



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

A Construção do conhecimento no desenvolvimento do Pensamento Algébrico

Corália Maria Santos Pimenta

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Didática da Matemática
(3.º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva

Covilhã, abril de 2016

Dedicatória

À minha família

Querer envolve acreditar e agir, começando, muitas vezes, por algo menor.

E, é então, que o passado nos dá armas para enfrentar o presente e o presente nos permite sonhar com um futuro que nos complete.

Seja qual for o prisma sob o qual estivermos a olhar, seremos sempre só Um.

Agradecimentos

Expresso os meus sinceros agradecimentos ao Professor Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva, da Faculdade de Ciências da Universidade da Beira Interior, pela oportunidade que me deu para chegar até aqui e por ter partilhado, com transparência e humildade, as experiências e o conhecimento que tornaram possível a realização deste estudo. Agradeço o respeito e a compreensão demonstrada por todas as limitações e por manter vivo o meu entusiasmo. A nossa vida é aquilo que criamos e, por isso, agradeço o rigor e a exigência, bem como o incentivo dado, sobretudo nos momentos difíceis.

Agradeço à direção pedagógica do Instituto Educativo de Lordemão por ter permitido a realização desta investigação, aos alunos envolvidos e seus encarregados de educação, acreditando ter contribuído para estimular o gosto pela aprendizagem da matemática e para o desenvolvimento dos alunos.

Um agradecimento especial para a minha amiga Alexandra Rodrigues, de quem tanto me orgulho, e que partilha comigo a filosofia de que todos os dias devemos acrescentar um ponto à nossa vida, independentemente do esforço e sacrifícios que tenhamos que impor e que os demais possam não compreender. Agradeço por me lembrar, sempre que mergulho no meu estado de inquietações, de que somos o comando das nossas vidas e que quando nos envolvemos, estamos no nosso estado de alegria.

Aos meus colegas e amigos Ana Silva, António Rainho, Filipa Marques, Paulo Bessa e Sérgio Videira, agradeço todas as palavras de carinho e incentivo, o facto de acreditarem em mim e de me apoiarem diariamente, incentivando-me a continuar.

Agradeço a todos os colegas que estiveram presentes nos seminários da Universidade da Beira Interior e que me deram sugestões para melhorar a apresentação deste estudo.

Ao meu filho, Martim Carvalheiro, e ao meu sobrinho, Santiago Venâncio, agradeço a compreensão demonstrada quando as brincadeiras não foram possíveis, os risos e as birras que permitiram que mantivesse os pés na terra, estando certa que terei dado o exemplo de que a vida também é feita de sacrifícios e que conquistar engrandece o ser humano.

Aos meus irmãos e cunhados e, em particular, ao meu cunhado, Pedro Venâncio, pela paciência e disponibilidade que lhe é característica. E, por fim, aos meus pais que foram, na altura certa, exigentes, obrigando à conquista, à humildade e ao respeito pelos outros, bem como ao meu marido que contribuiu diariamente para que fosse possível chegar ao fim.

Resumo

O presente estudo centra-se na análise do processo de abstração, identificado em alunos com nove e dez anos de idade, quando constroem um novo conhecimento matemático que decorre do incentivo ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Realizou-se no contexto de sala de aula de matemática, onde a investigadora era a professora da turma.

Através da investigação efetuada procurou-se analisar, descrever e refletir sobre os raciocínios desenvolvidos pelos alunos, compreender melhor a influência do contexto, em particular da mediação estabelecida pela professora e verificada entre alunos, no desenvolvimento do processo de abstração e, conseqüentemente, na construção do novo conhecimento matemático. Procuraram-se identificar dificuldades manifestadas durante a resolução das tarefas e exposição de raciocínios, bem como reconhecer características que contribuam para o desenvolvimento algébrico.

Procurou-se, ainda, dar resposta às seguintes questões de investigação: (1) Na construção do novo conhecimento matemático, que ações epistémicas se podem identificar durante o processo de abstração quando os alunos desenvolvem a compreensão dos dados enunciados, identificam regularidades e relações, mobilizam conhecimentos e ideias, generalizam ou estendem procedimentos aritméticos a valores desconhecidos e resolvem problemas de natureza algébrica? Como se sequenciam e relacionam essas ações epistémicas? (2) Como se manifesta o processo de mediação, estabelecido pela professora e promovido entre alunos, na construção do novo conhecimento e, em particular, no desenvolvimento das ações epistémicas?

Face ao interesse em colmatar as dificuldades evidenciadas pelos alunos durante a aprendizagem da álgebra, procurou estimular-se o pensamento algébrico, aplicando orientações da proposta curricular *Early algebra*. Para tal, selecionaram-se as tarefas exploratórias, através das quais se procurou promover a observação de regularidades, relações e propriedades numéricas, a interpretação e utilização de linguagem simbólica, a resolução de problemas de natureza algébrica e a generalização e extensão de procedimentos aritméticos a algébricos.

Relativamente à construção do novo conhecimento matemático, valorizou-se o processo de abstração que ocorre mediante a reorganização vertical de construções matemáticas adquiridas, que ascende do abstrato ao concreto e que dá expressão ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Adotou-se o modelo teórico *AiC*, *Abstract in Context*, que defende a ideia da matematização vertical e da interligação de ações epistémicas no desenvolvimento do processo de abstração e na construção do novo conhecimento matemático, bem como o modelo teórico e metodológico *RBC+C* (Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B., 2001) que

permite compreender, através do desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*, como ocorre a nova construção.

No contexto deste trabalho, a mediação estabelecida pela professora e verificada entre alunos é relevante para a aquisição do novo conhecimento matemático, realçando-se, da parte da professora o incentivo à utilização de artefactos e, em particular, à exploração da tarefa e representações tabelar e pictóricas que ela possa contemplar ou que sejam desenvolvidas pelos alunos. No sentido da mediação, destaca-se o ciclo didático (Bussi & Marotti, 2008) através do qual se procurou compreender o alcance da atuação da professora no desenvolvimento das ações epistémicas supracitadas e, conseqüentemente, na construção do novo conhecimento matemático.

Relativamente à metodologia aplicada, seguiu-se uma abordagem qualitativa, inserida no paradigma interpretativo. A recolha dos dados foi efetuada durante o ano letivo de 2013/2014.

As conclusões apresentadas dão indicação de que o processo de abstração inicia-se com o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* e que esta ação, bem como *Construir*, são essenciais à nova construção. Realçam, ainda, que os conhecimentos dos alunos, a forma como representam dados e ideias, a criatividade e a mediação, estabelecida entre eles e com a professora, favorecem a construção do novo conhecimento matemático.

Indicam, também, que as ações epistémicas manifestaram-se e relacionaram-se entre si, que para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, a *Construção* deverá contemplar situações em que se estimula o pensamento analítico, a generalização, a extensão de procedimentos ariméticos a algébricos, a utilização de simbologia e a resolução de problemas de natureza algébrica. A manifestação da *Consolidação*, durante a *Construção* do novo conhecimento matemático valoriza as orientações dadas pela proposta curricular *Early algebra*, evidenciando as vantagens de estimular o pensamento algébrico desde os primeiros anos do ensino básico.

Para finalizar o estudo, a investigadora teceu algumas recomendações, entre as quais se destacam: a elaboração de uma proposta pedagógica que dê indicações precisas sobre o tipo de trabalho que se deve desenvolver para estimular o pensamento algébrico dos alunos; a necessidade de se fundamentar melhor o papel das tarefas, da resolução de problemas de natureza algébrica e das representações no desenvolvimento do pensamento algébrico e a aplicação do modelo *RBC+C* (Dreyfus et al., 2001) para analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico, estatístico, entre outros, que possam contribuir para melhorar a aprendizagem matemática dos alunos.

Palavras-chave

Abstração, *Reconhecer*, *Construir*, *Construção*, *Consolidação*, *Early algebra*, mediação, modelo *RBC+C*, pensamento algébrico, tarefa exploratória, signos matemáticos.

Abstract

This study focuses on the analysis of the process of abstraction, identified in students with nine and ten years old when they build a new mathematical knowledge that stems from encouraging the development of algebraic thinking. It took place in the context of mathematics classroom, where the researcher was the teacher of the class.

The research attempted to analyze, describe and reflect on the arguments developed by the students to better understand the influence of the context, in particular the mediation established by the teacher and found among students in developing the process of abstraction and hence in building the new mathematical knowledge. The resolution of tasks and exposure reasoning sought to identify difficulties experienced as well as recognize characteristics that contribute to the algebraic development.

An attempt was made to also address the following questions: (1) In constructing the new mathematical knowledge, which epistemic actions can be identified during the abstraction process when students develop an understanding of the stated data, identify regularities and relationships, mobilize knowledge and ideas, generalize or extend arithmetic procedures to unknown values and solve problems of algebraic nature? How are these epistemic actions sequenced and related? (2) How does the mediation process established by the teacher and promoted among students manifests in the construction of new knowledge and, in particular, on the development of epistemic actions?

Due to the interest in addressing the difficulties highlighted by students for algebra learning, the aim has been to stimulate algebraic thinking, applying the proposed curriculum guidelines *Early algebra*. To this end, exploratory tasks were selected, through which sought to promote the observation of regularities, relationships and numerical properties, the interpretation and use of symbolic language, algebraic solving problems and the generalization and extension of arithmetic to algebraic procedures.

Regarding the construction of new mathematical knowledge, the process of abstraction that occurs through the vertical reorganization of mathematical constructions acquired was appreciated, at the same time ascends from the abstract to the concrete and gives expression to the development of algebraic thinking. The embraced theoretical model *AiC*, *Abstract in Context*, which defends the idea of vertical mathematization and interconnection of epistemic actions in developing the process of abstraction and construction of new mathematical knowledge and the theoretical and methodological model *RBC+C* (Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B.B, 2001) enables us to understand, through the development of epistemic actions *Recognize, Building, Construction and Consolidation*, how new construction occurs.

In the context of this work, the mediation established by the teacher and found among students is relevant to the acquisition of new mathematical knowledge by highlighting up the teacher encouragement to the use of artefacts and, in particular, the task exploitation and tabular and pictorial representations it can contemplate or that can be developed by the students. Towards mediation, the educational cycle (Bussi & Marotti, 2008) through which it sought to understand the scope of mediation established by the teacher in the development of the aforementioned epistemic actions and hence the construction of new mathematical knowledge stands out.

Concerning the methodology applied, a qualitative approach was followed, inserted into the interpretative paradigm. Data collection was conducted during the school year 2013/2014.

The conclusions drawn indicate that the abstraction process begins with the development of epistemic action *Recognize* and that this action, as well as *Building*, is essential to the new construction. It also emphasizes that the knowledge of the students, the way they represent data and ideas, their creativity and mediation, established between them and with the teacher, favour the construction of new mathematical knowledge.

The above conclusions also indicate that the epistemic actions are expressed and related to each other, that to promote algebraic thinking development the construction should include situations in which it stimulates analytical thinking, generalization, the extent of arithmetic to algebraic procedures, the use of symbology and resolution of algebraic problems. The manifestation of *Consolidation* during the *Construction* of the new mathematical knowledge values the guidance provided by the curricular proposal *Early algebra*, highlighting the advantages of stimulating the algebraic thinking from the early years of basic education.

To conclude the study, the researcher made some recommendations, among them the development of a pedagogical proposal to give precise details of the type of work that should be developed to stimulate the algebraic thinking of students; the need to better support the role of tasks, to solve algebraic problems and the meaning of representations in the development of algebraic thinking and the application of *RBC+C* model to analyze the development of the geometric, statistical thinking, among others, that can contribute to improve math students learning.

Keywords

Abstraction, Recognize, Building, Construction, Consolidations, *Early algebra*, mediation, *RBC+C* model, algebraic thinking, exploratory task, mathematical symbols.

Índice

Dedicatória	iii
Agradecimentos	v
Resumo	vii
Índice	xxxv
Abstract	xi
Lista de Figuras.....	xxi
Lista de Tabelas	xxxiii
Lista de Acrónimos	xxxv
Lista de Anexos.....	xxxvii
Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1 Objetivos e questões de investigação.....	2
1.2 Enquadramento e relevância do estudo	3
1.3 Estrutura do trabalho	4
Capítulo 2.....	7
Referentes teóricos	7
2.1 A transição entre a aritmética e a álgebra	8
2.1.1 A aritmética e a álgebra na história da Matemática	9
2.1.2 A aritmética e a álgebra: ruturas e filiações	15
2.1.3 As dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra	18
2.1.4 Propostas curriculares – <i>Early algebra</i>	26
2.1.5 O desenvolvimento do pensamento algébrico	29
2.2 A dimensão individual, social e cultural da aprendizagem.....	38
2.2.1 A influência do professor no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico	38
2.2.2 A influência das ferramentas psicológicas no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico.....	41
2.2.3 A importância da mediação semiótica no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico.....	42

2.3 O modelo teórico <i>RBC+C</i>	45
A influência do contexto na abstração e na construção do conhecimento	45
2.3.1 O processo de abstração	45
2.3.2 O processo de ascensão do abstrato para o concreto	47
2.3.3 A mediação na construção do novo conhecimento matemático	49
2.3.4 Ações epistêmicas envolvidas no processo de abstração	50
2.3.5 O contexto no desenvolvimento das ações epistêmicas <i>RBC+C</i>	56
Capítulo 3	59
Metodologia	59
3.1 Opções metodológicas	59
3.2 Caracterização dos alunos e descrição do contexto	62
3.3 Recolha de dados	64
3.3.1 Planificação e apresentação das tarefas	65
3.3.2 Implementação da tarefa	67
3.3.3 Discussão	67
3.4 Tratamento e análise de dados	68
3.4.1 Análise de primeira ordem	68
3.4.2 Análise de segunda ordem	68
3.4.3 Análise de terceira ordem	77
3.5 Proposta Pedagógica	78
3.5.1 Tarefa 1 – <i>Luzes de Natal</i>	78
3.5.2 Tarefa 2 – <i>Conta-quilómetros</i>	82
3.5.3 Tarefa 3 – <i>Doces de Páscoa</i>	84
3.5.4 Tarefa 4 – <i>Caça ao ovo</i>	86
3.5.5 Tarefa 5 – <i>Regras operatórias das potências</i>	87
3.5.6 Tarefa 6 – <i>O aniversário da Margarida</i>	89
3.5.7 Tarefa 7 – <i>Campo de férias</i>	94
3.5.8 Tarefa 8 – <i>Relação de Equilíbrio</i>	101
Capítulo 4	104
O desenvolvimento do pensamento algébrico sob o olhar do <i>RBC+C</i> e influência da mediação	104

4.1 Tarefa 1 – Luzes de Natal	105
4.1.1 <i>Reconhecer</i>	106
4.1.2 <i>Construir</i>	114
4.1.3 <i>Construção</i>	119
4.1.4 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	125
<i>Professor.</i>	125
4.1.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	130
<i>Alunos.</i>	130
4.2 Tarefa 2 – Conta-quilômetros	134
4.2.1 <i>Reconhecer</i>	134
4.2.2 <i>Construir</i>	139
4.2.3 <i>Construção</i>	143
4.2.4 <i>Consolidação</i>	146
4.2.5. A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	150
<i>Professor.</i>	150
4.2.6. A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	153
<i>Alunos.</i>	153
4.3 Tarefa 3 – Doces de Páscoa	156
4.3.1 <i>Reconhecer</i>	157
4.3.2 <i>Construir</i>	161
4.3.3. <i>Construção</i>	166
4.3.4 <i>Consolidação</i>	169
4.3.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	172
<i>Professor.</i>	172
4.3.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	178
<i>Alunos.</i>	178
4.4 Tarefa 4 – Caça ao ovo	182
4.4.1 <i>Reconhecer</i>	182
4.4.2 <i>Construir</i>	185
4.4.3 <i>Construção</i>	189
4.4.4 <i>Consolidação</i>	191

4.4.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	194
<i>Professor</i>	194
4.4.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	196
<i>Alunos</i>	196
4.5 Tarefa 5 – Regras operatórias das potências	200
4.5.1 <i>Reconhecer</i>	200
4.5.2 <i>Construir</i>	203
4.5.3 <i>Construção</i>	205
4.5.4 <i>Consolidação</i>	208
4.5.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	211
<i>Professor</i>	211
4.5.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	215
<i>Alunos</i>	215
4.6 Tarefa 6 - O Aniversário da Margarida	218
4.6.1 <i>Reconhecer</i>	219
4.6.2 <i>Construir</i>	222
4.6.3 <i>Construção</i>	226
4.6.4 <i>Consolidação</i>	229
4.6.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	233
<i>Professor</i>	233
4.6.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	238
<i>Alunos</i>	238
4.7. Tarefa 7 – Campo de férias	242
4.7.1 <i>Reconhecer</i>	242
4.7.2 <i>Construir</i>	247
4.7.3 <i>Construção</i>	256
4.7.4 <i>Consolidação</i>	262
4.7.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	266
<i>Professor</i>	266
4.7.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	270
<i>Alunos</i>	270

4.8 Tarefa 8 – Relação de Equivalência	278
4.8.1 <i>Reconhecer</i>	278
4.8.2 <i>Construir</i>	282
4.8.3 <i>Construção</i>	286
4.8.4 <i>Consolidação</i>	289
4.8.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	293
<i>Professor</i>	293
4.8.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.	296
<i>Alunos</i>	296
Capítulo 5	301
As ações epistémicas e a mediação no desenvolvimento do pensamento algébrico	301
5.1 Desenvolvimento das ações epistémicas.	302
Contribuições dadas pelas respetivas subcategorias	302
5.1.1 A relação estabelecida pelas subcategorias <i>Interpretação, Estruturas adquiridas e Regularidades</i> no desenvolvimento da ação epistémica <i>Reconhecer</i>	302
5.1.2 A relação estabelecida pelas subcategorias <i>Construções reconhecidas, Estratégias, Soluções e Justificação</i> no desenvolvimento da ação epistémica <i>Construir</i>	315
5.1.3 A relação estabelecida pelas subcategorias <i>Reorganização, Generalização e Comunicação</i> no desenvolvimento da ação epistémica <i>Construção</i>	325
5.1.3.1 <i>Generalização</i>	336
5.1.3.2 <i>Reorganização e Generalização</i>	339
5.1.3.3 <i>Generalização e Comunicação</i>	340
5.1.3.4 <i>Reorganização e Comunicação</i>	342
5.1.4 A relação estabelecida pelas subcategorias <i>Aplicação de construções recentes e Características psicológicas</i> no desenvolvimento da ação epistémica <i>Consolidação</i> .334	
5.2 O papel das ações epistémicas no desenvolvimento do pensamento algébrico.	337
5.2.1 <i>Reconhecer e Consolidação</i>	337
5.2.2 <i>Reconhecer e Construir</i>	340
5.2.3 <i>Reconhecer, Construir e Construção</i>	342
5.2.4 <i>Reconhecer, Construir, Construção e Consolidação</i>	343
5.3 Contribuições da mediação no desenvolvimento das ações epistémicas.	348
5.3.1 A mediação estabelecida entre professora e alunos e a sua contribuição para o desenvolvimento das ações epistémicas.....	348

5.3.2 A mediação estabelecida entre alunos e a sua contribuição para o desenvolvimento das ações epistémicas.	353
Capítulo 6	357
Conclusões e Recomendações	357
6.1 Síntese	357
6.2 Apresentação das conclusões	359
6.2.1 As ações epistémicas na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico.....	359
6.2.1.1 O desenvolvimento da ação <i>Reconhecer</i> no desenvolvimento do processo de abstração	361
6.2.1.2 O desenvolvimento da ação <i>Construir</i> no desenvolvimento do processo de abstração	362
6.2.1.3 O desenvolvimento da ação <i>Construção</i> no desenvolvimento do processo de abstração	363
6.2.1.4 O desenvolvimento da <i>Consolidação</i> no desenvolvimento do processo de abstração	364
6.2.1.5 Relação estabelecida entre a ação epistémica <i>Reconhecer</i> e a <i>Consolidação</i>	366
6.2.1.6 Relação estabelecida entre as ações epistémicas <i>Reconhecer</i> e <i>Construir</i> ...	366
6.2.1.7 Relação estabelecida entre as ações epistémicas <i>Construir</i> e <i>Construção</i> ...	367
6.2.2 A mediação no desenvolvimento das ações epistémicas, na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico	367
6.2.2.1 O papel da professora no desenvolvimento das ações epistémicas	369
6.2.2.2 Partilha e comunicação estabelecida entre alunos e a sua influência no desenvolvimento das ações epistémicas	371
6.3 Implicações e recomendações	373
Referências bibliográficas	375
Anexos	387

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Regra da falsa posição	11
Figura 2.2 - A evolução dos símbolos.....	12
Figura 2.3 - Equações pictóricas	35
Figura 2.4 - Estrutura de um sistema de atividade humana.....	49
Figura 3.1 - Fonte de dados.....	65
Figura 3.2 - A mediação na construção do conhecimento	74
Figura 3.3 - Análise de dados efetuada através do software ATLAS.ti	75
Figura 3.4 - Representação esquemática do software ATLAS.ti respeitante a <i>Reconhecer</i>	76
Figura 3.5 - Esquema síntese dos procedimentos adotados na análise de dados.....	77
Figura 3.6 - Enunciado introdutório da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	80
Figura 3.7 - Tabelas da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	81
Figura 3.8 - Regularidades na tarefa <i>Luzes de Natal</i>	81
Figura 3.9 - Cálculo do mínimo múltiplo comum na tarefa <i>Luzes de Natal</i>	81
Figura 3.10 - Tabela número de “piscas” em tarefa <i>Luzes de Natal</i>	82
Figura 3.11 - Enunciado do problema da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	83
Figura 3.12 - Fração de quantidades indeterminadas em <i>Conta-quilómetros</i>	83
Figura 3.13 - Problema Ovos de chocolate da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	85
Figura 3.14 - Problema Amêndoas de chocolate da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	85
Figura 3.15 - Enunciado do problema da tarefa <i>Caça ao ovo</i>	86
Figura 3.16 - Produto de potências com igual base e expoentes diferentes	88
Figura 3.17 - Regras operatórias das potências	88
Figura 3.18 - Introdução da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	90
Figura 3.19 - Tabela quantidade de ingredientes da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	90
Figura 3.20 - Questionamento presente na tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	91
Figura 3.21 - Razão entre a massa de bolo e o número de <i>popcakes</i>	91
Figura 3.22 - Razão entre a quantidade de leite condensado e o número de <i>popcakes</i>	92
Figura 3.23 - Razão entre a quantidade de chocolate e o número de <i>popcakes</i>	92
Figura 3.24 - Razão entre o número de confettis e o número de <i>popcakes</i>	93
Figura 3.25 - Relação quantidade de ingrediente e número de <i>popcakes</i>	93
Figura 3.26 - Padrão construção de fósforos.....	95
Figura 3.27 - Tabela construções de fósforos.....	96
Figura 3.28 - Padrão mesas do refeitório.....	97
Figura 3.29 - Padrão poligonal de repetição	97
Figura 3.30 - Padrão geométrico de crescimento	98
Figura 3.31 - Padrão numérico de crescimento	99
Figura 3.32 - Generalização a um número indeterminado de participantes	99
Figura 3.33 - Quantos gelados diferentes?	100

Figura 3.34 - Quantos apertos de mão?	100
Figura 3.35 - Relação de igualdade entre duas expressões algébricas	101
Figura 3.36 - Resolução de equações.....	102
Figura 3.37 - Expressões algébricas e equações.....	103
Figura 4.1 - RI sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	106
Figura 4.2 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	106
Figura 4.3 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	107
Figura 4.4 - RI sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	107
Figura 4.5 - RA respeitante ao preenchimento das tabelas da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	108
Figura 4.6 - RI sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	108
Figura 4.7 - RI sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	108
Figura 4.8 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	109
Figura 4.9 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	109
Figura 4.10 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	110
Figura 4.11 - RAV da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Luzes de Natal</i>	111
Figura 4.12 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	114
Figura 4.13 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	114
Figura 4.14 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	115
Figura 4.15 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	115
Figura 4.16 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	116
Figura 4.17 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	116
Figura 4.18 - RAV da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Luzes de Natal</i>	117
Figura 4.19 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	119
Figura 4.20 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Luzes de Natal</i>	120
Figura 4.21 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	120
Figura 4.22 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	121
Figura 4.23 - RAV da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Luzes de Natal</i>	122
Figura 4.24 - Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em <i>Luzes de Natal</i> ...	124
Figura 4.25 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	126
Figura 4.26 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	127
Figura 4.27 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	127
Figura 4.28 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	127
Figura 4.29 - RAV da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Luzes de Natal</i>	128
Figura 4.30 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Luzes de Natal</i> .	130
Figura 4.31 - RAV da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Luzes de Natal</i>	131
Figura 4.32 - Relação entre RBC+C e DAS, em <i>Luzes de Natal</i>	133
Figura 4.33 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	135
Figura 4.34 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	135

Figura 4.35 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	136
Figura 4.36 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	136
Figura 4.37 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	137
Figura 4.38 - RAV da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Conta-quilómetros</i>	137
Figura 4.39 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	139
Figura 4.40 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	140
Figura 4.41 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	141
Figura 4.42 - RAV da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Conta-quilómetros</i>	141
Figura 4.43 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	143
Figura 4.44 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	144
Figura 4.45 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	144
Figura 4.46 - RAV da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Conta-quilómetros</i>	145
Figura 4.47 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	146
Figura 4.48 - RAV da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Conta-quilómetros</i>	147
Figura 4.49 - Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em <i>Conta-quilómetros</i>	149
Figura 4.50 - RAV sobre o ambiente observado durante a resolução da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	150
Figura 4.51 - RI sobre o ambiente observado durante a resolução da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	151
Figura 4.52 - RAV da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Conta-quilómetros</i>	151
Figura 4.53 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	153
Figura 4.54 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Conta-quilómetros</i>	153
Figura 4.55 - RAV da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Conta-quilómetros</i>	154
Figura 4.56 - Relação entre RBC+C e DSA em <i>Conta-quilómetros</i>	156
Figura 4.57 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	157
Figura 4.58 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	157
Figura 4.59 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	158
Figura 4.60 - RAV da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Doces de Páscoa</i>	159

Figura 4.61 - RA respeitante à tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	161
Figura 4.62 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	162
Figura 4.63 - RAV respeitantes à resolução da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	162
Figura 4.64 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	163
Figura 4.65 - RAV da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Doces de Páscoa</i>	164
Figura 4.66 - RAV respeitantes à resolução da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	166
Figura 4.67 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	166
Figura 4.68 - RA respeitantes à resolução da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	167
Figura 4.69 - RAV da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Doces de Páscoa</i>	168
Figura 4.70 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	169
Figura 4.71 - RAV da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Doces de Páscoa</i>	170
Figura 4.72 - Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em <i>Doces de Páscoa</i> .	171
Figura 4.73 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	172
Figura 4.74 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	173
Figura 4.75 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	173
Figura 4.76 - RAV sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	174
Figura 4.77 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	175
Figura 4.78 - RAV da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Doces de Páscoa</i>	176
Figura 4.79 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	178
Figura 4.80 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Doces de Páscoa</i>	178
Figura 4.81 - RAV da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Doces de Páscoa</i>	179
Figura 4.82 - Síntese da relação entre as ações RBC+C e DSA em <i>Doces de Páscoa</i>	181
Figura 4.83 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Caça ao ovo</i>	182
Figura 4.84 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Caça ao ovo</i>	187
Figura 4.85 - RAV da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Caça ao ovo</i>	183
Figura 4.86 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Caça ao ovo</i>	185
Figura 4.87 - RA sobre representação de dados e conhecimentos, em <i>Caça ao ovo</i>	185
Figura 4.88 - RAV da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Caça ao ovo</i>	187
Figura 4.89 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Caça ao ovo</i>	189
Figura 4.90 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Caça ao ovo</i>	189
Figura 4.91 - RAV da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Caça ao ovo</i>	190
Figura 4.92 - RAV da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Caça ao ovo</i>	192

Figura 4.93 - Síntese da relação manifestada pelas ações epistêmicas em <i>Caça ao ovo</i>	193
Figura 4.94 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Caça ao ovo</i>	194
Figura 4.95 - RAV da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Caça ao ovo</i>	195
Figura 4.96 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Caça ao ovo</i>	197
Figura 4.97 - RAV da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Caça ao ovo</i>	198
Figura 4.98 - Síntese da relação entre RBC+C e DSA em <i>Caça ao ovo</i>	199
Figura 4.99 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	200
Figura 4.100 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	201
Figura 4.101 - RAV da ação epistêmica <i>Reconhecer</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	201
Figura 4.102 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	203
Figura 4.103 - RA preenchimento das tabelas em <i>Regras operatórias das potências</i>	203
Figura 4.104 - RAV da ação epistêmica <i>Construir</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	204
Figura 4.105 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	205
Figura 4.106 - RA respeitantes ao desenvolvimento da <i>Construção</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	206
Figura 4.107 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	206
Figura 4.108 - RA respeitantes ao desenvolvimento da <i>Construção</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	207
Figura 4.109 - RAV da ação epistêmica <i>Construção</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	207
Figura 4.110 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	208
Figura 4.111 - RAV da ação epistêmica <i>Consolidação</i> em <i>Regras operatórias das potências</i> ..	209
Figura 4.112 - Síntese da relação manifestada pelas ações epistêmicas em <i>Regras operatórias das potências</i>	210
Figura 4.113 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	211
Figura 4.114 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	212
Figura 4.115 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	212
Figura 4.116 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras operatórias das potências</i>	213
Figura 4.117 - RAV da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Regras operatórias das potências</i>	214
Figura 4.118 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Regras Operatórias das potências</i>	215

Figura 4.119 - RAV da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Regras operatórias das potências</i>	216
Figura 4.120 - Relação estabelecida entre RBC+C e DSA em <i>Regras operatórias das potências</i>	217
Figura 4.121 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	219
Figura 4.122 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	219
Figura 4.123 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	220
Figura 4.124 - RAV da ação epistêmica <i>Reconhecer</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	221
Figura 4.125 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	222
Figura 4.126 - RA respeitantes ao desenvolvimento de <i>Construir</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	223
Figura 4.127 - RA respeitantes ao desenvolvimento de <i>Construir</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	223
Figura 4.128 - RA respeitantes ao desenvolvimento de <i>Construir</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	224
Figura 4.129 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	224
Figura 4.130 - RA respeitantes ao desenvolvimento de <i>Construir</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	225
Figura 4.131 - RAV da ação epistêmica <i>Construir</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	225
Figura 4.132 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	227
Figura 4.133 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	227
Figura 4.134 - RAV da ação epistêmica <i>Construção</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	228
Figura 4.135 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	229
Figura 4.136 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	230
Figura 4.137 - RAV da ação epistêmica <i>Consolidação</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	231
Figura 4.138 - RAV da relação manifestada pelas ações epistêmicas em <i>O aniversário da Margarida</i>	232
Figura 4.139 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	233
Figura 4.140 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	234

Figura 4.141 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	235
Figura 4.142 - RAV da DSA, <i>Professor</i> , em <i>O aniversário da Margarida</i>	236
Figura 4.143 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	238
Figura 4.144 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	238
Figura 4.145 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>O aniversário da Margarida</i>	239
Figura 4.146 - RAV da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>O aniversário da Margarida</i>	239
Figura 4.147 - Síntese da relação manifestada entre as ações RBC+C e DSA em <i>O aniversário da Margarida</i>	241
Figura 4.148 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	242
Figura 4.149 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	244
Figura 4.150 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	244
Figura 4.151 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	245
Figura 4.152 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	245
Figura 4.153 - RAV da ação epistêmica <i>Reconhecer</i> em <i>Campo de férias</i>	246
Figura 4.154 - RA padrão geométrico de crescimento vs regularidade numérica.....	248
Figura 4.155 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	248
Figura 4.156 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	249
Figura 4.157 - Reprodução do esquema combinação de gelados	250
Figura 4.158 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	250
Figura 4.159 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	251
Figura 4.160 - RA padrão de polígonos em <i>Campo de férias</i>	251
Figura 4.161 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	251
Figura 4.162 - Representação do raciocínio desenvolvido pelos alunos	252
Figura 4.163 - Generalização do padrão de polígonos	252
Figura 4.164 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	253

Figura 4.165 - RA respeitante à tarefa <i>Campo de férias</i>	253
Figura 4.166 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	254
Figura 4.167 - RAV da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Campo de férias</i>	255
Figura 4.168 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	257
Figura 4.169 - RA sobre o preenchimento de tabelas na tarefa <i>Campos de férias</i>	257
Figura 4.170 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	258
Figura 4.171 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	259
Figura 4.172 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	260
Figura 4.173 - RA respeitante à tarefa <i>Campo de férias</i>	260
Figura 4.174 - RAV da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Campo de férias</i>	261
Figura 4.175 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	262
Figura 4.176 - RAV da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Campo de férias</i>	263
Figura 4.177 - Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em <i>Campo de férias</i>	265
Figura 4.178 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	267
Figura 4.179 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	267
Figura 4.180 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	268
Figura 4.181 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	268
Figura 4.182 - RAV da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Campo de férias</i>	269
Figura 4.183 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	271
Figura 4.184 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	272
Figura 4.185 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	273
Figura 4.186 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Campo de férias</i>	274
Figura 4.187 - RAV da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Campo de férias</i>	275
Figura 4.188 - Relação entre as ações RBC+C e DSA em <i>Campo de férias</i>	277
Figura 4.189 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	278

Figura 4.190 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	278
Figura 4.191 - RA respeitante à tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	279
Figura 4.192 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	279
Figura 4.193 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	280
Figura 4.194 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	280
Figura 4.195 - RAV da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Relação de Equilíbrio</i>	281
Figura 4.196 - RA relativo à tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	282
Figura 4.197 - RA relativo à tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	283
Figura 4.198 - RAV da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Relação de Equilíbrio</i>	284
Figura 4.199 - RA relativo à tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	287
Figura 4.200 - RA relativo à tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	287
Figura 4.201 - RAV da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Relação de Equilíbrio</i>	288
Figura 4.202 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	289
Figura 4.203 - Síntese da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Relação de Equilíbrio</i>	290
Figura 4.204 - Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em <i>Relação de Equilíbrio</i>	291
Figura 4.205 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	293
Figura 4.206 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	294
Figura 4.207 - RAV da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Relação de Equilíbrio</i>	295
Figura 4.208 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	296
Figura 4.209 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	297
Figura 4.210 - RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa <i>Relação de Equilíbrio</i>	297
Figura 4.211 - RAV da análise da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Relação de Equilíbrio</i>	298
Figura 4.212 - Relação entre as ações RBC+C e DSA em <i>Relação de Equilíbrio</i>	300
Figura 5.1 - Relação entre as subcategorias <i>Interpretação</i> e <i>Estruturas adquiridas</i> nas tarefas 4 e 8	302
Figura 5.2 - <i>Reconhecer</i> na resolução da tarefa 4.....	304
Figura 5.3 - <i>Reconhecer</i> na resolução da tarefa 8.....	306
Figura 5.4 - Relação entre as subcategorias <i>Interpretação</i> e <i>Estruturas adquiridas</i>	307

Figura 5.5 - As subcategorias <i>Interpretação</i> e <i>Estruturas adquiridas</i> na construção do conhecimento	308
Figura 5.6 - Relação entre as subcategorias <i>Estruturas adquiridas</i> e <i>Regularidades</i>	309
Figura 5.7 - <i>Estruturas adquiridas</i> e <i>Regularidades</i> na resolução das tarefas 1, 2 e 7	310
Figura 5.8 - <i>Estruturas adquiridas</i> e <i>Regularidades</i> na resolução das tarefas 3, 5 e 6	312
Figura 5.9 - Relação entre as subcategorias <i>Interpretação</i> e <i>Regularidades</i>	313
Figura 5.10 - As subcategorias <i>Interpretação</i> , <i>Estruturas adquiridas</i> e <i>Regularidades</i> no desenvolvimento da ação epistémica <i>Reconhecer</i>	314
Figura 5.11 - Relação entre as subcategorias <i>Soluções</i> e <i>Justificação</i>	316
Figura 5.12 - <i>Soluções</i> e <i>Justificação</i> na resolução das tarefas 4 e 6	318
Figura 5.13 - <i>Soluções</i> e <i>Justificação</i> através da representação pictórica.....	319
Figura 5.14 - Relação entre a subcategoria <i>Estratégias</i> e as subcategorias <i>Soluções</i> e <i>Justificação</i>	320
Figura 5.15 - <i>Estratégias</i> , <i>Soluções</i> e <i>Justificação</i> na resolução das tarefas 4, 5 e 6	321
Figura 5.16 - <i>Estratégias</i> , <i>Soluções</i> e <i>Justificação</i> na resolução da tarefa 8	322
Figura 5.17 - Relação entre as subcategorias <i>Construções reconhecidas</i> e <i>Estratégias</i>	323
Figura 5.18 - As <i>Estratégias</i> e <i>Construções</i> reconhecidas no desenvolvimento das ações <i>Reconhecer</i> e <i>Construir</i>	324
Figura 5.19 - As subcategorias <i>Construções reconhecidas</i> , <i>Estratégias</i> , <i>Soluções</i> e <i>Justificação</i> no desenvolvimento da ação epistémica <i>Construir</i>	325
Figura 5.20 - <i>Generalização</i> na resolução das tarefas 1 e 5	327
Figura 5.21 - <i>Generalização</i> na resolução da tarefa 6.....	327
Figura 5.22 - <i>Generalização</i> na resolução da tarefa 8.....	328
Figura 5.23 - Relação entre as subcategorias <i>Reorganização</i> e <i>Generalização</i> no desenvolvimento da ação epistémica <i>Construção</i>	329
Figura 5.24 - <i>Generalização</i> e <i>Comunicação</i> no desenvolvimento da <i>Construção</i>	330
Figura 5.25 - <i>Construção</i> nas tarefas 1 e 2	331
Figura 5.26 - <i>Reorganização</i> e <i>Comunicação</i> no desenvolvimento da <i>Construção</i>	332
Figura 5.27 - As subcategorias <i>Reorganização</i> , <i>Generalização</i> e <i>Comunicação</i> no desenvolvimento da ação epistémica <i>Construção</i>	333
Figura 5.28 - <i>Aplicação de construções recentes</i> e <i>Características psicológicas</i> na manifestação da <i>Consolidação</i>	335
Figura 5.29 - Relação entre as ações epistémicas <i>Reconhecer</i> e <i>Consolidação</i>	337
Figura 5.30 - Relação entre as ações epistémicas <i>Reconhecer</i> e <i>Consolidação</i>	338
Figura 5.31 - <i>Reconhecer</i> e <i>Consolidação</i> no processo de <i>Construção</i> do novo conhecimento	339
Figura 5.32 - Relação entre as ações epistémicas <i>Reconhecer</i> e <i>Construir</i>	340
Figura 5.33 - <i>Reconhecer</i> e <i>Construir</i> no processo e construção do novo conhecimento matemático.....	341
Figura 5.34 - A relação entre as ações epistémicas na <i>Construção</i> do novo conhecimento matemático.....	343

Figura 5.35 - A relação estabelecida entre as ações epistêmicas no processo de construção	344
Figura 5.36 - <i>Construção</i> do conhecimento matemático	346
Figura 5.37 - Mediação entre <i>professora</i> e <i>alunos</i> na construção do novo conhecimento matemático	348
Figura 5.38 - Mediação entre <i>professora</i> e <i>alunos</i> na construção do novo conhecimento matemático	350
Figura 5.39 - Mediação na apresentação das tarefas	352
Figura 5.40 - Mediação no desenvolvimento das ações epistêmicas	353
Figura 5.41 - Mediação entre professora e alunos na construção do novo conhecimento matemático	354

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Descritores das categorias de análise respeitantes às ações epistémicas RBC+C	70
Tabela 3.2 - Definição das categorias de análise respeitantes à DSA	71
Tabela 3.3 - Descritores das subcategorias de análise respeitantes ao modelo RBC+C	72
Tabela 3.4 - Descritores das subcategorias de análise respeitantes à DSA	73
Tabela 4.1 - Síntese da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Luzes de Natal</i>	113
Tabela 4.2 - Síntese da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Luzes de Natal</i>	118
Tabela 4.3 - Síntese da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Luzes de Natal</i>	123
Tabela 4.4 - Síntese da análise da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Luzes de Natal</i>	129
Tabela 4.5 - Síntese da análise da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Luzes de Natal</i>	132
Tabela 4.6 - Síntese da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Conta-quilómetros</i>	138
Tabela 4.7 - Síntese da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Conta-quilómetros</i>	142
Tabela 4.8 - Síntese da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Conta-quilómetros</i>	146
Tabela 4.9 - Síntese da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Conta-quilómetros</i>	148
Tabela 4.10 - Síntese da análise da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Conta-quilómetros</i>	152
Tabela 4.11 - Síntese da análise da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Conta-quilómetros</i>	155
Tabela 4.12 - Síntese da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Doces de Páscoa</i>	160
Tabela 4.13 - Síntese da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Doces de Páscoa</i>	165
Tabela 4.14 - Síntese da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Doces de Páscoa</i>	168
Tabela 4.15 - Síntese da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Doces de Páscoa</i>	170
Tabela 4.16 - Síntese da análise da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Doces de Páscoa</i>	177
Tabela 4.17 - Síntese da análise da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Doces de Páscoa</i>	180
Tabela 4.18 - Síntese da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Caça ao ovo</i>	184
Tabela 4.19 - Síntese da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Caça ao ovo</i>	188
Tabela 4.20 - Síntese da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Caça ao ovo</i>	191
Tabela 4.21 - Síntese da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Caça ao ovo</i>	192
Tabela 4.22 - Síntese da análise da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Caça ao ovo</i>	196
Tabela 4.23 - Síntese da análise da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Caça ao ovo</i>	198
Tabela 4.24 - Síntese da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	202
Tabela 4.25 - Síntese da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	204
Tabela 4.26 - Síntese da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	208
Tabela 4.27 - Síntese da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Regras operatórias das potências</i>	210
Tabela 4.28 - Síntese da análise da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Regras operatórias das potências</i>	214
Tabela 4.29 - Síntese da análise da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Regras operatórias das potências</i>	217
Tabela 4.30 - Síntese da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	222
Tabela 4.31 - Síntese da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	226
Tabela 4.32 - Síntese da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>O Aniversário da Margarida</i>	229

Tabela 4.33 - Síntese da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>O aniversário da Margarida</i>	231
Tabela 4.34 - Síntese da análise da DSA, <i>Professor</i> , em <i>O aniversário da Margarida</i>	237
Tabela 4.35 - Síntese da análise da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>O aniversário da Margarida</i>	240
Tabela 4.36 - Síntese da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Campo de férias</i>	247
Tabela 4.37 - Síntese da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Campo de férias</i>	256
Tabela 4.38 - Síntese da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Campo de férias</i>	262
Tabela 4.39 - Síntese da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Campo de férias</i>	264
Tabela 4.40 - Síntese da análise da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Campo de férias</i>	269
Tabela 4.41 - Síntese da análise da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Campo de férias</i>	276
Tabela 4.42 - Síntese da ação epistémica <i>Reconhecer</i> em <i>Relação de Equilíbrio</i>	282
Tabela 4.43 - Síntese da ação epistémica <i>Construir</i> em <i>Relação de Equilíbrio</i>	285
Tabela 4.44 - Síntese da ação epistémica <i>Construção</i> em <i>Relação de Equilíbrio</i>	288
Tabela 4.45 - Síntese da ação epistémica <i>Consolidação</i> em <i>Relação de Equilíbrio</i>	291
Tabela 4.46 - Síntese da análise da DSA, <i>Professor</i> , em <i>Relação de Equilíbrio</i>	295
Tabela 4.47 - Síntese da DSA, <i>Alunos</i> , em <i>Relação de Equilíbrio</i>	299

Lista de Acrónimos

A	<i>Alunos</i>
AC	<i>Aplicação de uma construção recente</i>
ATLAS.ti	<i>Software de análise de dados</i>
B	<i>Construir</i>
C	<i>Construção</i>
Co	<i>Consolidação</i>
Cm	<i>Comunicação</i>
CP	<i>Características psicológicas</i>
CR	<i>Construção reconhecida</i>
DSA	<i>Dimensão social da aprendizagem</i>
EA	<i>Estruturas adquiridas</i>
Es	<i>Estratégias</i>
I	<i>Interpretação</i>
IUA	<i>Incentivo à utilização do artefacto</i>
ICS	<i>Incentivo à construção de signos matemáticos</i>
J	<i>Justificação</i>
NCTM	<i>National Council of Teachers of Mathematics</i>
NPMEB	<i>Novo programa de Matemática do Ensino Básico (2007)</i>
P	<i>Professor</i>
PSC	<i>Produção de signos coletivos</i>
PSI	<i>Produção de signos individuais</i>
R	<i>Reconhecer</i>
RA	<i>Registos dos alunos</i>
RAV	<i>Registos audiovisuais</i>
RI	<i>Registos da investigadora</i>
Rg	<i>Regularidades</i>
Ro	<i>Reorganização</i>
RBC+C	<i>Modelo epistemológico Reconhecer, Construir, Construção e Consolidação</i>
S	<i>Soluções</i>

Lista de Anexos

Anexo 1	Tarefa 1 – <i>Luzes de Natal</i>
Anexo 2	Tarefa 2 – <i>Conta-quilómetros</i>
Anexo 3	Tarefa 3 – <i>Doces de Páscoa</i>
Anexo 4	Tarefa 4 – <i>Caça ao ovo</i>
Anexo 5	Tarefa 5 – <i>Regras operatórias das potências</i>
Anexo 6	Tarefa 6 – <i>O aniversário da Margarida</i>
Anexo 7	Tarefa 7 – <i>Campo de férias</i>
Anexo 8	Tarefa 8 – <i>Relação de Equilíbrio</i>

Capítulo 1

Introdução

Estimular o desenvolvimento de competências matemáticas que facilitem a compreensão dos alunos e os familiarizem com a linguagem própria da disciplina, adotando métodos de ensino que os motivem e que atendam aos seus conhecimentos e dificuldades, poderá ser uma metodologia eficaz para promover uma melhor compreensão de conceitos, relações e procedimentos e, conseqüentemente, para aprendizagem de conceitos matemáticos mais avançados.

Segundo Usiskin (1995), o ensino e a aprendizagem da álgebra assumem um papel central na educação matemática, constituindo uma poderosa e eficaz ferramenta para a resolução de problemas do cotidiano. Promover nos alunos novas formas de pensamento significará ensinar para além das regras e da manipulação simbólica, valorizando-se o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Interessará melhorar a capacidade de interpretação e identificação de regularidades e relações, de compreensão de conceitos e propriedades, de representação do raciocínio e de generalização, utilizando linguagem simbólica. Entende-se que esse desenvolvimento deverá ser promovido junto dos alunos mais jovens, para que no futuro esses sintam maior facilidade na compreensão e na aquisição de conceitos e procedimentos algébricos de maior complexidade.

O professor assume um papel de relevo no desenvolvimento de tais competências, designadamente quando prepara as tarefas a dinamizar em contexto sala de aula, seleciona os artefactos mais adequados à situação e interage com os alunos, mobilizando conhecimentos e motivando a construção de um novo conhecimento.

No presente estudo considera-se a construção do novo conhecimento matemático, associado ao desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos mais jovens. Através da resolução de tarefas exploratórias e de problemas de natureza algébrica, espera-se observar e compreender que ações desenvolvem os alunos para, mobilizando conhecimentos adquiridos durante a aprendizagem da aritmética, alcançarem a nova construção. Valoriza-se, neste processo de construção, a abstração dos alunos, designadamente a transição do abstrato ao concreto (Davydov, 1988) e o processo de matematização vertical (Freudenthal, 1991), ambos pressupostos teóricos subjacentes ao modelo teórico RBC+C, adotado para este estudo (Dreyfus et al., 2001). Relativamente ao modelo RBC+C, destacam-se as ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*, consideradas ações externas mobilizadas pelos

alunos e que vão dar visibilidade ao conhecimento que eles possuem, aos raciocínios que desenvolvem e à criatividade demonstrada durante a resolução de uma tarefa ou de problema que não lhes seja familiar. Procura-se, para além de compreender como o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C poderão estar presentes na construção do novo conhecimento matemático, tal como verificado em estudos anteriores, verificar também i) como se sequenciam e relacionam essas ações durante o processo de construção, ii) como é que elas poderão estar associadas à mediação, estabelecida pela professora e entre alunos, iii) bem como serem utilizadas para promover e estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, no sentido das indicações dadas pela proposta curricular *Early álgebra*.

Neste capítulo serão apresentados os objetivos e questões de investigação, seguindo-se o enquadramento, a relevância do estudo e a apresentação da estrutura deste trabalho.

1.1 Objetivos e questões de investigação

A investigação centra-se na análise do processo de abstração e de construção do novo conhecimento matemático, de alunos que frequentam o quinto ano de escolaridade, durante a realização de tarefas que lhes são colocadas e que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico. Valorizam-se as tarefas dinamizadas, exploratórias e de investigação que também incluem a resolução de problemas e o contexto envolvente, designadamente a mediação estabelecida pela professora e entre alunos, dado o interesse em promover o desenvolvimento do pensamento algébrico e em compreender como os alunos constroem um novo conhecimento matemático, mobilizando conhecimentos já adquiridos.

Neste estudo, pretendem-se alcançar os seguintes objetivos:

1. Analisar, descrever e refletir sobre os raciocínios dos alunos, tendo em consideração as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e a *Consolidação* (Co);
2. Compreender melhor a influência do contexto, em particular da mediação estabelecida pela professora e verificada entre alunos, no desenvolvimento do processo de abstração e na construção do novo conhecimento matemático;
3. Identificar dificuldades manifestadas pelos alunos durante a resolução das tarefas e exposição de raciocínios, bem como reconhecer características presentes nessas tarefas ou nos raciocínios desenvolvidos que contribuam para o desenvolvimento algébrico.

A investigação, centrada nos objetivos delineados, procura dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. Na construção do novo conhecimento matemático, que ações epistémicas se podem identificar durante o processo de abstração quando os alunos desenvolvem a compreensão dos dados enunciados, identificam regularidades e relações, mobilizam conhecimentos e ideias, generalizam ou estendem procedimentos aritméticos a valores desconhecidos e resolvem problemas de natureza algébrica? Como se sequenciam e relacionam essas ações epistémicas?
2. Como se manifesta o processo de mediação, estabelecido pela professora e promovido entre alunos, na construção do novo conhecimento e, em particular, no desenvolvimento das ações epistémicas?

1.2 Enquadramento e relevância do estudo

No ensino da Matemática, a introdução da álgebra poderá desencadear um conjunto de dificuldades manifestadas, ou não, durante a aprendizagem da aritmética e que geram insucesso e uma conceção negativa face à aprendizagem da disciplina. Algumas dificuldades poderão estar associadas, entre outras causas, à introdução da linguagem simbólica que, para além de ser uma novidade para o aluno, exige a manipulação do desconhecido e o apelo à abstração. Essas poderão ter-se manifestado durante a aprendizagem da aritmética e estarem relacionadas com incompreensões e conceções erradas, por vezes camufladas pela manipulação rotineira e mecanicista de algoritmos que persistem durante a aprendizagem algébrica. Por outro lado, poderão estar relacionadas com a disparidade existente entre o trabalho desenvolvido durante o ensino da aritmética e o proposto pela álgebra. Como tal, interessará trabalhar a aritmética com vista ao ensino da álgebra, proporcionando a observação e a compreensão de regularidades e relações numéricas, a integração de conceitos e a aquisição de formas diferenciadas de pensar e representar que desencadeiem o processo de abstração e a generalização.

A investigadora considera que ao estabelecer-se uma relação estreita entre a aritmética e a álgebra, trabalhando a primeira com vista ao desenvolvimento algébrico, o aluno poderá atribuir maior significado aos conteúdos aritméticos lecionados e transitar entre aritmética e álgebra com maior naturalidade. Considera, ainda, que os alunos mais jovens, que frequentam os primeiros anos do ensino básico, podem desenvolver metodologias eficazes para resolverem problemas de natureza algébrica e generalizarem regularidades, relações e propriedades algébricas, mesmo sem dominarem procedimentos algébricos ou fazerem uso de notação simbólica. Para estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, privilegia os conhecimentos que

os alunos adquiriram durante o ensino da aritmética, os quais ao serem reorganizados poderão contribuir para a construção do novo conhecimento matemático. O contexto, designadamente as tarefas exploratórias e a resolução de problemas de natureza algébrica, bem como a mediação estabelecida pela professora e entre alunos é, no presente estudo, relevante para a manifestação das diferentes ações epistémicas do modelo RBC+C adotado e, conseqüentemente, para a construção do novo conhecimento matemático associado ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Considera-se, como tal, que este estudo poderá ajudar a compreender melhor de que forma se poderá estimular e desenvolver o pensamento algébrico de alunos mais jovens, partindo de conhecimentos que eles adquiriram com a aprendizagem da aritmética. Entende-se, ainda, que permitirá observar como ocorre a construção do novo conhecimento matemático e como se manifesta o processo de abstração dos alunos, pela evidência como as contribuições dadas pela professora e a partilha e comunicação estabelecida entre alunos influenciam a nova construção.

1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho encontra-se organizado em seis capítulos, dos quais se apresenta, seguidamente, uma breve descrição.

O capítulo um contextualiza a investigação, os interesses e a experiência pessoal da investigadora. Na primeira secção são enunciados o problema, os objetivos do estudo e as questões de investigação. Na segunda secção enquadra-se e faz-se referência à relevância do estudo.

No capítulo dois surgem os referentes teóricos, diferenciados em três secções: (1) A transição entre a aritmética e a álgebra, (2) A dimensão individual, social e cultural da aprendizagem da álgebra e (3) O modelo teórico *RBC+C – A influência do contexto na abstração e na construção do conhecimento*. Na primeira secção faz-se referência à relação estabelecida entre a aritmética e a álgebra e às dificuldades promovidas pela transição para aprendizagem algébrica, sugerindo-se metodologias a adotar aquando do ensino da aritmética. Segue-se uma abordagem histórica da evolução das duas áreas, com apresentação de definições e referência à abrangência dos dois temas. São indicadas ruturas e filiações entre a aritmética e a álgebra, apresentando-se alguns resultados de investigações. As dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra são também contempladas nesta secção, apresentando-se alguns exemplos dados por investigadores, visando uma aproximação ao problema do estudo. Segue-se uma abordagem às novas perspetivas curriculares, destacando-se o *Early algebra*. Relativamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico faz-se referência à aritmética generalizada, ao pensamento funcional e ao pensamento relacional. Na

segunda secção faz-se uma abordagem introdutória aos aspetos que influenciam a aprendizagem de um aluno e que estarão relacionadas com o próprio indivíduo, com o meio social e cultural onde está inserido e com outros aspetos particulares que se inserem nestes e que dizem respeito aos currículos, à natureza das tarefas e à mediação promovida durante a aprendizagem. Na terceira secção apresenta-se o modelo teórico adotado, fazendo-se referência à influência do contexto na abstração e à construção do conhecimento. Apresentam-se definições para o termo abstração, destacam-se as ações epistémicas envolvidas no processo de abstração e dão-se indicações em relação ao contexto de aprendizagem.

O capítulo três respeita à apresentação da metodologia de investigação adotada, iniciando-se com uma breve descrição da componente empírica do estudo e com indicações sobre as opções metodológicas tomadas. É também neste capítulo que se efetua a caracterização dos alunos, da professora e do contexto envolvente e que se prestam informações acerca dos instrumentos de recolha de dados, dos procedimentos aplicados durante a análise de dados e da proposta pedagógica apresentada.

Com o capítulo quatro inicia-se a análise e apresentação dos resultados recolhidos, designadamente dos registos audiovisuais e dos registos escritos dos alunos e da professora. Este capítulo resulta da análise dos resultados de cada tarefa, interpretados de acordo com os modelos teóricos adotados e que respeitam ao desenvolvimento do processo de abstração na construção do novo conhecimento matemático, bem como à influência que a mediação possa ter nessa construção.

No capítulo cinco expõem-se os resultados da análise de terceira ordem, respeitante à análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro e às características evidenciadas pelas subcategorias e categorias de análise definidas.

No capítulo seis apresentam-se as conclusões do estudo, procurando-se dar resposta às questões de investigação. Fazem-se considerações acerca dos modelos teóricos adotados, designadamente à utilização do modelo *RBC+C* (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2001) para analisar como ocorre o processo de abstração na construção do novo conhecimento matemático e ao Ciclo didático de Bussi e Mariotti (2008) para descrever a influência da mediação estabelecida pela professora e entre alunos.

Paralelamente, procura-se avaliar a relevância deste estudo e os efeitos que esse possa ter na prática educativa, prestando-se, igualmente, algumas recomendações.

Ultimando o trabalho, seguem-se o glossário, as referências bibliográficas e uma secção referente a anexos.

Capítulo 2

Referentes teóricos

As dificuldades evidenciadas pelos alunos durante a aprendizagem da álgebra têm merecido a preocupação de professores e investigadores. Alguns investigadores, tais como Guimarães, Arcavi, Gómez, Ponte e Silva (2006), consideram que essas dificuldades podem residir no facto da aritmética e da álgebra serem abordadas, em algumas situações, como duas áreas distintas, entre as quais não se estabelecem ligações. Radford (2012), por sua vez, acrescentou que a utilização de linguagem simbólica e a aplicação do pensamento analítico, presente quando se trabalha com quantidades indeterminadas, justificam também algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos.

Algumas investigações traduzem a preocupação de se identificarem dificuldades e aplicarem metodologias que permitam melhorar o desempenho dos alunos. Realça-se a necessidade de estimular, nos alunos mais jovens, o desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, o sentido do número (Ponte, 2006) e do símbolo (Arcavi, 2006), sugerindo-se a resolução de tarefas que incentivem a observação de regularidades e propriedades numéricas, a interpretação e utilização de linguagem simbólica, bem como a generalização de relações identificadas.

O conceito *Early algebra* ganha expressão, apresentando-se como proposta curricular a adotar nos primeiros anos do ensino básico. Nessa proposta, destacam-se as vantagens que resultam do desenvolvimento do pensamento algébrico, considerando-se ser uma oportunidade para os alunos mais jovens adquirirem formas de pensamento diferenciadas que permitam o trabalho e o desenvolvimento da compreensão significativa dos conceitos matemáticos trabalhados. Entende-se que ao trabalhar a aritmética com o sentido de compreender relações e propriedades numéricas, os alunos desenvolvem competências essenciais à aprendizagem da álgebra.

A resolução de tarefas exploratórias e de problemas de natureza algébrica são atividades valorizadas quando se pretende estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico. Porém, para que os objetivos a que se propõem sejam atingidos pesará, igualmente, a assertividade revelada pelo professor na sua elaboração, apresentação e condução.

O presente capítulo encontra-se dividido em três subcapítulos. O primeiro faz referência à transição entre a aritmética e a álgebra dando, sobretudo, indicações

sobre como as duas áreas se devem relacionar para que as dificuldades de aprendizagem algébrica se atenuem. Neste, são ainda abordados aspetos relacionados com a evolução histórica destas duas áreas da matemática, fazendo-se referência às características que as diferenciam ou aproximam e às situações que poderão contribuir para a manifestação de dificuldades, por parte dos alunos, quando esses iniciam a aprendizagem da álgebra. É também nesta fase que se dá destaque à proposta curricular *Early algebra*, evidenciando-se os seus aspetos mais relevantes, e se desenvolve o conceito de pensamento algébrico. O segundo subcapítulo aborda a dimensão individual, social e cultural da aprendizagem, fazendo referência ao papel do professor, das ferramentas psicológicas e da mediação semiótica no processo de aprendizagem. Por fim, faz-se referência ao modelo teórico *RBC+C* (Dreyfus et al., 2001), tecendo-se considerações acerca do processo de abstração, de ascensão do abstrato ao concreto, das ações epistémicas envolvidas no processo de abstração e da influência do contexto na construção do novo conhecimento.

2.1 A transição entre a aritmética e a álgebra

A aritmética e a álgebra são, atualmente, consideradas duas temáticas de relevo nos currículos de Matemática, ainda que a álgebra seja valorizada, pela maioria dos países, apenas nos últimos anos do ensino básico, correspondentes ao terceiro ciclo do currículo português. Tradicionalmente a aritmética antecede a álgebra, constituindo duas áreas distintas de trabalho. A separação destas duas áreas da matemática, quando rígida e desconectada de relações, poderá originar dificuldades diversas aos alunos. Essas lacunas poderão estar associadas à mudança de significado de letras e símbolos, à exigência da compreensão conceptual, à complexidade dos objetos e dos processos matemáticos, à necessidade de desenvolver o pensamento algébrico e estabelecer relações entre conceitos e propriedades numéricas e algébricas e ao tipo de relações e métodos exigidos no trabalho algébrico. Porém, podem também resultar das características da própria matemática, do currículo adotado, do ensino ministrado, do desenvolvimento cognitivo dos alunos e das atitudes afetivas e emocionais associadas à disciplina.

Os resultados divulgados por diferentes investigadores e a experiência profissional e crenças quanto ao ensino da matemática no ensino básico abonam, na perspetiva da investigadora, a favor do desenvolvimento do pensamento algébrico para minimizar dificuldades de aprendizagem da álgebra. O recurso à utilização de artefactos, à resolução de tarefas de natureza exploratória e problemática, bem como a mediação poderão tornar possível o desenvolvimento de formas inovadoras de pensar e dar resposta a situações não rotineiras. Trabalhar a aritmética e álgebra como se tratasse de uma só área, desafiante e significativa para o aluno, pode ser exequível e ser desenvolvida através do estudo da aritmética generalizada, da resolução de problemas

de natureza algébrica, da análise de variação de grandezas e do estudo de estruturas matemáticas, entre outras possibilidades. A proposta curricular *Early algebra* propõe-se a dar resposta aos novos desafios, estimulando o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos do ensino básico.

Nesta secção apresentam-se características da aritmética e da álgebra, procurando-se evidenciar o que as distingue e o que as aproxima. Surgem diferentes definições para explicar do que trata a aritmética e a álgebra e indicações sobre o seu campo de abrangência. O estudo das dificuldades associadas à aprendizagem algébrica, também exposto nesta secção, justifica a necessidade de se valorizarem algumas perspetivas inovadoras. O último ponto desta secção faz referência ao desenvolvimento do pensamento algébrico, numa perspetiva de se apresentarem algumas sugestões metodológicas resultantes da proposta curricular *Early algebra*.

2.1.1 A aritmética e a álgebra na história da Matemática

Historicamente pode-se constatar a existência de uma fronteira entre a aritmética e a álgebra, promovida pelo trabalho desenvolvido e condicionado por cada uma dessas áreas. No conceito global, a aritmética está associada à manipulação de quantidades conhecidas, estando centrada nos algoritmos e nos procedimentos de cálculo. Por sua vez, o trabalho desenvolvido pela álgebra centra-se na resolução de problemas que envolvem quantidades desconhecidas, sendo esta área concebida como uma generalização da aritmética. O processo de generalização é uma das características do trabalho algébrico e corresponderá, segundo Blanton (2008), à descrição de uma regra geral sobre determinado conjunto de dados.

Relativamente ao trabalho que pode ser desenvolvido durante o ensino da aritmética, salienta-se a existência de uma relação biunívoca entre essa área da matemática e a aprendizagem da álgebra, considerando-se que *há algo inerentemente aritmético na álgebra e algo inerentemente algébrico na aritmética* (Radford, 2012, p.2). Segundo esta perspetiva, a álgebra está enraizada na aritmética, dependendo do raciocínio aritmético (Drijvers & Hendrikus, 2003), pelo que se entende que se deverá estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos do ensino básico.

Interessará compreender como se poderá trabalhar a aritmética e a álgebra como se tratassem de uma só área, procurando-se reconhecer semelhanças e fazer associações. Visando identificar e compreender as ligações e contribuições de uma área sob a outra, bem como dar sentido ao problema deste estudo, apresenta-se, seguidamente, uma abordagem contextual e histórica das duas áreas.

De acordo com Lins e Giménez (1997), para se compreender a razão das dificuldades promovidas pela aprendizagem algébrica deve-se começar por analisar as semelhanças

e diferenças existentes entre essas duas áreas da matemática, segundo três prismas distintos: o *saber social* - senso comum, a Matemática Académica e a Educação Matemática.

O *saber social* associa a aprendizagem aritmética à *arte de contar*, estando essa arte presente na etimologia da própria palavra. A origem do termo *aritmética* remonta ao grego, *arithmetiké*, e ao latim, *arithmetica*, o ramo mais antigo e elementar da matemática. Desenvolve o seu trabalho junto de números simples, determinados, lidando com propriedades e operações numéricas que contribuem para o desenvolvimento de atividades do quotidiano, tais como operações comerciais, podendo, igualmente, contribuir para a realização de cálculos numéricos mais complexos¹.

No campo da Matemática Académica, a aritmética parece estar associada à teoria dos números, cujo foco de estudo é a divisibilidade nos números inteiros, distinguindo-se em aritmética comum, associada ao cálculo com números determinados, e em aritmética literal, que inclui o cálculo com números representados por letras do alfabeto (Newman, 1964).

No que respeita ao domínio da Educação Matemática, Lins e Giménez (1997) consideram que a aritmética contempla características determinantes para a realização do cálculo numérico, estando associada ao ensino de regras e técnicas. Segundo estes autores, os conceitos matemáticos lecionados durante o ensino da aritmética implicam a identificação de associações e relações quantitativas, a construção de algoritmos e o entendimento da divisibilidade, a manipulação, a apresentação de formas diferenciadas de representação, a utilização de regras, técnicas, destrezas e habilidades, bem como a aplicação de conjeturas e processos de raciocínio.

O ensino da aritmética acompanhou, à semelhança de outras áreas da Matemática, a evolução da ciência, ao procurar dar resposta a problemas do quotidiano. Lins e Giménez (1997) referem-se à existência de uma nova aritmética, a matemática discreta, cuja aplicabilidade se tornou visível através da criptografia, bem como da resolução de problemas de minimização, de iteração e de análise numérica. A aritmética passou, então, a trabalhar com outros números para além dos naturais, preocupando-se com o desenvolvimento de habilidades e destrezas que facilitam a resolução de problemas.

Considerando-se o trabalho desenvolvido pela álgebra e o interesse em estabelecer uma comparação entre esta área da matemática e a aritmética, segue-se um breve resumo da sua evolução histórica. Ter-se-ão em consideração os mesmos campos de análise

¹ <https://www.google.pt/#q=wikipedia> , 21/05/13

privilegiados na descrição da evolução da aritmética, designadamente o senso comum, a Matemática Académica e a Educação Matemática.

Foi Ahmesu, autor do papiro de Ahmes, que, ao procurar dar solução aos problemas do seu quotidiano, associou a álgebra ao trabalho com números desconhecidos. Segundo Boyer (1974), ele terá utilizado a chamada regra da falsa posição, um procedimento aritmético que envolve proporções e que parte de um número qualquer, denominado valor falso, para se obter o valor desejado da solução. Ahmes terá dado início ao estudo da *álgebra retórica*, caracterizada por problemas textuais, com total ausência de símbolos, para representar incógnitas. O exemplo que se segue, regra da falsa posição, exemplifica um desses problemas:

“ A idade da Ana, somada de outro tanto como ela, somada com a sua metade, com a sua terça parte e com a sua quarta parte dá o resultado 148. Qual é a idade da Ana?”

Para aplicar a regra da falsa posição seguem-se os seguintes procedimentos:

- (1) Escolher um número falso, por exemplo 12;
- (2) Aplicar as operações indicadas no enunciado: $12 + 12 + 6 + 4 + 3 = 37$;
- (3) Ajustar o valor:

	Número	Resultado
Falso	12	37
Verdadeiro	X	148

$$\frac{12}{x} = \frac{37}{148} \Leftrightarrow x = \frac{12 \times 148}{37} \Leftrightarrow x = 48$$

Figura 2.1 – Regra da falsa posição

Com Diofante de Alexandria passaram-se a utilizar símbolos algébricos que abreviavam dados e operações, dando lugar à *álgebra sincopada*. As letras passaram a incógnitas, fazendo-se uso simultâneo de palavras e abreviações (Struik, 1989). A *álgebra geométrica* surgiu com Euclides, o qual procurou substituir objetos e estruturas algébricas por representações geométricas. As quantidades desconhecidas passaram a estar associadas a figuras geométricas (300 a.C), que constituíram um método eficaz para a resolução de problemas (Boyer, 1974) e (Struik, 1989). No século VIII, al-Khowarizwi apresentou uma resolução muito semelhante à atual para as equações, utilizando apenas três elementos: raízes, quadrados e números. No entanto, não foi capaz de as expressar totalmente por símbolos, tendo isso acontecido mais tarde, como resultado das profundas mudanças por que passou a Europa na transição da Idade Média

para a Idade Moderna. Sequencialmente, as palavras que ainda eram utilizadas foram sendo substituídas por letras e sinais, como os operatórios, dando origem à *álgebra simbólica*. Esta álgebra é dotada de um simbolismo próprio, em que o objeto de estudo deixa de ser o procedimento, passando a ser a estrutura. Algumas palavras significativas representavam uma classe especial de símbolos, tal como pode constatar na figura seguinte:

	PASSADO	PRESENTE
	\mathcal{R}	$\sqrt{\quad}$
	P	$+$
	m	$-$
	v	<i>usado sob o sinal de radicaõ</i>
Cardan (1501-1576)	$\mathcal{R} \cdot v \cdot 7 : \mathcal{R} \cdot 14$	$\sqrt{7} + \sqrt{14}$
Chuquet 1484	$12^3 + 12^0 + 7^{1m}$	$12x^3 + 12 + 7x^{-1}$
Bombelli	$\sqrt[3]{\quad}$	x^3
Stevin 1585	$1^{\textcircled{1}} + 3^{\textcircled{2}} + 6^{\textcircled{3}} + \textcircled{3}$	$1 + 3x + 6x^2 + x^3$
	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\quad}$
	$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{\quad}$
Descartes	$1 + 3x + 6xx + x^3$	$1 + 3x + 6x^2 + x^3$

Figura 2.2 – A evolução dos símbolos²

Contudo, foi com Viète (1540-1603) que os objetos de estudo deixaram de se relacionar apenas com problemas numéricos, dando-se início à utilização de expressões algébricas. Viète introduziu o uso sistemático de letras para indicar números desconhecidos e símbolos operacionais, aperfeiçoado, anos mais tarde, por Descartes (1596-1650) que criou a notação para expoentes.

Com Gauss (1777-1855) e Galois (1811-1832) desenvolveu-se a Teoria de Grupos, iniciando-se a *álgebra moderna*. Na segunda metade do século XIX, a álgebra adquiriu como principal objeto o estudo das estruturas algébricas abstratas, surgindo a teoria dos corpos com Kummer e a noção de anel com Dedekind. No final do século XIX, os trabalhos desenvolvidos no âmbito da álgebra passaram a ter aplicações em outros campos da ciência, tais como na análise, na geometria, na mecânica e na física teórica (Chambadal, 1978).

Atualmente, e de acordo com o lugar que a álgebra foi assumindo ao longo dos tempos, ela é entendida, pelo *sensu comum*, como a área da matemática que trabalha com equações que dão solução a determinados problemas³.

Por sua vez, a álgebra constitui um dos principais ramos da Matemática Pura, diferenciando-se em álgebra elementar e álgebra abstrata. A álgebra elementar

² <http://montalvoescienciasdonossotempo.blogspot.pt/2010/12/fascinios-da-matematica-evolucao-dos.html>, 06/06/14

³ <http://www.infopedia.pt/>, 15/07/13

introduz o conceito de variável, a manipulação, operacionalização e a resolução de equações e, através da álgebra abstrata, a adição e a multiplicação são generalizadas e as suas definições exatas conduzem ao estudo das estruturas algébricas, as quais englobam os conceitos de grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais⁴.

No domínio da Matemática Académica, e de acordo com as definições apresentadas pelo “Atlas des Mathématiques” e da enciclopédia de Matemática (Newman, 1964), a álgebra engloba o estudo das leis e dos processos formais de operações com entidades abstratas. Segundo Dienes (1961), Skemp (1978) e Wilson (1976), a importância da álgebra observa-se nas propriedades e nas estruturas da matemática, bem como na simplificação e na factorização de expressões algébricas. Por sua vez, para Radford (2006), a álgebra é um sistema caracterizado pela indeterminação dos seus objetos, pela natureza analítica do pensamento e pelas formas simbólicas de representar os objetos.

De acordo com estudos desenvolvidos no campo da Educação Matemática, Lins e Giménez (1997) concluíram que a álgebra consiste num conjunto de afirmações possuidoras de significado numérico, associadas a operações aritméticas, igualdades e desigualdades, pelo que, segundo esses investigadores, deverá constar nos currículos escolares. Segundo Garcia (1997), a álgebra destaca-se por constituir-se como uma ferramenta essencial para a resolução de problemas, para além de ser entendida como objeto matemático indispensável ao desenvolvimento de outras disciplinas científicas. Para Souza e Diniz (1996), a álgebra é a linguagem da Matemática utilizada para expressar factos genéricos, tendo ao seu dispor símbolos, letras, sinais e regras próprias.

Lins e Giménez (1997) consideram que a álgebra não pode ser concebida unicamente de acordo com as suas características linguísticas e transformistas, próprias da manipulação e do cálculo algébrico, devendo também ser explorada no sentido do desenvolvimento do pensamento algébrico. Acrescenta-se que, segundo esta perspetiva, o desenvolvimento do pensamento algébrico é acessível aos alunos mais jovens, pelo que deve ser estimulado desde os primeiros anos do ensino básico.

Após uma compreensão global do que trata a aritmética e a álgebra, e como essas evoluíram ao longo da história da matemática, aceita-se que devem ser vistas como duas faces da mesma atividade, pois a ideia de se tratar de áreas incompatíveis é apenas aparente (Guimarães et al., 2006). A álgebra ajuda a compreender as relações aritméticas, verificando-se que a própria aritmética tem vindo a adotar, para melhorar a compreensão dos alunos, a linguagem algébrica. A utilização de propriedades, tais

⁴ <https://www.google.pt/#q=wikipedia>, 16/05/13

como a distributiva, $23 \times 24 = (20 + 3) \times (20 + 3)$, é um exemplo de como a álgebra tem vindo a ser utilizada para explicar algoritmos.

Em particular, alguns investigadores consideram que se deverá promover uma aprendizagem da aritmética e da álgebra que contemple o desenvolvimento do sentido do número (Borrvalho, Cabrita, Palhares & Vale, 2007), de modo a conduzir os alunos à produção de significados e à aquisição de competências que promovam a compreensão, a relação de dados e a aplicação de conhecimentos matemáticos a novas situações, preparando-os para responderem aos desafios de uma sociedade em constante e rápida mudança.

Em 1989, o NCTM considerou que para promover o desenvolvimento do sentido de número, seria necessário promover junto dos alunos: (1) o desenvolvimento dos conceitos elementares de número, incluindo os conceitos de cardinal e ordinal, (2) a exploração de relações numéricas, (3) a compreensão do valor relativo dos números, (4) o desenvolvimento da intuição do efeito que as operações têm nos números – sentido de operação – e (5) o desenvolvimento de referenciais para medir objetos comuns e situações do mundo que nos rodeia. Segundo esta perspetiva, o sentido do número relaciona-se com a compreensão dos números e suas operações e com os seus diferentes significados e relações. Anghileri (2001) valoriza a compreensão do modo como os números se relacionam entre si, as suas representações e significados, considerando que um aluno terá um bom sentido de número quando conseguir estabelecer relações diversas, tais como as presentes na igualdade: $12 = 10 + 2 = 20 - 8 = 2 \times 6 = 4 \times 3$. Nesta situação, a produção de significados torna-se visível através da habilidade demonstrada pelo aluno ao estabelecer estas relações de igualdade.

Também McIntosh, Reys e Reys (1992), consideram que ter sentido do número significa possuir uma compreensão pessoal e global desse e das operações envolvidas, bem como ter habilidade para utilizar essa compreensão para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis que permitam lidar com os números e com as suas operações. Para estes investigadores, ter sentido de número significa conhecer e utilizá-los com destreza para: (1) observar as regularidades e representações múltiplas, identificar o sentido de grandeza relativa e absoluta e o uso de sistemas de referência que permitam avaliar uma resposta ou arredondar um número; (2) operacionalizar, englobando a compreensão para relacionar o conteúdo matemático envolvente e os respetivos cálculos, a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, a apetência para usar representações eficazes e (3) a sensibilidade para rever os dados e o resultado.

Por sua vez, entende-se que para valorizar, no ensino da aritmética e da álgebra, o desenvolvimento do sentido de número e a produção de significados, a aprendizagem

dos alunos não se pode reduzir à memorização e à aplicação de procedimentos lecionados de forma descontextualizada. Interessará, antes, estimular a identificação de relações quantitativas.

Síntese. Os raciocínios presentes no pensamento aritmético podem ser estimulados no sentido da aprendizagem algébrica. O trabalho desenvolvido na aritmética está relacionado, na sua globalidade, com as relações numéricas e operacionalização, com a identificação e utilização de propriedades, bem como com a aplicação de procedimentos matemáticos, estando associado à resolução de problemas. Por sua vez, a álgebra é dotada de um simbolismo próprio, trabalhando com quantidades indeterminadas, estando, também, associada ao conceito de variável e à generalização. Considera-se que a álgebra deve ser trabalhada desde o ensino da aritmética, através da promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.1.2 A aritmética e a álgebra: ruturas e filiações

Segundo Radford (2012), a fronteira que existe entre a aritmética e a álgebra não se explicará apenas através do simbolismo utilizado na álgebra, mas estará também associada ao desenvolvimento do pensamento analítico. Este pensamento estará presente em situações em que o aluno tem necessidade de operar com o desconhecido – operações algébricas – e considerar quantidades indeterminadas como se fossem números conhecidos. Para este autor é possível desenvolver o pensamento algébrico dos alunos sem se fazer uso da linguagem e de procedimentos algébricos, embora reconheça que o simbolismo algébrico permite transformar expressões e alcançar objetos matemáticos que, por processos não algébricos, seriam difíceis de alcançar. Segundo esta perspectiva, a aritmética adquire novos desafios e a álgebra deixa de se resumir a atividades mediadas por notações e procedimentos, passando-se a valorizar o significado da simbologia e dos conceitos algébricos e a deduzir as fórmulas algébricas. A álgebra adquire, como tal, natureza analítica. Segundo este autor, os alunos podem trabalhar com conceitos algébricos usando outros procedimentos e estratégias pouco convencionais ao trabalho algébrico. A utilização de artefactos, a resolução de tarefas de natureza exploratória que apelam à investigação e reflexão dos alunos, a resolução de problemas, a mediação, o trabalho desenvolvido em grupo e a comunicação diversificada – escrita, oral ou corporal – exemplificam como se poderá desencadear a compreensão e a construção de objetos matemáticos. Os procedimentos e estratégias supracitados podem ser aplicados transversalmente, tornando-se aceitável trabalhar os conceitos algébricos com alunos mais jovens para melhorar a sua compreensão e minimizar dificuldades durante a aprendizagem da álgebra. A este propósito, Schliemann, Brizuela, Earnest e Goodrow (2003) referem ser necessário desenvolver junto de alunos mais jovens o raciocínio e as relações algébricas, por considerarem que esses alunos têm capacidade para resolver problemas algébricos,

mesmo antes de conhecerem e fazerem uso de notação algébrica. Segundo estudos apresentados por estes investigadores, alunos com idades compreendidas entre os nove e os dez anos podem desenvolver formas de operarem com números, semelhantes ao trabalho efetuado por alunos mais velhos quando trabalham com as funções. Essas competências foram observadas quando colocaram os alunos a estabelecer relações numéricas: será a igualdade $6 + 9 = 7 + 8$ verdadeira ou falsa? A este propósito, os investigadores verificaram que os alunos são capazes de utilizar representações múltiplas na resolução de problemas algébricos, pelo que entendem que esses devem ser estimulados a utilizar simbologia.

Usiskin (1995) identificou, no que respeita ao campo de estudo e aplicações da álgebra, e à forma como esta área pode ser trabalhada, quatro conceções distintas: (1) aritmética generalizada; (2) processos para a resolução de problemas; (3) expressão de variação de grandezas e (4) estudo de estruturas matemáticas.

Para trabalhar a álgebra enquanto aritmética generalizada poder-se-á recorrer ao estudo de padrões numéricos, construídos indutivamente a partir da aritmética (Souza & Diniz, 1996), bem como utilizarem-se variáveis que representem a generalização de modelos aritméticos.

O conceito de padrão numérico é utilizado é apresentada uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detetam regularidades (Vale, Palhares, Borralho & Cabrita, 2006) e pode ser utilizado para trabalhar a aritmética generalizada. Podem apresentar-se sob a forma de regularidade, sequência numérica, motivo, regra ou ordem. A exploração de padrões numéricos pode ser entendida como uma forma de iniciar o estudo da álgebra, estimulando o desenvolvimento do pensamento algébrico (Mason, 1996, Orton & Orton, 1999, Threlfall, 1999), uma forma de iniciar o formalismo da álgebra (Lee, 1996) e de proporcionar aos alunos a oportunidade para observarem regularidades, analisarem e descreverem as mesmas, iniciando-os na representação simbólica de natureza verbal, icónica, geométrica ou algébrica (Dörfler, 1991).

A essência do trabalho desenvolvido na aritmética generalizada será o de conduzir os alunos a estabelecerem e a traduzirem as relações existentes entre números, reconhecendo as variações que permitem generalizar processos. A generalização pode verificar-se, por exemplo, no estudo das propriedades da adição, tal como se verifica quando se transita da igualdade $2 + 3 = 3 + 2$ para a igualdade $a + b = b + a$, ou mesmo na relação de paridade, $2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, ..., $(2 \times n = 2n)$, ou da proposição que indica que o produto de qualquer número por zero é zero, $x \times 0 = 0$ (para $x \in \mathbb{R}$ um número genérico qualquer). Serão inúmeras as propriedades numéricas a serem exploradas durante o ensino da aritmética com vista a aproximar o trabalho aritmético do algébrico. Dinamizar atividades, tendo em consideração estas características,

poderá promover a compreensão do significado atribuído às relações e estimular o uso natural da linguagem simbólica que lhes permita traduzir e generalizar os processos estudados.

No que respeita à regularidade das relações matemáticas, Caraça (1998) refere-se à *regularidade do fenómeno – a lei quantitativa* – considerando que essa transmite a correspondência entre dois conjuntos. Refere ainda que para se poder estudar a lei quantitativa há necessidade de se *criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência entre dois conjuntos*. Esse instrumento resulta da aplicação de ideias e do aperfeiçoamento de outros instrumentos já experimentados, de modo a estabelecerem uma correspondência progressivamente mais apurada. Caraça destaca a necessidade de se criar uma representação simbólica, introduzindo o conceito de variável, que torne o instrumento *manejável*. O autor apresenta a seguinte definição de variável:

Seja E um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex. x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto E, chamamos variável. (Caraça, pg. 119, 120).

A respeito da introdução do conceito de variável, Schoenfeld e Arcavi (1988) consideram que a transição entre a aritmética e a álgebra pode ser facilitada quando os alunos são incentivados, desde cedo, a usar a noção de variável com significado. Consideram que se deve proporcionar aos alunos mais do que a simples manipulação de símbolos e expressões algébricas, direcionando a atenção destes para a compreensão dos símbolos e seus significados. Defendem que, desse modo, os alunos adquirem as competências necessárias à aprendizagem de conceitos matemáticos mais avançados. Segundo esta perspetiva, o sentido do símbolo terá um papel semelhante ao do sentido de número, interessando compreender que ações se desencadeiam sobre eles. Arcavi (2005) considera que um aluno tem sentido de símbolo quando revela capacidade para utilizar e usar de forma criativa os símbolos, nomeadamente identificar relações, mostrar a generalidade ou fazer demonstrações. Segundo este investigador, só é possível promover o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno se o ajudarmos a desenvolver o sentido de símbolo.

A utilização da álgebra como estudo de processos para a resolução de problemas requer a utilização das variáveis como incógnitas ou constantes (Usiskin, 1995). Usiskin discutiu o significado de variável enquanto argumento, valores do domínio de uma função, ou parâmetro, número que depende de outros números. Souza e Diniz (1996) destacaram a mudança da variável e a necessidade de os alunos a relacionarem com quantidades e construir os respetivos gráficos.

A álgebra é desenvolvida enquanto expressão de variação de grandezas quando, por exemplo, é trabalhada através de uma fórmula, tal como a de a área de um retângulo: $A = c \times l$. Nesta situação está presente a relação existente entre duas grandezas, não existindo na maioria dos casos, da parte dos alunos, a noção de desconhecido.

Ao trabalhar a álgebra como estrutura matemática, os alunos utilizam a variável como um objeto arbitrário de uma estrutura, estabelecida por determinadas propriedades, tal como se verifica com o estudo dos grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, entre outros. Neste caso, as letras são concebidas como símbolos abstratos, com os quais se pode operar, verificando-se, por exemplo, em situações de operacionalização com polinómios, como na aplicação de casos notáveis. Entende-se, como tal, que para trabalhar a resolução de problemas, com vista ao desenvolvimento algébrico, será necessário adquirir flexibilidade no entendimento e utilização das variáveis, dada a mudança de significados. Esta mudança de significados será explorada com maior detalhe na próxima secção.

Síntese. As ruturas existentes entre a álgebra e a aritmética prendem-se, essencialmente, com o simbolismo algébrico e com o pensamento analítico. Essas ruturas poderão estar associadas à forma como se trabalha a aritmética e a álgebra, designadamente como se tratassem de temas sem características em comum. Tradicionalmente, considera-se que operar com o desconhecido, considerar quantidades indeterminadas na resolução de um problema, deduzir fórmulas e demonstrar são competências do ensino da álgebra. Entende-se possível trabalhar conceitos algébricos com alunos mais jovens, usando procedimentos e formas de pensamento pouco convencionais que estimulem a compreensão, a identificação de regularidades e a generalização. Considera-se que esse trabalho, que pode ser promovido através do estudo de padrões, da generalização de processos com entendimento das variáveis utilizadas, bem como através da resolução de problemas de natureza algébrica, facilitará a compreensão e aquisição de conceitos algébricos mais avançados.

2.1.3 As dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra

A transição entre a aritmética e a álgebra constitui tema de investigação e discussão, interesse fortemente associado à necessidade de explicar e colmatar as dificuldades sentidas pelos alunos durante a aprendizagem da álgebra.

Booth (1984) relacionou os erros cometidos pelos alunos durante o ensino da álgebra com: (1) o foco da atividade algébrica e da natureza das respostas, da notação e da convenção utilizada; (2) o significado das letras e das variáveis e (3) o tipo de relações e os métodos utilizados na aritmética.

Porém, as dificuldades diagnosticadas durante a aprendizagem da álgebra podem também estar associadas a lacunas manifestadas durante o ensino da aritmética. Tal situação poder-se-á tornar visível aquando da generalização, pois esse processo exige o reconhecimento e a compreensão de relações e procedimentos dentro do contexto aritmético. A esse propósito Kieran (1991) referiu que os alunos resolvem essencialmente problemas numéricos durante a aprendizagem da aritmética e criam a mesma expectativa quando iniciam a aprendizagem da álgebra, podendo as dificuldades estarem associadas a essa conceção.

Investigações realizadas no âmbito da identificação e da compreensão das dificuldades e dos erros cometidos pelos alunos durante a aprendizagem da álgebra podem, historicamente, situar-se em três fases distintas: (1) na primeira fase os investigadores procuraram contabilizar e identificar a natureza dos erros cometidos durante a resolução de problemas (Radatz, 1980; Rico, 1995); (2) na segunda fase, com início nos anos oitenta do século passado, ao considerar-se que o erro faz parte da aprendizagem, despertou o interesse pela análise e estudo da forma como os alunos constroem objetos matemáticos. Brousseau, Davis e Werner (1986) consideraram que os erros podem estar associados à aplicação de procedimentos sistemáticos e inadequados ou resultar de conceções inadequadas face à construção de objetos matemáticos. Alguns fatores extrínsecos aos alunos, como o ensino ministrado, respeitante ao professor e ao currículo, o contexto de aprendizagem e as interações sociais, culturais e institucionais existentes, assumiram também destaque.

A terceira fase de investigação propôs-se a identificar e analisar dificuldades, ocorridas durante o processo de ensino e de aprendizagem da álgebra, que se prendem com os aspetos da linguagem. Tornou-se importante perceber como é que os alunos trabalham com as operações, com as estruturas e com processos de substituição formal, para além da generalização e modelação.

Visando diferenciar o tipo de dificuldades identificadas nos alunos, Socas (2007) propôs a categorização das mesmas em cinco classes principais: (1) natureza, quando estão relacionadas com as características próprias da disciplina; (2) complexidade dos objetos e dos processos matemáticos; (3) ensino ministrado; (4) desenvolvimento cognitivo dos alunos e (5) atitudes afetivas e emocionais associadas à matemática.

Kieran (2004) fez referência às dificuldades que os alunos podem sentir quando transitam da aritmética para a álgebra e que se devem à exigência da compreensão conceptual e combinação de representações, destacando o facto de essas poderem ser igualmente identificadas em alunos que revelaram sucesso durante o ensino da aritmética. Esta investigadora considera que as referidas dificuldades decorrem das exigências algébricas, uma vez que é necessário que os alunos foquem a sua atenção:

(1) nas relações numéricas, para além do cálculo; (2) nas operações inversas e não apenas nas operações isoladas; (3) na representação com vista à solução do problema, equilibrando o esforço impresso nas diferentes fases; (4) nas letras, tal como o fazem com maior espontaneidade com os números e (5) no significado atribuído ao sinal de igual. As dificuldades apontadas correspondem às que deram origem à reformulação do modelo curricular asiático, através do qual se procura preparar os alunos mais jovens para a aprendizagem futura da álgebra avançada. Através deste currículo promove-se o uso das operações inversas e da representação pictórica para resolver equações e privilegiam-se as relações para além do cálculo. As operações adição e subtração são lecionadas em simultâneo, permanecendo a ideia de que a segunda é apenas a inversa da primeira, passando-se o mesmo com a multiplicação e com a divisão – modelo *doing/undoing*. A utilização de representações pictóricas para resolver equações auxiliará os alunos a focarem-se quer nas representações, quer na solução do problema – *drawing*. Segundo este currículo e de acordo com a perspetiva de Kieran, a resolução de problemas com recurso à aritmética e à álgebra proporcionam melhor relação e perceção do significado das letras, direcionando a atenção dos alunos para as relações e não somente para o cálculo.

Relativamente às dificuldades manifestadas pelos alunos, Schoenfeld (2005) fez referência a obstáculos epistemológicos promovidos pela mudança de significado das letras e símbolos, considerando-se que a transição da linguagem natural para a simbólica condiciona a aprendizagem da álgebra. Rojano (2002) caracterizou alguns desses obstáculos:

- os sinais $+$ e $-$, que na aritmética representam operações, estão relacionados com um resultado, mas na álgebra estes símbolos podem representar uma operação suspensa em expressões do tipo $2 + x$ ou $3x - 4y$. Podem representar operações executáveis com regras algébricas em expressões semelhantes a $3x - x + 8$, bem como representar um sinal posicional, tal como nos números inteiros relativos que se seguem: -6 , $+4$, -43 ;
- o sinal $=$, que na aritmética é usado como um operador que transforma o membro esquerdo de uma igualdade num resultado numérico que aparece no membro direito, como em $14 + 5 = 19$, na álgebra representa uma equivalência entre duas expressões, tal como em $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Pode também representar uma igualdade restrita (apenas para um certo valor) ou uma equação do género $3x - 2 = 5x + 6$, ou ainda, uma relação funcional do tipo $y = 3x - 2$;

- na aritmética as letras são usadas como um objeto com referências específicas suscetíveis a substituições numéricas, tais como na fórmula geométrica do perímetro do quadrado, $P = 4l$;
- a junção de símbolos também obedece a convenções diferentes, por exemplo, na aritmética 254 representa a notação num sistema posicional e é aditiva, 2 centenas mais 5 dezenas, mais 4 unidades, enquanto que na álgebra $5x$ representa uma interpretação multiplicativa, 5 vezes x .

Pode-se constatar que os símbolos representam uma fonte de recursos e potencialidades indispensáveis à expressão da linguagem matemática, podendo assumir a representação externa de objetos abstratos e adquirir um significado mais profundo do que o visível nas respectivas notações. Porém, esta abrangência e riqueza poderá, também, estar na origem de dificuldades diversas. Ursini e Trigueros (2001) defendem que as estas interpretações distintas da linguagem algébrica, bem como a utilização de símbolos na resolução de problemas, geram dificuldades aos alunos.

Relativamente ao significado de símbolo, Chevalier e Gheerbrant (2001) referem que se pode tratar de um objeto físico ou abstrato que pode assumir valores simbólicos. Peirce (1958) destaca que podem resultar do desenvolvimento de outros signos, considerando que um símbolo é um signo que está associado a um objeto e que representa determinado significado por convenção, podendo, também, resultar do desenvolvimento de outros signos. Esse estabelece uma relação com o seu objeto por meio de uma mediação de forma a representá-lo.

[...] qualquer palavra comum, como “dar”, “pássaro”, “casamento”, é um exemplo de símbolo. Ele é aplicável a tudo aquilo que possa concretizar a ideia relacionada à palavra. O símbolo não é capaz de identificar, por si próprio, as coisas às quais se refere ou se aplica. Ele não mostra um pássaro, nem nos faz ver um casamento, mas supõe que somos capazes de imaginar tais coisas, associando a elas a palavra (Peirce, 1958, CP, 2.298).

Arcavi (2006) considera que os símbolos estão ao alcance de todos os alunos, mesmo daqueles que apresentam maiores dificuldades à disciplina de Matemática, podendo essa competência ser promovida através da manipulação e da interpretação simbólica. O investigador entende que adquirir sentido de símbolo significa revelar capacidade para questioná-lo e tal acontecerá quando os alunos: (1) estiverem familiarizados com os símbolos, compreendendo o respetivo significado e alcance matemático, que pode ser adquirido ao estabelecerem relações e generalizações; (2) adquirirem capacidade

para manipular símbolos e compreender expressões simbólicas, estabelecendo conexões e refletindo sobre os próprios resultados; (3) tomarem consciência de que os símbolos podem representar relações simbólicas que expressam informações; (4) revelarem capacidade para selecionar e avaliar qual é a representação simbólica mais adequada; (5) assumirem a necessidade de verificar o significado dos símbolos, durante a aplicação de um procedimento, da resolução de um problema ou da verificação de um resultado, comparando esses significados com os resultados previamente esperados; (6) tomarem consciência de que os símbolos podem desempenhar “papéis” diferentes e desenvolverem um sentido intuitivo dessas diferenças.

Relativamente ao uso de símbolos literais, a equipa que coordenou o projeto *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (Küchmann, 1981) identificou seis dificuldades distintas, em alunos com idades compreendidas entre os seis e onze anos, associadas à forma como esses são apresentados. De acordo com o contexto em que o símbolo literal é apresentado, a *Letra* pode assumir-se como: (1) *Avaliada*, quando a variável é substituída por um determinado valor numérico conhecido, sem que seja operacionalizada. Tal acontecerá em situações semelhantes à apresentada pela igualdade $a + 1 = 3$, em que se reconhece que o valor de a é 2; (2) *Não considerada*, nos casos em que não é dado significado às letras, reconhecendo-se apenas a sua presença e possíveis relações numéricas: $a + b = 3 \Leftrightarrow a + b + 1 = 4$; (3) *Objeto*, quando a letra é concebida como abreviatura do objeto, o que acontecerá, por exemplo, quando se solicita ao aluno a indicação de uma expressão simplificada para o perímetro de um triângulo equilátero de lado l , tal como $P = 3 \times l$; (4) *Incógnita*, quando a letra é entendida como representante de números específicos, ainda que desconhecidos, e sob a qual se pode operar. Esta-se perante esta situação quando dizemos que o perímetro de um polígono regular com n lados, cuja medida do comprimento de cada lado é, em centímetros, cinco, é dado pela igualdade $P = 5 \times n$, em que n dependerá do número de lados do polígono e, ao ser substituído, dá origem a um determinado valor numérico; (5) *Número generalizado*, quando a letra representa diferentes números e generaliza uma regra ou propriedade, tal como se verifica com a expressão geradora dos números pares $2 \times n$, para n um número natural. (6) *Variável*, quando a letra representa um conjunto de valores cuja alteração provoca uma alteração sistemática de outros valores, tal como acontece na desigualdade $2x + 3 \geq x + 4$.

Para Schoenfeld e Arcavi (1988), a construção do conceito de variável está associada a um processo complexo que não se adquire com a mera repetição de procedimentos, de modo que as dificuldades sentidas pelos alunos podem estar associadas ao próprio conceito de variável. Por sua vez, Küchemann (1981) considera que alguns alunos adotam, eles próprios, a sua interpretação de variável e que, por vezes, concebem uma interpretação errónea desse conceito, situação que pode impedir ou dificultar a aprendizagem de conceitos algébricos avançados. Usiskin (1988) acrescentou aos

diferentes significados de letra já apresentados, o caso em que a letra representa uma constante ou parâmetro, como se verifica nas situações de proporcionalidade direta $y = kx$ ou de proporcionalidade inversa $y = \frac{k}{x}$.

Küchemann (1981) e Kieran (1992) consideram que as dificuldades acentuam-se quando as letras surgem, aos alunos, na forma de *número generalizado* e como *variável*. Por sua vez, Ursini e Trigueros (2001) destacam as competências que os alunos têm de mobilizar quando a letra se apresenta como incógnita, as quais estão relacionadas com a habilidade para: (1) reconhecer a presença de um valor desconhecido que possa ser determinado através dos dados fornecidos; (2) interpretar o(s) símbolo(s) presente(s) numa equação e compreender que eles representa(m) um valor; (3) substituir a variável por um ou mais valores que transformem a equação numa proposição verdadeira; (4) executar operações algébricas e/ou aritméticas para determinar a quantidade desconhecida e (5) representar quantidades desconhecidas nas situações apresentadas e na formulação de equações. Quando a letra se apresenta como número generalizado, o aluno tem de: (1) reconhecer padrões e compreender regras e processos em sequências numéricas e em famílias de problemas; (2) interpretar o símbolo como representação de um objeto genérico; (3) deduzir regras e processos gerais em sequências e em família de problemas; (4) manipular os símbolos na simplificação de expressões algébricas e (5) representar simbolicamente regras ou processos gerais. Estas investigadoras também destacaram as dificuldades observadas quando as letras assumem uma relação funcional, assunto que também merecerá destaque após se efetuar uma breve abordagem ao significado das letras e às dificuldades por elas geradas quando se trabalha o processo de generalização.

A importância do simbolismo algébrico acentua-se quando se pretende expressar uma generalização (Kieran, 1989), e tal poderá acontecer quando se desenvolve trabalho aritmético com alunos mais jovens, pois essa competência estará ao seu alcance (Mason, 2008). Também Morris (1999) e Carraher, Schliemann, Brizuela e Earnest (2006) consideram que os alunos mais jovens são capazes de generalizar para representarem abstrações, defendendo uma transição mais equilibrada entre a notação aritmética e a algébrica, estimulando o processo de generalização, no sentido de minimizar as dificuldades geradas pelo uso de simbologia.

O simbolismo algébrico assume diferentes facetas durante o processo de generalização, expressando-se, inicialmente, sob a forma de linguagem natural que, gradualmente, adota formas simbólicas mais elaboradas (Blanton, 2008). Fujii e Stephens (2001) utilizam a expressão quasi-variável para estabelecerem uma ligação entre a notação aritmética e a algébrica. Essa ideia foi também extensível à generalização, surgindo o conceito de quasi-generalização que se refere à transição para uma generalização

completa, ou seja, para a linguagem corrente ou simbólica (Warren, 2005b; Warren & Cooper, 2007).

Rojano (2002) caracterizou o processo de generalização em quatro fases: (1) construção mental da regra geradora dos termos do padrão, a qual ocorre no momento em que o aluno indica qual é o termo seguinte sem ter de contabilizar individualmente os termos anteriores; (2) escrita da regra em linguagem natural ou numérica; (3) tradução da regra em simbologia algébrica e (4) manipulação da generalização, usando-a na resolução de problemas. Destacam-se nestas fases, que estão estritamente interligadas, a construção mental da regra geradora, a sua comunicação em linguagem natural e algébrica e a capacidade de manipulação.

Segundo Radford (2003), a generalização desenvolve-se em três níveis: (1) foco da generalização; (2) foco contextual, abstrato e descritivo que ocorre, por exemplo, a partir de uma imagem e (3) simbólico, quando a notação algébrica é usada para descrever a generalização.

Por sua vez Lannin (2005) diferencia a generalização em icónica/visual e numérica, podendo essa ser: (1) recursiva, quando se reconhece a existência de uma variação única ou sequencial, tal como adicionar determinado valor para obter o termo seguinte ou (2) explícita.

Para conduzir os alunos ao processo de generalização poderá ser importante elaborar e implementar tarefas que permitam a: (1) perceção de regularidades e articulação de ideias e o (2) desenvolvimento de argumentos matemáticos que justifiquem as regularidades observadas (Mason, 2008). Moss e Beatty (2006) e Mulligan e Mitchelmore (2009) valorizaram a aplicação de tarefas que envolvam o trabalho com padrões, acessíveis aos alunos mais jovens, por essas estimularem a observação e a compreensão de relações de dependência entre quantidades, considerando essas competências essenciais ao desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização. Radford (2006a, 2006b) entende que generalizar envolve o reconhecimento de semelhanças, por análise de casos particulares, seguida de generalização a todos os termos, envolvendo dois componentes: (1) apreender a generalidade e (2) expressar a generalidade através de gestos, linguagem e símbolos algébricos. Radford (2010) acrescentou que o trabalho desenvolvido pelo professor será essencial para estimular o desenvolvimento da capacidade de visualizar com atenção, reconhecer e relacionar de acordo com os aspetos geométricos, numéricos e, eventualmente, com outros aspetos matemáticos. Radford (2010) apelidou este processo de *domesticação do olho*.

Por sua vez, Lannin (2005) considerou que não se pode separar a generalização da justificação, dada a necessidade de se validarem as generalizações feitas. A justificação é, no ponto de vista dos alunos, uma tarefa de difícil execução dado que eles têm

dificuldade em estabelecerem uma regra geral. A articulação, representação e justificação de conclusões gerais que conduzam à generalização de casos aritméticos particulares decorre da análise da regularidade observada pelos alunos ao procurarem perceber as relações e as estruturas que fundamentam uma justificação. Justificar não é só encontrar respostas ou apresentar casos particulares que verifiquem a regularidade, tratando-se também da representação de imagens, modelos, diagramas ou histórias contextuais que representam o significado das operações e que vão evoluindo de uma forma informal, quando os alunos são mais jovens, para outra mais elaborada.

Regressando aos estudos de Ursini e Trigueros (2001), as investigadoras consideram que a interpretação da variável numa relação funcional eleva o grau de dificuldade, exigindo que os alunos: (1) reconheçam a correspondência entre quantidades em tabelas, gráficos, problemas verbais ou expressões analíticas; (2) determinem o valor da variável independente, conhecido o valor da variável dependente; (3) determinem o valor da variável dependente, conhecido o valor da variável independente; (4) reconheçam a variação simultânea das variáveis intervenientes numa relação independentemente da sua forma de representação; (5) determinem os intervalos de variação de uma das variáveis quando conhecidos os da outra e (6) representem uma relação funcional por uma tabela, gráfico e/ou algebricamente, tendo em consideração os dados de um problema. As investigadoras referiram-se, ainda, aos diferentes significados associados ao uso de parâmetros, os quais, segundo elas, estarão dependentes do conteúdo matemático trabalhado e poderão sofrer alterações na resolução do mesmo problema. Um exemplo dessa situação está presente na equação $3x^2 + px + 7 = 0$, onde p pode assumir diferentes significados, tais como o de número generalizado, numa fase inicial, ou incógnita, quando se solicita, por exemplo, o seu valor de modo que tenha apenas uma equação.

Outra situação poderá ocorrer quando, em equações que representam famílias de funções do tipo $y = ax + b$, se solicitam os valores numéricos de a e b tendo em consideração que determinado ponto pertence à respetiva representação gráfica, estabelecendo-se, assim, uma relação funcional entre a e b .

Arcavi (2005), por sua vez, fez também referência aos diferentes papéis que podem desempenhar as variáveis e os parâmetros em expressões algébricas equivalentes à equação $y = ax + b$. Nesta igualdade, as variáveis x e y e os parâmetros a e b representam números, contudo, os objetos matemáticos que se obtêm pelas suas substituições representam situações matemáticas distintas. Considerando, por exemplo, a atribuição de valores a x e a y obtêm-se um conjunto de pontos do plano. Por sua vez, atribuindo valores a a e a b torna-se possível fixar uma reta do conjunto de todas as retas possíveis do plano. No caso particular de $y = b$, a interpretação da

expressão $y = ax + b$ pode revelar duas facetas distintas: pode ter resultado da substituição de x por zero e, como tal, representar o valor da ordenada de um ponto de abscissa zero, ou então, pode ter resultado da substituição de a por zero, representando, nesse caso, uma reta de declive zero.

Kieran (2007) acrescentou que, para além das dificuldades estarem associadas à sintaxe implícita na simbologia algébrica formal, essas também podem ser promovidas pela falta de associação a outras representações. Para colmatar tais dificuldades, sugeriu que se deverá promover a coordenação de objetos e ações entre duas representações diferentes, como a gráfica e a expressão simbólica, de modo que os alunos criem significados durante a aprendizagem da álgebra.

Face ao leque diferenciado de facetas apresentadas pelos símbolos, Arcavi (2005) reforçou a necessidade de os alunos compreenderem o seu significado, reconhecendo quando e como podem, e devem, ser usados para representar relações, generalizações e demonstrações e de adquirirem capacidade para selecionar uma representação simbólica adequada aos dados e ao trabalho desenvolvido.

Síntese. Constata-se um manifesto interesse em colmatar as dificuldades sentidas pelos alunos durante a aprendizagem da álgebra, na qual eles manifestam dificuldades diversas. Estas, globalmente, estão relacionadas com a presença de símbolos, com o significado atribuído às letras e às variáveis, com a exigência da compreensão conceptual, com complexidade dos objetos e processos matemáticos e com a combinação de representações. Contudo, poderão também estar associadas ao foco da atividade algébrica, ao trabalho desenvolvido durante a aprendizagem da aritmética, com as características da própria disciplina de Matemática, entre outras causas. Entende-se que, para atenuar as dificuldades manifestadas pelos alunos, dever-se-á fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico, incentivando a expressão e a justificação dos raciocínios desenvolvidos.

2.1.4 Propostas curriculares – *Early algebra*

O interesse em preparar os alunos mais jovens para uma aprendizagem bem-sucedida da álgebra terá contribuído para o aparecimento de algumas propostas curriculares, entre as quais se destacam a *Pré-álgebra* e a *Early algebra*.

Na proposta curricular *Pré-álgebra* privilegia-se o estágio de desenvolvimento da criança e considera-se que a álgebra está presente quando se faz uso do simbolismo algébrico (Drijvers & Hendrikus, 2003). A aprendizagem resulta do desenvolvimento cognitivo da criança, quando esta adquire capacidade para compreender, estando a álgebra acessível apenas aos alunos mais velhos (Rojano & Filloy, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994). A abordagem da *Pré-álgebra* surgiu na década de oitenta do século

passado, com os investigadores Davis (1985) e Vergnaud (1988) que defenderam o ensino da álgebra desde os primeiros anos do ensino básico, com vista a preparar os alunos para aprendizagem dos conceitos formais da álgebra. Em 1989, o NCTM (1989) sugeriu que o ensino da álgebra, enquanto generalização da aritmética, se estendesse ao currículo do ensino básico para proporcionar aos alunos uma conceção mais ampla da álgebra, através da implementação de tarefas potenciadoras do desenvolvimento de procedimentos e de interpretações que promovessem uma transição entre as conceções procedimentais e estruturais.

A proposta curricular *Early algebra* defende que se pode trabalhar a aritmética com o intuito de conduzir os alunos mais jovens à interpretação de relações, à exposição de ideias e à utilização de uma linguagem progressivamente mais formal. Esta propõe a introdução da álgebra desde os primeiros anos do ensino básico, estimulada transversalmente durante o ensino e a aprendizagem das diferentes temáticas contempladas no currículo. Resulta de investigações diversas (Bastable & Schifter, 2007; Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000), as quais valorizam o enriquecimento dos currículos através, por exemplo, da implementação de atividades de observação de regularidades, relações e propriedades matemáticas, visando o desenvolvimento de competências algébricas nos alunos. Os ideais da *Early algebra* estão associados a experiências de construção, expressão e justificação de generalizações matemáticas. A metodologia considerada eficaz para o desenvolvimento dessas capacidades algébricas está associada aos ambientes de exploração e de modelação, com vista ao desenvolvimento de competências essenciais nos alunos, tais como prever, discutir, argumentar e comprovar ideias. Segundo esta perspetiva, os alunos deverão desenvolver o pensamento algébrico, para além do numérico, e a compreensão das relações, não se limitando a memorizar e reproduzir procedimentos treinados. Os estudos realizados no âmbito do *Early algebra* estão geralmente associados ao estudo e à generalização de padrões e de relações numéricas, de relações funcionais, manipulação de símbolos e modelação.

Kaput (1998, 2000) e Schliemann, et al. (2003) consideram que os alunos mais jovens têm capacidade para resolver problemas algébricos, pelo que devem ser estimulados a desenvolver o raciocínio e a estabelecer relações algébricas. Esta proposta curricular parece não só incentivar os alunos a fazerem conexões entre a aritmética e a álgebra, como ainda promover o reforço e a solidificação das aprendizagens concebidas durante o ensino da aritmética. Tal poderá ser alcançado ao estimular-se, por exemplo, a compreensão e a análise do comportamento das operações, a generalização e a justificação das resoluções apresentadas. Os alunos deverão ser conduzidos a estender o sistema numérico, fortalecendo a compreensão de conceitos e desenvolvendo formas diferenciadas de pensar e de representar conceitos matemáticos.

Em 2008, o NCTM esclareceu que a proposta curricular *Early algebra* não acrescenta conteúdos ao currículo da aritmética, mas antes estabelece relações importantes entre a aritmética e a álgebra, fortalecendo uma aprendizagem sólida da álgebra. Esta proposta visa promover o conhecimento conceptual e as habilidades dos alunos, através da análise e da generalização de padrões e da utilização de representações múltiplas, procurando incentivar o professor a proporcionar aos seus alunos uma transição natural entre a aritmética e a álgebra formal.

Em traços gerais, a proposta *Early algebra* baseia-se em alguns princípios fundamentais que devem estimulados desde os primeiros anos do ensino básico, ou mesmo a partir do ensino pré-escolar. Nesse sentido, o professor deve: (1) estimular os alunos à generalização de relações numéricas e propriedades observadas, através da observação e reflexão naturais; (2) promover a construção social do conhecimento, pela partilha de construções de significados e instrumentos culturais entre alunos e entre professor e alunos; (3) proporcionar uma transição natural entre a linguagem natural, informal, e a linguagem simbólica, formal, mediada pelas construções que os alunos vão fazendo; (4) incentivar a verbalização, argumentação, discussão e a partilha de ideias, favorecendo a compreensão e a capacidade crítica, bem como a (5) identificação e explicitação do pensamento algébrico, ainda que camuflado entre conceitos e representações aritméticas.

Irwin e Britt (2005) consideram que as origens do pensamento algébrico precedem a compreensão da aritmética e que se deve estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico junto dos alunos mais jovens, considerando-se ser essa uma metodologia eficaz para reforçar a aprendizagem da aritmética e minimizar as dificuldades recorrentes durante o ensino da álgebra.

O interesse em desenvolver o pensamento algébrico nos primeiros anos do ensino básico não é uma ideia recente, tendo sido implementada na China e na Rússia, entre os anos cinquenta e sessenta, e na Europa e América do Norte, nos anos setenta do século passado. Contudo, essa ideia só foi valorizada pelo NCTM em 2000, o qual recomendou que a álgebra fosse ensinada transversalmente nos primeiros anos do ensino básico e indicou quais as habilidades que os alunos deveriam desenvolver: (1) compreender regularidades, relações e funções; (2) representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos; (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações de quantidade e (4) analisar variações em contextos diversos.

A proposta curricular *Early algebra* é valorizada neste estudo considera-se que o desenvolvimento do pensamento algébrico permite ajudar os alunos a fortalecerem as aprendizagens aritméticas e a adquirirem melhor compreensão conceptual das relações e de questões relacionadas com o uso de simbologia, preparando-os melhor para a

aprendizagem da álgebra. Por sua vez, considera que o desenvolvimento do pensamento algébrico, não sendo equivalente à antecipação de conteúdos da álgebra, está acessível aos alunos mais jovens.

2.1.5 O desenvolvimento do pensamento algébrico

À aprendizagem da álgebra poderão estar associadas dificuldades diversas, algumas, porventura, não antes constatadas. A exigência imposta à compreensão de conceitos, de estruturas e princípios, associados a manipulações simbólicas, poderá constituir uma fonte de novas dificuldades, por vezes mascaradas por interpretações deficitárias, ou incorretas, de relações numéricas estudadas durante a aprendizagem da aritmética. Reconhecendo-se essa lacuna, poderá fazer sentido ensinar a aritmética com o mesmo propósito com que se estuda a álgebra, estimulando a identificação e compreensão de relações numéricas e a aquisição significativa de conceitos e propriedades matemáticas. Adotar esta perspectiva de ensino significará promover o desenvolvimento pensamento algébrico dos alunos mais jovens, sem que tal possa ser confundido com a antecipação do ensino da álgebra.

No presente estudo, o pensamento algébrico assume um papel de relevo, sendo que se procurou estimular a observação e identificação de regularidades, a compreensão e construção de relações entre variáveis (Day & Jones, 1997) e a generalização (Kaput, 1999), bem como a habilidade para, usando a criatividade e aplicando formas diferenciadas de representação, resolverem problemas de natureza algébrica.

Para promover o desenvolvimento destas competências valorizou-se a partilha e a comunicação matemática que permitisse despertar nos alunos a curiosidade e criatividade que, mediada pelo professor em contexto sala de aula, contribuísse para a expressão da generalização em linguagem, progressivamente, mais formal.

A generalização está, como tal, associada ao desenvolvimento do pensamento algébrico, podendo evidenciar-se sob diferentes formas. A ideia mais comum de generalização estará, eventualmente, associada à generalização de ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares. Considerando que a generalização está acessível a alunos mais jovens, aceita-se que, numa fase inicial, a sua expressão possa ser identificada no discurso oral, por exemplo na resolução de uma tarefa proposta pelo professor (Blanton & Kaput, 2005). Do professor espera-se intervenção adequada, no sentido de incentivar os alunos a argumentarem e a expressarem as regularidades observadas, em linguagem matemática correta, ajudando-os a transitarem da expressão em linguagem natural para a linguagem simbólica, necessariamente apropriada à sua idade e conhecimentos. Relativamente ao processo

de generalização estarão presentes, neste trabalho, algumas das suas vertentes: aritmética generalizada, pensamento funcional, pensamento relacional, entre outras.

A aritmética generalizada está associada à identificação de regularidades numéricas, ou seja, à aplicação de competências desenvolvidas na aprendizagem da aritmética. Acrescenta-se que, quando o processo de generalização está associado ao estudo dos padrões numéricos e geométricos, ou quando se relaciona com a descoberta de relações funcionais, o que poderá acontecer quando os alunos estabelecem correspondências entre quantidades, relações recursivas, descrevem e simbolizam regras ou quando preveem resultados desconhecidos, considera-se que os alunos estão a desenvolver o pensamento funcional. Para além do pensamento funcional, o desenvolvimento do pensamento algébrico pode também estar associado ao pensamento relacional. Carpenter, Jacobs, Franke, Levi e Battey (2007) valorizam o pensamento relacional, considerando que esse se adquire com a capacidade de *olhar* para expressões ou para as equações na sua concepção mais completa, reconhecendo relações numéricas e usando propriedades entre números e operações para transformar expressões matemáticas. Este tipo de pensamento foi igualmente valorizado por Vygotsky (1987), o qual defendia que o pensamento relacional é *um produto de um alto grau de desenvolvimento cultural* (p.157) que faz parte do quotidiano das crianças, sendo-lhes acessível.

A este pensamento estão inerentes três aplicações específicas do pensamento relacional: (1) consciência do sinal de igual como indicador de uma relação; (2) utilização de relações numéricas para simplificar cálculos e (3) construção de relações gerais explícitas, baseadas nas propriedades fundamentais das operações com números. No entanto, e na perspetiva de Stephens (2006), o desenvolvimento do pensamento relacional depende de os alunos serem capazes de ver e usar possibilidades de variação entre os números de uma expressão numérica e de trabalhar a igualdade numa perspetiva relacional. Molina, Castro e Mason (2008) reforçam que o pensamento relacional está associado a princípios de equivalência e de compensação, requeridos em operações particulares e observados no trabalho desenvolvido com expressões numéricas, quando se estabelecem relações entre números e resultados. Segundo esta perspetiva, o pensamento relacional está presente em igualdades como $7 + 2 = 3 + ?$, quando os alunos interpretam o significado atribuído ao sinal de igual, à operação adição, bem como às relações numéricas existentes entre os números 7 e 3, que os podem conduzir à conclusão que se $7 = 3 + 4$ então $? = 2 + 4$.

Stephens e Ribeiro (2012) referem-se a algumas características fundamentais do pensamento relacional que são trabalhadas pelos alunos: (1) Estrutura das expressões algébricas; (2) Equivalência; (3) Variação e compensação, usando a equivalência de acordo com operações específicas; (4) Números que podem variar e (5) Generalização.

A este respeito acrescenta-se que para Molina, Castro e Mason (2008), os alunos que utilizam o pensamento relacional são capazes de considerar as expressões numéricas como um todo e analisar a estrutura matemática e os elementos mais importantes para gerarem soluções. Por sua vez, Carpenter e Franke (2001) e Fujii e Stephens (2008) referem-se à equivalência, defendendo que os alunos que entendem o sinal de igual como um símbolo relacional conseguem focar-se na estrutura de uma expressão e aplicar estratégias de resolução assertivas. Cooper e Warren (2011) associam o pensamento relacional à “quase generalização”, defendendo que este deve ser estimulado desde os primeiros anos do ensino básico, para que os alunos adquiram capacidade para expressar a generalização em linguagem natural e em notação algébrica.

No que respeita ao pensamento funcional, considera-se que este deve, igualmente, ser estimulado desde os primeiros anos do ensino básico, não só porque é acessível aos alunos mais jovens, como também por poder minimizar dificuldades sentidas durante o estudo das funções. A propósito destas dificuldades há referência à compreensão do próprio conceito que pode assumir, simultaneamente, representações diversificadas, como a tabelar, gráfica, algébrica e verbal, gerando confusão e dificuldades aos alunos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). Destacam-se, ainda, os raciocínios envolvidos neste tipo de pensamento e a linguagem e termos utilizados, considerando-se que esses são, por vezes, promotores de interpretações incorretas e dificuldades de compreensão (Sajka, 2003). Por sua vez, Saraiva e Teixeira (2009) explicitam que o desenvolvimento de uma compreensão estrutural do conceito de função pode ser comprometido quando os alunos revelam dificuldades ao nível da manipulação de símbolos e da operacionalização.

Questões relacionadas com a notação utilizada na representação das funções são também consideradas fontes de dificuldades, tais como uma igualdade semelhante a $f(x) = 2x + 3$ que, sob o ponto de vista do aluno pode representar, em simultâneo, uma fórmula, que indica como determinar a imagem de um determinado objeto (processo) ou o nome da função (objeto). Kieran (1992) enumerou algumas dificuldades manifestadas pelos alunos: (1) a utilização da função constante e da função representada por um conjunto de pontos discretos; (2) a apropriação do conceito e da representação de objetos e imagens quer na forma algébrica como na gráfica; (3) o conhecimento reduzido dos alunos quanto à forma de representar uma função e (4) a transição entre as representações gráfica e algébrica.

Blanton e Kaput (2004) consideram que os alunos mais jovens conseguem usar linguagem simbólica para modelar e resolver equações de quantidades desconhecidas e utilizar diferentes tipos de representação, fazendo uma análise funcional mais profunda do que seria de esperar. Estes investigadores defendem que os alunos que

desenvolvem o seu pensamento funcional adquirem maior flexibilidade com representações múltiplas (tabelas, gráficos, desenhos, palavras e símbolos, entre outras), resolvendo algumas ambiguidades criadas pela representação isolada (Brizuela & Earnest, 2008). No sentido de conduzirem os alunos ao desenvolvimento deste pensamento, os professores devem trabalhar o conceito de função, descrevendo-o através de palavras e símbolos recursivos, de covariação e estabelecendo relações de correspondência entre dados. O estudo de padrões recursivos e a utilização de instrumentos diversificados de representação podem ser meios eficazes para a aquisição de competências funcionais.

Considerando as dificuldades registadas pelos alunos durante a aprendizagem da álgebra e as vantagens que poderão estar associadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, Blanton e Kaput (2005) consideram que os alunos mais jovens, que são estimulados a desenvolver este tipo de pensamento, adquirem melhor compreensão do significado dos conceitos matemáticos e desenvolvem competências que contribuem para uma aprendizagem algébrica mais acessível e significativa. Naturalmente que, para despertar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos do ensino básico, o professor terá que assumir uma postura menos expositiva e mais direcionada para a preparação de aulas e seleção de materiais de cariz exploratório que incentivem os alunos a investigarem regularidades e propriedades presentes em relações e operações numéricas, a argumentarem, a formularem conjecturas e a apresentarem soluções que os conduzam à generalização e justificação matemática.

Deverá trabalhar as diferentes competências aritméticas de forma abrangente, relacionando-as, para que a aritmética deixe de ser considerada uma área estanque, passando a ser valorizada na aprendizagem algébrica. Entende-se que olhando para a aritmética com esta visão, os professores possam vir a constatar uma transição mais natural para a aprendizagem da álgebra formal.

Para tal, entende-se que o professor deve, sequencialmente: (1) introduzir o discurso algébrico em linguagem natural nas suas aulas, devendo esse ser acessível aos seus alunos; (2) promover a exploração de relações numéricas, durante um significativo período de tempo, com vista ao desenvolvimento de competências algébricas; (3) integrar conceitos e propriedades aritméticas já lecionadas, como os múltiplos e as propriedades das operações, entre outras, para desenvolver o estudo das relações aritméticas através de processos algébricos diferenciados; (4) elaborar, e dinamizar em contexto sala de aula, tarefas orientadas para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, interagindo com os alunos, quando necessário, no sentido da aquisição das competências delineadas.

A preocupação em minimizar as dificuldades manifestadas pelos alunos na transição para a aprendizagem da álgebra, e em compreender de que forma o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ajudar a resolver alguns desses problemas, tem vindo a suscitar o interesse da comunidade de investigação em educação matemática. Carraher, Brizuela e Earnest (2006), bem como Kaput (2008), referem a necessidade de os professores incentivarem a utilização de símbolos algébricos e a aplicação de novas formas de pensar e de trabalhar a aritmética, para que esta área da matemática não seja sentida como um tema desconexo da álgebra. Também em alguns currículos escolares, como os da China, Singapura, Brasil, Austrália e Estados Unidos da América, o desenvolvimento do pensamento algébrico tem sido considerado uma premissa a aplicar desde os primeiros anos do ensino básico. Esses currículos contemplam, desde a educação pré-escolar, o entendimento de padrões, de relações e funções, perspetivando-se que os alunos consigam, em anos posteriores, fazer uso de tabelas, gráficos, linguagem natural ou simbólica, para representar e analisar dados e ideias e generalizar relações identificadas.

Interessa, ainda, compreender de que forma, no contexto prático de uma sala de aula, o pensamento algébrico se pode manifestar. Cuoco, Goldberg e Mark (1996) introduziram a expressão *hábitos naturais da mente*, associando-a a uma técnica que os alunos desenvolvem para dar significado a situações quantitativas e respetivas relações e, como tal, para pensarem algebricamente. Essa expressão está associada à forma como os alunos observam, pensam e atuam matematicamente durante a exploração de uma tarefa matemática, que pode ser de natureza algébrica, e à compreensão de como essa habilidade se repercute nas restantes aprendizagens matemáticas. Estando associada ao desenvolvimento do pensamento algébrico, os hábitos naturais da mente poderão tornar-se visíveis através da generalização, abstração e formalização representada pelos alunos. Arcavi (2006) particulariza, considerando que o pensamento algébrico manifesta-se durante a aquisição de um conceito, da interpretação da variabilidade e estrutura do objeto em estudo e aquando do processo de generalização. Para o investigador, essas habilidades algébricas observam-se quando os alunos interpretam e utilizam símbolos algébricos para representarem e analisarem situações matemáticas, estudarem estruturas, compreenderem relações e funções e modelarem.

O desenvolvimento do pensamento algébrico pode assumir extrema importância com a resolução de problemas, os quais serão, também, valorizados no presente estudo. A proposta de um problema que constitua um desafio para o aluno e possua potencial algébrico, incita a interpretação e o relacionamento de dados, a seleção de formas diferenciadas de representação, designadamente instrumentos simbólicos, e a aplicação de procedimentos formais para obter um resultado, interpretá-lo e avaliá-lo. Alguns investigadores chegam a dar orientações específicas quanto ao tipo de problema

a aplicar quando se pretende estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico. Bell (1996), por exemplo, considera que para potenciar o pensamento algébrico dos alunos, os professores devem proporcionar-lhes a resolução de problemas significativos que permitam a exploração contextualizada, e em profundidade dos enunciados, a aplicação de estratégias e abordagens baseadas na compreensão das relações matemáticas e a utilização de artefactos manipuláveis, tais como *software* e calculadora. O investigador refere-se, ainda, a benefícios associados à utilização de formas de representação diversificadas, designadamente à comunicação do raciocínio matemático através da comunicação oral, do desenho e da expressão escrita. Por sua vez, os investigadores Day e Jones (1997) realçam a importância das tarefas de natureza investigativa e exploratória no desenvolvimento do pensamento algébrico, considerando que essas podem ser desenvolvidas no sentido de proporcionarem a exploração de padrões e relações numéricas e de dotarem os alunos de competências que os levem a explicitar, discutir e refletir sobre as suas ideias.

Driscoll (1999) e Kaput (1999) apresentaram um leque diversificado de opções que, na perspetiva dos mesmos, promove o desenvolvimento do pensamento algébrico. Driscoll (1999) considera a necessidade de os alunos serem incentivados a: (1) construir regras para representar funções, pois essas potenciarão o desenvolvimento de processos de pensamento, tais como o reconhecimento e a análise de padrões; (2) investigar e a (3) representar, através da generalização de exemplos particulares, da análise de processos e relações de mudança, procurando argumentos para perceber como, ou por que motivo, as relações e/ou os processos não funcionam. Por sua vez, Kaput valoriza a resolução de atividades matemáticas que proporcionem: (1) a generalização e formalização de padrões e restrições; (2) a manipulação de formalismos conduzida sintaticamente, ou seja, orientada no sentido de promover a compreensão e a aquisição de competências associadas à linguagem simbólica; o estudo de (3) estruturas abstratas, de (4) funções, relações e variações conjuntas e (5) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos. Kaput defende, sobretudo, a análise, descrição e expressão simbólica de padrões e relações numéricas, considerando que essas oferecem benefícios para o desenvolvimento da linguagem formal e para a apropriação de formas diferenciadas de representação. Radford (2010) valoriza, igualmente, o estudo de padrões, pelo facto de esses exigirem que o aluno identifique características comuns e generalize regras a partir de situações concretas.

Radford (2013) acrescenta maior significado ao conceito de pensamento algébrico, apresentando características que o diferenciam do pensamento aritmético. Para o investigador, a generalização algébrica adota traços particulares, tais como indeterminação, denotação e analiticidade, sendo que a: (1) indeterminação surge na presença de quantidades indeterminadas, tais como incógnitas e variáveis; (2) denotação diz respeito ao processo de nomeação ou simbolização de quantidades

indeterminadas, a qual se pode manifestar na utilização de linguagem natural, gestos, signos, entre outras representações e a (3) analiticidade ocorre quando as quantidades indeterminadas são manipuladas como se tratassem de valores conhecidos, como acontece quando se operacionalizam variáveis à semelhança do que se faz com os números.

Em Singapura, o desenvolvimento do pensamento algébrico é promovido através de metodologias como o *model methods* e o *pictorial equations*, as quais são exploradas no sentido de promoverem a análise da parte e do todo e a capacidade de generalizar e especificar. A metodologia *model methods – drawing* traduz-se na elaboração de um desenho/diagrama que transmite a informação relevante contida no enunciado do problema, que, ao ser explorada por alunos que ainda não tenham tido contacto com linguagem simbólica, permite a resolução de problemas algébricos. Segundo esta perspetiva, os alunos que resolvem *word problems* através da construção de equações pictóricas, com recurso a esquema pictórico que representa a variável, fazem um uso menos abstrato das variáveis que facilita a identificação de operações implicadas e a apresentação de soluções para problemas com conteúdo algébrico. No ponto de vista do professor, esse poderá, através da análise do desenho/diagrama construído pelos alunos, refletir sob as formas de pensamento utilizadas e compreender a natureza das dificuldades ou incorreções cometidas. Um aluno que desenvolva esta habilidade poderá, como tal, resolver um problema de natureza algébrica sem que domine o uso de linguagem simbólica e procedimentos algébricos. Através da figura que se segue, exemplifica-se a resolução de um problema através da metodologia *pictorial equations*:

O Martim e o Tiago juntaram, em conjunto, 600 € para gastarem nas férias de verão.
 O Martim juntou mais 100 € que o Tiago.
 Que quantia juntou cada um deles?

Resolução:

Comparem-se as quantias que cada amigo juntou:

Martim 100 €

Tiago

Quantia que os dois amigos juntaram:

+ + 100 € = 600 €

+ = 500 €

= $\frac{500}{2} = 250$ €

Resposta: O Tiago juntou 250 € e o Martim juntou 350 €.

Figura 2.3 – “Equações” pictóricas

No currículo singapurense a resolução de *word problems* – problemas enunciados em linguagem natural – aplica-se a todos os níveis de ensino, sendo que modelos como o *drawing* funcionam como ferramenta para conduzir os alunos à resolução de problemas aritméticos e algébricos, geralmente associados aos conceitos de fração, razão e percentagem. O modelo *drawing* foi criado em 1980, em Singapura, para ajudar os alunos a resolverem problemas desafiantes ou *word problems* de natureza algébrica. Este modelo despertou interesse de outros investigadores, considerando tratar-se de um método menos exigente no recurso à memória, comparativamente com o método algébrico simbólico. Considera-se que os alunos providos de sentido de visualização de um problema compreendem melhor a sua estrutura base e, conseqüentemente, terão maior facilidade em resolvê-lo. Defende-se, também, que as figuras, sejam gráficos, ilustrações, desenhos ou fotografias, imagens – representação visual do objeto – e objetos utilizados para resolver problemas serão, natural e progressivamente, substituídos por outros mais abstratos. No seguimento da sua aprendizagem, os alunos adquirem capacidade para usar valores desconhecidos, diferenciando os conceitos de parte e todo. O trabalho desenvolvido em torno das incógnitas parece promover uma transição mais suave para a álgebra, pois incentiva a exploração de estruturas em padrões, a generalizar e a definir regras. Esta metodologia está, igualmente, associada ao desenvolvimento dos *hábitos naturais da mente*, pois permite: (1) examinar relações de quantidade sob diferentes perspetivas; (2) resolver problemas nas vertentes aritmética e algébrica e (3) inverter operações.

No que respeita ao segundo *hábito da mente*, entende-se que os alunos devem aprofundar a compreensão das relações quantitativas e apreciar a abordagem das equações na resolução de problemas. Para tal, devem ser estimulados a usar e a comparar as soluções algébrica, aritmética, pictórica e *ratio*, visando uma compreensão profunda da relação entre quantidades. Considera-se que ao usarem simultaneamente, na resolução de um problema, uma abordagem aritmética e algébrica, os alunos passam a diversificar as estratégias e a forma de resolverem problemas, aprofundando a compreensão das relações quantitativas, a valorizar a abordagem algébrica e a adquirir flexibilidade na resolução de problemas. Analogamente, Carpenter, Franke e Levi (2003) defendem que os alunos que trabalham competências aritméticas no sentido do desenvolvimento algébrico adquirem maior habilidade na seleção e utilização de ferramentas de representação e linguística, de compreensão das estruturas matemáticas e dos símbolos e da perceção dos objetos, melhorando a compreensão da matemática.

