UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

# Uma Contribuição para o Ensino do Conceito de Derivada

Versão final após defesa

**João Kanansevele**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

**Matemática para Professores**

(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Alberto Manuel Tavares Simões

**Covilhã, julho de 2018**

# Dedicatória

Dedico este trabalho a um Ser invisível, mas presente em todas as circunstâncias da minha vida e por ser a fonte da sabedoria que me permitiu realizar este trabalho.

Dedico ainda este trabalho ao professor Dr. Afonso Ernesto Júnior da Escola Superior Politécnica do Zaire/Soyo e ao Professor Sebastião Lukeba do Instituto Médio Politécnico do Soyo.

Não poderei jamais esquecer os meus pais, Pedro Morais e Florinda Wandanda. Foi graças a eles, e aos seus sacrifícios, que me permitiram concluir esta jornada. Estou certo que muito se orgulham das metas que atingi e que também foram as deles. Peço ao Criador que os proteja e lhes dê mais vida para viverem perto de mim.

Dedico também a todos os meus irmãos. A vossa fraternidade possibilitou-me alcançar todos os objetivos nesta longa trajetória que foi a minha formação académica e humana.

# Agradecimentos

Antes de tudo, a minha mais profunda gratidão a Deus, detentor do conhecimento que me inspira e me dá vida.

Agradeço imenso ao meu orientador Professor Doutor Alberto Manuel Tavares Simões que não poupou esforços no sentido de me ajudar a realizar este trabalho.

Agradeço também a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior, pela competência, pela harmonia e pela responsabilidade na condução da minha formação e que me permitiram concluir com êxito a parte lectiva do Mestrado em Matemática para Professores. Sem esquecer todos aqueles que contribuíram em apoio moral, financeiro e material durante toda minha formação.

A todos os meus colegas de turma. Apesar das dificuldades sentidas por cada um de nós para se enquadrar no ambiente comum, por sermos diferentes em pensamento e modo de agir, fomos sempre solidários o que possibilitou uma boa convivência e um bom ambiente de trabalho, fundamental para a realização desta dissertação.

# Resumo

A motivação para a realização deste trabalho surge em primeiro lugar devido à grande importância que um conceito tão “simples”, como é o conceito de derivada, desempenha em grande parte nos fundamentos de todas as ciências exatas. Sem este conceito estamos certos que a ciência não seria como a vemos hoje. E na verdade, estamos certos ainda que seria impossível construir grande parte das teorias que conhecemos sem a introdução deste singelo conceito. Fizemos assim uma recolha em inúmeros livros de forma a podermos reunir, num só manual, os conteúdos que nos parecem serem os mais importantes e adequados para uma introdução no ensino/aprendizagem do conceito.

Apresentamos detalhadamente a forma como o conceito surgiu, a definição, os teoremas e as fórmulas de derivação assim como as várias utilizações que podem ser feitas no estudo das funções.

Analisámos ainda alguns manuais usados actualmente e no passado, no ensino secundário, para perceber se a forma como o conceito é introduzido sofreu alterações ao longo dos anos e se está a ser feito de forma adequada.

Com este trabalho, pretendeu-se escrever um texto de apoio útil que permitisse aos utilizadores (alunos e professores) assimilarem os conteúdos relacionados com o conceito de derivada nos diferentes níveis de ensino onde ele é ensinado.

# Palavras-chave

Derivada, Teorema de Fermat, Teorema de Rolle, Teorema de Lagrange, Teorema de Cauchy, Extremos Relativos, Extremos Absolutos, Concavidades, Pontos de Inflexão, Ensino da Derivada, Aplicações da Derivada.

# Abstract

The motivation for this work arises first because of the great importance that such a simple concept, as the concept of derivative, plays to a large extent in the foundations of all exact sciences. Without this concept we are certain that science would not be as we see it today. And indeed, we are still certain that it would be impossible to build much of the theories we know without the introduction of this simple concept. We have thus collected a number of books so that we can gather in one handbook the contents that seem to us to be the most important and appropriate for an introduction in teaching / learning the concept.

We present in detail how the concept came about, the definition, theorems and derivation formulas as well as the various uses that can be made in the study of functions.

