UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Condições de Solubilidade para a Equação de Riccati. Planificação da Unidade Didática: "Função Quadrática".

Ângela Isabel Oliveira Martins

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário
(2º ciclo de estudos)

Orientadora: Prof. Doutora Ana Catarina dos Santos Carapito
Orientador: Prof. Doutor Henrique José Freitas da Cruz

Covilhã, outubro de 2012

Dedicatória

Dedico este meu trabalho aos meus pais, pelo apoio incondicional e por terem sempre lutado para me proporcionarem o melhor do mundo.
À minha irmã, que sirva de incentivo para que nunca desisista dos seus sonhos.
À memória dos meus avós que sempre acreditaram em mim...

Agradecimentos

Finalizada uma etapa particularmente importante na minha vida, não poderia deixar de expressar o mais profundo agradecimento a todos os que me apoiaram nesta longa caminhada e contribuíram para a realização deste trabalho.

Em primeiro lugar, à Prof. Drª. Ana Catarina Carapito, por todo o conhecimento transmitido, disponibilidade e orientação prestada.

À Drª. Dulce Nascimento e ao Prof. Dr. Henrique Cruz, pelas sugestões de grande valor e conhecimentos que me transmitiram ao longo do estágio pedagógico.

Aos meus pais e à minha irmã, por todo o amor, carinho, compreensão e apoio incondicional.

A todos os meus amigos, por todo o apoio demonstrado e nos momentos mais difíceis incentivaram-me a continuar o caminho.

Resumo

Este trabalho encontra-se dividido em duas partes: Trabalho Científico e Estágio Pedagógico.
No Trabalho Científico, o estudo é dedicado ao problema de existência de solução da Equação Algébrica de Riccati (EAR). Numa primeira fase, apresentamos alguns critérios de solubilidade para este tipo de equação, com recurso ao conceito de *característica* de uma matriz quadrada. Numa segunda fase, os critérios apresentados recorrem ao conceito de *vetor próprio* e são estabelecidos consoante a invertibilidade ou não-invertibilidade da matriz Hamiltoniana associada à EAR.
No Estágio Pedagógico, apresentamos a planificação da unidade: *"Função Quadrática"*, enquadrada no programa de Matemática A do 10º ano. Para cada planificação de aula serão descritos os conteúdos programáticos, pré-requisitos, objetivos a atingir pelo aluno, materiais e recursos, sumário, estratégias a usar, com vista ao desenvolvimento de capacidades, competências e à aquisição e aplicação de conhecimentos. A planificação da unidade teve sempre por base, o número de aulas previstas na planificação global.

Palavras-chave

Equação Algébrica de Riccati; Equação Matricial Quadrática; Teoria de Controlo; Planificação; Função Quadrática.

Abstract

This dissertation is divided in two parts: Scientific Work and Pedagogical Training. In the Scientific Work, the study focuses on the problem of the existence of a solution to the Algebraic Riccati Equation. Firstly, we reveal some solubility criteria for this type of equation using the concept of rank of a square matrix and, secondly, the referred criteria fall back on the eigenvector concept and are established accordingly to the invertibility or non-invertibility of the Hamiltonian matrix associated to the Algebraic Riccati Equation.
In the Pedagogical Training, we present the planning of the unit "Quadratic Function"as part of the 10th grade A-level Maths syllabus. For each class planning, we will depict the syllabus, the prerequisites, the goals to be achieved by the student, materials and resources, summary and strategies to adopt in order to reach a development of skills and competences, as well as an acquisition and application of knowledge. The planning of the unit was always based on the number of expected classes in the global planning.

Keywords

Algebraic Riccati Equation; Quadratic Equation Matrix; Control Theory; Planning; Quadratic Functions.

Índice

Lista de Acrónimos

EAR	Equação Algébrica de Riccati
GAVE	Gabinete de Avaliação Educacional
$\mathbb{R}^{n\times n}$	Conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais

Parte I - Trabalho Científico

Introdução

Os modelos matemáticos surgem em diversas áreas, na Engenharia, Física, Economia e permitem uma melhor compreensão dos fenómenos em estudo. Através destes modelos, podemos representar de forma simplificada um determinado sistema real, permitindo assim analisar o seu comportamento, que por vezes é bastante complexo de observar na realidade.

Nas últimas décadas, diversas técnicas e métodos, enquadrados na Teoria de Controlo têm sido desenvolvidos para dar resposta a problemas do quotidiano e têm contribuído para o progresso tecnológico. O controlo automático tem um papel de extrema importância nos processos industriais, equipamentos tecnológicos, sistemas de pilotagem de aviões, regulador de temperatura de um determinado eletrodoméstico, entre outros. A Teoria de Controlo tem como objetivo principal encontrar soluções ótimas para um determinado sistema segundo critérios de otimização, garantindo assim que o mesmo permaneça em funcionamento, ou seja estável.

Em 1960, Kalman deu um contributo bastante significativo nessa área, procurando determinar quando é que um sistema de controlo linear era considerado ótimo [6]. Kalman estudou o problema do regulador linear quadrático (LQR - Linear Quadratic Regulator), com o objetivo de alcançar um determinado desempenho com o menor gasto de energia possível. Para resolver este tipo de problemas, surgiram as Equações Algébricas de Riccati. Estas equações surgiram nos anos 80, e foram introduzidas pelo matemático Italiano Jacopo Francesco Riccati.

Com o avanço tecnológico, cada vez mais a Equação Algébrica de Riccati tem um papel de extrema importância na Teoria de controlo, na medida em que o controlo de um sistema dinâmico é baseado na solução deste tipo de equações. A solução das mesmas desempenha um papel fundamental na Teoria do Controlo Moderno e no processamento de sinais [10], pois consiste numa ferramenta importante para problemas de dupla condição de contorno como, por exemplo, o problema do Regulador Linear Quadrático (LQR -Linear Quadratic Regulator), o controle robusto, o filtro de Kalman, estimação de estado e de parâmetros de sistemas, modelagem de séries temporais multivariáveis e em muitos outros ramos da matemática aplicada [10], [16].

O trabalho científico tem como objetivo principal analisar o problema de existência de solução da Equação Algébrica de Riccati representada na forma geral:

$$XAX + XB + CX + D = 0,$$

onde A, B, C e D são matrizes quadradas complexas e X é a matriz solução. Um caso particular deste tipo de equação é o caso simétrico, onde a equação tem a seguinte representação:

$$XAX + XB + A^*X + D = 0,$$

onde A e D são matrizes hermitianas e X a matriz solução. O problema de existência de solução para este tipo de equação é largamente estudada na literatura [4], [5].

Este trabalho encontra-se dividido em dois capítulos. No primeiro capítulo apresentamos uma breve revisão de alguns conceitos da Álgebra Matricial, valores e vetores próprios. No segundo capítulo estabelecemos alguns critérios de existência de solução de uma Equação Algébrica de Riccati. Por fim, apresentamos as conclusões do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Preliminares

No presente capítulo, apresentamos uma breve revisão de alguns conceitos da Álgebra Linear Matricial usados neste trabalho.

Designa-se por matriz de números reais um quadro do tipo:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Podemos representar a matriz anterior de uma forma mais simplificada, ou seja, por $A_{m\times n} = (a_{ij})$ onde i é o índice da linha $(i = 1, 2, \dots, m)$ e j é o índice da coluna $(j = 1, 2, \dots, n)$. A matriz $A_{m\times n}$ é uma matriz do tipo $m \times n$ (lê-se m por n) se tiver m linhas e n colunas. Cada entrada da matriz $A_{m\times n}$ é designada por coeficiente ou elemento da matriz.

De um modo geral, as áreas que recorrem à Álgebra Linear, nomeadamente à Teoria de Controlo, utiliza conceitos relacionados com a definição e propriedades das matrizes particionadas por blocos.

Definição 1.1.1. *(Submatriz de uma matriz particionada por blocos)*
Seja A uma matriz $\in \mathbb{R}^{m\times n}$. Uma submatriz de A é uma matriz obtida de A, excluindo-se algumas linhas ou colunas.
Uma partição de A é uma divisão de A em submatrizes $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j},\ \ para\ \ i = 1, 2, \dots, p\ \ e\ \ j = 1, 2, \dots, q$, organizadas em linhas e colunas, com $m_1+m_2+\dots+m_p = m$ e $n_1+n_2+\dots+n_q = n$. Neste caso, a matriz A diz-se particionada por blocos e representa-se por $A = [A_{ij}]$.

Exemplo 1.1.2. *A matriz A é uma matriz particionada por blocos:*

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Definição 1.1.3. *(Matriz diagonal particionada por blocos)*
Seja $A = [A_{ij}]$ uma matriz quadrada particionada por blocos, tal que, os blocos não pertencentes à diagonal principal são matrizes nulas, isto é, $A_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Então A diz-se uma

matriz diagonal por blocos e define-se por:

$$A = diag(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{rr}).$$

Além disso, A é invertível se, e só se A_{ii} é invertível e, neste caso, A^{-1} é uma matriz diagonal por blocos definida por:

$$A^{-1} = diag(A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}, \ldots, A_{rr}^{-1}).$$

Exemplo 1.1.4. *A matriz*

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

é uma matriz diagonal por blocos.

1.2 Operações com matrizes particionadas por blocos

Nesta secção vamos apresentar como se efetuam a adição e o produto de matrizes particionadas por blocos. A vantagem da utilização deste tipo de matriz prende-se com o facto de podermos realizar cálculos em termos dos blocos das matrizes, ou seja, como se cada bloco fosse um elemento da matriz. Para realizar a operação adição ou subtração de duas matrizes particionadas por blocos, é necessário que ambos os blocos tenham o mesmo tamanho e ter em conta as regras da adição ou subtração de matrizes. Nestas condições, somam-se ou subtraem-se os elementos homólogos dos respetivos blocos.

Exemplo 1.2.1.

$$A + B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$A - B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ \hline -2 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Definição 1.2.2. *(Produto de matrizes particionadas por blocos)*
Só é possivel efetuar o produto ou a multiplicação de duas matrizes particionadas por blocos se satisfazerem as seguintes condições:

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *e* $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$*, ou seja o número de colunas da matriz que multiplica à esquerda tem que ser igual ao número de linhas da matriz que multiplica á direita.*
- *O número de colunas do bloco A deverá ser igual ao número de linhas do bloco B;*
- *O número de linhas de cada bloco tem de ser igual ao número de colunas dos blocos a multiplicar.*

Nota: Caso as duas matrizes satisfaçam as condições anteriores, a multiplicação por blocos realiza-se de forma semelhante à multiplicação usual de matrizes.

Exemplo 1.2.3. *Se*

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \textit{e} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} -2 & -1 \\ -3 & 4 \\ \hline -5 & 0 \\ 2 & -1 \end{array}\right]$$

então

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -5 & 0 \\ 2 & -1 \\ \hline -2 & -1 \\ -3 & 4 \end{array}\right].$$

1.3 Inversa e determinante de algumas matrizes particionadas por blocos

Definição 1.3.1. *(Inversa de algumas matrizes particionadas por blocos)*
Sejam A e C matrizes quadradas de ordem n e M a matriz particionada por blocos definida por:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right].$$

A matriz M é invertível se e só se, A e C são matrizes invertíveis. Logo,

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ \hline 0 & C^{-1} \end{array}\right].$$

Seja M a matriz particionada por blocos definida por

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right],$$

então M é uma matriz invertível se e só se, A e C são matrizes invertíveis. Logo,

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{array}\right].$$

Exemplo 1.3.2. *Seja*

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

então

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

Definição 1.3.3. *(Determinante de algumas matrizes particionadas por blocos)*
Sejam A e C matrizes quadradas de ordem n, e seja M a matriz particionada por blocos definida por:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right],$$

então,

$$det(M) = det(A)det(D).$$

Seja agora a matriz quadrada M, de ordem n definida por:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & D \end{array}\right].$$

Assim

$$det(M) = det(A)det(D).$$

Exemplo 1.3.4. *Seja*

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

então

$$det(M) = det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \times 1 = 1.$$

1.4 Valores e vetores próprios

Definição 1.4.1. *Seja $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Seja λ um número real, então diz-se que λ é um valor próprio da matriz A se existir uma matriz coluna não nula $X_{n\times 1}$ tal que*

$$AX = \lambda X. \tag{1.4.1}$$

À matriz coluna X chamamos de vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio λ.

Exemplo 1.4.2. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo podemos concluir que $X = [1, 1]^T$ é o vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$.

Lema 1.4.3. *A cada vetor próprio está associado um único valor próprio, ou seja, a valores próprios distintos estão associados vetores próprios distintos.*

Determinação dos valores próprios de uma matriz.

Para determinar um $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual existe um $X \neq 0_{n\times 1}$ tal que $AX = \lambda X$, tem-se que:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX - \lambda X = 0_{n\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX - \lambda I_n X = 0_{n\times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AX - \lambda I_n)X = 0_{n\times 1}$$

Os valores próprios da matriz A são soluções da equação

$$det(A - \lambda I_n) = 0_{n\times 1},$$

ou seja, as raízes do polinómio característico de A, $det(A - \lambda I_n)$.

Quando um valor próprio tem multiplicidade k como raiz do polinómio característico, diz-se que tem multiplicidade algébrica k.

Exemplo 1.4.4. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. *A matriz característica de* A *é*

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

pelo que, o polinómio característico de A *é*

$$det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3,$$

cujas raízes são -1 *e* 3. *Logo os valores próprios de* A *são* $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = 3$, *ambos com multiplicidade algébrica* 1.

Determinação dos vetores próprios de uma matriz.

Para determinarnos os vetores próprios associados a um determinado valor próprio λ, basta resolver o sistema homogéneo indeterminado $(A - \lambda I_n)X = 0$. As soluções não nulas deste sistema são os vetores próprios da matriz A associados a λ.

Exemplo 1.4.5. *Voltando à matriz do exemplo anterior, a matriz* A *tem os valores próprios* -1 *e* 3. *Vamos agora calcular os vetores próprios associados a cada valor próprio.*

Caso $\lambda = -1$:

$$(A - (-1)I_2) = \begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e tem como solução, $X = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ y \in \mathbb{R}$.

Logo os vetores próprios associados ao valor próprio -1 são da forma $y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; y \in \mathbb{R}.$

Caso $\lambda = 3$*:*

$$(A - (3)I_2) = \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

e tem como solução $X = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; y \in \mathbb{R}.$

Logo os vetores próprios associados ao valor próprio 3 *são da forma* $y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; y \in \mathbb{R}.$

Valores próprios e invertibilidade

Se uma matriz A admite o valor próprio 0, então 0 é a raiz do polinómio característico de A, isto é,

$$det(A - 0I_n) = 0$$

logo a matriz tem determinante nulo, pelo que a matriz A é não-invertível.

Por outro lado se a matriz A é não-invertível, o sistema $AX = 0_{n\times 1}$ tem soluções não nulas, ou seja, existe um

$$X \neq 0 \;\; \text{tal que} \;\; AX = 0_{n\times 1}$$

e, portanto, 0 é o valor próprio de A.

Isto prova o seguinte resultado:

Teorema 1.4.6. *Uma matriz A é não-invertível se, e só se tem 0 como valor próprio.*

Capítulo 2

Solubilidade da Equação Algébrica de Riccati

Neste capítulo analisamos o problema de existência de uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que satisfaz a equação algébrica de Riccati (EAR) do tipo

$$XAX + XB + CX + D = 0_n, \tag{2.0.1}$$

onde A, B, C, D $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ e 0_n é a matriz nula de ordem n. Caso exista, a equação diz-se *solúvel* e X diz-se a *matriz solução* da equação. Essa análise é efetuada segundo duas abordagens. Enquanto na primeira, os critérios estabelecidos baseiam-se na *característica* de uma matriz, na segunda baseiam-se nos *vetores próprios*.

2.1 Abordagem baseada na *característica*

Começemos por estabelecer em que condições a equação (2.0.1) pode ser representada na forma:

$$(XF_1 + F_2)(G_1X + G_2) = 0_n, \tag{2.1.1}$$

onde $F_i, G_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, 2$.

