



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Métodos Numéricos para resolução de Equações de Lyapunov

Tiago Filipe Leitão Silva

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Manuel Pires Almeida

Covilhã, Outubro de 2010

Dedicatória

À minha vida

Rita e Afonso

Agradecimentos

A realização desta dissertação só foi possível com o apoio de diversas pessoas.

Agradeço ao Professor Doutor Rui Almeida, orientador deste trabalho, pelo contributo, pelo apoio e pelo incentivo no decurso da elaboração desta dissertação.

Agradeço ainda à Rita e ao meu filho Afonso todo o estímulo e encorajamento.

A todos os que sempre tiveram palavras de incentivo no percurso de elaboração desta dissertação, o meu sincero Obrigado.

Resumo

O objectivo desta dissertação é descrever, analisar e aplicar alguns métodos numéricos para resolver a equação clássica de Lyapunov.

Estudamos condições que garantem a solubilidade das equações e estabelecemos relações entre a fórmula contínua

$$AX + XA^* + Q = 0$$

e a fórmula discreta

$$AXA^* - X + Q = 0.$$

O produto de Kronecker é usado de modo a permitir representações de equações matriciais e o desenvolvimento de alguns métodos numéricos

Analisamos algumas decomposições matriciais que vão ser utilizadas no desenvolvimento de alguns métodos numéricos directos nomeadamente Bartels-Stewart e Hessenberg-Schur.

Por fim, os subespaço de Krylov e alguns processos de ortogonalização permitem desenvolver os métodos iterativos de Arnoldi e GMRES e os métodos directos de Ward e Kyrinnis.

Palavras-chave

Lyapunov, Krylov, Bartels-Stewart, Hessenberg-Schur, Matrizes, Equações Matriciais.

Abstract

The aim of this dissertation is to describe, analyze and apply some numerical methods for solving the classical equation of Lyapunov.

We study the conditions to ensure the equations solubility and establish relationships between the continuous formula

$$AX + XA^* + Q = 0$$

and the discrete formula

$$AXA^* - X + Q = 0.$$

The Kronecker product is used to allow representations of matrix equations and the development of some numerical methods

We examine some matrix decompositions that will be used to develop some direct numerical methods namely the Bartels-Stewart and Hessenberg-Schur methods.

Finally, Krylov subspace and some processes of orthogonalization make possible to develop iterative methods of Arnoldi and GMRES and direct methods of Ward and Kirrinnis.

Keywords

Lyapunov, Krylov, Bartels-Stewart, Hessenberg-Schur, Matrix, Matrix Equations.

Índice

0. Introdução	1
1. Noções Preparatórias	3
1.1 Conceitos Básico e Matrizes Especiais	3
1.2 Decomposições Matriciais	10
1.2.1 - Decomposição de Schur	11
1.2.2 - Decomposição de Jordan	20
1.2.3 - Factorização com uma Matriz Companheira	27
1.3 Critérios de Solubilidade da Equação de Lyapunov	30
1.3.1 - Teoremas de Existência e Unicidade	30
1.3.2 - Equivalência de duas classes de equações de Lyapunov	31
1.3.3 - Forma da Solução	34
1.3.4 - A estrutura das soluções	36
2. Métodos Iterativos usando o produto de Kronecker	41
2.1 O produto de Kronecker de duas matrizes	41
2.2 Formulação usando o produto de Kronecker	44
2.3 Método iterativo para o produto de Kronecker - KPIM	49
2.3.1 - Introdução	49
2.3.2 - O KPIM para a equação matricial discreta de Lyapunov	50
2.3.3 - O KPIM para a equação matricial contínua de Lyapunov	60
3. Métodos para Problemas Pouco Densos	63
3.1 Método de Bartels-Stewart	63
3.2 Método de Hessenberg-Schur	68
4. Resolução da Equação de Lyapunov usando subespaços de Krylov	71
4.1 Introdução	71
4.2 Métodos Standard de Subespaços de Krylov para equações Lineares	71
4.2.1 - Introdução	71
4.2.2 - Subespaços de Krylov	72
4.2.3 - O Algoritmo de Arnoldi	74
4.2.4 - Métodos Standard de Subespaços de Krylov	75
4.2.4.1 GMRES	75
4.2.4.2 CG	81
4.2.4.3 CGNR	82
4.2.4.4 BCG	83
4.2.5 - Métodos para problemas com matrizes esparsas	84
4.2.5.1 Algoritmo do Bloco de Arnoldi	84
4.2.5.2 Método de Arnoldi	87
4.2.5.3 Método GMRES	93
4.3 Métodos de Ward e Kyrinnis	95
4.3.1 - Método de Ward	95
4.3.2 - Método de Kyrinnis	99
5. Conclusões	105
Bibliografia	107

0. Introdução

Esta dissertação incide, e tem como objectivo descrever, analisar e aplicar eficientemente métodos numéricos para resolução de equações matriciais de Lyapunov, contínuas (0.1) e discretas (0.2)

$$AX + XA^* + Q = 0; \quad (0.1)$$

$$AXA^* - X + Q = 0; \quad (0.2)$$

A equação de Lyapunov $AX + XA^* + C = 0$, assim como a equação Sylvestre $AX - XB = C$, mais genérica devido ao factor que se usa para qualquer matriz B , surge com alguma frequência em teoria de matrizes, ao nível, por exemplo, da diagonalização por blocos de uma matriz triangular [48] e na teoria dos controlos lineares, onde são aplicadas por exemplo na análise e desenho de sistemas físicos dinâmicos de tempo contínuo, modelados por um sistema de equações diferenciais lineares [6]. Outras aplicações destas equações em várias áreas da matemática aplicada podem ser encontradas em [12, 13, 30] e referenciados noutros estudos de possíveis aplicabilidades da equação.

Vários são os problemas de diferentes ramos da Matemática que podem ser solucionados à custa da resolução deste tipo de equações, assim como a sua utilização no estudo das propriedades de estabilidade ou de controlabilidade de um sistema físico dinâmico modelado por um sistema de equações diferenciais ordinárias.

A formulação matricial de um sistema de equações lineares equivalente a este tipo de equações e definida através do produto de Kronecker como é possível observar na equação

$$(A \otimes I_n + I_n \otimes A) \text{vec}(X^T) + \text{vec}(C^T) = 0,$$

pode apresentar um elevado grau de esparsidade e que reproduz uma determinada estrutura particular presente na matriz coeficiente A . Estas duas características, bem como a dimensão do sistema devem ser tidas em conta na escolha do método mais adequado para o problema que se pretende resolver.

A abordagem desenvolvida por Bartels e Stewart é dos métodos gerais mais citados na literatura. Este algoritmo bem como a modificação, igualmente apresentado nesta dissertação, o método de Hessenberg-Schur, utilizam uma decomposição de Schur de

pelo menos uma das matrizes A e $-A^*$ e são recomendados para resolver problemas cujas matrizes coeficientes são cheias e com dimensão reduzida.

A dissertação apresentada encontra-se organizada da seguinte forma:

- Capítulo 1 – contém referências a conceitos relativamente ao cálculo matricial genérico. Serão abordadas decomposições matriciais mais usuais (Schur, Jordan e Matriz Companheira). Por fim serão apresentados Critérios de Solubilidade das Equações de Lyapunov.
- Capítulo 2 – será apresentado o conceito de produto de Kronecker, e exposto um método iterativo, denominado por Método Iterativo do Produto de Kronecker – KPIM, onde serão apresentados algoritmos para a sua resolução.
- Capítulo 3 – são abordados métodos para problemas pouco densos, onde se incluem os métodos de Bartels-Stewart e de Hessenberg-Schur.
- Capítulo 4 – serão abordados os métodos de resolução para as equações de Lyapunov onde se usam os Subespaços de Krylov, bem como são analisados os métodos de Ward e Kirrinnis para as equações matriciais de Lyapunov;
- Capítulo 5 – serão apresentadas algumas conclusões.

1. Noções Preparatórias

1.1 Alguns conceitos básicos e matrizes especiais

Seja $M_{m,n}$ o espaço vectorial das matrizes de dimensão $m \times n$ sobre \mathbb{C} (Corpo dos Complexos), ou M_n no caso particular de $m = n$. A notação $M_{m,n}(\mathfrak{R})$ será adoptada no caso de se pretender trabalhar apenas com matrizes reais.

O conjunto de todas as matrizes de dimensão $m \times n$ sobre um corpo é um espaço vectorial para a soma usual de matrizes e produto usual de um escalar (elemento do corpo) por uma matriz. Este espaço tem dimensão mn , sendo o conjunto de matrizes com um elemento igual a 1 e os restantes nulos a base natural.

Qualquer matriz $A \in M_{m,n}$ determina uma transformação linear (ou homomorfismo de espaços vectoriais) $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ definida por $\varphi(x) = Ax$, $x \in \mathbb{C}^n$. A matriz A é a representação matricial de φ em relação às bases canónicas de \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m . Inversamente, seja f uma aplicação linear entre dois espaços vectoriais E e F , de dimensão finita, e definidas as bases de E e F então f tem uma única representação matricial A que é determinada pelas imagens obtidas por f dos vectores da base de E .

O núcleo e a imagem de uma matriz $A \in M_{m,n}$ são, respectivamente, subespaços vectoriais de \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m , cujas dimensões se relacionam através de

$$\dim \text{Ker} A + \dim \text{Im} A = \dim \mathbb{C}^n = n \quad (1.1)$$

Pode ser útil fragmentar uma matriz em submatrizes chamadas *blocos*. A título de exemplo, o produto AB pode ser calculado com recurso à fragmentação de B por colunas, ou seja, $AB = (Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n)$, com $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Uma matriz dada possa ser dividida em blocos de diferentes maneiras (por linhas, por colunas, considerando submatrizes nulas, ...).

O resultado de operações com matrizes por blocos pode ser obtido efectuando o cálculo com os blocos como se fossem simplesmente elementos das matrizes, isto é, para efectuar o produto AB podemos fragmentar A e B em blocos A_{ij} e B_{ij} (com o número de linhas de B_{kj} igual ao número de colunas de A_{ik} , e ficando A com tantas colunas de submatrizes quantas as linhas de submatrizes de B) e calcular a submatriz C_{ij} do

produto (fragmentado) pela regra $C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$.

Exemplo 1.1.
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & A_{11}B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dentro da família das matrizes quadradas há sub-famílias que possuem determinadas propriedades que as tornam atractivas do ponto de vista do cálculo numérico. A título de exemplo temos que, os valores próprios de uma matriz triangular são os seus elementos principais e o produto de duas matrizes triangulares superiores (inferiores) é ainda uma matriz triangular superior (inferior).

Definição 1.1. Uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in M_n$ diz-se

<i>Normal</i>	se $A^* A = A A^*$,
<i>Unitária</i>	se $A^* A = A A^* = I_n$,
<i>Ortogonal</i>	se $A^T A = A A^T = I_n$

As matrizes unitárias e as matrizes complexas ortogonais são geralmente diferentes (exemplo 1.2), embora matrizes unitárias e matrizes reais ortogonais são exactamente as mesmas.

Exemplo 1.2. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & i \\ -i & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é ortogonal, mas não é unitária porque $A^* A \neq I_2$.

As matrizes unitárias desempenham, no cálculo numérico matricial, um papel muito importante, devido às seguintes propriedades:

1. A inversa de uma matriz unitária é a transposta da sua conjugada;
2. O produto de duas matrizes unitárias é ainda uma matriz unitária;
3. As colunas (ou as linhas) de uma matriz unitária constituem um conjunto de vectores ortonormados.

Definição 1.2. O polinómio $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ é denomina-se *polinómio característico* da matriz A e as suas n raízes (os *valores próprios*), não necessariamente distintas, constituem o *espectro* de A , cuja notação será $\sigma(A)$. Cada vector v , não nulo, que satisfaça a equação $Av = \lambda v$ é um *vector próprio* associado ao valor próprio λ .

Exemplo 1.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem um único valor próprio $\lambda = 1$ (raiz tripla de $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$). Os vectores próprios associados a λ são da forma $\alpha e_1 + \beta e_3$, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Definição 1.3. A *multiplicidade algébrica* de um valor próprio λ , representado por $m_a(\lambda)$, é a multiplicidade de raiz de $p_A(\lambda)$ e ao número de vectores próprios linearmente independentes que lhe estão associados denomina-se *multiplicidade geométrica* de λ . Se esta última $m_g(\lambda)$ for inferior a $m_a(\lambda)$ então λ diz-se *defeituoso* e, conseqüentemente, A é uma matriz *defeituosa*.

A matriz do exemplo anterior é defeituosa porque $m_a(\lambda) = 3$ e $m_g(\lambda) = 2$. Qualquer matriz diagonal é não defeituosa.

Definição 1.4. Duas matrizes quadradas A e B da mesma ordem dizem-se *semelhantes* se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = B$.

A matriz P é designada por *transformação de semelhança*. Matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios, no entanto o inverso pode não ser verdadeiro (exemplo 1.4).

Exemplo 1.4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e I_2 têm os mesmos valores próprios mas não são semelhantes.

Dada a simplicidade de cálculo de inversas de matrizes, é preferível usar as matrizes com transformação ortogonais, recorrendo a transformações de semelhança.

Definição 1.5. Uma *matriz de Householder* é uma matriz da forma

$$H = H_w = I - \frac{2}{\|w\|^2} w w^*, \text{ com } w \neq 0. \quad (1.2)$$

A matriz H define-se completamente pelo vector w e é, simultaneamente, unitária e hermitica, sendo ainda uma classe de matrizes ortogonais bastante utilizada como transformações de semelhança.

Exemplo 1.5. A matriz de Householder determinada por $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

As matrizes de Householder revelam-se importantes pelo facto de se poderem usar para criar zeros num vector real, ou seja, se for seleccionada uma matriz adequada é possível induzir num dado vector real a direcção pretendida.

Teorema 1.1. Para cada vector real não nulo $x \neq e_1$, existe uma matriz de Householder H tal que $Hx = \beta e_1$.

Demonstração:

Seja $w = x - \beta e_1$, com $\beta = -\text{sign}(x_1)\|x\|$. No caso de x_1 , a primeira coordenada do vector x , ser nula então o seu sinal pode ser escolhido positivo ou negativo.

Seja H a matriz de Householder determinada por w .

Tem-se, $\|w\|^2 = w^T(x - \beta e_1) = w^T x - \beta w^T e_1 = w^T x - \beta(x^T - \beta e_1^T)e_1 = w^T x - \beta x_1 + \beta^2$.

Mas, $w^T x = (x^T - \beta e_1^T)x = \|x\|^2 - \beta x_1 = \beta^2 - \beta x_1$. Logo $\|w\|^2 = 2w^T x$.

Resulta que

$$Hx = x - \frac{2}{\|w\|^2}(w w^T)x = x - \frac{2}{2w^T x}w(w^T x) = x - w = \beta e_1. \quad \square$$

Utilizando matrizes de Householder é possível obter uma factorização QR de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, onde Q é ortogonal e R triangular superior.

De acordo com o algoritmo descrito por Datta em [17], na j -ésima etapa $j = 1, 2, \dots, n-1$ é suficiente construir uma matriz de Householder $H_j \in M_n(\mathbb{R})$ tal que a coluna j da matriz $H_j A_{j-1} = A_j$ seja nula abaixo da diagonal principal, deixando inalteradas as $j-1$ primeiras colunas de A_{j-1} . No fim das $n-1$ etapas de aplicação do algoritmo, obtém-se uma matriz triangular superior $A_{n-1} = H_{n-1} H_{n-2} \dots H_1 A_0$. Desta igualdade resulta que $QR = A_0 = A$, fazendo $R = A_{n-1}$ e $Q^T = H_{n-1} H_{n-2} \dots H_1$. O próximo exemplo ilustra isto mesmo.

Exemplo 1.6. Pretende-se obter a factorização QR da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

recorrendo para tal a matrizes de Householder. Constrói-se H_1 de forma a que $H_1 a_1$ seja múltiplo de e_1 . Para isso, é bastante definir H_1 de acordo com a demonstração do teorema 1.1. Assim H_1 é a matriz de Householder determinada pelo vector $w_1 = a_1 - (-1)e_1 = (1,1,0)^T$. Tem-se,

$$H_1 A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A_1.$$

De seguida define-se uma matriz de Householder H_2 de forma obter um vector com terceira coordenada nula, quando multiplicada pela segunda coluna de A_1 . Para atingir este objectivo, basta determinar $\tilde{H} \in M_2(\mathfrak{R})$ tal que $\tilde{H} A_1(2:3,2)$ seja múltiplo de e_1 e fazer $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{bmatrix}$. \tilde{H} é a matriz de Householder definida por $w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1)e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Logo,

$$H_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A_2.$$

Esta última é a matriz triangular superior R da factorização QR de A . A matriz ortogonal

$$Q \text{ é } Q = H_1 H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e tem-se } QR = A.$$

Definição 1.6. Uma matriz quadrada $A \in M_n$ é de *Hessenberg superior* se $a_{ij} = 0$ para $i > j + 1$ e diz-se ainda *irreduzível* caso $a_{i+1,i} \neq 0$, $i \geq 1$.

De modo análogo, uma matriz de Hessenberg inferior é a transposta de uma matriz de Hessenberg superior. Uma matriz quadrada simultaneamente de Hessenberg superior e inferior é denominada tridiagonal.

Podemos usar as matrizes de Householder para reduzir uma matriz real A à forma de Hessenberg superior (ou para a tridiagonalizar se A for simétrica), aplicando uma transformação de Householder a uma matriz $A \in M_n(\mathfrak{R})$, transforma-a noutra

semelhante de forma a que uma coluna de A será orientada na direção de um vector desejado.

Esta particularidade das matrizes de Householder está patente no exemplo seguinte. Para o concretizar será usado o algoritmo:

Dada $A_0 \in M_n(\mathfrak{R})$, para $k = 1, 2, \dots, n-2$ transforma-se a k -ésima coluna de A_{k-1} nou-
tro vector com as últimas $n-k-1$ coordenadas nulas, mantendo inalteradas as
primeiras $k-1$ colunas de A_{k-1} através de:

1. Iguala-se x à k -ésima coluna de A_{k-1} já alterada através da substituição das pri-
meiras k componentes para zero;
2. Calcula-se $\beta = -\text{sign}(x_{k+1})\|x\|$, onde x_{k+1} é a coordenada $k+1$ de x
(se $x_{k+1} = 0$ pode ser escolhido um dos sinais + ou -);
3. Seja H_k a matriz de Householder determinada pelo vector $w = x - \beta e_{k+1}$,
4. Define-se $A_k = H_k A_{k-1} H_k$.

Ao fim das $n-2$ etapas obtemos a matriz na forma de Hessenberg superior
 $A_{n-2} = H^T A_0 H$, sendo a transformação de semelhança (de Householder)
 $H = H_1 H_2 \dots H_{n-2}$.

Exemplo 1.7. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Aplicando o algoritmo descrito tem-se $x = e_4$,

$$\beta = -1 \text{ e } w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Então, } A_1 = H_w A H_w = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ e é uma matriz que já}$$

está na forma de Hessenberg. A matriz de Householder H_w definida pelo vector w é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segundo Datta [17] os produtos de uma matriz de Householder H por um vector ou por
outra matriz podem ser calculados sem que H seja completamente explicitada.

A esparsidade de uma matriz é uma propriedade importante no cálculo numérico matricial, existindo algoritmos específicos que exploram esta característica. Uma matriz companheira possui um elevado grau de esparsidade.

Definição 1.7. Uma matriz *companheira (superior)* ou de *Frobenius* é uma matriz de Hessenberg superior irredutível da forma

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots & d_2 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & d_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

É possível determinar facilmente o polinómio característico de uma matriz companheira, de facto

$$p_K(\lambda) = \lambda^n - d_{n-1}\lambda^{n-1} - d_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - d_1\lambda - d_0. \quad (1.4)$$

De referir ainda que a matriz com primeira linha igual a $(d_{n-1} \ d_{n-2} \ \cdots \ d_1 \ d_0)$ e última coluna nula abaixo do elemento d_0 , diferindo de K exclusivamente nos elementos indicados, tem o polinómio característico definido igualmente por (1.4).

Definição 1.8. Uma matriz $A \in M_n$ diz-se *semidefinida positiva* se

$$x^* Ax \geq 0, \text{ para cada } x \in \mathbf{C}^n. \quad (1.5)$$

Se a desigualdade estrita for satisfeita para cada $x \neq 0$ então A diz-se ainda *definida positiva*.

Exemplo 1.8. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^2$. A é semidefinida positiva

porque $x^T Ax = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$, mas não é definida positiva $x^T Ax = 0$, com $x_2 = -x_1$.

Por outro lado, visto que $x^T Bx = \|x\|^2$ então B é definida positiva.

Existem propriedades que podem facilitar a aferição de uma matriz no que respeita à definição ou não de positividade da mesma, tais como:

- o determinante e os elementos principais de uma matriz definida positiva são positivos;
- o elemento com maior valor absoluto de uma matriz definida positiva é principal;

- uma matriz hermítica é definida positiva se e só se os seus valores próprios são todos positivos;

Por vezes, no estudo de equações com matrizes é conveniente considerar os elementos de uma matriz ordenados de modo apropriado como vectores.

Para finalizar esta secção define-se a forma de organizar convenientemente os elementos de uma matriz num vector.

Definição 1.9. A cada matriz $C = (c_1, \dots, c_n)$ de dimensão $m \times n$ vamos associar um vector coluna $vec(C) \in M_{mn,1}$ definido por

$$vec(C) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Exemplo 1.9. Se $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ então $vec(C) = (2, 5, 1, 0, -1, 7, 3, 2, 4)^T$.

Podem surgir dois casos particulares quando C é uma matriz com uma única linha ou coluna:

- $vec(C) = C$ se C é um vector (coluna);
- $vec(C) = C^T$ se C é uma matriz linha.

1.2 Decomposições matriciais

De modo geral, transformar uma matriz no produto de duas ou mais matrizes facilita a resolução do problema inicial. Com a decomposição de uma matriz por transformações de semelhança obtemos outras matrizes com as quais é mais fácil de operar e que são semelhantes à inicial. Será apresentada uma breve revisão de três das várias factorizações de matrizes: a decomposição de Schur, a forma canónica de Jordan e a factorização com uma matriz companheira.

1.2.1 - Decomposição de Schur¹

Das diversas formas de factorizar uma matriz, a decomposição de Schur é uma das mais úteis no cálculo numérico visto que, qualquer matriz $A \in M_n$, incluindo as matrizes defeituosas, pode ser factorizada desta forma [78], podendo ser obtida usando matrizes de transformação de semelhança bem condicionadas, como o são as matrizes ortogonais (ou unitárias). Por esta razão, na prática a decomposição de Schur é frequentemente utilizada [20, 30, 78].

Teorema 1.2. (Decomposição de Schur)

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, os valores próprios da matriz $A \in M_n$. Existe uma matriz unitária $U \in M_n$ tal que $U^*AU = T$ é uma matriz triangular superior. Como A e T são matrizes semelhantes os valores próprios de A dispõem-se ao longo da diagonal principal de T , isto é,

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \times \\ & \lambda_2 & \times & \cdots & \times \\ & & \lambda_3 & \cdots & \times \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} = T \quad (1.7)$$

Demonstração:

Provemos o teorema usando a indução matemática na ordem n de A .

O teorema é trivialmente verdadeiro para $n = 1$, usando $U = I_1$.

Suponhamos agora que o resultado é válido para qualquer matriz de ordem menor do que n e mostremos que também é válido para matrizes de ordem n .

Seja u um vector próprio de $A \in M_n$ associado ao valor próprio λ , $Au = \lambda u$, $u \neq 0$.

Suponhamos que u é um vector unitário, caso contrário normaliza-se o vector dividindo pela sua norma. É sempre possível seleccionar uma matriz V de dimensão $n \times (n-1)$ tal

que $U_1 = (u \ V) = (u, v_1, \dots, v_{n-1})$ seja matriz unitária. Neste sentido escolhemos $n-1$

vectores da base canónica de \mathbb{C}^n que, conjuntamente com u , formem um conjunto de vectores linearmente independentes.

De seguida utiliza-se o processo de Gram-Schmidt para os ortonormalizar. As colunas de V são constituídas por estes últimos $n-1$ vectores.

¹ Friedrich Heinrich Schur (1856-01-27 a 1932-03-18) – Matemático Alemão, nascido em Krotoszyn, Polónia

Visto que $AU_1 = A(u \ V) = (Au \ AV) = (\lambda u \ AV)$ então

$$U_1^* AU_1 = \begin{bmatrix} u^* \\ V^* \end{bmatrix} [\lambda u \ AV] = \begin{bmatrix} u^* \lambda u & u^* AV \\ V^* \lambda u & V^* AV \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Atendendo a que as colunas de U_1 formam um conjunto de vectores ortonormados tem-se

$$u^* \lambda u = \lambda(u^* u) = \lambda \text{ e } V^* \lambda u = \lambda(V^* u) = \lambda \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_{n-1}^* \end{bmatrix} u = \lambda \begin{bmatrix} v_1^* u \\ \vdots \\ v_{n-1}^* u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, de (1.8) resulta

$$U_1^* AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & u^* AV \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

onde $B = V^* AV \in M_{n-1}$. Exceptuando λ , os valores próprios de A e B são iguais.

Assim, por hipótese de indução existe uma matriz unitária V_1 tal que $V_1^* B V_1 = T_1$ é uma matriz triangular superior.

Seja $U = U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}$. Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}$ é uma matriz unitária porque V_1 o é, então U ,

produto de duas matrizes unitárias, é unitária. Tem-se ainda que

$$U^* AU = \left(U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} \right)^* AU_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}^* U_1^* AU_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

e atendendo a (1.9) obtemos

$$U^* AU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \lambda & u^* AV \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & u^* AV V_1 \\ 0 & B V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & u^* AV V_1 \\ 0 & V_1^* B V_1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Mas $V_1^* B V_1$ é a matriz triangular superior T_1 , assim $U^* AU = \begin{bmatrix} \lambda & u^* AV V_1 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix} = T$ é

uma matriz triangular superior. \square

Deste teorema resulta que qualquer matriz quadrada é unitariamente semelhante a uma matriz triangular. Além disso, se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e todos os seus valores próprios são reais então os correspondentes vectores próprios podem ser escolhidos reais. Neste caso a matriz U do teorema é real e ortogonal, conforme se constata no próximo exemplo.

Exemplo 1.10. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ que tem valores próprios

$-\frac{1674}{745}$, $-\frac{929}{1674}$ e $-\frac{745}{929}$, as matrizes unitária U e triangular superior T referidas no teorema são (por exemplo):

$$U = \begin{bmatrix} \frac{864}{3761} & \frac{238}{249} & \frac{514}{2803} \\ \frac{273}{953} & \frac{629}{2552} & \frac{849}{917} \\ -\frac{719}{773} & \frac{439}{2741} & \frac{645}{1952} \end{bmatrix} \quad e \quad T = \begin{bmatrix} \frac{1674}{745} & \frac{1197}{1537} & \frac{441}{803} \\ 0 & -\frac{929}{1674} & \frac{1873}{1295} \\ 0 & 0 & \frac{745}{929} \end{bmatrix}.$$

Este teorema permanece válido se a matriz T for considerada triangular inferior e embora apenas demonstrado para o caso de ser triangular superior, apenas se torna necessário uma redefinição da matriz unitária U_1 : o vector próprio u constituiria a última coluna de U_1 , em vez da primeira.