We have also looked at some textbooks used today and in the past in secondary education to see if the way the concept is introduced has changed over the years and if it is being done properly.

With this work, it was intended to write a useful support text that would allow users (students and teachers) to assimilate content related to the concept of derivative in the different levels of teaching where it is taught.

# Keywords

Derivative, Fermat's Theorem, Rolle's Theorem, Lagrange's Theorem, Cauchy's Theorem, Relative Extrema, Absolute Extrema, Concavity, Inflection Points, Derivative Teaching, Derivative Applications.

# Índice

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Capítulo 1

# Introdução

A derivada de uma função $f$ em um ponto $x_0$, denotada por $f'(x_0)$, é um dos conceitos mais usados e fundamentais nas ciências exatas. O processo de encontrar a derivada de uma função, denominado de diferenciação ou derivação, é uma das principais ferramentas utilizadas no estudo de diversas propriedades e nas mais variadas aplicações. O conceito de derivada de uma função real de variável real surge fundamentalmente no ensino secundário constituindo uma grande parte do cálculo infinitesimal. Os matemáticos que mais vezes são apontados como sendo os que introduziram pela primeira vez o conceito, de forma independente, foram Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). No entanto, veremos que antes deles, muitos outros já tinham dado início aos primeiros estudos que conduziram ao aparecimento do conceito.

Apresentado inicialmente de uma forma pouco clara e de difícil compreensão, manteve-se inalterado até meados do século XIX. O aparecimento de uma notação mais clara e de fácil compreensão por todos os estudiosos foi consequência do uso cada vez mais exaustivo do conceito e das suas aplicações. A partir do momento em que surgiu uma notação clara e precisa, a complexidade das suas aplicações intensificou-se. Este facto leva os alunos do ensino secundário, em sua grande maioria, a não assimilar o conceito e a não entender a forma como é aplicado nos casos práticos. Dadas as dificuldades sentidas no ensino secundário, o conceito é alvo de um estudo mais aprofundado em algumas disciplinas do ensino superior, obrigando os alunos a recordar as propriedades e aplicações assimiladas anteriormente.

O estudo das aplicações da derivada contribui em grande medida para o desenvolvimento prático nas áreas onde este conceito é aplicado. Tendo em conta a realidade de alguns cursos, onde é aplicado o conceito de derivada, não é possível generalizar a utilização que é feita do conceito nas mais diversas aplicações, mas sim, particularizar para cada uma das áreas em causa. Para esse efeito, é necessário que haja interesse e vontade para implementar nestes cursos metodologias próprias e diferenciadoras. Sabendo da importância do conceito de derivada, muitos cursos podem ser modelados e estruturados tendo como fio condutor as aplicações dadas ao conceito. Como ferramenta de cálculo fundamental na obtenção de máximos e mínimos, vamos aplicar o conceito em áreas como a Engenharia, a Economia, a Física, a Biologia e outras. Na Física, por exemplo, a derivada aplica-se de diversas formas de acordo com a situação em que o problema ocorre. Sobretudo no estudo de movimentos retilíneos uniformemente variados (aceleração). É assim que alguns ramos da Física denomina e apresenta o conceito de derivada para a resolução de alguns problemas o que mais uma vez pode gerar algumas dúvidas quando os leitores são alunos do ensino secundário. Na Matemática, a obtenção de máximos e mínimos de uma função tem muitas aplicações para a resolução de problemas da vida quotidiana. Nestes casos, são analisados problemas reais, onde são obtidos os extremos de uma função.

Tendo em conta a importância deste conceito e suas aplicações nos conteúdos programáticos do ensino secundário, e da importância que desempenha nas mais diversas áreas, propõe-se neste trabalho apresentar um estudo alargado do conceito e algumas das suas aplicações para analisar a forma como ele é apresentado em alguns manuais do ensino secundário. Neste contexto, esta dissertação é constituída por seis capítulos. Cada um dos capítulos está estruturado em secções. Finalizamos a dissertação com a correspondente bibliografia.

Neste 1º capítulo serão apresentados alguns aspetos históricos sobre o aparecimento da derivada.