O terceiro *hábito da mente*, associado à inversão das operações, intenciona melhorar a capacidade dos alunos para resolverem operações. No que respeita à simbologia, sugere-se que os alunos mais jovens explorem propriedades do tipo $a + b = b + a$, estabelecendo relações e operações com números particulares.

Estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir da aritmética, contribuirá para uma aprendizagem mais natural e significativa da álgebra e para o reforço de competências aritméticas adquiridas. Para promover essas capacidades, o professor deve conduzir a sua aula no sentido de estimular a compreensão das relações, o uso de linguagem simbólica, a generalização e a utilização de representações diversificadas. As tarefas desenvolvidas devem promover o aprofundamento de conhecimentos aritméticos, a exposição de raciocínios e a generalização, surgindo do estudo de padrões, do trabalho exploratório e investigativo e da resolução de problemas com potencial algébrico. Os símbolos algébricos deverão ser introduzidos gradualmente, durante os primeiros anos do ensino básico, para que deixem de ser encarados como inscrições sem significado e auxiliem o aluno na comunicação e na resolução das tarefas colocadas (Kaput, 2008).

O currículo escolar português também teceu, através do programa curricular de 2007 (ME-DGIDC, 2007), algumas considerações acerca de quando e como se deve promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, dando indicações específicas para os primeiros anos do ensino básico. De acordo com este programa, o desenvolvimento do pensamento algébrico deve ser estimulado, transversalmente, desde os primeiros anos do ensino básico, através da exploração de regularidades generalizáveis.

Síntese. O desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser estimulado através da observação e identificação de relações e regularidades, procurando-se trabalhar a aritmética no sentido da generalização. Os ambientes favoráveis ao referido desenvolvimento são os que estão associados à partilha e comunicação, de conhecimentos e dos raciocínios desenvolvidos, e que estimulam o desenvolvimento da criatividade. O pensamento relacional e funcional são elementos constituintes do pensamento algébrico e estão, entre outras características, associados às relações que se estabelecem entre números e suas operações, às relações de equivalência, às representações e, em particular, à linguagem simbólica. Considera-se que os alunos que desenvolvem o pensamento algébrico desenvolvem melhor compreensão dos conceitos matemáticos e competências que lhes permitem adquirir uma aprendizagem algébrica mais significativa. O professor terá um papel importante no desenvolvimento das referidas habilidades, designadamente aquando da preparação das tarefas a desenvolver e durante a resolução das mesmas.

2.2 A dimensão individual, social e cultural da aprendizagem

A aprendizagem deverá ser significativa nas suas diferentes vertentes, sendo fundamental uma preocupação constante com as necessidades do aluno, com aquisição cultural e com as respostas que, num futuro próximo, deverão ser dadas à sociedade. Nesse sentido, o professor deve preocupar-se em identificar que tipo de matemática os alunos podem e devem aprender, tendo consciência de que essa aquisição depende também do meio social e cultural em que esses estão inseridos.

Romberg e Kaput (1999) consideram que para as crianças estarem preparadas para os desafios do século XXI, elas deverão usufruir de um ensino que as conduzam para além da aprendizagem da aritmética e da fluência do cálculo. A mediação pode influenciar a aprendizagem e, de alguma forma, contribuir para a compreensão da essência da estrutura matemática.

2.2.1 A influência do professor no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico

O modelo de aprendizagem foi, durante muito tempo, o de transmissão de conhecimentos, variável de acordo com o saber e concepções dos professores. Neste modelo, os alunos recebiam, guardavam e, posteriormente, reproduziam a informação recebida do professor. Contrariamente a este ponto de vista, Vygotsky (1986) citado por Kozulin (2003), defendeu um modelo de aprendizagem com enfoque na mediação, que neste trabalho estará presente na relação estabelecida entre professora e alunos, entre alunos e entre alunos e artefacto, e na ideia de *scaffolding*, sob a qual a aquisição e mobilização de competências matemáticas suportam o desenvolvimento de uma nova construção matemática. Neste modelo privilegiam-se o conjunto de atividades que, organizadas, promovem novas aprendizagens, a mediação e a interação com o meio ambiente, de modo que signos, símbolos, textos, gráficos, entre outras ferramentas psicológicas ocorridas durante o processo de abstração sejam também valorizadas. O professor assume uma posição diferente, mas não menos importante ou trabalhosa, neste processo de ensino e aprendizagem. O trabalho desenvolvido por si aproxima-se, segundo Ponte (2005), do ensino exploratório que apela à reflexão do aluno quando este realiza tarefas de natureza exploratória e investigativa.

Em relação à atividade desenvolvida pelo professor, Andrade e Saraiva (2012) valorizam também o papel do professor na construção do conhecimento, referindo que o *interesse dos alunos é estimulado pelas tarefas matemáticas selecionadas pelo professor* (p.2).

Esse papel não será linear, uma vez que será necessário que o professor mobilize concepções, sentimentos e conhecimento prático, para além de teorias e técnicas.

Promover o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos do ensino básico torna-se um desafio, tanto para os alunos como para os professores. Na perspectiva do professor, há que ter em atenção não se adotarem modelos tradicionais, desconectados de símbolos e procedimentos, e pouco estimuladores do pensamento algébrico (Ball, 1990; Ma, 1999). Importa que proporcionem a realização de experiências que permitam reconhecer e relacionar estruturas matemáticas, para que as ideias desencadeadas através do raciocínio se assumam como objetos matemáticos (Romberg & Kaput, 1999), e que adicionem aos problemas aritméticos rotineiros características algébricas, conduzindo os alunos à construção de padrões, à conjectura, à generalização e à justificação de relações matemáticas (Blanton & Kaput, 2003). Realça-se, igualmente, o papel de mediador que se inicia com a elaboração da tarefa e pode culminar com a discussão e síntese de ideias, sendo fundamental, segundo Basso (1998) que o professor esteja consciente do que interessa potenciar no seu aluno e definir objetivos que possam ser cumpridos. Ainda em relação à mediação, Vygotsky (1986), citado por Kozulin (2003), e Leontiev (1978) enfatizaram o carácter mediador do trabalho do professor no processo de apropriação dos produtos culturais. Segundo aqueles investigadores, a mediação realizada pelo professor, entre o aluno e a cultura, objetiva levar os alunos ao entendimento da realidade social e à promoção do desenvolvimento individual.

Gimeno (1989) resume a atividade do professor a três funções essenciais: (1) *imitação-mantenção*, momento em que reproduz as inovações orientando-se pelo currículo, manuais escolares, entre outros documentos; (2) *mediação*, situação em que assume o papel de mediador e se adapta às inovações propostas e condições da escola onde leciona, adequando os recursos que lhes estão acessíveis; (3) *criativo-gerador*, fase em que diagnostica problemas, formula hipóteses de trabalho, encontra soluções adequadas e experimenta-as, regulando a sua prática.

Andrade e Saraiva (2012) acrescentam que *o interesse dos alunos é estimulado... pelas situações e contextos... resolução de problemas... tarefas de exploração e investigativas... o que pode promover nos alunos o desenvolvimento do seu próprio pensamento algébrico, da sua capacidade de interpretar e de manipular os símbolos matemáticos, e as relações existentes entre eles, bem como desenvolver a sua capacidade em lidar com as estruturas algébricas, representando e raciocinando de uma forma progressivamente mais abstrata* (pg.2). Estes autores valorizam igualmente a resolução de problemas que envolvam os alunos em explorações matemáticas e no trabalho investigativo, a favor do desenvolvimento da expressão criativa e da autonomia.

O trabalho desenvolvido pelo professor, designadamente o incentivo à utilização de artefactos e à construção de signos matemáticos está, também, presente no ciclo didático descrito por Bussi e Mariotti (2008), tratando-se de uma sequência de ensino estruturada para se aplicar um ciclo diferenciado de atividades que visam o desenvolvimento de diferentes componentes do processo semiótico. Segundo esta perspectiva, quando os professores utilizam um artefacto com a intenção de promoverem a aquisição de um novo conhecimento matemático, esse pode ser considerado uma ferramenta de mediação semiótica utilizado para realizar uma tarefa, mas também para dar cumprimento à mesma. A implementação do ciclo didático compreende algumas características particulares, tais como: (1) o incentivo à utilização do artefacto que acontece, geralmente, no início do ciclo didático; (2) as atividades com artefactos que podem ser dinamizadas em pares ou em pequenos grupos de trabalho e promoverem a produção de: (i) signos individuais, tais como desenhar, esquematizar, escrever, entre outras representações e (ii) a produção de signos coletivos, tais como narrativas, mímicas, produção coletiva de textos e de desenhos e discussão coletiva. Para as investigadoras, o objetivo principal do professor deverá ser o de fomentar a: (1) construção de signos matemáticos, através de contribuições individuais do professor ou de outros alunos mais habilidosos e a (2) exploração das potencialidades semióticas, produzidas pelo trabalho desenvolvido com o artefacto concreto. O professor terá assim um papel importante na evolução dos signos, aspeto que se reflete em quatro ações essenciais que esse deverá aplicar: (1) pedir para reverem sequências da tarefa; (2) direcionar a atenção do aluno para determinados aspetos relacionados com o uso de artefactos; (3) solicitar uma síntese de conclusões isoladas e (4) sintetizar o todo.

Como reflexo das considerações teóricas supracitadas, das conceções e experiência profissional da autora desta investigação, valoriza-se, neste estudo, o papel do professor na preparação das tarefas, na criação de um ambiente favorável à aprendizagem e na condução do processo de mediação semiótica compatível com o ciclo didático descrito por Bussi e Mariotti (2008). Acrescenta-se, porém, maior significado dado à implementação das tarefas, preferencialmente exploratórias, que intencionam promover o sentido investigativo e privilegiar a resolução de problemas, para além de favorecerem a criatividade.

Enquanto agente mediador, valoriza-se o papel do professor aquando da: (1) preparação da tarefa, a qual deve ser exequível quanto aos objetivos delineados, conteúdos apresentados e tempo de duração; (2) apresentação da tarefa aos alunos, no sentido em que deverá motivá-los para a sua realização e esclarecer dúvidas que possam comprometer a execução da mesma; (3) condução do trabalho desenvolvido pelos alunos, no sentido em que, sendo necessário, deve incentivar a exposição oral e a representação de ideias, o esclarecimento de dúvidas dando, se necessário, algumas

sugestões que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio; (4) conclusão da tarefa, conduzindo os alunos à revisão e reflexão dos resultados apresentados, visando a síntese das conclusões apresentadas.

Entende-se que o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico não pode ser entendido como um sistema de antecipação de conceitos algébricos e manipulação de regras, mas antes como um incentivo à identificação de relações, exploração de propriedades, representação do raciocínio, argumentação e generalização, em que a linguagem matemática é apresentada, progressivamente, com uma estrutura mais formal. O incentivo à representação do raciocínio ajudará, também, o professor a identificar incompreensões ou incorreções e, conseqüentemente reajustar metodologias e estratégias aplicadas.

2.2.2 A influência das ferramentas psicológicas no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico

Promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos mais jovens representa para Vygotsky (1987), citado por Kozulin (2003), dotar esses alunos de ferramentas psicológicas que lhes permitam adquirir capacidade para compreender, relacionar e generalizar. Para o investigador, que defende que a construção do novo conhecimento é um processo individual e sociocultural, essas ferramentas compreendem a alfabetização, a mediação e a atividade de aprendizagem organizada. Para que um aluno incorra no processo de alfabetização, o professor deve muni-lo de capacidade para decodificar informação contida nos enunciados escritos e identificar e estabelecer relações. Considera-se que a mediação poderá assumir dimensão humana quando estiver associada à atuação do professor, e simbólica, quando for influenciada pela utilização de ferramentas icônicas.

A mediação assume dimensão humana quando se tem presente a atuação do professor e a influência que esse tem no processo de aprendizagem dos seus alunos. Segundo esta perspectiva, importa identificar como o aluno compreendeu e adquiriu o novo conhecimento – a ferramenta psicológica – e a utilizou para pensar e adquirir outras competências, bem como a percepção que tem dessa aquisição – função psicológica internalizada. O professor desempenha um papel muito importante na formação de conceitos, quer por desafiar e ampliar a construção de novos conhecimentos, como também por fazê-lo de forma organizada.

A mediação simbólica ocorre por meio de dois elementos, instrumentos e signos, que proporcionam a comunicação entre professor e alunos e entre alunos. Os instrumentos são ferramentas que servem para transformar os objetos ou o meio, mediando a ação sobre os objetos. Já os signos agem como um instrumento da atividade psicológica,

sendo a linguagem o signo mediador mais valorizado, uma vez que contribui para o desenvolvimento do trabalho com os objetos. É por meio da linguagem que as funções psicológicas superiores são socialmente formadas e culturalmente transmitidas, estando a essa subjacente a capacidade de abstração, de análise e de generalização de características observadas.

Para Vygotsky (1987), citado por Kozulin (2003), a aprendizagem é influenciada por mediadores simbólicos e pela sua apropriação, enquanto ferramentas matemáticas. Essas ferramentas, psicológicas e simbólicas, promovem sucesso quando são utilizadas em conjunto e se não forem concebidas enquanto ferramentas psicológicas, ou se não forem mediadas, serão inúteis.

2.2.3 A importância da mediação semiótica no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico

Segundo Vygotsky (1987), citado por Kozulin (2003), o desenvolvimento cognitivo do ser humano é promovido pelas relações sociais interiorizadas por si e resulta do trabalho desenvolvido e da relação estabelecida com os objetos culturais, pelo que o contexto social de aprendizagem (conhecimentos, dificuldades, interesses, cultura, entre outros), valorizado no presente estudo, terá influência sobre a aprendizagem dos alunos. Essa aprendizagem passará, naturalmente, por processos constantes de ação e de comunicação que emergem de sistemas de mediação, por vezes complexos.

No presente trabalho, a mediação pressupõe a necessidade de conduzir os alunos à construção do novo conhecimento matemático, a partir de conhecimentos que esses já possuem. Essa mediação não se centra, apenas, na condução das tarefas durante a sala de aula e no esclarecimento de eventuais dúvidas, como também na elaboração da própria tarefa, através da qual se pretende estimular os alunos à observação e investigação de regularidades e relações, no sentido da generalização e da aplicação de formas diferenciadas e criativas de resolução.

Bussi e Mariotti (2008), valorizando a mediação semiótica, também se referem ao processo de internalização descrito por Vygotsky. Para estas investigadoras a mediação semiótica constitui um processo de construção individual, concebido pela partilha de experiências sociais e que tem uma dimensão comunicacional e envolve a interpretação e a produção de signos. As investigadoras consideram que a relação entre os processos internos – cognitivos – e os externos – interação social – é estreita e forte, assumindo dois aspetos relevantes: (1) é essencialmente social, tendo uma dimensão comunicacional e (2) é guiado por processos semióticos, envolvendo a interpretação e a produção de signos. Relativamente à utilização de signos, estes poderão estar

relacionados, essencialmente, com a resolução da tarefa e com o processo de interpretação e de comunicação desenvolvidos pelos alunos.

Segundo esta perspectiva, e considerando que a aprendizagem é também uma construção social, o professor deve preocupar-se com a forma como elabora determinada tarefa e como a conduz em contexto sala de aula. Essa tarefa deverá contemplar a mediação semiótica, valorizando o conhecimento que o aluno já possui, a habilidade para explorar e processos alternativos e criativos de resolução. A construção centra-se, como tal, no conhecimento que o aluno possui e mobiliza, na mediação que estabelece com o artefacto desenvolvido e na partilha e comunicação que estabelece com o grupo de pares e com o professor.

Relativamente ao processo de ensino e aprendizagem, Vygotsky (1987) faz também referência ao uso de artefactos, considerando que esses estão direccionados para o exterior, e às atividades mentais, suportadas e desenvolvidas por meio de signos que são produtos dos processos de internalização e que estão orientadas para o interior. Nesse âmbito, o investigador valorizou a mediação como forma de desenvolvimento do ser humano, destacando dois mediadores – signos e instrumentos. Os signos serão os mediadores na formação da consciência e os instrumentos serão os reguladores das ações sobre os objetos.

Os signos, também designados pelo investigador como "instrumentos psicológicos", são marcas externas que permitem fazer a interpretação da realidade e auxiliam os alunos nas tarefas que requerem memória ou atenção, estando orientados para o próprio sujeito e associadas ao controlo de ações psicológicas.

Rabardel (1995) distinguiu artefacto de instrumento, partindo da análise individual das potencialidades do artefacto. Definiu artefacto como sendo o material ou objeto simbólico utilizado na realização de determinada tarefa e que possui potencialidades ao nível prático, podendo contribuir para o desenvolvimento cognitivo. Acrescenta que o instrumento é uma entidade mista constituída por artefactos e componentes esquemáticas – esquemas de utilização que surgem da utilização dos artefactos – que evoluem através de um processo longo e complexo designado por génese instrumental. Os esquemas de utilização são elaborados progressivamente ao usar-se o artefacto na realização de uma tarefa concreta, sendo, como tal, uma construção individual com forte ligação ao contexto dentro do qual ele é originado e se desenvolve. A génese instrumental constitui um longo e complexo processo de elaboração e evolução dos instrumentos, podendo ser articulada em dois processos: (1) instrumentalização, ou seja, evolução dos diferentes componentes do artefacto, verificando-se o reconhecimento progressivo das suas potencialidades e limitações e (2) instrumentação, relacionado com a emergência e desenvolvimento dos esquemas de

utilização. Os dois processos são orientados do sujeito para o artefacto e vice-versa, dependendo das duas faces. O investigador considera ainda que a seleção do artefacto nunca é isenta, pois pode intencionar a reorganização e mobilização de capacidades cognitivas do aluno que possibilitem a resolução de determinado problema. No presente estudo, o artefacto desenvolvido pela professora procura conduzir os alunos à construção do novo conhecimento matemático e, em particular, ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Bussi e Mariotti (2008) utilizam o termo artefacto num contexto geral, considerando que esse abrange diversos tipos de objetos produzidos pelo ser humano, tais como sons e gestos, utensílios e apetrechos, expressão oral e escrita, textos e livros, instrumentos musicais e científicos e ferramentas tecnológicas de informação e comunicação. Segundo esta perspectiva comunicação, oral e escrita, assumem um papel central entre os artefactos produzidos e elaborados pelo ser humano, sendo responsável pela evolução das formas de pensamento. Por sua vez, as investigadoras estabeleceram uma analogia entre artefacto e signo, considerando que ambos estão implicados no processo de mediação, no sentido em que o artefacto pode promover a utilização ou criação de signos associados ao conteúdo matemático que se pretende explorar. Por esse motivo valorizam os signos, considerando que esses podem ser utilizados intencionalmente pelos professores para explorarem processos semióticos e promoverem a aquisição de significados por parte dos alunos, designadamente a construção do novo conhecimento matemático. Por sua vez, consideram também a existência de uma ligação particular entre o artefacto e a tarefa e entre a tarefa e o conhecimento matemático específico, designando essa ligação por polissemia de um artefacto.

O processo de mediação semiótica é valorizado no presente estudo, estando associado ao desenvolvimento do pensamento algébrico e à produção individual e coletiva do novo conhecimento. Os alunos utilizam como artefacto principal a tarefa desenvolvida pelo professor, intencionando a identificação de regularidades, a criação de relações numéricas e a partilha de conhecimentos e raciocínios. A tarefa, mediada pelo professor, envolve a interpretação e produção de signos que podem contemplar o uso de linguagem simbólica, conceitos e partes estruturais da própria tarefa. O artefacto, tarefa, proporciona a utilização e desenvolvimento de signos associados à construção pretendida e promove a aquisição de significados por parte dos alunos.

Síntese. A mediação estabelecida pelo professor na construção do novo conhecimento matemático, incentivando a utilização de artefactos e a construção de signos matemáticos, e favorecendo a comunicação e a partilha de conhecimentos e raciocínios desenvolvidos pelos alunos, é essencial para a construção do novo conhecimento matemático. No processo de construção privilegia-se o artefacto selecionado ou construído pelo professor, bem como os instrumentos desenvolvidos pelos alunos

durante o processo de construção e que permitiram a construção de novos signos matemáticos.

2.3 O modelo teórico RBC+C.

A influência do contexto na abstração e na construção do conhecimento

Compreender de que forma um aluno constrói um novo conhecimento, como ocorre o processo de abstração durante a realização de uma tarefa e que influência tem o contexto nessa construção, poderá auxiliar o professor na identificação de dificuldades que, sendo resolvidas, proporcionarão o desenvolvimento do aluno. No presente capítulo, valoriza-se o processo de abstração, considerando-se que se trata de uma atividade de reorganização vertical de construções concebidas e de novos significados matemáticos atribuídos pelos alunos, que os conduzem a uma nova *Construção* (Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz, 2009). Pretende-se compreender de que forma evolui o processo de abstração dos alunos durante a construção do novo conhecimento matemático, valorizando-se o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C (Dreyfus et al, 2001) e a influência da mediação nessa construção.

Realça-se, na construção do novo conhecimento matemático, o contexto em que ocorre o processo de abstração, estando esse associado à mediação estabelecida pela professora e verificada entre alunos, bem como à relação estabelecida entre alunos e o artefacto selecionado ou desenvolvido pelo professor.

2.3.1 O processo de abstração

A aprendizagem matemática exige do aluno imaginação para além da técnica sendo que, segundo Almeida (1994), *a assimilação de uma técnica é sempre menos problemática que a aquisição da faculdade de imaginar* (pg. 1). Este investigador defende que a aprendizagem da matemática resulta essencialmente da imaginação, pelo que é essencial que o professor estimule a criatividade dos seus alunos. Imaginar significa criar imagens na mente, esquematizando-as, o que torna este processo essencial para o crescimento da matemática. O alimento dessa abstração poderá resultar da observação que o aluno faz, mas é também influenciado pela inspiração que o conduz a ver algo que não se vê. No sentido de se exemplificar o que é pensar abstratamente, considere-se que levantamos três dedos de uma mão e questionamos um aluno sobre quantos dedos ele vê. Se esse aluno responder cinco dedos, então significa que está a pensar abstratamente, ou seja, está a ver para além da imagem que observa. Para o autor, *o maior bloqueio à aprendizagem da matemática e a um*

verdadeiro sucesso escolar é hoje em dia a falta de estímulo à imaginação de que decorre a dificuldade em abstrair (pg. 7).

Pierce (1958) utilizou a palavra abstração para se referir à associação que se faz entre conhecimentos adquiridos – *associação por semelhança* – para se produzir novo conhecimento matemático. Referiu tratar-se de um processo que se origina no *pensamento em direção à generalização* (pp. 173/ 174), dando o exemplo de uma partícula que, ocupando determinada posição, movimenta-se, dando origem a novas estruturas. Segundo o investigador, a abstração é relevante no desenvolvimento do raciocínio matemático, estando relacionada com a *associação por semelhança*, a *inteligibilidade* (explicação apresentada) e com a generalização. Por esse motivo, aceita-se que o processo de abstração seja considerado como uma atividade fundamental para o processo de matematização (Freudenthal, 1991, Gravemeijer, 1995), o qual está empiricamente relacionado com a generalização de casos particulares. Ainda a respeito da abstração, acrescenta-se que um nível de abstração e de generalização elevado pode fomentar uma melhor compreensão de procedimentos, pelo que se devem orientar as crianças para um nível mais abstrato e geral da compreensão matemática. Constata-se que o termo abstração tem vindo a adquirir novos significados (Ohlsson & Lehtinen, 1997), evoluindo de acordo com o conhecimento que se vai adquirindo acerca de como se aprende e que fatores poderão influenciar a aprendizagem.

Neste estudo, considera-se, tal como Dreyfus et al. (2001), que o processo de abstração ocorre mediante a reorganização vertical de construções matemáticas adquiridas e que dão expressão a uma nova construção. Nesse processo, os alunos integram e combinam conhecimentos adquiridos de modo a reunirem informação que, no seu conjunto, permita dar resposta e justificação às questões colocadas.

Relativamente às características evidenciadas pelo processo de abstração, Piaget (1977) considerou existirem dois tipos de abstração: (1) empírica, relacionada com as características dos objetos disponíveis para os sentidos e (2) reflexiva, resultante das coordenações das ações do sujeito e relacionada com a experiência lógica matemática. Considerando a forma empírica, Piaget (1977) confere-lhe três características essenciais, indicando que: (1) deriva do reconhecimento de semelhanças entre um conjunto de casos particulares; (2) é um processo de descontextualização, separado das circunstâncias de tempo e lugar e (3) desenvolve-se ascendentemente, partindo do concreto para o abstrato. Relativamente ao desenvolvimento do pensamento abstrato considerou-se, neste estudo, que o processo de abstração poderá partir da identificação de relações particulares e que o contexto exerce influência sobre este. Considera-se ainda que características individuais, do grupo, do professor, das tarefas, do ambiente de aprendizagem e dos artefactos utilizados influenciam o processo de abstração,

pondendo favorece-lo ou condicioná-lo. Entende-se que na construção do novo conhecimento matemático, o concreto e o abstrato estão interligados, não existindo um processo obrigatoriamente ascendente (Davydov, 1990), posições também defendidas pela autora deste estudo.

No que respeita à forma de abstração reflexiva referida por Piaget (1977), essa deriva das coordenações das ações do sujeito sobre o objeto, relaciona-se com a experiência lógica matemática e estará presente em todos os estádios de desenvolvimento. A abstração reflexiva é constituída por dois processos: o reflexo, projeção de determinado conhecimento para um plano superior de cognição, e a reflexão, processo de reorganização de conhecimentos. Este tipo particular de abstração é construída na mente do sujeito quando esse estabelece e coordena as relações entre os objetos.

2.3.2 O processo de ascensão do abstrato para o concreto

Segundo Davydov (1988), quando os alunos iniciam a exploração de um novo conteúdo, proposto pelo professor, eles começam por identificar uma relação geral, por vezes reconhecida em conteúdos já lecionados, construindo uma abstração substantiva do mesmo.

De acordo com esta perspetiva, a nova construção não é apresentada pelo professor na forma de produto final, mas sim como um conceito geral e abstrato, pelo que a apreensão do conhecimento teórico-científico parece transitar do abstrato para o concreto. Nesse sentido, a abstração surge no momento da análise, durante o trabalho desenvolvido com os objetos e quando o aluno procura compreender o aspeto geral do problema colocado. A abstração parece surgir numa fase inicial, que se encontra pouco desenvolvida, e que se caracteriza pela observação de semelhanças e diferenças e pelo entendimento das relações essenciais à compreensão e à concretização. As relações estabelecidas pelos alunos nesta fase são mais gerais e vão tornando-se mais particulares à medida que o processo de abstração evolui e o aluno se aproxima dos objetos matemáticos pretendidos. Por sua vez, o concreto corresponderá à fase final – síntese – resultando da análise e da representação do objeto. O concreto resultará, por sua vez, do desenvolvimento de uma forma consistente e estruturada do processo de abstração.

No que respeita ao trabalho desenvolvido com o objeto, esse será trabalhado no sentido de se estabelecerem conexões internas para gerarem o concreto, de modo que o pensamento teórico a ele associado caminhe no sentido da generalização matemática. Ao aprofundarem o seu conhecimento em relação ao objeto, compreendendo como a relação geral identificada se manifesta em situações particulares, os alunos passarão, então, do processo de abstração à generalização das relações identificadas. De acordo

com esta perspectiva, para reproduzir o concreto é indispensável uma abstração inicial que ocorre durante o trabalho desenvolvido com os objetos, através da avaliação das suas características e potencialidades.

Davydov (1988) utilizou a expressão *ascensão do abstrato ao concreto* para transmitir a ideia de que a construção de um novo conhecimento ocorre por transição do concreto empírico para o concreto pensado – real com atribuições de significado – através do processo de abstração. Durante este processo o aluno incorpora ações mentais, capacidades e procedimentos lógicos, que interligados produzem novos conhecimentos. O trabalho desenvolvido com os objetos torna-se, então, progressivamente mais estruturado e consistente até ascender ao concreto. Realça-se que ao utilizar a expressão *ascensão do abstrato ao concreto* não se pretende dizer que o pensamento transita do abstrato – *plano sensível* – para o concreto – *plano racional* – mas antes que esse se move no plano abstrato.

Face ao exposto, a construção do novo conhecimento matemático resultará do processo de abstração, o qual precede aos conhecimentos particulares e concretos do aluno. Valorizando o processo de abstração na construção do novo conhecimento matemático, Dreyfus, Hershkowitz e Schwarz (2015) reforçaram a ideia de que não há uma passagem direta do concreto para o abstrato, mas antes a transição de uma forma de abstração pouco desenvolvida para outra mais desenvolvida.

Dreyfus et al. (2001) acrescentaram que a abstração resulta da reorganização vertical de conhecimentos matemáticos já consolidados e utilizados pelos alunos para construir novos conhecimentos (Treffers & Goffree, 1985). Essa reorganização vertical compreende a integração e combinação de construções que não foram, necessariamente, concebidas em sequência, mas que juntas reúnem um conjunto de conhecimentos e comportam-se como blocos de construção que se juntam para conceber a nova construção. O modelo epistêmico *RBC+C* (Dreyfus et al., 2001) valoriza o desenvolvimento das ações epistêmicas durante o processo de abstração que conduzam o aluno ao novo conhecimento matemático.

Segundo Dreyfus (2012) o modelo teórico *AiC*, *Abstract in Context*, adota a ideia da matematização vertical e da interligação de ações epistêmicas no desenvolvimento do processo de abstração e na construção do novo conhecimento matemático. Segundo esta perspectiva, a construção passa por três fases: (1) a necessidade da nova construção, (2) o aparecimento dessa construção e (3) a consolidação da construção. O modelo teórico e metodológico *RBC* (Dreyfus et al., 2001) permite analisar o aparecimento da nova construção através das ações epistêmicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C).

No presente estudo considera-se, igualmente, que o contexto influencia o desenvolvimento do pensamento algébrico, dependendo das características individuais do aluno e dos artefactos – linguagem, procedimentos, ferramentas – que terá à sua disposição.

2.3.3 A mediação na construção do novo conhecimento matemático

A mediação parece influenciar, como já referido na secção anterior, a construção do novo conhecimento matemático, no sentido em que o indivíduo relaciona-se com os objetos através da mediação de artefactos, ferramentas ou signos culturais.

Entende-se que a figura seguinte pode refletir como o contexto, em particular a mediação estabelecida entre indivíduos e entre esses e o ambiente, pode descrever como o aluno constrói o novo conhecimento matemático.

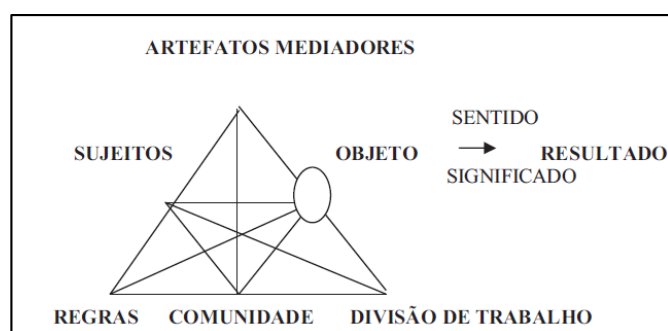


Figura 2.4 - Estrutura de um sistema de atividade humana
Fonte: Engeström (2002, p.36)

Considerando a aquisição do novo conhecimento matemático, os alunos (sujeito) serão o foco a analisar, os artefactos mediadores serão os objetos que estes utilizam para atingirem o objetivo delineado e o objeto, o conteúdo matemático sobre vão agir, mediado por ferramentas e por interações com o professor e outros alunos.

De acordo com a figura anterior, a construção do novo conhecimento matemático está associada à ideia de mediação e sob a influência do contexto, considerando-se que a atividade humana gere-se por ações, ou por um conjunto de ações, e que a ela está subjacente um motivo (Vygotsky, 1987). A relação entre o sujeito e o objeto é mediada pelas suas condições, objetivos e meios, e mediada pelos artefactos, tal como acontece com as tarefas desenvolvidas pelo professor, as quais influenciam os alunos na mudança de significados e na construção do novo conhecimento. O sujeito interage com o objeto através da atividade, sendo que o objeto modifica a atividade do ser humano e este último cria uma imagem psicológica e individual do mesmo.

A construção do conhecimento não se centra no indivíduo, valorizando-se também o contexto em que ocorre a aprendizagem. Para Engeström (2002), a figura anterior

representa as ações individuais e coletivas. Nessa, a figura oval representa o objeto, indicando que as ações orientadas para ele são caracterizadas por ambiguidade, surpresa, interpretação, busca de sentido e potencial para mudanças. Os artefactos mediadores – calculadora, *software*, escrita, fala, gestos – serão utilizados pelo sujeito para que ele atinja determinado resultado, e o objeto será o material bruto sob o qual o sujeito irá agir, mediado em interações contínuas com as outras pessoas. A motivação do sujeito é também importante para a transformação do objeto. Dá-se, nesta situação, importância ao contexto, nomeadamente à atividade que direciona a ação do aluno. Essa atividade, visível através de ações ou conjunto de ações, está associada à abstração. Relativamente à transformação da atividade externa em interna, essa acontecerá por meio do processo de internalização (Kozulin, 2003), constituindo um reflexo psicológico da realidade – a consciência – resultando, do conhecimento partilhado. A nova construção será, segundo esta perspectiva, uma atividade socialmente significativa construída por meio de relações sociais, sendo uma atividade de interação humana continuada, dirigida a um objeto e estruturada e mediada por ferramentas.

Aceitamos que no desenvolvimento de uma tarefa, a interação que o aluno estabelece com essa passará pela interpretação, individual e/ou coletiva, dos enunciados apresentados, pela integração e interligação de conhecimentos matemáticos pré adquiridos, que organizados conduzirão o aluno à construção do novo conhecimento. Considerando esta perspectiva e o interesse em conduzir os alunos à construção do novo conhecimento matemático, entende-se que o professor pode assumir um papel fundamental na motivação dos alunos, processo esse que se iniciará com a elaboração da tarefa. Essa tarefa pode ser entendida como um artefacto elaborado pelo professor que servirá de mediador na construção do novo conhecimento, no sentido em que as questões colocadas e a respetiva sequencialidade poderá promover a integração de conhecimentos adquiridos e a exposição de raciocínios que permitam inferir novas ideias.

O modelo teórico e metodológico *RBC+C* (Dreyfus et al., 2001) transmite, igualmente, a ideia de que a construção de uma nova entidade abstrata e a consolidação da entidade abstrata construída é utilizada no desenvolvimento de outras atividades matemáticas estão sob a influência do indivíduo, dos artefactos mediadores, mas também do contexto em que ocorre a aprendizagem.

2.3.4 Ações epistémicas envolvidas no processo de abstração

O processo de abstração assume no presente estudo bastante importância, uma vez que há preocupação em compreender como os alunos constroem um novo conhecimento matemático, como evolui o processo de abstração, e que influências recebem do

contexto, designadamente da mediação e da utilização de artefactos, durante esse processo de construção. O processo de abstração ocorre durante o processo de construção do novo conhecimento matemático e evolui, de uma relação geral e pouco elaborada, para uma relação mais consistente e próxima do objeto matemático pretendido.

Uma das abordagens para a investigação sobre abstração é a de *Abstraction in context*, ou *AiC* (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001), entendida como um processo que permite a construção de novos conhecimentos. O processo de abstração decorre mediante três fases: (1) *necessidade*, quando o aluno sente que precisa de construir novo(s) conhecimento(s) para resolver determinado problema; (2) *emergência*, que respeita ao aparecimento de uma nova construção mais elaborada e complexa, construída verticalmente através da reorganização e integração de novas construções, por processos matemáticos, de modo a aumentarem o conhecimento matemático e (3) *consolidação*, processo em que as construções adquiridas são reutilizadas na resolução de novos problemas, sendo por isso um processo cíclico e interminável.

De acordo com as fases referidas, constata-se que o processo de abstração não ocorre sem que os alunos sintam a necessidade da nova *Construção*. Por sua vez, o contexto parece ser significativo para a aquisição dessa aprendizagem.

À teoria *AiC* estão subjacentes ações epistémicas que se desenvolvem durante o processo de abstração, que explicam a fase de emergência do processo de abstração, e que deram origem ao modelo epistemológico *RBC* e, numa versão mais aperfeiçoada, ao modelo *RBC+C*. Nestes, as siglas *R*, *B* e *C* respeitam às ações epistémicas *Recognizing*, *Building with*, *Constructing* e, no que se refere ao segundo *C*, corresponde à terceira fase do processo de abstração, *Consolidation*. A terceira fase, *Consolidation*, segue-se à da nova construção e ocorre, quando os alunos aplicam o novo conhecimento. Esta fase parece ser independente das três ações epistémicas descritas, podendo ser identificada por meio das características psicológicas e cognitivas.

No que respeita ao modelo *RBC+C*, acrescenta-se que trata-se de um modelo tanto teórico como metodológico, tendo sido adotado neste estudo para permitir compreender como os alunos constroem o novo conhecimento matemático. Relativamente à adoção do modelo *RBC+C* para o presente estudo, destaca-se que as respetivas siglas representarão, no contexto apresentado, as ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*.

O modelo *RBC+C* constitui, como tal, uma ferramenta metodológica que permite identificar as ações do aluno, dando importância ao pensamento teórico, no sentido de Davydov (1988), na formação de abstrações, embora se considere que o pensamento empírico possa também ser empregue. Este processo emerge de uma forma inicial

pouco desenvolvida e prossegue, mediante a reorganização de estruturas e a criação de novas ligações, para uma estrutura final mais consistente. Assim, o processo de abstração surge como uma atividade reorganizada verticalmente que parte de um conhecimento matemático anterior. Com este modelo torna-se possível identificar o conhecimento construído pelos alunos na sua atividade matemática, dando visibilidade ao produto da abstração realizada, ou seja, ao novo conhecimento matemático do aluno.

Segue-se uma breve explicação sobre o significado que pode ser atribuído, no presente estudo, às ações epistémicas, as quais dão visibilidade ao conhecimento teórico dos alunos, aos raciocínios por eles desenvolvidos e à expressão da sua criatividade.

As ações epistémicas são entendidas como ações externas desenvolvidas pelos alunos e que tornam o raciocínio mental mais simples, rápido e confiável, possibilitando o desenvolvimento de estratégias que lhes permitam encontrar determinada solução e atingir objetivos que os ajudem a cumprir a atividade (Kirsh & Maglio, 1994).

Segundo os investigadores Kirsh e Maglio (1994), as ações epistémicas podem melhorar a cognição ao diminuírem a exigência impressa à capacidade de memória e o número de procedimentos envolvidos no cálculo mental. Permitem que o aluno mude o “ambiente” para procurar uma solução ou uma estratégia necessária para atingir determinado fim e encontrar informações e/ou relações não evidentes.

Seguindo esta perspetiva, todo o símbolo, matemático ou não, que os alunos possam representar, pode ser interpretado como um exemplo de uma ação epistémica, uma vez que permite expor conceitos mentais e/ou operações matemáticas, tornando visível o pensamento abstrato.

Considerando a importância das ações na realização de determinada tarefa, Kirsh e Maglio (1994) exemplificaram e distinguiram, ao observar em indivíduos a jogar Tetris, as ações pragmáticas das epistémicas. Este jogo exige uma interação cognitiva e física (manipulação das formas geométricas “zoids”) ao segundo, estando o desempenho do jogador dependente da interação destas componentes. As ações pragmáticas correspondem à manipulação física da peça geométrica (mudança da posição), ou seja, à aplicação de medidas que permitem a execução da tarefa. Por sua vez, as ações epistémicas dizem respeito à mudança da natureza das tarefas mentais do jogador, as quais reduzem a dificuldade da manipulação externa ao transmitirem informação cognitiva. A ação epistémica terá influência sobre a pragmática, permitindo que o jogador se torne mais veloz e assertivo. Estes autores consideram que o desempenho será tanto melhor quanto mais unificado e fluido for o espaço físico e o espaço de processamento de informações, de modo que tanto as ações pragmáticas como as epistémicas possam ter lugar. Segundo esta perspetiva, na realização de determinada

tarefa não há uma distinção rígida entre o mundo interno e o externo. Como tal, uma ação pragmática é uma ação mecânica, tal como a ação de uma mão sobre uma caneta que representa, numa folha de papel, um esquema, um desenho, um símbolo utilizado pelo aluno para comunicar as suas ideias. Uma ação epistémica é o reflexo do raciocínio dos alunos, quando estes procuram desenvolver mecanismos que permitam que a representação de ideias e a manipulação externa seja mais simples.

No presente estudo e de acordo com o modelo adotado, dá-se apenas atenção ao desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção*, referentes à emergência do processo de abstração, como também à manifestação da ação *Consolidação* que se posiciona na terceira fase do processo de abstração. A esse respeito definem-se, seguidamente, essas ações epistémicas:

Reconhecer (R) refere-se à perceção que o aluno deverá ter quanto à necessidade de adquirir conhecimentos prévios que lhe facultem a resolução de novas situações problemáticas, ocorrendo quando o aluno reconhece que uma construção específica do conhecimento anterior é relevante para o problema que está a resolver. Envolve a identificação do contexto, no qual uma entidade matemática abstrata prévia possa ser utilizada num contexto novo. Para reconhecer a utilidade matemática da nova entidade, o aluno tem de compreender a relação da mesma com o próprio contexto.

Construir (B) retrata a necessidade do aluno atingir determinado objetivo, selecionando estratégias, justificando e apresentando soluções para o problema. Esta etapa compreende a integração e combinação de construções reconhecidas, a fim de se alcançar determinado objetivo. Entende-se que os métodos utilizados pelos alunos, nesta fase, não são os mesmos que os usados pelos matemáticos, mas sim intuições, “falsos começos”, “becos sem saída” próprios dos alunos, aplicados com vista a se atingirem objetivos delineados. Atenda-se, ainda, que a construção perspectivada pode não chegar a acontecer. *Construir* envolve a utilização de procedimentos matemáticos que o aluno tenha reconhecido num contexto anterior e, durante esse processo, não se exige que a construção se torne flexível para o aluno.

Construção (C) trata-se da ação epistémica central da abstração matemática que consiste na combinação e reorganização de construções, pelo processo de matematização vertical, para produzir uma nova construção. Refere-se à primeira vez que a nova construção é expressa pelo aluno através de verbalização ou através da ação.

Para melhorar a compreensão da teoria *AiC* é fundamental desenvolver o que se entende por *matematização vertical*. Nesse sentido, realça-se que a matematização é um processo de atividade matemática onde são dadas oportunidades aos alunos para reinventarem matemática, e esse pode ser diferenciado em horizontal ou vertical

(Treffers & Goffree, 1985). Está-se perante o processo de matematização horizontal quando os alunos reinventam ferramentas matemáticas para organizarem e resolverem situações matemáticas da vida real, acontecendo a reorganização apenas no seio da matemática. Por sua vez, a matematização vertical atende às ideias matemáticas que são expressas durante o processo de abstração e que podem corresponder à reflexão que fazem sobre determinada forma de agir

Foi Freudenthal quem fez referência à matematização vertical (Treffers & Goffree, 1985), como sendo um processo de construção que consiste na reorganização de construções matemáticas já adquiridas, permitindo a interligação de construções e elevando as já adquiridas a novas construções. Segundo esta perspectiva, a abstração corresponde à organização de objetos mentais ou materiais e permitirá compreender relações e estabelecer conexões que conduzam o aluno à construção do novo conhecimento matemático.

Acrescenta-se que o *AiC* adota essa visão e defende a abstração como sendo um processo de reorganização vertical de construções matemáticas adquiridas, que conduzem o aluno a novas construções.

Na primeira versão do modelo *RBC* consideraram-se os elementos básicos das três ações epistémicas associadas ao processo dinâmico de abstração. A versão melhorada desse modelo, refere a interligação entre as três ações descritas e a associação de uma construção com outra de nível superior, a *Consolidação* (Co). Segundo investigações de Dreyfus (2012), o modelo, enquanto ferramenta metodológica, considera diversos aspetos do processo de abstração: (i) novas construções matemáticas que surgem por reorganização vertical; (ii) consolidação de novas construções por interligação com as diferentes fases e (iii) aprendizagem em diferentes contextos sociais. A combinação de construções conduzirá os alunos à justificação.

Consolidação (Co) corresponde ao processo que se segue ao da *Construção* (C), aparecendo de forma independente (Dreyfus & Tsamir, 2004; Ozmantar & Monaghan, 2004; Tabach & Hershkowitz, 2002; Tabach, Hershkowitz & Schwarz, 2006). Dreyfus e Tsamir (2004) consideram que, durante o processo de abstração, a *Consolidação* pode ser identificada por meio das características psicológicas e cognitivas de autoevidência, confiança, rapidez, flexibilidade e consciência. Acrescentam também que a resolução de problemas e a atividade reflexiva são propícias à *Consolidação*. Dreyfus, Hadas, Hershkowitz e Schwarz (2006), por sua vez, argumentam que a construção e a consolidação de processos estão muitas vezes estreitamente interligadas, podendo verificar-se a consolidação durante a construção, com a construção e na fase de reflexão sobre a *Construção*. A *Consolidação* pode ocorrer

quando os alunos trabalham com matemática familiar ou quando utilizam a construção recente no processo de abstração (Dreyfus & Tsamir, 2004).

Segundo Astudillo e Monroy (2015), a *Consolidação* manifesta-se, também, através da partilha e do imediatismo observado no trabalho com o grupo e através da interação estabelecida com o professor. Essa mediação parece, igualmente, contribuir para que os alunos compreendam e consolidem melhor a nova *Construção*, evidenciando-se através da utilização de linguagem matemática mais precisa. Acrescentam que a manifestação da *Consolidação* também se verifica através da persistência evidenciada pelos alunos ao procurarem compreender a natureza da atividade e ao extraírem informação que torne o processo de construção possível.

Torna-se, assim, de uma grande importância teórica estudar a ocorrência das ações epistémicas, nomeadamente o seu tempo de surgimento, não só em relação a si próprias mas, também, quanto ao processo de *Consolidação*.

Relativamente às ações *Construir* e *Construção* entenda-se que o que as distingue serão a ação e o motivo pelo qual estão a ser realizadas. No processo *Construir*, o objetivo do aluno é o de interligar e utilizar conhecimentos previamente adquiridos, ou já construídos. Na fase *Construção*, o processo é ele próprio de construção ou o objetivo da atividade é o de reestruturação do conhecimento. A etapa *Construção* só é atingida quando o objetivo da atividade for cumprido. Na prática, ao resolverem um problema, os alunos podem reconhecer e construir através de estruturas previamente adquiridas. Porém, ao depararem-se com um obstáculo ou ao procurarem atingir a *Construção*, são obrigados a reorganizar verticalmente construções adquiridas, para que o conhecimento que retiram dessas os ajudem a superar os objetivos.

Destaca-se que as ações *Reconhecer* e *Construir* estão habitualmente interligadas na *Construção*, podendo acontecer que entidades matemáticas anteriormente abstraídas voltem, posteriormente, a ser reconhecidas e integradas numa nova *Construção*. Dreyfus e Kidron (2006) utilizaram a expressão *branching* para se referirem aos casos em que a construção concebida se ramifica em duas direções diferentes, para que se possam analisar aspetos diferentes da relação matemática, e depois se juntam inesperadamente.

No processo de *Construção* do novo conhecimento matemático a ação epistémica *Construção* parece depender das ações epistémicas *Construir* e *Reconhecer*, sendo que *Reconhecer* afigura-se parte integrante de *Construir*, *Construir* está inserida na *Construção* e, por fim, a *Construção* parece estar integrada em outras *Construções* de nível superior (Schwartz, Dreyfus, & Hershkowitz, 2009).

Síntese. As ações epistémicas dão visibilidade ao processo de abstração dos alunos, mudando a natureza das tarefas mentais, podendo clarificar de que forma se processa a construção do novo conhecimento matemático, partindo de conhecimentos que os alunos já possuem. Permitem, ainda, compreender como se transita do abstrato ao concreto, no sentido referido por Davydov (1988). Interessará estudar como se sequenciam essas ações epistémicas durante a construção do novo conhecimento matemático, como se relacionam entre si e que influencia sofrem da mediação.

2.3.5 O contexto no desenvolvimento das ações epistémicas RBC+C

As estratégias selecionadas pelo professor na preparação e implementação das atividades a desenvolver na sala de aula, com vista a promover a aquisição de um novo conhecimento, terão, certamente, implicações na construção de significados por parte dos alunos. Considerando a construção do novo conhecimento e a adoção do modelo epistemológico RBC+C, interessa compreender de que forma as tarefas elaboradas, os artefactos utilizados e a mediação estabelecida entre a professora e os alunos, e entre alunos, podem desencadear a manifestação das referidas ações.

Neste estudo, valoriza-se o papel do professor quando este elabora determinada tarefa exploratória, envolvendo ou não a resolução de problemas, e incentiva a comunicação matemática, com a intenção de promover o desenvolvimento e a interligação das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co). Considera-se que ao desenvolver uma atividade exploratória, o aluno estará a participar na construção do seu próprio conhecimento (C), mobilizando aquisições já adquiridas (R) para investigar, representar e justificar o seu raciocínio (B). Considerando a construção do novo conhecimento matemático como um processo social, para além de cognitivo, a investigadora defende que a mediação entre professora e alunos é fundamental para que a ação epistémica *Construção* (C) ocorra.

Para promover o desenvolvimento das ações epistémicas supracitadas, decidiu-se que as tarefas implementadas deveriam seguir a estrutura apresentada por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008): (1) Apresentação; (2) Exploração e (3) Discussão e (4) Síntese, devendo o cumprimento das três primeiras ser obrigatório e englobar as orientações produzidas pelo ciclo didático de Bussi e Mariotti (2008). Neste trabalho, valorizam-se as três primeiras fases, sendo que a síntese poderá resultar da exploração das tarefas, ou da discussão das opções tomadas pelos alunos.

É na fase de apresentação que o professor expõe, pela primeira vez, a tarefa aos alunos, incentivando a utilização dessa e de outros artefactos, clarificando, também, possíveis situações dúbias. Os alunos contactarão com a tarefa pela primeira vez, podendo advir dessa apresentação a primeira percepção (R) dos conceitos que poderão ser mobilizados.

A fase de exploração corresponderá à de utilização dos artefactos, dos quais se destaca a tarefa elaborada pelo professor, com vista à produção de signos, individuais e coletivos, no sentido da produção do novo conhecimento matemático. Poderão ocorrer, nesta fase, as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C), ainda que se entenda que a identificação de regularidades e relações, a integração de estruturas adquiridas em aprendizagem anteriores e a apresentação de soluções intermédias e justificações para os raciocínios desenvolvidos, ou seja, o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* (B), assumam maior visibilidade. A mediação estabelecida entre alunos e entre professora e alunos ganha também maior expressão nesta fase, pois o professor deve incentivar a exposição de raciocínios e intervir para que os alunos progridam nas diferentes etapas da tarefa. O professor poderá, por intervenção direta ou através da estrutura da tarefa por si elaborada, contribuir também para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, de modo a tornar visível a nova *Construção* (C).

A discussão e a síntese de ideias poderão ocorrer em duas situações diferentes, durante a resolução da tarefa quando a professora confronta os alunos com as respostas por si apresentadas, solicitando a exposição de ideias e a justificação das opções tomadas, ou após a resolução da tarefa, depois das respostas apresentadas pelos alunos serem sujeitas a análise. Durante estas fases pode-se observar o desenvolvimento da ação epistémica *Construção* (C), ou o seu aperfeiçoamento, sendo que a discussão em fase posterior, depois de a tarefa ser sujeita a análise, pode também evidenciar a *Consolidação* (Co).

O artefacto – *tarefa* – elaborado pelo professor é considerado, nesta investigação, um mediador semiótico, pois proporciona o desenvolvimento de uma relação dinâmica entre os significados pessoais e os significados matemáticos dos alunos. Contudo, enquanto agente mediador, o professor pode também assumir um papel de relevo, devendo incentivar os seus alunos a explorarem socialmente processos semióticos e a evoluírem na produção de novos significados. Poderá atuar não só ao nível cognitivo como ao nível metacognitivo, caso contribua para que os seus alunos estabeleçam uma relação entre os significados pessoais, espontâneos, matemáticos e científicos. Esta perspetiva é compatível com a ideia de que uma cadeia semiótica move-se de signos contextualizados, relacionados com o uso de artefactos, para signos matemáticos, que são aspetos de uma atividade de ensino aprendizagem (Bussi & Mariotti, 2008). A manifestação das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co) surge associada ao contexto de aprendizagem, designadamente à mediação estabelecida pelo professor, através da elaboração da tarefa e do acompanhamento efetuado durante a respetiva resolução, e às contribuições individuais e coletivas dos alunos.

As investigadoras Astudillo e Monroy (2015) valorizam o processo de mediação na utilização do modelo *RBC+C*, considerando que este revela-se uma ferramenta teórica e metodológica adequada para compreender como os alunos constroem o novo conhecimento matemático, através da partilha e discussão. Reforçam a importância do contexto no desenvolvimento da construção, ao destacarem o papel do professor no esclarecimento de dúvidas e ao atribuírem, aos alunos, o tempo de atividade necessário à compreensão da nova *Construção*.

Síntese. A atuação do professor enquanto elemento de mediação poderá ser significativo para o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas. Esse desempenho estará presente nas diferentes fases do processo de construção, designadamente durante a elaboração da tarefa, na sua apresentação e condução durante a resolução dos alunos, bem como na fase de discussão e síntese. Esta poderá resultar da exploração das tarefas, ou da discussão das opções tomadas pelos alunos. De igual forma, as contribuições, individuais e coletivas, dos alunos poderão, também, promover o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas do modelo *RBC+C*.

Capítulo 3

Metodologia

No presente capítulo descrevem-se e justificam-se as opções metodológicas que a investigadora adotou durante o estudo, com ênfase na laboração e implementação das tarefas, bem como na recolha e análise de dados. Seguiu-se uma abordagem qualitativa, inserida no paradigma interpretativo (Biklen & Bogdan, 1994). Caracterizam-se os alunos que compõem a amostra selecionada, fazendo-se referência à professora e ao ambiente onde foi desenvolvido o estudo. Apresentam-se, ainda, os procedimentos adotados na elaboração das tarefas e as técnicas utilizadas para a recolha de dados.

O estudo passou por fases diferenciadas, entre as quais já se apresentou a definição do problema e as questões de investigação, que procuraram colocar em prática os interesses e conceções da investigadora, bem como a seleção e adoção do suporte teórico, através do qual se procurou compreender os resultados apresentados e validar as conclusões registadas. Estas duas fases correspondem ao conteúdo apresentado nos dois capítulos anteriores, respetivamente *Introdução* e *Referentes teóricos*. Ressalva-se que as fases supracitadas foram reajustadas durante o processo de investigação, visando clarificar o problema do estudo e melhorar a compreensão dos resultados apresentados e conclusões registadas.

No presente capítulo são, ainda, apresentadas as opções metodológicas adotadas para este estudo, faz-se referência aos instrumentos de recolha de dados selecionados, bem como à forma como foram tratados e analisados os dados e conclui-se com a apresentação da proposta pedagógica.

3.1 Opções metodológicas

Neste estudo adotou-se uma abordagem qualitativa, inserida no paradigma interpretativo (Biklen & Bogdan, 1994). Com a aplicação da referida metodologia, objetivava-se compreender, em profundidade, como os alunos constroem um novo conhecimento, analisando ao pormenor e descrevendo detalhadamente as ações epistémicas do modelo *RBC+C* que se observaram durante o processo de abstração dos alunos, como se relacionam entre si e como a mediação entre professora e alunos e entre alunos pode contribuir para o desenvolvimento das mesmas.

Justifica-se a seleção da investigação interpretativa pelo facto de a ideia central ser a da atividade desenvolvida pelos alunos e pela professora durante a construção do novo

conhecimento matemático e de se pretender conhecer a realidade, do ponto de vista dos alunos e da professora. A investigadora conduziu o estudo, descrevendo o desempenho dos alunos e da professora, mas interpretando a atividade descrita de acordo com a sua experiência profissional, conhecimento e convicções (Eisenhart, 1988). Considerando Merriam (1988) e Denzin (1989), citado por Ponte (2006), a professora preocupou-se, essencialmente, com os processos e dinâmicas desenvolvidas durante a resolução das tarefas, procurando descrever a postura dos alunos – empenho, emoções e partilha – bem como o contexto envolvente – características pessoais, sociais e culturais.

O processo de investigação ocorreu numa escola básica e secundária da região centro, conhecendo-se previamente a sua forma de funcionamento e o contexto envolvente. A seleção da escola justifica-se pela recetividade demonstrada para a realização do estudo, quer da parte dos elementos diretivos, como também dos pais e dos alunos selecionados. O estudo incidiu sob alunos do quinto ano de escolaridade, dado o interesse em compreender que mecanismos esses desenvolvem para resolver tarefas não rotineiras que intencionam o desenvolvimento do pensamento algébrico, procurando-se verificar como constroem o novo conhecimento matemático, e que benefícios essas tarefas lhes poderão oferecer.

Para fazerem parte desta investigação selecionaram-se, criteriosamente, dois alunos do quinto ano, cujos pseudónimos são Guilherme Infante (GI) e Lourenço Pereira (LP) e a professora, também investigadora deste estudo, com as suas conceções, conhecimentos e abertura para o *Early algebra*, dando-se importância à mediação e à necessidade de se analisar o processo de abstração dos alunos durante a construção do novo conhecimento matemático. No sentido de compreender como estes jovens alunos desenvolvem o pensamento algébrico, e procurando dar resposta à segunda questão de investigação, a investigadora elaborou as tarefas de natureza investigativa e exploratória que atenderam às características e orientações dadas pela proposta curricular *Early algebra*. Através dessas tarefas procurou-se estimular o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C, incentivando os alunos a identificarem relações e regularidades (R), a aplicarem conhecimentos adquiridos com a resolução das tarefas (Co), a resolverem problemas de natureza algébrica, a generalizar e a estender o conhecimento aritmético ao algébrico (B+C). Intencionou-se, ainda, fomentar um processo de aprendizagem estruturado e progressivo, estimulado pelo espírito investigativo decorrido em contexto sala de aula e que contribuísse para o reforço de aprendizagens concebidas durante o ensino na aritmética.

Na elaboração destas tarefas tiveram-se em consideração as orientações dadas pelo NCTM, em 1994, designadamente as que respeitam à necessidade de: (1) apelar à

inteligência dos alunos; (2) desenvolver a compreensão e a aptidão matemática dos mesmos; (3) estimular os alunos a estabelecerem conexões e a desenvolverem um enquadramento coerente para as suas ideias; (4) apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático; (5) promover a comunicação; (6) mostrar a matemática como uma atividade humana permanente; (7) ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos, promovendo o gosto pela aprendizagem da matemática. Acrescenta-se que, para a elaboração das tarefas supracitadas, atenderam-se às especificidades do processo de aprendizagem, designadamente ao histórico dos alunos – perfil, dificuldades e idade cronológica e ao ambiente de aprendizagem – tecnológico e curricular. Com a estrutura apresentada intenciona-se alcançar os objetivos definidos para este estudo, fomentando o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e a *Consolidação* do modelo teórico adotado, no sentido da construção do novo conhecimento matemático.

Quanto à observação direta, ela surgiu no ambiente natural dos alunos e da professora, a sala de aula. Relativamente às tarefas aplicadas, elas apresentaram-se como uma novidade para os alunos, pois eles não tinham, ainda, desenvolvido tarefas dessa natureza na sala de aula. Elas foram sendo elaboradas sequencialmente e aplicadas em articulação com o programa definido para o quinto ano de escolaridade, de acordo com os conhecimentos adquiridos pelos alunos relativamente ao ensino da aritmética.

Realça-se que durante a resolução das tarefas, a professora envolveu-se no processo de construção do novo conhecimento matemático, dialogando e incentivando a comunicação oral e escrita e a partilha de conhecimentos, dúvidas, ideias e convicções.

No que respeita à implementação e condução das tarefas em contexto sala de aula, salienta-se que essas obedeceram a três fases distintas. Na fase inicial, a tarefa matemática foi apresentada pela professora, com recurso a instrumentos audiovisuais – projeção – que objetivou conferir o reforço visual essencial à compreensão e ao incentivo à realização da tarefa. Nesta fase, foi dada liberdade para o esclarecimento de dúvidas de interpretação e destaque ao papel que deveria ser assumido pelos alunos: envolvimento, capacidade de esforço, colaboração e comunicação com colegas. O contacto com a tarefa foi reforçado através da distribuição da folha de enunciado, artefacto utilizado pelos alunos para exporem o seu raciocínio. A apresentação da tarefa foi efetuada de forma breve e objetiva, havendo a preocupação, por parte da professora, em motivar os alunos para a sua realização e em assegurar-se que os alunos compreenderiam qual seria o seu papel e que tempo e recursos lhe seriam disponibilizados (Anghileri, 2006). Neste momento, poderá ter ocorrido o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Na fase seguinte, os alunos resolveram a tarefa em pares, enquanto a professora assumia a função de mediadora, encorajando-os à exploração da tarefa e à exposição de ideias, desafiando,

questionando, esclarecendo ou dando sugestões. Nesta fase poderão ter-se manifestado as diferentes ações epistémicas do modelo RBC+C. Por fim, a professora promoveu a análise e discussão das respostas dadas pelos alunos, no sentido de sistematizar o raciocínio desenvolvido pelos mesmos e reforçar a nova construção. Salienta-se que a estrutura de implementação e a condução das tarefas procura fomentar, tal como descrito anteriormente, o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C, bem como a dimensão social da aprendizagem, centrada no ciclo didático de Bussi e Mariotti (2008). Destaca-se que o referido ciclo centra-se na reformulação da teoria da mediação semiótica, através da qual se procura compreender o alcance das diretrizes do professor, quando ele incentiva os seus alunos a tirarem proveito das características dos artefactos, que no nosso estudo serão as tarefas e, eventualmente, a calculadora.

Para analisar a dimensão social da aprendizagem na construção do novo conhecimento matemático, a professora utilizou a tarefa – artefacto – para incentivar a produção de signos individuais e coletivos, através da partilha e da discussão de ideias. Valoriza-se a postura da professora, no sentido de dirigir a atenção dos alunos para aspetos relevantes, de incentivar a exploração de artefactos, a construção de signos matemáticos e de questionar e solicitar a revisão das resoluções, o respetivo aperfeiçoamento e a síntese de conclusões.

No que respeita à recolha de dados, essa concretizou-se através da observação e do diálogo mantido com os alunos no seu ambiente natural – observação participante – tendo-se procurado registar no diário de bordo da investigadora (RI) e recolher através do registo audiovisual (RAV) aspetos relacionados com o comportamento, postura e desempenho dos alunos e da professora durante a resolução das tarefas.

Adotou-se o modelo epistemológico RBC+C de modo a ser possível identificar que ações epistémicas são observadas durante o processo de abstração e de mediação entre professora e alunos e entre alunos. Os dados recolhidos foram organizados por tarefas (tarefa 1, tarefa 2, ...) e depois por categorias, correspondentes às do modelo epistemológico RBC+C – *Reconhecer, Construir, Construção e Consolidação* – e às de dimensão social de aprendizagem respeitantes ao ciclo didático (Bussi & Mariotti, 2008) – *Professor, Alunos*.

3.2 Caracterização dos alunos e descrição do contexto

A análise dos dados recolhidos incide sobre o desempenho dos alunos GI e LP, do quinto ano de escolaridade, e sobre a mediação estabelecida pela professora. Realça-se que foram selecionados alunos do quinto ano de escolaridade, face ao interesse em estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, e que a análise de dados incidiu sobre os registos escritos e audiovisuais destes dois alunos, pois sentiu-se necessidade de analisar pormenorizadamente a manifestação e relação estabelecida entre as

diferentes ações epistêmicas do modelo RBC+C, bem como a influência da mediação no desenvolvimento dessas ações.

Acrescenta-se que, no momento de aplicação da primeira tarefa, os alunos GI e LP tinham nove e dez anos de idade, respetivamente, e que para seleção dos mesmos tiveram-se em consideração características relacionadas com o comportamento e postura face à disciplina de matemática, bem como com o aproveitamento obtido durante o seu percurso escolar. De acordo com informação documentada nos registos de avaliação dos alunos, e fornecida pelos professores do primeiro ciclo, estes alunos demonstraram interesse e facilidade pela aprendizagem de conteúdos matemáticos, designadamente os que respeitam à aprendizagem da aritmética. Durante o primeiro período, a investigadora, também professora destes alunos, teve oportunidade de verificar o interesse, empenho e a forma de exporem, oralmente ou por escrito, ideias e conhecimentos adquiridos anteriormente, características que explicam, uma vez mais, a seleção dos mesmos. A formação do par obedeceu à empatia e cooperação estabelecida entre ambos, necessária para analisar de que forma a partilha e comunicação estabelecida entre alunos poderia fomentar a construção do novo conhecimento matemático.

Segue-se uma descrição pormenorizada dos alunos selecionados. A timidez característica de GI é habitualmente ultrapassada quando ele expõe as suas ideias em contexto turma. É um aluno empenhado, notando-se maior interesse e melhor desempenho na disciplina de matemática. LP revela facilidade ao nível da compreensão e da aquisição de conhecimentos, atingindo bons resultados quando se empenha na realização das atividades propostas para a sala de aula. Apesar de ser um aluno pouco trabalhador revela criatividade perante situações estimulantes, surpreendendo quando são lançados desafios em contexto turma. Ao selecionar estes alunos para trabalharem em conjunto objetivou-se fomentar um bom ambiente de trabalho, que não compromettesse os objetivos delineados para o estudo, pautado pela partilha respeitosa de conhecimentos e ideias, pela motivação, criatividade e capacidade de esforço para ultrapassarem eventuais dificuldades durante a resolução da tarefa.

As tarefas foram aplicadas de igual forma a todos os alunos da turma, na sala de aula, os quais trabalharam em pares ou em grupo reduzido. Considerando as exigências do programa e os conhecimentos que os alunos foram adquirindo durante a frequência do quinto ano de escolaridade, necessários à resolução das tarefas, foi aplicada uma tarefa no primeiro período – *Luzes de Natal* – quatro tarefas no segundo período – *Conta-quilómetros, Doces de Páscoa, Caça ao ovo, Regras operatórias das potências* – e três tarefas no terceiro período – *O aniversário da Margarida, Campo de férias e Relação de Equilíbrio*.

A professora e investigadora deste estudo tem formação base em Matemática e mestrado em ensino de Matemática, no terceiro ciclo do ensino básico e no ensino secundário, especialização em Educação Especial nos domínios cognitivos e motor, e leciona a disciplina de Matemática há quinze anos, a alunos que frequentam o ensino básico e secundário, incluindo a alunos com dificuldades específicas de aprendizagem. O seu desempenho profissional resulta da experiência adquirida em contexto escolar, da aplicação do conhecimento teórico e das suas convicções, da reflexão e do reajustamento dos programas face às alterações curriculares e às necessidades dos seus alunos, bem como do interesse em promover o sucesso à disciplina. O seu interesse pelo ensino e aprendizagem da álgebra e, em particular, pelos ideais da proposta curricular *Early algebra*, bem como a necessidade de minimizar dificuldades associadas a esta área da matemática, explicam por que razão optou por promover o desenvolvimento do pensamento algébrico junto dos seus alunos mais jovens. A sua experiência profissional e a proximidade entre as suas práticas e as características do ciclo didático descrito por Bussi e Mariotti (2008) conduziram-na à adoção deste modelo teórico, para compreender a influência da mediação na construção do novo conhecimento matemático e, em particular, no desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C.

Relativamente à recolha de dados, a professora teve sempre a preocupação de o fazer com o maior detalhe possível. Observou e incentivou, quando necessário, os alunos a percorrerem de forma responsável as diferentes etapas da tarefa, procurando que eles construíssem o seu próprio conhecimento. Incentivou os alunos à apresentação de soluções e justificações para os seus raciocínios, à comunicação de ideias entre si, à reflexão e esclareceu dúvidas que permitiram a progressão dos mesmos nas diferentes etapas da tarefa.

3.3 Recolha de dados

A recolha de dados verificou-se em três fases distintas, coincidindo com as diferentes fases de implementação das tarefas. Durante a apresentação, a recolha de dados incidiu no registo, em diário de bordo (RI) e audiovisual (RAV), das atitudes dos alunos, das dúvidas que esses colocaram e dos esclarecimentos que lhes foram dados pela professora e fornecidos entre alunos. Alguns dados recolhidos durante a resolução das tarefas foram registados no diário de bordo (RI), mas a análise incidiu, essencialmente, sob os dados recolhidos através de meios audiovisuais (RAV) e dos registos escritos dos alunos (RA). Os dados recolhidos na fase de discussão da tarefa foram obtidos através da investigadora (RI) e dos registos audiovisuais recolhidos (RAV). O esquema seguinte transmite de que forma se recolheram os dados, nas diferentes fases supracitadas: apresentação, resolução e discussão.



Figura 3.1 – Fonte de dados

3.3.1 Planificação e apresentação das tarefas

Para elaborar as tarefas, a investigadora mobilizou os conhecimentos adquiridos e explanados na revisão de literatura deste trabalho, bem como a sua experiência profissional e concepções. Como resultado, essas evidenciam o seu interesse em estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico através da identificação de regularidades, da compreensão de relações, do entendimento de elementos conceptuais, da utilização de linguagem simbólica e resolução de problemas não rotineiros de natureza algébrica. As tarefas, apresentando uma componente exploratória, assumiram a forma de uma investigação de sala de aula e de desafio, exigindo a interpretação, comunicação entre professora e alunos e entre alunos. Foram aplicadas na sala de aula, a todos os alunos, articulando-se a sua aplicação com os conteúdos do quinto ano a lecionar, em momentos em que se entendeu ser possível a aplicação de conhecimentos adquiridos a favor da construção do novo conhecimento matemático.

Objetivou-se a construção do novo conhecimento matemático como forma de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos e, assim, estender o conhecimento aritmético no sentido da generalidade e da utilização de conceitos e linguagem algébrica. Teve-se em consideração a necessidade dos alunos adquirirem uma compreensão pessoal e global dos números e respetivas operações, desenvolvendo o sentido do número (Mcintosh & Reys e Reys, 1992), bem como a habilidade para utilizar essa compreensão para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias. Consideraram-se situações em que o aluno é conduzido a operar com o “desconhecido” e trabalhar com quantidades indeterminadas como se tratassem de números conhecidos, desenvolvendo, dessa forma, o pensamento analítico (Radford, 2012).

As tarefas elaboradas valorizam as orientações apresentadas na revisão de literatura, contemplando o estudo de padrões numéricos, construídos indutivamente a partir da aritmética (Souza & Diniz, 1996), bem como a compreensão dos símbolos e seus significados, visando o desenvolvimento do sentido do número (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Os problemas colocados procuraram ser significativos para os alunos e

estruturados de forma a poderem ser explorados em profundidade e resolvidos de formas diferenciadas. Face ao exposto, destaca-se que as tarefas elaboradas estão associadas a experiências de construção, expressão e justificação de generalizações matemáticas, proporcionando a exploração com vista ao desenvolvimento de competências essenciais aos alunos, tais como prever, discutir, argumentar e comprovar ideias.

Considerando-se que os alunos seguiram o percurso temático de aprendizagem B, do novo programa de matemática do ensino básico (NPMEB, 2007), os tópicos matemáticos previstos para o quinto ano de escolaridade foram: (1) *Sólidos geométricos*; (2) *Figuras no plano*; (3) *Números naturais*; (4) *Números racionais não negativos*; (5) *Representação e interpretação de dados*; (6) *Perímetros* e (7) *Áreas*. Considerando os objetivos deste estudo, as tarefas elaboradas relacionaram-se com os tópicos *Números naturais* e *Números racionais não negativos*. Para a sua elaboração, consideraram-se os conhecimentos adquiridos no primeiro ciclo e que possibilitaram a aplicação das tarefas aos alunos. Sabe-se que no primeiro ciclo os alunos exploraram o tópico números naturais, observando regularidades simples entre números e que aprenderam a identificar os múltiplos e os divisores, bem como a operarem com números naturais. Abordaram o tópico *Números racionais não negativos*, trabalhando as frações enquanto partes simples da unidade e por comparação com os decimais. Apenas no sétimo ano de escolaridade se perspectivava um estudo mais profundo das regularidades, surgindo pela primeira vez a linguagem simbólica aquando da identificação e da representação do termo geral de uma sequência numérica ou pictórica. Acrescenta-se que a linguagem simbólica é também trabalhada no sétimo ano de escolaridade, através da resolução de equações, e que as regras operatórias das potências e o estudo das funções, bem como a resolução de expressões algébricas estão apenas programadas para o oitavo ano de escolaridade.

As diferentes tarefas planificadas contemplam, como tal, competências adquiridas no primeiro ciclo que ao serem reconhecidas pelos alunos podem ser utilizadas na construção do novo conhecimento matemático, estando-lhes, por isso, acessível.

As questões colocadas nas tarefas foram estruturadas de modo a proporcionarem o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C, durante o processo de abstração e construção do novo conhecimento matemático.

A tarefa foi apresentada a todos os alunos da turma, projetada e, na globalidade, procedida da leitura e da apresentação de esclarecimentos, por parte da professora, a dúvidas colocadas pelos alunos.

Nesta fase, a recolha de dados incidiu sob os registos audiovisuais e escritos da investigadora. Recolheram-se imagens da tarefa projetada e dos registos audiovisuais respeitantes à introdução feita pela professora e às questões colocadas pelos alunos. A investigadora registou, no diário de bordo, a postura dos alunos observada durante a apresentação da tarefa e a dinâmica dos mesmos no início da sua resolução.

3.3.2 Implementação da tarefa

A tarefa foi distribuída em suporte papel a todos os alunos da turma. Durante a sua resolução, a observação incidiu sobre o par de alunos e professora. A mediação estabelecida entre alunos foi registada através de meios audiovisuais e a estabelecida entre a professora e os alunos foi, também, registada no diário de bordo da investigadora. A professora certificou-se que os alunos conseguiriam progredir nas diferentes etapas, questionando e prestando auxílio, sem reduzir o nível cognitivo da tarefa (Stein & Smith, 1998), bem como incentivando a comunicação, a partilha e a representação do raciocínio. Depois de dada por concluída a tarefa, a professora questionou os alunos acerca do trabalho desenvolvido, em particular pelo interesse e dificuldades sentidas e aprendizagens concebidas, levando os alunos a refletirem sobre os objetivos que lhes foram colocados e o seu desempenho ao longo da atividade. Por fim, a investigadora procedeu à recolha dos registos escritos dos alunos para que esses fossem sujeitos a análise.

3.3.3 Discussão

Após a recolha de dados, respeitantes à apresentação e resolução das tarefas, a investigadora efetuou a primeira análise das respostas e justificações registadas pelos alunos, selecionando as que considerou pertinentes para serem alvo de análise em contexto sala de aula. O carácter superficial desta análise deve-se à necessidade de a investigadora ter de selecionar esses registos, em tempo útil à da capacidade de retenção dos raciocínios e das opções tomadas pelos alunos, para que essas se tornassem contribuições positivas para a reflexão, discussão conjunta e consolidação da nova construção (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Acrescenta-se que na fase de discussão, a professora estruturou a sequência de respostas dadas e geriu as intervenções dos alunos, no sentido de aumentar a qualidade matemática das explicações e argumentações (Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011), bem como o processo de síntese. Realça-se que a professora procurou obter dos alunos uma explicação para o que não entendeu como evidente nos registos recolhidos. Entende-se que este procedimento poderá também ter reforçado a *Construção* concebida e promovido melhor *Consolidação*.

3.4 Tratamento e análise de dados

Relativamente a cada tarefa implementada, procedeu-se à sua análise, tendo em consideração três fases distintas: (1) análise de primeira ordem, a qual se refere à transcrição dos registos escritos, dos alunos e da professora, e audiovisuais; (2) análise de segunda ordem, que corresponde à definição e análise pormenorizada de categorias e subcategorias identificadas em cada tarefa, de acordo com o problema do estudo, dos pressupostos teóricos adotados e do trabalho de campo desenvolvido e (3) análise de terceira ordem, que consistiu na leitura transversal de cada uma das categorias analisadas na fase anterior, e que intencionou compreender se as mesmas ocorreram e como se relacionaram entre si, ao longo das diferentes resoluções, visando dar resposta às questões de investigação e interpretar esses resultados à luz da teoria e do trabalho empírico desenvolvido.

3.4.1 Análise de primeira ordem

A análise de primeira ordem, respeitante à transcrição dos registos escritos dos alunos, da investigadora e dos registos audiovisuais obedeceu à estrutura que seguidamente se apresenta. Os registos audiovisuais foram transcritos e gravados no processador de texto *Word* 2013 da *Microsoft*, em formato editável com a extensão *.docx* e *.pdf*. Na transcrição procurou-se ser fiel aos diálogos estabelecidos e à exposição de ideias, registando-se, quando pertinente, interjeições e gestos produzidos pelos alunos. Foram também arquivados, em documento do *word*, as anotações efetuadas pela investigadora. Nesta fase também se digitalizaram as produções escritas dos alunos, arquivadas como documento de imagem, do *software* ATLAS.ti em formato *.emf*. As transcrições foram consideradas a primeira fase de interpretação dos resultados apresentados pelos alunos. Nestas, as siglas GI e LP dizem respeito, como já referido, às iniciais dos nomes fictícios dos dois alunos e P refere-se à professora. A pontuação utilizada procurou exprimir a entoação dada e a postura observada nos alunos e na professora. As reticências foram utilizadas quando a informação se mostrou repetida ou redundante e aquando de interjeições ou de expressões de difícil compreensão. Os parêntesis retos foram utilizados para transmitir, aos leitores, expressões corporais e atitudes não-verbais que são observadas em registo vídeo e que podem ser significativas para a compreensão das respostas e justificações apresentadas pelos alunos.

3.4.2 Análise de segunda ordem

A análise de segunda ordem iniciou-se com a definição das categorias e subcategorias de análise que, através do programa ATLAS.ti, permitiram uma análise pormenorizada dos registos respeitantes a cada uma das tarefas implementadas. As categorias e subcategorias de análise foram definidas *a priori*, antes de se proceder à organização

dos documentos recolhidos no software de análise. Elas resultaram da compreensão desenvolvida pela investigadora relativamente aos pressupostos teóricos adotados, da necessidade em estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, bem como em dar resposta às questões de investigação colocadas. As subcategorias surgiram como um fruto teórico da compreensão que a investigadora fez das ações epistémicas enquadradas no desenvolvimento do pensamento algébrico. Elas teriam sido outras, decerto, se o enquadramento fosse o desenvolvimento do pensamento geométrico, por exemplo.

A seleção deste *software* revelou-se bastante útil, permitindo guardar e tratar a informação transcrita, resultante dos registos audiovisuais e dos registos escritos constantes no diário de bordo da investigadora. Porém, entenda-se que este foi utilizado apenas como um auxiliar de análise, facilitando a categorização de excertos relevantes, o relacionamento e a leitura dos resultados. Os dados importados para o *software*, documentos correspondentes a cada uma das tarefas implementadas, foram, num primeiro momento, analisados no seu todo e, seguidamente, divididos em pequenos excertos.

Os excertos selecionados foram categorizados e, posteriormente, segmentados em subcategorias para permitirem uma análise pormenorizada, quer dos resultados apresentados em cada tarefa como também da sua evolução ao longo das tarefas desenvolvidas.

As categorias definidas dizem respeito às ações epistémicas do modelo *RBC+C* adotado (Dreyfus, 2012) e à mediação estabelecida pela professora e entre alunos (Bussi & Marioti, 2008). As subcategorias foram definidas de acordo com a leitura e interpretação que a investigadora fez das definições apresentadas pelos respetivos autores e pelo enquadramento desses modelos de construção e mediação na natureza matemática trabalhada neste estudo.

A tabela 3.1, que se segue, diz respeito às categorias definidas e pormenorizam a leitura que a investigadora fez dos modelos teóricos adotados, designadamente da definição adotada pelos autores do modelo *RBC+C* para as ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. Os respetivos descritores procuram transmitir o enquadramento das definições apresentadas, bem como o interesse em estimular e desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

Tabela 3.1 – Descritores das categorias de análise respeitantes às ações epistémicas RBC+C

Ações Epistémicas	
Ações externas desenvolvidas pelos alunos e que tornam o raciocínio mental mais simples, rápido e confiável, possibilitando o desenvolvimento de estratégias que os auxiliam na obtenção de solução para o problema e a atingir os objetivos delineados para a atividade.	
Reconhecer (R)	Perceção que os alunos deverão ter quanto à necessidade de utilizar dados enunciados, regularidades ou relações identificadas, conhecimentos ou estratégias aplicadas em momentos de aprendizagem anteriores e respeitantes às tarefas já resolvidas, dando início ao processo de abstração.
Construir (B)	Retrata a necessidade dos alunos atingirem determinado objetivo, selecionando estratégias e mobilizando conhecimentos que promovam a apresentação de soluções intermédias e a justificação dos raciocínios desenvolvidos, e os aproximem da construção do novo conhecimento matemático.
Construção (C)	Consiste na combinação e reorganização dos dados interpretados e soluções concebidas, pelo processo de matematização vertical, no sentido da nova construção. Entende-se que a construção é concebida quando os alunos atingem o objetivo delineado para a tarefa – generalização de uma regularidade, extensão de propriedades e procedimentos aritméticos a algébricos ou resolução de problemas de natureza algébrica – e o expressam, oralmente e/ou por escrito.
Consolidação (Co)	Processo que ocorre quando os alunos aplicam uma construção recente para obter um novo conhecimento matemático, que pode estender-se durante a resolução das tarefas e através do qual os alunos se mostram mais conscientes da construção recentemente adquirida, revelando maior flexibilidade, autonomia e confiança, entre outras características cognitivas e psicológicas. O processo de consolidação segue-se ao da construção, pode surgir de forma independente e estar ligado a sucessivos processos de construção promovidos, pela sequência de tarefas.

Na tabela que se segue descrevem-se as categorias respeitantes à *Dimensão social da aprendizagem* e através das quais procuram-se analisar a influência da mediação estabelecida pela professora e entre alunos, na construção do novo conhecimento matemático. A definição das categorias de análise privilegiam a forma como a ação da professora e dos alunos influenciou o desenvolvimento das ações epistémicas e, como tal, a construção do novo conhecimento matemático.

Pretende-se, igualmente, compreender se, e de que forma, a mediação estabelecida pela professora e entre alunos contribuiu para o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. Atenda-se à relação que se procurou estabelecer entre o *Ciclo didático* descrito por Bussi e Mariotti (2008) e o modelo epistémico RBC+C, a qual está também presente tabela que se segue:

Tabela 3.2 – Definição das categorias de análise respeitantes à DSA

Dimensão Social da Aprendizagem (DSA)	
O processo de mediação na construção do novo conhecimento	
Ciclo que estimula a produção individual e coletiva de signos, identificados pelo professor e através dos quais é possível estabelecer mediação. Ocorre através da implementação de uma sequência de atividades, que se inicia com a resolução de uma tarefa e através das quais se incentiva a utilização de outros artefactos. O processo de mediação centra-se nas produções individuais e coletivas dos alunos. (Bussi & Mariotti, 2008)	
Professor (P)	<ul style="list-style-type: none"> • O professor incentiva os alunos a utilizarem artefactos, visando a construção do novo conhecimento matemático. O artefacto utilizado pode ser entendido como um utensílio selecionado para apresentar a resolução da tarefa, mas também como ferramenta de mediação semiótica que possibilita, aos alunos, selecionar conhecimentos adquiridos (R), o desenvolvimento de raciocínios, a aplicação de estratégias e a obtenção de soluções intermédias (B) para darem resposta às questões colocadas (C); • O professor fomenta a construção de signos matemáticos e a exploração de potencialidades semióticas do artefacto, ou de instrumentos por si apresentados ou desenvolvidos pelos alunos; • O professor tem um papel importante na evolução dos signos, nomeadamente quando: (1) direciona a atenção do aluno para determinados aspetos relacionados com o uso de artefactos, (2) questiona, (3) incentiva a revisão de sequências da tarefa e (4) solicita a combinação e reorganização de dados e resultados, bem como a comunicação da nova expressão.
Alunos (A)	<ul style="list-style-type: none"> • Retrata a necessidade de o aluno atingir determinado objetivo, interpretando dados, soluções e resultados (R+Co), mobilizando estratégias e conhecimentos adquiridos para apresentar soluções intermédias e justificar raciocínios (B); • Os alunos envolvem-se na atividade proposta pelo professor, comunicando e partilhando conhecimentos e ideias e, conseqüentemente, produzindo signos individuais e coletivos que podem ser transmitidos através de narrativas, mímicas, produção de textos, desenhos e promovidos pela discussão coletiva (B+C); • Utilizam representações diversas para exporem as suas ideias e darem resposta às questões colocadas, tais como desenhar, esquematizar, escrever, entre outras (B+C); • Os signos matemáticos concebidos podem resultar dos conhecimentos e das ideias do aluno, mas também da comunicação e da partilha estabelecida com o seu colega de trabalho (B+C).

Na tabela que se segue figuram as subcategorias respeitantes às ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e à *Consolidação* (Co) e respetivos descritores. Realça-se que as categorias de análise são partes integrantes das subcategorias definidas e que essa divisão se deveu à necessidade de se conseguir identificar a presença de cada ação epistémica, durante a resolução da tarefa, e de se efetuar uma leitura mais precisa das mesmas.

Reforça-se que a definição das subcategorias resultou do ajustamento da definição de cada ação epistémica à realidade do estudo apresentado e, em particular, das questões de investigação definidas.

Tabela 3.3 – Descritores das subcategorias de análise respeitantes ao modelo RBC+C

Ações Epistémicas	
Reconhecer (R)	Interpretação (I) Os alunos interpretam dados enunciados, identificam regularidades e relações, reconhecendo que essas percepções são necessárias para a resolução da tarefa.
	Estruturas adquiridas (EA) Os alunos reconhecem a utilidade de construções adquiridas, selecionando-as para darem resposta às solicitações da tarefa. Essas construções poderão ter resultado de conhecimentos concebidos em aprendizagens anteriores à de aplicação deste estudo, de construções adquiridas com a resolução das tarefas aplicadas, ou mesmo de conhecimentos adquiridos com a tarefa que os alunos estão, nesse momento, a resolver.
	Regularidades (Rg) Os alunos identificam regularidades presentes nos enunciados, tabelas, padrões ou semelhanças entre diferentes questões, problemas ou tarefas.
	Estratégias (Es) Os alunos mobilizam e aplicam estratégias para representar os dados enunciados, representar o seu raciocínio, justificá-lo e obter soluções intermédias.
Construir (B)	Soluções (S) Os alunos obtêm soluções que dão resposta a solicitações da tarefa, permitem a obtenção de soluções intermédias e podem aproximá-los da nova construção.
	Justificação (J) Os alunos justificam verbalmente, por escrito, através de desenhos ou esquemas o raciocínio desenvolvido e as soluções intermédias apresentadas.
	Construção reconhecida (CR) Os alunos integram e combinam uma construção adquirida para conseguirem atingir determinado objetivo, mesmo que essa venha a revelar-se um “falso começo” ou “beco sem saída”.
	Reorganização (Ro) Os alunos reorganizam dados, soluções, ideias e construções adquiridas anteriormente para conceberem a nova construção e atingirem o objetivo da tarefa.
Construção (C)	Generalização (G) Os alunos generalizam regularidades, estendem relações, propriedades e procedimentos aritméticos a algébricos, utilizam linguagem simbólica e resolvem problemas de natureza algébrica.
	Comunicação (Cm) Os alunos expressam pela primeira vez, através da exposição oral, escrita corrente ou simbólica, ou através de uma ação matemática, a nova construção.
	Aplicação de uma construção recente (AC) Os alunos aplicam uma construção adquirida com a resolução das tarefas aplicadas anteriormente.
Consolidação (Co)	Características psicológicas (CP) Observam-se com a aplicação de construções recentes e podem ser identificadas pela postura dos alunos, pela expressão corporal ou através de características psicológicas e cognitivas, tais como a autoevidência, autonomia, confiança, rapidez, flexibilidade e consciência.

As tarefas implementadas constituem, no seu conjunto, uma sequência de ensino estruturada que intenciona o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, através da construção do novo conhecimento matemático. Essa sequência de ensino é compatível com a descrita por Bussi e Mariotti (2008), à qual chamaram ciclo didático. Segundo estas investigadoras a atividade desenvolvida pelos alunos deve compreender o trabalho com artefactos que, no presente estudo, serão as tarefas desenvolvidas pelo professor e distribuídas em suporte papel aos alunos, permitindo que esses aí exponham

conhecimentos, raciocínios desenvolvidos e a sua criatividade. Para além de o professor dever incentivar os alunos a utilizarem o artefacto – tarefa – deve, igualmente, incentivar a construção de signos matemáticos. Por sua vez, o trabalho desenvolvido pelos alunos, na sua individualidade, através da construção de signos individuais, da comunicação e partilha de conhecimentos e ideias promovem a construção de signos coletivos que contribuem para a construção do novo conhecimento matemático. O desempenho do professor e dos alunos está, como tal, implicado no processo de construção do novo conhecimento matemático. A tabela que se segue traduz de que forma se procurará observar e compreender o trabalho desenvolvido pela professora e pelos alunos, apresentando subcategorias, e respetivos descritores, definidos para as categorias *Professor (P)* e *Alunos (A)*. Acrescenta-se o interesse em averiguar de que forma a mediação pode contribuir para o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas e para a construção do novo conhecimento matemático, associado ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Tabela 3.4 – Descritores das subcategorias de análise respeitantes à DSA

Dimensão Social da Aprendizagem (DSA)	
A influência do contexto na construção do novo conhecimento	
Professor (P)	Incentivo à utilização do artefacto (IUA) O professor incentiva a resolução e a exploração das potencialidades da tarefa, com o objetivo de promover a perceção (R+Co) e a mobilização de construções reconhecidas (B+Co) para conduzir os alunos à construção do novo conhecimento matemático (C). O artefacto pode ser a própria tarefa, enquanto objeto material, a calculadora, ou um objeto simbólico, tal como gestos, verbalização ou representação escrita, tabelar ou pictórica de uma ideia ou esquematização de um raciocínio utilizado pelo aluno durante a resolução da tarefa.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS) O professor fomenta a construção de signos matemáticos e a exploração de potencialidades semióticas, através de contribuições individuais do próprio ou de alunos mais habilidosos. Incentiva a interpretação (R), a identificação de regularidades e relações numéricas (R), a utilização de linguagem matemática formal (B+C), a representação e justificação de raciocínios (B+C), a perceção (R), mobilização (B) e a reorganização de ideias e conhecimentos, no sentido da generalização e extensão do conhecimento aritmético (C). Incentiva, ainda, a comunicação e a partilha de ideias, visando acrescentar, aperfeiçoar, tomar consciência da nova construção e consolidar o conhecimento matemático recentemente concebido.
Alunos (A)	Produção de signos individuais (PSI) Os alunos envolvem-se na atividade proposta pelo professor, produzindo signos individuais. Interpretam enunciados, identificam regularidades e relações (R), selecionam e mobilizam conhecimentos e construções adquiridas recentemente (Co) e utilizam representações diversas – desenhar, esquematizar, escrever, entre outras – para exporem as suas ideias, darem resposta às questões colocadas e construir o novo conhecimento matemático (B+C). A produção de signos individuais pode, também, resultar da comunicação e da partilha estabelecida com o seu colega de trabalho.
	Produção de signos coletivos (PSC) Os alunos envolvem-se na produção de signos coletivos, interpretando os dados enunciados (R), partilhando conhecimentos e ideias, experimentando, avaliando, discutindo resultados obtidos, comunicando soluções e justificando as suas opções. Poderão, ainda, envolver-se na construção de narrativas, mímicas, produção coletiva de textos, de desenhos entre outros (B+C) que promovam a construção de signos matemáticos.

A figura que se segue pretende representar a ideia presente nas tabelas anteriores e que diz respeito ao interesse da investigadora em procurar compreender de que forma a mediação pode ter influenciado o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C e, conseqüentemente, a construção do novo conhecimento matemático, associado ao desenvolvimento do pensamento algébrico.



Figura 3.2 – A mediação na construção do conhecimento

Entende-se que a mediação estabelecida pela professora, através da elaboração do artefacto, da sua apresentação aos alunos e respetiva condução, bem como a partilha e comunicação mantida entre alunos poderão contribuir para o desenvolvimento das ações epistémicas. A figura anterior procura esquematizar de que forma se procedeu à análise de segunda ordem. Depois de definidas as categorias e subcategorias de análise, por parte da investigadora, procedeu-se à identificação das mesmas nos registos recolhidos, com o auxílio do *software* ATLAS.ti. Relativamente a este *software* de análise, realça-se que auxiliou a investigadora a organizar e a relacionar os diferentes registos recolhidos e importados. Analisaram-se todas as categorias em cada uma das tarefas, respeitando-se a seguinte ordem: *Reconhecer*, *Construir*, *Construção*, *Consolidação*, *Professor* e *Alunos*. Por fim, interligando os resultados analisados procurou-se compreender de que forma a mediação – *Professor* e *Alunos* – contribuiu para o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas.

A figura que se segue procura identificar melhor como se trataram os dados no *software* ATLAS.ti. Os dados analisados reportam aos registos audiovisuais recolhidos durante a realização da tarefa *Luzes de Natal*.

P 1: RVA_T1_LP_GI_C Quotes 1:34 primeiro minut Codes PSI [1-0] Memos

Transcrição do registo audiovisual - Tarefa Luzes de Natal
Estudo de caso - GI, LP e CP

D V D	Linha Duração	Elementos Cognitivos				Elementos Sociais		Excertos da transcrição
		R	B	C	Co	Alunos	Prof.	
1	04:36							
2	x						x	[A tarefa apresentada foi distribuída em suporte papel. GI iniciou a leitura em voz alta. A destreza constatada poderá dever-se ao facto de a tarefa ter sido apresentada através de powerpoint, ao grupo turma. Enquanto iam a tarefa GI e LP interrompiam a leitura para validarem algumas ideias, recolhendo informação do enunciado do problema para preencherem as tabelas].
4	x							GI: As do TitoMat piscam de seis em seis (...) da RitaMat de nove em nove (...)
5	x							GI e LP [em simultâneo]: (...) e o Edu/EduMat de dezoito em dezoito.
6	x							GI: (...) não conta o instante inicial, é quando acendem todas (...)
7	x							GI: Já está nas tabelas!
8	x							LP: Já está nas tabelas!
9	x							GI: Deixa-me escrever [iniciou o preenchimento da tabela] esta é de seis em seis, aqui é seis, doze.
10	x							GI e LP [em simultâneo]: doze mais seis... dezoito... [apelando ao cálculo mental foram proferindo em voz alta os restantes números, enquanto GI continuava a registá-los].
11	x							LP [referindo-se à tabela do EduMat]: Agora é de nove em nove. Nove, dezoito.
12	x							LP e GI [quase em simultâneo]: é a tabuada do nove... vinte e sete.
13	x							LP: nove vezes quatro trinta e seis, quarenta e cinco, [demorando algum tempo] cinquenta e quatro, cinquenta e quatro mais nove sessenta e quatro menos um, sessenta e três, nove vezes [foi interrompido por GI].
14	x							GI: É só para o primeiro minuto. Já é mais do que sessenta!
15	x							
16	x							
17	x							

Figura 3.3 – Análise de dados efetuada através do software ATLAS.ti

A janela de visualização apresentada na figura anterior refere-se ao ficheiro P1:RVA_T1_LP_GI_CP importado, em suporte PDF, para o software de análise ATLAS.ti. Neste será possível identificar o ficheiro, na barra de ferramentas, através da seleção P_Docs. A tabela apresentada foi construída pela investigadora e contempla cinco colunas onde constam informações diferenciadas. Na primeira coluna dá-se a indicação do número do DVD a que corresponde esta transcrição. A segunda coluna inicia-se com a indicação do tempo de duração do DVD a que corresponde esta transcrição, sendo que, neste caso particular, coincide com os registos audiovisuais gravados a partir dos quatro minutos e trinta e seis segundos. Após essa indicação, segue-se uma sequência numérica que identifica o número da linha de cada uma das frases transcritas. A terceira coluna refere-se às ações epistémicas do modelo RBC+C, constando nesta o registo de ocorrência dessas ações. Neste caso, pode-se verificar que a ação epistémica *Reconhecer* (R) foi identificada entre as linhas três e oito e nas linhas doze, catorze e dezasseis, e que a ação epistémica *Construir* (B) evidenciou-se nas linhas nove, dez e onze. A quarta coluna diz respeito à categorização dos elementos sociais promotores da construção, de modo que se pode verificar a presença da mediação estabelecida entre professora e alunos e entre alunos. Nesta situação, a influência da professora tornou-se visível nas primeira e segunda linhas da transcrição e esteve relacionada com a apresentação e utilização do artefacto. A mediação estabelecida entre alunos foi identificada, neste excerto, nas linhas nove, dez, treze e catorze. Na quinta linha surge a transcrição do registo audiovisual apresentado. À direita da tabela surgem as categorias e subcategorias identificadas, alinhadas com a(s) frase(s) correspondente(s) e diferenciadas por cores. Destaca-se o facto de, em momentos diferenciados da transcrição, os elementos cognitivos e sociais surgirem em simultâneo, na(s) mesma(s) frase(s). Tal corresponderá à ligação existente entre os elementos sociais e os elementos cognitivos, designadamente à influência da mediação no desenvolvimento

das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. Realça-se, ainda, que o *software* contabiliza o número de vezes que cada categoria e subcategoria surge na tarefa e no conjunto de tarefas analisadas, possibilitando a criação de esquemas que selecionam, automaticamente, os excertos correspondentes a cada categoria e/ou subcategoria. A título de exemplo, suponha-se que se pretendia visualizar e analisar com maior pormenor a ação *Reconhecer*. Ao solicitar a criação de um esquema para esta categoria surgiriam todas as subcategorias a esta associada e todos os excertos catalogados com os códigos R (*Reconhecer*), I (*Interpretar*), EA (*Estruturas adquiridas*) e Rg (*Regularidades*). Como resultado, a versão primária deste esquema seria impossível ou difícil de se ler, pelo que as versões originadas automaticamente tiveram de ser tratadas para que evidenciassem apenas dados pertinentes e transmitissem de forma compreensível todas as relações estabelecidas. Foram considerados pertinentes os registos que permitiam explicar melhor os registos escritos dos alunos e dar resposta às questões de investigação. Um esquema que não sofra reestruturação pode apresentar um aspeto semelhantes ao que se segue:

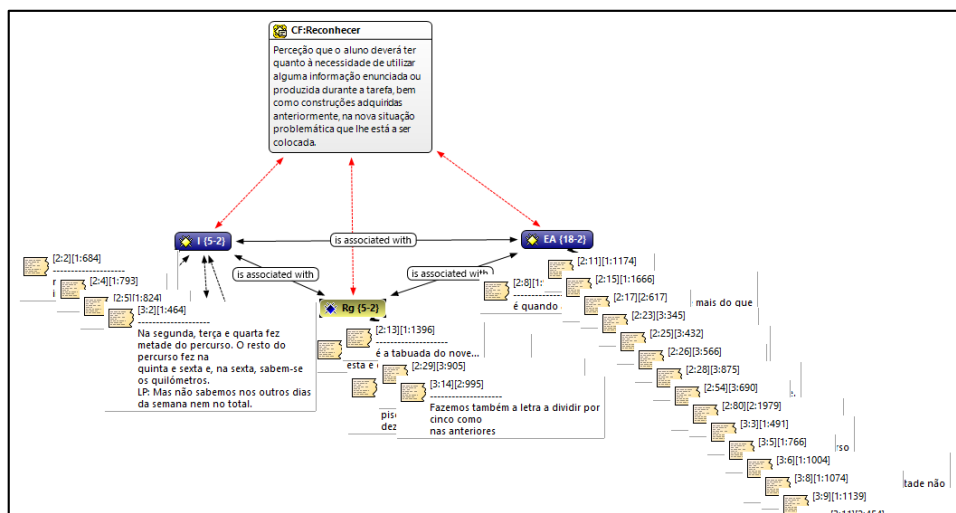


Figura 3.4 – Representação esquemática do software ATLAS.ti respeitante a Reconhecer

A seleção dos excertos resultou, na globalidade das situações apresentadas, da necessidade de dar expressão às resoluções dos alunos que foram recolhidas e analisadas, bem como em clarificar a presença e a relação estabelecida entre as diferentes categorias e subcategorias de análise. Face à dificuldade de leitura promovida pelos esquemas gerados pelos ATLAS.ti, esses também sofreram alteração ao nível da apresentação gráfica, tais como na orientação e formatação das caixas de texto, na seleção de cores e na tradução para língua portuguesa.

3.4.3 Análise de terceira ordem

Nesta fase efetua-se uma análise pormenorizada e transversal dos resultados apresentados na fase anterior e que respeitam às diferentes categorias e subcategorias de análise definidas e analisadas. Pretende-se averiguar como se manifestaram as ações epistémicas, como se relacionaram entre si e que influência sofreram da mediação estabelecida pela professora e verificada entre alunos.

Analisaram-se, na ordem apresentada, a relação estabelecida: (1) pelas subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades* no desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, (2) pelas subcategorias *Construções reconhecidas*, *Estratégias*, *Soluções* e *Justificação* no desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, (3) pelas subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação* no desenvolvimento da ação epistémica *Construção*, (4) a relação estabelecida pelas subcategorias *Aplicação de construções recentes* e *Características psicológicas* no desenvolvimento da ação epistémica *Consolidação*, bem como (5) o papel das ações epistémicas no desenvolvimento do pensamento algébrico e (6) as contribuições da mediação, entre professora e alunos e entre alunos, no desenvolvimento das ações epistémicas. A figura que se segue procura sintetizar o processo de análise anteriormente descrito.

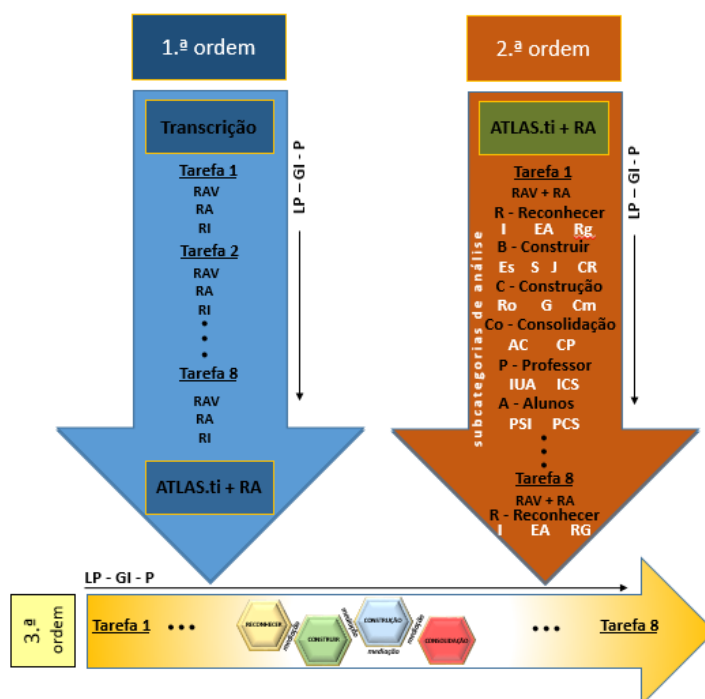


Figura 3.5 – Esquema síntese dos procedimentos adotados na análise de dados

De acordo com a informação esquematizada, verifica-se que a análise de primeira ordem tem direção vertical, correspondendo à transcrição dos registos audiovisuais (RAV) de todas as tarefas desenvolvidas, pela ordem cronológica de aplicação, bem

como da digitalização dos registos dos alunos (RA) e da transcrição dos dados registados no diário de bordo da investigadora (RI).

A análise de segunda ordem tem, igualmente, direção vertical, pois nessa fase, depois de se proceder à definição de categorias e subcategorias de análise, analisaram-se sequencialmente todas as tarefas, codificando-se cada excerto selecionado de acordo com os descritores definidos. Esta fase de análise inclui, como tal, a análise do desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*, em cada tarefa, e da relação estabelecida entre essas, bem como da influência da mediação na construção do novo conhecimento.

A análise de terceira ordem refere-se ao desenvolvimento de cada subcategoria e categoria ao longo de todas as tarefas analisadas, no sentido de se tirarem conclusões acerca da manifestação dessas e da relação estabelecida com outras categorias definidas. Entende-se que ao seguir esta estrutura de análise, tornar-se-á possível compreender que ações epistémicas podem ocorrer durante a construção do novo conhecimento, como é que essas se relacionam, e de que forma se manifesta a mediação durante essa construção, tornando-se, assim, possível dar resposta às questões de investigação colocadas.

3.5 Proposta Pedagógica

3.5.1 Tarefa 1 – *Luzes de Natal*

Apresentação e objetivos. A tarefa exploratória *Luzes de Natal* foi desenvolvida com o sentido de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e de identificar que ações é que estes desenvolvem durante a construção do novo conhecimento, o qual se centra no conceito de mínimo múltiplo comum e na utilização de linguagem simbólica que os alunos possam utilizar para interpretar e generalizarem regularidades numéricas.

Através da tarefa, os alunos são estimulados a observar regularidades – padrões numéricos – a interpretar (*Reconhecer* e *Consolidação*), a utilizarem linguagem simbólica e a generalizarem regularidades identificadas (*Construir* e *Construção*). Procura-se, também, incentivá-los a estabelecerem relações entre conceitos e propriedades numéricas e algébricas (*Construir*). Pretende-se que interpretem o problema colocado, recolham e organizem informação, recorrendo à representação tabelar e à linguagem natural e simbólica, que identifiquem regularidades (*Reconhecer*), que apliquem conhecimentos prévios e estratégias para apresentarem soluções e justifiquem (*Construir*) raciocínios e opções tomadas, bem como estendam relações e propriedades aritméticas e generalizarem regularidades numéricas observadas (*Construção*).

Intenciona-se que os alunos selecionem conhecimentos prévios e procedimentos matemáticos, tais como os conceitos de múltiplo e divisor, adquiridos em aprendizagens anteriores. A construção concebida nesta tarefa, sendo significativa para os alunos, poderá ser utilizada na mesma ou em tarefas implementadas posteriormente. Relativamente à construção do novo conhecimento, espera-se que concluam que *o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números naturais é o maior desses números, se os restantes forem seus divisores*, ou que *o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números naturais é o maior desses números se esse for múltiplo dos restantes* – *m.m.c.* $(a, n \times a) = n \times a$, para a e n números naturais – e que $10 \times m$ representa o número de vezes que as luzes do TitoMat piscam durante m minutos.

Enquadramento curricular. De acordo com o NPMEB (2007), as regularidades numéricas são trabalhadas durante os quatro primeiros anos do ensino básico e o conceito de múltiplo deverá surgir, pela primeira vez, nos terceiro ou quarto anos do primeiro ciclo, inserido no capítulo dos *Números Naturais*. Entende-se que a partir dessa altura, os alunos passam a identificar e a dar exemplos de múltiplos de um número natural, bem como a estabelecer uma relação entre múltiplos e divisores, designadamente a compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores. Apesar do conceito de múltiplo ser trabalhado, enquanto tal, só a partir do terceiro ano do ensino básico, a noção é transmitida aos alunos, ainda que informalmente, em anos transatos. Tal acontece quando estes aprendem a *contar a partir de um número dado, de 2 em 2, 3 em 3, 5 em 5, 6 em 6, 10 em 10* (notas do NPMEB, para o 2.º ano de escolaridade), quando são estimulados a *compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação, a elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e a investigar regularidades em sequências e em tabelas de números* (objetivos específicos para o 2.º ano, indicações do NPMEB, 2007).

Nos primeiros anos do ensino básico, a definição de múltiplo não é apresentada formalmente, considerando-se que a globalidade dos professores a utilize como abordagem procedimental, situação comum nos manuais escolares. Essa abordagem dá a indicação de que os múltiplos de um número inteiro obtêm-se multiplicando esse número por 0, 1, 2, 3, ...

Tarefa. A tarefa exploratória *Luzes de Natal* inicia-se com a colocação de uma questão central – *Será que, para além do instante inicial (zero segundos), as lâmpadas voltaram a piscar em simultâneo?* – que, ao ser explorada pelos alunos, instiga-os à identificação e à generalização de regularidades, no sentido da construção do novo conhecimento. A figura que se segue representa essa situação.

Na Matelândia, neste Natal, várias famílias enfeitaram as suas árvores com lâmpadas *pisca-pisca*, as quais existem em diferentes formatos.

No mercado estão disponíveis lâmpadas com a forma circular, triangular, quadrangular, entre outras, tendo cada família selecionado apenas um desses tipos para colocar na sua árvore.

Três amigos compraram, cada um deles, uma dessas lâmpadas e estão a procurar dar resposta a algumas questões lhes foram colocadas. Tenta ajudá-los, respondendo às questões que se seguem.

Sabe-se que:

- O *TitoMat* comprou lâmpadas com formato circular, as quais piscam de 6 em 6 segundos;
- A *RitaMat* comprou lâmpadas com formato triangular, as quais piscam de 9 em 9 segundos;
- O *EduMat* comprou lâmpadas com formato quadrangular, as quais piscam de 18 em 18 segundos.

Considera que os três amigos começaram a cronometrar, ao mesmo tempo, durante 1 minuto, os instantes (segundos) marcados no seu cronómetro sempre que as luzes piscaram.

Será que, para além do instante inicial (zero segundos), as lâmpadas voltaram a piscar em simultâneo?







TitoMat

RitaMat

EduMat

Figura 3.6 – Enunciado introdutório da tarefa *Luzes de Natal*

O enunciado da tarefa ajusta-se à realidade dos alunos, enquadrando-se nas suas vivências. Procurou-se uma abordagem descritiva da situação, tendo-se recorrido a imagens apelativas que acompanhassem o enunciado escrito e que procurassem recriar uma situação real. A presença das personagens *TitoMat*, *RitaMat* e *EduMat*, reforçada através de imagens de crianças que as representam e que, aparentemente, terão idades aproximadas às dos alunos a quem se propõe a realização desta tarefa, visam facilitar a compreensão e motivar os alunos à resolução da tarefa. Relativamente ao enunciado escrito, os dados são apresentados de forma estruturada, sendo os alunos incentivados a antecipar os registos e conclusões obtidas pelas personagens. Na fase inicial da tarefa incentiva-se a utilização e o preenchimento de tabelas, que se servirão para os alunos organizarem os dados enunciados e identificarem relações numéricas. Entende-se que ao valorizar esta forma de representação, os alunos as reconheçam, na presente tarefa e nas que se seguirão, como estratégias úteis para representar o seu raciocínio e encontrarem solução para novos problemas colocados.

Realça-se o incentivo à representação de dados, resultados e conclusões, situação que se inicia com o preenchimento das tabelas que se seguem:

TitoMat
0

RitaMat
0

EduMat
0

Figura 3.7 – Tabelas da tarefa Luzes de Natal

Seguida da questão central e do incentivo ao preenchimento das tabelas, são apresentadas três questões, através das quais se pretende incentivar os alunos a observarem as regularidades presentes nas tabelas, que lhes permita dar resposta às questões colocadas e a iniciarem o processo de construção.

Observa a sequência numérica presente nas tabelas do TitoMat e do EduMat.
 No primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?
 Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.
 Nota: Não consideres o instante inicial.

Considera agora a sequência presente nas tabelas da RitaMat e do EduMat.
 Quanto tempo foi necessário esperar para voltar a ver as respetivas lâmpadas a piscar ao mesmo tempo?
 Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.
 Nota: Não consideres o instante inicial.

De quanto em quanto tempo piscaram as três lâmpadas em simultâneo?
 Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados desta questão? Justifica.
 Nota: Não consideres o instante inicial.

Figura 3.8 – Regularidades na tarefa Luzes de Natal

Considerando-se o percurso escolar dos alunos, perspectiva-se que esses consigam reconhecer e utilizar conhecimentos adquiridos em anos letivos transatos, tais como os conceitos de múltiplo e divisor, bem como reconhecer novas regularidades presentes nas questões que se seguem.

Tendo em consideração as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, determina o mínimo múltiplo comum (*m.m.c*) entre:

a) 6 e 18 b) 9 e 18 c) 6, 9 e 18 d) 5, 10 e 20 e) um número e o dobro desse número

Figura 3.9 – Cálculo do mínimo múltiplo comum na tarefa Luzes de Natal

Verifica-se que a questão anterior se refere ao cálculo do mínimo múltiplo comum entre números naturais, situação desconhecida para os alunos. Porém, espera-se que eles consigam associar esse cálculo às regularidades presentes nas tabelas preenchidas e expostas nas questões anteriores. Intenciona-se que os alunos combinem e reorganizem dados e ideias já concebidas para obterem a construção pretendida.

Destaca-se o facto de os valores apresentados nas alíneas a), b) e c) terem sido trabalhados nas tabelas e questões anteriores e, como tal, serem significativos para os alunos, situação que poderá facilitar o processo de generalização da propriedade observada a outros valores numéricos conhecidos ou indeterminados.

Seguem-se questões que intencionam a generalização aritmética de regularidades observadas e a utilização de linguagem simbólica que, tornando-se perceptível para o aluno, podem conduzi-lo à expressão da generalidade em linguagem formal: $10 \times m$, para m o número de vezes que as lâmpadas do TitoMat piscaram durante m minutos, excetuando o instante inicial.

Minutos	"N.º de piscas"
1	
2	
5	
10	
20	
30	
40	
50	
60	
m	

Figura 3.10 – Tabela número de “piscas” em tarefa Luzes de Natal

Em súpula, através da implementação da tarefa *Luzes de Natal*, os alunos são incentivados a identificar regularidades numéricas e propriedades associadas ao conceito de múltiplo. Objetiva-se que generalizem regularidades identificadas, que compreendam e utilizem linguagem simbólica, que identifiquem o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números naturais e que concluam que o mínimo múltiplo comum de números naturais múltiplos entre si é o maior desses números, quando os restantes são seus divisores.

3.5.2 Tarefa 2 – Conta-quilómetros

Apresentação e objetivos. A tarefa *Conta-quilómetros* é constituída por um problema de natureza algébrica e por uma questão de resposta fechada que exige a interpretação e utilização de linguagem simbólica. Pretende-se averiguar que perceção desenvolvem os alunos quanto à indeterminação presente nos enunciados, que conhecimentos e estratégias mobilizam para representarem os dados enunciados e obterem resposta para a questão colocada. A construção do novo conhecimento matemático centra-se na resolução do problema colocado e na interpretação e utilização de linguagem simbólica. Visando a representação dos raciocínios desenvolvidos, fomenta-se a exposição de ideias através de esquemas ou desenhos e a generalização das regularidades identificadas.

Enquadramento curricular. O problema de natureza algébrica pode ser resolvido, geralmente pelos alunos do terceiro ciclo do ensino básico, através de uma equação

equivalente a $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 2,5 = x$, para x o número total de quilómetros do percurso. Porém, pode também ser proposto a alunos mais jovens, como se tratando de um desafio, uma vez que não há indicação específica para a resolução de problemas com esta estrutura. A questão de natureza fechada exige a interpretação de linguagem simbólica, a qual não se insere no currículo definido para os alunos mais jovens. Os conteúdos explorados enquadram-se no estudo dos números racionais não negativos, exigindo apreensão dos conceitos de metade e quarta parte e, dependendo da opção de resolução tomada, a operacionalização com frações. No primeiro ciclo, os alunos são conduzidos a compreender as frações com os significados de quociente, parte-todo e operador e só no segundo ciclo são usadas, nos seus diferentes significados, quociente entre dois números inteiros, relação parte-todo, razão, medida e operador.

Tarefa. Segue a apresentação do enunciado do problema supracitado.

O treinador do Luís pretende avaliar a resistência máxima do seu atleta através de um plano de treinos. O Luís foi informado que terá de concluir, nos primeiros cinco dias da semana, um percurso com um número indeterminado de quilómetros, respeitando o seguinte plano:

- Percorre $\frac{1}{2}$ do percurso nos primeiros três dias semana;
- Percorre mais $\frac{1}{4}$ do percurso total, para além do percorrido nos três dias anteriores, na quinta feira;
- Finaliza o percurso na sexta-feira, correndo 2,5 km.

Indica, justificando, quantos quilómetros tem o percurso do Luís.
Desenvolve uma estratégia que te permita dar resposta ao desafio.
Podes utilizar desenhos ou esquemas que auxiliem a expor o teu raciocínio.

Figura 3.11 – Enunciado do problema da tarefa Conta-quilómetros

Destacam-se, no enunciado do problema, a presença de quantidade indeterminadas, subjacentes ao número total de quilómetros do percurso, o trabalho com as frações e o incentivo à utilização de desenhos ou esquemas para representar ideias. Na segunda parte da tarefa pretende-se averiguar se os alunos conseguem reconhecer e mobilizar conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, tal como a relação parte-todo e a interpretação de linguagem simbólica (*Reconhecer e Consolidação*).

Calcula $\frac{1}{5}$ de:

a) 10 kg b) 300 € c) 5000 litros

d) n carros e) m canetas f) $n+m$ pessoas

Figura 3.12 – Fração de quantidades indeterminadas em Conta-quilómetros

Pretende-se ainda que, ao depararem-se com linguagem simbólica, os alunos consigam identificar semelhanças com os procedimentos aritméticos trabalhados e os

generalizem a valores indeterminados, apresentando em linguagem simbólica as expressões $\frac{n}{5}$, $\frac{m}{5}$ e $\frac{n+m}{5}$ (*Construir e Construção*).

3.5.3 Tarefa 3 – *Doces de Páscoa*

Apresentação e objetivos. A tarefa *Doces de Páscoa* apresenta-se sob a forma de dois problemas, cujo conteúdo e sequencialidade remetem para a generalização de regularidades identificadas e para o uso de linguagem simbólica. O primeiro problema exhibe características aritméticas e o segundo problema procura proporcionar a extensão das relações aritméticas identificadas no primeiro problema, a números indeterminados, apresentando natureza algébrica.

A proposta pretende-se desafiante para os alunos, no sentido em que os problemas surgem associados a um contexto familiar, visam a compreensão de relações entre quantidades e permitem a seleção de formas diferenciadas de representação. Os enunciados desses problemas contêm instruções múltiplas e relacionadas, podendo, como tal, serem explorados em profundidade. Os dados enunciados são apresentados em linguagem natural, exigindo transferência para linguagem matemática formal. O questionamento incentiva a formulação e ordenação de ideias, conceitos e imagens, perspetivando-se, através da estrutura apresentada, a inclusão de competências adquiridas, a seleção de estratégias e a partilha e exposição de ideias. Espera-se, ainda, que a formulação dos enunciados escritos permita a compreensão de significados matemáticos implícitos, valorizando-se todas as respostas e conclusões apresentadas em linguagem natural, matemática, gestos, esquemas e desenhos, ainda que se ambicione que os alunos façam uso de linguagem simbólica. Em traços globais, pretende-se que os alunos adquiram predisposição para compreenderem a estrutura abstrata do segundo problema, competência para selecionar processos de resolução criativos e eficazes, aptidão para decidirem sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante as exigências da resolução, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis e instrumentos tecnológicos.

Enquadramento curricular. À semelhança do que se referiu aquando apresentação da tarefa *Conta-quilómetros*, os conteúdos explorados enquadram-se no estudo dos números racionais não negativos, exigido apreensão dos conceitos de metade, terça, quarta e sexta parte, bem como procedimentos específicos de cálculo, designadamente *fração de uma quantidade e adição e subtração de números racionais representados por frações*.

Tarefa. Segue-se a apresentação do problema *Ovos de chocolate*, o qual apresenta natureza aritmética.

Ovos de chocolate

A Leonor tem três sobrinhos e, nesta Páscoa, ofereceu-lhes os ovos de chocolate que podes ver na imagem. Sabe-se que ofereceu metade do número de ovos representados na imagem ao Ricardo, a terça parte à Rita e a sexta parte à Ema.

Quantos ovos ofereceu? Restaram ovos?





Figura 3.13 – Problema Ovos de chocolate da tarefa Doces de Páscoa

O conteúdo do enunciado escrito e o reforço promovido durante a apresentação da tarefa poderão contribuir para que os alunos compreendam que aos três sobrinhos de Leonor, designadamente, Ricardo, Rita e Ema, pertencerão, respetivamente, a metade, terça e oitava parte da quantidade total de ovos. Deve, igualmente, conduzir os alunos: (1) à contagem do número total de ovos, dezoito; (2) a calcularem metade de dezoito, valor que corresponde ao número de ovos que o Ricardo recebeu; (3) a determinarem a terça parte de dezoito, ou seja, o número de ovos que a Rita recebeu, bem como (4) a sexta parte de dezoito, que corresponde ao número de ovos que a Ema recebeu. O raciocínio dos alunos deve, então, ser acompanhado pela expressão oral e representação escrita, e refletir os resultados comunicados e a não existência de ovos restantes. Espera-se, também, que os alunos verifiquem a adequação dos resultados obtidos e dos processos por si utilizados, bem como justifiquem as suas opções. O raciocínio desenvolvido deverá incluir a utilização do número racional como quociente, a relação parte-todo, a comparação e ordenação de números e, eventualmente, a operacionalização entre números racionais não negativos, apresentados sob a forma de fração. O segundo problema intenciona a extensão do trabalho aritmético desenvolvido durante a resolução do primeiro problema, a valores numéricos indeterminados, tal como se pode visualizar através da figura que se segue:

Amêndoas de chocolate

O Mário comprou uma caixa de amêndoas de chocolate e ofereceu parte delas a alguns dos seus amigos.
Determina quantas amêndoas ofereceu o Mário a cada um dos seus amigos, respondendo às questões que se seguem.



Nota: Sempre que possível representa a situação descrita utilizando linguagem matemática.

1. O Mário ofereceu metade da totalidade das amêndoas da caixa ao Nuno.
Quantas amêndoas recebeu o Nuno?
Representa, através de uma expressão matemática, o número de amêndoas que o Nuno recebeu.
2. O Mário ofereceu a quarta parte da totalidade das amêndoas da caixa ao Miguel.
Quantas amêndoas recebeu o Miguel?
Representa, através de uma expressão matemática, o número de amêndoas que o Miguel recebeu.
3. Escreve uma expressão matemática que traduza a quantidade de amêndoas que os dois amigos receberam.
4. Escreve uma expressão que traduza a quantidade de amêndoas que restaram.

Figura 3.14 – Problema Amêndoas de chocolate da tarefa Doces de Páscoa


Através da resolução do problema algébrico *Amêndoas de chocolate*, pretende-se verificar que relações estabelecem os alunos com o problema aritmético resolvido anteriormente, que conhecimentos mobilizam, que estratégias utilizam e como ocorre o processo de generalização. À semelhança do primeiro problema, o problema amêndoas de chocolate envolve a representação de frações e a operacionalização de quantidades desconhecidas, entendendo-se que os alunos estão, dessa forma, a aprofundar a compreensão das relações quantitativas e das estruturas matemáticas envolvidas e a valorizar a abordagem algébrica para adquirir flexibilidade na resolução de problemas. A nova *Construção* assenta na representação do valor desconhecido e na apresentação de expressões algébricas que representem as quantidades que o Nuno e o Miguel receberam. Espera-se ainda que os alunos deduzam, a partir das relações observadas e dos procedimentos aritméticos tomados, e indiquem expressões algébricas que traduzam a quantidade de amêndoas que os dois amigos receberam e as que sobraram, equivalentes, respetivamente a $\frac{n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{3n}{4}$ e a $1 - \frac{3n}{4} = \frac{n}{4}$.

3.5.4 Tarefa 4 – *Caça ao ovo*

Apresentação e objetivos. A tarefa *Caça ao ovo* apresenta-se aos alunos sob a forma de um problema de natureza algébrica, mais pretensioso do que os selecionados para as tarefas *Conta-quilómetros* e *Doces de Páscoa*. O enunciado do problema, contextualizado, exige maior compreensão conceptual, a aplicação de conceitos já lecionados, a transferência dos dados apresentados em linguagem natural para linguagem simbólica, a compreensão de relações entre quantidades, a representação de dados e ideias e a expressão da nova construção.

Caça ao ovo

O João e a Catarina organizaram o evento escolar “A caça ao ovo”. Este ano foram vários os participantes. Participaram alunos desde o quinto até ao nono ano de escolaridade. Para divulgarem o sucesso da atividade, o João e a Catarina vão redigir uma notícia para publicar no jornal da escola.



Lê com atenção o desafio que eles irão colocar aos leitores do jornal:

Este ano, na nossa Escola, mais de quatro dezenas de alunos participaram com entusiasmo no evento “A caça ao ovo”. Foram vários os alunos que procuraram os ovos escondidos por diversos cantos da nossa Escola. A grande afluência de participantes verificou-se entre os mais novos, sendo que os alunos do segundo ciclo representaram metade do total de participantes, os do sétimo ano representaram a quarta parte desses. Sabe-se ainda que a oitava parte do total de participantes eram alunos do oitavo ano e que do nono ano só participaram seis alunos.

Consegues descobrir quantos alunos participaram, este ano, na caça ao ovo?

Desenvolve uma estratégia que te permita dar resposta ao desafio.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que te auxiliem a expor o teu raciocínio.

Figura 3.15 – Enunciado do problema da tarefa *Caça ao ovo*

A informação enunciada é apresentada aos alunos na forma de linguagem natural e exige compreensão matemática da situação descrita. Espera-se que a interpretação do enunciado desperte o reconhecimento de conceitos e procedimentos adquiridos, de modo que os alunos traduzam para linguagem matemática, ou para outras formas de representação, os conceitos de dezena, metade e quarta e oitava parte (*Reconhecer e Construir*). Intenciona-se, ainda, que recorram à utilização de linguagem simbólica já utilizada nas tarefas anteriores, para representarem os dados enunciados e para darem resposta ao problema colocado (*Construir e Construção*).

Não é referido aos alunos o número de participantes, constituindo esse um valor indeterminado sobre o qual terão de refletir para descobrir a solução do problema colocado. Ponderando a eventualidade de o enunciado criar dificuldades que impeçam os alunos de iniciar a sua atividade, destacaram-se, a negrito, os dados matemáticos relevantes, visando a seleção de informação pertinente.

Enquadramento curricular. A tipologia do problema apresentado é habitualmente colocada a alunos que frequentam o terceiro ciclo do ensino básico, os quais poderão optar por procedimentos algorítmicos para resolver o problema, tal como a utilização de uma equação.

Optando pela resolução de uma equação, os dados enunciados poderiam ser traduzidos, por exemplo, através de uma igualdade equivalente a $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 6 = x$, para x o número total de participantes. À semelhança das tarefas *Conta - quilómetros* e *Doces de Páscoa*, os conteúdos explorados na presente tarefa enquadram-se no estudo dos números racionais não negativos, exigindo apreensão dos conceitos de metade, quarta e oitava parte, bem como procedimentos específicos de cálculo.

3.3.5 Tarefa 5 – Regras operatórias das potências

Apresentação e objetivos. Através da presente tarefa procura-se estimular a compreensão dos números e das suas operações, reforçando conceitos adquiridos, tais como o significado de potência e o cálculo do seu valor numérico e conduzir os alunos à construção de propriedades numéricas e à respetiva generalização.

Pretende-se que os alunos interpretem dados representados na forma tabelar e que completem as tabelas apresentadas, mobilizando construções matemáticas reconhecidas (*Reconhecer e Consolidação*). Se necessário, poderão utilizar artefactos auxiliares, tais como a máquina de calcular. Após o preenchimento das tabelas, os alunos devem focar a sua atenção nos dados preenchidos, observando regularidades e identificando propriedades que deverão expressar por escrito, em linguagem natural ou simbólica. Ao interpretarem as tabelas, os alunos necessitam de reconhecer o

significado da linguagem matemática presente nas mesmas, utilizando-a para concretizar valores e expressar as propriedades identificadas, generalizando a base e o expoente a valores diferenciados.

Enquadramento curricular. As regras operatórias das potências são trabalhadas, geralmente, no terceiro ciclo. Porém, no segundo ciclo os alunos adquirem o conceito de potência, identificam a base e o expoente e calculam o valor de uma potência de base e expoentes naturais, compreendendo que se trata de um produto de fatores que se repetem o número de vezes indicado no expoente.

Tarefa. Segue-se a apresentação das tabelas constantes nesta tarefa. A primeira tabela começa por exigir aos alunos a compreensão do significado atribuído às letras a , n e m e, em particular, às potências apresentadas (*Reconhecer* e *Construir*). Uma vez interpretada a tabela, os alunos poderão mobilizar os conhecimentos que adquiriram com a aprendizagem das potências e determinar os valores numéricos que devem figurar nas colunas respeitantes às potências a^n , a^m , $a^n \times a^m$ e a^{n+m} (*Construir*). Posteriormente, e depois de focarem a sua atenção nas colunas sombreadas, espera-se que conclua, em linguagem natural ou simbólica, que $a^n \times a^m = a^{n+m}$ (*Construção*).

Considera a^n e a^m duas potências de base a e expoentes n e m , com $a, n, m \in \mathbb{N}$.

Completa as tabelas seguintes e estabelece relações entre as regularidades observadas.

a	n	m	a^n	a^m	$a^n \times a^m$	a^{n+m}
3	4	2				
10	5	6				
11	2	1				
20	3	2				

Que regularidades observas? O que podes concluir?

Figura 3.16 – Produto de potências com igual base e expoentes diferentes

Pretende-se, depois, que esse procedimento seja repetido para o preenchimento e análise das restantes quatro tabelas e que os alunos conclua, respetivamente, que: $a^n \div a^m = a^{n-m}$, $(a^n)^m = a^{n \times m}$, $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ e $a^n \div b^n = (a \div b)^n$ (*Construção*).

a	n	m	a^n	a^m	$a^n \div a^m$	a^{n-m}
3	4	2				
10	5	6				
11	2	1				
20	3	2				

Que regularidades observas? O que podes concluir?

a	b	m	a^m	b^m	$a^m \times b^m$	$(a \times b)^m$
6	3	2				
5	2	3				
3	7	4				
1	6	5				

Que regularidades observas? O que podes concluir?

a	n	m	a^n	a^m	$(a^n)^m$	$a^{n \times m}$
3	4	2				
10	6	5				
11	2	1				
20	3	2				

Que regularidades observas? O que podes concluir?

a	b	m	a^m	b^m	$a^m \div b^m$	$(a \div b)^m$
6	3	2				
8	2	3				
14	7	2				
3	1	5				

Que regularidades observas? O que podes concluir?

Figura 3.17 – Regras operatórias das potências

3.3.6 Tarefa 6 – O aniversário da Margarida

Apresentação e objetivos. A tarefa que se segue promove, à semelhança das anteriores, a interpretação e utilização de tabelas para identificar regularidades e concluir sobre os resultados obtidos, de modo a que os alunos alcancem a construção pretendida, designadamente o conceito de proporcionalidade direta.

O professor aproxima o aluno do objetivo da tarefa expondo, em linguagem natural o contexto matemático envolvente. Nessa exposição, faz referência a construções concebidas em aprendizagens anteriores – *apenas um quarto dos convidados confirmou a sua presença* – voltando a estar presente a noção de número indeterminado e o conceito parte-todo. Incentiva, também, o uso das tabelas para o cálculo da quantidade dos ingredientes, mas também como forma de promover a identificação de relações numéricas proporcionais.

Pretende-se que os alunos trabalhem as relações associadas à proporcionalidade direta, desenvolvendo o raciocínio proporcional, e que representem simbolicamente situações matemáticas (*Construir e Construção*). Os alunos necessitam de compreender a situação matemática colocada, interpretar a informação presente nas tabelas, identificar questões de natureza multiplicativa (*Reconhecer e Consolidação*), aplicar competências matemáticas adquiridas – cálculo e interpretação de linguagem simbólica – organizar os dados preenchidos, compreender como as ideias matemáticas se interrelacionam e generalizar as propriedades observadas (*Construir e Construção*). Para fazer o estudo da relação de proporcionalidade, privilegiaram-se conteúdos matemáticos simples, familiares aos alunos.

Enquadramento curricular. O conceito de proporcionalidade direta surge, no segundo ciclo, como igualdade entre duas razões, no entanto, sugere-se que no primeiro ciclo se promovam situações de exploração que, de forma intuitiva, contribuam para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos de razão e de proporção. É objetivo geral, para o segundo ciclo, o desenvolvimento da compreensão do significado de razão e de proporcionalidade direta, bem como o uso do raciocínio proporcional, geralmente concebidos através da resolução de problemas.

Tarefa. Segue-se a apresentação do enunciado da tarefa:

A Margarida está a organizar a sua festa de aniversário onde estarão presentes alguns dos seus amigos. Apenas a quarta parte dos convidados confirmou a sua presença, situação que está a deixar a mãe da Margarida um pouco ansiosa, pois queria ter a certeza da quantidade de ingredientes necessários para preparar alguns *popcakes*.