Exemplo 1.11. Relativamente ao exemplo anterior, uma possível decomposição da matriz A usando uma matriz T triangular inferior é

$$A = \begin{bmatrix} \frac{514}{2803} & \frac{238}{249} & \frac{864}{3761} \\ \frac{849}{917} & \frac{629}{2552} & \frac{273}{953} \\ \frac{645}{1952} & \frac{439}{2741} & \frac{719}{773} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{745}{929} & 0 & 0 \\ -\frac{1873}{1295} & -\frac{929}{1674} & 0 \\ \frac{441}{803} & \frac{1197}{1537} & \frac{1674}{745} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{514}{2803} & \frac{238}{249} & \frac{864}{3761} \\ \frac{849}{917} & \frac{629}{2552} & \frac{273}{953} \\ \frac{645}{1952} & \frac{439}{2741} & \frac{719}{773} \end{bmatrix}^T.$$

A factorização de Schur de uma matriz, usando uma matriz T triangular superior (ou inferior) não é única. As colunas da matriz unitária U , conhecidas pela designação de *vectores de Schur*, podem ser escolhidas de modo a que os valores próprios de A se disponham, numa ordem predefinida, ao longo da diagonal principal de T .

Na demonstração do teorema de Schur seleccionámos para a primeira coluna da matriz de transformação U um vector próprio associado a λ_1 . Este primeiro vector de Schur é sempre um vector próprio associado a algum $\lambda \in \sigma(A)$ mas, como veremos a seguir, os restantes vectores de Schur nem sempre o são, dependendo dos elementos não diagonais da matriz T .

Consideremos agora uma decomposição de Schur $U^*AU = T$ da matriz $A \in M_n$. Multiplicando-a à esquerda por $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, resulta $AU = UT$ e comparando as colunas j de ambos os membros da última igualdade obtemos

$$Au_j = \lambda_j u_j + \sum_{i=1}^{j-1} t_{ij} u_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

Conclui-se assim que o vector de Schur u_j é também vector próprio associado ao valor próprio λ_j de A se a j -ésima coluna da matriz T for $\lambda_j e_j$.

Retomando o exemplo 1.10. podemos afirmar que as duas primeiras colunas de U são vectores próprios associados a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, mas u_3 não é um vector próprio correspondente a $\lambda_3 = -1$. De facto o vector de Schur u_3 foi obtido por ortonormalização de Gram-Schmidt do conjunto de vectores $\{u_1, u_2, (1, -2, 1)^T\}$, sendo este último um vector próprio associado a $\lambda_3 = -1$.

Com base no teorema de Schur é possível deduzir conclusões de suma importância para matrizes hermíticas. Apresentam-se de seguida algumas particularidades desta família de matrizes.

Corolário 1.1. Qualquer matriz hermítica A é diagonalizável por intermédio de transformações unitárias, isto é, existe uma matriz unitária U tal que U^*AU é uma matriz diagonal.

Os valores próprios de A são reais e os vectores próprios podem ser escolhidos ortonormados.

Demonstração:

Considere-se A uma matriz hermítica, $A^* = A$.

Pelo teorema de Schur existe $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ unitária tal que $U^*AU = T$ é uma matriz triangular. E

$$T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^*AU = T,$$

o que mostra que T é hermítica. Mas uma matriz triangular e hermítica é diagonal.

Os valores próprios de A dispõem-se ao longo da diagonal principal de T , visto A e T serem matrizes semelhantes. Mas como os elementos principais de uma matriz hermítica têm que ser reais, os valores próprios de A são números reais.

Falta provar que os vectores próprios de A podem ser escolhidos ortonormados. Sendo T uma matriz diagonal, e atendendo ao dito anteriormente, podemos concluir que cada u_i é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_i \in \sigma(A)$, $i = 1, \dots, n$. Como U é uma matriz unitária as suas colunas são vectores ortonormados. \square

Seja $A \in M_n(\mathfrak{R})$ então se $A^* = A$ então é simétrica, logo os valores próprios de uma matriz real simétrica são também reais. Podemos seleccionar vectores próprios correspondentes também reais, logo a matriz U referida no corolário, sendo ortogonal, é ainda real.

Por outro lado que, se A não é simétrica, e dado que $p_A(\lambda)$ tem coeficientes reais, então pode ter valores próprios complexos que ocorrem aos pares de valores conjugados. Logo, na decomposição de Schur de uma matriz real as matrizes U e T podemos ter elementos complexos. No entanto é possível obter uma factorização real de uma matriz $A \in M_n(\mathfrak{R})$ com valores próprios complexos à custa de uma matriz ortogonal e outra quase triangular ou (na forma) de Hessenberg, a qual é conhecida por *forma real de Schur de A* .

Teorema 1.3. (Decomposição real de Schur)

Se $A \in M_n(\mathfrak{R})$, então existe uma matriz ortogonal $Q \in M_n(\mathfrak{R})$ tal que

$$Q^T A Q = T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1k} \\ 0 & T_{22} & \cdots & T_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{kk} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1.13)$$

onde T é uma matriz triangular por blocos e cada T_{ii} ou é um valor próprio real de A ou é uma matriz de dimensão 2×2 com um par de valores próprios complexos de A .

Demonstração:

Prove-se o teorema usando a indução matemática no número q de pares de valores próprios complexos da matriz A .

Para $q = 0$, o teorema é verdadeiro uma vez que neste caso podemos seleccionar uma matriz de transformação U real e ortogonal para a decomposição de Schur de A .

Admitamos válido o teorema para qualquer matriz real de ordem n , com menos de q pares de valores próprios complexos e provemos que também é válido para uma matriz $A \in M_n(\mathfrak{R})$ com q pares de valores próprios complexos.

Seja $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$, com $\beta \neq 0$. Visto que os vectores próprios associados a λ não podem ser reais então existem $x, y \in \mathfrak{R}^n$, com $y \neq 0$, tais que $A(x + iy) = \lambda(x + iy)$.

Daqui resulta que

$$Ax = \alpha x - \beta y, \quad Ay = \alpha y + \beta x. \quad (1.14)$$

e $\bar{u} = x - iy$ é um vector próprio associado a $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$.

Assim, $\{x, y\}$ geram um subespaço real de dimensão dois que, atendendo a (1.14), é invariante para A . A independência linear dos vectores x e y pode ser deduzida a partir das igualdades (1.14).

Se $y = \kappa x$, com $\kappa \neq 0$, então

$$(\alpha\kappa + \beta)x = Ay = A(\kappa x) = \kappa Ax = (\alpha\kappa - \beta\kappa^2)x$$

resultando $\kappa^2 = -1$, impossível em \mathfrak{R} . Através do método de Gram-Schmidt para ortonormalizar os vectores x e y , obtemos $\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$.

É sempre possível construir-se uma matriz ortogonal $Q_1 \in M_n(\mathfrak{R})$ cujas duas primeiras colunas sejam os vectores \tilde{x} e \tilde{y} , respectivamente. Então, atendendo a que o

subespaço de \mathfrak{R}^n gerado por $\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ também é invariante para A provar-se (de forma análoga à que usada na demonstração do teorema de Schur) que

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & B \end{bmatrix}, \text{ com } \sigma(T_{11}) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}.$$

Existe $\tilde{Q} \in M_{n-2}(\mathfrak{R})$ ortogonal, por hipótese, tal que $\tilde{Q}^T B \tilde{Q}$ é uma matriz triangular por blocos. Definindo $Q = Q_1 \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{bmatrix}$ asseguramos que $Q^T A Q$ é triangular por blocos.

□

Podemos sempre reordenar e colocar de acordo com uma ordem pré-definida, os blocos diagonais da matriz T , correspondentes a cada valor próprio real ou a cada par de valores próprios complexos de A .

Exemplo 1.12. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ que tem valores próprios $-i, i$ e 2 ,

as matrizes unitária U e triangular superior T referidas no teorema 1.3 são (por exemplo):

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-0.5-i}{\sqrt{7.5}} & \frac{2+i}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{-2+i}{\sqrt{7.5}} & \frac{-1+2i}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{0.5+i}{\sqrt{7.5}} & \frac{-2-i}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5i}{\sqrt{15}} & \frac{-9-2i}{\sqrt{30}} \\ 0 & i & \frac{\sqrt{2}(-4.5-6i)}{15} \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Vamos agora usar a estratégia sugerida na demonstração do teorema 1.5, baseada no conhecimento dos valores e vectores próprios de A , para obter uma factorização real desta matriz. Aos valores próprios 2 e i estão associados, respectivamente, os vectores próprios $v = (1, 0, 1)^T$ e $u = x + iy$, com $x = (0, -2, 1)^T$ e $y = (-2, 1, 0)^T$. Ortonormalizando o conjunto $\{x, y, v\}$ através do processo de Gram-Schmidt obtemos $\{q_1, q_2, q_3\}$, que definem as colunas da matriz de transformação

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-10}{\sqrt{105}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{105}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{105}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{29}{5\sqrt{21}} & \frac{16}{\sqrt{105}} \\ -\frac{\sqrt{21}}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma *forma real de Schur* de A , onde $\sigma(T_{11}) = \{-i, i\}$.

Na prática recorre-se ao método iterativo QR para obter a forma real de Schur de uma matriz A , depois de se reduzir a matriz dada à forma de Hessenberg por transformação de semelhança ortogonal.

Este é um processo iterativo baseado em repetidas factorizações QR de matrizes ortogonais semelhantes a A , onde na k -ésima etapa de aplicação do método, determina-se a factorização QR da matriz A_{k-1} : $A_{k-1} = Q_{k-1}R_{k-1}$, e define-se a “nova” matriz a factorizar $A_k = R_{k-1}Q_{k-1}$.

Sob certas condições a sucessão de matrizes A_0 (matriz na forma de Hessenberg), A_1 , A_2 , ..., converge para uma matriz quase-triangular ou triangular, que é uma forma real de Schur de A . Estudos detalhados sobre a convergência, a aplicação e formas de melhorar a eficiência do método QR podem ser encontradas em [17, 30].

O resultado apresentado de seguida, e que será utilizado na demonstração da forma canónica de Jordan não é mais que uma extensão do teorema de Schur que nos mostra que qualquer matriz quadrada é sempre semelhante a uma matriz diagonal por blocos [42].

Teorema 1.4. Se $A \in M_n$ tem valores próprios distintos λ_i com multiplicidade n_i , $i = 1, \dots, k$, então A é semelhante a uma matriz diagonal por blocos

$$\begin{bmatrix} T_{11} & & & 0 \\ & T_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_{kk} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

onde $T_{ii} \in M_{n_i}$ é triangular superior com todos os elementos diagonais iguais a λ_i .

Demonstração:

O teorema de Schur garante a existência de U tal que $U^*AU = T$ é triangular superior. Considere-se que os n valores próprios λ_i de A aparecem na diagonal principal da matriz T ordenados segundo o índice, de 1 a k .

Construa-se uma sequência de transformações de semelhança $P_{r,s}$ ($r < s$) de forma a anular os elementos desejados de T sem alterar a estrutura triangular desta matriz nem a sua diagonal principal.

Para tal defina-se $P_{r,s} = I_n + \alpha E_{r,s}$, onde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $E_{r,s}$ é a matriz que difere da matriz nula na posição (r,s) , onde tem o elemento 1.

Se $r \neq s$, $P_{r,s}^{-1} = I_n - \alpha E_{r,s}$ para cada escalar α .

Assim, a matriz $\tilde{T} = P_{r,s}^{-1} T P_{r,s}$, para $r < s$, difere de T apenas nos elementos das posições $(1,s), (2,s), \dots, (r,s), (r,s+1), (r,s+2), \dots, (r,n)$.

Obtemos assim

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{is} &= t_{is} + \alpha t_{ir}, & i = 1, \dots, r-1, \\ \tilde{t}_{rs} &= t_{rs} + \alpha(t_{rr} - t_{ss}) & \text{e} \quad \tilde{t}_{rj} = t_{rj} - \alpha t_{sj}, & j = s+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Se $t_{rr} \neq t_{ss}$, o elemento da posição (r,s) da matriz T pode ser transformado em zero sem se alterar a estrutura relevante da matriz, escolhendo $\alpha = -t_{rs} / (t_{rr} - t_{ss})$.

Anulando sequencialmente os elementos das posições $(n-1,n)$,

$$\begin{aligned} &(n-2,n-1), (n-2,n), \\ &(n-3,n-2), (n-3,n-1), (n-3,n), \\ &\dots, \\ &(1,2), (1,3), \dots, (1,n) \end{aligned}$$

da matriz T , através de transformações de semelhança $P_{r,s}$.

Quando $t_{rr} \neq t_{ss}$, os zeros criados até uma determinada etapa não são alterados com as posteriores transformações e a matriz resultante, semelhante a A , e que tem a forma pretendida. \square

No caso em que os valores próprios de $A \in M_n(\mathbb{R})$ são todos reais, a matriz de semelhança, que permite transformar A para uma matriz diagonal por blocos, pode ser escolhida real.

1.2.2. Decomposição de Jordan²

Já anteriormente vimos que uma matriz quadrada hermítica (simétrica se for real), ou uma matriz com valores próprios distintos, é semelhante a uma matriz diagonal. No entanto nem todas as matrizes complexas são semelhantes a matrizes diagonais. A matriz triangular superior, mais próxima de uma matriz diagonal, em que podemos transformar por semelhança qualquer matriz é a forma canónica de Jordan. Esta decomposição é classificada de função descontínua da

matriz A por Demmel [20] e Golub [30], em oposição à factorização de Schur, argumentando que pequenas perturbações numa matriz defeituosa podem alterar completamente a sua forma de Jordan.

Definição 1.10. Um *bloco de Jordan* é uma matriz quadrada da forma

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_r, \quad \lambda \in \mathbf{C}. \quad (1.15)$$

Esta matriz tem um único valor próprio λ com multiplicidade algébrica igual à sua ordem.

Para a demonstração da existência de uma decomposição de Jordan de qualquer matriz quadrada complexa apresenta-se o seguinte teorema que virá a ser de extrema utilidade.

Teorema 1.5. Dada $A \in M_n$ estritamente triangular superior existem uma matriz invertível S e números naturais n_1, n_2, \dots, n_m com $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 1$ e $\sum_{i=1}^m n_i = n$ tais que

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & & 0 \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_m}(0) \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Demonstração:

Mais uma vez será utilizada a indução matemática em n para a demonstração do presente teorema.

Para $n = 1$, $A = 0$ e o resultado é trivial.

² Marie Ennemond Camille Jordan (1838-01-05 a 1922-01-22) – Matemático Francês, nascido em Lyon, França

Suponhamos agora que o teorema é válido para qualquer matriz nas condições do teorema com ordem inferior que n .

Considere-se a matriz $A \in M_n$ estritamente triangular superior, fragmentada em blocos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a^T \\ 0 & B \end{bmatrix}, \text{ com } a^T = (a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}).$$

Então por hipótese de indução, existe $\tilde{S} \in M_{n-1}$ invertível tal que

$$\tilde{S}^{-1} B \tilde{S} = \begin{bmatrix} J_{k_1}(0) & & & 0 \\ & J_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_p}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k_1}(0) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix},$$

com $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p \geq 1$, $\sum_{i=1}^p k_i = n-1$ e $J \in M_{n-1-k_1}$.

Daqui resulta que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^T \tilde{S} \\ 0 & \tilde{S}^{-1} B \tilde{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1}(0) & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} = A_1,$$

onde $a^T \tilde{S} = (a_1^T \ a_2^T) \in M_{1,n-1}$.

Procederemos agora à anulação dos elementos de a_1^T , recorrendo para isso à matriz de semelhança

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & a_1^T (J_{k_1}(0))^T & 0 \\ 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-k_1} \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

de modo a que permaneçam inalterados os restantes elementos da matriz A_1 .

Assim,

$$Z^{-1} A_1 Z = \begin{bmatrix} 0 & \beta e_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1}(0) & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} = A_2, \text{ onde } \beta = a_1^T e_1.$$

Podemos ter duas possibilidades:

1. A primeira coordenada de a_1^T é não nula ($\beta \neq 0$).

Neste caso transformamos βe_1^T num vector normalizado à custa de

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & I_{k_1} & 0 \\ 0 & 0 & \beta I_{n-1-k_1} \end{bmatrix}, \text{ obtendo-se } A_3 = \begin{bmatrix} 0 & e_1^T & a_2^T \\ 0 & J_{k_1}(0) & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}.$$

$$\text{Definindo } \mathcal{R}_i = \begin{bmatrix} I_{k_i+1} & -(e_{i+1} a_2^T) J^{i-1} \\ 0 & I_{n-1-k_i} \end{bmatrix}, i=1,2,\dots, \text{ tem-se } \mathcal{R}_i^{-1} = \begin{bmatrix} I_{k_i+1} & (e_{i+1} a_2^T) J^{i-1} \\ 0 & I_{n-1-k_i} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathcal{R}_i^{-1} \begin{bmatrix} J_{k_i+1}(0) & (e_i a_2^T) J^{i-1} \\ 0 & J \end{bmatrix} \mathcal{R}_i = \begin{bmatrix} J_{k_i+1}(0) & (e_{i+1} a_2^T) J^i \\ 0 & J \end{bmatrix}.$$

Como $A_3 = \begin{bmatrix} J_{k_1+1}(0) & e_1 a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix}$, aplicando-lhe sucessivamente as transformações de

semelhança \mathcal{R}_i , com k_1 passos no máximo obtém-se que A_3 é semelhante à matriz

$$\begin{bmatrix} J_{k_1+1}(0) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \text{ a qual tem a forma desejada.}$$

2. Se $\beta = 0$.

Assim A_2 é semelhante por permutação à matriz $\begin{bmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^T \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$. Mas por

hipótese de indução existe $\tilde{S} \in M_{n-k_1}$ invertível tal que $\tilde{S}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix} \tilde{S} = \tilde{J}$.

Daqui resulta que A_2 é semelhante a $\begin{bmatrix} J_{k_1}(0) & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix}$, podendo ser necessário

reordenar os blocos de Jordan para que esta última matriz tenha a forma pretendida.

□

De notar que se $A \in M_n(\mathfrak{R})$ tiver a estrutura requerida no teorema então todas as matrizes de semelhança usadas na demonstração podem ser seleccionadas reais.

Exemplo 1.13. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$. A matriz $S = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é regular com inversa $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $S^{-1}AS = J_2(0)$.

Tendo este resultado válido poder-se-á agora enunciar e demonstrar o teorema de Jordan.

Teorema 1.6. (Forma canónica ou decomposição de Jordan)

Para cada $A \in M_m$ existe uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{m_p}(\lambda_p) \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

onde $p \leq m$, $m_1 + m_2 + \dots + m_p = m$ e $J_{m_1}(\lambda_1)$, $J_{m_2}(\lambda_2)$, ..., $J_{m_p}(\lambda_p)$ são os blocos de Jordan da matriz A que têm os valores próprios desta na diagonal principal.

Demonstração:

Pelo teorema de Schur, temos que qualquer matriz $A \in M_m$ é semelhante a uma matriz triangular superior T que tem os valores próprios daquela na sua diagonal principal dispostos numa ordenação predefinida. Seja U a matriz de semelhança.

O teorema 1.6. garante-nos a transformação por semelhança da matriz T , denominemo-la por V , numa matriz diagonal por blocos D , onde cada bloco diagonal D_{ii} , com $i = 1, 2, \dots, k \leq m$, é triangular superior com os elementos diagonais todos iguais (analogia com um bloco de Jordan).

Seja λ o único valor próprio do bloco D_{ii} . Então a matriz $A_i = D_{ii} - \lambda I$ é estritamente triangular superior. Logo, pelo teorema anterior, é possível determinar uma matriz invertível S_i tal que

$$S_i^{-1}A_iS_i = \begin{bmatrix} J_{i_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{i_m}(0) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$S_i^{-1} D_{ii} S_i = S_i^{-1} A_i S_i + \lambda I = \begin{bmatrix} J_{i_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{i_m}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Definindo $P = UV \begin{bmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{bmatrix}$ assegura-se que $P^{-1}AP$ é uma forma canónica de

Jordan da matriz A . \square

De notar que no teorema anterior os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ da matriz A não são necessariamente distintos (veja-se o exemplo 1.16), bem como as ordens dos blocos de Jordan. Por outro lado, temos que o número de blocos de Jordan correspondentes a um $\lambda_i \in \sigma(A)$ é a multiplicidade geométrica desse valor próprio, e ainda que a multiplicidade algébrica de λ_i é igual à soma das ordens de todos os blocos de Jordan que lhe estão associados.

No próximo exemplo ilustra-se o facto da redução à forma canónica de Jordan de uma matriz $A \in M_n(\mathfrak{R})$ que tem apenas valores próprios reais, pode ser obtida à custa de matrizes de semelhança também reais.

Exemplo 1.14. Uma decomposição de Jordan da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é

obtida à custa das matrizes $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{10}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. De facto,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = J.$$

Em analogia ao que se passa na factorização de Schur, a decomposição de Jordan de uma matriz também não é única, no entanto o número e a ordem dos blocos de Jordan

associados a cada valor próprio é fixo para cada matriz, o que varia é a ordenação dos referidos blocos na diagonal da matriz do segundo membro de (1.18).

A estrutura por blocos da forma de Jordan de uma dada matriz A (mas não a matriz de transformação de semelhança) é determinada pelos seus valores próprios e pelas características das matrizes $(A - \lambda_i I)^k$, com $k=1, \dots, m$ [42]. A título de exemplo, o menor inteiro k para o qual $\text{car}(A - \lambda_i I)^k = \text{car}(A - \lambda_i I)^{k+1}$ é a ordem do bloco com maior dimensão correspondente ao valor próprio λ_i . Pretendendo obter uma decomposição de Jordan de A usa-se o algoritmo fornecido pela demonstração do teorema de Jordan, o qual será aplicado para a construção da matriz de semelhança que por sua vez permite a obtenção de uma forma canónica de Jordan de uma matriz triangular superior de ordem 6, no seguinte exemplo.

Exemplo 1.15. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Principiemos por transformá-la

numa matriz diagonal por blocos: Anula-se o elemento da posição (4,6) através de $P_1 = I_6 + \alpha E_{4,6}$, com $\alpha = -a_{46} / (a_{44} - a_{66}) = -7/2$. Os restantes elementos que sofrem alteração são definidos por $a_{i6} + \alpha a_{i4}$, $i = 1, 2, 3$. Assim, a última coluna de $P_1^{-1} A P_1 = A_1$ é $(0, -14, 0, 0, 0, -1)^T$. A matriz $P_2 = I_6 + 7 E_{2,6}$ permite agora anular o elemento da posição (2,6) de A_1 . Tem-se que a última coluna de $A_2 = P_2^{-1} A_1 P_2$ é $(14, 0, 0, 0, 0, -1)^T$. Para finalizar esta primeira etapa, usa-se a transformação $P_3 = I_6 - 7 E_{1,6}$. Então, definindo $V = P_1 P_2 P_3$, tem-se

$$V^{-1} A V = V^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora transformar a matriz estritamente triangular superior $B_0 = A_{11} - 1I_5$ para a forma (1.16): Inicia-se esta etapa com a submatriz $B_0(4 : 5, 4 : 5)$,

normalizando o seu elemento 6 à custa de $\mathcal{N}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Definindo $T_1 = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1 \end{bmatrix}$, a

partir de B_0 obtém-se

$$B_1 = T_1^{-1} B_0 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 24 & 0 \\ & & 0 & 0 & 5 \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Continua-se com $B_1(3:5,3:5)$. É necessário anular o elemento 5. De acordo com (1.19)

a matriz de semelhança é $z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$. Como neste caso se tem $\beta = 0$ é necessário

reordenar por permutação $S_1 = (e_2 \ e_3 \ e_1)$ os blocos de Jordan. Assim, com

$T_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & z_1 S_1 \end{bmatrix}$ resulta que

$$B_2 = T_2^{-1} B_1 T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 15 & 0 & 3 \\ & 0 & 24 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Passemos de seguida à normalização do elemento 24 da submatriz $B_2(2:5,2:5)$. A

matriz de semelhança \mathcal{N}_2 difere da matriz identidade porque tem na posição (1,1) o 24.

Então, usando $T_3 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_2 \end{bmatrix}$, a matriz B_2 é transformada em

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_1^T & 3 \\ 0 & J_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(0) \end{bmatrix}, \text{ onde } a_1^T = (48 \ 15 \ 0).$$

Agora é necessário anular o 15 à custa de $z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e posteriormente

normalizar o 48 através de $\mathcal{N}_3 = \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}$. Daqui resulta $B_4 = \begin{bmatrix} J_4(0) & 3e_1 \\ 0 & J_1(0) \end{bmatrix}$

sendo $T_4 = Z_2 \mathcal{N}_3$. Para concluir esta segunda etapa falta anular o vector $3e_1$ que, de acordo com o caso 1 da demonstração do teorema 1.5, é conseguido com a transformação $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} I_4 & -3e_2 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix}$. Logo, para $S = T_1 T_2 T_3 T_4 \mathcal{R}$ tem-se

$$S^{-1} A_{11} S = S^{-1} B_0 S + I = \begin{bmatrix} J_4(0) & 0 \\ 0 & J_1(0) \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} J_4(1) & 0 \\ 0 & J_1(1) \end{bmatrix}.$$

Em conclusão, definindo $P = V \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix}$ assegura-se que $P^{-1} A P$

$$= \begin{bmatrix} J_4(1) & & 0 \\ & J_1(1) & \\ 0 & & J_1(-1) \end{bmatrix} \text{ é uma forma canónica de Jordan da matriz } A.$$

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ os m valores próprios reais, não necessariamente distintos, de uma matriz hermítica $A \in M_m$. Pelo corolário 1.4, existe uma matriz unitária U tal que

$$U^* A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Como $U^{-1} = U^*$, fazendo $P = U$ concluímos que uma factorização de Schur de uma matriz hermítica é igualmente uma decomposição de Jordan da mesma matriz.

No entanto a implicação inversa pode ser falsa se a matriz invertível P da fórmula (1.18) não for unitária.

Exemplo 1.18. A forma canónica de Jordan $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é obtida recorrendo à matriz } P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & -1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{ que não é}$$

ortogonal.

1.2.3 - Factorização com uma matriz companheira

A factorização de uma matriz através da matriz companheira é uma decomposição não unitária que é “análoga” à decomposição de Hessenberg, assim como a factorização de

Schur tem uma decomposição “análoga” não unitária na factorização de Jordan (Golub [30]).

O teorema seguinte diz-nos como construir a matriz de transformação de semelhança de modo a reduzir uma matriz à forma de matriz companheira.