No 2º capítulo, dividido em três secções, apresentaremos a definição formal de derivada, os teoremas que nos permitem estabelecer as principais propriedades e fórmulas da derivação e alguns dos mais importantes teoremas relacionados com o conceito, para melhor compreensão e contextualização do tema.

O 3º capítulo está estruturado em 5 secções. Temos uma primeira secção onde é apresentado o conceito de monotonia. Segue-se uma secção onde utilizamos o conceito de derivada para estudar os extremos de uma função. São apresentados os critérios para determinar a natureza dos extremos de uma função. Na quarta secção recorremos à derivada para estudar o sentido das concavidades e os pontos de inflexão de uma função. Finalizamos este capítulo com uma breve secção que nos permite mostrar mais uma aplicação que pode ser dada ao conceito de derivada. Referimo-nos às aproximações lineares.

Dedicámos o 4º capítulo para apresentar algumas aplicações que podem ser feitas ao conceito de derivada nas mais diversas ciências sob a forma de exercício e as respetivas resoluções. Na primeira secção são apresentadas algumas aplicações do conceito na Engenharia. Na segunda temos as aplicações na Biologia. Seguem-se algumas aplicações na Economia e por último aplicações na Física.

O 5º capítulo é dedicado à análise de como o conceito de derivada é apresentado em alguns manuais escolares do 11º e 12º anos de escolaridade.

No 6º capítulo teceremos algumas considerações finais, a título de conclusão, sobre este trabalho.

## 1.1. Aparecimento da Derivada

O surgimento do conceito de derivada não aconteceu de forma propositada, mas sim, devido aos estudos feitos sobre o conceito de função por parte de alguns investigadores. Na realidade, nunca poderíamos falar da derivada sem primeiro ter aparecido o conceito de função. O aparecimento da derivada, na verdade, foi extremamente complexo. Tendo em conta que os primeiros estudos sobre funções foram realizados na antiguidade pelos matemáticos gregos, o aparecimento da derivada não evoluía naquela época, porque o conceito ainda não estava devidamente definido. A natureza influenciou o homem a desenvolver ideias que o levaram à criação da derivada. Para a sua criação foi preciso o aparecimento e análise de muitos outros conceitos e métodos para primeiro conhecer melhor os infinitésimos.

Vários investigadores fizeram buscas acerca da evolução dos estudos que permitiram chegar ao conceito de derivada. A principal finalidade foi organizar cronologicamente todos os passos que levaram à construção do conceito e especificar os primeiros matemáticos que trabalharam com ele. O principal objetivo foi o de organizarem estes conteúdos de maneira a facilitar o estudo da história da derivada. Veremos ao longo desta secção a contribuição de alguns desses investigadores para melhor compreender como ocorreu o aparecimento e o desenvolvimento do conceito de derivada. Para mais detalhes consultar [7], [10], [20] e [21].

De acordo com Eves, [10], o conhecimento da Geometria Analítica, possibilitou a criação da derivada. No entanto existe controvérsia relativamente a este facto. Nicole d'Oresme (1320-1382), um dos pensadores mais originais do século XIV e um dos principais fundadores e divulgadores das ciências modernas, foi dos primeiros matemáticos a representar geometricamente as funções de uma variável. Mas para esse feito, teve que aguardar pelo desenvolvimento de várias notações e processos algébricos que seriam sistematizados apenas no século XVII, pelos franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1607-1665). Com o estudo das funções e a aplicação de alguns conceitos da Álgebra na Geometria, através de observações e experiências realizadas por Decartes, foi possível introduzir o conceito de coordenadas cartesianas. Com elas, surgiram alguns problemas geométricas que levaram os algebristas a interpretar o resultado analítico das funções. Antes da geometria analítica, as curvas eram estudadas sem recorrer ao plano cartesiano e evitando os infinitésimos. Assim os grandes matemáticos enfrentavam grandes dificuldades. Só com o empenho e as ideias dos dois matemáticos franceses foi possível a criação da derivada.