Lema 2.1.1. *A EAR (2.0.1) pode ser representada como*

$$(XF_1 + F_2)(G_1X + G_2) = 0_n,$$

se e só se existirem matrizes $Y_i, Z_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, 2$, *tais que:*

$$Y_1Z_1 = A, \;\; Y_1Z_2 = B, \;\; Y_2Z_1 = C \quad \textit{e} \quad Y_2Z_2 = D. \tag{2.1.2}$$

Demonstração: Consideremos a EAR

$$XAX + XB + CX + D = 0_n. \tag{2.1.3}$$

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que a EAR (2.1.3) pode ser representada como

$$(XF_1 + F_2)(G_1X + G_2) = 0_n,$$

isto é,

$$XF_1G_1X + XF_1G_2 + F_2G_1X + F_2G_2 = 0_n. \tag{2.1.4}$$

Então, de (2.1.3) e (2.1.4), obtemos

$$F_1G_1 = A, \;\; F_1G_2 = B, \;\; F_2G_1 = C \quad \text{e} \quad F_2G_2 = D. \tag{2.1.5}$$

Tomemos
$$Y_1 = F_1, \quad Z_1 = G_1, \quad Z_2 = G_2 \quad \text{e} \quad Y_2 = F_2.$$

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que existem matrizes Y_1, Y_2, Z_1 e Z_2 de ordem n tais que:

$$Y_1Z_1 = A, \quad Y_1Z_2 = B, \quad Y_2Z_1 = C \quad \text{e} \quad Y_2Z_2 = D.$$

Logo a equação (2.1.3) pode ser reescrita como

$$XY_1Z_1X + XY_1Z_2 + Y_2Z_1X + Y_2Z_2 = 0_n,$$

isto é,

$$(XY_1 + Y_2)(Z_1X + Z_2) = 0_n. \tag{2.1.6}$$

■

Do lema anterior obtém-se facilmente o seguinte resultado.

Teorema 2.1.2. *A EAR*
$$R(X) = XAX + XB + CX + D = 0_n$$

é solúvel se forem satisfeitas as seguintes condições:

1. *Existem F_1, F_2, G_1, $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $R(X) = (XF_1 + F_2)(G_1X + G_2)$;*

2. *Pelo menos uma das equações $XF_1 + F_2 = 0_n$ ou $G_1X + G_2 = 0_n$ é solúvel.*

Desta forma, a análise da solubilidade da EAR (2.0.1) pode passar pela análise da representatividade desta equação na forma (2.1.1), isto é, de acordo com o Lema 2.1.1, da solubilidade do sistema (2.1.2). Trata-se igualmente de um problema dificil de tratar, no entanto impondo determinadas condições adicionais, é possível obter soluções para o problema inicial. Procuraremos assim, analisar o problema de existência de soluções Y_i e Z_i, $i = 1, 2$, do sistema (2.1.2) admitindo que pelo menos uma das soluções Y_1 ou Z_1 é invertível. Caso $Y_1 = F_1$ seja invertível temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.3. *Considere-se a EAR*

$$XAX + XB + CX + D = 0_n$$

tal que
$$\text{car}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{car}\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}.$$

Então, existem matrizes F_1, F_2, G_1 e $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com F_1 invertível, tal que $-F_2F_1^{-1}$ é solução da equação dada e

$$F_1G_1 = A, \quad F_1G_2 = B, \quad F_2G_1 = C \quad \text{e} \quad F_2G_2 = D.$$

Demonstração: Consideremos a EAR

$$R(X) = XAX + XB + CX + D = 0_n. \tag{2.1.7}$$

Suponhamos que

$$\text{car}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{car}\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}.$$

Então, as equações

$$YA = C \quad \text{e} \quad YB = D \tag{2.1.8}$$

tem uma solução comum, digamos F, [11]. Logo,

$$FA = C \quad \text{e} \quad FB = D, \tag{2.1.9}$$

pelo que, (2.1.7) é equivalente a

$$XAX + XB + FAX + FB = 0_n.$$

Mas, o primeiro membro da equação anterior pode ser escrito como

$$XAX + XB + FAX + FB = (X + F)AX + (X + F)B$$

$$= (X + F)(AX + B).$$

Logo, a EAR (2.1.7) pode ser escrita como:

$$(X + F)(AX + B) = 0_n, \tag{2.1.10}$$

onde F é a solução das equações (2.1.8), ou seja, da equação

$$Y\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}.$$

Se F_1 é invertível, tem-se que (2.1.10) é equivalente a

$$(X + F)F_1F_1^{-1}(AX + B) = 0_n,$$

isto é,

$$(XF_1 + FF_1)(F_1^{-1}AX + F_1^{-1}B) = 0_n.$$

Tomando

$$FF_1 = F_2, \;\; F_1^{-1}A = G_1 \quad \text{e} \quad F_1^{-1}B = G_2, \tag{2.1.11}$$

e tendo em conta (2.1.10), concluímos que $-F$, isto é, $-F_2F_1^{-1}$, é solução da EAR (2.1.7).

Mais, de (2.1.11) e (2.1.8) tem-se

$$F_1G_1 = A, \;\; F_1G_2 = B, \;\; F_2G_1 = C \quad \text{e} \quad F_2G_2 = D.$$

■

Exemplo 2.1.4. *A equação de Riccati*

$$R(X) = XAX + XB + CX + D = 0_2$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é solúvel, sendo

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

uma sua solução.

De facto,

$$A = F_1G_1, \ B = F_1G_2, \ C = F_2G_1 \quad \text{e} \quad D = F_2G_2,$$

com

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\text{car} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{car} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = 2,$$

então pelo Teorema 2.1.3 temos que

$$-F_2F_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

é solução da equação dada.

Observação 2.1.5. *No exemplo 2.1.4, a matriz A é invertível e*

$$\text{car} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

é igual à ordem de A. Donde, tendo em conta o Corolário 2.1.7,

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -CA^{-1}$$

é de facto solução da EAR dada, mas não é única. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = -A^{-1}B$$

é outra solução.

De forma análoga à demonstração do Teorema 2.1.3, mas para o caso de G_1 ser invertível, se estabelece o seguinte resultado.

Teorema 2.1.6. *Considere-se a EAR*

$$XAX + XB + CX + D = 0_n \tag{2.1.12}$$

tal que

$$\text{car}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{car}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}.$$

Então, existem matrizes F_1, F_2, G_1, $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com G_1 invertível, tal que $-G_1^{-1}G_2$ é solução da equação dada e

$$F_1G_1 = A, \quad F_1G_2 = B, \quad F_2G_1 = C \quad \text{e} \quad F_2G_2 = D.$$

Corolário 2.1.7. *Suponhamos que $detA \neq 0$. Se*

$$\text{car}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = n \tag{2.1.13}$$

então, a EAR

$$XAX + XB + CX + D = 0_n,$$

pode ser representada na seguinte forma:

$$R(X) = (X + F)A(X + G) = O_n,$$

onde $F = CA^{-1}$ e $G = A^{-1}B$ e, portanto, é solúvel.

Demonstração: Consideremos a EAR

$$R(X) = XAX + XB + CX + D = 0_n. \tag{2.1.14}$$

Suponhamos que

$$\text{car}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = n.$$

Então as equações

$$YA = C \quad \text{e} \quad YB = D$$

tem uma solução comum, digamos F, [11], e o mesmo sucede com as equações

$$AZ = B \quad \text{e} \quad CZ = D.$$

Seja G a solução comum para as últimas duas equações anteriores. Então,

$$AG = B \quad \text{e} \quad CG = D. \tag{2.1.15}$$

Como $detA \neq 0$, então atendendo à prova do Teorema 2.1.3, mais concretamente a (2.1.10), isto é,

$$R(X) = (X + F)(AX + B),$$

e a que

$$R(X) = (XA + C)(X + G),$$

já que a prova do Teorema 2.1.6 é similar à do Teorema 2.1.3, tem-se

$$\begin{aligned} R(X) &= (X+F)(AX+B) \\ &= (X+F)A(X+A^{-1}B) \\ &= (X+F)A(X+G), \quad \text{por} \quad (2.1.15). \end{aligned}$$

Logo

$$R(X) = (X+F)A(X+G) = 0_n,$$

com $G = A^{-1}B$. ■

2.2 Abordagem baseada nos *vetores próprios*

Nesta secção, o problema de solubilidade da EAR

$$XAX + XB + CX + D = 0_n, \tag{2.2.1}$$

é analisado com base nos vetores próprios das matrizes obtidas a partir dos coeficientes A, B, C, D e $\mathbb{R}^{n\times n}$.
Notemos, em primeiro lugar, que (2.2.1) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} -X & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & A \\ -D & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ X \end{bmatrix} = 0_{2n},$$

o que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ -X & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & A \\ -D & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ X & 0_n \end{bmatrix} = 0_{2n}. \tag{2.2.2}$$

Mas,

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ -X & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ X & 0_n \end{bmatrix},$$

pelo que, tomando

$$P := \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ X & 0_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H := \begin{bmatrix} B & A \\ -D & -C \end{bmatrix},$$

temos que (2.2.2) é equivalente à seguinte equação:

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n}. \tag{2.2.3}$$

Assim, o problema de existência de uma matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que satisfaz (2.2.1) pode ser reformulado como se segue.

Problema: Estabelecer condições de existência de uma matriz P tal que

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n},$$

com

$$P := \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ X & 0_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H := \begin{bmatrix} B & A \\ -D & -C \end{bmatrix}.$$

A matriz H é designada por matriz Hamiltoniana associada à equação (2.2.1).

No que se segue distinguimos dois casos: $\det H = 0$ e $\det H \neq 0$.

2.2.1 Caso I: matriz Hamiltoniana invertível

Nesta secção formulamos alguns teoremas que estabelecem condições necessárias e suficientes de solvabilidade para a equação (2.2.1) quando a matriz Hamiltoniana associada é invertível.

Teorema 2.2.1. *Seja $\det H \neq 0$. A EAR (2.2.1) é solúvel se, e só se, existirem duas soluções Y_1 e Y_2 da equação matricial quadrática*

$$Y^2 - HY = 0_{2n} \tag{2.2.4}$$

tais que:

(1) $Y_1 e_j = 0$ para todo o $j > n$;

(2) $e_j^T Y_2 = e_j^T H$ para todo o $j \leqslant n$;

(3) $HY_2 = Y_1 H$,

sendo e_j, a j-ésima coluna da matriz identidade de ordem $2n$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que a EAR (2.2.1) é solúvel. Então, atendendo a que (2.2.1) é equivalente a (2.2.3), concluímos que (2.2.3) também é solúvel, isto é, existe uma matriz P tal que

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n}, \tag{2.2.5}$$

onde

$$P := \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ X & 0_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H := \begin{bmatrix} B & A \\ -D & -C \end{bmatrix}.$$

Sendo e_j, a j-ésima coluna da matriz identidade de ordem $2n$, assim, facilmente se conclui que

$$Pe_j = 0_{2n\times 1}, \text{ para qualquer } j > n \tag{2.2.6}$$

e

$$e_j^T P = e_j^T, \text{ para qualquer } j \leq n. \tag{2.2.7}$$

Mas, se P é solução da equação (2.2.5) então, P é solução da equação

$$H(I_{2n} - P)HP = 0_{2n},$$

isto é, P é solução da equação

$$H(HP) - (HP)^2 = 0_{2n},$$

ou da equação

$$(HP)^2 - H(HP) = 0_{2n}.$$

Seja $Y_1 := HP$. Então, Y_1 é solução da equação $Y^2 - HY = 0_{2n}$ e, atendendo a (2.2.6), tem-se

$$Y_1 e_j = 0, \text{ para qualquer } j > n,$$

isto é, Y_1 satisfaz a Condição (1).

Por outro lado a equação (2.2.5) é também equivalente a

$$(I_{2n} - P)HPH = 0_{2n},$$

isto é,

$$(H - PH)PH = 0_{2n},$$

ou seja,

$$(PH)^2 - H(PH) = 0_{2n}.$$

Seja $Y_2 = PH$. Então Y_2 é solução da equação $Y^2 - HY = 0_{2n}$ e, atendendo a (2.2.7), tem-se

$$e_j^T Y_2 = e_j^T H, \text{para todo o } j \leqslant n \ ,$$

isto é, Y_2 satisfaz a Condição (2).

Como

$$Y_1 = HP,$$

multiplicando à direita por H, obtemos

$$Y_1 H = HPH,$$

pelo que, como $Y_2 = PH$, tem-se

$$Y_1 H = HY_2,$$

isto é, $HY_2 = Y_1 H$, ou seja, a Condição (3) também se verifica.

($\Leftarrow$) Suponhamos que Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação

$$Y^2 - HY = 0_{2n} \tag{2.2.8}$$

para as quais as Condições (1)-(3) são válidas.

Seja $P = H^{-1}Y_1 = Y_2 H^{-1}$. Então,

$$Y_1 = HP \ \text{ e } \ Y_2 = PH. \tag{2.2.9}$$

Logo, pelas Condições (1) e (2), obtemos que:

$$HPe_j = 0_{2n \times 1}, \text{ para qualquer } j > n$$

e

$$e_j^T PH = e_j^T H, \text{ para qualquer } j \leq n.$$

Donde,

$$Pe_j = 0_{2n\times 1}, \text{ para qualquer } j > n$$

e

$$e_j^T P = e_j^T, \text{ para qualquer } j \leq n.$$

Logo, podemos afirmar que P tem a estrutura pretendida.

Como Y_1 é uma solução de (2.2.8) e $Y_1 = HP$ (por 2.2.9) temos que

$$(HP)^2 - H(HP) = 0_{2n}$$

isto é,

$$(HP - H)HP = 0_{2n}.$$

Multiplicando à esquerda por H^{-1}, tem-se

$$(P - I_{2n})HP = 0_{2n}$$

ou seja

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n}.$$

Logo P é solução da equação (2.2.5). ■

Teorema 2.2.2. *Seja* $\det H \neq 0$. *A EAR (2.2.1) é solúvel, se e só se, existir uma solução* Y_1 *da equação*

$$Y^2 - HY = 0_{2n}$$

tais que:

(1) $Y_1 e_j = 0_{2n\times 1}$ *para todo o* $j > n$*;*

(2) $e_j^T H^{-1} Y_1 = e_j^T$ *para todo o* $j \leqslant n$*,*

sendo e_j*, a j-ésima coluna da matriz identidade de ordem* $2n$*.*

Demonstração: Seja

$$Y_2 := H^{-1} Y_1 H. \tag{2.2.10}$$

Então, facilmente se conclui que, Y_2 é solução da equação $Y^2 - HY = 0_{2n}$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que a EAR (2.2.1) é solúvel. Então, pelo Teorema 2.2.1, existem duas soluções Y_1 e Y_2 da equação matricial quadrática

$$Y^2 - HY = 0_{2n}$$

tais que as Condições (1)-(3) do teorema mencionado são satisfeitas.

Se a Condição (1) anterior se verifica então, de (2.2.10), resulta

$$HY_2 H^{-1} e_j = 0_{2n\times 1}.$$

Logo, multiplicando à esquerda por H^{-1} tem-se:

$$Y_2 H^{-1} e_j = 0_{2n\times 1},$$

o que, atendendo a (2.2.10), é equivalente a

$$H^{-1} Y_1 e_j = 0_{2n\times 1},$$

isto é,

$$Y_1 e_j = 0_{2n\times 1}.$$

Logo a Condição (1) deste teorema é verificada.

Se a Condição (2) do teorema 2.2.1 é satisfeita então, de (2.2.10), resulta:

$$e_j^T H^{-1} Y_1 H = e_j^T H$$

o que, multiplicando por H^{-1} à direita, se obtém a Condição (2) deste teorema.

($\Leftarrow$) Suponhamos que existe uma solução Y_1 da equação

$$Y^2 - HY = 0_{2n} \tag{2.2.11}$$

tais que as Condições (1) e (2) são satisfeitas.

Seja $Y_2 = H^{-1} Y_1 H$. Então, Y_2 também é solução da equação (2.2.11). De facto, tem-se

$$\begin{aligned}(H^{-1}Y_1H)^2 - H(H^{-1}Y_1H) &= (H^{-1}Y_1H - H)H^{-1}Y_1H \\ &= (H^{-1}Y_1 - I_{2n})HH^{-1}Y_1H \\ &= (H^{-1}Y_1 - I_{2n})Y_1H \\ &= (H^{-1}Y_1 - H^{-1}H)Y_1H \\ &= H^{-1}(Y_1 - H)Y_1H.\end{aligned}$$

Mas $H^2 - HY_1 = 0_{2n}$, isto é, $H(H - Y_1) = 0_{2n}$. Logo,

$$H^{-1}(Y_1 - H)Y_1 H = 0_{2n}.$$

Se a Condição (2) é satisfeita, isto é, se $e_j^T H^{-1} Y_1 = e_j^T$ então, como $Y_2 = H^{-1} Y_1 H$,

$$e_j^T Y_2 = e_j^T H.$$

Mais, novamente atendendo ao facto de $Y_2 = H^{-1} Y_1 H$, tem-se

$$HY_2 = Y_1 H.$$

■

Finalizamos esta secção, com o seguinte exemplo numérico.