Teorema 1.7. Sejam $A \in M_m$ e $v \in M_{m,1}$ um vector não nulo. Se a matriz (de Krylov) $P = P_{v,A} = (v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v)$ for regular então $P^{-1}AP$ é uma matriz companheira.

Demonstração:

Seja $A \in M_m$, suponhamos que $P = (v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v)$ é uma matriz regular para um dado vector não nulo v . Então o sistema de equações lineares

$$Pd = -A^m v \quad (1.19)$$

é possível com solução única $d = (d_0, d_1, \dots, d_{m-1})^T$. Provemos que $AP = PK$ sendo a matriz companheira K definida da seguinte forma

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -d_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -d_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots & -d_2 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & -d_{m-1} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Se por um lado temos $AP = A(v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v) = (Av, A^2v, A^3v, \dots, A^m v)$, por outro, e como Pe_j é igual à j -ésima coluna da matriz P temos que

$$PK = P(e_2, e_3, \dots, e_m, -d) = (Pe_2, Pe_3, \dots, Pe_m, -Pd) = (Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v, -Pd).$$

Visto que d é o vector solução do sistema (1.21) obtemos $PK = (Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v, A^m v)$.

Ou seja, $AP = PK \Leftrightarrow P^{-1}AP = K$. \square

Exemplo 1.16. Uma decomposição de $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ à custa de uma matriz

companheira é, por exemplo, $\begin{bmatrix} 8 & 5 & -62 \\ 8 & 15 & 1 \\ 7 & -14 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 & -62 \\ 8 & 15 & 1 \\ 7 & -14 & 28 \end{bmatrix}^{-1}$.

É importante referir que nem todas as matrizes quadradas são semelhantes a uma matriz companheira. Golub demonstra em [30] que a multiplicidade geométrica de cada valor próprio de uma matriz de Hessenberg superior $H \in M_n$, com os elementos da subdiagonal não nulos (isto é, $h_{i,i-1} \neq 0$ para cada i), é igual a um. Podemos concluir daqui que uma matriz quadrada só é semelhante a uma matriz companheira do seu polinómio característico se a multiplicidade geométrica de cada um dos seus valores próprios for igual a um. Contudo, o teorema seguinte estabelece que toda a matriz quadrada é semelhante a uma matriz diagonal por blocos sendo os blocos diagonais matrizes companheiras.

Teorema 1.9. Para cada matriz $A \in M_m$ existe uma matriz invertível V tal que

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} K_1 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_p \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

onde $p \leq m$, $m_1 + m_2 + \dots + m_p = m$ e K_i , $i = 1, \dots, p$, é uma matriz companheira a qual corresponde ao bloco de Jordan $J_{m_i}(\lambda_i)$ da matriz A .

Demonstração:

Pelo teorema que estabelece a forma canónica de Jordan, dada $A \in M_m$ existe uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_p}(\lambda_p) \end{bmatrix}.$$

Note-se que, para cada bloco de Jordan $J_{m_i}(\lambda_i)$, com $i = 1, \dots, p$, existe um vector não nulo $v \in M_{m_i,1}$ tal que a matriz

$$Q_i = (v, J_{m_i}(\lambda_i)v, (J_{m_i}(\lambda_i))^2 v, \dots, (J_{m_i}(\lambda_i))^{m_i-1} v). \quad (1.22)$$

é não singular (Zhang [83]). Assim, pelo teorema anterior, temos que $Q_i^{-1}J_{m_i}(\lambda_i)Q_i$ é uma matriz companheira que designaremos por K_i .

A matriz quadrada fraccionada por blocos $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & & 0 \\ & Q_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & Q_p \end{bmatrix}$, é regular com inversa

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q_p^{-1} \end{bmatrix}. \text{ Logo,}$$

$$Q^{-1} \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_{m_p}(\lambda_p) \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & K_p \end{bmatrix}.$$

Assim, fazendo $V = PQ$, obtemos o pretendido. \square

Exemplo 1.17. Seja $A = \begin{bmatrix} J_2(2) & 0 \\ 0 & J_1(2) \end{bmatrix}$. Como $P = (v, J_2(2)v) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é

invertível então $P^{-1}J_2(2)P = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = K$ é uma matriz companheira e $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ é uma factorização de A do tipo (1.21).

1.3 Critérios de Solubilidade da Equação de Lyapunov³

Uma equação matricial é uma equação envolvendo várias matrizes, havendo pelo menos uma desconhecida. Nesta secção iremos observar as diversas formas de representação das equações de Lyapunov, comparando-as.

1.3.1 Teoremas de Existência e Unicidade

Seja $A \in M_n$, e seja $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ o conjunto de valores próprios de A .

Teorema 1.10 A equação continua de Lyapunov $AX + XA^* + Q = 0$ tem uma única solução X para qualquer termo não homogéneo Q se e só se

$$\lambda + \mu \neq 0. \quad (1.23)$$

para qualquer $\lambda, \mu \in \sigma(A)$.

³ Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-06-06 a 1918-11-03) – Matemático Russo, nascido em Yaroslavl, Russia. Aluno de Pafnuty Lvovich Chebyshev e Professor de Aleksandr Nikolaevich Korokin e Yegor Ivanovich Zolotarev

Demonstração

A equação matricial de Lyapunov é equivalente sistema de equações $\tilde{A}\tilde{x} + \tilde{q} = 0$, onde

$$\tilde{A} = I \otimes A + A \otimes I, \quad \tilde{q} = \text{vec}(Q) \quad \text{e} \quad \tilde{x} = \text{vec}(X)$$

Assim é suficiente mostrar que a matriz

$$\tilde{A} = I \otimes A + A \otimes I,$$

É não singular se e só se

$$\lambda + \mu \neq 0,$$

para qualquer $\lambda, \mu \in \sigma(A)$

Pelo lema de Schur existe uma matrix unitária de n por n U tal que

$$R = U^* A U,$$

é uma matriz triangular superior e a diagonal principal está preenchida com os valores próprios de A .

Como a matriz

$$(U \otimes U)^* (I \otimes A + A \otimes I) (U \otimes U) = (I \otimes U^* A U + U^* A U \otimes I) = (I \otimes R + R \otimes I)$$

É claramente similar a $\tilde{A} = I \otimes A + A \otimes I$, e é triangular superior.

Podemos ver igualmente que α é valor próprio de \tilde{A} se e só se $\lambda + \mu \neq 0$, onde λ e μ são valores próprios de A , e que \tilde{A} é não singular se e só se $\lambda + \mu \neq 0$, para qualquer $\lambda, \mu \in \sigma(A)$. \square

Teorema 1.11 A Equação discreta de Lyapunov $A X A^* - X + Q = 0$ tem uma solução única X para qualquer termo não homogéneo Q se e só se

$$\lambda \mu \neq 1, \tag{1.24}$$

para qualquer $\lambda, \mu \in \sigma(A)$

Demonstração

Demonstração similar à demonstração do teorema anterior. \square

1.3.2 Equivalência de duas classes de equações de Lyapunov

Sejam $A \in M_n$, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ o conjunto de valores próprios de A , e o conjunto de matrizes dadas por $A \in S \Leftrightarrow 1 \notin \sigma(A)$.

Seja $A \in (S)$, então a transformada de Cayley $C(A)$ de A é dada por

$$C(A) = (A+I)(A-I)^{-1}.$$

A transformada de Cayley pode ser vista como uma extensão de função complexa

$$\phi(z) = \frac{z+1}{z-1},$$

que transforma $\mathbb{C} - \{1\}$ em $\mathbb{C} - \{1\}$, com $\phi(\phi(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Teorema 1.12 São válidas as seguintes afirmações:

1. A transformada de Cayley transforma S em S , e $C(C(A)) = A$, para todo $A \in S$.
2. Se $A \in S$, então $\lambda \in \sigma(A)$ se e só se $\phi(\lambda) \in \sigma(C(A))$.
3. A é estável se e só se $C(A)$ é convergente.
4. A é definida negativa se e só se $\|C(A)\|_2 < 1$.

Demonstração

1. Seja $A \in S$. Então $C(A)$ está bem definida. Pretende-se mostrar que $C(A) \in S$, ou seja pretende-se mostrar que 1 não é valor próprio de $C(A)$.

Seja (μ, w) o par de valores próprios para $C(A)$. Então

$$(A+I)(A-I)^{-1}w = \mu w \Leftrightarrow (A+I)w = \mu(A-I)w \Leftrightarrow (1-\mu)Aw = -(1+\mu)w,$$

Se $\mu=1$, então $w=0$, o que é impossível porque w é valor próprio de $C(A)$.

Donde se conclui que $C(A) \in S$.

Falta provar que $C(C(A)) = A$.

Por definição

$$C(A) = (A+I)(A-I)^{-1} = (A-I+2I)(A-I)^{-1} = I + 2I(A-I)^{-1},$$

logo,

$$\begin{aligned} C(C(A)) &= (C(A)+I)(C(A)-I)^{-1} = 2(I+(A-I)^{-1})(2(A-I)^{-1})^{-1} \\ &= (I+(A-I)^{-1})(A-I) = (A-I)+I = A \end{aligned}$$

2. Sejam $A \in S$, e (λ, v) um par de valores próprios de A .

Por definição

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A \pm I)v = (\lambda \pm 1)v, \text{ e}$$

$$C(A)v = (A+1)(A-1)^{-1}v = \phi(\lambda)v.$$

Ou seja, $(\phi(\lambda), v)$ é um par de valores próprios de $C(A)$.

3. A é uma matriz estável se e só se o raio espectral de $C(A) < 1$, i.e. $C(A)$ é convergente, pelo enunciado anteriormente.

4. Por definição

$$\begin{aligned} C(A)^T C(A) - I &= (A-I)^{-T} (A+I)^T (A+I) (A-I)^{-1} - I = \\ &= \left((A-I)^{-T} (A+I)^T (A+I) - (A-I)^T (A-I) \right) (A-I)^{-1} = (A-I)^T \left(2(A+A^T) \right) (A-I)^{-1} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$I - C(A)^T C(A) = (A-I)^T \left(-2(A+A^T) \right) (A-I)^{-1}$$

Se $\|C(A)\| < 1$, então é simétrica e definida positiva e admite a factorização de Cholesky

$$I - C(A)^T C(A) = LL^T.$$

Assim,

$$-2(A+A^T) = (A-I)^T LL^T (A-I)^{-1}$$

é igualmente simétrica e definida positiva. De igual modo se A é definida negativa, tem-se que $I - C(A)^T C(A)$ tem de ser necessariamente simétrica e definida positive.

Como tal $C(A)^T C(A) < I \Leftrightarrow \|C(A)\|_2 < 1$. \square

A transformada de Cayley estabelece uma conexão entre as equações contínuas e discretas de Lyapunov.

Teorema 1.13 Seja $A \in S$, então X é solução de equação contínua de Lyapunov

$$AX + XA^T + Q = 0, \quad (1.25)$$

se e só se X é solução de equação discreta de Lyapunov

$$C(A)XC(A)^T - X + Q_0 = 0, \quad Q_0 = 2(A-I)^{-1}Q(A-I)^{-T}, \quad (1.26)$$

Demonstração

Trivial.

1.3.3 Forma da Solução

Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$, e $\sigma(A)$ o conjunto dos valores próprios de A .

A é estável se e só se

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0, \quad \forall \lambda \in \sigma(A), \quad (1.27)$$

e é convergente se e só se

$$A^j \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad (1.28)$$

ou

$$|\lambda| < 1, \quad \forall \lambda \in \sigma(A). \quad (1.29)$$

Se A é estável, então $\lambda + \mu \neq 0, \quad \forall \lambda, \mu \in \sigma(A)$,

e a equação contínua de Lyapunov tem uma solução única para qualquer que seja a escolha do termo não homogéneo.

De igual forma se A é uma matriz real convergente, então $\lambda\mu \neq 1, \quad \forall \lambda, \mu \in \sigma(A)$ e a equação discreta de Lyapunov tem uma solução única para qualquer que seja a escolha do termo não homogéneo.

Teorema 1.14 Se A é uma matriz estável real, então a solução da equação contínua de Lyapunov (0.1) pode ser escrita da seguinte forma

$$X = \int_0^\infty e^{tA} Q e^{tA^T} dt. \quad (1.30)$$

Demonstração

Dado a estabilidade da matriz A , então o integral existe, e se $X(\tau)$ é dado por

$$X(\tau) = \int_0^\tau e^{tA} Q e^{tA^T} dt,$$

então

$$X(\tau) \rightarrow X, \quad \tau \rightarrow \infty,$$

Por continuidade temos,

$$AX(\tau) + X(\tau)A^T + Q \rightarrow AX + XA^T + Q.$$

Temos também que

$$\begin{aligned} AX(\tau) + X(\tau)A^T + Q &= \int_0^\tau (Ae^{tA} Q e^{tA^T} + e^{tA} Q e^{tA^T} A^T) dt + Q \\ &= \int_0^\tau \frac{d}{dt} (e^{tA} Q e^{tA^T}) dt + Q = e^{\tau A} Q e^{\tau A^T} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ou seja, $AX + XA^T + Q = 0$. \square

Teorema 1.15 Se A é uma matriz real convergente, então a solução da equação discreta de Lyapunov (0.2) pode ser reescrita da seguinte forma

$$X = \sum_{j=0}^{\infty} A^j Q (A^T)^j. \quad (1.31)$$

Demonstração

Seja

$$X_n = \sum_{j=0}^{n-1} A^j Q (A^T)^j$$

Temos que

$$AX_n A^T - X_n + Q = A^n Q (A^T)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

falta verificar que a sequência $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ é convergente.

Para tal é suficiente provar que a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j Q (A^T)^j,$$

é absolutamente convergente, i.e.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|A^j Q (A^T)^j\|_2 < \infty.$$

Se $\|A\| < 1$ seria imediato, mas apenas sabemos que A é convergente, ou seja $\rho(A) < 1$.

De modo geral,

$$\|A^j\|_2^{\frac{1}{j}} \rightarrow \rho(A), \quad j \rightarrow \infty,$$

Ou seja existe N inteiro tal que

$$\rho - \frac{1-\rho}{2} < \|A^n\|_2^{\frac{1}{n}} < \rho + \frac{1-\rho}{2} < 1, \quad n \geq N.$$

Este resultado deriva da teoria espectral da álgebra de Banach.

Sejam $\varepsilon = \|A_N\|_2 < 1$ e $C = \max\{\|A^r\|_2 : r = 0, 1, 2, \dots, N-1\} < \infty$.

Assim é possível estimar

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \|A^j Q (A^T)^j\|_2 &\leq \|Q\|_2 \sum_{j=0}^{\infty} \|A^j\|_2^2 \\ &= \|Q\|_2 \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} \|A^{qN+r}\|_2^2 \leq \|Q\|_2 \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} \varepsilon^{2q} \|A^r\|_2^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq C^2 N \|Q\|_2 \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^{2q} = C^2 N \|Q\|_2 \frac{1}{1-\varepsilon^2} < \infty$$

Podemos assim concluir

$$X = \sum_{j=0}^{\infty} A^j Q (A^T)^j,$$

está bem definida e satisfaz $AXA^T - X + Q = 0$. \square

1.3.4 A estrutura das soluções

Teorema 1.16 Seja A uma matriz quadrada real tal que $\lambda + \mu \neq 0$, para $\lambda, \mu \in \rho(A)$, e seja X a solução da equação contínua de Lyapunov (0.1). Então as afirmações seguintes são verdadeiras:

- Se Q é simétrica, então X é simétrica.
- Se A é estável, e se Q é simétrica e (semi)definida positiva, então X é simétrica e (semi)definida positiva.

Demonstração

Através de transposição, temos que X e X^T satisfazem a mesma equação. Pelo teorema da unicidade Teorema 1.10 temos $X = X^T$.

A segunda afirmação decorre da aplicação de (1.30). \square

Teorema 1.17 Seja A uma matriz quadrada tal que $\lambda\mu \neq 1$, para $\lambda, \mu \in \rho(A)$, e seja X a solução da equação discreta de Lyapunov (0.2). Então as afirmações seguintes são verdadeiras:

- Se Q é simétrica, então X é simétrica.
- Se A é estável, e se Q é simétrica e (semi)definida positiva, então X é simétrica e (semi)definida positiva.

Demonstração

Através de transposição, temos que X e X^T satisfazem a mesma equação. Pelo teorema da unicidade Teorema 1.11 temos $X = X^T$.

A segunda afirmação decorre da aplicação de (1.31). \square

Neste trabalho incidiremos quase exclusivamente no caso especial de quando A é uma matriz real estável (convergente) e $Q = BB^T$, onde B é uma matriz real. Se A é uma

qualquer matriz quadrada real tal que AB está definida, então o subespaço de Krylov $K_l(A, B)$ é dado por

$$K_l(A, B) = \text{Ran} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{l-1}B \end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (1.32)$$

É claro que $K_l(A, B) \subseteq K_{l+1}(A, B)$ para $l = 1, 2, \dots$, e existe um inteiro m tal que $K_m(A, B) = K_l(A, B)$, para todo o $l \geq m$.

A m chamamos o grau de B sobre A .

O subespaço de Krylov

$$K(A, B) = K_m(A, B), \quad (1.33)$$

É o invariante mais pequeno de A que contém $\text{Ran } B$.

Teorema 1.18 Seja A uma matriz quadrada real tal que $\lambda + \mu \neq 0$, para $\lambda, \mu \in \rho(A)$, e seja B uma matriz real tal que AB está definida, e seja X a solução da equação continua de Lyapunov

$$AX + XA^T + BB^T = 0. \quad (1.34)$$

Seja V a matriz com colunas ortonormais, tal que $\text{Ran } V = K(A, B)$. Então

$$X = VYV^T, \quad (1.35)$$

onde Y é a única solução de equação reduzida

$$HY + YH^T + V^T BB^T V = 0, \quad (1.36)$$

com $H = V^T AV$.

Demonstração

Por definição $\text{Ran } V = K(A, B)$ é invariante de A , ou seja $AV = VH$, com $H = V^T AV$.

Sabemos que $\sigma(H) \subset \sigma(A)$, que por sua vez implica que a equação (1.36) tem uma solução única Y . Seja (α, x) um par de valores próprios de H . Então $\alpha x = \alpha H$, e assim $\alpha Vx = VHx = AVx$, donde (α, Vx) é um par de valores próprios de A .

Seja Y a solução única de (1.36). Então VYV^T é a solução única de equação original de Lyapunov (1.34).

Assim, temos

$$\begin{aligned} AVYV^T + VYV^T A^T + BB^T &= VHTV^T + VV^T BB^T VV^T \\ &= V(HY + YH^T + V^T BB^T V)V^T = 0, \end{aligned}$$

porque $\text{Ran } B \subseteq \text{Ran } V$, e Y é a solução da equação (1.36).

Pelo teorema da unicidade, Teorema 1.10, temos $X = VYV^T$. \square

Teorema 1.19 Sejam A uma matriz real estável e B uma matriz real tal que AB está definida, e X a solução de

$$AX + XA^T + BB^T = 0.$$

Então temos $\text{Ran } X = K(A, B)$.

Demonstração

Pelo Teorema 1.18 temos que

$$\text{Ran } X \subseteq K(A, B),$$

porque $\lambda + \mu \neq 0$, para $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Contudo como A é estável é possível aplicar o Teorema 1.14, e temos

$$X = \int_0^{\infty} e^{tA} BB^T e^{tA^T} dt.$$

Ou seja $\text{Ran } X \supseteq K(A, B)$, ou ainda $\text{Ker } X \subseteq K(A, B)^\perp$.

Se $Xv = 0$, então

$$0 = v^T Xv = \int_0^{\infty} v^T e^{tA} BB^T e^{tA^T} v dt,$$

Ou seja, $v^T e^{tA} B = 0$, $t \geq 0$.

Derivando sucessivamente em ordem a t , temos que,

$$v^T A^j e^{tA} B = 0, \quad t \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

e fazendo $t = 0$, temos $v^T A^j B = 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$ Ou seja $v \in K(A, B)^\perp$. \square

Estes dois teoremas e técnicas usadas na sua demonstração são igualmente usados para o caso discreto.

Especificamente temos os seguintes teoremas.

Teorema 1.20 Seja A uma matriz quadrada tal que $\lambda\mu \neq 1$, para $\lambda, \mu \in \rho(A)$, e seja B uma matriz real tal que AB está definida, e seja X a solução da equação contínua de Lyapunov

$$AXA^T - X + BB^T = 0.$$

Seja V a matriz com colunas ortonormais, tal que $\text{Ran } V = K(A, B)$. Então

$$X = VYV^T,$$

onde Y é a única solução de equação reduzida

$$HYH^T - Y + V^T BB^T V = 0,$$

com $H = V^T AV$.

Teorema 1.21 Sejam A uma matriz real estável e B uma matriz real tal que AB está definida, e X a solução de

$$AXA^T - X + BB^T = 0.$$

Então temos $\text{Ran } X = K(A, B)$.

2. Método Iterativo usando o produto de Kronecker

2.1 O produto de Kronecker⁴ de duas matrizes

O produto de Kronecker, depois do produto usual, é uma das mais importantes formas de multiplicar duas matrizes, tornando-se assim bastante útil no estudo de equações matriciais.

Definição 2.1. O *produto de Kronecker*, também designado por *produto tensorial* ou *produto directo*, de duas matrizes A e B de dimensões $m \times n$ e $s \times t$, respectivamente, é definido como sendo a matriz

$$A \otimes B = [a_{ij} B] = \begin{bmatrix} a_{11} B & a_{12} B & \dots & a_{1n} B \\ a_{21} B & a_{22} B & \dots & a_{2n} B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} B & a_{m2} B & \dots & a_{mn} B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

de dimensão $(ms) \times (nt)$.

Exemplo 2.1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = [1 \ 3 \ -1 \ 1]$.

$$\text{Tem-se } A \otimes C = \begin{bmatrix} 1C \\ 0C \\ -1C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C \otimes B = [1B \ 3B \ -1B \ 1B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 3 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 12 & 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$B \otimes C = \begin{bmatrix} 2C & 1C \\ 0C & 4C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 12 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

O produto de Kronecker é usado de modo a permitir representações de equações matriciais mais convenientes à sua resolução.

⁴ Leopold Kronecker (1823-12-07 a 1891-12-29) - Matemático Alemão, nascido em Liegnitz, Prússia (actual Legnica, Polónia). Aluno de Peter Gustav Dirichlet e Professor de Georg Cantor

Consideramos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. Sejam $A \in M_m$, $B \in M_n$ e $C, D \in M_{m,n}$. Então

1. $\text{vec}(AC) = (I_n \otimes A)\text{vec}(C)$
2. $\text{vec}(CB) = (B^T \otimes I_m)\text{vec}(C)$
3. $\text{vec}(C \pm D) = \text{vec}(C) \pm \text{vec}(D)$

Demonstração:

1. Atendendo às definições da função vec e do produto de Kronecker temos

$$(I_n \otimes A)\text{vec}(C) = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ac_1 \\ Ac_2 \\ \vdots \\ Ac_n \end{bmatrix} = \text{vec}(Ac_1, Ac_2, \dots, Ac_n) = \text{vec}(AC).$$

2. Com base nas apresentadas anteriormente, podemos reescrever a segunda igualdade da seguinte forma

$$(B^T \otimes I_m)\text{vec}(C) = \begin{bmatrix} b_{11}I_m & b_{21}I_m & \cdots & b_{n1}I_m \\ b_{12}I_m & b_{22}I_m & \cdots & b_{n2}I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n}I_m & b_{2n}I_m & \cdots & b_{nn}I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n b_{j1}I_m c_j \\ \sum_{j=1}^n b_{j2}I_m c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{jn}I_m c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n b_{j1} c_j \\ \sum_{j=1}^n b_{j2} c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{jn} c_j \end{bmatrix}.$$

No primeiro membro da igualdade 2 temos que a coluna k da matriz produto CB , que resulta da multiplicação de cada uma das linhas de C pela coluna k da matriz B , é dada por

$$\begin{bmatrix} c_{11}b_{1k} + c_{12}b_{2k} + \cdots + c_{1n}b_{nk} \\ c_{21}b_{1k} + c_{22}b_{2k} + \cdots + c_{2n}b_{nk} \\ \vdots \\ c_{m1}b_{1k} + c_{m2}b_{2k} + \cdots + c_{mn}b_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} b_{1k} + \cdots + \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{bmatrix} b_{nk} = c_1 b_{1k} + \cdots + c_n b_{nk}. \quad (1.8)$$

Assim, $\text{vec}(CB) = \text{vec}\left(\sum_{j=1}^n c_j b_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^n c_j b_{jk}, \dots, \sum_{j=1}^n c_j b_{jn}\right)$.

3. Considerem-se C e D fraccionadas por colunas,

$$\text{vec}(C \pm D) = \text{vec}((c_1 \pm d_1, \dots, c_n \pm d_n)) = \begin{bmatrix} c_1 \pm d_1 \\ \vdots \\ c_n \pm d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \text{vec}(C) \pm \text{vec}(D)$$

□

Lema 2.1 No Produto de Kronecker são válidas as seguintes relações:

1. Sejam $A \cdot C$ e $B \cdot D$ produtos bem definidos, então

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D)$$
2. Se A e B são invertíveis, então $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;
3. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

Lema 2.2 Sejam $\lambda(A)$ e $\mu(B)$ os espectros de $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, respectivamente. Então

$$\lambda(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j : \lambda_i \in \lambda(A), \mu_j \in \mu(B), i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$$

De seguida dar-se-á alguns resultados acerca de métodos iterativos.

Seja $A = M - N$, então os pares de matrizes (M, N) de A são denominados partição de A se $\det(A) \neq 0$ uma partição é convergente se $\rho(M^{-1}N) < 1$, onde $\rho(C)$ denota o espectro radial da matriz C . A partição descrita detêm o seguinte método iterativo:

$$Ax = Mx - Nx = b, \text{ ou seja } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b = Rx + c.$$

Assim é possível definir $x_{m+1} = Rx_m + c$ como o método iterativo.

Lema 2.3 Seja $\| \cdot \|$ o operador norma ($\|R\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Rx\|}{\|x\|}$)

Se $\|R\| < 1$, então $x_{m+1} = Rx_m + c$ converge para qualquer x_0 .

Lema 2.4 Para todos os operadores norma $\rho(R) \leq \|R\|$. Para todo R e para todo $\varepsilon > 0$ existe um operador norma $\|R\|_* \leq \rho(R) + \varepsilon$. A norma $\| \cdot \|_*$ depende de R e ε .

Teorema 2.2. A iteração $x_{m+1} = Rx_m + c$ converge para a solução de $Ax=b$ para todos os x_0 e para todos os b se e só se $\rho(R) < 1$.

2.2 Formulação usando o produto de Kronecker

A forma mais rudimentar de solucionar a equação matricial de Lyapunov (0.1) consiste em transformá-la num sistema de equações lineares e posteriormente seleccionar um método (numérico ou não) para resolver o sistema de equações lineares obtido.