Segundo Fermat, a introdução de coordenadas veio facilitar o estudo das curvas que já se conheciam, e aliás, também a criação de novas curvas. Ao dedicar-se ao estudo de algumas destas funções, Fermat veio constatar que havia uma limitação do conceito clássico de reta tangente a uma curva. Tornou-se assim importante reformular tal conceito e encontrar um processo simples e rigoroso para traçar a reta tangente a uma curva num dado ponto, dando assim início a uma importante reestruturação do processo que o conduziu a escrever os trabalhos que ficaram conhecidos na História da Matemática como o “Problema da Tangente”. Feito isso, Fermat notou que para certas funções, a curva assumia valores que chamou de extremos, em pontos onde a tangente era uma reta horizontal. Ao comparar o valor assumido pela função nesses pontos com a imagem de pontos muito próximos, constatou que a diferença era quase nula. Assim, concluiu que o estudo de extremos e de retas tangentes estava relacionado. Logo, surge o conceito da derivada. Mas contudo, como o conceito de limite não estava claramente definido, ele não publicou a notação e os resultados sobre a derivada. Apesar disso, os trabalhos e as ideias de Fermat constituiram o embrião do conceito de derivada e levaram Pierre-Simon Laplace (1749-1827) a considera-lo "o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial".

Entretanto, no mesmo século em que Fermat procurava desenvolver o conceito de limite, surgem outros dois estudiosos que contribuíram de forma bastante significativa para o desenvolvimento da derivada. Referimo-nos a Leibniz e a Newton. Estes dois grandes matemáticos estavam a trabalhar no conceito de variável e a desenvolver as noções de $dx$ e $dy$ de forma a relacionar problemas geométricos com problemas algébricos. Surgiam assim os primeiro tópicos de Cálculo Diferencial. Esses avanços tornavam-se cada vez mais indispensável e úteis em aplicações às outras ciências.

O conceito de derivada surge assim como um dos dois conceitos centrais do Cálculo Infinitesimal consolidado e reforçado pelos avanços feitos por Newton e Leibniz. Matemáticos estes que são também muitas vezes considerados os pais do conceito. O outro conceito é chamado de anti derivada ou integral. Ambos estão relacionados fundamentalmente em teoremas do cálculo. Por sua vez, os dois conceitos centrais do cálculo estão relacionados com o conceito de limite.

De acordo com Paranhos, [20], para o estudo do movimento dos planetas, Newton teve de dar uma especial importância ao conceito das retas tangentes a curvas. Em 1665 criou o método de fluxos ou fluxões, atualmente denominado cálculo diferencial, quando pesquisava sobre o traçado das tangentes e tentava determinar o volume de barris de vinho.

Em 1666 Newton viu o que até aí Fermat, Cavalieri e Barrow não tinham visto. Ao desenvolver trabalhos sobre quadraturas, produziu um manuscrito que chamou de método inverso das fluxões, mostrando que o traçado das tangentes (derivação) e a quadratura das curvas (integração), são operações inversas uma da outra. Com este célebre manuscrito, surgiu a célebre frase “Se vi mais longe, foi porque me apoiei sobre ombros de gigantes”.

Apesar de ser um proeminente catedrático em Cambridge, Newton não tinha qualquer interesse em publicar os seus trabalhos e manuscritos, o que fazia com que os seus mais importantes trabalhos circulassem apenas entre um pequeno número restrito de pessoas.

Assim, ao esconder os seus trabalhos do mundo, correu o risco de ver as suas ideias desconhecidas e de muitas vezes serem redescobertas por outros. E foi precisamente o que aconteceu com Leibniz quando este visitou a Royal Society em 1676 numa visita diplomática a Londres. Leibniz teve acesso aos manuscritos de Newton e escreveu-lhe perguntando sobre séries infinitas. Recebeu duas cartas, denominadas de *Epistola Prior* e *Posterior*, onde Newton revelava alguns de seus pensamentos sobre séries infinitas e sobre o método de fluxões. Leibniz e Newton tinham visões e formulações bem distintas para o cálculo diferencial. Leibniz não considerava o conceito de movimento para chegar aos conceitos de derivada e integral. Ele pensou nas variáveis $x$ e $y$ como sendo grandezas que variavam por sucessão de valores infinitamente pequenos, introduzindo assim as notações $dx$ e $dy$ como sendo a diferença entre esses valores sucessivos. Uma forma de escrita totalmente diferente da usada por Newton. Surgiam assim os primeiro tópicos de Cálculo Diferencial. Esses avanços tornaram-se cada vez mais indispensáveis e úteis em aplicações às outras ciências.

