
global fp01 fpu fpiL fpiT fLy fTy fcm e0 tal sigL sigT eLy eTy sigl mLT mL mT
global e_plot sigmaD_plot eL_plot eT_plot fL_plot fT_plot
global tal_plot gama_plot tal_Teo gama_Teo

%Dados iniciais

%Array das áreas

A= zeros(2,1,17);

%Placa com pré-esforço só na %Placa com pré-esforço em ambas
longitudinal direções

A(:,:,1)=[0;4.54]; A(:,:,9)=[2.27;2.27];
A(:,:,2)=[0;9.08]; A(:,:,10)=[4.54;4.54];
A(:,:,3)=[0;13.62]; A(:,:,11)=[6.81;6.81];
A(:,:,4)=[0;18.16]; A(:,:,12)=[9.08;9.08];
A(:,:,5)=[0;27.24]; A(:,:,13)=[13.62;13.62];
A(:,:,6)=[0;36.33]; A(:,:,14)=[18.16;18.16];
A(:,:,7)=[0;54.49]; A(:,:,15)=[27.24;27.24];
A(:,:,8)=[0;81.73]; A(:,:,16)=[40.87;40.87];

%Placa sem pré-esforço

A(:,:,17)=[0;0];

%Array das tensões nos aços

B= zeros(2,1,3);
B(:,:,1)=[0;1302];
B(:,:,2)=[1302;1302];
B(:,:,3)=[0;0];

%Opção do utilizador

disp(' ');
disp('Selecione o nível de pré-esforço desejado');
disp(' ');
disp('Pré-esforço somente na direção Longitudinal');
disp('1- VA1 - 2.5%fcm roPL = 0.0018');
disp('2- VA1 - 5%fcm roPL = 0.0037');
disp('3- VA1 - 7.5%fcm roPL = 0.0055');
disp('4- VA1 - 10%fcm roPL = 0.0073');
disp('5- VA1 - 15%fcm roPL = 0.0110');
disp('6- VA1 - 20%fcm roPL = 0.0146');
disp('7- VA1 - 30%fcm roPL = 0.0219');
disp('8- VA1 - 45%fcm roPL = 0.0329');
disp(' ');
disp('Pré-esforço nas duas direções: Longitudinal e Transversal');
disp('9- VA1 - 2.5%fcm roPL = roPT = 0.0009');
disp('10- VA1 - 5%fcm roPL = roPT = 0.0018');
disp('11- VA1 - 7.5%fcm roPL = roPT = 0.0027');
disp('12- VA1 - 10%fcm roPL = roPT = 0.0037');
disp('13- VA1 - 15%fcm roPL = roPT = 0.0055');
disp('14- VA1 - 20%fcm roPL = roPT = 0.0073');
disp('15- VA1 - 30%fcm roPL = roPT = 0.0110');
disp('16- VA1 - 45%fcm roPL = roPT = 0.0164');
disp(' ');
disp('Sem pré-esforço');
disp('17- VA1 roPL = roPT =0');

```

```

disp(' ');
disp('18 - Voltar para a escolha das placas');
disp('0 - Sair do programa');
disp(' ');
IND = input('Escolha uma opção: ');

if IND > 0
    switch IND
        case 1
            ApsT = A(1,1,1);
            ApsL = A(2,1,1);
            fpiT = B(1,1,1);
            fpiL = B(2,1,1);
        case 2
            ApsT = A(1,1,2);
            ApsL = A(2,1,2);
            fpiT = B(1,1,1);
            fpiL = B(2,1,1);
        case 3
            ApsT = A(1,1,3);
            ApsL = A(2,1,3);
            fpiT = B(1,1,1);
            fpiL = B(2,1,1);
        case 4
            ApsT = A(1,1,4);
            ApsL = A(2,1,4);
            fpiT = B(1,1,1);
            fpiL = B(2,1,1);
        case 5
            ApsT = A(1,1,5);
            ApsL = A(2,1,5);
            fpiT = B(1,1,1);
            fpiL = B(2,1,1);
        case 6
            ApsT = A(1,1,6);
            ApsL = A(2,1,6);
            fpiT = B(1,1,1);
            fpiL = B(2,1,1);
        case 7
            ApsT = A(1,1,7);
            ApsL = A(2,1,7);
            fpiT = B(1,1,1);
            fpiL = B(2,1,1);
        case 8
            ApsT = A(1,1,8);
            ApsL = A(2,1,8);
            fpiT = B(1,1,1);
            fpiL = B(2,1,1);
        case 9
            ApsT = A(1,1,9);
            ApsL = A(2,1,9);
            fpiT = B(1,1,2);
            fpiL = B(2,1,2);
        case 10
            ApsT = A(1,1,10);
            ApsL = A(2,1,10);
            fpiT = B(1,1,2);
            fpiL = B(2,1,2);
        case 11
            ApsT = A(1,1,11);
            ApsL = A(2,1,11);
            fpiT = B(1,1,2);
            fpiL = B(2,1,2);
        case 12
            ApsT = A(1,1,12);
            ApsL = A(2,1,12);
            fpiT = B(1,1,2);
            fpiL = B(2,1,2);
        case 13
            ApsT = A(1,1,13);
            ApsL = A(2,1,13);
            fpiT = B(1,1,2);
            fpiL = B(2,1,2);
        case 14
            ApsT = A(1,1,14);
            ApsL = A(2,1,14);
            fpiT = B(1,1,2);
            fpiL = B(2,1,2);
        case 15
            ApsT = A(1,1,15);
            ApsL = A(2,1,15);
            fpiT = B(1,1,2);
            fpiL = B(2,1,2);
        case 16
            ApsT = A(1,1,16);
            ApsL = A(2,1,16);
            fpiT = B(1,1,2);
            fpiL = B(2,1,2);
        case 17
            ApsT = A(1,1,17);
            ApsL = A(2,1,17);
            fpiT = B(1,1,3);
            fpiL = B(2,1,3);
    end
end

```