Pormenorizando, considere-se a equação (0.1) onde $A = (a_{ij}) \in M_m$, $Q = (q_{ij}) \in M_m$ são dadas e $X = (x_{ij}) \in M_m$ é desconhecida. Então, efectuando os produtos de matrizes, de

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{1j} x_{jm} \\ \sum_{j=1}^m a_{2j} x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{2j} x_{jm} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{mj} x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{mj} x_{jm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m x_{1j} a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^m x_{1j} a_{mj} \\ \sum_{j=1}^m x_{2j} a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^m x_{2j} a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m x_{mj} a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^m x_{mj} a_{mj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{bmatrix} = 0$$

Somando as matrizes coluna a coluna, obtemos o sistema com m^2 equações lineares e igual número de incógnitas seguinte

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_{j1} + \sum_{j=1}^m x_{1j} a_{1j} + q_{11} = 0 \\ \sum_{j=1}^m a_{2j} x_{j1} + \sum_{j=1}^m x_{2j} a_{1j} + q_{21} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{mj} x_{j1} + \sum_{j=1}^m x_{mj} a_{1j} + q_{m1} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{1j} x_{jm} + \sum_{j=1}^m x_{1j} a_{mj} + q_{1m} = 0 \\ \sum_{j=1}^m a_{2j} x_{jm} + \sum_{j=1}^m x_{2j} a_{mj} + q_{2m} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{mj} x_{jm} + \sum_{j=1}^m x_{mj} a_{mj} + q_{mm} = 0 \end{array} \right.$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_{j1} + \sum_{j=1}^m x_{ij} a_{1j} + q_{i1} = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} x_{jm} + \sum_{j=1}^m x_{ij} a_{mj} + q_{im} = 0, & i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

e, mais simplesmente, pode ser escrito por

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_{jk} + \sum_{j=1}^m x_{ij} a_{kj} + q_{ik} = 0 \\ i = 1, 2, \dots, m \text{ e } k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.2)$$

Exemplo 2.2

A equação matricial $\begin{bmatrix} -\frac{9}{44} & \frac{27}{88} & -\frac{1}{8} \\ \frac{19}{66} & -\frac{35}{132} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{44} & -\frac{3}{88} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} -\frac{9}{44} & \frac{19}{66} & \frac{1}{44} \\ \frac{27}{88} & -\frac{35}{132} & -\frac{3}{88} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 9 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ é

equivalente ao sistema, cuja matriz dos coeficientes é

$$\begin{bmatrix} -9/22 & 27/88 & -1/8 & 27/88 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & 0 \\ 19/66 & -31/66 & 1/12 & 0 & 27/88 & 0 & 0 & -1/8 & 0 \\ 1/44 & -3/88 & -7/88 & 0 & 0 & 27/88 & 0 & 0 & -1/8 \\ 19/66 & 0 & 0 & -31/66 & 27/88 & -1/8 & 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 19/66 & 0 & 19/66 & -35/66 & 1/12 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 19/66 & 1/44 & -3/88 & -37/264 & 0 & 0 & 1/12 \\ 1/4 & 0 & 0 & -3/88 & 0 & 0 & -7/88 & 27/88 & -1/8 \\ 0 & 1/44 & 0 & 0 & -3/88 & 0 & 19/66 & -37/264 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1/44 & 0 & 0 & -3/88 & 1/44 & -3/88 & 1/4 \end{bmatrix}$$

se considerarmos o vector das incógnitas

$$X = [x_{11} \ x_{21} \ x_{31} \ x_{12} \ x_{22} \ x_{32} \ x_{13} \ x_{23} \ x_{33}]^T.$$

Obtemos assim a solução,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{6626}{135} & \frac{5629}{126} & \frac{1187}{70} \\ \frac{25796}{329} & \frac{3755}{51} & \frac{2066}{79} \\ \frac{2311}{44} & \frac{12387}{190} & \frac{2107}{50} \end{bmatrix}$$

De reparar que, para definirmos a matriz dos coeficientes no sistema do exemplo anterior foi necessário considerar os elementos da matriz X (e também os de Q) ordenados de modo apropriado como vectores. Uma possível ordenação é a definida em (1.7) pelo operador (ou função) vec , que arruma os elementos de uma matriz, coluna a coluna, num vector. Usando esta ordenação os vectores dos termos independentes e das incógnitas do sistema (2.2) são

$$vec Q = (q_{11}, \dots, q_{m1}, q_{12}, \dots, q_{m2}, \dots, q_{1m}, \dots, q_{mm})^T \quad e$$

$$vec X = (x_{11}, \dots, x_{m1}, x_{12}, \dots, x_{m2}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{mm})^T,$$

respectivamente e, deste modo, a matriz dos coeficientes que tem ordem m^2 , pode ser definida recorrendo ao produto de Kronecker como veremos de seguida.

Considere-se a equação matricial de Lyapunov $AX + XA^T + Q = 0$. Aplicando a ambos os membros a função vec e atendendo ao teorema 2.1 tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= vec(AX + XA^T + Q) = vec(AX) + vec(XA^T) + vec(Q) \\ &= (I_m \otimes A)vec(X) + \left((A^T)^T \otimes I_m \right)vec(X) + vec(Q) \\ &= (I_m \otimes A + A \otimes I_m)vec(X) + vec(Q). \end{aligned}$$

Então o sistema de m^2 equações lineares (2.2), que é equivalente à equação de Lyapunov (0.1), pode ser definido, na forma matricial, por

$$\left[(I_m \otimes A) + (A \otimes I_m) \right] vec(X) + vec(Q) = 0 \quad (2.3)$$

A matriz dos coeficientes do sistema anterior pode ser, naturalmente, fraccionada por blocos do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} A + a_{11}I_m & a_{21}I_m & \cdots & a_{m1}I_m \\ a_{12}I_m & A + a_{22}I_m & \cdots & a_{m2}I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m}I_m & a_{2m}I_m & \cdots & A + a_{mm}I_m \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Nesta matriz os blocos diagonais podem ser matrizes densas, dependendo dos elementos de A , no entanto os restantes blocos são matrizes diagonais ou nulas. O número de elementos nulos nesta matriz é, no mínimo, $m^2(m^2 - 2m + 1)$. Assim é provável que a matriz (2.4) seja esparsa, podendo mesmo ter um grau de esparsidade elevado para valores de m relativamente pequenos.

De facto, para $m = 4$, tem-se pelo menos 50% dos elementos nulos na matriz anterior. O exemplo seguinte ilustra esta situação.

Exemplo 2.3 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e, tem-se

$$I_3 \otimes A + A \otimes I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & & & 3 \\ 2 & 4 & 4 & & 2 & & 3 \\ 3 & 4 & 6 & & 2 & & 3 \\ 2 & & & 4 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & & 2 & 6 & 4 & 4 \\ & & 2 & 3 & 4 & 8 & 4 \\ 3 & & 4 & & 6 & 2 & 3 \\ & 3 & & 4 & 2 & 8 & 4 \\ & & 3 & & 4 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Note-se que os elementos nulos não foram assinalados propositadamente de forma a realçar a estrutura da matriz, que tem um grau de esparsidade de 44%.

A tabela seguinte mostra a percentagem mínima de zeros da referida matriz (2.4) para alguns valores da ordem da matriz A :

m	2	3	4	5	10	20
2	25					
3	33	44				
4	37.5	50	56			
5	40	53	60	64		
10	45	60	67.5	72	81	
20	47.5	63	71	76	85.5	90

Se a matriz coeficiente A da equação de Lyapunov não apresentar uma estrutura específica (em banda, triangular, simétrica, ...), então a matriz (2.4) também não apresentará estas características particulares, como podemos observar no exemplo 2.2. No entanto, no exemplo 2.3, a matriz (2.4) é simétrica em consequência de ambas as matrizes A e B o serem. Mais, se forem ambas triangulares então a matriz do sistema (2.3) também o poderá ser se para isso efectuarmos as trocas convenientes de linhas e colunas. Assim, se A possuir uma determinada estrutura esta pode ser transferida para a matriz (2.4).

Vamos agora supor que pretendemos determinar as soluções da equação de Lyapunov (0.1) transformando-a no sistema (2.3) e, posteriormente, usando uma estratégia eficiente de resolução de sistemas de equações lineares. A escolha do método a utilizar requer um conhecimento aprofundado das várias opções disponíveis e uma ponderação cuidadosa das vantagens e desvantagens face às características do problema concreto que se pretende resolver. Em particular temos que ter em atenção três das características da matriz coeficiente A , e que são:

1. A ordem,
2. O número de zeros que contêm,
3. A possibilidade de possuírem uma determinada estrutura que possa transferir-se para a matriz (2.4).

No caso da matriz A ser densa, com dimensão menor ou igual a 5 e não possuir uma determinada estrutura, é possível optar pelo método de eliminação de Gauss, usando uma estratégia de escolha do pivot, para evitar os problemas de instabilidade que se podem manifestar durante a aplicação do método. Se A tiver ordem razoável (maior que 6), mesmo que seja matriz densa, a matriz do sistema (2.3) já apresenta um grau de esparsidade superior a 64%, como podemos observar na tabela atrás. Neste caso é de todo conveniente o uso de um método iterativo (de Jacobi ou Gauss-Seidel, por exemplo), tendo em atenção às condições que garantem a convergência do método a utilizar.

Acerca deste assunto Datta [17] e Golub [30], apresentam de forma exaustiva de métodos para a resolução de sistemas com equações lineares, dedicando Golub um capítulo inteiro ao estudo pormenorizado dos sistemas com matrizes especiais (definidas positivas, em banda, simétricas e tridiagonais por blocos).

Brandts menciona um estudo sobre a aplicação do método iterativo SOR à resolução da equação (2.3) [12]. Este método que é apresentado detalhadamente por Starke em [6],

analisando ainda a determinação do valor óptimo do parâmetro ω do método, é segundo este autor, especialmente útil para resolver problemas em que apenas uma das matrizes coeficientes A tem determinante muito próximo de zero. Starke propõe um método híbrido ADSOR que compara com outras técnicas iterativas.

2.3 Método Iterativo para o Produto de Kronecker - KPIM

2.3.1. Introdução

Na análise de estabilidade de sistemas de controlo [14], temos necessidade de resolver as seguintes equações matriciais de Lyapunov:

$$\begin{aligned} AXA^* - X + Q &= 0; \\ AX + XA^* + Q &= 0; \end{aligned} \tag{2.5}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes dadas, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a incógnita.

De notar que Q, X são Hermitianas (or symmetric real) e matrizes definidas positivas. São equações deveras importantes em Teoria de Controlo, Comunicações e Sistemas de Energia (power systems) [14], bem como as Equações Matriciais de Sylvester.

Existem vários métodos para resolução das Equações Matriciais de Lyapunov. Por exemplo, para grandes (large) equações de Lyapunov é proposto usar o algoritmo GMRES [45]. Muitos dos métodos directos de resolução baseiam-se em transformações de matrizes, de forma a obter outras cuja solução seja facilmente calculada. A título de exemplo temos a forma canónica de Jordan [35.], a matriz companheira [11, 10] e a matriz de Hessenberg–Schur [3, 29].

Em áreas como Álgebra Matricial [30] os métodos iterativos são os mais populares, por exemplo, Starke and Niethammer apresentam um método iterativo para resolução da Equação de CT de Sylvester usando a técnica SOR (successive overrelaxation) [74], e Mukaidani et al. discutiram um algoritmo iterativo para as equações algébricas de Lyapunov generalizadas [53]. Para equações matriciais, soluções exactas são muito importantes, mas por vezes, para análise de estabilidade em teoria de controlo, não é necessário encontrar soluções exactas bastando para tal soluções aproximadas. Igualmente se no sistema de matrizes tivermos parâmetros incertos, pode não ser possível obter soluções exactas [22, 21, 25].

O uso do produto de Kronecker para expandir a equação matricial num sistema de equações da forma $Ax = b$ é o método mais convencional de obter as soluções.

Quando n é grande, aparecem dificuldades computacionais devido á memória computacional necessária para a computação e inversão de grandes matrizes de dimensão $(n^2) \times (n^2)$ ou ainda de $(2n^2) \times (2n^2)$.

Será evitado este problema, construindo algoritmos iterativos eficazes para o sistema linear $Ax = b$ que é obtido através do produto de Kronecker. Nestes algoritmos apenas é preciso guardar as matrizes A, X e Q na equação matricial (2.4), neste processo não será desfeita a esparsidade de A e apenas é necessária a utilização de matrizes simples.

No subcapítulo 2.2.3 será apresentado o KPIM para equações matriciais discretas de Lyapunov $AXA^* - X + Q = 0$ apresentando os algoritmos. No subcapítulo 2.2.7 mostrar-se-á a aplicação do KPIM às Equações Matriciais contínuas de Lyapunov $AX + XA^* + Q = 0$.

2.3.2. O KPIM para a equação matricial discreta de Lyapunov

Seja

$$AXA^* - X + Q = 0 \quad (2.6)$$

a equação matricial discreta de Lyapunov onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes dadas e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz pretendida. De referir ainda que Q, X são Hermitianas (or symmetric real) e definidas positivas.

Primeiro reescrevemos esta equação através do operador $vec(\cdot)$ da seguinte forma:

$$vec(AXA^T) - vec(X) + vec(Q) = 0$$

Do Teorema 1.2 e do lema 1.1, é equivalente a

$$(A \otimes A)vec(X) - vec(X) + vec(Q) = 0$$

Seja $vec(X) = x$ e $vec(Q) = b$, assim pode ser reescrita da forma $(A \otimes A)x - x + b = 0$ (2.7)

Onde x é um vector de tem dimensão n^2 formado pelas colunas de X , ou seja, $x = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T)$ e x_i é a coluna i de X ;

Similarmente $b = (b_1^T, b_2^T, \dots, b_n^T)$ e b_i é a i -ésima coluna de Q .

De (2.7) obtemos a seguinte iteração

$$x_{k+1} = (A \otimes A)x_k + b \quad (2.8)$$

a qual é denominada de KPIM da equação matricial (2.6).

Teorema 2.3. Se $\rho(A) < 1$, então a sequência iterativo (2.8) obtida de (2.6) é convergente.

Demonstração:

A matriz iterativa de (2.8) é $A \otimes A$. Como $\rho(A) < 1$, então existe $0 < r < 1$ tal que $\rho(A) < r < 1$.

Do Lema 2.2, temos $\rho(A \otimes A) = \rho^2(A) < r^2 < 1$, assim é possível encontrar uma norma matricial consistente tal que $\|A \otimes A\|_* \leq r^2$ [75]. Subtraindo $x = (A \otimes A)x + b$ a $x_k = (A \otimes A)x_{k-1} + b$ obtemos $x_k - x = (A \otimes A)(x_{k-1} - x)$.

Assim para alguns k e um vector inicial x_0 obtemos

$$\|x_k - x\|_* \leq \|A \otimes A\|_* \cdot \|x_{k-1} - x\|_* \leq \|A \otimes A\|_*^k \cdot \|x_0 - x\|_* \leq r^{2k} \|x_0 - x\|_*;$$

Logo a sequência iterativa (2.8) é convergente. \square

Proposição 2.1. Do Lema 2.2 sabemos que, se $\rho(A) < 1$, então $\rho(A \otimes A) = \rho^2(A)$ é inferior.

Exemplo 2.4. Se $\rho(A) = 0,5$, então $\rho(A \otimes A) = \rho^2(A) = 0,25$.

ALGORITMO 1	
1:	Obter a sequência iterativa de (2.7):
2:	$(A \otimes A)x - x + b = 0$
3:	Dados x_0 e k :
4:	for $m = 1, 2, \dots, k$ do
5:	for $i = 1, 2, \dots, n$ do
6:	$x_{i+1}^m = (A \otimes A)x_i^m + b_i$
7:	end for
8:	end for
9:	Dado $\varepsilon > 0$, seja $X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, se $\ X_k - X_{k-1}\ < \varepsilon$, então pára, e $X = X_k$ é a solução aproximada de (2.6); senão seja $k = k + 1$ e goto 3

Exemplo 2.4

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{9}{44} & \frac{27}{88} & -\frac{1}{8} \\ \frac{19}{66} & -\frac{35}{132} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{44} & -\frac{3}{88} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 9 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } X_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Aplicando o algoritmo exposto à equação de Lyapunov

$$A X A^* - X + Q = 0$$

temos que

$K = (A \otimes A)$ é a matriz obtida através do produto de Kronecker

$$K = \begin{bmatrix} \frac{81}{1936} & -\frac{243}{3872} & \frac{9}{352} & -\frac{243}{3872} & \frac{448}{4759} & -\frac{27}{704} & \frac{9}{352} & -\frac{27}{704} & \frac{1}{64} \\ -\frac{57}{968} & \frac{105}{1936} & -\frac{3}{176} & \frac{171}{1936} & -\frac{315}{3872} & \frac{9}{352} & -\frac{19}{528} & \frac{35}{1056} & -\frac{1}{96} \\ -\frac{9}{1936} & \frac{27}{3872} & -\frac{9}{352} & \frac{27}{3872} & -\frac{81}{7744} & \frac{27}{704} & -\frac{1}{352} & \frac{3}{704} & -\frac{1}{64} \\ -\frac{57}{968} & \frac{171}{1936} & -\frac{19}{528} & \frac{105}{1936} & -\frac{315}{3872} & \frac{35}{1056} & -\frac{3}{176} & \frac{9}{352} & -\frac{1}{96} \\ \frac{361}{4356} & -\frac{397}{5201} & \frac{19}{792} & -\frac{397}{5201} & \frac{76}{1081} & -\frac{35}{1584} & \frac{19}{792} & -\frac{35}{1584} & \frac{1}{144} \\ \frac{19}{2904} & -\frac{19}{1936} & \frac{19}{528} & -\frac{35}{5808} & \frac{35}{3872} & -\frac{35}{1056} & \frac{1}{528} & -\frac{1}{352} & \frac{1}{96} \\ -\frac{9}{1936} & \frac{27}{3872} & -\frac{1}{352} & \frac{27}{3872} & -\frac{81}{7744} & \frac{3}{704} & -\frac{9}{352} & \frac{27}{704} & -\frac{1}{64} \\ \frac{19}{2904} & -\frac{35}{5808} & \frac{1}{528} & -\frac{19}{1936} & \frac{35}{3872} & -\frac{1}{352} & \frac{19}{528} & -\frac{35}{1056} & \frac{1}{96} \\ \frac{1}{1936} & -\frac{3}{3872} & \frac{1}{352} & -\frac{3}{3872} & \frac{9}{7744} & -\frac{3}{704} & \frac{1}{352} & -\frac{3}{704} & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$$

$$1^{\text{a}} \text{ Iteração } X = \begin{bmatrix} \frac{2501}{276} & \frac{1250}{1193} & \frac{3369}{377} & \frac{225}{26} & \frac{843}{196} & \frac{5027}{615} & \frac{701}{714} & \frac{1529}{383} & \frac{3283}{360} \end{bmatrix}^T$$

$$5^{\text{a}} \text{ Iteração } X = \begin{bmatrix} \frac{6247}{685} & \frac{9049}{9230} & \frac{2913}{326} & \frac{2417}{281} & \frac{2308}{529} & \frac{2305}{282} & \frac{794}{815} & \frac{93615}{23404} & \frac{4442}{487} \end{bmatrix}^T$$

$$10^{\text{a}} \text{ Iteração } X = \begin{bmatrix} \frac{12613}{1383} & \frac{442}{451} & \frac{4298}{481} & \frac{4808}{559} & \frac{1261}{289} & \frac{2869}{351} & \frac{642}{659} & \frac{365839}{91460} & \frac{4743}{520} \end{bmatrix}^T$$

$$15^{\text{a}} \text{ Iteração } X = \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & \frac{1817}{1854} & \frac{4298}{481} & \frac{1617}{188} & \frac{1261}{289} & \frac{2869}{351} & \frac{642}{659} & \frac{367523}{91881} & \frac{4743}{520} \end{bmatrix}^T$$

$$16^{\text{a}} \text{ Iteração } X = \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & \frac{1817}{1854} & \frac{4298}{481} & \frac{1617}{188} & \frac{1261}{289} & \frac{2869}{351} & \frac{642}{659} & \frac{367527}{91882} & \frac{4743}{520} \end{bmatrix}^T$$

$$17^{\text{a}} \text{ Iteração } X = \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & \frac{1817}{1854} & \frac{4298}{481} & \frac{1617}{188} & \frac{1261}{289} & \frac{2869}{351} & \frac{642}{659} & \frac{367527}{91882} & \frac{4743}{520} \end{bmatrix}^T$$

De notar que a 16ª iteração é igual à 17ª. Por este motivo o processo é terminado, obtendo assim a solução

$$X = \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & \frac{1617}{188} & \frac{642}{659} \\ \frac{1817}{1854} & \frac{1261}{289} & \frac{367527}{91882} \\ \frac{4298}{481} & \frac{2869}{351} & \frac{4743}{520} \end{bmatrix} \text{ após 16 iterações.}$$

O Algoritmo 1 é possível de ser alterado, reduzindo o tempo de computação usando para isso a de composição de Hessenberg.

Seja $A = V^T H V$ a decomposição de Hessenberg de A , onde V é matriz ortogonal e H é a matriz superior de Hessenberg. Assim (2.6) é transformada num sistema equivalente usando $A = V^T H V$, ou seja $H V X V^T H^T - V X V^T + V Q V^T = 0$

Sejam, ainda $V X V^T = \hat{X}$, e $V Q V^T = \hat{Q}$. Obtemos assim

$$H \hat{X} H^T - \hat{X} + \hat{Q} = 0 \quad (2.9)$$

Consequentemente podemos resolver (2.9) usando KPIM.

ALGORITMO 2	
1:	Obter (2.9) e determinar a sequência iterativa similar a (2.7):
2:	$(H \otimes H)y - y + f = 0$ com $\text{vec}(\hat{X}) = y$ e $\text{vec}(\hat{Q}) = f$
3:	Dados y_0 e k , seja $h_{10} = 0$ e $y_0 = 0$
4:	for $m=1,2,\dots,k$ do
5:	for $i=1,2,\dots,n$ do
6:	$y_i^m = H \left(\sum_{j=i-1}^n h_{ij} y_j^{m-1} \right) + f_i$
7:	end for
8:	end for
9:	Dado $\varepsilon > 0$ e $Y_k = (y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k)$, se $\ Y_k - Y_{k-1}\ < \varepsilon$, então pára, e $X = V^T Y_k V$ é a solução aproximada de (2.6); Caso contrário seja $k = k + 1$ e goto 3

Exemplo 2.5

Sejam A , C e X as matrizes apresentadas no exemplo 2.4

Este algoritmo usa a matriz H obtida usando a decomposição de Hessenber da matriz A , e onde $H = PAP^T$.

Assim, obtemos as seguintes matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{964}{967} & -\frac{296}{3761} \\ 0 & -\frac{296}{3761} & \frac{964}{967} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$H = PAP^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{964}{967} & -\frac{296}{3761} \\ 0 & -\frac{296}{3761} & \frac{964}{967} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{9}{44} & \frac{27}{88} & -\frac{1}{8} \\ \frac{19}{66} & -\frac{35}{132} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{44} & -\frac{3}{88} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{964}{967} & -\frac{296}{3761} \\ 0 & -\frac{296}{3761} & \frac{964}{967} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{9}{44} & -\frac{82}{277} & -\frac{1739}{11690} \\ \frac{337}{1167} & \frac{445}{1719} & -\frac{989}{8703} \\ 0 & -\frac{11}{2906} & \frac{345}{2906} \end{bmatrix}$$

$K = (H \otimes H)$ é a matriz obtida através do produto de Kronecker da matriz H

$$K = \begin{bmatrix} \frac{81}{1936} & \frac{134}{2213} & \frac{317}{10418} & \frac{134}{2213} & \frac{659}{7520} & \frac{185}{4201} & \frac{317}{10418} & \frac{185}{4201} & \frac{53}{2395} \\ \frac{413}{6992} & \frac{514}{10217} & \frac{47}{2022} & \frac{331}{3872} & \frac{529}{6903} & \frac{84}{2497} & \frac{140}{3259} & \frac{154}{3999} & \frac{123}{7276} \\ 0 & -\frac{9}{11624} & -\frac{50}{2059} & 0 & -\frac{31}{27665} & -\frac{152}{4325} & 0 & -\frac{39}{69260} & -\frac{114}{6455} \\ \frac{413}{6992} & \frac{331}{3872} & \frac{140}{3259} & \frac{541}{10217} & \frac{529}{6903} & \frac{154}{3999} & \frac{47}{2022} & \frac{84}{2497} & \frac{123}{7276} \\ \frac{121}{1451} & \frac{321}{4294} & \frac{203}{6186} & \frac{321}{4294} & \frac{167}{2492} & \frac{141}{4793} & \frac{203}{6186} & \frac{141}{4793} & \frac{236}{18275} \\ 0 & -\frac{37}{33849} & -\frac{160}{4667} & 0 & -\frac{37}{37759} & -\frac{223}{7256} & 0 & -\frac{75}{174356} & -\frac{237}{17567} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{11624} & -\frac{31}{27665} & -\frac{39}{69260} & -\frac{50}{2059} & -\frac{152}{4325} & -\frac{114}{6455} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{33849} & -\frac{37}{37759} & -\frac{75}{174356} & -\frac{160}{4667} & -\frac{223}{7256} & -\frac{237}{17567} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{69792} & \frac{79}{175795} & 0 & \frac{79}{175795} & \frac{481}{34127} \end{bmatrix}$$

$$1^{\text{a}} \text{ Iteração } Y = \begin{bmatrix} \frac{1216}{107} & \frac{1430}{1827} & \frac{6771}{377} & -\frac{3529}{531} & \frac{942}{125} & -\frac{16921}{1880} & -\frac{278}{5431} & -\frac{5818}{1261} & \frac{1991}{244} \end{bmatrix}^T$$

$$5^{\text{a}} \text{ Iteração } Y = \begin{bmatrix} \frac{2164}{237} & -\frac{1747}{1047} & \frac{3806}{431} & -\frac{3378}{391} & \frac{3672}{685} & -\frac{2550}{301} & \frac{268}{911} & -\frac{4414}{1027} & \frac{2026}{249} \end{bmatrix}^T$$

$$10^{\text{a}} \text{ Iteração } Y = \begin{bmatrix} \frac{7825}{858} & -\frac{4004}{2383} & \frac{2243}{254} & -\frac{6073}{702} & \frac{1337}{250} & -\frac{6430}{759} & \frac{630}{2141} & -\frac{202}{47} & \frac{2026}{249} \end{bmatrix}^T$$

$$14^{\text{a}} \text{ Iteração } Y = \begin{bmatrix} \frac{12157}{1333} & -\frac{2391}{1423} & \frac{2243}{254} & \frac{2033}{235} & \frac{2321}{434} & -\frac{6430}{759} & \frac{251}{853} & -\frac{202}{47} & \frac{2026}{249} \end{bmatrix}^T$$

$$15^{\text{a}} \text{ Iteração } Y = \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & -\frac{1855}{1104} & \frac{2243}{254} & -\frac{2033}{235} & \frac{2321}{434} & -\frac{6430}{759} & \frac{251}{853} & -\frac{202}{47} & \frac{2026}{249} \end{bmatrix}^T$$

$$16^{\text{a}} \text{ Iteração } Y = \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & -\frac{1855}{1104} & \frac{2243}{254} & -\frac{2033}{235} & \frac{2321}{434} & -\frac{6430}{759} & \frac{251}{853} & -\frac{202}{47} & \frac{2026}{249} \end{bmatrix}^T$$

De notar que a 15ª iteração é igual à 16ª. Por este motivo o processo é terminado, obtendo assim a solução

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & -\frac{2033}{235} & \frac{251}{853} \\ -\frac{1855}{1104} & \frac{2321}{434} & -\frac{202}{47} \\ \frac{2243}{254} & -\frac{6430}{759} & \frac{2026}{249} \end{bmatrix}^T$$

após 15 iterações.