Exemplo 2.2.3. *A equação de Riccati*

$$R(X) = XAX + XB + CX + D = 0_2$$

com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é solúvel.

Notemos em primeiro lugar que a matriz Hamiltoniana associada à equação dada é definida por:

$$H = \begin{bmatrix} B & A \\ -D & -C \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Ora,

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma solução da equação

$$Y^2 - HY = 0_4$$

que satisfaz as Condições (1) e (2) do Teorema (2.2.2), isto é,

$$Y_1 e_j = 0_{2n\times 1} \ \text{ para todo o } \ j \in \{3,4\} \ \text{ e } \ e_j^T H^{-1} Y_1 = e_j^T \ \text{ para todo o } \ j \in \{1,2\}.$$

Logo, tendo em conta os argumentos usados na primeira parte da prova do teorema mencionado, concluímos que $P = H^{-1}Y_1$, isto é,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma solução da EAR dada.

2.2.2 Caso II: matriz Hamiltoniana não-invertível

Seja V_0 um espaço vetorial constituído por todos os vetores próprios e por todos os vetores associados ao valor próprio nulo da matriz H. Seja $l := dim\ V_0 < n$.
Como foi visto no início deste capítulo, o problema de solubilidade da EAR

$$XAX + XB + CX + D = 0_n$$

pode reduzir-se ao problema de solubilidade da equação

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n}, \tag{2.2.12}$$

onde

$$H := \begin{bmatrix} B & A \\ -D & -C \end{bmatrix}$$

é uma matriz não-invertível.

Começemos por realçar que, segundo [9], é possível determinar uma matriz Q definida por

$$Q := \begin{bmatrix} Q_{11} & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad Q_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{2.2.13}$$

tal que

$$QHQ^{-1} = RM = MR, \tag{2.2.14}$$

onde

$$R := \begin{bmatrix} N_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times n} \\ 0_{(n-l)\times l} & I_{n-l} & 0_{(n-l)\times n} \\ 0_{n\times l} & 0_{n\times(n-l)} & I_n \end{bmatrix}, \tag{2.2.15}$$

sendo N_l uma matriz quadrada nilpotente de ordem l, e M é uma matriz invertível definida por

$$M := \begin{bmatrix} I_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times n} \\ 0_{(n-l)\times l} & M_{22} & M_{23} \\ 0_{n\times l} & -M_{32} & -M_{33} \end{bmatrix} \tag{2.2.16}$$

caso M tenha a mesma estrutura em blocos da matriz R.

Mais, $Rv = Q^{-1}HQv$, para qualquer vetor $v \in V_0$ e $Rw = w$, para qualquer vetor $w \in V_0^{\perp}$ [1]

Lema 2.2.4. *A matriz*

$$\overline{P} := \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ XQ_{11}^{-1} & 0_n \end{bmatrix}$$

é uma solução da equação

$$(I_{2n} - \overline{P})QHQ^{-1}\overline{P} = 0_{2n}. \tag{2.2.17}$$

Demonstração: Consideremos a equação matricial

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n}$$

onde P é a matriz solução dada por

$$P := \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ X & 0_n \end{bmatrix}.$$

Então,

$$Q[(I_{2n} - P)HP]Q^{-1} = 0_{2n},$$

[1] $V_0^{\perp}$ é o conjunto de todos os vetores ortogonais a V_0. Este conjunto é designado por *Complemento Ortogonal* de V_0.

isto é

$$(Q - QP)HPQ^{-1} = 0_{2n},$$

o que é equivalente a

$$(Q - QP)Q^{-1}QHQ^{-1}QPQ^{-1} = 0_{2n}. \tag{2.2.18}$$

Seja

$$\overline{P} := QPQ^{-1}.$$

Então a equação (2.2.18) é equivalente a

$$(I_{2n} - \overline{P})QHQ^{-1}\overline{P} = 0_{2n},$$

tal que

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ X & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1} & 0_n \\ 0_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ XQ_{11}^{-1} & 0_n \end{bmatrix}.$$

■

O resultado que se segue, estabelece um critério para reduzir o problema da existência de solução da equação

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n}, \tag{2.2.19}$$

quando a matriz Hamiltoniana H é não-invertível, a um problema do tipo considerado na secção (2.2.1) em que a matriz Hamiltoniana associada é invertível. Antes, consideremos a matriz

$$P := \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ X & 0_n \end{bmatrix},$$

solução da equação (2.2.19) particionada da seguinte forma:

$$P := \begin{bmatrix} I_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times(n-l)} \\ 0_{(n-l)\times l} & I_{n-l} & 0_{(n-l)\times(n-l)} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & 0_{n\times(n-l)} \end{bmatrix},$$

donde, tendo em conta o Lema (2.2.4), a matriz $\overline{P}$ tem a mesma estrutura, isto é,

$$\overline{P} := \begin{bmatrix} I_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times(n-l)} \\ 0_{(n-l)\times l} & I_{n-l} & 0_{(n-l)\times(n-l)} \\ \overline{\Pi}_{31} & \overline{\Pi}_{32} & 0_{n\times(n-l)} \end{bmatrix}. \tag{2.2.20}$$

Teorema 2.2.5. *A equação*

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n}$$

é solúvel se, e só se, a equação

$$(I_{2n} - \overline{P})\overline{H}\,\overline{P} = 0_{2n}$$

é solúvel, com

$$\overline{H} := \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{bmatrix},$$

sendo M_{22}, M_{23}, M_{32} e M_{33} submatrizes da matriz M definida de acordo com (2.2.16).

Demonstração: Consideremos a equação

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n} \tag{2.2.21}$$

e representemos a matriz H de acordo com (2.2.14), ou seja,

$$H = Q^{-1}RMQ \tag{2.2.22}$$

onde Q, R, e M são matrizes definidas de acordo com (2.2.13), (2.2.15) e (2.2.16), respetivamente.
Então, a equação (2.2.21) é equivalente a

$$(I_{2n} - P)Q^{-1}RMQP = 0_{2n}.$$

Multiplicando à esquerda por Q e à direita por Q^{-1} vem

$$Q[(I_{2n} - P)Q^{-1}RMQP]Q^{-1} = 0_{2n},$$

ou seja

$$(Q - QPQ^{-1})RMQPQ^{-1} = 0_{2n}.$$

Tomando $\overline{P} := QPQ^{-1}$, a equação anterior é equivalente a

$$(I_{2n} - \overline{P})RM\overline{P} = 0_{2n},$$

ou seja, tendo em conta o modo como $\overline{P}$, R e M estão definidas em (2.2.20), (2.2.15) e (2.2.16),

$$\left(\begin{bmatrix} I_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times n} \\ 0_{(n-l)\times l} & I_{n-l} & 0_{(n-l)\times n} \\ 0_{n\times l} & 0_{n\times(n-l)} & I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times(n-l)} \\ 0_{(n-l)\times(n-l)} & I_{n-l} & 0_{(n-l)\times(n-l)} \\ \overline{\Pi}_{31} & \overline{\Pi}_{32} & 0_{n\times(n-l)} \end{bmatrix}\right) \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} N_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times n} \\ 0_{(n-l)\times l} & I_{n-l} & 0_{(n-l)\times n} \\ 0_{n\times l} & 0_{n\times(n-l)} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times n} \\ 0_{n\times l} & M_{22} & M_{23} \\ 0_{n\times l} & -M_{32} & -M_{33} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I_l & 0_{l\times(n-l)} & 0_{l\times(n-l)} \\ 0_{(n-l)\times l} & I_{n-l} & 0_{n-l\times(n-l)} \\ \overline{\Pi}_{31} & \overline{\Pi}_{32} & 0_{n\times(n-l)} \end{bmatrix} = 0_{2n} \tag{2.2.23}$$

o que, após o cálculo das operações matriciais envolvidas no primeiro membro de (2.2.23) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0_{n\times l} & 0_{n\times(n-l)} & 0_n \\ 0_{n\times l} & 0_{n\times(n-l)} & 0_n \\ -\overline{\Pi}_{31}N_l - \overline{\Pi}_{32}M_{23}\overline{\Pi}_{31} - M_{33}\overline{\Pi}_{31} & -\overline{\Pi}_{32}M_{22} - M_{32} - \overline{\Pi}_{32}M_{23}\overline{\Pi}_{32} - M_{33}\overline{\Pi}_{32} & 0_n \end{bmatrix} = 0_{2n}.$$

Donde se obtém as seguintes equações:

$$\overline{\Pi}_{31}N_l + \overline{\Pi}_{32}M_{23}\overline{\Pi}_{31} - M_{33}\overline{\Pi}_{31} = 0_{2n}, \tag{2.2.24}$$

e

$$\overline{\Pi}_{32}M_{23}\overline{\Pi}_{32} + M_{33}\overline{\Pi}_{32} + \overline{\Pi}_{32}M_{22} - M_{32} = 0_{2n}. \qquad (2.2.25)$$

A equação (2.2.24) é solúvel ($\overline{\Pi}_{31} = 0$ é solução) e a equação (2.2.25) é uma equação do tipo

$$XAX + XB + CX + D = 0_n$$

associada a uma matriz Hamiltoniana invertível. ■

Exemplo 2.2.6. *A equação*

$$(I_2 - P)HP = 0_2, \qquad (2.2.26)$$

onde H é uma matriz não-invertível e definida por:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

é solúvel.

De facto, existe uma matriz invertível Q definida por

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tal que para

$$R = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textit{e} \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

se tem

$$QHQ^{-1} = RM = MR.$$

Mais, $Rv = QHQ^{-1}v$, para qualquer $v \in V_0$ e $Rw = w$, para qualquer $w \in V_0^{\perp}$. Note-se que 0 e -1 são os valores próprios de H e V_0 é o conjunto dos vetores próprios associados:

$$V_0 = \left\{ \left(\frac{985}{1393}, -\frac{985}{1393} \right), \left(-\frac{1292}{2889}, \frac{2584}{2889} \right) \right\}.$$

Seja $\overline{H} = QHQ^{-1}$, isto é,

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Notemos que $\overline{H}$ é invertível. Como a equação (2.2.26) associada a $\overline{H}$ é solúvel,

$$\left(P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \ \textit{é uma solução} \right)$$

então, pelo teorema anterior, a mesma equação associada a H é solúvel.

Conclusões

Neste trabalho estudámos o problema da solubilidade da Equação Algébrica de Riccati (EAR) na forma

$$R(X) = XAX + XB + CX + D = 0_n,$$

onde A, B, C e D são matrizes reais de ordem n e 0_n é a matriz nula de ordem n. A abordagem usada na análise de existência de solução deste tipo de equações matriciais traduziu-se, numa primeira fase, em estabelecer condições de existência de matrizes F_i, G_i, $i = 1, 2$, sob as quais a equação $R(X) = 0_n$ é equivalente a uma equação matricial na forma

$$(XF_1 + F_2)(G_1X + X_2) = 0_n.$$

Assim, sob essas condições, concluímos que o problema inicial podia reduzir-se a um problema de representatividade de $R(X)$, uma vez que a existência de soluções da EAR podia depender da solubilidade de um dos factores do produto anterior. Porém, excluindo alguns casos particulares onde pelo menos uma das matrizes F_i, G_i é invertível, este último problema assumiu também alguma complexidade. Para esses casos de exceção, foram estabelecidas algumas condições suficientes com base no conceito de *característica* de uma matriz, mais concretamente, se

$$\text{car}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \text{car}\left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\right), \text{car}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \text{car}\left(\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\right)$$

e

$$\text{car}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = n, \text{ se } \det A \neq 0,$$

vejam-se os Teoremas 2.1.3, 2.1.6 e Corolário 2.1.7, respetivamente.
Face às limitações dos critérios de solubilidade até aqui estabelecidos, a análise posteriormente efetuada foi conduzida de forma diferente. Mais concretamente, essa análise incidiu não diretamente no problema inicial mas, noutro problema decorrente deste, isto é, no problema de solubilidade da equação

$$(I_{2n} - P)HP = 0_{2n},$$

onde H é a *matriz Hamiltoniana* associada à EAR, definida por

$$H = \begin{bmatrix} B & A \\ -D & -C \end{bmatrix}.$$

Na análise da solubilidade desta nova equação distinguimos quando a matriz Hamiltoniana H era invertível ou não-invertível. Enquanto que, no caso em que a matriz H é invertível, o problema reduziu-se ao estudo da existência de soluções da equação matricial quadrática $Y^2 - HY = 0_{2n}$, com determinadas propriedades, Teoremas 2.2.1 e 2.2.2, no caso contrário estabelecemos uma forma de aplicar os critérios obtidos para o primeiro caso a este último, Teorema 2.2.5.

Parte II - Estágio Pedagógico

Capítulo 3

Estágio Pedagógico

3.1 Introdução

O Estágio Pedagógico está inserido no 2º Ciclo do Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário da Universidade da Beira Interior (UBI), que decorreu na Escola Secundária com 3º Ciclo do Fundão, de Setembro de 2010 a Junho de 2011. Este, foi supervisionado pelos seguintes orientadores: a Drª Dulce Nascimento, docente da Escola Secundária do Fundão que acompanhou diariamente o meu trabalho e o Prof. Dr. Henrique Cruz, orientador da Universidade da Beira Interior que assistiu a algumas aulas e em simultâneo acompanhou o trabalho realizado ao longo do Estágio Pedagógico.

O núcleo de estágio foi constituído pelas estagiárias: Ângela Martins e Madalena Simão e exerceram prática pedagógica supervisionada nas turmas 8º e 10º anos de escolaridade na Escola Secundária do Fundão.

Ao longo da Prática de Ensino Supervisionada lecionei no 1º Período, quatro aulas da **Unidade II -Teorema de Pitágoras. Decomposição de Figuras e áreas. Semelhança de Triângulos**: Teorema de Pitágoras, Decomposição de figuras e áreas na turma do 8º ano. No 2º Período, ministrei seis aulas da **Unidade II - Funções e Gráficos - Generalidades Funções Polinomiais e Função Módulo:** Família de funções quadráticas, Função Módulo e Transformações simples de funções do 10º ano no âmbito do programa de Matemática A. E, no 3º Período, lecionei duas aulas da **Unidade III - Estatística:** Medidas de dispersão do 10º ano no âmbito do programa de Matemática A.

Este relatório de estágio contempla a planificação da unidade didática: "Função Quadrática", enquadrada no programa de Matemática A do 10º ano. Ao longo da planificação, preocupei-me em apresentar algumas tarefas relacionadas com o quotidiano, estimular o interesse pela matemática e desenvolver o raciocínio matemático, recorrendo a diversas estratégias metodológicas e recursos pedagógicos.

A planificação da unidade didática: "Função Quadrática"é composta por cinco aulas.
Na aula nº 1, abordamos a definição da função quadrática, a aplicação da função quadrática para resolver problemas da vida real, o estudo do comportamento da família de funções do tipo $y = ax^2, a \neq 0$, e do comportamento da família de funções do tipo $y = ax^2 + k, a \neq 0$.
Na aula nº 2, apresentamos o estudo do comportamento da família de funções do tipo $y = a(x-h)^2, a \neq 0$ e do comportamento da família de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$.
Na aula nº 3, realizaram-se exercícios de consolidação de conhecimentos, relacionados com a função quadrática, nomeadamente, Famílias de Funções Quadráticas.
Na aula nº 4, será abordado, como determinar o vértice de uma parábola e escrever a equação do eixo de simetria de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Por fim serão resolvidas inequações do 2º grau.

Por fim, a aula nº 5 consistirá na realização de exercícios de consolidação de conhecimentos.

Na planificação de cada aula serão descritos os conteúdos programáticos, pré-requisitos, objetivos a atingir pelo aluno, materiais e recursos, sumário, estratégias a usar, com vista ao desenvolvimento de capacidades, competências e à aquisição e aplicação de conhecimentos. A planificação da unidade teve sempre por base, o número de aulas previstas na planificação global.

3.2 Aula 1

Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão	Planificação da Aula Nº 1
	Ano: 10º **Turma:** CT1 **Data:** 15 de Fevereiro de 2011
	Tema II - Funções e gráficos - generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.
	- Família de funções quadráticas
2010/2011	**Professora estagiária:** Ângela Martins

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- Função quadrática;
- Famílias de funções quadráticas.

PRÉ-REQUISITOS:

- Definir uma função;
- Identificar, através da representação gráfica de uma função: domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, extremos (relativos e absolutos), continuidade, injectividade e paridade.

OBJETIVOS

- Identificar funções quadráticas;
- Aplicar a função quadrática para resolver problemas da vida real;
- Usar a calculadora gráfica para representar funções quadráticas;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo $y = ax^2; a \neq 0$;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo $y = ax^2 + k; a \neq 0$.