```

        case 18
            inicio
        end
    end
end

%Propriedades da secção de betão da placa VA1

Ac = 17.8*139.7;    %Área bruta da secção de betão (cm2)

%Propriedades mecânicas dos aços

Es = 200000;      %Módulo de elasticidade do aço (MPa)
fLy = 445;        %Tensão de cedência do aço longitudinal (MPa)
fTy = 445;        %Tensão de cedência do aço transversal (MPa)
AsL = 29.84;     %Área de aço ordinário longitudinal (cm2)
AsT = 29.84;     %Área de aço ordinário Transversal (cm2)

%Criar vetores

roL = AsL/Ac;     %Taxa Mecânica de armadura ordinária longitudinal
roT = AsT/Ac;     %Taxa Mecânica de armadura ordinária Transversal

%Propriedades mecânicas dos aços de pré-esforço

ElpsL = 214000;  %Módulo de elasticidade de Ramberg-Osgood P.E-Long. (MPa)
ElpsT = 214000;  %Módulo de elasticidade de Ramberg-Osgood P.E-Trans. (MPa)
EpsL = 195000;   %Módulo de elasticidade da armadura de P.E-Long. (MPa)
EpsT = 195000;   %Módulo de elasticidade da armadura de P.E-Trans. (MPa)
Fpu = 1860;      %Tensão última da armadura de P.E. (MPa)
fp01 = 1670;     %Tensão de proporcionalidade (MPa)

%Propriedades mecânicas do betão
fcm = 95.1;      %Resistência média do betão (MPa)
Ec = (22*(fcm/10)^0.3)*1000; %Módulo de elasticidade do betão (MPa)
e0 = -2.45;      %Deformação última do betão (1/1000)

%Cálculos preliminares relativos ao pré-esforço

Aps = ApsT+ApsL; %Área total de armadura de P.E. (cm2)
roPL = ApsL/Ac;  %Taxa Mecânica de armadura de P.E. Longitudinal.
roPT = ApsT/Ac;  %Taxa Mecânica de armadura de P.E. Transversal.
ePiL = fpiL/EpsL; %Extensão inicial na armadura de P.E. Longitudinal.
ePiT = fpiT/EpsT; %Extensão inicial na armadura de P.E. Transversal.
eLiL = ApsL*fpiL/(AsL*(Es-Ec)+Ec*Ac-ApsL); %Extensão no aço ordinário
longitudinal
eLiT = ApsT*fpiT/(AsT*Es-Ec)+Ec*(Ac-ApsT); %Extensão no aço ordinário
transversal
edecT = ePiT+eLiT; %Extensão de descompressão transversal
edecL = ePiL+eLiL; %Extensão de descompressão longitudinal

%Solicitações no elemento de betão armado (L-T)
tal = -3.69;     %Tensão de corte (MPa)
sigL = 0;        %Tensão de tração longitudinal (MPa)
sigT = 0;        %Tensão de compressão transversal (MPa)

%Cálculos preliminares
eLy = fLy/Es*1000;
eTy = fTy/Es*1000;
sigl = sigL + sigT/2+sqrt(((sigL-sigT)/2)^2+tal^2);
mLT = tal/sigl;
mL = sigL/sigl;
mT = sigT/sigl;

%Correção da curva

%Resolução do valor de extensão (Y) para a equação não-linear

```

```

%Análise Longitudinal

m = 4;

%Definir yL como variável simbólica

syms yL

%Equação a resolver

y = -0.7*fpu+ElpsL*(yL)/(1+(ElpsL*(yL)/fpu)^m)^(1/m);
yL = solve(y,yL);

%Retornar o valor em número

yL = double(yL);

%Análise Transversal

%Definir yT como variável simbólica

syms yT

%Equação a resolver

y = -0.7*fpu+ElpsT*(yT)/(1+(ElpsT*(yT)/fpu)^m)^(1/m);
yT = solve(y,yT);

%Retornar o valor em número

yT = double(yT);

%Análise Longitudinal

zL = 0.7*fpu/EpsL;

%Análise Transversal

zT = 0.7*fpu/EpsT;

%Cálculo do delta_E

%Análise longitudinal

dEL = zL-yL;

%Análise transversal

dET = zT-yT;

%Dados plotagem

e_plot = [0; -0.005; -0.16; -0.2; -0.235; -0.4; -0.65; -0.69; -0.9;
-1.1; -1.36; -1.49; -1.53; -1.75; -1.86; -1.98; -2.06; -2.16; -
2.46; -2.65; -4.29; -4.77];
sigmaD_plot = [0; -4.4; -7.25; -10.5; -11.8; -12.3; -12; -11.6; -12.25;
-12.1; -12.65; -12.55; -12.8; -12.35; -11.35; -11.5; -10.6; -
11.5; -10.9; -11.1; -9.5; -8.3];
eL_plot = 0;
eT_plot = 0;
fL_plot = 0;
fT_plot = 0;
tal_plot = [0; 0.75; 1.4; 2; 2.8; 3; 3.25; 3.7; 3.9; 4.4; 5.1;5.6; 5.7;
5.7; 5.8; 5.9; 6; 6; 6.1; 6.1; 6.15; 6.15; 6.2; 6.15; 6.15; 6.15;
6.2; 6.15; 5.9; 6.15; 6.3; 5.7; 5.3; 4.8];
gama_plot = [0; 0; 0; 0.2; 0.4; 1; 1.75; 2.5; 2.9; 3.3; 4.2; 5.3; 6.3;

```