Para obter a solução final apenas é necessário fazer

$$X = P^T Y P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{964}{967} & -\frac{296}{3761} \\ 0 & -\frac{296}{3761} & \frac{964}{967} \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & -\frac{2033}{235} & \frac{251}{853} \\ -\frac{1855}{1104} & \frac{2321}{434} & -\frac{202}{47} \\ \frac{2243}{254} & -\frac{6430}{759} & \frac{2026}{249} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{964}{967} & -\frac{296}{3761} \\ 0 & -\frac{296}{3761} & \frac{964}{967} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12385}{1358} & \frac{1617}{188} & \frac{642}{659} \\ \frac{1817}{1854} & \frac{1261}{289} & \frac{367527}{91882} \\ \frac{4298}{481} & \frac{2869}{351} & \frac{4743}{520} \end{bmatrix}$$

Comparemos os tempos de computação necessários a cada um dos algoritmos expostos anteriormente.

O tempo de computação necessário no Algoritmo 1 é de $4n^3 - n^2$ em cada iteração, assim, para k iterações será necessário fazer $4kn^3 - kn^2$ operações. É ainda necessário guardar as matrizes A, Q, X_i e X_{i-1} , gastando para isso $4n^2$.

Quanto ao Algoritmo 2, temos:

1. Reduzir a matriz A a uma matriz de Hessenberg superior:

$$H = VAV^T \rightarrow \frac{5}{3}n^3$$

2. Determinar y_i em cada iteração, onde $i = 1, 2, \dots, n$

$$y_i \rightarrow 3n^2 + 2ni + 6n - 2:$$

Este processo de k iterações depende

$$k \left(\sum_{i=1}^n (3n^2 - 2ni + 6n - 2) \right) = 2kn^3 + 5kn^2 - 2kn.$$

3. Obter a aproximação da solução de (2.3):

$$X = V^T Y_k V \rightarrow 4n^3$$

4. Calculando o tempo necessária para guardar as matrizes:

$$H, V, Y_m, Y_{m-1}, \hat{Q} \rightarrow \frac{9}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1:$$

Assim o tempo necessário ao Algoritmo 2 é de

$$\left(\frac{17}{3} + 2k \right) n^3 + \left(5k + \frac{9}{2} \right) n^2 - \left(2k - \frac{3}{2} \right) n - 1.$$

Nota 2.1. Da análise anterior é possível verificar que o tempo dispendido pelo Algoritmo 2 é quase metade do tempo utilizado pelo Algoritmo 1 quando o número de iteração é grande, i.e., k é grande.

No Algoritmo 1 obtivemos $x_1^m, x_2^m, \dots, x_{i-1}^m$ quando se procedeu à determinação de x_i^m , assim é possível obter a sequência iterativa que é similar ao método de Gauss–Seidel:

$$x_i^m = A \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^m + \sum_{s=i}^n a_{is} x_s^{m-1} \right) + b_i$$

Pegando no Algoritmo 1 e com a sequência anterior, é possível reescrevê-lo a partir do passo 3 da seguinte forma:

ALGORITMO 1 ^[*]

1:	Obter a sequência iterativa de (2.7):
2:	$(A \otimes A)x - x + b = 0$
3:	Dados x_0 e k :
4:	for $m=1,2,\dots,k$ do
5:	for $i=1,2,\dots,n$ do
6:	$x_i^m = A \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^m + \sum_{s=i}^n a_{is} x_s^{m-1} \right) + b_i$
7:	end for
8:	end for
9:	Dado $\varepsilon > 0$, seja $X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, se $\ X_k - X_{k-1}\ < \varepsilon$, então pára, e $X = X_k$ é a solução aproximada de (2.6); senão seja $k = k + 1$ e goto 3

Analisemos a convergência, após esta alteração.

Seja $A = L + U$ onde L é a parte triangular inferior de A e U a parte triangular superior de A .

Pela sequência iterativa apresentada temos que

$$(I - L \otimes A)x^m = (U \otimes A)x^{m-1} + b \quad (2.10)$$

com a matriz iterativo dada por $G = (I - L \otimes A)^{-1}(U \otimes A)$

Lema 2.5 [20]. Seja $\| \cdot \|$ a norma que satisfaz $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. Então $\|X\| < 1$ implica que $I - X$ é invertível.

Assim, $(I - X)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} X^i$, e $\|(I - X)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|X\|}$

Teorema 2.4 Se $(\max_i |a_{ii}|) \rho(A) < 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$, onde a_{ii} são os elementos da diagonal de A , então (2.10) é convergente.

Demonstração

Do Lema 2.2 sabemos que $\rho(L \otimes A) = 0 < 1$ uma vez que $\lambda_L = 0$. Pelo Lema 2.4 para todo o $\varepsilon > 0$ existe um operador norma definido por $\|L \otimes A\|_* \leq \rho(L \otimes A) + \varepsilon = \varepsilon$, assim $I - L \otimes A$ é invertível para $0 < \varepsilon < 1$ pelo Lema 2.5.

Como $\rho(U \otimes A) = (\max_i |a_{ii}|) \rho(A) < r < 1$, então pelo Lema 1.4 para todo $\varepsilon > 0$ existe um operador norma definido por $\|U \otimes A\|_{**} \leq \rho(U \otimes A) + \varepsilon < r + \varepsilon$.

Como todas as normas num espaço de dimensão finita são equivalentes, é possível determinar a constante θ tal que $\|M\|_{**} \leq \theta \|M\|_*$ para todas as matrizes M , assim

$$\|L \otimes A\|_{**} \leq \theta \|L \otimes A\|_* \leq \theta \varepsilon < 1 \text{ para } \varepsilon < \frac{1}{\theta + 1} < 1.$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned} \|G\|_{**} &= \|(I - L \otimes A)^{-1} (U \otimes A)\|_{**} \leq \|(I - L \otimes A)^{-1}\|_{**} \cdot \|(U \otimes A)\|_{**} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|(I - L \otimes A)^{-1}\|_{**}} \cdot \|(U \otimes A)\|_{**} \leq \frac{r + \varepsilon}{1 - \theta \varepsilon} \end{aligned}$$

Se $\varepsilon \leq \frac{1-r}{1+\theta}$, então $\|G\|_{**} < 1$, logo (3.6) é convergente, onde $\frac{1-r}{1+\theta} < \frac{1}{\theta+1} < 1$. \square

Podemos ainda reorganizar o passo 3 do Algoritmo 1 de outra forma:

ALGORITMO 1 ^[**]	
1:	Obter a sequência iterativa de (2.7):
2:	$(A \otimes A)x - x + b = 0$
3:	Dados x_0 e k :
4:	for $m=1,2,\dots,k$ do
5:	for $i=1,2,\dots,n$ do
6:	$x_i^m = A \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^m + \sum_{s=i+1}^n a_{is} x_s^{m-1} \right) + b_i$
7:	end for
8:	end for
9:	Dado $\varepsilon > 0$, seja $X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, se $\ X_k - X_{k-1}\ < \varepsilon$, então pára, e $X = X_k$ é a solução aproximada de (2.6); senão seja $k = k + 1$ e goto 3

A sequência iterativa obtida com esta alteração é

$$(I - \hat{L} \otimes A)x^m = (\hat{U} \otimes A)x^{m-1} + b \quad (2.11)$$

com a matriz iterativo $\hat{G} = (I - \hat{L} \otimes A)^{-1} (\hat{U} \otimes A)$, onde \hat{L} é a parte triangular inferior de A e \hat{U} a parte triangular superior A .

Teorema 2.5. Se $(\max_i |a_{ii}|) \rho(A) < 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$, onde a_{ii} são os elementos da diagonal de A , então (2.11) é convergente.

Demonstração

Do Lema 2.2, temos $\rho(\hat{U} \otimes A) = 0 < 1$ porque $\lambda_{\hat{U}} = 0$. Pelo Lema 2.4 para todo o $\varepsilon > 0$ existe um operador norma $\|\hat{U} \otimes A\|_* \leq \rho(\hat{U} \otimes A) + \varepsilon = \varepsilon$.

Como $\rho(\hat{L} \otimes A) = (\max_i |a_{ii}|) \rho(A) < r < 1$, então $I - \hat{L} \otimes A$ é invertível pelo Lema 8.

Pelo Lema 1.4 para todo $\varepsilon > 0$ existe um operador norma

$$\|\hat{L} \otimes A\|_{**} \leq \rho(\hat{L} \otimes A) + \varepsilon < r + \varepsilon < 1 \text{ para } \varepsilon < 1 - r.$$

Como todas as normas, num espaço de dimensão finita, são equivalentes, é possível encontrar uma constante θ tal que $\|M\|_{**} \leq \theta \|M\|_*$ para todas as matrizes M , então

$$\|\hat{U} \otimes A\|_{**} \leq \theta \|\hat{U} \otimes A\|_* \leq \theta \varepsilon.$$

Temos assim que

$$\begin{aligned} \|\hat{G}\|_{**} &= \|(I - \hat{L} \otimes A)^{-1} (\hat{U} \otimes A)\|_{**} \leq \|(I - \hat{L} \otimes A)^{-1}\|_{**} \cdot \|\hat{U} \otimes A\|_{**} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|(I - \hat{L} \otimes A)^{-1}\|_{**}} \cdot \|\hat{U} \otimes A\|_{**} \leq \frac{\theta \varepsilon}{1 - r - \varepsilon} \end{aligned}$$

Se $\varepsilon \leq \frac{1-r}{1+\theta}$, então $\|\hat{G}\|_{**} < 1$, e (2.11) é convergente, com $\frac{1-r}{1+\theta} < 1-r$. \square

No Algoritmo 2, também é possível reescrever o passo 3:

ALGORITMO 2 ^[*]	
1:	Obter (2.9) e determinar a sequência iterativa similar a (2.7):
2:	$(H \otimes H)y - y + f = 0$ com $\text{vec}(\hat{X}) = y$ e $\text{vec}(\hat{Q}) = f$
3:	Dados y_0 e k

4:	for $m=1,2,\dots,k$ do
5:	for $i=1,2,\dots,n$ do
6:	$y_i^m = H\left(h_{i,i-1}y_{j-1}^m + \sum_{j=i}^n h_{ij}y_j^{m-1}\right) + f_i$
7:	end for
8:	end for
9:	Dado $\varepsilon > 0$ e $Y_k = (y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k)$, se $\ Y_k - Y_{k-1}\ < \varepsilon$, então pára, e $X = V^T Y_k V$ é a solução aproximada de (2.6); Caso contrário seja $k = k + 1$ e goto 3

ALGORITMO 2 ^[**]	
1:	Obter (2.9) e determinar a sequência iterativa similar a (2.7):
2:	$(H \otimes H)y - y + f = 0$ com $\text{vec}(\hat{X}) = y$ e $\text{vec}(\hat{Q}) = f$
3:	Dados y_0 e k
4:	for $m=1,2,\dots,k$ do
5:	for $i=1,2,\dots,n$ do
6:	$y_i^m = H\left(\sum_{j=i-1}^n h_{ij}y_j^{m-1} + \sum_{s=i+1}^n h_{is}y_s^m\right) + f_i$
7:	end for
8:	end for
9:	Dado $\varepsilon > 0$ e $Y_k = (y_1^k, y_2^k, \dots, y_n^k)$, se $\ Y_k - Y_{k-1}\ < \varepsilon$, então pára, e $X = V^T Y_k V$ é a solução aproximada de (2.6); Caso contrário seja $k = k + 1$ e goto 3

Relativamente a estes algoritmos e dado que são apenas variações dos algoritmos 1 e 2 com vista a uma melhor optimização do tempo gasto na sua execução não se vê a necessidade de apresentação de exemplos.

2.3.3 O KPIM para a equação matricial continua de Lyapunov

Como A e A^T não têm nenhum valor próprio comum a equação tem uma única solução.

Seja I a matriz identidade $n \times n$, e q um número real não nulo, assim a equação (2.5) pode ser reescrita de forma equivalente

$$(qI - A)X(qI - A^T) - (qI + A)X(qI + A^T) = 2qQ \quad (2.12)$$

Escolhamos q de forma a que ambas as matrizes $(qI - A)$ e $(qI - A^T)$ sejam não singulares. Multiplicando à esquerda por $(qI - A)^{-1}$ e à direita por $(qI - A^T)^{-1}$, obtemos

$$X - EXE^T = F \quad (2.13)$$

com

$$E = (qI - A)^{-1}(qI + A),$$

$$F = 2q(qI - A)^{-1}Q(qI - A^T)^{-1}.$$

No termos do produto de Kronecker e do operador $\text{vec}(\cdot)$, podemos transformar a equação (2.13) da seguinte forma $\text{vec}(EXE^T) - \text{vec}(X) + \text{vec}(F) = 0$ (2.14)

Usando as propriedades do produto de Kronecker do subcapítulo 2.1, a equação (2.14) é equivalente a

$$(E \otimes E)\text{vec}(X) - \text{vec}(X) + \text{vec}(F) = 0.$$

Sejam $\text{vec}(X) = x$ e $\text{vec}(F) = f$, então a equação pode ser expressa como $(E \otimes E)x - x + f = 0$.

Assim, obtemos a seguinte sequência iterativa:

$$x_{k+1} = (E \otimes E)x_k + f. \quad (2.15)$$

Assim a equação (2.15) é a sequência iterativa de KPIM para a equação (2.5).

Lema 2.6. Se A é estável e $q > 0$, então $\rho(E) < 1$.

Demonstração

Como A é estável, então $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ onde λ_i é uma valor próprio de A .

Os valores próprios de E são $\lambda_E = (q + \lambda_A)/(q - \lambda_A)$. Como $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ e $q > 0$, então $\rho(E) < 1$. \square

Teorema 2.6. Se A é estável e $q > 0$, então a sequência iterativa (2.15) derivada da equação (2.5) é convergente.

Demonstração

A demonstração é similar à do Teorema 2.5. \square

Com vista a uma convergência mais rápida, é necessário escolher q de forma apropriada.

É sabido que quanto mais pequeno é $\rho(E)$, mais rápida se torna a convergência de KPIM. Assim é necessário encontrar q que satisfaça a seguinte relação:

$$\min_{q < 0} \max_{\lambda_k} \frac{|q + \lambda_k|}{|q - \lambda_k|}, \quad (2.16)$$

onde λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) são os valores próprios de A .

Corolário 2.1. Seja a matriz A de (2.5) estável e simétrica, e sejam γ_{\min} e γ_{\max} os valores próprios mínimo e máximo da matriz A , respectivamente, e seja ainda q uma constante positiva. Então

$$\hat{q} = \arg \min_q \left\{ \max_{\gamma_{\min} \leq \lambda_k \leq \gamma_{\max}} \frac{|q + \lambda_k|}{|q - \lambda_k|} \right\} = \sqrt{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}$$

que satisfaz (2.16).

Demonstração.

Torna-se óbvio que

$$\rho(E) = \max \left\{ \frac{|q + \gamma_{\min}|}{|q - \gamma_{\min}|}, \frac{|q + \gamma_{\max}|}{|q - \gamma_{\max}|} \right\}$$

Se \hat{q} é o tal ponto mínimo, então satisfaz $\hat{q} + \gamma_{\min} > 0$, $\hat{q} + \gamma_{\max} < 0$, e

$$\frac{|\hat{q} + \gamma_{\min}|}{|\hat{q} - \gamma_{\min}|} = \frac{|\hat{q} + \gamma_{\max}|}{|\hat{q} - \gamma_{\max}|}.$$

Assim,

$$\hat{q} = \sqrt{\gamma_{\min} \gamma_{\max}}. \quad \square$$

Dado que para a resolução de equações contínuas o primeiro objectivo é transformá-las em equações discretas, e dado que os algoritmos apresentados no subcapítulo 2.3.2, não se vê necessidade de apresentação de exemplos.

3 - Métodos para Problemas Pouco Densos

3.1 - Método de Bartels-Stewart

Bartels e Stewart [30] propuseram conjuntamente, um método para resolver a equação matricial de Sylvester $AX - XB = C$, onde $A \in M_m(\mathfrak{R})$, $B \in M_n(\mathfrak{R})$ e $C \in M_{m,n}(\mathfrak{R})$

Este método usa uma decomposição de Schur da matriz B (se esta não for triangular por blocos) para reduzir o problema inicial a outro equivalente, mas mais simples, cuja solução pode ser determinada através da resolução sequencial de n sistemas, no máximo, com m equações lineares (ou $2m$ equações, por cada par de valores próprios complexos conjugados de B) e igual número de incógnitas.

Para se analisar o nosso caso, basta que $B = -A^T$. Seja

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1q} \\ & T_{22} & \cdots & T_{2q} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & T_{qq} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq q \leq m \quad (3.1)$$

a matriz fragmentada de ordem m de uma forma real de Schur de A^T , $Q^T A^T Q = T$, onde as submatrizes diagonais T_{ii} , $i = 1, \dots, q$ têm espectros disjuntos.

Multiplicando à direita por Q , a equação $AX + XA^T = C \Leftrightarrow AX + XQTQ^T = C$ é reduzida ao problema equivalente

$$AY + YT = F, \quad (3.2)$$

onde $Y = XQ$ e $F = CQ$. Consideremos estas duas últimas matrizes fraccionadas por colunas, ou seja, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Por um lado tem-se $AY = (Ay_1, Ay_2, \dots, Ay_n)$, e por outro temos que a coluna k da matriz produto YT , que resulta da multiplicação de cada uma das linhas de Y pela coluna k de T , é $y_1 t_{1k} + \dots + y_n t_{nk}$.

Comparando as colunas k de ambos os membros de (3.2), obtemos $Ay_k + \sum_{i=1}^n y_i t_{ik} = f_k$,

que é equivalente a

$$Ay_k + \sum_{i=1}^{k+1} y_i t_{ik} = f_k, \quad (3.3)$$

porque T é uma matriz quase triangular.

Se o elemento $t_{k+1,k} = 0$ e as $k-1$ primeiras colunas y_1, \dots, y_{k-1} da matriz das incógnitas Y forem conhecidas, de (3.3) obtém-se o sistema equivalente

$$A y_k + y_k t_{kk} = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} y_i t_{ik} \Leftrightarrow (A + t_{kk} I_m) y_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} t_{ik} y_i \quad (3.4)$$

que nos permite determinar a coluna y_k da referida matriz.

Suponha-se que $t_{k+1,k} \neq 0$. Neste caso y_k não pode ser determinado directamente da igualdade das colunas k de ambos os membros da equação (3.2). Assim, para calcularmos o vector coluna y_k da matriz das incógnitas Y é necessário resolver o sistema resultante da comparação das k -ésima e $(k+1)$ -ésima colunas de (3.2), que permite determinar em simultâneo y_{k+1} . Tendo em atenção que T é uma matriz quase triangular (3.1), $t_{i,k} = 0$ para $i > k+1$, da igualdade de matrizes obtemos o sistema de duas equações seguinte

$$\begin{aligned} A y_k + y_k t_{kk} + y_{k+1} t_{k+1,k} &= f_k - \sum_{i=1}^{k-1} y_i t_{ik} \\ A y_{k+1} + y_k t_{k,k+1} + y_{k+1} t_{k+1,k+1} &= f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} y_i t_{i,k+1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

que escrito na forma matricial vem,

$$\begin{pmatrix} A + t_{kk} I_m & t_{k+1,k} I_m \\ t_{k,k+1} I_m & A + t_{k+1,k+1} I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{k-1} \begin{pmatrix} t_{ik} y_i \\ t_{i,k+1} y_i \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

No caso particular da matriz A ser quase triangular superior e ordenando as equações deste sistema de acordo com a permutação $(1, m+1, 2, m+2, \dots, m, 2m)$, obtemos um sistema com uma matriz em banda que é a mais próxima possível de uma matriz triangular superior, podendo ser resolvido com um número de operações de ponto flutuante da ordem de m^2 [30].

Exemplo 3.1 Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, e $C = I_3$. A resolução da equação matricial

$AX + XA^T = C$ reduz-se à resolução sequencial de três sistemas de equações lineares.

Assim, para determinar x_1 , a primeira coluna da matriz das incógnitas, é necessário solucionar $(A + a_{11}I_3)x_1 = c_1 \Leftrightarrow (A + (1)I_3)x_1 = (1, 0, 0)^T$. Então $x_1 = (1/2, 0, 0)^T$.

Calculemos x_2 , temos

$$(A + a_{22}I_3)x_2 = c_2 + a_{21}x_1 \Leftrightarrow (A + 2I_3)x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por fim resolve-se $(A - a_{33}I_3)x_3 = c_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2$, i.e.

$$(A + 3I_3)x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e tem solução $x_3 = (-1/120 \quad -1/30 \quad 1/6)^T$. Então a solução da equação inicial é

$$X = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/12 & -1/120 \\ 0 & 1/4 & -1/30 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Golub [30] refere que o número de operações de ponto flutuante requeridas por este algoritmo é da ordem de $2m^3$, naturalmente calculados para o nosso caso.

No exemplo que se apresenta de seguida será necessário factorizar A^T usando uma decomposição de Schur, que será obtida recorrendo à função *schur* do Matlab.

Exemplo 3.2 Consideremos agora $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo $A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ e

$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Uma factorização de Schur possível para A^T obtém-se à custa das

matrizes

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1413}{1454} & \frac{220}{933} & 0 \\ \frac{408}{2447} & \frac{905}{1317} & \frac{985}{1393} \\ -\frac{408}{2447} & -\frac{905}{1317} & \frac{985}{1393} \end{bmatrix} \text{ e } T = \begin{bmatrix} -\frac{2174}{1189} & \frac{2378}{1121} & \frac{101}{4993} \\ 0 & \frac{4552}{1189} & \frac{863}{280} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz $F = CQ$ do problema $AY + YT = F$ é

$$\begin{bmatrix} -\frac{1283}{525} & -\frac{504}{317} & -\frac{985}{1393} \\ -\frac{440}{933} & \frac{13538}{5893} & \frac{2378}{1121} \\ -\frac{815}{2444} & -\frac{1810}{1317} & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinemos $Y = (y_1, y_2, y_3)$:

$$y_1 : (A + t_{11}I_3)y_1 = f_1 \Leftrightarrow y_1 = \begin{pmatrix} \frac{641}{907} & \frac{1651}{1088} & \frac{781}{622} \end{pmatrix}^T$$

$$y_2 : (A + t_{22}I_3)y_2 = f_2 - t_{12}y_1 \Leftrightarrow y_2 = \begin{pmatrix} \frac{2273}{1440} & \frac{349}{1436} & -\frac{991}{2131} \end{pmatrix}^T$$

$$y_3 : (A + t_{33}I_3)y_3 = f_3 - t_{13}y_1 - t_{23}y_2 \Leftrightarrow y_3 = \begin{pmatrix} \frac{1456}{209} & -\frac{2667}{1906} & -\frac{1020}{367} \end{pmatrix}^T$$

Daqui resulta que a solução da equação $AX + XA^T = C$ é

$$X = YQ^T = \begin{bmatrix} -\frac{319}{1014} & \frac{429}{70} & \frac{2640}{709} \\ -\frac{506}{357} & -\frac{685}{1203} & -\frac{5697}{4042} \\ -\frac{641}{482} & -\frac{3163}{1524} & -\frac{1395}{752} \end{bmatrix}.$$

Por fim vamos ilustrar a aplicação do método à resolução de uma equação a matriz A^T tem valores próprios complexos.

Exemplo 3.3 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, logo $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

. Uma decomposição real de Schur da matriz A^T obtém-se usando as matrizes

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{285}{2501} & -\frac{303}{608} & -\frac{532}{619} \\ -\frac{1629}{1778} & -\frac{759}{1960} & \frac{326}{3163} \\ \frac{1909}{4969} & -\frac{1563}{2015} & \frac{695}{1388} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} \frac{633}{12301} & -\frac{477}{217} & -\frac{3973}{1205} \\ \frac{1516}{387} & \frac{633}{12301} & -\frac{1294}{1307} \\ 0 & 0 & -\frac{718}{651} \end{bmatrix}.$$

Então o problema $AX + XA^T = C$ reduz-se à resolução da equação $AY + YT = F$, onde

$$Y = XQ \text{ e } F = CQ = \begin{bmatrix} \frac{6451}{2639} & -\frac{476}{477} & -\frac{1769}{1242} \\ -\frac{2084}{791} & -\frac{1094}{659} & -\frac{219}{398} \\ \frac{342}{263} & -\frac{430}{1107} & \frac{983}{2472} \end{bmatrix}.$$

Como $t_{21} \neq 0$ então y_1 e y_2 são determinados simultaneamente resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} A + t_{11}I_3 & t_{21}I_3 \\ t_{12}I_3 & A + t_{22}I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

cuja matriz fragmentada, é $\begin{bmatrix} A + \frac{633}{12301}I_3 & \frac{1516}{387}I_3 \\ -\frac{477}{217}I_3 & A + \frac{633}{12301}I_3 \end{bmatrix}$.

Assim, a solução do sistema é

$$y_1 = \left(-\frac{1108}{31} \quad \frac{3631}{150} \quad -\frac{667}{148} \right)^T \text{ e } y_2 = \left(\frac{1576}{95} \quad \frac{9382}{591} \quad \frac{2923}{1754} \right)^T.$$

Falta obter y_3 , que se obtém resolvemos $(A + t_{33}I_3)y_3 = f_3 - t_{13}y_1 - t_{23}y_2$,

$$\text{Assim, } y_3 = \left(\frac{5899}{146} \quad \frac{4632}{913} \quad \frac{4343}{825} \right)^T.$$

Concluindo, efectuamos o produto YQ^T para obtermos a solução desejada

$$X = YQ^T = \begin{pmatrix} -\frac{3577}{76} & \frac{2317}{76} & -\frac{121}{19} \\ -\frac{723}{76} & -\frac{2113}{76} & -\frac{9}{19} \\ -\frac{223}{38} & \frac{153}{38} & -\frac{59}{152} \end{pmatrix}.$$

Para finalizar apresentam-se três apontamentos sobre o método de Bartels e Stewart.

1. No caso da matriz A^T ser triangular inferior ou redutível a uma matriz triangular inferior por blocos através da decomposição de Schur, este algoritmo será aplicado analogamente. Neste caso a determinação da k -ésima coluna da matriz solução obriga a que se conheçam previamente as últimas $n - k$ colunas desta matriz e, naturalmente, que seja a última coluna a primeira a ser determinada.