Para ajudar a mãe, a Margarida elaborou uma tabela onde irá registar o número de ingredientes necessários para confeccionar os *popcakes* (um por cada convidado). Com este procedimento a mãe da Margarida conseguirá, assim que se confirme o número de convidados presentes na festa, identificar ou calcular com rapidez a quantidade exata de ingredientes necessários para a confeção dos *popcakes*.

Analisa a tabela construída pela Margarida, onde poderás encontrar a quantidade de ingredientes necessários à confeção de um *popcake*, e ajuda-a no respetivo preenchimento.




Figura 3.18 – Introdução da tarefa O aniversário da Margarida

O enunciado da tarefa faz referência a uma situação quotidiana, familiar ao aluno e de execução simples, onde se inserem dados, conceitos e conhecimentos matemáticos. A questão prende-se com a confeção de *popcakes*, os quais exigirão quantidades determinadas de ingredientes que os alunos deverão calcular. Os conteúdos matemáticos surgem com a informação do número de convidados, um número indeterminado, e do número de participantes, a quarta parte do número desconhecido de convidados, bem como a sugestão de representação tabelar dos dados e do cálculo da quantidade de ingredientes necessários à confeção desses *popcakes*.

Ingredientes quantidades	1 <i>popcake</i>	10 <i>popcakes</i>	15 <i>popcakes</i>	20 <i>popcakes</i>	27 <i>popcakes</i>	n <i>popcakes</i>
Massa de bolo	50 g					
Leite condensado	20 g					
Chocolate	45 g					
Confettis	12					
Palitos	1					

Figura 3.19 – Tabela quantidade de ingredientes da tarefa O aniversário da Margarida

A análise da tabela apresentada na figura anterior exigirá, dos alunos, a interpretação dos dados numéricos e qualitativos. Os alunos necessitam de compreender que para confeccionarem um *popcake* necessitarão de 50g de massa de bolo, 20g de leite condensado, 45g de chocolate, 12 *cofettis* e 1 palito. Deverão, igualmente, identificar a extensão numérica apresentada para o número de *popcakes*. Os cálculos numéricos necessários para o preenchimento dessa tabela deverão contemplar a generalização aritmética do número de *popcakes* confeccionados a números determinados superiores e não consecutivos, concluindo-se a generalização a um número indeterminado de *popcakes*. Os alunos necessitarão de interpretar a linguagem simbólica presente na informação “n *popcakes*” e apresentar uma expressão algébrica que expresse a quantidade de ingredientes necessários.

Após apresentação da tabela e solicitação ao preenchimento da mesma, colocam-se as questões que se seguem, através das quais se pretende promover a interpretação dos resultados obtidos e a identificação de regularidades.

- 1.1. Ajuda a Margarida, preenchendo a tabela com as quantidades correspondentes ao número de *popcakes* indicado.
- 1.2. Representa através de uma expressão matemática o número de convidados que confirmou a sua presença na festa de aniversário.
- 1.3. De acordo com a informação constante na tabela, responde às questões seguintes:
 - a) Quantos *popcakes* é possível confeccionar com 1 kg de massa de bolo?
 - b) Se apenas forem à festa da Margarida os seus vinte e sete colegas de turma, quantos confettis serão necessários?
 - c) Observa a variação existente entre o número de *popcakes* e a quantidade de ingredientes. O que podes concluir?

Figura 3.20 – Questionamento presente na tarefa O aniversário da Margarida

Tal como sugere a figura anterior, a questão 1.2 exige a interpretação do enunciado da tarefa, a perceção da quantidade indeterminada quanto ao número de convidados que confirmou a sua presença e a representação desse número em linguagem simbólica. A questão 1.3 transporta o aluno para a análise da tabela preenchida, exige a perceção e integração de competências matemáticas lecionadas, como a igualdade $1\text{ kg} = 1000\text{ g}$, bem como a compreensão de que o número de ingredientes aumenta com o aumento do número de *popcakes*, ocorrendo de forma proporcional. O desenvolvimento do raciocínio proporcional está, também, presente na questão que se segue, através da qual se introduz o conceito de razão.

2. A razão entre a quantidade de ingredientes utilizados e o número de *popcakes* confeccionados pode ser encontrada dividindo as duas grandezas (quantidade do ingrediente ÷ número de *popcakes*).

2.1. De acordo com os dados preenchidos na tabela anterior, determina a razão entre a massa de bolo, a quantidade de leite condensado e de chocolate, o número de confettis (A) e o número de *popcakes* (B) confeccionados.

a) Massa de bolo

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Massa de bolo (A)	50 g					
Razão A / B	50 : 1 = 50					

Observas alguma regularidade nesta tabela?

Figura 3.21 – Razão entre a massa de bolo e o número de *popcakes*

A tabela apresentada na figura 3.21, e as que seguem, exigem a interpretação dos dados nela constante e a transferência de informação presente na primeira tabela. Um preenchimento correto desta tabela permitirá que os alunos identifiquem regularidades entre a quantidade de massa e o número de *popcakes*. Destaca-se o facto de, na primeira tabela, se ter procedido ao preenchimento da informação respeitante à confeção do número de *popcakes*, necessária ao preenchimento desta e das próximas

tabelas, para auxiliar os alunos a interpretar a situação matemática presente nas questões que se seguiram e colocar a construção pretendida ao alcance dos alunos.

Nas tabelas que se seguem, os alunos deverão adotar procedimentos semelhantes e retirarem conclusões acerca das regularidades observadas.

b) Leite condensado

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Leite condensado (A)						
Razão A/B						

Observa alguma regularidade nesta tabela?

Figura 3.22 – Razão entre a quantidade de leite condensado e o número de *popcakes*

À semelhança da tabela anterior, espera-se que os alunos interpretem os dados da tabela e recolham informação acerca da quantidade de leite condensado necessário para confeccionar um *confetti*, mobilizando com maior autonomia e significado o conceito de razão.

c) Chocolate

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Chocolate (A)						
Razão A/B						

Completa as igualdades que se seguem, preenchendo os espaços em branco, de modo que se tornem proposições verdadeiras.

$$\frac{\text{quantidade de chocolate (g)}}{\text{número de popcakes}} = \frac{\quad}{1} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{15} = \frac{\quad}{20} = \frac{\quad}{27} = \text{_____}$$

Qual é a razão entre a quantidade de chocolate utilizada e o número de *popcakes* confeccionados?
Qual é o seu significado no contexto do problema apresentado?

Figura 3.23 – Razão entre a quantidade de chocolate e o número de *popcakes*

Na figura anterior está presente uma tabela cujo preenchimento, por parte dos alunos, pode promover a descoberta da razão existente entre a quantidade de chocolate e o número de *popcakes* confeccionados, bem como o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Após o preenchimento da tabela, os alunos serão incentivados a preencher a igualdade entre as diferentes razões, intencionando-se melhor compreensão quanto à relação estabelecida entre as duas grandezas. Espera-se reforçar a percepção de que quanto maior for o número de *popcakes* a confeccionar maior será a quantidade de chocolate a utilizar, que essa quantidade aumentará de forma proporcional e que a respetiva razão é sempre constante. Com o preenchimento da

tabela seguinte, reforça-se o desenvolvimento do raciocínio proporcional e incentiva-se a síntese e o registo das conclusões obtidas.

d) Confettis

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Confettis (A)						
Razão A / B						

Analisa a tabela anterior e, de acordo com as relações observadas, preenche as lacunas do texto que se segue de modo a obteres afirmações verdadeiras.

Para confeccionar dez *popcakes* necessitamos de _____ *confettis*. Se aumentarmos o número de *popcakes* para o dobro então o número de *confettis* _____ para o _____. Se para confeccionar quinze *popcakes* são necessários _____ *confettis*, então para confeccionar o triplo desse número de *popcakes* serão necessários _____ *confettis*. Em linguagem matemática podemos estabelecer a seguinte igualdade:

número de *confettis* = ____ × número de *popcakes*

Figura 3.24 – Razão entre o número de *confettis* e o número de *popcakes*

O preenchimento das lacunas do texto que se segue à tabela formaliza as regularidades observadas e proporciona a expressão da nova construção. Espera-se que as orientações transmitidas sejam consideradas pelos alunos e que os conduzam à conclusão e síntese dos resultados obtidos, bem como possam ser aplicadas em novas aprendizagens. Espera-se, ainda, que compreendam que se uma grandeza aumenta, a outra aumenta na mesma proporção, deixando presente a situação de proporcionalidade direta. Os alunos são conduzidos a estabelecer a igualdade entre o número de *confettis* e o número de *popcakes*, generalizando a relação observada a um número qualquer de *confettis* e *popcakes*, e a registarem, em linguagem acessível, a igualdade que os aproxima da expressão algébrica representante de situações de proporcionalidade direta, $y = k \times x$. Com a questão 2.2 pretende-se generalizar as regularidades observadas, convidando os alunos a representarem, com significado, a relação entre a quantidade de ingredientes e o número de *popcakes* pretendidos.

2.2. Que conclusões podes tirar da regularidade presente nas tabelas analisadas?

Sintetiza, preenchendo as igualdades que se seguem, as relações observadas nas diferentes tabelas.

quantidade de massa de bolo = ____ × número de *popcakes*

quantidade de leite condensado = ____ × número de *popcakes*

quantidade de chocolate = ____ × número de *popcakes*

número de *confettis* = ____ × número de *popcakes*

Figura 3.25 – Relação quantidade de ingrediente e número de *popcakes*

Através das igualdades presentes na figura anterior, os alunos poderão apresentar o conceito de razão, identificar a sua relação com a constante presente nas igualdades e desenvolver a compreensão da noção de proporcionalidade direta. Realça-se que, considerando y uma variável que represente a quantidade de ingredientes, x uma variável que represente o número de *popcakes* e k o parâmetro que represente a razão obtida através das tabelas anteriores, os alunos poderão expressar a generalização de forma análoga à da expressão algébrica $y = k \times x$, habitualmente utilizada durante o ensino da álgebra.

3.3.7 Tarefa 7 – Campo de férias

Apresentação e objetivos. A tarefa *Campo de férias* proporciona aos alunos o trabalho com padrões que, nesta tarefa, distinguem-se em geométricos, pictóricos e numéricos, de crescimento e de repetição, bem como a resolução de dois problemas não rotineiros. Os problemas estão associados a contagens, designadamente ao cálculo do produto cartesiano de conjuntos finitos e, no caso particular do problema dos apertos de mão, à generalização do processo observado a um número indeterminado de amigos. Pretende-se analisar de que forma os alunos interpretam o enunciado desses problemas, como identificam e representam os dados enunciados (*Reconhecer e Consolidação*), como colocam em prática estratégias e refletem acerca dos resultados obtidos. Interessa, ainda, compreender como os alunos raciocinam quando são incentivados a generalizar as regularidades e relações observadas, que conhecimentos mobilizam e como fundamentam matematicamente as suas opções (*Construir e Construção*). Relativamente ao trabalho desenvolvido com padrões, pretende-se que os alunos identifiquem regularidades e estabeleçam conexões entre a geometria e a aritmética, para generalizarem a regularidade observada a valores de ordem indeterminada. Ao analisarem os padrões constituintes desta tarefa, os alunos deverão revelar aptidão para identificarem a estrutura e a invariância presente nos mesmos, capacidade para descrevê-los, oralmente e por escrito, bem como obter termos de ordem seguinte. Espera-se que a compreensão das regras numéricas, implícitas nos padrões, e a adoção de linguagem simbólica adequada permitam a expressão da generalidade em linguagem algébrica. Entende-se que o processo de abstração, inerente a este processo, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Enquadramento curricular. O trabalho desenvolvido com padrões surge no primeiro ciclo, estando presente no estudo das relações entre números, números e operações e propriedades geométricas. Os alunos são incentivados a estudar sequências de números, segundo uma determinada lei de formação, e a investigar regularidades em sequências e em tabelas. Nos dois últimos anos do primeiro ciclo, procura-se promover, também, o desenvolvimento do raciocínio proporcional. No segundo ciclo, o estudo de relações e regularidades assume destaque, estando inserido no capítulo *Sequências* e

Regularidades. Os alunos são incentivados a identificarem e a apresentarem exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas, a determinarem termos de uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação, a analisarem relações entre os termos de uma sequência e a indicarem a respetiva lei de formação, utilizando linguagem natural e simbólica. Espera-se, nessa altura, que os alunos evidenciem habilidade para interpretar diferentes representações. Com o ingresso no terceiro ciclo, promove-se o desenvolvimento do sentido do número, bem como a utilização dessa competência na resolução de problemas e na investigação de regularidades numéricas. O estudo das *Sequências e regularidades* surge inserido no tema álgebra, havendo interesse em estimular a compreensão e a representação, em linguagem matemática formal, do termo geral de uma sequência numérica e a obtenção de determinado termo conhecida a sua ordem. Acrescenta-se o interesse em proporcionar a compreensão dos diferentes papéis atribuídos aos símbolos, em desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação, bem como de usar essa capacidade na mobilização, construção e consolidação de conhecimentos matemáticos. Os problemas selecionados para esta tarefa não são comuns aos aplicados no ensino básico podendo, no entanto, surgir num contexto desafiador e de incentivo à identificação de relações numéricas e de representação do raciocínio. Pretende-se, através da resolução desses problemas, conduzir os alunos a identificarem relações numéricas, a fazerem e testarem conjeturas e a formularem generalizações.

Tarefa. A tarefa inicia-se com uma breve contextualização, desafiando os alunos a participarem no enredo, a realizarem as atividades programadas para o campo de férias e a envolverem-se no processo de construção do novo conhecimento matemático. À primeira questão deu-se o nome de *Construções* e, através dessa, os alunos são incentivados a interpretar as regularidades presentes no padrão geométrico de crescimento – *construção de fósforos* – e os dados constantes numa tabela. Na figura que se segue pode-se observar esse padrão:

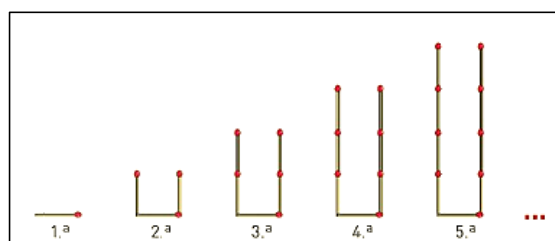


Figura 3.26 – Padrão construção de fósforos

A figura anterior transmite a presença de um padrão geométrico de crescimento que se pode traduzir por uma expressão linear do tipo $an + b$, para $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. É possível constatar que, na construção, cada termo muda de forma previsível, em relação ao

anterior, evidenciando crescimento. Os alunos são incentivados a construir termos de ordem superior ao quinto, bem como a preencherem a tabela seguinte:

Número de ordem da figura (n)	Número de fósforos gastos na construção da figura n	Número total de fósforos gastos nas primeiras n figuras
1	1	
2	3	
3	5	
4		
5		
6		
...
10		
...
30		
...
n		

Figura 3.27 – Tabela construções de fósforos

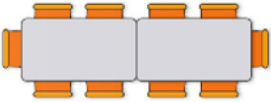

O padrão geométrico apresentado deverá conduzir os alunos à identificação do número de fósforos utilizados na construção da figura de ordem n e ao número total de fósforos utilizados. Em relação ao número de fósforos necessários para determinada construção, os alunos deverão identificar o crescimento linear e generalizar a relação numérica presente nas primeiras seis construções, a ordens numéricas superiores, designadamente ao décimo e trigésimo termos – aritmética generalizada. Por sua vez, espera-se que consigam reconhecer construções recentes, interpretando o significado atribuído, neste contexto, à letra n e generalizar a regularidade observada a um número de ordem indeterminado, apresentando esse termo em linguagem simbólica equivalente à da expressão algébrica $2n - 1$. Esclarece-se que o preenchimento da tabela, ainda que possa ser iniciado através do método de contagem (continuação do padrão, efetuando a contagem até ao elemento desejado) ou das diferenças (determinar a diferença entre dois elementos consecutivos), tornar-se-á uma dificuldade quando os alunos pretenderem generalizar as regularidades observadas a números de ordem elevada ou indeterminados. A dificuldade aumenta quando se solicita a indicação do número total de fósforos utilizados até à construção de ordem n . Nesse caso, espera-se que os alunos demonstrem capacidade para selecionarem estratégias e mobilizarem construções concebidas, para afastarem a ideia de um crescimento linear, bem como para expressarem a generalidade em linguagem simbólica, n^2 . Considera-se que, no contexto apresentado, os alunos poderão mobilizar as suas aptidões para resolverem corretamente problemas não rotineiros que, no ensino secundário, transmitiriam a presença de uma progressão aritmética de razão dois, primeiro termo igual a um e termo geral $2n - 1$. O termo geral n^2 resultaria, então, do cálculo da soma dos primeiros n termos dessa progressão, ou seja, da simplificação da expressão algébrica $S_n = \frac{1+(2n-1)}{2} \times n$.

Na segunda questão volta a surgir um padrão pictórico, mas apresentado na forma de problema. Pretende-se despertar o interesse dos alunos pela descoberta de regularidades, a discussão e a aplicação de estratégias criativas de resolução.

1.2. Na terça-feira o almoço será servido no refeitório da Escola.

Normalmente as mesas estão dispostas de forma a poderem sentar-se seis pessoas.

Ao juntarem duas destas mesas podem sentar-se à sua volta dez pessoas.

Lê com atenção as questões, onde a regra de junção das mesas se mantém inalterável.

Desenvolve uma estratégia que te permita dar resposta a essas questões.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que te auxiliem a expor o teu raciocínio.

- Quantas pessoas se podem sentar à volta de 3 mesas? E de 4? E de 5?
- O Martim avisou o chefe do refeitório que estariam presentes no almoço 50 pessoas. Quantas mesas serão necessárias?
- O chefe do refeitório está muito preocupado, pois na cantina há apenas 15 mesas. Nessas condições, qual é o número máximo de pessoas que pode ir ao almoço?
- Se representarmos por n o número de pessoas presentes no almoço, escreve uma expressão que represente o número de:
 - Cadeiras \rightarrow _____
 - Mesas \rightarrow _____

Figura 3.28 – Padrão Mesas do refeitório

O enunciado do problema, presente na figura 3.28, revela a existência de um padrão, associado às mesas e cadeiras, e incentiva o desenvolvimento de ideias que permitam aos alunos compreender e dar continuidade à regularidade observada. Espera-se que os alunos interajam e apliquem estratégias criativas de resolução, ao invés de um conjunto de procedimentos aos quais não deem significado. O questionamento objetiva conduzir os alunos à discussão dos processos selecionados, das soluções encontradas, à integração de construções adquiridas, à conjectura e à generalização das regularidades observadas. Incentiva, ainda, a interpretação e utilização de linguagem simbólica e a comunicação, oralmente e por escrito, em linguagem natural e matemática, dos resultados alcançados.

Na questão que se segue – *mensagem deixada na pista dois* – solicita-se a análise de um padrão, pictórico de repetição, bem como a identificação da respetiva regularidade.

Mensagem deixada na pista n.º 2:

Questão n.º 2: De acordo com a disposição apresentada, indica que polígono se encontrará na posição 28.




Figura 3.29 – Padrão poligonal de repetição

A figura 3.29 sugere a presença de um padrão de polígonos que se repete ciclicamente e que pode ser entendido como uma sequência idêntica ao conjunto de letras ABCD ABCD ABCD AB... Espera-se que os alunos identifiquem o motivo de repetição, bem como a sua generalização ao termo de ordem vinte e oito. Não se pretende que os alunos continuem a desenhar a sequência apresentada, mas que identifiquem a regularidade presente nos quatro polígonos, respetivamente pentágono, triângulo, hexágono e quadrado. Essa compreensão poderá promover, nos alunos, um paralelismo entre a sequência observada e a regularidade presente nos múltiplos naturais do número quatro $M_4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$, e inferir que os termos de ordem 4, 8, 12, 16, 20, 24 e 28 correspondem sempre ao quadrado.

Segue-se a apresentação do padrão deixado na mensagem da pista quatro. O reforço visual pode permitir a aplicação de estratégias, tais como a realização de um desenho, para identificarem regularidades, generalizarem e justificarem as suas opções.

Mensagem deixada na pista n.º 4: Análise com atenção a sequência de figuras.

a) Completa a figura número 4, desenhando a imagem que deveria estar afixada na árvore.

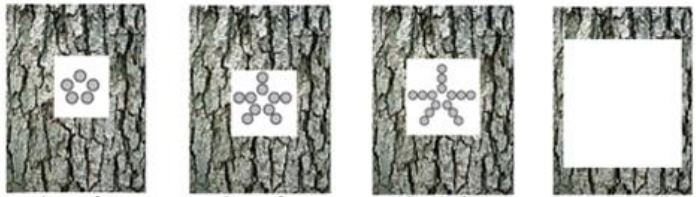


Figura n.º 1 Figura n.º 2 Figura n.º 3 Figura n.º 4

b) O grupo do Martim vai continuar a prova, quantos círculos encontrará na figura número 13? E na figura número n ?

Figura 3.30 – Padrão geométrico de crescimento

A figura 3.30 revela a presença de uma sequência geométrica de crescimento e o questionamento incentiva a continuação da construção geométrica, partindo-se da abordagem visual para estimular a identificação da regularidade. Por sua vez, ao solicitar-se o número de círculos presente em determinada figura, a professora está a incentivar-se a combinação entre a representação figurativa e a numérica para que os alunos consigam, posteriormente, estabelecer generalizações aritméticas não consecutivas, determinando o número de círculos presentes na figura de ordem treze, bem como a utilização de linguagem simbólica, $5n$, para representar o número de círculos existentes na figura de ordem n .

Os padrões numéricos foram, também, contemplados nesta tarefa, tal como se pode constatar através da figura que se segue:

Mensagem deixada na pista n.º 3:

Questão n.º 3: Considera a seguinte sequência de números:

7	11	15	19	23
---	----	----	----	----

Qual poderá ser a expressão algébrica que representa essa sequência de números, quando n representa a posição de cada número indicado?

(A) $5n + 2$ (B) $4n + 3$ (C) $4n + 1$

Figura 3.31 – Padrão numérico de crescimento

Com a presença deste padrão numérico, a professora enriqueceu a tarefa, proporcionando aos seus alunos abordagens diferenciadas à análise de regularidades e à respetiva generalização. A regularidade observada sugere a presença de um padrão numérico de crescimento, que pode ser determinado através do método das diferenças: $11 - 7 = 15 - 11 = 19 - 15 = 23 - 19 = 5$. Contrariamente às solicitações anteriores, não se pede que os alunos generalizem a regularidade observada, mas que selecionem a expressão algébrica que dá origem à sequência de números apresentados. Espera-se observar como interpretam o significado atribuído à letra n e como relacionam a expressão algébrica com a sequência de termos apresentados. A questão que se segue afasta os alunos da análise de padrões, direcionando-os para a interpretação do enunciado de um problema simples que poderá, inicialmente, ser resolvido através da mobilização de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores. Porém, volta a estar presente a generalização do processo analisado e a expressão do mesmo em linguagem algébrica.

1.4. Na quinta-feira realizar-se-á o Peddy-Papper no Choupal de Coimbra. Os participantes agrupar-se-ão em 4 elementos e seguirão por determinado trilho, seguindo as indicações de um mapa que lhe será entregue no início da prova. As pistas encontrar-se-ão afixadas em árvores centenárias. Sempre que as encontrarem, os grupos deverão recolher a mensagem escondida e responder às respetivas questões. Ganhará quem tiver respondido corretamente a todas as questões e fizer a prova em menos tempo. Queres participar? Segue as pistas e responde às questões deixadas em cada mensagem.

Mensagem deixada na pista n.º 1:

“Cada elemento do vosso grupo terá de fazer 20 abdominais”.

Questão n.º 1.1: Quantos abdominais fará o vosso grupo?

Questão n.º 1.2: Considera n o número de grupo participantes.

Se todos os elementos de cada grupo fizerem os referidos abdominais, quantos abdominais se farão no total?

Figura 3.32 – Generalização a um número indeterminado de participantes

A figura anterior sugere a seleção da operação multiplicação no sentido da compreensão aditiva, presente na igualdade $4 \times 20 = 20 + 20 + 20 + 20$ e a conclusão de que em cada grupo se fazem, ao todo, 80 abdominais. Essa inferência será essencial para que

os alunos deem resposta correta à questão que se segue, integrando esse valor numérico no processo de generalização. Com a generalização a um número indeterminado de grupos, o processo multiplicativo terá de ser substituído pelo aditivo, pois a questão assume forma infinita e requer a apresentação de uma expressão algébrica equivalente a $80 \times n$. Segue-se a apresentação dos dois problemas não rotineiros aos quais se fez referência na fase inicial da apresentação desta tarefa. Segue-se o problema dos gelados:

1.3. Na quarta-feira todos os participantes poderão deliciar-se, ao lanche, com um maravilhoso gelado da geladaria da Dona Henriqueta. Na geladaria há dois tipos de recipientes, copo ou cone de bolacha.

a) O Martim vai escolher a sua bola de gelado, entre os seus dois sabores preferidos: morango e chocolate. De quantas maneiras diferentes pode ele formar o seu gelado?

Desenvolve uma estratégia que te permita dar resposta a esta questão.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que te auxiliem a expor o teu raciocínio.

b) E se o Martim acrescentasse aos seus dois sabores preferidos o de ananás? E se juntasse um quarto sabor, o de mirtilo?

Quantas possibilidades de escolha teria em cada uma dessas situações?

Figura 3.33 – Quantos gelados diferentes?

A leitura do enunciado do problema sugere, da parte da professora: o interesse em despertar a curiosidade dos seus alunos, em estimular o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, em particular a exposição do raciocínio, a mobilização de conhecimentos matemáticos, a aplicação de estratégias e do desenvolvimento do sentido crítico, de modo a contribuir, para a apresentação de soluções corretas para as questões colocadas.

O problema que se segue incentiva o desenvolvimento do raciocínio combinatório, essencial para relacionar dados, melhorar a compreensão de conceitos matemáticos e estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico.

1.5. No último dia da semana todos os participantes foram ao cinema. Quando o Martim chegou ao local combinado já lá estavam quatro dos seus amigos.

a) Cada um dos cinco amigos cumprimentou-se com um aperto de mão.

Ninguém pode cumprimentar mais do que uma vez.

Quantos apertos de mão foram dados?

b) Explica como procederias para determinar o número de apertos de mão dados por um número qualquer de amigos.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que te auxiliem a expor o teu raciocínio.

Figura 3.34 – Quantos apertos de mão?

As questões colocadas sugerem a generalização do processo de contagem do número de apertos de mão, estendendo o processo de cinco para um número indeterminado de

amigos. Espera-se que os alunos consigam estabelecer relação entre os dados apresentados, convertendo-os para dados numéricos que se relacionem através de um subconjunto do produto cartesiano. Considerando $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ o conjunto formado pelos cinco amigos, a solução para o problema colocado poderá ser representada através da seguinte relação de apertos de mão:

$$\{(a_1, a_2); (a_1, a_3); (a_1, a_4); (a_1, a_5); (a_2, a_3); (a_2, a_4); (a_2, a_5); (a_3, a_4); (a_3, a_5); (a_4, a_5)\} \subset A \times A$$

Os alunos deverão concluir que relações semelhantes à apresentada pelo par (a_i, a_i) não se verificam e que $(a_i, a_j) = (a_j, a_i)$ para $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, uma vez que os amigos não se podem cumprimentar mais de que uma vez.

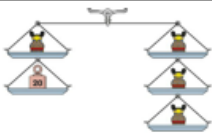
Em traços globais, a presente tarefa pretende envolver os alunos em processos matemáticos de generalização tendo por base a observação e a análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas e a sua expressão em linguagem natural, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos, bem como a resolução de problemas. A estrutura apresentada incentiva a interpretação de enunciados, a integração e a combinação de construções e estratégias que favoreçam a nova construção, esperando-se, como tal, o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer, Construir, Construção e Consolidação*.

3.3.8 Tarefa 8 – Relação de Equilíbrio

Apresentação e objetivos. Através da presente tarefa procura-se estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, incentivando a interpretação e utilização de linguagem simbólica e, em particular, do sinal de igual (*Reconhecer e Consolidação*), para que os alunos estabeleçam relações numéricas entre os dados apresentados (*Construir*). Dado o interesse em conduzir os alunos a estabelecerem relações com significado, recorreu-se à balança de pratos. Na figura que se segue pode-se visualizar a primeira questão colocada aos alunos: uma balança em equilíbrio que representa a igualdade da massa presente em cada um dos lados da balança.

1. Observa a figura ao lado, onde se representa uma balança de pratos (cuja massa é desprezável), quatro bonecas iguais e uma massa marcada com 20 gramas.

Representa por b a massa de cada boneca, expressa em gramas.



a) Representa através de uma expressão matemática a massa dos objetos colocados nos pratos do lado esquerdo da balança.

b) Representa por uma expressão matemática a massa dos objetos colocados nos pratos do lado direito da balança.

c) O que acontece à balança se for retirada uma boneca de um dos pratos?

d) O que acontece à balança se for acrescentada uma massa marcada de 2 g a um prato da balança, em ambos os lados?

e) Qual é a massa de cada boneca?

Figura 3.35 – Relação de igualdade entre duas expressões algébricas

As primeiras duas questões incentivam os alunos a utilizarem linguagem simbólica para representarem a massa dos objetos colocados nos pratos, de cada um dos lados da balança, esperando-se que representem por $b + 20$ a massa constante nos pratos do lado esquerdo e por $b + b + b$, ou por uma expressão algébrica equivalente, tal como $3 \times b$, a massa colocada nos pratos do lado direito da balança. Ao representarem em linguagem simbólica as situações descritas, entende-se que os alunos estão a utilizar linguagem simbólica com significado.

Através das alíneas c) e d) das questões colocadas procura-se direcionar a atenção dos alunos para situações em que a balança está em equilíbrio ou em desequilíbrio, de modo a que os alunos adquiram maior compreensão acerca das relações numéricas – massa colocada em cada um dos lados da balança. Espera-se que na alínea c) indiquem que a balança fica em situação de desequilíbrio, ou seja, que a igualdade $b + 20 = 3 \times b$ transformar-se-á na desigualdade $20 < 3 \times b$, caso se retire uma boneca do prato do lado esquerdo, ou na desigualdade $b + 20 > 2 \times b$, caso se retire uma boneca de um dos pratos do lado direito. Em relação à questão colocada na alínea d), espera-se que compreendam que a igualdade inicial se mantém, expressando que $b + 20 = 3 \times b$ é equivalente a $b + 20 + 2 = 3 \times b + 2$. Considera-se que ao estabelecerem esta equivalência, expressando-a de forma clara, os alunos estão a estabelecer relações numéricas (*Construir*).

Na última questão solicita-se a atribuição de valor numérico à massa da boneca, ou seja, a apresentação de solução para a equação $b + 20 = 3 \times b$ (*Construção*). Interessa analisar que competências mobilizarão os alunos para resolver esta equação e que significado atribuirão à letra b .

Com a questão que se segue pretende-se, recorrendo novamente ao equilíbrio estabelecido pela balança e à representação pictórica, massa do objeto, analisar se os alunos conseguem determinar o valor da massa desse objeto, mobilizando conhecimentos que permitam resolver as equações que sobressaem do equilíbrio estabelecido pelas balanças e utilizar, com significado, linguagem matemática simbólica.

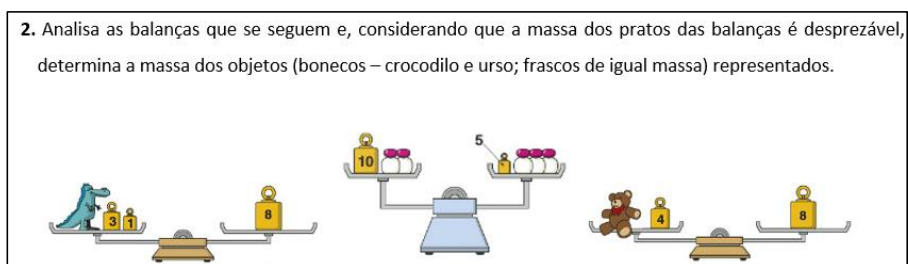


Figura 3.36 – Resolução de equações

Através da proposta anterior, pretende-se estimular o aperfeiçoamento dos processos utilizados pelos alunos para expressarem e resolverem equações, bem como para aprofundarem o entendimento das relações numéricas, presentes nas igualdades, e da linguagem simbólica utilizada. Na presente tarefa os alunos são, ainda, incentivados a utilizar linguagem algébrica para representar linguagem matemática enunciada, tal como se pode verificar seguidamente:

- | |
|---|
| <p>3. A Sofia tem x anos e o seu pai tem o quádruplo da sua idade.</p> <p>3.1. Indica uma expressão matemática que represente a idade atual do pai.</p> <p>3.2. Indica uma expressão matemática que represente a idade da Sofia daqui a 5 anos.</p> <p>3.3. Indica uma expressão matemática que represente a idade que o pai da Sofia tinha o ano passado.</p> <p>3.4. Se a soma das idades da Sofia e do seu pai for cinquenta anos, que idade terá a Sofia? E o seu pai?</p> |
|---|

Figura 3.37 – Expressões algébricas e equações

De acordo com os dados enunciados, os alunos deverão selecionar a letra x para representarem a idade atual da Sofia e, partindo dessa representação, expressar em linguagem simbólica a idade atual do pai, $4 \times x$. Para tal, os alunos não poderão ter constrangimentos quanto à utilização de linguagem simbólica e deverão reconhecer e integrar o conceito de quádruplo. Espera-se que, ao atribuírem significado às expressões x e $4 \times x$ e ao integrarem os conceitos aditivo e de igualdade, os alunos consigam, mobilizando os procedimentos adotados na primeira e na segunda questão desta tarefa, descobrir as idades da Sofia e do seu pai. Destaca-se que através da segunda e da terceira alínea desta questão intenciona-se melhorar a compreensão do significado atribuído à letra x , solicitando-se a indicação de uma expressão algébrica que represente a idade que a Sofia terá passados cinco anos, $x + 5$, e a idade que o pai da Sofia tinha no ano anterior, $4 \times x - 1$.

Enquadramento curricular. No segundo ciclo, no tópico *Relações e regularidades* do NPMEB (2007), propõe-se o incentivo à expressão de relações matemáticas, através de igualdades e desigualdades, e a visualização de expressões algébricas, como as fórmulas para o cálculo de áreas. Propõe-se que, na transição para a aprendizagem algébrica, se utilizem expressões algébricas para representar problemas, usando-se letras para representar situações de indeterminação. Sugere-se, ainda, a exploração de situações diversificadas em que surjam letras antes do ensino de procedimentos algébricos rotineiros, para que os alunos questionem os seus significados e transitem com maior naturalidade entre a linguagem corrente e a linguagem matemática.

Capítulo 4

O desenvolvimento do pensamento algébrico sob o olhar do *RBC+C* e influência da mediação

Neste capítulo apresentam-se resultados referentes à recolha dos registos escritos dos alunos, dos registos audiovisuais e dos registos da professora. Esses resultados são descritos e interpretados de acordo com as categorias definidas e respeitantes ao modelo epistémico *RBC+C* (Dreyfus et al., 2001) e à mediação social de aprendizagem, compatível com a do ciclo didático descrito por Mariotti e Bussi (2008). Será apresentada uma síntese respeitante a cada categoria descrita, através da qual procurar-se-á transmitir as relações evidenciadas entre as diferentes ações epistémicas, bem como a influência da mediação no desenvolvimento da nova construção.

O trabalho empírico desta investigação realizou-se ao longo do ano letivo, como parte integrante dos conteúdos programáticos definidos para o quinto ano de escolaridade. O espaçamento da sequência de tarefas aplicadas não foi sempre igual, face à necessidade de conciliar o interesse em promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, os conteúdos matemáticos a lecionar e as atividades letivas dos alunos. A análise de dados centrou-se, pormenorizadamente, em oito tarefas: *Luzes de Natal*, *Conta-quilómetros*, *Doces de Páscoa*, *Caça ao ovo*, *Regras operatórias das potências*, *O aniversário da Margarida*, *Campo de férias* e *Relação de Equilíbrio*, que foram sujeitas a três tipos de análise. A análise de primeira ordem realizou-se a partir da compilação dos dados referentes a cada uma delas. A análise de segunda ordem consistiu na organização dos dados, tendo esses sido distribuídos em seis categorias – *Reconhecer*, *Construir*, *Construção*, *Consolidação*, *Professor e Alunos* – de acordo com o problema do estudo e dos fundamentos teóricos, bem como na seleção dos dados mais representativos de cada unidade de ensino, os quais se distribuíram por seis blocos, ao que se acrescentaram outros dois que relacionam as ações epistémicas, entre si, e com a influência da mediação.

O presente capítulo é constituído por oito secções respeitantes às oito tarefas, onde se descrevem os resultados da análise das resoluções dos alunos e da mediação estabelecida entre eles e com a professora. Cada secção, excetuando a primeira, encontra-se dividida em seis subsecções, correspondentes às categorias de análise definidas. Essas respeitarão a seguinte ordem de apresentação: *Reconhecer*, *Construir*, *Construção*, *Consolidação*, *Professor e Alunos*. A ação *Consolidação* não se evidenciou

na resolução da primeira tarefa, situação que se explica através da sua definição que exige a aplicação de uma construção que se reconheça como recente.

Será efetuada uma análise pormenorizada de cada categoria definida, na respetiva subsecção, porém, no que respeita às ações epistémicas, essas também surgirão na análise das categorias definidas no âmbito da *Dimensão social da aprendizagem, Professor e Alunos*.

Neste capítulo apresenta-se, como tal, a análise de segunda ordem.

4.1 Tarefa 1 – *Luzes de Natal*

Com a elaboração e implementação da tarefa *Luzes de Natal* objetivou-se promover a construção do conceito de mínimo múltiplo comum e a utilização de linguagem matemática simbólica. A estrutura da tarefa desenvolvida, nomeadamente a sequencialidade das questões apresentadas, a representação tabelar e o incentivo à observação de regularidades e à comunicação e justificação de ideias intencionou, por parte da investigadora, a extensão de regularidades e propriedades observadas a qualquer número, determinado ou indeterminado, indicações compatíveis com os ideais do *Early algebra*. Nesta tarefa, a construção do novo conhecimento prende-se com a conclusão, por parte dos alunos, de que *o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números naturais é o maior desses números*, com o significado atribuído à letra m (m minutos) e com o processo de generalização. O cariz exploratório promovido pela estrutura da tarefa permite considerá-la, na perspetiva da mediação semiótica, um artefacto, elaborado e aplicado pela professora para observar de que forma os alunos constroem o novo conhecimento matemático, desenvolvendo o pensamento algébrico e produzindo novos signos matemáticos, resultantes da mediação estabelecida pela professora e alunos e entre alunos.

Após elaboração da tarefa, por parte da professora, tendo essa o interesse em estimular o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer, Construir e Construção*, procedeu-se à leitura global do problema e à prestação de orientações quanto à postura que os alunos deveriam assumir durante a resolução, designadamente empenho, partilha e representação do raciocínio desenvolvido. Na fase de resolução, a professora acompanhou os alunos, seguindo as indicações do ciclo didático de Bussi e Mariotti (2008), questionando, focando a atenção dos alunos para aspetos relevantes, esclarecendo dúvidas, incentivando a utilização de artefactos e a construção de signos matemáticos.

Segue-se uma descrição pormenorizada da análise efetuada aos resultados recolhidos, refletindo-se sobre o desenvolvimento das ações epistémicas, da relação estabelecida

entre essas e da influência da mediação no desenvolvimento das mesmas e, em particular, na construção do novo conhecimento.

Na figura que se segue pode-se constatar, através das anotações da investigadora, o ambiente observado após a apresentação da tarefa *Luzes de Natal*.

*A tarefa foi apresentada, tendo-se em consideração o seu objetivo e a postura que se pretendia que os alunos assumissem durante a sua realização.
Os alunos não colocaram qualquer dúvida.
Os alunos iniciaram a tarefa com entusiasmo.*

Figura 4.1 – RI sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Luzes de Natal*

4.1.1 Reconhecer

O excerto que se segue retrata a forma como os alunos GI e LP identificaram e selecionaram informação contida no enunciado do problema, para darem resposta à primeira questão colocada, a qual respeita ao preenchimento das tabelas do TitoMat, RitaMat e EduMat.

*[Entretanto GI e LP interrompiam a leitura para validarem algumas ideias, recolhendo informação do enunciado do problema para preencherem as tabelas].
GI: As do TitoMat piscam de seis em seis (...) da RitaMat de nove em nove (...)
GI e LP [em simultâneo]: (...) e o Edu/EduMat de dezoito em dezoito.
GI: (...) não conta o instante inicial, é quando acendem todas
[...]
LP: Já está nas tabelas!*

Figura 4.2 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Luzes de Natal* (GI, LP)

Quando confrontados com o preenchimento das tabelas do TitoMat, da RitaMat e do EduMat, os alunos releeram o enunciado do problema e, em conjunto, *reconheceram* que as regularidades numéricas correspondentes ao número de vezes que acendia cada uma das lâmpadas seriam úteis para o preenchimento das tabelas. *Reconheceram*, ainda, que o instante inicial corresponderia ao valor zero já preenchido nas tabelas, associando-o à primeira vez que as três lâmpadas piscaram em simultâneo.

A ação *Reconhecer* esteve, nesta situação, associada à *Interpretação* do enunciado do problema e ao reconhecimento de informação considerada útil pelos alunos para preencherem com correção as tabelas do TitoMat, da RitaMat e do EduMat.

De acordo com as categorias e subcategorias definidas, pode-se considerar que o excerto selecionado corresponde à categoria *Reconhecer* e que essa se ramifica nas subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas*, presentes no excerto anterior.

A ação *Reconhecer* esteve, igualmente, presente no preenchimento das tabelas, surgindo associada à percepção de *Regularidades* e de *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores, entendidas como úteis para darem resposta às questões colocadas.

GI e LP [em simultâneo]: *doze mais seis... dezoito...* [apelando ao cálculo mental foram proferindo em voz alta os restantes números, enquanto GI continuava a registá-los].
LP [referindo-se à tabela da RitaMat]: *Agora de nove em nove. Nove, dezoito.*
LP e GI [quase em simultâneo]: *é a tabuada do nove... vinte e sete.*
LP: *nove vezes quatro trinta e seis, quarenta e cinco,* [demorando algum tempo] *cinquenta e quatro, cinquenta e quatro mais nove sessenta e quatro menos um, sessenta e três, nove vezes* [foi interrompido por GI].

Figura 4.3 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Luzes de Natal (GI, LP)

O preenchimento das tabelas tornou-se possível através da identificação da lei de formação enunciada, a qual permitiu dar continuidade à *Regularidade* observada. Contudo, para o fazerem, os alunos tiveram de selecionar *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores, tais como a tabuada e o cálculo mental. Neste excerto será possível categorizar a ação *Reconhecer* e segmentá-la nas subcategorias *Regularidades* e *Estruturas adquiridas*.

Considera-se que os alunos identificaram a lei de formação respeitante à primeira tabela, *para obter o termo de ordem n , adicionamos seis unidades ao termo anterior*, e reconheceram que o algoritmo correspondente à tabuada do número nove estaria associado à regularidade observada. Esta percepção, reconhecimento, contribuiu para um preenchimento correto da tabela da RitaMat.

No programa de análise adotado, ATLAS.ti, associou-se este excerto à categoria *Reconhecer*, a qual se dividiu nas subcategorias *Regularidades* e *Estruturas adquiridas*.

A categoria *Reconhecer* voltou a estar presente no excerto que se segue:

Precipitaram-se ao trautear a tabuada, de modo que o GI chegou a registar o número 63, ainda que o apagasse rapidamente quando lembrado por LP que os registos seriam apenas para o primeiro minuto. Olhou para a professora e referiu que não poderia passar do 60, como se estivesse à procura de confirmação.

Figura 4.4 – RI sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Luzes de Natal

De acordo com os registos efetuados pela investigadora, os alunos reconheceram a correspondência entre 1 minuto e 60 segundos, *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores que contribuíram para um preenchimento correto da tabela. Nesta situação, voltou a estar presente a categoria *Reconhecer*, sob a forma de *Estruturas adquiridas*.

Na figura que se segue, pode-se analisar o registo escrito dos alunos relativo ao preenchimento das referidas tabelas.

TituMat	
Instantes (segundos) registrados no 1.º minuto	0
	6
	12
	18
	24
	30
	36
	42
	48
	54
	60

RitaMat	
Instantes (segundos) registrados no 1.º minuto	0
	9
	18
	27
	36
	45
	54

EduMat	
Instantes (segundos) registrados no 1.º minuto	0
	18
	36
	54

Figura 4.5 – RA respeitante ao preenchimento das tabelas da tarefa Luzes de Natal

Pode-se constatar, através da informação constante nas tabelas, que o *Reconhecimento* e seleção de dados constantes no enunciado do problema e de competências adquiridas em aprendizagens anteriores contribuiu para cumprir, com sucesso, a primeira etapa da tarefa. O registo que se segue refere-se, novamente, às tabelas apresentadas. A sua pertinência estará relacionada com a possível identificação de regularidades nas três tabelas, expressa pelo aluno GI através da sua postura – expressões corporais.

Depois de concluído o preenchimento das tabelas, processo que a investigadora considerou ter sido rápido, passaram às questões seguintes. Porém, foi possível perceber que o GI ficou “preso” às tabelas. Foram breves esses instantes, sendo que naquele momento a professora considerou não colocar qualquer questão.

Figura 4.6 – RI sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa Luzes de Natal

De acordo com a postura de GI – ficou “preso” às tabelas – descrita pela investigadora, poderá colocar-se a questão: terá GI identificado alguma regularidade nas tabelas que os alunos preencheram? Essa possibilidade poderá colocar-se pelo facto de se ter dispensado maior atenção aos dados preenchidos: imobilidade e olhar fixo, bem como hesitação em transitar para a questão seguinte.

O excerto que se segue diz respeito à questão: *no primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?*

Para responderem a esta questão, os alunos terão que identificar regularidades presentes nas tabelas preenchidas e reconhecer que esse padrão poderá ser útil para apresentarem uma resposta e justificarem o raciocínio desenvolvido.

[Leram em voz baixa a primeira questão (1.1) e GI vira rapidamente a folha para observar as tabelas. LP acompanhou o colega]: No dezoito.

LP: e no cinquenta e quatro.

GI: Olha aqui, no trinta e seis. Dezoito é o menor número. [GI começou a escrever, sendo acompanhado por LP]. No primeiro minuto as lâmpadas piscam em simultâneo de dezoito em dezoito...

Figura 4.7 – RI sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Luzes de Natal (GI,LP)

Neste excerto pode-se constatar, pela rapidez demonstrada por GI, que o eventual reconhecimento de regularidades se iniciou, tal como suposto, no final do preenchimento das tabelas. A ação “motora” observada, designadamente rapidez de GI

ao virar a folha para reanalisar as tabelas já preenchidas, poderá ser interpretada, à semelhança dos estudos divulgadas por Kirsh e Maglio (1994) e apresentados na revisão de literatura, como uma ação pragmática que contribuiu para o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*.

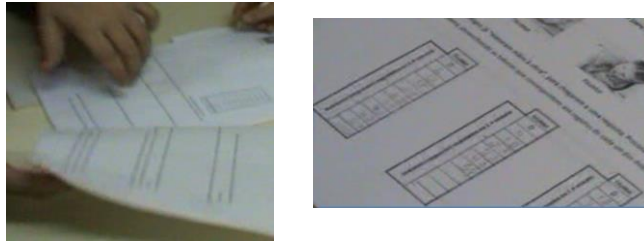


Figura 4.8 – RAV sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa *Luzes de Natal*

Ao compararem com maior detalhe as tabelas preenchidas, os alunos compreenderam que a coincidência de valores numéricos verificava-se para os números dezoito, trinta e seis e cinquenta e quatro segundos, e concluíram que esse padrão ocorria, em cada uma das tabelas, de dezoito em dezoito segundos. Compreenderam, ainda, que a *Regularidade* identificada permitia dar resposta à questão colocada, estando associada ao tempo que seria necessário esperar para ver, para além do instante inicial, as lâmpadas piscarem em simultâneo. A ação *Reconhecer* voltou a estar presente na questão 1.4, quando se solicitou, aos alunos, a indicação do mínimo múltiplo comum de dois ou mais números naturais. Pode-se constatar essa percepção na descrição que se segue.

[Depois de lerem o enunciado da questão 1.4, solicitaram a ajuda da professora]
G1: *Não é preciso fazer contas, pois não.*
P: *Espero que não façam cálculos!*
G1: *Então é igual ao que já fizemos, é dezoito.* [Entretanto escreve 18, porque 6 e 9 são divisores de 18].
LP: [Ao perceber que o colega voltava a querer escrever uma resposta igual às anteriores disse]: *dezoito é múltiplo de seis e de nove, podes escrever só isso!*
[G1 aceitou e escreveu].

Figura 4.9 – RAV sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa *Luzes de Natal* (G1,LP,P)

Ao analisar o desempenho dos alunos na resposta à alínea c) da questão 1.4 – *determina o mínimo múltiplo comum entre 6, 9 e 18* – verifica-se que esses reconheceram que a informação constante nas tabelas e a resposta dada nas alíneas anteriores poderia ser utilizada para determinar o mínimo múltiplo comum. Os alunos conseguiram relacionar o menor múltiplo comum com o menor dos valores comuns às três tabelas, excetuando o instante inicial. Reconheceram, ainda, que os conceitos de múltiplo e de divisor poderiam ser utilizados para justificar a opção tomada: indicação do mínimo múltiplo comum. Nesta situação, a ação *Reconhecer* esteve associada à percepção dos alunos quanto à utilização de *Estruturas adquiridas*: conhecimento resultante do preenchimento das tabelas e aplicado na resolução das questões 1.1, 1.2 e 1.3, para

determinarem o mínimo múltiplo comum dos números indicados nas alíneas a), b) e c) da questão 1.4.

Seguidamente, pode-se identificar a presença da ação *Reconhecer* na resolução da alínea d) da questão 1.4: *determina o mínimo múltiplo comum entre 5, 10 e 20.*

GI: <i>Esta é diferente. Mas é o mesmo, é vinte.</i> LP: <i>Está na tabuada do cinco e dez mais dez é vinte.</i>

Figura 4.10 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Luzes de Natal* (GI, LP)

Apesar dos valores presentes nesta alínea não terem surgido em questões anteriores, os alunos *reconheceram* que esta nova situação seria semelhante às anteriores, transmitindo-nos que para descobrirem o menor múltiplo comum entre cinco, dez e vinte poderiam pensar como haviam feito para os números apresentados nas alíneas a), b) e c) da questão 1.4. De acordo com o diálogo anterior verifica-se que os alunos identificaram uma estrutura adquirida, cálculo do menor múltiplo comum entre números específicos, para determinar o menor múltiplo comum entre quaisquer números múltiplos entre si. A ação *Reconhecer* tornou-se, neste excerto, visível através da subcategoria *Estrutura adquirida*.

Nos resultados que se seguem vamos pode-se constatar que *Reconhecer* tornar-se-á útil quando os alunos generalizarem a propriedade observada, pois esses voltarão a selecionar este conhecimento adquirido para concluírem que o menor múltiplo comum entre um número indeterminado e o seu dobro é o dobro desse número.

A figura que se segue exemplifica, apresentando pequenos excertos, momentos da resolução da tarefa em que se verificou o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Revela, igualmente, de que forma se manifestaram as subcategorias *Interpretação* (I), *Estruturas adquiridas* (EA) e *Regularidades* (Rg) e como essas se relacionaram entre si.

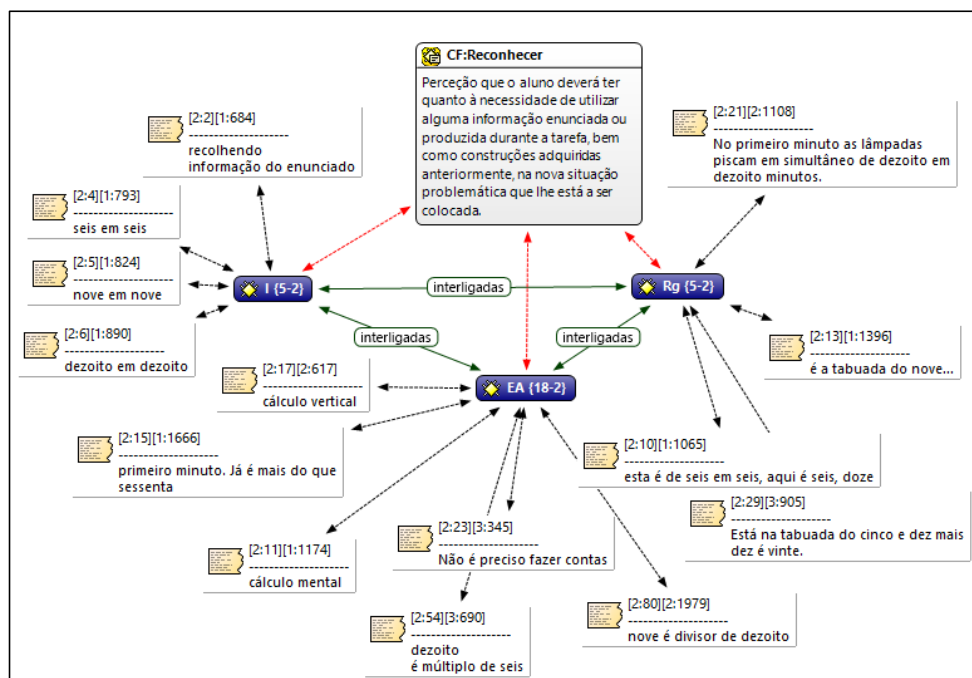


Figura 4.11 – RAV da ação epistêmica Reconhecer em Luzes de Natal

Pode-se observar através da figura 4.11 que a subcategoria *Interpretação* (I) tornou-se, essencialmente, visível através da análise do enunciado do problema colocado e das tabelas preenchidas. O excerto [2:2] – *recolhendo informação do enunciado* – transmite a interpretação do enunciado do problema, quando os alunos recolheram informação necessária ao preenchimento das tabelas e evidenciaram percepção da utilidade que essa informação teria na obtenção de respostas para as questões colocadas. Os excertos [2:4], [2:5] e [2:6] revelam, da parte dos alunos, interpretação das regularidades identificadas no enunciado do problema e nas tabelas preenchidas. Por sua vez, constata-se que a *Interpretação* (I) do enunciado do problema e da informação constante nas tabelas foi essencial para o desenvolvimento de ideias e para a progressão dos alunos na tarefa, verificando-se uma interligação entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA) e entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Regularidades* (Rg).

No que respeita à ligação estabelecida entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA), verifica-se que a *Interpretação* (I) despoletou, nos alunos, o reconhecimento de conceitos e procedimentos já consolidados e que poderiam ser utilizados em benefício da resolução do problema colocado. De acordo com o esquema e excertos apresentados, é possível identificar o cálculo vertical [2:17] e mental [2:11], os conceitos de múltiplo [2:54] e divisor [2:80], a correspondência estabelecida entre um minuto e sessenta segundos [2:15] e o reconhecimento de regularidades [2:23] como *Estruturas adquiridas* (EA).

Considera-se, no entanto, a existência de uma relação biunívoca entre as duas subcategorias, uma vez que a seleção das referidas estruturas permitiu o preenchimento das tabelas e a apresentação de respostas intermédias que promoveram a interpretação dos novos dados e reconhecimento da sua utilidade no desenvolvimento da tarefa. Por exemplo, a *Interpretação* (I) da informação enunciada permitiu que os alunos percecionassem a utilidade das tabuadas [2:13] e [2:29], e a correspondência entre minutos e segundos [2:15], *Estruturas adquiridas* (EA), para o preenchimento das tabelas, mas esse preenchimento foi também alvo de interpretação permitindo, aos alunos, darem resposta às questões que se seguiram.

Constata-se, ainda, que a seleção de *Estruturas adquiridas* (EA), tais como a tabuada, o cálculo mental e as estratégias de cálculo permitiram maior rapidez e correção no trabalho realizado. Justifica-se, deste modo, a interligação entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA).

De acordo com o esquema apresentado, verifica-se que os alunos identificaram as regularidades observadas nas tabelas [2:10], [2:29], e no cálculo do menor múltiplo comum [2:21]. A perceção das regularidades observadas esteve associada à aplicação de *Estruturas adquiridas* (EA), tais como as tabuadas dos números cinco e nove, bem como do cálculo mental. As *Estruturas adquiridas* (EA) conduziram os alunos à observação de *Regularidades* (Rg) e, por sua vez, essas proporcionaram a seleção de conhecimentos adquiridos, *Estruturas adquiridas* (EA), tais como as tabuadas e o cálculo, que permitiram a apresentação de resposta às questões colocadas. As subcategorias *Estruturas adquiridas* (EA) e *Regularidades* (Rg) estiveram, como tal, interligadas durante o desenvolvimento da ação *Reconhecer*.

Constata-se, igualmente, uma interligação entre subcategorias *Interpretação* (I) e *Regularidades* (Rg), no sentido em que a observação de *Regularidades* (Rg) não seria possível sem a *Interpretação* do enunciado do problema e das tabelas preenchidas. Ao observarem e interpretarem regularidades, os alunos conseguiram mobilizar raciocínios que lhes permitiram a apresentação de resposta a outras questões colocadas, designadamente ao *cálculo do mínimo múltiplo comum entre números múltiplos entre si*.

A tabela que se segue sintetiza as situações em que a ação *Reconhecer* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*.

Tabela 4.1 – Síntese da ação epistêmica Reconhecer em Luzes de Natal

Categoria: Reconhecer (R)		
Subcategorias	Interpretação I	<ul style="list-style-type: none"> • Valorizaram os dados enunciados no problema, selecionando essa informação para preencherem as tabelas; • Analisaram os dados contidos nas tabelas, identificando informação útil para responderem às questões colocadas; • Interpretaram e relacionaram informação presente nas diferentes questões colocadas.
	Estruturas adquiridas EA	<p>Os alunos selecionaram estruturas adquiridas para apresentar, justificar e desenvolver o seu raciocínio:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Selecionaram tabuadas memorizadas e apelaram ao cálculo mental para preencher, com maior rapidez e assertividade, as tabelas; • Relacionaram o instante inicial ao primeiro momento em que as lâmpadas piscaram em simultâneo, associando-o ao número zero; • Reconheceram a correspondência entre 1 minuto e 60 segundos; • Identificaram o menor valor numérico, diferente de zero, presente nas tabelas; • Relacionaram o cálculo do mínimo múltiplo comum entre quaisquer números múltiplos entre si, com os resultados já apresentados (mínimo múltiplo comum entre 6, 9 e 18); • Selecionaram os conceitos de múltiplo e divisor, adquiridos em aprendizagens anteriores, para justificar as suas respostas.
	Regularidade Rg	<ul style="list-style-type: none"> • Identificaram a regularidade identificada nas tabelas, reconhecendo a sua utilidade para responderem às questões colocadas; • Identificaram a regularidade presente no cálculo do mínimo comum, respeitante aos números constantes no enunciado e nas tabelas.

Síntese. De acordo com as ações epistémicas desenvolvidas pelos alunos, verifica-se a existência de uma interligação entre as subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*, as quais pareceram ocorrer quase em simultâneo. Estas ações revelam, da parte dos alunos, a seleção de conhecimentos já adquiridos, através da *Interpretação* e da observação de *Regularidades*, na construção do novo conhecimento, enquadrando-se na categoria *Reconhecer*. A primeira fase da abstração ocorreu durante a ação epistêmica *Reconhecer*, quando os alunos interpretaram e refletiram sobre os dados recolhidos e identificaram regularidades, mobilizando, também, conhecimentos. No desenvolvimento desta tarefa, verificou-se que a ação *Reconhecer* tornou-se evidente através das subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*, as quais mantiveram-se interligadas. De acordo com o desempenho dos alunos, fica-se com a ideia de que a *Interpretação*, ainda que possa surgir de forma independente, estará dependente da seleção de *Estruturas matemáticas adquiridas* necessárias ao desenvolvimento da ação *Reconhecer*. Resta averiguar, na análise das próximas tarefas, se essa relação de dependência também se manterá. Por sua vez, considera-se que a presença da subcategoria *Regularidades* está associada ao interesse manifestado pela professora em promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, pelo que supomos que só se evidenciará nesses casos particulares.

4.1.2 Construir

O desenvolvimento da ação *Construir* ocorreu quando os alunos sentiram necessidade de preencherem as tabelas e darem resposta às questões colocadas, verificando-se também com a aplicação de estratégias e procedimentos matemáticos reconhecidos como úteis para cumprir os objetivos delineados.

No desenvolvimento desta tarefa, a ação *Construir* tornou-se visível, pela primeira vez, durante o preenchimento das tabelas, tal como pode-se constatar através do diálogo que se segue:

GI e LP [em simultâneo]: *doze mais seis... dezoito...* [apelando ao cálculo mental foram proferindo em voz alta os restantes números, enquanto GI continuava a registá-los].
LP [referindo-se à tabela da RitaMat]: *Agora de nove em nove. Nove, dezoito.*
LP e GI [quase em simultâneo]: *é a tabuada do nove... vinte e sete.*
LP: *nove vezes quatro trinta e seis, quarenta e cinco, [demorando algum tempo] cinquenta e quatro, cinquenta e quatro mais nove, sessenta e quatro menos um, sessenta e três, nove vezes [foi interrompido por GI].*

Figura 4.12 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Luzes de Natal* (GI,LP)

O diálogo anterior transmite que o reconhecimento das regularidades enunciadas e a seleção de competências adquiridas em aprendizagens anteriores contribuíram, ao serem aplicadas, para o preenchimento correto da tabela da RitaMat. Esta constatação sugere que a ação epistémica *Construir* foi desencadeada a partir da ação *Reconhecer*.

Através da análise deste diálogo é possível identificar a subcategoria *Construção reconhecida*, que ocorreu quando os alunos integraram e combinaram *Estruturas adquiridas* previamente, tais como tabuadas e o cálculo numérico, para darem continuidade às regularidades observadas. As *Estratégias* utilizadas pelos alunos foram, neste caso, as *Construções reconhecidas*, nomeadamente a utilização das tabuadas memorizadas e a aplicação do cálculo numérico. A aplicação dessas *Estratégias* contribuíram para o preenchimento da tabela da RitaMat, ou seja, para a apresentação de *Soluções* intermédias. Ao apresentarem as três tabelas corretamente preenchidas – *Soluções* – os alunos cumpriram uma das etapas da tarefa, considerando-se que atingiram um dos objetivos delineados para a tarefa – *Construir*.

Construir voltou a estar presente nas questões que se seguiram, tal como podemos constatar através dos registos escritos dos alunos que se seguem.

de primeiro minuto os tempos piscam em
simultâneo de 18 em 18 minutos.

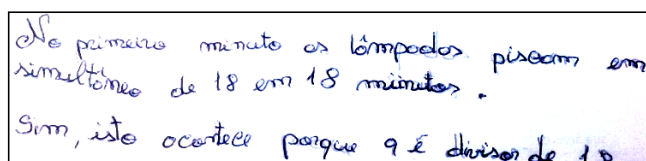
Figura 4.13 – RA respeitantes à resolução da tarefa *Luzes de Natal*

O registo escrito apresentado anteriormente reporta-se à questão: *no primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?* Esta questão surge depois de os alunos terem sido incentivados a analisar as tabelas já preenchidas e, em particular, a identificarem as regularidades aí presentes. De acordo com a resposta apresentada, constata-se que os alunos aproximaram-se do pretendido, apresentando uma resposta parcialmente correta.

A ação *Construir* tornou-se evidente com a apresentação de *Solução* para a questão colocada, tendo essa resultado da identificação e do relacionamento das regularidades observadas nas três tabelas, e com a necessidade de atingir determinado objetivo: dar resposta à questão colocada. Para apresentarem essa *Solução*, os alunos tiveram de integrar *Construções reconhecidas*, utilizadas também como *Estratégias*.

No que respeita ao erro cometido pelos alunos – utilização da palavra minutos ao invés de segundos – considera-se a possibilidade de se ter tratado de uma distração, uma vez que, durante o preenchimento das tabelas, os alunos já tinham estabelecido uma relação entre um minuto e sessenta segundos.

No registo que se segue, pode constatar-se a apresentação de *Justificação* para a *Solução* anteriormente indicada:

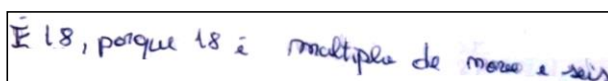


No primeiro minuto as lâmpadas piscaram em simultâneo de 18 em 18 minutos.
Sim, isto acontece porque 9 é divisor de 18

Figura 4.14 – RA respeitantes à resolução da tarefa Luzes de Natal

Nesta situação, os alunos aplicaram o conhecimento adquirido com a identificação das regularidades e, para justificar a sua resposta, integraram conhecimentos reconhecidos, tais como o conceito de divisor de um número. Como tal, a manifestação da ação *Construir* ocorreu, nesta situação, através da integração de *Construções reconhecidas* e da apresentação de *Soluções* e *Justificação* para os raciocínios desenvolvidos.

A ação epistémica *Construir* voltou a tornar-se perceptível nas respostas apresentadas pelos alunos, às questões relacionadas com o cálculo do mínimo múltiplo comum entre os números seis, nove e dezoito e entre os números cinco, dez e vinte.



É 18, porque 18 é múltiplo de nove e seis

Figura 4.15 – RA respeitantes à resolução da tarefa Luzes de Natal

De acordo com o registo escrito apresentado anteriormente, é possível identificar a presença de uma *Solução* para a questão colocada, bem como de *Justificação* para o raciocínio desenvolvido. Por sua vez, verificou-se que os alunos integraram e combinaram o conceito de múltiplo com os dados enunciados para apresentarem *Justificação* para a *Solução* apresentada. Constatou-se, ainda, a mobilização de conhecimentos adquiridos com o preenchimento das tabelas e com os raciocínios anteriormente desenvolvidos – *de quanto em quanto tempo as três lâmpadas piscam em simultâneo*. Como tal, o registo escrito apresentado evidencia a presença das subcategorias *Soluções*, *Justificação* e *Construções reconhecidas*.

Segue-se a resposta apresentada pelos alunos ao pedido do cálculo do mínimo múltiplo comum entre cinco, dez e vinte, números esses não antes trabalhados nesta tarefa.

É 20, porque 20 é múltiplo de 5 e 10

Figura 4.16 – RA respeitantes à resolução da tarefa *Luzes de Natal*

Esta resposta volta a evidenciar a presença das subcategorias *Solução*, *Justificação* e *Construções reconhecidas*, as quais refletem a presença da ação epistémica *Construir*. Os alunos fizeram uso da regularidade presente nas *Soluções* já apresentadas, generalizando a propriedade ao cálculo do mínimo múltiplo comum entre os números cinco, dez e vinte. Como tal, a *Solução* apresentada pelos alunos, vinte, resultou da identificação de regularidades, *Construções reconhecidas*. Por sua vez, outras *Construções reconhecidas*, tais como o conceito de múltiplo, a aplicação de tabuadas e o cálculo mental, foram integradas e combinadas para se produzirem a *Solução* e a *Justificação* apresentadas. Considera-se, também nesta situação, que a ação *Construir* evidenciou-se quando os alunos atingiram o objetivo proposto para esta questão, apresentado *Solução* e *Justificação* corretas para a questão colocada.

A figura que se segue transmite, novamente, o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, neste caso associada ao cálculo do número de vezes que a lâmpada do TitoMat pisca durante m minutos, excetuando o instante inicial.

Minutos	N.º de "piscas"
1	10
2	20
5	50
10	100
20	200
30	300
40	400
50	500
60	600

Figura 4.17 – RA respeitantes à resolução da tarefa *Luzes de Natal*

De acordo com os registos escritos apresentados, constata-se que os alunos preencheram corretamente a tabela, apresentando *Solução* para a questão colocada e cumprindo, dessa forma, o objetivo delineado para esta etapa. Subjacente ao preenchimento desta tabela está a análise da tabela do TitoMat já preenchida, uma vez que os alunos contabilizaram dez “piscas” durante o primeiro minuto, excetuando o instante inicial. A combinação de *Estruturas reconhecidas* – cálculo – esteve igualmente presente no preenchimento das restantes células da tabela e na generalização da regularidade a qualquer número, determinado, de minutos.

A figura que se segue completa e reforça, apresentando alguns excertos dos registos audiovisuais, momentos da resolução da tarefa em que se verificou o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. Transmite, ainda, como se manifestaram as subcategorias *Estratégias* (Es), *Soluções* (S), *Justificação* (J) e *Construção reconhecida* (CR) e de que forma essas se relacionaram para darem expressão ao desenvolvimento do processo de abstração.

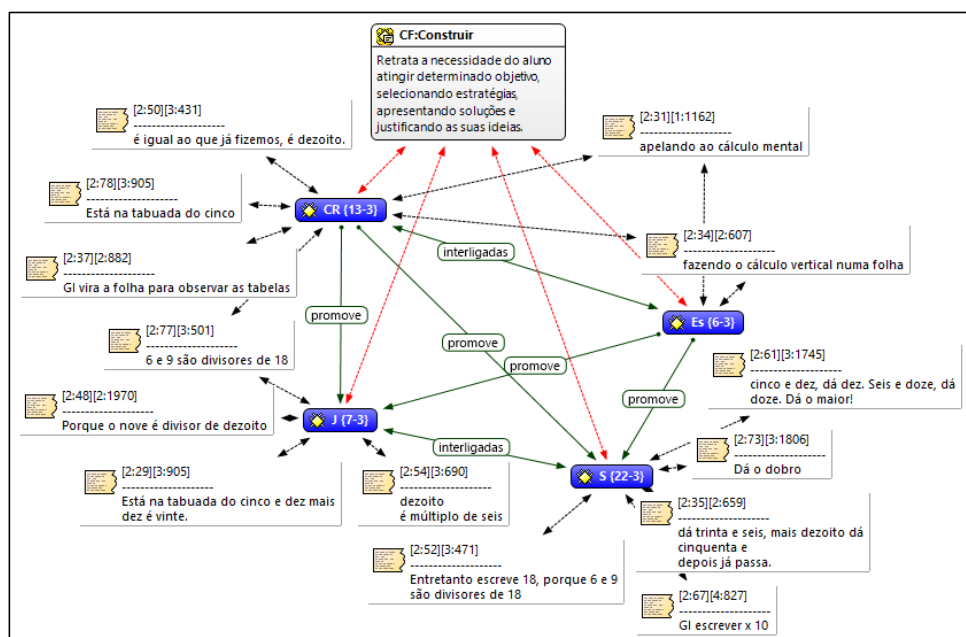


Figura 4.18 – RAV da ação epistémica *Construir* em *Luzes de Natal*

Verificou-se que as subcategorias *Construções reconhecidas* (CR) e *Estratégias* (Es) surgiram associadas, no sentido em que os alunos integraram e combinaram conhecimentos adquiridos previamente, tais como tabuadas, cálculo e conceitos de múltiplo e divisor, para darem resposta às questões colocadas. As *Construções reconhecidas* (CR) prenderam-se com a aplicação das tabuadas [2:29] [2:78], do cálculo mental [2:31] e com os conceitos de múltiplo e divisor [2:77], reconhecidas com úteis para darem resposta ao problema colocado. A organização dessa informação, designadamente a aplicação do cálculo vertical e mental – *Estratégias* (Es) –

mostraram-se úteis para a obtenção de *Solução* (S) e *Justificação* (J) para as questões colocadas [2:48] [2:54]. Nesta situação, verificou-se a existência de uma interligação entre as *Construções reconhecidas* (CR) e as *Estratégias* (Es) utilizadas, no sentido em que as *Estruturas reconhecidas* foram utilizadas como *Estratégias* (Es) [2:31] [2:34]. Por sua vez, verificamos que as *Construções reconhecidas* (CR) e a aplicação de *Estratégias* (Es) foram úteis para a produção de *Solução* (S) [2:61] [2:67], bem como para a apresentação de *Justificação* (J) para as soluções obtidas [2:29] [2:48] [2:52].

No esquema anteriormente apresentado, pode-se verificar que a integração do cálculo mental e vertical, reconhecido e utilizado como estratégia, possibilitou o preenchimento da tabela [2:35] (*Construção reconhecida* e *Estratégia*) e foi igualmente útil para obtenção da *Solução* (S) [2:61], mas também para a apresentação de uma *Justificação* (J) [2:29].

Destaca-se, ainda, o facto de a aplicação de *Construções reconhecidas* (CR) ter também estado relacionada com conhecimentos adquiridos com a elaboração da própria tarefa. Tal ocorreu, por exemplo, quando os alunos procuraram dar resposta ao cálculo do mínimo múltiplo comum entre seis, nove e dezoito, através da interpretação das regularidades presentes nas tabelas que os mesmos preencheram [2:50], apresentando *Solução* (S) e *Justificação* (J) para as questões colocadas [2:52]. A aplicação do conceito de divisor – *Construção reconhecida* – foi também, neste caso, aplicado na *Justificação* da resposta. Verificou-se, ainda, que essa justificação não surgiu como produto final, mas antes evoluiu de uma forma informal [2:48], [2:54] [2:77], para outra mais elaborada [2:52].

A tabela que se segue sintetiza as situações em que a ação *Construir* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Estratégias*, *Soluções*, *Justificação* e *Construção reconhecida*.

Tabela 4.2 – Síntese da ação epistémica *Construir* em *Luzes de Natal*

Categoria: <i>Construir</i> (B)		
Subcategorias	Estratégias Es	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicaram as tabuadas memorizadas e o cálculo mental para preencherem as tabelas.
	Soluções S	<ul style="list-style-type: none"> • Preencheram as tabelas e apresentaram resposta para as questões intermédias colocadas. Em particular, calcularam o mínimo múltiplo comum entre dois e três números e indicaram o número de vezes que piscariam as lâmpadas do TitoMat durante os minutos indicados.
	Justificação J	<ul style="list-style-type: none"> • Compreenderam e justificaram as respostas dadas, integrando os conhecimentos adquiridos previamente, nomeadamente os conceitos de múltiplo e divisor.
	Construção reconhecida CR	<ul style="list-style-type: none"> • Integraram o conhecimento adquirido com o preenchimento da tabelas e da resposta dada às questões 1.1, 1.2 e 1.3 para determinar o mínimo múltiplo comum e dar resposta a questão 2; • Integraram a memorização das tabuadas, o cálculo mental e vertical para apresentarem solução para as questões colocadas; • Aplicaram os conceitos de múltiplo e divisor para justificarem as soluções apresentadas.

Síntese. Os resultados analisados revelaram que a ação epistémica *Construir* se manifestou através do desenvolvimento das subcategorias *Construções reconhecidas*, *Estratégias*, *Soluções* e *Justificação*. Permitiu, ainda, verificar que as *Construções reconhecidas* e as *Estratégias* aplicadas mantiveram-se interligadas durante o processo de produção de *Soluções* e *Justificação* para o raciocínio desenvolvido, mostrando-se úteis para o seu desenvolvimento. Acrescenta-se, ainda, que as subcategorias *Soluções* e *Justificação* mantiveram-se interligadas durante a resolução da tarefa, no sentido em que as *Soluções* apresentadas resultaram da comunicação gradual dos raciocínios desenvolvidos e foram *Justificadas* através da exposição escrita, apresentada com maior rigor do que a verbalizada.

4.1.3 Construção

A ação epistémica *Construção* evidencia-se com a combinação e reorganização de construções, pelo processo de matematização vertical, para produzir uma nova construção que só é atingida quando o objetivo da atividade for cumprido. Como tal, espera-se que esta ação se torne visível com a generalização da propriedade – *o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números naturais é o maior desses números se os restantes forem seus divisores* – bem como através da interpretação e utilização de linguagem simbólica para generalizar as regularidades numéricas identificadas.

Da análise efetuada, verificou-se que o primeiro momento em que se entendeu estar perante a construção de um novo conhecimento coincidiu com a generalização do cálculo a um número desconhecido, e ocorreu com a resposta apresentada à questão: *determina o mínimo múltiplo comum entre um número e o dobro desse número*.

O excerto que se segue evidencia essa situação:

Gl: *Podemos escolher um número? Pode ser cinco?!*
P: *Mas cinco não é um número qualquer, é o cinco!*
LP: *Pode ser o cinco e o dez.*
CP: *Também podem ser o sete e o seu dobro, catorze. Ou o vinte e o quarenta. Pode ser um número qualquer e o seu dobro. Nestes casos, qual será o menor múltiplo comum?*
LP: *O maior.*
Gl: *O vinte.*
Gl: *Mas podemos escolher números?!*

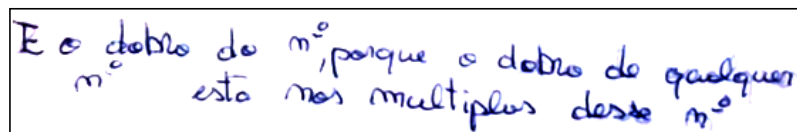
Figura 4.19 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Luzes de Natal* (Gl, LP)

O diálogo estabelecido evidencia, da parte dos alunos, incompreensão na interpretação do enunciado, situação que não se tinha verificado com o cálculo do mínimo múltiplo comum de valores determinados. Como tal, a dificuldade evidenciada parece dever-se à presença de valores indeterminados: *entre um número e o seu dobro*. As estratégias utilizadas pelos alunos, no sentido de darem solução à questão apresentada, passaram,

como se pode constatar, pela concretização da situação a valores numéricos determinados.

Nesta fase, os alunos revelaram não conseguir generalizar a propriedade a qualquer número desconhecido, ainda que mostrassem compreender a relação estabelecida entre os números, pois selecionaram um valor numérico determinado e o seu dobro e concluíram que o mínimo múltiplo comum entre eles seria o dobro dos números apresentados. As dificuldades manifestadas são compatíveis com as lacunas respeitantes ao uso de linguagem simbólica, na transição da aprendizagem aritmética para a algébrica. Ainda que a questão tenha sido colocada na forma de linguagem natural, os alunos revelaram as mesmas dificuldades que outros alunos manifestam quando a letra surge enquanto número generalizado (Ursini & Trigueros, 2001). A concretização poderá ser entendida como a aplicação de *Estratégias* que auxiliam o aluno na construção do novo conhecimento.

A mediação estabelecida pela professora contribuiu, como se poderá constatar em secção posterior a esta, para que os alunos dessem significado ao valor desconhecido, contribuindo para a generalização da regularidade observada.



E o dobro de m , porque o dobro de qualquer m está nos múltiplos deste m .

Figura 4.20 – RA respeitantes à resolução da tarefa Luzes de Natal

De acordo com o registo escrito apresentado anteriormente, verificou-se que os alunos *generalizaram* a relação identificada a números indeterminados, considerando-se que a combinação e reorganização da construção anterior, com o significado atribuído a dado número indeterminado, foi essencial à nova construção. A ação *Construção* voltou a estar presente quando se solicitou que identificassem *o número de vezes que as luzes do TitoMat piscaram no primeiro minuto, para além do instante inicial*, e o generalizassem corretamente a *m minutos*. O diálogo que se segue transmite esta situação:

GI: O que é o m ? [Os alunos ficaram pensativos, chamaram a professora e essa especificou]
P: Uma letra! [Os alunos ficaram calados!] Uma letra que representa um número qualquer de minutos. [Os alunos mantiveram-se calados!]
P: [Voltou a intervir para que não desistissem da questão]: *Vejam como completaram a tabela até este momento. As respostas estão corretas. Continuem a pensar da mesma forma.*
GI: É m ?! [referindo-se à resposta]
P: *Então onde se tinha 1 minuto, a resposta seria 1 pisca, e não 10. Onde tinha 2, seria outro 2 e não 20 e para o 5 a mesma coisa?!*

Figura 4.21 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Luzes de Natal (GI, LP, P)

O diálogo anterior evidencia que a generalização começa por estender-se a valores numéricos determinados, superiores a um minuto, que não ofereceram, tal como se verificou durante a análise da ação *Construir*, qualquer dificuldade aos alunos, incluindo quando se solicitou a extensão desses a valores determinados não consecutivos.

Os alunos compreenderam que num minuto as luzes piscavam dez vezes e estenderam, em proporção direta, esse valor a dois, cinco, dez, vinte, trinta, quarenta, cinquenta e a sessenta minutos. Porém, quando a generalização se estendeu a um número indeterminado de minutos e esse foi apresentado em linguagem simbólica, os alunos transmitiram não compreender o respetivo significado. O registo escrito que se segue revela que as dificuldades em torno da linguagem simbólica persistem.

LP: n ? [referindo-se a uma possível solução]
GI: Por que razão n ?
LP: É a seguir!
GI: Não é a seguir, é vezes dez!
P: Parece-me melhor, podem agora representar o que estão a dizer?!
[GI escreve $\times 10$]
P: Não falta aí nada? Pensem lá! [A professora afastou-se durante uns instantes, regressando quando os alunos mostraram querer entregar a tarefa].
GI: Então, acabaram?! Tudo feito?! Correu bem?!
[Os alunos abanaram a cabeça em sinal de concordância. A professora observou-a rapidamente, percebendo a presença da letra n na última questão, perguntando-lhe qual seria o respetivo significado]
P: Porquê $n \times 10$? O que querem dizer com n ?
LP: n de número qualquer.

Figura 4.22 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Luzes de Natal (GI, LP, P)

As dificuldades apresentadas pelos alunos parecem estar associadas ao facto desses não terem atribuído significado correto à letra m – *Letra não considerada* – tendo apenas reconhecido a sua presença. Por outro lado, quando m é substituído por n , sendo n , para os alunos, um número qualquer, o erro cometido parece relacionar-se com o facto de interpretarem a *Letra como objeto*, considerando n como abreviatura de número. Contudo, ainda que os alunos não tenham apresentado em linguagem simbólica correta a generalização a m minutos, considera-se que a *Construção* pretendida foi alcançada. Entende-se, ainda, que essa *Construção* ocorreu quando os alunos expressaram pela primeira vez, através de linguagem algébrica, a generalização da regularidade a n minutos e a escreveram em linguagem simbólica, atingindo o objetivo delineado para a tarefa.

Destaque-se que as *Construções* concebidas, presentes através da generalização, revelam a existência de indeterminações, quantidades desconhecidas expressas através de linguagem natural ou simbólica. As quantidades indeterminadas, referentes ao mínimo múltiplo comum de um número e do dobro desse número, ou o número de piscas

observados durante m minutos, foram tratadas pelos alunos como se fossem conhecidas – analiticidade.

A figura 4.23 acrescenta, apresentando alguns excertos dos registos audiovisuais recolhidos durante a resolução da tarefa, momentos em que se verificou o desenvolvimento da ação epistémica *Construção*. Estabelece, igualmente, uma relação entre as subcategorias *Reorganização* (Ro), *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm).

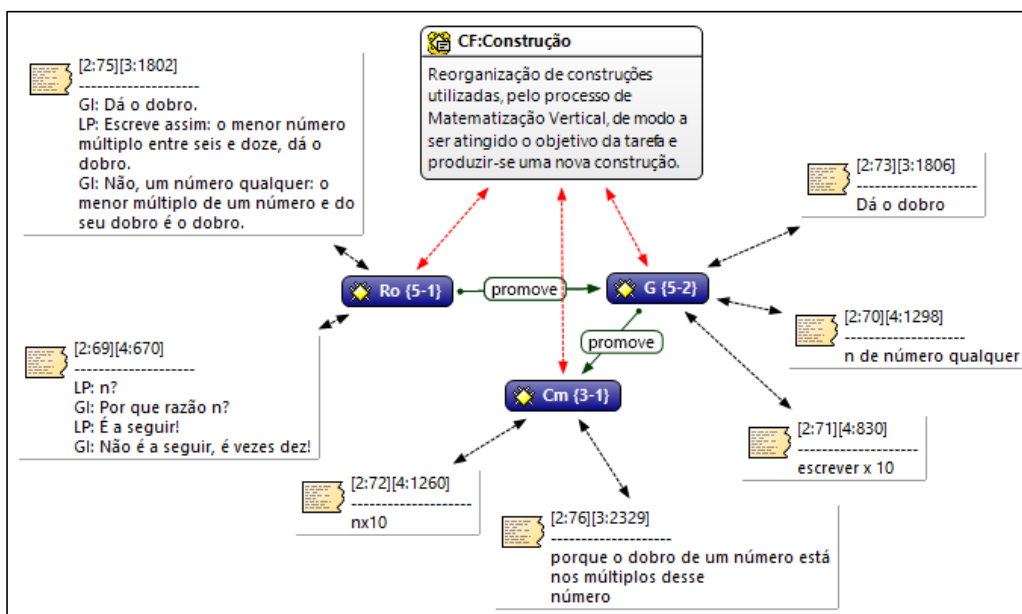


Figura 4.23 – RAV da ação epistémica *Construção* em Luzes de Natal

Na figura 4.23, constata-se que a combinação e *Reorganização* (Ro) de construções reconhecidas [2:69] e [2:75], aplicadas com o objetivo de produzir uma resposta para as questões colocadas, promoveram a *Generalização* (G) da regularidade observada [2:71] [2:73].

Relativamente ao cálculo do mínimo múltiplo comum entre um número e o seu dobro, verifica-se que os alunos *Reorganizaram* (Ro) o conhecimento adquirido com a resolução das questões anteriores desta tarefa e outros adquiridos previamente, até se verificar a nova *Construção* (C). De acordo com os registos apresentados anteriormente, os alunos concluíram que o mínimo múltiplo comum entre um número e o seu dobro era o dobro do número, pois integraram o conceito de dobro reconhecido e aplicaram-no ao cálculo do menor múltiplo comum entre valores determinados. Por sua vez, a resposta apresentada exigiu a integração do cálculo mental e numérico e dos conceitos de múltiplo e divisor, bem como a identificação de regularidades presentes nas tabelas preenchidas, que também estiveram dependentes da interpretação do enunciado escrito do problema.

Como tal, a ação *Construção* (C) tornou-se visível através da *Reorganização* (Ro) vertical de conhecimentos previamente adquiridos, sendo essa essencial para a *Generalização* (G) das regularidades observadas [2:73] [2:70] [2:71] e culminando na expressão da nova construção - *Comunicação* [2:72] e [2:76].

As ações *Construir* (B) e *Construção* (C) ganharam expressão quando os alunos selecionaram instrumentos simbólicos, tais como as tabelas preenchidas, para obterem resultados e construir o novo conhecimento.

A tabela que se segue sintetiza as evidências da ação epistêmica *Construção*, categorizadas de acordo com as subcategorias *Reorganização* (Ro), *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm).

Tabela 4.3 – Síntese da ação epistêmica *Construção* em Luzes de Natal

Categoria: <i>Construção</i> (C)		
Subcategorias	Reorganização Ro	<ul style="list-style-type: none"> Combinaram e reorganizaram as construções reconhecidas - preenchimento das tabelas, raciocínio estabelecido em questões intermédias, conceito de dobro, múltiplo e cálculo para generalizarem, a números indeterminados, as regularidades observadas.
	Generalização G	<ul style="list-style-type: none"> Generalizaram a propriedade observada - <i>É o dobro do número, porque o dobro de qualquer número está nos múltiplos desse número;</i> Generalizaram a regularidade numérica presente na tabela do TitoMat, considerando que em m minutos a luzes piscariam $10 \times n$ vezes, sendo n um número qualquer.
	Comunicação Cm	<ul style="list-style-type: none"> A nova construção tornou-se visível quando os alunos expressaram oralmente e através da escrita, em linguagem corrente e simbólica, a generalização pretendida.

Síntese. De acordo com o esquema apresentado, constata-se que a *Reorganização* (Ro) de conhecimentos adquiridos anteriormente promoveu a *Generalização* (G) das relações identificadas, a qual foi, posteriormente, *Comunicada* (Cm). Questiona-se se a *Reorganização* (Rg) de conhecimentos adquiridos anteriormente será indispensável para que ocorra a nova *Construção* (C)?

Relativamente ao trabalho desenvolvido pelos alunos, constata-se que esses trabalharam conceitos algébricos e generalizaram as regularidades observadas, partindo de relações aritméticas identificadas. Porém, questiona-se se esses deram, ou não, verdadeiro significado às construções concebidas, ou se essas surgiram apenas como consequência das ações epistêmicas *Reconhecer* (R) e *Construir* (B), promovidas durante o desenvolvimento desta tarefa. Será que os alunos conseguirão mobilizar o conhecimento adquirido através destas construções numa nova situação?

A figura 4.24 esquematiza as relações estabelecidas entre as ações epistêmicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C), sintetizando conclusões descritas durante a apresentação dos resultados.

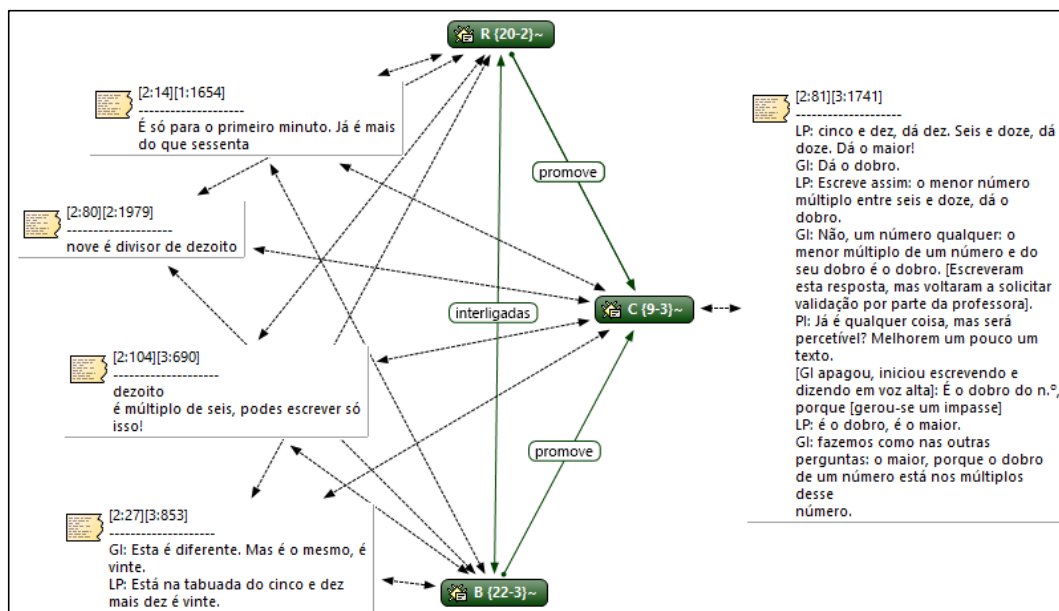


Figura 4.24 – Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em Luzes de Natal

Na figura anterior pode observar-se que a ação *Reconhecer* (R) foi identificada em diversos momentos do processo de abstração, tendo sido essencial para que os alunos integrassem conhecimentos adquiridos previamente, no sentido de desenvolverem o seu raciocínio e chegassem à solução e justificação pretendidas. Tal acontece, por exemplo, na aplicação de procedimentos e conceitos [2:80] e [2:104]. Como tal, considera-se que a ação *Reconhecer* foi essencial para o desenvolvimento da ação *Construir* (B). Por sua vez, o raciocínio desenvolvido durante a ação *Construir* (B), nomeadamente os resultados e justificações apresentadas [2:27], foram reconhecidos e integrados em benefício da *Construção* do novo conhecimento. Como tal, a ação *Construir* (B) gerou conhecimento que, posteriormente, foi reconhecido e utilizado. As ações *Reconhecer* (R) e *Construir* (B) estiveram, durante o desenvolvimento da tarefa, interligadas no processo de *Construção* (C), contribuindo para que esta ocorresse. Constatou-se, assim, a existência de uma interligação entre as ações epistémicas *Reconhecer* (R) e *Construir* (B) e que a *Construção* (C) do novo conhecimento surgiu como consequência do desenvolvimento dessas duas ações. Destaca-se, ainda, o facto de a *Solução*, mas principalmente a *Justificação*, terem estado associadas à generalização – *Construção* do novo conhecimento.

Síntese. As ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir* mantiveram-se interligadas durante o desenvolvimento da nova *Construção* e foram essenciais para a *Construção*. De acordo com as características desta tarefa, e pelo facto de esta ser a primeira de um conjunto de tarefas a serem alvo de análise, justifica-se a ausência da ação epistémica *Consolidação*, por não se colocar a hipótese de se aplicar uma construção recente. Questiona-se se a *Construção* concebida poderá ser reconhecida e integrada

pelos alunos, numa nova situação, ou seja, se a nova *Construção* se poderá manifestar através da *Consolidação* e promover o desenvolvimento das ações *Reconhecer* e *Construir*.

4.1.4 A influência do contexto na construção do novo conhecimento. *Professor.*

O papel atribuído à professora de matemática foi, desde a fase de elaboração da tarefa, de extrema importância. A tarefa elaborada constitui um artefacto desenvolvido pela professora, com vista à construção de um novo conhecimento, designadamente, à produção de novos significados semióticos. A intervenção da professora em contexto sala de aula, durante a condução da tarefa, intenciona uma atuação ao nível cognitivo, e metacognitivo, em direção à produção de novos signos matemáticos. Nesta situação, a professora atuou como agente mediador e, de acordo com os objetivos delineados, incentivou os alunos à resolução da tarefa, esclarecendo dúvidas e promovendo a exposição oral e escrita de ideias, sem negligenciar as perspetivas pessoais dos alunos. A tarefa – artefacto – serviu também de mediador entre professora e alunos, no sentido em que incentivou a observação de regularidades, a integração de conhecimentos adquiridos, a exposição de ideias e a generalização das regularidades observadas, ou seja, o desenvolvimento do pensamento algébrico no sentido das orientações dadas pela proposta curricular *Early algebra*. Considerando a intenção de estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, a tarefa promoveu a perceção e a aplicação de conceitos e propriedades para traduzir ideias matemáticas, estimular a capacidade para identificar regularidades, estabelecer generalizações sobre os dados e relações matemáticas observadas e para comunicá-las em linguagem matemática.

A introdução da tarefa, apresentada e projetada aos alunos, acompanhada pela leitura em voz alta, por parte da professora, estabeleceu o primeiro contacto dos alunos com a tarefa. A professora preocupou-se em motivar os alunos para a realização da tarefa e incentivou o esclarecimento de dúvidas, considerando as indicações dadas através do ciclo didático de Mariotti e Bussi (2008).

A apresentação da tarefa em suporte informático, e em papel, proporcionou o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, visível através da interpretação do enunciado do problema. A intervenção da professora, ao apresentar a tarefa, e a mediação estabelecida entre tarefa professora e alunos, contribuíram para o desenvolvimento da ação *Reconhecer*.

No excerto que se segue, pode-se identificar o processo de mediação estabelecido entre professora e alunos, no sentido da produção de novos signos matemáticos.

GI: Porque dizemos dezoito?! Está nas duas tabelas, é isso? É melhor perguntar o que querem? [chamam a professora].
 GI: A justificação é porque está na tabela?
 P: O que se pretende é que relacionem a vossa resposta, dezoito, com os dados do enunciado.
 GI: Com as tabelas?
 P: Com as repetições de cada tabela. Se numa os dados se repetem de nove em nove e na outra de dezoito em dezoito, como poderá estar relacionado com a resposta dezoito?
 LP: é o maior?
 P: e se escolhermos outros números aleatoriamente?
 LP: Todos do maior estão na tabela do outro.
 P: Mas por que razão a relação entre “piscas” de nove em nove e dezoito em dezoito repete-se de dezoito em dezoito?
 LP: dezoito é maior que nove.

Figura 4.25 – RAV sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa *Luzes de Natal* (GI, LP, P)

De acordo com os excertos analisados, verificou-se que a professora foi requisitada pelos alunos durante a fase *Construir*, tornando-se a sua intervenção importante no momento em que os alunos procuravam justificar a apresentação da resposta “dezoito” à questão colocada – *no primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?*

Inicialmente a professora procurou, através das relações matemáticas já reconhecidas pelos alunos, incentivá-los a interpretar as tabelas construídas e a identificarem novas relações existentes, no sentido de esses obterem uma justificação para opção tomada. A mediação estabelecida promoveu, nessa situação, o desenvolvimento da ação *Construir*. Numa segunda fase, procurou conduzir os alunos à generalização – *e se escolhermos outros números aleatoriamente* – estratégia que terá contribuído para que os alunos verificassem que o menor múltiplo comum seria o maior dos múltiplos considerados. Nesse caso, a tabela preenchida pelos alunos poderá ser entendida como instrumento que resultou do trabalho desenvolvido através da tarefa – artefacto – e foi utilizada para a produção de novos significados. A intervenção promoveu, nesta situação, o desenvolvimento da ação *Construção*.

Considera-se que a professora incentivou a exploração de potencialidades semióticas quando direccionou a atenção dos alunos para os dados constantes nas tabelas e solicitou a análise dos dados da relação existente entre os números que se repetiam. A intervenção da docente foi essencial para que os alunos estabelecessem relações numéricas, obtivessem resposta às questões colocadas e justificassem o seu raciocínio.

Em determinadas fases da tarefa, a professora assumiu apenas a função de validação dos raciocínios estabelecidos pelos alunos, facilitando a síntese de ideias e promovendo a progressão na tarefa. Pode-se reconhecer essa função no diálogo que se segue:

[Depois de lerem o enunciado da questão 1.4, solicitaram a ajuda da professora]
GI: Não é preciso fazer contas, pois não.
P: Espero que não façam cálculos!
GI: Então é igual ao que já fizemos, é dezoito. [Entretanto escreve 18, porque 6 e 9 são divisores de 18].

Figura 4.26 – RAV sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa Luzes de Natal (GI, LP, P)

A atuação da professora voltou a ser significativa na produção de significados por parte dos alunos, tal como podemos verificar no diálogo que se segue:

GI: O que é o m ?
P: Uma letra! [Os alunos ficaram calados] Uma letra que representa um número qualquer de minutos. [Voltou a intervir para que não desistissem da questão]:
Vejam como completaram a tabela até este momento. As respostas estão corretas. Continuem a pensar da mesma forma.
GI: É m ?!

Figura 4.27 – RAV sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa Luzes de Natal (GI, LP, P)

Perante a dificuldade apresentada pelos alunos, a professora incentivou a utilização de instrumentos produzidos por eles, em particular a tabela preenchida na questão 2.4. A professora evidenciou ainda uma ação de reforço, incentivando o desenvolvimento de ideias e a persistência por parte dos alunos. A intervenção da professora promoveu a compreensão de que a letra m representaria um número desconhecido de minutos e melhor entendimento quanto à questão que estava a ser colocada – em m minutos quantas vezes piscariam as lâmpadas do TitoMat. Por outro lado, os alunos demonstraram compreender que o número de vezes que essas lâmpadas piscariam seria indeterminado, necessitando de lhe atribuir o mesmo número indeterminado, m . Verificou-se que a intervenção da professora e os raciocínios estabelecidos pelos alunos contribuíram para a produção de novos significados, ainda que nem sempre os corretos.

No diálogo que se segue, pode-se constatar que o trabalho desenvolvido pela professora continua a ser o de incentivo à produção de signos matemáticos individuais. Os alunos são incentivados a analisar e a criticar as respostas dadas, tal como podemos constatar:

P: Então onde se tinha 1 minuto, a resposta seria 1 pisca, e não 10. Onde tinha 2, seria outro 2 e não 20 e para o 5 a mesma coisa?!
LP: n ?
GI: Por que razão n ?
LP: É a seguir!
GI: Não é a seguir, é vezes dez!
P: Parece-me melhor, podem agora representar o que estão a dizer?! [...]
P: Porquê $n \times 10$? O que querem dizer com n ?
LP: n de número qualquer.

Figura 4.28 – RAV sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa Luzes de Natal (GI, LP, P)

Os alunos foram confrontados com a sua resposta, *em m minutos pisca m vezes*, através da concretização do número de minutos e na comparação com os valores por si apresentados. De acordo com a resposta que apresentaram de seguida, constata-se que estabeleceram novos significados respeitantes às letras apresentadas – o valor numérico indeterminado *m* seria diferente do valor indeterminado *n*, sendo *n* superior a *m*. O papel da professora voltou a ser importante na produção de significados e na exposição e comunicação de ideias, ou seja, na *Construção* de novos conhecimentos.

A figura que se segue procura evidenciar, através dos excertos selecionados, de que forma se manifestou a mediação estabelecida pela professora e como se relacionou com o *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA) e à *construção de signos matemáticos* (ICS).

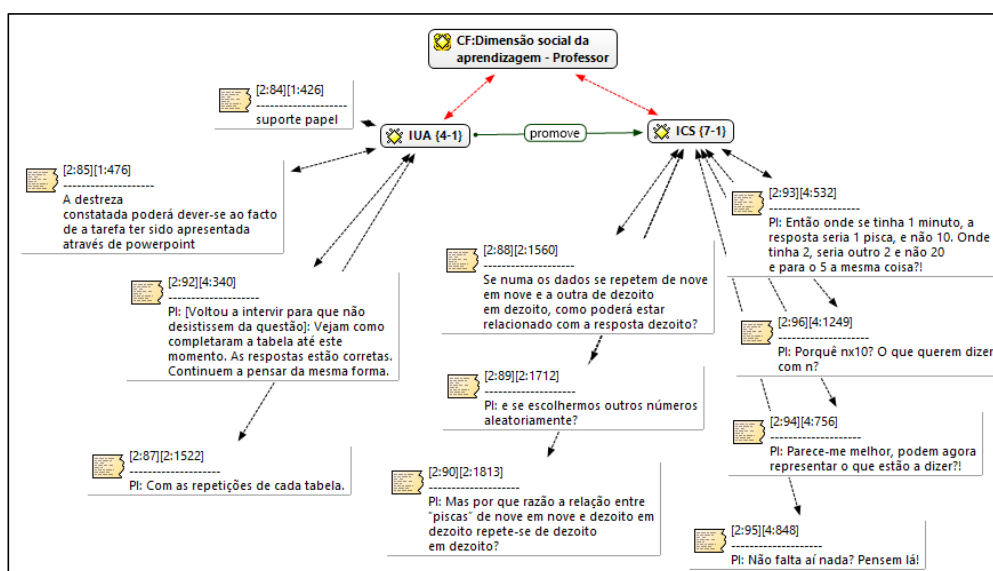


Figura 4.29 – RAV da DSA, Professor, em Luzes de Natal

Pode-se verificar de que forma se concretizou, por parte da professora, o incentivo à utilização de artefactos com vista à produção de novos significados e, conseqüentemente, à construção do novo conhecimento. O artefacto, tarefa, elaborado pela professora, apresentado aos alunos em suporte informático [2:85] e, posteriormente, em suporte papel [2:84] constituiu o suporte físico que os alunos utilizaram para representarem as suas ideias – *Reconhecer*, tendo, por isso, sido essencial para a construção de novos signos matemáticos – *Construir* e *Construção*. A elaboração do artefacto, nomeadamente a sua estrutura e solicitações, assumiu bastante importância na construção do novo conhecimento, valorizando bastante o trabalho desenvolvido pela professora. Contudo, também a mediação estabelecida entre professora e alunos, durante a realização da tarefa, foi essencial para a construção de novos signos [2:92]. Destaca-se o facto de a professora ter incentivado os alunos a explorarem instrumentos produzidos por si mesmos, ao manipularem o artefacto, para estabelecerem relações – *Construir* – e generalizarem – *Construção* –

regularidades observadas [2:92]. Constata-se, como tal, que a utilização do artefacto foi essencial para a construção de novos significados.

Por sua vez, o incentivo dado pela professora para que os alunos explorassem as tabelas por si preenchidas, permitiu que os alunos estabelecessem relações, compreendessem o significado da linguagem simbólica, m , e generalizassem propriedades e regularidades numéricas a números indeterminados [2:96]. As questões colocadas pela professora permitiram que os alunos se focassem nas regularidades pretendidas [2:93], analisassem os resultados obtidos [2:88], [2:89], [2:90], e conjecturassem. A compreensão do significado atribuído à letra m transmite a importância da mediação semiótica estabelecida através das tabelas preenchidas e entre professora e alunos. Destaca-se ainda o papel da professora ao integrar, de forma espontânea, “conversas” algébricas.

A tabela que se segue pormenoriza as situações em que a categoria *Professor* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA) e *Incentivo à construção de signos matemáticos* (ICS).

Tabela 4.4 - Síntese da análise da DSA, *Professor*, em Luzes de Natal

Categoria: <i>Professor</i> (P)		
Subcategorias	Incentivo à utilização de artefactos (IUA)	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentou a tarefa em suporte informático, motivando os alunos à sua realização. A tarefa assume o papel de artefacto, substituindo a professora no processo de mediação; • Incentiva o aluno à utilização da tarefa – artefacto; • Incentiva os alunos a explorarem instrumentos produzidos pelos próprios, tais como as tabelas preenchidas.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)	<ul style="list-style-type: none"> • Incentiva a exploração de potencialidades semióticas existentes nas tabelas, direcionando a atenção dos alunos para as regularidades observadas; • Incentiva a produção e comunicação de novos signos matemáticos; • Incentiva a exposição e comunicação de raciocínios matemáticos, bem como a síntese de conclusões.

Síntese. O papel mediador da professora revelou-se bastante importante na fase de elaboração da tarefa, pois essa foi desenvolvida de modo a constituir-se como um artefacto mediador que promovesse a compreensão e identificação de relações e regularidades, a exploração de tabelas, a exposição e justificação dos raciocínios desenvolvidos e a construção do novo conhecimento matemático. A atuação da professora foi, igualmente, importante na fase de apresentação da tarefa, no sentido em que procurou estimular o interesse dos alunos e incutir responsabilidade e empenho durante a sua execução, promoveu a interpretação global da tarefa e procurou esclarecer dúvidas, evitando que o início da tarefa gerasse alguma dificuldade que desencorajasse os alunos à sua resolução. Não menos importante foi o papel assumido durante a resolução da tarefa, enquanto observadora que agiu apenas quando necessário para esclarecer dúvidas que impediam os alunos de avançar,

designadamente na interpretação da generalidade presente nos enunciados e da linguagem simbólica, quando incentivou a exploração semiótica das tabelas e a observação de regularidades, quando introduziu conversas algébricas de forma natural e questionou os alunos, visando o aperfeiçoamento das respostas e justificações apresentadas.

A aplicação da tarefa, pelas suas características próprias, apelou à investigação, reflexão e cooperação entre alunos. A mediação estabelecida entre alunos e professora permitiu, igualmente, que os alunos progredissem na tarefa, desenvolvessem a compreensão e a construção de objetos matemáticos, até construírem o novo conhecimento. Considera-se, como tal, que o *Incentivo à Utilização de Artefactos* (IUA), em particular a exploração da tarefa e das tabelas construídas, proporcionou a *Construção de signos* matemáticos (ICS).

4.1.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Alunos.

Pode-se constatar, através dos excertos já apresentados, o envolvimento dos alunos durante a realização da tarefa. Os signos individuais produzidos evidenciaram-se na comunicação estabelecida e na interligação de conhecimentos adquiridos anteriormente. A produção de signos coletivos tornou-se, também, evidente através de diálogos estabelecidos entre alunos e entre professora e alunos.

GI: É só para o primeiro minuto. Já é mais do que sessenta! [...] GI: Porque o nove é divisor de dezoito [e GI adotou essa justificação, escrevendo-a]. [...] GI: (...) Entretanto escreve 18, porque 6 e 9 são divisores de 18. [...] LP: [Ao perceber que o colega voltava a querer escrever uma resposta igual às anteriores, disse]: dezoito é múltiplo de seis, podes escrever só isso! [GI aceitou e escreveu].
--

Figura 4.30 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Luzes de Natal* (GI, LP)

Verificou-se que os alunos integraram conhecimentos para conseguirem progredir no desenvolvimento do seu raciocínio e dar resposta às questões colocadas – *Construir*. O aluno GI aplicou a relação existente entre minutos e segundos – *Reconhecer* – para preencher com correção as tabelas apresentadas e integrou o conceito de divisor – *Reconhecer* – para justificar o seu raciocínio – *Construir*. O aluno LP acrescentou o conceito de múltiplo – *Reconhecer* – para justificar – *Construir* – as respostas dadas.

Os alunos envolveram-se, ao longo de toda a tarefa, na produção de signos coletivos partilhados, em alguns momentos, com a professora. Envolveram-se na exploração das tabelas, na realização de cálculos, na integração de conhecimentos adquiridos previamente, discutindo ideias que lhes permitiram chegar à solução das questões colocadas, bem como justificar os seus raciocínios – *Construir*.

A figura 4.31 exemplifica as situações em que a categoria *Alunos* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Produção de signos individuais* (PSI) e *Produção de signos coletivos* (PSC).

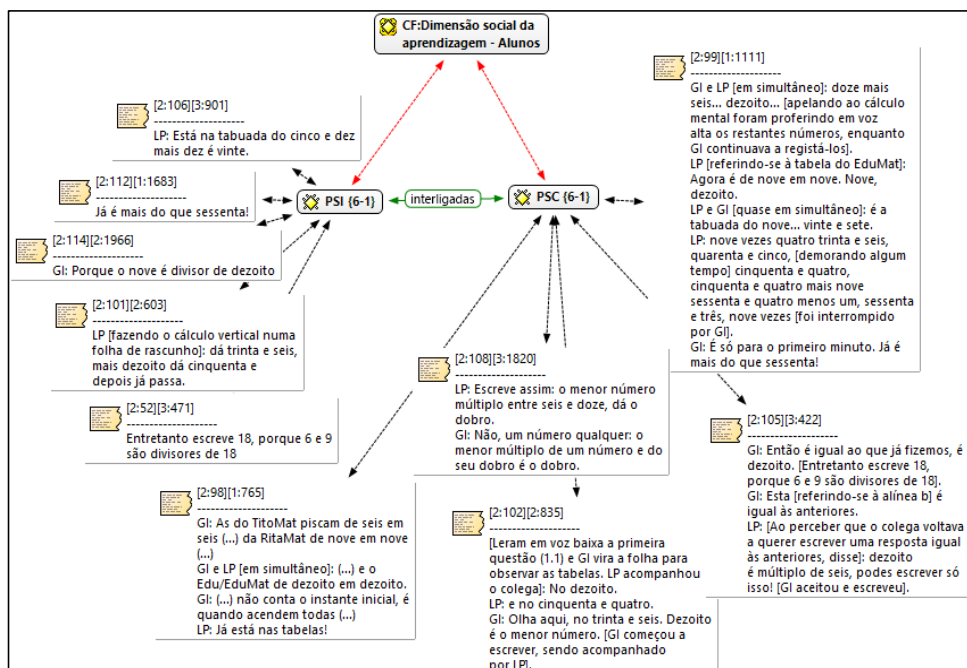


Figura 4.31 – RAV da DSA, Alunos, em Luzes de Natal

Os dados seleccionados evidenciam diferentes fases da resolução da tarefa em que os alunos se envolveram na exploração conjunta (PSC) dos enunciados, das questões colocadas, e das tabelas por si preenchidas [2:102], bem como na exposição de ideias e na apresentação de soluções intermédias [2:99] e justificação [2:105] [2:108] para os raciocínios desenvolvidos. Consta-se, ainda, que a produção de signos coletivos, observada na comunicação estabelecida entre alunos e na reprodução escrita dos seus raciocínios, surgiu [2:101] ou promoveu [2:52] [2:106] [2:112] [2:114] a produção de signos individuais. A produção de signos individuais, por sua vez, relacionou-se com a integração das tabuadas [2:106], dos conceitos de múltiplo e divisor [2:114], da associação estabelecida entre um minuto e sessenta segundos [2:112], bem como com a aplicação das regularidades identificadas [2:98].

Verifica-se, ainda, a existência de uma interligação entre a produção de signos, individuais e coletivos, e as ações *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C). A ação *Reconhecer* esteve presente durante a interpretação dos enunciados e das tabelas [2:99] [2:102] quando os alunos revelam percepção dos dados que estavam a ser fornecidos e dos conceitos e procedimentos que podiam tomar para obterem solução para a questão colocada. Esteve, ainda, presente através da seleção de conceitos e procedimentos adquiridos em aprendizagem anteriores, tais como as tabuadas, o

cálculo e os conceitos de múltiplo e divisor ou mesmo na observação de regularidades. A ação *Construir* (B), por sua vez, surgiu durante a exposição de ideias [2:99] [2:102] [2:105], obtenção de soluções intermédias [2:106] [2:101] e com a apresentação de justificação para as soluções encontradas [2:52] [2:114]. A ação *Construção* (C) resultou, por fim, da produção de signos individuais e coletivos [2:108].

A tabela seguinte sintetiza os aspetos mais relevantes observados na mediação estabelecida entre alunos e que foi categorizada de acordo com as subcategorias *Produção de signos individuais* e *Produção de signos coletivos*.

Tabela 4.5 – Síntese da análise da DSA, Alunos, em Luzes de Natal

Categoria: Alunos (A)		
Subcategorias	Produção de signos individuais (PSI)	<ul style="list-style-type: none"> Os alunos envolveram-se na atividade proposta, produzindo signos individuais: integraram conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, expressaram ideias e apresentaram resposta para as questões colocadas.
	Produção de signos coletivos (PSC)	<ul style="list-style-type: none"> Os signos utilizados pelos alunos resultaram da comunicação e partilha estabelecida entre eles e, por vezes, com a professora. Os alunos interagiram entre si, interligando conhecimentos que lhes permitiram realizar a tarefa. A construção do novo conhecimento esteve dependente da partilha de conhecimentos e ideias.

Síntese. Verificou-se que a partilha de conhecimentos e ideias foi favorável ao desenvolvimento da nova construção. As contribuições individuais foram mais expressivas na interpretação dos dados enunciados e na seleção de conhecimentos e ideias que poderiam ser aplicados no novo contexto, considerando-se, como tal, que as contribuições individuais favoreceram o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Contudo, as ações epistémicas *Construir* e *Construção*, ainda que possam ter usufruído, em situações específicas, das contribuições de um dos alunos, resultaram da partilha de conhecimentos e da decisão conjunta dos procedimentos a tomar para alcançar resposta para as questões colocadas. Como tal, entendemos que as subcategorias *Produção de signos individuais* e *Produção de signos coletivos* mantiveram-se interligadas *durante a Construção*.

A figura que se segue procura transmitir de que forma a partilha verificada entre alunos, e a mediação estabelecida entre professora e alunos, contribuíram para a construção do novo conhecimento, em particular para o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir* e *Construção*.

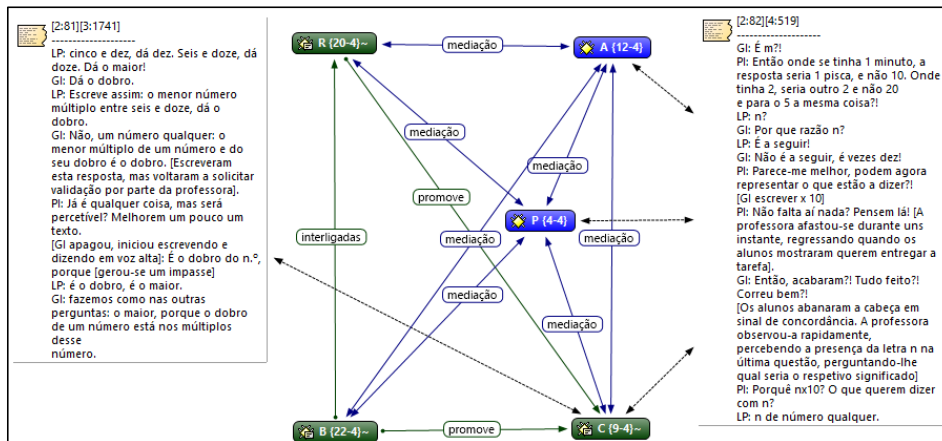


Figura 4.32 – Relação entre RBC+C e DAS, em Luzes de Natal

A figura 4.32 reúne informação já esquematizada e pormenorizada, procurando transmitir de que forma o desenvolvimento das ações epistêmicas e a mediação estabelecida entre alunos e professora e entre alunos promoveu, no seu conjunto, a *Construção* do novo conhecimento. Pode-se começar por verificar que a construção do novo conhecimento [2:81] e [2:82], promovida pelo desenvolvimento das ações *Reconhecer* e *Construir*, sofreu também a influência da mediação estabelecida entre alunos e professora.

A comunicação estabelecida entre os alunos, e alunos e professora, foi essencial para a interpretação e comunicação de ideias e raciocínios, contribuindo para a produção de signos individuais e coletivos, designadamente para o desenvolvimento das ações epistêmicas *Construir* e *Construção*.

Síntese. Considera-se que a construção do novo conhecimento matemático assumiu uma dimensão individual e comunicacional, no sentido em que resultou de um processo de reconstrução interna concebida pela partilha de conhecimentos e ideias entre alunos e entre alunos e professora, a qual foi guiada por processos semióticos associados às características da própria tarefa. Neste sentido, ressalta a ideia de que a construção de um novo conhecimento, em particular a compreensão da generalidade e a utilização de linguagem simbólica, pode estar dependente da ação do professor. Ou será que, eventualmente, os alunos podem desenvolver mecanismos diferenciados que não dependam da intervenção do professor?

4.2 Tarefa 2 – *Conta-quilómetros*

A aplicação da tarefa exploratória *Conta-quilómetros* visa estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico através da resolução de um problema, da interpretação de linguagem simbólica e da generalização de regularidades numéricas a números indeterminados. Os dados do problema selecionado envolvem quantidades desconhecidas, não trabalhadas com os alunos durante o seu percurso escolar, bem como noções matemáticas relacionadas com os conceitos de parte-todo, lecionados durante o primeiro ciclo. Com a aplicação da tarefa pretende-se compreender de que forma os alunos resolvem um problema com potencial algébrico, selecionando conceitos adquiridos durante o ensino da aritmética. Interessa verificar que conhecimentos mobilizam para resolverem o problema, que conceitos e procedimentos reconhecem, que relações estabelecem e que estratégias utilizam para obter determinada solução. Para além do problema colocado, intenciona-se também estimular os alunos a interpretar e utilizarem linguagem simbólica, espectando-se que esses apliquem conhecimentos adquiridos através da resolução da tarefa *Luzes de Natal*.

A tarefa foi apresentada em contexto turma, gerando dúvidas relacionadas com a forma como poderiam resolver o problema. Segundo registo da investigadora, o facto de o enunciado do problema se referir à possibilidade de os alunos poderem resolver o problema através de esquemas ou desenhos, causou estranheza.

Depois de distribuídos os enunciados, os alunos iniciaram a leitura do problema, demonstrando compreender os dados e a questão que estava a ser colocada. Assim que *terminaram a leitura iniciaram a exploração dos dados enunciados, não colocando qualquer dúvida acerca dos dados ou da questão efetuada* (RI).

4.2.1 *Reconhecer*

Considerando os dados constantes no problema, os quais envolvem diversos conceitos lecionados no primeiro ciclo, espera-se identificar a ação *Reconhecer* durante a interpretação do enunciado escrito. Entende-se que o processo de construção terá início com a abstração dos conceitos envolvidos no enunciado, sendo por isso fundamental que os alunos tenham perceção dos respetivos significados e da sua utilidade.

Ao introduzir linguagem simbólica, intenciona-se conduzir os alunos a *Reconhecer* o significado atribuído à generalização construída na tarefa *Luzes de Natal* e procura-se compreender como os alunos interpretam e utilizam linguagem simbólica. O excerto que se segue transmite o desempenho dos alunos no momento em que releram o enunciado do problema:

GI: Na segunda, terça e quarta fez metade do percurso. O resto do percurso fez na quinta e sexta e, na sexta, sabem-se os quilómetros.
LP: Mas não sabemos nos outros dias da semana, nem no total.
[Ficaram em silêncio durante alguns instantes. Releam os dados constantes no problema].

Figura 4.33 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Conta-quilómetros (GI, LP)

A interpretação dos dados do problema inicia-se com a distinção entre o que os alunos reconhecem serem valores numéricos conhecidos e valores desconhecidos, bem como com a associação da fração $\frac{1}{2}$ ao conceito de metade. Relativamente à transferência da linguagem matemática, $\frac{1}{2}$, para a expressão metade, em linguagem natural, pode entender-se estar associada à maior fluidez do raciocínio desenvolvido pelos alunos.

A ação *Reconhecer* esteve, nesta fase, visível através da *Interpretação* do enunciado e da seleção de *Estruturas adquiridas*, designadamente do conceito de metade.

No diálogo que se segue pode-se identificar que informação foi reconhecida pelos alunos para, utilizando os valores numéricos enunciados, conseguirem apresentar soluções intermédias para o problema enunciado.

LP: $\frac{1}{2}$ é 0,5 km para os três primeiros dias. Podemos dividir por três e descobrir quantos quilómetros fez em cada dia. [Pegou na máquina de calcular]. Faz 0,16 Km por dia?!
GI: Isso é estranho! Corria pouco. [Ficaram em silêncio].
GI: É como a piza. Se comes metade não comes 0,5 kg, comes metade!

Figura 4.34 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Conta-quilómetros (GI, LP)

Constata-se que o aluno LP estabeleceu a igualdade entre a fração $\frac{1}{2}$ e a dízima 0,5, não reconhecendo que $\frac{1}{2}$ se referia à fração de uma quantidade. Embora o aluno demonstrasse saber como determinar o número de quilómetros percorridos em cada um dos três primeiros dias – *podemos dividir por três* – o erro cometido criou uma impossibilidade que parece ter sido reconhecida pelo mesmo – *0,16 km por dia?* – GI, ao analisar a resposta dada pelo colega, identificou o erro cometido, tendo também selecionado o conceito de metade para explicar o seu raciocínio, ao invés da representação de fração.

Acrescenta-se que, apesar do erro cometido, os alunos reconheceram o valor numérico da fração $\frac{1}{2}$, estabelecendo a igualdade entre $\frac{1}{2}$ e 0,5. Conferenciaram, também, os valores numéricos obtidos, reconhecendo a presença de uma situação impossível para o contexto apresentado.

GI, por sua vez, mostrou ter compreendido que para determinar o número de quilómetros percorridos nos primeiros três dias da semana, seria necessário calcular metade do número de quilómetros percorridos no total.

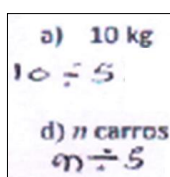
A ação *Reconhecer* esteve, nesta situação, presente através da mobilização de *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores (conceito de metade e valor numérico de uma fração) e que permitiram, aos alunos, transformar a informação enunciada para exporem o seu raciocínio.

No excerto que se segue podem-se identificar que estratégias selecionaram os alunos para representar as suas ideias.

LP: Faz o desenho da piza, podemos fazer desenhos ou esquemas.
[GI desenhou uma circunferência e dividiu-a em quatro partes.]
LP: Mas é preciso ter metade.
GI: [Apagou um dos segmentos de reta que separava duas quartas partes.]

Figura 4.35 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Conta-quilómetros (GI, LP)

Verifica-se da parte do aluno GI a seleção da representação circular – *faz o desenho da piza* – para representar o seu raciocínio. Sabemos, através dos registos da professora, que essa representação já tinha sido utilizada, em contexto sala de aula, no início do estudo das frações. A ação *Reconhecer* esteve, novamente, presente quando os alunos selecionaram *Estruturas adquiridas*. Na questão dois desta tarefa, *Reconhecer* voltou a estar presente quando os alunos calcularam $\frac{1}{5}$ de diferentes valores numéricos e apresentam expressões algébricas que representavam a quinta parte das situações colocadas.



The image shows two parts of a task, labeled 'a)' and 'd)'. Part 'a)' shows the text 'a) 10 kg' followed by the handwritten expression '10 ÷ 5'. Part 'd)' shows the text 'd) n carros' followed by the handwritten expression 'n ÷ 5'.

Figura 4.36 – RA respeitantes à resolução da tarefa Conta-quilómetros

Os alunos selecionaram a operação divisão para apresentarem a sua resposta, associando-a ao conceito de quinta parte – *Estruturas adquiridas*.

No excerto que se segue, pode analisar-se o desempenho dos alunos ao contactarem com linguagem simbólica:

LP [referindo-se à questão 2]: $\frac{1}{5}$ é a quinta parte, podemos dividir por cinco.
 LP e GI [GI registou por escrito os resultados comunicados na oralidade]: dez a dividir por cinco dá dois, trezentos a dividir por cinco dá sessenta... [registaram os restantes dados].
 GI: E esta alínea [referindo-se à alínea d]. Não é um número. É um número qualquer.
 LP: n é um número qualquer como na outra ficha.

Figura 4.37 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Conta-quilómetros (GI,LP)

De acordo com o diálogo estabelecido, verifica-se que os alunos identificaram a existência de *Regularidades* no processo de determinação da quinta parte de um número, bem como tiveram percepção de que a letra n , linguagem simbólica, representaria, nesta situação, um número desconhecido. A intervenção do aluno LP permite-nos pensar que a associação estabelecida entre *um número qualquer* e a letra n se deve ao conhecimento adquirido por esses com a resolução da tarefa *Luzes de Natal*, em particular com a construção da expressão algébrica $10 \times m$, generalizada pelos alunos após interpretação do significado atribuído à letra m e observação de regularidades numéricas. A ação *Reconhecer* evidenciou-se, como tal, através da *Interpretação* do enunciado, da identificação de *Regularidades* e da seleção de *Estruturas adquiridas*, com a resolução da primeira tarefa.

A figura seguinte exemplifica, através de excertos das transcrições efetuadas, as situações em que a ação *Reconhecer* foi identificada ao longo da tarefa. Evidencia, também, a ocorrência das subcategorias *Interpretação* (I), *Estruturas adquiridas* (EA) e *Regularidades* (Rg), bem como a relação entre essas.

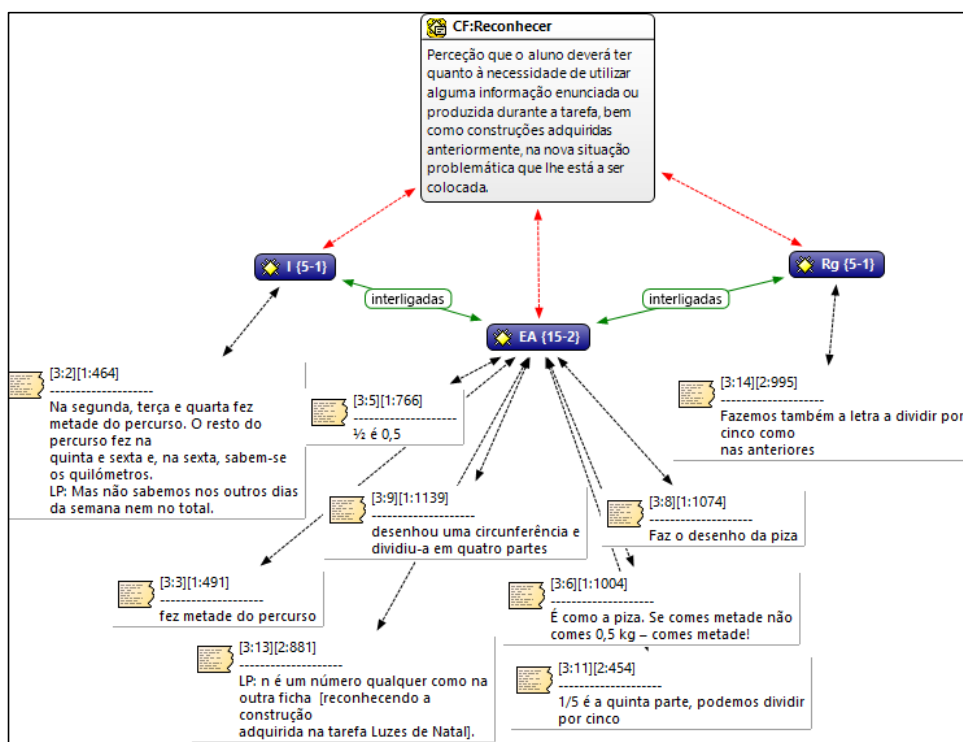


Figura 4.38 – RAV da ação epistémica Reconhecer em Conta-quilómetros

Através do esquema apresentado, pode-se verificar que a *Interpretação* [3:2] do enunciado se torna essencial para a seleção, pertinente, de *Estruturas adquiridas*, tais como o significado da representação de uma fração [3:5] e sua relação com os conceitos de metade [3:3] [3:6] e quinta parte [3:11], bem como para a percepção de formas de representação [3:8] [3:9] que podem revelar-se adequadas para exprimir o raciocínio dos alunos. Por outro lado, a seleção de *Estruturas adquiridas*, ao serem aplicadas, exigiram dos alunos novas interpretações que permitiram o desenvolvimento do raciocínio estabelecido. A interligação entre as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* ocorreu quando, por exemplo, os alunos interpretaram o significado de $\frac{1}{2}$, associaram-no ao conceito de metade e, interpretando esse conceito no contexto do problema, selecionaram formas de representação para exporem os seus conhecimentos. Como tal, as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* estiveram, à semelhança da tarefa *Luzes de Natal*, interligadas, durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*.

A subcategoria *Regularidade* surge, à semelhança do que se verificou na tarefa *Luzes de Natal*, associada ao reconhecimento de *Estruturas adquiridas* previamente, neste caso com a seleção do conceito de quinta parte e do algoritmo da divisão [3:14].

A tabela que se segue pormenoriza as situações em que a ação *Reconhecer* foi identificada ao longo da tarefa e categorizada de acordo com as subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*.

Tabela 4.6 – Síntese da ação epistémica *Reconhecer* em *Conta-quilómetros*

Categoria: <i>Reconhecer</i> (R)		
Subcategorias	Interpretação (I)	<ul style="list-style-type: none"> • Valorizaram a informação contida no enunciado do problema, interpretando e fazendo uso dos dados (em particular do significado atribuído às frações representadas); • Interpretaram linguagem simbólica.
	Estruturas adquiridas (EA)	<ul style="list-style-type: none"> • Recorreram ao significado dado às frações, valorizando o significado de fração de uma quantidade e a representação de frações através de um desenho; • Os alunos associaram as frações indicadas à operação divisão e ao conceito de metade e quinta parte; • Os alunos reconhecem o significado dado às letras, recordando a presença dessa situação na tarefa <i>Luzes de Natal</i>.
	Regularidade (Rg)	<ul style="list-style-type: none"> • A experiência adquirida através do cálculo da quinta parte de valores numéricos conhecidos foi reconhecida quando se solicitou o cálculo de $\frac{1}{5}$ de valores indeterminados.

Síntese. Constata-se que as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* e *Estruturas adquiridas* e *Regularidade* mantiveram-se interligadas, à semelhança do que já se tinha verificado na tarefa *Luzes de Natal*, contribuindo para o desenvolvimento da ação *Reconhecer*. Verificou-se, contrariamente ao que se tinha observado na tarefa *Luzes de Natal*, a ausência de uma relação evidente entre as subcategorias *Interpretação* e *Regularidades* que, no entanto, mostrou não comprometer o

desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Surge, então, a dúvida se as subcategorias definidas terão que, necessariamente, interligar-se, para que se verifique o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, ou se essas poderão ocorrer de forma isolada.

4.2.2 Construir

Após a interpretação do enunciado foi possível observar os alunos a selecionarem, e combinarem conhecimentos adquiridos anteriormente, para obterem solução para o problema colocado. A fase *Construir* iniciou-se com a relação estabelecida entre $\frac{1}{2}$ e 0,5 km, ainda que essa igualdade culminasse numa impossibilidade, reconhecida pelos próprios alunos.

No diálogo que se segue, pode-se verificar de que forma a ação *Construir* esteve presente durante a organização dos dados enunciados e dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos:

LP: Faz o desenho da piza, podemos fazer desenhos ou esquemas.
[GI desenhou uma circunferência e dividiu-a em quatro partes iguais.]
LP: Mas é preciso ter metade.
GI: [Apagou um dos segmentos de reta que separava duas quartas partes.]
LP: Aí podes escrever os três primeiros dias.
GI [iniciou a escrita, seguindo as orientações de LP e anotando também os dados enunciados.]
LP: Podes colocar um ponto de interrogação nos que não conhecemos... nesta (apontando com o dedo) e nesta escreves 2,5 (apontando).
[Analisaram em breves instantes os dados preenchidos]
GI: Então aqui também são 2,5, pois é $\frac{1}{4}$, igual a sexta-feira e o outro também é fácil...
GI e LP: O dobro. [GI escreve $2,5 + 2,5 = 5$]

Figura 4.39 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Conta-quilómetros (GI, LP)

Verificou-se que, como resultado da interpretação do enunciado e da valorização de aprendizagens anteriores, os alunos introduziram novos conhecimentos e aplicaram estratégias que possibilitaram a combinação de dados que, ao serem novamente interpretados, conduziram à justificação de raciocínios e à apresentação de soluções intermédias. Em particular, os alunos aplicaram o seu conhecimento acerca de frações e do conceito de metade, utilizaram a representação circular para esquematizar o seu raciocínio e estabelecer um paralelismo entre o significado da fração apresentada e o correspondente número de quilómetros percorridos. A representação dos valores desconhecidos, através de um ponto de interrogação, facilitou o raciocínio estabelecido entre os alunos, permitindo uma associação entre os dados enunciados e a sua representação no círculo. Considera-se que os alunos demonstraram criatividade ao representarem os dados e ao interligarem, através da representação circular, toda a informação recolhida. Ao integrarem e combinarem estratégias e conhecimentos

adquiridos anteriormente, os alunos atingiram objetivos parciais, conseguindo apresentar solução para o número de quilómetros percorridos nos primeiros três dias da semana e na quinta-feira. Na figura que se segue pode-se observar a representação que deu origem à apresentação de soluções parciais.