```

            8.3; 10.2; 12.4; 14.5; 16.5; 18.3; 20.5; 22.5; 24.4; 26.5; 30.3;
            32.5; 33.6; 34.5; 36.2; 38.3; 40.5; 42.9; 44.8; 47.1; 48.9];
tal_Teo    = [0;2; 4.8; 4.85; 5.3; 5.7; 6];
gama_Teo   = [0;0.8; 3.5; 10; 30; 40; 50];

a = 'VA1';
b = 'RA-STM VA1 (\rho_{PL}=0)';
c = 'RA-STM';
d = 'RA-STM VA1 (\rho_{PL}=\rho_{PT}=0)';
e = 'RA-STM VA1 (\rho_{PL}=\rho_{PT}=0)';
f = 'VA1 - Arm. Longit.';
g = 'VA1 - Arm. Transv.';

```

```

%Sub-rotina da placa TA-1, estudado por Laskar et al. (2007)

%Dados iniciais

global a b d m AsL AsT ApsT ApsL Aps Ac roL roT roPL roPT yL yT dET dEL zL zT
global ElpsL ElsT EpsL EpsT Es Ec ePiL ePiT eLiL eLiT edecL edect
global fp01 fpu fpiL fpiT fLy fTy fcm e0 tal sigL sigT eLy eTy sigl mLT mL mT
global e_plot sigmaD_plot gama_smm_plot tal_smm_plot fpulinha
global tal_ed_plot tal_er_plo t er_plot ed_plot e_smm_plot tal_plot gama_plot
global sigmaD_smm_plot

%Propriedades da secção de betão da placa

Ac = 17.8*139.8; %Área bruta da secção de betão (cm2)

%Propriedades mecânicas dos aços ordinários

Es = 197000; %Módulo de elasticidade do aço (MPa)
fLy = 413.8; %Tensão de cedência do aço longitudinal (MPa)
fTy = 413.8; %Tensão de cedência do aço transversal (MPa)
AsL = 2.79; %Área de aço ordinário longitudinal (cm2)
AsT = 10.45; %Área de aço ordinário Transversal (cm2)

%Criar vetores:

roL = AsL/Ac; %Taxa Mecânica de armadura ordinária longitudinal
roT = AsT/Ac; %Taxa Mecânica de armadura ordinária Transversal

%Propriedades mecânicas dos aços de pré-esforço

ElpsL = 209000; %Módulo de elasticidade de Ramberg-Osgood P.E-Long (MPa)
ElpsT = 209000; %Módulo de elasticidade de Ramberg-Osgood P.E-Trans. (MPa)
EpsL = 200000; %Módulo de elasticidade da armadura de P.E-Long (MPa)
EpsT = 200000; %Módulo de elasticidade da armadura de P.E-Trans. (MPa)
Fpu = 1793; %Tensão última da armadura de P.E. (MPa)
Fpulinha = 1862; %Tensão última da armadura de P.E. para domínio (MPa)
fp01 = 1670; %Tensão de proporcionalidade (MPa)
m = 5; %Parâmetro da equação do pré-esforço
ApsL = 20.90; %Área de aço de pré-esforço longitudinal (cm2)
ApsT = 0; %Área de aço de pré-esforço transversal (cm2)
fpiL = 1303; %Tensão inicial no aço de pré-esforço longitudinal (MPa)
fpiT = 0; %Tensão inicial no aço de pré-esforço transversal (MPa)

%Propriedades mecânicas do betão:

fcm = 41.47; %Resistência média do betão(MPa)
Ec = (22*(fcm/10)^0.3)*1000; %Módulo de elasticidade do betão (MPa)
e0 = -2.1; %Deformação última do betão (1/1000)

%Cálculos preliminares relativos ao pré-esforço

Aps = ApsT+ApsL; %Área total de armadura de P.E. (cm2)
roPL = ApsL/Ac; %Taxa Mecânica de armadura de P.E-longitudinal
roPT = ApsT/Ac; %Taxa Mecânica de armadura de P.E-transversal
ePiL = fpiL/EpsL; %Extensão inicial no aço de P.E-longitudinal
ePiT = fpiT/EpsT; %Extensão inicial no aço de P.E-transversal
eLiL = ApsL*fpiL/(AsL*(Es-Ec)+Ec*(Ac-ApsL)); %Extensão no aço ordinário longitudinal
eLiT = ApsT*fpiT/(AsT*(Es-Ec)+Ec*(Ac-ApsT)); %Extensão no aço ordinário transversal
edect = ePiT+eLiT; %Extensão de descompressão transversal
edecL = ePiL+eLiL; %Extensão de descompressão longitudinal

%Solicitações no elemento de betão armado (L-T)

tal = -3.69; %Tensão de corte (MPa)

```

```

sigL = 0;           %Tensão de tração longitudinal (MPa)
sigT = 0;           %Tensão de compressão transversal (MPa)

%Cálculos preliminares

eLy = fLy/Es*1000; %Deformação em fase elástica longitudinal
eTy = fTy/Es*1000; %Deformação em fase elástica transversal
sig1 = (sigL+sigT)/2+sqrt(((sigL-sigT)/2)^2+tal^2); %Tensão principal
mL = sigL/sig1;    %Coeficiente de proporcionalidade longitudinal
mT = sigT/sig1;    %Coeficiente de proporcionalidade transversal
mLT = tal/sig1;    %Coeficiente de proporcionalidade ao corte

%Correção da curva para esta placa

%Resolução do valor de extensão (Y) para a equação não-linear:

%Análise Longitudinal

syms yL

%Equação a resolver

y = -0.7*fpulinha+ElpsL*(yL)/(1+(ElpsL*(yL)/fpu)^m)^(1/m);
yL=solve(y,yL);

%Retornar o valor em número

yL = double(yL);

%Análise Transversal;

yT = 0;