2. Se A e B forem reais, cheias e transformadas ambas para a forma real de Schur então o método apresentado permite solucionar a equação através da resolução de sistemas de equações lineares cujas matrizes são quase triangulares e/ou em banda.
3. Se a equação for solúvel com infinitas soluções este algoritmo permite igualmente a determinação de todas elas. Neste caso um ou mais dos sistemas de equações lineares (3.4) ou (3.6) são possíveis e indeterminados, sendo algumas das coordenadas do vector coluna correspondente parâmetros da matriz solução.

3.2 - Método de Hessenberg-Schur

Golub, Nash e Van Loan, sugeriram, alguns anos mais tarde, uma modificação no algoritmo de Bartels e Stewart, propondo que a matriz A fosse reduzida à forma de Hessenberg [30]. Este algoritmo, que na bibliografia é frequentemente referido como método Hessenberg-Schur, evita a determinação da decomposição de Schur da matriz que supostamente tem maior ordem, à custa da resolução de n sistemas de equações lineares diferentes com matrizes de Hessenberg superior.

Através do exemplo apresentado de seguida, é possível mostrar a aplicação do método Hessenberg-Schur.

Exemplo 3.4 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Os valores próprios de A

são: 5 , $\frac{2131}{780}$ e $-\frac{571}{780}$.

Usando a função *hess* do Matlab obtivemos $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{684}{721} & -\frac{228}{721} \\ 0 & -\frac{228}{721} & \frac{684}{721} \end{pmatrix}$, matriz de

transformação, e $H = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{684}{721} & \frac{2089}{734} \\ -\frac{721}{228} & \frac{23}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$, matriz de Hessenberg superior tais que

$$A = PHP^T.$$

Uma forma real de Schur de A^T , $Q^T A^T Q = T$, pode ser obtida com as matrizes,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1170}{1351} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1170}{1351} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } T = \begin{pmatrix} \frac{571}{780} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{2131}{780} & -\frac{1351}{520} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Recorrendo às factorizações obtidas podemos transformar $AX + XA^T = C$ na equação $PHP^T X + XQTQ^T = C$ que é equivalente a $H(P^T XQ) + (P^T XQ)T = P^T CQ$.

Determinemos a solução $Y = P^T XQ$ da equação quando $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Fazendo } F = P^T CQ = \begin{bmatrix} \frac{780}{571} & \frac{780}{2131} & 2 \\ -\frac{1593}{433} & -\frac{1506}{215} & \frac{721}{285} \\ -\frac{144}{4643} & \frac{566}{307} & -\frac{456}{103} \end{bmatrix},$$

temos:

$$(H - t_{11}I_3)y_1 = f_1 \Leftrightarrow y_1 = \begin{pmatrix} \frac{592}{571} & -\frac{791}{3929} & \frac{93}{295} \end{pmatrix}^T,$$

e como $t_{32} \neq 0$ então y_2 e y_3 são determinados simultaneamente resolvendo-se o sistema

$$\begin{bmatrix} H - t_{22}I_3 & -t_{32}I_3 \\ -t_{23}I_3 & H - t_{33}I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{12}y_1 \\ t_{13}y_1 \end{bmatrix}.$$

A solução deste sistema é $y_1 = \left(-\frac{968}{2131} \quad -\frac{864}{631} \quad \frac{557}{559} \right)^T$ e $y_2 = \left(\frac{9}{8} \quad \frac{787}{650} \quad -\frac{883}{632} \right)^T$.

$$\text{Donde } X = PYQ^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{9}{8} \\ \frac{79}{88} & -\frac{311}{440} & \frac{109}{264} \\ \frac{11}{8} & -\frac{41}{24} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Numericamente, uma fatorização de Schur é usualmente obtida transformando-se a matriz para a forma de Hessenberg superior e, numa segunda fase, aplicando-se um método iterativo para gerar uma sequência de matrizes de Hessenberg que converge para a forma triangular ou triangular por blocos [17, 78].

Golub e seus colaboradores mostraram que o método por eles apresentado pode ser mais eficiente que o algoritmo de Bartels e Stewart, dependendo das dimensões do problema [30].

A resolução da equação de Lyapunov através da função *lyap* do Matlab é baseada nos dois algoritmos apresentados anteriormente.

4. Resolução da Equação de Lyapunov usando subespaços de Krylov

4.1. Introdução

A resolução de equações é um dos principais problemas matemáticos que surge, com elevada frequência, em muitas áreas da ciência e da engenharia [17], onde o papel relevante da equação de Lyapunov na teoria do controlo, é particularmente mencionado na literatura [6, 13, 57].

Temos uma grande variedade de algoritmos numéricos para a resolução das equações de Lyapunov, uns são recomendáveis a determinados casos particulares (a título de exemplo, quando a matriz A possui a estrutura de matriz companheira), outros são mais gerais (é possível determinar a solução desta equação recorrendo a um método numérico de resolução de sistemas de equações algébricas lineares).

Sem se pretender uma abordagem exaustiva deste tema, serão apresentadas algumas das metodologias que surgem na bibliografia para obter a solução das equações (0.1) e (0.2), pressupondo sempre a solubilidade das mesmas.

Assim, no presente capítulo apresentar-se-ão formulações das equações de Lyapunov, fazendo uma breve referência a alguns dos algoritmos numéricos que surgem na bibliografia e são aplicáveis à resolução deste problema.

4.2 Métodos Standard de Subespaços de Krylov⁵ para Equações Lineares

4.2.1 Introdução

Faremos neste subcapítulo uma breve abordagem aos Métodos de Subespaços de Krylov para a resolução de sistemas de equações lineares do tipo $Ax = f$, onde A uma matriz quadrada real e não singular e f um vector em \mathbb{R}^n .

Descrever-se-ão ideias e definições básicas e revistos alguns algoritmos. Serão dadas referências quando forem aplicados os resultados deste subcapítulo às equações de Lyapunov na forma de produto de Kronecker.

⁵ Alexei Nikolaevich Krylov – Engenheiro Naval, Matemático e memorialista – Nascido em Simbirsk Gubernia (Rússia) a 15 de Agosto de 1863 – 26 de Outubro de 1945

4.2.2 Subespaços de Krylov

Seja A uma matriz quadrada não singular, e seja f um vector em \mathbb{R}^n .

Considere-se $Ax = f$, para $x \in \mathbb{R}^n$

Lema 4.1 Existe p um polinómio mónico único, tal que

$$p(A)f = 0, \text{ e } q(A)f \neq 0,$$

Para todos os polinómios q não nulos e com grau inferior ao de p .

Demonstração

Pelo teorema de Cayley's existe p um polinómio real de grau n , tal que $p(A) = 0$.

Assim o conjunto $D = \{k \in \mathbb{N} : \exists p \in P_k : p \neq 0, p(A)f = 0\}$ é não vazio e tem um elemento pequeno $m \in D$.

Seja q qualquer polinómio não nulo com grau inferior a m . Assim, $q(A)f \neq 0$.

Sejam p_1 e p_2 polinómios mónicos reais de grau m tal que $p_i(A)f = 0$. Como p_1 e p_2 são mónicos o grau de $p_1 - p_2$ estritamente inferior a m , e como $[(p_1 - p_2)(A)]f = 0$, temos $p_1 - p_2 = 0$. \square

Definição 4.1 O polinómio mínimo para f sobre A é o polinómio mónico p de grau mínimo, tal que $p(A)f = 0$.

Seja p o polinómio mínimo de f sobre A e seja m o grau de p .

Temos então que

$$p(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j t^j, \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, e $\alpha_m = 1$.

De notar que $\alpha_0 \neq 0$, caso contrário,

$$p(t) = tq(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

onde q tem grau $m-1$, e como A é não singular, temos que $q(A)f = 0$, o que viola o

m ser mínimo. Assim, $\alpha_0 \neq 0$, e a solução de $Ax = f$ é dada por $x = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j A^j f$, onde

$$\beta_j = \frac{\alpha_j + 1}{\alpha_0}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Definição 4.2 Seja j um inteiro positivo. O subespaço de Krylov $K_j(A, j)$ é dado por

$$K_j(A, j) = \underset{\mathbb{R}}{\text{span}}\{f, Af, A^2f, \dots, A^{j-1}f\}.$$

Lema 4.2 Seja m o grau de f sobre A , então

$$K_j(A, f) \subset K_{j+1}(A, f), \quad j < m,$$

e

$$K_j(A, f) = K_m(A, f), \quad j = m.$$

Demonstração

É claro pela definição que o subespaço de Krylov formam uma sequência crescente,

$$K_j(A, f) \subseteq K_{j+1}(A, f)$$

Seja p o polinómio mínimo de f sobre A . Seja $j \geq m$. Podemos afirmar que

$$K_j(A, f) = K_m(A, f).$$

Assim, é suficiente mostrar que $K_j(A, f) \subseteq K_m(A, f)$.

Seja $y \in K_j(A, f)$ dado, então $y = w(A)f$ onde w é um polinómio de grau inferior a j .

Factorizando w ,

$$w(x) = g(x)p(x) + r(x),$$

onde o grau de r é estritamente inferior a m , temos

$$y = w(A)f = g(A)p(A)f + r(A)f = r(A)f,$$

É efectivamente elemento de $K_m(A, f)$. Concluimos assim que $K_j(A, f) = K_m(A, f)$

Seja agora $j < m$, temos que $K_j(A, f) \subset K_{j+1}(A, f)$.

Por definição, $A^j f \in K_{j+1}(A, f)$, mas admitamos que $A^j f \notin K_j(A, f)$.

Suponhamos que $A^j f \in K_j(A, f)$, então temos $A^j f = q(A)f$ para um polinómio de grau inferior a $j-1$. Mas, assim $(A^j - q(A))f = 0$, contradizendo a definição de m .

Concluimos assim que $K_j(A, f) \subset K_{j+1}(A, f)$. \square

Corolário 4.1 Seja m o grau de f sobre A , então $K_m(A, f)$ é o mais pequeno espaço vectorial invariante.

4.2.3 O Algoritmo de Arnoldi

O algoritmo de Arnoldi usa o processo de Gram-Schmidt para calcular uma base ortonormada para $K_j(A, f)$. Como o algoritmo clássico de Gram-Schmidt é numericamente instável, é possível usar o processo modificado de Gram-Schmidt e/ou reortogonalizando para resolver parcialmente este problema.

Matematicamente, os quatro algoritmos possíveis são equivalentes. Todavia o processo modificado de Gram-Schmidt é mais fiável do que o processo clássico de Gram-Schmidt.

Reortogonalização melhora a qualidade da base em ambos os casos e se a reortogonalização for aplicada, não temos, virtualmente, nenhuma diferença entre o método clássico e o método modificado. A diferença entre as quatro variantes foi investigada por Giroud, Langlou e Rozlosnik.

ALGORITMO DE ARNOLDI COM O PROCESSO MODIFICADO DE GRAM-SCHMIDT (MSG) (ALGORITMO 7)	
1:	$v_1 := f / \ f\ _2$
2:	for $j=1,2,\dots,k$ do
3:	$w_j := Av_j$
4:	for $i=1,2,\dots,j$ do
5:	$h_{ij} := v_i^T w_j$
6:	$w_j := w_j - v_i h_{ij}$
7:	end for
8:	$h_{j,j+1} := \ w_j\ _2$
9:	if $h_{j,j+1} = 0$ then
10:	$v_{j+1} := 0$
11:	$k := j$
12:	Exit
13:	Else
14:	$v_{j+1} := w_j / \tilde{h}_{j,j+1}$
15:	end if
16:	end for

Seja m o grau de f sobre A , e seja $k \geq m$, então o algoritmo de Arnoldi termina exactamente após m iterações, e devolve a factorização da forma

$$AV_m = V_m H_m,$$

onde

$$V_m = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_m],$$

é a matriz expandida com colunas ortonormais $K_m(A, f)$, e

$$H_m = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & \dots & h_{2m} \\ & h_{32} & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & h_{m,m-1} & h_{mm} \end{bmatrix},$$

é uma matriz superior quadrada de Hessenberg.

Se $k < m$ o algoritmo de Arnoldi termina após exactamente k iterações, e devolve a factorização da forma

$$AV_k = V_{k+1} \tilde{H}_k,$$

onde

$$V_k = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_k],$$

é constituída pelas primeiras k colunas de V_m , que expande $K_k(A, f)$, e

$$\tilde{H}_k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & \dots & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & \dots & h_{2k} \\ & h_{32} & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & h_{k+1,k} & h_{k,k} \\ & & & & h_{k+1,k} \end{bmatrix}.$$

4.2.4 Métodos Standard de Subespaços de Krylov

Serão abordados agora quatro métodos standard de subespaço de Krylov: GMRES, CG, CGNR, e BCG.

4.2.4.1 GMRES

O método GMRES foi trabalhado por Saad e Schultz [62]. Pode ser usado para resolução do sistema linear $Ax = f$.

Dado x_0 , o algoritmo GMRES cria o resíduo $r_0 = f - Ax_0$

E constrói o subespaço de Krylov

$$K_j(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{j-1}r_0\}.$$

Para cada j o algoritmo devolve uma solução aproximada $x_j \in x_0 + K_j(A, r_0)$, tal que a norma do resíduo correspondente $r_j = f - Ax_j$ é mínimo, i.e.,

$$\|r_j\|_2 = \min\{\|f - Ax\|_2 : x \in x_0 + K_j(A, r_0)\}.$$

O procedimento básico é dado pelo seguinte algoritmo onde é usado o processo modificado de ortogonalização Gram-Schmidt.

ALGORITMO GMRES COM O PROCESSO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO (MSG)	
(ALGORITMO 8)	
1:	$r_0 = f - Ax_0, \beta := \ r_0\ _2, v_1 := r_0/\beta$
2:	for $j=1,2,\dots,k$ do
3:	$w_j := Av_j$
4:	for $i=1,2,\dots,j$ do
5:	$h_{ij} := v_i^T w_j$
6:	$w_j := w_j - v_i h_{ij}$
7:	end for
8:	$h_{j,j+1} := \ w_j\ _2$
9:	if $h_{j,j+1} = 0$ then
10:	$k := j$
11:	Goto 16
12:	Else
13:	$v_{j+1} := w/\tilde{h}_{j,j+1}$
14:	end if
15:	end for
16:	Resolver o problema $\tilde{H}_k y_k = \beta e_1$ para $y_k \in \mathbb{R}^k$
17:	Define-se $x_k = x_0 + V_k y_k$

Seja m o grau de r_0 sobre A . Na aritmética exacta, os resíduos devolvidos pelo GMRES satisfazem

$$\|r_1\|_2 \geq \|r_2\|_2 \geq \dots \geq \|r_m\|_2 = 0,$$

porque

$$K_1(A, r_0) \subseteq K_2(A, r_0) \subseteq \dots \subseteq K_m(A, r_0),$$

e

$$x - x_0 = A^{-1}r_0 \in K_m(A, r_0).$$

Encontra-se em falta uma teoria geral de convergência de GMRES sendo um tópico que se encontra actualmente em investigação.

Lema 4.3 Os resíduos devolvidos pelo algoritmo GMRES satisfaz

$$\|r_j\|_2 = \min \{ \|p(A)r_0\|_2 : p \in P_j, p(0) = 1 \} = 0,$$

onde P_j é o conjunto dos polinómios de grau inferior a j .

Demonstração

A demonstração segue directamente de definição de GMRES.

Considere-se uma família específica de polinómios. Seja A uma matriz quadrada, tal que $\|I - A\|_2 < 1$

Então A é não singular e

$$A^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (I - A)^j,$$

donde

$$I - A \sum_{j=0}^{\infty} (I - A)^j = 0.$$

Seja ω_k o polinómio dado por

$$\omega_k(x) = 1 - x \sum_{j=0}^{k-1} (1-x)^j. \quad (4.1)$$

Assim, $\omega_k \in P_k$ e $\omega_k(0) = 1$.

Temos também

$$0 = I - A \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} (I - A)^j}_{\omega_k(A)} - A \sum_{j=k}^{\infty} (I - A)^j,$$

que implica

$$\|\omega_k(A)\|_2 \leq \frac{\|A\|_2}{1 - \|I - A\|_2} \|I - A\|_2^k.$$

Definindo $\rho = \|I - A\|_2$, e estimando $\|A\|_2 \leq \|I\|_2 + \|I - A\|_2$, então

$$\|\omega_k(A)\|_2 \leq \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \rho^k. \quad (4.2)$$

Como consequência temos os seguintes teorema.

Teorema 4.1 Se A é uma matriz tal que $\rho = \|I - A\|_2 < 1$, e se r_k é o resíduo após k iterações do algoritmo GMRES, então

$$\|r_k\|_2 \leq \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \rho^k \|r_0\|_2.$$

Teorema 4.2 Sejam A uma matriz diagonalizável, e $AC = C\Lambda$ onde C é não singular e $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, é diagonal. Se $\rho = \max |1 - \lambda_j| < 1$, e se r_k é o resíduo após k iterações do algoritmo GMRES, então

$$\|r_k\|_2 \leq \kappa_2(C) \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \rho^k \|r_0\|_2,$$

onde $\kappa_2(C) = \|C\|_2 \|C^{-1}\|_2$.

Demonstração

Seja p um polinómio, então $p(A) = Cp(\lambda)C^{-1}$

donde

$$\|p(A)\|_2 \leq \|C\|_2 \|p(\Lambda)\|_2 \|C^{-1}\|_2 = \kappa_2(C) \|p(\Lambda)\|_2.$$

Conjugando este resultado com o Lema 4.3 temos

$$\|r_k\|_2 \leq \|\omega_k(A)r_0\|_2 \leq \|\omega_k(A)\|_2 \|r_0\|_2 \leq \kappa_2(C) \|\omega_k(\Lambda)\|_2 \|r_0\|_2,$$

e usando o resultado (4.2), completamos a demonstração. \square

Lema 4.4 Sejam A uma matriz quadrada qualquer e $f \in \mathbb{R}^n$. Se $I - A$ tem característica k , então o grau de f sobre A é no máximo $k+1$.

Demonstração

Se A é matriz quadrada e $f \in \mathbb{R}^n$ então

$$K_j(A, f) = K_j(I - A, f) \subseteq \underset{\mathbb{R}}{\text{span}}\{f\} + \text{Ran}(I - A),$$

para todo o $j = 1, 2, \dots$.

Seja m o grau de f sobre A , então

$$K_j(A, f) \subseteq \underset{\mathbb{R}}{\text{span}}\{f\} + \text{Ran}(I - A)$$

que implica que a dimensão de $K_m(A, f)$ é no máximo $k+1$. Como

$$\{A^j f : j = 0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

é a base de $K_m(A, f)$ conclui-se que $m \leq k+1$.

Corolário 4.2 Se A é uma matriz não singular com k perturbações da matriz identidade, então o GMRES converge em no máximo k iterações.

Demonstração

Seja $f \in \mathbb{R}^n$. Pelo lema anterior, o grau m de f sobre A é no máximo $k+1$.

Assim, o algoritmo GMRES constrói uma base de $K_m(A, f)$ e converge após no máximo k aplicações de A . \square

Existe outro caso onde os resíduos podem ser estimados. É o caso em que $\rho=1$ e que foi estudado por Gamti e Philippe [26]. O teorema que agora se apresenta é uma generalização do resultado obtido.

Teorema 4.3 Seja A uma matriz não singular e diagonalizável com $AC = C\Lambda$, onde C é não singular e $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ é diagonal.

Suponhamos que existe um inteiro k e que $\rho < 1$, tal que

$$|1 - \lambda_j| \geq \rho, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

e

$$|1 - \lambda_j| < \rho, \quad j = k+1, k+2, \dots, n.$$

Se r_m é o resíduo após $m \geq k$ iterações do algoritmo GMRES, então

$$\|r_m\|_2 \leq \kappa_2(C) \|p_k(\Lambda)\|_2 \frac{1+\rho}{1-\rho} \rho^{m-k} \|r_0\|_2,$$

onde p_k é o polinómio de grau k dado por

$$p_k(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad p_k(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

e $p_k(0) = 1$.

Demonstração

De notar que p_k está bem definido, porque A é não singular, ou seja $\lambda_j \neq 0$, para todo j . Temos então que

$$p_k(x) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x}{\lambda_j}\right).$$

Seja $m \geq k$ e considere-se o polinómio

$$q_m(x) = p_k(x)\omega_{m-k}(x),$$

onde ω_{m-k} é definido pela equação (1.36). Claramente $q_m(0) = 1$ e

$$\|r_m\|_2 \leq \|q_m(A)r_0\|_2 \leq \kappa_2(C)\|q_m(\Lambda)\|_2 \|r_0\|_2,$$

donde se obtém uma estimativa de $\|q_m(\Lambda)\|_2$. Temos

$$\|q_m(\Lambda)\|_2 = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |q_m(\lambda)|.$$

Embora por definição,

$$q_m(\lambda_j) = p_k(\lambda_j)\omega_{m-k}(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

que implica

$$\|q_m(\Lambda)\|_2 \leq \max_{j>k} |q_m(\lambda_j)|.$$

Assim temos

$$\|q_m(\Lambda)\|_2 \leq \left(\max_{j>k} |p_k(\lambda_j)|\right) \left(\max_{j>k} |\omega_{m-k}(\lambda_j)|\right).$$

Como $|1 - \lambda_j| < \rho$ para $j > k$, temos

$$|\omega_{m-k}(\lambda_j)| \leq \frac{1+\rho}{1-\rho} \rho^{m-k}, \quad j > k.$$

Podemos então concluir que

$$\|q_m(\Lambda)\|_2 \leq \|p_k(\Lambda)\|_2 \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \rho^{m-k}$$

e como consequência

$$\|r_m\|_2 \leq \kappa_2(C) \|p_k(\Lambda)\|_2 \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \rho^{m-k} \|r_0\|_2. \quad \square$$

Estes teoremas não implicam que GMRES convirja rapidamente, devido a κ_2 poder tão grande que os limites se tornam desadequados.

No entanto, se $\|I - A\|_2 < 1$ ou se A é não singular e $I - A$ tem característica baixa, então o GMRES converge rapidamente para a solução.

4.2.4.2 CG

Tanto Lanczos [50], como Hestenes e Stiefel [36] foram os impulsionadores do algoritmo que será agora exposto. Este algoritmo, algoritmo do gradiente conjugado (Conjugate gradient), é aplicado a $Ax=f$, onde A é uma matriz simétrica definida positiva. A formulação enunciada de seguida é a formulação standard do referido algoritmo.

ALGORITMO STANDART CG PARA $Ax=f$ (ALGORITMO 9)	
1:	$r_0 = f - Ax_0, p_0 = r_0$
2:	for $j=0,1,2,\dots$, até convergir do
3:	$\alpha_j := (r_j, r_j) / (Ap_j, p_j)$
4:	$x_{j+1} := x_j + \alpha_j Ap_j$
5:	$\beta_j := (r_{j+1}, r_{j+1}) / (r_j, r_j)$
6:	$p_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j p_j$
7:	end for

De modo a estudar a convergência do CG é conveniente introduzir a Norma-A, que é dada por $\|x\|_A = \sqrt{(x, Ax)}$.

Se A é simétrica e definida positive, então $\|\cdot\|_A$ é norma, e $\lambda_{\min} \|x\|_2 \leq \|x\|_A \leq \lambda_{\max} \|x\|_2$.

Os lemas seguintes caracterizam as aproximações obtidas através do algoritmo CG.

Lema 4.5 (Saad [63]) Seja x_j a aproximação obtida após j iterações do algoritmo CG, e seja x a solução exacta, então x_j é da forma

$$x_j = x_0 + q_j(A)r_0,$$

onde q_j é um polinómio de grau $j-1$ tal que

$$\|x - x_j\|_A = \|(I - Aq_j(A))(x - x_0)\|_A = \min \|(I - Aq(A))(x - x_0)\|_A$$

Se A tiver k valores próprios distintos, então o algoritmo CG converge usando no máximo k iterações.

O Lema seguinte pode ser usado para estimar a Norma-A do erro.

Lema 4.6 (Saad [63]) Seja A simétrica e definida positiva e considere o sistema linear $Ax = f$. Se x_* é a solução, e x_j j-ésima aproximação obtida pelo algoritmo CG, então

$$\|x_* - x_j\|_A \leq 2 \left[\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right]^j \|x_* - x_0\|_A.$$

Vemos assim que se A é matriz simétrica definida positiva, então o algoritmo CG converge rapidamente.

4.2.4.3 CGNR

O algoritmo CGNR pode ser usado para resolver a solução do sistema linear $Ax = f$, onde A é uma matriz não singular em ordem n .

ALGORITMO STANDART CGNR PARA $Ax = f$ (ALGORITMO 10)	
1:	$r_0 = f - Ax_0, z_0 := A^T r_0, p_0 := z_0$
2:	for $j = 0, 1, 2, \dots$, até convergir do
3:	$w_j := Ap_j$
4:	$\alpha_j = \ z_j\ _2^2 / \ w_j\ _2^2$
5:	$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j$
6:	$z_{j+1} := A^T r_{j+1}$
7:	$\beta_j = \ z_{j+1}\ _2^2 / \ z_j\ _2^2$
8:	$p_{j+1} = z_{j+1} + \beta_j p_j$
9:	end for

A aproximação x_j é tal que o resíduo correspondente

$$r_j = f - Ax_j,$$

satisfaz

$$\|r_j\|_2 = \min \{ \|f - Ax\|_2 : x \in x_0 + K_j(A^T A, A^T r_0) \}.$$

A diferença entre esta expressão e a expressão do algoritmo GMRES, é o subespaço onde o resíduo é minimizado.

Este é algoritmo é basicamente o algoritmo CG aplicado à equações normais,

$$A^T Ax = A^T f,$$

onde a diferença mais importante reside no cálculo dos resíduos reais r_j , bem como nos resíduos z_j das equações normais.

Este algoritmo mantém as propriedades de convergência do algoritmo CG.

4.2.4.4 BCG

O algoritmo do gradiente biconjugado (biconjugate gradient), pode ser usado para resolução de um sistema de equações (pair of adjoint equations),

$$Ax = f \quad (4.3)$$

$$A^T x = g \quad (4.4)$$

ALGORITMO BCG PARA RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES (ALGORITMO 11)	
1:	$r_0 = f - Ax_0, \quad r_0^* = g - A^T x_0^*$
2:	for $j=0,1,2,\dots$, até convergir do
3:	$\alpha_j := (r_j, r_j^*) / (Ap_j, p_j^*)$
4:	$x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j$
5:	$x_{j+1}^* = x_j^* + \alpha_j p_j^*$
6:	$r_{j+1} = r_j - \alpha_j Ap_j$
7:	$r_{j+1}^* = r_j^* - \alpha_j A^T p_j^*$
8:	$\beta_j := (r_{j+1}, r_{j+1}^*) / (r_j, r_j^*)$
9:	$p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j$
10:	$p_{j+1}^* = r_{j+1}^* + \beta_j p_j^*$
11:	end for

O algoritmo BCG é reduzido ao algoritmo CG no caso especial em que $A = A^T$ é uma matriz simétrica definida positiva e $f = g$.