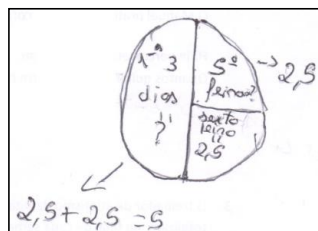


Figura 4.40 – RA respeitantes à resolução da tarefa Conta-quilómetros

A figura anterior revela a forma como os alunos utilizaram a representação circular para representar os dados enunciados e exprimir o seu raciocínio, bem como aplicaram o seu conhecimento em relação à representação de $\frac{1}{2}$ e ao conceito de metade. A aplicação desses conhecimentos, *Construções reconhecidas*, permitiram que concluíssem que, na quinta-feira, o Luís tinha percorrido o mesmo número de quilómetros que os percorridos na sexta-feira, e que nos primeiros três dias tinha percorrido o dobro do número de quilómetros feitos no último dia da semana. A representação dos dados, bem como o diálogo mantido entre os alunos, promoveu o desenvolvimento da subcategoria *Justificação*.

A ação *Construir* surgiu combinada com a ação *Reconhecer*, no sentido em que as *Justificações* e *Soluções* intermédias apresentadas resultaram da perceção dos conhecimentos, adquiridos anteriormente, que poderiam ser mobilizados para dar resposta ao novo problema. Os alunos utilizaram uma aprendizagem adquirida em contexto sala de aula – representação da fração de uma piza – para resolverem o problema colocado, selecionando a forma circular para representarem os dados enunciados. A correspondência reconhecida entre a fração $\frac{1}{2}$ e o conceito de metade foi aplicada na representação circular, de modo que os alunos consideraram “metade” dessa representação como correspondente ao percurso percorrido durante os primeiros três dias. De forma semelhante, os alunos “dividiram” a metade restante em duas partes de “igual área”, associando a quarta parte representada à fração $\frac{1}{4}$.

De acordo com os registos audiovisuais recolhidos, os alunos começaram por representar um dos dados enunciados – *2,5 km percorridos na sexta-feira* – revelando, uma vez mais, terem interpretado corretamente o enunciado. Como consequência, os alunos obtiveram soluções parciais: *na quinta-feira percorreram 2,5 km e nos primeiros três dias da semana 5 km*. Destaca-se a representação da informação desconhecida

através de um ponto de interrogação, ação que transmite a ligação estabelecida entre as ações *Reconhecer* e *Construir*. Realça-se, também, o facto de os alunos terem representado quantidades indeterminadas através da representação circular, evidenciando a sua interpretação dos dados do enunciado, e de terem obtido soluções intermédias a partir da exploração do esquema por eles desenvolvido.

O excerto que se segue expõe de que forma os alunos mobilizaram *Construções reconhecidas* e, em particular, a identificação de regularidades, para obterem *Solução* para as questões colocadas.

GI: E esta alínea [referindo-se à alínea d]. Não é um número. É um número qualquer.
 LP: n é um número qualquer como na outra ficha. Fazemos também a letra a dividir por cinco como nas anteriores. [GI iniciou a escrita]

Figura 4.41 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Conta-quilómetros*

O diálogo anterior mostra que os alunos integraram conhecimentos adquiridos – conceito de fração de uma quantidade, divisão, representação simbólica e conceito de indeterminação – para representarem o seu raciocínio e chegarem à solução das questões intermédias colocadas. Os alunos reconheceram o significado atribuído à letra n , e a regularidade presente na divisão por cinco, aplicando esse conhecimento para obter resposta para as questões colocadas.

A figura que se segue pormenoriza as situações em que a ação *Construir* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Estratégias* (Es), *Soluções* (S), *Justificação* (J) e *Construção reconhecida* (CR).

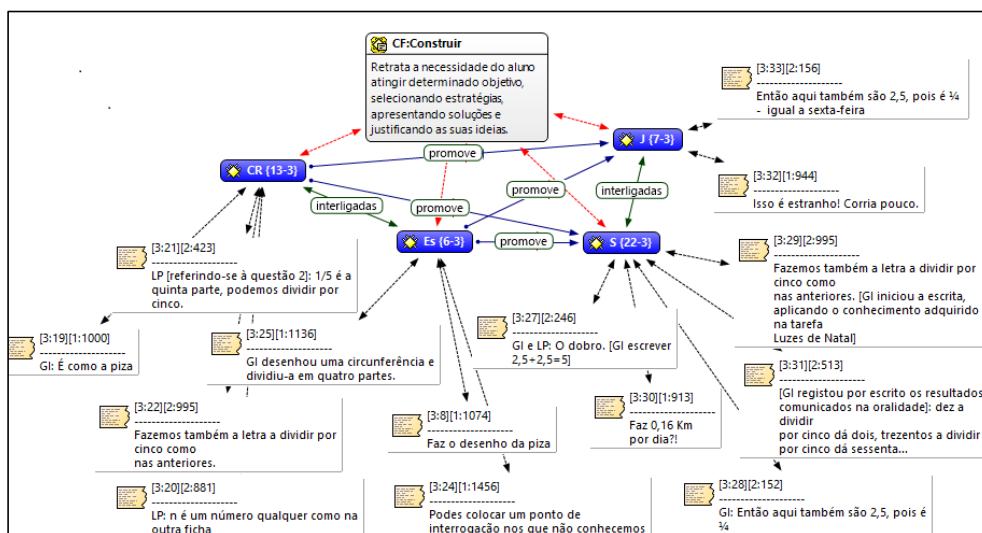


Figura 4.42 – RAV da ação epistémica *Construir* em *Conta-quilómetros*

A ação *Construir* teve início com a aplicação de conhecimentos adquiridos previamente pelos alunos, não só conceitos [3:21] como também estratégias [3:24][3:25], procedimentos [3:22] [3:31] e significados adquiridos com a resolução da tarefa *Luzes*

de Natal [3:20]. Essas *Construções reconhecidas* (CR) revelaram-se essenciais para a aplicação de *Estratégias* (Es) e para obtenção de *Soluções* (S) e *Justificação* (J) para os resultados apresentados.

Comparativamente com a resolução da tarefa *Luzes de Natal*, verificou-se a mesma relação estabelecida pelas diferentes subcategorias, ainda que nesta tarefa a subcategoria *Estratégias* (Es), presente através da representação circular, também interligada à subcategoria *Construções reconhecidas* (CR), registre maior presença. A aplicação de construções utilizadas em contextos anteriores [3:19] permitiram que os alunos estabelecessem raciocínios, reconhecessem [3:8] [3:29] e selecionassem *Estratégias* (Es) [3:24] [3:25] para atingirem objetivos parciais [3:27] [3:28] e *Justificarem* (J) o raciocínio desenvolvido [3:33].

Face ao exposto, a ação epistémica *Construir* parece surgir interligada à ação epistémica *Reconhecer*, no sentido em que os alunos compreenderam a necessidade de mobilizar e aplicar estruturas adquiridas em contextos anteriores.

A tabela seguinte sintetiza as ações manifestadas durante o desenvolvimento da ação *Construir*, de acordo com as subcategorias definidas.

Tabela 4.7 – Síntese da ação epistémica *Construir* em *Conta-quilómetros*

Categoria: <i>Construir</i> (B)		
Subcategorias	Estratégias Es	<ul style="list-style-type: none"> Os alunos recorreram ao desenho, representação circular, para representarem os dados enunciados, traduzirem o seu raciocínio e chegarem à solução do problema; Utilizaram o ponto de interrogação para representar o valor desconhecido, revelando criatividade na representação dos dados e conhecimento na interligação de informação.
	Soluções S	<ul style="list-style-type: none"> Recorreram à representação circular para organizarem os dados enunciados e o seu raciocínio, apresentando soluções intermédias que os aproximaram da resposta ao problema colocado.
	Justificação J	<ul style="list-style-type: none"> Apresentaram justificações intermédias através das características da representação circular, completando a sua justificação através da realização de cálculos numéricos.
	Construção reconhecida CR	<ul style="list-style-type: none"> Integraram conhecimentos adquiridos anteriormente (representação circular, conceito de fração e representação pictórica do desconhecido) para representarem o seu raciocínio e chegarem à solução do problema. O mesmo se verificou com o cálculo da fração de uma quantidade desconhecida, quando fizeram uso da resolução apresentada nas primeiras três alíneas e da experiência adquirida com a resolução da tarefa <i>Luzes de Natal</i>.

Síntese. No desenvolvimento da ação *Construir*, ocorrida durante a resolução da tarefa *Conta-quilómetros*, verificámos que todas as subcategorias definidas se manifestaram e que a relação estabelecida entre essas foi semelhante à verificada aquando da análise da resolução da tarefa *Luzes de Natal*. As subcategorias *Construções reconhecidas* e *Estratégias*, bem como as subcategorias *Soluções* e *Justificação* mantiveram-se interligadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. Explica-se esta

relação pelo facto de uma das *Construções reconhecidas* coincidir com a *Estratégia aplicada*, a construção circular, que ao ser explorada pelos alunos, permitiu a integração de novas *Construções reconhecidas*, tais como o cálculo e o conceito de fração. As *Soluções e Justificações* resultaram do raciocínio desenvolvido e, sobretudo, da exposição de ideias e resultados, mantendo-se interligadas durante o desenvolvimento do processo de abstração.

Verificou-se ainda que, à semelhança do que se registou na tarefa *Luzes de Natal*, as *Construções reconhecidas e as Estratégias aplicadas* revelaram-se úteis para a apresentação de *Soluções intermédias* e para a *Justificação* dos raciocínios desenvolvidos. Porém, destaca-se a forte presença da aplicação da *Estratégia* – representação circular – e, paralelamente, da subcategoria *Construções reconhecidas* que com essa se manteve interligada, considerando-se que essa relação foi essencial para a apresentação de *Soluções e Justificação* para o raciocínio desenvolvido.

Relativamente à *Estratégia* selecionada, considera-se que promoveu maior autonomia, favorecendo a resolução do problema colocado. Questiona-se se a representação poderá constituir-se como uma *Estratégia* eficaz à resolução de problemas de natureza algébrica, designadamente quando se intenciona o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos mais jovens.

4.2.3 Construção

No excerto que se segue, podemos analisar de que forma a ação *Construção* se evidenciou.

LP: Agora é somar tudo... dá 5, mais 5 destes, dá 10 km que é o total.
[escreveu $5 + 2,5 + 2,5 = 10$ e passaram à questão seguinte].

Figura 4.43 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Conta-quilómetros*

Constata-se que a resposta apresentada consistiu na combinação e reorganização de conhecimentos aplicados anteriormente, tais como o conceito de fração e sua representação, com a adição de números racionais que, organizados sequencialmente, promoveram a representação de relações numéricas e, como tal, a resolução do problema de natureza algébrica. A *Construção* está, neste caso, associada à apresentação de uma solução para o problema colocado, ou seja, ao cálculo do número total de quilómetros do percurso. Ocorreu quando a resposta foi verbalizada e apresentada, pela primeira vez, na forma de expressão numérica, tal como evidencia o registo que se segue.

$$5 + 2,5 + 2,5 = 10$$

Figura 4.44 – RA respeitantes à resolução da tarefa Conta-quilómetros

Destaca-se o facto da estratégia seleccionada e da resolução apresentada pelos alunos ter semelhanças com o modelo *pictorial equations*, utilizado para estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. A utilização da representação circular permitiu que os alunos traduzissem e representassem informação relevante e, como tal, resolvessem um problema de natureza algébrica sem fazerem uso de linguagem simbólica. Através da construção do desenho – *equações pictóricas* – os alunos revelaram maior facilidade em identificar as operações implicadas e em extrair resultados pertinentes. Na perspetiva da investigadora, ao utilizarem este esquema compreenderam com maior facilidade as formas de pensamento utilizadas.

Na figura que se segue, pode-se verificar em que momento e de que forma a ação *Construção* voltou a estar presente na resolução da tarefa.

Figura 4.45 – RA respeitantes à resolução da tarefa Conta-quilómetros

Comparativamente com o conteúdo da tarefa *Luzes de Natal*, na presente tarefa dá-se maior expressão à linguagem simbólica. Pesa, nesta situação, o significado que os alunos possam ter dado à letra *m* durante a resolução da tarefa *Luzes de Natal*, bem como a outros conhecimentos adquiridos previamente: conceito de quinta parte e divisão. Considera-se que a *Construção* verificou-se quando os alunos expressaram, pela primeira vez, a quinta parte de um número desconhecido, revelando terem interpretado o significado dado às letras *n* e *m*.

Considera-se que a *Construção* tornou-se possível a partir do momento em que os alunos *Reconheceram* e atribuíram significado às letras representadas e integraram conhecimentos adquiridos previamente, *Construir*. A *Reorganização* dos raciocínios e *Soluções* intermédias apresentadas favoreceram a exposição e generalização, com recurso à utilização de linguagem simbólica. Entende-se que a *Construção* foi atingida quando os alunos cumpriram o objetivo da tarefa, expressando em linguagem simbólica a quinta parte de um número desconhecido. Relativamente às igualdades que os alunos apresentaram incorretamente [$\frac{n}{5} = n$; $\frac{m}{5} = m$] e [$\frac{n+m}{5} = n + m$], entende-se que essas poderão estar associadas à necessidade dos alunos obterem um resultado numérico, tal como aconteceu quando calcularam a quinta parte de valores numéricos conhecidos.

Esta situação poderá estar relacionada com o facto de os alunos não conhecerem o significado de expressão algébrica e de utilizarem, em contextos anteriores, tal como no cálculo de áreas, relações de igualdade.

A figura que se segue esquematiza alguns dos exemplos supracitados, respeitantes ao desenvolvimento da ação *Construção* (C), estabelecendo uma relação entre as diferentes subcategorias identificadas, designadamente *Reorganização* (Ro) e *Generalização* (G).

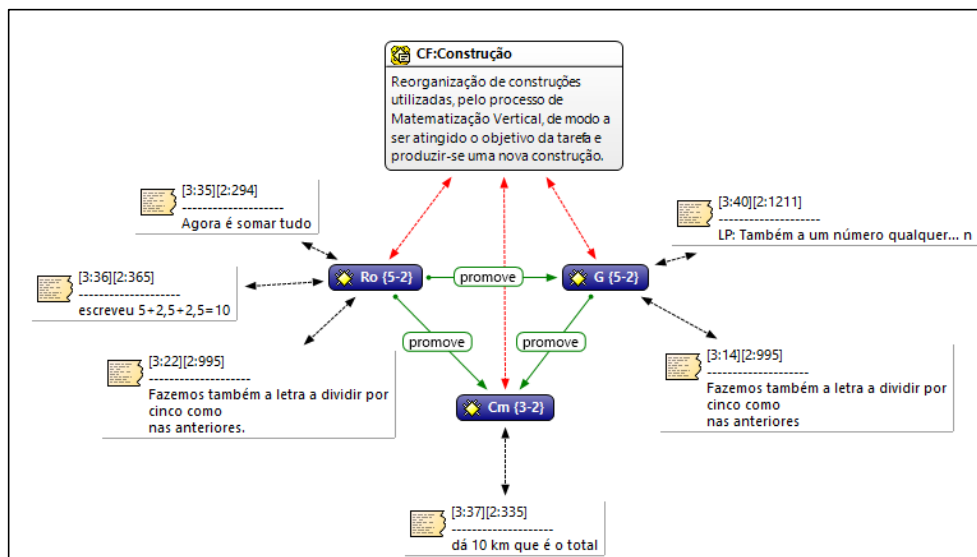


Figura 4.46 – RAV da ação epistémica *Construção* em *Conta-quilómetros*

A ação *Construção* resultou da *Reorganização* (Ro) vertical de conhecimentos aplicados [3:35] [3:36] [3:22], da *Generalização* (G) de regularidades observadas [3:14] [3:40] e da expressão – *Comunicação* (Cm) – dos resultados obtidos [3:37]. Esta ação só foi alcançada quando os alunos expressaram, pela primeira vez, a nova *Construção*, dando resposta ao problema [3:37] e apresentando, em linguagem simbólica, a quinta parte de um número desconhecido. Destaca-se o facto de, para conceber a nova construção, ter sido utilizada uma construção adquirida anteriormente, com a resolução da tarefa *Luzes de Natal*, a qual resultou da interpretação e utilização de linguagem simbólica.

A tabela que se segue pormenoriza as situações em que a ação *Construção* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação*.

Tabela 4.8 – Síntese da ação epistêmica Construção em Conta-quilômetros

Categoria: Construção (C)		
Subcategorias	Reorganização (Ro)	<ul style="list-style-type: none"> • Combinaram construções adquiridas anteriormente (representação circular, frações e representação simbólica) com os dados do problema, reorganizando verticalmente todos os resultados.
	Generalização (G)	<ul style="list-style-type: none"> • Estenderam o conhecimento aritmético, resolvendo o problema de natureza algébrica; • Generalizaram o cálculo da fração de uma quantidade a um valor desconhecido.
	Comunicação (Cm)	<ul style="list-style-type: none"> • Expressam o seu raciocínio verbalmente, através da representação circular, e por escrito; • Ainda que não tenham feito uso de linguagem simbólica, apresentaram resolução para o problema de natureza algébrica.

Síntese. A análise desta tarefa revelou a existência de uma relação mais estreita, comparativamente com a tarefa *Luzes de Natal*, entre as subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação*. Verificou-se que a *Reorganização* de conhecimentos adquiridos promoveram a *Generalização*, bem como a *Comunicação* das mesmas. A *Comunicação* da nova *Construção* surgiu, igualmente, como consequência da *Generalização* concebida.

Entende-se, tal como na tarefa *Luzes de Natal*, que a *Construção* do novo conhecimento surge como consequência das ações *Reconhecer* e *Construir* e das relações estabelecidas entre essas.

4.2.4 Consolidação

O processo de *Consolidação* revelou que os alunos mobilizaram o conhecimento adquirido através da resolução da tarefa *Luzes de Natal*, respeitante à utilização de linguagem simbólica. Esse conhecimento permitiu que dessem significado à presença da letra n , tal como se pode constatar no excerto que se segue:

GI: E esta alínea [referindo-se à alínea d]. Não é um número. É um número qualquer. [O aluno reconheceu, sem hesitação, que a letra representava um número qualquer desconhecido].
 LP: n é um número qualquer como na outra ficha. [reconhecendo a construção adquirida na tarefa *Luzes de Natal*].
 Fazemos também a letra a dividir por cinco como nas anteriores. [GI iniciou a escrita, aplicando o conhecimento adquirido na tarefa *Luzes de Natal*].

Figura 4.47 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Conta-quilômetros*

A ação *Consolidação* evidenciou-se quando os alunos revelaram rapidez e autonomia na interpretação do significado atribuído às letras, aplicando a construção concebida na tarefa *Luzes de Natal*. Recorde-se que nessa situação, os alunos não tinham, numa fase inicial, dado significado à letra apresentada, solicitando a ajuda da professora para decodificar essa informação. No novo contexto, tarefa *Conta-quilômetros*, os alunos

não só reconheceram, como aplicaram os conhecimentos adquiridos com a resolução da primeira tarefa, apresentando a quinta parte de n , de m e de $n + m$.

Os alunos revelaram perseverança ao longo da resolução do problema, envolvendo-se na exploração dos dados e na partilha de conhecimentos e de ideias. O interesse e envolvimento demonstrados podem ser indicadores de que a dinamização de tarefas exploratórias poderá trazer benefícios pedagógicos, em particular quando se pretende estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A figura seguinte esquematiza o desenvolvimento da ação epistémica *Consolidação*, expondo pequenos excertos que revelam manifestações das subcategorias *Aplicação de Construções recentes* (AC) e *Características psicológicas* (CP). Destaca, igualmente, a relação estabelecida entre as duas subcategorias.

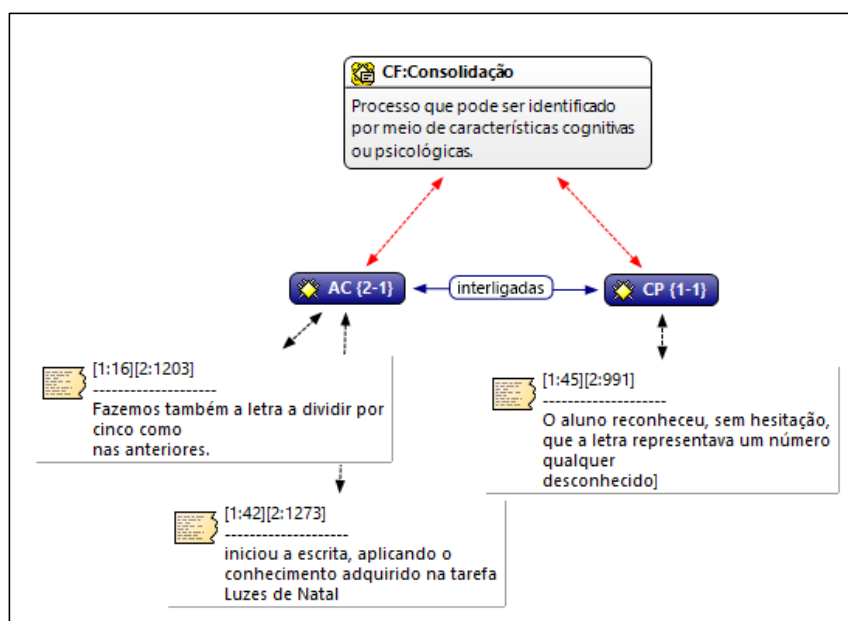


Figura 4.48 – RAV da ação epistémica *Consolidação* em *Conta-quilómetros*

A ação *Consolidação* evidenciou-se quando os alunos utilizaram o conhecimento construído na tarefa *Luzes de Natal* e interpretaram linguagem simbólica [1:16] para dar resposta à questão colocada. Essa ação evidenciou-se não só através da *Aplicação da Construção* adquirida recentemente (AC), mas também através da atitude dos alunos, rapidez e confiança, *Características psicológicas* (CP) [1:45], aquando da interpretação do significado atribuído às letras e na destreza evidenciada quando apresentaram a resposta em linguagem simbólica [1:42]. A *Consolidação* (Co) foi integrada com naturalidade durante o processo de abstração dos alunos, contribuindo para o desenvolvimento da nova construção.

Destaca-se o facto de a *Consolidação* ter-se manifestado durante o desenvolvimento da ação *Construir*, associado à seleção de estruturas adquiridas – *Reconhecer* e de se revelar essencial para alcançar a nova *Construção*.

A tabela que se segue pormenoriza as situações em que a ação *Consolidação* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Aplicação de uma construção recente* e *Características psicológicas*.

Tabela 4.9 – Síntese da ação epistémica *Consolidação* em Conta-quilómetros

Categoria: <i>Consolidação</i> (Co)		
Subcategorias	Aplicação de uma construção recente (AC)	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicaram o conhecimento adquirido com a representação de metade e quarta parte na representação circular; • Interpretaram as letras <i>n</i> e <i>m</i> como representando um número desconhecido e aplicaram conhecimentos adquiridos anteriormente.
	Características psicológicas (CP)	<ul style="list-style-type: none"> • Revelaram autonomia, rapidez e destreza na aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente.

Síntese. A ação epistémica *Consolidação* manifestou-se através das subcategorias *Aplicação de uma construção recente* e *Características psicológicas*, quando os alunos mobilizaram conhecimentos adquiridos através da resolução da tarefa *Luzes de Natal*, designadamente a interpretação de linguagem simbólica. Verificou-se, ainda, que as subcategorias supracitadas mantiveram-se interligadas, no sentido em que a *Aplicação da construção recente* proporcionou maior autonomia, rapidez e destreza. A resolução sugere que a *Aplicação da construção recente* é essencial para que os alunos se interessem pela resolução da tarefa, para que não desistam e progridam nas diferentes etapas de resolução. Contudo, a postura evidenciada pelos alunos, designadamente o empenho e a partilha, valorizam e dão sentido ao conhecimento mobilizado. Também se constatou que a *Consolidação* manifestou-se durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, associada à ação epistémica *Reconhecer*, revelando-se essencial para a *Construção* do novo conhecimento matemático. Apesar de surgir associada à ação epistémica *Reconhecer*, a *Consolidação* parece manter-se independente da construção, surgindo apenas quando necessária. Surge, então, o interesse em analisar se a relação agora evidenciada se mantém na resolução das tarefas que se seguem.

A figura 4.49 esquematiza as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co), sintetizando conclusões descritas durante a apresentação dos resultados.

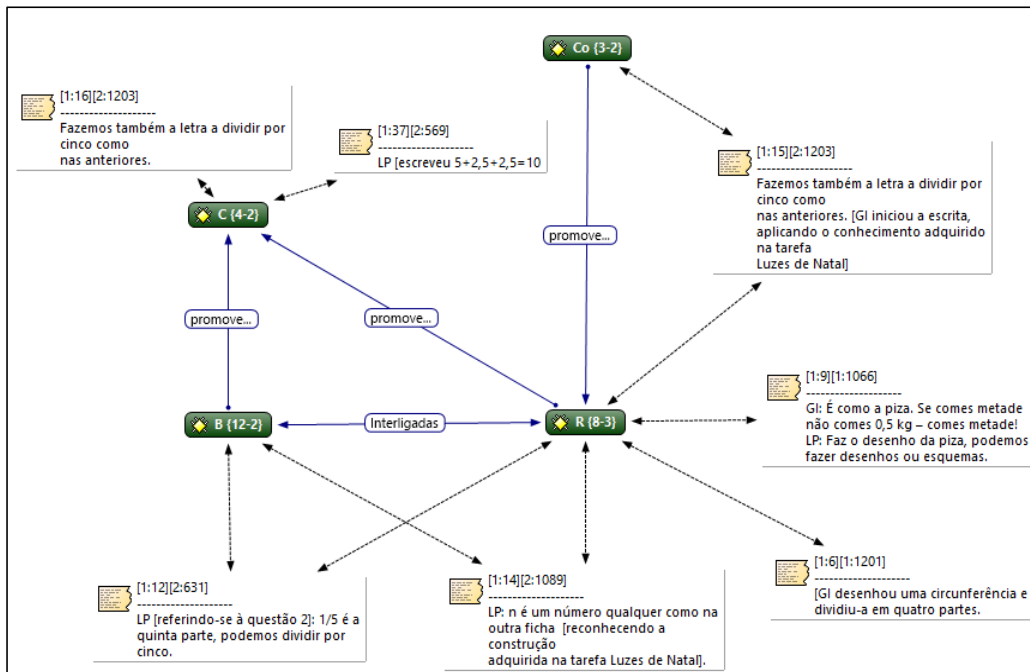


Figura 4.49 – Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em Conta-quilómetros

A figura anterior exemplifica em que fases do processo de abstração, as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co) estiveram associadas. Verifica-se que o reconhecimento de conceitos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores, tais como o conceito de quinta parte [1:12], a representação circular [1:6] [1:9] e o significado atribuído à linguagem simbólica [1:14] foram integrados na representação do raciocínio e na apresentação de soluções intermédias, promovendo o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*.

O desenvolvimento das ações *Reconhecer* e *Construir*, observável através da integração e combinação de raciocínios e soluções apresentadas, ao serem reorganizadas, promoveram o desenvolvimento da ação epistémica *Construção* [1:16] [1:37]. Também se verificou que a interpretação de linguagem simbólica partiu do *reconhecimento* de uma construção concebida durante a resolução da tarefa *Luzes de Natal* [1:15] surgindo, como tal, como consequência da *Consolidação* desse conhecimento.

Síntese. Verificou-se que os alunos reconheceram a utilidade de *Construções* concebidas recentemente, integrando-as na construção do novo conhecimento. Como tal, a ação *Consolidação*, embora surgindo de forma isolada, promoveu o desenvolvimento da ação *Reconhecer*. Por sua vez, as ações *Reconhecer* e *Construir* mantiveram-se interligadas no desenvolvimento do raciocínio e na apresentação de soluções intermédias. Considera-se, ainda, que as ações *Reconhecer* e *Construir* promoveram a nova *Construção*. Questionamos se a nova *Construção*, correspondente ao uso de linguagem simbólica, foi concebida através da aquisição de significados ou se esteve, simplesmente, associada à repetição de um procedimento aritmético.

4.2.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento. *Professor.*

À semelhança da tarefa *Luzes de Natal*, esta tarefa foi apresentada em contexto turma. Do primeiro contacto estabelecido não surgiram dúvidas de interpretação do enunciado do problema, mas estranheza quanto à possibilidade de poderem resolver o problema apresentado através de esquemas ou desenhos.

Os alunos seguiram com atenção a leitura da tarefa Conta-quilómetros, projetada em contexto sala de aula. Quando questionados acerca de possíveis dúvidas, um aluno da turma questionou se não podiam fazer contas. Compreendi que essa dúvida estaria relacionada com o facto de ter sido dada a possibilidade de resolverem o problema enunciado através de esquemas ou desenhados. Não colocaram mais questões, dando-se início à distribuição do enunciado da tarefa. Os alunos iniciaram a exploração dos dados enunciados, não colocando qualquer dúvida acerca dos dados ou da questão efetuada.

Figura 4.50 – RAV sobre o ambiente observado durante a resolução da tarefa Conta-quilómetros

A mediação estabelecida pela professora ocorreu durante a apresentação da tarefa, quando esta procurou motivar os alunos para a resolução da mesma e incentivou a utilização do artefacto – tarefa – em suporte papel, para promover o desenvolvimento do processo de abstração e a construção do novo conhecimento matemático.

Durante a resolução da tarefa, a intervenção da professora prendeu-se com a certificação de que os alunos continuavam empenhados em cumprir os objetivos propostos, comunicando entre si conhecimentos e ideias, visando a evolução dos significados produzidos. Verificámos que o artefacto desenvolvido pela professora promoveu maior autonomia por parte dos alunos, no sentido em que a ação desenvolvida por eles proporcionou o reconhecimento e a integração de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, bem como a produção de signos matemáticos. A tarefa revelou ter potencial semiótico, não tendo sido necessária a intervenção da professora, para que os alunos progredissem no seu desenvolvimento.

A mediação estabelecida entre professora e alunos voltou a ser significativa na fase de discussão, quando os alunos expuseram as suas ideias e estabeleceram ligações com aprendizagens adquiridas anteriormente, reforçando as novas aprendizagens.

Quando confrontados com as resoluções apresentadas, os alunos explicaram por que razão tinham optado pela representação circular e que relação tinham estabelecido entre os dados enunciados e essa representação.
Ambos mostraram interesse em expor-se perante a turma, reforçando, por vezes, as suas ideias quase em simultâneo.
Embora a discussão não tenha sido proporcionada no dia em que resolveram a tarefa, verificou-se, durante a exposição, que os raciocínios desenvolvidos anteriormente estavam bastante presentes, pela confiança e clareza com que explicavam aos colegas como tinham chegado à resposta pretendida.
Mostraram o mesmo empenho quando iniciaram a explicação do cálculo e representação da quinta parte de números e expressões algébricas apresentadas.
Fizeram ainda referência à associação das letras ao número desconhecido apresentado na tarefa Luzes de Natal, referindo seguir a mesma ideia.

Figura 4.51 – RI sobre o ambiente observado durante a resolução da tarefa Conta-quilómetros

Considera-se que a discussão, em contexto sala de aula, proporcionou, aos alunos, o reforço da *Construção* concebida e a *Consolidação* dos novos conhecimentos adquiridos. Nesta fase, evidenciou-se, ainda mais, a habilidade que os alunos demonstram ter em aplicar estratégias diferenciadas para resolver problemas de natureza algébrica.

A figura seguinte exemplifica situações em que ocorreram as subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA) e *Incentivo à construção de signos matemáticos* (ICS), respeitantes à categoria *Professor*, transmitindo, também, uma relação entre as subcategorias identificadas.

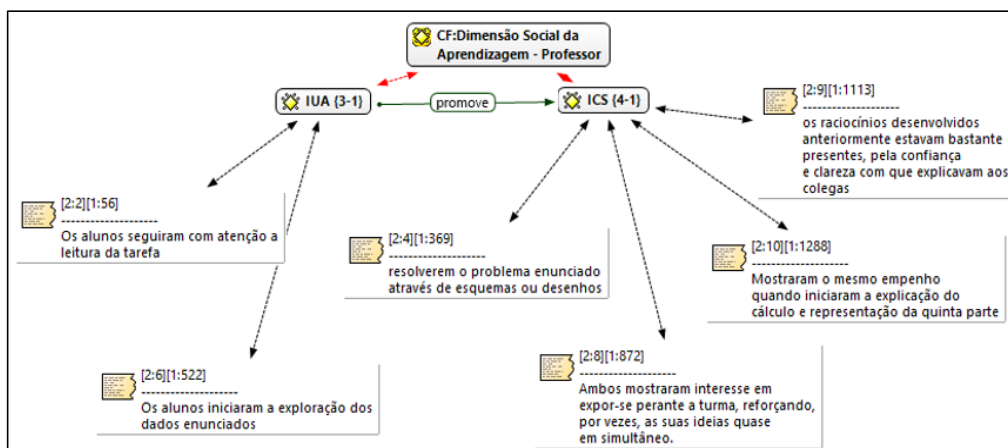


Figura 4.52 – RAV da DSA, Professor, em Conta-quilómetros

Através da figura 4.52 pode constatar-se que a mediação estabelecida pela professora prendeu-se com o incentivo à utilização e exploração da tarefa, apresentada aos alunos em suporte papel, como forma de produzirem novos significados matemáticos. Ao utilizarem o artefacto, os alunos exploraram com maior detalhe a informação contida

no enunciado do problema [2:2] [2:6], selecionando estruturas adquiridas anteriormente – *Reconhecer* – para representarem as suas ideias. Ao explorarem a tarefa, os alunos integraram conhecimentos adquiridos previamente, construindo novos signos matemáticos [2:4] – *Construir* e *Construção*. A intervenção da professora revelou-se bastante importante no momento de discussão, pois os alunos foram confrontados com as respostas que deram e incentivados a exporem o seu raciocínio, no sentido da produção de novos signos matemáticos. O incentivo à exposição de ideias contribuiu para reforçar a *Construção* concebida, mas também para *Consolidarem* os conceitos adquiridos, evidenciados pelo empenho, clareza e confiança demonstrados durante a exposição [2:8] [2:9] [2:10].

A tabela que se segue pormenoriza as situações em que a categoria *Professor* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* e *Incentivo à construção de signos matemáticos*.

Tabela 4.10 – Síntese da análise da DSA, *Professor*, em *Conta-quilómetros*

Categoria: <i>Professor</i> (P)		
Subcategorias	Incentivo à utilização de artefactos (IUA)	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentou a tarefa em suporte informático, esclarecendo dúvidas de interpretação – <i>Reconhecer</i> – e incentivando os alunos à sua realização; • Incentivou a exploração da tarefa elaborada.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)	<ul style="list-style-type: none"> • A tarefa desenvolvida pela professora, de acordo com a sua estrutura, incentivou e promoveu a construção de signos matemáticos: esquemas, desenhos; • Incentivou a exploração semiótica da representação circular desenvolvida pelos alunos; • Incentivou a aquisição de significado quanto à linguagem simbólica apresentada.

Síntese. À semelhança do que se tinha verificado na tarefa *Luzes de Natal*, o papel da *professora* foi bastante significativo para a *Construção de novos signos* matemáticos. O seu desempenho é valorizado, essencialmente, durante a elaboração da própria tarefa, pois foi através dessa que incentivou os alunos a representarem dados e ideias e a descobrirem solução para o problema de natureza algébrica. Foi, também, na fase de criação do artefacto que a professora procurou incentivar o reconhecimento de construções adquiridas na tarefa anterior, *Luzes de Natal*, proporcionando, uma vez mais, o contacto com linguagem simbólica. Destaca-se, ainda, o seu desempenho na fase de apresentação, por incentivar e esclarecer dúvidas aos alunos, bem como na fase de discussão, através da qual estimulou a argumentação, a síntese e o reforço da nova construção – *Consolidação*.

4.2.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Alunos.

Nos excertos que se seguem pode-se verificar que a produção de signos individuais e coletivos, durante a realização da tarefa, foram essenciais para a construção do novo conhecimento matemático.

LP: Faz o desenho da piza, podemos fazer desenhos ou esquemas.
[GI desenhou uma circunferência e dividiu-a em quatro partes.]
LP: Mas é preciso ter metade.
GI: [Apagou um dos segmentos de reta que separava duas quartas partes.]
LP: Aí podes escrever os três primeiros dias. [...]
LP: Podes colocar um ponto de interrogação nos que não conhecemos... nesta (apontando com o dedo) e nesta escreves 2,5 (apontando). [...]
GI: Então aqui também são 2,5, pois é $\frac{1}{4}$ - igual a sexta-feira e o outro também é fácil...
GI e LP: O dobro. [GI escrever $2,5 + 2,5 = 5$]
LP: Agora é somar tudo... dá 5, mais 5 destes, dá 10 km que é o total.
LP [escreveu $5 + 2,5 + 2,5 = 10$ e passaram à questão seguinte]

Figura 4.53 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Conta-quilómetros (GI, LP)

A representação circular – desenho da piza – foi reconhecida por LP como útil para representar os dados do problema (*Reconhecer*). Esta representação, produzida por GI, pode ser entendida como um instrumento que os alunos exploraram no sentido de expor as suas ideias (*Construir*) e chegar às respostas pretendidas. Verifica-se que a construção do desenho circular está associada à produção de signos individuais e coletivos, no sentido em que os alunos associaram os conceitos geométrico e analítico, de metade e quarta parte, registando esses dados no seu desenho, alcançando, dessa forma, soluções intermédias (*Construir*) e a solução do problema (*Construção*). Embora a representação circular tenha resultado da percepção de LP e os signos produzidos estejam a ele associados, verificou-se que a comunicação estabelecida entre os dois alunos contribuiu para que, também GI, desse significado à representação e introduzisse novas ideias. Como tal, a produção de signos individuais esteve associada à produção de signos coletivos, tendo ambas contribuído para a construção do conhecimento.

GI: E esta alínea [referindo-se à alínea d]. Não é um número. É um número qualquer.
[O aluno reconheceu, sem hesitação, que a letra representava um número qualquer desconhecido].
LP: n é um número qualquer como na outra ficha [reconhecendo a construção adquirida na tarefa *Luzes de Natal*]. Fazemos também a letra a dividir por cinco como nas anteriores.

Figura 4.54 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Conta-quilómetros (GI, LP)

Durante a resolução desta tarefa foi possível constatar a produção de signos individuais, resultantes, quase sempre, de conhecimentos reconhecidos pelos alunos. O aluno LP sugeriu a representação circular para expor as suas ideias e chegar à solução pretendida. Esse signo individual foi sugerido e interpretado por LP, de modo que a partilha de conhecimentos permitiu que atribuísem significado ao problema colocado e chegassem à solução pretendida. A produção de signos individuais evidenciou-se com o reconhecimento do significado atribuído à letra *n*, na elaboração da tarefa *Luzes de Natal*. Esse contribuiu para que o aluno LP representasse a quinta parte das expressões algébricas solicitadas, à semelhança do que tinha feito para valores numéricos. A produção de signos coletivos esteve presente na partilha e comunicação estabelecida pelos alunos e na apresentação de solução para o problema.

A figura que se segue exemplifica, através dos excertos selecionados, alguns dos momentos em que a categoria *Alunos* foi identificada e, em particular, quando as ações manifestadas se relacionaram com a *Produção de signos individuais* (PSI) e com a *Produção de signos coletivos* (PSC).

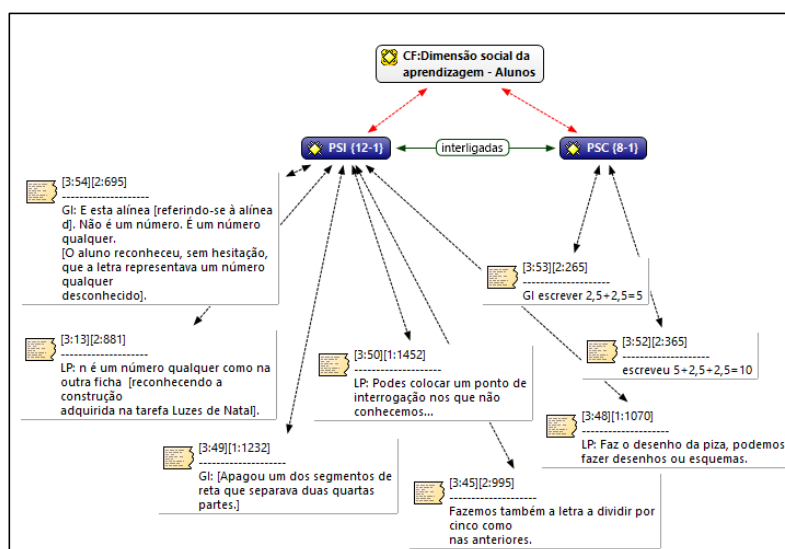


Figura 4.55 – RAV da DSA, Alunos, em Conta-quilómetros

A figura anterior transmite a interligação estabelecida entre as subcategorias *Produção de signos individuais* e *Produção de signos coletivos*, bem como a sua ligação à construção de novos significados. Pode constatar-se que a *Produção de signos individuais* esteve associada ao *Reconhecimento* de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente, tais como: a representação circular [3:48] [3:49] e pictórica [3:50], a identificação de regularidades [3:45] e a interpretação de linguagem simbólica [3:13] [3:54]. A integração de conceitos e procedimentos reconhecidos contribuíram para a produção de novos significados, concebidos através da exploração do instrumento concebido pelos alunos: a representação circular. Foi através da exploração

desta representação que os alunos obtiveram *Soluções* intermédias [3:53], que evidenciaram o desenvolvimento da ação *Construir* e, posteriormente, a nova *Construção* [3:52].

A tabela que se segue sintetiza as situações em que a categoria *Alunos* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Produção de signos individuais* (PSI) e *Produção de signos coletivos* (PSC).

Tabela 4.11 – Síntese da análise da DSA, Alunos, em Conta-quilómetros

Categoria: Alunos (A)		
Subcategorias	Produção de signos individuais (PSI)	<ul style="list-style-type: none"> • Utilizaram a representação circular para representar os dados enunciados, encontrar soluções intermédias e obter resposta para o problema; • Envolveram-se na atividade proposta, produzindo signos individuais e integraram conhecimentos adquiridos, expressaram ideias e apresentaram resposta para as questões colocadas; • A produção de signos individuais manifestou-se, sobretudo, através do desenvolvimento da ação epistémica <i>Reconhecer</i>.
	Produção de signos coletivos (PSC)	<ul style="list-style-type: none"> • A produção de signos resultou da comunicação e partilha estabelecida entre alunos; • Os alunos interagiram entre si, interligando conhecimentos que lhes permitiram realizar a tarefa; • A construção do novo conhecimento esteve dependente da partilha de conhecimentos e ideias; • A produção de signos coletivos manifestou-se, sobretudo, através do desenvolvimento das ações epistémicas <i>Construir</i> e <i>Construção</i>.

Síntese. À semelhança do que já se tinha verificado na tarefa *Luzes de Natal*, constatou-se que as subcategorias *Produção de signos individuais* e *Produção de signos coletivos* mantiveram-se interligadas durante a construção e evidenciaram o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. A *Produção de signos individuais* esteve, globalmente, associada à interpretação dos enunciados e à seleção da representação circular e de conhecimentos adquiridos com a resolução da tarefa *Luzes de Natal* manifestando-se, por isso, através do desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação*. A partilha e a comunicação de ideias, ou seja, a *Produção de signos coletivos* favoreceu o desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Construção*.

A mediação estabelecida entre alunos sugere, ainda, que as contribuições individuais são importantes, particularmente na fase inicial do processo de abstração, porém, a partilha é essencial para o desenvolvimento da construção do novo conhecimento matemático.

A figura que se segue procura transmitir de que forma a partilha, verificada entre *Alunos* (A), e a mediação, estabelecida entre *Professora* (P) e alunos, contribuíram para a construção do novo conhecimento, em particular para o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co).

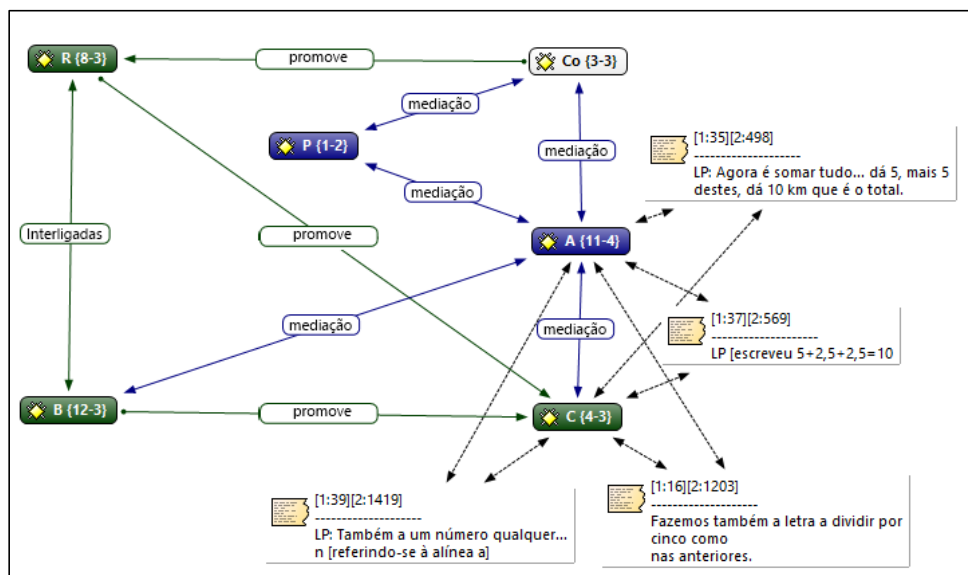


Figura 4.56 – Relação entre RBC+C e DSA em Conta-quilómetros

A figura 4.56 reúne informação já esquematizada e pormenorizada, procurando transmitir de que forma o desenvolvimento das ações epistémicas e a mediação estabelecida pela professora, e entre alunos, promoveu, no seu conjunto, a *Construção* do novo conhecimento. A construção do novo conhecimento [1:37] e [1:39], promovida pelo desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (associada à *Consolidação* de conhecimento adquiridos) e *Construir* sofreu também a influência da mediação estabelecida entre professora e alunos.

Síntese. A comunicação estabelecida entre os alunos foi essencial para a interpretação, representação e comunicação de ideias e raciocínios, contribuindo para a produção de signos individuais e coletivos e, como tal, para o desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Construção*. Considera-se, como tal, que a construção do novo conhecimento assumiu uma dimensão individual e social (comunicacional), no sentido em que resultou de um processo de reconstrução interna concebida por partilha de conhecimentos e ideias. Constatou-se que os alunos revelaram capacidade para desenvolver mecanismos que surgiram da sua ação sob a tarefa, registando-se menor dependência da intervenção direta do professor.

4.3 Tarefa 3 – *Doces de Páscoa*

Segue-se a análise dos dados respeitantes aos problemas *Ovos de chocolate* e *Amêndoas de chocolate* da tarefa *Doces de Páscoa*. Através da resolução do problema *Ovos de chocolate* pretende-se a aplicação de competências adquiridas em aprendizagens anteriores, bem como o desenvolvimento de estratégias que poderão ser úteis para a

resolução do problema *Amêndoas de chocolate*. Através da resolução do segundo problema, pretende-se a extensão do trabalho aritmético a valores numéricos indeterminados, de acordo com as relações identificadas. Pretende-se, também, identificar que ações epistémicas se manifestam durante a resolução da tarefa, quando ocorrem e de que forma podem estar associadas à mediação estabelecida entre professora e alunos, e entre alunos.

A tarefa foi apresentada em contexto turma, sendo que dois alunos selecionados pela professora fizeram a leitura global, para todos os alunos a turma, dos dois problemas colocados. Os alunos não colocaram dúvidas mas, ainda assim, a professora destacou que em ambos os problemas a fração das quantidades solicitadas referia-se ao número total de ovos. Seguidamente, a professora procedeu à distribuição da tarefa em suporte papel, dando início à sua resolução. Os alunos (re)iniciaram de imediato a leitura do enunciado do primeiro problema, esperando-se o desenvolvimento do processo de abstração.

4.3.1 Reconhecer

A ação epistémica *Reconhecer* evidenciou-se com a leitura do enunciado do primeiro problema.

LP: Temos de calcular metade dos ovos e a terça e sexta parte [ficaram em silêncio e, passados alguns instantes LP releu o enunciado do problema e enquanto o fazia sublinhava alguns dos dados enunciados (cinco sobrinhos, metade, terça parte, sexta parte)]. Quantos são os ovos?

Figura 4.57 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Doces de Páscoa* (LP)

De acordo com o diálogo anterior, a leitura do enunciado do problema *ovos de chocolate* despertou em LP a necessidade de calcular a metade, a terça e a sexta parte do número de ovos. A ação *Reconhecer* tornou-se evidente através da *Interpretação* do enunciado.

No excerto que se segue, a *Interpretação* do enunciado voltou a ter destaque quanto à perceção de informação e *Estruturas adquiridas*, que poderiam ser selecionadas para resolver o problema.

LP [interrompendo GI]: Temos que justificar... [GI reproduziu o algoritmo da divisão, efetuando corretamente os cálculos].
GI: Também é preciso calcular a terça parte e a sexta parte. [Aplicou o algoritmo de divisão para calcular a terça e a sexta parte de dezoito amêndoas].
LP: Mas é preciso ver se restaram ovos... e justificar. [fez silêncio]. Podemos fazer desenhos. [GI desenhou dezoito círculos e, aplicando os resultados obtidos, eliminou (riscando) os círculos desenhados].

Figura 4.58 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Doces de Páscoa* (LP, GI)

Com a *Interpretação* do enunciado, ao necessitarem de justificar o raciocínio desenvolvido, os alunos selecionaram o algoritmo da divisão para fundamentarem as suas respostas - *Estruturas adquiridas* - revelando terem perceção do significado de metade, terça e quarta parte. A possibilidade de justificar ideias e opções, através de desenhos, poderá também estar associada à interpretação do enunciado, como também da utilização destas estratégias em situações anteriores - *Estruturas adquiridas*. A ação *Reconhecer* voltou a estar presente aquando do início da resolução do segundo problema *Amêndoas de chocolate*, tal como se pode constatar:

[Os alunos leram o enunciado em conjunto].
 LP: [depois de ler a primeira questão em voz alta] É igual ao outro. [olhando para a imagem, iniciaram a contagem].
 GI: Não dá para contar isto tudo... [...]
 LP: Podemos usar o número qualquer. Já usámos. Nas outras fichas usámos! [...]
 LP: Fazemos n a dividir por dois. Também como na metade de dezoito.
 [GI escreveu $\frac{n}{2}$].
 GI: Esta também é a mesma coisa [referindo-se à segunda questão]. Pode-se dividir por quatro [GI escreveu $\frac{n}{4}$]. [...]
 GI: Podemos reduzir ao mesmo denominador?! Mas a letra?

Figura 4.59 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Doces de Páscoa* (GI, LP)

O aluno LP reconheceu a semelhança existente entre os dois problemas, *Regularidades*, ainda que GI compreendesse que alguns procedimentos de resolução aplicados anteriormente, designadamente a contagem, não poderiam ser aplicados nesta situação.

O aluno LP revelou reconhecer a representação de número desconhecido, letra n , utilizada nas tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros*, como útil para a resolução deste problema, selecionando-a - *Estruturas adquiridas*. Pode-se, também, verificar que os alunos identificaram a regularidade existente no procedimento de cálculo da quarta parte e da metade de um número desconhecido, bem como do cálculo que já tinham efetuado, anteriormente, para um número determinado – *Regularidades* e *Estruturas adquiridas*. A progressão na tarefa permitiu, também, identificar a seleção de outras *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores, tais como reduzir ao mesmo denominador, promovendo a simplificação da expressão $\frac{n}{2} + \frac{n}{4}$.

A figura que se segue exemplifica em que momentos a categoria *Reconhecer* (R) e as subcategorias *Interpretação* (I), *Estruturas adquiridas* (EA) e *Regularidades* (Rg) foram identificadas.

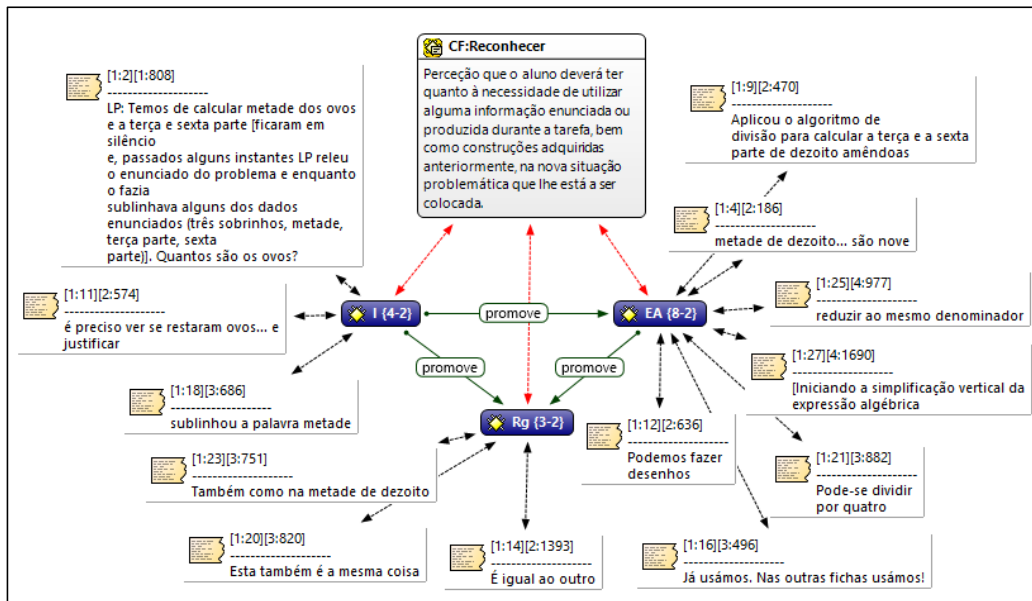


Figura 4.60 – RAV da ação epistémica Reconhecer em Doces de Páscoa

Pode-se constatar, através dos excertos selecionados, a presença da ação epistémica *Reconhecer*, a qual se tornou visível durante a Interpretação dos enunciados dos problemas (I), com a identificação de *Regularidades* (Rg) e com a percepção da utilidade de *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores (EA).

A *Interpretação* dos enunciados permitiu que os alunos adquirissem noção dos dados que poderiam ser essenciais à resolução do problema, manifestando-se essa percepção através do sublinhado [1:2], [1:18] e da indicação de procedimentos a desenvolver para resolver o problema: *temos de calcular metade* [1:2] e *é preciso ver se restaram ovos... e justificar* [1:11].

A ação *Reconhecer* evidenciou-se, igualmente, através da seleção de *Estruturas adquiridas* anteriormente, tais como os conceitos de metade [1:4], quarta parte [1:21] terça e sexta parte [1:9], algoritmo da divisão [1:9], cálculo mental [1:4], adição de números racionais representados por frações [1:25], simplificação de números racionais representados por frações [1:27] e da adoção de representações esquemáticas para representar o raciocínio [1:12]. Acrescenta-se o facto de a ação *Reconhecer* estar também associada ao significado atribuído à linguagem simbólica, utilizada nas tarefas já analisadas, uma vez que os alunos associaram, autonomamente, o contexto indeterminado presente no enunciado à letra *n*, utilizada em tarefas anteriores [1:16].

A subcategoria *Regularidades* relaciona-se com o facto de os alunos constatarem a semelhança existente entre o segundo e o primeiro problema, designadamente nos procedimentos a adotar [1:14] e a aplicar para determinar, no segundo problema, metade de um número desconhecido [1:23], situação semelhante ao cálculo de metade de dezoito, no primeiro problema. No excerto [1:20] verificamos o desenrolar da ação

Reconhecer, durante a resolução do mesmo problema, no sentido em que a indicação de uma expressão algébrica que represente a quarta parte de um número desconhecido apresenta, para os alunos, a mesma *Regularidade* (Rg) da que requiere a metade de um número desconhecido.

A tabela que se segue sintetiza as características evidenciadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* e que se manifestaram através das subcategorias identificadas *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidade*.

Tabela 4.12 – Síntese da ação epistémica *Reconhecer* em *Doces de Páscoa*

Categoria: <i>Reconhecer</i> (R)		
Subcategorias	Interpretação (I)	<ul style="list-style-type: none"> • Selecionaram palavras-chave (metade, terça e sexta parte, cinco sobrinhos), considerando que essa informação seria pertinente para a resolução do problema; • Compreenderam a necessidade de justificarem o raciocínio desenvolvido; • Interpretaram o significado de número desconhecido.
	Estruturas adquiridas (EA)	<ul style="list-style-type: none"> • Selecionaram os conceitos de metade, terça parte e sexta parte; • Selecionaram o algoritmo da divisão para justificarem as respostas dadas; • Selecionaram a representação de número desconhecido (letra n) para representarem a metade e a quarta parte de um número desconhecido; • Selecionaram a redução ao mesmo denominador.
	Regularidade (Rg)	<ul style="list-style-type: none"> • Reconheceram regularidade no procedimento do cálculo da metade e da quarta parte de um número desconhecido e o procedimento tomado para números conhecidos.

Síntese. A *Interpretação* dos enunciados dos problemas revelou-se essencial para a seleção de conceitos e procedimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, promovendo a aplicação dessas competências para resolver os problemas. Por sua vez, a *Interpretação* do enunciado do segundo problema promoveu, também, o reconhecimento de *Regularidades*, relativamente às competências envolvidas na resolução do primeiro problema, no sentido em que os alunos compreenderam que a diferença existente entre os dois problemas prendia-se com a generalização do número de doces a um número desconhecido.

A observação de regularidades prende-se, igualmente, com o cálculo de metade de dezoito, bem como com a metade de um número desconhecido e com o cálculo da terça e sexta parte de dezoito e da quarta parte de um número desconhecido. As estruturas reconhecidas promoveram, como tal, a identificação de regularidades, entre os procedimentos que poderão ser mobilizadas, para apresentar expressões algébricas que representem parte de um número desconhecido.

Destaca-se, ainda, o facto das competências mobilizadas poderem ter resultado da experiência adquirida com a resolução da tarefa *Conta-quilómetros*. Relativamente à resolução do segundo problema, verificou-se que a adição algébrica surge por

observação dos procedimentos aplicados na adição de números representados por frações numéricas análogas. Os registos analisados transmitem que os alunos simplificaram a expressão algébrica $\frac{n}{2} + \frac{n}{4}$, estabelecendo uma relação com os procedimentos aplicados no cálculo e com a simplificação da expressão $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Como tal, considera-se que o reconhecimento de regularidades, relacionadas com a adição e simplificação de números representados por frações, contribuem para a aquisição do novo conhecimento, parecendo que os alunos estenderam as propriedades aritméticas à simplificação algébrica.

Constatou-se, uma vez mais, que a ação *Reconhecer* se manifestou através da *Interpretação* dos enunciados, da seleção de *Estruturas adquiridas* e da identificação de *Regularidades*, as quais contribuíram para perceber que competências e procedimentos seriam mais eficazes para a resolução dos problemas. Contudo, verificou-se que a relação estabelecida entre estas subcategorias não foi, de todo, semelhante às evidenciadas nas duas tarefas anteriores. Na resolução desta tarefa, a *Interpretação* promoveu a seleção de *Estruturas adquiridas* e a identificação de *Regularidades* e, por sua vez, a seleção de *Estruturas adquiridas* promoveu a observação de *Regularidades* essenciais ao desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*.

O desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* não parece, como tal, estar condicionado pela forma como as suas diferentes categorias se relacionam, uma vez que esta ação epistémica voltou a evidenciar-se.

4.3.2 Construir

A ação epistémica *Construir* evidenciou-se com a contagem do número de ovos (dezoito ovos), com a integração do conceito de metade, terça e quarta parte e com a aplicação do algoritmo da divisão para justificar as respostas apresentadas.

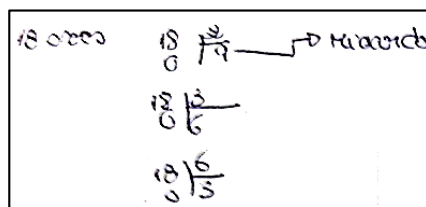


Figura 4.61 – RA respeitante à tarefa Doces de Páscoa

Ao integrarem os conceitos de metade, terça parte e sexta parte, bem como o algoritmo da divisão, os alunos apresentaram *Soluções intermédias*, *Justificando* o seu raciocínio. Verificou-se ainda, da parte dos alunos, a aplicação de uma representação

esquemática, *Estratégia* que os auxiliou na obtenção de resposta às questões: Quantos ovos ofereceu? Restaram ovos?

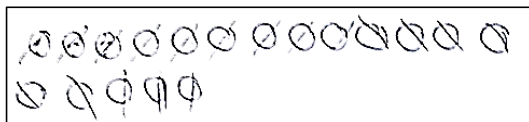


Figura 4.62 – RA respeitantes à resolução da tarefa Doces de Páscoa

Os alunos representaram esquematicamente dezoito amêndoas e, de acordo com os resultados obtidos através do algoritmo da divisão, eliminaram as nove amêndoas oferecidas ao Ricardo, a terça parte oferecida à Rita e a sexta parte à Ema. Ao representarem o raciocínio através do esquema, os alunos chegaram à conclusão que a Leonor tinha oferecido todas as amêndoas que tinha, não sobrando nenhuma.

A ação *Construir* voltou a estar presente durante a resolução do segundo problema, *Amêndoas de chocolate*, tal como podemos constatar através do diálogo que se segue:

LP: Fazemos n a dividir por dois. Também como na metade de dezoito.
[GI escreveu $\frac{n}{2}$].
GI: Esta também é a mesma coisa [referindo-se à segunda questão]. Pode-se dividir por quatro [GI escreveu $\frac{n}{4}$].
LP e GI: [leram a terceira questão, mas não a iniciaram de imediato]. [...]
GI: É para somar tudo. [...]
LP: Mas não sabemos como somamos?! [...]
GI: Podemos reduzir ao mesmo denominador?! Mas a letra?

Figura 4.63 – RAV respeitantes à resolução da tarefa Doces de Páscoa (GI, LP)

Relativamente à resolução deste problema, verificou-se que os alunos deram início à ação *Construir*, ao mobilizarem a letra n para representarem um número indeterminado de amêndoas, bem como ao aplicarem o conceito de divisão: *Construções reconhecidas*. A integração destas construções permitiu a apresentação de *Soluções intermédias* que favoreceram o desenvolvimento do processo de construção: representação da metade e da quarta parte do número desconhecido através de uma fração. Ao procurarem apresentar uma expressão matemática que representasse a metade e a quarta parte de um número indeterminado de amêndoas, os alunos reconheceram a semelhança existente entre o cálculo de metade, terça e sexta-parte de dezoito, aplicado no problema *Ovos de chocolate*, adotando um raciocínio semelhante - *Construção reconhecida*.

Os alunos representaram, através de uma expressão algébrica, a metade e a quarta parte de um número desconhecido de amêndoas, fazendo uso de linguagem simbólica: $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{4}$. Considera-se que a autonomia por eles evidenciada está relacionada com a

representação de valores desconhecidos, *Estruturas adquiridas*, aplicados na tarefa *Conta-quilómetros*, quando eles representaram a quinta parte de valores apresentados em linguagem simbólica.

Contudo, neste caso particular, os alunos não mostraram necessidade de atribuir um resultado às expressões algébricas representadas, situação que se tinha verificado na tarefa *Conta-quilómetros* quando escreveram, incorretamente, $\frac{n}{5} = n$. Questiona-se se o facto de não terem cometido esse erro poderá dever-se à formulação das questões, uma vez que na presente tarefa é solicitada, explicitamente, uma expressão matemática que represente *o número de amêndoas que o Nuno recebeu*.

A apresentação das *Soluções* anteriores permitiu que os alunos progredissem na tarefa e que, ao integrarem conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores, tal como a adição de números representados por frações, com denominadores diferentes, se aproximassem da construção pretendida, como se pode constatar através do registo que se segue:

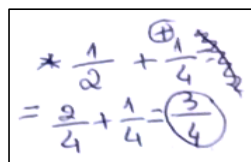

$$\begin{array}{l} * \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{array}$$

Figura 4.64 – RA respeitantes à resolução da tarefa *Doces de Páscoa*

A resposta apresentada pelos alunos mostra que a integração da adição de números representados por frações e o procedimento de redução ao mesmo denominador, *Estruturas reconhecidas*, aplicadas como cálculo auxiliar, aproximaram os alunos da construção pretendida.

A figura que se segue apresenta excertos seleccionados durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. A análise da mesma permitirá identificar as subcategorias *Construções reconhecidas* (CR), *Estratégias* (Es), *Soluções* (S) e *Justificação* (J), bem como a relação que essas estabelecem entre si.

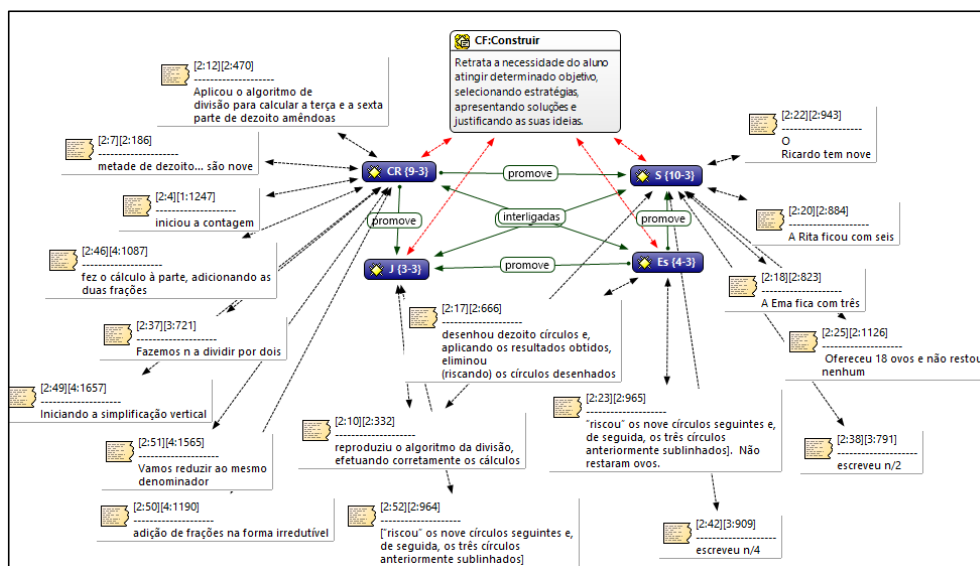


Figura 4.65 – RAV da ação epistêmica Construir em Doces de Páscoa

A figura 4.65 transmite que a subcategoria *Construção Reconhecida* (CR) se manifestou através da aplicação do algoritmo da divisão [2:12], do conceito de metade [2:7], do procedimento de adição de números racionais representados na forma de fração [2:46] [2:49] e da apresentação de frações na forma irredutível [2:50][2:51]. Todos estes conhecimentos foram adquiridos pelos alunos em aprendizagens anteriores a este estudo. Contudo, o excerto [2:37] transmite-nos a interpretação e utilização de linguagem simbólica, por parte dos alunos, competência adquirida com a resolução das primeiras duas tarefas, *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros*. O esquema permite, igualmente, verificar que a aplicação dos conceitos de metade, terça e sexta parte e do algoritmo da divisão promoveram a apresentação de *Soluções Intermédias* (S) que possibilitaram dar resposta ao primeiro problema colocado, designadamente a conclusão de que os sobrinhos Ricardo, Rita e Ema receberam, respetivamente, nove [2:22], seis [2:20] e três amêndoas [2:18]. O significado atribuído à letra *n*, adquirido com a resolução das tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros*, e a respetiva interligação com o conceito de metade, permitiram a apresentação de *Soluções* (S) intermédias, apresentadas, pelos alunos, em linguagem simbólica [2:38], [2:42]. Verificou-se, como tal, que a aplicação de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores permitiu a resolução do primeiro problema e contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos e para a apresentação de *Soluções* (S) intermédias que os aproximam da construção do novo conhecimento.

Verifica-se, também, que a aplicação de *Construções reconhecidas* (CR) auxiliam os alunos na *Justificação* (J) dos seus raciocínios, tal como se verificou quando esses integraram o algoritmo da divisão [2:10] ou esquemas [2:52], visando a justificação das soluções apresentadas. Desta leitura sobressai, ainda, que as *Construções Reconhecidas* (CR) foram úteis para a apresentação de *Soluções* (S) e *Justificação* (J) para os

raciocínios desenvolvidos. Valoriza-se a aplicação de *Estratégias*, no sentido da apresentação de *Soluções* intermédias (S) e *Justificação* (J) para as opções tomadas, situação que se verificou quando os alunos utilizaram a representação esquemática para chegarem à *Solução* [2:23], [2:25] do problema e para *Justificarem* [2:17] o raciocínio desenvolvido.

O quadro que se segue sintetiza as características evidenciadas pelos alunos durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* e que se manifestaram pela presença das subcategorias *Estratégias*, *Soluções*, *Justificação* e *Construções reconhecidas*.

Tabela 4.13 - Síntese da ação epistémica *Construir* em *Doces de Páscoa*

Categoria: <i>Construir</i> (B)		
Subcategorias	Estratégias Es	<ul style="list-style-type: none"> Utilizaram uma representação esquemática para apresentarem resposta às questões colocadas.
	Soluções S	<ul style="list-style-type: none"> Apresentaram resposta às questões intermédias colocadas e aplicaram cálculos auxiliares, tais como a redução de números racionais, apresentados na forma de fração, ao mesmo denominador.
	Justificação J	<ul style="list-style-type: none"> Justificaram as suas opções através do cálculo e da representação esquemática.
	Construção reconhecida CR	<ul style="list-style-type: none"> Integraram conhecimentos adquiridos anteriormente, tais como os conceitos de metade, terça, quarta e sexta parte, o algoritmo da divisão, a representação de frações e a redução de números racionais, apresentados na forma de fração, ao mesmo denominador.

Síntese. Constatou-se, uma vez mais, que a ação *Construir* manifestou-se através do desenvolvimento das subcategorias *Estratégias*, *Construções reconhecidas*, *Soluções* e *Justificação*. A relação estabelecida pelas diferentes subcategorias foi semelhante à identificada através da análise das tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros*. As *Construções reconhecidas* foram úteis para a apresentação de *Soluções* e *Justificação*, percecionando-se que o desconhecimento desses conceitos e dos procedimentos aplicados comprometeriam o desenvolvimento da nova construção. De igual forma, verificou-se que a aplicação de *Estratégias*, tal como a representação esquemática, também foi útil para a apresentação de *Soluções* e *Justificação* para o raciocínio desenvolvido. Destaca-se, nesta análise, o facto de os alunos não terem apresentado dificuldade em utilizar linguagem simbólica para representarem a metade e a quarta parte de valores desconhecidos.

4.3.3. Construção

A *Construção* pretendida relaciona-se com a apresentação de expressões algébricas que traduzam a quantidade de amêndoas que os dois amigos comeram e a quantidade de amêndoas restantes, bem como a simplificação dessas expressões algébricas.

O registo audiovisual que se segue, revela de que forma se verificou a *Construção* pretendida.

LP e GI: [leram a terceira questão, mas não a iniciaram de imediato] [...]
GI: É para somar tudo. [...]
LP: Mas não sabemos como somamos?! [...]
GI: Podemos reduzir ao mesmo denominador?! Mas a letra? [...]
GI: É para somar tudo. [os alunos ficaram em silêncio durante alguns instantes até que foram abordados pela professora]. [...]
LP: Saber as amêndoas no total. Podemos escrever, por escrito, que é metade mais a quarta parte?
LP: Mas não sabemos como somamos?!
GI: Podemos reduzir ao mesmo denominador?! Mas a letra? [...]
GI: [Pegou na caneta e ... fez o cálculo à parte, adicionando as duas frações. Foi seguido por LP até apresentar o resultado da adição de frações na forma irredutível]. [...]
GI: [iniciou a simplificação da expressão, sendo acompanhado pelo colega que lhe ia dando indicações].
LP: Escreve dois enes sobre quatro [LP escreveu $\frac{2n}{4}$] mais ene sob quatro.
GI: E também somo os enes. [...]
[GI apresentou a resposta $\frac{3n}{4}$]

Figura 4.66 – RAV respeitantes à resolução da tarefa Doces de Páscoa (GI, LP)

Verificou-se, através do diálogo presente na figura 4.66, que os alunos, embora não tendo dificuldade em representar a metade e a quarta parte de valores desconhecidos, estranharam o facto de terem que adicionar valores desconhecidos. Embora tenham estabelecido uma relação com a adição de números racionais representados por frações, identificando a necessidade de reduzir as frações ao mesmo denominador para as poderem adicionar, sentiram dificuldade em generalizar esse processo a números indeterminados. A redução das frações $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{4}$ ao mesmo denominador, bem como a respetiva simplificação, foi possível através da analogia que foram estabelecendo com o cálculo auxiliar efetuado, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, estendendo o conhecimento aritmético e generalizando o processo de adição de frações com denominadores diferentes, a valores numéricos indeterminados.

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{2n}{4} + \frac{n}{4} = \frac{3n}{4}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Figura 4.67 – RA respeitantes à resolução da tarefa Doces de Páscoa

Os alunos *Reorganizaram* um procedimento matemático conhecido, efetuado em cálculo auxiliar, no sentido de *Generalizarem* a adição de números racionais representados por frações, a valores indeterminados. Revelaram, ainda, habilidade para representarem a nova *Construção* em linguagem matemática – *Comunicação*.

Esta *Construção* evidenciou-se através das subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação*, sendo que a *Reorganização* de procedimentos utilizados promoveu a *Generalização* e a *Comunicação*, categorias que ocorreram quase em simultâneo.

Destaca-se a aprendizagem efetuada, em particular o significado atribuído ao cálculo e simplificação da adição $\frac{n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{2n}{2} + \frac{n}{4} = \frac{3n}{2}$, comparativamente com as igualdades apresentadas na tarefa *Conta-quilómetros*: $\frac{n}{5} = n$; $\frac{m}{5} = m$ e $\frac{n+m}{5} = n + m$.

Nesta situação, e pela primeira vez, os alunos substituíram uma fração que representava uma quantidade indeterminada, por outra equivalente, $\frac{n}{2} = \frac{2n}{4}$, operando e apresentando o resultado final na forma de uma expressão algébrica simplificada: $\frac{3n}{4}$.

Contudo, os alunos não conseguiram apresentar uma expressão algébrica que representasse a parte restante, tal como se pode verificar na resposta que se segue:

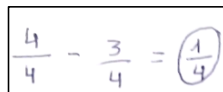

$$\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Figura 4.68 – RA respeitantes à resolução da tarefa *Doces de Páscoa*

Os alunos interpretaram corretamente a questão colocada, mas fizeram referência à parte restante ao invés de número restante de amêndoas. Entende-se que essa situação poderá dever-se ao facto de os alunos terem concentrado apenas na operacionalização de frações com valores determinados, tal como na alínea anterior, notando-se algum desinvestimento na leitura atenta e na aplicação do raciocínio anteriormente desenvolvido.

A figura seguinte esquematiza, apresentando excertos dos registos audiovisuais, situações em que se verificou o desenvolvimento da ação epistémica *Construção* (C). Apresenta, igualmente, a relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização* (Ro), *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm).

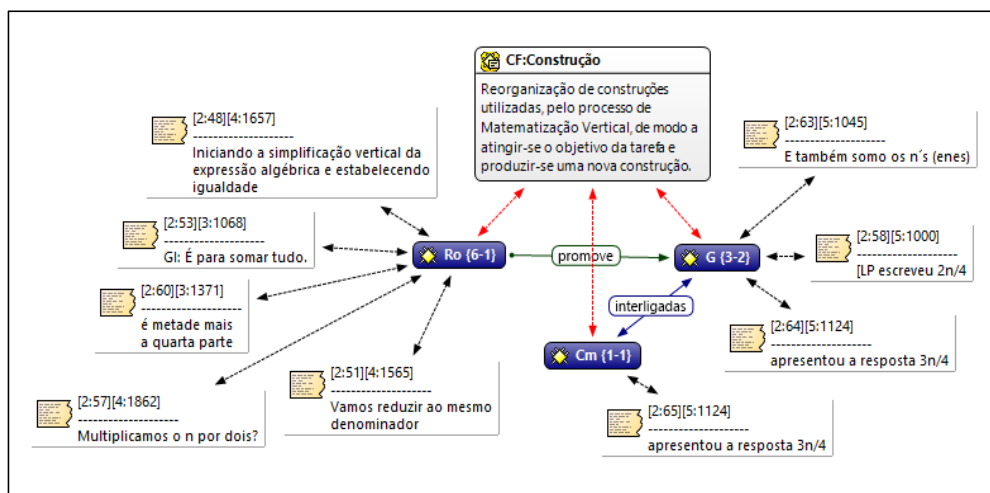


Figura 4.69 – RAV da ação epistêmica Construção em Doces de Páscoa

A figura anterior exemplifica, apresentando excertos selecionados, situações em que se manifestaram a *Reorganização* (Ro) de conceitos [2:53] [2:60] e procedimentos, tais como a simplificação de expressões numéricas [2:48] e a redução ao mesmo denominador [2:51] [2:57], as quais contribuíram para o desenvolvimento do processo de generalização – extensão da simplificação de expressões numéricas à simplificação de expressões algébricas – tornando possível a resolução do problema de natureza algébrica. A *Generalização* (G) esteve associada à representação, em linguagem simbólica, da construção pretendida [2:58] [2:64]. A *Comunicação* (Cm) surge como resultado e necessidade de expressar a *Generalização* [2:65].

A tabela que se segue sintetiza as situações expostas anteriormente e que dizem respeito às características mais relevantes observadas durante o processo de *Construção*.

Tabela 4.14 – Síntese da ação epistêmica Construção em Doces de Páscoa

Categoria: Construção (C)		
Subcategorias	Reorganização (Ro)	• Combinaram construções adquiridas anteriormente: conhecimento adquirido com a resolução do problema ovos de chocolate e adição de frações numéricas com denominador diferente.
	Generalização (G)	• Generalizaram a adição e simplificação de frações algébricas, reduzindo-as ao mesmo denominador.
	Comunicação (Cm)	• Expressaram em linguagem matemática, simbólica, a nova construção.

Síntese. Verifica-se, novamente, e por comparação com as tarefas já analisadas, uma relação diferenciada entre as três subcategorias definidas. A *Reorganização* vertical dos conhecimentos e dos raciocínios desenvolvidos continua a revelar-se, tal como nas tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros*, essencial para o processo de *Generalização*, favorecendo a *Generalização*. Porém, a *Comunicação* surgiu interligada à *Generalização*, ocorrendo quase em simultâneo. Considerando a relação estabelecida

entre as subcategorias *Reorganização* e *Generalização*, questiona-se se a nova *Construção* resulta da *Reorganização* da informação obtida com o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*?

Destaca-se a dificuldade evidenciada pelos alunos para generalizarem o processo de simplificação algébrica, ainda que eles tenham manifestado habilidade para interpretar e utilizar linguagem simbólica. Terão os alunos dado significado à simplificação da expressão algébrica ou ter-se-ão limitado a repetir um procedimento similar?

4.3.4 *Consolidação*

O processo de *Consolidação* foi identificado durante o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*, tal como será possível constatar no diálogo que se segue.

LP: Podemos usar o número qualquer. Já usámos. Nas outras fichas usámos! [...]
LP: Fazemos n a dividir por dois. Também como na metade de dezoito. [...]
[GI escreveu $\frac{n}{2}$]. [...]
GI: Esta também é a mesma coisa [referindo-se à segunda questão]. Pode-se dividir por quatro [GI escreveu $\frac{n}{4}$]. [...]

Figura 4.70 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Doces de Páscoa* (GI, LP)

Os alunos reconheceram construções concebidas durante a realização das tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros*, respetivamente a representação simbólica de um número desconhecido através de uma letra (selecionaram a letra n) e a representação da metade e quarta parte desse número desconhecido. A integração e reorganização destas construções foi, tal como se verificou na secção anterior, essencial para a nova construção. Considera-se estar na presença da ação *Consolidação*, pelo facto de os alunos terem evidenciado a aplicação de uma construção concebida recentemente, integrarem esse conhecimento de forma espontânea e autónoma, confiantes de que estariam a utilizar linguagem e procedimentos matemáticos corretos que lhes permitiriam alcançar uma nova construção.

A figura que se segue transmite a interligação verificada entre as subcategorias *Aplicação de uma construção recente* (AC) e *Características psicológicas* (CP), observada durante o desenvolvimento da ação epistémica *Consolidação*, reportando-se às respostas recolhidas através do suporte audiovisual.

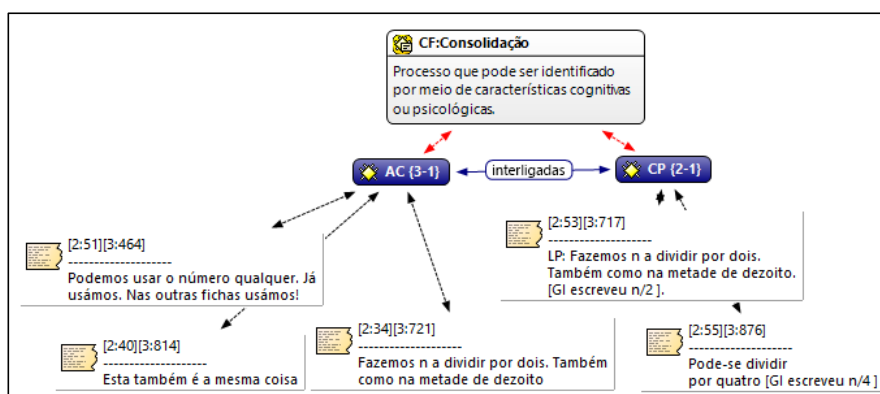


Figura 4.71 – RAV da ação epistêmica Consolidação em Doces de Páscoa

A figura 4.71 exemplifica, através de excertos selecionados, situações em que os alunos mostraram ter *Aplicado construções* concebidas recentemente (AC), tais como a interpretação e utilização de simbologia para representar um número desconhecido [2:51] e para expressar a metade [2:34] e a quarta parte de n [2:40].

A *Consolidação* voltou, à semelhança da tarefa *Conta-quilómetros*, a surgir durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Construir*, associada ao reconhecimento de conhecimentos adquiridos nas tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros*. Revelou-se essencial para o desenvolvimento da nova *Construção*, mas continuou a posicionar-se de forma isolada dando apenas os seus contributos para que o processo de abstração progredisse.

Relativamente à manifestação da subcategoria *Características psicológicas* (CP), verificou-se que essa surgiu associada à *Aplicação da construção recente* (AC), resultando da interpretação espontânea e autónoma do significado atribuído à letra n e às expressões $\frac{n}{2}$ [2:53] e $\frac{n}{4}$ [2:55].

A tabela que se segue sintetiza os aspetos que mais se destacaram durante o processo de *Consolidação*.

Tabela 4.15 – Síntese da ação epistêmica Consolidação em Doces de Páscoa

Categoria: Consolidação (Co)		
Subcategorias	Aplicação de uma construção recente (AC)	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicaram a representação simbólica de número desconhecido, construção concebida na tarefa <i>Luzes de Natal</i> e também utilizada na tarefa <i>Conta-quilómetros</i>; • Aplicaram a representação da metade e quarta parte de um número desconhecido, construção concebida na tarefa <i>Conta-quilómetros</i>.
	Características psicológicas (CP)	<ul style="list-style-type: none"> • Os alunos revelaram autonomia, agilidade e confiança na aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente.

Síntese. Verificou-se, à semelhança do que ocorreu na análise das tarefas anteriores, que a *Consolidação* manifestou-se através da *Aplicação de Construções* recentes,

evidenciando-se na postura dos alunos, ou seja, através da manifestação da subcategoria *Características psicológicas*. Constatou-se, também, que essas subcategorias mantiveram-se interligadas, uma vez que a aplicação da construção reconhecida proporcionou maior autonomia aos alunos, bem como agilidade e confiança nas suas produções.

A *Consolidação* voltou a manifestar-se durante o desenvolvimento da ação *Construir*, designadamente quando os alunos estenderam processos aritméticos trabalhados na própria tarefa, passando a fazer uso de linguagem simbólica. A *Consolidação* aproximou os alunos da *Construção pretendida*, estando associada ao desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Apesar da proximidade que manteve com as diferentes ações epistémicas, considera-se que a *Consolidação* manifesta-se através de *Reconhecer*, permanecendo, ainda assim, isolada da *Construção*.

A figura seguinte esquematiza as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co), sintetizando os aspetos que mais se salientaram durante a resolução da tarefa.

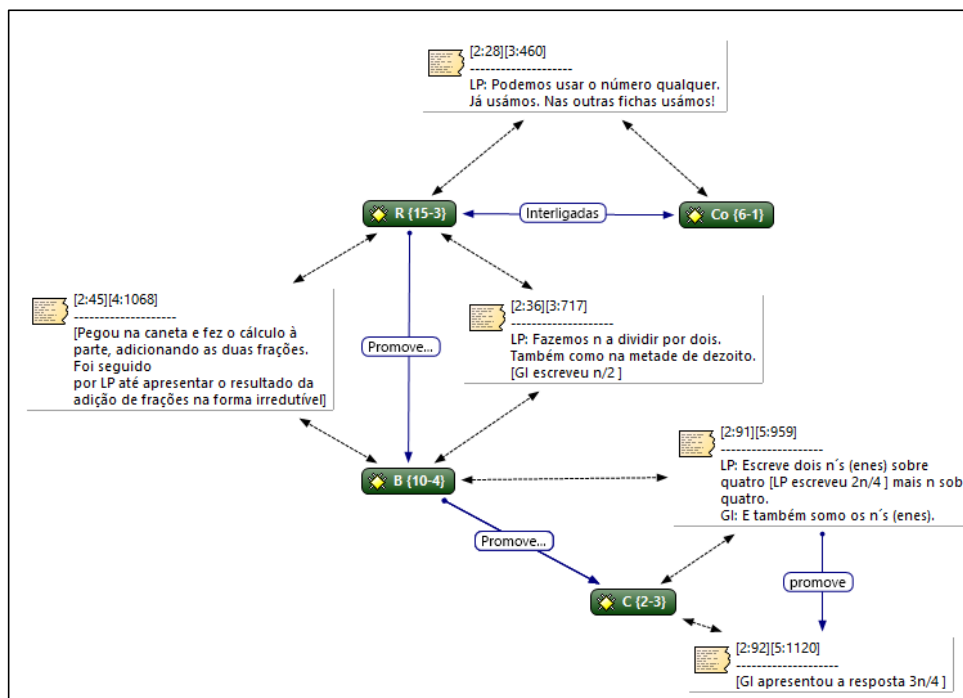


Figura 4.72 – Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em *Doces de Páscoa*

Através da figura anterior pode-se constatar que as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co) manifestaram-se durante o desenvolvimento da nova construção, relacionando-se entre si. *Reconhecer* (R) e *Consolidação* (Co) surgiram interligadas na construção, dado que os alunos

reconheceram que a linguagem simbólica [2:28] utilizada nas tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros* foi reconhecida como útil para dar solução à questão colocada. A percepção de outros conhecimentos adquiridos, tais como a adição de números representados por frações [2:45], o conceito de metade e a interpretação de linguagem simbólica [2:36], contribuíram para o desenvolvimento da ação *Construir*. Durante o desenvolvimento desta ação, o raciocínio estabelecido pelos alunos foi essencial para a apresentação de soluções intermédias [2:91] e para o desenvolvimento de estratégias que promoveram a nova construção [2:92].

Síntese. Todas as ações epistémicas manifestaram-se durante a resolução desta tarefa e a *Consolidação* manifestou-se através de *Reconhecer*, sobretudo durante o desenvolvimento da ação *Construir*, quando os alunos tiveram necessidade de interpretar e utilizar linguagem simbólica, bem como estender regularidades e propriedades observadas. Considera-se, porém, que a *Consolidação* manteve-se afastada do processo de construção do novo conhecimento, surgindo apenas quando e durante o tempo em que foi necessária. Verificou-se, ainda, que a ação epistémica *Reconhecer* não surgiu apenas na fase inicial da *Construção*, manifestando-se também durante o desenvolvimento da ação *Construir* e na emergência da nova *Construção*. Considera-se, como tal, que *Reconhecer* pode ser essencial para estimular o desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Construção*. Por sua vez, o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* volta a manifestar-se essencial para a nova *Construção*.

4.3.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Professor.

A mediação estabelecida entre professora e alunos ocorreu, à semelhança do que se verificou com as tarefas aplicadas anteriormente, através da própria tarefa – artefacto – desenvolvido pela professora e que promoveu a observação de regularidades (*Reconhecer*), a utilização de linguagem simbólica (*Construir*) e a generalização de algoritmos matemáticos (*Construção*). A mediação estabelecida pela professora manifestou-se através da tarefa, designadamente da sua estrutura e conteúdo, mas também foi significativa nos momentos em que a apresentou e conduziu, durante a resolução dos alunos. A figura que se segue sintetiza, através de um pequeno excerto, os aspetos mais relevantes da apresentação da tarefa e sua aplicação.

[A tarefa foi apresentada em contexto turma. Dois alunos selecionados pela professora fizeram a leitura global, em voz alta, dos dois problemas. A professora reforçou, em cada uma das situações, o facto de a fração do número de ovos solicitada referir-se sempre ao número total de ovos. Os alunos iniciaram a tarefa sem apresentar dúvidas].

Figura 4.73 – RI sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Doces de Páscoa*

A apresentação da tarefa, em particular a leitura efetuada pelos alunos selecionados, proporcionou o primeiro contacto dos alunos GI e LP com este artefacto. A intervenção da professora, no sentido de clarificar o enunciado, poderá ter contribuído para maior facilidade de interpretação do enunciado do problema – *Reconhecer*, uma vez que os alunos deram, de imediato, início à tarefa sem colocarem dúvidas.

LP: Não sei se é para usar os ovos que estão na imagem?! [concordaram que deveriam questionar a professora].
GI: Professora, é para contar os ovos da imagem... temos de saber quantos são?
P: Leiam novamente o primeiro parágrafo [os alunos leram em voz alta].
GI: É para contar! [A professora acenou, em sinal de “sim” e afastou-se].

Figura 4.74 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Doces de Páscoa* (GI, LP, P)

A presença da professora voltou a ser significativa quando os alunos se depararam com dúvidas resultantes da interpretação do enunciado do problema, relacionadas com a necessidade de terem, ou não, de contabilizar o número total de ovos da imagem para conseguirem dar resposta às questões colocadas no primeiro problema. Visando dar expressão ao desenvolvimento da ação *Reconhecer*, a professora direcionou a atenção dos alunos para a informação constante no enunciado do problema, confirmando que estavam a seguir o caminho certo. Como tal, a mediação estabelecida entre professora e alunos promoveu a manifestação da *Interpretação* correta do enunciado, ou seja, o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Curiosamente, os alunos voltaram a solicitar a presença da professora, aquando da resolução do segundo problema, pelo mesmo motivo, ainda que apenas para confirmar que não poderiam seguir o procedimento adotado anteriormente.

GI: Não é para contar todas estas amêndoas, pois não?
P: [focando o olhar na tarefa] Pois, deve ser uma tarefa árdua e talvez impossível?!
GI: Então como fazemos, não dá para contar como na outra questão?
P: Então não conseguem representar o número de amêndoas da imagem?
[Fez-se silêncio]
GI: Não as conseguimos contar todas!
[A professora deixou que refletissem um pouco mais, deixando-os explorar o enunciado. Porém, sentiu necessidade de voltar a intervir para que não desistissem].
P: Então meninos chegaram a alguma conclusão?
LP: Não sabemos quantas são as amêndoas!
P: Então, o número de amêndoas é desconhecido?!
GI: Sim.
P: E não conseguem representar esse número desconhecido?
LP: Podemos usar o número qualquer. Já usámos. Nas outras fichas usámos!
[A professora acenou, mostrando concordar e afastou-se].

Figura 4.75 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Doces de Páscoa* (GI, LP, P)

De acordo com o diálogo estabelecido na figura 4.75, constata-se que a mediação estabelecida entre professora e alunos foi essencial para que os alunos não desistissem e progredissem na resolução da tarefa. Através da mediação promoveu-se o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, no sentido de conduzir os alunos a selecionarem estratégias ou aprendizagens anteriores, através da manifestação da *Consolidação* que,

ao serem integradas, permitiram a apresentação de soluções para as questões colocadas, ou seja, a *Construção*.

Os alunos integraram conceitos e representações já utilizadas em construções anteriores, estabelecendo uma relação entre o *número desconhecido* e a letra *n*.

Posteriormente, voltaram a solicitar a presença da professora quando se depararam com a necessidade de apresentar uma expressão simplificada que traduzisse a quantidade de amêndoas que os dois amigos receberam.

GI: Achamos que é para somar tudo. É, não é? [...]
LP: Saber as amêndoas no total. Podemos escrever, por escrito, que é metade mais a quarta parte? [...]
LP: Mas não sabemos como somamos?!
P: Reparem na vossa resposta à primeira questão (acompanhou o questionamento rodeando a resposta).
GI: *n* sobre dois.
P: Exatamente. E vejam agora a resposta que deram à segunda questão (acompanhou o questionamento, apontando para a resposta).
LP e GI: *n* sobre quatro.
P: Vocês utilizaram nas duas questões linguagem matemática correta... agora é só seguir os mesmos procedimentos.
GI: Então somamos estas? [...]
LP: (...) Não sei. [fez-se silêncio]
P: Reparem [apontando para a expressão apresentada]. Não é a adição de números representados por frações? [o silêncio dos alunos manteve-se]. Adição... frações... denominadores diferentes, não vos lembra nada?!
GI: Podemos reduzir ao mesmo denominador?! Mas a letra?
P: Como fariam se tivessem que adicionar um meio com um quarto?

Figura 4.76 – RAV sobre o ambiente observado após a apresentação da tarefa *Doces de Páscoa* (GI, LP, P)

De acordo com o diálogo da figura 4.76, os alunos compreenderam a necessidade de adicionar as expressões $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{4}$. Porém, como se tratavam de expressões que representavam valores desconhecidos, estranharam a possibilidade de o poder fazer.

A primeira resposta apresentada pelos alunos surgiu em linguagem natural – *é metade mais a quarta parte* – sendo que, a partir desse momento, a professora atuou no sentido de conduzir os alunos a representar essa solução em linguagem formal simplificada, de modo a promover uma nova aprendizagem, a *Construção*. Dirigiu a atenção dos alunos para as expressões algébricas apresentadas nas alíneas anteriores e, ainda que eles tenham demonstrado percepção quanto à expressão representativa da quantidade total de amêndoas, não conseguiram representar, em linguagem matemática, a adição das mesmas.

A professora interveio quando verificou a possibilidade de os alunos desistirem, favorecendo a manifestação da ação epistêmica *Reconhecer*, por meio da integração

do procedimento matemático reduzir ao mesmo denominador, tal como se pode constatar através do diálogo que se segue:

P: Reparem no vosso cálculo auxiliar [apontando de novo para a expressão $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$]. Qual foi o resultado?
GI: Multiplicámos o n por dois? [fez-se silêncio]. E qual é o resultado? Mas aí tinha o número um e aqui tem o n ?!
P: Imaginem que n representa um número desconhecido de nozes e que queriam descobrir o dobro do número dessas nozes. Se alguém vos dissesse que afinal n representava quinze nozes, quanto seria o dobro dessas nozes?
LP: Duas vezes quinze.
GI: Trinta. [quase em simultâneo].
P: E se o número de nozes fosse, afinal, quarenta?
LP: Oitenta [quase de imediato].
P: Então e se forem n nozes, qual é o dobro?
GI: Dois vezes n .
P: Agora é só escrever e seguir o mesmo raciocínio.
GI: [iniciou a simplificação da expressão, sendo acompanhado pelo colega que lhe ia dando indicações].
LP: Escreve dois n 's (enes) sobre quatro [LP escreveu $\frac{2n}{4}$] mais n sob quatro.

Figura 4.77 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Doces de Páscoa* (GI, LP, P)

Apesar dos alunos revelarem incompreensão quanto à forma como se pode representar, na forma simplificada, a adição de valores desconhecidos, esses não cometeram incorreções na sua representação, o que nos leva a considerar a evolução dos mesmos quanto à forma como interpretam e utilizam linguagem simbólica. Considera-se que a mediação da professora pesou nesta evolução, contribuindo, em particular, para que os alunos dessem significado e simplificassem a expressão algébrica $\frac{n}{2} + \frac{n}{4}$. Relativamente à simplificação desta expressão, a professora atuou no sentido de levar os alunos a estenderem o procedimento aritmético, ou seja, a simplificação da expressão aritmética $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, por recurso a processos semelhantes, ao algébrico e a apresentarem a expressão $\frac{3n}{4}$.

Destaca-se, ainda, que a professora teve de auxiliar os alunos no processo de redução ao mesmo denominador, uma vez que esse estranharam o facto de terem de “multiplicar 2 por n ”, considerando, novamente, e como já se tinha verificado na tarefa *Conta-quilómetros*, a necessidade de obter um valor para o produto determinado.

Acrescenta-se, porém, que nem todas as construções objetivadas para esta tarefa foram concebidas. Os alunos não conseguiram representar em linguagem simbólica, através de uma expressão algébrica, a *quantidade de amêndoas restantes*. Consideramos que tal se pode explicar pela ausência de intervenção da professora, a qual se manteve afastada para aferir a compreensão dos alunos quanto à construção anterior ou, então, pode dever-se a um possível desinvestimento por parte dos alunos.

A figura que se segue transmite de que forma, e como, estiveram interligadas as subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA) e *Incentivo à construção de signos matemáticos* (ICS) durante o processo de mediação estabelecido pela professora.

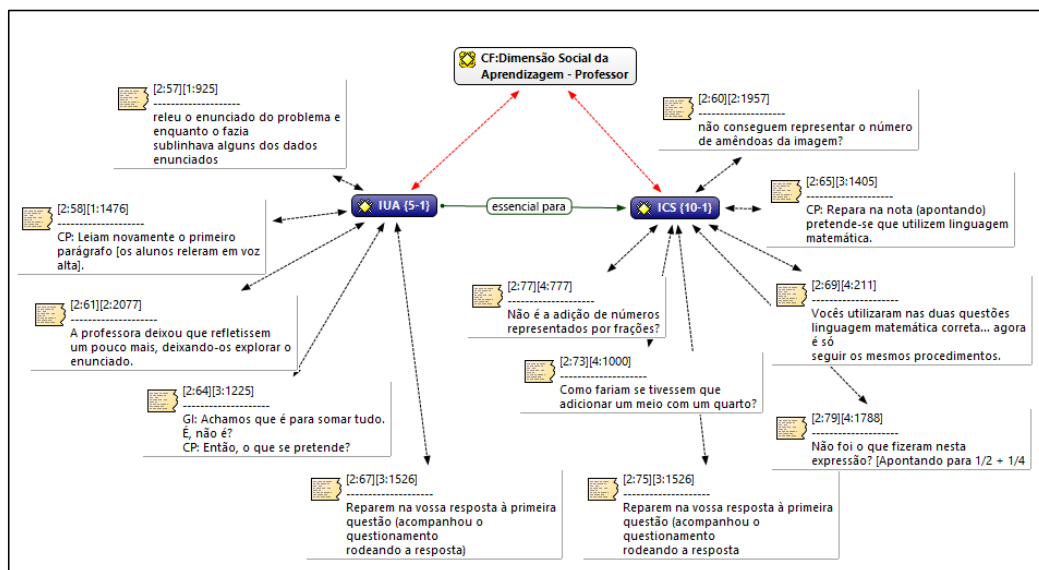


Figura 4.78 – RAV da DSA, Professor, em Doces de Páscoa

A figura 4.78 transmite de que forma a mediação estabelecida pela *professora* manifestou-se na exploração do *artefacto*, *tarefa* (IUA), e na construção de signos matemáticos (ICS). No que respeita ao *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA), verificou-se que a *professora* incentivou a leitura dos enunciados dos problemas da tarefa [2:57] [2:58] [2:61], no sentido de conduzir os alunos à interpretação e seleção de informação pertinente que os poderia ajudar a resolver a tarefa. A intervenção da *professora* manifestou-se, por vezes, através do questionamento às afirmações produzidas oralmente pelos alunos [2:64], ou apresentadas por escrito [2:67], visando uma melhor exploração dos enunciados ou das respostas apresentadas, no sentido de direcionar o raciocínio para a produção de signos matemáticos.

O *Incentivo à construção de signos matemáticos* (ICS) resultou, por exemplo, da exploração das imagens que acompanhavam os problemas enunciados na tarefa [2:60], como é exemplo o da atribuição do signo n para representar um número desconhecido de amêndoas. Verificou-se, ainda, quando a professora incentivou a utilização de linguagem simbólica, orientando os alunos para a leitura atenta das questões apresentadas [2:65]. Realça-se o incentivo à exploração dos enunciados, no sentido de promover o desenvolvimento da ação *Reconhecer* (R), e favorecer a apresentação de soluções, ou seja, o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* (B) [2:69] [2:75]. Constata-se, ainda da parte da professora, o incentivo à simplificação algébrica [2:73]

[2:79], através da exploração de procedimentos numéricos utilizados na adição de números representados por frações e com denominadores diferentes.

A tabela que se segue transmite as características mais relevantes do desenvolvimento do processo de mediação estabelecido entre *Professor* e alunos.

Tabela 4.16 – Síntese da análise da DSA, *Professor*, em *Doces de Páscoa*

Categoria: <i>Professor</i> (P)		
Subcategorias	Incentivo à utilização de artefactos (IUA)	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentou a tarefa, incentivando a sua exploração; • Incentivou a interpretação de enunciados, a análise de respostas dadas e a identificação de regularidades.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)	<ul style="list-style-type: none"> • Promoveu o reconhecimento, a integração e reorganização de conhecimentos adquiridos previamente, tais como linguagem simbólica e conceitos como o de <i>redução ao mesmo denominador</i>, visando a produção de novos signos matemáticos e a construção do novo conhecimento.

Síntese. À semelhança da mediação estabelecida pela *professora* nas tarefas anteriores, continua-se, neste caso, a verificar o *Incentivo à utilização e exploração do artefacto* – tarefa – e à *produção de signos matemáticos*. O papel da professora continuou a mostrar-se relevante no que respeita à elaboração da tarefa pois, através dessa, estimulou a observação e extensão de relações e propriedades aritméticas, ou seja, o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas. Porém, foi igualmente importante durante a condução da tarefa, no sentido em que esclareceu dúvidas de interpretação dos enunciados e respeitantes à compreensão de linguagem simbólica – *Reconhecer*. Realça-se, também, o facto de se preocupar em direcionar a atenção dos alunos para aspetos importantes dos dados e resultados obtidos, incentivando a representação de procedimentos conhecidos e a apresentação de soluções intermédias – *Construir*. Destacamos, ainda, o seu papel no incentivo ao aperfeiçoamento das respostas apresentadas, tais como a simplificação de expressões algébricas, bem como o incentivo à transferência dos dados representados em linguagem natural para simbólica – *Construção* e aperfeiçoamento da *Construção*. Por fim, valoriza-se o facto de ter intercedido em momentos determinantes da resolução da tarefa, evitando que os alunos desistissem.

4.3.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Alunos.

O diálogo que se segue transmite de que forma as contribuições individuais dos alunos e a partilha de conhecimentos e ideias favoreceram o desenvolvimento do processo de abstração.

LP: Agora temos de calcular metade... metade de dezoito... são nove.
[fez-se silêncio, enquanto GI procurava registar essa resposta]
LP [interrompendo GI]: Temos que justificar... [GI reproduziu o algoritmo da divisão, efetuando corretamente os cálculos].
GI: Também é preciso calcular a terça parte e a sexta parte. [Aplicou o algoritmo de divisão para calcular a terça e a sexta parte de dezoito amêndoas].
LP: Mas é preciso ver se restaram ovos... e justificar. [fez silêncio]. Podemos fazer desenhos.
[GI desenhou dezoito círculos e, aplicando os resultados obtidos, eliminou (riscando) os círculos desenhados]. [...]
GI: [continuou a exploração do seu desenho]. A Ema fica com três [sombreado os primeiros três círculos]. A Rita ficou com seis ["riscou" os seis círculos seguintes e, de seguida, os três círculos anteriormente sublinhados]. O Ricardo tem nove [riscou os nove círculos seguintes]. Não restaram ovos.

Figura 4.79 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Doces de Páscoa (GI, LP)

O diálogo da figura anterior realça o envolvimento dos alunos na realização da tarefa proposta. Os alunos interagiram mutuamente na interpretação do enunciado do primeiro problema, integrando conhecimentos adquiridos previamente, tais como os conceitos de metade, terça e sexta parte, bem como o algoritmo da divisão. A mediação estabelecida entre os alunos promoveu, como tal, o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, através da interpretação do enunciado e da seleção de estruturas adquiridas. A ação *Construir* foi desencadeada pela integração desses conhecimentos, do algoritmo da adição e de um desenho que serviu de estratégia para representar ideias, obter soluções intermédias e justificar o raciocínio. O desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* voltou a estar presente no diálogo estabelecido pelos alunos:

[Os alunos leram o enunciado em conjunto].
LP: [depois de ler a primeira questão em voz alta] É igual ao outro [...]
GI: Não dá para contar isto tudo...
LP: No texto também não diz nada [voltaram a página, procurando uma resposta através da análise do primeiro problema já resolvido]. [...]
[GI ... sublinhou a palavra metade].
LP: Fazemos n a dividir por dois. Também como na metade de dezoito.
[GI escreveu $\frac{n}{2}$].
GI: Esta também é a mesma coisa [...]. Pode-se dividir por quatro [GI escreveu $\frac{n}{4}$]. [...]
GI: [iniciou a simplificação da expressão, sendo acompanhado pelo colega que lhe ia dando indicações].
LP: Escreve dois n 's (enes) sobre quatro [LP escreveu $\frac{2n}{4}$] mais n sob quatro.
GI: E também como os n 's (enes). [...]
[GI apresentou a resposta $\frac{3n}{4}$]

Figura 4.80 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Doces de Páscoa (GI, LP)

A comunicação estabelecida, inicialmente, pelos alunos, voltou a estar associada à *Interpretação* do enunciado do problema e ao reconhecimento de *Regularidades*. A ação *Construir* resultou, por sua vez, da integração de estratégias – *sublinhou a palavra metade* – de conhecimentos matemáticos dos alunos – conceito de metade e quarta parte – bem como da partilha de conhecimentos: *escreveu $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{4}$* .

A simplificação da adição das expressões algébricas, a nova *Construção*, resultou, também, da comunicação e partilha estabelecida entre os dois alunos, os quais aplicaram o procedimento de redução ao mesmo denominador e representaram, pela primeira vez, através de linguagem simbólica, a adição simplificada dessas quantidades desconhecidas. Considera-se, assim, que os alunos produziram, através de contribuições individuais e da partilha, novos significados matemáticos.

A figura que se segue exemplifica, apresentando alguns excertos, situações em que a categoria *Alunos* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Produção de signos individuais (PSI)* e *Produção de signos coletivos (PSC)*.

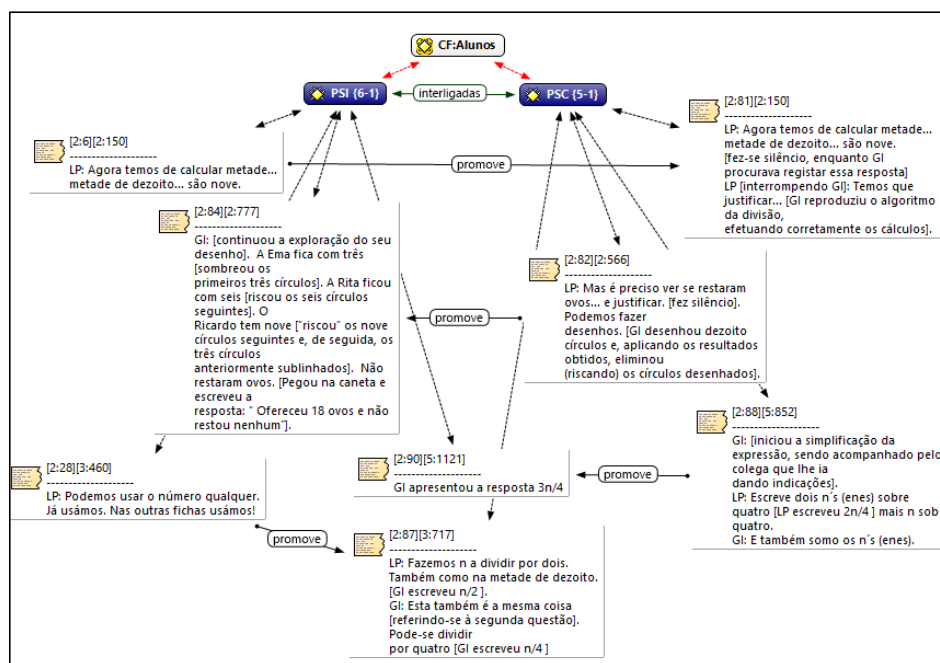


Figura 4.81 – RAV da DSA, Alunos, em Doces de Páscoa

A figura 4.81 transmite de que forma as contribuições individuais e coletivas dos alunos estiveram interligadas, durante o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C).

Verificou-se, durante a realização da tarefa, que as contribuições individuais promoveram o desenvolvimento conjunto do raciocínio e a representação de ideias. A percepção (R) e a integração de conceitos considerados relevantes para a apresentação

de soluções (B), tais como o conceito de metade [2:6] e a representação simbólica de um número desconhecido [2:28] (Co) desencadearam a discussão conjunta e a apresentação de soluções intermédias [2:81] [2:87]. Por sua vez, da comunicação estabelecida entre alunos [2:82] [2:88] surgiram ideias para representar o raciocínio, obter soluções intermédias [2:84] e alcançar alguns dos objetivos delineados para a tarefa [2:90]. A ação *Consolidação* também se manifestou através das analogias que estabeleceram entre o segundo problema, constante na presente tarefa, e o da tarefa *Conta-quilómetro* já resolvida.

A tabela que se segue sintetiza as características mais relevantes evidenciadas durante o desenvolvimento do processo de mediação estabelecido entre alunos.

Tabela 4.17 – Síntese da análise da DSA, Alunos, em Doces de Páscoa

Categoria: Alunos (A)		
Subcategorias	Produção de signos individuais (PSI)	<ul style="list-style-type: none"> • Envolveram-se na interpretação dos enunciados e na resolução da tarefa; • Integraram conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores e na comunicação de ideias e regularidades observadas; • Produziram signos individuais.
	Produção de signos coletivos (PSC)	<ul style="list-style-type: none"> • Interagiram entre si, interligando conhecimentos que lhes permitiram interpretar, selecionar construções adquiridas e estratégias, apresentar soluções, bem como utilizar, com compreensão, linguagem simbólica e simplificar expressões algébricas.

Síntese. A mediação estabelecida entre alunos contribuiu para a *Produção de signos individuais* e *coletivos*, os quais estiveram associados ao desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir* e *Construção* e *Consolidação*. Os alunos estiveram envolvidos nas diferentes fases da tarefa e, ainda que se valorizem as produções individuais, considera-se que o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas resultou do diálogo e da partilha estabelecida entre eles. Consideramos, como tal, que as subcategorias *Produção de signos individuais* e *coletivos* mantiveram-se interligadas durante a resolução da tarefa e que foram essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para a aquisição do novo conhecimento matemático.

A figura que se segue procura transmitir de que forma a partilha verificada entre alunos, e a mediação estabelecida entre professora e alunos, contribuíram para a construção do novo conhecimento, em particular para o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co).

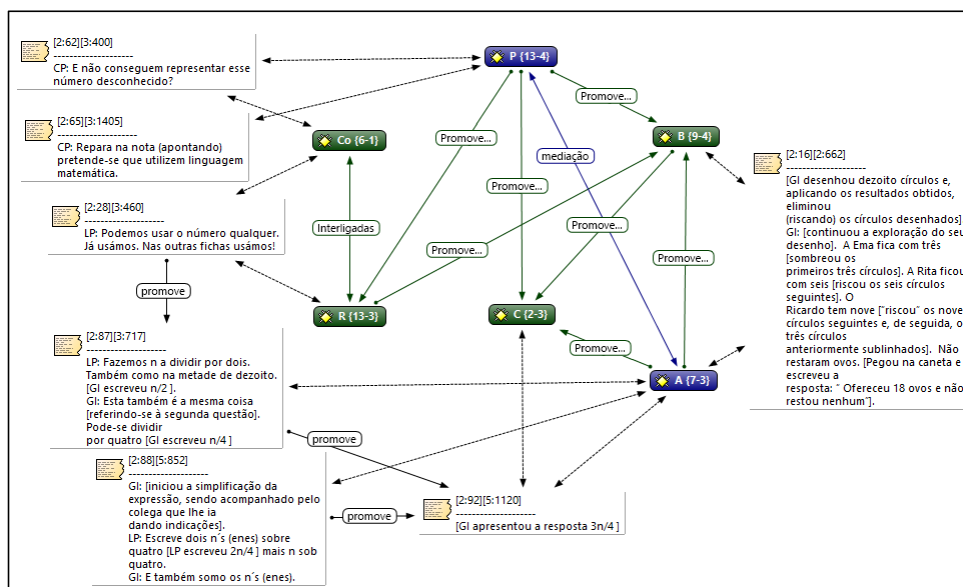


Figura 4.82 – Síntese da relação entre as ações RBC+C e DSA em Doces de Páscoa

Através da figura 4.82 procura-se exemplificar de que forma a mediação estabelecida pela *professora* (P) e entre Alunos (A) promoveu o desenvolvimento das ações epistêmicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (Co) e *Consolidação* (Co). Valoriza-se a mediação estabelecida pelo *Professor* (P) [2:62] [2:65], considerando que essa foi essencial para o desenvolvimento da ação *Reconhecer* (R) [2:28] e para a aplicação de construções adquiridas com a resolução das tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros – Consolidação* (Co).

Embora a ação *Consolidação* (Co) tenha surgido de forma independente, essa foi desencadeada pela ação do *Professor* (P), ao procurar estimular o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer* (R). O *Professor* (P) assume também destaque, ao promover a mediação entre alunos, favorecendo o desenvolvimento do processo de abstração que evidencia as ações epistêmicas *Construir* (B) e *Construção* (C). Pode-se testemunhar essa influência quando os alunos integram construções reconhecidas [2:28] para apresentarem soluções intermédias [2:87] [2:88] que os conduzem à nova construção [2:92]. Verificou-se, ainda, o desenvolvimento da ação *Construir* (B), apenas como resultado da mediação estabelecida entre alunos [2:16], tendo a comunicação estabelecida entre alunos sido essencial para o seu desenvolvimento.

Síntese. Verificou-se, no desenvolvimento desta tarefa, que a mediação estabelecida entre *Professor* (P) e alunos foi essencial para o desenvolvimento das ações epistêmicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C). Destacamos que, embora a ação *Consolidação* (Co) tenha, tal como nas tarefas anteriores, surgido de forma independente, ela manteve-se interligada à ação *Reconhecer* (R) e foi desencadeada através da mediação estabelecida pelo *Professor* (P). Por sua vez, a mediação

estabelecida entre *Alunos* (A), também associada à mediação estabelecida pelo *Professor* (P), contribuiu favoravelmente para o desenvolvimento das ações *Construir* (B) e *Construção* (C).

4.4 Tarefa 4 – *Caça ao ovo*

A tarefa *Caça ao ovo* é constituída por um problema não rotineiro, de natureza algébrica, cujo enunciado exige a compreensão leitora de significados e a aplicação de competências matemáticas já adquiridas. Para resolverem o problema colocado, os alunos deverão conseguir traduzir a linguagem matemática enunciada, compreender relações entre quantidades e representar conceitos e ideias. A interpretação do enunciado deverá despertar o reconhecimento de conceitos e procedimentos adquiridos, de modo que os alunos traduzam para linguagem matemática, ou para outras formas de representação, os conceitos enunciados. Espera-se que os alunos consigam estender a compreensão das relações e dos conceitos trabalhados em contexto aritmético, desenvolvendo estratégias de resolução que permitam chegar a uma solução equivalente à da equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 6 = x$.

Seguidamente, apresentam-se pequenos excertos correspondentes a situações ocorridas durante a apresentação e resolução desta tarefa, resultantes dos registos audiovisuais, bem como dos registos escritos dos alunos.

4.4.1 *Reconhecer*

A ação epistémica *Reconhecer* surgiu como consequência da leitura e análise do enunciado do problema, registando-se, da parte dos alunos, uma analogia entre a presente tarefa e a tarefa *Doces de Páscoa* já resolvida.

<p>GI: Esta é mais difícil que a outra que fizemos dos ovos. [...] [Os alunos iniciaram a tarefa, não voltando a solicitar a presença da professora. Iniciaram a leitura conjunta do enunciado, tecendo algumas considerações sobre os dados do problema. Focaram a atenção no desafio lançado aos leitores e daí retiraram informação acerca dos dados].</p>

Figura 4.83 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Caça ao ovo* (GI)

A primeira frase proferida dá-nos indicação imediata de uma *Interpretação* global do enunciado do problema, manifestada pela capacidade de julgamento quanto ao grau de dificuldade existente entre o presente problema e o anteriormente realizado. Esta formulação de opinião transmite-nos, ainda que subjetivamente, a percepção de informação relevante apreendida através da tarefa *Doces de Páscoa*, o que no contexto da ação epistémica *Reconhecer* corresponderá à identificação de *Estruturas adquiridas*.

Nos diálogos que se seguem pode-se constatar, novamente, a presença das subcategorias em epígrafe.

GI: Temos mais de 40 pessoas [referiu, apontando para a informação *mais de quatro dezenas...*]
 LP: Voltamos a ter metade dos participantes que não conhecemos [fazendo, provavelmente, associação às tarefas já realizadas].
 GI: Só sabemos que são mais de 40. [...] Podemos fazer um desenho [...]
 LP: Temos outra vez a quarta parte, [apontando e dando início à leitura em voz alta]: *os do sétimo ano representam a quarta parte desses... desses todos.*
 GI: Do total?!
 LP: Dos participantes todos. [...]
 GI: O oitavo ano é a oitava parte [referiu, apontando em simultâneo para o enunciado].

Figura 4.84 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Caça ao ovo* (GI, LP)

O diálogo apresentado na figura 4.84 transmite a capacidade evidenciada pelos alunos para descodificarem o enunciado do problema, evidenciando o desenvolvimento das subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas*. As estruturas selecionadas prendem-se com a percepção do significado de dezena, uma vez que GI indica que mais de 40 pessoas participam no evento, com a existência de um número indeterminado de participantes, de diferentes ciclos e níveis, e com a seleção de estratégias - podemos fazer um desenho. Destaca-se o facto de a exposição oral de ideias ter sido acompanhada pela expressão corporal - apontando e dando início à leitura em voz alta - que também contribuiu para a descodificação da mensagem. O desenvolvimento da ação *Reconhecer* não proporcionou, da parte dos alunos, a identificação explícita de regularidades e relações numéricas, pelo que se considera que a subcategoria *Regularidades* não se verificou nesta tarefa. A figura que se segue particulariza, através da seleção de excertos dos registos audiovisuais, situações em que a ação *Reconhecer* se manifestou através das subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA) e como estas últimas se relacionaram.

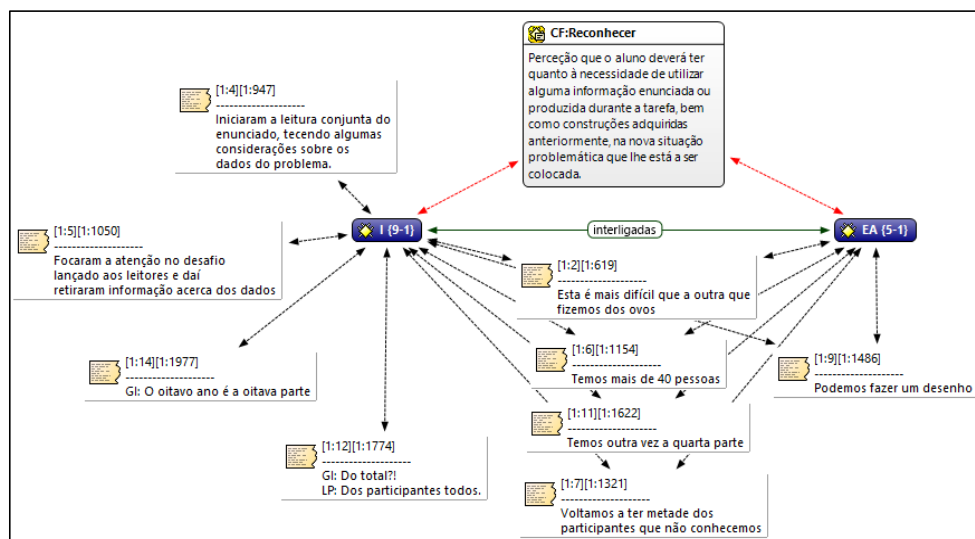


Figura 4.85 – RAV da ação epistémica *Reconhecer* em *Caça ao ovo*

A análise da figura 4.85 sugere que as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA) desenvolveram-se mutuamente, pelo que se considerou estarem interligadas. Alguns dos excertos selecionados transmitem essa relação, tais como as situações que envolveram a interpretação dos significados de parte, metade [1:7], quarta parte [1:11] e de dezena [1:6]. Considera-se que a opção de utilizar desenhos para expor a informação recolhida [1:9] resultou, não só da sugestão enunciada, mas também de experiências resultantes de outras tarefas. Neste caso, os alunos interpretaram e mobilizaram, quase em simultâneo, conceitos adquiridos. A leitura do enunciado espoletou, igualmente, nos alunos, a comparação entre a presente tarefa e outra já desenvolvida [1:2] - *esta é mais difícil que a outra que fizemos com os ovos* - verificando-se que a *Interpretação* (I) do enunciado desencadeou o relacionamento, e julgamento, relativamente a conteúdos já trabalhados, *Estruturas adquiridas* (EA).

Contudo, alguns excertos estabelecem uma relação mais forte com a subcategoria *Interpretação* (I), como são exemplo as situações em que se verificou, da parte dos alunos, a direção e divisão da atenção para diferentes dados enunciados - *tecendo algumas considerações acerca dos dados* [1:4], *focaram a atenção...retiraram informação* [1:5], *do total* [1:12], *é a oitava parte* [1:14].

A informação constante na tabela que 4.18 procura sintetizar os resultados obtidos, registando as características mais relevantes da ação epistémica *Reconhecer*.

Tabela 4.18 – Síntese da ação epistémica *Reconhecer* em *Caça ao ovo*

Categoria: <i>Reconhecer</i> (R)		
Subcategorias	<i>Interpretação</i> (I)	<ul style="list-style-type: none"> • Direcionaram a atenção para a informação relevante do enunciado do problema; • Reconheceram palavras-chave (4 dezenas, metade, quarta e oitava parte); • Interpretaram e relacionaram os dados enunciados.
	<i>Estruturas adquiridas</i> (EA)	<ul style="list-style-type: none"> • Descodificaram o significado dos conceitos de dezena, metade, quarta e oitava parte; • Selecionaram o desenho para exporem o seu raciocínio.

Síntese. A ação epistémica *Reconhecer* manifestou-se, sobretudo, durante a análise do enunciado do problema, através do desenvolvimento das subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas*. Verificou-se, em algumas situações, que as referidas subcategorias desenvolveram-se mutuamente, contribuindo, no seu conjunto, para o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Esta constatação conduz à ideia de que *Reconhecer* adquire maior expressão quando a relação entre as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* é estreita. Acrescenta-se o facto de a ausência da subcategoria *Regularidades* não ter comprometido o desenvolvimento da ação *Reconhecer*. Destaca-se o facto de a seleção de *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores, incluindo as experiências resultantes da resolução das tarefas aplicadas,

terem facilitado a compreensão leitora, conduzindo-nos à ideia de que o desenvolvimento da ação *Reconhecer* é imprescindível para a nova construção.

4.4.2 Construir

A ação epistémica *Construir* iniciou-se com a representação dos dados enunciados, num esquema produzido pelos alunos (instrumento no sentido de Rabardel, 1995). O diálogo que se segue transmite de que forma os alunos utilizaram o instrumento que criaram para obterem soluções intermédias.

GI: [...] Podemos fazer um desenho [desenhou uma “circunferência” e representou metade]. Aqui são os alunos do 5.º e do 6.º ano [escreveu].
 [...] GI: [iniciou de imediato a representação da quarta parte no círculo desenhado, escrevendo nessa parte 7.º ano, enquanto LP o acompanhava com o olhar].
 GI: O oitavo ano é a oitava parte [referiu, apontando em simultâneo para o enunciado]. É metade [hesitando] deste pedaço que sobrou.
 LP [abanou a cabeça em sinal de concordância].
 GI: [Escreveu na oitava parte destacada 8.º ano, enquanto LP o interrompia]:
 LP: Agora é fácil... o resto é 6.
 GI: São os do nono. [Ficaram parados durante alguns instantes, como se a tarefa tivesse sido concluída]. [...]
 GI: Estamos a pensar... [pegou no lápis e escreveu na oitava parte restante 6 do 9.º ano... Se aqui são 6 participantes, aqui [apontando para a representação do oitavo ano] são também 6 [registou o número 6 para ambas as situações] [...] Os do sétimo ano são o dobro, 12. [Continuou, confiante]: os do segundo ciclo são o dobro de 12, 24 [em simultâneo com a resposta imediata de LP].

Figura 4.86 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Caça ao ovo* (GI,LP)

O diálogo anterior evidencia, da parte dos alunos, a necessidade de aplicarem *Estratégias* – representação circular – para organizarem os dados enunciados. É através desse instrumento, ao estruturarem os dados reconhecidos, que conseguem apresentar *Soluções* intermédias, *Justificarem* o seu raciocínio e atingirem o objetivo final, aproximando-os da resposta ao problema colocado. A manipulação da representação circular evidenciou a integração e combinação de *Construções* reconhecidas, tais como os conceitos geométricos de metade, quarta e oitava parte, bem como o conceito numérico de dobro, aquando da obtenção do número de alunos do sétimo ano e do segundo ciclo. A figura que se segue reforça a exposição anterior e evidencia como os alunos representaram o seu raciocínio:

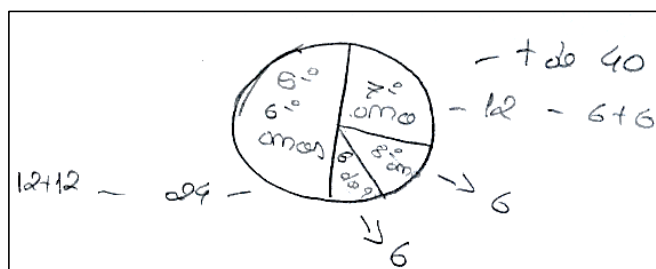


Figura 4.87 – RA sobre a representação de dados e conhecimentos, em *Caça ao ovo*.

A análise do diálogo mantido pelos alunos e da representação circular por eles esquematizada permitiu verificar que esses selecionaram uma metodologia compatível com a do *model methods - drawing*, para resolverem um problema de natureza algébrica. A equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 6 = x$, que daria resposta à questão – quantos alunos participaram, este ano, na caça ao ovo? – foi substituída pela construção de uma “equação” pictórica, a partir da qual os alunos analisaram a parte e, seguidamente, o todo.

A representação circular permite verificar que os alunos representaram geométrica e corretamente a informação enunciada, revelando uma compreensão significativa do conteúdo do problema. As *Construções* reconhecidas mobilizadas permitiram a representação correta dos conceitos de metade, quarta e oitava parte e as respectivas representações no esquema. Os alunos seguiram, sequencialmente, os dados enunciados, começando por representar a metade correspondente ao segundo ciclo, a quarta parte relativa ao sétimo ano, a oitava parte respeitante ao oitavo ano e, só após uma breve interrupção, a parte restante, que não identificaram verbalmente, ou por escrito, como sendo a oitava parte, respeitante ao nono ano. Com a representação geométrica – *Estratégias* – evidenciaram-se relações numéricas resultantes da exploração semiótica do esquema pictórico. Os alunos começaram por constatar que seis alunos do nono ano ocupariam a oitava parte e, partindo dessa informação, obtiveram, estabelecendo relações numéricas e geométricas, todas as informações restantes. Após identificação da parte correspondente aos alunos do nono ano, o raciocínio desenvolvido, expresso também oralmente, iniciou-se na ordem inversa: começaram por associar o número de alunos do oitavo ano aos do nono (seis), considerando que ocupariam a mesma área da representação circular, ainda que não tenham mencionado que se tratava da oitava parte. Surge, então, a primeira *Solução* intermédia: seis alunos são do oitavo ano. Seguidamente, integraram o conceito de dobro, revelando percepção de que a quarta parte seria o dobro da oitava parte e que o dobro de seis seria doze, obtendo-se, assim, a segunda *Solução* intermédia: doze alunos do sétimo ano. Por fim, os alunos preencheram o primeiro setor dividido, revelando percepção espacial de que a metade da representação circular seria o dobro da quarta parte correspondente aos alunos do sétimo ano – *Construções reconhecidas*. Consideraram, então, que o número de alunos do segundo ciclo seriam o dobro de doze, registando também na representação circular essa informação. O cálculo mental, *Construções reconhecidas*, associado ao dobro de um número contribuiu, igualmente, para a apresentação de soluções intermédias. A *Justificação* do raciocínio estabelecido decorreu ao longo do preenchimento da representação circular, expressando-se através da oralidade e do registo escrito.

A figura que se segue apresenta excertos correspondentes à ação epistémica *Construir* (B), a qual se manifestou através das subcategorias *Estratégias* (Es), *Soluções* (S), *Justificação* (J) e *Construção reconhecida* (CR).