%Resolução do valor de extensão (Z) para a equação linear:

%Análise Longitudinal

zL = 0.7*fpulinha/EpsL;

% Análise Transversal

% zT=0.7*fpulinha/EpsT;

zT = 0;

%Calculo do delta_E

% Análise longitudinal

dEL = zL-yL;

% Análise transversal

dET = zT-yT;

%Dados plotagem do TA-1

e_plot = [0;-0.0010*10^2;-0.0012*10^2;-0.0013*10^2;-0.0015*10^2;-
0.0022*10^2;-0.0025*10^2;-0.0025*10^2;-0.0026*10^2;-0.0029*10^2;-
0.0029*10^2;-0.0027*10^2;-0.0031*10^2;-0.0047*10^2;-0.0067*10^2;-
0.0131*10^2;-0.0277*10^2];
sigmaD_plot = [0;-4.1482;-5.5176;-6.0191;-6.4136;-6.9829;-8.3016;-
8.7438;-9.1762;-10.1611;-11.0747;-11.4474;-11.6959;-11.6320;-
11.5432;-10.4593;-7.5918];
e_smm_plot = [0;0.0008*10^2;0.0012*10^2;0.0016*10^2;0.0022*10^2;
0.0028*10^2;0.0033*10^2;0.0038*10^2;0.0041*10^2;0.0045*10^2;0.005
0*10^2;0.0057*10^2;0.0074*10^2;0.0103*10^2;0.0170*10^2;0.0239*10^
2;0.0309*102];

```

```

sigmaD_smm_plot      =[0;2.8904;4.4948;5.6385;7.6295;9.8362;10.4174;10.9034;
11.1751;11.4109;11.5682;11.6182;11.4824;11.1322;10.4317;9.7759;
9.0786]
tal_plot             = [0;2.1392;3.8245;4.5290;4.7091;4.8750;5.3147;5.5032;5.7459;
5.9268;6.0273;5.9896;5.9544;5.3937;3.9335;3.2286;3.2839;3.1909;
3.1331;3.1808;3.0552;3.0426;2.9848;2.9389;2.9690;2.8911];
gama_plot           = [0;.0001*10^3;0.0004*10^3; 0.0012*10^3; 0.0014*10^3;
0.0023*10^3;
0.0041*10^3;0.0061*10^3;0.0080*10^3;0.0103*10^3;0.0122*10^3;0.014
2*10^3;0.0158*10^3;0.0172*10^3;0.0201*10^3;0.0227*10^3;0.0243*10^
3;0.0263*10^3;0.0284*10^3;0.0305*10^3;0.0325*10^3;0.0346*10^3;
0.0367*10^3;0.0388*10^3;0.0408*10^3;0.0421*10^3];
tal_smm_plot       = [0;3.2702;5.0844;5.0654;5.1954;5.3201;5.4253;5.5694;5.7192;
5.8395;5.9670;5.9480;5.8477;5.6583;5.4945;5.3096;5.1711;4.9710;
4.7361;4.3687;3.8454;3.2371];
gama_smm_plot      = [0;0.000213*10^3;0.000412*10^3;0.001822*10^3;0.002906*10^3;
0.004623*10^3;0.006476*10^3;0.008239*10^3;0.010478*10^3;0.012203*
10^3;0.014057*10^3;0.015828*10^3;0.017076*10^3;0.019342*10^3;0.02
1339*10^3;0.023450*10^3;0.024857*10^3;0.026567*10^3;0.028452*10^3
;0.030830*10^3;0.033630*10^3;0.036262*10^3];
er_plot            = [0;0.0001*10^2;0.0003*10^2;0.0011*10^2;0.0013*10^2;
0.0022*10^2;0.0039*10^2;0.0059*10^2;0.0078*10^2;0.0101*10^2;0.012
1*10^2;0.0139*10^2;0.0153*10^2;0.0160*10^2;0.0175*10^2;0.0180*10^
2;0.0190*10^2;0.0203*10^2;0.0214*10^2;0.0227*10^2;0.0238*10^2;0.0
250*10^2;0.0263*10^2;0.0275*10^2;0.0288*10^2;0.0298*10^2];
tal_er_plot        = [0;3.5387;3.8179;4.5157;4.7062;4.8600;5.2755;5.4908;5.7001;
5.9109;5.9722;6.0028;5.8956;5.3594;3.9011;3.2271;3.2424;3.1658;3.
1045;3.1811;2.9973;2.9820;2.9513;2.9207;2.9360;2.8697];
ed_plot            = [0;0.0000784*10^3;0.0000942*10^3;0.0001268*10^3;
0.0001491*10^3;0.0001505*10^3;0.0001562*10^3;0.0001960*10^3;0.000
1868*10^3;0.0001881*10^3;0.0001758*10^3;0.0002191*10^3;0.0003704*
10^3;0.0005700*10^3;0.0012108*10^3;0.0026594*10^3];
tal_ed_plot        = [0;2.114130;2.771418;3.801905;4.500333;4.685142;4.846031;
5.284411;5.474840;5.712875;5.888160;5.994189;5.964368;5.922773;5.
361618;3.894143];

a = 'TA-1';
b = 'RA-STM TA-1';
d = 'SMM-PC TA-1';

```

```

%Sub-rotina da placa PP2, estudada por Marti e Meyboom (1992)

global a b m AsL AsT Aps ApsT ApsL Ac roL roT roPL roPT ElpsL Elpst EpsL Epst
global Es Ec ePiL ePiT eLiL eLiT edecL edecT yL dEL zL mLT mL mT
global fp01 fpu fpiL fpiT fLy fTy fcm fpulinha e0 tal sigL sigT eLy eTy sigl
global tal1 gama1 tal2 gama2 tal3 gama3 tal4 gama4 tal5 gama5 tal6
global gama6 tal7 gama7

%Propriedades da secção de betão da placa

Ac = 28.7*162.6; %Área bruta da secção de betão (cm2)

% Propriedades mecânicas das armaduras

Es = 200000; %Módulo de elasticidade do aço (MPa)
fLy = 486; %Tensão de cedência do aço longitudinal (MPa)
fTy = 480; %Tensão de cedência do aço transversal (MPa)
AsL = 60.43; %Área de aço ordinário longitudinal (cm2)
AsT = 30.19; %Área de aço ordinário Transversal (cm2)

%Criar vetores
roL = AsL/Ac; %Taxa Mecânica de armadura ordinária longitudinal.
roT = AsT/Ac; %Taxa Mecânica de armadura ordinária Transversal.