MATERIAIS E RECURSOS:

- Quadro Interativo;
- Datashow;
- Computador;
- Calculadora gráfica;
- Software de matemática dinâmica – Geogebra;

- Manual Adotado: Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). Novo Espaço 10 - Matemática A. Porto Editora.

SUMÁRIO:

- A função quadrática;
- Estudo da família de funções do tipo $y = ax^2;\ a \neq 0$ e $y = ax^2 + k; a \neq 0$;
- Resolução dos exercícios 33, 39 e 40 das páginas 42 e 45;
- Resolução da tarefa 21 da página 114.

ESTRATÉGIAS:

O tema: "**Funções Quadráticas**" será introduzido através da análise de um problema da vida real: maximização da área de um retângulo inscrito num triângulo retângulo.

A partir deste problema, os alunos irão deduzir a expressão analítica que permitirá obter a área máxima do retângulo. Os alunos irão recorrer à calculadora gráfica para representarem graficamente a função quadrática e assim visualizarem o valor máximo da função. Em simultâneo com a **calculadora gráfica** e com o **software Geogebra**, os alunos poderão observar o problema de uma forma mais dinâmica e assim confirmarem o valor máximo obtido anteriormente.

Este exemplo servirá de base para definir o conceito de função quadrática e assim iniciar-se o estudo da família de funções quadráticas: $y = ax^2;\ a \neq 0$ e $y = ax^2 + k; a \neq 0$.

Para o estudo destas famílias de funções, os alunos irão recorrer à calculadora gráfica, onde através desta, irão investigar o comportamento das funções com a alteração do **parâmetro *a***, na família de funções:

$y = ax^2;\ a \neq 0$ e k na família de funções $y = ax^2 + k; a \neq 0$.

Para complementar o estudo da família de funções, serão mostrados vários applets construídos no geogebra.

Será proposta a realização de exercícios para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos.

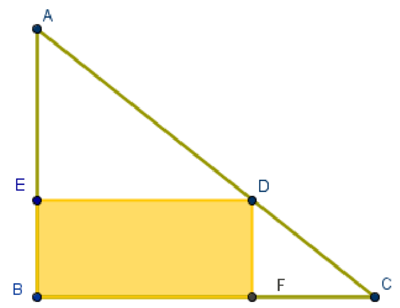
DESENVOLVIMENTO DA AULA

⇨ No início da aula, a professora verificará se algum aluno está a faltar e comunicará oralmente o sumário da aula.

Para introduzir o tema será apresentado o **seguinte problema**:

O João tem um terreno triangular e pretende reservar um espaço retangular para um canteiro de flores ficando o resto para relva.

Sabe-se que o triângulo [ABC] é retângulo, sendo $\overline{AB} = 4\ m$ e $\overline{BC} = 8\ m$.



a) **Escreva uma expressão que dê a medida da altura y em função de x.**

Resolução:

Os triângulos [ABC] e [AED] são semelhantes porque tem dois ângulos iguais: o ângulo A é comum aos dois triângulos e o ângulo de vértice E é igual ao ângulo de vértice B, ou seja um ângulo de 90º.

Estabelecendo entre os lados correspondentes [ED] e [AE] com [BC] e [AB], respetivamente vem:

$$\frac{x}{8} = \frac{4-y}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 8 - 2y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x-8}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

b) **Defina analiticamente a função $A(x)$, em que A é a área do retângulo.**

Resolução:

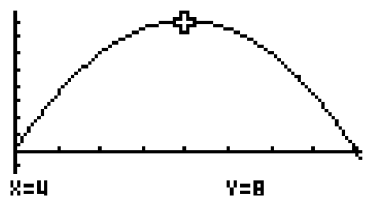
A área é o produto do comprimento x pela largura y ou seja

$$A(x) = x\,(-\frac{1}{2}x + 4) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x\,.$$

c) **Recorrendo à calculadora gráfica obtenha a representação da função. Para este problema, indique os valores que x pode admitir.**

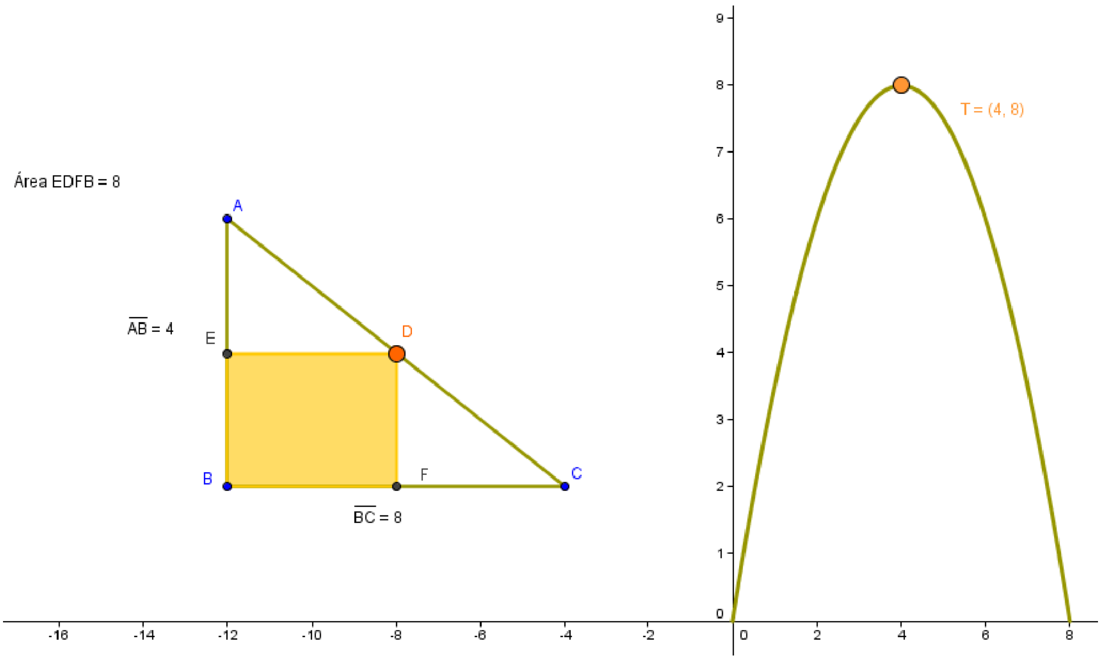
Resolução:

Recorrendo à calculadora, obtemos o seguinte gráfico da figura ao lado.



Observando o gráfico, $x \in \,]0,8[\,$.

⇨ Através do Geogebra, será mostrado a seguinte figura que representa o problema acima:



d) **Qual é a área máxima do canteiro?**

Resposta: A área máxima do canteiro é de 8 m^2.

⇨ Para a resolução do problema anterior recorremos ao **estudo de uma função quadrática**.

O que é uma **função quadrática**?

Definição de função quadrática

Uma função quadrática é uma função real de variável real definida por um polinómio de 2º grau, ou seja, definida por uma expressão do tipo:

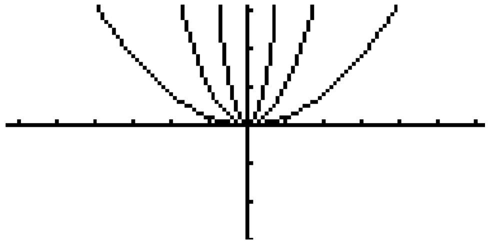
$$y = ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0$$

O gráfico da função quadrática é uma **parábola**.

⇨ Vamos estudar o comportamento da **família de funções quadráticas**:

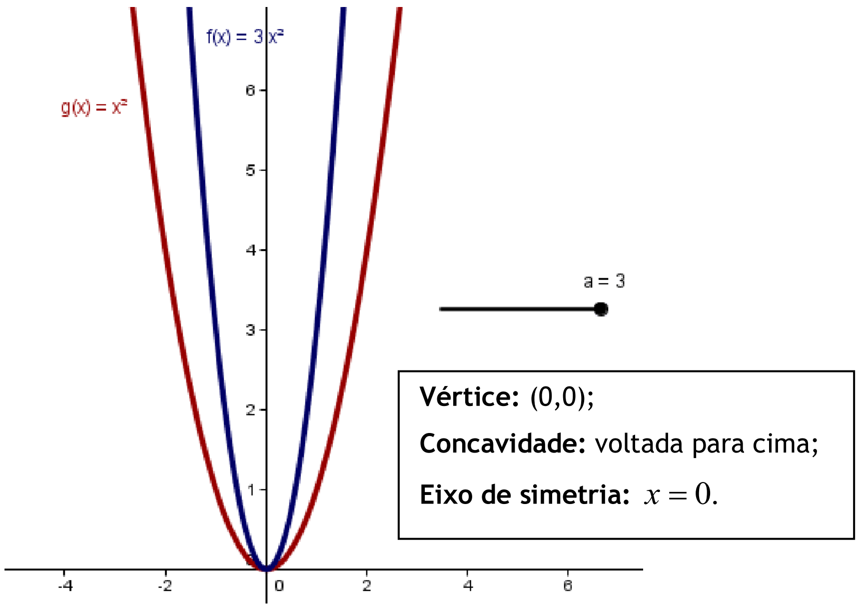
Família de funções do tipo $y = ax^2; a \neq 0$.

Será pedido aos alunos para usarem a calculadora gráfica e representarem as seguintes funções quadráticas: $y = x^2$, $y = 3x^2$ e $y = 0{,}5x^2$.

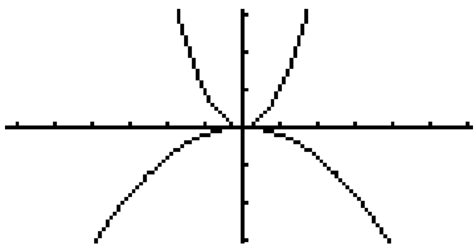


Será mostrado no Geogebra a análise do comportamento da **família de funções do tipo** $y = ax^2$; $a \neq 0$ para diversos valores do parâmetro a.

Se $a > 1$



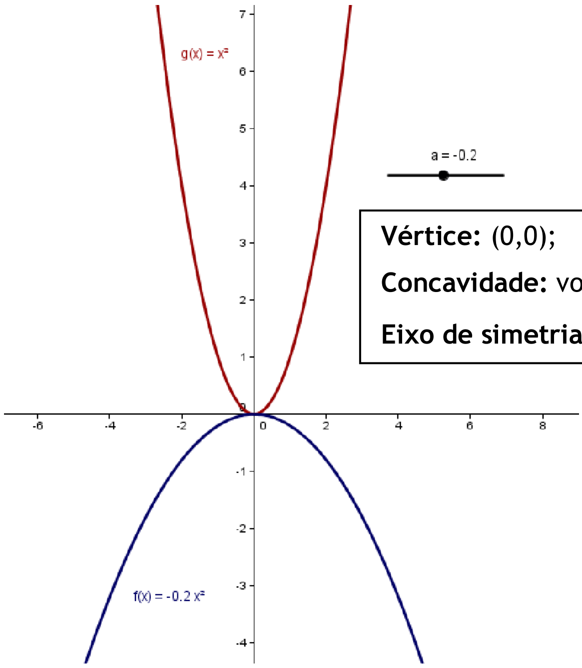
A seguir será pedido aos alunos que representem na calculadora gráfica a seguinte função $y = x^2$ e $y = -0{,}2x^2$;



Os alunos deverão concluir que:

- quando o parâmetro $a < 0$, a concavidade da parábola é **voltada para baixo**;
- quando o parâmetro $a > 0$, a concavidade da parábola é **voltada para cima**;
- o valor absoluto de **a** influencia a abertura da parábola. Quanto <u>**maior**</u> é o valor absoluto de a, <u>**menor**</u> é a abertura da parábola.

Se $a < 1$



Vértice: (0,0);

Concavidade: voltada para baixo;

Eixo de simetria: $x = 0$.

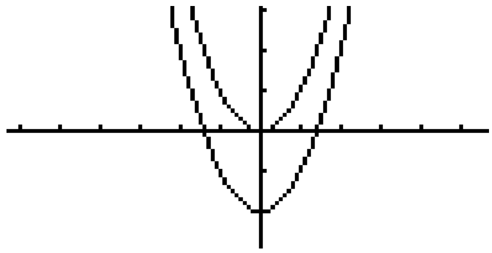
Como síntese, será mostrado e analisado o seguinte quadro resumo:

$y = ax^2$	$y = x^2$	$y = -0{,}2x^2$
Concavidade	$\cup$	$\cap$
Vértice	(0, 0)	(0,0)
Domínio	$\Re$	$\Re$
Contradomínio	$\Re_0^{\ +}$	$\Re_0^{\ -}$
Zeros	0	0
Sinal	Positiva em $\Re \setminus \{0\}$	Negativa em $\Re \setminus \{0\}$
Monotonia	Decrescente em]- ∞ ,0] Crescente em [0, + ∞ [	Crescente em]- ∞ , 0] Decrescente em [0, + ∞ [
Extremos	Mínimo: 0 Minimizante: 0	Máximo: 0 Maximizante: 0

<u>Resolução do exercício 33 da página 42;</u>

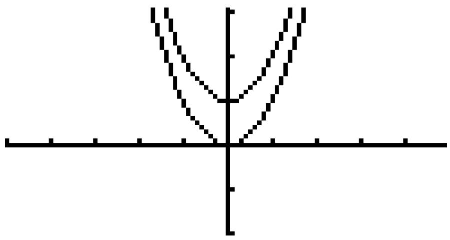
Família de funções do tipo $y = ax^2 + k; a \neq 0$

Será pedido aos alunos para usarem a calculadora gráfica e representarem as seguintes funções quadráticas: $y = x^2$ e $y = x^2 - 2$.



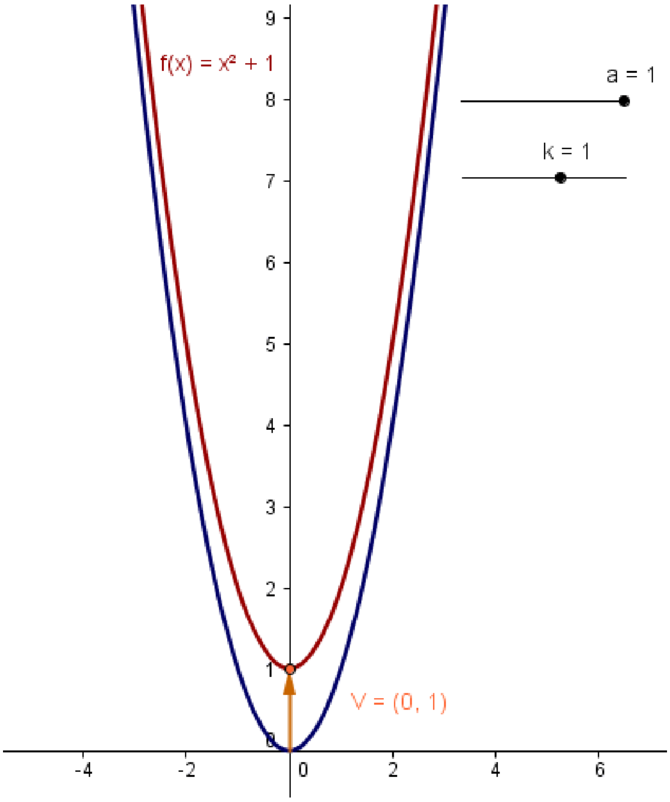
Os alunos deverão concluir que na função $y = x^2 - 2$, obtém-se a partir do gráfico $y = x^2$, deslocando-o de **2 unidades para baixo** (as ordenadas sofrem um decréscimo de 2 unidades).

E se a função for $y = x^2 + 1$? O que é que acontece?
Fazendo a representação gráfica, obtemos:



Os alunos deverão concluir que para a função $y = x^2 + 1$, obtém-se a partir do gráfico $y = x^2$, deslocando-o **1 unidade para cima** (as ordenadas sofrem um acréscimo de 1 unidade).

Em simultâneo com a calculadora será mostrado no Geogebra a análise do comportamento da **família de funções do tipo** $y = ax^2 + k; a \neq 0$ para diversos valores do parâmetro k.