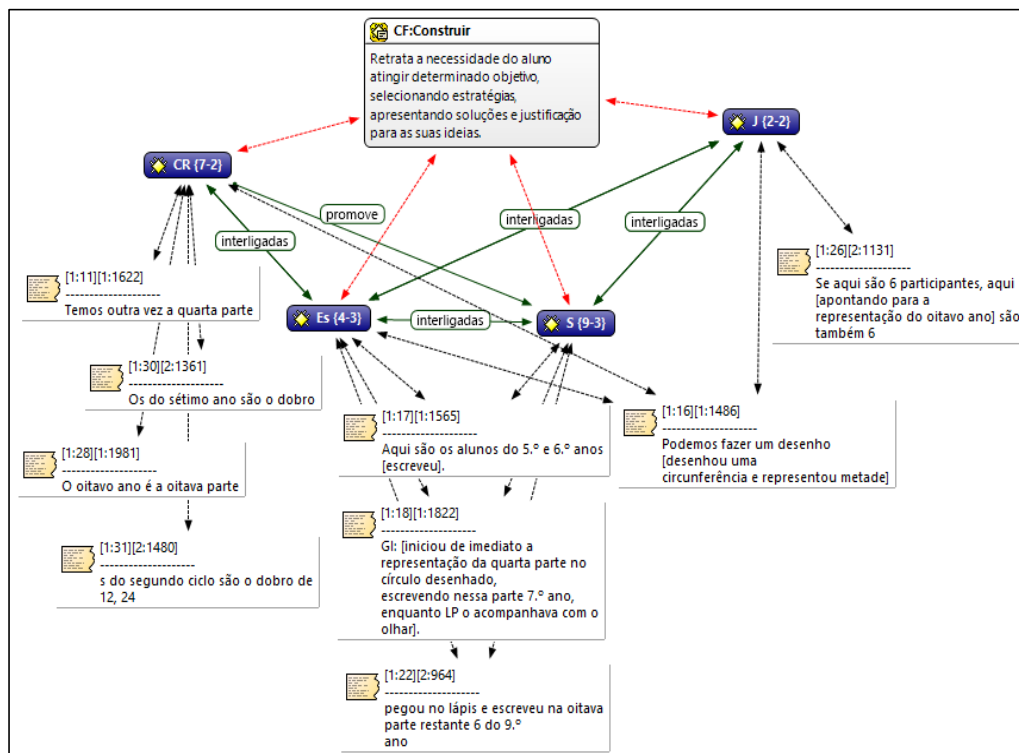


Figura 4.88 – RAV da ação epistémica *Construir* em *Caça ao ovo*

A análise da figura anterior realça a relação estabelecida entre as subcategorias da ação epistémica *Construir* (B) que ocorreram, nesta tarefa, na sua plenitude. A representação pictórica, entendida nesta análise como uma *Estratégia* (Es) [1:16] selecionada pelos alunos, assumiu posição de destaque. É a partir da exploração deste esquema que sobressaem, com a naturalidade, *Soluções* (S) e *Justificações* (J) que fazem transparecer a simplicidade do desenvolvimento do processo de abstração dos alunos. Constatou-se que, quando os alunos iniciaram a elaboração do esquema circular, eles começaram por identificar uma relação geral entre os dados, o todo, ao qual associaram, gradualmente, *Construções reconhecidas* (CR), tais como a representação geométrica de frações [1:11] [1:16] [1:28]. Construíram, assim, um conceito geral e abstrato da representação dos dados, semelhante à descrita por Davydov (1988). Seguidamente, estabeleceram relações geométricas e numéricas, *Construções reconhecidas* [1:30] [1:31], que lhes permitiram obter *Soluções* (S) particulares – seis alunos são do oitavo ano [1:22] – e *Justificar* (J) raciocínios [1:26]. O processo de abstração coincide, como tal, com a exploração do esquema e com a necessidade de relacionar os dados enunciados, caminhando para o concreto: apresentação de *Soluções intermédias* (S). O concreto surgiu, gradualmente, resultando

do desenvolvimento do processo de abstração para uma forma mais consistente e estruturada.

Considera-se, então, que é a subcategoria *Estratégias* (Es) que desencadeia a manifestação das restantes subcategorias, as quais passarão a estabelecer, com essa, uma relação estreita. A exploração do esquema pictórico conduz à integração de *Construções reconhecidas* (CR), à produção de *Soluções* (S) e *Justificações* (J), mas estas também conduzem à seleção de novas *Estratégias* (Es) [1:17] [1:18] que, depois de aplicadas, permitem, uma vez mais, a ocorrência das primeiras. Paralelamente, considera-se que as *Construções reconhecidas* (CR) [1:31] foram úteis para a apresentação de *Soluções* (S), as quais poderiam estar comprometidas caso os alunos não manifestassem conhecimentos ou habilidade para o fazer.

Destaca-se o facto de a exploração de potencialidades semióticas, do esquema produzido pelos alunos, ter permitido atribuir *Soluções* intermédias para um problema de natureza algébrica. Considerando-se que esse poderia ser resolvido através da equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 6 = x$, para x participantes, as *Soluções* intermédias são as que indicam a participação de $\frac{x}{2}$ alunos do segundo ciclo, $\frac{x}{4}$ alunos do sétimo ano e $\frac{x}{8}$ alunos dos oitavo e nono anos.

Na tabela que se segue sintetizam-se todos os aspetos relevantes e que respeitam ao desenvolvimento das subcategorias *Estratégias*, *Soluções*, *Justificação* e *Construção reconhecida*.

Tabela 4.19 – Síntese da ação epistémica Construir em Caça ao ovo

Categoria: Construir (B)		
Subcategorias	Estratégias Es	• Selecionaram a representação circular para representarem os dados enunciados e para desenvolverem o raciocínio que os conduziu à solução do problema.
	Soluções S	• Exploraram as potencialidades semióticas do esquema para obterem o número de participantes correspondentes ao oitavo e sétimo anos e ao segundo ciclo.
	Justificação J	• Justificaram as suas opções, recorrendo às potencialidades semióticas da representação e à integração de conceitos reconhecidos: metade, quarta, oitava parte e dobro e cálculo mental.
	Construção reconhecida CR	• Integraram conhecimentos adquiridos anteriormente, tais como os conceitos de metade, quarta e oitava parte, dobro, a representação circular e o cálculo mental.

Síntese. Na presente tarefa também se verificaram o desenvolvimento das subcategorias *Construções reconhecidas*, *Estratégias*, *Soluções* e *Justificação*. Contudo, a relação estabelecida entre essas subcategorias não se verificou, na íntegra, como no desenvolvimento das tarefas anteriores. As subcategorias *Soluções* e *Estratégias* mantiveram-se interligadas, de modo que a representação circular permitiu obter *Soluções* que, ao serem integradas, promoveram o desenvolvimento de novos

raciocínios e, conseqüentemente, a apresentação de novas *Soluções* intermédias. De igual forma, a *Justificação* do raciocínio desenvolvido dependeu da interligação destas três subcategorias. Verificou-se, igualmente, a interligação das subcategorias *Construções* reconhecidas e *Estratégias*, uma vez que os alunos integraram dados e conhecimentos reconhecidos no esquema produzido e, explorando as suas potencialidades semióticas, obtiveram novas *Soluções*. Considera-se, como tal, que as *Construções* reconhecidas foram úteis para a apresentação de *Soluções* intermédias. Valoriza-se a aplicação da *Estratégia* – representação circular – considerando que essa foi, à semelhança do que se tinha verificado na tarefa *Conta-quilómetros*, essencial para o desenvolvimento do processo de abstração e, em particular, para a resolução do problema colocado. Considera-se, novamente, que o incentivo à utilização de representações poderá favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos mais jovens. Destaca-se ainda a relação que parece estabelecer-se entre as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*, considerando-se que *Construir* foi favorável ao desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, no sentido em que a integração de estruturas adquiridas selecionadas contribuíram para a apresentação de *Soluções* e *Justificação* para o raciocínio desenvolvido.

4.4.3 Construção

A nova *Construção* verificou-se com a análise das soluções intermédias apresentadas que, ao serem reorganizadas, permitiram a comunicação de solução para o problema.

Agora é somar, 24 deste [apontando para o segundo ciclo] e vinte e quatro do outro [referindo-se ao terceiro ciclo]: temos 48. É esta a resposta do número total!
[Confirmaram com o olhar e GI escreveu: *Este ano participaram 48 alunos na caça aos ovos*].

Figura 4.89 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Caça ao ovo*

O diálogo anterior transmite que os alunos desenvolveram habilidade para, nesta situação, reorganizarem um conjunto integrado de soluções intermédias já apresentadas e, de acordo com determinada sequência, encontrarem uma solução para o problema. A resposta dada resultou, uma vez mais, da leitura do esquema pictórico desenvolvido, o qual permitiu, da parte dos alunos, a seguinte implicação: se vinte e quatro são metade dos alunos, então à totalidade corresponderão quarenta. A *Construção* resultou, como tal, da *Reorganização* das soluções intermédias apresentadas e evidenciou-se quando os alunos expressaram, pela primeira vez, oralmente e por escrito, a solução para o problema colocado – *Comunicação*.

Este ano participaram 48 alunos na caça aos ovos.

Figura 4.90 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Caça ao ovo*

Relativamente ao raciocínio desenvolvido pelos alunos, destaca-se que a representação circular e a organização dos dados, nos setores correspondentes, permitiu uma leitura mais rápida e contextualizada do que, provavelmente, a que seria proporcionada pela resolução da equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + 6 = x$, a qual traduz algebricamente o problema colocado. A resolução apresentada permitiu, paralelamente, um conhecimento preciso do número de alunos de diferentes ciclos, ou anos, participantes na atividade, dando resposta a questões que não foram colocadas. A resolução da equação exigiria, por sua vez, a atribuição de significado à letra x , bem como cálculos numéricos adicionais, caso se pretendesse saber mais do que o número total de alunos envolvidos na atividade. Destaca-se, ainda, o facto de a presença da subcategoria *Generalização* ter-se reportado à indicação de um número indeterminado de participantes – só sabemos que são mais do que 40 ou voltamos a ter metade dos participantes que não conhecemos.

A figura que se segue aponta para a nova *Construção*, evidenciando a manifestação e relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização* (Ro), *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm).

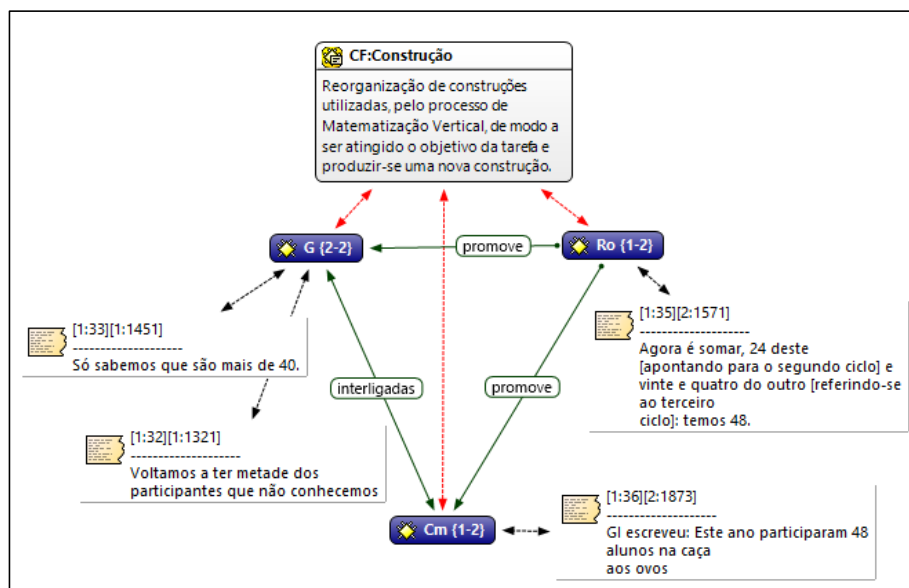


Figura 4.91 – RAV da análise da ação epistémica *Construção* em *Caça ao ovo*

A figura 4.91 evidencia a presença das subcategorias *Generalização* (G), *Reorganização* (Ro) e *Comunicação* (Cm). A *Generalização* (G) está associada ao número indeterminado de participantes [1:32] [1:33], o qual foi obtido quando os alunos *Reorganizaram* (Ro) as soluções intermédias obtidas e, mobilizando conhecimentos já adquiridos, obtiveram resposta para o problema colocado. A *Generalização* (G) resulta, como tal, da *Reorganização* (Ro) de soluções já apresentadas, relação igualmente transmitida entre as subcategorias *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm). A *Reorganização* (Ro) dos dados enunciados e das soluções produzidas [1:35] promoveram a obtenção de resposta

para o problema colocado, o qual culminou na respetiva expressão oral e escrita [1:36]. Por sua vez, considera-se que as subcategorias *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm) desenvolveram-se mutuamente, interligadas, durante o desenvolvimento do processo de abstração.

A tabela que se segue sintetiza os aspetos, relacionados com a *Construção*, visíveis no desenvolvimento da tarefa *Caça ao ovo*.

Tabela 4.20 – Síntese da ação epistémica *Construção* em *Caça ao ovo*

Categoria: <i>Construção</i>		
Subcategorias	Reorganização (Ro)	<ul style="list-style-type: none"> Reorganizaram as soluções apresentadas, obtendo solução para o problema colocado.
	Generalização (G)	<ul style="list-style-type: none"> Estenderam o conhecimento aritmético, resolvendo um problema de natureza algébrica.
	Comunicação (Cm)	<ul style="list-style-type: none"> Expressaram em linguagem natural e matemática a nova construção.

Síntese. A nova *Construção* desenvolveu-se através das ações *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação*. Foi a partir da *Reorganização* de soluções intermédias já apresentadas que se desenvolveram as subcategorias *Generalização* e *Comunicação*. Este facto faz supor que não tendo havido, dos alunos, predisposição para organizarem a informação recolhida no sentido de alcançarem o objetivo final, a construção poderia não ter ocorrido. A comunicação e partilha estabelecida entre alunos, durante a reorganização dos dados, poderá explicar o facto de a *Generalização* (G) e a *Comunicação* (Cm) se terem mantido interligadas durante o processo de abstração.

4.4.4 *Consolidação*

À semelhança do que se verificou anteriormente, a *Consolidação* manifestou-se, nesta tarefa, através das subcategorias *Aplicação de construções recentes* e *Características psicológicas*. Porém, a *Aplicação de Construções* recentes manifestou-se de forma invulgar, comparativamente com o que se observou na resolução das tarefas anteriores. Neste caso particular, a *Aplicação da construção* recente surge estritamente ligada ao instrumento desenvolvido pelos alunos – a representação circular – que também tinha sido utilizado na resolução da tarefa *Conta-quilómetros*. Acrescenta-se que a utilização da representação circular proporcionou, aos alunos, maior autonomia e agilidade na interpretação e combinação dos dados enunciados, bem como confiança nos resultados obtidos – *Características psicológicas*. Considera-se, como tal, que as subcategorias *Aplicação de uma construção* recente e *Características psicológicas* mantiveram-se interligadas durante a manifestação da ação epistémica *Consolidação*. Realça-se o facto de a *Consolidação* surgir, nesta situação, apenas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, situação que se pode explicar através da resolução desenvolvida pelos alunos.

A figura que se segue transmite a interligação verificada entre as subcategorias *Aplicação de uma construção recente* (AC) e *Características psicológicas* (CP), observada durante a ação *Consolidação*, reportando-se às respostas recolhidas através do suporte audiovisual.

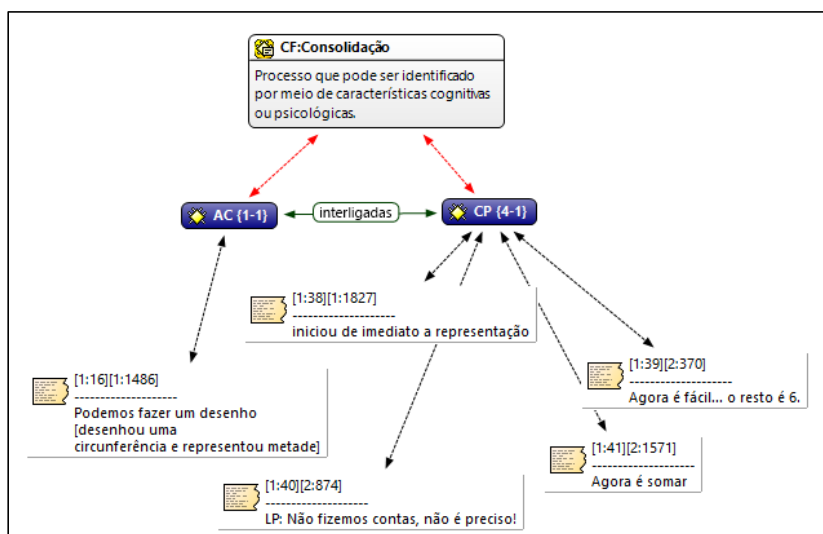


Figura 4.92 – RAV da ação epistémica *Consolidação* em *Caça ao ovo*

A figura 4.92 revela que *Consolidação* manifestou-se através das subcategorias *Aplicação de uma construção recente* (AC) e *Características psicológicas* (CP), as quais mantiveram-se interligadas durante a sua manifestação. Verificou-se que a *Aplicação da construção* concebida recentemente pelos alunos – representação circular e pictórica [1:16] – proporcionou aos alunos maior rapidez [1:38], autonomia [1:39] [1:41] e confiança nos raciocínios desenvolvidos [1:40].

A tabela que se segue sintetiza os aspetos mais revelantes da manifestação da ação epistémica *Consolidação*.

Tabela 4.21 – Síntese da ação epistémica *Consolidação* em *Caça ao ovo*

Categoria: <i>Consolidação</i> (Co)		
Subcategorias	Aplicação de uma construção recente (AC)	<ul style="list-style-type: none"> Aplicaram a representação pictórica circular já utilizada na tarefa Conta-quilómetros.
	Características psicológicas (CP)	<ul style="list-style-type: none"> Revelaram autonomia, agilidade e confiança na aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente.

Síntese. A *Consolidação* voltou a manifestar-se através das subcategorias *Aplicação de construções recentes* e *Características psicológicas*, as quais se mantiveram interligadas. Esteve, nesta situação, associada à seleção de uma estratégia – a representação pictórica – manifestando-se apenas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, com quem parece continuar a estabelecer uma forte relação.

A seleção da representação pictórica, utilizada pelos alunos na tarefa *Conta-quilómetros*, contribuiu para que esses interpretassem autonomamente a informação enunciada e revelassem agilidade na manipulação de dados resultados, bem como confiança nas suas produções.

A figura seguinte esquematiza as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Reconhecer (R)*, *Construir (B)*, *Construção (C)* e *Consolidação (Co)*, sintetizando conclusões descritas durante a apresentação dos resultados.

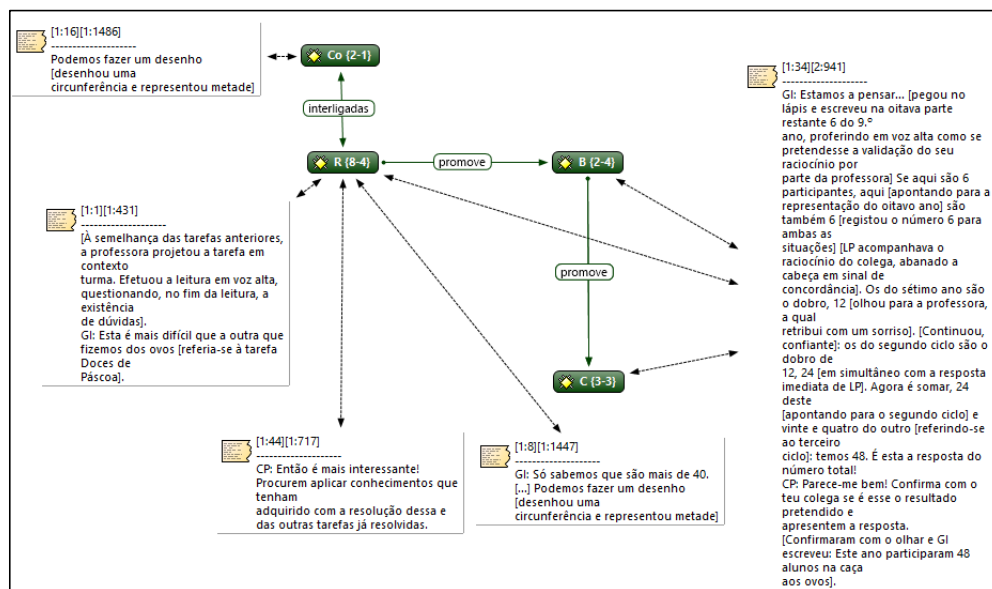


Figura 4.93 – Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em *Caça ao ovo*

A figura 4.93 evidencia a presença de todas as ações epistémicas no processo de construção do novo conhecimento matemático. Constatou-se de imediato a ligação estabelecida entre as ações epistémicas *Reconhecer (R)* e *Consolidação (Co)*, considerando-se que a *Consolidação (Co)* se manifestou através da seleção de uma representação pictórica [1:16], semelhante à utilizada na tarefa *Conta-quilómetros*. Destacou-se a forma como os alunos representaram os dados na representação circular e a exploraram no sentido de obter solução para o problema enunciado, registando-se maior habilidade para representarem e interpretarem informação mais complexa. Entende-se que a presente construção contribuiu, como tal, para o aperfeiçoamento da construção adquirida em aprendizagens anteriores e foi interpretada, neste contexto, como uma manifestação da *Consolidação (Co)*.

O esquema apresentado revela, ainda, que se pode observar o desenvolvimento da ação *Reconhecer (R)* e *Consolidação (Co)* [1:1] [1:44], bem como na perceção de conceitos e estratégias que poderão ser úteis para o desenvolvimento do novo conhecimento matemático [1:8]. Verifica-se que a aplicação de conceitos e estratégias reconhecidas

promoveram o desenvolvimento do raciocínio dos alunos e a apresentação de soluções intermédias [1:34], ou seja, o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* (B), que depois de reorganizadas permitiram a comunicação da nova *Construção* (C) [1:34].

Síntese. Voltou a constatar-se a presença de todas as ações epistémicas no desenvolvimento da nova construção. As ações *Reconhecer* e *Consolidação* voltaram a surgir interligadas, associadas à percepção de que a representação dos dados enunciados permitiria a obtenção de resposta para o problema colocado. A *Consolidação* manifestou-se na fase inicial do desenvolvimento da ação *Reconhecer* e foi essencial ao desenvolvimento das restantes ações epistémicas, favorecendo, significativamente, a nova *Construção*. Verificou-se, ainda, que a ação *Reconhecer* favoreceu o desenvolvimento da ação *Construir* e que esta última promoveu o desenvolvimento da ação epistémica *Construção*.

4.4.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Professor.

O papel atribuído ao professor começou por evidenciar-se, uma vez mais, com a elaboração da tarefa – artefacto – através da qual se procurou desenvolver a capacidade dos alunos estenderem o conhecimento aritmético a situações mais complexas que, normalmente, são resolvidas com recurso a processos algébricos. Verificou-se que o conteúdo e a estrutura do enunciado do problema permitiram o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, uma vez que os alunos estabeleceram analogia com tarefas já realizadas – *esta é mais difícil que a outra que fizemos dos ovos* – e revelaram compreensão leitora – *temos mais de 40 pessoas [referiu, apontando para a informação mais de quatro dezenas]*.

Constatou-se, ainda, que durante a resolução, a professora incentivou os alunos a explorarem as potencialidades do enunciado da tarefa – artefacto – e o instrumento desenvolvido por eles – representação circular – incentivando-os à construção de novos signos matemáticos.

<p>GI: Esta é mais difícil que a outra que fizemos dos ovos [referia-se à tarefa <i>Doces de Páscoa</i>]. P: Então é mais interessante! Procurem aplicar conhecimentos que tenham adquirido com a resolução dessa e das outras tarefas já resolvidas. P: [ao verificar que os alunos estavam parados e suspeitando da existência de dúvidas que não permitissem a progressão na tarefa, a professora aproximou-se] Dúvidas meninos?!</p>
--

Figura 4.94 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Caça ao ovo* (GI,P)

Através do diálogo anterior, foi possível constatar o incentivo à aplicação de construções adquiridas com a resolução das tarefas anteriores, dando-se expressão à

ação epistémica *Reconhecer*. A ação da professora estendeu-se, ainda, ao incentivo e certificação de que os alunos progrediriam na resolução da tarefa.

A mediação da professora voltou a ser necessária com o desenvolvimento da resolução da tarefa, designadamente na validação do raciocínio e resultados obtidos – *pegou no lápis e escreveu na oitava parte restante 6 do 9.º ano, proferindo em voz alta como se pretendesse a validação do seu raciocínio por parte da professora... os do sétimo ano são o dobro, 12 [olhou para a professora, a qual retribui com um sorriso]. [Continuou, confiante]* – bem como no incentivo à partilha, à revisão das soluções e à apresentação formal dos resultados obtidos – *Parece-me bem! Confirma com o teu colega se é esse o resultado pretendido e apresentem a resposta.*

Verificou-se, assim, que a professora contribuiu para o desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Construção*.

A figura que se segue transmite de que forma e como estiveram interligadas as subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA) e *Incentivo à construção de signos matemáticos* (ICS), durante o processo de mediação estabelecido pela professora.

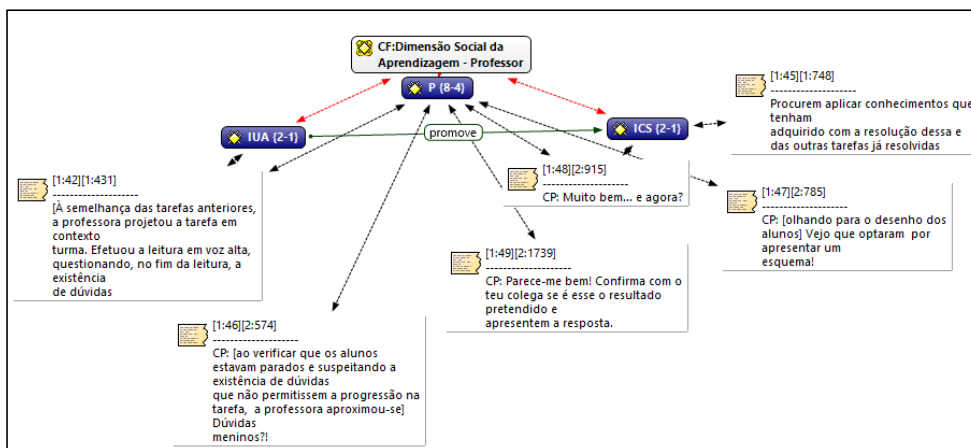


Figura 4.95 – RAV da análise da DSA, Professor, em Caça ao ovo

Os excertos seleccionados e constantes na figura anterior transmitem que a professora incentivou a utilização da tarefa (IUA), certificando-se que os alunos, reconhecendo construções adquiridas anteriormente [1:42] conseguiriam progredir [1:46], no sentido de apresentarem solução para o problema apresentado. Incentivou, ainda, a *Construção de signos* (ICS) através da integração de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores [1:45], valorizando as construções dos alunos [1:47], a respetiva exploração [1:48] e partilha de ideias [1:49] – *Construir*.

Tabela 4.22 – Síntese da análise da DSA, Professor, em Caça ao ovo

Categoria: Professor (P)		
Subcategorias	Incentivo à utilização de artefactos (IUA)	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentou a tarefa, incentivando a sua exploração; • Incentivou a interpretação do enunciado do problema; • Incentivou a exploração da representação circular; • Incentivou a integração de construções adquiridas anteriormente.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)	<ul style="list-style-type: none"> • Estimulou a aquisição de significados quanto aos dados enunciados, aos raciocínios desenvolvidos e aos resultados apresentados.

Síntese. O desenvolvimento da tarefa, a sua apresentação e implementação foi entendida como um *incentivo* à utilização desse artefacto. O instrumento, desenvolvido pelos alunos, foi valorizado pela professora que incentivou a sua exploração, entendendo-se como um *Incentivo à construção de signos matemáticos*.

A intervenção da professora na resolução da tarefa não se verificou com a mesma intensidade observada em tarefas anteriores, constatando-se que a representação pictórica desenvolvida pelos alunos proporcionou maior autonomia na interpretação e representação dos dados enunciados – *Reconhecer* – na obtenção de soluções intermédias – *Construir* – e na apresentação de resposta para o problema de natureza algébrica – *Construção*. O desempenho da professora foi, igualmente, relevante na condução da tarefa, designadamente no incentivo à interpretação e representação dos dados enunciados – *Reconhecer* – e à exploração da representação desenvolvida pelos alunos, no sentido de se obterem soluções e resposta para o problema colocado – *Construir* e *Construção*.

4.4.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Alunos.

Verificou-se, durante a resolução da tarefa, o envolvimento dos alunos no sentido de obterem resposta para o problema colocado. A seleção de estratégias, nomeadamente a representação circular, evidenciou o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação* e revelou-se essencial para que expusessem as suas ideias, apresentassem soluções intermédias, *Construir*, e obtivessem solução para o problema de natureza algébrica, *Construção*. O excerto que se segue transmite de que forma as contribuições individuais e coletivas contribuíram para o desenvolvimento destas ações:

GI: Só sabemos que são mais de 40. [...] Podemos fazer um desenho [desenhou uma circunferência e representou metade]. Aqui são os alunos do 5.º e 6.º anos [escreveu]. [...]
 GI: [iniciou de imediato a representação da quarta parte no círculo desenhado, escrevendo nessa parte 7.º ano, enquanto LP o acompanhava com o olhar]. [...]
 GI: O oitavo ano é a oitava parte [referiu, apontando em simultâneo para o enunciado]. É metade [hesitando] deste pedaço que sobrou. [...]
 GI: [Escreveu na oitava parte destacada 8.º ano, enquanto LP o interrompia]:
 LP: Agora é fácil... o resto é 6.
 GI: São os do nono. [Ficaram parados durante alguns instantes como se a tarefa tivesse sido concluída]. [...]
 GI: ... [pegou no lápis e escreveu na oitava parte restante 6 do 9.º ano, proferindo em voz alta como se pretendesse a validação do seu raciocínio por parte da professora] Se aqui são 6 participantes, aqui [apontando para a representação do oitavo ano] são também 6 [registou o número 6 para ambas as situações] [LP acompanhava o raciocínio do colega, abanando a cabeça em sinal de concordância]. Os do sétimo ano são o dobro, 12 [olhou para a professora, a qual retribuiu com um sorriso]. [Continuou, confiante]: os do segundo ciclo são o dobro de 12, 24 [em simultâneo com a resposta imediata de LP]. Agora é somar, 24 deste [apontando para o segundo ciclo] e vinte e quatro do outro [referindo-se ao terceiro ciclo]: temos 48. É esta a resposta do número total!

Figura 4.96 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Caça ao ovo* (GI,LP)

O diálogo anterior evidencia, com maior clareza, que o aluno GI foi o responsável pela seleção da representação circular para representar o seu raciocínio, *Reconhecer*. Considera-se que a seleção desta representação se relacionou com a experiência adquirida com a resolução da tarefa *Conta-quilómetros, Consolidação*. A produção deste signo matemático (PSI) ganhou significado para os dois alunos quando GI manipulou-o, completando-o com os dados enunciados e o organizou de acordo com os conceitos integrados e a obtenção de soluções intermédias. Verifica-se, contudo, que o aluno LP também deu significado ao signo desenvolvido por GI, estando essa compreensão presente quando referiu – *agora é fácil... o resto é 6* – e na expressão corporal presenciada – *enquanto LP o acompanhava com o olhar... abanando a cabeça em sinal de concordância...* – o que evidencia a *Produção de signos coletivos* e o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*.

Uma vez que os dois alunos se envolveram na exploração da representação circular, considera-se que essa funcionou como instrumento “social” de mediação semiótica, utilizado para interpretar o enunciado do problema, *Reconhecer*, para integrarem conhecimentos, desencadear raciocínios e obterem soluções intermédias, *Construir*, e para alcançarem a nova *Construção*.

Considera-se que os signos utilizados pelos alunos, ainda que tenham resultado do conhecimento e iniciativa de apenas de um deles, proporcionaram a interligação de conhecimentos adquiridos pelos dois alunos e o envolvimento de ambos na produção de uma resposta para o problema, *Produção de signos coletivos* (PSC).

A figura seguinte exemplifica, através dos excertos selecionados, situações em que a categoria *Alunos* foi identificada e categorizada de acordo com as subcategorias *Produção de signos individuais (PSI)* e *Produção de signos coletivos (PSC)*.

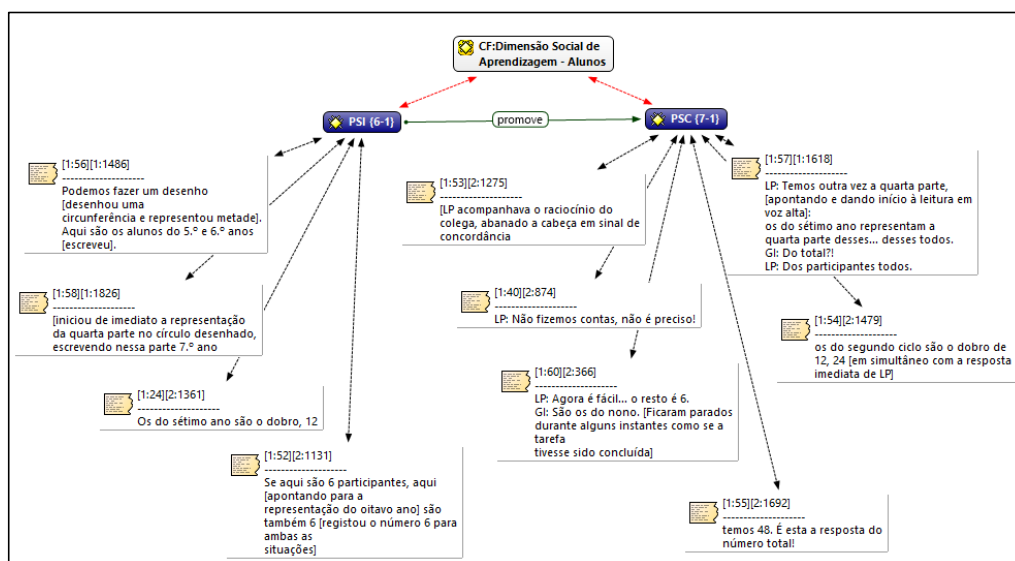


Figura 4.97 – RAV da análise da DSA, Alunos, em Caça ao ovo

A figura 4.97 revela que a construção da representação circular (PSI) e a sua exploração [1:56] [1:58] contribuíram para a produção de novos signos matemáticos e para a obtenção de soluções intermédias [1:24] [1:52]. A produção de signos individuais, aliadas à partilha de conhecimentos e ideias, promoveram a produção de signos coletivos que se evidenciaram na postura do aluno LP [1:53], na tomada de posição [1:40] [1:57], na apresentação de soluções intermédias [1:54] e na obtenção da nova construção [1:55] [1:60].

A tabela que se segue sintetiza os aspetos mais relevantes observados durante a análise da categoria *Alunos*.

Tabela 4.23 – Síntese da análise da DSA, Alunos, em Caça ao ovo

Categoria: Alunos (A)		
Subcategorias	Produção de signos individuais (PSI)	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretaram os dados enunciados; • Selecionaram a representação pictórica para integrarem dados do problema e conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores; • Produziram signos individuais.
	Produção de signos coletivos (PSC)	<ul style="list-style-type: none"> • Interagiram entre si, explorando a tarefa – artefacto – e o instrumento desenvolvido – representação pictórica – interligando conhecimentos que lhes permitiram obter soluções intermédias, justificar opções e alcançar a nova <i>Construção</i>.

Síntese. A análise efetuada permite valorizar a produção de signos individuais, designadamente a seleção da representação pictórica, utilizada em contexto anterior, para representar os dados enunciados e selecionar estruturas adquiridas, situação que

evidenciou a presença das ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação*. Considera-se que a produção de signos individuais continuou a manifestar-se com a exploração da representação pictórica, durante o desenvolvimento da ação *Construir*. No entanto, considera-se que também usufruiu das intervenções discretas, mas pertinentes, do aluno que se mostrou menos interventivo. Entende-se, como tal, que a ação epistémica *Construir* e, como consequência, a *Construção*, manifestaram-se com a produção de signos coletivos.

Considera-se que, na resolução desta tarefa, os signos individuais desenvolvidos promoveram a produção de signos coletivos. De acordo com os registos apresentados, não podemos deixar de supor que a construção do novo conhecimento matemático poderia resultar apenas da produção de signos individuais. Questionamos se, nesta situação, a mediação estabelecida entre o aluno e o instrumento por ele criado não tenha, de alguma forma, desvalorizado a construção “social” do conhecimento.

A figura que se segue procura transmitir de que forma a partilha verificada entre alunos e a mediação estabelecida pela professora contribuíram para a construção do novo conhecimento e, em particular, para o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co).

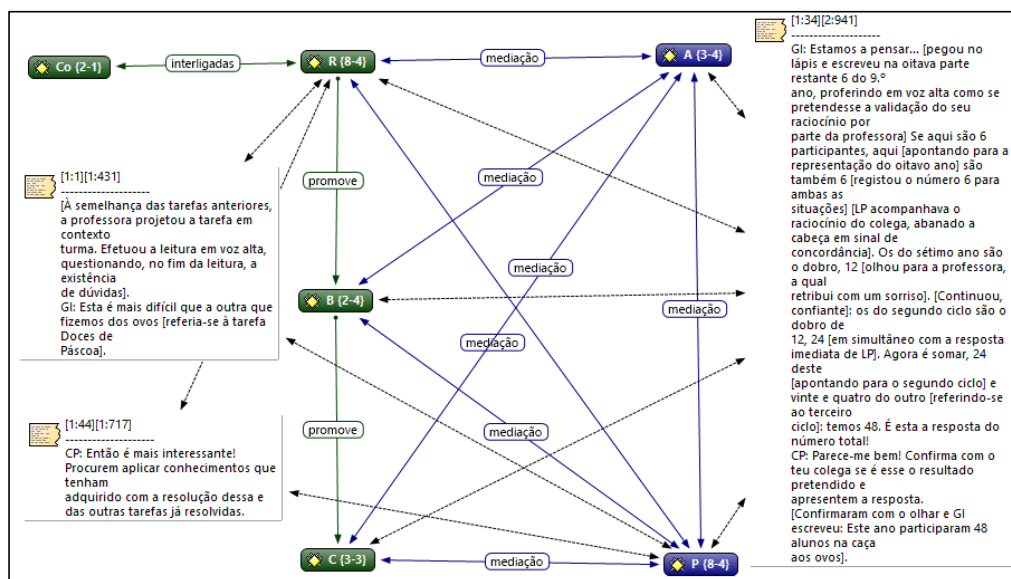


Figura 4.98 – Síntese da relação entre RBC+C e DSA em Caça ao ovo

Para procurar estabelecer uma relação compreensível entre as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co) e a mediação estabelecida entre *Professor* (P) e alunos e entre *Alunos* (A), selecionaram-se os diálogos [1:1], [1:34] e [1:44]. Os excertos [1:1] e [1:44] evidenciam a influência da *Professora* (P) no desenvolvimento da ação *Reconhecer* (R) e o diálogo [1:34] transmite

como a comunicação e partilha entre *Alunos* (A) contribuiu para o desenvolvimento das ações *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C).

Síntese. Verificou-se, à semelhança do que se passou com as tarefas anteriores, que a mediação estabelecida entre *Professor* (P) e alunos e entre *Alunos* (A) foi essencial para o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C) e que a ação *Consolidação* (Co) voltou a estar associada à ação *Reconhecer* (R). Destaca-se, como contribuição mais significativa, o desempenho da professora, presente na tarefa elaborada e no incentivo à sua exploração.

4.5 Tarefa 5 – Regras operatórias das potências

A tarefa *Regras operatórias das potências* visa estimular a compreensão dos números e suas operações, a aplicação do conceito de potência e a compreensão de linguagem simbólica. A construção pretendida está associada à extensão de propriedades numéricas e regularidades observadas na multiplicação, divisão e no cálculo da potência de uma potência, pretendendo-se conduzir os alunos à dedução das regras operatórias das potências.

4.5.1 Reconhecer

A ação epistémica *Reconhecer* verificou-se após o esclarecimento de dúvidas e com a exploração das tabelas, tal como se pode verificar no diálogo que se segue:

GI: Não estamos a ver como completamos a tabela. [...]
GI: Temos este... [apontando para n da potência] [...]
GI: É também um número que não conhecemos!
GI e LP [quase em simultâneo]: O expoente! [...]
GI: Sim, é a base.
GI: Ah! Já vi! Vai ser o três elevado a... deixa-me ver [procurando com o dedo] a n . Ok [expressando no rosto a animação] ... para as outras também. [...]
GI: Então aqui fica 3 e expoente 4 [escreveu na forma de potência] que é igual a 3, vezes 3, vezes 3, vezes 3 [proferia enquanto escrevia $3 \times 3 \times 3 \times 3$] que é nove vezes nove que é oitenta e um [escreveu = 81]. [LP acompanhava, em silêncio, o raciocínio de GI]. Esta é 10 na base e 5 no expoente... repete-se cinco vezes.

Figura 4.99 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Regras operatórias das potências* (GI)

Após a leitura do enunciado da tarefa, os alunos demonstraram dificuldade em saber como preencher a primeira tabela. Uma análise mais pormenorizada permitiu, no entanto, a interpretação dos dados constantes nessa tabela e a seleção de conceitos e procedimentos necessários ao seu preenchimento. Os alunos reconheceram o significado atribuído à letra n , número desconhecido e mostraram ter noção da representação de uma potência, designadamente da base e do expoente, bem como dos respetivos significados.

As subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* evidenciaram-se no diálogo anterior, estando presentes na representação da potência e dos seus elementos constituintes – base e expoente, na percepção do seu significado – produto de fatores, bem como da representação de um número desconhecido. Relativamente às dificuldades de interpretação que se manifestaram inicialmente, considera-se que essas estiveram associadas ao facto de os alunos não terem reconhecido a^n como uma potência, possivelmente por essa não evidenciar valores numéricos conhecidos.

A ação *Reconhecer* voltou a estar presente na observação de regularidades nas tabelas preenchidas.

GI: Vai sempre dar o mesmo valor, se multiplicarmos ou somarmos. Não sei se é para escrever isso.
 LP: Este está mal, não dá igual [referia-se ao produto das potências de base 20 e expoentes, respetivamente 3 e 2]. [GI riscou o último zero] [...]
 LP: Sim, é mais fácil... estas colunas são sempre iguais. [...]
 GI: A divisão vai dar igual à subtração. Nesta [apontando para a primeira tabela] a multiplicação dá igual à soma.

Figura 4.100 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras operatórias das potências (GI, LP)

A *Regularidade* observada prende-se com o facto de os alunos terem verificado a igualdade presente nas últimas colunas das tabelas, focando, a partir daí, a sua atenção no sentido da generalização da igualdade observada. A figura que se segue exemplifica, através de pequenos excertos selecionados, em que momentos a categoria *Reconhecer* se manifestou, que subcategorias emergiram e como se relacionaram entre si.

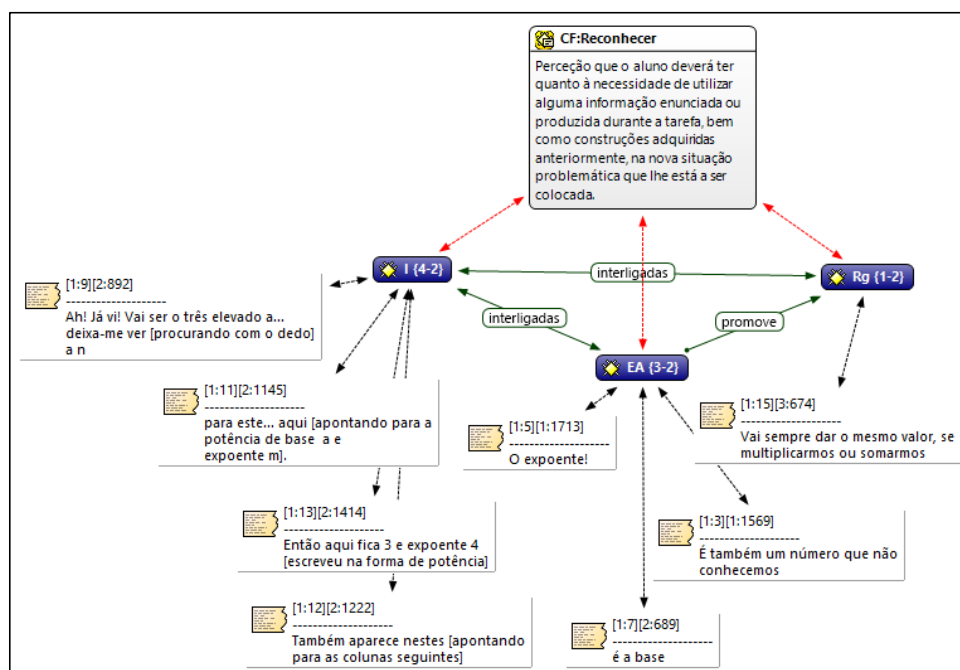


Figura 4.101 – RAV da análise da ação epistémica Reconhecer em Regras operatórias das potências

A figura anterior evidencia a *Interpretação* (I) que os alunos fizeram da tabela, nomeadamente da leitura dos dados enunciados [1:9], da representação dos dados na forma de potência [1:13], da leitura da potência de base a e expoente m [1:11] e da tabela preenchida [1:12]. As *Estruturas adquiridas* respeitam à identificação da base [1:7] e do expoente [1:5], bem como ao reconhecimento de linguagem simbólica [1:3]. A *Interpretação* (I) e a seleção de *Estruturas adquiridas* (EA) estiveram interligadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* (R), de modo que a interpretação permitiu a seleção de conhecimentos adquiridos e esses, ao serem aplicados, promoveram o preenchimento das tabelas, as quais foram, posteriormente, reinterpretadas no sentido da nova construção. O mesmo se verificou entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Regularidades* (Rg), uma vez que a *Interpretação* (I) proporcionou o preenchimento das tabelas e, posteriormente, a identificação de *Regularidades* (Rg) [1:15] que, por sua vez, ao serem reinterpretadas permitiram a observação de novas novas regularidades.

A tabela que se segue sintetiza as situações explanadas e que dizem respeito ao desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, de acordo com a manifestação das subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*.

Tabela 4.24 – Síntese da ação epistémica *Reconhecer* em Regras operatórias das potências

Categoria: <i>Reconhecer</i> (R)		
Subcategorias	Interpretação (I)	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretaram os dados constantes nas tabelas.
	Estruturas adquiridas (EA)	<ul style="list-style-type: none"> • Selecionaram o conceito de potência e procedimentos de cálculo adquiridos em aprendizagens anteriores.
	Regularidades (Rg)	<ul style="list-style-type: none"> • Reconheceram regularidades presentes nos cálculos efetuados; • Verificaram a igualdade presente nas duas últimas colunas das tabelas: $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $a^n \div a^m = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{n \times m}$; $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ e $a^n \div b^n = (a \div b)^n$.

Síntese. A ação epistémica *Reconhecer* evidenciou-se através das subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*. As subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* estiveram implicadas no desenvolvimento da ação *Reconhecer*, relação também justificada pela seleção de conceitos e procedimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, da interpretação dos dados enunciados nas tabelas e de soluções geradas pela aplicação das *Estruturas adquiridas*. De igual forma, as subcategorias *Interpretação* e *Regularidades* surgem interligadas durante o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, com a interpretação dos resultados apresentados e com a identificação de regularidades que facilitaram o correto preenchimento das tabelas e, posteriormente, a interpretação de novas situações regulares que conduziram os alunos à nova construção. Por sua vez, verificou-se que a seleção de *Estruturas adquiridas* promoveu o desenvolvimento da subcategoria *Regularidades*.

4.5.2 Construir

A interpretação da tabela e a integração das estruturas adquiridas permitiram o preenchimento da tabela e, como tal, o desenvolvimento da ação epistêmica *Construir*, tal como se pode verificar através do diálogo que se segue:

GI: Então aqui fica 3 e expoente 4 [escreveu na forma de potência] que é igual a 3, vezes 3, vezes 3, vezes 3 [proferia enquanto escrevia $3 \times 3 \times 3 \times 3$] que é nove vezes nove que é oitenta e um [escreveu = 81]. [LP acompanhava, em silêncio, o raciocínio de GI]. Esta é 10 na base e 5 no expoente... repete-se cinco vezes.
 LP: Dá 10 mil [GI iniciou a escrita] falta mais um zero [corrigiu o erro].
 GI: Aqui é 11 e 2... onze ao quadrado... onze vezes onze.
 LP [pegou de imediato na máquina e fez o cálculo 11×11]. 121 é 121. [GI escreveu]
 Seguiram o preenchimento das colunas, utilizando a calculadora. [...]
 P [abordou-se dos alunos]: Estão a seguir outra estratégia?!
 [olharam, mas não responderam]
 P: Estão a preencherem, em primeiro lugar, a linha [apontou].
 LP: Sim, é mais fácil... estas colunas são sempre iguais.

Figura 4.102 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras operatórias das potências

A ação *Construir* tornou-se visível com a integração de *Construções reconhecidas*, designadamente com os conceitos de potência, base e expoente, os quais deram origem à apresentação de *Soluções* e à *Justificação* do raciocínio desenvolvido, presente no cálculo e na comunicação estabelecida entre alunos. A adoção de *Estratégias* diferenciadas para preencherem com maior agilidade as tabelas esteve, igualmente, presente no desenvolvimento da ação *Construir*. O desenvolvimento da ação *Construir* passou, ainda, pela exploração das potencialidades da calculadora – artefacto – visando a aquisição de resultados e o preenchimento mais ágil das tabelas. Considera-se que essa aprendizagem também fomenta a utilização de linguagem simbólica, com compreensão, conduzindo os alunos à concretização dos valores numéricos correspondentes à base e ao expoente. A figura que se segue evidencia as *Soluções* apresentadas pelos alunos no preenchimento da primeira tabela:

a	n	m	a^n	a^m	$a^n \times a^m$	a^{n+m}
3	4	2	81	9	729	729
10	5	6	100000	1000000	1000000000	100000000000
11	2	1	121	11	1331	1331
20	3	2	8000	400	320000	320000

Figura 4.103 – RA preenchimento das tabelas em Regras operatórias das potências

A figura 4.103 transmite a situação anteriormente descrita, permitindo constatar a presença das subcategorias *Estratégias* (Es), *Soluções* (S), *Justificação* (J) e *Construção reconhecida* (CR). Seguidamente, apresentam-se excertos, selecionados dos registos audiovisuais recolhidos, através dos quais se procura evidenciar a presença das subcategorias referenciadas, bem como a relação estabelecida entre essas:

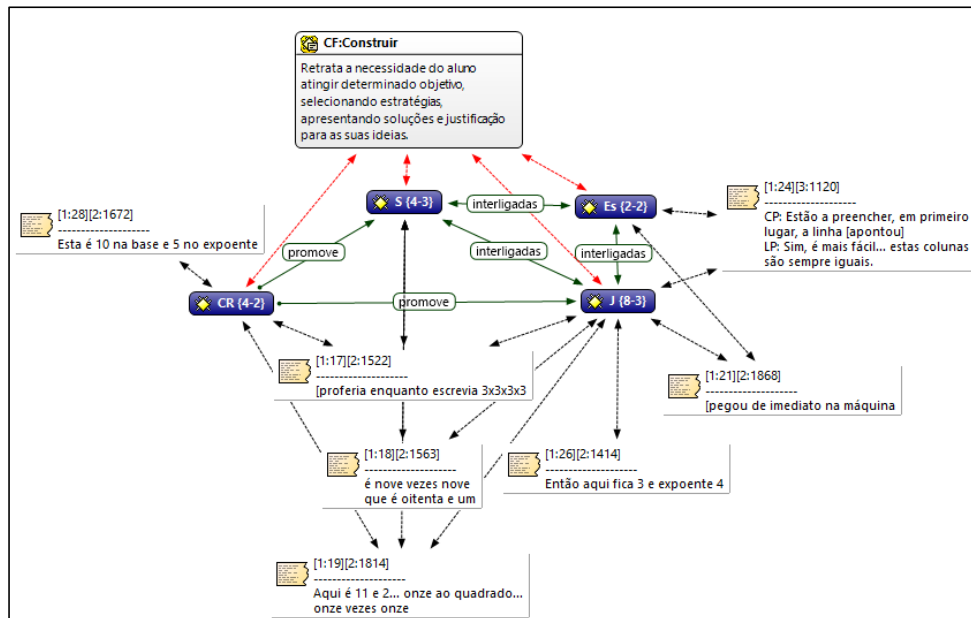


Figura 4.104 – RAV da ação epistêmica Construir em Regras operatórias das potências

Através da figura 4.104 constata-se que as *Construções reconhecidas* (CR), tais como a representação de potência e respetivos elementos [1:28], seu significado, produto de fatores com repetição da base, o número de vezes indicado em expoente [1:17], e o valor numérico [1:18] [1:19] promoveram a apresentação de *Soluções* e a *Justificação* do raciocínio desenvolvido [1:17] [1:18] [1:19]. As subcategorias *Soluções* (S), *Justificação* (J) e *Estratégias* (Es) mantiveram-se interligadas ao longo do preenchimento das tabelas, no sentido em que a experiência adquirida com o preenchimento da primeira tabela conduziu os alunos à adoção de estratégias diferenciadas nas tabelas seguintes [1:24]. A utilização da calculadora [1:21] e a comunicação do raciocínio [1:26] verificaram-se essenciais para a apresentação de *Soluções* e para a *Justificação* (J) do raciocínio desenvolvido.

Tabela 4.25 – Síntese da ação epistêmica Construir em Regras operatórias das potências

Categoria: Construir (B)		
Subcategorias	Estratégias Es	<ul style="list-style-type: none"> Alteraram a forma de preenchimento das tabelas; Utilizaram a calculadora para determinar o valor da potência.
	Soluções S	<ul style="list-style-type: none"> Preencheram as tabelas, explicitando os cálculos efetuados.
	Justificação J	<ul style="list-style-type: none"> Expressaram, na oralidade o raciocínio e os cálculos desenvolvidos.
	Construção reconhecida CR	<ul style="list-style-type: none"> Integraram, no raciocínio desenvolvido, os conceitos de potência, base e expoente.

A análise desta tarefa permitiu verificar que o desenvolvimento da ação *Construir* manifestou-se através da relação estabelecida entre as subcategorias *Estratégias*, *Soluções*, *Justificação* e *Construções reconhecidas*. Permitiu, igualmente, constatar que as relações estabelecidas entre a subcategoria *Construções reconhecidas* e as

subcategorias *Soluções* e *Justificação* se mantêm iguais às verificadas nas tarefas anteriores, de forma que a primeira continua a evidenciar-se útil para o desenvolvimento das duas restantes. Acrescenta-se que, na resolução desta tarefa a mobilização das *Construções reconhecidas* revelou-se essencial para o desenvolvimento do processo de abstração, aproximando os alunos da construção desejada. Relativamente às *Estratégias* selecionadas, designadamente à forma como preencheram a tabela, consideramos que não estabeleceram uma relação significativa com as *Construções reconhecidas* selecionadas, situação que pode explicar a ausência de relação entre ambas. Contrariamente, consideramos que a utilização da calculadora foi essencial para a obtenção e validação de resultados, o que poderá explicar a interligação entre as subcategorias *Estratégias*, *Soluções* e *Justificação*.

Constatou-se, também, que as subcategorias *Soluções* e *Justificação* desenvolveram-se mutuamente, no sentido em que ideias e *Soluções* foram sendo expostas, oralmente e por escrito, durante o desenvolvimento do processo de abstração, contribuindo para o preenchimento correto das tabelas e para o desenvolvimento do processo de construção.

4.5.3 Construção

A resolução desta tarefa revela que a *Construção* relacionou-se com a generalização de regularidades observadas.

P: Deixem ver o que já fizeram [voltou a página e começou a ler em voz alta] *As últimas colunas são iguais. A multiplicação de potências é igual a uma potência, com expoente igual à soma dos expoentes das duas potências multiplicadas.* [fez-se silêncio]
Mas olhem para esta tabela [referia-se à quarta tabela] também é o produto de duas potências e o resultado não inclui a soma dos expoentes. [fez-se silêncio] Vejam as diferenças entre as duas tabelas [esperou enquanto os alunos analisavam as duas tabelas].
Gl: Fácil, nesta [primeira tabela] é a mesma base e expoentes diferentes e na outra [quarta tabela] é ao contrário.
P: Então a vossa conclusão tem que transmitir essas diferenças, ou seja, o que podemos fazer para multiplicarmos duas potências com a mesma base [apontando para a primeira tabela] e com expoente diferente?
Gl: [iniciou a escrita enquanto referia em voz alta]: Para multiplicar duas potências com igual base e expoente diferente deixamos a mesma base [a professora interrompeu]
P: mantemos a base
Gl [apagou] manténs a base e somo os expoentes.

Figura 4.105 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Regras operatórias das potências*

Os alunos começaram por observar a igualdade – *as últimas colunas são iguais* – e, interpretando os dados preenchidos – *a multiplicação das potências é igual a uma potência*, transmitiram que o resultado do produto de duas potências originaria uma potência cujos expoentes seriam a soma dos expoentes das duas potências. Como tal, verificamos que a manifestação da ação epistémica *Reconhecer* foi essencial para que a *Construção* se verificasse.

Contudo, verificando-se ambiguidade na expressão da nova construção, os alunos foram incentivados a melhorarem a resposta apresentada por comparação com os dados e respostas apresentadas nas primeira e quarta tabelas. O paralelismo estabelecido entre as duas tabelas e a integração dos elementos de uma potência, base e expoente – *Reorganização* dos dados – proporcionaram, então, a *Generalização* que foi expressa oralmente e por escrito – *Comunicação*.

A figura que se segue apresenta as construções respeitantes às diferentes tabelas. Destaca-se o facto de, na expressão escrita das novas construções, os alunos não terem apresentado linguagem simbólica.

Para multiplicar as potências com igual base e expoente diferente mantém a base e soma os expoentes	Para multiplicar duas potências com igual expoente e base diferente multiplicam-se a base e elevam-se os expoentes
Para dividir duas potências com igual base e diferentes expoente mantém a base e subtrai os expoentes	Para dividir duas potências com igual expoente e base diferente divide-se as bases e elevam os expoentes

Figura 4.106 - RA respeitantes ao desenvolvimento da Construção em Regras operatórias das potências

Os alunos tiveram, no entanto, dificuldade em expressarem a regularidade observada na terceira tabela, respeitante ao cálculo de uma potência de potência, tal como se poderá observar no diálogo que se segue:

P: Concluíram? [virou a folha] Então e esta conclusão, não conseguiram? [referia-se à terceira tabela]
 LP: É estranha!
 P: Há regularidade na tabela?
 LP e GI [em simultâneo]: sim
 P: onde?
 LP [apontou para as duas últimas colunas]
 P: O que é isto?
 GI: Ah, uma potência de uma potência.
 LP [iniciou a escrita]: *Para calcular a potência de uma potência...*
 GI: mantém a base
 LP [continuou a escrita] mantenho a base e multiplico os expoentes.

Figura 4.107 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras operatórias das potências

A apresentação da potência $(a^n)^m$, em linguagem simbólica, causou ainda maior estranheza aos alunos. A dificuldade pareceu estar associada à linguagem simbólica presente na igualdade, sendo que a identificação da potência de potência desencadeou a expressão oral e escrita da construção. No entanto, a mediação estabelecida pela professora, como se poderá constatar em secção posterior a esta, contribuiu para que os alunos generalizassem a regularidade observada.

Como calcular a potência de uma potência mantendo a base e multiplicando expoentes

Leia-se: “Para calcular a potência de uma potência mantenho a base e multiplico os expoentes”.

Figura 4.108 – RA respeitantes ao desenvolvimento da Construção em Regras operatórias das potências

A figura que se segue expressa de que forma se desenvolveu a *Construção* e como se relacionaram as subcategorias *Reorganização* (Ro), *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm).

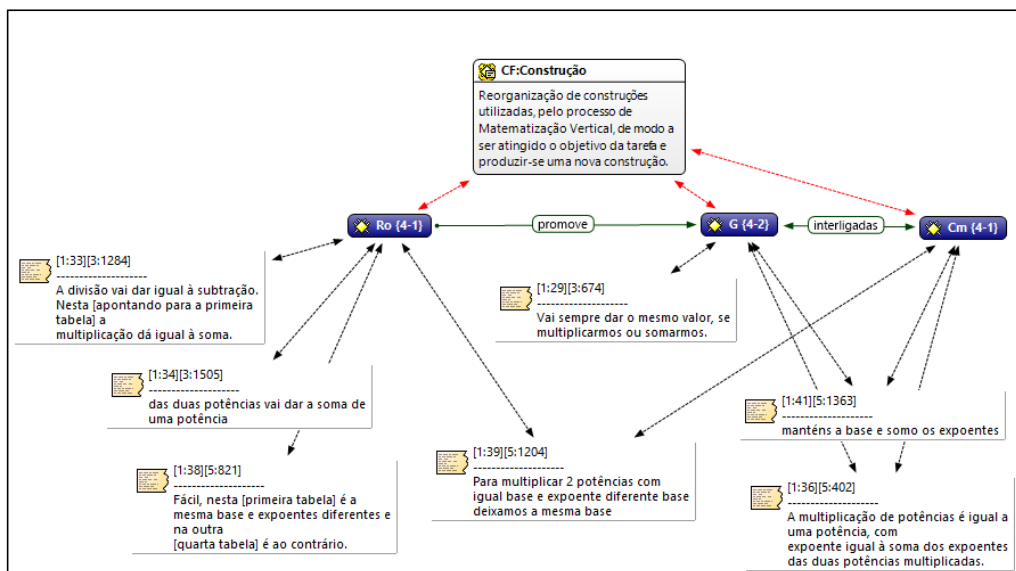


Figura 4.109 – RAV da ação epistémica *Construção* em Regras operatórias das potências

A ação epistémica *Construção* (C) evidenciou-se quando os alunos *Reorganizaram* (Ro) resultados e ideias, comparando as soluções apresentadas nas diferentes tabelas [1:33] [1:38] e as regularidades identificadas [1:34] [1:39] de modo a *Generalizarem* (G) essa regularidade a qualquer valor numérico a , b (bases) e n , m (expoentes). Verificou-se que a *generalização* da regularidade observada evoluiu, evidenciando-se nesta subcategoria a *Reorganização* (Ro) de ideias que permitiram aperfeiçoar a regra identificada [1:29] [1:36] [1:41]. A *generalização* das propriedades das regras operatórias resultou da *comunicação* de ideias que foram sendo aperfeiçoadas, pelo que consideramos que as subcategorias *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm) mantiveram-se interligadas durante o desenvolvimento da ação *Construção* (C).

A tabela que se segue sintetiza os aspetos, relacionados com a *Construção*, visíveis no desenvolvimento da tarefa *Regras operatórias das potências*:

Tabela 4.26 – Síntese da ação epistémica *Construção em Regras operatórias das potências*

Categoria: <i>Construção (C)</i>		
Subcategorias	Reorganização (Ro)	• Compararam as tabelas preenchidas e os conceitos integrados, reorganizando toda informação recolhida, no sentido de aperfeiçoar a regra operatória apresentada.
	Generalização (G)	• Generalizaram as igualdades identificadas, estabelecendo regras que se aplicam a qualquer valor atribuído à base e ao expoente.
	Comunicação (Cm)	• Expressaram em linguagem natural a nova construção.

Síntese. A ação epistémica *Construção* evidenciou-se com o desenvolvimento da subcategoria *Reorganização*, a qual promoveu a *Generalização* e, esta última, a *Comunicação* das regularidades observadas. Destaca-se o papel da *Reorganização* no desenvolvimento da nova *Construção*, considerando-se que esse processo foi fundamental para se conceber a *Generalização*, para se tomar consciência dela e para aperfeiçoar a sua expressão escrita, a *Comunicação*.

4.5.4 *Consolidação*

A *Consolidação* evidenciou-se quando os alunos se depararam com a presença de linguagem simbólica, porém essa constatação não surgiu de imediato, como revela o diálogo que se segue:

P: Tens aí uma potência, uma potência de base... digam lá... [esperou que os alunos completassem a frase].
 LP: Não tem!
 P: [não respondeu de imediato, mas como os alunos não se manifestavam]: Tem base tem, estou a vê-la!
 LP: Não tem números... só tem a letra a . [...]
 GI: Temos este... [apontando para n da potência]
 P: E quem é esse?
 GI: É também um número que não conhecemos!
 P: Sim, pois! Mas, considerando uma potência de base a , quem representa n ?
 GI e LP [em simultâneo]: O expoente!

Figura 4.110 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras operatórias das potências (GI, LP, P)

O registo apresentado anteriormente revela que os alunos não atribuíram, de imediato, significado à expressão algébrica a^n , pois essa evidenciava linguagem simbólica. Contrariamente ao que se tinha verificado na resolução das tarefas anteriores, os alunos não mostraram autonomia perante a nova abordagem, solicitando a ajuda da professora. O diálogo estabelecido com a professora veio a revelar que o significado de número desconhecido e sua representação, adquiridos através da resolução das tarefas anteriores, não tinha sido selecionado pelos alunos pelo facto de a linguagem simbólica apresentar, neste contexto, um formato diferente da habitual. Considera-se que a *Aplicação de uma construção recente* – interpretação de linguagem simbólica – não ocorreu com autonomia, pois a representação a^n apresenta-se, aos alunos, com uma

estrutura diferente da habitual. Contudo, a mediação auxiliou os alunos no processo de compreensão e, como tal, na atribuição de semelhanças com as construções já concebidas – *Aplicação de uma construção recente*.

Com a percepção do significado atribuído à representação simbólica de potência, os alunos iniciaram o processo de construção, evidenciando maior autonomia e naturalidade face à presença de linguagem simbólica – *Características psicológicas*.

A figura que se segue transmite a interligação verificada entre as subcategorias *Aplicação de uma construção recente* (AC) e *Características psicológicas* (CP), observada durante a ação *Consolidação*, reportando-se às respostas recolhidas através do suporte audiovisual.

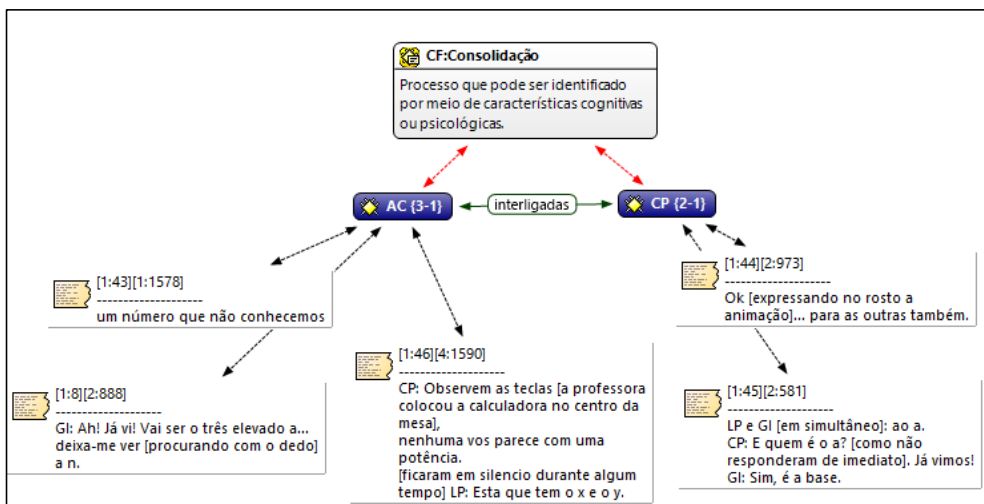


Figura 4.111 – RAV da análise da ação epistêmica *Consolidação* em Regras operatórias das potências

A figura 4.11 transmite que a ação *Consolidação* (Co) evidenciou-se com a interpretação e utilização autónoma de linguagem simbólica, quando os alunos reconheceram que as letras representavam números desconhecidos [1:43] e que esses poderiam ser, sequencialmente, substituídas por valores numéricos apresentados na tabela [1:8]. Ocorreu ainda quando, ao explorarem a calculadora, evidenciaram percepção da representação de uma potência constituída por valores indeterminados [1:46]. Essas evidências estão associadas à aplicação de construções recentes (AC). Associada à *Aplicação de construções recentes* (AC), identificaram-se *Características psicológicas* (CP) que se manifestaram através do interesse e do empenho demonstrados na procura do novo conhecimento matemático [1:44], bem como na autonomia e flexibilidade com que representaram as suas ideias [1:45].

Acrescenta-se, uma vez mais, que a ação *Consolidação* surgiu associada à ação epistêmica *Reconhecer*, durante a fase *Construir*, revelando-se essencial para a nova *Construção*.

Tabela 4.27 – Síntese da ação epistêmica *Consolidação* em Regras operatórias das potências

Categoria: <i>Consolidação</i> (Co)		
Subcategorias	Aplicação de uma construção recente (AC)	• Reconheceram a representação simbólica utilizada para número desconhecido.
	Características psicológicas (CP)	• Revelaram naturalidade e autonomia na utilização de linguagem simbólica, bem como interesse e empenho em alcançar a nova <i>Construção</i> .

Síntese. Verificou-se, uma vez mais, que a *Consolidação* manifestou-se através das subcategorias *Aplicação de uma construção recente* e *Características psicológicas*, as quais se mantiveram interligadas durante o respetivo desenvolvimento. Acrescenta-se que a *Consolidação* voltou, também, a manifestar-se durante a ação epistêmica *Construir*, interligada a *Reconhecer*, revelando-se essencial para a nova *Construção*. Nesta situação particular, considera-se que a *Consolidação*, para além de se ter manifestado através da interpretação e utilização de linguagem simbólica, esteve igualmente associada à maior facilidade manifestada pelos alunos na compreensão e na utilização de dados representados na forma tabelar.

A figura seguinte esquematiza as relações estabelecidas entre as ações epistêmicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co), sintetizando características relevantes, descritas durante a apresentação dos resultados:

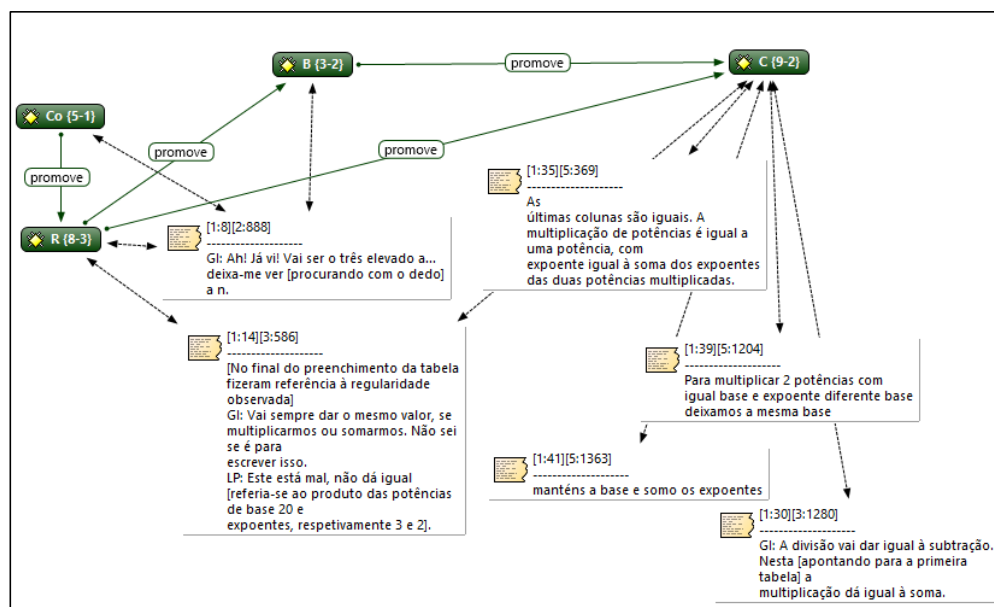


Figura 4.112 – Síntese da relação manifestada pelas ações epistêmicas em Regras operatórias das potências

A figura 4.112 revela a presença das categorias *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co) na construção do novo conhecimento. A *Consolidação* (Co) resultou da leitura dos dados representados na forma tabelar e, em particular, da interpretação da linguagem simbólica [1:8]. Como tal, a ação epistêmica *Consolidação* (Co) surgiu durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*

(R), com quem se manteve interligada enquanto foi necessária. Destaca-se o facto de a *Consolidação* reconhecida, ter sido mobilizada para o preenchimento das tabelas, de modo que o significado atribuído às letras, apresentadas de forma isolada, estendeu-se à representação simbólica a^n . Constatou-se, ainda, que o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* (R), através da interpretação, observação de regularidades e da seleção de conceitos adquiridos [1:14] promoveu o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* (B). Por sua vez, o desenvolvimento do raciocínio estabelecido pelos alunos favoreceu a interpretação dos dados [1:14], conduziu-os à observação de regularidades e à *Construção* pretendida: [1:30] [1:35] [1:39] [1:41].

Síntese. Verifica-se que, à semelhança das tarefas anteriores, o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* promoveu o desenvolvimento da ação *Construir* e que esta última promoveu a *Construção* do novo conhecimento. Constatou-se, ainda, que a *Consolidação* voltou a surgir interligada à ação *Reconhecer*, manifestando-se durante o seu desenvolvimento. Realça-se, no entanto, o facto de a *Consolidação* aplicada ter beneficiado do significado atribuído pelos alunos à representação da potência em linguagem simbólica. Destaca-se ainda que, ao contribuir para o desenvolvimento da ação *Construir*, a *Consolidação* exerceu também influência na nova *Construção*.

4.5.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Professor.

A mediação estabelecida entre professora e alunos verificou-se em diferentes momentos do desenvolvimento da tarefa. Os diálogos que se seguem transmitem essas fases:

A professora comunicou que os alunos iriam desenvolver uma tarefa relacionada com a aprendizagem das potências e distribuiu pelos alunos, sem apresentar, essa tarefa. Informou que para a realizarem poderiam utilizar calculadora. [...]
P: Já compreenderam... então iniciem a resolução... utilizem a calculadora.
[Os alunos iniciaram o preenchimento da tabela] [...]
P: [Entretanto LP colocava na máquina de calcular $20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20$ e a professora interrompeu de imediato]: Estás a ter imenso trabalho, será necessário?
LP: São três vintes daqui e dois vintes do expoente dois... são cinco vintes... foi o que fiz.
P: Certo! Mas já tinham nas colunas anteriores esses valores [apontando para as potências] era só calcular esse produto. [...]
P: Estás a ter imenso trabalho a determinar o valor da potência. Não terás outra opção?
LP: Só estou a colocar quatro vezes. É sete elevado a quatro!
P: Será que esta calculadora não te permite fazer esse cálculo mais rápido. Imagina que o expoente era 100, repetia-as o número sete cem vezes?! [...]
LP: Não sei!
P: Observem as teclas [a professora colocou a calculadora no centro da mesa], nenhuma vos parece com uma potência.
[ficaram em silêncio durante algum tempo] LP: Esta que tem o x e o y .
P: Então utiliza essa tecla.

Figura 4.113 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras operatórias das potências (LP, P)

O diálogo da figura anterior evidencia o papel da professora na utilização de artefactos, tais como a tarefa, as tabelas e a calculadora, para produzirem novos significados. Considera-se estar na presença da subcategoria *Incentivo à utilização de artefactos* que, ao serem explorados pelos alunos, promoveram o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. A professora, através da resolução da tarefa, incentivou a exploração das tabelas que, ao serem interpretadas pelos alunos – *Reconhecer* – desencadearam a integração de conceitos e procedimentos adquiridos, em particular a interpretação de linguagem simbólica, o conceito de potência e o cálculo – *Reconhecer* e *Consolidação* – que, ao serem aplicados, conduziram os alunos à apresentação de soluções intermédias – *Construir* – e, posteriormente, à nova *Construção*.

Alguns dos episódios que se seguem transmitem, com maior clareza, a mediação estabelecida pelo professor e a sua influência no desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Construção*.

P: Parece-me que a dificuldade está na leitura da tabela, não? Olhem para esta coluna, surgem vários números, certo? Correspondem a quem? A que letra?
 LP e GI [em simultâneo]: ao a .
 P: E quem é o a ? [como não responderam de imediato]. Já vimos!
 GI: Sim, é a base.
 P: Seguindo esta linha [percorreu o lápis da célula onde constava o número 3 até à célula em branco, respeitante à potência de base a e expoente n], qual é a base desta potência?
 GI: Ah! Já vi! Vai ser o três elevado a... deixa-me ver [procurando com o dedo] a n . Ok [expressando no rosto a animação]... para as outras também. Mas para que é a coluna do m ?
 P: Vejam com atenção se também não será preciso.
 LP,GI [em simultâneo]: para este... aqui [apontando para a potência de base a e expoente m].
 GI: Também aparece nestes [apontando para as colunas seguintes].
 P: Já compreenderam... então iniciem a resolução...

Figura 4.114 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras operatórias das potências

A mediação estabelecida transmite que a atuação da professora foi indispensável para que os alunos não desistissem da tarefa, para que adquirissem compreensão acerca do conteúdo da tarefa, interesse, empenho e correção no preenchimento das tabelas.

P: Estão a preencher, em primeiro lugar, a linha [apontou].
 LP: Sim, é mais fácil... estas colunas são sempre iguais.
 P: O que significará essa igualdade?
 GI: A divisão vai dar igual à subtração. Nesta [apontando para a primeira tabela] a multiplicação dá igual à soma.
 P: Têm que ser um pouco mais claros! A multiplicação de quem? [apontou para a primeira tarefa].
 GI: Das duas potências vai dar a soma de uma potência.
 P: Ainda têm que melhorar essa explicação. Multiplicamos as potências, certo, mas somamos o quê?!
 LP: Os expoentes das potências.
 P: Vamos então construir uma regra que explique a regularidade observada na primeira tarefa...

Figura 4.115 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras operatórias das potências (GI, LP, P)

Através do diálogo anterior, verificamos que a professora incentivou os alunos a identificarem a regularidade presente nas tabelas – *Reconhecer* – e a exprimirem com maior clareza e rigor a regularidade identificada – *Construir*. Ainda assim, na exposição escrita da regra proferida oralmente, os alunos não mostraram a clareza pretendida, pelo que a atuação da professora voltou a revelar-se significativa na construção do novo conhecimento matemático, tal como se pode verificar no diálogo que se segue:

P: Deixem ver o que já fizeram [voltou a página e começou a ler em voz alta] *As últimas colunas são iguais. O produto de potências é igual a uma potência, com expoente igual à soma dos expoentes das duas potências multiplicadas.* [fez-se silêncio]. Mas olhem para esta tabela [referia-se à quarta tabela] também é o produto de duas potências e o resultado não inclui a soma dos expoentes. [fez-se silêncio] Vejam as diferenças entre as duas tabelas [esperou enquanto os alunos analisavam as duas tabelas]
G1: Fácil, nesta [primeira tabela] é a mesma base e expoentes diferentes e na outra [quarta tabela] é ao contrário.
P: Então a vossa conclusão tem que transmitir essas diferenças, ou seja, o que podemos fazer para multiplicarmos duas potências com a mesma base [apontando para a primeira tabela] e com expoente diferente?
G1: [iniciou a escrita enquanto referia em voz alta]: Para multiplicar 2 potências com igual base e expoente diferente deixamos a mesma base [a professora interrompeu]
P: mantemos a base
G1 [apagou] manténs a base e somas os expoentes.

Figura 4.116 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras Operatórias das potências (G1, LP, P)

O diálogo apresentado na figura 4.116 transmite que a professora incentivou os alunos a compararem a sua resposta com a regularidade observada na quarta tabela, incentivando-os a analisar as diferenças existentes e a escreverem com maior rigor a regra identificada. Ao direcionar a atenção dos alunos para aspetos mais pertinentes, a professora *Incentivou a construção de signos matemáticos*, designadamente a compreensão dos signos presentes nas regularidades e a *Comunicação* da nova *Construção*, em linguagem formal. Incentivou, sobretudo, a exploração das potencialidades semióticas presentes nas tabelas e a construção de signos matemáticos, através das contribuições dos alunos.

O seu desempenho foi relevante na elaboração da tarefa, mas também na sua condução, designadamente quando direcionou a atenção dos alunos para as regularidades presentes em determinada tabela e entre tabelas – *Reconhecer* – para aspetos relacionados com o uso da calculadora – artefacto – quando solicitou a revisão das produções escritas e incentivou a apresentação, em linguagem matemática rigorosa, a nova *Construção* – *Incentivo à construção de signos matemáticos*.

A figura que se segue transmite de que forma e como estiveram interligadas as subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA) e *Incentivo à construção de signos matemáticos* (ICS), durante a mediação estabelecida pela professora:

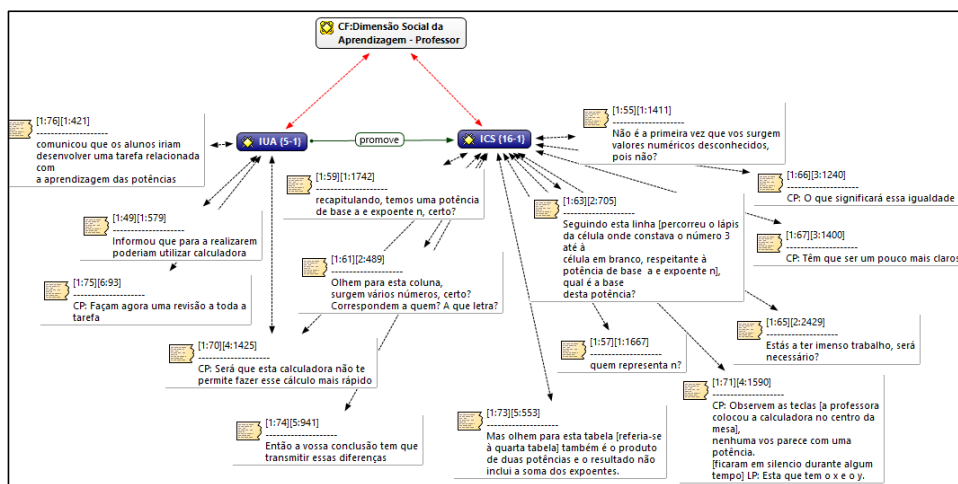


Figura 4.117 – RAV da análise da DSA, Professor, em Regras operatórias das potências

A professora fez uma breve apresentação da tarefa que os alunos iriam desenvolver, referindo estar associada a conteúdos que esses já haviam aprendido [1:76], incentivando-os à respetiva resolução. O incentivo à exploração da tarefa voltou a verificar-se quando a professora solicitou, da parte dos alunos, a revisão [1:75], verificando-se, igualmente, o *Incentivo à utilização de outros artefactos* (IUA), tais como a calculadora [1:49] [1:70]. A interação estabelecida entre alunos e artefactos, bem como o questionamento e o direcionamento para determinados aspetos presentes nos artefactos utilizados, visando a sua exploração máxima, contribuíram para o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas. A professora teve um papel importante quando incentivou o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, designadamente, a interpretação dos dados e o reconhecimento de estruturas adquiridas anteriormente como necessárias à nova construção [1:55] [1:63] [1:59], quando direcionou a atenção dos alunos para aspetos importantes ao desenvolvimento da construção [1:61] [1:70] [1:71], questionou no sentido da produção de signos matemáticos [1:55] [1:57] [1:65] [1:66] e solicitou a revisão [1:73], o aperfeiçoamento e a síntese das respostas apresentadas [1:67] [1:73] e [1:74]. A tabela que se segue sintetiza as contribuições dadas para o desenvolvimento da nova construção, resultantes da mediação estabelecida entre *Professora* (P) e alunos.

Tabela 4.28 – Síntese da análise da DSA, Professor, em Regras operatórias das potências

Categoria: Professor (P)		
Subcategorias	Incentivo à utilização de artefactos (IUA)	<ul style="list-style-type: none"> Incentivou a exploração da tarefa; Incentivou a exploração das potencialidades das tabelas; Incentivou a exploração das potencialidades da máquina de calcular.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)	<ul style="list-style-type: none"> Promoveu o reconhecimento, a integração e reorganização de conhecimentos adquiridos previamente, tais como os conceitos de potência, base e expoente, visando a produção de novos signos matemáticos e a construção do novo conhecimento.

Síntese. A mediação estabelecida pela professora foi significativa na elaboração da tarefa e no acompanhamento dos alunos durante a sua resolução. Realça-se o incentivo à utilização da tarefa, à interpretação dos dados enunciados nas tabelas e à seleção de estruturas adquiridas que favoreceram o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação*. Incentivou, ainda, o preenchimento e exploração das potencialidades das tabelas, permitindo a utilização de calculadora que também contribuiu para o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. Através da observação das regularidades presentes nas tabelas, incentivou a reorganização de dados e ideias, conduzindo os alunos à nova *Construção*. Constata-se ainda maior preocupação, por parte da professora, em incentivar os alunos a expressarem a nova *Construção* com maior rigor, ou seja, a aperfeiçoarem a *Construção* obtida.

Face ao exposto, considera-se que a mediação estabelecida entre professora e alunos foi essencial para a construção do novo conhecimento, tendo-se verificado ao longo da tarefa. O incentivo à utilização de artefactos e a sua exploração foi essencial para a construção de signos matemáticos.

4.5.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Alunos.

A figura que se segue procura transmitir de que forma a comunicação e partilha verificada entre alunos, durante a resolução da tarefa, contribuíram para o desenvolvimento das ações epistémicas e, em particular, para a produção de signos individuais e coletivos.

Os alunos deram início à resolução da tarefa, envolvendo-se mutuamente na leitura do enunciado e das tabelas. [...]
GI: Então, aqui fica 3, e expoente 4 [escreveu na forma de potência] que é igual a 3, vezes 3, vezes 3, vezes 3 [proferia enquanto escrevia $3 \times 3 \times 3 \times 3$] que é nove vezes nove que é oitenta e um [escreveu = 81]. [LP acompanhava, em silêncio, o raciocínio de GI]. Esta é 10 na base e 5 no expoente... repete-se cinco vezes.
LP: Dá 10 mil [GI iniciou a escrita] falta mais um zero [corrigiu o erro].
GI: Aqui é 11 e 2... onze ao quadrado... onze vezes onze
LP [pegou de imediato na máquina e fez o cálculo 11×11]. 121 é 121. [GI escreveu] [...]
GI: Vai sempre dar o mesmo valor, se multiplicarmos ou somarmos. Não sei se é para escrever isso.
LP: Este está mal, não dá igual [referia-se ao produto das potências de base 20 e expoentes, respetivamente 3 e 2].
[GI riscou o último zero]

Figura 4.118 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Regras Operatórias das potências (GI,LP)

O diálogo da figura 4.118 transmite o envolvimento dos alunos durante a leitura e interpretação dos dados enunciados e, em particular, da informação contida na tabela,

selecionando conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, evidenciando, igualmente, o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*.

A mediação estabelecida entre alunos revelou-se essencial para o desenvolvimento do processo de abstração, o qual se traduziu na combinação de construções reconhecidas e na obtenção de soluções intermédias, bem como na generalização das regularidades observadas. O desenvolvimento da ação epistêmica *Construir* ocorreu, como tal, através da produção de signos coletivos.

A figura seguinte apresenta excertos que foram selecionados para exemplificar de que forma a mediação se manifestou e contribuiu para a construção do novo conhecimento matemático:

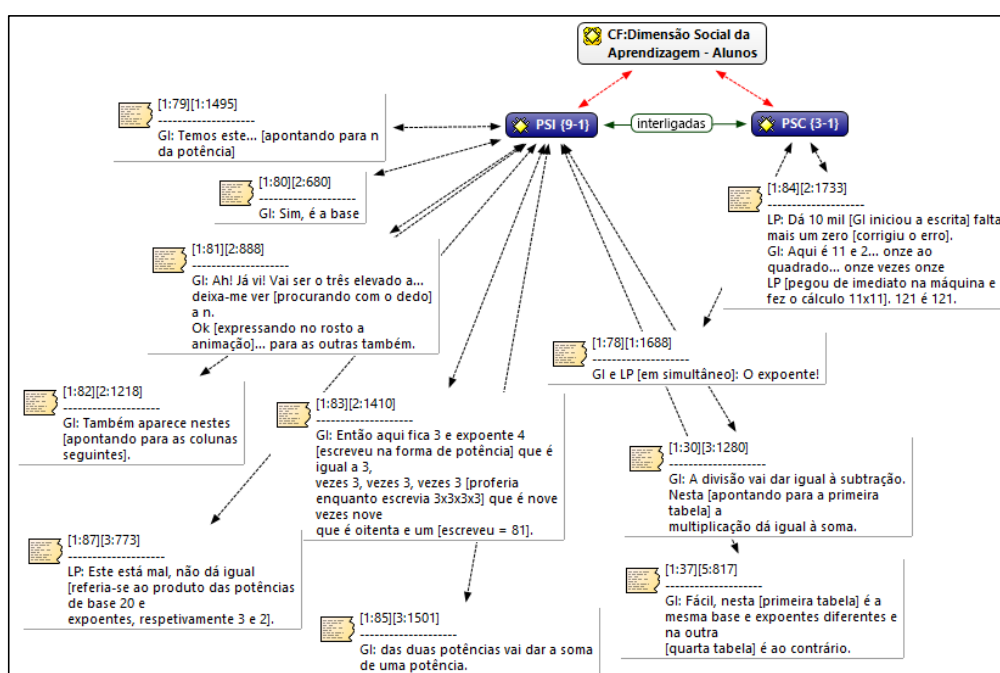


Figura 4.119 – RAV da análise da DSA, Alunos, em Regras operatórias das potências

A figura 4.119 evidencia de que forma a mediação estabelecida entre alunos contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio e formulação de respostas. Verifica-se que os alunos envolveram-se na atividade proposta pelo professor, produzindo signos individuais e coletivos. A *Produção de signos individuais* (PSI) verificou-se, sobretudo, durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*, quando interpretaram linguagem simbólica [1:79] [1:81], identificaram a base [1:80], o expoente [1:78] da potência e interpretaram as tabelas [1:82]. A produção de signos individuais e coletivos, visíveis na comunicação estabelecida, transmite o desenvolvimento da ação *Construir* (B) através da apresentação de soluções intermédias [1:83] e da conferência dos resultados apresentados [1:87]. Os alunos interagiram entre si [1:84], produzindo signos coletivos que contribuíram para o desenvolvimento da nova *Construção*. O desenvolvimento da ação epistêmica *Construção* esteve presente durante a *Produção*

de *signos individuais* (PSI), através das contribuições dadas por GI [1:30] [1:37] [1:85] na identificação de regularidades, mas que foram partilhadas e reorganizadas por ambos, no sentido da nova construção, *Produção de signos individuais* (PSI). As subcategorias *Produção de signos individuais* (PSI) e *Produção de signos coletivos* mantiveram-se, como tal, interligadas durante a construção do novo conhecimento matemático (PSC).

Tabela 4.29 – Síntese da análise da DSA, Alunos, em Regras operatórias das potências

Categoria: Alunos (A)		
Subcategorias	Produção de signos individuais (PSI)	<ul style="list-style-type: none"> Interpretaram os dados enunciados e, em particular, os constantes nas tabelas; Integraram conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores; Obtiveram soluções e validaram resultados.
	Produção de signos coletivos (PSC)	<ul style="list-style-type: none"> Interagiram entre si, integrando conhecimentos, explorando as potencialidades das tabelas, apresentando soluções e expressando a generalidade da nova <i>Construção</i>.

Síntese. Na resolução desta tarefa a comunicação e a partilha entre alunos revelou-se essencial para o desenvolvimento do novo conhecimento matemático. As subcategorias *Produção de signos individuais* e *coletivos* ocorreram interligadas durante a resolução da tarefa e contribuíram para o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas. Verificou-se que, apesar das contribuições individuais que um dos alunos possa ter dado, o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas beneficiou da *Produção de signos coletivos*. A figura que se segue procura transmitir de que forma a partilha e a comunicação entre alunos, bem como a mediação estabelecida pela professora, contribuíram para a construção do novo conhecimento matemático e, em particular, para o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e da *Consolidação* (Co).

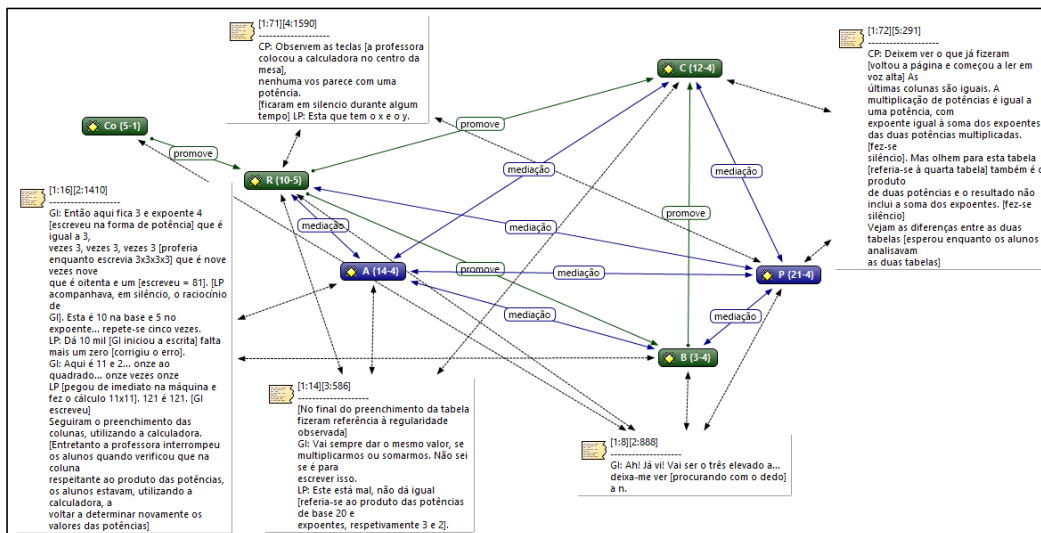


Figura 4.120 – Relação estabelecida entre RBC+C e DSA em Regras Operatórias das Potências

A figura 4.120 exemplifica alguns momentos em que as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C) estiveram relacionadas com a mediação estabelecida entre *Alunos* (A) e *Professor* (P). Essa mediação proporcionou o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* (R) transmitida, nesta situação, pelo incentivo à exploração de artefactos (máquina de calcular) e à produção de signos [1:71]. O desenvolvimento da ação epistémica *Construir* (B) foi, também, influenciada pela mediação estabelecida pela professora [1:8], a qual contribuiu para uma interpretação correta da tabela e, posteriormente, para a apresentação de soluções por parte dos alunos. A influência do professor no processo de *Construção* (C) foi, igualmente, significativa, uma vez que incentivou a observação de regularidades e diferenças, a exposição de raciocínios e o rigor na apresentação das respostas [1:72]. A mediação estabelecida entre alunos contribuiu, também, para o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* (R), presente na interpretação das tabelas e na observação de *Regularidades* [1:14], bem como para o preenchimento correto das tabelas [1:16], tornando visível a ação epistémica *Construir* (B).

Síntese. A mediação estabelecida entre alunos, e entre professora e alunos, revelou-se essencial para o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo *RBC+C*. A mediação estabelecida pela professora contribuiu para o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, promovendo o desenvolvimento autónomo da ação epistémica *Construir* (B). Essa mediação foi, igualmente, significativa no processo de generalização da regularidade observada, contribuindo para a expressão da nova *Construção* (C), em linguagem simbólica.

4.6 Tarefa 6 - O Aniversário da Margarida

Com a implementação desta tarefa pretende-se que os alunos trabalhem as relações associadas à proporcionalidade direta, desenvolvendo o raciocínio proporcional, e que representem simbolicamente situações matemáticas. Para tal, os alunos necessitam de compreender a situação matemática exposta, interpretar a informação presente nas tabelas, identificar relações de natureza multiplicativa, aplicar competências matemáticas adquiridas, tais como o cálculo e a interpretação de linguagem simbólica, bem como organizar os dados preenchidos, compreender como as ideias matemáticas se interrelacionam, questionar, partilhar ideias e generalizar as propriedades observadas.

4.6.1 Reconhecer

O desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* ocorreu com a leitura dos enunciados e das tabelas, bem como na situação que, seguidamente, se expõe:

[Os alunos deram início à tarefa, lendo novamente o enunciado]
LP: Ok... é para preencher a tabela, também diz aqui que estão os ingredientes na tabela [circundou, com o dedo, essa informação no enunciado]. Escreves tu?!
[GI voltou a tarefa para si e pegou no lápis]
GI: Para um *popcake* tens 50g, de utilizar 50g de massa e 20 de leite condensado [LP rodou um pouco a tarefa para acompanhar o raciocínio do colega].
LP: ... 45g de chocolate e depois só os *confettis* e um palito.
GI: Aqui... olha... é só multiplicar por dez, é para dez palitos. [iniciou a escrita] é só acrescentar um zero... quinhentas gramas, duzentas... gramas [escreveu 450g], quatrocentas e depois cento e vinte e dez, claro [escreveu].
LP: Agora para 15 *confettis* [GI interrompeu-o]

Figura 4.121 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

A ação *Reconhecer* evidenciou-se, como se pode verificar através do diálogo anterior, durante a leitura do enunciado da tarefa e com a comunicação estabelecida entre alunos. A *Interpretação* do enunciado permitiu que compreendessem a necessidade de preencherem as tabelas e que adquirissem percepção das *Estruturas adquiridas* a selecionar, tais como a estrutura multiplicativa, estratégias de cálculo – é só acrescentar um zero... fez o cálculo vertical numa folha de rascunho – e a utilização de artefactos: *podemos usar a calculadora*.

LP: Agora para n *popcakes*... é fazer o mesmo.
GI [acompanhando com agilidade o raciocínio do colega]: Aqui é o número de *popcakes* vezes 50 [...]
LP: mais... [ajeitando a tarefa para conseguir efetuar a leitura das questões seguintes]
LP: Ajuda a Margarida... [iniciou a leitura das questões que se seguiram ao preenchimento das tabelas] já preenchemos! Quantos *popcakes* é possível confeccionar com 1kg de massa? [efetuou, em voz alta, a leitura da questão seguinte]
[apontava agora para a tabela] Para 1 necessitamos de 50g, com 100g fazemos 2, temos 1kg de massa [começou a escrever na folha de rascunho]: hectograma, decagrama, grama [...]
GI: [analisando a tabela para identificar a relação entre *popcakes* e ingredientes]: estão a aumentar [seguia com o dedo a linha correspondente à quantidade de massa *popcakes*]

Figura 4.122 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

O diálogo presente na figura 4.122 volta a evidenciar a *Interpretação* e seleção de *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores, no desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. A leitura do enunciado foi acompanhada por comentários tecidos pelos alunos, permitindo verificar a interpretação e o relacionamento de ideias. Os alunos efetuaram, naturalmente, a leitura da letra n presente nas tabelas, de modo que a presença de linguagem simbólica não parece ter causado estranheza aos alunos. Tratou-se do reconhecimento de uma *Estrutura adquirida* com a resolução das tarefas

anteriores. Os alunos selecionaram, também, o conhecimento adquirido no âmbito das conversões de unidades, considerando-se que essa seleção foi imprescindível para o preenchimento correto da tabela.

Relativamente à interpretação de linguagem simbólica voltou a observou-se agilidade aquando da necessidade de apresentarem uma expressão algébrica, que indicasse o número de convidados que confirmaram a sua presença na festa de aniversário – *um quarto não... é como os n popcakes [apontou para a tabela] é o número de convidados a dividir por 4*. Nesta situação verificou-se, tal como em tarefas anteriores, a percepção do significado atribuído à quarta parte e a relação parte-todo, sendo n o todo e a quarta parte.

A *Interpretação* dos enunciados e tabelas continuou a revelar-se significativa no desenvolvimento da ação *Reconhecer*, como também no desenvolvimento das restantes subcategorias.

GI: Agora é a razão, temos o exemplo, vamos dividir [fez-se silêncio enquanto analisava a tabela] o 500 por 10.
LP: Também tens aqui [apontando para *quantidade do ingrediente ÷ número de popcakes*] ... dá 50 [GI escreveu].
GI: Agora 750 a dividir por 15 [LP efetuou de imediato o cálculo com a calculadora].
LP: 50 [comunicou de imediato o resultado, enquanto digitava $1350 \div 27$] Hum! Dará o mesmo?! Sim... 50! [GI escreveu].
GI: Há regularidade?
GI e LP: Dá sempre 50!
GI: Temos que explicar! Podemos dizer que ao dividir dá sempre 50.
LP: A razão dá sempre 50 para qualquer cálculo.

Figura 4.123 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

Ao efetuarem a leitura do enunciado e da tabela, os alunos compreenderam o significado atribuído à razão, associando-o à divisão. A utilização do conceito razão, que se verificou correto, permitiu que verificassem a existência de regularidades nos cálculos apresentados. A subcategoria *Regularidades* emerge, como tal, da *Interpretação* dos enunciados e tabelas e da seleção de *Estruturas adquiridas*, tal como a divisão.

A figura que se segue exemplifica, apresentando pequenos excertos, como se desenvolveu a ação epistémica *Reconhecer*, que subcategorias se manifestaram e como se relacionaram entre si.

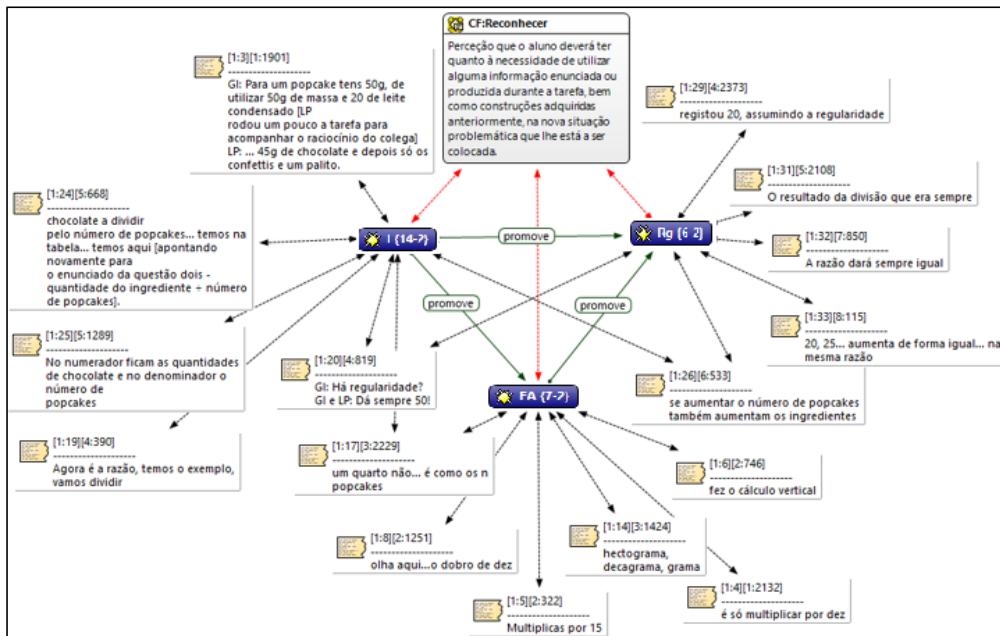


Figura 4.124 – RAV da análise da ação epistêmica Reconhecer em O aniversário da Margarida

A figura 4.124 evidencia que o desenvolvimento da ação epistêmica Reconhecer (R) manifestou-se através das subcategorias Interpretação (I), Estruturas adquiridas (EA) e Regularidades (Rg), as quais se relacionaram entre si.

A Interpretação (I) manifestou-se durante a leitura e análise dos enunciados das questões colocadas e dos dados presentes nas diferentes tabelas. A Interpretação (I) dos enunciados [1:3] promoveu a seleção de Estruturas adquiridas (EA) que conduziram os alunos à aplicação do cálculo numérico [1:6], dos conceitos parte-todo [1:17] e dobro [1:8], de equivalências, reduções [1:14] e do raciocínio multiplicativo [1:4] [1:5].

A Interpretação (I) dos dados preenchidos teve, ainda, consequências na identificação de Regularidades (Rg), relacionadas com o desenvolvimento da compreensão do conceito razão [1:31] [1:32] e, em particular, com a constância verificada na determinação do quociente existente entre a quantidade de ingredientes e o número de popcakes confeccionados [1:29] [1:33]. De igual forma, também a seleção de Estruturas adquiridas (EA), tais como a leitura de linguagem simbólica [1:17] e as soluções apresentadas permitiram observar regularidades nos dados apresentados: se aumentar o número de popcakes também aumentam os ingredientes [1:26].

A tabela que se segue sintetiza as características evidenciadas durante a resolução desta tarefa, compatíveis com o desenvolvimento da ação epistêmica Reconhecer (R) e que se manifestaram através das subcategorias Interpretação (I), Estruturas adquiridas (EA) e Regularidades (Rg).

Tabela 4.30 – Síntese da ação epistémica Reconhecer em O aniversário da Margarida

Categoria: Reconhecer (R)		
Subcategorias	Interpretação (I)	• Interpretaram os dados dos enunciados e das tabelas, compreendendo que procedimentos deveriam tomar para o seu preenchimento. Destaca-se a interpretação do conceito razão.
	Estruturas adquiridas (EA)	• Selecionaram conceitos e procedimentos, tais como reduções, operações, significado de quarta parte, interpretação de linguagem simbólica.
	Regularidade (Rg)	• Reconheceram a regularidade existente nas tabelas, verificando que a razão entre a quantidade de ingredientes e o número de <i>popcakes</i> era igual (constante).

Síntese. A ação *Reconhecer* esteve presente através das subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*. Verificou-se que a *Interpretação* do conteúdo presente nos enunciados e tabelas, bem como a seleção de *Estruturas adquiridas*, foram fundamentais para o preenchimento das tabelas e para a identificação de Regularidades. A *Interpretação* e a seleção de *Estruturas adquiridas* parecem ter evidenciado maior relevância na fase inicial do processo de abstração, fazendo emergir a subcategoria *Regularidades*, na fase final do desenvolvimento da ação *Reconhecer*, relacionada com a extensão do conhecimento aritmético à aprendizagem algébrica. Por sua vez, constatou-se que o desenvolvimento da subcategoria *Interpretação* também promoveu o desenvolvimento da subcategoria *Estruturas adquiridas*, ambas consideradas essenciais para o desenvolvimento do processo de abstração.

4.6.2 Construir

A interpretação do enunciado e da primeira tabela, bem como a integração de *Estruturas adquiridas*, tais como o cálculo, permitiram o desenvolvimento do raciocínio e a apresentação de soluções. O diálogo que se segue transmite essa situação:

<p>GI: Aqui... olha... é só multiplicar por dez, é para dez palitos. [iniciou a escrita] é só acrescentar um zero... quinhentas gramas, duzentas... gramas [escreveu 450g], quatrocentas e depois cento e vinte e dez, claro [escreveu] [...]</p> <p>GI: Multiplicas por 15...vezes 50g.</p> <p>LP: Podemos usar calculadora... ou fazes estes...500 [apontando] mais 5 <i>popcakes</i>, quer dizer 5 vezes as 50g. Temos 500 mais... vinte e cinco, duzentos e cinquenta dá 750g [...]</p> <p>GI: [Escreveu 300g] Temos aqui... temos que fazer 5 vezes 45... faz aí</p> <p>LP: [fez o cálculo vertical numa folha de rascunho...] 250 [...]</p> <p>GI: Agora é vezes vinte...o dobro de dez [apontando] Fácil! [...]</p> <p>LP: Agora para n <i>popcakes</i>... é fazer o mesmo.</p> <p>GI [acompanhando com agilidade o raciocínio do colega]: Aqui é o número de <i>popcakes</i> vezes 50 [escreveu $n \times 50$] aqui n vezes vinte [escreveu $n \times 20$], vezes 45 [escreveu $n \times 45$], 12... Quantos <i>popcakes</i> é possível confeccionar com 1kg de massa?</p> <p>[apontava agora para a tabela] Para 1 necessitamos de 50g, com 100g fazemos 2, temos 1kg de massa [começou a escrever...]: hectograma, decagrama, grama [...registou 000]: 1000g [...]</p> <p>LP: um quarto não... é como os n <i>popcakes</i> [apontou para a tabela] é ... a dividir por 4.</p> <p>GI: Posso escrever [iniciou a escrita $n \times \frac{1}{4}$] ou [continuou $= \frac{n}{4}$] [...]</p> <p>LP: Também tens aqui [apontando para <i>quantidade do ingrediente ÷ número de popcakes</i>] ... dá 50 [GI escreveu]</p>
--

Figura 4.125 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida (GI, LP)

De acordo com o diálogo anteriormente estabelecido, a ação epistémica *Construir* evidenciou-se através do diálogo estabelecido entre alunos, quando esses verbalizaram o seu raciocínio, o qual resultou da interpretação que fizeram dos enunciados e das tabelas analisadas, tomando decisões – *é só multiplicar por dez, podemos usar a calculadora, um quarto não... é o número de convidados a dividir por 4* – integrando construções adquiridas anteriormente – *é só acrescentar um zero, o dobro de dez, hectograma, decagrama, grama* – e aplicando *Estratégias* para facilitar o cálculo – *ou fazes estes... 500 mais... 5 vezes as 50 g* – fez o cálculo vertical numa folha de rascunho. O desenvolvimento da ação epistémica está, igualmente, presente na apresentação de *Soluções*, visíveis no preenchimento das tabelas e em alguns resultados apresentados: $n \times \frac{1}{4}$.

A *Justificação* dos raciocínios desenvolvidos está, igualmente, presente nos diálogos estabelecidos, nos resultados apresentados nas tabelas e em conclusões intermédias registadas.

Ingredientes quantidades	1 popcake	10 popcakes	15 popcakes	20 popcakes	25 popcakes	n popcakes
Massa de bolo	50 g	500g	750g	1000g	1250	$m \times 50$
Leite condensado	20 g	200g	300g	400	500	$m \times 20$
Chocolate	45 g	450g	675g	900	1125	$m \times 45$
Confettis	12	120	180	240	324	$m \times 12$
Palitos	1	10	15	20	25	$m \times 1$

Figura 4.126 – RA respeitantes ao desenvolvimento de *Construir* em O aniversário da Margarida

A figura 4.126 revela como os alunos preencheram a primeira tabela. As *Soluções* apresentadas resultaram, como já referido, da integração de construções reconhecidas: do cálculo numérico, sobretudo multiplicativo, da interpretação e da utilização de linguagem simbólica.

Quando aumenta o n.º de popcakes aumenta -se o n.º de ingredientes

Leia-se: Quando aumenta o n.º de popcakes aumenta-se o n.º de ingredientes

Figura 4.127 – RA respeitantes ao desenvolvimento de *Construir* em O aniversário da Margarida

A resposta à questão – *observa a variação existente entre o número de popcakes e a quantidade de ingredientes. O que podes concluir?* – teve, como resposta, a indicação de que as duas grandezas aumentam. Os alunos transmitiram que o aumento do número

de ingredientes é uma consequência do aumento do número de *popcakes*, resposta que os aproximou da situação de proporcionalidade direta.

Sim. Se multiplicarmos o número por outro e dividirmos o resultado por esse outro vai dar o número inicial. $30 \times 10 \div 10 = 30$

Leia-se: “Sim. Se multiplicarmos um número por outro e se dividirmos o resultado por esse outro vai dar o número inicial”

Figura 4.128 – RA respeitantes ao desenvolvimento de Construir em O aniversário da Margarida

O raciocínio proporcional está presente na resposta apresentada na figura 4.128, quando os alunos são incentivados a comentar a regularidade de uma das tabelas. Na explicação dada pelos alunos, embora de forma pouco clara, esses generalizaram a relação numérica observada, respeitante ao número de *popcakes* e à quantidade de massa de bolo. No diálogo que se segue, identificam-se a igualdade e as relações numéricas e operacional estabelecidas pelos alunos:

$$\begin{array}{c} \times 10 \\ \frac{1}{50} = \frac{10}{500} \quad \downarrow \times 10 \\ \leftarrow \div 10 \end{array}$$

$$\frac{\text{número inicial de popcakes}}{\text{quantidade necessária de ingredientes}} = \frac{\text{número pretendido de popcakes}}{\text{quantidade necessária de ingredientes}} \quad \downarrow \times n$$

$$\leftarrow \div n$$

Figura 4.129 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

As igualdades estabelecidas sugerem a presença da relação proporcional, no sentido em que, aumentando n vezes o número de *popcakes*, aumenta também n vezes o número de ingredientes necessários à confeção de *popcakes* com o mesmo sabor. De igual forma, a presença da divisão subentende que a diminuição do número de *popcakes* é acompanhada pela redução, em valor proporcional, da quantidade de ingredientes.

A solução que se segue resulta, igualmente, da análise de uma tabela na qual se pretendia que os alunos relacionassem o número de *popcakes* com a quantidade de chocolate, interpretando o significado atribuído à razão.

Significa que ao dividirmos a quantidade de chocolate pelo n.º de popcakes vai dar sempre 45.

Leia-se: Significa que ao dividirmos a quantidade de chocolate pelo n.º de popcakes vai dar sempre 45.

Figura 4.130 – RA respeitantes ao desenvolvimento de Construir em O aniversário da Margarida

Na figura 4.130, a relação de proporcionalidade direta surge através da percepção de que a razão – *se dividirmos* – entre a quantidade de chocolate e o número de popcakes é constante – *vai dar sempre 45*.

Acrescenta-se que a apresentação de *Soluções* e *Justificação* para os raciocínios desenvolvidos aproximaram os alunos da nova *Construção*, considerando-se que a reorganização de todos os resultados registados pelos alunos poderá contribuir para a aquisição do novo conhecimento matemático.

A figura 4.131 exemplifica em que momentos a categoria *Construir* se manifestou através do desenvolvimento das subcategorias *Construções reconhecidas* (CR), *Soluções* (S), *Estratégias* (Es) e *Justificação* (J). Transmite ainda a relação estabelecida entre as diferentes subcategorias definidas:

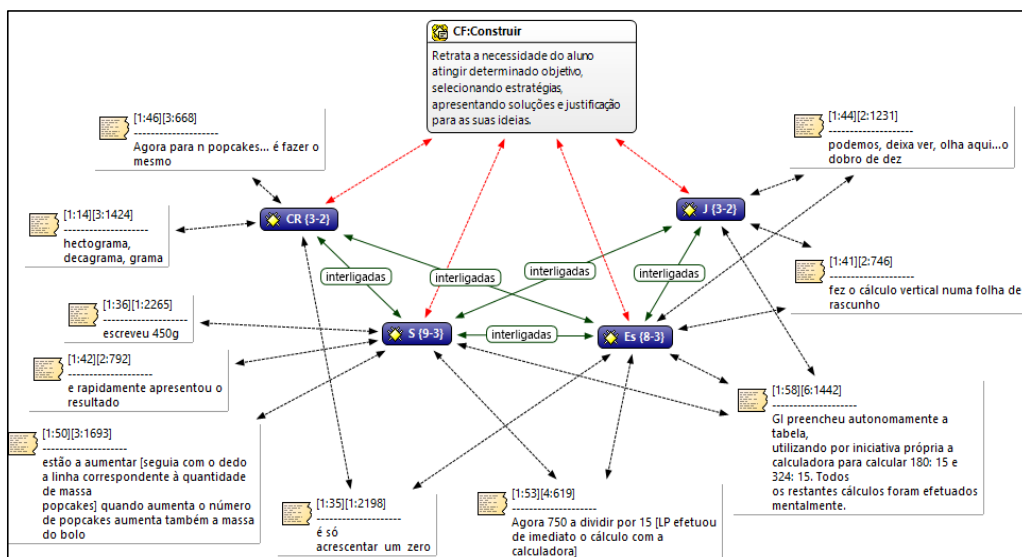


Figura 4.131 – RAV da ação epistémica Construir em O aniversário da Margarida

A ação epistémica *Construir* manifestou-se, como é possível observar na representação esquemática da figura anterior, através das subcategorias *Construções reconhecidas* (CR), *Soluções* (S), *Estratégias* (Es) e *Justificação* (J). De acordo com essa representação, constata-se que as subcategorias *Construções reconhecidas* (CR) e *Soluções* (S) mantiveram-se interligadas, no sentido em que após terem interpretado enunciados e selecionado conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, os

alunos integraram essas competências para obterem *Solução* (S) para as solicitações da tarefa. Aplicaram *Construções reconhecidas* (CR), tais como o conhecimento de unidades de medida, seus múltiplos e respectivas conversões [1:14], estratégias de cálculo [1:35] e linguagem simbólica [1:46], para darem resposta às questões colocadas e às exigências resultantes das soluções intermédias apresentadas.

Constata-se terem estado, igualmente, interligadas as subcategorias *Soluções* (S), *Estratégias* (Es) e *Justificação* (J), uma vez que estas surgiram quase sempre em simultâneo, resultando da aplicação de uma delas. Como exemplo, a figura 4.131 revela que o aluno apresentou determinada *Solução* (S) [1:35][1:36][1:42][1:50], *Justificando* (J) o seu raciocínio através da aplicação de *Estratégias* (Es) específicas que se prenderam, por exemplo, com a utilização da calculadora [1:53] [1:58], com a aplicação de estratégias de cálculo, vertical [1:41] ou mental [1:44].

Na tabela que se segue descreve-se, sinteticamente, as situações em que as subcategorias *Estratégias*, *Soluções*, *Justificação* e *Construção reconhecida* surgiram, durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*:

Tabela 4.31 – Síntese da ação epistémica *Construir* em *O aniversário da Margarida*

Categoria: <i>Construir</i> (B)		
Subcategorias	Estratégias Es	• Aplicaram procedimentos de cálculo diferenciados que proporcionaram maior correção e rapidez na concretização da tarefa, em particular no preenchimento das tabelas.
	Soluções S	• A interpretação dos dados enunciados, incluindo das tabelas, bem como a aplicação de estruturas reconhecidas, como o cálculo e as reduções, permitiram o preenchimento das tabelas e a apresentação de soluções a questões intermédias.
	Justificação J	• A justificação dos raciocínios estabelecidos esteve presente na interação e partilha verificada entre alunos, bem como na apresentação de respostas às questões colocadas.
	Construção reconhecida CR	• Integraram conceitos e procedimentos adquiridos anteriormente, tais como o cálculo, a redução, os conceitos de parte-todo e de indeterminação, a interpretação e utilização de linguagem simbólica, bem como exploraram a representação tabelar.

Síntese. A análise da ocorrência desta ação epistémica revela que todas as subcategorias associadas à ação epistémica *Construir* ocorreram, sendo que as *Soluções*, *Estratégias* e *Justificação* desenvolveram-se mutuamente, mantendo-se interligadas, tal como as subcategorias *Construções reconhecidas* e *Soluções* e *Construções reconhecidas* e *Estratégias*.

4.6.3 Construção

A análise efetuada à resolução dos alunos revelou que, à semelhança do que se verificou com a resolução das tarefas anteriores, o desenvolvimento da ação epistémica *Construção* manifestou-se através do desenvolvimento das subcategorias *Reorganização* e *Generalização*, culminando na *Comunicação* do novo conhecimento matemático.

Da análise efetuada, concluiu-se que os alunos mobilizaram conhecimentos e raciocínios desenvolvidos para preencherem corretamente as tabelas apresentadas. Posteriormente, ao analisarem os resultados constantes nessas tabelas, identificaram *Regularidades* que os aproximaram da *Construção* pretendida – *numa situação de proporcionalidade direta, quando uma das grandezas aumenta, a outra aumenta na mesma proporção*. O diálogo que se segue expõe, com maior pormenor, essa situação:

GI: Há regularidade?
GI e LP: Dá sempre 50! [...]
LP [voltou a folha para si, analisando com maior detalhe a tabela e passados alguns instantes referiu em voz alta]: Vê, se queres saber qual a massa necessária para fazer 10 *popcakes* multiplicas por 10, dá 500 e se dividires esse resultado [apontou para 500] também por 10 obténs o mesmo resultado 50 que é igual à razão de um *popcake* [apontando para a tabela]. Se multiplicares por 15 [apontava, relacionando os dados de um *popcake* com os de 15 *popcakes*] dá 750, se dividires 750 por 15 dá 50 que é igual à razão de 1 *popcake*.
GI: Se aumentar o número de *popcakes* também aumentam os ingredientes e ... [...]
LP: Significa que ao dividirmos a quantidade de chocolate pelo número de *popcakes* feitos vai dar sempre 45, não é. [...]
GI: A razão dará sempre igual [a professora não respondeu e GI procurou expor melhor a sua ideia] quando queremos fazer mais *popcakes* aumentamos o número de ingredientes, não é... e se dividirmos esse número de ingredientes pelo número de *popcakes* dará sempre igual. [...]
GI: Não, temos aqui [voltou a folha, destacando as igualdades preenchidas] por exemplo, a massa de bolo aumenta 50, 1 *popcake* 50, 2 *popcakes* 100 e nos outros a mesma coisa. [...]

Figura 4.132 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

A *Construção* inicia-se com a identificação de *regularidades* nas diferentes tabelas – *dá sempre 50... vai dar sempre 45... a razão dará sempre igual* – estando, por isso, associada à interpretação das tabelas, ou seja, ao desenvolvimento da ação *Reconhecer*.

Está também relacionada com o desenvolvimento do raciocínio proporcional – *para fazer 10 popcakes multiplicas por 10... se aumentar o número de popcakes também aumentam os ingredientes...* – que, ao ser partilhado entre alunos, contribuiu para a *Generalização* da propriedade observada a outras situações de proporcionalidade direta.

Deu-se por concluído o processo de *Generalização* quando os alunos expressaram a nova *Construção (Comunicação)*, apresentando respostas como a que se segue:

Posso concluir que a razão é sempre igual quando aumentam os popcakes e também os ingredientes.

Leia-se: “Posso concluir que a razão é sempre igual quando aumentam os *popcakes* e também os ingredientes”.

Figura 4.133 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

As figuras anteriores refletem o desenvolvimento do raciocínio proporcional por parte dos alunos, resultando esse da compreensão da situação matemática colocada e da identificação de questões de natureza multiplicativa. A *Construção* foi promovida pela *Reorganização* de soluções apresentadas, que resultaram da interpretação de cada uma das tabelas preenchidas e da exposição dos raciocínios desenvolvidos. Os alunos generalizaram as relações observadas nas diferentes tabelas, combinando e reorganizando características comuns: se uma das grandezas aumenta, a outra aumenta, mas de forma que a razão estabelecida entre o número de *popcakes* e a quantidade de ingredientes é sempre igual.

A *Construção* surgiu e foi aperfeiçoada através da *Reorganização* dos resultados apresentados. Evidenciou-se quando os alunos expressaram, oralmente, o seu raciocínio, partilharam conhecimentos e ideias e a apresentaram em linguagem natural e simbólica.

A figura que se segue exemplifica em que momentos a categoria *Construção* se manifestou através do desenvolvimento das subcategorias *Reorganização* (Ro), *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm).

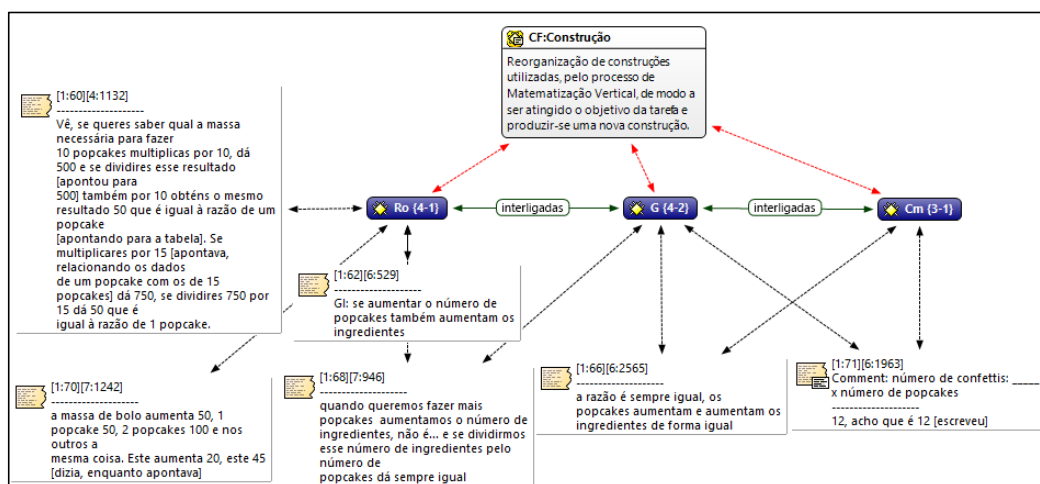


Figura 4.134 – RAV da ação epistêmica *Construção* em *O aniversário da Margarida*

A *Construção* evidenciou-se quando os alunos, ainda que inconscientemente, reorganizaram algumas conclusões resultantes das respostas apresentadas a questões intermédias, bem como do preenchimento das tabelas, e generalizaram as regularidades observadas. A percepção da constância dos resultados verificou-se no cálculo da razão entre a massa e o número de *popcakes* [1:60], bem como dos restantes ingredientes [1:62] [1:68] [1:70], e promoveu a *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm) das regularidades identificadas [1:66] [1:71]. Considera-se que a generalização ocorreu

durante a *Reorganização* dos dados, resultando da interpretação das conclusões que se foram tirando e do aperfeiçoamento dos resultados apresentados.

A tabela que se segue sintetiza os aspetos, relacionados com a *Construção*, visíveis no desenvolvimento da tarefa *O aniversário da Margarida*.

Tabela 4.32 – Síntese da ação epistémica *Construção* em *O Aniversário da Margarida*

Categoria: <i>Construção</i> (C)		
Subcategorias	Reorganização (Ro)	• Reorganizaram as soluções intermédias apresentadas, generalizando, em linguagem natural, a regularidade observada.
	Generalização (G)	• Estenderam a regularidade observada em cada uma das tabelas a qualquer tipo de ingrediente - grandeza e quaisquer quantidades - número de <i>popcakes</i> , transmitindo oralmente, e por escrito, o que se passa em situações de proporcionalidade direta.
	Comunicação (Cm)	• Expressaram em linguagem natural e em linguagem matemática a nova construção.

Síntese. O processo de reorganização de dados e resultados teve uma importância significativa para o desenvolvimento do processo de abstração, o qual culminou na nova *Construção*. As subcategorias *Reorganização* e *Generalização* mantiveram-se interligadas durante o processo de *Construção*, tal como as subcategorias *Generalização* e *Comunicação*. A *Reorganização* de resultados e ideias voltou a revelar-se essencial para o desenvolvimento da nova *Construção*.

4.6.4 *Consolidação*

O processo de *Consolidação* foi identificado durante o preenchimento das tabelas, mas também esteve presente nas atitudes observadas nos alunos durante a realização da mesma.

[Gl continuou a registar os resultados comunicados por LP até que se depararam com n *popcakes*].
 LP: Agora para n *popcakes*... é fazer o mesmo.
 Gl [acompanhando com agilidade o raciocínio do colega]: Aqui é o número de *popcakes* vezes 50 [escreveu $n \times 50$] aqui n vezes vinte [escreveu $n \times 20$], vezes 45 [escreveu $n \times 45$], 12 [escreveu $n \times 12$] e aqui só vezes 1 [escreveu $n \times 1$].
 LP: mais... [ajeitando a tarefa para conseguir efetuar a leitura das questões seguintes]

Figura 4.135 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *O aniversário da Margarida* (Gl,LP)

O diálogo presente na figura 4.135 permite identificar, da parte dos alunos, naturalidade quanto à presença de linguagem simbólica. Para além de interpretarem corretamente o significado atribuído à letra n , os alunos relacionaram o novo dado com os cálculos desenvolvidos para relações numéricas, apresentando expressões algébricas representativas das proporções de ingredientes necessários à confeção de n *popcakes*. Denota-se o facto de os alunos não terem sentido, como em tarefas anteriores, a necessidade de atribuírem um valor às expressões apresentadas.

O processo de *Consolidação* surgiu com a *Aplicação de uma construção recente*, durante o desenvolvimento da ação *Construir*, na fase de preenchimento das tabelas, estando a *Consolidação* envolvida com o processo *Construir*, mas dependente da ação *Reconhecer*, resultando da interpretação da tabela e, em particular, do significado atribuído à letra n .

Constata-se, ainda, uma interligação entre a *Aplicação de construções recentes* e as atitudes evidenciadas pelos alunos, tais como autonomia, agilidade no preenchimento da tabela e confiança nos resultados apresentados.

GI: Falta-nos a segunda questão, saltamos! Diz para indicar a expressão, o número de amigos, convidados, que confirmaram [voltou a consultar o enunciado]: temos aqui a resposta, é a quarta parte... um quarto.
LP: um quarto não... é como os n popcakes [apontou para a tabela] é o número de convidados a dividir por 4.
GI: Posso escrever [iniciou a escrita $n \times \frac{1}{4}$] ou [continuou $= \frac{n}{4}$].

Figura 4.136 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

De acordo com a informação explanada no diálogo anterior, verifica-se que a ação epistémica *Consolidação* voltou a ser identificada no momento em que os alunos foram confrontados com um contexto de indeterminação, um número desconhecido de convidados, e relacionaram esse número indeterminado n com o número de presenças confirmadas: um quarto do número indeterminado. Os alunos relacionaram a parte conhecida com o todo, número indeterminado, apresentando em linguagem formal e simplificada, uma expressão algébrica representativa da situação descrita. Para além de *Aplicarem uma construção recente* fizeram-no com naturalidade e autonomia.

A análise da categoria revela, ainda, que os alunos adquiriram autonomia e maior agilidade na interpretação e utilização da informação contida em tabelas, tal como já se tinha manifestado na tarefa anterior. Considera-se que tal se deve ao facto de terem trabalhado a representação tabelar em tarefas anteriores, pelo que a autonomia e flexibilidade demonstrada pelos alunos está associada à aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente, ainda que esses possam não estar diretamente relacionados com a construção pretendida.

A figura que se segue exemplifica como se manifestou a *Consolidação* e como se relacionaram as subcategorias *Aplicação de uma construção recente* (AC) e *Características psicológicas* (CP).

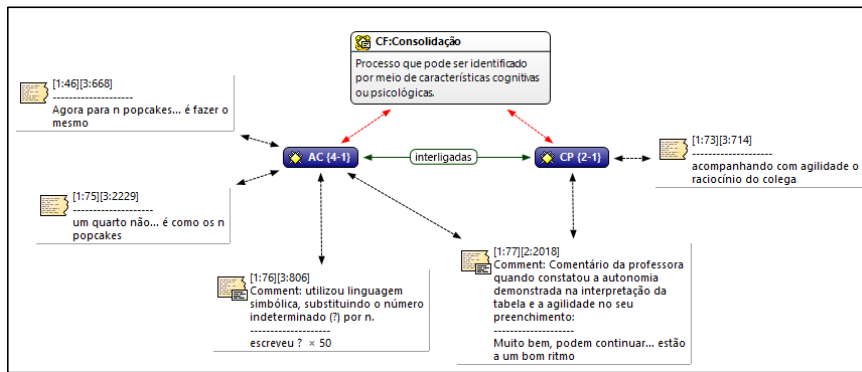


Figura 4.137 – RAV da ação epistêmica Consolidação em O aniversário da Margarida

A figura 4.137 transmite-nos que a ação *Consolidação* (Co) evidenciou-se através da *Aplicação de construções recentes* (AC), designadamente a interpretação [1:46] [1:75] e utilização de linguagem simbólica [1:76]. Revela ainda que os alunos evidenciaram maior agilidade [1:73] e autonomia na interpretação e utilização da representação tabelar [1:77].

A tabela que se segue sintetiza os aspetos mais importantes que se evidenciaram durante a manifestação da *Consolidação*.

Tabela 4.33 - Síntese da ação epistêmica Consolidação em O aniversário da Margarida

Categoria: <i>Consolidação</i> (Co)		
Subcategorias	Aplicação de uma construção recente (AC)	<ul style="list-style-type: none"> Interpretaram o conceito de indeterminação e linguagem simbólica, fazendo uso da mesma para apresentarem soluções intermédias, <i>Construir</i>, e expressarem a nova <i>Construção</i>.
	Características psicológicas (CP)	<ul style="list-style-type: none"> Revelaram autonomia, agilidade e confiança na aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente, situação que se verificou no preenchimento das tabelas, na apresentação de soluções intermédias e na expressão da nova <i>Construção</i>.

Síntese. O processo de *Consolidação* voltou a evidenciar-se quando os alunos *Aplicaram construções recentes*, concretização que se manifestou, também, através de atitudes de maior motivação, empenho, agilidade e confiança na aplicação desses conhecimentos, *Características psicológicas*. As duas subcategorias mantiveram-se interligadas durante a manifestação da *Consolidação*. Destaca-se que, uma vez mais, a *Consolidação* manifestou-se durante o desenvolvimento da ação *Construir*, associada à ação epistêmica *Reconhecer*, contribuindo favoravelmente para que a nova *Construção* ocorresse. Neste caso particular, verificou-se que a *Consolidação* também se manifestou durante a interpretação de dados representados na forma tabelar, associada à ação epistêmica *Reconhecer*, experiência adquirida em aprendizagens anteriores e que se revelou essencial para a nova *Construção*.