%Propriedades mecânicas das armaduras de pré-esforço

ElpsL = 200000; %Módulo de elasticidade de Ramberg-Osgood P.E-Long. (MPa)
Elpst = 200000; %Módulo de elasticidade de Ramberg-Osgood P.E-Trans. (MPa)
EpsL = 200000; %Módulo de elasticidade da armadura de P.E-Long. (MPa)
EpsT = 200000; %Módulo de elasticidade da armadura de P.E-Trans. (MPa)
Fpu = 1793; %Tensão última da armadura de P.E. (MPa)
Fpulinha = 910; %Tensão última da armadura de P.E. para domínio (MPa)
fp01 = 1670; %Tensão de proporcionalidade (MPa)
ApsL = 13.67; %Área de aço de pré-esforço longitudinal (cm2)
ApsT = 0; %Área de aço de pré-esforço transversal (cm2)
fpiL = 1255; %Tensão inicial no aço de pré-esforço longitudinal (MPa)
fpiT = 0; %Tensão inicial no aço de pré-esforço transversal (MPa)
m = 5; %Parâmetro da equação do pré-esforço

%Propriedades mecânicas do betão

fcm = 28.1; %Resistência média do betão (MPa)
Ec = (22*(fcm/10)^0.3)*1000; %Módulo de elasticidade do betão (MPa)
e0 = -2.12; %Deformação última do betão (1/1000)

%Cálculos preliminares relativos ao pré-esforço

Aps = ApsT+ApsL; %Área total de armadura de P.E.
roPL = ApsL/Ac; %Taxa Mecânica de armadura de P.E. Longitudinal
roPT = ApsT/Ac; %Taxa Mecânica de armadura de P.E. Transversal
ePiL = fpiL/EpsL; %Extensão inicial na armadura de P.E. Longitudinal
ePiT = fpiT/EpsT; %Extensão inicial na armadura de P.E. Transversal
eLiL = ApsL*fpiL/(AsL*(Es-Ec)+Ec*(Ac-ApsL)); %Extensão na armadura ordinária
longitudinal
eLiT = ApsT*fpiT/(AsT*(Es-Ec)+Ec*(Ac-ApsT)); %Extensão na armadura ordinária
transversal
edecT = ePiT+eLiT; %Extensão de descompressão transversal
edecL = ePiL+eLiL; %Extensão de descompressão longitudinal

%Solicitações no elemento de betão armado (L-T)

tal = -3.69; %Tensão de corte (MPa)
sigL = 0; %Tensão de tração longitudinal (MPa)
sigT = 0; %Tensão de compressão transversal (MPa)

%Cálculos preliminares

```

```

eLy = fLy/Es*1000; %Deformação em fase elástica longitudinal
eTy = fTy/Es*1000; %Deformação em fase elástica transversal
sig1 = (sigL + sigT)/2 + sqrt(((sigL - sigT)/2)^2 + tal^2); %Tensão principal
mLT = tal/sig1; %Coeficiente de proporcionalidade longitudinal
mL = sigL/sig1; %Coeficiente de proporcionalidade transversal
mT = sigT/sig1; %Coeficiente de proporcionalidade ao corte

%Correção da curva para esta placa

%Resolução do valor de extensão (Y) para a equação não-linear

%Análise Longitudinal

syms yL

%Equação a resolver

y = -0.7*fpulinha+ElpsL*(yL)/(1+(ElpsL*(yL)/fpu)^m)^(1/m);
yL = solve(y,yL);

%Retornar o valor em número
yL = double(yL);

%Resolução do valor de extensão (Z) para a equação linear

%Análise Longitudinal

zL = 0.7*fpulinha/EpsL;

%Cálculo do delta_E

% Análise longitudinal
dEL = zL-yL;

%Dados plotagem do PP2

tal1 = [2.54;2.38];
tal2 = [2.95;2.81];
tal3 = [3.66;3.50];
tal4 = [4.16;3.95];
tal5 = [4.78;4.62];
tal6 = [5.14;4.76];
tal7 = [5.44;4.78];

gama1 = [0.42;0.42];
gama2 = [1.47;1.47];
gama3 = [2.41;2.41];
gama4 = [3.30;3.30];
gama5 = [4.98;4.98];
gama6 = [7.23;7.23];
gama7 = [9.55;9.55];

a = 'PP2';
b = 'RA-STM PP2';

```

```

function F=MCTM_PLACA (alfaD)

%Comportamento linear da placa (MTCM) - estimativa inicial para o RA-STM

global roL roT Es Ec eL eT eD sig1 mL mLT mL mT roPL roPT fpiL fpiT

eL = (mL+mLT*cot(alfaD))/(Es*roL)*0.001*sig1-((roPL*fpiL/(Es*roL))*0.001);
eT = (mT+mLT*tan(alfaD))/(Es*roT)*0.001*sig1-((roPT*fpiT/(Es*roT))*0.001);
eD = -mLT/(Ec*sin(alfaD)*cos(alfaD))*0.001*sig1;