Este algoritmo termina prematuramente se $(r_j, r_j^*) = 0$ para qualquer valor de j . Existe pouca informação relativamente à sua convergência. O algoritmo não converge necessariamente, e registo dos resíduos pode ser enganador e é necessário encontrar um pré-condicionante bom.

Este algoritmo é exposto, embora com todas as suas limitações, dados pretendermos resolver as equações de Lyapunov

$$AX + XA^T + BB^T = 0,$$

$$A^T Y + YA + C^T C = 0,$$

as quais são matematicamente equivalentes às equações lineares standard

$$\tilde{A} \text{vec}(X) + \text{vec}(BB^T) = 0,$$

$$\tilde{A}^T \text{vec}(Y) + \text{vec}(C^T C) = 0,$$

onde $\tilde{A} = I \otimes A + A \otimes I$.

4.2.5 - Métodos para problemas com matrizes esparsas

Nesta secção serão apresentados métodos iterativos standards para as equações de Lyapunov, onde A é uma matriz grande.

Começaremos por rever os métodos standards de Subespaços de Krylov para resolução de equações de Lyapunov. É ainda necessário fazer uma breve introdução ao algoritmo do bloco de Arnoldi que é uma extensão do algoritmo básico de Arnoldi discutido no subcapítulo 4.2.3.

4.2.5.1 - Algoritmo do Bloco de Arnoldi

Definição 4.3 Sejam A uma matriz quadrada de dimensão n , B uma matriz de dimensão $n \times p$, e seja j um inteiro positivo. O bloco do subespaço de Krylov $K_j(A, B)$ é definido por

$$K_j(A, B) = \text{Ran} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{j-1}B \end{bmatrix} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

i.e. $K_j(A, B)$ é a representação da transformação linear $\phi: \mathbb{R}^{jp} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{j-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{jp} \end{bmatrix}.$$

Fica claro que o bloco dos subespaços de Krylov forma uma sequência crescente

$$K_j(A, B) \subseteq K_{j+1}(A, B), \quad j \in \mathbb{N},$$

e existe m tal que

$$K_j(A, B) = K_m(A, B), \quad \text{para todos } j \geq m.$$

Esta observação justifica a seguinte definição.

Definição 4.4 O m mais pequeno tal que $K_j(A, B) = K_m(A, B)$, para todos $j \geq m$ é chamado de grau de B sobre A .

O algoritmo do bloco de Arnoldi pode ser usado para determinar uma base ortonormal para os subespaços de Krylov $K_j(A, f)$. Uma versão do algoritmo do bloco de Arnoldi é dada pelo seguinte Algoritmo. Se forem corridos $k \leq m$ iterações do algoritmo, obtemos a matriz V_k definida por

$$V_k = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_k],$$

com colunas ortonormadas geradas por $K_k(A, B)$. Se definirmos H_k como os bloco superior da matriz de Hessenberg dada por

$$H_k = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & \dots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & H_{32} & H_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & H_{k,k-1} & H_{k,k} \end{pmatrix},$$

então

$$AV_k = V_k H_k + Q_{k+1} H_{k+1,k} E_k^T, \quad k < m,$$

onde E_k é constituída pelas últimas p_k colunas da matriz identidade de dimensão $n_k \times n_k$ e $AV_m = V_m H_m$, $k = m$.

Os números p_k e n_k são criados pelo algoritmo de forma a não se perder rasto da partição das matrizes V_k e H_k . Especificamente, V_k é uma matriz de dimensão $n \times n_k$ e H_{ij} uma matriz de dimensão $p_i \times p_j$.

O algoritmo termina após $k = m$ iterações.

Os blocos da subdiagonal $H_{i+1,i}$ não são necessariamente triangulares superiores, mas são permutações de matrizes triangulares superiores.

É importante notar que qualquer característica de B , bem como os blocos de vectores intermédios W_j reflecte-se no bloco de V_m e H_m , especificamente temos

$$p_1 = \text{rank}(B),$$

ALGORITMO DOS BLOCOS DE ARNOLDI COM PIVOTAÇÃO DE COLUNAS (ALGORITMO 12)

1:	Determinar
	$BP = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 & \hat{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (4.5)$
	using a característica revealing <i>QR</i> algoritmo with column pivoting
2:	for $j=1,2,\dots,k$ do
3:	$V_j := [Q_1, Q_2, \dots, Q_j], n_j := p_1 + p_2 + \dots + p_j$
4:	$W_j := AV_j$
5:	for $i=1,2,\dots,j$ do
6:	$H_{ij} := Q_i^T W_j$
7:	$W_j := W_j - Q_i H_{ij}$
8:	end for
9:	if $W_j = 0$ then
10:	$Q_{j+1} := 0, n_{j+1} := n_j, p_{j+1} = 0$
11:	$k := j$
12:	return
13:	else
14:	Determinar
	$W_j P_j = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1^{(j+1)} & \hat{Q}_2^{(j+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11}^{(j+1)} & R_{12}^{(j+1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	using a característica revealing <i>QR</i> algoritmo with column pivoting
15:	$p_{j+1} := \text{rank}(W_j), Q_{j+1} := Q_1^{(j+1)}, H_{j+1,j} = \begin{bmatrix} R_{11}^{(j+1)} & R_{12}^{(j+1)} \end{bmatrix} P_j^{-1}$
16:	end if
17:	end for

e

$$p_{j+1} = \text{rank}(W_j)$$

para $j=1,2,\dots,m$.

Podemos ainda indicar que as matrizes H_j satisfazem

$$H_j = V_j^T A V_j \text{ ambas para } j < m \text{ e para } j = m.$$

Se A é uma matriz esparsa, então a parte mais dispendiosa do algoritmo do bloco de Arnoldi é o processo modificado de Gram-Schmidt.

4.2.5.2 - Método de Arnoldi

O método de Arnoldi para equações de Lyapunov foi mostrado por [65] que considerou o caso de $p = 1$, e Jaimoukha e Kasenally [44] que estenderam o método para o caso geral de $p > 1$. A convergência deste método foi estudada por Simoncini e Druskin [68].

Serão feitos comentários ao longo da apresentação deste algoritmo tendo em vista a estabilidade e limitações deste método.

Sejam V_j , e H_j as matrizes geradas aplicando o algoritmo dos blocos de Arnoldi às matrizes A e B , i.e.

$$AV_j = V_j H_j + Q_{j+1} H_{j+1,j} E_j^T, \quad j < m, \quad \text{e} \quad AV_m = V_m H_m.$$

Considerem-se as aproximações da forma

$$X_j = V_j Y_j V_j^T,$$

onde Y_j é uma matriz quadrada com dimensão n_j .

Pelo Teorema 1.18 obtemos uma solução verdadeira para $j = m$.

O resíduo correspondente a X_j é dado por

$$R(X_j) = AV_j Y_j V_j^T + V_j Y_j V_j^T A^T + BB^T.$$

O método de Arnoldi devolve Y_j tal que a condição de Galerkin

$$V_k^T R(X_k) V_k = 0,$$

é satisfeita.

O Teorema seguinte foi provado por Jaimoukha e Kasenally.

Teorema 4.4 Suponhamos que $k < m$ iterações do algoritmo dos blocos de Arnoldi foram feitos, então uma aproximação da forma $X_j = V_j Y_j V_j^T$ satisfaz a condição de Galerkin $V_k^T R(X_k) V_k = 0$, se e só se Y_k é solução de $H_k Y_k + Y_k H_k^T + V_k^T B B^T V_k = 0$, onde a norma de Frobenius do resíduo $R(X_k)$ é dado por

$$\|R(X_k)\|_F = \sqrt{2} \|H_{k+1,k} E_k^T Y_k\|_F.$$

Se foram feitos $k = m$ iterações do Algoritmo dos Blocos de Arnoldi, então o resíduo correspondente é zero e a solução exacta é obtida.

Demonstração:

A demonstração é elementar e pode ser encontrada em [44].

O problema fundamental é assegurar que cada uma das equações de ordem reduzida

The fundamental problem is to ensure that each of the reduced order equations

$$H_k Y_k + Y_k H_k^T + V_k^T B B^T V_k = 0,$$

tem uma solução única Y_k . Se H é uma matriz real, então a equação de Lyapunov

$$HY + YH^T + Q = 0$$

tem uma solução única Y para cada escolha de Q se e só se $\lambda + \mu \neq 0$ para cada par de valores próprios λ e μ para H .

No nosso caso a matriz original A é estável, o que nos garante que a equação original tem uma solução única. Todavia, tal como se pode ver no exemplo, pode não ser suficiente para assegurar que as equações de ordem reduzida têm solução única.

Exemplo 4.1:

Seja A uma matriz quadrada de ordem n dada por

$$A = T - e_n e_n^T, \quad (4.6)$$

onde T é uma matriz diagonal-constante de Toeplitz dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e e_n é a última coluna da matriz identidade de ordem n .

A matriz A é estável, mas se $B = e_n$, então as equações de ordem reduzida

$$H_k Y_k + Y_k H_k^T + V_k^T B B^T V_k = 0$$

são singulares para todo o k , excepto se $k = m$.

Note-se que A está na forma de Hessenberg superior e como $B = e_n$, as matrizes H_k são dadas por

$$H_k = A(1:k, 1:k) \text{ para } k = 1, 2, \dots, m.$$

Para $k < m$ $A(1:k, 1:k) = T(1:k, 1:k)$ é diagonal-constante, e é claro que as equações correspondentes de ordem reduzida de Lyapunov são todas singulares. No entanto, se A é definida negativa, i.e.

$$A + A^T < 0,$$

então $V^T A V$ é estável para qualquer matriz V de dimensão $n \times p$ com colunas ortonormais e $p \leq n$.

A matriz A dada por (4.6) é definida não negativa.

É possível indicar o método de Arnoldi como Algoritmo 12. Resolvendo as primeiras k equações de Lyapunov usando o método de Bartels-Stewart serão necessárias $O(k^4 p^3)$ operações aritméticas e para avaliar os primeiros k resíduos serão necessárias $O(k^3 p^3)$ operações aritméticas.

Quando n é grande, estes valores são insignificantes comparados com os valores depois de decorridas k iterações do algoritmo dos blocos de Arnoldi, que é $O(np^2 k^2)$.

Input: As matrizes V_j e H_j geradas após a execução do algoritmo dos blocos de Arnoldi, para uma matriz A definida negativa e uma matriz B de dimensão $n \times p$.

Output: Uma solução aproximada da forma $X_j = V_j Y_j V_j^T$.

ALGORITMO PARA O MÉTODO BASICO DE ARNOLDI PARA EQUAÇÕES CONTÍNUAS DE LYAPUNOV (ALGORITMO 13)	
1:	for $j = 1, 2, \dots$, até convergir do
2:	Resolver a equação de ordem reduzida $H_j Y_j + Y_j H_j^T + V_j^T B B^T V_j = 0$
3:	Calcular a norma de Frobenius $\ R(X_j)\ _F = \sqrt{2} \ H_{k+1,k} E_k^T Y_k\ _F$ onde E_k consiste nas últimas p_k colunas da matriz identidade de dimensão n_k
4:	end for

A convergência deste método foi estudada por Simoncini e Druskin [68], os quais consideraram as equações de Lyapunov da forma

$$AX + XA^T = BB^T, \quad A = A^T > 0.$$

Teorema 4.5 (Simoncini e Druskin [68]) Sejam A uma matriz simétrica definida positiva, e λ_{\min} o menor valor próprio de A . Sejam $\hat{\lambda}_{\min}$ e $\hat{\lambda}_{\max}$ os valores próprios de $A + \lambda_{\min}I$ e $\hat{\kappa} = \hat{\lambda}_{\max}/\lambda$. Então

$$\|X - X_k\|_2 \leq \frac{\sqrt{\hat{\kappa}} + 1}{\hat{\lambda}_{\min} \sqrt{\hat{\kappa}}} \left(\frac{\sqrt{\hat{\kappa}} - 1}{\sqrt{\hat{\kappa}} + 1} \right)^k. \quad (4.7)$$

Consideraram ainda o caso de ser não simétrica e provaram um conjunto de teoremas, sendo o enunciado de seguida o mais simples.

Teorema 4.6 (Simoncini e Druskin [68]) Assuma-se que os campo de valores da matriz real A está contido numa elipse de centro $(c, 0)$, $c > 0$, foco $(c \pm d, 0)$ e semi-eixos a_1 e a_2 , com $a_1 > a_2$, tal que $d = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$. Então

$$\|X - X_k\| \leq \frac{8}{\sqrt{(\alpha_{\min} + c)^2 - d^2}} \frac{r_2}{r_2 - 1} \left(\frac{1}{r_2} \right)^m, \quad (4.8)$$

onde

$$r_2 = \frac{c + \alpha_{\min}}{2r} + \frac{1}{2r} \sqrt{(c + \alpha_{\min})^2 - d^2}, \text{ e } r = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Será mostrado agora que o método de Arnoldi pode ter um historial de resíduos arbitrários:

Dado um inteiro positivo n e a sequência de números reais $\{r_j\}_{j=1}^{n-1}$ é possível construir uma matriz definida negativa A e um vector coluna $B \in \mathbb{R}^n$, tal que o método de Arnoldi devolve uma sequência de resíduos $R(X_j)$, para os quais

$$\|R(X_j)\|_F = r_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

O lema seguinte constrói uma família de matrizes definidas negativas que não são afectadas pelo algoritmo básico de Arnoldi, Algoritmo 7.

Lema 4.7 Seja A uma matriz quadrada real de dimensão n , dada por

$$A = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & -\alpha_1 & & & \\ \alpha_1 & -\varepsilon_2 & -\alpha_2 & & \\ & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\varepsilon_{n-1} & -\alpha_{n-1} \\ & & & \alpha_{n-1} & -\varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

onde $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Desta forma A é definida negativa.

Se B é o primeiro vector coluna da matriz identidade de dimensão n , então o grau de B sobre A é n , e o algoritmo básico de Arnoldi, Algoritmo 6, devolve a factorização trivial

$$AI_n = I_n A$$

quando aplicada ao par (A, B) .

Demonstração

A é definida negativa, devido ao facto dos elementos da subdiagonal foram escolhidos de forma a cancelarem os elementos da subdiagonal correspondente, i.e.

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \text{diag}\{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \dots, -\varepsilon_n\} < 0.$$

Como A é uma matriz superior de Hessenberg, e cada $\alpha_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$, então os n vectores

$$A^j B, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

formam um conjunto independente, consequentemente o grau de B sobre A é n .

O Algoritmo de Arnoldi aplicado ao par (A, B) retornará uma base ortonormal V de $K(A, B) = \mathbb{R}^n$ bem como H , uma matriz Hessenberg superior, tal que $AV = VH$.

Todavia, temos a factorização trivial $AI_n = I_n A$, e como A é uma matriz Hessenberg superior com a subdiagonal positiva, e I_n tem colunas ortonormais, temos que $V = I_n$ e $A = H$.

Sejam $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Sejam A dada por (4.8) e B o primeiro vector coluna da matriz identidade de dimensão n . Considere-se a Equação de Lyapunov $AX + XA^T + BB^T = 0$.

É possível aplicar o método de Arnoldi porque A é definida negativa. A norma de Frobenius do resíduo $R(X_j)$ é dada por

$$\|R(X_j)\|_F = \sqrt{2} \|H_{j+1,j} E_j^T Y_j\|_F, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

onde E_j é a última coluna de matriz identidade de dimensão j e Y_j é a solução da equação de ordem reduzida

$$H_j Y_j + Y_j H_j^T + V_j^T B B^T V_j = 0.$$

Como, por construção a matriz A não é afectada pelo processo de Arnoldi, temos que as equações de ordem reduzida são

$$A(1:j, 1:j) Y_j + Y_j A(1:j, 1:j)^T + B(1:j) B(1:j)^T = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

e que a norma de Frobenius dos resíduos é dada por

$$\|R(X_j)\|_F = \sqrt{2} \|\alpha_j Y_j(1:j, j)\|_F = \sqrt{2} \alpha_j \|Y_j(1:j, j)\|_F, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

O número real α_j é o valor da entrada $(j+1, j)$ da matriz A , portanto não está envolvida no calculo de Y_j . Se a j^{th} linha de Y_j é não nula, então α_j é possível escolher $\|R(X_j)\|_F$ de forma a obtermos qualquer valor desejado.

Como Y_j é simétrica, basta mostrar que a j^{th} coluna de Y_j é não negativa.

É claro que $Y_j \neq 0$, por causa dos termos não homogéneos $B_j B_j^T$ são não nulos.

Todavia, apenas a entrada $(1,1)$ desta matriz é não nula, e é possível usar esta estrutura para mostrar que se $Y_j(:, j) = 0$, então $Y_j = 0$, que é uma contradição.

Seja $j > 1$, colocando as j^{th} colunas de ambos os lados de (4.9) temos que

$$A(1:j, 1:j) Y_j(:, j) - Y_j(:, j) \varepsilon_j + Y_j(:, j-1) \alpha_{j-1} = 0,$$

porque A tem apenas uma subdiagonal. Se as j^{th} colunas de Y_j desaparecessem, então esta expressão reduzia para $Y_j(:, j-1) \alpha_{j-1} = 0$

e como $\alpha_{j-1} > 0$ temos que $Y_j(:, j-1) = 0$. Suponhamos que $1 < i < j$ e temos estabelecido que $Y_j(:, i) = Y_j(:, i+1) = \dots = Y_j(:, j) = 0$, então podemos afirmar que $Y_j(:, i-1) = 0$.

Colocando as i^{th} colunas de ambos os lados de (4.9) temos que

$$A(1:j, 1:j) Y_j(:, i) - Y_j(:, i+1) \alpha_i - Y_j(:, i) \varepsilon_i + Y_j(:, i-1) \alpha_{i-1} = 0.$$

Assumindo que cada coluna $Y_j(:, i+1)$ e $Y_j(:, i)$ são nulas ficamos com $Y_j(:, i-1) \alpha_{i-1} = 0$ donde $Y_j(:, i-1) = 0$.

Conclui-se assim que se a última coluna de Y_j é nula, então Y_j é nula, o que é uma contradição logo a última coluna de Y_j é sempre não nula.

Input: Inteiro $n > 0$, $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, $r_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Output: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida negativa, $B \in \mathbb{R}^n$, tal que os resíduos devolvidos pela método de Arnoldi, Algoritmo 13, satisfazem $\|R(X_j)\|_F = r_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.

ALGORITMO PARA CONSTRUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ESPECIAL DE LYAPUNOV (ALGORITMO 14)	
1:	Definir $A(i, i) := -\varepsilon_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e $B := I_n(:, 1)$.
1:	for $j = 1, 2, \dots, n-1$ do
2:	Resolver $A(1:j, 1:j)Y_j + Y_j A(1:j, 1:j)^T + B(1:j)B(1:j)^T = 0$
3:	Definir $\alpha_j := \frac{r_j}{\sqrt{2}\ Y_j(:, j)\ _F}$
4:	Definir $A(j+1, j) := \alpha_j$, $A(j, j+1) := -\alpha_j$
5:	end for

O Algoritmo 12 constrói uma equação de Lyapunov definida negativa para a qual o método de Arnoldi tem um histórico de resíduos dados.

O método de Arnoldi não explora os fenómenos de característica baixa.

4.2.5.3 - Método GMRES

O método GMRES é devido a Jaimoukha e Kasenally [44], devolve uma aproximação da forma $X_j = V_j Y_j V_j^T$, onde as matrizes V_j são determinadas aplicando o algoritmo dos blocos de Arnoldi às matrizes A e B . A matriz Y_j é escolhida de forma a que a norma de Frobenius do resíduo $R(X_j) = AX_j + X_j A^T + BB^T$ é minimizado sobre todas as matrizes simétricas Y_j , i.e.

$$\|R(X_j)\|_F = \left\{ \|R(X)\|_F : X = V_j Y_j V_j^T, Y_j = Y_j^T \right\}.$$

O problema de trabalhar o minimizante de Y_j é um problema linear dos mínimos quadrados com n_j^2 desconhecidos, onde n_j é o número de colunas de V_j :

$$\|R(X_j)\|_F = \|AV_j Y_j V_j^T + V_j Y_j V_j^T A^T + BB^T\|_2 = \|A(V_j) \text{vec}(Y_j) + \tilde{b}\|_2,$$

onde

$$A(V_j) = V_j \otimes AV_j + AV_j \otimes V_j,$$

é uma matriz de dimensão $n^2 \times n^2$, e $\tilde{b} = \text{vec}(BB^T)$.

Veamos agora o quando é que este problema tem solução única.

Se A é definida positive, então $A(V_j)$ tem característicagrande, porque

$$A(V_j) \text{vec}(Y_j) = 0 \Rightarrow AV_j Y_j V_j^T + V_j Y_j V_j^T A^T = 0 \Rightarrow V_j^T AV_j Y_j + Y_j V_j^T A^T V_j = 0,$$

que implica $Y_j = 0$, porque $V_j^T AV_j$ é estável. De um modo geral, $n_j \leq jp$ e $n_j = jp$ são possíveis.

Se A é definida negativa, então é possível determinar Y_j usando $O(j^6 p^6)$ operações aritméticas, resolvendo as equações

$$A(V_j)^T A(V_j) \text{vec}(Y_j) + A(V_j)^T \tilde{b} = 0.$$

Jaimoukha e Kasenally [44] deduziram um algoritmo, que tira partido da estrutura especial do problema com vista a criar uma sequência de problemas mais pequenos que podem ser resolver independentemente. Este algoritmo também requer $O(j^6 p^6)$ operações aritméticas.

Esta abordagem tem, todavia, as seguintes limitações:

- Para que seja possível pivotamento de colunas, é fundamental que os blocos subdiagonais do bloco superior da matriz de Hessenberg H_j produzido pelo algoritmo dos blocos de Arnoldi sejam triangulares superiores. Se o algoritmo dos blocos de Arnoldi usa o pivotamento de colunas para tratar degradação da característica, então esta estrutura perde-se.
- Cada aproximação é construída como uma combinação linear de soluções de uma equação de Lyapunov especializada. A combinação linear a usar é dada como solução de um sistema linear muito específico. Mas, infelizmente o número de condições deste sistema linear tem a tendência para crescer exponencialmente com o número de iterações até ao ponto de ser totalmente impossível determinar que combinação linear utilizar.

Pelas suas experimentações, Jaimoukha e Kasenally [44] observaram que o número de iterações utilizadas no método de Arnoldi é ligeiramente maior do que o número de iterações no método GMRES.

4.3 - Métodos de Ward e de Kirrinnis

Serão apresentadas duas estratégias mais recentes para resolver a equação de Lyapunov. Ambas usam factorizações matriciais de uma das matrizes coeficientes da equação (0.1), enquanto Ward emprega a decomposição de Jordan de uma matriz no algoritmo por si proposto enquanto Kirrinnis usa a decomposição à custa de uma matriz companheira com um propósito semelhante.

4.3.1 - Método de Ward

Ward [80] apresentou uma técnica para determinar a solução $X \in M_{m,n}$ da equação de Sylvester $AX - XB = C$, onde $A \in M_m$, $B \in M_n$ e $C \in M_{m,n}$ são matrizes conhecidas, que consistia em reduzir apenas uma das matrizes coeficientes A ou B à forma de Jordan.

Inicialmente esta abordagem foi proposta para resolver equações no caso de terem solução única, tendo sido desenvolvida para o caso mais geral da equação $AX - XB = C$ poder ter múltiplas soluções. Tal como nos métodos apresentados no capítulo anterior será feita a adaptação ao caso em estudo sendo $B = -A^T$.

Seja $P^{-1}AP = J$ uma decomposição de Jordan da matriz A . Multiplicando à esquerda a equação $AX + XA^T = C$ por P^{-1} obtemos $P^{-1}A(PP^{-1})X + P^{-1}XA^T = P^{-1}C$, ou equivalentemente

$$JY + YA^T = D, \quad (4.10)$$

onde $Y = P^{-1}X$ e $D = P^{-1}C$.

Transpondo ambos os membros de (4.10) e utilizando as propriedades da matriz transposta, obtemos

$$D^T = (JY + YA^T)^T = (JY)^T + (YA^T)^T = Y^T J^T + AY^T.$$

Aplicando a função *vec* a ambos os membros da equação anterior e tendo em atenção o teorema 2.1 resulta

$$\begin{aligned}
\text{vec}(D^T) &= \text{vec}(Y^T J^T + AY^T) = \text{vec}(Y^T J^T) + \text{vec}(AY^T) \\
&= \left((J^T)^T \otimes I_m \right) \text{vec}(Y^T) + (I_m \otimes A) \text{vec}(Y^T) \\
&= (J \otimes I_m + I_m \otimes A) \text{vec}(Y^T).
\end{aligned}$$

Como tal, a equação matricial (4.10) é equivalente ao sistema de equações lineares

$$(J \otimes I_m + I_m \otimes A) \text{vec}(Y^T) = \text{vec}(D^T). \quad (4.11)$$

Ward [80] realçou o facto da matriz dos coeficientes deste sistema, designada por *nivelador* da equação, ter uma estrutura por blocos que se assemelha à estrutura da forma canónica de Jordan da matriz A . Ou seja, por cada bloco de Jordan $J_r(\lambda)$ contido em J , a matriz do sistema anterior contém uma submatriz por blocos (de ordem rm) da forma

$$S_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I_m + A & I_m & & 0 \\ & \lambda I_m + A & \ddots & \\ & & \ddots & I_m \\ 0 & & & \lambda I_m + A \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

que tem uma estrutura semelhante à de $J_r(\lambda)$.

Suponhamos que a matriz $A \in M_m$ tem uma forma canónica de Jordan diagonal, i.e.,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

para alguma matriz invertível $P \in M_m$. Assim, o sistema de equações lineares (4.11) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

onde $L_i = -A - \lambda_i I_m$; $i = 1, \dots, m$, e $Y^T = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $D^T = (d_1, d_2, \dots, d_m)$. A solução Y da equação (4.10) (se existir) obtém-se linha a linha, resolvendo independentemente cada um dos m sistemas lineares $-L_i y_i = d_i$, cada um com m equações.

Consideremos agora o caso mais geral em que A tem uma forma canónica de Jordan contendo p blocos de Jordan de ordens m_1, m_2, \dots, m_p com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, respectivamente. Neste caso, tendo em atenção a fórmula (4.12), o sistema de equações lineares (4.11) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} S_{m_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{m_p}(\lambda_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde $Y^T = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ e $D^T = (d_1, d_2, \dots, d_m)$.

Este sistema pode ser dividido em p equações matriciais

$$S_{m_i}(\lambda_i) \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+m_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{k+1} \\ \vdots \\ d_{k+m_i} \end{bmatrix}, \text{ com } i = 1, \dots, p, \quad (4.15)$$

onde $k = m_1 + m_2 + \dots + m_{i-1}$ para $i > 1$ e $k = 0$ se $i = 1$, correspondendo aos p blocos de Jordan da forma canónica da matriz A .

Cada uma das equações (4.15) é independente das outras $p - 1$ equações e a equação matricial (4.10) tem solução se e só se cada uma das equações (4.15) a tiver.