Segundo Diniz, [7], em 1684 Leibniz deu um passo importante para o desenvolvimento do conceito de derivada ao publicar o famoso artigo "New methods for maximums and minimums, as well as tangents, which is neither impeded by fractional nor irrational quantities, and a remarkable calculus for them" (Novos métodos para máximos e mínimos, assim como tangentes, os quais não são impedidos por quantidades fracionárias e irracionais, e um cálculo notável para eles). A escrita deste artigo foi possível devido ao facto de, enquanto vivia em Paris, se ter encontrado com Christiaan Huygens (1629-1695) e com ele ter aprendido o método para encontrar tangentes a curvas algébricas, e posteriormente ter aperfeiçoado as fórmulas e notações para a derivada. Esse artigo trouxe o cálculo para os termos modernos, permitindo a que qualquer pessoa não especialista no assunto, resolvesse problemas de tangentes a partir das fórmulas do cálculo de Leibniz.

É a partir deste momento que começa uma longa e acalorada disputa no meio científico da época, sobre quem seria a mais importante autoridade do cálculo. O extremar de posições despoletou uma cisão entre os matemáticos que viviam no Reino Unido e os matemáticos do continente. O distanciamento entre os matemáticos agudizou-se. Enquanto o Cálculo "Leibniziano" ganhava cada vez mais adeptos no continente, entre eles a família Bernoulli, os matemáticos do Reino Unido ficaram cada vez mais isolados e distanciados. Quando voltaram a estabelecer relações com os europeus do continente, haviam não só perdido parte do avanço do cálculo como também não compreendiam muito bem a notação amplamente enraizada proposta por Leibniz. Apesar deste fato, o julgamento tranquilo da história considera que ambos foram os criadores independentes do cálculo e em particular da derivada. Newton antecipou-se a Leibniz em dez anos mas foi este último que melhor soube divulgar os seus avanços e a introduzir a simbologia que até hoje perdura, (ver [7] para mais detalhes).

É pelas mãos de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) que o cálculo se torna mais rigoroso a partir do século XVIII, dando particularmente um formato puramente algébrico à derivada. A ele se deve a notação usada hoje em dia no cálculo diferencial. Contudo, e apesar disso, certas propriedades de séries infinitas utilizadas para fundamentar a sua concepção de derivadas foram posteriormente refutadas e demonstradas como sendo falsas.

No século XIX, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), estabeleceu a definição que ainda hoje é dada à derivada:

> *"O limite de* $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ *quando* $i$ *se aproxima de* $0$*. A forma da função que serve como o limite da razão* $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ *dependerá da forma da função proposta* $y = f(x)$*. Para indicar sua dependência, dá-se à nova função o nome da função derivada" [7].*

Cauchy aperfeiçoou os seus estudos sobre a derivada apresentando fórmulas de derivação para todas as funções elementares desenvolvendo ainda a importante regra da cadeia. Serviu-se dos trabalhos de Lagrange para provar vários teoremas fundamentais do cálculo, contribuindo em larga medida para que a derivada e o cálculo diferencial passassem a fazer parte do cálculo moderno. Podemos então concluir que no século XIX, Cauchy veio fortificar os estudos iniciados por Lagrange, de forma a introduzir e formular o conceito e a definição de derivada tal como o conhecemos nos nossos dias.

# Capítulo 2

# Definições e Teoremas

Neste capítulo, iremos apresentar a definição matemática de derivada. Apresentaremos de igual modo alguns dos mais importantes teoremas envolvendo este conceito assim como as fórmulas de derivação para as funções elementares.

## 2.1. Definições

Segundo Newton, o conceito de derivada é um dos principais conceitos que podemos encontrar na matemática. Os alunos aprendem que nas funções um número de entrada gera um número de saída. Por exemplo, se na função dobro é inserido $3$, então a saída é $6$, enquanto na função tripla se é inserido $3$, então a saída é $9$. Mas no processo de derivação a entrada é uma função e a saída será outra função. Por exemplo, se na derivada é colocada uma função cúbica, então a saída é uma função quadrática.

As referências bibliográficas que nos permitiram elaborar esta secção foram [6], [7], [11] e [25].