%Equação não-linear de estimativa inicial MCTM
F = (eL-eD)/(eT-eD)-(tan(alfaD))^2;

end

```

```

function COMP_PLACA

%Comportamento carga-deformação da placa (rastm_placa)

global roL roT eR eL eT EL ET fL fT FL FT fcm fpT fpL FPT FPL
global ED SIGMAD TAL GAMA ALFAD ER ROLFL_ROTFT ETOTALL ETOTALT EDECL EDECT
global eD sigmaD edecL edecT etotalL etotalT

%Estimativa inicial com base no MCTM

x(1) = eL*1000;
x(2) = eT*1000;
ed1 = eD*1000;
etotalL = edecL+ x(1);
etotalT = edecT+ x(2);

%Número máximo de pontos e tamanho do passo

pontos = 1000;
passo = 4/pontos;

%Cálculo comportamento carga-deformação

for i = 1:pontos

options = optimset('TolX',10^-10,'TolFun',10^-10); x = lsqnonlin(@ (x)
RASTM_PLACA (x,ed1-passo*i),x,[0,0],[],options);

%Criar vetores de comportamento:
ED(i) = eD - passo*i;
SIGMAD(i)= sigmaD;
COS = (x(2)-ED(i))/(eR-ED(i));
SIN = (x(1)-ED(i))/(eR-ED(i));
TAL(i) = -SIGMAD(i)*sqrt(COS*SIN);
GAMA(i) = 2*(eR-ED(i))*sqrt(COS*SIN);
EL(i) = x(1)*10^-3;
ET(i) = x(2)*10^-3;
FL(i) = fL;
FT(i) = fT;
ALFAD(i) = -atan(sqrt(SIN/COS))*180/pi;
ER(i) = EL(i)+ET(i)-ED(i);
ROLFL_ROTFT (i) = FL(i)*roL+FT(i)*roT;

%Relativamente ao pré-esforço

FPT(i) = fpT;
FPL(i) = fpL;
ETOTALL(i) = etotalL;
ETOTALT(i) = etotalT;
EDECL (i) = edecL;
EDECT (i) = edecT;

%Critérios de paragem (betão de resistência normal ou betão de alta
% resistência)
if fcm < 58
    if - ED(i) >= 3.5;
        break
    end
else
    if - ED(i) >= 2.6+35*((90-fcm)/100)^4;
        break
    end
end
end
end
function F = RASTM_PLACA(x,ed1)

```

```

%Comportamento não-linear da placa (RA-STM)

global INDD m roL roPL roPL roT eR Es EpsL Epst Elpst ElpsL zL zT dEL dET
global e0 eLy eTy edecL edecT etotalL etotalT
global fL fT fTy fpT fpL fpu fcm fp01fLy mLT mL mT sigmaD csi

%Cálculos iniciais

%Princípio da Invariância
eR = x(1)+x(2)-ed1;

%Coeficiente de Amolecimento
R = 5.8/(sqrt(fcm));

if R<= 0.9
    R_linha = R;
else
    R_linha = 0.9;
end

n = ((roL*fLy)+(roPL*fp01))/((roT*fTy)+(roPT*fp01));

if n <= 1
    n_linha_ = n;
else
    n_linha_ = 1/n;
end

csi = R_linha/(sqrt(1+((0.4*eR)/n_linha_)));

%Lei constitutiva do betão à compressão
if abs(ed1)<csi*abs(e0)
    sigmaD = -csi*fcm*(2*(ed1/(csi*e0))-(ed1/(csi*e0))^2);
else
    sigmaD = -csi*fcm*(1-((ed1/(csi*e0)-1)/((4/csi)-1))^2);
end

%Relação constitutiva do aço ordinário e de pré-esforço

%Tensão média de rotura do betão à tração

fcr = 0.313*sqrt(fcm);

%Armadura ordinária longitudinal

BNL = (1/roL)*(fcr/fLy)^1.5;
enL = eLy*10^-3*(0.93-2*BNL);

if x(1)*10^-3 <= enL
    fL = x(1)*10^-3*Es;
else
    fL = fLy*((0.91-2*BNL)+((0.02+0.25*BNL)*(x(1)/eLy));
end

%Armadura ordinária transversal

BNT = (1/roT)*(fcr/fTy)^1.5;
enT = eTy*10^-3*(0.93-2*BNT);

if x(2)*10^-3 <= enT
    fT = x(2)*10^-3*Es;
else
    fT = fTy*((0.91-2*BNT)+((0.02+0.25*BNT)*(x(2)/eTy));
end

%Armadura de pré-esforço

```

```

etotalL = edecL+x(1)*10^-3;
etotalT = edecT+x(2)*10^-3;

%Armadura de pré-esforço longitudinal

    if edecL ~= 0
        if etotalL > zL
            fpL = ElpsL*(etotalL-dEL)/(1+(ElpsL*(etotalL-dEL)/fpu)^m)^(1/m);
        else
            fpL = EpsL*(etotalL);
        end
    else
        fpL=0;
    end

%Armadura de pré-esforço transversal

    if edecT ~= 0
        if etotalT > zT
            fpT = ElpsT*(etotalT-dET)/(1+(ElpsT*(etotalT-dET)/fpu)^m)^(1/m);
        else
            fpT = EpsT*(etotalT);
        end
    else
        fpT=0;
    end

%Tensão principal de tração
E
S = mL*mT-mLT^2;
B = mL*(roT*fT+roPT*fpT)+mT*(roL*fL+roPL*fpL);
C = (roT*fT+roPT*fpT)*(roL*fL+roPL*fpL);
sigma1 = (1/(2*S))*(B-sqrt(B^2-4*S*C));