Como síntese, será mostrado e analisado o seguinte quadro resumo:

$y = ax^2 + k$	$y = x^2 + 1$	$y = -x^2 - 1$
Concavidade	$\cup$	$\cap$
Vértice	(0, 1)	(0, -1)
Domínio	$\Re$	$\Re$
Contradomínio	$[1, +\infty[$	$]-\infty, -1]$
Zeros	Não tem	Não tem
Sinal	Positiva em $\Re$	Negativa em $\Re$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ Crescente em $[0, +\infty[$	Decrescente em $[0, +\infty[$ Crescente em $]-\infty, 0]$
Extremos	Mínimo: 1 Minimizante: 0	Máximo: -1 Maximizante: 0

<u>**Resolução do exercício 39 e 40 da página 45.**</u>

SÍNTESE

Definição de função quadrática

Uma função quadrática é uma função real de variável real definida por um polinómio de 2º grau, ou seja, definida por uma expressão do tipo:

$$y = ax^2 + bx + c; a \neq 0$$

O gráfico da função quadrática é uma **parábola.**

Família de funções do tipo $y = ax^2; a \neq 0$

- quando o parâmetro $a < 0$, a concavidade da parábola é **voltada para baixo**.

- quando o parâmetro $a > 0$, a concavidade da parábola é **voltada para cima**.

Família de funções do tipo $y = ax^2 + k; a \neq 0$

O gráfico de cada uma destas funções pode obter-se do gráfico da função definida por $y = x^2$ por uma translação associada ao vetor de coordenadas (0, k).

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Exercício 33 da página 42.

Considere as funções definidas por:

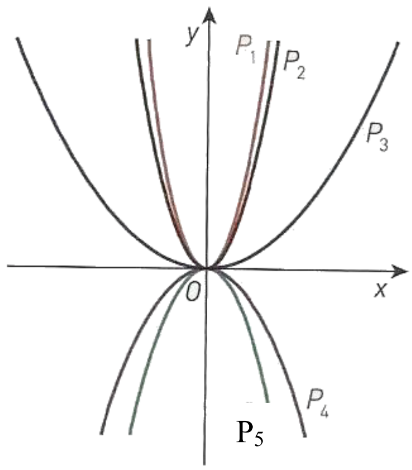
I: $y = 2x^2$;

II: $y = -0{,}5x^2$;

III: $y = \sqrt{3}x^2$;

IV: $y = -x^2$;

V: $y = 0{,}2x^2$.



No referencial ao lado estão as representações gráficas das funções dadas, correspondendo cada uma delas a uma parábola.

Faz corresponder a cada função a respetiva parábola que a representa graficamente.

Resolução

I-P1; II- P4; III- P2; IV- P5; V-P3.

Exercício 39 da página 45

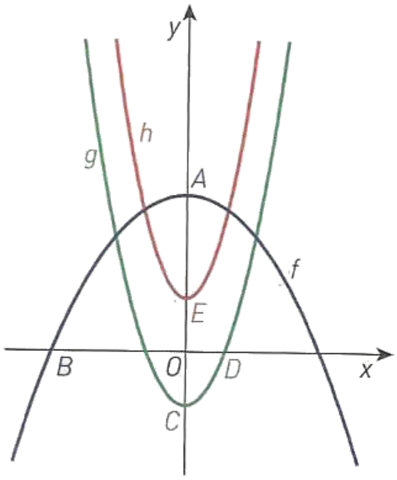
No referencial da figura estão representações gráficas das funções f, g e h definidas por:

$f(x) = -0{,}5x^2 + 3$

$g(x) = 2x^2 - 1$

$h(x) = 3x^2 + 1$

Indica as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E assinalados na figura.



__Resolução:__

Os pontos A e B são pontos da função f.

O **ponto** A é o vértice da parábola então as coordenadas são $A(0,3)$

O **ponto** B é um zero da função f, então para calcular os zeros de uma função temos que calcular:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-3}{-0{,}5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}.$$

Como a abcissa do ponto tem que ser negativa então $x = -\sqrt{6}$, logo o ponto $B(-\sqrt{6},0)$.

O **ponto** C é o vértice da parábola da função g então as coordenadas são $C(0,-1)$

O **ponto** D é um zero da função g, então para calcular os zeros de uma função temos que calcular:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

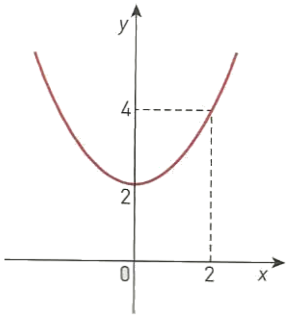
Como a abcissa do ponto tem que ser positiva então $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo o ponto

$D(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.

O **ponto** E é o vértice da parábola da função h então as coordenadas são $E(0,\ 1)$.

Exercício 40 da página 45

Escreva na forma $y = ax^2 + k$ as expressões das funções que têm as seguintes representações gráficas:



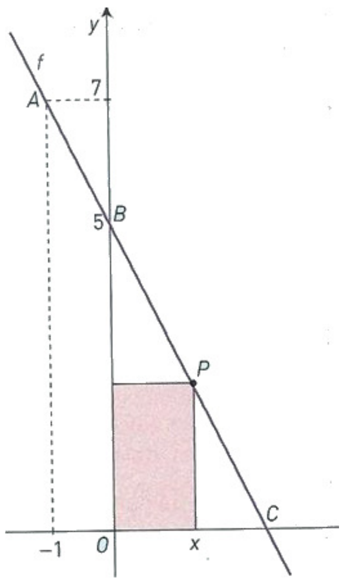
40.1)

Na representação gráfica ao lado, verificamos que as ordenadas sofreram um acréscimo de duas unidades, a partir do gráfico da função $y = ax^2$, ou seja $k = 2$. Relativamente ao parâmetro a sabe-se que o ponto (2,4) pertence à parábola. Substituindo na expressão analítica $y = ax^2 + k$, vem

$$4 = a\ (2)^2 + 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Assim a representação gráfica tem a seguinte expressão: $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

Proposta 21 da página 114



Observa a figura onde está representada graficamente a função afim f. Sabe-se que os pontos A (-1,7) e B (0,5) pertencem ao gráfico de f, C é o seu ponto de interseção com Ox e $P \in [BC]$.

1. Mostre que $f(x) = -2x + 5$

   Como f é uma função afim então é do tipo $f(x) = mx + b$. Como A e B pertencem ao gráfico f podemos calcular o seu declive, seja m. Assim,

   $m = \frac{5-7}{0+1} = -2$ e $b = 5$ (ordenada na origem) logo $f(x) = -2x + 5$.

2. Determine as coordenadas do ponto C.

   $f(x) = 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Logo o ponto C = ($\frac{5}{2}$,0).

3. Seja x a abcissa do ponto P. Considera um retângulo em que dois dos seus lados estão contidos nos eixos coordenados e o ponto P é um dos vértices, tal como a figura sugere.

   3.1. Determine uma expressão $A(x)$ que permita obter a área do retângulo em função da abcissa x do ponto P.

$$\frac{5}{5-y} = \frac{\frac{5}{2}}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{5}{2}(5-y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = \frac{25}{2} - \frac{5}{2}y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x = 25 - 5y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -2x + 5$$

$$A(x) = x(-2x+5) \Leftrightarrow -2x^2 + 5x \ .$$

   3.2. Calcule a abcissa do ponto P de modo que o retângulo tenha três unidades de área.

$$A(x) = 3 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x = 3 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x - 3 = 0$$

Usando a fórmula resolvente:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\times(-2)\times(-3)}}{-4} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-4} = \frac{-5 \pm 1}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5+1}{-4} \vee x = \frac{-5-1}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{3}{2}.$$

Logo existem duas soluções: $x = 1 \vee x = \frac{3}{2}$.

   3.3. Determine as coordenadas que o ponto P deve admitir para que a área do retângulo seja máxima.

Usando a calculadora gráfica e representando a função $A(x)$ o máximo que y é quando $x = \frac{5}{4}$, então substituindo na função:

$$A(\frac{5}{4})=-2(\frac{5}{4})^2+5(\frac{5}{4})=-(\frac{50}{16})+(\frac{25}{4})=\frac{50}{16}=\frac{25}{8}.$$

Logo o ponto P tem as coordenadas:

$$P(\frac{5}{4},\frac{25}{8}).$$

Nota: Os alunos que têm mais dificuldades deverão fazer o exercício 40.2 da página 45. Os alunos que tem menos dificuldades e que queiram praticar poderão fazer a tarefa 32 da página 119.

Nota: Caso não consiga terminar este exercício, ficará para trabalho de casa.

TRABALHOS DE CASA:

Leitura atenta e cuidada das páginas 41, 42, 43 e 44.

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:
- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.

3.3 Aula 2

<table>
<tr><td rowspan="5">Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão

ESF

2010/2011</td><td colspan="3">Planificação da Aula Nº 2</td></tr>
<tr><td>Ano: 10º</td><td>Turma: CT1</td><td>Data: 16 de Fevereiro de 2011</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tema II - Funções e gráficos - generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">- Família de funções quadráticas</td></tr>
<tr><td colspan="3">Professora estagiária: Ângela Martins</td></tr>
</table>

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- Famílias de funções quadráticas.

PRÉ-REQUISITOS:

- Identificar funções quadráticas;
- Aplicar a função quadrática para resolver problemas da vida real;
- Usar a calculadora gráfica para representar funções quadráticas;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = ax^2; a \neq 0$;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = ax^2 + k; a \neq 0$.

OBJETIVOS

- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = a(x-h)^2; a \neq 0$;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$.

MATERIAIS E RECURSOS:

- Quadro Interativo;
- Datashow;
- Computador;
- Calculadora gráfica;
- Software de matemática dinâmica – Geogebra.

- Manual Adotado: Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). Novo Espaço 10 - Matemática A. Porto Editora.

SUMÁRIO:

- Estudo da família de funções do tipo $y = a(x-h)^2; a \neq 0$ e $y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$;
- Resolução dos exercícios: 43, 44 das páginas 47 e 48, proposta 15 e 16 das páginas 111 e 112.

ESTRATÉGIAS:

Esta aula tem como objetivo a análise do comportamento da família de funções quadráticas: $y = a(x-h)^2; a \neq 0$ e $y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$.

Para tal, os alunos irão recorrer à calculadora gráfica e investigar o comportamento das funções, quando os parâmetros a, h e k são modificados. A partir desta investigação, espera-se que os alunos consigam tirar as conclusões acerca dos parâmetros a, h e k. Para complementar o estudo da família de funções, serão mostrados applet's construídos no geogebra.

Durante a aula, serão propostos exercícios para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos. Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem na resolução dos exercícios.

Serão propostos aos alunos com maior dificuldade de aprendizagem, os exercícios 42 e 43 das páginas 46 e 47. Para os alunos que têm menos dificuldades será proposta a tarefa 33 da página 119.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

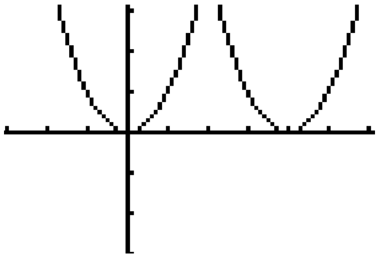
- ⇨ No início da aula, a professora verificará se algum aluno está a faltar.
- ⇨ De seguida será feita a correção dos trabalhos de casa: proposta 21, alíneas 3.2 e 3.3 da página 114.
- ⇨ Será feita uma breve síntese oralmente dos conteúdos lecionados na aula anterior;
- ⇨ Análise do comportamento de mais dois tipos da **família de funções quadráticas**:

$$y = a(x-h)^2; a \neq 0 \text{ e } y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0 .$$

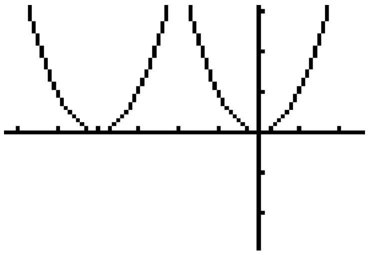
Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2; a \neq 0$

Será pedido aos alunos para usarem a calculadora gráfica e representarem as seguintes funções quadráticas: $y = x^2$, $y = (x-4)^2$.

A representação gráfica obtida das duas funções acima é a seguinte:

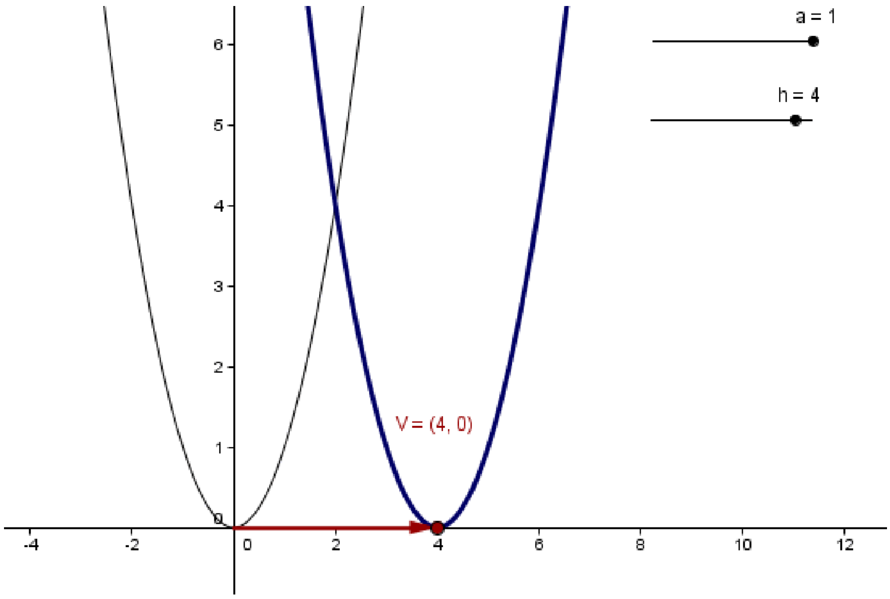


Será pedido aos alunos para representarem as seguintes funções quadráticas: $y = x^2$, $y = (x+4)^2$.

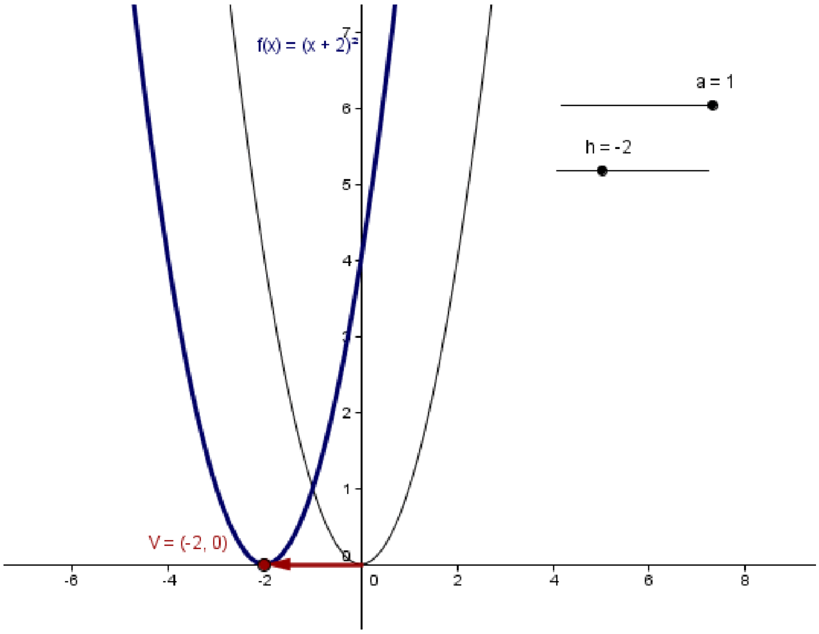


Será visualizado em simultâneo no Geogebra a análise do comportamento da **família de funções do tipo** $y = a(x-h)^2; a \neq 0$ para diversos valores do parâmetro a e h.