A figura seguinte esquematiza as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co), sintetizando conclusões descritas durante a apresentação dos resultados:

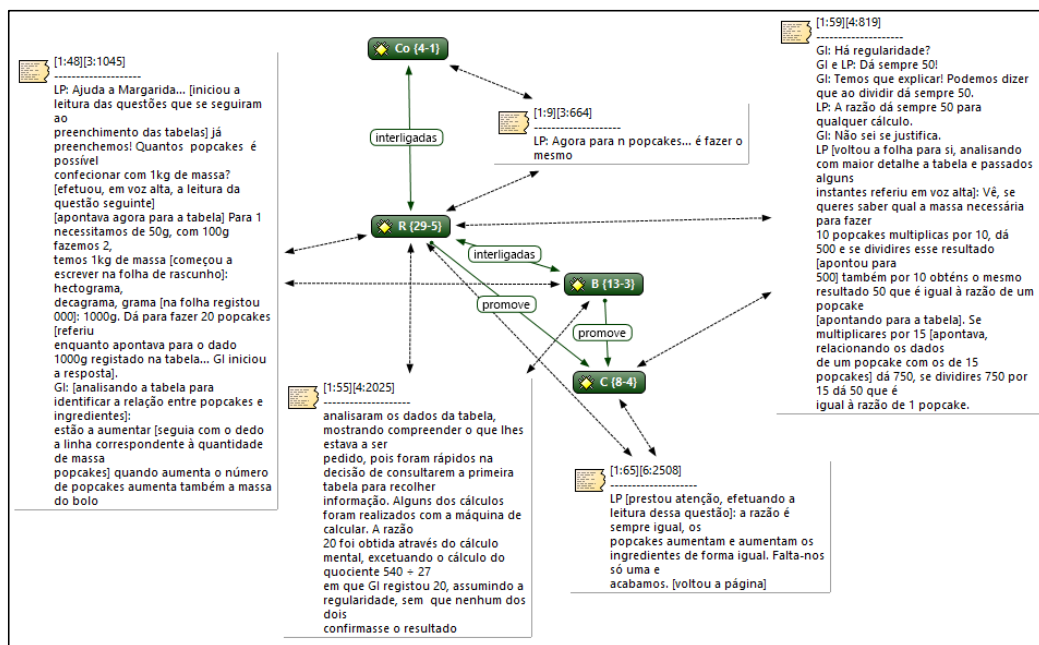


Figura 4.138 – RAV da relação manifestada pelas ações epistêmicas em O aniversário da Margarida

A figura anterior transmite a relação estabelecida entre as ações epistêmicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co). A *Construção* [1:59] resultou da interpretação dos enunciados e da identificação de regularidades presentes nas tabelas (R), bem como da reorganização de soluções e conclusões desenvolvidas (B). Considera-se que as ações *Reconhecer* (R) e *Construir* (B) contribuíram para o desenvolvimento da nova *Construção* (C). Por sua vez, considera-se que as ações epistêmicas *Reconhecer* (R) e *Construir* (B) mantiveram-se interligadas, no sentido em que a interpretação de enunciados e tabelas, a identificação de regularidades e o reconhecimento de *Estruturas adquiridas* em aprendizagem anteriores, como importantes para resolverem as questões colocadas, foram aplicadas e contribuíram para a apresentação de soluções, promovendo, dessa forma o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* (B). Por sua vez, as soluções apresentadas pelos alunos foram sujeitas à interpretação e identificação de regularidades, sendo também reconhecidas e exploradas, contribuindo para o desenvolvimento da nova *Construção* (C).

Relativamente à *Consolidação* (Co), considera-se que essa se manteve isolada da *Construção* (C), manifestando-se através da ação *Reconhecer* (R), aquando da interpretação e utilização de linguagem simbólica e de informação constante nas tabelas.

Síntese. A análise desta tarefa permitiu verificar que todas as ações epistêmicas do modelo *RBC+C* manifestaram-se durante a construção do novo conhecimento, relacionando-se entre si. Verifica-se que *Reconhecer* e *Construir* mantiveram-se

interligadas, promovendo o desenvolvimento da nova *Construção*. Por sua vez, a ação *Consolidação* voltou a manifestar-se isoladamente, em momentos específicos da leitura e da interpretação de dados enunciados nas tabelas, bem como, da seleção de estruturas reconhecidas, estando por isso interligada à ação epistêmica *Reconhecer* (R). Acrescente-se que o trabalho desenvolvido pelos alunos, após seleção da construção consolidada, também contribuiu para que essa consolidação fosse aprofundada. Por fim, acrescentamos que a ação epistêmica *Reconhecer* exerceu, igualmente, influência no desenvolvimento da ação epistêmica *Construção*, ainda que de forma menos direta.

4.6.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Professor.

A mediação estabelecida entre professora e alunos teve início, à semelhança do que se verificou nas tarefas realizadas anteriormente, com a sua elaboração, apresentação e implementação da tarefa. A presente tarefa foi estruturada de modo que os alunos interpretassem, autonomamente, os enunciados e a informação representada nas tabelas e que refletissem e desenvolvessem raciocínios que os conduzissem à nova construção.

A apresentação da tarefa evidenciou, da parte dos alunos, compreensão face ao que se estava a expor e relativamente aos objetivos que se pretendiam alcançar.

[A tarefa foi apresentada em contexto turma, tendo sido lida em voz alta pela professora. A professora questionou a existência de dúvidas em relação ao enunciado, solicitando o preenchimento cuidadoso da primeira tabela].

P: Compreenderam o que se pretende? [os alunos apenas acenaram em sinal de resposta afirmativa] Peço a vossa atenção máxima para o preenchimento desta tabela [referia-se à primeira tabela], pois todos os resultados que apresentarem poderão ser necessários para o preenchimento das tabelas que se seguem [projetou as restantes tabelas]. Compreenderam o que vos está a ser pedido [reforçou] ... para confeccionar mais *confettis* a mãe da Margarida necessita de utilizar outras quantidades de ingredientes, certo?! Quais?! Pretende-se que determinem essas quantidades! Para além das tabelas... [projetou] logo a seguir às tabelas surgem-vos algumas questões e, para darem resposta a essas questões terão que analisar cuidadosamente os dados presentes nas tabelas, o que vocês também preencheram. Vamos então começar?! [interrompeu] É importante que se empenhem, que se ajudem, que partilhem ideias, está bem?!

Figura 4.139 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida (P)

O diálogo anterior transmite que a professora assumiu um papel importante na motivação dos alunos para a realização da tarefa, direcionando-os para determinadas características que, não sendo exploradas com a devida atenção, poderiam comprometer o desenvolvimento da tarefa e, como tal, o alcance do objetivo pretendido: a nova *Construção*. Como tal, ainda que se tenha assistido a uma

apresentação expositiva por parte da professora, este foi o primeiro momento em que se estabeleceu mediação com os alunos, possibilitando-se que esses pudessem colocar as suas dúvidas e iniciar a resolução da tarefa com autonomia e empenho. O incentivo à partilha e comunicação de ideias fez transparecer a importância que a professora também atribui à mediação, estabelecida entre alunos, como forma de se atingir a nova *Construção*. Para além do artefacto tarefa, a professora incentivou, também, o uso assertivo da calculadora: *podem utilizar a calculadora, mas não tem sentido utilizá-la nos cálculos simples, certo?*

Destaca-se o facto de a professora ter decidido quais os aspetos da tarefa a destacar, reforçando a necessidade de os alunos serem cuidadosos durante a realização de cálculos, que apresentando incorreções comprometeriam a *Construção*. Entende-se que ao direcionar a atenção dos alunos para os referidos aspetos, a professora não eliminou o desafio da tarefa, mas antes certificou-se que o interesse pela resolução da tarefa e pela construção pretendida não seriam comprometidos. A mediação estabelecida incidiu, também, no incentivo à mobilização de conhecimentos prévios e à persistência.

O diálogo que se segue respeita, igualmente, à mediação estabelecida pela professora, transmitindo de que forma essa contribuiu para o desenvolvimento do processo de abstração dos alunos:

GI: Não percebemos o que se quer com esta questão [apontando].
P: Já a leram?
GI e LP: Sim.
P: Está relacionada com a questão anterior e a essa vocês responderam. O que vos pediam na questão anterior?
GI: O resultado da divisão que era sempre [foi interrompido por LP].
LP: A razão que é 45.
P: Muito bem, e o que representa esse valor?
GI: O resultado da divisão.
P: E esse varia?
LP: Não, é sempre o mesmo!
P: Apresentem então essas regularidades que estão a identificar, relacionando-as com o número de ingredientes e o número de *popcakes*, com os cálculos que fizeram, com a razão...
GI: se aumentar o número de *popcakes* também aumentam os ingredientes e... [foi interrompido pela professora].
P: Mas aumentam de qualquer forma, ou há alguma espécie de regra?!
GI: Sim, nós fizemos essas contas. Aqui aumentou dez vezes, logo o chocolate também aumentou 10 vezes [apontou] e aqui aumentou 15, então aqui [apontando para a quantidade de chocolate] também aumentou 15...
P: Muito bem, transmitam essas ideias por escrito, é o que se pretende [afastou-se percebendo o início da discussão, entre alunos, em volta da resposta que deveriam apresentar].

Figura 4.140 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *O aniversário da Margarida* (GI, LP, P)

Pode-se constatar que a professora direcionou a atenção dos alunos para respostas já apresentadas, questionando-os para promover o relacionamento de ideias e a produção de significados. Ao questionar os alunos, esses foram incentivados a interpretar – *Reconhecer* – a relacionar as soluções apresentadas e a integrar novos conceitos

matemáticos e construções reconhecidas – *Construir*. A mediação estabelecida pela professora esteve, também, presente quando incentivou os alunos a explorarem as potencialidades semióticas das tabelas e a evoluírem na produção de significados matemáticos.

Destaca-se, ainda, o facto de ter solicitado a revisão e a atenção para determinados aspetos presentes nas soluções já apresentadas, *Incentivo à construção de signos matemáticos*.

O diálogo que se segue revela de que forma a mediação contribuiu para que os alunos refletissem sobre o trabalho desenvolvido durante a resolução da tarefa e produzissem novos significados matemáticos.

P: Já reviram os vossos cálculos, conclusões? [...]
P: Partilharam ideias?! Chegaram a conclusões? [dizia, enquanto observava as respostas dos alunos] [...]
P: Então, o que concluíram ao preencherem as tabelas? [...]
P: Aumenta de qualquer forma? [...]
GI: Não, temos aqui [voltou a folha, destacando as igualdades preenchidas] por exemplo, a massa de bolo aumenta 50, 1 *popcake* 50, 2 *popcakes* 100 e nos outros a mesma coisa. Este aumenta 20, este 45 [dizia, enquanto apontava].
P: Muito bem, dizemos então que a quantidade de ingredientes aumenta na mesma proporção. Se não aumentasse na mesma proporção os *popcakes* poderiam não ficar bem confeccionados ou, pelo menos não terem o mesmo sabor. Percebem?! [...]
P: Dizemos que estas situações transmitem uma relação de proporcionalidade direta, ou seja, se uma grandeza, por exemplo o número de *popcakes*, aumenta, a outra grandeza, por exemplo os ingredientes, também aumentam na mesma proporção. Isto acontece em várias situações do vosso dia-a-dia. Por exemplo, se forem à reprografia tirar uma fotocópia pagam... [...]
LP: 5 cêntimos... acho!
P: e por duas?
LP e GI [em simultâneo]: 10.
P: E por três
LP e GI [em simultâneo]: 15.
LP: 20, 25... aumenta de forma igual... na mesma razão.
P: Certo, isso mesmo. Se o número de fotocópias aumentar para o dobro, o preço aumenta para o dobro, se aumentar para o triplo, o preço aumenta para o triplo, se aumentar dez vezes o número de cópias, aumenta dez vezes o preço a pagar. Estamos perante situações de proporcionalidade direta.
LP: A não ser que haja desconto.
P: Claro, aí a razão entre o preço a pagar e o número de fotocópias não seria sempre o mesmo [elevou o tom de voz] ... para ser proporcionalidade direta o quociente tem de ser sempre constante. Perceberam?

Figura.4.141 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

Verificou-se, da parte da professora, a intenção de que os alunos fizessem uma revisão dos resultados e respostas apresentadas – *Incentivo à utilização de artefacto* – bem como o reforço da valorização dada à partilha de ideias. Verificou-se, ainda, o questionamento, no sentido de se averiguar se os alunos tinham compreendido de que forma o número de *popcakes* se relacionava com a quantidade de ingredientes e que efeito teria essa relação na sua confeção, de modo que os alunos adquirissem o significado da existência de proporcionalidade direta. Nesta fase, a professora

introduziu conceitos que os alunos não conheciam, mas que poderiam ser significativos na expressão da nova construção. Assim, expôs oralmente ideias e expressões que auxiliaram os alunos na apresentação de uma resposta com maior rigor matemático – *aumentam na mesma proporção... estas situações transmitem uma relação de proporcionalidade direta* – e exemplificou através de situações quotidianas. Entende-se que esta atuação reforçou a aquisição do novo conhecimento matemático. Por sua vez, através da partilha, foi possível que utilizasse contribuições individuais – *a não ser que haja desconto* – para reforçar a nova aprendizagem e incentivar a construção de signos matemáticos.

A figura que se segue transmite de que forma e como estiveram interligadas as subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos (IUA)* e *Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)* durante a mediação estabelecida pela professora.

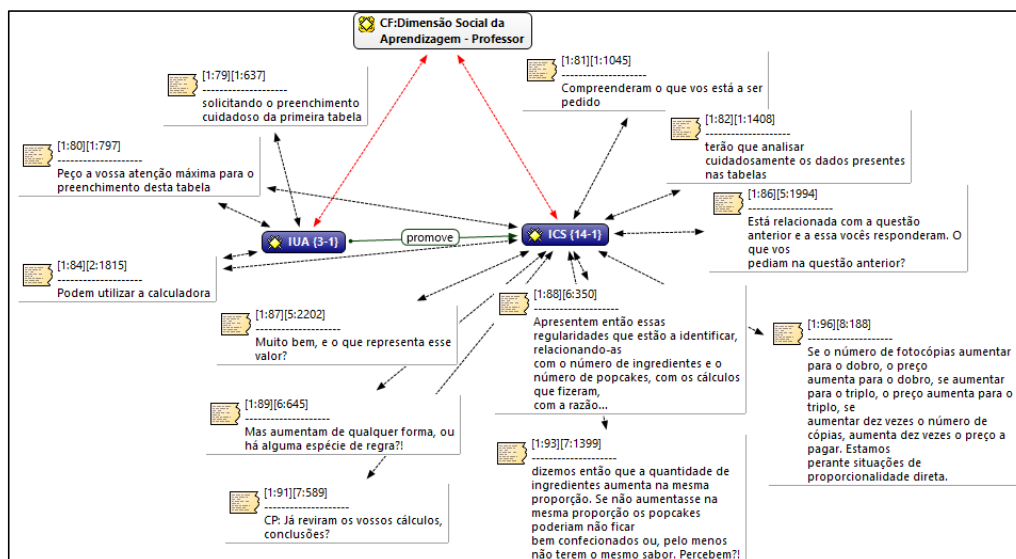


Figura 4.142 – RAV da DSA, Professor, em O aniversário da Margarida

A intervenção da professora revelou-se bastante significativa, não tanto pelo número de intervenções, mas pela pertinência e importância que essas demonstraram ter durante na resolução e construção do novo conhecimento matemático. A professora assumiu um papel bastante importante quando incentivou a exploração da tarefa (IUA), desenvolvida com a intenção de proporcionar a aquisição de novos signos matemáticos. A sua ação foi significativa quando solicitou e direcionou a atenção dos alunos para o preenchimento das tabelas [1:79] [1:80], permitindo o uso da calculadora [1:84]. Por sua vez, a exploração das potencialidades da tarefa e a intervenção da professora em momentos chave incentivou os alunos a construir novos signos matemáticos (ICS). O esclarecimento de dúvidas [1:81] e o incentivo ao aperfeiçoamento das respostas dadas [1:91] [1:92] foram promovidos através do questionamento, através do qual se direcionou a atenção dos alunos para aspetos considerados pertinentes [1:82] [1:86]

[1:87] [1:89]. A professora incentivou os alunos à reflexão, à organização de dados e ao relacionamento de ideias [1:88], no sentido da generalização das regularidades observadas [1:93], apresentando outros exemplos para reforçar a consolidação da nova aprendizagem [1:96].

A tabela que se segue sintetiza as características evidenciadas durante o processo de mediação entre professora e alunos:

Tabela 4.34 – Síntese da análise da DSA, Professor, em O aniversário da Margarida

Categoria: Professor (P)		
Subcategorias	Incentivo à utilização de artefactos (IUA)	<ul style="list-style-type: none"> • Incentivou a exploração da tarefa; • Incentivou a exploração das potencialidades das tabelas; • Incentivou a exploração das potencialidades da máquina de calcular.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)	<ul style="list-style-type: none"> • Incentivou a observação de regularidades nos resultados registados nas tabelas; • Incentivou a combinação e reorganização dos resultados registados e de construções adquiridas; • Direcionou a atenção dos alunos para os aspetos mais importantes da tarefa.

Síntese. Valoriza-se, novamente, o papel da professora na elaboração da tarefa, pelo facto de essa incentivar a construção de um novo conhecimento matemático, por incentivo à observação de regularidades e ao estabelecimento de relações numéricas e funcionais, bem como à seleção da representação tabelar para o fazer – *Reconhecer*. Destaca-se, também, a forma como conduziu a tarefa, incentivando a exploração das potencialidades da tarefa e das tabelas – *Incentivo ao uso de artefacto* e à *construção de signos matemáticos*. Incentivou, ainda a apresentação de soluções – *Construir* – e a reflexão sobre os resultados evidenciados, visando promover a generalização das regularidades observadas - *Construção*. Como tal, a ação da professora não se exprimiu apenas através do artefacto apresentado ao aluno, como também ganhou significado através das suas intervenções. Considera-se que os alunos registaram melhorias ao nível da interpretação e do preenchimento dos dados contidos nas tabelas e que a representação tabelar constituiu-se como mediador semiótico, eficaz, entre os alunos e a construção objetivada.

4.6.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Alunos.

O diálogo que se segue transmite como os alunos se envolveram na tarefa proposta pelo professor. A mediação estabelecida entre alunos foi constante durante a tarefa, pelo que se segue a apresentação de pequenos excertos que exemplificam episódios onde se identifica o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*.

LP: Ok... é para preencher a tabela, também diz aqui que estão os ingredientes na tabela [circundou, com o dedo, essa informação no enunciado]. Escreves tu?! [GI voltou a tarefa para si e pegou no lápis] [...]
LP [depois de se mostrar pensativo interrompe o colega]: 60... 60 mais os [procurou a informação deslizando dedo pela tabela] [...]
GI: Falta-nos a segunda questão, saltamos! Diz para indicar a expressão, o número de amigos, convidados, que confirmaram [voltou a consultar o enunciado]: temos aqui a resposta, é a quarta parte... um quarto.
LP: um quarto não... é como os n popcakes [apontou para a tabela] é o número de convidados a dividir por 4. [...]
LP: Completamos a tabela... vamos à outra tabela, temos os resultados [...]
GI: Agora é a razão, temos o exemplo, vamos dividir [fez-se silêncio enquanto analisava a tabela] o 500 por 10.
LP: Também tens aqui [apontando para *quantidade do ingrediente ÷ número de popcakes*] ... dá 50 [GI escreveu]

Figura 4.143 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *O aniversário da Margarida* (GI, LP)

O diálogo apresentado na figura 4.143 destaca o envolvimento dos alunos na interpretação dos dados enunciados e das tabelas.

Observa-se esse envolvimento na leitura e interpretação de dados e no preenchimento das tabelas, *Reconhecer*, como também na integração de conceitos e procedimentos já adquiridos, que promovem a apresentação de soluções e o relacionamento de dados, *Construir*. Destaca-se a compreensão desenvolvida em torno de um conceito novo para os alunos – razão – em particular na leitura e interpretação que fizeram da expressão *quantidade do ingrediente ÷ número de popcakes*.

O diálogo que se segue manifesta de que forma a produção de signos individuais e coletivos contribuíram para o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas.

GI [recolheu a folha para junto de si e iniciou a leitura]: Temos que ir às tabelas [disse, enquanto preenchia a última igualdade, *número de confettis* = ____ \times *número de popcakes*, copiando o resultado apresentado pelo colega] 50, a seguir é de leite condensado [disse, voltando a folha para confirmar] sim, e chocolate, então é 20 vezes e 45. Não respondeste à questão!
LP [prestou atenção, efetuando a leitura dessa questão]: a razão é sempre igual, os *popcakes* aumentam e aumentam os ingredientes de forma igual. [...]
LP: Significa que ao dividirmos a quantidade de chocolate pelo número de *popcakes* feitos vai dar sempre 45, não é.

Figura 4.144 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *O aniversário da Margarida* (GI, LP)

Através do diálogo anterior volta-se a verificar o envolvimento dos dois alunos na interpretação dos dados constantes nas tabelas, na identificação de regularidades, *Reconhecer*, e na produção de signos coletivos, tais como o significado atribuído às relações numéricas e ao conceito de razão, *Construir*. Constata-se que, em determinados momentos da resolução das tarefas, as contribuições individuais foram significativas, designadamente durante a interpretação dos enunciados, *Reconhecer*. Por sua vez, a comunicação e a partilha foram também importantes para o desenvolvimento de ideias e para apresentação de soluções intermédias, *Construir*, tal como se pode voltar a verificar através da exposição que se segue:

LP [voltou a folha para si, analisando com maior detalhe a tabela e passados alguns instantes referiu em voz alta]: Vê, se queres saber qual a massa necessária para fazer 10 *popcakes* multiplicas por 10, dá 500 e se divides esse resultado [apontou para 500] também por 10 obténs o mesmo resultado 50 que é igual à razão de um *popcake* [apontando para a tabela]. Se multiplicares por 15 [apontava, relacionando os dados de um *popcake* com os de 15 *popcakes*] dá 750, se divides 750 por 15 dá 50 que é igual à razão de 1 *popcake*.

Figura 4.145 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa O aniversário da Margarida

A figura que se segue evidencia, através de excertos selecionados, de que forma e como estiveram interligadas as subcategorias *Produção de signos individuais (PSI)* e *Produção de signos coletivos (ICS)*, durante a comunicação e partilha estabelecida entre os alunos.

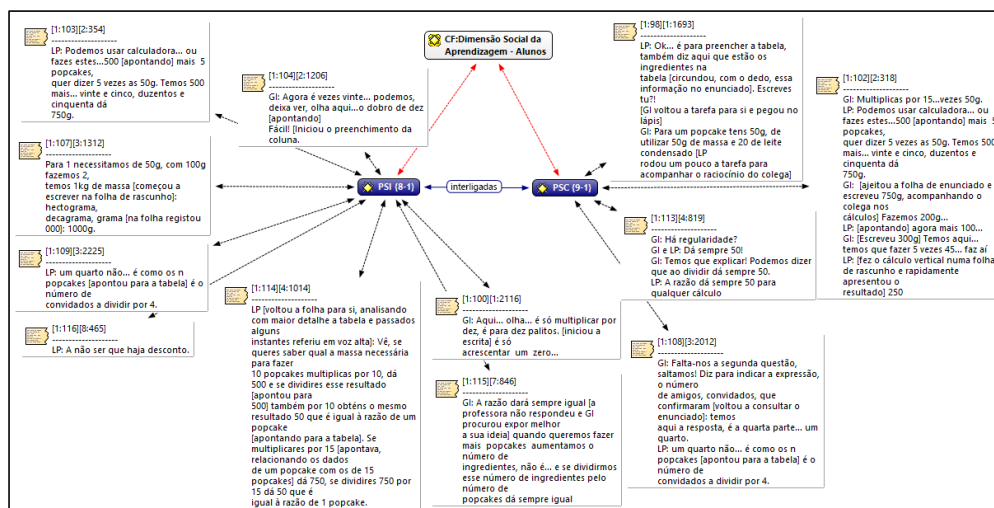


Figura 4.146 – RAV da DSA, Alunos, em O aniversário da Margarida

A figura anterior reforça a ideia de que a mediação entre alunos foi bastante significativa para a produção de novos signos matemáticos e que essa se verificou durante o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer (R)*, *Construir (B)* e *Construção (C)*. Os alunos envolveram-se na interpretação dos enunciados e tabelas

[1:98] [1:108] e na identificação de regularidades [1:113] (*Reconhecer*), bem como na apresentação de soluções [1:102] (*Construir*).

As contribuições individuais dos alunos revelaram-se, também, essenciais para o desenvolvimento das ações *Construir* e *Construção*, tendo resultado, na sua globalidade, da partilha e da necessidade de interpretar e integrar construções reconhecidas, no sentido de se dar resposta às solicitações da tarefa. Tal verificou-se através da apresentação de estratégias de cálculo [1:103] [1:100] e da integração de conceitos e procedimentos [1:104] [1:107] [1:109]. A *Produção de signos individuais* (PSI) promoveu, como se constata neste excerto, a *Produção de signos coletivos* (PSC). Contudo, a mediação estabelecida pelos dois alunos conduziu-os à produção de signos individuais, evidenciadas através das contribuições dos alunos que, em determinado momento, fizeram uso das suas habilidades e acrescentaram maior significado às respostas já apresentadas, generalizando as regularidades observadas no sentido da nova *Construção* [1:114] [1:115] [1:116].

Tabela 4.35 – Síntese da análise da DSA, Alunos, em O aniversário da Margarida

Categoria: Alunos (A)		
Subcategorias	Produção de signos individuais (PSI)	<ul style="list-style-type: none"> • Envolveram-se na interpretação do enunciado e das tabelas; • Integraram conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores; • Produziram signos individuais.
	Produção de signos coletivos (PSC)	<ul style="list-style-type: none"> • Interagiram entre si, integrando conhecimentos, explorando as potencialidades das tabelas e apresentando soluções até à expressão da generalidade.

Síntese. Constata-se que as subcategorias *Produção de signos individuais* e *Produção de signos coletivos* relacionaram-se mutuamente na produção de novos significados matemáticos, conduzindo os alunos à nova *Construção*. A mediação estabelecida evidenciou o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas, verificando-se que as contribuições coletivas influenciaram o desenvolvimento das ações *Reconhecer* e *Construir*, mas a produção de signos individuais marcou forte presença no desenvolvimento da ação epistémica *Construção*.

desenvolvimento da ação *Reconhecer* (R) e *Construção* (C). A valorização dada ao *professor* inicia-se com a elaboração da tarefa, a qual permitiu observar a ocorrência das ações epistêmicas do modelo *RBC+C*, para além da autonomia e agilidade no seu desenvolvimento.

4.7. Tarefa 7 – Campo de férias

A tarefa *Campo de férias* proporciona aos alunos o trabalho com padrões geométricos e numéricos e a resolução de dois problemas relacionados com contagens, respetivamente com o cálculo do produto cartesiano de conjuntos finitos e com a generalização do processo observado a um número indeterminado de amigos. Intenciona-se analisar de que forma os alunos interpretam esses problemas, como identificam e representam os dados enunciados, como colocam em prática estratégias e refletem acerca dos resultados obtidos. Interessa ainda compreender como os alunos raciocinam quando são incentivados a generalizar regularidades e relações observadas, que conhecimentos mobilizam e como fundamentam matematicamente as suas opções.

4.7.1 Reconhecer

A primeira questão da tarefa remete os alunos para a análise de um padrão geométrico de crescimento, *construção de fósforos*, que se pode traduzir por uma expressão linear do tipo $an + b$, para $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, bem como, para a análise de informação contida numa tabela.

A ação *Reconhecer* observa-se, de imediato, quando os alunos procedem à leitura do enunciado introdutório da tarefa e à interpretação dos dados enunciados e da linguagem simbólica presente. Pode-se constatar essa perceção analisando a exposição que se segue:

LP: Estes [apontando para a tarefa] são os fósforos, as construções de fósforos. Aqui na tabela [apontando para a segunda coluna] estão o número de fósforos: 1 na primeira, 3 na segunda e 5.
GI [interrompendo]: É o número de fósforos gastos na construção da figura [apontando e lendo a informação constante na tabela] ... n ?! O que é o n ?!
LP: n são as construções ... olha aqui a primeira tem 1 fósforo, a segunda tem 2 fósforos, a terceira tem 5.
GI [virando a tarefa para si, pegou no lápis e escreveu, por baixo de cada figura, o número de fósforos utilizados]. Aqui 1, 3, 5 e nesta [iniciou a contagem] 7, e nesta [voltou a iniciar a contagem] são... 9. [...]
GI: $55 + 57$ é 100... 122 [escreveu]. Agora para n ... muito pior [ajeitou a tarefa para que os dois conseguissem ter maior visualidade dos dados preenchidos].

Figura 4.148 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Campo de férias* (GI, LP)

O diálogo estabelecido pelos alunos transmite a identificação da construção enunciada – *são os fósforos* – a relação estabelecida entre a representação geométrica de cada construção, o número de fósforos associados a cada termo – *1 na primeira...* – e a informação contida na tabela: *aqui na tabela... apontando para a segunda coluna*. Os alunos *Interpretaram* a informação enunciada e, ainda que não tenham utilizado linguagem matemática associada ao estudo das sequências, tais como ordem e termo, perceberam o seu significado – *a terceira tem 5 fósforos* – de modo que o número ordinal assume o significado de ordem e o numeral o de termo.

No discurso produzido identifica-se, no aluno GI, dificuldades relacionadas com a letra *n*, parecendo estarem associadas à forma como foram apresentadas e não ao seu significado enquanto valor numérico indeterminado. Contudo, LP parece ter interpretado o seu significado, ainda que tenha referido tratarem-se das construções – *n são as construções* – ao invés de ser mais explícito e referir que representava a posição de determinada construção. O significado atribuído à letra *n* reflete-se na expressão proferida – *agora para n ... muito pior* – numa fase posterior da tarefa, transmitindo, de acordo com o raciocínio estabelecido, a ideia de que *n* representa um número desconhecido que se obteve por crescimento do padrão observado. Reforça-se esta reflexão, respeitante ao significado atribuído à letra *n*, fazendo uma breve referência a outra situação – *padrão de polígonos* – ocorrida durante a resolução desta tarefa, em que os alunos, compreendendo que *n* significaria um número indeterminado, não conseguiram fazer uma interpretação correta do significado de *n* no contexto matemático apresentado – *O que é o n?* – Nesta situação, considera-se que a dificuldade de interpretação do significado atribuído à letra está no facto de os alunos não terem compreendido qual a relação existente entre a letra *n*, presente na expressão algébrica $5n + 3$, e a representação pictórica apresentada.

Regressando ao padrão de fósforos e à identificação da ação epistémica *Reconhecer*, destaca-se a percepção que o aluno GI teve em associar o termo de cada construção desenhada ao respetivo número de fósforos, a qual reflete a *Interpretação* que fez da representação geométrica, bem como a seleção de estruturadas adquiridas, tais como a contagem.

LP: Agora é só continuar [pegou no lápis e começou a escrever] esta é a quarta figura, temos aqui 7 fósforos e esta é a quinta em que temos 9 fósforos. Agora é só perceber o que acontece nas próximas.
 [GI iniciou o esboço da sexta figura numa folha de rascunho].
 LP: Não é preciso [mas GI continuou a construção] é sempre mais dois, sete, nove, onze, treze... mas agora é 30, é a figura 30.
 [...]
 LP: Ah, todos, já percebi [...]: aqui quatro, nove, dezasseis [obtidos do cálculo mental] e [iniciando a contagem individual a partir do n.º 16 concluiu a existência de 25 fósforos nas primeiras 5 construções, ainda que não tenha referido esse número].
 GI: Para aí, para vermos como se relacionam os números. Vê $4-1=3$, aqui [apontando] dá mais três [LP escreveu], $9-4=5$, não dá igual?! $16-9=7$, também não dá igual [LP registou $+5$ e $+7$].
 LP e GI [quase em simultâneo]: mais dois [referindo-se à razão das somas apresentadas].

Figura 4.149 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias

O diálogo da figura 4.149 transmite que a ação epistémica *Reconhecer* também se evidenciou através da identificação da *Regularidade* numérica, presente na construção dos fósforos – *é sempre mais dois*. Destaca-se, nesta fase, a seleção de *Estruturas adquiridas*, tais como a representação/desenho que acabou por não ser utilizada – *iniciou o esboço da sexta figura numa folha de rascunho* – e o cálculo mental que permitiu a obtenção do número de fósforos de cada construção. Posteriormente, o cálculo mental, *Estruturas adquiridas*, voltou a ser selecionado para se obter a soma do número total de fósforos, sendo que conseguiram estabelecer uma relação entre os valores numéricos obtidos ao constatarem que a razão do número total de fósforos obtidos, até determinada construção, seria igual à anterior, adicionada de duas unidades. Em linguagem algébrica, a perceção destas *Regularidades* poderia ser expressa através da igualdade $S_n = S_{n-1} + (r_{n-1} + 2)$, para S_n o número de fósforos utilizados até à construção n , inclusive, e r_{n-1} , o número de fósforos que se adicionam relativamente à construção anterior.

O problema das mesas do refeitório despertou o interesse dos alunos – *é engraçado* – provavelmente porque o conteúdo enunciado e a sua estrutura, representação pictórica, constituíram uma novidade para os alunos.

LP: Podemos fazer desenhos ou esquemas.
 GI: Não precisas, é fácil! Vê, nestas duas mesas tens [iniciou a contagem] 10 lugares. Se colocares mais uma mesa, tirando esta cadeira [apontou para a cadeira do topo esquerdo] acrescentas sempre cinco cadeiras. Com três mesas ficas com 15 lugares. E acrescentas sempre cinco.

Figura 4.150 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias

A ação *Reconhecer* volta, de acordo com o diálogo anterior, a transparecer através da *Interpretação* do enunciado do problema, o qual permitiu o diálogo entre alunos e a aplicação de procedimentos específicos. Contudo, os alunos terão concebido incorretamente o número de cadeiras a acrescentar, considerando que ao juntarem uma nova mesa estariam a acrescentar cinco cadeiras, ao invés de quatro. A regularidade numérica por eles identificada perpetuou-se ao longo da resolução desta questão, pelo que a análise efetuada se centra no raciocínio desenvolvido. Nesse âmbito, destaca-se a interpretação correta do significado atribuído à letra *n* – *se representarmos por n o número de pessoas presentes no almoço* – verificando-se, da parte dos alunos, a sua associação a um número indeterminado – *quantas cadeiras são necessárias para um número qualquer de pessoas e quantas mesas*.

A ação *Reconhecer* tornou-se também visível no problema dos gelados, tendo-se manifestado através das subcategorias *Estruturas adquiridas* e *Interpretação*.

LP [iniciando um esquema na folha de rascunho]: se escolher morango pode optar por copo ou então por cone [escreveu morango e representou, através de desenho, um copo e um cone] e se for o de chocolate [escreveu] pode também ser copo ou cone [voltou a desenhar].

Figura 4.151 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Campo de férias*

Valoriza-se, nesta situação, a seleção do desenho, *Estruturas adquiridas*, pois esse contribuiu para a *Interpretação* correta dos dados do problema enunciado, mostrando que as duas subcategorias estiveram interligadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*.

A *Regularidade* presente nas construções geométricas da mensagem deixada na pista quatro proporcionou, igualmente, o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, tal como se pode constatar através do diálogo que se segue:

GI [interrompeu]: Olha vê [apontando] era um pentágono e começou a ficar com estas pontas, vê [redirecionando a tarefa para o colega ver] ganha mais uma bola em cada ponta, vê?
LP: E nos outros também. Na figura dois tens duas em cada ponta [apontando] e nesta [apontando] tens... já vi [voltou a folha para si e, apontando referiu] aqui três e agora quatro [começou a desenhar de imediato]. [...]
GI: 13×5 [...]

Figura 4.152 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Campo de férias* (GI, LP)

Os alunos constataram a regularidade geométrica – *na figura dois tens duas em cada ponta* – conseguindo, posteriormente, estabelecer uma correspondência numérica. Essa relação permitiu que selecionassem a multiplicação para darem uma resposta rápida à questão colocada – *quantos círculos encontrará na pista número 13?*

Tabela 4.36 – Síntese da ação epistêmica Reconhecer em Campo de férias

Categoria: Reconhecer (R)		
Subcategorias	Interpretação (I)	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretaram o enunciado escrito, a informação contida na tabela e a representação pictórica; • Interpretaram as relações numéricas presentes nos padrões; • Revelaram percepção do significado atribuído à letra n.
	Estruturas adquiridas (EA)	<ul style="list-style-type: none"> • Selecionaram conhecimentos adquiridos e relacionados com a necessidade de interpretar e utilizarem linguagem simbólica; • Selecionaram conhecimentos adquiridos, efetuando contagens, cálculos, desenhos e esquemas; • Mobilizaram estruturas adquiridas, tais como as quatro operações básicas e os conceitos de dobro, metade, triplo, ímpar, entre outros.
	Regularidade (Rg)	<ul style="list-style-type: none"> • Reconheceram a regularidade existente nos padrões geométricos, pictórico e numéricos, revelando compreensão das relações estabelecidas.

Síntese. A ação epistêmica *Reconhecer* voltou a manifestar-se através das subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*. A *Interpretação* dos dados enunciados dos problemas, presentes na tabela da construção de fósforos e nos diferentes padrões, revelou-se essencial para a seleção de *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores, bem como para a identificação de *Regularidades*. Considera-se que o desenvolvimento da subcategoria *Interpretação* promoveu o desenvolvimento das subcategorias *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*. A aplicação de *Estruturas adquiridas*, tais como o cálculo, favoreceram, tal como se verificou nas tarefas anteriores, a observação de *Regularidades*. No entanto, nesta situação, a identificação dessas *Regularidades* e a necessidade de evoluir na resolução da tarefa requereram, da parte dos alunos, também a integração de *Estruturas adquiridas* que, ao serem mobilizadas, promoveram o processo de generalização. Considera-se, como tal, que as subcategorias *Regularidades* e *Estruturas adquiridas* desenvolveram-se mutuamente, mantendo-se interligadas durante a resolução desta tarefa.

4.7.2 Construir

A ação epistêmica *Construir* foi identificada em vários momentos da resolução desta tarefa, estando associada à mobilização de conhecimentos e à aplicação de estratégias que contribuíram para a apresentação de soluções para as questões colocadas. A primeira evidência do desenvolvimento da ação epistêmica *Construir* ocorreu com o preenchimento da tabela, que respeita à construção de fósforos. Após interpretação do padrão e análise dos dados presentes nessa tabela, os alunos transferiram a informação geométrica, registrando o número de fósforos presente em cada construção. A aplicação dessa *Estratégia* permitiu evidenciar a regularidade numérica presente no padrão geométrico de crescimento, tal como se pode constatar através da figura que se segue:

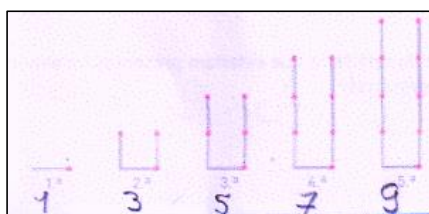


Figura 4.154 – RA padrão geométrico de crescimento vs regularidade numérica

O diálogo que se segue transmite de que forma a aplicação de *Construções* reconhecidas foi essencial para que os alunos dessem seguimento à informação recolhida através da aplicação da *Estratégia* – transferência do padrão geométrico para a regularidade numérica.

LP: [...] é sempre mais dois, sete, nove, onze, treze... mas agora é 30, é a figura 30.
 GI: E esta também está mal [apontando para o 19].
 LP: Pois é, nem vi [apagou rapidamente]. Na seis são 11, na sete 13, na oito 15, na nove 17, então é 19 [apresentou o resultado].
 GI: Para a construção trinta necessitamos do triplo de 19 [apontando para a resposta]
 LP [aceitando a ideia de GI]: três vezes nove, 27, dá 67 [escreveu].

Figura 4.155 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

O diálogo presente na figura 4.155 transmite a generalização aritmética do padrão, concebida através da seleção das operações adição e multiplicação, da aplicação dos conceitos de triplo, bem como do raciocínio proporcional. Destaca-se que os alunos evidenciaram habilidade para generalizarem o padrão numérico, para valores de ordem de crescimento superior e não sequencial. Realça-se que o aluno GI corrigiu um dos valores numéricos incorretos, evidenciando uma boa compreensão das relações estabelecidas.

O diálogo que se segue transmite o raciocínio estabelecido pelos alunos ao procurarem determinar o número total de fósforos gastos nas primeiras n figuras. Os alunos evidenciaram, inicialmente, alguma dificuldade em compreender o que lhes estava a ser pedido, mas depois de reconhecerem o significado da informação dada, integraram *Construções reconhecidas* e *Estratégias*, registo das regularidades identificadas, para preencherem a tabela.

LP: Ah, todos, já percebi [a professora afastou-se e LP retomou a escrita]: aqui quatro, nove, dezasseis [obtidos do cálculo mental] e [iniciando a contagem individual a partir do n.º 16 concluiu a existência de 25 fósforos nas primeiras 5 construções, ainda que não tenha referido esse número].

GI: Para aí, para vermos qual a relação dos números. Vê $4 - 1 = 3$, aqui [apontando] dá mais três [LP escreveu], $9 - 4 = 5$, não dá igual?! $16 - 9 = 7$, também não dá igual [LP registou +5 e +7] [...]

GI [voltando a tarefa para si e iniciando a escrita]: então mais nove, vinte e seis menos um [escreveu 25], mais onze dá 36 e, mais difícil [recorreu a contagem com os dedos], mais 13 [levantou um dedo], mais 15 [levantou dois dedos], mais 17 [levantou três dedos] e mais 19 [levantou os quatro dedos, que os fariam chegar à figura de ordem 10] agora $36 + 19 = 55$ [registou].

LP: Até ao dez somamos 19, agora é o triplo, como no anterior, $19 \times 3 = 57$ [efetuou o cálculo mental].

Figura 4.156 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

O preenchimento, correto, da coluna correspondente ao número total de fósforos gastos nas primeiras n figuras iniciou-se com a contagem do número de fósforos, *Construção reconhecida*. A relação numérica estabelecida, obtida com a aplicação da subtração - *Construção Reconhecida* - contribuiu para a observação de regularidades que, ao serem interpretadas, deram lugar à apresentação de *Soluções* intermédias. A conclusão do diálogo estabelecido permite observar que os alunos aplicaram o raciocínio proporcional para determinarem o número total de fósforos necessários até à trigésima construção, situação que não se aplica no preenchimento desta coluna. O erro cometido prende-se com a aplicação do raciocínio proporcional que se poderia traduzir através da igualdade $\frac{30}{10} = \frac{S_{30}}{S_{10}} \Leftrightarrow S_{30} = 3 \times S_{10}$.

No que respeita ao problema das mesas do refeitório, verifica-se da parte dos alunos a compreensão parcial do padrão geométrico observado. Os alunos compreenderam como deveriam juntar as mesas mas, ao imaginarem esse procedimento, “retiraram” apenas uma das cadeiras do topo. Como consequência, identificaram como padrão de repetição cinco cadeiras, ao invés de quatro, e todo o raciocínio desenvolvido resultou na apresentação de *Soluções* que não são as corretas. Porém, verificou-se a seleção de uma *Estratégia* de resolução eficaz e a mobilização de *Construções reconhecidas* essenciais à apresentação de *Soluções* e *Justificação* para o raciocínio desenvolvido.

Relativamente ao problema dos gelados, os alunos aplicaram como estratégia um esquema/desenho representativo da situação descrita – *Estratégia*, o qual reproduzimos seguidamente, mantendo a estrutura e sequência por eles utilizada.



Figura 4.157 – Reprodução do esquema combinação de gelados

Relativamente ao esquema reproduzido, destaca-se que esse foi surgindo à medida que os alunos exploravam o enunciado: (1) *se escolher morango pode optar por copo ou então por cone* [escreveu morango e representou, através de desenho, um copo e um cone] e (2) *se for o de chocolate* [escreveu] *pode também ser copo ou cone* [voltou a desenhar].

O processo de abstração foi auxiliado pela representação dos alunos, dando origem à apresentação de *Soluções* intermédias, tal como se pode verificar no diálogo que se segue:

GI: Quatro gelados, tens dois copos vezes dois sabores [escreveu, sendo interrompido]
 LP: Copos não! É um copo e um cone!
 GI: Não, estava a falar da base do gelado [escreveu bases por baixo de copo].
 [GI continuou a leitura em voz alta]: E agora se juntarmos outro sabor, o de ananás?
 LP: Mas só com duas bases?
 GI: Sim.
 LP e GI [quase em simultâneo]: duas bases vezes três sabores.
 GI: E agora se tivermos mirtilo?
 LP: vezes quatro, é igual.

Figura 4.158 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

Pode-se constatar, através do diálogo anterior, que os alunos deduziram de imediato, observando o esquema produzido, que a *Solução* à questão colocada seria quatro. A *Justificação* resultou, no entanto, da interpretação do esquema produzido – *tens dois copos vezes dois sabores* – bem como da integração de *Construções reconhecidas*, designadamente a operação multiplicação. Verifica-se, no mesmo diálogo, a generalização do processo a um número superior de sabores.

A resposta apresentada à mensagem deixada na primeira pista – *Quantos abdominais fará o vosso grupo e quantos abdominais serão feitos por n grupos de quatro elementos cada* – revelou, da parte dos alunos, capacidade para integrarem *Construções reconhecidas*, tais como a estrutura multiplicativa e a interpretação de linguagem simbólica.

O diálogo que se segue transmite a percepção que os alunos demonstraram ter para interpretar e integrarem esses conhecimentos.

GI: Quantos são os elementos [ajeitou a tarefa para procurar a informação no enunciado] do grupo? Quatro [apontou]... então 4×20 , 80 [LP acenou, concordando, e GI registou o resultado].

Figura 4.159 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Campo de férias* (GI, LP)

Constata-se, como tal, a integração e combinação de *Estruturas reconhecidas*, designadamente a multiplicação, que contribuirá para a apresentação da *Solução*, 80.

Na figura que se segue, respeitante ao padrão pictórico, podemos constatar que os alunos identificaram o padrão de repetição de polígonos.



Figura 4.160 – RA padrão de polígonos em *Campo de férias*

A *Estratégia* utilizada – separação do motivo de repetição permite verificar que os alunos compreenderam que o padrão é constituído por quatro polígonos que respeitam a sequência: pentágono, triângulo, círculo e quadrado. Para responderem à solicitação – *indica que polígono se encontrará na posição 28*, os alunos utilizaram o padrão identificado.

LP: Quantos temos?
GI [iniciou a contagem, apontando com o lápis]: 14. [...]
LP: Se tens 14 e queres 28, é o dobro. É como se fosse uma fita [apontando para a sequência pictórica] e outra fita igual por baixo, o polígono da figura 28 é o último [apontando para o último triângulo representado].

Figura 4.161 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Campo de férias* (GI, LP)

O diálogo anterior transmite que para integrarem a contagem no processo de resolução, como sendo uma *Construção Reconhecida*, os alunos utilizaram também o conceito de dobro para, aplicando a *Estratégia como se fosse uma fita*, obterem o polígono que se encontra na vigésima oitava posição. A representação que se segue pretende esquematizar o processo de abstração desenvolvido pelos alunos.

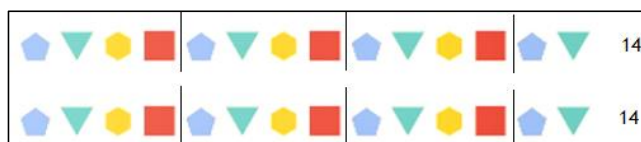


Figura 4.162 – Representação do raciocínio desenvolvido pelos alunos

Embora tenham reconhecido corretamente o padrão pictórico, e selecionado uma *Estratégia* útil para a rápida identificação do polígono situado na vigésima oitava posição, os alunos cometeram o erro de “duplicar” uma fita que continha dois polígonos que excediam o padrão identificado, apresentando como resposta o triângulo. A *Estratégia* utilizada teria sido eficaz caso repetissem o friso que se exemplifica de seguida, o qual os conduziria, de acordo com o raciocínio que estabeleceram, à identificação do polígono situado na vigésima oitava posição – o quadrado.

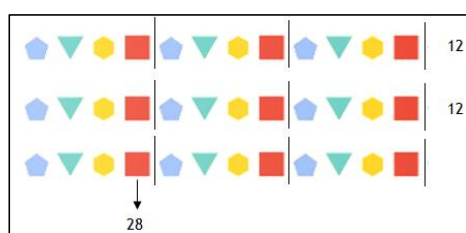


Figura 4.163 – Generalização do padrão de polígonos

Ao transitarem para a observação do padrão numérico deixado na terceira pista: 7, 11, 15, 19 e 23, os alunos evidenciaram dificuldades associadas à interpretação da expressão algébrica, a qual estaria relacionada com a sequência de números apresentada. Tais dificuldades levou-os a optar por abandonar a questão e a seguir com a resolução da tarefa. Regressaram a esta questão quando terminaram a tarefa e, foi nesse momento, que foi possível constatar como interpretaram o enunciado e as expressões algébricas, a razão das suas dúvidas e como integraram conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores. Inicialmente, os alunos mobilizaram a sua atenção para a estrutura de números apresentada, procurando identificar uma relação entre eles, o que os levou a concluir que se tratavam de *números ímpares*, cuja regularidade seria de *quatro em quatro*. O desenvolvimento da compreensão do significado atribuído às expressões algébricas (A) $5n + 2$; (B) $4n + 3$ ou (C) $4n + 1$ surgiu mais tarde. O diálogo que se segue procura expressar como obtiveram resposta para a questão colocada:

GI: Deixa ver as opções. O que é o n ?
 LP [voltou a ler]: representa a posição de cada número. [...]
 GI: Só poderiam ser as opções B e C, pois é de quatro em quatro e não de cinco em cinco.
 Como é preciso calcular os números seguintes, acrescentamos mais um. Por isso só pode ser a C.

Figura 4.164 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

O diálogo estabelecido pelos alunos GI e LP, em torno do significado atribuído à letra n , transmite compreensão da situação enunciada e a mobilização de *Construções reconhecidas* em tarefas desenvolvidas anteriormente, quanto ao uso de linguagem simbólica. Porém, os alunos não conseguiram relacionar o significado de n , por eles percebido, com as expressões algébricas apresentadas, incompatibilidade que os levou a desistir da resolução da questão. Quando, mais tarde, retomaram esta questão, os alunos não voltaram a questionar o significado de n , partindo para a análise comparativa das três expressões algébricas apresentadas. Compreenderam que a regularidade observada relacionava-se com os múltiplos de quatro, o que os levou a excluir a expressão $5n + 2$. Contudo, a justificação para essa exclusão revelou-se intuitiva, podendo também estar associada ao facto de os alunos terem observado a presença do número cinco nessa expressão, ao invés do número quatro. Nesta situação, o processo *Construir* iniciou-se com a integração de *Construções reconhecidas*, porém, a dificuldade em interpretar o significado das expressões algébricas e em estabelecer uma relação entre a ordem e o respetivo termo não permitiu que apresentassem uma solução correta. Os alunos selecionaram a primeira opção, interpretando incorretamente o significado de $+1$ na expressão por eles selecionada: $4n + 1$. Para eles, $+1$ representaria a obtenção do termo de ordem seguinte.

Segue-se uma análise pormenorizada, quanto ao desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, do processo de generalização do padrão geométrico deixado na quarta pista. A figura que se segue transmite como os alunos representaram o seu raciocínio, integrando conhecimentos adquiridos que lhes permitiram alcançar *Solução* e *Justificação* para as diferentes solicitações.

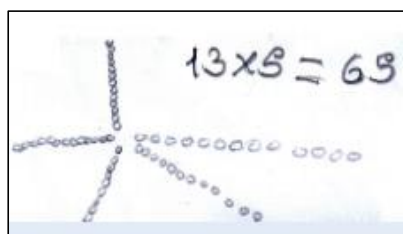


Figura 4.165 – RA respeitante à tarefa Campo de férias

A análise das representações e respostas apresentadas pelos alunos permitiram constatar compreensão do padrão geométrico de crescimento, bem como a generalização da regularidade observada a valores numéricos superiores, como ao

termo de ordem quatro e a outros não consecutivos, tal como o termo de ordem treze. A generalização aritmética, para o décimo terceiro termo, permite confirmar que os alunos estabeleceram uma relação entre o número de ordem treze e o número de círculos de cada ramificação. Essa foi reforçada pela seleção da operação multiplicação que serviu para contabilizarem o número total de círculos da décima terceira construção, bem como pela postura do aluno GI – *tens que desenhar 13 círculos [...]* *tens que os fazer muito pequenos*, que incentivou o colega LP a reproduzir uma construção trabalhosa quando já tinha identificado a relação numérica entre termo e respetiva ordem.

Segue-se a análise da resposta apresentada ao problema dos apertos de mão que, tendo sido interpretado de forma errónea, gerou a produção de soluções incorretas. Os alunos interpretaram que cada amigo apertaria a mão aos outros quatro amigos. Para apresentarem uma solução, selecionaram a multiplicação e reproduziram o respetivo algoritmo – *Estruturas adquiridas* – obtendo a resposta – *foram dados vinte apertos de mão*.

A dificuldade gerada por este problema e a análise prévia da resposta apresentada pelos alunos foi, após a conclusão da tarefa, selecionada para discussão em contexto sala de aula. A dificuldade generalizou-se a outros alunos, tendo sido sugerida a simulação da situação.

O diálogo que se segue transmite o que se passou em contexto sala de aula, quando os alunos foram confrontados com a apresentação de uma resolução incorreta e decidiram aplicar a *Estratégia* sugerida – simulação dos apertos de mão.

Quando o segundo aluno ia para voltar a cumprimentar o aluno que já tinha sido cumprimentado por ele a professora parou-os]:
P: Atenção à segunda frase do problema, dois alunos não se cumprimentam mais do que uma vez e já ias voltar a cumprimentar a Ana.
[Os alunos riam-se com a brincadeira, começando de novo. No final da representação a professora questionou]
P: A expressão está, ou não, correta?
[A Ana foi imediata]
Ana: Não, não é só 5×4 , eles tinham que fazer $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.
João [respondeu em sobressalto, passados breves instantes]: 60.

Figura 4.166 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (alunos da turma)

Constata-se que houve necessidade de voltar a direcionar a atenção dos alunos para o enunciado do problema – *dois alunos não se cumprimentam mais do que uma vez* – situação que obrigou os alunos a voltarem a simular o processo. Foi a Ana, uma colega de turma de GI e LP, quem explicitou o procedimento a ter para contabilizar o número de apertos de mão, integrando, erradamente, o conceito de multiplicação – *Construções reconhecida e Justificação*. Foi o João quem apresentou a resposta, *Solução*, para a questão colocada. A figura que se segue exemplifica, através de excertos selecionados, situações em que ocorreu o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* (B) sob a presença das subcategorias *Estratégias* (Es), *Construções reconhecidas* (CR), *Soluções* (S) e *Justificação* (J).

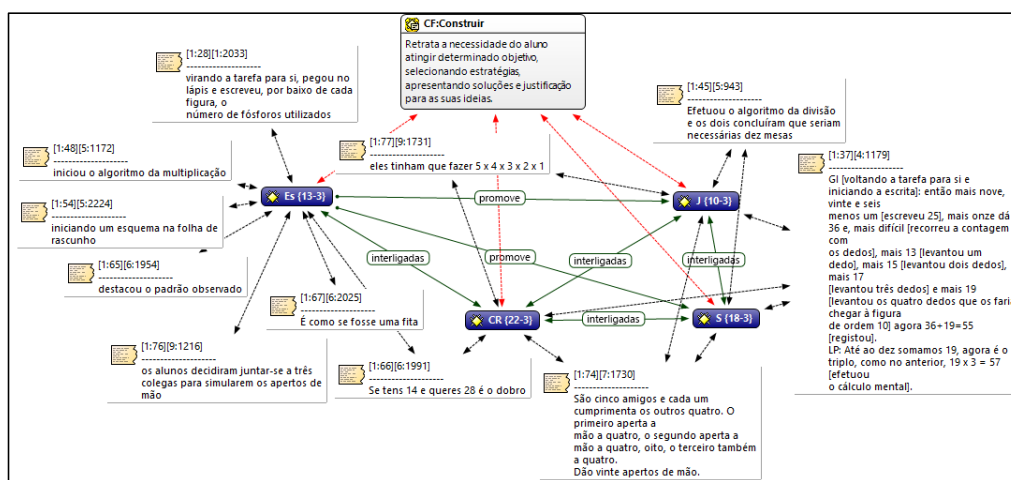


Figura 4.167 – RAV da ação epistémica *Construir* em Campo de férias

A figura 4.167 revela que a ação epistémica *Construir* se evidenciou através das quatro subcategorias definidas, das quais se destacam as *Estratégias* (Es) aplicadas pelos alunos pelo facto de essas se terem revelado essenciais para a integração de *Construções reconhecidas* (CR) e para a apresentação de *Soluções* (S) e *Justificação* (J) para as solicitações feitas. Os alunos esquematizaram os dados enunciados [1:28] [1:54], aplicaram algoritmos [1:48], destacaram estruturas essenciais [1:65], recriaram situações [1:67] [1:76] e integraram *Construções reconhecidas* (CR), tais como o conceito de dobro [1:66] e a seleção da multiplicação [1:77] para desenvolverem o seu raciocínio. Foi nesse sentido que obtiveram *Soluções* (S), ainda que nem sempre essas fossem as pretendidas, e *Justificaram* (J) as suas opções, preenchendo a tabela [1:37] e apresentando resposta ao problema das mesas do refeitório [1:45] e ao problema dos apertos de mão [1:74].

A tabela que se segue sintetiza características evidenciadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, respeitantes a cada categoria identificada.

Tabela 4.37 – Síntese da ação epistémica *Construir* em Campo de férias

Categoria: <i>Construir</i> (B)		
Subcategorias	Estratégias Es	<ul style="list-style-type: none"> • Representaram o seu raciocínio através de desenhos e esquemas; • Traduziram a regularidade dos padrões geométricos para valores numéricos; • Efetuaram cálculos para estabelecerem relações; • Seleccionaram representações do quotidiano, fita para interpretar padrões pictóricos (polígonos); • Recriaram a situação enunciada para estabelecerem relações e adotarem um raciocínio que lhes permita descobrir a solução do problema.
	Soluções S	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentaram cálculos e soluções intermédias; • Reproduziram informações nos esquemas e desenhos reproduzidos, retirando dessas informações que contribuíram para o desenvolvimento do processo de construção; • Generalizaram regularidades numéricas a valores numéricos conhecidos, consecutivos ou não. • Deram continuidade a padrões geométricos, construindo termos consecutivos ou não.
	Justificação J	<ul style="list-style-type: none"> • A justificação dos raciocínios desenvolvidos esteve presente na interação e partilha verificada entre alunos, bem como na apresentação de respostas às questões colocadas.
	Construção reconhecida CR	<ul style="list-style-type: none"> • Integraram conceitos e procedimentos diversos, tais como o cálculo (as quatro operações básicas), fizeram esquemas e uso da representação tabular, integraram os conceitos de dobro, triplo, tabuadas, linguagem simbólica, entre outros.

Síntese. Da análise do desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, decorre que a ação epistémica *Estratégias* assume bastante importância no desenvolvimento do processo de abstração. É a aplicação dessas *Estratégias* que promovem a integração de *Construções reconhecidas* que, por sua vez, se traduzem na apresentação simultânea de *Soluções* e *Justificação* para o raciocínio desenvolvido. Considera-se que estas três últimas subcategorias se mantêm interligadas, estabelecendo uma relação próxima entre si, durante a construção do conhecimento matemático. Por sua vez, constata-se que a aplicação de *Estratégias* promoveu, em algumas situações de imediato, a *Justificação* e a apresentação de *Soluções* para as questões colocadas. Tal situação poderá justificar o facto de as subcategorias *Soluções* e *Justificação* manterem-se interligadas durante o processo de construção.

4.7.3 Construção

O processo de *Construção* esteve, na resolução desta tarefa, associado à generalização de padrões geométricos, pictóricos e numéricos e à resolução de problemas não rotineiros que estimulam a observação, combinação e a extensão de relações numéricas.

O processo de generalização surge com a extensão de um padrão geométrico, cuja regularidade foi transferida para valores numéricos. Iniciou-se com a extensão a valores numéricos não consecutivos, estendendo-se, depois, a valores indeterminados

representados pela letra n cujo significado seria o número de ordem de uma dada construção de fósforos.

O diálogo seguinte revela como se processou a generalização do número de fósforos da construção de ordem n .

LP [...] Agora é pior, querem o número de fósforos de qualquer construção, um número qualquer. [fez-se silêncio] [...]
 G1: Também é o dobro, podes escrever o n vezes dois [...]
 LP [confirmando as suas ideias]: Aqui [apontando] é para apresentar resultados com o n e colocar o dobro do número. [...]
 LP: Sim, é sempre vezes dois. [...]
 G1: Não, é mais dois! [...]
 G1: Na primeira construção, para n igual a um dariam dois fósforos e só utilizaram um. [...]
 G1: Também não, dá 4 e só podemos utilizar 3! [Fez-se silêncio durante alguns instantes] [...]
 G1 [continuou o silêncio, até que G1 soltou, em sobressalto, a frase]: É só tirar 1! Tirar 1 ao dobro! [...] [LP escreveu a expressão que ambos concluíram: $n \times 2 - 1$...].

Figura 4.168 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (G1, LP)

O diálogo anterior permite constatar que os alunos alcançaram a primeira construção objetivada, tendo essa resultado da combinação e *Reorganização* de construções e relações numéricas reconhecidas. O processo de *Generalização* foi sendo exposto através do diálogo mantido entre alunos, em linguagem natural, mas também expresso em linguagem simbólica. Os alunos demonstraram, como tal, habilidade para mobilizarem a sua interpretação quanto à presença da letra n e competências adquiridas para conceberem a expressão algébrica – *Comunicação*.

A figura que se segue transmite o raciocínio anteriormente descrito e a dificuldade dos alunos em generalizarem o número total de fósforos gastos nas primeiras n construções.

Número de ordem da figura (n)	Número de fósforos gastos na construção da figura (n)	Número total de fósforos gastos nas primeiras n figuras
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
10	19	100
30	67	1020
...
n	$n \times 2 - 1$	$+ n^2 = \text{ímpar}$

Figura 4.169 – RA sobre o preenchimento de tabelas na tarefa Campos de férias

No que respeita à generalização da regularidade observada a um número indeterminado, os alunos, que já tinham aplicado incorretamente o raciocínio

proporcional, indicaram, apenas, $+n$.º ímpar. Sugerem, assim, que para obterem o número total de fósforos utilizados até à construção n necessitam de conhecer o número total de fósforos utilizados até à construção $n - 1$ e adicionar-lhe um determinado número ímpar. A dificuldade manifestada pelos alunos parece relacionar-se com o facto de o padrão não apresentar um crescimento linear, sendo que não conseguiram associar a sequência dos números corretamente determinados - 1, 4, 9, 16, 25, 36 ao respetivo termo geral: n^2 .

O problema das mesas do refeitório incentivava, também, a generalização da regularidade identificada a um número indeterminado, n , de pessoas. Os alunos deram continuidade ao raciocínio desenvolvido nas questões anteriores, o qual continha incorreções, não tendo sido possível verificar se conseguiriam desenvolver mecanismos para obterem uma das construções solicitada, ou seja, uma expressão algébrica que permitisse obter o número de mesas necessárias para sentar n pessoas. O diálogo que se segue transmite como pensaram:

GI [efetuou a leitura, tecendo algumas considerações]: Quantas cadeiras são necessárias para um número qualquer de pessoas e quantas mesas.
 GI: cadeiras é como nesta [apontando para a questão anterior] será $n \times 5$ [escreveu e continuou] e mesas é como este [apontado para outra resposta dada] $n : 5$.
 LP: Mas se as pessoas... se forem n então sentam-se no mesmo número de cadeiras. [apontou para a resposta $n \times 5$] Também são n cadeiras, n pessoas, n cadeiras, uma cadeira para cada uma.
 GI [voltou a prestar atenção à resposta apresentada e à questão anteriormente colocada e, passados alguns instantes]: então esta resposta [apontando para a questão anterior] está mal?! Não, está bem, aqui é que é n [apagou, escrevendo n] eu é que estava a pensar que era o mesmo.

Figura 4.170 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

O diálogo apresentado na figura anterior começa por transmitir a relação entre o número indeterminado de pessoas e a letra n . Contudo, os alunos, considerando tratar-se de uma questão semelhante às anteriores, interpretaram n como se tratasse do número de mesas e não como sendo o número de cadeiras – *Reorganização* – apresentando a expressão algébrica $n \times 5$ – *Comunicação*. A revisão da resposta, efetuada por LP, permitiu, porém, que identificassem o erro cometido – *se forem n então sentam-se no mesmo número de cadeiras* – e corrigissem a resposta, generalizando a regularidade a valores indeterminados. Relativamente ao número de mesas necessárias, deram continuidade ao raciocínio desenvolvido nas alíneas anteriores, considerando que necessitariam da quinta parte do número de pessoas – *Reorganização*. Por fim, apresentaram como generalização, embora incorreta, a expressão algébrica $\frac{n}{5}$ para representarem o número de mesas necessárias – *Comunicação*.

Ainda que se registem incorreções no processo de generalização, os alunos revelaram percepção do significado de número indeterminado, bem como do significado atribuído às expressões algébricas por si construídas. A *Construção* foi parcialmente atingida, mas os alunos revelaram habilidade para *Reorganizar* conhecimentos e soluções já obtidas, no sentido de conceberem a generalização. Esses *Comunicaram* em linguagem formal o seu raciocínio, expressando a generalização do processo construído.

O processo de *Construção* – generalização a um número indeterminado – volta a verificar-se com a obtenção de resposta à questão deixada na primeira pista. O diálogo seguinte transmite de que forma os alunos mobilizaram conhecimentos para apresentarem uma expressão algébrica representativa do número de abdominais feitos por n grupos de participantes:

GI: Se n for o número de grupos quantos abdominais se fazem ao todo? LP: $n \times 20$. GI: Não, todos os elementos do grupo fazem abdominais, vinte cada um... LP: Ah... um grupo faz 80 [apontando para a alínea anterior] ... GI: $n \times 80$, também não é muito difícil.

Figura 4.171 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

Os alunos manifestaram compreensão imediata quanto à necessidade de apresentarem uma expressão algébrica que representasse a generalização do número de abdominais a um número indeterminado de grupos. A incorreção, inicialmente cometida, deveu-se a um erro de interpretação, n grupos e não n elementos de um grupo, que rapidamente foi detetada por LP. Para a nova *Construção* verificou-se da parte dos alunos, a integração do raciocínio já desenvolvido, $4 \times 20 = 80$, abdominais feitos pelos elementos de um grupo, e a combinação com os novos dados enunciados – n é número de grupos participantes. Tratou-se da *Reorganização* de construções adquiridas de modo a conseguir-se atingir o objetivo da questão, a *Generalização*. Essa *Generalização* resultou do processo de abstração, tendo sido expressa oralmente e por escrito, $n \times 80$ – *Comunicação*.

A *Construção* manifestou-se, também, com a obtenção de resposta para a mensagem deixada na pista número quatro. Os alunos tinham evidenciado, durante o desenvolvimento da ação *Construir*, compreensão da regularidade presente na sequência de figuras, noção do significado de n e da relação entre a ordem n e o número de círculos do termo de ordem n . Foram esses conhecimentos, resultantes da experiência obtida com as questões anteriores, que ao serem *Reorganizados*, conduziram os alunos à *Comunicação* da *Generalização* concebida.

O problema dos apertos de mão exigiu dos alunos o desenvolvimento do raciocínio combinatório, designadamente a compreensão da relação estabelecida entre os dados numéricos envolvidos. Entende-se que o raciocínio desenvolvido com um número finito de amigos, apenas cinco amigos, possa ser generalizado a um número indeterminado de amigos. O diálogo que se segue transmite de que forma se verificou o processo de abstração.

LP: Agora já não dizem quantos são os amigos, é um número qualquer de amigos [apontou com o dedo].
 GI: Se tivermos mais do que cinco... dez, fazemos dez vezes nove. Cada um aperta a mão aos outros que se contam sem ele. Agora temos um número qualquer.
 LP: o número n de amigos [GI pareceu concordar] e fazemos vezes menos um.
 [GI escreveu a expressão $n \times n - 1$ e ficou pensativo. Entretanto, sem que os dois voltassem a falar, corrigiu a expressão para $n \times (n - 1)$...].

Figura 4.172 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

O diálogo anterior permite verificar que os alunos, embora não tendo apresentado uma expressão que traduzisse corretamente a situação descrita, pensaram algebricamente. Os alunos selecionaram a letra n para representarem um número indeterminado de amigos e, generalizando o raciocínio desenvolvido com os cinco amigos – *Reorganização* – *Comunicaram a Generalização*. Considera-se que se a interpretação da situação descrita tivesse sido a correta, o processo de *Generalização* esperado não estaria comprometido. Apresenta-se, seguidamente, a forma como os alunos *Comunicaram* a sua nova *Construção*:

The image shows a handwritten note on a light blue background. At the top, it says $m \times (m-1) =$. Below this, there is a handwritten explanation in Portuguese: "o mº de amigos total x eles - 1 porque se eu dar um aperto de mão a um grupo de 5 amigos são 4 porque eu não conto".

Figura 4.173 – RA respeitante à tarefa Campo de férias

A figura 4.173 apresenta pequenos excertos, selecionados pela investigadora, que procuram exemplificar em que situações se observou o desenvolvimento das subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação*, e de que forma essas se relacionaram com nova *Construção*.

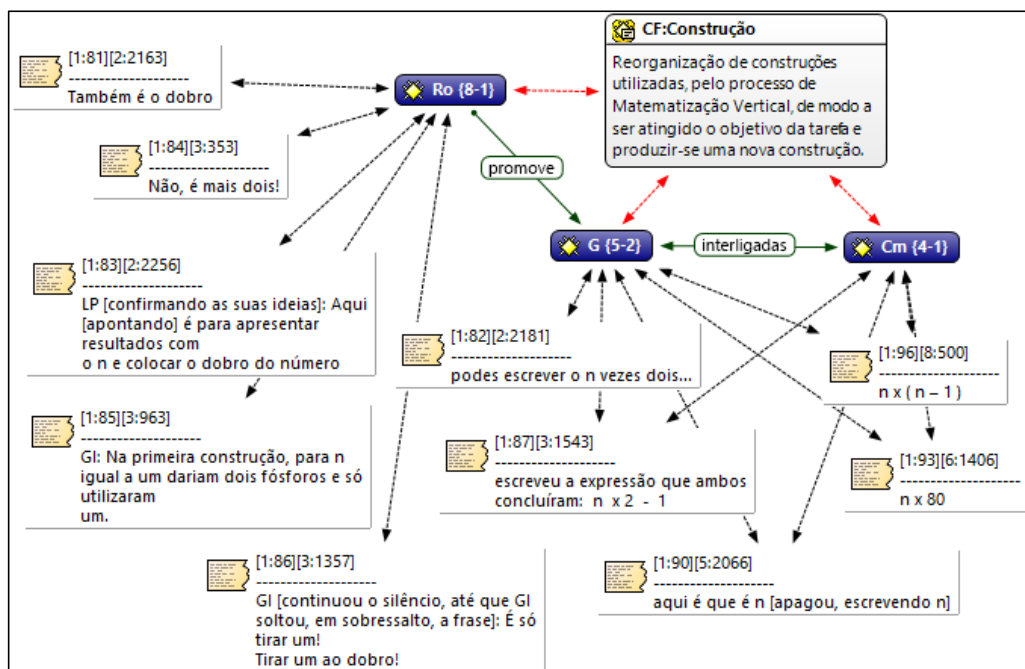


Figura 4.174 – RAV da ação epistêmica Construção em Campo de férias

A figura 4.174 revela que a *Reorganização (Ro)* de *Construções reconhecidas* e dos resultados apresentados durante o processo de resolução promoveram a *Generalização (G)* das regularidades e das relações identificadas. A *Generalização (G)*, correspondente ao número de fósforos necessários para a construção de ordem n [1:87], resultou da *Reorganização (Ro)* dos conhecimentos mobilizados, tais como o conceito de dobro [1:81], o raciocínio aditivo [1:84] e a utilização de linguagem simbólica [1:83], da exploração do enunciado [1:85] e da integração das relações numéricas identificadas [1:86]. Ao combinarem de forma organizada os referidos conhecimentos, os alunos obtiveram a *Generalização (G)* pretendida [1:87], a qual resultou, na situação esquematizada, do aperfeiçoamento da *Generalização (G)* anteriormente apresentada [1:82]. Esta *Generalização (G)*, tal como outras que se seguirão, foram *Comunicadas (Cm)* à medida que iam surgindo, situações que explanam a ligação existente entre as duas subcategorias. Neste esquema é possível, ainda, observar a *Generalização (G)* e *Comunicação (Cm)* do número de cadeiras necessárias para sentar n amigos no refeitório [1:90], o número de abdominais feitos por n grupos [1:93] e a tentativa de generalização do número de apertos de mão efetuados entre n amigos [1:96].

Na tabela que segue sintetizam-se todas as características evidenciadas durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Construção*, e que se expressaram através das subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação*.

Tabela 4.38 – Síntese da ação epistémica *Construção em Campo de férias*

Categoria: <i>Construção (C)</i>		
Subcategorias	Reorganização (Ro)	<ul style="list-style-type: none"> Os alunos combinaram construções adquiridas em aprendizagens anteriores com os raciocínios desenvolvidos na tarefa, estendendo o conhecimento adquirido; Combinaram dados enunciados com a informação dos esquemas e representações geométricas e pictóricas produzidas, reorganizando-os no sentido da nova <i>Construção</i>.
	Generalização (G)	<ul style="list-style-type: none"> Interpretaram o significado de número indeterminado e utilizaram linguagem simbólica para generalizarem as regularidades e relações numéricas observadas; Estenderam a regularidade observada em tabelas, padrões e esquemas.
	Comunicação (Cm)	<ul style="list-style-type: none"> Expressaram, em linguagem natural e em linguagem matemática, a nova <i>construção</i>.

Síntese. Verificou-se, uma vez mais, que a ação epistémica *Construção* manifestou-se através das subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação*. Constata-se, também, que o processo de *Reorganização* continua a manifestar-se como essencial à *Generalização* de dados e ideias. A *Reorganização* promoveu, como tal, a *Generalização* do processo observado, tendo, esta última, evoluído à medida que os alunos expuseram oralmente as suas ideias. As subcategorias *Generalização* e *Comunicação* desenvolveram-se, mantendo-se interligadas, no sentido em que a partilha de ideias também contribuiu para aperfeiçoar o processo de *Generalização*. Destaca-se, novamente, o desenvolvimento da subcategoria *Reorganização*, a qual poderá ocorrer mais do que uma vez no mesmo processo de *Construção*, pois essa contribuiu não só para que a *Generalização* tenha ocorrido, como também para que fosse aperfeiçoada.

4.7.4 *Consolidação*

A resolução da presente tarefa evidenciou, à semelhança das anteriores, que os alunos mobilizaram construções adquiridas para conceberem a nova *Construção* e que a *Consolidação* também se manifestou durante o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*.

O excerto que segue reporta-se a momentos diferenciados da resolução da tarefa em que se verificou a *Aplicação de construções recentes*, tal como se pode constatar:

LP: n são as construções ... olha aqui a primeira tem 1 fósforo, a segunda tem 2 fósforos, a terceira tem 5 [...]
 LP [confirmando as suas ideias]: Aqui [apontando] é para apresentar resultados com o n e colocar o dobro do número [...]
 GI: $55 + 57$ é $100... 122$ [escreveu]. Agora para $n...$ muito pior [ajeitou a tarefa para que os dois conseguissem ter maior visualidade dos dados preenchidos] [...]
 GI: Se n for o número de grupos, quantos abdominais se fazem ao todo?
 LP: $n \times 20$. [...]
 GI: É para dizer que agora o número de amigos aumentou para um número indeterminado que é n .

Figura 4.175 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Campo de férias* (GI, LP)

Perceciona-se, através do diálogo anterior, uma reação natural à presença de linguagem simbólica – *n são as construções e é para apresentar os resultados com o n* – e maior autonomia na interpretação do conceito de indeterminação – *aumentou para um número indeterminado que é n* – bem como na leitura e seleção de linguagem simbólica para expressar a generalidade – *se n for o número de grupos* então fazem-se $n \times 20$ abdominais.

Paralelamente, verifica-se que os alunos revelaram maior tendência para procurarem regularidades na informação enunciada, para estabelecerem relações entre os dados e conhecimentos adquiridos, maior habilidade para interpretar e explorar as potencialidades das tabelas, bem como propensão para representarem o seu raciocínio através de desenho e/ou esquemas. Todas estas evidências fazem transparecer, ainda que, por vezes, com alguma subjetividade, maior tendência para explorarem a tarefa e representarem o raciocínio, verificando-se o desenvolvimento da ação epistémica *Consolidação*.

A aplicação destas *Construções* também se evidenciou através da manifestação de *Características psicológicas*. Constata-se que os alunos revelaram maior autonomia na interpretação dos enunciados, da linguagem simbólica e da informação representada na tabela. Adotaram, em situações diferenciadas, uma postura corporal que mostrou rapidez e segurança nas opções tomadas, revelando uma interpretação natural dos dados e habilidade para integrarem, de imediato e com autonomia, competências adquiridas.

A figura que se segue exemplifica, através da seleção de pequenos excertos, em que momentos a ação epistémica *Consolidação* esteve presente, e qual a relação estabelecida entre as respetivas subcategorias.

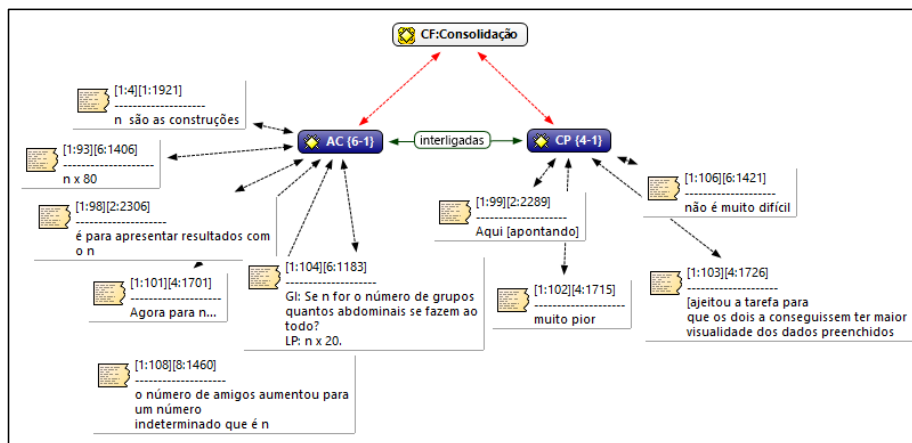


Figura 4.176 – RAV da ação epistémica *Consolidação* em Campo de férias

A figura 4.176 permite verificar que o desenvolvimento da ação epistêmica *Consolidação* (Co) ocorreu através da manifestação das subcategorias *Aplicação de construções recentes* (AC), globalmente associadas à interpretação do significado de n [1:4] [1:98] [1:101] [1:108] e à aplicação de linguagem simbólica, para expressarem ideias e a generalização pretendida [1:104] [1:108]. Verificou-se, igualmente, que os alunos identificaram, com maior significado e autonomia situações, que exigiriam maior esforço da sua parte [1:99] [1:106], geralmente associadas à generalização de regularidades e relações identificadas, bem como à seleção de linguagem simbólica para expressarem a nova construção. Evidenciaram, sobretudo, percepção quanto ao aumento do grau de dificuldade [1:102], focalizando maior atenção nos dados recolhidos, visando a identificação de regularidades ou relações numéricas [1:93][1:103].

A tabela que se segue faz referência aos aspetos mais relevantes evidenciados pelos alunos durante o desenvolvimento da *Consolidação*.

Tabela 4.39 – Síntese da ação epistêmica *Consolidação* em Campo de férias

Categoria: <i>Consolidação</i> (Co)		
Subcategorias	Aplicação de uma construção recente (AC)	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretaram o conceito de indeterminação e linguagem simbólica, dando origem à ação <i>Reconhecer</i>; • Leram autonomamente informação enunciada e contida em tabelas e padrões; • Fizeram uso de linguagem simbólica, iniciando o desenvolvimento da ação <i>Construir</i> e generalizando regularidades – <i>Construção</i>; • Representaram dados e ideias, expondo o seu raciocínio – <i>Construir</i>;
	Características psicológicas (CP)	<ul style="list-style-type: none"> • Revelaram autonomia, naturalidade e solidez na aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente.

Síntese. O desenvolvimento da ação epistêmica *Consolidação* evidenciou-se através do desenvolvimento das subcategorias *Aplicação de construção recente* e *Características psicológicas*. A *Aplicação de construções recentes* esteve, globalmente, associada à interpretação e mobilização de linguagem simbólica necessária ao desenvolvimento do processo de generalização. Contudo, constata-se da parte dos alunos maior atenção quanto aos dados enunciados, ou por si representados, e maior tendência para representarem ideias, podendo esta postura estar associada à experiência adquirida com a aplicação das tarefas anteriores. As *Características psicológicas* (CP) voltaram a manifestar-se durante a *Aplicação de construções recentes* (AC), associadas à postura dos alunos – naturalidade, na interpretação de linguagem simbólica e dos dados representados em tabelas, maior predisposição para identificarem regularidades e autonomia na resolução da tarefa. Relativamente à interpretação de linguagem simbólica, destacam-se os “desabafos” proferidos pelos alunos, para mostrar que esses parecem atribuir, agora, maior significado às letras, valorizando o seu papel na

representação da generalidade. Face ao exposto, considera-se que as subcategorias *Aplicação de construções recentes* e *Características psicológicas* mantiveram-se interligadas durante o desenvolvimento da ação *Consolidação*.

Destaca-se, uma vez mais, a presença da *Consolidação* na fase seguinte à de emergência da *Construção*, quando a ação epistémica *Construir* ainda está presente. Realça-se, ainda, a sua relação com a ação epistémica *Reconhecer*, com quem se manteve interligada, durante o período de tempo necessário à combinação e reorganização dos dados por parte dos alunos. Esta característica da ação *Consolidação* faz considerá-la necessária, mas independente das restantes ações epistémicas.

A figura que se segue esquematiza as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co), sintetizando conclusões descritas durante a apresentação dos resultados.

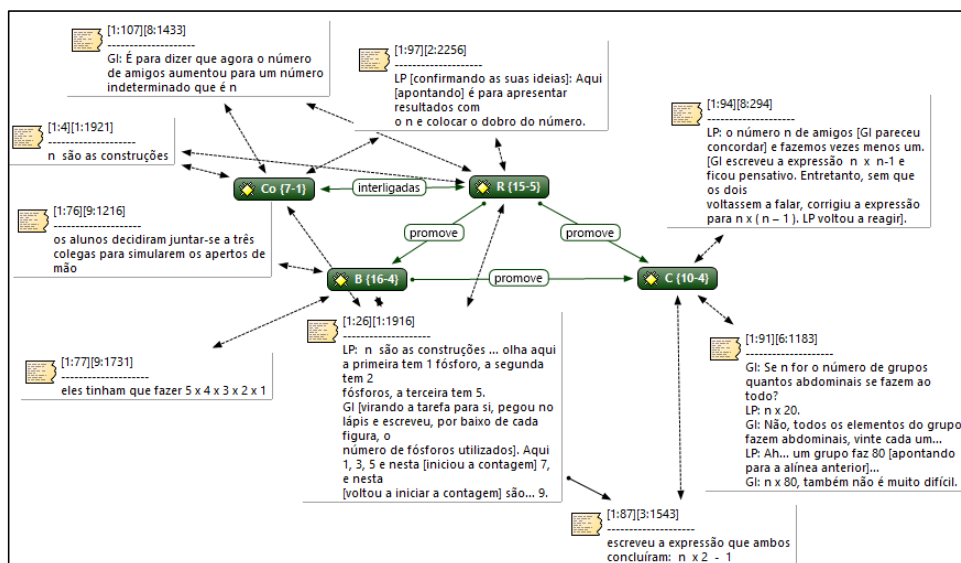


Figura 4.177 – Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em Campo de férias

A figura 4.177 revela que, no desenvolvimento do processo de construção, manifestaram-se todas as ações epistémicas do modelo *RBC+C*, tal como se tinha verificado nas tarefas anteriores, excetuando a primeira. Relativamente à relação estabelecida entre as diferentes ações epistémicas, pode-se constatar a interligação entre as ações epistémicas *Reconhecer* (R) e *Consolidação* (Co), manifestada através da interpretação de dados representados sob a forma tabelar e pictórica [1:4] ou de linguagem simbólica [1:97] [1:107]. Verifica-se, ainda, que a observação e interpretação de padrões e dados enunciados, estimulam a identificação de regularidades que favorecem o desenvolvimento do raciocínio e a apresentação de soluções intermédias [1:26] [1:77] [1:97] e, posteriormente, a nova *Construção* [1:87] [1:91] [1:94], explicando a implicação que *Reconhecer* (R) mostrou ter no

desenvolvimento da ação epistémica *Construir* (B) e *Construção* (C). A análise dos registos escritos dos alunos e audiovisuais permitem, ainda, compreender que é a ação epistémica *Construir* que mais valor acrescenta à *Construção*, no sentido em que a integração de construções reconhecidas, a aplicação de estratégias, a apresentação de soluções e justificação para o raciocínio desenvolvido aproximam os alunos da construção pretendida, tal como se constata através da figura anterior, na transição de [1:26] para [1:87], e de [1:91] para [1:94].

Síntese. A análise conjunta da manifestação das ações epistémicas do modelo *RBC+C* voltou a revelar uma relação próxima entre as categorias *Consolidação* e *Reconhecer*, no sentido em que o trabalho desenvolvido anteriormente, relativo à interpretação de linguagem simbólica, favoreceu uma interpretação autónoma dos enunciados da tarefa e desencadeou a seleção de estruturas que contribuiram para o desenvolvimento do processo de abstração. Acresce-se, ainda, maior predisposição para identificarem regularidades, para interpretar e manipular informação representada sob a forma de tabela ou pictórica, competências que também mostram estar associadas a aprendizagens adquiridas através da resolução das tarefas aplicadas anteriormente.

Entende-se, também, que o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, presente na interpretação de regularidades e relações, desencadeou a integração de construções e estratégias reconhecidas, as quais depois de aplicadas promoveram o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* e aproximaram os alunos da *Construção* pretendida. É nesse sentido que também se explica que a ação epistémica *Construir* promover o desenvolvimento da ação epistémica *Construção*. Por fim, volta-se a destacar a presença da ação *Consolidação*, no sentido em que essa se manifestou através da ação *Reconhecer* e evidenciou-se, com maior notoriedade, durante o desenvolvimento da ação *Construir*. Porém, nesta situação, foi à seleção de estratégias, à representação do raciocínio e à apresentação de soluções e justificações intermédias, ou seja, ao desenvolvimento da ação epistémica *Construir* a quem mais se deveu a *Construção* do novo conhecimento matemático.

4.7.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Professor.

O processo de mediação entre professora e alunos iniciou-se com a elaboração da tarefa, através da qual a professora objetivou estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico e a construção do novo conhecimento, tendo em consideração a manifestação das ações *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. Para tal, estruturou a tarefa no sentido de conduzir os alunos à sua exploração, à interpretação dos dados enunciados e à identificação de regularidades – *Reconhecer*, bem como ao

relacionamento e representação de dados e ideias – *Construir*, à generalização e à comunicação do raciocínio desenvolvido – *Construção*.

No excerto que se segue pode-se constatar a importância dada pela professora à fase de apresentação, preocupando-se em explicar o conteúdo presente na tarefa, em esclarecer dúvidas e em motivar os alunos para a resolução da mesma.

A professora transmitiu que o objetivo seria a realização de algumas das tarefas programadas, em particular que: a questão 1.1 referia-se à tarefa *Construções* programada para 2.ºf, a questão 1.2 ao almoço no *Refeitório da Escola* e a questão 1.4 às atividades dinamizadas no *Choupal*. A professora optou, nesta tarefa, por não proceder à leitura dos enunciados, ainda que as questões tenham sido projetadas e tenham sido feitas considerações globais acerca do assunto que essas transmitiam. Não surgindo qualquer dúvida, a professora distribuiu as tarefas em suporte papel].

Figura 4.178 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias

O excerto anterior destaca o desempenho da professora na apresentação e exploração da parte inicial da tarefa, em particular da estrutura da mesma, para que os alunos contextualizassem a situação e adquirissem melhor compreensão acerca do objetivo global definido. A distribuição da tarefa em suporte papel, para que os alunos tivessem oportunidade de manuseá-la e explorar enunciados, tabelas e esquemas é entendida como um incentivo, dado pela professora, à utilização do artefacto tarefa.

P: Esse n é igual a este n [apontando para a primeira coluna], repara no que diz a tabela, é o número de ordem da figura, ou seja, corresponde a cada uma das construções. [...]
P: Certo, se nos referimos à primeira construção, então n é igual a 1, se for à segunda, então n é igual a 2, se for à décima então n é igual a 10. Dizemos que n é a ordem, neste caso é o número ordinal da construção mas, ao número de fósforos de cada construção, já chamamos termo. Por exemplo, nesta [apontando para a terceira construção] a ordem, o n , é 3 e o termo é 5, vocês até já registaram esse termo!

Figura 4.179 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (P)

O excerto anterior transmite que a mediação estabelecida pela professora segue no sentido de conduzir os alunos à exploração de informação contida nas tabelas, para que possam reconhecer informação útil e desencadear o processo de abstração: *Reconhecer*. A professora introduz, de acordo com a resposta aos estímulos remetidos aos alunos, conceitos desconhecidos, ordem e termo, mas que podem ser úteis para a comunicação de ideias. A sua atuação poderá ter sido essencial para que os alunos adquirissem maior significado quanto à presença da letra n .

A interpelação constante, o incentivo à revisão das respostas dadas e as “dicas” lançadas em momentos chave assumiram bastante importância, no sentido em que contribuíram para que os alunos progredissem na tarefa e se sentissem entusiasmados com a sua realização.

P [sorrindo]: Não dá?! [...]
P [entusiasmada]: Troca lá isso por miúdos! [...]
P: Então, e para n igual a dois dá certo? [...]
P [quebrando o silêncio]: Não me parece que vocês, com a vossa fórmula, estejam assim tão longe do número de fósforos necessários para cada construção. [...]
Gl [continuou o silêncio, até que Gl soltou, em sobressalto, a frase]: É só tirar 1! Tirar 1 ao dobro! [...]
P: Parece-me bem, mas experimentem para ver se funciona [afastou-se]. [...]
P: Posso espreitar [começou a folhear a tarefa], não querem pensar um pouco mais nas respostas que deram, acrescentar alguma coisa?! [parou] Ainda não responderam a esta [apontou]. [...]

Figura 4.180 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (Gl, P)

O excerto presente na figura 4.180 reflete a mediação estabelecida pela professora durante o desenvolvimento da ação *Construir*, contribuindo para que os alunos progredissem no processo de abstração e alcançassem a *Construção* almejada. Pretendia-se que os alunos conseguissem, ao compreender a regularidade identificada e integrando construções reconhecidas, tais como o conceito de dobro, adição e subtração, obter a expressão algébrica $2n - 1$.

P: Ora, nesta coluna têm de registar o número total de fósforos gastos nas primeiras n figuras [os alunos mantiveram-se em silêncio e a professora esclareceu melhor]: se estiverem a fazer a construção n igual a 4, esta [apontando para a construção] usaram, no fim dessa construção, 7 mais 5, doze, mais três, quinze, mais um, dezasseis fósforos, certo?! [...]
P: Observem a sequência de números... o que veem?! [...]
P: Também! Mas há relação entre os números que veem? [...]
P: Agora é só verificar qual é a opção que se adequa a esta sequência. [deixou-os a refletir, voltando passados alguns instantes]
P: Atenção à segunda frase do problema, dois alunos não se cumprimentam mais do que uma vez e já iam voltar a cumprimentar a Ana.

Figura 4.181 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (P)

O excerto da figura 4.181 revela alguns momentos da resolução da tarefa em que a professora teve de intervir para esclarecer dúvidas colocadas pelos alunos, incentivar a identificação de regularidades – *Reconhecer* – a reflexão, a validade dos resultados e solicitar a revisão da interpretação efetuada e dos resultados apresentados – *Construir* e *Construção*. Destaca-se o facto de incentivar a exploração das potencialidades semióticas dos padrões – *apontando para a construção*, quer do padrão numérico – *observem a sequência de números* – como do padrão pictórico – *qual é a opção que se*

adequa a esta sequência – no sentido de conduzir os alunos à generalização da regularidade observada e sua comunicação em linguagem simbólica. A figura que se segue exemplifica de que forma se manifestou a mediação estabelecida pela professora, aquando do *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA) e à *Construção de Signos matemáticos* (ICS).

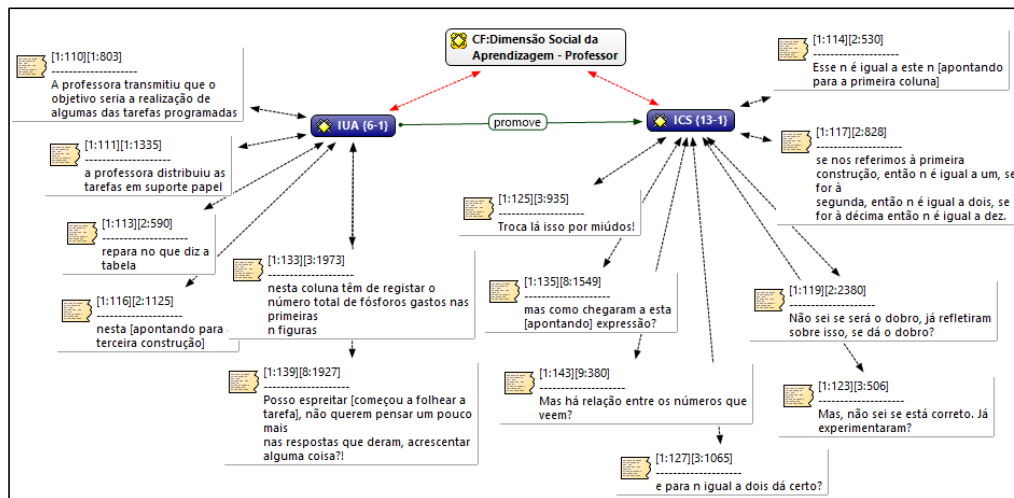


Figura 4.182 – RAV da DSA, Professor, em Campo de férias

De acordo com a figura apresentada, a atuação da professora evidenciou-se com o *Incentivo à utilização de artefactos* e à *Construção de signos matemáticos*. A professora procurou despertar o interesse pela tarefa [1:110], distribuindo-a em suporte papel para que os alunos a pudessem manusear [1:111]. Incentivou a exploração da tabela [1:113] [1:133] e dos padrões [1:116], solicitando a revisão da tarefa para seu aperfeiçoamento [1:139]. Por sua vez, é a exploração da tarefa que, mediada pela professora, conduz os alunos à *Construção de signos matemáticos* (ICS). A professora incentivou a interpretação da linguagem simbólica [1:114] [1:117] [1:127], a identificação de regularidades [1:143], a reflexão [1:119], a verificação das soluções [1:123] [1:127] e a exposição e clarificação do raciocínio desenvolvido [1:125] [1:135]. A tabela que se segue sintetiza as características principais do desenvolvimento das subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* e *Incentivo à construção de signos matemáticos*, descritas nesta secção.

Tabela 4.40 – Síntese da análise da DSA, Professor, em Campo de férias

Categoria: Professor (P)		
Subcategorias	Incentivo à utilização de artefactos (IUA)	<ul style="list-style-type: none"> Incentivou a exploração da tarefa; Incentivou a exploração das potencialidades de tabelas e padrões; Incentivou a representação do raciocínio através de esquema e/ou desenhos.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)	<ul style="list-style-type: none"> Promoveu o reconhecimento, a integração e reorganização de conhecimentos adquiridos previamente e direcionou a atenção dos alunos para a informação enunciada, estimulando a identificação de regularidades e a generalização.

Síntese. Realça-se, nesta tarefa, a diversidade de mediadores semióticos desenvolvidos pela professora para estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, entre os quais destaca-se a representação tabelar, a linguagem algébrica, os padrões numéricos, geométricos e pictóricos e a resolução de problemas de natureza algébrica. O artefacto desenvolvido e o incentivo à exploração da tarefa e aos respetivos instrumentos semióticos constituem uma forma de mediação desenvolvida, pela professora, e que proporcionou o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. Através da tarefa e da sua intervenção durante a resolução da mesma, a professora incentivou a interpretação dos dados enunciados, a identificação de relações e regularidades, bem como a seleção de estruturas adquiridas em aprendizagens anteriores – *Reconhecer*. Por sua vez, incentivou o relacionamento, a combinação de dados e conhecimentos já adquiridos, bem como a representação do raciocínio – *Construir*. Incentivou, também, a extensão de relações aritméticas, a generalização e a comunicação da nova construção com o maior rigor matemático que lhes era possível – *Construção*. O incentivo à manifestação da *Consolidação* está ligado à construção da própria tarefa e manifesta-se pela presença da linguagem simbólica, no incentivo à interpretação e utilização de formas diferenciadas de representação, bem como no incentivo à comunicação da nova construção.

Como tal, considera-se que a mediação estabelecida pela professora, na implementação e no *Incentivo à utilização da tarefa* e, em particular, das diferentes representações, foi essencial para que os alunos construíssem novos significados matemáticos.

4.7.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Alunos.

Nas figuras que se seguem apresentam-se pequenos excertos resultantes do diálogo estabelecido entre os alunos, durante a interpretação de enunciados escritos, dos padrões e da informação contida nas tabelas.

GI [interrompendo]: É o número de fósforos gastos na construção da figura [apontando e lendo a informação constante na tabela] ... n ?! O que é o n ?!

LP: n são as construções ... olha aqui a primeira tem 1 fósforo, a segunda tem 2 fósforos, a terceira tem 5.

GI [virando a tarefa para si, pegou no lápis e escreveu, por baixo de cada figura, o número de fósforos utilizados]. Aqui 1, 3, 5 e nesta [iniciou a contagem] 7, e nesta [voltou a iniciar a contagem] são... 9. [...]

LP: Podemos fazer desenhos ou esquemas.

GI: Não precisas, é fácil! Vê, nestas duas mesas tens [iniciou a contagem] 10 lugares. Se colocares mais uma mesa, tirando esta cadeira [apontou para a cadeira do topo esquerdo], acrescentas sempre cinco cadeiras. Com três mesas ficas com 15 lugares. E acrescentas sempre cinco.

GI [fez a leitura em silêncio e interrompeu]: precisamos de saber qual é o polígono, um destes, que está na posição 28.

LP: Quantos temos?

GI [iniciou a contagem, apontando com o lápis]: 14. Este [referindo-se ao primeiro polígono] tem 1,2 [continuou em silêncio] 5, é um pentágono. Depois temos triângulo, círculo, quadrado e depois novamente pentágono, triângulo, círculo e quadrado [entretanto destacou o padrão observado].

GI [interrompeu]: Olha vê [apontando] era um pentágono e começou a ficar com estas pontas, vê [redirecionando a tarefa para o colega ver] ganha mais uma bola em cada ponta, vê?

LP: E nos outros também. Na figura dois tens duas em cada ponta [apontando] e nesta [apontando] tens... já vi [voltou a folha para si e, apontando referiu] aqui três e agora quatro [começou a desenhar de imediato].

Figura 4.183 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

Os dados apresentados na figura anterior transmitem de que forma a mediação estabelecida entre alunos contribuiu para que eles fizessem uma interpretação conjunta da informação contida nas figuras e nas tabelas apresentadas. Os alunos combinaram, em algumas situações, os dados representados em linguagem natural, simbólica e pictórica, tal como ocorreu na questão da construção de fósforos. Relativamente à interpretação dessa questão, verificou-se que o processo de abstração iniciou-se com o questionamento de GI quanto ao significado de n , interpretado pelos alunos, na resolução de tarefas anteriores, como sendo um número indeterminado. Com o questionamento de GI surgiu, por parte de LP, a relação com as construções – n são as construções – seguindo-se a necessidade de concretizar o valor n para dar expressão ao significado por si atribuído. Os alunos combinaram a informação disponibilizada pela tabela, e transmitida pelas diferentes construções, verificando-se que GI transferiu a informação dada por cada construção para dados numéricos. Os alunos envolveram-se no processo de compreensão, designadamente na *Produção de signos coletivos*.

A imagem das mesas do refeitório constituiu um signo sob o qual o aluno GI refletiu, interpretando a regularidade e transferindo a representação pictórica para numérica – *Produção de signos individuais*. Foi a exploração da imagem das mesas que deu início ao processo de abstração, permitiu o desenvolvimento da ação *Reconhecer* que, por sua

vez, desencadeou a apresentação de soluções intermédias – *com três mesas ficas com 15 lugares – Construir*.

Relativamente ao padrão pictórico de polígonos, constatou-se que o processo de abstração iniciou-se com o estudo da imagem e com a respetiva recolha de informação. Ambos os alunos envolveram-se na interpretação do padrão apresentado, estando, nesta situação, o desenvolvimento da ação *Reconhecer* associado à seleção de conhecimentos adquiridos, tais como a identificação de polígonos, a contagem e a identificação de regularidades. Verificou-se que a comunicação entre alunos foi essencial para *Produção de signos coletivos*.

A *Produção de signos* evidenciou-se, também, com a interpretação da construção – *Reconhecer* – que, segundo GI se iniciava com um pentágono. Ao iniciarem a análise da figura, verificou-se da parte de GI o desenvolvimento do processo de abstração – *era um pentágono e começou a ficar com estas pontas*, que correspondeu à sua interpretação da regularidade do padrão geométrico – *Produção de signos individuais*. Porém, LP compreendeu e mobilizou o conhecimento partilhado por GI para desenvolver a sua interpretação da figura, contribuindo para a identificação da regularidade presente no referido padrão, iniciando a construção do desenho pretendido, ou seja, a construção da figura de ordem quatro – *Construir*. Os alunos envolveram-se na exploração do padrão geométrico e no desenvolvimento da construção pretendida – *Produção de signos coletivos*.

LP [iniciando um esquema na folha de rascunho]: se escolher morango pode optar por copo ou então por cone [escreveu morango e representou, através de desenho, um copo e um cone] e se for o de chocolate [escreveu] pode também ser copo ou cone [voltou a desenhar].
GI: Quatro gelados...

Figura 4.184 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Campo de férias (GI, LP)

No excerto anterior verificou-se que o esquema produzido na resolução do problema dos gelados, construído por LP à medida que fazia a leitura do enunciado, constituiu um instrumento produzido pelo aluno, *Produção de signos individuais*, que o auxiliou no processo de descodificação das instruções dadas – *Reconhecer* e, posteriormente, na apresentação de *soluções* intermédias – *Construir*. Apresenta-se, seguidamente, outros

momentos da mediação, estabelecida entre alunos, em que se verificou o desenvolvimento da ação epistêmica *Construir*:

LP: Pois é, nem vi [apagou rapidamente]. Na seis são 11, na sete 13, na oito 15, na nove 17, então é 19 [apresentou o resultado].
GI: Para a construção trinta necessitamos do triplo de 19 [apontando para a resposta]
LP [aceitando a ideia de GI]: três vezes nove, 27, dá 67 [escreveu].

GI: Para aí, para vermos qual a relação dos números. Vê $4-1=3$, aqui [apontando] dá mais três [LP escreveu], $9-4=5$, não dá igual?! $16-9=7$, também não dá igual [LP registou +5 e +7]. LP e GI [quase em simultâneo]: mais dois [referindo-se à razão das somas apresentadas].
GI [voltando a tarefa para si e iniciando a escrita]: então mais nove, vinte e seis menos um [escreveu 25], mais onze dá 36 e, mais difícil [recorreu a contagem com os dedos], mais 13 [levantou um dedo], mais 15 [levantou dois dedos], mais 17 [levantou três dedos] e mais 19 [levantou os quatro dedos que os faria chegar à figura de ordem 10] agora $36+19=55$ [registou].
LP: Até ao dez somamos 19, agora é o triplo, como no anterior, $19 \times 3 = 57$ [efetuou o cálculo mental].

GI: Fácil, se temos cinquenta mesas e cada mesa com cinco lugares [enquanto apontava para o desenho das duas mesas] é só dividir. [Efetuou o algoritmo da divisão e os dois concluíram que seriam necessárias dez mesas].
GI: Agora pedem o número de pessoas que se podem sentar se tivermos 15 mesas. É a operação contrária.
LP: Multiplicamos por 5.
[GI iniciou o algoritmo da multiplicação sendo interrompido por LP]
LP: Dá 75.
GI: Mas é preciso justificar [continuou o algoritmo].

LP: Se tens 14 e queres 28 é o dobro. É como se fosse uma fita [apontando para a sequência pictórica] e outra fita igual por baixo, o polígono da figura 28 é o último [apontando para o último triângulo representado].
[GI escreveu a resposta]

Figura 4.185 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Campo de férias* (GI, LP)

O diálogo anterior transmite de que forma o envolvimento e a partilha entre alunos desencadeou o aparecimento de soluções intermédias e a mobilização de construções reconhecidas, que contribuíram para o preenchimento da tabela. Ambos os alunos deram significado à regularidade numérica presente em cada construção de fósforos, visível através da sequência de números apresentados por LP, que corrigiu o erro apontado por GI. Ainda que GI tenha introduzido uma construção reconhecida, o raciocínio proporcional – *necessitamos do triplo de 19* – incompatível com a do número de fósforos necessários à construção de ordem trinta, os dois alunos continuaram a envolverem-se na *Produção de signos coletivos*. Seguiu-se o interesse em procurarem identificar regularidades entre os resultados por si apresentados. GI introduziu a subtração entre um termo e o seu anterior – *Produção de signos individuais*, dando origem à *Produção de signos coletivos* – mais dois – ou seja, à identificação da regularidade presente nos números. Essa percepção permitiu o preenchimento correto da tabela até ao termo de ordem dez, a partir do qual GI, introduzindo novamente o raciocínio proporcional – construções reconhecidas – voltou a cometer o mesmo tipo de erro – *agora é o triplo*.

O raciocínio desenvolvido pelos alunos durante a resolução do problema das mesas do refeitório mostra, igualmente, de que forma a mediação estabelecida entre os alunos contribuiu para o desenvolvimento da ação epistêmica *Construir*. Nesta situação, os alunos integraram construções reconhecidas, tais como a divisão e a multiplicação, justificando as soluções apresentadas através da comunicação oral e da aplicação dos respectivos algoritmos. Os dois alunos voltaram a envolver-se na construção do novo conhecimento, produzindo *Signos coletivos*.

Relativamente ao padrão pictórico de polígonos, verificou-se que foi a seleção da ideia da fita – estratégia – por parte do aluno LP, e a exposição desse raciocínio ao colega, que contribuiu para a apresentação de uma resposta, ainda que a solução apresentada não tenha sido a correta – *Produção de signos individuais*.

O diálogo que se segue transmite de que forma a partilha e a comunicação estabelecida entre os alunos contribuiu para o desenvolvimento da ação epistêmica *Construção*.

GI [interrompendo]: É o número de fósforos gastos na construção da figura [apontando e lendo a informação constante na tabela] ... n ?! O que é o n ?!
LP: n são as construções ... olha aqui a primeira tem 1 fósforo, a segunda tem 2 fósforos, a terceira tem 5. [...]
LP [confirmando as suas ideias]: Aqui [apontando] é para apresentar resultados com o n e colocar o dobro do número. [...]
GI [continuou o silêncio, até que GI soltou, em sobressalto, a frase]: É só tirar 1! Tirar 1 ao dobro! [...]
[LP escreveu a expressão que ambos concluíram: $n \times 2 - 1$ e continuaram o preenchimento da tabela].

GI: Se n for o número de grupos quantos abdominais se fazem ao todo?
LP: $n \times 20$.
GI: Não, todos os elementos do grupo fazem abdominais, vinte cada um...
LP: Ah... um grupo faz 80 [apontando para a alínea anterior] ...
GI: $n \times 80$, também não é muito difícil.

LP [iniciando um esquema na folha de rascunho]: se escolher morango pode optar por copo ou então por cone [escreveu morango e representou, através de desenho, um copo e um cone] e se for o de chocolate [escreveu] pode também ser copo ou cone [voltou a desenhar].
GI: Quatro gelados, tens dois copos vezes dois sabores [escreveu, sendo interrompido]
LP: Copos não! É um copo e um cone!
GI: Não, estava a falar da base do gelado [escreveu bases por baixo de copo].

Figura 4.186 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Campo de férias* (GI, LP)

A *Construção* presente no diálogo anterior resultou da partilha de ideias e da integração de construções reconhecidas, como úteis para a nova *Construção*. Como é possível verificar, LP partilhou o significado que atribuiu à letra n , *são as construções* – *Produção de signos individuais* – dando origem ao processo de abstração. Outra contribuição de LP – *é para apresentar resultados com o n* – foi igualmente importante para que GI se envolvesse no mesmo raciocínio e partilhasse as suas conclusões – *tirar um ao dobro* –

Produção de signos individuais, contribuindo para que ambos concluíssem a generalização pretendida – *Produção de signos coletivos*.

O processo de generalização, respeitante ao número de abdominais feitos por n grupos, constitui mais um exemplo de que a partilha de ideias e conhecimentos – *Produção de signos coletivos* – contribuiu para o desenvolvimento da nova *Construção*.

O último excerto apresentado, respeitante ao número de gelados que se poderiam combinar, utilizando os sabores de morango e chocolate e as bases de cone ou copo, revela de que forma a utilização de um esquema – *Produção de signo individual* – contribuiu para o desenvolvimento do processo de abstração, que se iniciou com a introdução dos dados enunciados e continuou com a exploração do esquema até à *Produção de signos coletivos* – a solução correta para a questão colocada.

A figura que se segue exemplifica, através de excertos selecionados, de que forma a mediação estabelecida entre alunos conduziu à *Produção de Signos Individuais (PSI)* e à *Produção de Signos Coletivos (PSC)*.

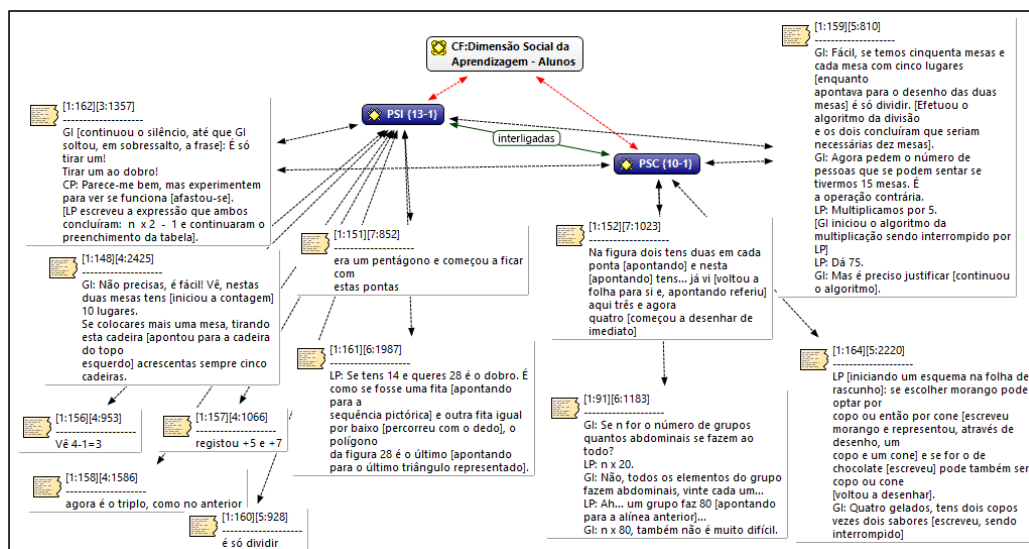


Figura 4.187 – RAV da DSA, Alunos, em Campo de férias

De acordo com a informação presente na figura 4.187, verifica-se que a *Produção de signos individuais (PSI)* contribuiu, conjuntamente com o envolvimento dos alunos e partilha de conhecimentos e ideias, para a interpretação de padrões e identificação de regularidades [1:148] [1:151] [1:157] e relações numéricas [1:162], para a seleção de estratégias [1:156] [1:161] e mobilização de conhecimentos matemáticos [1:158] [1:160], bem como para a extensão das regularidades observadas [1:152], na comunicação da generalização em linguagem simbólica [1:91] e na apresentação de soluções para as questões colocadas [1:159] [1:164].

Tabela 4.41 – Síntese da análise da DSA, Alunos, em Campo de férias

Categoria: Alunos (A)		
Subcategorias	Produção de signos individuais (PSI)	<ul style="list-style-type: none"> • Envolveram-se na interpretação do enunciado, da tabela e dos padrões; • Exploraram esquemas e desenhos, entre outras ideias – fita de polígonos; • Integraram conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores, tais como as quatro operações básicas e conceitos como o dobro e triplo, para obter soluções intermédias; • A interpretação do significado atribuído à letra n contribuiu para o desenvolvimento do processo de abstração; • Produziram signos individuais, a partir dos quais resultaram <i>Soluções</i> intermédias – <i>Construir</i> e a nova <i>Construção</i>.
	Produção de signos coletivos (PSC)	<ul style="list-style-type: none"> • Os alunos envolveram-se na produção de signos coletivos, os quais surgiram, quase sempre, da contribuição dada por um dos alunos e que desencadeou o processo de abstração, de partilha de ideias e conhecimentos e, conseqüentemente, a nova <i>Construção</i>; • A <i>Produção de signos coletivos</i> esteve, na globalidade, relacionada com a exploração dos padrões, tabelas, esquemas/desenhos e linguagem simbólica e conduziu à generalização de regularidades observadas.

Síntese. Da análise dos registos audiovisuais recolhidos ressalta que a mediação estabelecida entre alunos, designadamente a comunicação e partilha, foi essencial para a *Construção* do novo conhecimento matemático. Os alunos empenharam-se, envolvendo-se na interpretação de enunciados, na identificação de regularidades e relações, selecionando conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores e, em particular nas tarefas já desenvolvidas. Embora algumas contribuições individuais tenham favorecido o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas, entende-se que os alunos envolveram-se na produção de signos coletivos, interpretando enunciados, identificando regularidades e relações numéricas, mobilizando e combinando construções reconhecidas, com soluções obtidas para produzir novo conhecimento matemático. Considera-se, por isso, que as subcategorias *Produção de signos individuais* e *Produção de signos coletivos* evoluíram conjuntamente, ocorrendo durante o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas.

Os resultados da presente análise sugerem que os alunos revelaram interesse pela atividade proposta, demonstrando interesse e empenho pela resolução da tarefa e pelo trabalho conjunto. Considerando o desempenho observado, entende-se que a mediação entre alunos favorece a construção de conhecimento matemático.

A figura que se segue procura transmitir de que forma a mediação estabelecida entre *Professora* e alunos e entre *Alunos* contribuiu para o desenvolvimento do processo de abstração e construção do novo conhecimento matemático e, de que forma, influenciou o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co).

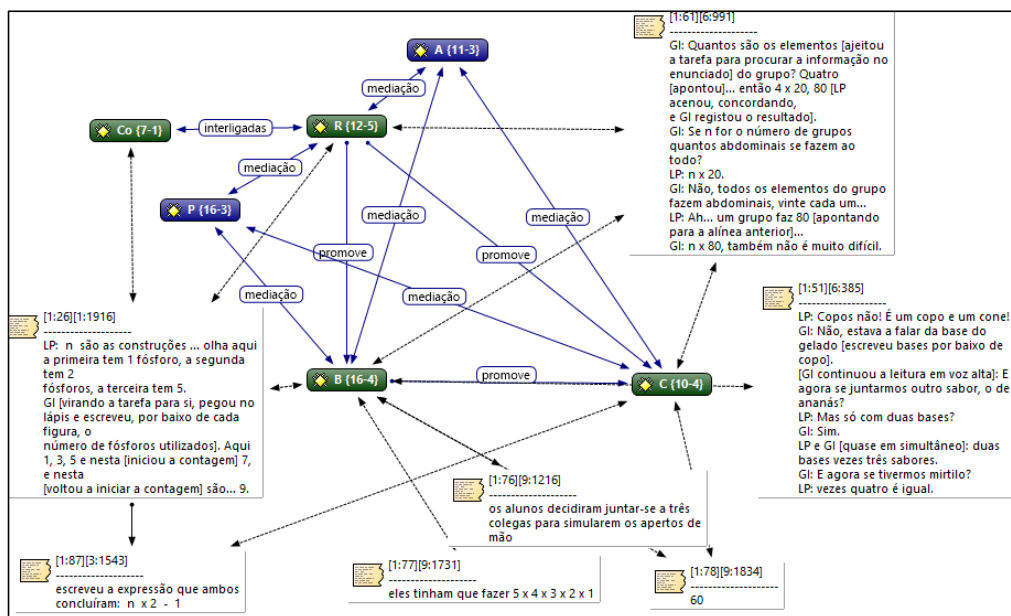


Figura 4.188 – Relação entre as ações RBC+C e DSA em Campo de férias

A figura 4.188 exemplifica, apresentando alguns excertos, de que forma a mediação estabelecida entre Professora (P) e alunos, e entre Alunos (A), favoreceu o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C. Entende-se, de acordo com os dados apresentados, que a mediação estabelecida pela Professora verificou-se com a elaboração, implementação e condução da tarefa, a qual deu origem às ideias e soluções transmitidas pelos excertos. Como tal, o artefacto tarefa, conduziu os alunos à interpretação de enunciados [1:26] [1:61], que favoreceram o desenvolvimento da ação Reconhecer (R), à seleção de estratégias e construções concebidas [1:51] [1:76], bem como apresentação de soluções intermédias [1:78], que evidenciaram o desenvolvimento da ação Construir (B), e à generalização do processo identificado [1:61] [1:87], que os conduziu à nova Construção. Por sua vez, o diálogo estabelecido entre Alunos e, em particular, a partilha de percepções, ideias e conhecimentos também contribuíram para o desenvolvimento das ações epistémicas Reconhecer (R), Construir (B) e Construção (C). A ação epistémica Consolidação (Co) voltou a ser selecionada aquando da necessidade de interpretar informação enunciada e mobilizar construções anteriores.

Síntese. À semelhança do que se verificou nas tarefas anteriores, a mediação estabelecida entre Professora e alunos, e entre Alunos, influenciou o desenvolvimento das ações epistémicas Reconhecer, Construir e Construção, demonstrando ser significativa para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos e para a construção do novo conhecimento matemático. Por sua vez, a Consolidação parece ter estado associada às habilidades evidenciadas por um dos alunos.

4.8 Tarefa 8 – *Relação de Equilíbrio*

A presente tarefa procura estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, incentivando a interpretação e utilização de linguagem simbólica e do sinal de igual, para que os alunos estabeleçam relações numéricas entre os dados apresentados. Espera-se que os alunos interpretem e utilizem linguagem matemática com significado, entendam o sentido matemático da igualdade de duas expressões algébricas, e desenvolvam processos criativos para descobrir a solução das equações que possam vir a ser representadas.

4.8.1 *Reconhecer*

O desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer* verificou-se durante a leitura do enunciado das questões e da informação contida nas balanças de pratos.

[Os alunos procederam à leitura silenciosa das questões colocadas, interrompida pelo destacamento, por parte de GI, das palavras enunciadas “expressão matemática”].
GI: Temos que representar uma expressão matemática com os pesos dos pratos do lado esquerdo [rodeou esses pratos enquanto falava]. Temos 20 gramas mais uma boneca que pesa b . [LP acenou, mostrando concordar] [GI escreveu $20 + 1b$ de imediato, e sem evidenciar qualquer receio quanto à presença da letra b . LP também não estranhou a representação de GI]. Temos agora do lado [parou para reler] direito três bonecas.

Figura 4.189 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Relação de Equilíbrio* (GI)

A ação *Reconhecer* manifestou-se com a *Interpretação* dos dados enunciados. Os alunos mostraram compreender o que lhes estava a ser pedido, pois sublinharam as palavras *expressão matemática* e focaram a sua atenção na massa colocada em cada prato, ainda que tenham feito referência ao peso ao invés de massa. Os alunos *Interpretaram* a necessidade de representar uma expressão matemática com a massa dos pratos do lado esquerdo e do lado direito, selecionando *Estruturas adquiridas* – adição para representarem essas massas.

A subcategoria *Interpretação* voltou a manifestar-se com a leitura da questão - o que acontece à balança se for retirada uma boneca de um dos pratos? O diálogo que se segue transmite essa situação.

LP [referindo-se à questão seguinte]: Se tirarmos uma boneca acontece o que já falámos. Se tirares esta boneca aqui [apontou para a boneca do segundo prato do lado esquerdo da balança] este lado [apontou para os pratos da direita] vem para baixo [simulou a situação com o dedo].
GI: Esse lado, um dos lados fica mais pesado, o que acontece à balança é que fica desequilibrada.
LP [abanou a cabeça, mostrando concordar].

Figura 4.190 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Relação de Equilíbrio* (GI, LP)

Os alunos evidenciaram compreender que retirando uma boneca, a massa do correspondente lado diminuiria e, como tal, a balança entraria em desequilíbrio. Na questão seguinte – *o que acontece à balança se for acrescentada uma massa marcada de 2 g a um prato da balança, em ambos os lados* – considera-se que o processo de compreensão foi auxiliado pela representação dos dados enunciados, numa balança de pratos, semelhante à representada pela professora, a qual foi desenhada enquanto os alunos faziam referência ao facto de, ao acrescentarem-se igual quantidade em ambos os lados, a balança continuaria em equilíbrio. A figura que se segue evidencia a representação construída pelos alunos à medida que esses interpretavam os dados enunciados:

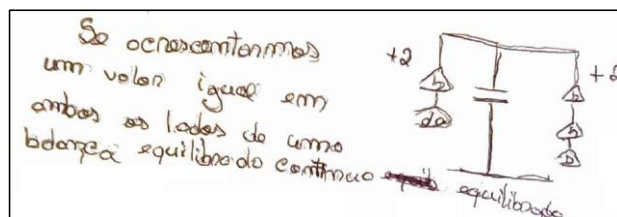


Figura 4.191 – RA respeitante à tarefa Relação de Equilíbrio

Relativamente à figura anterior, destaca-se a presença do sinal de igual posicionado no centro da balança, o qual transmite a igualdade entre os dois lados, mesmo quando se adicionam duas gramas, representadas, neste esquema, em cada um dos lados da balança, através da simbologia +2. Os alunos selecionaram duas *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores, o sinal de igual e a estrutura aditiva, evidenciando, desse modo, terem interpretado o enunciado. A ação *Reconhecer* continuou a manifestar-se aquando da interpretação do enunciado da questão seguinte – *qual é a massa de cada boneca?*

LP [passados breves instantes]: temos de descobrir o peso da boneca [fez-se silêncio por breves instantes]. [Olhando para o desenho do colega, proferiu, apontando para as “bonecas”, ou seja, para as duas letras b situadas nos dois últimos pratos da direita] [...]
 Estas duas bonecas [apontando] pesam vinte gramas... [...]
 Temos uma boneca mais vinte gramas igual a três bonecas [escreveu $b + 20 = b + b + b$].

Figura 4.192 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Relação de Equilíbrio (LP)

Verificou-se da parte dos alunos a exploração da balança desenhada por GI, interpretando o significado da letra b e traduzindo a relação de equilíbrio através da igualdade $b + 20 = b + b + b$, selecionando também a adição e a relação de igual. Os alunos selecionaram *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores, tais como linguagem simbólica, a adição e a igualdade para exporem o seu raciocínio. No diálogo que se segue transmitem como interpretaram e que competências selecionaram para resolverem as equações que os próprios representaram.

LP: Mas assim não estás a explicar. Se a balança está em equilíbrio [pegou no lápis] escreves aqui igual e dizes que c mais três mais um, que é o peso da esquerda, é igual a oito, o peso da direita. [...]
LP: Agora queremos saber o peso do iogurte. Dez mais dois iogurtes [...] igual [...] a cinco mais três iogurtes. [...]
GI: Temos dez mais, mais dois iogurtes, igual a cinco mais três iogurtes. Agora para descobrir o peso de um iogurte podemos [...]

Figura 4.193 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Relação de Equilíbrio* (LP, GI)

No diálogo anterior pode-se constatar como os alunos relacionaram as massas dos objetos com o equilíbrio evidenciado pelas balanças. A *Intepretação* dos dados presentes nas balanças foi acompanhado da seleção de *Estruturas adquiridas*, que se mostraram necessárias à representação do raciocínio, tais como o sinal de igual, para representar o equilíbrio, as letras – simbologia – para representar a massa dos objetos, a estrutura aditiva, para representar a totalidade de massa colocada nos pratos e a subtração que permitiu obter as massas desses objetos. O excerto que se segue transmite como os alunos interpretaram, e que estruturas matemáticas selecionaram, para representarem os dados enunciados através de expressões algébricas.

GI [retomou a questão]: Daqui a cinco anos. Daqui a cinco tem mais cinco.
LP: Mais cinco que agora que tem x . [...]
LP: Aqui é a idade do pai da Sofia, vê [apontando para o enunciado].
GI [escrevendo]: x vezes quatro e...
LP: menos um... é no ano passado.

Figura 4.194 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Relação de Equilíbrio* (GI, LP)

Com alguma naturalidade, os alunos evidenciaram compreensão leitora quanto ao significado da letra x e selecionaram *Estruturas adquiridas*, tais como o conceito de quádruplo, para representar a idade do pai da Sofia, a estrutura aditiva, para representar a idade da Sofia passados cinco anos, e a subtração, para representar a idade do pai no ano anterior.

A figura que segue exemplifica, apresentando pequenos excertos, situações em que se evidencia a ação epistêmica *Reconhecer*, através das subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA).

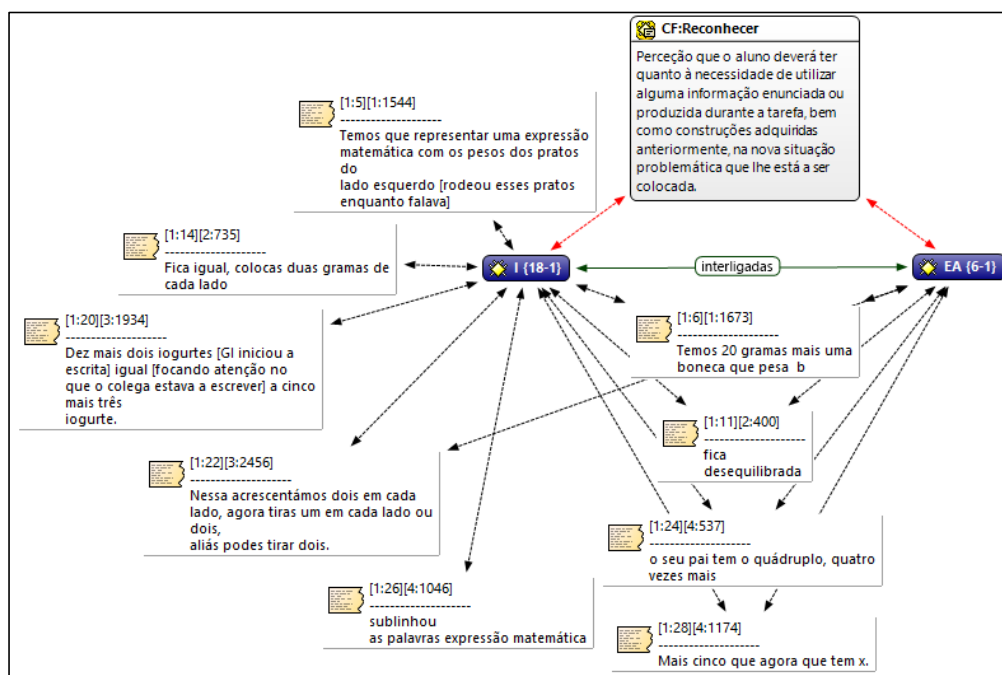


Figura 4.195 – RAV da ação epistêmica *Reconhecer* em *Relação de Equilíbrio*

A figura 4.195 transmite que a ação epistêmica *Reconhecer* manifestou-se através das subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas*, as quais se relacionaram mutuamente durante o processo de abstração. Os alunos identificaram o objetivo das questões colocadas, designadamente da necessidade de apresentarem uma expressão matemática [1:5] [1:26], de “colocarem” duas gramas de cada lado da balança [1:14], de calcularem a massa do iogurte [1:20] e de compararam as diferenças entre os enunciados de diferentes questões [1:22]. Essa interpretação desencadeou a seleção de *Estruturas adquiridas*, tais como a seleção da estrutura aditiva [1:6] [1:28], do conceito de quádruplo [1:24], bem como a compreensão do significado de equilíbrio [1:11]. A construção de “esquemas” e a análise das respostas apresentadas foi, também, sujeita à interpretação dos alunos, tal como ocorreu quando eles reinterpretaram uma balança já utilizada para darem resposta às novas questões colocadas [1:22].

Na tabela que se segue sintetizam-se características evidenciadas durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*, respeitantes às subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas*.

Tabela 4.42 – Síntese da ação epistémica Reconhecer em Relação de Equilíbrio

Categoria: Reconhecer (R)		
Subcategorias	Interpretação (I)	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretaram o enunciado das questões colocadas; • Compreenderam o significado de equilíbrio das balanças; • Interpretaram o significado atribuído às letras.
	Estruturas adquiridas (EA)	<ul style="list-style-type: none"> • Seleccionaram linguagem simbólica - <i>letras</i> e o sinal de igual - para representarem dados e transferirem linguagem natural para simbólica; • Mobilizaram a adição e a subtração para efetuarem cálculos; • Seleccionaram o conceito de quádruplo.

Síntese. O desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* manifestou-se através das subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas*, não se tendo evidenciado, pelas características da própria tarefa, a subcategoria *Regularidades*. As subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* desenvolveram-se mutuamente, interligando-se no processo de abstração, no sentido em que as competências matemáticas – estratégias, cálculo e interpretação de linguagem simbólica – foram sendo seleccionadas à medida que os alunos interpretavam os enunciados e os dados presentes nas balanças, bem como os resultados obtidos.

4.8.2 Construir

O desenvolvimento da ação epistémica *Construir* evidenciou-se com a seleção de *Estratégias* e com a integração de *Construções reconhecidas*, que permitiram a apresentação de *Soluções intermédias* e a *Justificação* para os raciocínios desenvolvidos. Destaca-se, na figura que se segue, a representação esquemática utilizada pelos alunos para representarem em linguagem pictórica os dados enunciados e apresentarem a equação $b + 20 = b + b + b$, e outras a esta equivalentes.

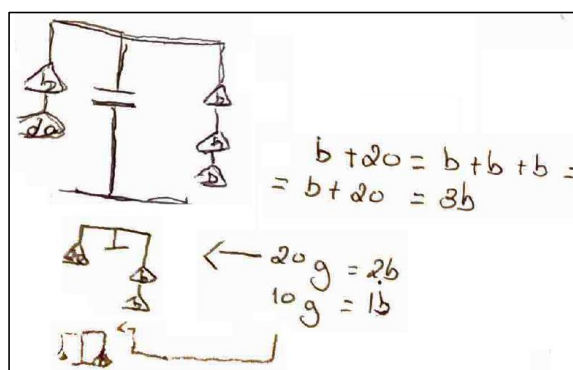


Figura 4.196 – RA relativo à tarefa Relação de Equilíbrio

A figura 4.196 permite verificar, da parte dos alunos, capacidade para representarem a massa e o equilíbrio presente na primeira balança, fazendo uso de linguagem simbólica, ainda que com algumas incorreções, através da equação $b + 20 = b + b + b$, verificando-se a integração de *Construções reconhecidas*, respeitantes ao significado

de igualdade e simbologia. Por sua vez, ao esquematizarem a segunda balança, “simplificada” em relação à anterior, verificou-se que os alunos desenvolveram um procedimento semelhante ao do princípio de equivalência da adição, utilizado para a resolução de equações. Da transição da primeira para a segunda balança constata-se a ausência de reprodução de dois pratos, um de cada lado, ambos com a massa b , mantendo-se, porém, o equilíbrio da segunda balança. Entende-se, nesta situação, que os alunos a resolveram por um raciocínio análogo ao que se pode transmitir a equivalência $b + 20 = b + b + b \Leftrightarrow b - b + 20 = b + b + b - b \Leftrightarrow 20 = b + b$, ainda que não tenham utilizado o sinal de equivalência. Considerando a *Justificação* apresentada – *se acrescentares um valor igual em ambos os lados de uma balança equilibrada continua equilibrada* – compreende-se que o raciocínio desenvolvido foi muito semelhante ao princípio de equivalência da adição – dada uma equação, adicionando (ou subtraindo) o mesmo número racional a ambos os membros da equação obtém-se uma equação que lhe é equivalente.

Ao analisar a terceira balança construída pelos alunos verifica-se que, utilizando o desenho, os alunos aplicaram um procedimento semelhante ao da aplicação do princípio da multiplicação, uma vez que considerando os dados da balança anterior, $20 = b + b$, estabeleceram a equivalência $10 = b$, destacando $20 \div 2 = 10g = 1b$. A analogia com o referido princípio está no facto de este referir que numa equação numérica, multiplicando (ou dividindo) ambos os membros de uma equação por um mesmo número, não nulo, obtém-se uma equação que lhe é equivalente.

Entende-se que a *Estratégia – representação das balanças* – conduziu os alunos ao relacionamento de dados numéricos – *massas* – e à adoção de procedimentos matemáticos e *Construções reconhecidas – cálculo numérico* – que contribuíram para a simplificação das expressões algébricas e para a apresentação de equações equivalentes, mais simples que as anteriores.