%Comportamento não linear RA-STM

% Sistema de equações não-linear
F(1) = sigmaD*(x(1)-ed1)/(eR-ed1)-mT*sigma1+roT*fT+roPT*fpT;
F(2) = sigmaD*(x(2)-ed1)/(eR-ed1)-mL*sigma1+roL*fL+roPL*fpL;

end

```

```

function PLOT_PLACA

%Plotagem das curvas

global a b c d e f g
global gama1 tal1 gama2 tal2 gama3 tal3 gama4 tal4 gama5 tal5 gama6 tal6 gama7
global tal7 gama8 tal8 gama9 tal9
global e_plot sigmaD_plot eL_plot eT_plot fL_plot fT_plot er_plot tal_er_plot
global tal_plot gama_plot tal_Teo gama_Teo tal_ed_plot tal_smm_plot
global gama_smm_plot ed_plot e_smm_plot sigmaD_smm_plot
global FPL FPT ETOTALL ETOTALT EDECL EDECT ED SIGMAD TAL GAMA EL ET FL FT ER
global ALFAD

%Vetores de plotagem

e_PLOT          = e_plot;
sigmaD_PLOT     = sigmaD_plot;
eL_PLOT        = eL_plot;
eT_PLOT        = eT_plot;
fL_PLOT        = fL_plot;
fT_PLOT        = fT_plot;
tal_PLOT       = tal_plot;
gama_PLOT      = gama_plot;
er_PLOT        = er_plot;
tal_er_PLOT    = tal_er_plot;
ed_PLOT        = ed_plot;
tal_ed_PLOT    = tal_ed_plot;
e_smm_PLOT     = e_smm_plot;
sigmaD_smm_PLOT = sigmaD_smm_plot;
gama_smm_PLOT  = gama_smm_plot;
tal_smm_PLOT   = tal_smm_plot;

% Opção:
disp(' ');
disp('PAINEIS SÉRIE "VA" E SÉRIE "A"');
disp(' ');
disp('1 - Curva Tensão x Deformação de compressão do betão');
disp('2 - Curva Tensão x Deformação do aço ordinário longitudinal e trans. ');
disp('3 - Curva Tensão de corte x Deformação de corte');
disp('4 - Curva Tensão x Deformação no aço de pré-esforço longitudinal e transversal');
disp('5 - Extensões no pré-esforço longitudinal e transversal');
disp('6 - Ângulo (alfaD) x Deformação de compressão do betão');
disp('7 - Curva Tensão x Distorção da armadura ordinária');
disp('8 - Curva Tensão x Distorção da armadura de pré-esforço');
disp('9 - Curva Tensão no betão x Distorção na placa');
disp(' ');
disp('PAINEIS SÉRIE "TA"');
disp(' ');
disp('10 - Curva Tensão de corte x Deformação de tração');
disp('11 - Curva Tensão de corte x Deformação de compressão');
disp('12 - Curva Tensão de compressão x Deformação de compressão do betão');
disp('13 - Curva Tensão de corte x Deformação de corte');
disp('14 - Ângulo (alfaD) x Deformação de compressão do betão');
disp(' ');
disp('PAINEIS SÉRIE "PP"');
disp(' ');
disp('15 - Curva Tensão de corte x Deformação de corte (PP2 e PP3)');
disp(' ');
disp('16 - Voltar a escolha das placas);
disp('0 - Sair');
disp(' ');
IND = input('Escolha uma opção: ');

%Casos de plotagem e impressão das curvas

while IND > 0
    switch IND

```

```

case 1
% 1 - Curva tensão x Deformação de compressão do betão
hold on
plot(-e_PLOT,-sigmaD_PLOT,'-rs','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
plot(-[0 ED],[-[0 SIGMAD]'],'--b','LineWidth',2)

% Títulos
xlabel('\epsilon_D (1/1000)');
ylabel('\sigma_D (MPa)');
legend(a,...
      b,'Location','southeast');
grid on
hold off

case 2
% 2 - Curva tensão x Deformação da armadura long. e trans.
hold on
plot(eL_PLOT,fL_PLOT,'--rs','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
plot(eT_PLOT,fT_PLOT,'-b*','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
plot([0 EL],[0 FL]','-g*','LineWidth',2)
plot([0 ET],[0 FT]('--k','LineWidth',1)
%Títulos
xlabel('\epsilon_{s}');
ylabel('\sigma_{s} (MPa)');
legend(f,g,...
      d,e,'Location','southeast');
grid on
hold off

case 3
% 3 - Curva Tensão de corte x Deformação de corte
hold on
plot(gama_PLOT,tal_PLOT,'-rs','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
plot([0 GAMA],[0 TAL]('--b','LineWidth',2)
plot (gama_Teo, tal_Teo,'-k','LineWidth',1)

% Títulos
xlabel('\gamma_L_T (1/1000)');
ylabel('\tau_L_T (MPa)');
legend(a,...
      b,...
      c,'Location','southeast');
grid on
hold off

case 4
% 4 - Curva tensão no aço de pré-esforço long. e trans.
hold on

plot([0 ETOTALL],[0 FPL]','-k*','LineWidth',2)
plot([0 ETOTALT],[0 FPT]','-m','LineWidth',1)

% Títulos
xlabel('\epsilon_{ps}');
ylabel('f_{ps} (MPa)');
legend('f_{ps}(\epsilon_{ps})Longitudinal','f_{ps}(\epsilon_{ps})
Transversal','Location','southeast');
grid on
hold off

case 5
% 5 - Extensões no pré-esforço longitudinal e transversal
hold on
plot([0 ETOTALL]','-k+','LineWidth',2)
plot([0 ETOTALT]','-m','LineWidth',2)
plot(EDECL,':b^','LineWidth',1)
plot(EDECT,':-y','LineWidth',2)

```

```

plot([0 EL], 'cs', 'LineWidth', 2)
plot([0 ET], '-r.', 'LineWidth', 2)