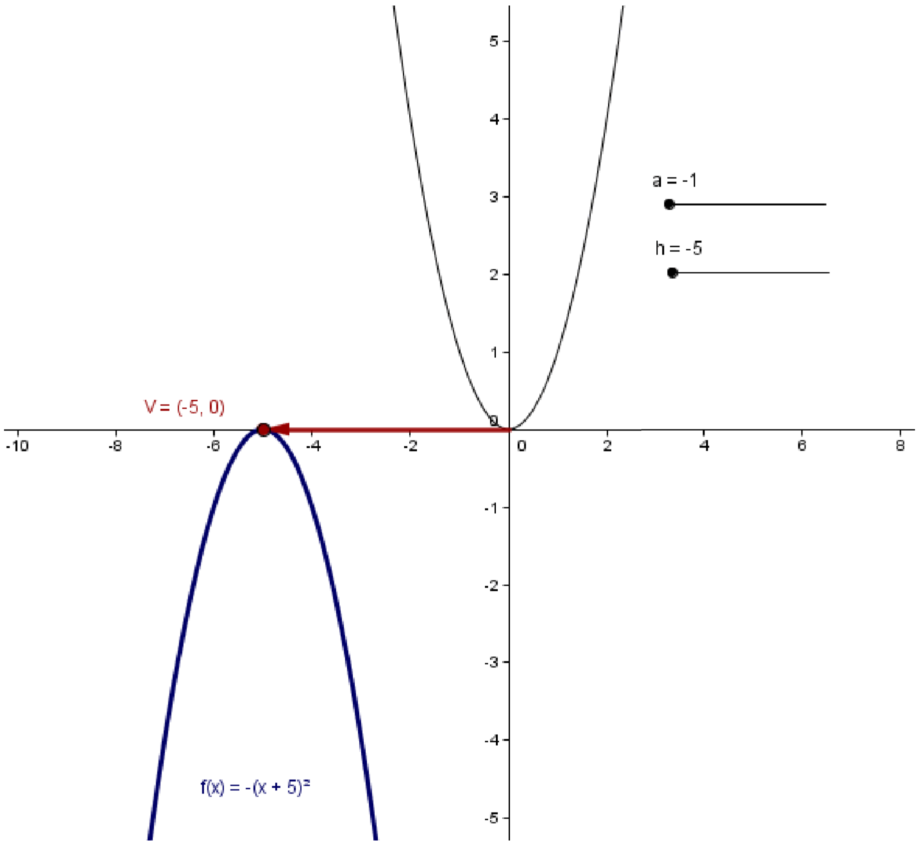
- Caso em que $a = 1$ e $h = 4$



- Caso em que $a = 1$ e $h = -2$



- Caso em que $a = -1$ e $h = -5$



De seguida, será mostrado e analisado o quadro resumo seguinte:

$y = a(x-h)^2$	$y=(x-2)^2$	$y=-(x+5)^2$
Domínio	$\Re$	$\Re$
Contradomínio	$\Re_0^{\ +}$	$\Re_0^{\ -}$
Zeros	2	-5
Sinal	Positiva em $\Re \setminus \{2\}$	Negativa em $\Re \setminus \{-5\}$
Monotonia	Decrescente em]-∞,2] Crescente em [2, +∞[	Crescente em]-∞, -5] Decrescente em [-5, +∞[
Extremos	Mínimo: 0 Minimizante: 2	Máximo: 0 Maximizante: -5
Vértice	V= (2,0)	V= (-5,0)
Eixo de simetria	$x=2$	$x=-5$

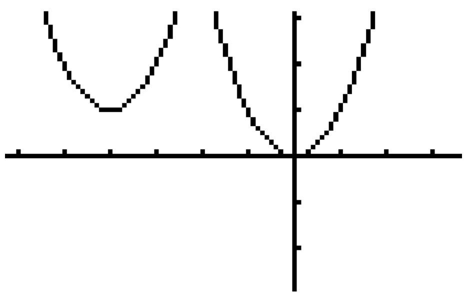
<u>**Síntese:**</u>

Da análise feita ao comportamento do gráfico de uma função do tipo $y = a(x-h)^2; a \neq 0$ podemos concluir que:

- **Concavidade** voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.
- **Vértice** no ponto de coordenadas (h, 0);
- **Eixo de simetria** é a reta de equação $x = h$.

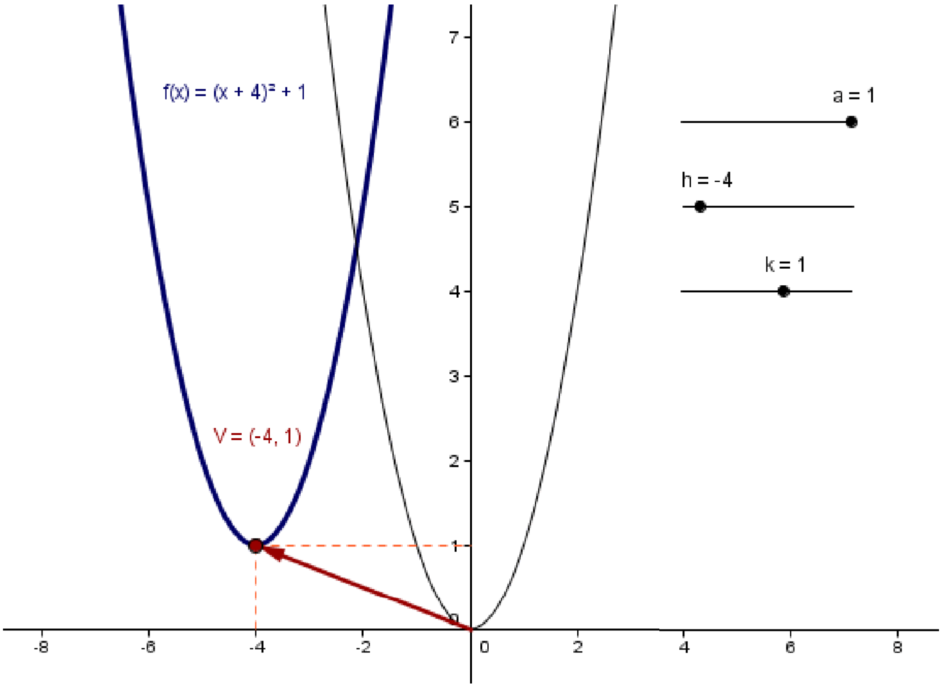
Família de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$

Será pedido aos alunos para usarem a calculadora gráfica e representarem as seguintes funções quadráticas: $y = x^2$ e $y = (x+4)^2 + 1$.



Em simultâneo será apresentado no Geogebra a análise do comportamento da **família de funções do tipo** $y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$ para os diversos valores dos parâmetros a, h e k.

- Caso em que $a = 1$, $h = -4$ e $k = 1$



Os alunos deverão concluir que por aplicação de uma translação horizontal aplicada a um vetor $\vec{u} = (-4,0)$, obtém-se a parábola correspondente à função $y = (x+4)^2$. Em seguida, por uma translação vertical associada ao vetor $\vec{v} = (0,1)$, obtém-se o gráfico da função $y = (x+4)^2 + 1$.

Assim conclui-se que o gráfico da função $y = (x+4)^2 + 1$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima, vértice (-4, 1) e eixo de simetria $x = -4$.

Como síntese:

Da análise feita ao comportamento do gráfico de uma função do tipo $y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$ podemos concluir que: • Concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$. • Vértice no ponto de coordenadas (h, k); • Eixo de simetria é a reta de equação $x = h$.

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Proposta 21 da página 114 (trabalho de casa):

3.2) Calcula a abcissa do ponto P de modo que o retângulo tenha três unidades de área.

$$A(x) = 3 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x = 3 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x - 3 = 0$$

Usando a fórmula resolvente:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times (-2) \times (-3)}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5+1}{-4} \vee x = \frac{-5-1}{-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{3}{2}$$

Logo existem duas soluções: $x = 1 \vee x = \frac{3}{2}$.

3.3) Determina as coordenadas que P deve admitir para que a área do retângulo seja máxima.

O eixo de simetria da parábola é a reta que passa pelo vértice e é paralela ao eixo das ordenadas, ou seja o eixo de simetria divide a parábola em duas partes simétricas. Como os zeros da função $A(x)$ são $x = 0$ e $x = \frac{5}{2}$, então a parábola atinge o máximo quando $x = \frac{5}{4}$.

Então vamos calcular o valor de

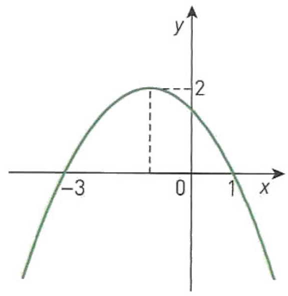
$$A(\frac{5}{4}) = -2(\frac{5}{4})^2 + 5(\frac{5}{4}) = -(\frac{50}{16}) + (\frac{25}{4}) = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

Logo o ponto P tem coordenadas:

$$P(\frac{5}{4}, \frac{25}{8}).$$

Exercício 44 da página 48.

44.1) Se observarmos a representação gráfica ao lado, verificamos que $k = 2$, $h = -1$, Relativamente ao parâmetro a sabe-se que o ponto (-3,0) pertence à parábola. Então substituindo na expressão analítica vem:



$$0 = a(-3+1)^2 + 2 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Assim a representação gráfica tem a seguinte expressão: $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$.

Exercício 43 da página 47.

Considere as funções quadráticas f, g e h tais que:

$f(x) = -0{,}2x^2 + 3;$

$g(x) = -2(x-5)^2;$

$h(x) = -(x+1)^2 - 4;$

43.1. Preencha o seguinte quadro:

	Coordenadas do vértice	**Equação do eixo de simetria**
$f(x)$	$(0,3)$	$x = 0$
$g(x)$	$(5,0)$	$x = 5$
$h(x)$	$(-1,-4)$	$x = -1$

43.2. Estuda cada uma das funções quanto ao domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos.

Função $f(x) = -0{,}2x^2 + 3;$

Domínio: $\Re$

Contradomínio: $]-\infty,\ 3[$

Zeros:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}2x^2+3=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{3}{0{,}2} \Leftrightarrow x=-\sqrt{15} \vee x=\sqrt{15}$$

Sinal:

x	$-\infty$	$-\sqrt{15}$		$\sqrt{15}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-

A função é positiva no intervalo $]-\sqrt{15},\sqrt{15}[$

A função é negativa no intervalo $]-\infty,\ -\sqrt{15}[\ \cup\ ]\sqrt{15},+\infty[$

Monotonia:

A função é crescente se $x \in\ ]-\infty,\ 0]$

A função é decrescente se $x \in\ [0,+\infty[$

Extremos:

Máximo absoluto: 3.

Proposta 16 da página 112.

Considere a função quadrática definida por: $f(x)=-3(x-2)^2-2$ e a família de funções $g(x)=k(x-3)^2+k^2-4$ sendo k um número real diferente de zero.

1. Indica o domínio e o contradomínio de f.

   Resolução:

   Domínio = $\Re$ e o Contradomínio = $]-\infty,-2]$.

2. Identifica o vértice e o eixo de simetria do gráfico representativo da função f.

   Resolução:

   Vértice (2,-2) e o eixo de simetria $x=2$.

3. Determina, caso exista, um valor real de k de modo que o vértice da parábola da função g pertença ao gráfico de f.

Resolução:

O Vértice da função g é $(3, k^2 - 4)$ então substituindo o ponto na função $f(x)$ fica:

$$k^2 - 4 = -3(3-2)^2 - 2 \Leftrightarrow k^2 - 4 = -3 - 2 \Leftrightarrow k^2 - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k^2 = -1$$

é uma condição impossível. Logo não existe nenhum k, que satisfaça a condição.

4. Identifica os valores de k para os quais o vértice da parábola de função f pertence ao gráfico de g.

Resolução:

O Vértice da função f é $(2,-2)$ então substituindo o ponto na função $g(x)$ fica:

$$g(2) = k(2-3)^2 + k^2 - 4 \Leftrightarrow -2 = k + k^2 - 4 \Leftrightarrow k + k^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 1$$

Logo $k = -2 \vee k = 1$.

5. Determina o valor de k para o qual o contradomínio de g é $]-\infty, 21]$.

Resolução:

$k^2 - 4 = 21 \Leftrightarrow k^2 = 25 \Leftrightarrow k = 5 \vee k = -5$ mas para que a função g tenha contradomínio $]-\infty, 21]$, $k = -5$.

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.

3.4 Aula 3

Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão	**Planificação da Aula Nº 3**
	Ano: 10º **Turma:** CT1 **Data:** 18 de Fevereiro de 2011
	Tema II - Funções e gráficos - generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.
	- Família de funções quadráticas
2010/2011	**Professora estagiária:** Ângela Martins

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- Famílias de funções quadráticas.

PRÉ-REQUISITOS:

- Identificar funções quadráticas;
- Aplicar a função quadrática para resolver problemas da vida real;
- Usar a calculadora gráfica para representar funções quadráticas;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = ax^2; a \neq 0$;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = ax^2 + k; a \neq 0$;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = a(x-h)^2; a \neq 0$;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$.

OBJETIVOS

- Identificar, através da representação gráfica de uma função: domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, extremos (relativos e absolutos), continuidade, injectividade e paridade.
- Aplicar a função quadrática para resolver problemas da vida real;
- Calcular os pontos de interseção de duas funções quadráticas;
- Calcular os zeros de uma função quadrática;
- Representar graficamente funções quadráticas recorrendo à calculadora gráfica.

MATERIAIS E RECURSOS:

- Quadro Interativo;
- Datashow;

- Computador;
- Calculadora gráfica;
- Manual Adotado: Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). Novo Espaço 10 - Matemática A. Porto Editora.

SUMÁRIO:

- Correção dos trabalhos de casa.
- Família de funções: resolução das propostas 23, 24 da página 113 e resolução de um problema do Gabinete de Apoio Educacional (GAVE).

ESTRATÉGIAS:

No início da aula, a professora irá fazer a correção dos trabalhos de casa.
De seguida, serão resolvidas propostas do manual e do GAVE para os alunos consolidarem os conhecimentos adquiridos nas últimas aulas. Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem na resolução dos exercícios.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- ⇨ No início da aula, a professora verificará se algum aluno está a faltar.
- ⇨ De seguida será feita a correção dos trabalhos de casa, ou seja a proposta 16, alínea 6 da página 112.
- ⇨ Serão resolvidas as seguintes propostas: 23, 24 da página 113 e problema 1 das séries de problemas nº 5 do GAVE.

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Proposta 16 da página 112.

Considera a função quadrática definida por:

$$f(x) = -3(x-2)^2 - 2$$

e a família de funções g tal que:

$$g(x) = k(x-3)^2 + k^2 - 4$$

sendo k um número real diferente de zero.

6. Considera $k = 1$. Identifica, caso existam, os pontos de interseção dos gráficos de f e de g.

Resolução:

Para $k=1$, $g(x)=(x-3)^2-3$. Para encontrar os pontos de interseção das funções f e g, temos que calcular $f(x)=g(x)$.

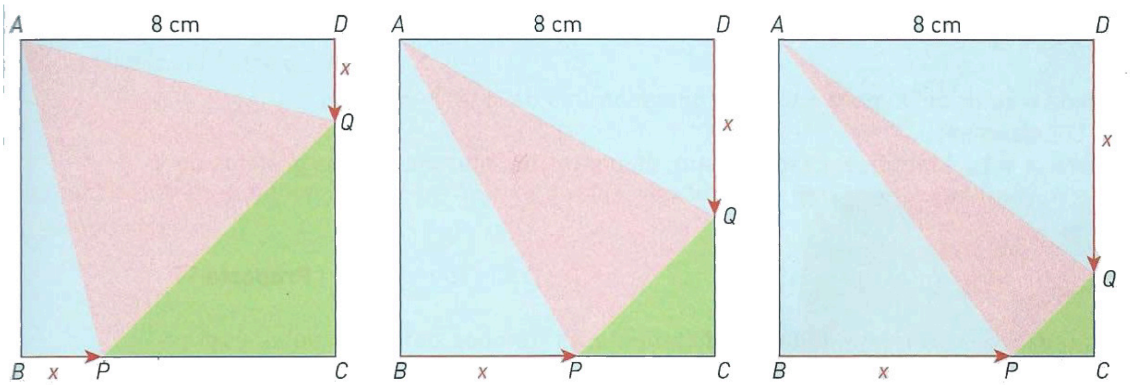
$$-3(x-2)^2-2=(x-3)^2-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3(x^2-4x+4)-2=x^2-6x+9-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3x^2+12x-12-2=x^2-6x+9-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x^2+18x-20=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-18\pm\sqrt{324-320}}{-8} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-18\pm 2}{-8} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=\frac{5}{2}$$

Então $g(2)=(2-3)^2-3=-2$ e $g(\frac{5}{2})=(\frac{5}{2}-3)^2-3=(-\frac{1}{2})^2-3=\frac{1}{4}-3=-\frac{11}{4}$

Logo os pontos de interseção são: (2, -2) e $(\frac{5}{2},-\frac{11}{4})$.

<u>Proposta 15 da página 111.</u>

Considere o quadrado [ABCD] com 8 cm de lado. Dois pontos móveis P e Q deslocam-se à mesma velocidade sobre os lados [BC] e [DC] respetivamente, de modo que $\overline{BP}=\overline{DQ}=x$, como é sugerido na seguinte sequências de figuras:



A cada posição dos pontos P e Q correspondem os triângulos coloridos [APQ] e [PQC], em que a área, em centímetros quadrados, é dada respetivamente pelas funções f e g.