A figura que se segue revela de que forma os alunos simplificaram uma equação por eles representada.

Handwritten mathematical work showing the simplification of an equation. The equations are: $10 + 1g = 5 + 1g + 1g$, $10 + 2g = 5 + 3g$, and $10 = 5 + g$. A note says "Vino - 20 g de cada lado".

Figura 4.197 – RA relativo à tarefa *Relação de Equilíbrio*

A resolução apresentada na figura anterior revela habilidade para transferirem dados representados na balança, para linguagem matemática, de modo a representarem o

equilíbrio através de uma equação. Os alunos evidenciaram desenvolvimento de mecanismos que permitiram a substituição das expressões algébricas por outras mais simples: $10 + i + i = 10 + 2i$ e $5 + i + i + i = 5 + 3i$. Este procedimento parece evidenciar a compreensão estabelecida quanto à forma como se podem simplificar expressões algébricas simples, ainda que os alunos, durante essa simplificação, tenham verbalizado que um iogurte mais um iogurte são dois iogurtes, escrevendo $2i$, surgindo a dúvida quanto à compreensão de que $2i$ representaria a massa de dois iogurtes iguais com massa i . De qualquer forma, verificou-se da parte dos alunos a necessidade de tornarem as equações representadas em outras menos complexas e longas, interpretadas como *Soluções intermédias* e que os aproximou da *Construção* pretendida – a resolução da equação.

As referidas *Soluções* surgem, também, associadas à aplicação de *Estruturas adquiridas*, evidenciadas através da seleção da estrutura aditiva. Volta-se, nesta resolução, a presenciar a aplicação de uma estrutura semelhante à do *princípio de equivalência da adição*, presente na expressão: *tira-se $2i$ de cada lado*.

A figura que se segue exemplifica, através da seleção de pequenos excertos, situações em que se verificou o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, através da aplicação de *Estratégias* (Es) e *Construções reconhecidas* (CR), bem como da apresentação de *Soluções* (S) e *Justificação* (J) para o raciocínio desenvolvido.

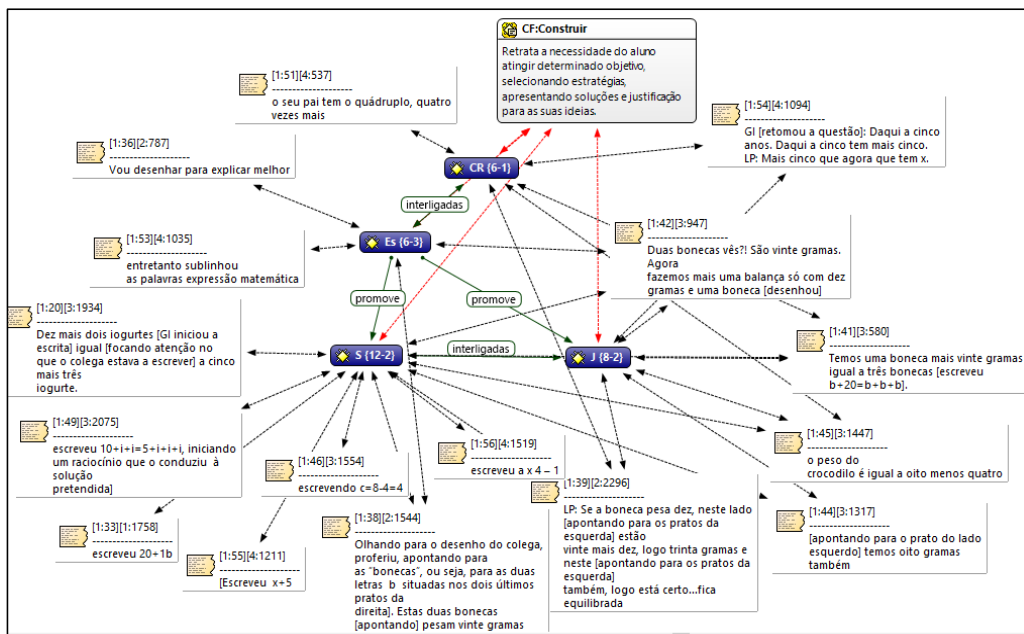


Figura 4.198 – RAV da ação epistémica Construir em Relação de Equilíbrio

Pode-se observar a presença das quatro subcategorias respeitantes à ação epistémica *Construir*. Entre elas sobressai a relação entre as subcategorias *Estratégias* (Es) e *Construções reconhecidas* (CR) e entre as subcategorias *Soluções* (S) e *Justificação* (J). No que respeita à ligação estabelecida entre *Estratégias* (Es) e *Construções reconhecidas* (CR), evidenciaram-se a exploração das balanças [1:36] [1:38] [1:42], a atenção focada nas palavras-chave [1:53] e a leitura em voz alta, com vista a fomentar a compreensão leitora [1:51], bem como a integração de *Construções reconhecidas* (CR) que, por sua vez, contribuíram para melhorar a exploração semiótica do esquema [1:39] [1:45] e para mobilizar conhecimentos matemáticos [1:41] [1:51] [1:54].

A exploração das potencialidades das balanças assumiu, também, extrema importância na apresentação de *Soluções* (S) e na *Justificação* (J) do raciocínio desenvolvido. Estas subcategorias emergiram da interpretação dos dados e permitiram melhorar a interpretação e o desenvolvimento de novas ideias e soluções. Da exploração das potencialidades das balanças surgiram *Soluções* intermédias, relacionadas com a representação dos dados, sob a forma de uma equação [1:20] [1:49] [1:42], e com o cálculo da massa dos objetos [1:38] [1:39] [1:44] [1:46]. Da exploração dos enunciados escritos resultaram, ainda, a transferência da linguagem natural para matemática, na forma de expressão algébrica, e a justificação de ideias através da verbalização [1:33] [1:55] [1:56].

A tabela que se segue sintetiza características evidenciadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, respeitantes a cada subcategoria identificada.

Tabela 4.43 – Síntese da ação epistémica *Construir* em Relação de Equilíbrio

Categoria: <i>Construir</i> (B)		
Subcategorias	Estratégias Es	<ul style="list-style-type: none"> • Representaram o seu raciocínio através de desenhos e esquemas - balanças; • Exploraram a informação contida nas balanças, estabelecendo uma relação entre o equilíbrio da balança e o sinal de igual; • Efetuaram cálculos para estabelecerem relações; • Aplicaram procedimentos semelhantes aos princípios de equivalência da adição e da multiplicação.
	Soluções S	<ul style="list-style-type: none"> • Representaram a linguagem natural enunciada em linguagem matemática; • Simplificaram expressões algébricas; • Transformaram equações por si apresentadas em outras equivalentes e menos complexas e extensas;
	Justificação J	<ul style="list-style-type: none"> • Esquematizaram o raciocínio; • Efetuaram cálculos; • Verbalizaram e expuseram, por escrito, o raciocínio desenvolvido.
	Construção reconhecida CR	<ul style="list-style-type: none"> • Integraram conceitos e procedimentos diversos, tais como o cálculo, o conceito de quádruplo e linguagem simbólica.

Síntese. Do desenvolvimento da ação epistémica *Construir* destaca-se, nesta tarefa, a utilização de *Estratégias* que se traduziram, sobretudo na exploração dos conteúdos matemáticos presentes nas balanças de pratos, e que favoreceram a apresentação de *Soluções* para as questões colocadas e *Justificação* para os raciocínios e resultados expostos. Verificou-se que durante o processo de análise da informação constante nessas balanças, os alunos mobilizaram conhecimentos matemáticos que permitiram o aperfeiçoamento dessa leitura, pelo que se considera que as subcategorias *Estratégias* e *Construções reconhecidas* estiveram interligadas durante o processo de construção. Se, por um lado, a exploração das balanças conduziu os alunos à integração de conhecimentos matemáticos, por outro lado, esses conhecimentos, ao serem mobilizados, permitiram uma leitura ainda mais eficaz da informação contida nas balanças. Destaca-se, ainda, que as subcategorias *Soluções* e *Justificação* manifestaram através da verbalização do raciocínio estabelecido durante a exploração das balanças, estabelecendo entre si uma relação estreita, sendo que as *Soluções* intermédias foram globalmente registadas, pelos alunos, por escrito.

A resolução dos alunos sugere que a exploração do esquema apresentado pela professora, e a representação do raciocínio, favorecem o desenvolvimento do processo algébrico. Transmite, ainda, que os alunos mais jovens demonstram habilidade para mobilizarem conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, designadamente a que se refere a interpretação e a utilização de linguagem simbólica para produzirem novos significados matemáticos.

4.8.3 Construção

Na resolução desta tarefa, o processo de *Construção* do novo conhecimento está presente no momento em que os alunos conseguem utilizar procedimentos e explicar, utilizando linguagem matemática, como se obtém a solução de uma equação. Como tal, entende-se que essa ação epistémica manifestou-se quando os alunos determinaram a massa da boneca e do iogurte. A *Construção* resultou da combinação e *Reorganização* dos conhecimentos mobilizados pelos alunos.

Seguidamente, clarifica-se como os dados foram reorganizados até se obter a construção pretendida, $b = 10$, no caso do cálculo da massa da boneca, $i = 5$, e no caso do cálculo da massa do iogurte.

1.º - Os alunos traduziram, em linguagem matemática, as massas de cada um dos pratos e traduziram a igualdade numérica dessas massas através do sinal de igual. Surge a primeira equação, extensa e complexa para os alunos: $b + 20 = b + b + b$;

2.º - Simplificaram a expressão $b + b + b$, referindo-se a três bonecas, $3b$. Apresentaram uma equação mais simples: $b + 20 = 3b$;

3.º - Transferiram informação da terceira balança construída, apresentando uma equação ainda mais simples do que a anterior: $20g = 2b$;

4.º - Escreveram, num canto da folha, afastado da cadeia de equações, $20 \div 2 = 10g = 1b$, escrevendo, depois, na sequência das equações já apresentadas, outra mais simples: $10g = 1b$;

5.º - Apresentaram a solução da equação, escrevendo $b = 10$.

Figura 4.199 – RA relativo à tarefa Relação de Equilíbrio (RI)

1.º - Traduziram, através de uma equação extensa e complexa, a massa colocada em cada um dos pratos e o equilíbrio existente na balança, integrando o sinal de igual: $10 + i + i = 5 + i + i + i$;

2.º - Simplificaram as duas expressões algébricas, tornando a equação menos longa e mais simples: $10 + 2i = 5 + 3i$;

3.º - Eliminaram, riscando com o lápis, os monómios $2i$ e $3i$, estabelecendo analogia com o procedimento “retirar a mesma massa de cada um dos pratos da balança”. GI reforçou a sua ideia, escrevendo “tira-se $2i$ de cada lado e, retirando $2i$ a $3i$, ficaria um iogurte”. Apresentaram uma equação ainda mais simples: $10 = 5 + i$;

4.º - Concluíram, de imediato, que $i = 5$, mas tiveram necessidade de justificar, reforçando que $i = 5 = 10 - 5$.

Figura 4.200 – RA relativo à tarefa Relação de Equilíbrio (RI)

As duas figuras anteriores mostram como os alunos *Reorganizaram* as soluções já apresentadas para resolverem as equações dadas. A *Construção* deu-se por concebida quando os alunos verbalizaram, utilizando linguagem matemática formal, a solução da equação por eles desenvolvida – *Comunicação*. Não se faz referência à subcategoria generalização, embora essa possa ser entendida na utilização da linguagem simbólica. Considera-se apenas que os alunos alcançaram a *Construção* almejada, *Reorganizando* ideias e soluções já apresentadas.

A figura que se segue transmite, apresentando pequenos excertos, situações em que se evidenciou o desenvolvimento da ação epistémica *Construção*.

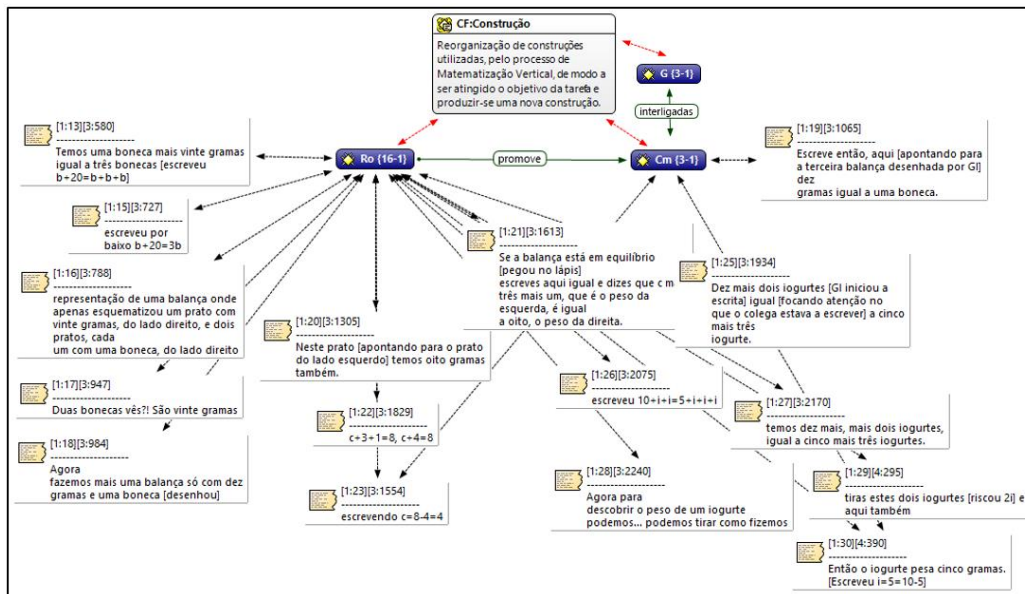


Figura 4.201 – RAV da ação epistêmica Construção em Relação de Equilíbrio

Da figura anteriormente apresentada evidenciam-se as subcategorias *Reorganização* (Ro) e *Comunicação* (Cm), bem como a *Generalização* (G) que se considera estar associada à apresentação de solução para as questões colocadas. A *Reorganização* (Ro) de dados, ideias e resultados contribuiu favoravelmente para a conceção da nova *Construção*. Tal verificou-se no cálculo da massa da boneca, em que a combinação e *Reorganização* (Ro) de toda a informação [1:13] [1:15] [1:16] [1:17] e [1:18] culminou na *Comunicação* (Cm) da nova *Construção* [1:19]. A *Construção* ocorreu, também, durante o processo de cálculo da massa do objeto crocodilo [1:20] [1:22] e [1:23], que terminou na *Comunicação* (Cm) desse valor numérico [1:23], bem como no cálculo da massa do iogurte [1:21] [1:25] [1:26] [1:27] [1:28] [1:29] que emergiu na verbalização e expressão escrita desse valor [1:30]. Como tal, considera-se que a *Reorganização* (Ro) conduziu à *Comunicação* (Cm) da nova *Construção*.

Tabela 4.44 – Síntese da ação epistêmica Construção em Relação de Equilíbrio

Categoria: Construção (C)		
Subcategorias	Reorganização (Ro)	Os alunos combinaram construções adquiridas em aprendizagens anteriores, tal como linguagem simbólica, e soluções e procedimentos adotados nesta tarefa para obterem solução para as equações apresentadas.
	Generalização (G)	Os alunos trabalharam a equação na sua conceção mais completa, estabelecendo relações numéricas e usando propriedades entre números e operações, para simplificar expressões algébricas e resolver equações.
	Comunicação (Cm)	Expressaram em linguagem natural e em linguagem matemática a nova construção.

Síntese. No desenvolvimento da *Construção* evidenciaram-se as subcategorias *Reorganização* e *Comunicação*. A *Generalização* foi, nesta situação, considerada a própria *Construção*. A *Reorganização* das soluções apresentadas ao longo da tarefa contribuiu para o cumprimento do objetivo da tarefa – a nova *Construção*, a qual foi verbalizada e expressa em linguagem simbólica.

4.8.4 *Consolidação*

O processo de *Consolidação* esteve, nesta tarefa, associado à interpretação da linguagem simbólica representada e à transferência dos dados enunciados, de linguagem natural para linguagem simbólica, na forma de expressão algébrica. Contudo, os alunos voltaram a evidenciar um crescente interesse para representarem o seu raciocínio através de desenhos e esquemas, bem como maior habilidade para transferirem os conhecimentos, com esses adquiridos, para linguagem matemática mais formal.

GI: [mostrando agilidade na exposição das suas ideias] Podemos escrever $b + b + b$. [LP aceitou com naturalidade] [...]
GI: Já sei [iniciou a escrita à medida que expunha, oralmente, o seu raciocínio]: Temos uma boneca mais vinte gramas igual a três bonecas [escreveu $b + 20 = b + b + b$] [...]
GI: Vou desenhar para explicar melhor [continuou o seu esboço, aperfeiçoando-o relativamente ao do enunciado [...]
GI [Que estava a representar as suas ideias numa folha de rascunho, focou a atenção no que o colega estava a dizer, concordando]: e como justificamos, com o desenho?

Figura 4.202 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Relação de Equilíbrio* (GI)

Relativamente à manifestação da ação epistémica *Consolidação*, considera-se que a sua identificação surge de forma pouco explícita e resulta do conhecimento que se obteve através das construções concebidas nas tarefas aplicadas anteriormente. Verificou-se que, com progressiva autonomia, rapidez e naturalidade, os alunos interpretaram linguagem simbólica, não estranhando a sua presença, tal como surgiu com a presença dessa linguagem nas balanças e no enunciado dessa tarefa. Os alunos demonstraram maior flexibilidade para representar os dados enunciados, através de expressões algébricas, tal como o fizeram com a leitura da massa das três bonecas. Esses, sem necessitarem da ajuda da professora, traduziram, de imediato, essa informação através da expressão algébrica $b + b + b$. Tal também se passou quando traduziram o equilíbrio de uma das balanças pela expressão $b + 20 = b + b + b$. Como tal, considera-se que as *Construções aplicadas* – linguagem simbólica – resultaram das aprendizagens adquiridas, com a resolução das tarefas desenvolvidas pela professora, e que a *Consolidação* manifestou-se através da postura dos alunos ao longo da resolução, os

quais revelaram desenvoltura e autonomia na compreensão e utilização de linguagem simbólica.

Realça-se, através do diálogo anterior, a necessidade de os alunos esquematizarem o seu raciocínio – *vou desenhar para explicar melhor... estava a representar as suas ideias numa folha de rascunho* – entendendo-se que este processo foi sendo desenvolvido ao longo da resolução das diferentes tarefas, e aperfeiçoada a sua exploração, o que parece ter tido benefícios quanto à conceção da construção pretendida.

A figura que se segue exemplifica, através da visualização de excertos audiovisuais recolhidos, situações em que se evidenciaram as subcategorias *Aplicação de construções recentes* (AC) e *Características psicológicas* (CP).

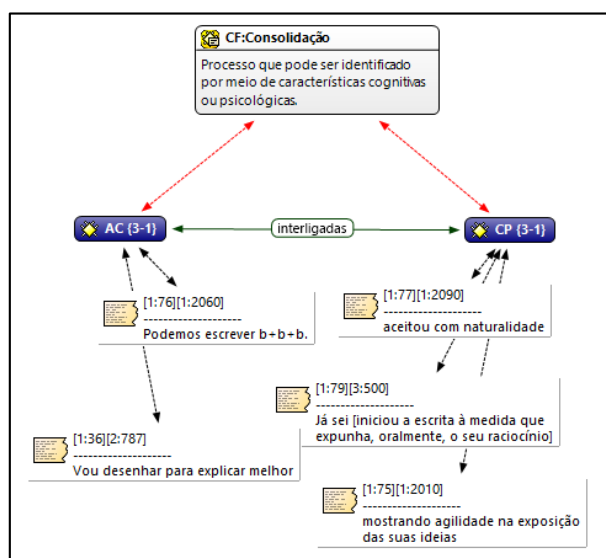


Figura 4.203 – Síntese da ação epistémica *Consolidação em Relação de Equilíbrio*

A figura 4.203 transmite que o desenvolvimento da ação epistémica *Consolidação* esteve associado à utilização de linguagem simbólica [1:76] [1:79], que foi interpretada e mobilizada com naturalidade [1:77]. Continua-se a constatar maior predisposição para a construção de desenhos/esquemas [1:36] que são utilizados pelos alunos para justificarem o seu raciocínio, bem como maior agilidade para exporem oralmente o raciocínio desenvolvido [1:75].

Síntese. O desenvolvimento da ação epistémica *Consolidação* ocorreu através das subcategorias *Aplicação de Construções recentes* e *Características psicológicas*, associada à mobilização de conhecimentos relacionados com a utilização de linguagem simbólica e com maior predisposição para interpretarem e representarem o raciocínio

desenvolvido. A aplicação dessas *Construções* foi evidenciada pela postura dos alunos durante a resolução da tarefa, designadamente autonomia, empenho, agilidade, partilha e habilidade para explicarem o raciocínio desenvolvido e as opções tomadas. O processo de *Consolidação* esteve, como tal, associado ao desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, resultando da necessidade de interpretar os dados enunciados e mobilizar conhecimentos matemáticos.

Na tabela que se segue sintetizam-se características evidenciadas durante o desenvolvimento da *Consolidação*, respeitantes às subcategorias *Aplicação de construções reconhecidas* e *Características psicológicas*.

Tabela 4.45 – Síntese da ação epistémica *Consolidação em Relação de Equilíbrio*

Categoria: <i>Consolidação (Co)</i>		
Subcategorias	Aplicação de uma construção recente (AC)	<ul style="list-style-type: none"> Interpretaram linguagem simbólica e mobilizaram-na para traduzir linguagem natural para linguagem matemática.
	Características psicológicas (CP)	<ul style="list-style-type: none"> Revelaram autonomia, desenvoltura e criatividade na aplicação dos seus conhecimentos e na exposição de ideias.

A figura que se segue esquematiza as relações estabelecidas entre as ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*, sintetizando conclusões descritas durante a apresentação dos resultados analisados.

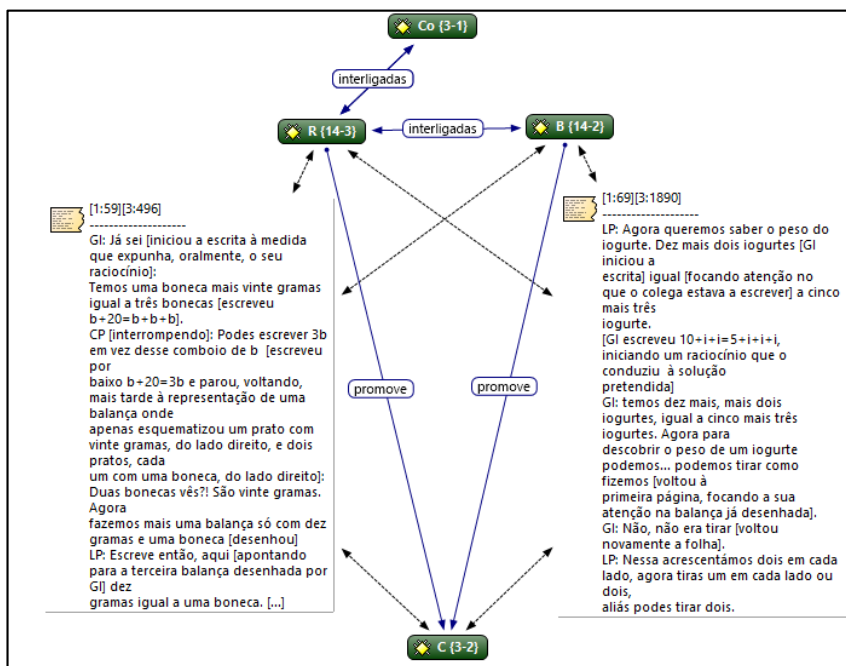


Figura 4.204 – Síntese da relação manifestada pelas ações epistémicas em *Relação de Equilíbrio*

Na figura 4.204 apresentam-se dois excertos, selecionados pela investigadora, e que evidenciam a construção das soluções de duas equações, estando a primeira associada à utilização da representação pictórica [1:59], e a segunda apenas à utilização de linguagem simbólica [1:69]. A percepção do significado a atribuir à linguagem simbólica resultou do reconhecimento que os alunos fizeram das aprendizagens concebidas em tarefas anteriores, situação que explica o motivo pelo qual a *Consolidação* (Co) promove o desenvolvimento da ação *Reconhecer* (R). Porém, verificou-se que essa *Consolidação* (Co) foi também fortalecida pela utilização de linguagem simbólica. Constata-se, igualmente, de que forma uma construção concebida anteriormente pode ser fortalecida. Tal situação ocorreu quando os alunos fizeram uso do significado já atribuído à linguagem simbólica [1:69] e da experiência adquirida através da construção [1:59], mostrando não necessitarem do auxílio da representação pictórica para encontrarem a solução da nova equação.

O raciocínio desenvolvido pelos alunos evidencia, ainda, que as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir* interagiram mutuamente, no sentido da nova *Construção*. Constata-se que os alunos mobilizaram conhecimentos reconhecidos como essenciais à nova construção, tais como simbologia e cálculo, os quais favoreceram o desenvolvimento da ação *Construir* (B). Por sua vez, através da ação *Construir* (B) os alunos produziram resultados, tais como expressões algébricas e equações, que voltaram a ser interpretados e mobilizados no sentido da nova construção. Verifica-se, também, que o desenvolvimento da ação *Construir* (B) promoveu a nova *Construção* (C), situação que se verificou com a aplicação de procedimentos análogos aos das propriedades de equivalência, da adição e multiplicação, e que permitiram que os alunos obtivessem soluções para as equações apresentadas. Verifica-se ainda que, mesmo que indiretamente, a manifestação da ação epistémica *Reconhecer* (R) promoveu o desenvolvimento da ação epistémica *Construção* (C).

Síntese. No desenvolvimento desta tarefa manifestaram-se todas as ações do modelo epistémico RBC+C. À semelhança do que já se tinha verificado nas tarefas anteriores, para o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* contribuíram a mobilização de construções concebidas, através da resolução das tarefas anteriores, e que se relacionam com a utilização de linguagem simbólica e com a seleção de representações para expor o raciocínio, ou seja, a *Consolidação* favoreceu o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Por sua vez, a construção reconhecida, ao ser mobilizada e utilizada para promover a nova construção fortaleceu, ainda mais, a construção já adquirida, o que explica a interligação existente entre as duas ações epistémicas.

Verificou-se, ainda, que as ações epistémicas *Reconhecer* (R) e *Construir* (B) evoluíram, no sentido em que a interpretação dos dados presentes na tarefa, e a seleção de conhecimentos matemáticos, em paralelo com as estratégias aplicadas, contribuíram

para a apresentação de soluções intermédias e para o desenvolvimento de ideias e procedimentos, que foram reinterpretados e utilizados na mesma tarefa, aproximando os alunos da nova construção. À semelhança do que se verificou na análise das tarefas anteriores, a ação epistémica *Reconhecer* continua, mesmo que indiretamente, a promover o desenvolvimento da nova *Construção*. Destaca-se, também, o papel atribuído à ação epistémica *Construir*, considerando-se que foi essencial à nova *Construção*.

4.8.5 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Professor.

Destaca-se a mediação estabelecida pela professora no desenvolvimento da presente tarefa, no sentido em que procurou estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, incentivando a compreensão de relações e da variabilidade de quantidades, bem como do significado atribuído ao sinal de igual e à linguagem simbólica - *Reconhecer*. Para promover a construção desses significados, os alunos selecionaram construções adquiridas com a resolução das tarefas anteriormente aplicadas e, em particular, com a experiência adquirida com a exploração de representações, com a utilização de linguagem simbólica e com a manipulação de expressões algébricas. Notou-se, como tal, a preocupação da professora em incentivar a mobilização de construções adquiridas - *Consolidação*. Através da tarefa, a professora incentivou a exploração semiótica das balanças e, com essas, a compreensão de relações de igualdade e a respetiva representação em linguagem simbólica. Realça-se, ainda, o papel da professora durante a apresentação e condução da tarefa, considerando-se que esse foi essencial para que os objetivos delineados fossem atingidos.

O diálogo que se segue refere-se ao momento de apresentação da tarefa, quando a professora procurou despertar o interesse dos alunos, envolvendo-os na exploração dos significados matemáticos presentes nas balanças.

[A tarefa foi apresentada em contexto sala de aula. A professora procurou direcionar a atenção dos alunos para a imagem da balança de dois pratos. Questionou se os alunos conheciam este tipo de balança, e alguns referiram já terem visto balanças semelhantes, mas apenas com um prato de cada lado. A professora questionou esses quanto às posições dos pratos, se estariam sempre em equilíbrio. Responderam que dependia dos “pesos” de cada prato. A professora fez uma leitura global da tarefa, expressando a necessidade de utilizarem e compreenderem o significado das letras, bem como de justificarem as suas opções. Um aluno questionou o que era a massa dos objetos, tendo a professora esclarecido o significado do termo no contexto apresentado. A professora distribuiu a tarefa e os alunos, sentando-se ao lado um do outro, deram início à resolução da mesma].

Figura 4.204 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Relação de Equilíbrio (RI)

Verifica-se, através do diálogo anterior, que a professora fez uma apresentação global da tarefa, focando a atenção dos alunos para aspetos que considerou pertinentes, para a exploração dos dados presentes nas balanças e para a presença de linguagem simbólica. A professora teve o cuidado de verificar se a balança de pratos teria algum significado matemático para os alunos e de esclarecer as dúvidas colocadas pelos alunos. Reforçou o conteúdo da tarefa, distribuindo-a em suporte papel, para que os alunos a pudessem manipular e utilizar para desenvolver o seu raciocínio. Nesta situação a professora utilizou os artefactos tarefa e balanças, com a intenção de promover a aquisição do novo conhecimento matemático – *Incentivo à utilização de artefactos*.

Registe-se a preocupação da professora em conduzir os alunos a reconhecer e a relacionar estruturas matemáticas e em promover a utilização de linguagem simbólica de forma significativa, e não como simples procedimento matemático, de modo que os alunos utilizassem, progressivamente, linguagem simbólica de forma abstrata, e não estritamente ligada aos objetos que com ela se relacionassem.

A professora direccionou a atenção dos alunos para o conteúdo matemático presente nas balanças - *procurem explicar como se chega a esse valor fazendo a leitura da balança* - incentivando a mediação semiótica, entre os alunos e as balanças - *Incentivo à construção de signos matemáticos*. Procurou, ainda, promover a exposição clara de ideias e a justificação de procedimentos e respostas dadas, incentivando a utilização de linguagem matemática formal.

<p>P: [Procurando analisar rapidamente a resposta apresentada pelos alunos]: Neste caso... se explicarem o que signifiva... ele por si não transmite! Como é que eu justifico este dez?! [apontando] [...]</p> <p>P: Sim, concordo, mas foram experimentando valores até dar? [...]</p> <p>P [interrompendo]: Podes escrever $3b$, em vez desse comboio de letras b [...]</p>

Figura 4.205 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Relação de Equilíbrio* (P)

Segue-se a representação esquemática de situações expostas anteriormente, através das quais se pretende averiguar de que forma se manifestou a mediação entre professora e alunos na construção do novo conhecimento matemático.

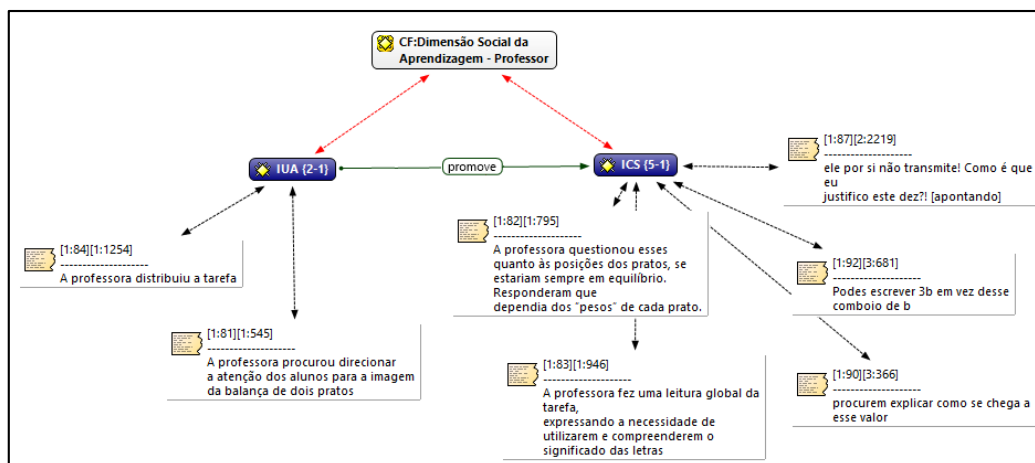


Figura 4.206 – RAV da análise da DSA, Professor, em Relação de Equilíbrio

Da figura 4.206 ressalta que a mediação estabelecida entre professora e alunos traduziu-se pelo *Incentivo à utilização de artefactos*, designadamente da tarefa [1:84] e das balanças [1:81] e à *Construção de signos matemáticos*, respeitantes ao significado matemático traduzido pelas balanças [1:82], ao significado atribuído às letras [1:83] [1:92], bem como às soluções encontradas [1:87] [1:90].

A tabela que se segue sintetiza as características principais do desenvolvimento das subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* e *Incentivo à construção de signos matemáticos* descritas nesta secção.

Tabela 4.46 – Síntese da análise da DSA, Professor, em Relação de Equilíbrio

Categoria: Professor (P)		
Subcategorias	Incentivo à utilização de artefactos (IUA)	<ul style="list-style-type: none"> • Incentivou a exploração da tarefa; • Incitou a exploração das potencialidades matemáticas presentes nas balanças.
	Incentivo à construção de signos matemáticos (ICS)	<ul style="list-style-type: none"> • Incentivou a representação dos dados em linguagem matemática, designadamente sob a forma de expressão algébrica e equação; • Incitou a recolha de dados e conceitos matemáticos presentes nas balanças, a representação desses em linguagem matemática formal.

Síntese. O incentivo à exploração da tarefa e das balanças nela constante ocorre desde a fase de elaboração da tarefa, pretendendo-se a mobilização de conhecimentos adquiridos com a resolução das tarefas anteriores. É através da exploração dos enunciados e da informação contida nas balanças que a professora incentiva a interpretação de relações e signos matemáticos e a seleção de construções adquiridas em aprendizagens anteriores – *Reconhecer* e *Consolidação*. É também através da exploração das relações presentes nos enunciados e balanças que os alunos são incentivados a expressar, em linguagem simbólica, expressões algébricas e equações, bem como a simplificá-las – *Construir*. Por fim, a professora incentiva, também, a

construção, quando solicita a obtenção, através da simplificação das equações representadas, da respetiva solução – *Construção*.

Entende-se que ao incentivar a exploração da tarefa, designadamente dos enunciados e balanças, a professora incentivou, igualmente, a produção de signos matemáticos, em particular a representação em linguagem simbólica e a resolução significativa de equações.

4.8.6 A influência do contexto na construção do novo conhecimento.

Alunos.

A atuação dos alunos, durante o processo de construção do novo conhecimento matemático, iniciou-se com a identificação de uma relação geral – a igualdade, entre as massas colocadas nos pratos dos lados direito e esquerdo da balança. O processo de abstração iniciou-se aquando da leitura e análise do enunciado, quando os alunos compreenderam a necessidade de traduzirem a informação das balanças a partir de uma expressão matemática, palavras que esses sublinharam durante a leitura dos enunciados. O desenvolvimento do processo de abstração continua, depois, com o trabalho efetuado com os objetos – balanças e massa dos objetos. É nessa fase que os alunos começam a estabelecer relações, entre as massas colocadas em cada um dos lados da balança, e a tomar consciência do que se pretende obter. O diálogo que se segue procura transmitir como o desenvolvimento do processo de abstração se relacionou com o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo *RBC+C*.

GI: Temos que representar uma expressão matemática com os pesos dos pratos do lado esquerdo [rodeou esses pratos enquanto falava]. Temos 20 gramas mais uma boneca que pesa b . [LP acenou, mostrando concordar] [GI escreveu $20 + 1b$ de imediato e sem evidenciar qualquer receio quanto à presença da letra b . LP também não estranhou a representação de GI].

Figura 4.207 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa *Relação de Equilíbrio* (GI)

Verifica-se, através do diálogo anterior, a *Produção de signos individuais*, por parte do aluno GI, que contribuíram para o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* – *temos que representar uma expressão algébrica... temos 20 gramas mais uma boneca que pesa b – e Construir – $20 + 1b$ – permitindo o desenvolvimento do processo de abstração no sentido da nova *Construção*. A partilha e comunicação de ideias torna-se*

essencial para o envolvimento dos alunos na produção de novos significados matemáticos, tal como podemos constatar através do diálogo que se segue:

LP [passados breves instantes]: temos de descobrir o peso da boneca [fez-se silêncio por breves instantes]. [Olhando para o desenho do colega, proferiu, apontando para as “bonecas”, ou seja, para as duas letras b situadas nos dois últimos pratos da direita]. Estas duas bonecas [apontando] pesam vinte gramas, uma dez. [pegou no lápis e escreveu ao lado da balança desenhada $b = 10$].
GI [Que estava a representar as suas ideias numa folha de rascunho, focou a atenção no que o colega estava a dizer, concordando]: e como justificamos, com o desenho? Não diz! [solicitou a presença da professora]
GI: Podemos [apontando] justificar só com o desenho? [...]
LP: Se a boneca pesa dez, neste lado [apontando para os pratos da esquerda] estão vinte mais dez, logo trinta gramas e neste [apontando para os pratos da esquerda] também, logo está certo...fica equilibrada.

Figura 4.208 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Relação de Equilíbrio (GI, LP)

Presencia-se, através do diálogo anterior, o envolvimento do aluno LP na produção de signos matemáticos, revelando interpretar os dados enunciados e o objetivo da questão colocada – *Reconhecer*. O aluno contribuiu, igualmente, para a apresentação de soluções, $b = 10$, envolvendo-se no processo de justificação dos resultados apresentados – *Produção de signos coletivos*. O diálogo que se segue transmite, com maior clareza, o envolvimento dos dois alunos na produção de novos signos matemáticos.

GI: Neste prato [apontando para o prato do lado esquerdo] temos oito gramas também. O crocodilo pesa... quatro. Podemos escrever que o crocodilo, o peso do crocodilo é igual a oito menos quatro. [Escreveu, selecionando a letra c sem dificuldades, escrevendo $c = 8 - 4 = 4$].
LP: Mas assim não estás a explicar. Se a balança está em equilíbrio [pegou no lápis] escreves aqui igual e dizes que c mais três mais um, que é o peso da esquerda, é igual a oito, o peso da direita.
GI [parecendo concordar reforçou, escrevendo]: $c + 3 + 1 = 8$, $c + 4 = 8$. [focaram a atenção no esquema seguinte].
LP: Agora queremos saber o peso do iogurte. Dez mais dois iogurtes [GI iniciou a escrita] igual [focando atenção no que o colega estava a escrever] a cinco mais três iogurtes. [GI escreveu $10 + i + i = 5 + i + i + i$, iniciando um raciocínio que o conduziu à solução pretendida].
GI: Temos dez mais, mais dois iogurtes, igual a cinco mais três iogurtes. Agora para descobrir o peso de um iogurte podemos... podemos tirar como fizemos [voltou à primeira página, focando a sua atenção na balança já desenhada].
GI: Não, não era tirar [voltou novamente a folha].
LP: Nessa acrescentámos dois em cada lado, agora tiras um em cada lado ou dois, aliás podes tirar dois.

Figura 4.209 – RAV sobre o ambiente observado após apresentação da tarefa Relação de Equilíbrio (GI, LP)

O diálogo estabelecido pelos alunos evidencia o envolvimento desses na interpretação dos dados e no cálculo da massa dos objetos colocados na balança. A partilha contribuiu para a representação dos dados enunciados, em linguagem matemática, visível na apresentação das equações $c + 3 + 1 = 8$, $c + 4 = 8$ e $10 + i + i = 5 + i + i + i$ que resultaram da exploração semiótica das balanças apresentadas e na que foi

desenvolvida por GI – voltou à primeira página, focando a sua atenção na balança já desenhada. A discussão e partilha de ideias contribuiu, tal como durante a análise da secção *Construção*, para o desenvolvimento de procedimentos análogos aos princípios de equivalência da adição e multiplicação, para o desenvolvimento de estratégias de resolução de equações.

A figura seguinte evidencia excertos dos registos audiovisuais selecionados, que transmitem a relação estabelecida entre as subcategorias *Produção de signos individuais* (PSI) e *coletivos* (PSC), por parte dos alunos.

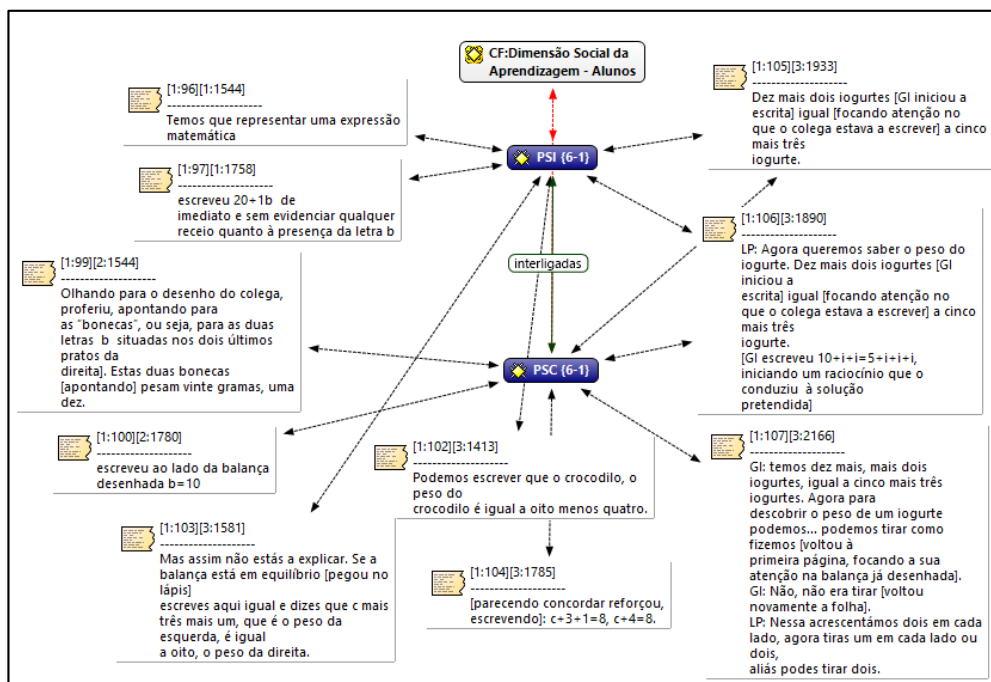


Figura 4.210 – RAV da análise da DSA, Alunos, em Relação de Equilíbrio

A análise da figura 4.210 evidencia que as contribuições individuais (PSI) foram significativas para a interpretação dos enunciados [1:96], dos dados constantes nas balanças [1:97] e para a seleção de estratégias [1:99], promovendo, essencialmente através do diálogo, a *Produção de signos coletivos* (PSC) [1:100]. As contribuições individuais, que surgiram de ambos os alunos, integraram as conversas e o raciocínio desenvolvido estando, como tal, interligadas à produção de signos coletivos. Ao produzirem significado em relação ao conteúdo matemático das balanças e ao traduzirem linguagem natural para simbólica [1:102] [1:103], os alunos alcançaram, conjuntamente, o objetivo pretendido [1:104]. Ainda que o processo de abstração tenha sido iniciado através das habilidades demonstradas, em certo momento, por um dos alunos [1:105], a obtenção de soluções intermédias [1:106] e a nova construção [1:107] resultou das contribuições e significados produzidos pelos dois alunos – *Produção de signos coletivos* (PSC).

A tabela que se segue sintetiza os aspetos mais revelantes observados durante a análise da categoria *Alunos*.

Tabela 4.47 – Síntese da DSA, Alunos, em Relação de Equilíbrio

Categoria: Alunos (A)	
Subcategorias	<p>Produção de signos individuais (PSI)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Envolveram-se na interpretação das questões colocadas e dos dados contidos nas balanças; • Interpretaram linguagem simbólica; • Exploraram os dados matemáticos presentes nas balanças; • Traduziram linguagem natural para linguagem simbólica, apresentando-a na forma de expressões algébricas e equações; • Desenvolveram esquemas para exporem o seu raciocínio; • Integraram conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores.
	<p>Produção de signos coletivos (PSC)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Os alunos envolveram-se na produção de signos coletivos, os quais resultaram da interpretação dos dados enunciados e da mobilização de conhecimentos matemáticos; • Envolveram-se na representação de ideias matemáticas, representando em linguagem simbólica expressões algébricas e equações; • Desenvolveram procedimentos matemáticos para obter solução para as equações representadas; • A <i>Produção de Signos Coletivos</i> esteve, na globalidade, relacionada com a exploração dos dados presentes nas balanças, na interpretação de linguagem simbólica, na representação dos dados enunciados através de expressões algébricas e equações e na resolução das equações.

Síntese. O desenvolvimento do processo de abstração esteve, em diferentes momentos, associado às contribuições dadas por um dos alunos, porém a comunicação e partilha estabelecida pelos dois alunos evidencia que a construção do novo conhecimento ocorre através da *Produção de signos coletivos*. Verificou-se que as subcategorias *Produção de signos individuais* e *Produção de signos coletivos* mantiveram-se interligadas durante a resolução da tarefa e contribuíram para o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas. Realça-se o interesse manifestado pelos alunos relativamente à resolução deste género de atividade, e pelos desafios que lhes são colocados, ao trabalho conjunto, bem como à criatividade demonstrada nas suas resoluções. Constata-se, à semelhança do que se verificou com outras tarefas, que os alunos mais jovens conseguem fazer uso das representações, para interpretar e extrair informação necessária ao desenvolvimento de processos de resolução, em situações que não lhes são familiares. Realça-se a evolução do significado atribuído à linguagem simbólica, comparativamente com a resolução das primeiras tarefas.

A figura que se segue procura transmitir de que forma a mediação estabelecida entre *Professora* e alunos, e entre *Alunos*, contribuiu para o desenvolvimento do processo de abstração e para a construção do novo conhecimento matemático e, de que forma, influenciou o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co).

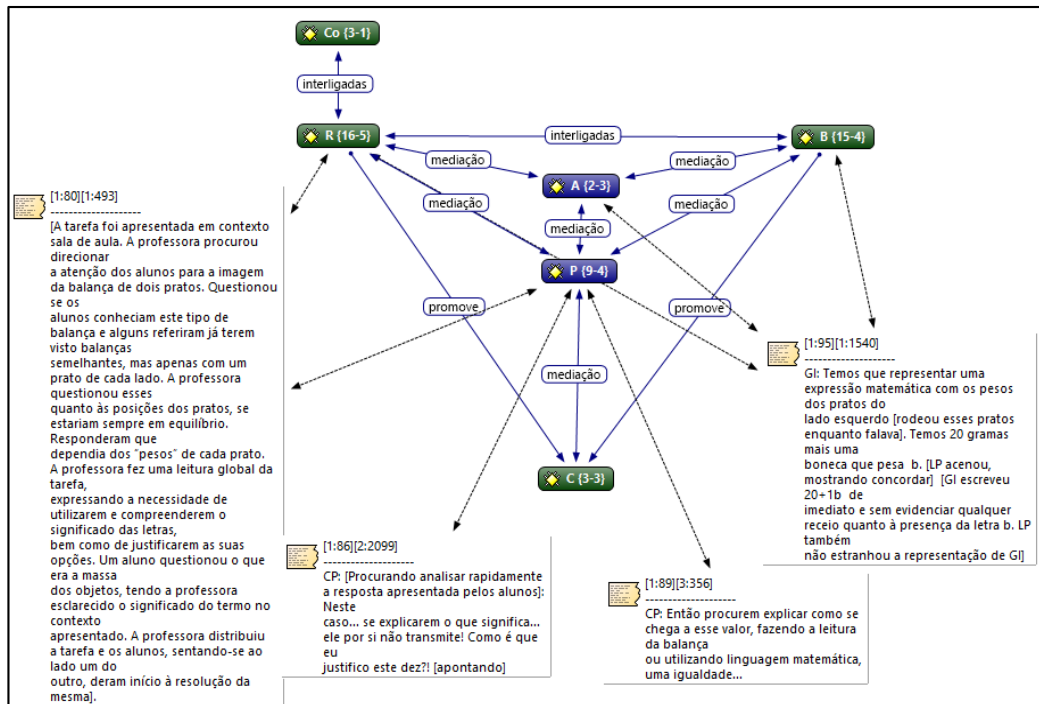


Figura 4.211 – Relação entre as ações RBC+C e DSA em Relação de Equilíbrio

A figura 4.211 exemplifica, apresentando alguns excertos, de que forma a mediação estabelecida entre Professora (P) e alunos e entre Alunos (A) favoreceu o desenvolvimento das ações epistémicas do modelo RBC+C. A atuação da Professora (P), na elaboração da tarefa, foi essencial para despertar o interesse dos Alunos e promover uma aprendizagem significativa através da mobilização de competências adquiridas. Observou-se da parte dos alunos maior autonomia na construção do seu próprio conhecimento, nomeadamente na interpretação da informação enunciada (R) e na utilização de linguagem simbólica e estratégias para representarem o raciocínio (B) e obterem a Construção (C) objetivada [1:95]. Destaca-se o papel da Professora (P), no questionamento e constante incentivo à produção de novos signos matemáticos [1:86], bem como na representação do raciocínio desenvolvido [1:89].

Síntese. O desempenho da professora durante a elaboração e apresentação desta tarefa foi significativo para a motivação e autonomia observada nos alunos. A estrutura e conteúdo da tarefa permitiu que os alunos se envolvessem mutuamente na interpretação e construção de novos significados matemáticos. Como tal, valoriza-se o papel da Professora nos momentos supracitados, considerando-se que essa influenciou o desenvolvimento autónomo das ações epistémicas Reconhece e Construir, que conduziram os alunos à nova Construção. Porém, o envolvimento e colaboração estabelecida pelos alunos, durante a resolução da tarefa, permitiu que o desenvolvimento do processo de abstração ocorresse e se atingisse a construção pretendida.

Capítulo 5

As ações epistémicas e a mediação no desenvolvimento do pensamento algébrico

No presente capítulo apresenta-se a análise de terceira ordem que tem por base a leitura reflexiva transversal, por categorias, dos oito blocos obtidos na análise anterior e que foram interpretados de acordo com o problema do estudo, com o enquadramento teórico e com o trabalho empírico desenvolvido. Procurar-se-á transmitir a constância e relação estabelecida pelas subcategorias e categorias de análise, desde a resolução da primeira tarefa, *Luzes de Natal*, até à última tarefa aplicada, *Relação de equilíbrio*, apresentadas no capítulo quatro do presente trabalho. Como tal, estes resultados decorreram da análise de segunda ordem, onde se analisaram, em cada uma das tarefas, todas as categorias definidas e que respeitaram a seguinte ordem de análise: *Reconhecer*, *Construir*, *Construção*, *Consolidação*, *Professor* e *Alunos*, bem como a relação estabelecida entre as ações epistémicas e entre a mediação e o desenvolvimento das ações epistémicas.

Da análise transversal espera-se compreender melhor como ocorreu o processo de abstração dos alunos, na construção do novo conhecimento matemático, identificar eventuais dificuldades manifestadas e concluir sobre os benefícios em promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No que respeita à estrutura deste capítulo, realça-se que na primeira secção será apresentada a análise das subcategorias de cada ação epistémica, pretendendo-se verificar se todas ocorreram, compreender como se relacionaram e que influência tiveram no desenvolvimento destas ações. Na segunda secção surgem os resultados da análise das ações epistémicas, procurando-se identificar a presença e a relação estabelecida entre as mesmas. Na secção final apresenta-se a análise da influência da mediação, estabelecida pela professora e entre alunos, no desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*.

A apresentação segue a seguinte ordem: (1) a relação estabelecida pelas subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades* no desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, (2) a relação estabelecida pelas subcategorias *Construções reconhecidas*, *Estratégias*, *Soluções* e *Justificação* no desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, (3) a relação estabelecida pelas subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação* no desenvolvimento da ação epistémica *Construção*, (4)

a relação estabelecida pelas subcategorias *Aplicação de construções recentes* e *Características psicológicas* no desenvolvimento da ação epistémica *Consolidação*, (5) o papel das ações epistémicas no desenvolvimento do pensamento algébrico e (6) as contribuições da mediação, entre professora e alunos e entre alunos, no desenvolvimento das ações epistémicas.

5.1 Desenvolvimento das ações epistémicas.

Contribuições dadas pelas respectivas subcategorias.

5.1.1 A relação estabelecida pelas subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades* no desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*.

Na presente secção focar-se-á atenção na forma como a ação epistémica *Reconhecer* emergiu durante o processo de abstração, ocorrido durante a resolução das diferentes tarefas aplicadas. Interessa compreender se *Reconhecer* se manifestou através de todas as subcategorias definidas ou apenas através de algumas delas, bem como se a relação estabelecida entre subcategorias tem que evidenciar características especiais para que *Reconhecer* se desenvolva.

5.1.1.1 *Interpretação e Estruturas adquiridas*

Da análise efetuada sobressai que nem sempre todas as subcategorias da ação epistémica *Reconhecer* se evidenciaram. Verificou-se essa situação na resolução das tarefas *Caça ao Ovo* (Tarefa 4) e *Relação de igualdade* (Tarefa 8), onde não esteve presente a subcategoria *Regularidades*. Nessas situações, o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* manifestou-se, como a figura que se segue sugere, apenas através das subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA):

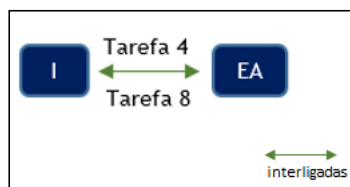


Figura 5.1 – Relação entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA) nas tarefas 4 e 8

No que respeita à ausência da subcategoria *Regularidades*, considera-se que poderá dever-se às características das próprias tarefas e, eventualmente, às opções de resolução adotadas pelos alunos. Realça-se que, com a elaboração destas duas tarefas, não se tinha a pretensão de promover a generalização de relações numéricas nem a

extensão de propriedades aritméticas, tal como se verificou com a aplicação das restantes tarefas.

As figuras 5.2 e 5.3, que se seguirão, procuram expor com maior clareza as características e exigências das tarefas números quatro e oito, associadas aos conhecimentos mobilizados pelos alunos e às construções concebidas, para que melhor se compreenda e justifique a ausência da referida subcategoria.

A figura 5.2 evidencia os resultados da análise efetuada à tarefa *Caça ao ovo*, a qual contempla um problema de natureza algébrica. Nos registos audiovisuais recolhidos e através dos registos escritos apresentados pelos alunos foi possível verificar que a *Interpretação* (I) do enunciado do problema esteve dependente da seleção de *Estruturas adquiridas* (EA) em aprendizagens anteriores, pois na leitura do enunciado os alunos tiveram de evidenciar compreensão leitora de conceitos trabalhados em aprendizagens anteriores, tais como os significados de dezena, metade, quarta e oitava parte. As subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA) estiveram, como tal, associadas à compreensão do enunciado e à construção do seu significado a partir da ativação de conceitos matemáticos já adquiridos, a qual designamos, na figura 5.2, por *compreensão conceptual*.

Foi também possível verificar, através da resolução apresentada, posteriormente, pelos alunos, que eles também estabeleceram, a partir da leitura do enunciado, relações de quantidade, designadamente associando a oitava parte dos participantes a oito alunos do oitavo ano. O mesmo aconteceu quando verificaram estar, novamente, a trabalhar com números desconhecidos, situação que já tinha ocorrido nas tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1), *Conta-quilómetros* (Tarefa 2) e *Doces de Páscoa* (Tarefa 3). A *Interpretação* esteve, nesta situação, associada à seleção de *Estruturas adquiridas* através de tarefas resolvidas anteriormente, o que faz com que o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* evidencie a presença da *Consolidação* que não será, propriamente, a de uma construção adquirida, mas antes associada ao significado de indeterminação. Na figura 5.2, designamos esta associação por *relações de quantidade*. Ao estabelecerem relações de quantidade mas, sobretudo, ao revelarem perceção do significado de indeterminação, os alunos mostraram ter desenvolvido competências de natureza algébrica.

Considera-se, no entanto, que a relação estabelecida entre *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* foi mais evidente e significativa quando os alunos selecionaram a representação circular para representar os dados enunciados. Verifica-se, nesta situação, que a interpretação do enunciado fez-se a partir de um esquema – representação circular – que um dos alunos ativou, na sua memória, a partir de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores. Esta representação permitiu a

elaboração de inferências necessárias à compreensão do enunciado lido, designadamente do que não é explícito, permitindo estabelecer conexões entre os diversos elementos do texto e integrar informação explícita e implícita na leitura. Considera-se que a compreensão do enunciado ocorreu quando os alunos estabeleceram conexões lógicas entre o que extraíram do enunciado, das suas ideias e da expressão de ambas através de forma de representação que para eles era mais significativa. A representação selecionada pelos alunos foi fundamental para a compreensão do problema, permitindo dar sentido diferente ao texto enunciado, interligando dados e completando informação implícita ou inexistente. Na figura 5.2 designa-se este processo de compreensão por *representação*.

Face ao exposto, pode-se afirmar que na resolução da tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4), a relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA) foi fundamental para a expressão da ação epistémica *Reconhecer*.

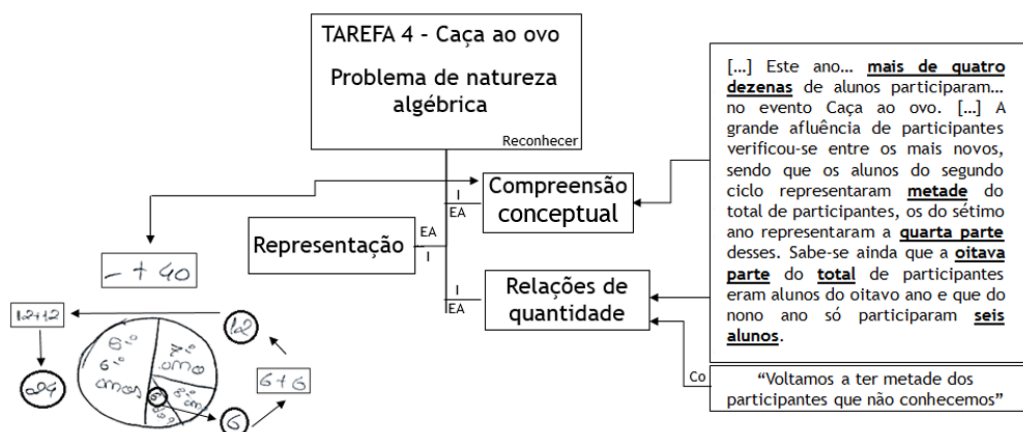


Figura 5.2 – Reconhecer na resolução da tarefa 4

A figura anterior, respeitante ao conteúdo e estrutura da tarefa *Caça ao ovo* e à resolução apresentada pelos alunos, revela como a ação epistémica *Reconhecer* se manifestou através da *Interpretação* (I) dos dados enunciados e da aplicação de *Estruturas adquiridas* (EA). Destaca-se a manifestação da *Consolidação* (Co), no sentido em que a expressão “voltamos a ter”, presente na figura anterior, transmite o reconhecimento da indeterminação quanto ao número de participantes, tal como se tinha verificado com a aprendizagem adquirida na resolução das tarefas anteriores.

Acrescenta-se que a subcategoria da ação epistémica *Reconhecer, Regularidades*, não está presente na resolução dos alunos mas, ainda assim, o desenvolvimento desta ação epistémica manifestou-se, valorizando o processo de abstração no momento

compreensão dos dados enunciados no problema. Tal parece sugerir, que a *Interpretação* e a seleção de *Estruturas adquiridas* são essenciais para desencadear o processo de abstração e que a manifestação da subcategoria *Regularidades* estará, apenas, associada à estrutura da tarefa, surgindo quando for estimulada essa observação.

Relativamente à relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* na tarefa *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), verifica-se, à semelhança do que tinha acontecido na tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4), que ela foi essencial para o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, dando início ao processo de abstração que favoreceu a construção do novo conhecimento matemático.

Através da figura 5.3 pretende-se mostrar como a representação da balança de pratos, presente na tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4), foi significativa para o desenvolvimento das subcategorias *Interpretar* e *Estruturas adquiridas*. Foi através desta representação que os alunos identificaram os objetos matemáticos, perceberam a situação de equilíbrio e avaliaram o seu significado matemático, relacionando-o com o sinal de igual. A percepção do equilíbrio presente na balança permitiu que obtivessem conhecimento matemático acerca dos objetos representados, concluindo a igualdade entre duas expressões: $b + 20 = b + b + b$. Porém, a transferência da representação de equilíbrio para a forma de equação só foi possível porque os alunos selecionaram conhecimentos adquiridos com a experiência obtida através da resolução das tarefas aplicadas anteriormente, designadamente linguagem simbólica.

Verifica-se, ainda, que os alunos conseguiram, ao interpretarem a informação presente na balança e ao integrarem o conceito de igualdade e a linguagem simbólica, aperfeiçoar a representação dessa balança, desenhando uma nova onde exibiram e desenvolveram a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, tais como o sinal de igual e a adição da mesma quantidade em ambos os lados/membros da balança/equação. Realça-se o facto de estes alunos, jovens, terem adquirido competências que os aproximaram da aprendizagem da álgebra, desenvolvendo o pensamento algébrico.

Destaca-se, nesta manifestação da ação epistémica *Reconhecer*, na tarefa *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), o facto de os alunos terem dispensado mais tempo à interpretação da balança representada, bem como ao seu aperfeiçoamento, onde foram integrando *Estruturas adquiridas*, reinterpretando e registando os conceitos matemáticos presentes na relação de equilíbrio.

O conhecimento adquirido através da representação da balança parece indicar que o tempo dispensado em torno da interpretação e da avaliação da forma como os objetos – massas – se relacionavam foi essencial à compreensão e ao desenvolvimento do

processo de abstração, no sentido da nova construção. Afigura-se, nesta situação, que *Reconhecer* e, conseqüentemente, o desenvolvimento da ação *Construir* – simplificação de expressões algébricas e representação de uma equação – e da própria *Construção* – resolução de uma equação – estiveram dependentes da compreensão e da habilidade de representação de *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores. Destaca-se, à semelhança do que se referiu para a tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4), que a *Consolidação* esteve presente através da ação epistémica *Reconhecer*, quando os alunos fizeram uso do conhecimento adquirido quanto à interpretação e seleção de linguagem simbólica.

Como tal, através da figura 5.3 será possível evidenciar que a ação epistémica *Reconhecer* manifestou-se através da: (1) identificação e *Interpretação* do conceito de *igualdade* presente nas balanças de pratos, (2) *Interpretação* (I) dos dados representados – *relação entre massas* – e (3) seleção de *Estruturas adquiridas* (EA) presentes, neste esquema, na mobilização de linguagem simbólica para representar a massa de um objeto, bem como do cálculo aditivo e multiplicativo associado à simplificação de expressões algébricas. A figura evidencia, igualmente, a manifestação da *Consolidação*, através da interpretação e seleção de linguagem simbólica, bem como a manifestação das ações epistémicas *Construir* (B) e *Construção* (C).

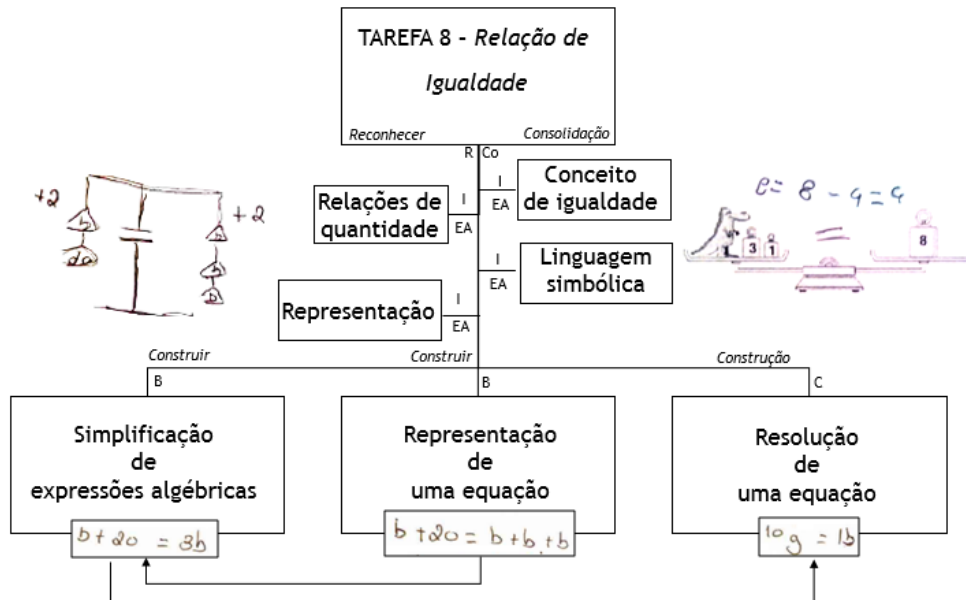


Figura 5.3 - Reconhecer na resolução da tarefa 8

À semelhança da tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4), a subcategoria *Regularidades* não esteve presente na resolução apresentada pelos alunos, no entanto, eles revelaram percepção quanto à necessidade de explorarem os dados enunciados e selecionar

conhecimentos e construções adquiridas para darem início à resolução da presente tarefa, desencadeando o processo de abstração. Como tal, sem a presença de *Regularidades* verificou-se o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*.

Face ao exposto, fica presente a ideia de que o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* não fica comprometido com a ausência da subcategoria *Regularidades*. O envolvimento dos alunos na interpretação do conteúdo matemático enunciado e a seleção de conhecimentos e procedimentos de resolução desencadeia o processo de abstração e conduz os alunos ao desenvolvimento do pensamento algébrico sem que, para isso, tenham que generalizar regularidades ou procedimentos aritméticos.

Seguidamente, apresentam-se os resultados da análise transversal das relações evidenciadas pelas subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* nas tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1), *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5), *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Campo de férias* (Tarefa 7). Verifica-se que em algumas das tarefas supracitadas, as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* mantiveram-se interligadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, à semelhança do que já se tinha verificado nas tarefas *Caça ao ovo* (Tarefa 4) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), enquanto nas restantes a subcategoria *Estruturas adquiridas* resultou da manifestação da subcategoria *Interpretação*. A figura que se segue mostra a relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA):

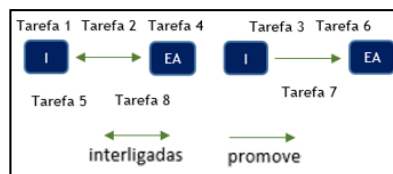


Figura 5.4 – Relação entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA)

Relativamente à situação em que as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* se relacionaram mutuamente, durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, constata-se que essa relação ocorreu um maior número de vezes e que, para além de se ter verificado nas tarefas anteriormente descritas, também ocorreu nas tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1), *Conta-quilómetros* (Tarefa 2) e *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5). Através da análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro, constatou-se que, à semelhança do que se verificou na resolução das tarefas *Caça ao ovo* (Tarefa 4) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), os dados presentes nos enunciados foram interpretados à medida que os alunos selecionavam *Estruturas adquiridas* que permitiram a compreensão dos conceitos matemáticos neles presentes. Por sua vez, a aplicação de *Estruturas adquiridas* gerou

o aparecimento de um conjunto de resultados que foram novamente interpretados, permitindo o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. Esta situação ocorreu, por exemplo, na resolução das tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1) e *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5), quando os dados presentes no enunciado permitiram, através da seleção de *Estruturas adquiridas*, o preenchimento de tabelas e, por sua vez, os resultados aí expostos foram interpretados, favorecendo o desenvolvimento do processo de abstração no sentido da nova *Construção*. Relativamente à tarefa *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), verificou-se que a relação estabelecida entre as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* foi muito semelhante à que se verificou na tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4), uma vez que a leitura do problema exigiu a compreensão leitora dos significados matemáticos presentes no enunciado, que essa perceção também se desenvolveu a partir da representação circular selecionada e que os resultados obtidos e presentes na representação foram também interpretados no sentido de os alunos alcançarem a construção pretendida.

Por sua vez, constatou-se que nas tarefas *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Campo de férias* (Tarefa 7), os alunos selecionaram *Estruturas adquiridas* para interpretar os dados enunciados e darem resposta às solicitações da tarefa, de modo que a *Interpretação* dos enunciados proporcionou a seleção de *Estruturas adquiridas* que, ao serem aplicadas, favoreceram o desenvolvimento do processo de abstração.

A figura que se segue evidencia as relações estabelecidas entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA):

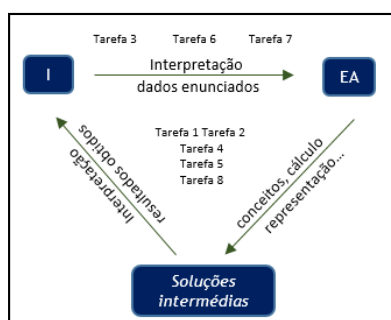


Figura 5.5 – As subcategorias *Interpretação* (I) e *Estruturas adquiridas* (EA) na construção do conhecimento

Face ao exposto podemos afirmar que a relação evidenciada entre as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* verificou-se de duas formas distintas: (1) A *Interpretação* dos enunciados conduziu à seleção de *Estruturas adquiridas* que aproximaram os alunos da *Construção* pretendida ou (2) A *Interpretação* dos enunciados levou os alunos à seleção de *Estruturas adquiridas* – conceitos, cálculo e representação – as quais, ao serem aplicadas, deram origem a soluções intermédias – *Construir* – que

voltaram a ser interpretadas para darem continuidade ao processo de abstração e origem à nova construção. Quando as *Estruturas reconhecidas* foram construções concebidas através da resolução das tarefas, a *Consolidação* manifestou-se através da ação epistémica *Reconhecer*.

5.1.1.2 Regularidades e Estruturas adquiridas

Relativamente à manifestação da subcategoria *Regularidades* verificou-se, através da análise efetuada no capítulo quatro, que essa não ocorreu, tal como já referido, nas tarefas *Caça ao ovo* (Tarefa 4) e *Relação de equilíbrio* (Tarefa 8). A análise transversal efetuada a partir dos resultados apresentados no capítulo quatro transmitiu que a subcategoria *Regularidades* (Rg) surgiu, ora interligada à subcategoria *Estruturas adquiridas* (EA), ora como sua consequência, tal como a figura indica:

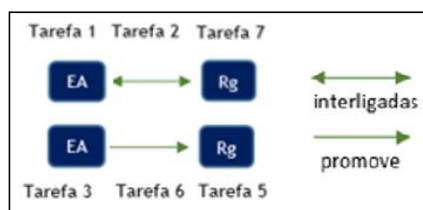


Figura 5.6 – Relação entre as subcategorias *Estruturas adquiridas* (EA) e *Regularidades* (Rg)

A figura 5.6 revela que ao serem estimulados a observar *Regularidades*, os alunos mobilizaram conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores – *Estruturas adquiridas* – para resolverem a tarefa. Por sua vez, distingue o facto de as subcategorias terem surgido interligadas – nas tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1), *Conta-quilómetros* (Tarefa 2) e *Campo de férias* (Tarefa 7) – da situação em que as *Estruturas adquiridas* conduziram os alunos à observação de *Regularidades*, o que se verificou com a resolução das tarefas *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *Regras operatórias* (Tarefa 5) e *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6). Há um notório interesse em estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico através da exploração, em profundidade, dos enunciados e da interpretação dos dados preenchidos nas tabelas.

Para procurar compreender melhor as diferenças presentes nas relações estabelecidas, analisou-se, com melhor detalhe, os resultados apresentados no capítulo quatro, respeitante às tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1), *Conta-quilómetros* (Tarefa 2) e *Campo de férias* (Tarefa 7).

No que respeita à tarefa *Luzes de Natal* (Tarefa 1) verificou-se que a *Regularidade* está explícita no enunciado do problema e é a partir da sua identificação e da seleção de *Estruturas adquiridas* – *cálculo* – que os alunos preenchem tabelas que os ajudam a

observar novas regularidades – o mínimo múltiplo comum entre um número e o seu dobro é o dobro do número. Acrescenta-se que a identificação de *Regularidades* numéricas está presente ao longo de toda a tarefa, estando associada à análise de tabelas e ao cálculo numérico.

Na tarefa *Campo de férias* (Tarefa 7), as *Regularidades* surgiram com a análise de padrões numéricos, pictóricos e geométricos, os quais foram utilizados para trabalhar a identificação e descrição de semelhanças e diferenças, a aritmética generalizada e a utilização de linguagem simbólica. Na figura 5.7 apenas se apresenta o estudo pictórico, através do qual os alunos identificaram padrões de repetição – mesas do refeitório – e de crescimento – construção de fósforos. Acontece que, em ambas as situações, os alunos foram conduzidos a identificar semelhanças e diferenças respondendo a questões intermédias, no caso do problema das mesas do refeitório, e preenchendo uma tabela, respeitante à construção de fósforos, de modo que a identificação das *Regularidades* esteve também associada à seleção de *Estruturas adquiridas* necessárias à apresentação de soluções.

Na tarefa *Conta-quilómetros* (Tarefa 2) é apresentada uma situação distinta das anteriores, pois a *Regularidade* identificada está presente na repetição de um procedimento – o cálculo da quinta parte de um número. Nesta situação, a continuidade da *Regularidade* está associada à seleção do conceito de quinta parte e ao seu relacionamento com a operação divisão, como também à seleção de *Estruturas adquiridas* relacionadas com a atribuição de significado às letras e ao conceito de número indeterminado, trabalhados na tarefa *Luzes de Natal* (Tarefa 1). A identificação de *Regularidades* e a seleção de *Estruturas adquiridas* permitiram a apresentação de expressões algébricas que representam a quinta parte de um número desconhecido. Os alunos utilizaram de forma combinada estas duas subcategorias para generalizar o processo a um número indeterminado. A figura 5.7 procura evidenciar a interligação estabelecida entre as subcategorias *Regularidades* e *Estruturas adquiridas* nas tarefas referidas:

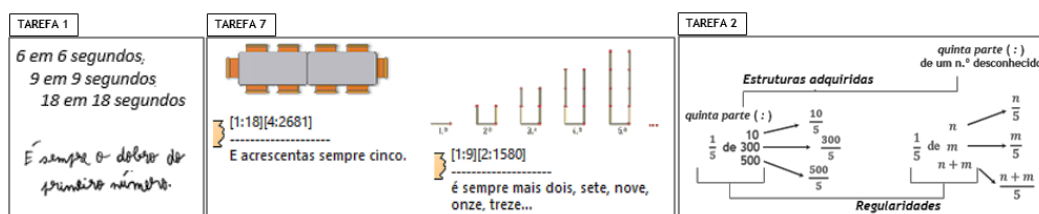


Figura 5.7 – Estruturas adquiridas e Regularidades na resolução das tarefas 1, 2 e 7

A análise da figura 5.7 revela que a subcategoria *Regularidades* está presente nos padrões numéricos, na tarefa *Luzes de Natal* (Tarefa 1), pictórico, na tarefa *Campo de*

férias (Tarefa 7), e no procedimento de cálculo realizado na tarefa *Conta-quilómetros* (Tarefa 2). Em todas estas tarefas também se verifica a presença da subcategoria *Estruturas adquiridas*, estando elas relacionadas com a mobilização de procedimentos de cálculo, de conceitos como o dobro e a quinta parte, bem como do reconhecimento do significado atribuído à linguagem simbólica, competência que revela a presença da *Consolidação* na seleção de *Estruturas adquiridas*, designadamente na indicação de uma expressão algébrica que represente a quinta parte de valores desconhecidos.

Relativamente à interligação estabelecida entre as subcategorias *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*, considera-se que ela deve-se ao facto de nas tarefas apresentadas anteriormente as *Regularidades* identificadas, e necessárias à nova construção, não se terem evidenciado claramente através dos enunciados, tendo resultado da seleção de *Estruturas adquiridas* que, ao serem aplicadas, permitiram a visualização dessas *Regularidades*.

Por sua vez, verifica-se que nas tarefas *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5) e *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6), a subcategoria *Regularidades* surgiu apenas como uma consequência da aplicação das *Estruturas adquiridas* selecionadas.

Na tarefa *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), os alunos resolveram dois problemas semelhantes em que o segundo, de natureza algébrica, apenas estendia a situação trabalhada com valores numéricos – dezoito – a valores desconhecidos, n . O conhecimento adquirido com a resolução do primeiro problema – *Estruturas adquiridas* – proporcionou, através da identificação de regularidades, a resolução do segundo problema. Considera-se que foi a analogia estabelecida pelos alunos, ou seja, a identificação evidente de *Regularidades* que proporcionou a generalização da situação a um número desconhecido e representado através de linguagem simbólica.

Nas tarefas *Regras operatórias das potências* (Tarefa 3) e *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6), os alunos necessitaram de mobilizar conhecimentos para preencherem as tabelas e, só após análise dos resultados obtidos, identificaram *Regularidades* que os conduziram à nova construção. Nestes casos, a identificação das *Regularidades* surge após desenvolvimento da ação *Construir*, quando os alunos refletiram e procuraram retirar conclusões. A subcategoria *Regularidades* da ação epistémica *Reconhecer* esteve presente na fase de transição da ação *Construir* para a nova *Construção*. Verificou-se que a identificação de *Regularidades* nos resultados obtidos conduziram os alunos à construção das regras operatórias das potências e à noção de proporcionalidade direta, sendo que esses deram significado a essa aprendizagem.

O conteúdo da figura 5.8 procura evidenciar o que foi anteriormente transmitido acerca da relação evidenciada pelas subcategorias *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*, nas

tarefas *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5) e *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6):

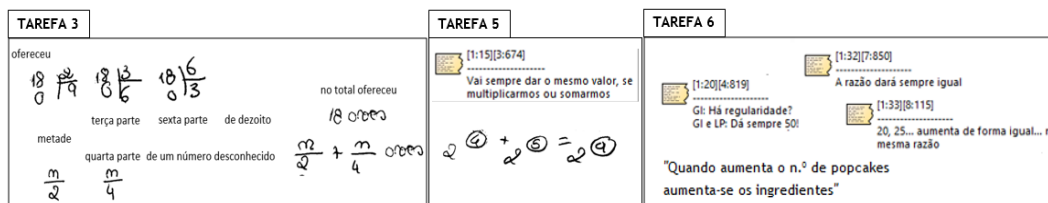


Figura 5.8 – Estruturas adquiridas e Regularidades na resolução das tarefas 3, 5 e 6

Nas três situações expostas verificou-se que a identificação de *Regularidades* foi consequência das resoluções apresentadas pelos alunos, ou seja, da aplicação de *Estruturas adquiridas*. Destaca-se, ainda, que as tabelas utilizadas evidenciaram ser um meio eficaz para aplicar *Estruturas adquiridas* que, através da interpretação dos resultados representados, facilitaram a observação de *Regularidades*.

Constatou-se, assim, que as tarefas que exigem uma relação combinada entre a seleção de *Estruturas adquiridas* e a observação de *Regularidades*, de modo a que estejam mutuamente implicadas no desenvolvimento da ação *Reconhecer*, parecem ser desafiantes, dependendo mais dos conhecimentos e das habilidades matemáticas que os alunos possuem. Por sua vez, as tarefas que promovem reprodução de situações aritméticas a algébricas, por comparação, tal como a análise de resultados registados na representação tabelar, parecem ser mais dedutivas e mostraram-se acessíveis aos alunos, podendo ser utilizadas, por exemplo, como introdução à aprendizagem dos temas matemáticos com que se relacionam.

5.1.1.3 Interpretação, Regularidades e Estruturas adquiridas

A análise transversal dos resultados evidenciados no capítulo quatro, respeitantes a cada uma das tarefas resolvidas, permitiu constatar que as subcategorias *Interpretação* e *Regularidades* se mantiveram interligadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, nas tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1) e *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5). Evidencia, ainda, que a identificação de *Regularidades* resultou do desenvolvimento da subcategoria *Interpretação*, nas tarefas *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Campo de férias* (Tarefa 7) e que não existiu qualquer relação entre estas subcategorias na resolução da tarefa *Conta-quilómetros* (Tarefa 2). A figura que se segue permite evidenciar a relação identificada entre as subcategorias *Interpretação* (I) e *Regularidades* (Rg) quando a investigadora procedeu à análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro:

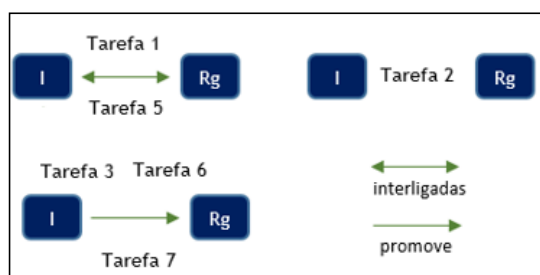


Figura 5.9 – Relação entre as subcategorias Interpretação (I) e Regularidades (Rg)

Da análise das relações estabelecidas pelas subcategorias *Interpretação*, *Regularidades* e *Estruturas adquiridas* nas diferentes tarefas, concluiu-se que a experiência adquirida com a resolução das tarefas não se traduziu na regularidade das relações estabelecidas entre as diferentes subcategorias, dependendo-se que a presença e a relação estabelecida entre subcategorias estará dependente da estrutura da tarefa e do tipo de resolução adotada pelos alunos.

A análise efetuada permitiu verificar, também, que as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas* ocorreram em todas as tarefas, revelando-se essenciais para o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*. Considera-se que a *Interpretação* dos dados enunciados e a mobilização de *Estruturas adquiridas* em aprendizagens anteriores são fundamentais para se dar início ao processo de abstração.

Relativamente à situação em que a identificação de *Regularidades* resultou da manifestação da subcategoria *Interpretação*, considera-se que tal ocorreu porque a interpretação dos dados enunciados e/ou dos resultados obtidos permitiram a observação de *Regularidades*.

Por sua vez, na situação em que as subcategorias *Interpretação* e *Regularidades* evoluíram conjuntamente, mantendo-se interligadas durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*, as *Regularidades* identificadas voltaram a ser interpretadas pelos alunos, durante o desenvolvimento da ação *Construir*, para darem origem ao processo de generalização. Tal situação permite constatar que a subcategoria *Interpretação* não tem que, obrigatoriamente, manifestar-se apenas na fase inicial do desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*, podendo também ocorrer durante ou após o desenvolvimento da ação epistêmica *Construir*.

Quanto à ausência de relação entre as subcategorias *Interpretação* e *Regularidades* na tarefa *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), considera-se que tal se verificou por que a observação de *Regularidades* resultou da aplicação de *Estruturas adquiridas*, designadamente da aplicação do conceito de quinta parte.

Depreendeu-se, ainda, que a subcategoria *Regularidades* manifesta-se quando a tarefa desenvolvida incentiva a observação de regularidades, relações numéricas ou a extensão de propriedades específicas trabalhadas durante a aprendizagem da aritmética. Constata-se, ainda, que a relação estabelecida entre as diferentes subcategorias, ainda que possa manifestar alguma regularidade, tal como se verificou entre as subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas*, parece não comprometer o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer* (ver figura 5.10).

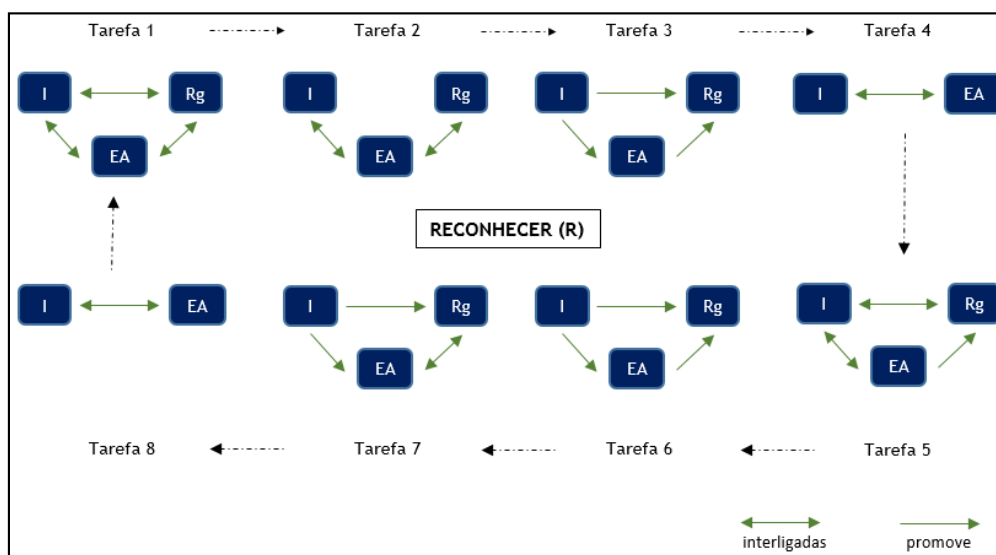


Figura 5.10 – As subcategorias *Interpretação* (I), *Estruturas adquiridas* (EA) e *Regularidades* (Rg) no desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer* (R)

A figura 5.10 esquematiza a relação evidenciada pelas subcategorias *Interpretação* (I), *Estruturas adquiridas* (EA) e *Regularidades* (Rg) ao longo da resolução das tarefas, no âmbito deste estudo. Realça a constatação de que para estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, o professor poderá ir para além da observação e generalização de regularidades.

É, ainda, realçado o desenvolvimento do processo de abstração durante a manifestação da ação epistêmica *Reconhecer*, o qual se evidenciou, globalmente, através das subcategorias *Interpretação* e *Estruturas adquiridas*. Ele iniciou-se com o desenvolvimento da compreensão de relações e conceitos enunciados que, em algumas situações, realçou a criatividade dos alunos e, em outras, correspondeu à reprodução de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores. A exploração dos conteúdos matemáticos presentes nos enunciados das tarefas revelou-se fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico, no sentido em que incentivou i) a perceção conceptual, ii) a relação de dados e conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, iii) a identificação de regularidades e iv) a compreensão do significado atribuído à linguagem simbólica. Entende-se que a maior atenção dispensada pelos

alunos ao conteúdo dos dados enunciados, traduziu-se em gradual autonomia, manifestada por eles no início da resolução da tarefa, contribuiu para reforçar competências desenvolvidas durante a aprendizagem da aritmética, para minimizar dificuldades e para que os alunos desenvolvessem capacidade para selecionarem estratégias de resolução adequadas, apetrechando-se de competências que contribuirão para uma melhor aprendizagem algébrica. Como tal, para estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico há que ter em atenção a necessidade de promover a manifestação da ação epistémica *Reconhecer*.

Destaca-se, por fim, que o desenvolvimento das subcategorias da ação *Reconhecer* estimulou a análise, em profundidade, dos dados enunciados, a interpretação de regularidades e relações, a compreensão significativa de conceitos e propriedades, a interpretação de linguagem simbólica e de contextos de indeterminação.

5.1.2 A relação estabelecida pelas subcategorias *Construções reconhecidas*, *Estratégias*, *Soluções* e *Justificação* no desenvolvimento da ação epistémica *Construir*.

A análise transversal do desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, aplicada aos resultados apresentados no capítulo quatro, permitiram verificar qual a relação estabelecida entre as subcategorias *Construções reconhecidas*, *Estratégias*, *Soluções* e *Justificação*. No entanto, considerando que o desenvolvimento da ação *Construir* evidencia-se através da apresentação de *Soluções* e com a *Justificação* das opções tomadas e dos raciocínios desenvolvidos, interessa compreender quais as consequências da aplicação de *Construções reconhecidas* e *Estratégias* para o desenvolvimento desta ação epistémica. Será que os conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores serão imprescindíveis à manifestação de *Construir*, mesmo que esse se retrate a um novo contexto matemático? Poderá um aluno com reduzidas competências matemáticas, mas habilidoso, selecionar estratégias que o conduzam à apresentação correta de *Soluções* que favoreçam a nova *Construção*?

Segue-se a apresentação da relação identificada entre as subcategorias *Soluções* e *Justificação*, entre as subcategorias *Estratégias*, *Soluções* e *Justificação* e entre as subcategorias *Construções reconhecidas* e *Estratégias*.

5.1.2.1 Soluções e Justificação

A análise transversal dos dados apresentados no capítulo quatro, respeitantes às subcategorias da ação epistémica *Construir*, permitiram constatar que a relação estabelecida entre as subcategorias *Soluções* e *Justificação* manteve-se igual em todas as resoluções apresentadas pelos alunos. Assim, verificou-se que desde a resolução da tarefa *Luzes de Natal* (Tarefa 1) à tarefa *Relação de equilíbrio* (Tarefa 8), as subcategorias *Soluções* e *Justificação* mantiveram-se interligadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. A figura que se segue evidencia a relação estabelecida entre as referidas subcategorias:



Figura 5.11 – Relação entre as subcategorias *Soluções (S)* e *Justificação (J)*

Aquando da *Justificação* e apresentação de *Soluções*, constatou-se que a interligação mantida por estas subcategorias parece dever-se ao facto de os alunos terem estado envolvidos, mutuamente, na resolução das tarefas, comunicando e partilhando conhecimentos e ideias. Nesse sentido, verificou-se que as *Justificações* e *Soluções intermédias* apresentadas resultaram do envolvimento dos alunos durante o processo de abstração, pois eles mostraram-se dinâmicos, durante a exploração da tarefa e da experimentação de ideias, bem como persistentes na obtenção de resposta para os desafios que lhes foram colocados.

Na globalidade das tarefas analisadas e apresentadas no capítulo quatro, apurou-se que os alunos envolveram-se na discussão da situação matemática que lhes foi colocada e, em conjunto, analisaram os dados apresentados, expuseram o seu ponto de vista, com argumentos a favor ou contra, justificando as suas ideias e opções. Por esta razão, ainda que as subcategorias *Justificação* e *Soluções* se tenham desenvolvido mutuamente durante o processo de abstração, considera-se que a *Justificação* emergiu, também, antes da obtenção de *Soluções* intermédias, tendo sido expressa, nessas situações e na globalidade das resoluções apresentadas, através da oralidade.

Relativamente às resoluções apresentadas pelos alunos e expostas no capítulo quatro, considera-se que, na globalidade das tarefas implementadas, as *Justificações* e *Soluções* apresentadas pelos alunos resultaram da estrutura das próprias tarefas, as quais os orientavam para a obtenção de determinado objetivo. Considera-se que essa situação se tornou mais evidente nas resoluções apresentadas às tarefas *Luzes de Natal*

(Tarefa 1), *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5) e *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6), uma vez que o processo de abstração desenvolvido pelos alunos evidenciou maior orientação para o alcance de determinados objetivos, tais como o preenchimento de tabelas e a extensão de regularidades observadas. A explicação parece dever-se às características das próprias tarefas, ainda que também se tenha constatado que a atuação da professora, durante a resolução de algumas tarefas, foi também significativa para a perceção dos objetivos a atingir.

Por sua vez, considera-se que a apresentação de *Justificações* e *Soluções* intermédias emergiu, igualmente, da flexibilidade mental e da tomada de decisões quanto às estratégias que poderiam ser eficazes à resolução da tarefa, quanto à forma como os alunos poderiam representar o conteúdo matemático enunciado – designadamente nas tarefas *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *Caça ao ovo* (Tarefa 4), *Campo de férias* (Tarefa 7) e *Relações de igualdade* (Tarefa 8). Resultou também da persistência evidenciada pelos alunos, no sentido de concluírem a resolução dessa tarefa.

Nas figuras 5.12 e 5.13 procura-se exemplificar de que forma a comunicação e partilha evidenciada pelos alunos e, designadamente, as ideias e decisões tomadas conduziram à obtenção de *Justificações* e *Soluções* para as questões e desafios colocados.

A figura 5.12 evidencia, através da apresentação de dois excertos recolhidos da análise apresentada no capítulo quatro e relativos, respetivamente, às tarefas *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Caça ao ovo* (Tarefa 4), de que forma a comunicação e a partilha estabelecida entre alunos proporcionou o desenvolvimento do processo de abstração e, conseqüentemente, a manifestação das subcategorias *Soluções* e *Justificação*. Através dos referidos excertos será possível evidenciar o envolvimento e empenho dos alunos em apresentarem respostas às questões e desafios colocados, também evidentes na exposição do seu ponto de vista e na tomada de decisões. Será, ainda, possível verificar que as *Justificações* e *Soluções* expostas derivaram da exposição oral do raciocínio desenvolvido pelos alunos, sendo de realçar o facto de as ideias ou conhecimentos apresentados por um dos alunos terem sido adotadas e desenvolvidas pelo outro, situação que contribuiu favoravelmente para o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*.

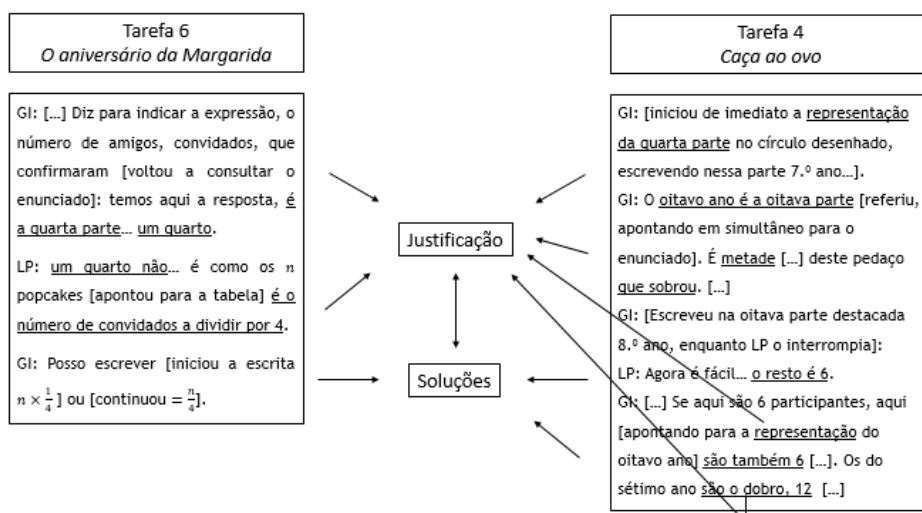


Figura 5.12 – Soluções e Justificação na resolução das tarefas 4 e 6

O diálogo estabelecido no excerto da tarefa *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) permite constatar que os alunos partilharam conhecimentos adquiridos – conceito de quarta parte – e que um dos alunos, LP, argumentou relativamente a uma resposta dada pelo colega, contribuindo para que o resultado final apresentado fosse o correto. Verificou-se, também, que o conceito mobilizado por LP – *número de convidados a dividir por 4* – foi adotado e desenvolvido por GI – posso escrever $n \times \frac{1}{4}$ – conduzindo os dois alunos à resposta pretendida. Ainda em relação a este excerto, realça-se o facto de as *Justificações* – *a quarta parte, um quarto, n popcakes, dividir por 4* – terem-se antecipado à apresentação da *Solução* $\frac{n}{4}$, a qual, por sua vez, ao ser apresentada em linguagem simbólica correta, validou o raciocínio desenvolvido pelos alunos. Destacam-se, nestes excertos, a mobilização de construções reconhecidas, pois foram essenciais ao desenvolvimento da ação *Construir*, bem como a utilização de linguagem simbólica para representar um número indeterminado. Fica presente a ideia de que o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* contribuiu para que os alunos evidenciassem habilidade para representar números indeterminados, através de linguagem simbólica, evidenciando, assim, as vantagens em estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Relativamente à tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4), verificou-se que a *Justificação* e *Soluções* intermédias apresentadas estiveram associadas à interpretação geométrica da representação circular e à equivalência que os alunos estabeleceram entre os dados geométricos dessa representação e os dados enunciados. A representação circular mostrou-se útil, não só para representar os dados enunciados e fomentar a compreensão do problema, como também para extrair *Soluções* que favorecessem o desenvolvimento do processo de abstração. No excerto respeitante à tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4),

verifica-se que, embora a representação tenha surgido do aluno GI, o qual integrou aprendizagens adquiridas – quarta parte, oitava parte, metade, dobro – também LP acompanhou o raciocínio do colega, apresentando *Soluções* intermédias – *o resto é 6*.

A figura que se segue evidencia como, através da representação circular, os alunos obtiveram *Soluções* intermédias e *Justificação* para os resultados obtidos:

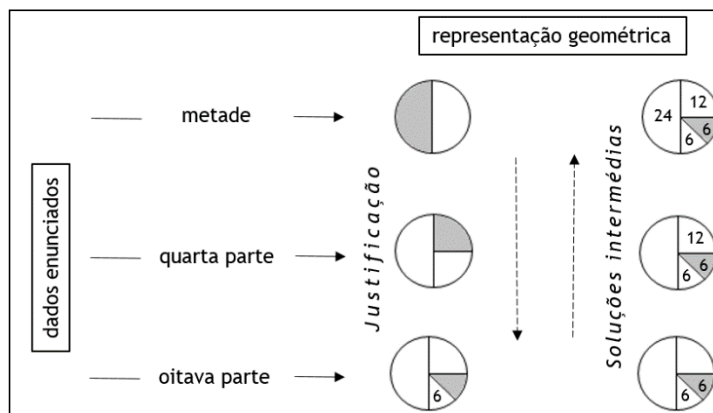


Figura 5.13 – Soluções e Justificação através da representação pictórica

Observa-se que a *Justificação* do raciocínio desenvolvido e das *Soluções* apresentadas resultou da transferência e combinação dos dados enunciados com a correspondente informação geométrica, de modo que a ação epistémica *Construir* iniciou-se, seguindo uma trajetória descendente. Acrescenta-se que esse movimento, relativamente à exploração do enunciado, significou partir da análise geral e do desconhecimento da quantidade envolvida, geometricamente presente na representação de metade de um círculo, para a representação da oitava parte correspondente aos seis alunos do nono ano, valor esse conhecido. Foi, então, que o paralelismo estabelecido entre a representação geométrica da oitava parte e o número de alunos que lhe correspondia permitiu a obtenção de *Soluções* intermédias – *aos alunos do 9.º ano corresponde a oitava parte, seis alunos são do oitavo ano e doze são do sétimo ano* – que seguiram um movimento ascendente, regressando à representação inicial de metade do círculo que coincidiu, também, com a fase final do desenvolvimento da ação epistémica *Construir* – vinte e quatro alunos são do segundo ciclo.

Realça-se que a interpretação dos dados enunciados e a relação parte-todo também estiveram presentes na fase descendente do movimento *Construir* e que, por sua vez, a interpretação da representação desenvolvida, o cálculo numérico e a aplicação de conceitos como o dobro estiveram presentes na fase ascendente do movimento *Construir*.

As subcategorias *Justificação* e *Soluções* resultaram do desenvolvimento do processo de abstração e da comunicação e partilha estabelecida entre alunos, características que

proporcionaram a integração de construções reconhecidas e a mobilização de formas para representar contextos indeterminados. Foi através da manifestação destas subcategorias que os alunos evidenciaram habilidade reorganizar dados, conhecimentos e ideias, no sentido da nova construção.

5.1.2.2 Estratégias, Soluções e Justificação

Considerando o facto de as subcategorias *Soluções* e *Justificação* terem-se mantido interligadas durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, procurou-se, através da análise transversal dos dados apresentados no capítulo quatro, verificar qual a relação identificada entre a subcategoria *Estratégias* e as subcategorias *Soluções* e *Justificação*, as quais se passarão a tratar como se representassem uma só unidade. Dessa análise decorreu que, de alguma forma, as subcategorias supracitadas relacionaram-se entre si, ocorrendo que na globalidade das situações – em cinco tarefas das oito aplicadas – as *Soluções* e *Justificação* resultaram das *Estratégias aplicadas*. Nas restantes tarefas, constatou-se que a subcategoria *Estratégias* (Es) e as subcategorias *Soluções* (S) e *Justificação* (J) desenvolveram-se mutuamente durante o processo de abstração. O resultado desta análise é evidenciado na figura que se segue:

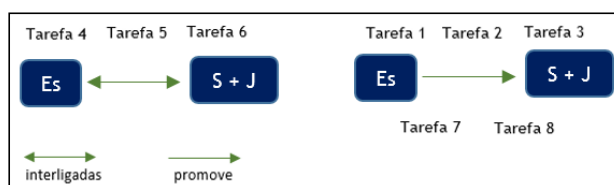


Figura 5.14 – Relação entre a subcategoria *Estratégias* (Es) e as subcategorias *Soluções* (S) e *Justificação* (J)

Destaca-se a relação evidenciada entre a subcategoria *Estratégias* e as subcategorias *Soluções* e *Justificação* identificada nas resoluções apresentadas pelos alunos às tarefas *Caça ao ovo* (Tarefa 4), *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5) e *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6). Esta relação sugere que o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, presente na apresentação de *Soluções* e na *Justificação* do raciocínio e opções tomadas, esteve dependente da aplicação de *Estratégias*, tais como a representação pictórica, a utilização da calculadora e o cálculo numérico. Porém, também indica que a exploração desses recursos contribuíram para o aperfeiçoamento das *Estratégias* já aplicadas ou dos procedimentos adotados.

A figura 5.15 procura transmitir, apresentando alguns exemplos recolhidos da análise de dados apresentada no capítulo quatro, como a aplicação de *Estratégias* e a obtenção de *Soluções* e *Justificação* para as ideias e resultados apresentados estiveram presentes na resolução das tarefas supracitadas e contribuíram para a maior rapidez e fiabilidade do raciocínio desenvolvido:

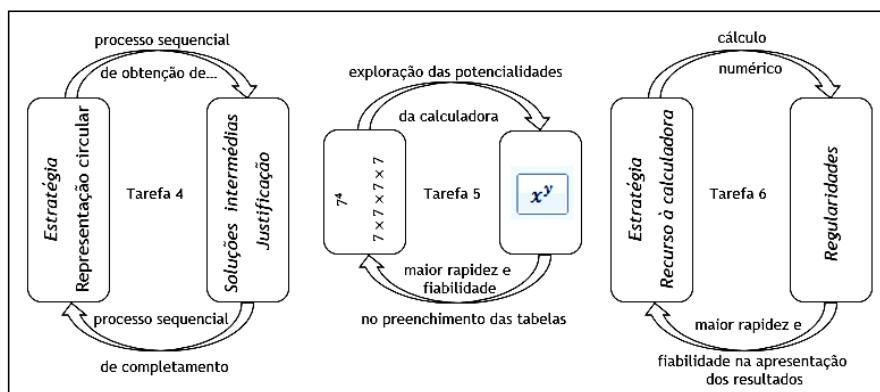


Figura 5.15 – Estratégias, Soluções e Justificação na resolução das tarefas 4, 5 e 6

A figura evidencia que as *Estratégias* selecionadas para a resolução das tarefas *Caça ao ovo* (Tarefa 4), *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5) e *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6), designadamente a representação circular, o cálculo e a exploração das potencialidades da calculadora, revelaram-se essenciais para a obtenção de *Soluções* intermédias que, por sua vez, contribuíram para completar, aperfeiçoar ou melhor compreender as *Soluções* e os raciocínios iniciados.

Relativamente às situações em que se constatou que as *Soluções* e *Justificações* apresentadas resultaram de uma *Estratégia* aplicada pelos alunos, verificou-se, a partir da análise transversal e pormenorizada dos resultados constantes no capítulo quatro, que essas *Estratégias* estiveram, em todas as situações, relacionadas com a aplicação do cálculo numérico, com o desenvolvimento de procedimentos matemáticos e com a representação e exploração semiótica de desenhos, esquemas ou tabelas, bem como com a transferência de linguagem natural para linguagem matemática. Acrescenta-se que a recriação teatral do problema dos apertos de mão, constante na tarefa *Campo de férias* (Tarefa 7) e adotada na fase de discussão, evidenciou, da parte dos alunos, a aplicação de uma *Estratégia* pertinente que, embora não tenha proporcionado a obtenção de uma *Solução* correta, *Justificou* o raciocínio desenvolvido pelos alunos. Considera-se ter-se tratado, também, de uma forma de representar o raciocínio.

Realçam-se os procedimentos adotados pelos alunos na produção de *Soluções* intermédias e na tentativa de responder às solicitações da tarefa, tal como se verificou com maior notoriedade na tarefa *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), quando os alunos desenvolveram procedimentos semelhantes aos dos princípios de equivalência da adição e multiplicação para resolverem equações. Esses procedimentos estiveram associados à compreensão matemática presente nas balanças representadas e aproximaram os alunos da construção pretendida, afastando-os de estratégias mais comuns na resolução inicial de equações, tais como a descoberta de soluções pelo método de tentativa e erro.

A figura que se segue procura retratar a situação descrita:

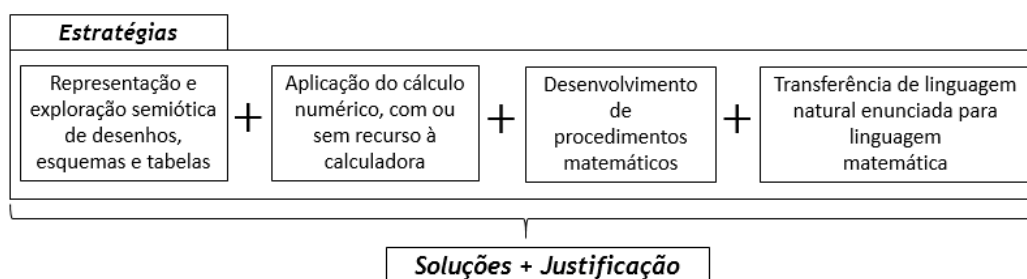


Figura 5.16 – Estratégias, Soluções e Justificação na resolução da tarefa 8

Realça-se o conjunto diversificado de *Estratégias* que, ao serem aplicadas, favoreceram o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* e a obtenção de *Soluções* e *Justificação* para os raciocínios desenvolvidos. As *Estratégias* mobilizadas marcaram uma forte presença na resolução de todas as tarefas, revelando-se essenciais para o processo de construção do novo conhecimento matemático. Essas *Estratégias* poderão ter-se manifestado de uma forma simples, através da aplicação do cálculo numérico resultante de procedimentos algorítmicos, da utilização da calculadora ou obtidos mentalmente, no entanto, também essas foram indispensáveis ao desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. Manifestaram-se, igualmente, com a transferência da informação matemática presente nos enunciados, ou nas representações, para linguagem matemática formal, facilitando a observação de regularidades e a identificação de relações. Destacam-se, uma vez mais, as representações, não só as elaboradas pela professora como também as desenvolvidas pelos próprios alunos, na medida em que elas não contribuíram só para melhorar a compreensão dos enunciados, ou seja, para a manifestação da ação epistémica *Reconhecer*, como também foram essenciais para o desenvolvimento da ação *Construir*.

5.1.2.3 Construções reconhecidas e Estratégias

Para averiguar a relação existente entre as subcategorias *Construções reconhecidas* e *Estratégias*, ao longo da resolução das tarefas apresentadas, procedeu-se uma análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro e respeitantes ao desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. Dessa análise constatou-se que as duas subcategorias mantiveram-se interligadas, em todas as resoluções apresentadas, durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, tal como é evidenciado na figura que se segue:

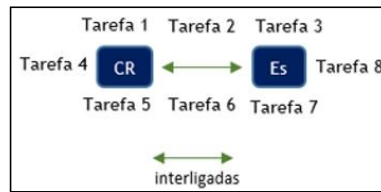


Figura 5.17 – Relação entre as subcategorias Construções reconhecidas (CR) e Estratégias (Es)

A relação estabelecida entre as duas subcategorias, presente nas resoluções dos alunos, parece realçar que as *Estratégias* selecionadas pelos alunos podem ser relevantes na representação e interpretação dos dados enunciados mas, por si só, não são suficientes para darem expressão ao desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. A relação parece subentender que os alunos podem evidenciar criatividade nas suas resoluções, mas que ela só terá fundamento e só se tornará eficaz se eles tiverem conhecimento matemático que, ao ser aplicado, permita o seu surgimento e a promoção da construção do novo conhecimento matemático.

Comparativamente com as relações evidenciadas entre as subcategorias da ação epistémica *Reconhecer*, apresentadas na secção anterior, constata-se que a ação epistémica *Construir* revela maior equilíbrio relativamente a elas. Esse equilíbrio está presente na interligação estabelecida entre as subcategorias *Soluções* e *Justificação* e entre as subcategorias *Construções reconhecidas* e *Estratégias*, as quais se desenvolveram mutuamente e parecem sugerir que esse envolvimento é essencial para que a *Construção* aconteça.

A mobilização de *Construções reconhecidas* revelou-se, também, essencial para o desenvolvimento do novo conhecimento matemático, sugerindo que a manifestação da ação epistémica *Reconhecer* é essencial para o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, uma vez que esta está dependente da seleção de *Estruturas adquiridas*.

Através da figura que se segue procura-se realçar a relação evidenciada entre as subcategorias *Estratégias* e *Construções reconhecidas*, resultantes da seleção de conhecimentos adquiridos ou de ideias percebidas como úteis à resolução da tarefa – *Reconhecer* – e a sua aplicação, como elementos essenciais à apresentação de *Soluções* e *Justificação* para as respostas e raciocínios desenvolvidos, ou seja, ao desenvolvimento da ação epistémica *Construir*:

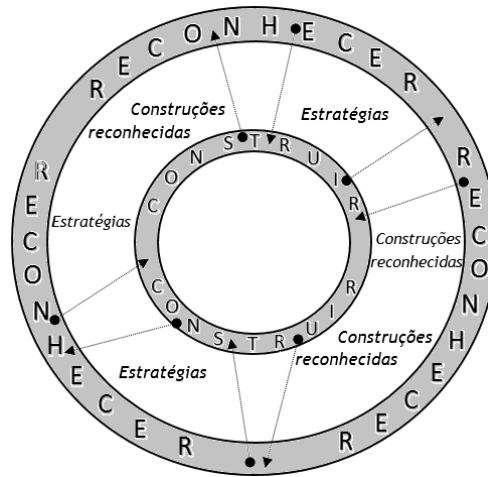


Figura 5.18 - As Estratégias e Construções reconhecidas no desenvolvimento das ações Reconhecer e Construir

Através da figura 5.18 representa-se a relação estabelecida entre as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*, desencadeada pela aplicação das subcategorias *Estratégias* e *Construções reconhecidas*. Verifica-se, como já referido, que os conhecimentos e ideias resultantes do desenvolvimento da ação *Reconhecer* foram aplicados sob a forma de *Estratégias* e/ou *Construções reconhecidas*, as quais favoreceram o desenvolvimento da ação *Construir* através da apresentação de *Soluções* e *Justificação* para os raciocínios desenvolvidos. Por sua vez, os resultados apresentados foram reconhecidos como úteis à resolução da tarefa.

A figura que se segue resulta da análise transversal efetuada a partir dos resultados apresentados no capítulo quatro, esquematizando a relação evidenciada pelas subcategorias *Construções reconhecidas* (CR), *Estratégias* (Es), *Soluções* (S) e *Justificação* (J), ao longo da resolução das oito tarefas aplicadas.

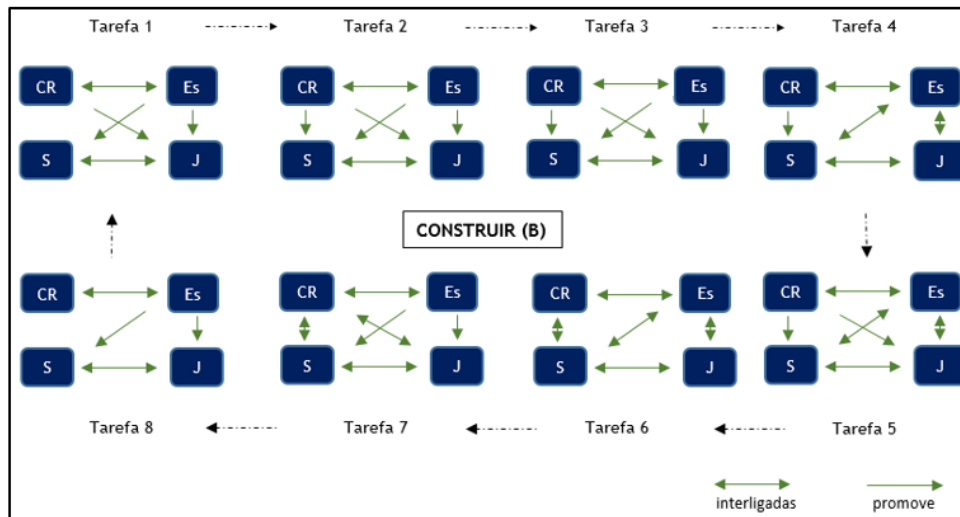


Figura 5.19 – As subcategorias Construições reconhecidas (CR), Estratégias (Es), Soluções (S) e Justificação (J) no desenvolvimento da ação epistêmica Construir (B)

À semelhança do que se verificou com o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*, o processo de abstração também esteve presente através da ação epistêmica *Construir*, com a aplicação de estratégias e conhecimentos matemáticos adquiridos que, combinados e associados a ideias que os alunos possam ter tido, favoreceram a justificação de procedimentos tomados e a apresentação de soluções. A manifestação da ação epistêmica *Construir* coincidiu, também, com o processo investigativo desenvolvido pelos alunos em torno da tarefa, momento em que a criatividade e os conhecimentos matemáticos adquiridos revelaram-se essenciais ao desenvolvimento do processo de construção. Constata-se, ainda, que o desenvolvimento desta ação epistêmica esteve associado a ambientes de exploração, de relacionamento de dados e conhecimentos, de expressão e representação de dados e ideias e que contribuiu para o desenvolvimento da capacidade para discutir, de argumentar e de comprovar, tendo sido, como tal, favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

5.1.3 A relação estabelecida pelas subcategorias *Reorganização*, *Generalização* e *Comunicação* no desenvolvimento da ação epistêmica *Construção*.

A análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro permitiram constatar que, em todas as tarefas, as *Construções* pretendidas foram, na globalidade, alcançadas pelos alunos. Mais se verificou que, em todas as resoluções analisadas, o desenvolvimento desta ação epistêmica manifestou-se através das subcategorias *Reorganização*, *Comunicação* e *Generalização*, as quais se relacionaram, mas nem sempre de igual forma. Considerando que a *Generalização* e a *Comunicação* estão

associadas à *Construção* pretendida, interessa também compreender qual é a importância que a *Reorganização* teve nesse processo.

Considerando que, de acordo com as definições adotadas no presente estudo, a *Construção* é concebida quando os alunos atingem os objetivos delineados para a tarefa, ou seja, quando generalizam uma regularidade, estendem propriedades e procedimentos aritméticos a algébricos e resolvem problemas de natureza algébrica, inicia-se esta seção analisando de que forma se manifestou a subcategoria *Generalização*, a qual expressa a nova *Construção*.

5.1.3.1 Generalização

Esta subcategoria expressa, de acordo com a sua definição, a construção pretendida, tendo estado, por isso, presente em todas as tarefas implementadas.

A *Generalização* esteve presente sob a forma de aritmética generalizada em situações em que os alunos estenderam regularidades identificadas a valores indeterminados, tal como se verificou, por exemplo, na tarefa *O aniversário da Margarida* (Tarefa 7), quando os alunos generalizaram a quantidade de ingredientes a valores numéricos conhecidos e indeterminados. Os alunos evidenciaram ter desenvolvido o pensamento algébrico, fazendo uso de linguagem simbólica para representar valores numéricos desconhecidos.

Por sua vez, esteve também presente quando os alunos identificaram regularidades e relações numéricas que permitiram estabelecer regras ou propriedades compatíveis com a construção pretendida. Esta situação destacou-se, por exemplo, na tarefa *Luzes de Natal* (Tarefa 1), com o cálculo do mínimo múltiplo comum, e na tarefa *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5), com a construção das regras sugeridas. A figura 5.20 evidencia a situação referida, mostrando que o cálculo do mínimo múltiplo entre números trabalhados na tabela (seis, nove e dezoito) estendeu-se a outros valores numéricos com características semelhantes (vinte é múltiplo de dez e de cinco, tal como dezoito é múltiplo de nove e de dezoito), permitindo que os alunos concluíssem que o mínimo múltiplo comum de um número e do seu dobro é o dobro desse número. Pretende ainda exemplificar de que forma os alunos deduziram, por exemplo, a regra operatória referente ao produto de potências com igual valor de base e expoentes diferentes, uma das construções objetivadas para a tarefa *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5).

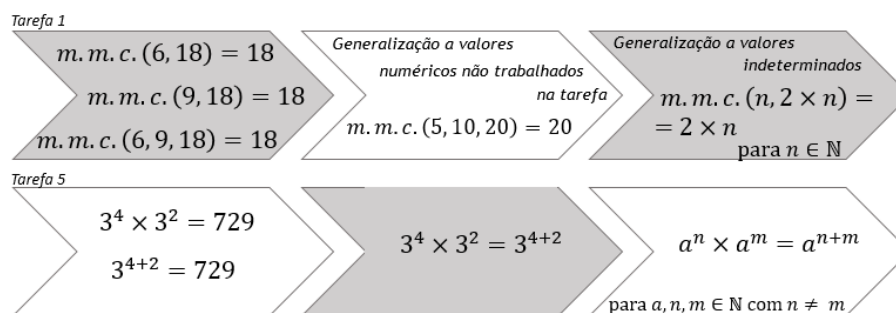


Figura 5.20 – Generalização na resolução das tarefas 1 e 5

A subcategoria *Generalização* evidenciou-se, também, a partir do desenvolvimento do pensamento funcional, situação que foi evidente nas tarefas em que os alunos trabalharam dados e relações numéricas presentes em tabelas, desenhos, padrões e símbolos. Destaca-se a resolução da tarefa *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6), a qual evidencia o desenvolvimento do raciocínio proporcional, onde a quantidade de ingredientes é função do número de *popcakes* pretendidos:

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Pensamento Funcional	Tarefa 6					
	Massa de bolo (A)	50 g	500	750	1000	1350
	Razão $\frac{A}{B}$	$\frac{50}{1} = 50$	50	50	50	50

$\text{massa de bolo} = 50 \times \text{número de popcakes}$ $\frac{\text{massa de bolo}}{\text{número de popcakes}} = 50$	<p>[1:66][6:2565]</p> <p>a razão é sempre igual, os <i>popcakes</i> aumentam e aumentam os ingredientes de forma igual</p>
--	--

Figura 5.21 – Generalização na resolução da tarefa 6

A *Generalização* esteve, igualmente, presente no desenvolvimento do pensamento relacional, quando os alunos manifestaram capacidade para observar expressões algébricas e equações no seu todo, reconhecendo relações numéricas e usando propriedades para as simplificar ou resolver. Esse raciocínio foi estimulado nas diferentes tarefas, adquirindo notoriedade com a aplicação da tarefa *Relação de equilíbrio* (Tarefa 8), através da qual os alunos estabeleceram relações entre quantidades, interpretaram e utilizaram linguagem simbólica, simplificaram expressões algébricas e resolveram equações. A figura que se segue foi recolhida a partir dos resultados apresentados no capítulo quatro e expõe a referida relação:

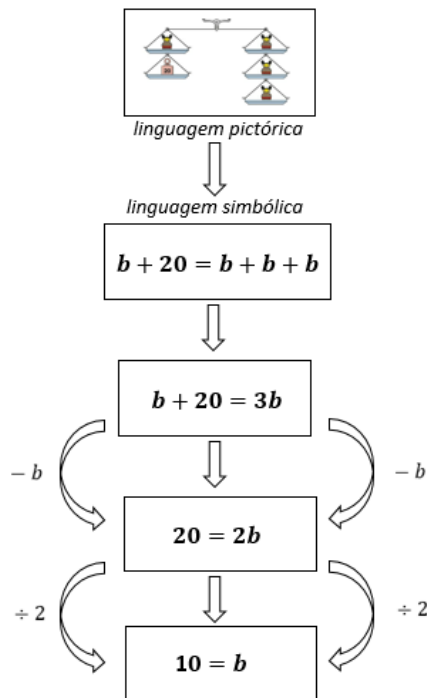


Figura 5.22 – Generalização na resolução da tarefa 8

Algumas das características do pensamento relacional estiveram presentes na resolução apresentada pelos alunos à tarefa *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), iniciando-se com a percepção do significado atribuído ao sinal de igual, como se tratando de um indicador de equilíbrio entre as massas colocadas em ambos os lados da balança. Esse pensamento continuou a manifestar-se através da construção de relações, consecutivas, que partiram de uma representação geral, associada à representação pictórica, na direção de outras mais simples que permitiram a descoberta de uma solução.

A análise transversal dos resultados descritos no capítulo quatro permitiu verificar que a *Generalização* esteve presente através da manifestação do desenvolvimento do pensamento algébrico. Por sua vez, ela concretizou-se quando os alunos aplicaram competências concebidas no ensino da aritmética, em situações em que os valores apresentados eram desconhecidos, quando generalizaram regularidades numéricas a valores indeterminados, estabeleceram relações funcionais e recursivas entre quantidades, descreveram e simbolizaram regras e utilizaram linguagem simbólica para conceber a *Construção* do novo conhecimento matemático.

Considera-se que a *Generalização* é a subcategoria que melhor expressa que os alunos mais jovens são capazes de desenvolver mecanismos para representar e trabalhar com quantidades indeterminadas, generalizando regularidades, relações e propriedades aritméticas. Embora tenham alcançado a *Construção*, os alunos não revelaram consciência de a ter atingido, desconhecendo o significado de equação e a forma como

poderiam simplificar expressões algébricas. Porém, evidenciaram conhecer a estrutura de uma expressão algébrica, pois foi através desse conhecimento que deram início à respectiva resolução e significado ao princípio de equivalência e às relações de equivalência estabelecidas. Verificou-se ainda que, embora os alunos desconheçam o significado de equivalência e a simbologia que lhe está associada, eles conseguiram estabelecer, verticalmente, relações de equivalência entre as diferentes equações apresentadas, relacionando-as com os princípios da variação e compensação.

5.1.3.2 Reorganização e Generalização

Focando a atenção na relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização* e *Generalização*, constatou-se, através da análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro que, na globalidade das tarefas resolvidas, a subcategoria *Generalização* resultou da manifestação da subcategoria *Reorganização*. Apenas a análise respeitante às tarefas *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8) revelou a existência de uma relação diferente, tal como a figura seguinte sugere, pois as duas subcategorias contribuíram mutuamente para o desenvolvimento da ação epistêmica *Construção*.

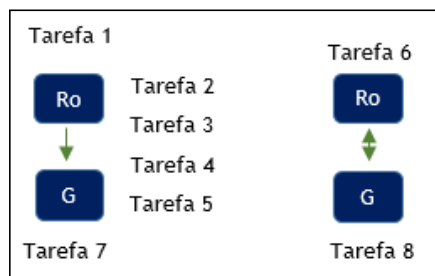


Figura 5.23 – Relação entre as subcategorias *Reorganização* (Ro) e *Generalização* (G) no desenvolvimento da ação epistêmica *Construção*

A análise efetuada, aos resultados apresentados no capítulo quatro, permitiu verificar que, na globalidade das tarefas, a subcategoria *Generalização*, ou seja, a *Construção* do novo conhecimento matemático, resultou da combinação e *Reorganização* dos dados enunciados, conhecimentos integrados, ideias e resultados obtidos. Por sua vez, verificou-se que, nas tarefas *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), o processo de *Construção* foi sendo aperfeiçoado à medida que os primeiros resultados foram surgindo e os alunos sentiram necessidade de expressar com maior clareza e rigor a nova *Construção*.

Considerando o interesse em promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, presente nas características das próprias tarefas, a relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização* e *Generalização* também valoriza a ideia de que os alunos mais jovens conseguem estender os conhecimentos adquiridos na aprendizagem da

aritmética e desenvolver formas diferenciadas de pensar que lhes permitem compreender, relacionar e representar quantidades desconhecidas.

A manifestação da subcategoria *Generalização* mostra que o desenvolvimento do pensamento ocorreu. Porém, consideramos que é a subcategoria *Reorganização* que permite que a nova *Construção* aconteça, uma vez que a *Construção* só ocorre se os alunos evidenciarem habilidade para combinarem adequadamente procedimentos, estratégias e construções adquiridas.

5.1.3.3 *Generalização e Comunicação*

Considerando os descritores destas subcategorias e o facto de se considerar que a *Construção* é alcançada quando os alunos a expressam, oralmente ou por escrito, pela primeira vez, constata-se que a subcategoria *Comunicação* manifestou-se em todas as resoluções apresentadas e que se relacionou com a subcategoria *Generalização*. A análise transversal efetuada aos resultados apresentados no capítulo quatro permitiu verificar, ainda, como é que estas duas subcategorias se relacionaram. Verificou-se que na globalidade das tarefas, em seis delas, as subcategorias *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm) desenvolveram-se mutuamente e, nas restantes, a *Comunicação* (Cm) resultou do desenvolvimento da subcategoria *Generalização* (G). A figura que se segue permite visualizar em que tarefas se manifestaram as subcategorias supracitadas, bem como se relacionaram:

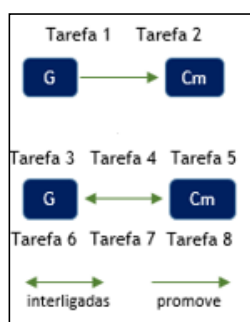


Figura 5.24 – *Generalização (G) e Comunicação (Cm) no desenvolvimento da Construção*

A análise pormenorizada das resoluções apresentadas permitiu constatar que nas tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1) e *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), a *Comunicação* da nova *Construção* matemática surgiu como consequência do desenvolvimento da subcategoria *Generalização*. Em ambas as situações, tal como podemos constatar através da figura que se segue, os alunos concluíram e expressaram oralmente a *Generalização* e, de acordo com as exigências da tarefa, comunicaram por escrito, a nova *Construção*:

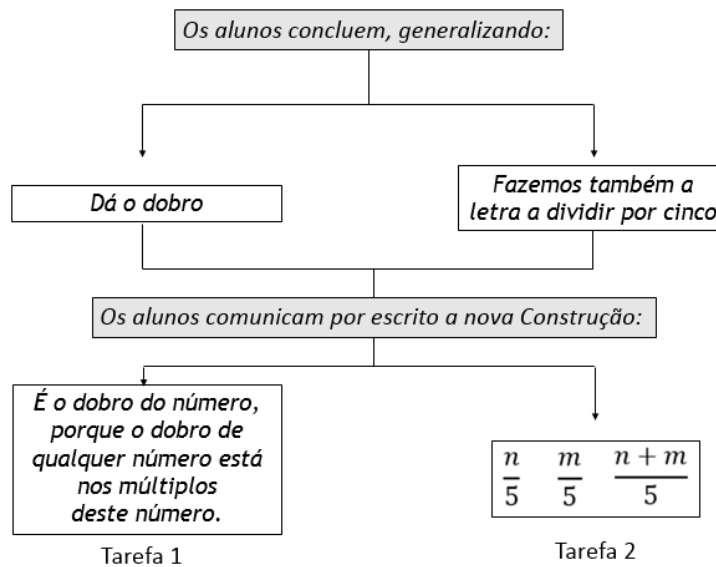


Figura 5.25 - Construção nas tarefas 1 e 2

No que respeita à relação estabelecida entre as subcategorias *Generalização* e *Comunicação*, constata-se que, para além do que se verificou com as tarefas *Luzes de Natal* e *Conta-quilómetros*, a expressão da nova *Construção* serviu, igualmente, para aperfeiçoar a *Construção* concebida ou, eventualmente, para favorecer o desenvolvimento da subcategoria *Generalização*, na mesma ou em outra tarefa. Verificou-se, igualmente, que em algumas tarefas, tais como em *Caça ao ovo* (Tarefa 4) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), as subcategorias *Generalização* e *Comunicação* desenvolveram-se mutuamente, contribuindo para que a nova *Construção* fosse alcançada.

Nesta relação destaca-se o desenvolvimento da subcategoria *Generalização*, pois ela transmite que os alunos conseguiram mobilizar e reorganizar toda a informação matemática que reuniram durante o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*, para obter a nova *Construção*. Considera-se que a *Comunicação*, expressa inicialmente através da oralidade e, na fase final, por escrito, apenas comprova se a *Construção* foi alcançada.

5.1.3.4 Reorganização e Comunicação

A análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro permitiram verificar que as subcategorias *Reorganização* e *Comunicação* também se relacionaram em algumas das tarefas aplicadas. Constatou-se que as duas subcategorias desenvolveram-se mutuamente na resolução da tarefa *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8) e que nas tarefas *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), *Caça ao ovo* (Tarefa 4) e *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5), a *Comunicação* surgiu como consequência da *Reorganização de dados*, resultados, conhecimentos e ideias dos alunos. Relativamente

às situações em que as duas subcategorias não se relacionaram, considera-se que tal se deveu ao facto de a *Reorganização* ter promovido o desenvolvimento da subcategoria *Generalização* e esta, por sua vez, ter promovido a *Comunicação* da nova *Construção*, não se tendo verificado, nessas situações, uma relação evidente entre as subcategorias *Reorganização* e *Comunicação*. A figura que se segue explicita que tipo de relação se desenvolveu entre as subcategorias *Reorganização* (Ro) e *Comunicação* (Cm):

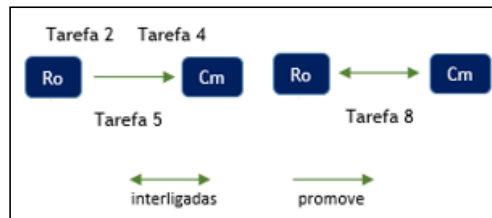


Figura 5.26 – *Reorganização* (Ro) e *Comunicação* (Cm) no desenvolvimento da *Construção*

Relativamente à relação estabelecida entre as subcategorias *Reorganização* e *Comunicação*, nas tarefas *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), *Caça ao ovo* (Tarefa 4) e *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5), considera-se que a *Comunicação* da nova construção matemática foi emergindo à medida que os alunos combinavam e reorganizavam a informação matemática de que dispunham, nas representações que desenvolveram (Tarefa 2 e 4) e nas tabelas por si preenchidas (Tarefa 5). Por sua vez, ao analisarem-se as respostas apresentadas na resolução da tarefa *Relação de Equilíbrio*, constatou-se que as duas subcategorias se desenvolveram conjuntamente, no sentido em que a *Comunicação* de uma *Construção*, tal como poderá ser exemplo a obtenção de uma solução para a equação expressa, proporcionou o desenvolvimento de procedimentos assertivos de resolução de equações. Neste caso particular, o desenvolvimento da subcategoria *Comunicação* é relevante, pois contribui para o desenvolvimento da subcategoria *Reorganização*, favorecendo a *Construção* do novo conhecimento matemático.

A figura que se segue realça as relações evidenciadas pelas subcategorias *Reorganização* (Ro), *Generalização* (G) e *Comunicação* (Cm), quando se procedeu à análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro:

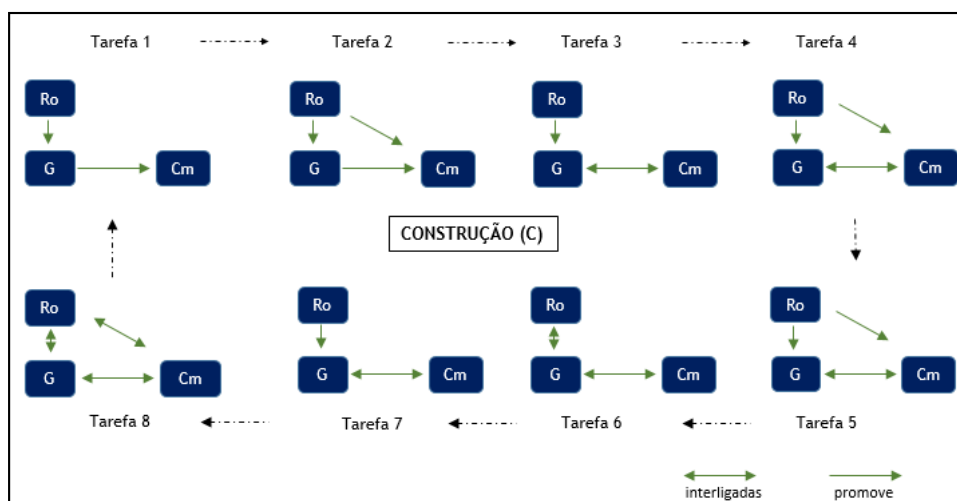


Figura 5.27 – As subcategorias Reorganização (Ro), Generalização (G) e Comunicação (Cm) no desenvolvimento da ação epistêmica Construção

Da análise horizontal efetuada aos resultados apresentados no capítulo quatro, no que respeita à manifestação e relação estabelecida pelas subcategorias supracitadas, realça-se o facto de a *Reorganização* de dados, conhecimentos, resultados e ideias ter sido fundamental para que a nova *Construção* ocorresse. Por sua vez, o desenvolvimento da subcategoria *Generalização* representa a *Construção* pretendida, ainda que se considere que ela só é atingida quando os alunos a comunicam claramente, ainda que não a concebiam como uma nova *Construção*. Desta análise efetuada, percebe-se que as três subcategorias, manifestando maior ou menor destaque durante o processo de construção, têm implicações na conceção e expressão do novo conhecimento matemático.