Na notação matemática, o símbolo mais usado para representar a operação derivação de uma função é o sinal de apóstrofo, chamado usualmente de "linha". Então a derivada de $f$ é $f'$ ($f$ linha). Assim, em notação matemática temos que se $f(x) = x^2$ então $f'(x) = 2x$.

Vamos agora, numa primeira abordagem, apresentar uma construção interpretativa do conceito de derivada.

Se a função de entrada é o tempo, então a derivada dessa função é a taxa de variação. Se considerarmos uma função linear, ou seja, uma função cujo gráfico é uma reta, então sabemos que essa função pode ser escrita como $y = mx + b$, com

$$m = \frac{variação\ em\ y}{variação\ em\ x} = \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}.$$

Ou seja, o resultado será o valor exato para a variação da linha reta.

Vamos agora analisar o caso em que a função não é linear. Se a função não for uma linha reta, então a variação em $y$ é dividida pela variação em $x$, e nós teremos de calcular para cada ponto o valor exato dessa variação. Note que $y$ e $f(x)$ são duas notações diferentes para denotar a mesma coisa, ou seja, a saída da função. Vamos agora olhar para a taxa de variação por outra perspetiva. Sabendo que a reta que passa por dois pontos em uma curva é chamada de reta secante, a variação dessa reta secante pode ser expressa como

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

onde as coordenadas de um dos pontos são $(x, f(x))$ e $h$ é a distância horizontal entre os dois pontos. Agora, para calcular o deslocamento da curva, recorremos ao limite considerando $h \to 0$, ou seja,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vamos interpretar o resultado deste limite considerando a função quadrática $f(x) = x^2$ no ponto $x = 2$. Sabemos que $f(2) = 4$ e temos,

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4 + h$$

$$= 4$$

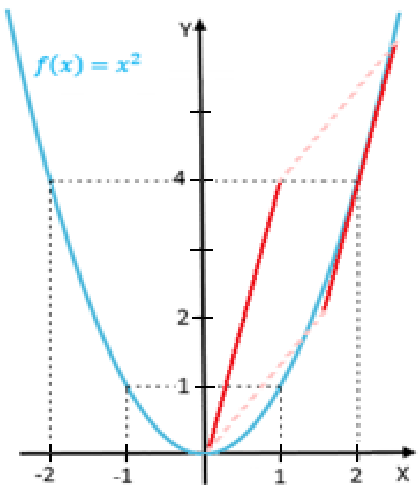


*Figura 1: Interpretação geométrica da derivada*

A questão que agora se coloca é o significado deste resultado $f'(2) = 4$. O seu significado é que o deslocamento da função quadrática no ponto $(2,4)$ é $4$, ou seja, a função cresce quatro vezes mais rápido em $y$ do que em $x$.

Consideremos agora o caso geral. Seja $f$ uma função real de variável real definida num intervalo $I \subset R$ . A taxa de variação média da função entre dois pontos $A(a, f(a))$ e $M(x, f(x))$ com $a, x \in I$ e $x \neq a$ , é dada por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A taxa de variação da função no ponto $A$ é o limite quando $x \to a$ da razão incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

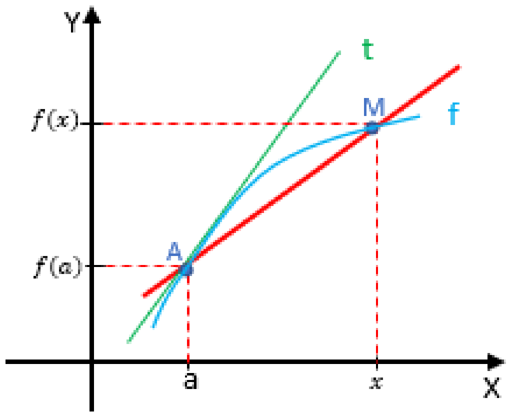



*Figura 2:* Reta tangente ao gráfico da função num ponto

A taxa de variação média da função entre os dois pontos $A$ e $M$ é assim o declive da reta $AM$, secante ao gráfico da função nos pontos $A$ e $M$. A reta $t$ cujo declive é igual a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

diz-se a reta tangente ao gráfico da função no ponto $A$.