1. Mostra que:

1.1 $g(x)=\frac{(8-x)^2}{2}$

Resolução:

$$A_{[PQC]} = \frac{(8-x)^2}{2} = g(x)\ .$$

1.2 $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 32$

Resolução:

$$A_{[APQ]} = 64 - \frac{8x}{2} - \frac{8x}{2} - \frac{1}{2}(8-x)^2 = 64 - 8x - \frac{1}{2}(64 - 16x + x^2) = 32 - \frac{x^2}{2} = f(x)\,.$$

2. Representa graficamente as funções f e g e explica como varia a área de cada um dos triângulos [APQ] e [PQC] com os valores de x.

Resolução:

Quando x varia de 0 cm a 8 cm, a área de cada um dos triângulos diminui de 32 cm^2 até 0 cm^2.

3.Calcula $f(0), f(8), g(0)\ \ g(8)$ e interpreta os resultados no contexto do problema. Faz as representações geométricas correspondentes.

Resolução:

$$f(0) = 0 + 32 = 32$$
$$f(8) = -32 + 32 = 0$$
$$g(0) = \frac{1}{2}(8-0)^2 = 32$$
$$g(8) = \frac{1}{2}(8-8)^2 = 0$$

Se $x = 0$, [PQ] é uma diagonal do quadrado e, neste caso, os triângulos [APQ] e [PQC] tem a mesma área, 32 cm^2.

$$f(0) = g(0) = 32$$

Se $x = 8$, os pontos P e Q coincidem com o ponto C, deixando de haver triângulos, ou seja a área é 0 cm^2.

$$f(8) = g(8) = 0\,.$$

4. Determina para que valor de x se tem:

4.1) a área do triângulo [APQ] igual a 7,5 cm^2

Resolução:

$f(x) = 7{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{2} + 32 = 7{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + 64 = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -7$

Como $x > 0$ então $x = 7$.

4.2) a área do triângulo [PQC] igual a 18 cm^2

Resolução:

$g(x) = 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (8 - x)^2 = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 64 - 16x + x^2 = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \times 1 \times 28}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{16 \pm \sqrt{144}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 14$

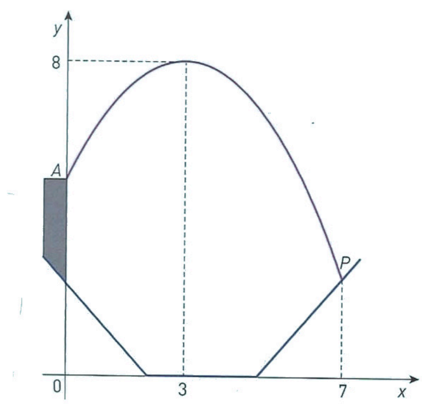
Como x varia de 0 cm a 8 cm, logo a área do triângulo [PQC] é igual a 18 cm^2 quando $x = 2$.

Proposta 23 da página 115.

No referencial da figura 2 encontra-se um esquema do jato de água que é lançado a partir de um ponto A, e cai no prato do bebedouro, num ponto P.

Sabe-se que a unidade do referencial é o centímetro, o ponto A tem de coordenadas (0,5) e a abcissa do ponto P é 7.

O ponto mais alto do jato de água tem como coordenadas (3, 8).



1. Determina, analiticamente, a expressão $g(x)$ relativa à parábola.

Resolução

O vértice da função $g(x)$ tem como coordenadas (3, 8) então $g(x)$ é uma família da função:

$g(x) = a(x-h)^2 + k; a \neq 0;$ então substituindo fica:

$g(x) = a(x-3)^2 + 8;$

Como A (0,5) é um ponto da parábola vamos substituir na função quadrática para determinar o valor do parâmetro a. Assim:

$$5 = a(0-3)^2 + 8 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Assim a expressão analítica da parábola é a função: $g(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 8$.

2. Identifica as coordenadas de P.

Resolução

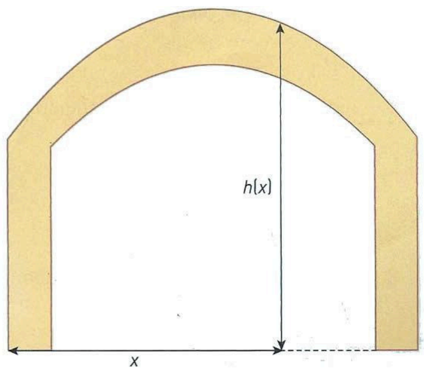
Como a abcissa do ponto P é 7, então $g(7) = -\frac{1}{3}(7-3)^2 + 8 = -\frac{16}{3} + \frac{24}{3} = \frac{8}{3}$

Logo o ponto P tem coordenadas (7, $\frac{8}{3}$).

Proposta 24 da página 115.

Na entrada de um túnel, existe um arco assente em dois pilares de igual altura. A altura do arco x metros de distância do pilar da esquerda é dada, em metros por:

$$h(x) = -\frac{1}{8}(x-4)^2 + 7;$$



1. Mostra que $h(0) = 5$ e interpreta o resultado.

Resolução

$$h(0) = -\frac{1}{8}(0-4)^2 + 7 = -\frac{16}{8} + 7 = 5$$

Significa que a distância entre os dois pilares é de 5 m.

2. Indica a altura máxima do arco.

Resolução

O vértice da parábola tem como coordenadas (4, 7), logo a altura máxima do arco são 7 m.

3. Determina a largura do túnel.

Resolução

Vamos determinar os zeros da função:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}(x-4)^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}(x^2 - 8x + 16) + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{8} + x - 2 + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{8} + x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{20}{8}}}{-\frac{2}{8}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}}{-\frac{2}{8}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -4(-1 + \sqrt{\frac{7}{2}}) \vee x = -4(-1 - \sqrt{\frac{7}{2}}) \Leftrightarrow$$

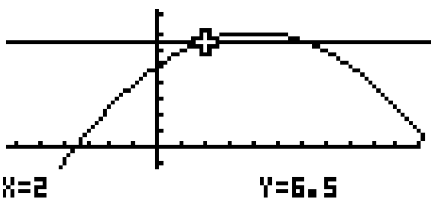
$$\Leftrightarrow x = -3{,}48 \vee x = 11{,}48$$

A distância entre os pilares é de 8 m.

4. A que distância do pilar da esquerda a altura do arco é superior a $6{,}5$ m?

Resolução

Fazendo a representação gráfica da função com a reta $y = 6{,}5$ então fica:

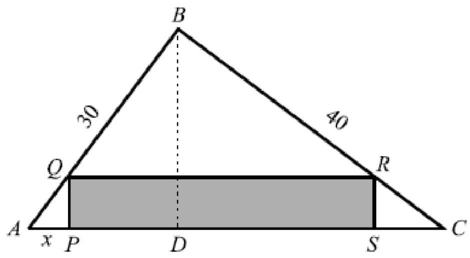


analisando o gráfico, este interseta a reta quando $x = 2$ e $x = 6$.

Proposta do GAVE

Na figura do lado direito, está representado um triângulo retângulo [ABC] cujos catetos, [AB] e [BC], medem, respetivamente, 30 e 40 unidades de comprimento.

O segmento [BD], representado a ponteado, é a altura do triângulo relativa à hipotenusa.



Considere que um ponto P se desloca sobre [AD], nunca coincidindo com A, nem com D.

Os pontos Q, R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que, para cada posição do ponto P, [PQRS] é um retângulo.

Sabe-se que:

- O segmento [PS] está contido em [AC];
- Os pontos Q e R pertencem a [AB] e a [BC], respetivamente.

Resolva os itens seguintes, utilizando exclusivamente métodos analíticos.

1.1) Mostre que $\overline{AC} = 50$;

Resolução:

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 30^2 + 40^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2500}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 50 \ \ uc.$$

1.2) Mostre que $\overline{BD} = 24$, $\overline{AD} = 18$ e $\overline{DC} = 32$

Resolução:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{50}{30} = \frac{40}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = 24$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \frac{50}{30} = \frac{30}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = 18$$

$$\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AC} = 50 - 18 = 32.$$

1.3) Seja x a distância do ponto A ao ponto P

Mostre que $\overline{PQ} = \frac{4}{3}x$ e que $\overline{SC} = \frac{16}{9}x$

<u>**Resolução:**</u>

Como os triângulos [APQ] e [ADB] são semelhantes, fica:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PQ}}{24} = \frac{x}{18} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{24x}{18} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{4}{3}x$$

Considerando os triângulos [CRS] e [BCD] são semelhantes, vem:

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{SC}}{32} = \frac{\frac{4}{3}x}{24} \Leftrightarrow \overline{SC} = \frac{32 \times \frac{4}{3}x}{24} \Leftrightarrow \overline{SC} = \frac{32 \times 4}{3 \times 24}x \Leftrightarrow \overline{SC} = \frac{16}{9}x.$$

1.4) Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área do rectângulo [PQRS].

14.1) Qual é o domínio da função f?

Resolução:

Como o ponto P desloca-se sobre [AD], nunca coincidindo com A, nem com D, então $D_f =]0,18[$.

14.2) Mostre que $f(x) = \frac{1800x - 100x^2}{27}$.

Resolução:

$$f(x) = \overline{PS} \times \overline{PQ} =$$

$$= (50 - x - \frac{16}{9}x) \times \frac{4}{3}x =$$

$$= \frac{450 - 9x - 16x}{9} \times \frac{4}{3}x =$$

$$= \frac{1800 - 100x^2}{27}.$$

14.3) Quais são as dimensões do retângulo que tem maior área?

Resolução:

$$f(x) = \frac{1800 - 100x^2}{27} = -\frac{100}{27}(x^2 - 18x) = -\frac{100}{27}[(x-9)^2 - 81] =$$

$$= -\frac{100}{27}(x-9)^2 + 300$$

O gráfico de f é uma parábola, com a concavidade voltada para baixo com vértice (9, 300). Logo, o retângulo de maior área é obtida para $x = 9$.

Assim, $\overline{PQ} = \frac{4}{3} \times 9 = 12$ e que $\overline{PC} = 50 - 9 - \frac{16}{9} \times 9 = 25$.

15) Seja g a função que, a cada valor de x, faz corresponder o perímetro do retângulo [PQRS]

15.1) Qual é o domínio da função g?

Resolução:

Como o ponto P desloca-se sobre [AD], nunca coincidindo com A, nem com D, então $D_g =]0,18[$.

15.2) Mostre que $g(x) = 100 - \frac{26}{9}x$.

Resolução:

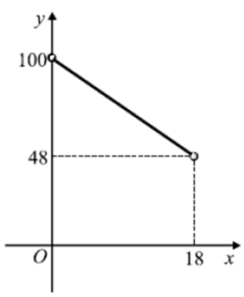
$$g(x) = 2 \times (\overline{PS} + \overline{PQ}) =$$

$$= 2 \times (50 - x - \frac{16}{9}x + \frac{4}{3}x) =$$

$$= 2 \times (\frac{450 - 9x - 16x + 12x}{9}) =$$

$$= 100 - \frac{26x}{9}.$$

15.3) Represente graficamente a função g.



15.4) Qual o contradomínio da função g .

Resolução:

$D'_g =]48,100[$.

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.

3.5 Aula 4

<table>
<tr><td rowspan="5">Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão

2010/2011</td><td>Planificação da Aula Nº 4</td></tr>
<tr><td>Ano: 10º Turma: CT1 Data: 22 de Fevereiro de 2011</td></tr>
<tr><td>Tema II - Funções e gráficos - generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.</td></tr>
<tr><td>- Família de funções quadráticas
- Resolução de inequações do 2º grau</td></tr>
<tr><td>Professora estagiária: Ângela Martins</td></tr>
</table>

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- Famílias de funções quadráticas;
- Resolução de inequações do 2º grau.

PRÉ-REQUISITOS:

- Identificar funções quadráticas;
- Aplicar a função quadrática para resolver problemas da vida real;
- Usar a calculadora gráfica para representar funções quadráticas;
- Calcular os zeros de uma função quadrática;
- Identificar o comportamento da família de funções do tipo: $y = a(x-h)^2 + k; a \neq 0$;
- Identificar, através da representação gráfica de uma função: domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, extremos (relativos e absolutos).

OBJETIVOS

- Determinar o vértice de uma função do tipo: $y = ax^2 + bx + c\,; a \neq 0$
- Escrever a equação do eixo de simetria de uma função do tipo: $y = ax^2 + bx + c\,; a \neq 0$
- Resolver inequações do 2º grau;
- Aplicar as inequações do 2º grau para resolver problemas da vida real.

MATERIAIS E RECURSOS:

- Quadro Interativo;
- Datashow;

- Computador;
- Calculadora gráfica;
- Manual Adotado: Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). Novo Espaço 10 - Matemática A. Porto Editora.

SUMÁRIO:

- Estudo da família de funções do tipo $y = ax^2 + bx + c\,;\, a \neq 0$;
- Resolução de inequações do 2º grau;
- Resolução das propostas 46, 50 das páginas 50 e 55 respetivamente.

ESTRATÉGIAS:

A aula inicia-se com o estudo de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c\,;\, a \neq 0$, onde serão calculados os zeros da função, determinação do vértice da parábola (apresentação de dois processos) e do eixo de simetria. De seguida serão resolvidas inequações de 2º grau e no final será resolvido um exercício de um teste intermédio de 2010.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Consideremos a seguinte função f tal que $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Cálculos dos zeros da função f :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

Recorrendo à fórmula resolvente da equação do 2º grau, tem-se:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\times 1\times 8}}{2\times 1} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

Os zeros da função são 2 e 4.

O gráfico da função f é uma parábola que interseta o eixo das abcissas nos pontos $(2\,,0)$ e $(4\,,0)$.

Vértice:

Seja $V(x_v\,, y_v)$ o vértice da parábola.

Atendendo a que a parábola é simétrica em relação ao eixo $x = x_v$, tem-se:

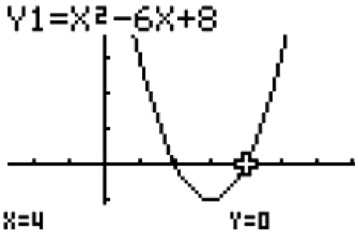
$$x_v = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Conhecida a abcissa do vértice, basta calcular a sua imagem para obter a ordenada:

$$y_v = f(x_v) \Leftrightarrow y_v = f(3) \Leftrightarrow y_v = 3^2 - 6\times 3 + 8 \Leftrightarrow y_v = -1.$$

O vértice da parábola é $(3\,,-1)$.

Fazendo um esboço do gráfico da função f obtemos:



Domínio: $\Re$

Contradomínio: $[-1,+\infty[$

Sinal:

- em $]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$ a função f é positiva;
- em $]2,4[$ a função f é negativa.

Monotonia e Extremos:

- em $]-\infty,3]$ a função f é decrescente.
- em $[3,+\infty[$ a função f é crescente.
- Mínimo absoluto é -1.
- Minimizante é 3.

O cálculo dos zeros da função f teve um papel importante para a determinação das coordenadas do vértice da parábola.

Vamos, de seguida apresentar outros processos que permitem determinar as coordenadas do vértice, mesmo em situações em que a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ não tem zeros.

Determinação do vértice da parábola

Retomemos a função f, tal que $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Se $f(x) = a(x-h)^2 + k$ conclui-se que as coordenadas do vértice da parábola são $(h\,,k)$.

Assim vamos escrever a função f na forma: $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

Então,

$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1.$

Se $f(x) = (x-3)^2 - 1,$ então $(h, k) = (3, -1).$

Outro processo:

$f(x) = x^2 - 6x + 8.$

Vamos determinar o vértice da parábola associada à função g tal que $g(x) = x^2 - 6x$.

Os zeros da função g correspondem às soluções de uma equação incompleta do 2º grau: $x^2 - 6x = 0.$

$x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6.$

A abcissa do vértice é o valor da semi-soma dos zeros identificados.

Abcissa do vértice: $\frac{0+6}{2} = 3.$

Ordenada do vértice: $g(3) = 3^2 - 6 \times 3 = -9.$

O gráfico da função g é uma parábola de vértice $(3, -9).$

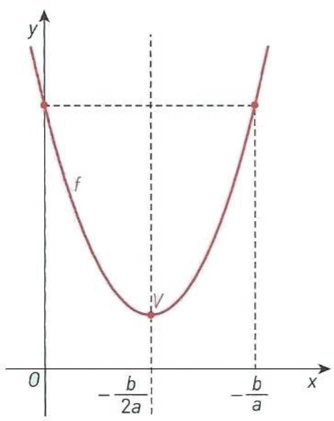
Sendo $f(x) = g(x) + 8$ o gráfico da função f obtém-se a partir do gráfico g deslocando-o 8 unidades para cima. Então o vértice da parábola representada pela função f , tal como a figura sugere, tem as coordenadas $(3, -1).$

Nota:

Partindo da expressão analítica que define uma função quadrática:

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

Começa-se por resolver a equação $f(x) = f(0)$, ou seja:



$$
\begin{aligned}
& ax^2+bx+c=c \\
\Leftrightarrow\ & ax^2+bx=0 \\
\Leftrightarrow\ & x(ax+b)=0 \\
\Leftrightarrow\ & x=0 \vee x=-\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

As soluções da equação são abcissas de pontos da parábola simétricos em relação ao eixo de simetria.