Mostraremos agora como é obtida a solução da primeira equação (4.15). A forma de determinar cada uma das outras equações é análoga.

Consideremos a equação

$$S_{m_1}(\lambda_1) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{m_1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -L_1 & I_n & & 0 \\ & -L_1 & \ddots & \\ & & \ddots & I_n \\ 0 & & & -L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{m_1} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

sendo $L_1 = -A - \lambda_1 I_m$. Multiplicando os dois membros à esquerda pela matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} I_m & & & & & \\ L_1 & I_m & & & & 0 \\ L_1^2 & L_1 & I_m & & & \\ L_1^3 & L_1^2 & L_1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ L_1^{m_1-1} & L_1^{m_1-2} & L_1^{m_1-3} & \cdots & L_1 & I_m \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

reduzimos o sistema (4.16) à forma

$$\begin{bmatrix} -L_1 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ -L_1^2 & 0 & I_m & & \\ -L_1^3 & 0 & 0 & I_m & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ -L_1^{m_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ L_1 d_1 + d_2 \\ L_1^2 d_1 + L_1 d_2 + d_3 \\ \vdots \\ L_1^{m_1-1} d_1 + L_1^{m_1-2} d_2 + \cdots + L_1 d_{m_1-1} + d_{m_1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} -L_1 y_1 + y_2 = d_1 \\ -L_1^2 y_1 + y_3 = L_1 d_1 + d_2 \\ -L_1^3 y_1 + y_4 = L_1^2 d_1 + L_1 d_2 + d_3 \\ \vdots \\ -L_1^{m_1-1} y_1 + y_{m_1} = L_1^{m_1-2} d_1 + L_1^{m_1-3} d_2 + \cdots + d_{m_1-1} \\ -L_1^{m_1} y_1 = L_1^{m_1-1} d_1 + L_1^{m_1-2} d_2 + \cdots + L_1 d_{m_1-1} + d_{m_1} \end{cases} \quad (4.19)$$

Consideremos agora a última equação do sistema anterior da qual conhecemos o segundo membro, porque tanto a matriz L_1 como os vectores d_1, d_2, \dots, d_{m_1} ficam completamente determinados no momento em que é conhecida uma decomposição de Jordan da matriz A . Logo a existência de solução única para esta última equação depende apenas do determinante de L_1 .

Como $\det(L_1) = \det(-A - \lambda_1 I_n) \neq 0$ porque λ_1 não é um valor próprio de $-A^T$ (uma matriz quadrada e a sua transposta têm o mesmo espectro).

Nestas condições da última equação de (4.19) obtém-se

$$y_1 = -\left(L_1^{m_1}\right)^{-1} \left(L_1^{m_1-1} d_1 + L_1^{m_1-2} d_2 + \cdots + L_1 d_{m_1-1} + d_{m_1}\right) = -\sum_{i=1}^{m_1} L_1^{-i} d_i \quad (4.20)$$

e substituindo y_1 nas restantes equações podemos determinar completamente a solução do sistema (4.19).

Em conclusão, é um método para resolver a equação de Sylvester (no caso analisado nesta dissertação $B = -A^T$) que requer a determinação de um conjunto de sistemas de equações lineares em número igual ao de blocos de Jordan, da matriz transformada para esta forma canónica.

De modo análogo se determinaria a solução da equação com a transformação de A^T .

No exemplo seguinte será aplicado o método quando A é uma matriz que já se encontra na forma canónica de Jordan.

4.3.2 - Método de Kirrinnis

A ideia geral deste algoritmo consiste em transformar as matrizes A e B para uma forma particular (de matrizes companheiras) de forma a tornar possível uma resolução mais célere.

Inicialmente, e para introduzir a descrição deste método, considerou-se o caso particular de $-A^T$ ser uma matriz de Hessenberg inferior com os elementos da sobrediagonal iguais a um, i.e.,

$$-A^T = \begin{bmatrix} -a_{11} & 1 & & 0 \\ -a_{12} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ -1 & a_{22} & \ddots & a_{2m} \\ \vdots & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{mm} \end{bmatrix}.$

Como foi visto, a equação $AX + XA^T = C$ é equivalente ao sistema de m^2 equações lineares $(I_m \otimes A + A \otimes I_m) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$. Atendendo a especificidade da matriz $-A^T$, a matriz dos coeficientes do sistema anterior pode ser rescrita como

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}I_m & a_{21}I_m & \cdots & a_{m1}I_m \\ -I_m & a_{22}I_m & \cdots & a_{m2}I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -I_m & a_{mm}I_m \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} A+a_{11}I_m & a_{21}I_m & \cdots & a_{m1}I_m \\ -I_m & A+a_{22}I_m & \cdots & a_{m2}I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -I_m & A+a_{mm}I_m \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Suponhamos que a última coluna x_m da matriz das incógnitas X é conhecida. Então do produto da última linha da matriz anterior por $\text{vec}(X) = (x_1^T, \dots, x_m^T)^T$ e igualando-a à última “coordenada” c_m de $\text{vec}(C) = (c_1^T, \dots, c_m^T)^T$ obtemos a equação

$$-I_m x_{m-1} + (A + a_{mm}I_m)x_m = c_m \Leftrightarrow x_{m-1} = (A + a_{mm}I_m)x_m - c_m.$$

Por sua vez esta permite determinar directamente a penúltima coluna da matriz solução X . Da igualdade do produto da penúltima linha da matriz por blocos anterior por $\text{vec}(X)$ com c_{m-1} , resulta

$$-I_m x_{m-2} + (A + a_{m-1,m-1}I_m)x_{m-1} + b_{m,m-1}x_m = c_{m-1} \Leftrightarrow x_{m-2} = Ax_{m-1} + \sum_{i=m-1}^m a_{i,m-1}x_i - c_{m-1},$$

sendo obtida a antepenúltima coluna x_{m-2} da solução.

Deste modo, as primeiras $n-1$ colunas da matriz X são obtidas recursivamente através de

$$x_{k-1} = Ax_k + \sum_{i=k}^m a_{ik}x_i - c_k, \text{ com } n \geq k \geq 2. \quad (4.22)$$

A principal questão prende-se no cálculo prévio de x_m para se possível a aplicação desta fórmula.

Kirrinis mostrou em [48] que a última coluna da matriz X é a solução da equação

$$p_{-A^T}(A)x_m = -c_1 + \sum_{l=1}^{m-1} p_{-A_l^T}(A) \cdot c_{l+1}, \quad (4.23)$$

onde $-A_l^T$ é a submatriz de $-A^T$ quadrada de ordem l , contida nas primeiras l linhas e l colunas, onde $p_B(\lambda)$ e $p_{B_l}(\lambda)$ representam, respectivamente os polinómios característicos das matrizes $-A^T$ e $-A_l^T$.

Se $-A^T$ for uma matriz de Hessenberg com uma estrutura dada por (4.21), o algoritmo de Kirrinnis permite reduzir a determinação da solução da equação matricial à resolução de um único sistema de m equações lineares (4.23) para se conhecer a última coluna da solução, e posterior determinação directa das restantes colunas por substituição regressiva.

Este algoritmo é igualmente válido para o caso em que $-A^T$ é uma matriz de Hessenberg superior com os elementos da subdiagonal iguais a um. Neste caso temos uma resolução análoga, devendo-se determinar inicialmente a primeira coluna da matriz X .

Considere-se agora o caso mais geral de ser necessário reduzir A e $-A^T$ à forma de matrizes companheiras usando transformações de semelhança.

Sejam $A = PK_A P^{-1}$ e $-A = QK_{-A} Q^{-1}$ decomposições das matrizes A e $-A$, respectivamente, usando matrizes companheiras do tipo (1.3).

Então a equação $AX + XA^T = C$ é transformada na equação

$$K_A Y + Y(K_{-A})^T = F \quad (4.24)$$

onde $X = PYQ^T$ e $F = P^{-1}C(Q^{-1})^T$. A solução Y pode ser calculada através das fórmulas $(A^m + d_{m-1}A^{m-1} + \dots + d_1A + d_0I_m) x_m = c_1 + Ac_2 + A^2c_3 + \dots + A^{m-1}c_m$ e $x_{k-1} = Ax_k + a_{km}x_m - c_k$, com $m \geq k \geq 2$, visto $(K_{-A})^T$ ser uma matriz companheira do tipo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Para terminar $X = PYQ^T$.

Exemplo 4.2

Os espectros de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $\left(-\frac{2053}{680}, \frac{1657}{1057}, \frac{2003}{237}\right)$ e de $-A^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix}$,

$\left(\frac{2053}{680}, -\frac{1657}{1057}, -\frac{2003}{237}\right)$ não têm nenhum valor próprio em comum.

Então a equação $AX + XA^T = C$ tem uma solução única.

$$\text{Seja } C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -10 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Determinemos as factorizações de A e $-A$ usando matrizes companheiras.

Seja $v = (1 \ 0 \ 0)^T$. A matriz $P_{v,A} = (v, Av, A^2v)$ que é igual a $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é

não singular com inversa $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Então pelo teorema 1.9 resulta que $P^{-1}AP = K_A$ é uma matriz companheira, tendo-se

$$K_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -40 \\ 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Calculemos agora K_{-A} . Considere-se $v = (1 \ 0 \ 0)^T$, temos então que a matriz

$Q_{v,-A} = (v, -Av, (-A)^2v) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é regular com inversa $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Assim,

$$K_{B^T} = Q^{-1}B^TQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Como (4.24) é equivalente à equação $AX + XA^T = C$ depois de aplicadas estas transformações temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -40 \\ 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} Y + Y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -1 & 5 \\ 4 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 6 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{bmatrix}, \text{ com } X = PYQ^T.$$

Assim, a última coluna da matriz solução da equação reduzida é obtida resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} (K_A^3 + 7K_A^2 - 17K_A - 40I_3) y_3 &= \begin{bmatrix} -15 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + K_A \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + K_A^2 \begin{bmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -80 & -560 & -3920 \\ 0 & 158 & 1106 \\ 14 & 98 & 844 \end{bmatrix} y_3 &= \begin{bmatrix} 435 \\ -\frac{473}{4} \\ \frac{393}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow y_3 = \begin{bmatrix} -\frac{251}{1264} \\ \frac{293}{1264} \\ -\frac{177}{1264} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez conhecido y_3 , as restantes duas colunas de Y obtêm-se directamente.

Temos assim que

$$y_2 = \begin{bmatrix} -\frac{997}{1264} \\ \frac{577}{1264} \\ \frac{27}{1264} \end{bmatrix} \text{ e } y_3 = \begin{bmatrix} \frac{4451}{1264} \\ -\frac{2441}{675} \\ \frac{725}{1264} \end{bmatrix}$$

Como tal

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4451}{1264} & -\frac{997}{1264} & -\frac{251}{1264} \\ -\frac{2441}{675} & -\frac{577}{1264} & \frac{293}{1264} \\ \frac{725}{1264} & \frac{27}{1264} & -\frac{177}{1264} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{915}{1264} & -\frac{529}{158} & -\frac{19}{632} \\ \frac{787}{158} & -\frac{67}{158} & \frac{235}{158} \\ -\frac{317}{632} & \frac{75}{158} & -\frac{177}{316} \end{bmatrix}$$

é a solução da equação $AX + XA^T = C$.

5. Conclusões

Visando uma síntese de métodos que actualmente são usados com vista a obter soluções de um ponto de vista analítico de equações matriciais de Lyapunov, foi elaborada esta dissertação onde são apresentados exemplos de solubilidade da mesma.

As equações referidas são da forma $AX + XA^* + Q = 0$ para as equações do tipo contínuas $AXA^* - X + Q = 0$ e para equações do tipo discretas, onde $A, Q \in M_m$ são matrizes conhecidas.

Como os espectros de A e $-A^*$ são disjuntos é possível afirmar que tem sempre solução única. No caso de m^2 ser pequeno ou moderado é possível usar um método directo para solucionar o sistema de equações lineares que resulta da reformulação da equação através do produto matricial de Kronecker. Sempre que m^2 for grande é preferível seleccionar um método iterativo para o mesmo fim.

Apesar das diversas potencialidades evidenciadas por cada método, é sempre possível desenvolver melhoramentos. Usando todas as vantagens apresentadas por cada método, vários investigadores têm investigado no sentido de criar algoritmos híbridos de forma a obter algoritmos mais céleres e eficazes. Dado que os sistemas de controlo exigirem um número bastante grande de equações pelo facto de dos processos modernos se tornarem cada vez mais complexos com muitas entradas e saídas, este tipo de equações continuam a ser um tema de grande relevo tendo várias aplicações em diferentes domínios.

Embora seja uma era em que os computadores têm a tendência de evolução célere ao nível da velocidade, existe a necessidade de obter algoritmos igualmente rápidos pelo simples facto de se pretender analisar problemas cada vez mais complexos. Assim, o tempo despendido pelo computador ou o custo da simulação, bem como a qualidade dos resultados obtidos são aspectos essenciais a ter em conta em termos de eficiência do método numérico utilizado. Com este objectivo têm surgido nos últimos anos métodos cada vez mais eficazes na rápida e eficaz resolução de problemas que a simulação numérica origina, permitindo assim recorrer a modelos matemáticos mais complexos e fiáveis e originando tempos de processamento realistas.

Por norma, a complexidade matemática dos modelos torna inexecutável o desenvolvimento de soluções analíticas. Como tal, a simulação numérica constitui um desafio e praticamente a única resposta de resolução deste tipo de problemas. Estes algoritmos numéricos que originem resultados precisos com um consumo de tempo de computador razoável, são ferramentas essenciais para a sua abordagem, especialmente em sistemas de grande dimensão.

Bibliografia

- [1] Agudo, F. R. D., **Análise Real**, Vol. III, Escolar Editora, Lisboa (1992).
- [2] Antoulas, A.C.. **Approximation of large-scale dynamical systems**. SIAM, first edition, 2005
- [3] Barraud, A., **A numerical algorithm to solve $A^T X A - X = Q$** , IEEE Trans. Automat. Control 22 (1977) 883–885.
- [4] Bartels, R.H. and Stewart, G.W.. **Solution of the matrix equation $AX + XB = C$** . Communication of the ACM, 15(9):820–826, 1972
- [5] Baur, U. and Benner, P.. **Factorized solution of the Lyapunov equation by using the hierarchical matrix arithmetic**. Computing, 78(3):211–234, 2006
- [6] Beauwens, R. and Groen, P., **Iterative Methods in Linear Algebra**, IMACS, Elsevier Science Publishers, North-Holland (1992), pp. 217-240.
- [7] Beitia, M. A. e Garcia, J.-M., **Sylvester Matrix Equation for Matrix Pencils**, Linear Algebra Appl. 232, pp. 155-197 (1996).
- [8] Benner, P.. **Factorized solution of the Sylvester equation with applications in control**. In Proceedings of the 16th Intl. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2004
- [9] Bischof, C. H.; Datta, B. N. e Purkayastha, A., **A Parallel Algorithm for the Sylvester Observer Equation**, SIAM J. Sci. Comput. 17, No. 3, pp. 686-698 (1996).
- [10] Bitmead, R., **Explicit solutions of the discrete-time Lyapunov matrix equation and Kalman–Yakubovich equations**, IEEE Trans. Automat. Control 26 (1981) 1291–1294.
- [11] Bitmead, R., Weiss, H., **On the solution of the discrete-time Lyapunov matrix equation in controllable canonical form**, IEEE Trans. Automat. Control 24 (1979) 481–482.
- [12] Brandts, J., **A Comparasion of Subspace Methods for Sylvester Equations**, Preprint No. 1183, Mathematics Institute, Universiteit Utrecht (2001)
- [13] Brandts, J., **Computing Tall Skinny Solutions of $AX - XB = C$** , Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 61, pp. 385-397 (2003)
- [14] Chen, T., Francis, B.A., **Optimal Sampled-data Control Systems**, Springer, London, 1995.

- [15] Chu, K-WE., **The solution of the matrix equation $AXB - CXD = Y$ and $(YA - DZ, YC - BZ) = (E, F)$** , Linear Algebra Appl. 93 (1987) 93–105.
- [16] Chuanqing, G., Zhaolu, T., **A new iterative method for Lyapunov equations**, in: 14th Conference of the International Linear Algebra Society, 2007, pp. 43–46.
- [17] Datta, B. N., **Numerical Linear Algebra and Applications**, Brooks/Cole Publishing Company, USA (1995)
- [18] Deif, A. S.; Seif, N. P. e Hussein, S. A., **Sylvester’s Equation: Accuracy and Computational Stability**, J. Comput. Appl. Math. 61, No. 1, pp. 1-11 (1995)
- [19] Demko, S., Moss, W.F., and Smith, P.W.. **Decay rates for inverses of band matrices**. Mathematics of Computation, 43(168):491–499, 1984
- [20] Demmel, J.W., **Applied Numerical Linear Algebra**, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [21] Ding, F., Chen, T., **Gradient based iterative algorithms for solving a class of matrix equations**, IEEE Trans. Automat. Control 50 (2005) 1216–1221.
- [22] Ding, F., Chen, T., **Iterative least squares solutions of coupled Sylvester matrix equations**, Syst. Control Lett. 54 (2005) 95–107.
- [23] Duan, G.-Ren., **On the Solution to the Sylvester Matrix Equation $AV + BW = EVF$** , IEEE Trans. Autom. Control 41, No. 4, pp. 612-614 (1996)
- [24] Embree, M., **How descriptive are GMRES convergence bounds**. Technical research report, Oxford University Computing Laboratory, 1999
- [25] Fang, Y., Loparo, K.A. and Feng, X., **New estimates for solutions of Lyapunov equations**, IEEE Trans. Automat. Control 42 (1997) 408–411
- [26] Gamti, N. and Philippe, B., **Comments on the GMRES convergence for preconditioned systems**. In Jerzy Wasniewski Ivan Lirkov, Svetozar Margenov, editor, Large scale scientific computing: 6th international conference, LSSC 2007, Sozopol, Bulgaria, June 5-9, 2007, pages 41–51, New York, 2008. Springer.
- [27] Gardiner, J. D., Laub, A. J., Amato, J. J. and Moler, C. B., **Solution of the Sylvester Matrix Equation $AXB^T + CXD^T = E$** , ACM Trans. Math. Softw. 18, No. 2, pp. 223-231 (1992)
- [28] George, A. and Ikramov, Kh., **Gaussian elimination is stable for the inverse of a diagonally dominant matrix**. Math. Comp, 73(246):653–657, 2003

- [29] Golub, G.H., Nash, S. and Van Loan, C.F., **A Hessenberg–Schur method for the matrix equation $AX + XB = C$** , IEEE Trans. Automat.Control 24 (1979) 909–913.
- [30] Golub, G.H. and Van Loan, C.F., **Matrix Computations**, third ed., Johns Hopkins University Press, 1996.
- [31] Grasedyck, L., Hackbusch, W., and Khoromskij, B.N., **Solution of large scale algebraic matrix Riccati equations by use of hierarchical matrices**. Computing, 70(2):121–165, 2003
- [32] Greenbaum, A., Pták, V., and Strakos, Z., **Any non increasing convergence curve is possible for GMRES**. SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 17(3):465–469, 1996
- [33] Gugercin, S., Sorensen, D.C., and Antoulas, A.C., **A modified low-rank Smith method for large-scale lyapunov equations**. Numerical Algorithms, 32(1):27–55, 2003
- [34] Hammarling, S.J., **Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation**. IMA Journal of Numerical Analysis, 2(3):303–323, 1982
- [35] Heinen, J., **A technique for solving the extended discrete Lyapunov matrix equation**, IEEE Trans. Automat. Control 17 (1972) 156–157
- [36] Hestenes, M.R. and Stiefel, E.L., **Methods of conjugate gradients for solving linear systems**. Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section B, 49:409–436, 1952
- [37] Higham N.J.. **Accuracy and stability of Numerical Algorithms**. SIAM, Philadelphia, PA, USA, second edition, 2002
- [39] Higham N.J.. **Functions of Matrices: Theory and computation**. SIAM, USA, first edition, 2008
- [40] Hochbruck, M. and Starke, G., **Preconditioned Krylov subspace methods for Lyapunov matrix equations**. SIAM J. Matrix. Anal. Appl., 16:156–171, 1995
- [41] Hodel, A.S, Tenison, B., and Poolla, K.R., **Numerical solution of the Lyapunov equation by approximate power iteration**. Linear Algebra and its Applications, 236:205–230, 1996
- [42] Horn, R.A. and Johnson, C.R., **Matrix Analysis**. Cambridge University Press, New York, first edition, 1985

- [43] Hu, D. Y. e Reichel, L., **Krylov-Subspace Methods for the Sylvester Equation**, Linear Algebra Appl. 172, pp. 283-313 (1992)
- [44] Jaimoukha, I. and Kasenally, E., **Krylov subspace methods for solving large Lyapunov equations**. SIAM J. Matrix Anal, 31:227–251, 1994
- [45] Jbilou, K., Messaoudi, A. and Sadok H., **Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations**, Appl. Number. Math. 31 (1999) 97–109.
- [46] Kågström, B. and Westin, L., **Generalized Schur methods with condition estimators for solving the generalized Sylvester equation**, IEEE Trans. Automat. Control 34 (1989) 745–751
- [47] Kincaid, D. e Cheney, W., **Numerical Analysis**, Second Ed., Brooks/Cole Publishing Company, USA (1996)
- [48] Kirrinnis, P., **Fast Algorithms for the Sylvester Equation $AX - XB^T = C$** , Theoretical Computer Science, Elsevier, No. 259, pp. 623-638 (2001)
- [49] Kressner, D., **Memory efficient Krylov subspace techniques for solving large-scale Lyapunov equations**. In IEEE International Conference on Computer Aided Control Systems, pages 613–618, 2008.
- [50] Lanczos, C., **Solution of systems of linear equations by minimized iterations**. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 49:33–53, 1952
- [51] Larriba-Pey, J., Navarro, J. and Angel, Jorba. **Spike algorithm with savings for strictly diagonal dominant tridiagonal systems**. Microprocessing and Microprogramming, 39 (2-5):125–128, 1993
- [52] Matsumoto, S., **An Application of Schur's Lemma to the Sylvester Equation $AX - XB = C$** , Mem. Konan Univ., Sci. Ser. 42, No. 1, pp. 125-134 (1995)
- [53] Mukaidani, H., Xu, H., Mizukami, K., **New iterative algorithm for algebraic Riccati equation related to H control problem of singularly perturbed systems**, IEEE Trans. Automat. Control 46 (2001) 1659–1666
- [54] Naumov, M. and Sameh, A.H., **A tearing based hybrid parallel banded solver**. Journal of Computational and Applied Mathematics, accepted, 2008
- [55] Nikitin, A. V. e Yasinskii, V. K., **Iterative Procedure for Solution of Sylvester Generalized Matrix Equation**, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 36, No. 3, pp.472-474 (2000)
- [56] Ogata, K., **Designing Linear Control Systems with Matlab**, Prentice Hall International Editions, New Jersey (1994)

- [57] Penzl, T., **A Cyclic Low Rank Smith Method for Large Sparse Lyapunov Equations with Applications in Model Reduction and Optimal Control**, Preprint SFB 393, Technische Universitat Chemnitz (1998)
- [58] Penzl, T., **Eigenvalue decay bounds for solutions of Lyapunov equations: the symmetric case**. Systems Control Lett., 40(2):139–144, 2000
- [59] Penzl, T., **Lyapack users' guide**. <http://www.netlib.org/lyapack/guide.pdf>, 2000
- [60] Pina, H., **Métodos Numéricos**, McGraw-Hill, Lisboa (1995)
- [61] Ribeiro, M. I., **Análise de Sistemas Lineares**, Vol. 1 e 2, Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, IST Press, Lisboa (2002)
- [62] Saad, Y. and Schultz, M., **GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems**. SIAM J. Sci. and Stat. Comput., 7(3):856–869, 1986
- [63] Saad, Y., **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. SIAM, USA, second edition, 2003
- [64] Saad, Y., **Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems**. Halsted Press, New York, 1992
- [65] Saad, Y., **Numerical solution of large Lyapunov equations**. Progr. Systems Control Theory, 5:503–511, 1990
- [66] Sabino, J., **Solution of large-scale Lyapunov equations via the block modified Smith method**. PhD thesis, University of Houston, Texas, 2006
- [67] Shoshitaishvili, A. e Yaroshevskaya, I., **On the Solvability of the Sylvester Equation**, J. Math. Sci., New York 83, No. 4, pp. 550-553 (1997)
- [68] Simoncini, V. and Druskin, V., **Convergence analysis of projection methods for the numerical solution of large Lyapunov equations**. <http://www.dm.unibo.it/~simoncini/list.html>, 2008
- [69] Simoncini, V. and Szyld, D., **Recent computational developments in Krylov subspace methods**. Numerical Linear Algebra and Applications, 14(1):1–59, 2007
- [70] Simoncini, V., **A new iterative method for solving large-scale Lyapunov matrix equations**. SIAM J. Scient. Computing, 29(3):1268–1288, 2007
- [71] Smith, R.A., **Matrix equation $XA + BX = C$** . SIAM Journal on Applied Mathematics, 16(1):198–201, 1968

- [72] Sorensen, D. and Zhou, Y., **Direct methods for matrix Sylvester and Lyapunov equations**. Journal of Applied Mathematics, 6:277–303, 2003
- [73] Sorensen, D.C., **Implicit application of polynomial filters in a k-step Arnoldi method**. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 13(1):357–385, 1992
- [74] Starke, G. and Niethammer W., **SOR for $AX - XB = C$** , Linear Algebra Appl. 154 (1991) 355–375.
- [75] Stewart, G.W. and Sun J.G., **Matrix Perturbation Theory**, Academic Press, 1990.
- [76] Stewart, G.W., **Matrix Algorithms**. SIAM, first edition, 2001
- [77] Sun, X., **Application and accuracy of the parallel diagonal dominant algorithm**. Parallel Computing, 21:1241–1267, 1995
- [78] Trefethen, L. N. and Bau, D. III, **Numerical Linear Algebra**, SIAM, Philadelphia (1997)
- [79] Wachspress, E., **Iterative solution of the Lyapunov matrix equation**. Applied Mathematics Letters, 1(1):87–90, 1988
- [80] Ward, A. J. B., **A General Analysis of Sylvester’s Matrix Equation**, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 22, No. 4, pp. 615-620 (1991)
- [81] Watkins, D. S., **Fundamentals of Matrix Computations**, John Wiley & Sons, Inc., New York (1991)
- [82] Wimmer, H. K., **The Generalized Sylvester Equation in Polynomial Matrices**, IEEE Trans. Autom. Control 41, No. 9, pp. 1372-1376 (1996)
- [83] Zhang, F., **Matrix Theory: Basic Results and Techniques**, Universitext, Springer-Verlag, New York (1999)
- [84] Zhou, K., Doyle, J.C., and Glover, K., **Robust and optimal control**. Prentice Hall, New Jersey, 1996
- [85] Zhou, Y. and Sorensen, D.C., **Bounds on eigenvalue decay rates and sensitivity of solutions to Lyapunov equations**. Technical research report TR-02-07, CACM Rice University, 2002