% Títulos
xlabel('f_{ps} (MPa)');
ylabel('\epsilon - (1/1000)');
legend('\epsilon_{total Long}', '\epsilon_{total Trans.}', ...
'\epsilon_{dec}Long', '\epsilon_{dec}Trans.', '\epsilon_{1}',
'\epsilon_{t}');
grid on
hold off

case 6
% 6 - Ângulo (alfaD) x Deformação de compressão do betão
hold on
plot(-ED, -ALFAD, '--b', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 7)

% Títulos
xlabel('\epsilon_D (1/1000)');
ylabel('Complemento do ângulo variável');
legend('Variação de \alpha_{D}', 'Location', 'southeast');
grid on
hold off

case 7
% 7 - Tensão x Distorção da armadura ordinária
hold on
plot(GAMA, FL, '--b', 'LineWidth', 2)
plot(GAMA, FT, '--k', 'LineWidth', 1)

% Títulos
xlabel('\gamma_{L_T} (1/1000)');
ylabel('\sigma_{s} (MPa)');
legend('\sigma_{s} x \gamma_{L_T} - Arm. Long', '\sigma_{s} x
\gamma_{L_T} - Arm. Transv', 'Location', 'southeast');
grid on
hold off

case 8
% 8 - Tensão x Distorção da armadura de pré-esforço
hold on
plot([0 GAMA], [0 FPL], '--b', 'LineWidth', 2)
plot([0 GAMA], [0 FPT], '--k', 'LineWidth', 1)

% Títulos
xlabel('\gamma_{L_T} (1/1000)');
ylabel('f_{ps} (MPa)');
legend('\sigma_{s} x \gamma_{L_T} - Arm. de P.E. Long', '\sigma_{s}
x \gamma_{L_T} - Arm. de P.E. Transv', 'Location', 'southeast');
grid on
hold off

case 9
% 9 - Curva tensão x deformação de compressão do betão
hold on
plot([0 GAMA], -[0 SIGMAD], '--b', 'LineWidth', 2)
plot([0 GAMA], -[0 SIGMAD], '--k', 'LineWidth', 1)
% Títulos
xlabel('\gamma_{L_T} (1/1000)');
ylabel('\sigma_D (MPa)');
legend('\sigma_D x \gamma_{L_T} - Arm. de P.E. Long', '\sigma_D x
\gamma_{L_T} - Arm. de P.E. Transv', 'Location', 'southeast');
grid on
hold off

case 10
% 10 - Curva Tensão de corte x Deformação de tração
hold on
plot(er_PLOT, tal_er_PLOT, '-rs', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 7)

```

```

plot([0 ER],[0 TAL],'--b','LineWidth',2)

% Títulos
xlabel('\epsilon_R (1/1000)');
ylabel('\tau_L_T (MPa)');
legend(a,...
      b,'Location','southeast');
grid on
hold off

case 11
% 11 - Curva Tensão de corte x Deformação de compressão
hold on
plot(ed_PLOT, tal_ed_PLOT,'-rs','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
plot(-[0 ED],[0 TAL],'--b','LineWidth',2)

% Títulos
xlabel('\epsilon_D (1/1000)');
ylabel('\tau_L_T (MPa)');
legend(a,...
      b,'Location','southeast');
grid on
hold off

case 12
% 12 - Curva Tensão de compressão x Deformação de compressão do
betão
hold on
plot(-e_PLOT,-sigmaD_PLOT,'-rs','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
plot(e_smm_PLOT,sigmaD_smm_PLOT,'-g','LineWidth',2)
plot(-[0 ED],[-[0 SIGMAD]'],'--b','LineWidth',2)

% Títulos
xlabel('\epsilon_D (1/1000)');
ylabel('\sigma_D (MPa)');
legend(a,...
      d,...
      b,'Location','southeast');
grid on
hold off

case 13
% 13 - Curva Tensão de corte x Deformação de corte
hold on
plot(gama_PLOT,tal_PLOT,'-rs','LineWidth',2)
plot(gama_smm_PLOT,tal_smm_PLOT,'-g','LineWidth',2,'MarkerSize',7)
plot([0 GAMA],[0 TAL]','--b','LineWidth',2)

% Títulos
xlabel('\gamma_L_T (1/1000)');
ylabel('\tau_L_T (MPa)');
legend(a,...
      d,...
      b,'Location','southeast');
grid on
hold off

case 14
% 14 - Ângulo (alfaD) x Deformação de compressão do betão
hold on
plot(-ED,-ALFAD,'--b','LineWidth',2,'MarkerSize',7)

% Títulos
xlabel('\epsilon_D (1/1000)');
ylabel('Complemento do ângulo variável');
legend('Variação de \alpha_{D}','Location','southeast');
grid on
hold off

```

```

case 15
    % 15 - Curva Tensão de corte x Deformação de corte
    hold on
    plot(gama1,tal1,'-rs','LineWidth',2)
    plot(gama2,tal2,'-rs','LineWidth',2)
    plot(gama3,tal3,'-rs','LineWidth',2)
    plot(gama4,tal4,'-rs','LineWidth',2)
    plot(gama5,tal5,'-rs','LineWidth',2)
    plot(gama6,tal6,'-rs','LineWidth',2)
    plot(gama7,tal7,'-rs','LineWidth',2)
    plot(gama8,tal8,'-rs','LineWidth',2)
    plot(gama9,tal9,'-rs','LineWidth',2)
    plot(GAMA,TAL,'--b','LineWidth',2)

    % Títulos
    xlabel('\gamma_L_T (1/1000)');
    ylabel('\tau_L_T (MPa)');
    legend(a,b,'Location','southeast');
    grid on
    hold off
case 16
    inicio;
end
disp(' ');
IND = input('Escolha uma opção:');

end
end

```