A manifestação das subcategorias *Reorganização* e *Generalização* parecem corresponder à fase final do processo de abstração, considerando-se que a *Reorganização* proporcionou a análise global de toda a informação disponível, maior conhecimento e decisão sobre as opções a tomar e, em algumas resoluções apresentadas, maior consciência da *Construção* pretendida. Por sua vez, a manifestação da subcategoria *Generalização*, para além de evidenciar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, sintetiza e valida todo o trabalho realizado durante o processo de construção. Da análise decorre que, embora para o desenvolvimento da ação epistêmica *Construção* as três subcategorias referidas sejam essenciais, a manifestação da subcategoria *Reorganização* é fundamental para que a *Construção* seja alcançada. Considerando que o processo de *Reorganização* está dependente da combinação de dados enunciados e interpretados, de resultados obtidos e da aplicação de construções já concebidas, então, o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir* tornam-se essenciais para a *Reorganização*, ou seja, para *Construção* do novo conhecimento matemático.

5.1.4 A relação estabelecida pelas subcategorias *Aplicação de construções recentes* e *Características psicológicas* no desenvolvimento da ação epistémica *Consolidação*

Da análise efetuada aos resultados evidenciados pelos alunos na resolução das diferentes tarefas, verificou-se que a ação epistémica *Consolidação* manifestou-se sempre através das subcategorias *Aplicação de construções recentes* e *Características psicológicas*. Mais, as duas subcategorias desenvolveram-se em conjunto, evidenciando estarem interligadas durante a manifestação da *Consolidação*.

Ao manifestarem a *Aplicação de construções recentes*, os alunos também mostraram estar a colmatar dificuldades evidenciadas durante a resolução das primeiras tarefas, as quais se prenderam, essencialmente, com a interpretação de linguagem simbólica e com a forma como poderiam representar os dados enunciados e o raciocínio desenvolvido, reforçando também as competências aritméticas adquiridas.

Destaca-se a *Aplicação de construções recentes* nas tarefas *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5), *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Campo de férias* (Tarefa 7), pelo facto de, para além de estarem associadas à capacidade de reconhecimento e mobilização de aprendizagens concebidas através da utilização de linguagem simbólica e promoverem melhor aptidão para interpretar e extrair informação representada na forma tabelar, terem promovido o desenvolvimento de procedimentos matemáticos que os conduziram à nova construção, designadamente às regras operatórias, ao conceito de proporcionalidade direta e à resolução de equações.

Verifica-se, da parte dos alunos, uma progressiva autonomia quanto à utilização e exploração dos dados representados em tabelas, bem como quanto à identificação de regularidades nelas presentes. Percecionamos, então, que a representação tabelar, ainda que não tenha sido entendida, inicialmente, como uma construção, ela pode ser utilizada para promover melhorias ao nível da interpretação dos dados enunciados, favorecer a identificação de regularidades, estimular a autonomia e proporcionar a nova construção, favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico. A análise efetuada às resoluções apresentadas pelos alunos permitiu ainda verificar que a representação pictórica tornou-se significativa ao longo da realização das diferentes tarefas.

As representações desenvolvidas pelos alunos para resolverem problemas de natureza algébrica, designadamente, nas tarefas *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), *Doces de Páscoa* (Tarefa 3) e *Caça ao ovo* (Tarefa 4), evidenciam criatividade, para além de se mostrarem instrumentos favoráveis ao desenvolvimento da autonomia e agilidade na representação de dados, resultados e ideias. Acresce-se que, ao longo das diferentes

tarefas, esses instrumentos foram evidenciando maior aperfeiçoamento, comparativamente com os utilizados ou desenvolvidos anteriormente, e que os alunos revelaram maior propensão para esquematizarem o seu raciocínio, principalmente quando o grau de dificuldade aumentou. Verifica-se esta situação nas tarefas *Campo de férias* (Tarefa 7), com a exploração de padrões e outras representações pictóricas, e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), com a exploração da representação das balanças.

A análise efetuada permite, como tal, constatar que a *Consolidação* surgiu em dois momentos distintos: (1) na fase inicial do processo de abstração, aquando do desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, tendo sido possível observar, gradualmente, maior agilidade e autonomia dos alunos para identificar regularidades, estabelecer relações, interpretar linguagem simbólica e selecionar formas de representar os dados enunciados; (2) durante o desenvolvimento do processo de abstração, com o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, quando os alunos integraram construções recentes para obter soluções para as solicitações da tarefa.

A figura que se segue sintetiza as características mais relevantes evidenciadas pelas subcategorias *Aplicação de construções recentes* (AC) e *Características psicológicas* (CP), apresentadas anteriormente e resultantes da análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro:

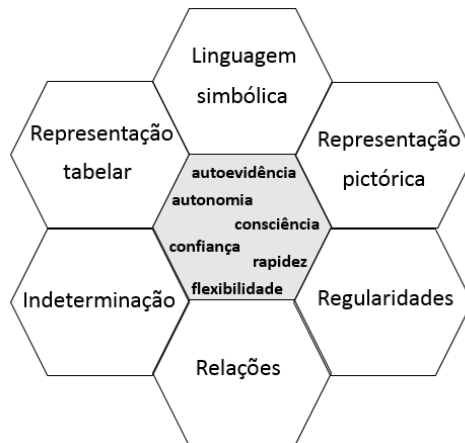


Figura 5.28 – Aplicação de construções recentes (AC) e características psicológicas (CP) na manifestação da Consolidação (Co)

A figura anterior procura sintetizar como se manifestou a *Consolidação* ao longo das diferentes resoluções analisadas. De um modo geral, como já referido, evidenciou-se através da manifestação da subcategoria *Aplicação de construções recentes* (AC), a qual se traduziu no desenvolvimento da capacidade para: (1) interpretar e utilizar linguagem simbólica, (2) desenvolver e/ou explorar formas diferenciadas de representação, (3) identificar regularidades e relações numéricas e (4) perceber e representar contextos indeterminados. Por sua vez, esteve também associada à manifestação de

Características psicológicas, sendo que os alunos revelaram autoevidência quanto aos dados apresentados, identificando com maior rapidez e autonomia regularidades e relações numéricas, maior flexibilidade na seleção de formas diferenciadas de representação de dados e ideias, maior consciência quanto ao trabalho que estavam a desenvolver e confiança quanto às opções e procedimentos por si aplicados. Reforça-se, ainda, a ideia de que a *Aplicação de construções recentes* não se evidenciou apenas através do significado que os alunos possam ter dado à noção de indeterminação e à utilização de linguagem simbólica, mas também com o desenvolvimento da habilidade para identificar regularidades e relações, bem como para representar dados, resultados e o raciocínio desenvolvido.

A análise transversal efetuada aos resultados apresentados no capítulo quatro, e respeitantes à manifestação das referidas subcategorias, permitiram constatar que o processo de *Consolidação* esteve relacionado com *Construções* adquiridas em aprendizagens anteriores e, globalmente, associado à compreensão e utilização de linguagem simbólica, à perceção e representação do conceito de indeterminação e ao desenvolvimento de formas diferenciadas de pensar e representar. Por sua vez, associada à aplicação das *Construções* concebidas recentemente, estiveram características cognitivas e psicológicas evidenciadas pelos alunos, sendo que estes mostraram-se mais conscientes da construção concebida, bem como da sua utilidade, evidenciando maior agilidade na aplicação dos novos conhecimentos. Tal constatação mostra, uma vez mais, que os alunos mais jovens evidenciam capacidade para compreender e adquirirem competências algébricas que, posteriormente, aplicam em contextos diferenciados para trabalhar com quantidades desconhecidas.

Entende-se, porém, que foi a aplicação da construção recentemente construída, bem como a sua combinação com outros conhecimentos matemáticos adquiridos, que deram expressão à *Consolidação* e valorizaram o seu papel na construção do novo conhecimento matemático. Esta perceção parece indicar que a *Construção* pretendida, ainda que possa beneficiar de características psicológicas evidenciadas pelos alunos, estará bastante dependente dos conhecimentos consolidados que eles apliquem.

5.2 O papel das ações epistémicas no desenvolvimento do pensamento algébrico

A análise transversal e pormenorizada, efetuada aos resultados apresentados no capítulo quatro, permitiu constatar que todas as ações epistémicas do modelo *RBC+C*, adotado para este estudo, manifestaram-se e relacionaram-se entre si, excetuando a *Consolidação* na primeira tarefa aplicada, situação que se justifica pelo facto de não existir *Construção* recente, conhecida, que pudesse ser aplicada nessa tarefa.

A referida análise permitiu constatar a presença de regularidades na relação evidenciada entre algumas das ações epistémicas, designadamente na instituída entre as ações *Reconhecer* e *Consolidação*, *Construir* e *Construção* e, ainda que com ligeiras diferenças, entre *Reconhecer* e *Construir* e *Construção*.

5.2.1 Reconhecer e Consolidação

A figura que se segue procura mostrar com maior clareza e pormenor as relações evidenciadas, durante a análise horizontal dos resultados apresentados no capítulo quatro, pelas categorias *Reconhecer* (R) e *Consolidação* (Co) nas diferentes tarefas analisadas:

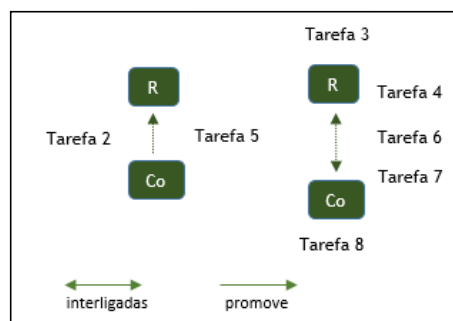


Figura 5.29 – Relação entre as ações epistémicas Reconhecer (R) e Consolidação (Co)

A análise efetuada aos resultados apresentados no capítulo quatro permitiram constatar que a interligação estabelecida entre a ação epistémica *Reconhecer* e *Consolidação* foi essencial para que o processo de abstração se desenvolvesse. Apenas na tarefa *Luzes de Natal* (Tarefa 1) não se estabeleceu qualquer tipo de relação, explicada pelo facto de a *Consolidação* não se ter manifestado.

Ressalta, ainda, que na globalidade das situações as categorias *Reconhecer* e *Consolidação* estiveram envolvidas no processo de abstração, designadamente nas tarefas *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *Caça ao ovo* (Tarefa 4), *O aniversário da Margarida*

(Tarefa 6), *Campo de férias* (Tarefa 7) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8). Os resultados permitiram concluir que a relação estabelecida entre *Reconhecer* e *Consolidação* podem ter ocorrido em dois momentos distintos: (1) durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer* ou (2) com o desenvolvimento da ação epistêmica *Construir*. Verificou-se, também, que a *Consolidação* esteve associada ao significado atribuído à linguagem simbólica e à seleção de formas diferenciadas de representação. Através da figura que se segue procura-se representar as relações estabelecidas entre a ação epistêmica *Reconhecer* e a *Consolidação*, no processo de construção do conhecimento matemático:

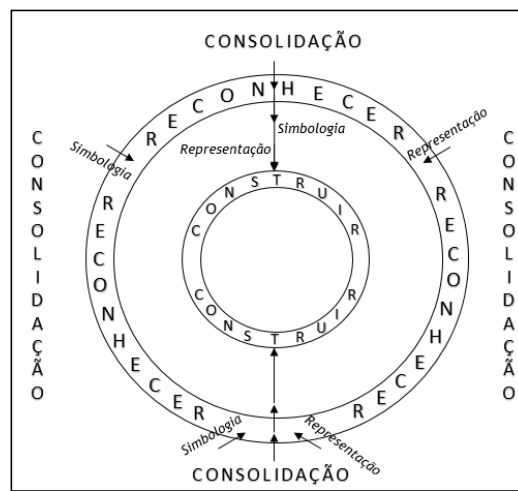


Figura 5.30 – Relação entre as ações epistêmicas *Reconhecer* e *Consolidação*

Na figura 5.30 estão presentes as ações epistêmicas *Reconhecer* e *Construir*, cujo desenvolvimento é influenciado pela manifestação da *Consolidação* de construções adquiridas recentemente. A ação epistêmica *Reconhecer*, identificada na coroa circular de maior área, constitui a fase inicial do processo de abstração, a qual se desenvolveu através da compreensão leitora dos dados enunciados e da seleção de estruturas adquiridas, através de aprendizagens anteriores, e que dizem respeito à manifestação da *Consolidação*. Na figura, a *Consolidação* está presente, a título de exemplo, através da manifestação da compreensão da representação dos dados enunciados, também em linguagem simbólica, podendo ocorrer durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer*. Porém, a *Consolidação* pode, também, manifestar-se através da ação *Reconhecer*, mas durante o desenvolvimento da fase *Construir*, o qual ocupa a coroa circular de menor área, pois refere-se a uma fase mais avançada e afunilada do processo de construção. Destaca-se que a análise efetuada permitiu constatar três situações diferentes quanto às relações evidenciadas: (1) a *Consolidação* manifestou-se através do desenvolvimento da ação *Reconhecer*, (2) a *Consolidação* manifestou-se através de *Reconhecer*, durante o desenvolvimento da ação *Construir* e (3) a *Consolidação*

manifestou-se através do desenvolvimento da ação *Reconhecer*, durante o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*.

A análise efetuada permitiu, ainda, concluir que a *Consolidação* manifestou-se através da ação epistémica *Reconhecer*, maioritariamente durante a ação *Construir*, na fase de transição para a *Construção*. Porém, em algumas situações em que os alunos fizeram uso das representações para interpretar os dados enunciados e darem início ao processo de abstração, a ação *Consolidação* evidenciou-se também, ou apenas, durante a primeira manifestação da ação epistémica *Reconhecer*.

Relativamente à ação *Consolidação*, na fase de transição da ação epistémica *Construir* para a ação epistémica *Construção*, constatou-se que tal se verificou na resolução das tarefas: (1) *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), com a interpretação de linguagem simbólica e sua utilização para generalizar a quinta parte de um número desconhecido; (2) *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), com a identificação e interpretação do contexto de indeterminação e utilização de linguagem simbólica; (3) *O Aniversário da Margarida* (Tarefa 6), com a utilização de linguagem simbólica para expressar quantidades indeterminadas e com a evidência de maior habilidade para explorar os recursos das tabelas, designadamente relações numéricas, e (4) *Campo de férias*, com a extensão de regularidades e relações identificadas a outros valores numéricos e com a exploração das potencialidades das representações adotadas.

Por sua vez, a manifestação da ação epistémica *Consolidação* esteve, também, presente na fase inicial do processo de abstração, durante a interpretação dos enunciados e dados representados em tabelas e representações pictóricas, ocorrendo essa situação nas tarefas *Caça ao ovo* (Tarefa 4), *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5), *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6), *Campo de férias* (Tarefa 7) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8). Neste contexto, destacam-se as tarefas números cinco e oito, pelo facto de a *Consolidação* também se ter evidenciado através da interpretação de linguagem simbólica presente, respetivamente, em tabelas e balanças. A figura que se segue reflete os resultados da análise efetuada:

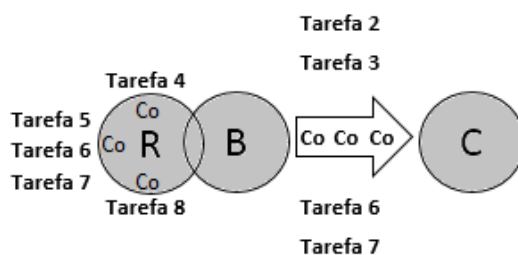


Figura 5.31 – Reconhecer (R) e Consolidação (Co) no processo de Construção do novo conhecimento

Constatou-se que a *Consolidação* manteve-se isolada durante a construção, emergindo apenas quando requerida pelos alunos e durante o tempo em que foi necessária. Manifestou-se através do desenvolvimento da ação *Reconhecer*, podendo ter ocorrido durante o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, ou através das duas. A sua manifestação revela que as aprendizagens concebidas em aprendizagens anteriores são essenciais à construção do novo conhecimento matemático, pois terão implicações no desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, designadamente na compreensão dos enunciados e na seleção de conhecimentos adquiridos, que ao serem aplicados, promoveram o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. A ausência da manifestação da *Consolidação*, durante o processo de abstração poderá, como tal, comprometer a *Construção* do novo conhecimento matemático, aspeto que reforça a ideia de que o conhecimento matemático que o aluno já possui é essencial à nova *Construção*.

5.2.2 Reconhecer e Construir

A análise dos resultados apresentados no capítulo quatro permitiram constatar que as subcategorias *Reconhecer* e *Construir* relacionaram-se em todas as tarefas aplicadas, ainda que de forma diferenciada. Constatou-se que elas desenvolveram-se mutuamente na resolução das tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1), *Conta-quilómetros* (Tarefa 2), *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Relação de equilíbrio* (Tarefa 8), situação que se deve ao facto de a ação *Reconhecer* se ter, também, manifestado durante o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. Por sua vez, as resoluções das restantes quatro tarefas, designadamente *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), *Caça ao ovo* (Tarefa 4), *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5) e *Campo de férias* (Tarefa 7) permitiram constatar que a ação *Construir* também surgiu, apenas, como consequência do desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. A figura que se segue expõe as relações que se evidenciaram, entre as subcategorias *Reconhecer* (R) e *Construir* (B), com a análise transversal aplicada aos resultados apresentados no capítulo quatro:

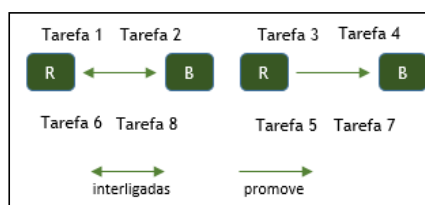


Figura 5.32 – Relação entre as ações epistémicas *Reconhecer* (R) e *Construir* (B)

Considerando as resoluções em que o desenvolvimento da ação *Reconhecer* promoveu o desenvolvimento da ação *Construir*, verificou-se que *Reconhecer* conduziu os alunos

à extensão de regularidades e relações identificadas, bem como à integração de conceitos, estratégias e procedimentos matemáticos que, com a sua aplicação, fomentaram o desenvolvimento e a exposição do raciocínio.

Por sua vez, o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* pode ter-se iniciado, à semelhança da relação supracitada, com a interpretação dos dados enunciados, com a identificação de regularidades e relações e com a seleção de conhecimentos adquiridos, favorecendo o desenvolvimento da ação *Construir*. Mas, também, *Reconhecer* pode ter continuado a estabelecer com *Construir* uma relação de partilha, de modo que os resultados apresentados pudessem ser sujeitos a análise e trabalhados no sentido de fortalecer a ação epistémica *Construir*.

Para além das relações supracitadas, constatou-se que em algumas tarefas evidenciaram-se, em simultâneo, a presença das duas relações. A ação *Reconhecer* pode ter conduzido os alunos ao desenvolvimento da ação *Construir* e, esta última, ter consequentemente favorecido a nova construção, como também podem ter-se desenvolvido mutuamente durante o desenvolvimento da ação *Construir*.

A figura que se segue representa as três situações descritas anteriormente, indicando a forma como se relacionaram as ações *Reconhecer* (R) e *Construir* (C):

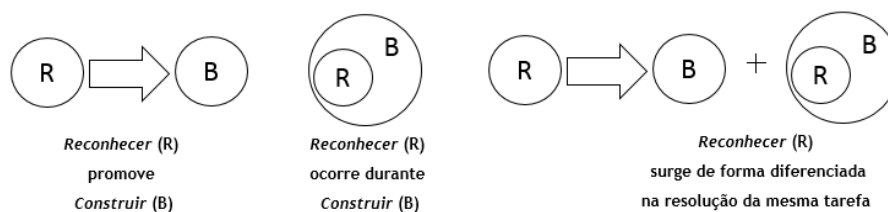


Figura 5.33 – *Reconhecer e Construir no processo e construção do novo conhecimento matemático*

Constata-se que a ação epistémica *Reconhecer* pode ter ocorrido apenas no início do processo de abstração, com a interpretação dos dados enunciados, com a observação de regularidades, relações e com a seleção de estruturas adquiridas, que ao serem aplicadas favoreceram a apresentação de soluções e aproximaram, de imediato, a ação epistémica *Construir* da nova *Construção*, favorecendo o seu desenvolvimento. Esta situação poderá ser explicada através das características da própria tarefa, no sentido em que as regularidades observadas, designadamente nas tarefas *Doces de Páscoa* (Tarefa 3) e *Campo de férias* (Tarefa 7), e a exploração das potencialidades das representações – *Caça ao ovo* (Tarefa 4) e *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5) – permitiram o desenvolvimento de *Construir* e, esta última, a *Construção*.

Por sua vez, a ação *Reconhecer* também ocorreu durante o desenvolvimento da ação epistêmica *Construir*, quando os alunos reconheceram e mobilizaram estratégias, raciocínios e soluções intermédias, concebidas através da resolução da própria tarefa, para produzirem novas soluções que os aproximaram da *Construção* pretendida. Esta relação evidenciou-se, por exemplo, nas tarefas *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), pois a ação *Reconhecer*, através da interpretação, reflexão e seleção de conhecimentos adquiridos, favoreceu a apresentação de soluções intermédias e a justificação dos raciocínios desenvolvidos, evidenciando a aquisição de competências algébricas. A ação epistêmica *Construir* esteve dependente do desenvolvimento da ação *Reconhecer*, situação que valoriza, ainda mais, a presença da mesma na construção do novo conhecimento matemático.

Por último, a análise efetuada permitiu constatar que nas tarefas *Luzes de Natal* (Tarefa 1) e *Conta-quilómetros* (Tarefa 2) a ação epistêmica *Reconhecer* promoveu o desenvolvimento da ação *Construir*, designadamente com a extensão de regularidades observadas a valores desconhecidos, mas também que as duas ações epistémicas interligaram-se permitindo a exploração e o preenchimento das representações, respetivamente tabelar e pictórica, utilizadas. Esta relação reforçou, uma vez mais, que a ação *Reconhecer* é indispensável ao desenvolvimento da ação *Construir*.

5.2.3 Reconhecer, Construir e Construção

No que respeita à relação estabelecida entre as subcategorias *Reconhecer* e *Construção* verifica-se que apenas nas tarefas *Doces de Páscoa* (Tarefa 3) e *Caça ao ovo* (Tarefa 4) elas não estabeleceram, entre si, uma relação direta, de modo que o processo de construção desenvolveu-se de acordo com a sequência *Reconhecer, Construir e Construção*. Esta situação parece estar relacionada com as características das tarefas, as quais contemplam problemas de natureza algébrica, ou com as resoluções apresentadas pelos alunos, que exploraram representações pictóricas por si desenvolvidas. Nas restantes resoluções analisadas, a ação *Reconhecer*, de alguma forma, contribuiu para o desenvolvimento da nova construção, auxiliando a reorganização de dados, ideias e resultados.

Face às diferenças assinaladas – *Reconhecer* promove *Construir* e *Construir* promove a *Construção*, ou então, *Reconhecer* e *Construir* desenvolvem-se mutuamente promovendo a nova *Construção* – poderá colocar-se a questão se o desenvolvimento do processo de abstração e, em particular a sequência de raciocínio estabelecida pelos alunos, sequencial ou combinada, será resultado das características da própria tarefa. Caso esta relação se confirme poderá ter interesse compreender que estrutura devem selecionar os professores quando elaboram uma tarefa, tendo em consideração as características dos seus alunos e o interesse em promover o desenvolvimento do

pensamento algébrico. Deverão ser essas mais dedutivas, caso os alunos evidenciem maiores dificuldades, ou deverão ser de cariz exploratório e apelarem ao desenvolvimento da criatividade?

A figura que se segue evidencia as relações estabelecidas entre as subcategorias *Reconhecer* (R), *Construir* (B) e *Construção* (C), explicitadas anteriormente:

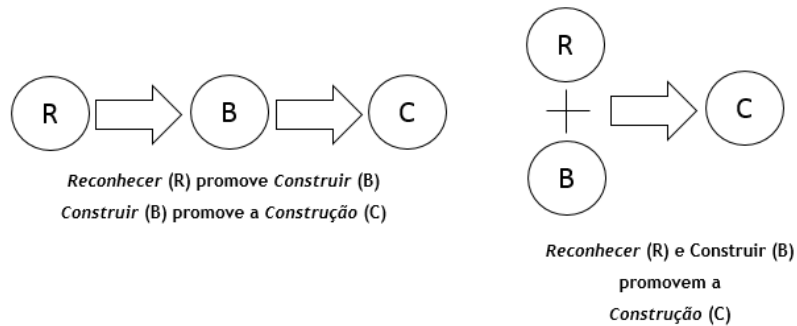


Figura 5.34 – A relação entre as ações epistémicas na Construção (C) do novo conhecimento matemático

Para além de fazer referência à relação estabelecida e descrita entre as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*, a figura anterior evidencia, igualmente, a relação estabelecida entre *Construir* e *Construção*. A ação *Construção* manifestou-se após o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*, estando essa situação associada ao facto de a reorganização das soluções intermédias e dos raciocínios desenvolvidos terem permitido que os alunos estendessem regularidades e relações observadas, utilizassem linguagem simbólica para expressarem valores indeterminados e generalizar processos, bem como desenvolvessem procedimentos não rotineiros para resolverem problemas de natureza algébrica.

5.2.4 Reconhecer, Construir, Construção e Consolidação

A análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro permitiram constatar alguma regularidade nas relações estabelecidas pelo conjunto das ações epistémicas. A figura que se segue evidencia como se relacionaram, conjuntamente, as subcategorias *Reconhecer* (R), *Construir* (B), *Construção* (C) e *Consolidação* (Co):

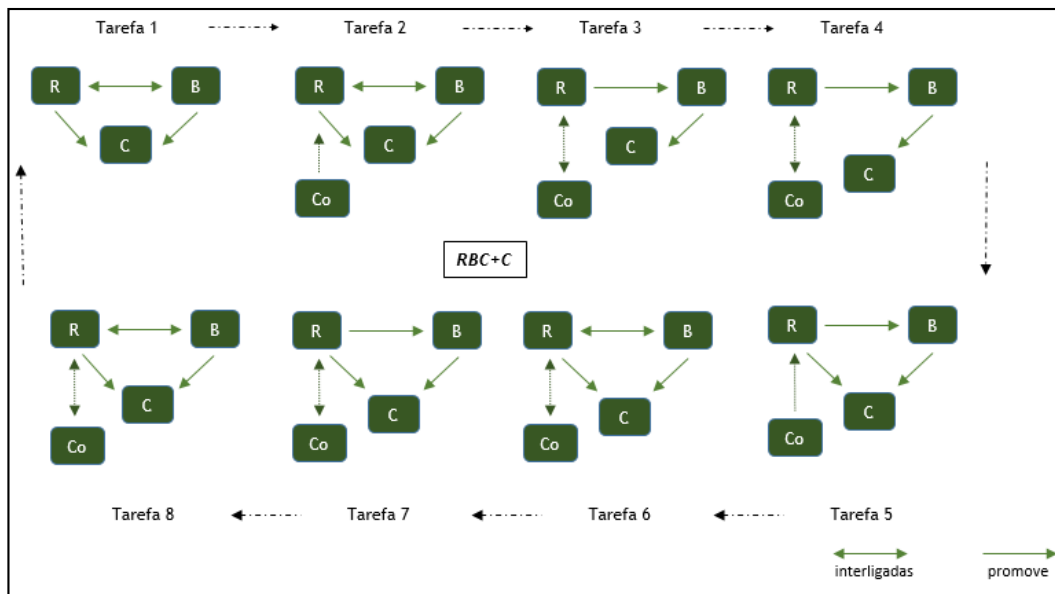


Figura 5.35 – A relação estabelecida entre as ações epistêmicas no processo de construção

Os resultados evidenciados pela ação epistêmica *Reconhecer* transmitem que o desenvolvimento do pensamento algébrico esteve presente no momento em que os alunos exploraram, em profundidade, os enunciados e representações, para interpretar regularidades, compreenderem o comportamento de relações e analisarem variações em diferentes contextos. Esteve, em particular, presente aquando da interpretação da linguagem simbólica e da seleção de estruturas adquiridas, entre as quais formas diferenciadas de representação. A ação *Reconhecer* promoveu o desenvolvimento do pensamento relacional, no sentido em que os alunos desenvolveram a capacidade para reconhecerem, em expressões algébricas e equações, relações numéricas, bem como utilizar, na tarefa *Relação de Equilíbrio*, o sinal de igual como indicador de uma relação e interpretar a variabilidade entre expressões algébricas. Por sua vez, registaram-se evidências do desenvolvimento do pensamento funcional, designadamente relacionadas com o estudo dos padrões, na relação entre ordem e termo, e com as representações tabelar e pictórica. Destaca-se, ainda, a ação *Reconhecer* como sendo a fase em que se iniciou o processo de abstração, que ocorreu no momento de análise dos enunciados e através dos quais os alunos identificaram uma relação geral que, de alguma forma, poderá ter despertado para o interesse em realizar a tarefa e para criatividade demonstrada na seleção de estratégias de resolução.

Os resultados apresentados indicam que o desenvolvimento da ação epistêmica *Reconhecer* é fundamental para que a construção do novo conhecimento matemático ocorra, pelo que se entende que os alunos devem ser incentivados a explorar, em profundidade, dados enunciados e representados, procurando identificar regularidades e estabelecer relações até com conhecimentos adquiridos que possam mobilizar.

A análise das resoluções apresentadas pelos alunos permitiram também identificar o desenvolvimento do pensamento algébrico durante a manifestação da ação epistémica *Construir*. O pensamento algébrico esteve presente quando os alunos relacionaram os dados interpretados, utilizaram representações diferenciadas para expor o seu raciocínio e obterem soluções intermédias, quando utilizaram linguagem simbólica para representar ideias e soluções e quando discutiram, argumentaram e evidenciaram capacidade crítica quanto aos resultados obtidos. O desenvolvimento do pensamento relacional destacou-se quando os alunos trabalharam as relações numéricas numa perspetiva proporcional, de avaliação das variações numéricas, bem como quando trabalharam a igualdade. O desenvolvimento do processo de abstração foi observável quando os alunos construíram uma abstração substantiva da relação geral identificada e o seu raciocínio tornou-se, progressivamente, mais consistente e estruturado, permitindo compreender relações particulares.

Os resultados apresentados valorizam o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* na construção do novo conhecimento matemático, evidenciando da parte dos alunos maior predisposição para estender regularidades, estabelecer relações, explorar as potencialidades das representações e desenvolver procedimentos não rotineiros para obterem resposta aos desafios colocados. A análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro permitiu verificar que as dificuldades dos alunos foram sendo resolvidas à medida que eles produziam novos significados e adquiriam mais conhecimento, dando lugar a maior autonomia e flexibilidade na resolução das tarefas implementadas.

No respeitante ao desenvolvimento da ação epistémica *Construção*, constata-se a evolução registada pelos alunos quanto ao uso de linguagem simbólica e quanto à forma como extraem, combinam e reorganizam dados e conhecimentos presentes nos enunciados e nas representações utilizadas para alcançarem o novo conhecimento matemático. O desenvolvimento do pensamento algébrico foi identificado quando os alunos reorganizaram dados e ideias e generalizaram relações e regularidades enunciadas e observadas em tabelas e padrões, bem como quando estenderam o sistema numérico, transitando naturalmente entre linguagem informal e linguagem simbólica. A manifestação desta ação epistémica, ao longo da resolução das oito tarefas aplicadas, permitiu constatar que os alunos evidenciaram utilizar linguagem simbólica para representar situações indeterminadas e generalizar relações e regularidades observadas, para além de estenderem procedimentos aritméticos a algébricos e resolverem problemas de natureza algébrica. Considera-se que fomentar a continuidade e o desenvolvimento destas competências poderá contribuir para que os alunos, ao iniciarem a aprendizagem da álgebra, procurem estabelecer, sempre que sintam dificuldades, analogia com as aprendizagens desenvolvidas anteriormente, bem como recorrer a formas diferenciadas de representação para fomentarem o

desenvolvimento do seu raciocínio, apresentando soluções e justificações – *Construir* – que promovam o desenvolvimento da nova *Construção*.

O desenvolvimento do pensamento algébrico também se manifestou através da *Consolidação*, durante o processo de abstração, quando os alunos identificaram uma relação geral e a associaram a uma construção adquirida na resolução de uma tarefa anterior. A manifestação da *Consolidação* significou, igualmente, fortalecer a compreensão dos conhecimentos adquiridos e ganhar experiência com a aplicação da mesma em diferentes formas de pensar e representar. A presença desta categoria permite concluir que a experiência e o conhecimento adquirido em aprendizagens anteriores é fundamental para o desenvolvimento do novo conhecimento matemático, evidenciando que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve anteceder a aprendizagem formal da álgebra.

A figura que se segue sintetiza de que forma se estabeleceu a construção do novo conhecimento matemático e como se relacionaram e desenvolveram as ações epistêmicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação* (Co), procurando representar as conclusões descritas anteriormente:

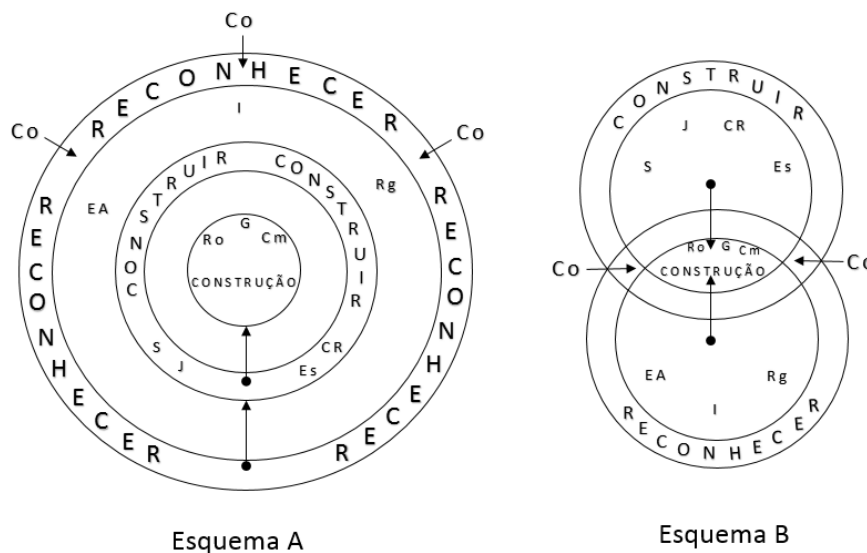


Figura 5.36 – Construção do conhecimento matemático

Os esquemas A e B, representados na figura 5.36, evidenciam que o desenvolvimento do pensamento algébrico manifestou-se através das ações epistêmicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e da *Consolidação*, ocorrendo de duas formas distintas, de acordo com a especificidade das tarefas aplicadas.

O esquema A procura representar as situações em que a *Construção* surgiu como consequência do desenvolvimento sequencial das ações epistêmicas *Reconhecer* e

Construir, e em que a *Consolidação* (Co) se manifestou durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. A ação epistémica *Reconhecer* manifestou-se, também, com a presença da *Consolidação* (Co), de modo que a interpretação dos dados enunciados (I), a identificação de regularidades (Rg) e a seleção de estruturas adquiridas (EA) em aprendizagens anteriores, ao serem aplicadas – construções reconhecidas (CR) e estratégias (Es) – favoreceram a apresentação de soluções intermédias (S) e a justificação dos raciocínios estabelecidos (J), ou seja, o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. Por sua vez, a reorganização (Rg) de todos os dados disponibilizados através do desenvolvimento da ação *Construir* favoreceu o aparecimento e a expressão da nova construção – generalização (G) e comunicação (Cm). Realça-se o facto de o desenvolvimento do pensamento algébrico ter estado presente nas diferentes fases do processo de abstração, ainda que a expressão do novo conhecimento matemático tenha surgido na fase final da construção.

De acordo com a análise dos resultados efetuada e apresentada nesta secção, esta sequência parece estar relacionada com a estrutura da tarefa aplicada, a qual parece ser mais dedutiva, facilitando a transição da ação *Reconhecer* para a ação *Construir* e, conseqüentemente aproximar mais os alunos da *Construção* pretendida. Considerando a heterogeneidade dos alunos e o interesse em estimular junto de todos o desenvolvimento do pensamento algébrico, as características destas tarefas devem ser valorizadas quando eles evidenciem maiores dificuldades, quer ao nível da compreensão – em *Reconhecer* – como também na aplicação de conteúdos matemáticos já lecionados – para *Construir*.

Por sua vez, o esquema B representa as situações em que as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir* estiveram mutuamente implicadas no processo de *Construção*, podendo estar a *Consolidação* (Co) presente no desenvolvimento das ações *Reconhecer* e *Construir*, ainda que manifestando-se através da ação epistémica *Reconhecer*.

Nesta situação a ação epistémica *Reconhecer* manifestou-se, numa primeira fase, com ou sem a presença da *Consolidação* (Co), e através da interpretação dos dados enunciados (I), da identificação de regularidades (Rg) e da seleção de estruturas adquiridas (EA). Por sua vez, favoreceu a aplicação de construções reconhecidas (CR), a aplicação de estratégias (Es), a obtenção de soluções (S) e a justificação de raciocínios (J), ou seja, o desenvolvimento da ação *Construir*. Porém, os resultados obtidos através do desenvolvimento da ação *Construir* foram, também, interpretados no sentido da identificação de relações, regularidades ou da necessidade de os combinar com conhecimentos ou procedimentos matemáticos adquiridos, mostrando que o desenvolvimento de *Construir* resultou da relação que foi estabelecendo com *Reconhecer* e, eventualmente, da manifestação da *Consolidação*, até que a *Construção* fosse atingida.

À semelhança do que se concluiu acerca do processo de construção evidenciado no esquema A, o desenvolvimento do pensamento algébrico esteve presente nas diferentes fases do processo de abstração.

As características evidenciadas neste processo de construção parecem também estar relacionadas com a estrutura das tarefas ou com o tipo de resolução adotada pelos alunos, podendo evidenciar maior esforço da parte dos alunos para compreenderem e relacionarem os resultados apresentados, conjeturarem e justificarem o raciocínio desenvolvido. Como tal, as tarefas que evidenciem estas características poderão tornar-se mais exigentes, podendo, no entanto, mostrarem-se enriquecedoras, fomentando formas alternativas de pensar e representar situações não rotineiras.

5.3 Contribuições da mediação no desenvolvimento das ações epistémicas

A análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro permitiu constatar a influência da mediação da professora, bem como a estabelecida entre alunos, no desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesta secção apresenta-se a análise referente à implicação da mediação no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

5.3.1 A mediação estabelecida entre professora e alunos e a sua contribuição para o desenvolvimento das ações epistémicas

A mediação estabelecida pela professora manifestou-se através das subcategorias *Incentivo à utilização de artefactos* (IUA) e *Incentivo à construção de signos* (ICS). A análise efetuada permitiu verificar que, em todas as resoluções apresentadas pelos alunos, ao incentivar a utilização de artefactos, a professora promoveu a construção de novos signos matemáticos, tal como será possível constatar através da figura que se segue:

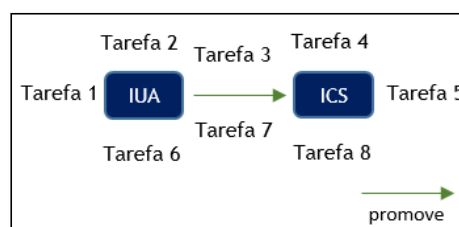


Figura 5.37 – Mediação entre professora e alunos na construção do novo conhecimento matemático

Relativamente à manifestação das duas subcategorias, a análise efetuada revelou que o *Incentivo à utilização de artefactos* verificou-se, essencialmente, com a elaboração das tarefas, com a sua apresentação e durante a fase de resolução. Por sua vez, pela estrutura apresentada pelas mesmas, entende-se que ao incentivar a exploração da tarefa, designadamente enunciados e dados representados, a professora incentivou, também, a *construção* de novos signos matemáticos. Seguidamente, explicita-se de que forma as subcategorias supracitadas ocorreram durante as fases: elaboração, apresentação e resolução das tarefas.

5.3.1.1 Elaboração das tarefas

As tarefas elaboradas pela professora e propostas aos alunos constituíram artefactos, utilizados pelos alunos para construir o novo conhecimento matemático, considerando-se que o incentivo à sua utilização esteve presente na estrutura selecionada. A análise dos resultados apresentados no capítulo quatro evidenciou o empenho e envolvimento dos alunos na construção do novo conhecimento matemático, considerando-se que o incentivo à utilização da tarefa também se traduziu no interesse em tornar essas tarefas apelativas.

O processo de mediação iniciou-se, como tal, com a elaboração das tarefas, sendo que ao incentivar a sua utilização, a professora também estimulou a construção de novos signos matemáticos, os quais estiveram associados ao interesse em promover o desenvolvimento do pensamento algébrico e presentes no desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir* e *Construção*, bem como da *Consolidação*.

De acordo com a análise efetuada, constatou-se que ao estimular a compreensão dos dados matemáticos constantes nos enunciados, nas tabelas e em outras representações contempladas nas tarefas, bem como a identificação de regularidades e a seleção de competências matemáticas adquiridas em aprendizagens anteriores, a professora incentivou a construção de novos signos matemáticos, os quais se manifestaram através do desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* e, eventualmente, da *Consolidação*.

Por sua vez, o interesse da professora em promover o desenvolvimento da ação epistémica *Construir* esteve presente quando, através da sequência e questionamento constantes nos enunciados das tarefas, a professora incentivou a exploração das potencialidades semióticas de tabelas e outras representações, a representação de dados e ideias, a exposição e a justificação dos raciocínios desenvolvidos, ou seja, a construção de novos signos matemáticos.

O incentivo à generalização de regularidades, à extensão de relações e propriedades aritméticas e à utilização de linguagem simbólica, ou pictórica, para representar

quantidades indeterminadas e resolver problemas de natureza algébrica, ou seja, o incentivo à *Construção* do novo conhecimento matemático esteve, igualmente, presente no momento de elaboração da tarefa.

Destaca-se o interesse da professora em procurar estimular a utilização de tabelas para representar os dados enunciados, favorecendo o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, e a exploração semiótica dessas, e de outras representações, para conduzir os alunos à aquisição de novos significados matemáticos, conduzindo ao desenvolvimento das ações epistêmicas *Construir* e *Construção*.

A figura seguinte explicita como se evidenciou o processo de mediação na fase de elaboração da tarefa. Iniciou-se com o *Incentivo à utilização do artefacto* (IUA) – tarefa e representações tabelar e pictórica – através da qual a professora *Incentivou à construção de signos matemáticos* (ICS). Foi através da exploração dos enunciados das tarefas e das potencialidades das representações tabelar e pictórica que a professora *Incentivou a construção de novos signos matemáticos*.

IUA	Estrutura da tarefa	
	Enunciado da tarefa	
ICS	Representação	
	Tabelas	Rep. pictóricas
	Tarefa 1	Tarefa 2
	Tarefa 5	Tarefa 4
	Tarefa 6	Tarefa 7
	Tarefa 7	Tarefa 8

Figura 5.38 – Mediação ente professora e alunos na construção do novo conhecimento matemático

Considerando a análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro, realça-se o estímulo ao desenvolvimento do pensamento algébrico através da utilização das representações tabelar e pictórica, considerando-se que esses foram fundamentais para promover o desenvolvimento das diferentes ações epistêmicas. Nesse sentido, destaca-se a representação tabelar nas tarefas: (1) *Luzes de Natal* (Tarefa 1), a partir da qual os alunos representaram dados e identificaram regularidades (*Reconhecer*) e obtiveram resultados (*Construir*) que os conduziram à perceção de que o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números naturais é o maior desses números se esse for múltiplo dos restantes, bem como à generalização de regularidades numéricas (*Construção*); (2) *Regras operatórias das potências* (Tarefa 5), através da qual os alunos desenvolveram a compreensão dos dados enunciados e da linguagem simbólica (*Reconhecer*), preencheram as tabelas (*Construir*) e deduziram as regras operatórias das potências (*Construção*); (3) *O aniversário da Margarida* (Tarefa 6), que incentivou a representação de dados enunciados, a identificação de relações numéricas, a

compreensão conceptual (*Reconhecer*), o desenvolvimento do raciocínio proporcional e a construção do conceito de proporcionalidade direta (*Construir e Construção*); (4) *Campo de férias* (Tarefa 7), através da qual transferiram a regularidade geométrica identificada em padrões para dados numéricos que interpretaram (*Reconhecer*) e, posteriormente, generalizaram a valores indeterminados (*Construir e Construção*).

A representação pictórica esteve, por sua vez, presente nas tarefas *Campo de férias* (Tarefa 7) e *Relação de Equilíbrio* (Tarefa 8), a partir das quais a professora intencionava a observação de regularidades e relações que permitissem a generalização e resolução de problemas, no caso da primeira tarefa, e a representação e resolução de equações, na tarefa *Relação de Equivalência*.

A utilização da representação pictórica, circular, foi igualmente importante na resolução das tarefas *Conta-quilómetros* (Tarefa 2) e *Caça ao ovo* (Tarefa 4), tendo esta surgido da mobilização de estratégias, por parte dos alunos, para representarem os dados enunciados e obterem solução para o problema colocado. A figura 5.38 não faz referência à tarefa *Doces de Páscoa* (Tarefa 3), pois essa não contempla as representações referidas e os alunos também não desenvolveram uma forma de resolução que as privilegiasse.

Face ao exposto, realça-se o trabalho desenvolvido pela professora na elaboração da tarefa, considerando-se que esse constituiu uma ferramenta essencial à construção do novo conhecimento matemático, revelando-se ajustada às características dos alunos. Considera-se que a estrutura apresentada pelas tarefas contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, os quais foram evidenciando uma progressiva autonomia na interpretação de enunciados e linguagem simbólica, na identificação de regularidades e relações e flexibilidade na representação dos raciocínios.

5.3.1.2 Apresentação das tarefas aos alunos

A análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro permitiram constatar que, de um modo geral, o desempenho da professora na fase de apresentação da tarefa foi importante para: (1) despertar o interesse dos alunos; (2) contextualizar a tarefa e focar a atenção dos alunos para os conceitos matemáticos enunciados; (3) esclarecer eventuais dúvidas que impedissem os alunos de darem início à resolução da tarefa e (4) fomentar a partilha e a comunicação de ideias, bem como, (5) a representação do raciocínio. Nesta fase, a mediação estabelecida pela professora incidirá, sobretudo, no desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação*.

A figura que se segue representa a postura evidenciada pelos alunos após a professora ter terminado a apresentação da tarefa:

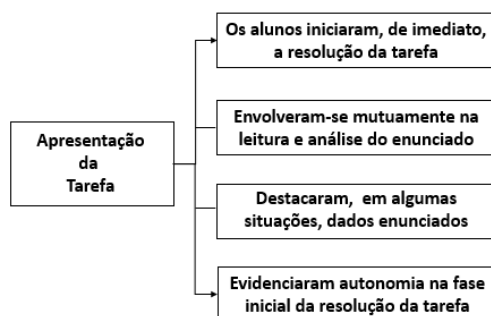


Figura 5.39 – Mediação na apresentação das tarefas

5.3.1.3 Resolução da tarefa

Na fase de mediação estabelecida com os alunos durante a resolução das tarefas, a professora incentivou a sua exploração, em profundidade, a interpretação dos dados enunciados e a seleção de competências matemáticas adquiridas, direcionando a atenção dos alunos para aspetos essenciais favorecendo, assim, o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação*. Por sua vez, incentivou a mobilização de construções reconhecidas, a exploração de outros artefactos para além das tarefas, tais como tabelas (tarefas 1, 5, 6, 7) e representações pictóricas (tarefas 2, 4, 7, 8), bem como as potencialidades da calculadora (sobretudo nas tarefas 5 e 6), a construção individual de significados matemáticos concebida pela partilha de experiências sociais e a representação e justificação de soluções intermédias, promovendo, como tal, o desenvolvimento da ação epistémica *Construir*. A influência da professora no desenvolvimento da ação epistémica *Construção*, durante esta fase, verificou-se, essencialmente, com o incentivo ao aperfeiçoamento, através da apresentação de linguagem matemática rigorosa, das respostas e justificações apresentadas. A figura 5.40 resulta da análise transversal dos resultados evidenciados pela categoria *Professor*, ao longo das oito tarefas apresentadas no capítulo quatro. Através desta análise procura-se evidenciar de que forma a professora incentivou a utilização de artefactos e a construção de signos matemáticos, favorecendo o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir* e *Construção*, para além da *Consolidação*:

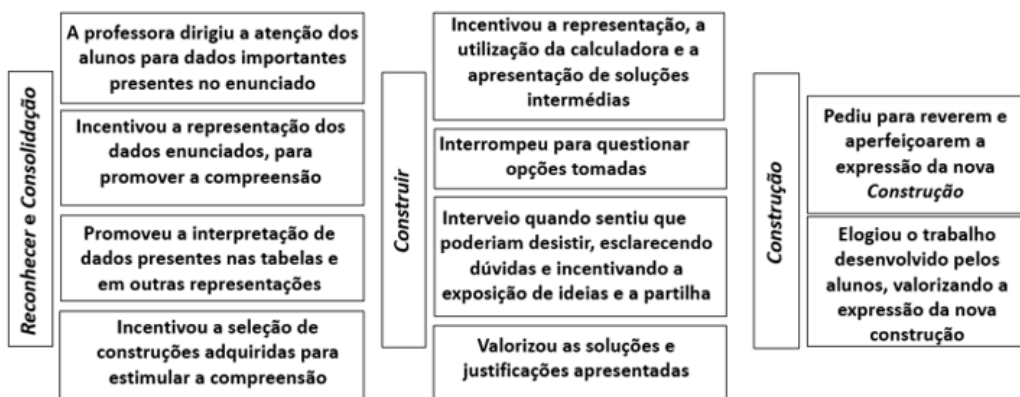


Figura 5.40 – Mediação no desenvolvimento das ações epistêmicas

Da análise apresentada, ressalta que a mediação estabelecida pela professora contribuiu para o desenvolvimento das ações epistêmicas, favorecendo a construção do novo conhecimento matemático. Os resultados indicam que o incentivo à utilização de artefactos – tarefa, representações e calculadora – e à construção de signos matemáticos, sobretudo durante as fases de elaboração e resolução das tarefas, foram essenciais para que os alunos i) ultrapassassem dificuldades promovidas pelo aparecimento de linguagem simbólica e contextos não rotineiros, para que ii) a nova construção ocorresse e para que iii) se verificasse o desenvolvimento do pensamento algébrico. Neste sentido, considerando o interesse em estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico junto de alunos mais jovens valoriza-se, no presente estudo, a elaboração de tarefas, ajustadas ao perfil dos alunos e aos objetivos do professor, bem como a atuação do professor durante a resolução das mesmas, incentivando a compreensão dos dados enunciados, a representação dos mesmos e a valorização dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos. A mediação estabelecida pela professora parece, como tal, ter sido essencial para o desenvolvimento das ações epistêmicas *Reconhecer e Construir*.

5.3.2 A mediação estabelecida entre alunos e a sua contribuição para o desenvolvimento das ações epistêmicas

A análise transversal dos resultados apresentados no capítulo quatro permitiram constatar que em todas as resoluções examinadas, o envolvimento dos alunos, a partilha e as contribuições individuais foram essenciais para o desenvolvimento do processo de abstração e favoráveis à promoção do pensamento algébrico, proporcionando a construção do novo conhecimento matemático. Constatou-se que as habilidades individuais, manifestadas por um ou pelo outro aluno, foram sempre partilhadas e integradas no processo de abstração conjunto, situação que pode explicar por que razão as duas subcategorias se desenvolveram, de uma forma global, mutuamente. A figura

que se segue evidencia como se relacionaram as subcategorias produção de signos individuais (PSI) e produção de signos coletivos (PSC), durante a resolução das oito tarefas aplicadas:

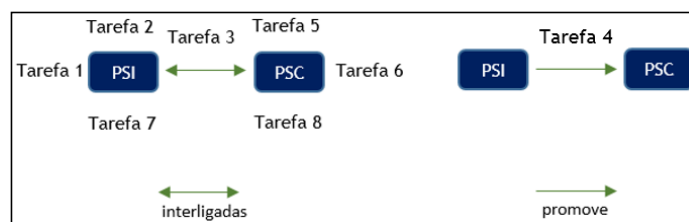


Figura 5.41 – Mediação entre professora e alunos na construção do novo conhecimento matemático

A análise efetuada permitiu constatar que, para o desenvolvimento do processo de abstração e para a construção do novo conhecimento matemático, contribuíram a *Produção de signos individuais* (PSI) e a *Produção de signos coletivos* (PSC). Apenas na resolução apresentada pelos alunos à tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4) se constatou que a resolução do problema, de natureza algébrica, esteve mais dependente da produção de signos individuais. Em todas as outras resoluções analisadas, constatou-se que a construção também resultou da partilha e comunicação estabelecida entre alunos, contribuindo para a produção de signos coletivos e, posteriormente, para a aquisição individual da nova construção. A manifestação destas subcategorias evidenciou o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas, de modo que através da produção de signos individuais e coletivos constatou-se o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*.

As contribuições individuais estiveram mais presentes durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* e com a manifestação da *Consolidação*. Prenderam-se com a interpretação dos enunciados, com a identificação de relações e regularidades e com a perceção da utilidade de integração de construções adquiridas em aprendizagens anteriores. Evidenciaram-se, ainda, através das habilidades de um dos alunos, com a seleção de estratégias criativas para resolverem a tarefa, tal como aconteceu nas situações em que os alunos selecionaram a representação pictórica para representarem os dados enunciados e desenvolverem a compreensão dos mesmos. Destaca-se que esta situação foi evidente na resolução da tarefa *Caça ao ovo* (Tarefa 4), quando um dos alunos selecionou a representação circular para apresentar quantidades indeterminadas, presentes no enunciado do problema, mostrando, posteriormente, que a produção de signos individuais foi, nessa situação, essencial para a obtenção da nova construção matemática.

As contribuições individuais estiveram, quase sempre, associadas ao início do desenvolvimento do processo de abstração, quando os alunos fizeram uma análise global da informação matemática presente na tarefa. Acrescenta-se que a integração de construções matemáticas adquiridas em aprendizagens anteriores, tais como o cálculo, conceitos e procedimentos matemáticos, foram as ações que mais evidenciaram as contribuições individuais dos alunos. Depreende-se que os seus conhecimentos e as suas habilidades podem ser fundamentais para se dar início ao processo de abstração e, por sua vez, para favorecerem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Contudo, também foi possível constatar que o desenvolvimento das ações epistêmicas *Construir* e *Construção* esteve, globalmente, associado à partilha e à comunicação estabelecida entre alunos, reforçando a ideia de que a construção do novo conhecimento matemático, ainda que possa ter sido desencadeado e enriquecido através das contribuições individuais, também resulta da partilha e comunicação estabelecida entre alunos.

No que respeita ao desenvolvimento das ações epistêmicas, verificou-se que a partilha de conhecimentos e ideias favoreceu a produção de novos signos matemáticos, permitindo que os alunos apresentassem soluções para as questões colocadas e justificação para os raciocínios desenvolvidos, evidenciando a ação *Construir*. Constatou-se ainda que os alunos, também em conjunto, reorganizaram todos os dados, resultados e ideias, generalizando regularidades e relações e apresentando resposta aos desafios da tarefa. Como consequência, o desenvolvimento da ação epistêmica *Construção* resultou, como foi perceptível através da análise efetuada, da produção de signos coletivos.

Os resultados obtidos indicam que, para a construção do novo conhecimento, foram essenciais a produção de signos individuais, ou seja, os conhecimentos que os alunos possuíam, a habilidade que demonstraram ter para analisar e compreender o conteúdo matemático enunciado (*Reconhecer*), bem como para selecionar e aplicar estratégias e conhecimentos matemáticos adquiridos (*Construir*) que os conduzisse à nova *Construção*. Porém, a comunicação e partilha foi, igualmente, importante para o desenvolvimento do raciocínio e para a tomada de decisões por parte alunos.

Capítulo 6

Conclusões e Recomendações

O presente capítulo é composto por três secções: (1) Síntese, que faz referência aos aspetos mais relevantes já apresentados e que se prendem com a motivação para este estudo, com as questões de investigação colocadas, com o problema de estudo definido, com o enquadramento teórico e com a metodologia utilizada; (2) Apresentação das conclusões, que respeita, sobretudo, à análise de terceira ordem apresentada no capítulo cinco e (3) Implicações e recomendações, que contempla a apresentação de sugestões para o trabalho a desenvolver com os alunos mais jovens.

A secção respeitante à apresentação das conclusões está dividida em duas secções: (1) As ações epistémicas na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico; (2) A mediação no desenvolvimento das ações epistémicas, na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Por sua vez, a primeira secção está dividida em sete subsecções: i) O desenvolvimento da ação *Reconhecer* no desenvolvimento do processo de abstração; ii) O desenvolvimento da ação *Construir* no desenvolvimento do processo de abstração; iii) O desenvolvimento da ação *Construção* no desenvolvimento do processo de abstração; iv) O desenvolvimento da *Consolidação* no desenvolvimento do processo de abstração; v) Relação estabelecida entre a ação epistémica *Reconhecer* e a *Consolidação*; vi) Relação estabelecida entre as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*; vii) Relação estabelecida entre as ações epistémicas *Construir* e *Construção*.

A segunda secção está, por sua vez, dividida em: i) o papel do professor no desenvolvimento das ações epistémicas e ii) a partilha e comunicação estabelecida entre alunos e a sua influência no desenvolvimento das ações epistémicas.

6.1 Síntese

O presente estudo resultou das preocupações da investigadora quanto ao processo de ensino e aprendizagem da matemática e foi evoluindo de acordo com as suas convicções. Essas preocupações recaem sobre a forma como os alunos aprendem, sendo que a investigadora entende que deverá ser preocupação do professor compreender as

razões pelas quais os seus alunos revelam dificuldades, gerais ou específicas, na aprendizagem de determinados conteúdos matemáticos. Assim se explica que o trabalho desenvolvido esteja direcionado para se observar e compreender como os alunos constroem o novo conhecimento matemático, que dificuldades manifestam e que ações poderá desenvolver o professor para que essas sejam ultrapassadas. Por sua vez, reconhecendo, sobretudo pela sua prática letiva, que os alunos, ao progredirem para níveis mais avançados de aprendizagem, evidenciam dificuldades que se vão agravando com o aprofundamento dos conteúdos, mesmo aqueles que à partida evidenciaram solidez quanto aos conhecimentos adquiridos, a investigadora considerou necessário estudar as vantagens em estimular, previamente, competências matemáticas que facilitem a compreensão dos alunos e os familiarizem com a linguagem própria da disciplina. Justifica-se, assim, o interesse da investigadora em compreender como os alunos constroem o novo conhecimento matemático, tendo em consideração que desenvolveu a sua ação com o propósito de estimular a aquisição de competências matemáticas que favoreceram essa construção. Por sua vez, considerando que a aprendizagem de competências algébricas assume bastante importância no desenvolvimento do processo de abstração, na compreensão e no relacionamento de dados e ideias, bem como no desenvolvimento do processo de representação do raciocínio, a investigadora decidiu-se pela promoção do pensamento algébrico, junto de alunos com idades compreendidas entre os nove e os dez anos, para compreender se, e como os alunos, fazem uso de linguagem matemática para representar quantidades indeterminadas, para generalizarem regularidades, estenderem relações e propriedades, bem como para resolverem problemas de natureza algébrica. O interesse da investigadora passou, então, a ser o de compreender como os alunos constroem o novo conhecimento matemático se forem incentivados a desenvolver o pensamento algébrico. Considerando que a aprendizagem tem, ainda, uma componente social, a investigadora preocupou-se também em compreender os efeitos da mediação estabelecida entre professora e alunos e entre alunos.

Neste estudo adotou-se uma abordagem qualitativa, inserida no paradigma interpretativo (Biklen & Bogdan, 1994).

Face ao interesse em compreender e descrever como os alunos constroem o novo conhecimento matemático, e qual a influência da mediação no processo de construção, foi adotado o modelo teórico e epistemológico *AiC* (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2001). O modelo *RBC+C* permitiu constatar como as ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção*, bem como a *Consolidação*, estão implicadas e contribuem para a nova *Construção*. Por sua vez, para melhor compreender a influência do contexto, em particular da mediação estabelecida pela professora e verificada entre alunos, no desenvolvimento do processo de abstração e na construção do novo conhecimento matemático, a investigadora adotou o ciclo didático descrito por Bussi e Mariotti (2008).

Efetuada o estudo e respetiva análise dos resultados recolhidos, pretende-se dar, neste capítulo, resposta às seguintes questões de investigação:

1. Na construção do novo conhecimento matemático, que ações epistémicas se podem identificar durante o processo de abstração quando os alunos desenvolvem a compreensão dos dados enunciados, identificam regularidades e relações, mobilizam conhecimentos e ideias e generalizam ou estendem procedimentos aritméticos a valores numéricos desconhecidos? Como se sequenciam e relacionam essas ações epistémicas?

2. Como se manifesta o processo de mediação, estabelecido pela professora e promovido entre alunos, na construção do novo conhecimento e, em particular, no desenvolvimento das ações epistémicas?

Estando a construção do novo conhecimento matemático associada ao desenvolvimento do pensamento algébrico, este estudo enquadra-se na proposta curricular *Early algebra*, que discute a introdução da álgebra a partir do trabalho desenvolvido na aritmética com alunos dos primeiros anos de escolaridade (com idades compreendidas entre os seis e os dez anos).

6.2 Apresentação das conclusões

Nesta secção procura-se dar resposta à primeira questão de investigação, através da identificação das ações epistémicas que estiveram envolvidas no processo de construção e como se sequenciaram e relacionaram entre si. Procura-se, igualmente, dar resposta à segunda questão de investigação, de modo a compreender-se a influência da mediação na construção do novo conhecimento matemático e, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico.

6.2.1 As ações epistémicas na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico

Relativamente às ações epistémicas envolvidas no processo de construção do novo conhecimento matemático, indicam-se as principais conclusões referentes ao desenvolvimento das ações *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*.

O presente estudo indica que a construção do novo conhecimento matemático resulta do processo de abstração desencadeado pelos alunos, o qual, nesta situação em que se promoveu o desenvolvimento do pensamento algébrico, se iniciou com a ação epistémica *Reconhecer*.

A fase inicial do processo de abstração surge com o desenvolvimento da compreensão dos dados enunciados, com a identificação de regularidades e relações e com a seleção de estruturas adquiridas, evoluindo, posteriormente, para a combinação de conhecimentos e ideias que promovem novas soluções e que reorganizadas, no seu conjunto, dão lugar à nova construção. A fase inicial da abstração esteve, em algumas situações, associada à representação dos dados enunciados mas, na sua globalidade, evoluiu de uma forma mais simples, por vezes incompleta ou pouco consciente por parte dos alunos, para uma fase mais evoluída que deu lugar à integração de conhecimentos e à obtenção de soluções. Esta constatação parece ser compatível com as indicações dadas por Dreyfus et al. (2015), designadamente que a nova *Construção* acontece quando a abstração desenvolvida em relação ao objeto matemático evolui para uma forma mais desenvolvida, que dá a conhecer o novo conhecimento.

Em relação à aquisição do novo conhecimento matemático, concluiu-se que não resultou apenas da aplicação de conhecimentos anteriormente concebidos ou de simples procedimentos matemáticos, mas também da criatividade que os alunos demonstraram ter quanto à seleção de formas de representar os dados enunciados ou o raciocínio desenvolvido durante a construção.

Relativamente ao desenvolvimento das ações epistémicas, considera-se que elas estiveram, também, dependentes da mediação estabelecida pela professora, quer através do incentivo à exploração da tarefa quer pela sua atuação durante a fase de resolução, como também da comunicação e partilha estabelecida entre alunos. Esta perspetiva será explorada na secção que se segue, no entanto, destaca-se que o desenvolvimento das ações epistémicas esteve, também, associado ao facto de o trabalho desenvolvido pelos alunos ter estado direcionado para o preenchimento de tabelas, generalização de regularidades, extensão de relações e propriedades aritméticas e algébricas e para a resolução de problemas de natureza algébrica. A experiência adquirida pelos alunos com a resolução das diferentes tarefas permitiu constatar que eles tornaram-se mais rápidos e assertivos, evidenciando terem adquirido competências algébricas, quer ao nível da interpretação como da aplicação, que utilizaram para conceberem a nova *Construção*. Esta constatação parece estar associada à definição de ação epistémica dada por Kirsh e Maglio (1994), os quais consideram que o desenvolvimento das ações epistémicas torna os alunos mais hábeis.

Durante a resolução das diferentes tarefas, manifestaram-se todas as ações epistémicas descritas pelo modelo *RBC+C* e entre elas estabeleceram-se relações, certamente relacionadas com o estímulo ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nas subsecções que se seguem, apresentam-se as principais conclusões que resultaram da análise efetuada ao desenvolvimento das diferentes ações epistémicas, às relações

estabelecidas entre *Reconhecer* e *Consolidação*, *Reconhecer* e *Construir*, *Reconhecer* e *Construção* e entre *Construir* e *Construção*.

6.2.1.1 O desenvolvimento da ação *Reconhecer* no desenvolvimento do processo de abstração

O desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, no presente estudo, não está apenas associada à percepção que os alunos deverão ter quanto à necessidade de adquirirem conhecimentos que os ajudem a chegar à nova construção. Ele está também relacionado com o desenvolvimento do processo de compreensão dos dados enunciados, escritos ou representados, com a identificação de regularidades e relações, bem como com a seleção de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores e que se relacionam com a aquisição de conceitos, linguagem simbólica, procedimentos matemáticos e estratégias.

Conclui-se que o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* coincidiu com a fase inicial do processo de abstração, a partir do momento em que os alunos exploraram, em profundidade, o conteúdo das tarefas. Durante o seu desenvolvimento torna-se perceptível a evolução dos alunos ao nível do reconhecimento e representação de quantidades indeterminadas, da interpretação de linguagem simbólica, da identificação de regularidades e relações, bem como da percepção dos conhecimentos e estratégias que se poderão selecionar para dar início à resolução da tarefa. Considera-se que estimulando o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, através da manifestação das subcategorias *Interpretação*, *Estruturas adquiridas* e *Regularidades*, desencadeadas através da exploração da tarefa, está a contribuir-se para que os alunos adquiram competências algébricas, bem como formas diferenciadas de pensar e representar dados que, em situações mais complexas, os auxiliem a ultrapassar dificuldades. Por sua vez, considera-se que o trabalho desenvolvido durante a análise e interpretação dos dados enunciados favorece, igualmente, o reforço de competências aritméticas.

Ao efetuarem a leitura da tarefa, os alunos começam por adquirir uma ideia global do contexto e dos conceitos matemáticos envolvidos, mas só com a exploração pormenorizada dos enunciados, acompanhada pela identificação de regularidades e relações, bem como através da seleção de conhecimentos adquiridos, se torna possível desenvolver a compreensão matemática. O desenvolvimento do processo de abstração ocorrido durante a ação *Reconhecer* parece, como tal, aproximar-se da ideia de Davydov (1988) quando ele refere que os alunos começam por identificar uma relação geral, por vezes reconhecida em conteúdos já lecionados, construindo uma abstração substantiva que transita de uma forma pouco desenvolvida para outra mais consistente.

Considera-se que o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, no contexto deste estudo, clarifica esse processo de transição entre o abstrato e o concreto.

Conclui-se que a interpretação dos dados enunciados e a seleção de conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores é essencial para o desenvolvimento do pensamento algébrico, deixando presente que para desenvolver competências algébricas, no sentido das indicações dadas pela proposta curricular *Early algebra*, pode-se ir além da identificação de regularidades e relações. Por outro lado também se valoriza a resolução de problemas de natureza algébrica, designadamente a compreensão que os alunos possam desenvolver acerca dos dados enunciados e a forma como os representam.

Considera-se, como tal, que os alunos deverão dedicar maior atenção ao desenvolvimento da compreensão e representação dos dados enunciados, bem como dos conhecimentos que possuem, valorizando o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* para favorecerem a construção do novo conhecimento matemático e, em particular, o pensamento algébrico.

Reconhecer manifesta-se, neste estudo, associada ao desenvolvimento do pensamento algébrico e, como tal, assume características particulares que permitem dar indicações de como pode ser estimulada, no sentido da construção do novo conhecimento matemático.

Relativamente ao desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer* considera-se que, embora possa ser desencadeada pela mediação estabelecida pela professora, ao incentivar a resolução da tarefa, ou através da partilha e comunicação estabelecida entre alunos, ela está também dependente das habilidades e conhecimentos que os alunos possuem, designadamente da compreensão que desenvolvem sobre os dados enunciados, das competências que mobilizam e da manifestação da sua criatividade.

Por último, conclui-se que o desenvolvimento da ação *Reconhecer* é fundamental para que a ação epistémica *Construir* e a própria *Construção* ocorram.

6.2.1.2 O desenvolvimento da ação *Construir* no desenvolvimento do processo de abstração

No que respeita à manifestação da ação epistémica *Construir*, no contexto do desenvolvimento do pensamento algébrico, constatou-se, à semelhança da indicação dada pelos autores do modelo adotado, que ocorreu com a integração e combinação de construções reconhecidas. Porém, ela esteve relacionada com a necessidade de os alunos atingirem determinado objetivo, designadamente o de apresentarem resposta para as questões colocadas, selecionando estratégias, justificando ideias e

apresentando soluções, bem como através do desenvolvimento da capacidade para extraírem informações das representações e dos procedimentos desenvolvidos.

A experiência adquirida pelos alunos, ao resolverem as diferentes tarefas, realça a evolução dos mesmos quanto à forma como combinam dados e conhecimentos, estendem regularidades, desenvolvem relações e extraem informação das representações e dos procedimentos matemáticos desenvolvidos. Tal constatação permite concluir que, com a experiência desenvolvida pelos alunos, a ação epistêmica *Construir* manifestou-se com maior facilidade e clareza, tal como já se tinha verificado com *Reconhecer*. A experiência adquirida através da resolução das diferentes tarefas favorece o desenvolvimento das ações epistêmicas *Reconhecer* e *Construir* e, conseqüentemente, a nova *Construção* que, neste caso particular, se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Neste estudo, a utilização da representação tabelar e pictórica parece favorecer a aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos em aprendizagens anteriores e, conseqüentemente, o desenvolvimento da ação *Construir*. Conclui-se que as representações utilizadas pelos alunos para exporem dados, ideias e conhecimentos matemáticos adquiridos favorecem o desenvolvimento da ação *Construir*, bem como o desenvolvimento do pensamento algébrico. Realça-se, uma vez mais, que a representação favorece o desenvolvimento do pensamento analítico, designadamente o trabalho efetuado com quantidades indeterminadas.

Por sua vez, os resultados apresentados permitem concluir que, à semelhança da ação epistêmica *Reconhecer*, *Construir* também é essencial para que a *Construção* ocorra.

6.2.1.3 O desenvolvimento da ação *Construção* no desenvolvimento do processo de abstração

Conclui-se que a ação epistêmica *Construção* coincidiu com a fase final do processo de abstração, quando os alunos alcançaram o novo conhecimento matemático e expressaram, pela primeira vez, verbalmente ou por escrito, a nova *Construção*. Esta conclusão pode explicar a razão que leva Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz (2001) a considerá-la como a etapa central do processo de construção. Valoriza-se a habilidade demonstrada pelos alunos, durante o desenvolvimento desta ação, para combinarem e reorganizarem toda a informação disponibilizada, semelhante ao processo de matematização vertical descrito por Freudenthal (1973).

Apesar do presente estudo valorizar o desenvolvimento das ações *Reconhecer* e *Construir*, consideramos que a manifestação da ação *Construção* também dá visibilidade ao pensamento algébrico, pelo que se entende, à semelhança dos autores

do modelo *RBC+C*, que a *Construção* está dependente do desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Reconhecer*.

Este estudo indica-nos que a ação *Construir* é parte integrante da ação *Construção*, tal como afirmam Dreyfus, Hershkowitz e Schwarz (2001), porém, também se observou que *Reconhecer* promove a nova *Construção*, ao interligar-se com *Construir* e de acordo com a reorganização vertical.

Havendo interesse em fomentar o pensamento algébrico, o desenvolvimento da ação epistémica *Construção* deverá estar associado à generalização de regularidades, extensão de relações, de propriedades e de procedimentos ariméticos a algébricos, à transferência de linguagem natural para linguagem matemática, à interpretação e utilização de simbologia, bem como à resolução de problemas de natureza algébrica que leve os alunos ao desenvolvimento do pensamento analítico e à utilização de linguagem simbólica, tal como referido por Arcavi (2006). Realça-se que, para desenvolverem o pensamento algébrico, os alunos deverão ser incentivados a explorar representações, tabelar e pictórica, de modo a desenvolverem o pensamento funcional e relacional, para além do estudo de padrões, como referido por Borralho et. al (2007).

Por fim, acrescenta-se que a própria *Construção* pode, ela própria, ser aperfeiçoada durante o processo de construção do novo conhecimento matemático.

6.2.1.4 O desenvolvimento da *Consolidação* no desenvolvimento do processo de abstração

No presente estudo constata-se que a *Consolidação* manifestou-se através do desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, quando os alunos adquiriram perceção do conhecimento concebido com a resolução das tarefas aplicadas e que lhes poderia ser útil para conceberem a nova construção, ocorrendo durante o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, *Construir* ou durante o desenvolvimento destas duas ações epistémicas. Ainda em relação à manifestação da *Consolidação*, considera-se que ela se mantém independente do processo de construção, ocorrendo apenas quando requerida e pelo tempo em que é necessária, situação que se considera estar relacionadas com as indicações dadas por Dreyfus e Tsamir (2004), quando referem que a *Consolidação* se mantém isolada e independente do processo de construção. Concluiu-se ainda que, sem a manifestação da *Consolidação*, a *Construção* pode ficar comprometida, pelo que se valorizam os conhecimentos que os alunos possuem. Considera-se, ainda, que a *Consolidação* resulta do desenvolvimento do processo de abstração quando os alunos refletem sobre os dados e resultados apresentados e os associam às construções já concebidas, refletindo, como referem os autores do modelo *RBC+C*, sobre conhecimentos que eles possuem.

Destaca-se, no presente estudo, o facto de se ter especificado quando e como ocorre a *Consolidação*, designadamente a relação que ela estabeleceu com as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*. Esta relação estará, certamente, relacionada com o facto de se terem proposto tarefas que promoveram o desenvolvimento do pensamento algébrico e que evidenciaram relações que se prendiam com o desenvolvimento do processo de abstração, com a própria *Construção* ou com o resultado da reflexão que os alunos desenvolveram sobre os conhecimentos que possuíam. Destaca-se que a relação estabelecida entre a *Consolidação* e as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir* pode verificar-se durante o processo de *Construção*, com a *Construção* ou na fase de reflexão sobre a *Construção*. Por sua vez, considera-se, à semelhança de Dreyfus e Tsamir (2004), que a *Consolidação* ocorre quando os alunos utilizam uma construção recente durante o processo de construção do novo conhecimento matemático.

A *Consolidação*, que se evidenciou através da ação epistémica *Reconhecer*, mostra que os alunos mais jovens conseguem desenvolver competências matemáticas que possibilitam o trabalho com quantidades indeterminadas e a utilização de linguagem simbólica para representar dados e resultados. Acrescenta-se que este trabalho é desenvolvido a partir do estudo das regularidades, relações e propriedades numéricas, trabalhadas durante o ensino da aritmética, e que os alunos as mobilizam para trabalhar num contexto numérico desconhecido.

Conclui-se e valoriza-se a aplicação da proposta curricular *Early algebra*, considerando que os alunos devem trabalhar a aritmética, estabelecendo relações e desenvolvendo formas diferenciadas, tais como a representação e a linguagem simbólica, para trabalhar o contexto indeterminado. Por sua vez, considera-se que o ensino da álgebra não pode surgir de forma descontextualizada, devendo partir das relações e propriedades trabalhadas com o ensino da aritmética. Concorda-se, por isso, com as indicações dadas por Guimarães et al. (2006), os quais consideram que a aritmética e a álgebra devem se trabalhadas no mesmo sentido, para que se evitem dificuldades na transição para a aprendizagem algébrica. Para tal, entende-se haver necessidade de privilegiar, junto dos alunos mais jovens, e à semelhança do que defende Radford (2012), a compreensão e utilização de linguagem simbólica e a aplicação do pensamento analítico.

Ainda em relação à *Consolidação*, considera-se que ela se manifestou através de características psicológicas e cognitivas, tais como autoevidência, confiança, rapidez, flexibilidade e consciência, tal como referiram os autores do modelo *RBC+C*. Acrescenta-se que a experiência adquirida pelos alunos ao longo da resolução das oito tarefas permite, também, considerar o desenvolvimento da autonomia como uma característica presente aquando da *Consolidação*.

Por fim, conclui-se que a ausência da manifestação da *Consolidação*, ou seja, da aplicação de conhecimentos adquiridos, poderá comprometer o desenvolvimento do processo de abstração e, em particular, a nova *Construção*.

No que respeita ao desenvolvimento do pensamento algébrico, a manifestação da ação *Consolidação* significou, igualmente, fortalecer a compreensão dos conhecimentos adquiridos e ganhar experiência com a aplicação da mesma em contextos diferenciados. A presença desta categoria permite concluir que a experiência e o conhecimento adquirido em aprendizagens anteriores é fundamental para o desenvolvimento do novo conhecimento matemático, o que parece justificar, uma vez mais, as vantagens obtidas com o desenvolvimento do pensamento algébrico junto de alunos mais jovens.

Seguidamente, realçam-se as principais conclusões que resultam das relações estabelecidas entre as diferentes ações epistémicas. Destaca-se que essas estão associadas ao trabalho desenvolvido pelos alunos, dado o interesse em estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico.

6.2.1.5 Relação estabelecida entre a ação epistémica *Reconhecer* e a *Consolidação*

No presente estudo as ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação* mantêm-se interligadas durante o processo de construção e a relação estabelecida entre elas é essencial para que a abstração se inicie e desenvolva. A *Consolidação* evidenciou-se durante o desenvolvimento da ação *Reconhecer*, associada à interpretação de dados enunciados ou resultados obtidos, quer em textos como em representações tabelares ou pictóricas, e à utilização de linguagem simbólica, bem como ao desenvolvimento de formas alternativas de representar dados e ideias que, ao serem analisados, permitiram melhor compreensão das questões ou dos desafios colocados. Verificou-se, ainda, a sua manifestação durante a ação *Construir*, associada ao desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, considerando-se que as diferentes formas de se manifestarem estão associadas à estrutura apresentada pelas tarefas ou pelas resoluções apresentadas pelos alunos.

6.2.1.6 Relação estabelecida entre as ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir*

Os resultados obtidos através deste estudo permitem aproximar o relacionamento descrito pelos autores do modelo epistemológico, em relação às ações *Reconhecer* e *Construir*, daquele que foi observado nesta investigação, ou seja, de uma forma global *Reconhecer* promove *Construir*. Neste estudo as ações *Reconhecer* e *Construir* podem surgir interligadas no processo de *Construção*, no sentido em que entidades matemáticas anteriormente abstraídas podem voltar, posteriormente, a ser reconhecidas e integradas numa nova *Construção*. Porém, considera-se que o desenvolvimento do processo de *Construção* pode ter ocorrido sequencialmente, de modo a que *Reconhecer* tenha dado lugar a *Construir*.

A estrutura apresentada pelas tarefas, ou presente nas resoluções dos alunos, poderá explicar estas diferenças, parecendo indicar que uma estrutura mais dedutiva parece sugerir a situação em que *Reconhecer* conduz ao desenvolvimento da ação *Construir* e, posteriormente, *Construir* conduz à *Construção*. Por sua vez, quando a resolução das tarefas parece necessitar de maior aprofundamento e/ou de análise, o desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Reconhecer* podem desenvolver-se mutuamente.

6.2.1.7 Relação estabelecida entre as ações epistémicas *Construir* e *Construção*

Neste estudo, a ação epistémica *Construção* manifestou-se após o desenvolvimento da ação *Construir*, estando essa situação associada ao facto de a reorganização das soluções intermédias e dos raciocínios desenvolvidos terem permitido que os alunos estendessem regularidades e relações observadas, utilizassem linguagem simbólica para expressar valores indeterminados e generalizar processos, bem como desenvolvessem procedimentos não rotineiros para resolverem problemas de natureza algébrica. De acordo com as subcategorias definidas, o que diferencia *Construir* da *Construção* é a visão que os alunos têm das soluções apresentadas e, à semelhança do que referem os autores do modelo *RBC+C*, o objetivo delineado para cada uma dessas etapas. Pode constatar-se que, em *Construir*, o objetivo é o de interligar e utilizar conhecimentos previamente adquiridos, o que é concordante com Dreyfus, Hershkowitz e Schwarz (2001). Conclui-se, ainda, que extrair conhecimento e ideias dos enunciados e das representações selecionadas é objetivo da ação *Construir*. Considera-se que a *Construção* é, ela própria, um processo de *Construção* e só é atingida quando o objetivo da atividade for cumprido e expresso claramente, o que é concordante com o que defendem os referidos investigadores.

Assistiu-se a um desenvolvimento sequencial entre as ações epistémicas *Construir* e *Construção*, de modo que *Construir* deu lugar à nova *Construção*. Porém, neste estudo a nova *Construção* foi utilizada, na resolução da mesma tarefa, para permitir o desenvolvimento de uma nova ação *Construir* que conduziu, posteriormente, os alunos à aquisição de uma nova *Construção*. As diferenças observadas poderão, uma vez mais, ser explicadas pela estrutura das tarefas e das opções de resolução tomadas pelos alunos.

6.2.2 A mediação no desenvolvimento das ações epistémicas, na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico

O presente estudo revela que a mediação estabelecida pela professora, na elaboração, apresentação e condução da tarefa, bem como a partilha e comunicação desenvolvida

pelos alunos, é favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, ao desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. Tal constatação permite-nos valorizar os resultados apresentados por Astudillo e Monroy (2015), que também valorizam a mediação na construção do novo conhecimento matemático.

Destaca-se o facto de, através do presente estudo, ter-se dado atenção ao contexto de aprendizagem no desenvolvimento do processo de construção do novo conhecimento matemático. Procurou-se analisar, compreender e descrever de que forma a mediação estabelecida pela professora e ocorrida entre os alunos poderá influenciar o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*.

Concluiu-se que a utilização de artefactos, designadamente a exploração da tarefa e das representações tabelar e pictórica, utilizados intencionalmente pela professora, conduziu os alunos à criação de signos e à construção do conhecimento matemático que com eles se relacionou, o que é concordante com o que foi referido por Bussi e Mariotti (2008).

Os resultados apresentados mostram que o incentivo à utilização de artefactos e, consequentemente, à produção de signos matemáticos promovem o desenvolvimento das ações epistémicas, favorecendo o desenvolvimento do processo de abstração e, como tal, a construção do novo conhecimento matemático. Considera-se, por isso, que há uma ligação particular entre os artefactos selecionados e o conhecimento matemático específico que os alunos desenvolvem, pelo que concordamos com as indicações dadas por Bussi e Mariotti (2008). Considera-se que a construção não se centra apenas no aluno, tal como referido por Engeström (2002), mas que está também dependente dos artefactos desenvolvidos e selecionados pela professora.

A elaboração da tarefa pela professora, bem como a seleção de outros artefactos considerados importantes para a promoção do novo conhecimento matemático, não estiveram, no contexto deste estudo, isentos. A professora selecionou-os, por exemplo, para conduzir os alunos à identificação de regularidades e relações numéricas e à interpretação e compreensão conceptual, através da exploração de enunciados escritos e dados representados, ou seja, para desencadear o desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*. Por sua vez, a professora favoreceu, através do questionamento e das representações tabelar e pictórica, a produção de signos individuais e coletivos, que se traduziram no desenvolvimento da ação *Construir*.

A utilização da tarefa contribuiu, também, para que os alunos reorganizassem toda a informação matemática resultante do desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Construir* e, de acordo com as suas habilidades e capacidades cognitivas

reorganizassem todo o conhecimento reunido, no sentido de alcançarem a nova *Construção*.

Valoriza-se, no presente estudo, o facto de a mediação estabelecida, através do incentivo à utilização de artefactos e da atuação da professora, terem dado indicações de como a mediação pode desencadear o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir* e *Construção*. Os resultados registados permitem, como tal, considerar que há vantagens, na construção do conhecimento matemático, associadas ao uso de artefactos, tal como referido por Rabardel (1995), e que particularizamos para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Acrescenta-se, ainda, que os instrumentos desenvolvidos pelos alunos, designadamente as representações e os procedimentos matemáticos, podem ser considerados componentes esquemáticas que resultaram da mediação semiótica que eles desenvolveram com os artefactos e que, conseqüentemente influenciaram a construção do novo conhecimento matemático.

A partilha e comunicação estabelecida pela professora e entre alunos permitiram, também, constatar que o processo de construção, ainda que tenha usufruído de contribuições individuais dos alunos, teve uma dimensão comunicacional e envolveu a interpretação e produção de signos matemáticos. Esta conclusão reforça a influência da mediação na construção do novo conhecimento matemático, reforçando o modelo epistemológico *RBC+C*.

6.2.2.1 O papel da professora no desenvolvimento das ações epistémicas

O presente estudo permite concluir que o professor tem um papel de relevo no desenvolvimento do processo de construção do novo conhecimento matemático e, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico.

A influência da mediação estabelecida pelo professor acontece antes da aplicação da tarefa, durante a fase de elaboração da mesma, uma vez que é elaborada com a intenção de estimular o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir*, *Construção* e *Consolidação*. Valorizam-se, assim, os conhecimentos, ideias e opções que o professor aplica nas tarefas que elabora, considerando-se que essas devem estar ajustadas ao perfil dos alunos e promoverem o alcance dos objetivos delineados. Neste estudo, as tarefas são entendidas como um artefacto que a professora desenvolveu tendo em consideração as suas conceções, os seus conhecimentos e o interesse em estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, através da construção de um novo conhecimento matemático.

Foi através da exploração dos enunciados das tarefas e das potencialidades das representações tabelar e pictórica que a professora incentivou a construção de novos

signos matemáticos e, como tal, o desenvolvimento das ações epistêmicas *Reconhecer* e *Consolidação*. Por sua vez, o interesse da professora em promover o desenvolvimento da ação epistêmica *Construir* esteve presente quando, através da sequência e questionamento constantes nas tarefas, a professora incentivou a exploração das potencialidades semióticas de tabelas e outras representações, a representação de dados e ideias, a exposição e a justificação dos raciocínios desenvolvidos, ou seja, a construção de novos signos matemáticos. O incentivo à generalização de regularidades, à extensão de relações e propriedades aritméticas e à utilização de linguagem simbólica, ou pictórica, para representar quantidades indeterminadas e resolver problemas de natureza algébrica, ou seja, o incentivo à *Construção* do novo conhecimento matemático esteve, igualmente, presente no momento de elaboração da tarefa.

Considera-se que o presente estudo direciona a atuação da professora para um sentido em que a sua exposição em contexto sala de aula é diminuta, não sendo a professora o foco da atenção. Ainda que a sua interação com os alunos seja, apenas, a estritamente necessária para os manter interessados e empenhados no trabalho exploratório que estão a desenvolver, bem como para incentivar a partilha e regular os resultados que estes vão obtendo a partir da exploração da tarefa, a professora despende tempo e esforço na seleção e adequação dos conteúdos a selecionar e da estrutura das tarefas a aplicar, para que os seus objetivos, quanto à construção do novo conhecimento, estejam ajustados aos conhecimentos dos alunos e proporcionem o gosto pela construção do próprio conhecimento matemático.

Segundo esta perspetiva, a professora coloca na tarefa as suas conceções em relação à construção do novo conhecimento matemático, mas também o conhecimento que possui dos seus alunos, tendo em consideração as capacidades e habilidades dos mesmos.

Conclui-se, também, que o desenvolvimento do pensamento algébrico está acessível aos alunos mais jovens, no sentido em que se verifica que eles conseguem fazer uso de conhecimentos e experiências adquiridas em aprendizagens anteriores, superando dificuldades promovidas por situações matemáticas que não lhes são familiares, pelo que se valoriza a pertinência da proposta curricular *Early algebra*. Foi possível constatar a evolução individual ao nível da construção de signos matemáticos, a qual se tornou perceptível, essencialmente, com a leitura e interpretação de enunciados. Os alunos foram evidenciando maior destreza na identificação de regularidades e relações, na interpretação de linguagem simbólica e na representação de dados e ideias.

Considera-se que a mediação estabelecida entre alunos, bem como através da professora, poderá ser significativa para fomentar o interesse pela aprendizagem da

matemática, uma vez que responsabiliza os alunos pela construção do seu próprio conhecimento. Neste processo, havendo empatia e respeito pelas ideias dos outros, o aluno pode sentir-se valorizado e participar de forma ativa, sem receios, podendo até contribuir de forma criativa para que a construção ocorra. Como tal, entende-se ser vantajoso, para o processo de ensino e aprendizagem, contemplar a mediação, estabelecida pela professora e entre alunos, para promover a construção do novo conhecimento matemático.

6.2.2.2 Partilha e comunicação estabelecida entre alunos e a sua influência no desenvolvimento das ações epistémicas

Com o desenvolvimento das tarefas e com a análise dos resultados apresentados pelos alunos, constatou-se que a construção do novo conhecimento matemático foi, igualmente, influenciado pelas contribuições individuais e coletivas dadas pelos alunos, sobretudo no sentido do desenvolvimento das diferentes ações epistémicas.

A este respeito, conclui-se que as contribuições individuais verificaram-se, essencialmente, durante a fase inicial do processo de abstração, quando os alunos fizeram uma análise global da informação matemática presente nas tarefas e mobilizaram conhecimentos adquiridos em aprendizagens anteriores, tais como o cálculo, conceitos e procedimentos matemáticos, dando expressão ao desenvolvimento da ação epistémica *Reconhecer*, bem como à manifestação da ação *Consolidação*. Para além do conhecimento que cada aluno mobiliza, valoriza-se a criatividade que demonstraram ter quanto à forma como poderiam representar os dados enunciados e daí extrair conhecimento matemático, situação que se verificou quando os alunos selecionaram a representação pictórica e transferiram linguagem natural ou pictórica para linguagem matemática.

Foi, também, possível constatar que o desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Construção* esteve, globalmente, associado à partilha e comunicação estabelecida entre alunos, situação que parece reforçar, uma vez mais, que a construção do novo conhecimento matemático, ainda que possa ter sido desencadeada e enriquecida através das contribuições individuais, resulta também da partilha e da comunicação estabelecida entre alunos.

No que respeita ao desenvolvimento das ações epistémicas, verificou-se que a partilha de conhecimentos e ideias favoreceu a produção de novos signos matemáticos, permitindo que os alunos apresentassem soluções para as questões colocadas e justificação para os raciocínios desenvolvidos, evidenciando a ação *Construir*. Os alunos, conjuntamente, reorganizaram todos os dados, resultados e ideias, generalizando regularidades e relações e apresentando resposta aos desafios da tarefa.

Os resultados permitiram constatar que a *Construção* do novo conhecimento matemático é influenciada pela mediação desenvolvida entre alunos e pela professora, bem como pela utilização de artefactos e instrumentos matemáticos. Mais, indicam que a mediação estabelecida influencia o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer*, *Construir* e *Construção*, bem como a manifestação da *Consolidação* de construções recentes.

Relativamente à ocorrência das ações epistémicas verificou-se que todas elas, excetuando a *Consolidação* na resolução da primeira tarefa, estiveram presentes no processo de construção, sendo que algumas delas relacionaram-se entre si. Relativamente ao processo de mediação, os resultados obtidos indicam que, para a construção do novo conhecimento, foram essenciais: i) a produção de signos individuais, que se manifestaram na habilidade demonstrada pelos alunos para analisarem e compreenderem o conteúdo matemático enunciado e para selecionarem estratégias e competências matemáticas, sugerindo-se que ocorre, essencialmente, durante o desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação*; ii) a produção de signos coletivos que resulta das contribuições dadas pelos dois alunos, revelando produzir mais efeito no desenvolvimento das ações epistémicas *Construir* e *Construção* e iii) a mediação estabelecida pela professora, na elaboração, apresentação e condução da tarefa e, em particular, incentivando a exploração de artefactos e a construção de signos matemáticos.

Face aos resultados apresentados, conclui-se que o desenvolvimento do pensamento algébrico está acessível aos alunos mais jovens, no sentido em que eles conseguem fazer uso de conhecimentos e experiências adquiridas em aprendizagens anteriores, superando dificuldades promovidas por situações matemáticas que não lhes são familiares. Foi possível constatar evolução individual ao nível da construção de signos matemáticos, a qual se tornou perceptível, essencialmente, através da leitura e interpretação de enunciados, de linguagem simbólica, bem como através da seleção de formas alternativas e criativas de representar o raciocínio. Como tal, reforça-se a pertinência da proposta curricular *Early algebra*, entendendo-se que é vantajoso, na perspetiva do aluno e do ensino da Matemática, que os alunos mais jovens sejam estimulados a trabalhar a aritmética com o sentido da aprendizagem algébrica, de modo que a aprendizagem da álgebra seja entendida como a evolução do ensino da aritmética.

Considera-se que a mediação estabelecida entre alunos, bem como através da professora e dos artefactos por ela desenvolvidos, poderá ser significativa para fomentar o interesse pela aprendizagem da matemática, uma vez que se valorizam os conhecimentos e habilidades dos alunos, entendendo-se, como tal, vantajoso fazer uso

da mediação para promover a construção do novo conhecimento matemático e, em particular, para estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Considera-se que os alunos que são estimulados a trabalhar a aritmética no sentido da aprendizagem algébrica, reforçam competências adquiridas durante a aprendizagem da aritmética e estabelecem, com maior facilidade, relações entre a aprendizagem da álgebra e a aprendizagem da aritmética, as quais contribuem para uma aprendizagem algébrica mais acessível e significativa.

Em relação às opções tomadas pela professora e investigadora, face ao interesse em estimular o pensamento algébrico dos alunos mais jovens, este estudo indica que o seu desenvolvimento não está restrito ao estudo de padrões, à generalização de regularidades, à extensão de relações e propriedades, ou limitado à interpretação e utilização de linguagem simbólica, dando também destaque à resolução de problemas e à representação de dados, conhecimentos e ideias. Conclui-se, por isso, que para estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico, o professor deverá promover e estender o desenvolvimento de competência para além da observação e generalização de regularidades.

A investigadora considera que os alunos mais jovens conseguem usar linguagem simbólica para estabelecer relações e generalizar, bem como para resolver equações e problemas de natureza algébrica que envolvam quantidades desconhecidas, fazendo uma análise funcional mais profunda do que seria de esperar, à semelhança do que referem os investigadores Blanton e Kaput (2004). Considera, também, que os alunos que adquirem maior flexibilidade quanto à utilização de representações múltiplas – as tabelas, os desenhos, as palavras e os símbolos adquirem maior facilidade para compreender os dados enunciados e para extrair dados matemáticos que lhes permitam apresentar soluções e justificar o raciocínio desenvolvido.

6.3 Implicações e recomendações

O presente estudo permitiu perceber de que forma os alunos constroem um novo conhecimento matemático e como a mediação pode influenciar essa construção e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Evidenciou que os alunos mais jovens, quando sujeitos à mediação do professor, tal como a que foi efetuada neste estudo, bem como ao partilharem conhecimentos e ideias entre si, mobilizam conhecimentos e desenvolvem processos criativos de resolução que lhes permitem dar resposta aos desafios colocados, reforçando competências adquiridas com a aprendizagem da aritmética e desenvolvendo formas alternativas de pensar e representar situações indeterminadas, ou seja, algébricas. Considera-se, como tal, que será igualmente importante procurar compreender melhor como deve agir o professor, nomeadamente

quanto à metodologia e artefactos a seleccionar, quando pretende estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico a alunos mais jovens.

Neste estudo, a perspetiva *Early algebra* assume-se muito poderosa. Por isso, teria todo o interesse estruturar uma proposta curricular, ou uma sequência de ensino, que transpusesse a perspetiva *Early algebra* e indicasse orientações específicas sobre o trabalho que deve ser desenvolvido em contexto sala de aula.

As representações pictóricas e tabelares mostraram ser, neste estudo, muito importantes na atividade matemática dos alunos. Será de toda a importância procurar fundamentar melhor o papel das representações no desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, na resolução de problemas de natureza algébrica. Considera-se benéfico estimular a representação dos dados enunciados, designadamente o incentivo à utilização de equações pictóricas para resolver problemas.

A estrutura das tarefas propostas aos alunos mostrou, neste estudo, desempenhar um papel muito importante para a construção do novo conhecimento matemático. Ela teve um papel fundamental para desencadear o processo de abstração, nomeadamente no desenvolvimento das ações epistémicas *Reconhecer* e *Consolidação*. É importante procurar compreender, ainda melhor, qual a influência das tarefas elaboradas e propostas aos alunos no desenvolvimento das ações epistémicas, tendo em consideração o perfil dos alunos.

Seguiu-se a perspetiva do *Early algebra*, a qual teve repercussões na mediação desenvolvida pelo professor, nomeadamente na elaboração das tarefas, bem como na dinamização da atividade matemática dos alunos durante e após a sua resolução. Importa, assim, e com recurso ao modelo *RBC+C*, estudar a construção do novo conhecimento matemático dos alunos mais novos em outras áreas da matemática, de modo a poder-se contribuir para uma melhor compreensão sobre a construção do novo conhecimento matemático dos alunos, para além do conhecimento algébrico.

No presente estudo as subcategorias definidas, função da natureza do pensamento algébrico, caracterizam cada uma das ações epistémicas e influenciam o desenvolvimento do pensamento algébrico, pelo que se compreende melhor a importância de cada subcategoria, estudando o seu comportamento. Considerando a necessidade de também se estudar o desenvolvimento do pensamento geométrico, estatístico e outros, interessará compreender quais, como se desenvolvem e relacionam, nessas situações, as subcategorias aí definidas. Interessa, também, averiguar a existência de outras ações epistémicas que permitam compreender como se desenvolve e que valor tem cada uma na construção do novo conhecimento.

Referências bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação.
- Almeida, P. (1994). Imaginar para aprender: O caso da matemática. *NOESIS*, 32, 29-32.
- Andrade, J. M., & Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista latino americana de investigación en matemática educativa*, 15(2), 137-169.
- Anghlieri (2001). Contrasting approaches that challenges tradition. Em J. Anghlieri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching*. Buckingham: Open University, p. 4-14, 2001.
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding Practices That Enhance Mathematics Learning. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2006, Volume 9, Issue 1, pp 33-52.
- Arcavi, A. (2005). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, P. Canavaro (Orgs.) *Números e Álgebra na aprendizagem e na formação de professores (pp. 29-48)*. Lisboa: SEM-SPCE.
- Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*, 29-48.
- Astudillo, M. T. G. & Monroy, A. A. (2015). Proof by reductio ad absurdum: an experience with university students. *CERME 9, TWG 1*, texto 1.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.
- Basso, I. S. (1998). Significado e sentido do trabalho docente. *Cadernos Cedes*, 19(44), 19-32.
- Bastable, V., & Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in early algebra. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades (pp. 165-184)*. Mahwah: Erlbaum.
- Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. In *Approaches to algebra (pp. 167-185)*. Springer Netherlands.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing Elementary Teachers': "Algebra Eyes and Ears". *Teaching Children Mathematics*, 70-77.

- Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142).
- Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Blanton M. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Biklen, S., & Bogdan, R. C. (1994). Investigação qualitativa em educação. *Porto: Porto Editora*, 134-301.
- Booth, L. (1984) *Algebra: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. New Windsor, Berkshire, England: NFER-Nelson Publishing Co. Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher.
- Borrvalho, A., Cabrita, I., Palhares, P. e Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarró (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.
- Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher.
- Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. *Algebra in the early grades*, 273-301.
- Brousseau, G., Davis R. & Werner T. (1986). Observing Students at work, en Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Edts): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva Publicações.

- Carpenter, T. P., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In *Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 155-162).
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912 (Paperback: \$24.50). Web site: www.heinemann.com.
- Carpenter, P., Jacobs, V., Franke, M., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 38, n.º 3, p. 258-288.
- Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 37(2), pp. 87-115.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Chambadal, L. (1978). *Dicionário da Matemática Moderna*. São Paulo: Editora Nacional.
- Chevalier, J., & Gheerbrant, A. (2001). *Dicionário de símbolos*. Rio de Janeiro: José Olympio.
- Cooper, T., & Warren, E. (2011). Year 2 to Year 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*, pp. 187-214. Heidelberg: Springer.
- Cuoco, AA, Goldeberg, EP & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An organizing Principle of Mathematics Curriculum. In *Journal of Mathematics Behavior*, 15:375-402
- Davis, R. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 195-208.
- Davydov, V. V. (1988). The Mental Development of Younger School Children in the Process of Learning Activity (Contd.). *Soviet Education*, 30(10), 3-36.
- Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*. *Soviet Studies in Mathematics*

- Education. Volume 2.* National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.
- Day, R., & Jones, G. (1997). Building Bridges to Algebraic Thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2, (4), 208-212.
- Denzin, N. K. (1989). *Interpretive interactionism*. Newbury Park, CA: Sage.
- Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review*, 3, 289-301.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop (Ed.), *Mathematical Knowledge: It's Growth Trough Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2001). Abstraction in Context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly* 1, 307-368.
- Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 271-300.
- Dreyfus, T., Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2006). Mechanisms for consolidating knowledge constructs. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 465-472). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education.
- Dreyfus, T., & Kidron, I. (2006). Interacting parallel constructions: A solitary learner and the bifurcation diagram. *Recherches en didactique des mathématiques*, 26, 295-336.
- Dreyfus, T. (2012). Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. 12th International Congress on Mathematical Education.
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: theory as methodological tool and methodological tool as theory. In *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 185-217). Springer Netherlands.
- Drijvers, P., & Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht, the Netherlands: Utrecht University.

- Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 99-114.
- Engeström, Y., Engeström, R., & Suntuio, A. (2002). Can a school community learn to master its own future? An activity-theoretical study of expansive learning among middle school teachers. *Learning for life in the 21st century: Sociocultural perspectives on the future of education*, 211-224.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 19-25.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Springer Science & Business Media.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht. The Netherlands: Kluwer.
- Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 258-264).
- Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, (pp. 127-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Garcia, F. Fernandes (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. IN: *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Número 14, ano IV. Graó, Barcelona.
- Gimeno-Sacristán, J. (1989). *El curriculum: Una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morada.
- Gravemeijer, K. (1995). Het belang van social norms en socio-math norms voor realistisch rekenwiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 14(2), 17-23.
- Guimarães, F., Arcavi, A., Gómez, B., Ponte, J. P., & Silva, J. N. (2006). O ensino aprendizagem dos Números e da Álgebra: Que problemas, que desafios?. *Números*

e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores, 361-379.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, 27(1), 59-78.

Hershkowitz, R., Schwartz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195 - 222.

Irwin, K., and Britt, M. (2005). The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy Project. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 169-188.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In S. Fennell (Ed.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. (consultado em 10 de Setembro de 2008 em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf) 23

Kaput, J. J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student learning & Achievement in Mathematics & Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 5-17.

Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, 4, 33-56.

Kieran, V. (1991). A procedural-structural perspective on álgebra research. In Furinghetti, F. (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Genoa, Italy, Vol. 2, pp.245-253.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

- Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, XVI, 1*, 5-26.
- Kirsh, D., & Maglio, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. *Cognitive science, 18*(4), 513-549.
- Kozulin, A. (2003). *Vygotsky's educational theory in cultural context*. Cambridge University Press.
- Küchmann, D. (1981), "Algebra", en K. M. Hart (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, Londres, John Murray, pp. 102-119.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning, 7*(3), 231-258.
- Lee, L. (1996). 'An initiation into algebraic culture through generalization activities', in N. Bednarz, C. Kieran and Lee, L. (eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 87-106.
- Leontiev, A. N. (1978). Atividade, consciência e personalidade. *Primeira Edição*.
- Lins, R., & Giménez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus.
- Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. *Algebra in the early grades*, 57-94.
- McIntosh, A., Reys, B. J. e Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8 e 44.
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of Mathematics, S. B. (1988).

- Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: ME/ DGIDC.
- Molina, M., Castro, E., & Mason, J. (2008). Elementary school students' approaches to solving true/false number sentences. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(2), 75-86.
- Morris, A. K. (1999). Developing Concepts of Mathematical Structure: Pre-Arithmetic Reasoning versus Extended Arithmetic Reasoning. *Focus on learning problems in mathematics*, 21(1), 44-72.
- Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 1(4), 441-465.
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Commission on Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics. New Jersey: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática* (tradução portuguesa da APM do original em inglês de 1991). Lisboa: IIE e APM.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA: NCTM
- Newman, James R. (1964). *The Universal Encyclopedia of Mathematics*. Londres: George Allen & Unwin Ltd.
- Ohlsson, S., & Lehtinen, E. (1997). Abstraction and the acquisition of complex ideas. *International Journal of Educational Research*, 27(1), 37-48.
- Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-120). London: Cassel.
- Ozmantar, M. F., & Monaghan, J. (2007). A dialectical approach to the formation of mathematical abstractions. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 89-112.

- Peirce, C. S. (1958). *The Collected Papers*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Piaget, J. (1977). *The development of thought: Equilibration of cognitive structures*. (Trans A. Rosin). Viking.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores - Actas do XIV EDEM* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains.
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. For the *Learning of Mathematics*, v. 1, n. 1, p. 16-19.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006a). Communication, apprentissage et formation du *je communautaire*. In B. D'Amore & S. Sbaragli (eEds.), *20th Italian national conference Incontri con la Matematica*, November 3--5, 2006. (Plenary Lecture available at: <http://laurentian.ca/educ/lradford/>)
- Radford, L. (2006b). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre et al. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2-21),. Mérida, Vol. 1, pp. 2-21.
- Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Brasil: PME.
- Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea. July 8-15, 2012

- Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. In: Kilpatrick, J.; Gomes, P.; Rico, L. Educación matemática. Bogotá: Iberoamericana. p. 69-108.
- Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English et al. (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 143-161). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Romberg, T. A., & Kaput, J. J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. *Mathematics classrooms that promote understanding*, 3-17.
- Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In *35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking*.
- Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function- A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 229-254.
- Saraiva, M. J., & Teixeira, A. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento n° 4 al n° 19*, 74-83. (ISSN on-line 1592-4424).
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *International conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 127-134). Honolulu: University of Hawaii.
- Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of the variable. In *Mathematics Teacher*, 81 (6), 420-427.
- Schoenfeld, A. (2005). Curriculum development, teaching and assessment. In L. Santos et al. (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 13-41). Lisboa: APM.
- Schwarz, B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of Knowledge through Classroom Interaction* (pp. 11- 42). London, UK: Routledge.

- Skemp, R.K. (1978). Relational and Instrumental Understanding, *Arithmetic Teacher* 26.3 9-15
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en educación matemática XI*, pp. 19-52.
- Souza, E. R., Diniz, M. I. S. V. (1996). *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. 2º ed. IME / USP, São Paulo.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, 3(4), 268-275.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (pp. 479-486). Camberra: MERGA.
- Stephens, M. & Ribeiro, A. J. (2012). Working Towards Algebra: the importance of relational thinking. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Volume 15 (3), pp. 373-402.
- Struik, Dirk J. (1989). *História Concisa das Matemática*. Gradiva. Lisboa.
- Tabach, M., & Hershkowitz, R. (2002). Construction of knowledge and its consolidation: A case study from the early-algebra classroom. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-265).
- Tabach, M., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2006). Construction and consolidation of mathematical knowledge within dyadic processes: a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 235-258.
- Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education- the Wiskobas program. In *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 97-121).
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years, in A. Orton (ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, Cassell, London, pp. 18-30.

- Ursini, S., & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-327).
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn? - In: B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking in grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications*. Reston, VA: NCTM, p. 16-21.
- Vale, I., Palhares, P. & Borralho, A. e Cabrita, I. (2006). *Os padrões no ensino e aprendizagem do número e álgebra*.
- Vergnaud G. (1988). *Theoretical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education*. Proceedings of the International Congress on Mathematical Education (ICME VI), Budapest, p. 39-41.
- Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (A. Kozulin, trans.).
- Vygotsky, L. S. (1987). *The collected works of LS Vygotsky: Vol. 1, Problems of general psychology* (RW Rieber & AS Carton, Eds., N. Minick, trans.).
- Warren, E. (2005b). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: University of Melbourne.
- Warren E., & Cooper, T. J. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking. *Journal of Classroom Instruction* (Special Edition) (in press).
- Wilson, R. L. (1976). A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic. *Journal of Algebra*, 40(2), 418-465.

Anexos

Tarefa 1 - Luzes de Natal

Na Matelândia, neste Natal, várias famílias enfeitaram as suas árvores com lâmpadas *pisca-pisca*, as quais existem em diferentes formatos.

No mercado estão disponíveis lâmpadas com a forma circular, triangular, quadrangular, entre outras, tendo cada família selecionado apenas um desses tipos para colocar na sua árvore.



Três amigos compraram, cada um deles, uma dessas lâmpadas e estão a procurar dar resposta a algumas questões lhes foram colocadas. Tenta ajudá-los, respondendo às questões que se seguem.

Sabe-se que:

- O TitoMat comprou lâmpadas com formato circular, as quais piscam de 6 em 6 segundos;
- A RitaMat comprou lâmpadas com formato triangular, as quais piscam de 9 em 9 segundos;
- O EduMat comprou lâmpadas com formato quadrangular, as quais piscam de 18 em 18 segundos.

Considera que os três amigos começaram a cronometrar, ao mesmo tempo, durante 1 minuto, os instantes (segundos) marcados no seu cronómetro sempre que as luzes piscaram.



Será que, para além do instante inicial (zero segundos), as lâmpadas voltaram a piscar em simultâneo?



TitoMat



RitaMat



EduMat

Os três amigos já “meteram mãos à obra”, para chegarem a uma resposta. Procura tu também resolver este problema, preenchendo as tabelas que correspondem aos registos de cada um dos deles.

	TitoMat
Instantes (segundos) registados no 1.º minuto	0

	RitaMat
Instantes (segundos) registados no 1.º minuto	0

	EduMat
Instantes (segundos) registados no 1.º minuto	0

Observa a sequência numérica presente nas tabelas do TitoMat e do EduMat.

No primeiro minuto, de quanto em quanto tempo, as lâmpadas piscaram em simultâneo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.

Nota: Não consideres o instante inicial.

Considera agora a sequência presente nas tabelas da RitaMat e do EduMat.

Quanto tempo foi necessário esperar para voltar a ver as respetivas lâmpadas a piscar ao mesmo tempo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados apresentados? Justifica.

Nota: Não consideres o instante inicial.

De quanto em quanto tempo piscaram as três lâmpadas em simultâneo?

Consegues estabelecer alguma relação entre a tua resposta e os dados desta questão? Justifica.

Nota: Não consideres o instante inicial.

Tendo em consideração as conclusões retiradas nas alíneas anteriores, determina o mínimo múltiplo comum (*m.m.c*) entre:

a) 6 e 18 b) 9 e 18 c) 6, 9 e 18 d) 5, 10 e 20 e) um número e o dobro desse número

Observa, uma vez mais, os valores registados na tabela da RitaMat.

- Quantas vezes, durante o primeiro minuto, piscaram as suas lâmpadas?
[Nota: não consideres o instante inicial]
- Quantas vezes se espera que pisquem durante os primeiros dez minutos?
- Completa a frase: *numa hora, as luzes da lâmpada da RitaMat piscam _____ vezes.*
- Preenche a tabela seguinte, indicando o número de vezes que piscariam as luzes caso estivessem acesas durante vários minutos.
[Nota: não consideres o instante inicial]

Minutos	“N.º de piscas”
1	
2	
5	
10	
20	
30	
40	
50	
60	
<i>m</i>	

Tarefa 2 – Conta - quilómetros

O treinador do Luís pretende avaliar a resistência máxima do seu atleta através de um plano de treinos. O Luís foi informado que terá de concluir, nos primeiros cinco dias da semana, um percurso com um número indeterminado de quilómetros, respeitando o seguinte plano:

Percorre $\frac{1}{2}$ do percurso nos primeiros três dias semana;

Percorre mais $\frac{1}{4}$ do percurso, para além do percorrido nos três dias anteriores, na quinta feira;

Finaliza o percurso na sexta-feira, correndo 2,5 km.

Indica, justificando, quantos quilómetros tem o percurso do Luís.

Desenvolve uma estratégia que te permita dar resposta ao desafio.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que auxiliem a expor o teu raciocínio.

1. Calcula $\frac{1}{5}$ de:

a) 10 kg

b) 300 €

c) 5000 litros

2. Indica uma expressão que represente $\frac{1}{5}$ de:

a) n carros

b) m canetas

c) $n + m$ pessoas

Tarefa 3 – *Doces de Páscoa*

Ovos de chocolate

A Leonor tem três sobrinhos e, nesta Páscoa, ofereceu-lhes os ovos de chocolate que podes ver na imagem. Sabe-se que ofereceu metade do número de ovos representados na imagem ao Ricardo, a terça parte à Rita e a sexta parte à Ema.

Quantos ovos ofereceu? Restaram ovos?



Amêndoas de chocolate

O Mário comprou uma caixa de amêndoas de chocolate e ofereceu parte delas a alguns dos seus amigos.

Determina quantas amêndoas ofereceu o Mário a cada um dos seus amigos, respondendo às questões que se seguem.



Nota: Sempre que possível representa a situação descrita utilizando linguagem matemática.

1. O Mário ofereceu metade da totalidade das amêndoas da caixa ao Nuno.
Quantas amêndoas recebeu o Nuno?
Representa, através de uma expressão matemática, o número de amêndoas que o Nuno recebeu.
2. O Mário ofereceu a quarta parte da totalidade das amêndoas da caixa ao Miguel.
Quantas amêndoas recebeu o Miguel?
Representa, através de uma expressão matemática, o número de amêndoas que o Miguel recebeu.
3. Escreve uma expressão matemática que traduza a quantidade de amêndoas que os dois amigos receberam.
4. Escreve uma expressão que traduza a quantidade de amêndoas que restaram.

Tarefa 4 – Caça ao ovo

Caça ao ovo

O João e a Catarina organizaram o evento escolar “A caça ao ovo”.

Este ano foram vários os participantes. Participaram alunos desde o quinto até ao nono ano de escolaridade.

Para divulgarem o sucesso da atividade, o João e a Catarina vão redigir uma notícia para publicar no jornal da escola.



Lê com atenção o desafio que eles irão colocar aos leitores do jornal:

Este ano, na nossa Escola, mais de quatro dezenas de alunos participaram com entusiasmo no evento “A caça ao ovo”. Foram vários os alunos que procuraram os ovos escondidos por diversos cantos da nossa Escola. A grande afluência de participantes verificou-se entre os mais novos, sendo que os alunos do segundo ciclo representaram metade do total de participantes, os do sétimo ano representaram a quarta parte desses. Sabe-se ainda que a oitava parte do total de participantes eram alunos do oitavo ano e que do nono ano só participaram seis alunos.

Consegues descobrir quantos alunos participaram, este ano, na caça ao ovo?

Desenvolve uma estratégia que te permita dar resposta ao desafio.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que te auxiliem a expor o teu raciocínio.

Tarefa 5 – Regras operatórias das potências



Considera a^n e a^m duas potências de base a e expoentes n e m , com $a, n, m \in \mathbb{N}$.

Completa as tabelas seguintes e estabelece relações entre as regularidades observadas.

a	n	m	a^n	a^m	$a^n \times a^m$	a^{n+m}
3	4	2				
10	5	6				
11	2	1				
20	3	2				

Que regularidades observas? O que podes concluir?

a	n	m	a^n	a^m	$a^n \div a^m$	a^{n-m}
3	4	2				
10	5	6				
11	2	1				
20	3	2				

Que regularidades observas? O que podes concluir?

a	n	m	a^n	a^m	$(a^n)^m$	$a^{n \times m}$
3	4	2				
10	6	5				
11	2	1				
20	3	2				

Que regularidades observas? O que podes concluir?

Considera a^n e b^n duas potências de bases a e b e expoente n , com $a, b, n \in \mathbb{N}$.

Completa as tabelas seguintes e estabelece relações entre as regularidades observadas.

a	b	m	a^n	b^n	$a^n \times b^n$	$(a \times b)^n$
6	3	2				
5	2	3				
3	7	4				
1	6	5				

Que regularidades observadas? O que podes concluir?

a	b	m	a^n	b^n	$a^n \div b^n$	$(a \div b)^n$
6	3	2				
8	2	3				
14	7	2				
3	1	5				

Que regularidades observadas? O que podes concluir?

Tarefa 6 – O aniversário da Margarida

A Margarida está a organizar a sua festa de aniversário onde estarão presentes alguns dos seus amigos. Apenas a quarta parte dos convidados confirmou a sua presença, situação que está a deixar a mãe da Margarida um pouco ansiosa, pois queria ter a certeza da quantidade de ingredientes necessários para preparar alguns *popcakes*.



Para ajudar a mãe, a Margarida elaborou uma tabela onde irá registar o número de ingredientes necessários para confeccionar os *popcakes* (um por cada convidado). Com este procedimento a mãe da Margarida conseguirá, assim que se confirme o número de convidados presentes na festa, identificar ou calcular com rapidez a quantidade exata de ingredientes necessários para a confeção dos *popcakes*.

Analisa a tabela construída pela Margarida, onde poderás encontrar a quantidade de ingredientes necessários à confeção de um *popcake*, e ajuda-a no respetivo preenchimento.

Ingredientes quantidades	1 <i>popcake</i>	10 <i>popcakes</i>	15 <i>popcakes</i>	20 <i>popcakes</i>	27 <i>popcakes</i>	n <i>popcakes</i>
Massa de bolo	50 g					
Leite condensado	20 g					
Chocolate	45 g					
Confettis	12					
Palitos	1					

- 1.1. Ajuda a Margarida, preenchendo a tabela com as quantidades correspondentes ao número de *popcakes* indicado.
- 1.2. Representa através de uma expressão matemática o número de convidados que confirmou a sua presença na festa de aniversário.
- 1.3. De acordo com a informação constante na tabela, responde às questões seguintes:
 - a) Quantos *popcakes* é possível confeccionar com 1 kg de massa de bolo?
 - b) Se apenas forem à festa da Margarida os seus vinte e sete colegas de turma, quantos confettis serão necessários?
 - c) Observa a variação existente entre o número de *popcakes* e a quantidade de ingredientes. O que podes concluir?

2. A razão entre a quantidade de ingredientes utilizados e o número de *popcakes* confeccionados pode ser encontrada dividindo as duas grandezas: $\frac{\text{quantidade do ingrediente}}{\text{número de popcakes}}$.

2.1. De acordo com os dados preenchidos na tabela anterior, determina a razão entre a massa de bolo, a quantidade de leite condensado e de chocolate, o número de confettis (A) e o número de *popcakes* (B) confeccionados.

a) Massa de bolo

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Massa de bolo (A)		50 g				
Razão $\frac{A}{B}$		$\frac{50}{1}$				

Observas alguma regularidade nesta tabela?

b) Leite condensado

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Leite condensado (A)						
Razão $\frac{A}{B}$						

Observas alguma regularidade nesta tabela?

c) Chocolate

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Chocolate (A)						
Razão $\frac{A}{B}$						

Completa as igualdades que se seguem, preenchendo os espaços em branco, de modo que se tornem proposições verdadeiras.

$$\frac{\text{quantidade de chocolate (g)}}{\text{número de popcakes}} = \frac{\quad}{1} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{15} = \frac{\quad}{20} = \frac{\quad}{27} = \frac{\quad}{\quad}$$

Qual é a razão entre a quantidade de chocolate utilizada e o número de *popcakes* confeccionados? Qual é o seu significado no contexto do problema apresentado?

d) Confettis

		Número de <i>popcakes</i> (B)				
		1	10	15	20	27
Confettis (A)						
Razão $\frac{A}{B}$						

Analisa a tabela anterior e, de acordo com as relações observadas, preenche as lacunas do texto que se segue de modo a obteres afirmações verdadeiras.

Para confeccionar dez *popcakes* necessitamos de _____ *confettis*. Se aumentarmos o número de *popcakes* para o dobro então o número de *confettis* _____ para o _____. Se para confeccionar quinze *popcakes* são necessários _____ *confettis*, então para confeccionar o triplo desse número de *popcakes* serão necessários _____ *confettis*. Em linguagem matemática podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$\text{número de confettis} = \text{___} \times \text{número de popcakes}$$

2.2. Que conclusões podes tirar da regularidade presente nas tabelas analisadas?

Sintetiza, preenchendo as igualdades que se seguem, as relações observadas nas diferentes tabelas.

$$\text{quantidade de massa de bolo} = \text{___} \times \text{número de popcakes}$$

$$\text{quantidade de leite condensado} = \text{___} \times \text{número de popcakes}$$

$$\text{quantidade de chocolate} = \text{___} \times \text{número de popcakes}$$

$$\text{número de confettis} = \text{___} \times \text{número de popcakes}$$

Tarefa 7 – Campo de férias

1. O Martim inscreveu-se no campo de férias *Aventura com Cultura*.

Estão programadas atividades para todos os dias da semana, tal como podes visualizar na tabela que se segue.

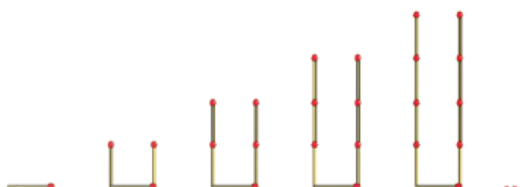


<i>Dia da semana</i>	<i>Manhã</i>	<i>Almoço</i>	<i>Tarde</i>	<i>Lanche</i>
2.ª feira	<i>Construções</i>	Parque Verde	Piscina	Parque Verde
3.ª feira	Hora do Conto Casa da Cultura	<i>Refeitório da Escola</i>	Atividades radicais no Botânico	Botânico
4.ª feira	Praia Olhos de Ferverça	Praia Olhos de Ferverça	Praia Olhos de Ferverça	<i>Geladaria</i>
5.ª feira	Teatrão	Refeitório da Escola	<i>Peddy Papper</i>	Choupal
6.ª feira	Atividades Desportivas	Choupal	<i>Sessão de Cinema</i>	Jardim da Sereia

Acompanha estas férias divertidas, realizando algumas das atividades propostas ao Martim.

1.1. Na segunda-feira de manhã será implementada a seguinte atividade – *Construções*:

Constrói, com os fósforos que estão dentro da tua caixa, figuras como as que podes visualizar na imagem seguinte. Poderás, dependendo do número de fósforos que possuis, construir outras figuras, para além da que se encontra na posição número 5.



Número de ordem da figura (n)	Número de fósforos gastos na construção da figura n	Número total de fósforos gastos nas primeiras n figuras
1	1	
2	3	
3	5	
4		
5		
6		
...
10		
...
30		
...
n		

1.2. Na terça-feira o almoço será servido no refeitório da Escola.

Normalmente as mesas estão dispostas de forma a poderem sentar-se seis pessoas.

Ao juntarem duas destas mesas podem sentar-se à sua volta dez pessoas.



Lê com atenção as questões, onde a regra de junção das mesas se mantém inalterável.

Desenvolve uma estratégia que te permita dar resposta a essas questões.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que te auxiliem a expor o teu raciocínio.

- Quantas pessoas se podem sentar à volta de 3 mesas? E de 4? E de 5?
- O Martim avisou o chefe do refeitório que estariam presentes no almoço 50 pessoas. Quantas mesas serão necessárias?
- O chefe do refeitório está muito preocupado, pois na cantina há apenas 15 mesas. Nessas condições, qual é o número máximo de pessoas que pode ir ao almoço?
- Se representarmos por n o número de pessoas presentes no almoço, escreve uma expressão que represente o número de:
 - Cadeiras \rightarrow _____
 - Mesas \rightarrow _____

1.3. Na quarta-feira todos os participantes poderão deliciar-se, ao lanche, com um maravilhoso gelado da geladaria da Dona Henriqueta. Na geladaria há dois tipos de recipientes, copo ou cone de bolacha.

- O Martim vai escolher a sua bola de gelado, entre os seus dois sabores preferidos: morango e chocolate. De quantas maneiras diferentes pode ele formar o seu gelado?

Desenvolve uma estratégia que te permita dar resposta a esta questão.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que te auxiliem a expor o teu raciocínio.

- E se o Martim acrescentasse aos seus dois sabores preferidos o de ananás? E se juntasse um quarto sabor, o de mirtilo?
Quantas possibilidades de escolha teria em cada uma dessas situações?

1.4. Na quinta-feira realizar-se-á o Peddy-Papper no Choupal de Coimbra. Os participantes agrupar-se-ão em 4 elementos e seguirão por determinado trilho, seguindo as indicações de um mapa que lhe será entregue no início da prova. As pistas encontrar-se-ão afixadas em árvores centenárias. Sempre que as encontrarem, os grupos deverão recolher a mensagem escondida e responder às respetivas questões. Ganhará quem tiver respondido corretamente a todas as questões e fizer a prova em menos tempo. Queres participar? Segue as pistas e responde às questões deixadas em cada mensagem.

Mensagem deixada na pista n.º 1:

“Cada elemento do vosso grupo terá de fazer 20 abdominais”.

Questão n.º 1.1: Quantos abdominais fará o vosso grupo?

Questão n.º 1.2: Considera n o número de grupo participantes.

Se todos os elementos de cada grupo fizerem os referidos abdominais, quantos abdominais se farão no total?

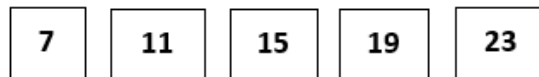
Mensagem deixada na pista n.º 2:

Questão n.º 2: De acordo com a disposição apresentada, indica que polígono se encontrará na posição 28.



Mensagem deixada na pista n.º 3:

Questão n.º 3: Considera a seguinte sequência de números:



Qual poderá ser a expressão algébrica que representa essa sequência de números, quando n representa a posição de cada número indicado?

- (A) $5n + 2$ (B) $4n + 3$ (C) $4n + 1$

Mensagem deixada na pista n.º 4: Analisa com atenção a sequência de figuras.

a) Completa a figura número 4, desenhando a imagem que deveria estar afixada na árvore.



Figura n.º 1



Figura n.º 2



Figura n.º 3



Figura n.º 4

b) O grupo do Martim vai continuar a prova, quantos círculos encontrará na figura número 13? E na figura número n ?

1.5. No último dia da semana todos os participantes foram ao cinema. Quando o Martim chegou ao local combinado já lá estavam quatro dos seus amigos.

a) Cada um dos cinco amigos cumprimentou-se com um aperto de mão.

Ninguém pode cumprimentar mais do que uma vez.

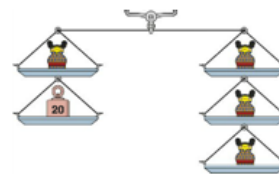
Quantos apertos de mão foram dados?

b) Explica como procederias para determinar o número de apertos de mão dados por um número qualquer de amigos.

Podes utilizar desenhos ou esquemas que te auxiliem a expor o teu raciocínio.

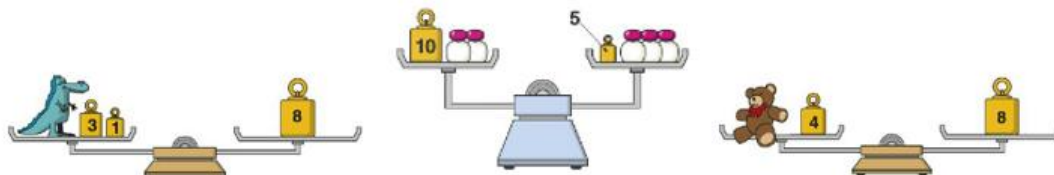
Tarefa 8 – Relação de Equilíbrio

1. Observa a figura ao lado, onde se representa uma balança de pratos (cuja massa é desprezável), quatro bonecas iguais e uma massa marcada com 20 gramas.



Representa por b a massa de cada boneca, expressa em gramas.

- Representa através de uma expressão matemática a massa dos objetos colocados nos pratos do lado esquerdo da balança.
 - Representa por uma expressão matemática a massa dos objetos colocados nos pratos do lado direito da balança.
 - O que acontece à balança se for retirada uma boneca de um dos pratos?
 - O que acontece à balança se for acrescentada uma massa marcada de 2 g a um prato da balança, em ambos os lados?
 - Qual é a massa de cada boneca?
2. Analisa as balanças que se seguem e, considerando que a massa dos pratos das balanças é desprezável, determina a massa dos objetos (bonecos – crocodilo e urso; frascos de igual massa) representados.



3. A Sofia tem x anos e o seu pai tem o quádruplo da sua idade.
- Indica uma expressão matemática que represente a idade atual do pai.
 - Indica uma expressão matemática que represente a idade da Sofia daqui a 5 anos.
 - Indica uma expressão matemática que represente a idade que o pai da Sofia tinha o ano passado.
 - Se a soma das idades da Sofia e do seu pai for cinquenta anos, que idade terá a Sofia? E o seu pai?

Glossário

Abstração – atividade de reorganização vertical de conhecimentos matemáticos, construídos previamente para darem lugar a uma nova construção (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001).

Ações epistémicas – ações externas desenvolvidas pelos alunos e que tornam o raciocínio mental mais simples, rápido e confiável, possibilitando o desenvolvimento de estratégias que lhes permitam encontrar determinada solução e atingir objetivos que os ajudem a cumprir a atividade (Kirsh & Maglio, 1994).

Aritmética generalizada – processo que consiste em conduzir os alunos a estabelecerem e traduzirem as relações existentes entre números, reconhecendo as variações que permitem generalizar processos (Blanton, 2008).

Artefacto – objeto ou material simbólico que pode ser utilizado com vista à produção de signos individuais (Bussi & Mariotti, 2008).

Ciclo didático – sequência de ensino que pode ser estruturada de modo a aplicar-se um ciclo diferenciado de atividades que visam o desenvolvimento de diferentes componentes de um processo semiótico complexo e compreendem atividades com artefactos (Bussi & Mariotti, 2008).

Compreensão leitora – compreensão que requer um esforço pela procura do significado que pressupõe a construção e o recurso a diferentes estratégias (Barlett, 1993). Este processo cognitivo de compreensão inclui a interpretação de palavras e o recurso a conhecimentos prévios.

Early algebra – proposta que propõe a introdução da álgebra desde os primeiros anos do ensino básico, estimulada transversalmente durante o ensino e a aprendizagem das diferentes temáticas programadas nos currículos. Resulta de investigações diversas (Bastable & Schifter, 2007; Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000), as quais valorizam o enriquecimento dos currículos através da implementação de atividades de observação de regularidades, relações e propriedades matemáticas, visando o desenvolvimento das competências algébricas dos alunos.

Instrumento – entidade mista constituída por artefactos e componentes esquemáticas (esquemas de utilização que surgem da utilização dos artefactos) que evolui através de um processo longo e complexo – génese instrumental (Rabardel, 1995).

Matematização vertical – processo de construção, descrito por Freudenthal (1973), que consiste na reorganização de construções matemáticas já adquiridas (Treffers & Goffree, 1985).

Mediação – processo desenvolvido pelo professor, entre aluno e a cultura, com o objetivo de conduzir os alunos ao entendimento da realidade social e à promoção do desenvolvimento individual (Vygotsky, 1987, Leontiev, 1978).

Padrão – conceito utilizado para se fazer referência a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detetam regularidades (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2005).

Pensamento algébrico – processo utilizado pelos alunos para generalizarem ideias matemáticas a partir da análise de conceitos particulares e do discurso argumentativo (Blaton & Kaput, 2005). A este pensamento estão associados os pensamentos analítico, funcional e relacional.

Sentido do número – compreensão pessoal e global do número e das suas operações, evidenciada através da habilidade para utilizar essa compreensão para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis que permitam lidar com os números e com as suas operações (Mcintosh, Reys & Reys, 1992).

Sentido do símbolo – capacidade para utilizar e usar de forma criativa os símbolos, nomeadamente identificar relações, mostrar a generalidade ou fazer demonstrações (Arcavi, 2005).

Signos – agem como um instrumento da atividade psicológica, interpretam representações da realidade, podendo-se referir a elementos, objetos, processos, entre outros.

Símbolos – signo que está associado a um objeto e que representa determinado significado por convenção, podendo resultar do desenvolvimento de outros signos (Peirce, 1958).