Assim, a abcissa do vértice é metade de $-\frac{b}{a}$ que é igual a $-\frac{b}{2a}$.

As coordenadas do vértice são: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

QUESTÕES A RESOLVER NA AULA

Proposta 46 da página 50.

Considera a parábola de equação $y=-3x^2+6x+2$.

a) Transforma a equação dada numa expressão do tipo $y=a\,(x-h)^2+k$.

Resolução:

A equação

$$
\begin{aligned}
y &= -3x^2+6x+2 \\
&= -3(x^2-2x+1-1)+2 \\
&= -3(x^2-2x+1)+2+3 \\
&= -3(x-1)^2+5.
\end{aligned}
$$

b) Indica as coordenadas do vértice.

Resolução:

As coordenadas do vértice são $(h,k)=(1,5)$.

c) Escreve uma equação do eixo de simetria.

Resolução:

O eixo de simetria é $x=h$ ou seja $x=1$.

d) Indica o intervalo do domínio onde a função é crescente.

Resolução:

A função é crescente em $\left]-\infty, 1\right]$.

<u>Resolução de inequações do 2º grau</u>

<u>Proposta 50 da página 55</u>

Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 - 9 > 0$

Resolução:

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

C.S $= \left]-\infty, -3\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

b) $2(1-3x^2) \leq x$

Resolução:

$2(1-3x^2) \leq x \Leftrightarrow 2 - 6x^2 - x \leq 0$

Cálculo dos zeros da equação:

$$2 - 6x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-6) \times 2}}{2 \times (-6)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{-12} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{-12} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = \frac{1}{2}$$

C.S $= \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $x^2 + 2x > \frac{x+2}{3}$

Resolução:

$$x^2 + 2x > \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6x}{3} > \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 > 0$$

Cálculo dos zeros da equação:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{6} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{3}$$

C.S $= \left]-\infty, -2\right] \cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right]$

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Participação na exposição do tema;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.

3.6 Aula 5

<table>
<tr><td rowspan="5">Escola Secundária Com 3º Ciclo do Fundão

2010/2011</td><td>Planificação da Aula Nº 5</td></tr>
<tr><td>Ano: 10º Turma: CT1 Data: 23 de Fevereiro de 2011</td></tr>
<tr><td>Tema II - Funções e gráficos - generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.</td></tr>
<tr><td>- Família de funções quadráticas
- Resolução de inequações do 2º grau</td></tr>
<tr><td>Professora estagiária: Ângela Martins</td></tr>
</table>

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS:

- Famílias de funções quadráticas;
- Resolução de inequações do 2º grau.

PRÉ-REQUISITOS:

- Identificar funções quadráticas;
- Usar a calculadora gráfica para representar funções quadráticas;
- Identificar, através da representação gráfica de uma função: domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, extremos (relativos e absolutos), continuidade, injectividade e paridade;
- Calcular os zeros de uma função quadrática;
- Determinar o vértice de uma função do tipo: $y = ax^2 + bx + c\,;\, a \neq 0$;
- Escrever a equação do eixo de simetria de uma função do tipo: $y = ax^2 + bx + c\,;\, a \neq 0$.

OBJETIVOS

- Aplicar a função quadrática para resolver problemas da vida real;
- Resolver inequações do 2º grau;
- Aplicar as inequações do 2º grau para resolver problemas da vida real.

MATERIAIS E RECURSOS:

- Quadro Interativo;
- Datashow;
- Computador;

- Calculadora gráfica;
- Manual Adotado: Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). Novo Espaço 10 - Matemática A. Porto Editora.

SUMÁRIO:

- Resolução de exercícios relacionados com a função quadrática;
- Resolução de um exercício de um Teste Intermédio de 2010.

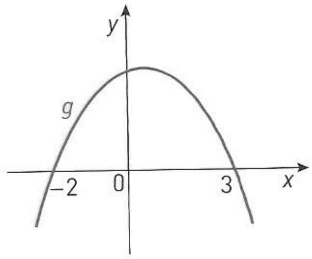
ESTRATÉGIAS:

A resolução dos exercícios, tem por objetivo consolidar os conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo da unidade didática. Os alunos irão ser frequentemente solicitados a participarem ao longo da aula.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

Exercício: Sejam f e g funções quadráticas tais que:

$f(x) = x^2 + 3x + 2$ e a função g admite a representação gráfica da figura.



Determina os valores de x que satisfazem a condição:

a) $f(x) < 0;$

b) $f(x) \cdot g(x) > 0.$

Resolução:

a) Comecemos por determinar os zeros da função f .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Conhecidos os zeros da função e o sentido da concavidade, um esquema como o da figura ao lado permite concluir que:

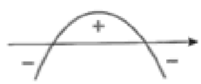
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2,-1\right[$.

b) Para determinar os valores de x que satisfazem a condição $f(x) \cdot g(x) > 0$ basta representar no mesmo quadro de sinal de ambas as funções e atender às regras dos sinais da multiplicação.

	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x) \cdot g(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Logo $f(x) \cdot g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1,3\right[$.

Na resolução de inequações do 2º grau é útil ter em atenção a seguinte informação:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

<u>Problema:</u> Uma bola é lançada na vertical de baixo para cima.

A altura h, em metros a que se encontra do solo, t segundos após o lançamento, é dada por:

$$h(t) = -5t^2 + 30t + 1$$

a) Determina a altura a que a bola se encontrava no instante inicial.

Resolução:

No instante inicial, $t = 0$

$h(0) = -5 \times 0^2 + 30 \times 0 + 1 = 1$

Logo a bola encontrava-se a uma altura de 1 metro.

b) Calcula $h(2)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.

Resolução:

$h(2) = -5\times 2^2 + 30\times 2 + 1 = 41$

Significa que, ao fim de 2 segundos, após o lançamento, a altura da bola ao solo era de 41 metros.

c) Determina a altura máxima atingida pela bola e o instante em que ocorreu.

Resolução:

O gráfico da função h é uma parábola que tem a concavidade voltada para baixo. Logo a função atinge o seu máximo no vértice da parábola.

As coordenadas do vértice são: $\left(-\dfrac{b}{2a}, h\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right) = \left(\dfrac{30}{10}, h\left(\dfrac{30}{10}\right)\right) = (3, h(3))$

Então $f(3) = -5\times 3^2 + 30\times 3 + 1 = 46$

A altura máxima foi 46 metros e ocorreu 3 segundos após o lançamento da bola.

d) Em que intervalo de tempo a bola se encontrou a mais de $26m$ de altura?

Resolução:

Para determinar o intervalo de tempo em que a bola se encontrou a mais de $26m$ de altura, teremos que resolver a seguinte inequação de 2º grau:

$$-5t^2 + 30t + 1 > 26 \Leftrightarrow -5t^2 + 30t - 25 > 0$$

Cálculo dos zeros da equação:

$$-5t^2 + 30t - 25 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4\times(-5)\times(-25)}}{2\times(-5)}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-30 \pm \sqrt{900-500}}{-10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-30 \pm 20}{-10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 5$$

C.S $= \left]1,5\right[$

e) Em que instante a bola atingiu o solo?

$$-5t^2+30t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{-30\pm\sqrt{30^2-4\times(-5)\times(1)}}{2\times(-5)}$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{-30\pm\sqrt{921}}{-10} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t\approx 6.03 \vee t=-0.03$$

A bola atingiu o solo ao fim de 6 segundos (aproximadamente).

Exercício - (Teste Intermédio 05/05/2010)

A figura 1 representa o projeto de um canteiro com a forma de um triângulo isósceles

Nesse triângulo, a base $[AB]$ e a altura relativa a esta base medem ambas 12 metros.

O canteiro vai ter uma zona retângular, destinada à plantação de flores, e uma zona relvada, representada a sombreado na figura.

O lado $[DG]$ do retângulo está contido em $[AB]$ e os vértices E e F pertencem respetivamente, a $[AC]$ e a $[BC]$.

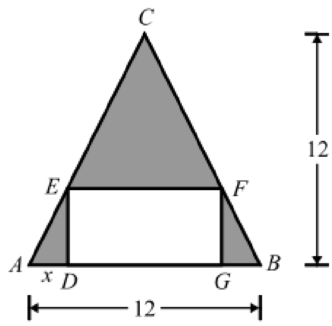


Figura 1

Seja x a distância, em metros, do ponto A ao ponto D ($x\in\,]0,6[$).

Resolva os três itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

__**Nota:**__ a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

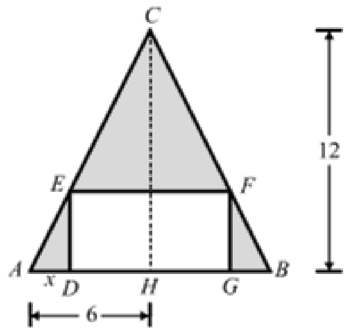
a) Mostre que a área, em metros quadrados, da zona relvada é dada, em função de x, por

$$S(x)=4x^2-24x+72$$

Resolução:

Como os triângulos $[ADE]$ e $[AHC]$são semelhantes, temos o seguinte:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CH}} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{\overline{ED}}{12} \Leftrightarrow 6\overline{ED} = 12x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{ED} = 2x$$



Logo como $\overline{DG} = 12 - 2x$, vem que a área do retângulo $[DEFG]$ é dada em função de x, por $2x\,(12-2x)$.

Então, a área da zona relvada é dada, em função de x , por

$$S(x) = \frac{12\times 12}{2} - 2x\,(12-2x) = 4x^2 - 24x + 72$$

b) Determina o valor de x , para o qual a área da zona relvada é mínima e calcule essa área.

Resolução:

Tem-se que:

$$4x^2 - 24x + 72 = 4(x^2 - 6x) + 72 =$$
$$= 4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 72 = 4(x^2 - 6x + 9) + 72 - 36 =$$
$$= 4(x-3)^2 + 36.$$

Logo o gráfico da função S é uma parábola que tem a concavidade voltada para cima cujo vértice v tem como coordenadas $(3,36)$.

Logo o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima é 3 e a respetiva área é $36.$

c) Determine o conjunto dos valores de x , para os quais a área da zona relvada é superior a $40\,m^2$.

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

Resolução:

Para os que a área da zona relvada seja superior a $40\,m^2$ temos que resolver a seguinte inequação:

$$4x^2 - 24x + 72 > 40 \wedge x \in \left]0,6\right[.$$

Assim,

$$4x^2 - 24x + 72 > 40 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 72 - 40 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 32 > 0$$

A solução desta última inequação pode ser encontrada através do estudo do sinal da função quadrática $y = 4x^2 - 24x + 32 = 0$.

Para o efeito, determinam-se os zeros:

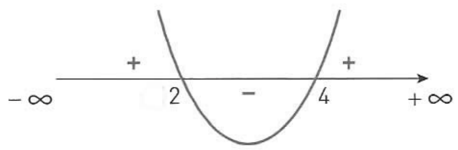
$$4x^2 - 24x + 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \times 4 \times 32}}{2 \times 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 512}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24 \pm 8}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

Conhecidos os zeros e sabendo que a concavidade da parábola é voltada para cima, o seguinte esquema permite visualizar a distribuição do sinal.



Assim o conjunto de solução da inequação: $4x^2 - 24x + 32 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 4$.

Como $x \in \left]0, 6\right[$, o conjunto de valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a 40 m^2 é $x \in \left]0, 2\right[\cup \left]4, 6\right[$.

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspectos:

- Interesse demonstrado durante a aula;
- Colaboração com a professora e com os colegas na resolução dos exercícios/problemas propostos;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente.

Capítulo 4

Conclusão

O Estágio Pedagógico é uma das etapas mais importante na formação de qualquer professor. É através dele que o professor estagiário tem contacto com a prática pedagógica. O estágio pedagógico emerge assim, como um momento indispensável no processo de transição de aluno para professor, desenvolvendo fatores essenciais na formação e no desenvolvimento do futuro professor, nomeadamente o contacto com a Comunidade Escolar.

Ao longo do Estágio Pedagógico, tive sempre a preocupação de preparar as aulas com rigor, empenho, responsabilidade e dedicação, adotando várias estratégias pedagógicas de ensino relativamente à apresentação e exploração dos conteúdos programáticos, tendo como principal objetivo a aprendizagem do aluno, interagindo sempre com eles, de forma a criar um ambiente de aprendizagem.

Cada vez mais, o ensino da matemática é bastante exigente, tendo por objetivo dotar os alunos de competências relacionadas com representação, comunicação e raciocínio em Matemática, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, e a compreensão e disposição para usar e apreciar a Matemática em diversos contextos, indo ao encontro das necessidades dos alunos. Portanto, tenho consciência enquanto docente, de que esta é uma profissão de elevada responsabilidade a qual deve ser exercida com o maior cuidado, empenho, dedicação e competência.

Apesar de ter alguma experiência como docente, senti algumas dificuldades na planificação das aulas, principalmente na forma como articular o que estava planificado com a aula em si. Contudo, estas dificuldades foram superadas e contribuíram para o meu enriquecimento e desenvolvimento pedagógico, pois aprendi bastante com todas as minhas dificuldades iniciais.

No que diz respeito aos alunos, estes participaram com motivação e empenho em todas as atividades propostas, interagindo na sala de aula, proporcionando um bom ambiente de aprendizagem.

Considero que o estágio representou um momento muito importante para mim enquanto futura docente, uma vez que contribuiu para um desenvolvimento de competências pessoais e profissionais, permitindo refletir sobre o processo de ensino/aprendizagem, estratégias utilizadas, aperfeiçoando assim o meu desempenho.

Bibliografia

[1] Anton, H., Rorres, C. (2001). *Álgebra Linear com Aplicações*, 8ª Edição, Bookman. Porto Alegre.

[2] Balsa, C. (2012). *Capítulo 4-Valores e Vetores Próprios*. Departamento de Matemática, Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança. Disponível em: http://www.ipb.pt/~balsa/teaching/1011/M1/cap4_prt.pdf

[3] Costa, B.; Rodrigues, E. (2010). *Novo Espaço - Matemática A 10º Ano - Parte 2*, Porto Editora.

[4] Harm Bart, Marinus A. Kaashoek, André C. M. Ran (2010). *A State Space Approach to Canonical Factorization with Application Operator Theory: Advances and Application*, Volume 200, pp. 233-247.

[5] Hisham Abou-Kandil, Gerhard Freiling, Vlad Ionescu, Gerhard Jank (2003). *Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory*, Springer.

[6] Kalman, R. (1964). *When is a Control System Optimal?*, American Society of Mechanical Engineers Transactions Series D: Journal of Basic Engineering, 86, pp. 1-10.

[7] Luz, C. (2005). *Valores e Vectores Próprios*. Departamento de Matemática, Escola Superior de Tecnologia de Setúbal do Instituto Politécnico de Setúbal, pp. 1-17. Disponível em: http://ltodi.est.ips.pt/alga/diversos/Teoria/valvec0506.pdf

[8] Marques, M. (2004). *Valores e vectores próprios*. Universidade do Algarve. Disponível em: http://w3.ualg.pt/~gmarques/Ficheiros/v-v-pps-20-23-.pdf

[9] Palin, V. V. (2009). *Solvability of Matrix Riccati Equations*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 163, No. 2, pp. 176-182.

[10] Peter Lancaster, Leiba Rodman (1995). *Algebraic Riccati Equations*, Oxford University Press.

[11] Petrichkovieh, V. M.; Prokip, V. M. (1983). *On commom divisors of matrix polynomials*, Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya, Issue 18, pp. 23-26.

[12] Programa de Matemática do Ensino Secundário 10º ano - Cursos Científico Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Disponível em: www.dgidc.min-edu.pt/.../Programas/matematica_a_10.pdf

[13] Prokip, V. M. (1994). *On the Solvability of the Riccati Matrix Algebraic Equation*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 46, No. 11, pp. 1763-1766.

[14] Santos, Reginaldo J. (2009). *Introdução à Álgebra Linear*, Universidade Federal de Minas Gerais, pp. 148-156.

[15] Soveral, A.; Viegas Silva, C. (2008). *Matemática – 10º ano - volume 2*. Texto Editora.

[16] Tamariz, A.D.R. (2005). *Discrete-time algebraic Riccati inequation neuro-LMI solution IEEE International Congerence on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 2, pp. 1748-1752.