Vamos agora apresentar a definição formal de derivada.

**Definição 2.1.1 (Derivada)**

Diz-se que uma função $f$, real de variável real, definida numa vizinhança de um ponto $a$, é diferenciável em $a$, se existir e é finito o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A este limite chama-se derivada de $f$ no ponto $a$ e denota-se por $f'(a)$. Temos assim,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A derivada é então o limite do valor do quociente diferencial, conforme as linhas secantes se aproximam da linha tangente.

A forma como a derivada é definida não é única, suponhamos que $h = x - a \Leftrightarrow x = a + h$ com $h \to 0$. Também podemos definir o limite da seguinte forma

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

**Definição 2.1.2 (Derivada à Esquerda)**
Diz-se que uma função $f$, real de variável real, definida numa vizinhança de um ponto $a$, é diferenciável à esquerda de $a$, se existir e for finito o limite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A este limite chama-se derivada de $f$ à esquerda do ponto $a$ e denota-se por $f'_e(a)$. Temos assim,

$$f'_e(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Também aqui, tendo em conta a outra forma de definir o limite, podemos considerar

$$f'_e(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

**Definição 2.1.3 (Derivada à Direita)**
Diz-se que uma função $f$, real de variável real, definida numa vizinhança de um ponto $a$, é diferenciável à direita de $a$, se existir e for finito o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

A este limite chama-se derivada de $f$ à direita do ponto $a$ e denota-se por $f'_d(a)$. Temos assim,

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Também aqui, tendo em conta a outra forma de definir o limite, podemos considerar

$$f'_d(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Note que se $f'_e(a) = f'_d(a)$, então $f$ é derivável ou diferenciável em $a$ e tem-se

$$f'(a) = f'_e(a) = f'_d(a).$$

**Definição 2.1.4 (Função Derivada)**

Diz-se que a função $f: D \subset R \to R$ é uma função diferenciável no conjunto aberto $D$ se for diferenciável em todos os pontos de $D$. A nova função, $f': D \subset R \to R$, $x \mapsto y = f'(x)$ chama-se função derivada de $f$.

**Nota 2.1.5**

Se $f$ é diferenciável num ponto $a$, o declive da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $A(a, f(a))$ é igual a $f'(a)$. A reta tangente ao gráfico nesse ponto tem por equação

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

## 2.2. Teoremas

Como vimos anteriormente na definição, é necessário utilizar o conceito de limite para calcular derivadas de funções por definição. Assim, vamos apresentar as regras gerais que permitem derivar qualquer tipo de função recorrendo à definição. Com isto, vamos ser capazes de deduzir as fórmulas de derivação que recorrentemente são utilizadas. Fórmulas essas que transformam o processo de derivação em manipulações algébricas, tornando esse processo numa tarefa fácil e agradável.

As referências bibliográficas que nos permitiram elaborar esta secção foram [1], [3], [18], [22] e [24].

**Teorema 2.2.1**

Seja $f$ uma função constante definida por $f(x) = c$, com $c \in R$ e $x \in R$. Temos $f'(x) = 0$, $x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $c' = 0$, $c \in R$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = c$ com $c \in R$. Temos,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0$$

$$= 0.$$

Assim, $f'(x) = 0,\ x \in R$.

**Teorema 2.2.2**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = x,\ x \in R$. Temos $f'(x) = 1,\ x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $x' = 1,\ x \in R$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = x,\ x \in R$. Temos,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$= 1.$$

Assim, $f'(x) = 1,\ x \in R$.

**Teorema 2.2.3**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = x^n,\ n \in N$ e $x \in R$. Temos $f'(x) = nx^{n-1},\ x \in R$.

**Nota 2.2.4**

Este resultado também é válido para $n \in R$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = x^n,\ n \in N$ e $x \in R$. Pela fórmula do binómio de Newton, sabemos que

$$(x+h)^n = \binom{n}{0}x^n\, h^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}\, h^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}\, h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1\, h^{n-1} + \binom{n}{n}x^0\, h^n,$$

com

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Vamos considerar a notação $\binom{n}{k} \coloneqq a_k \in R$. Tendo em conta a convenção $0! = 1$ temos $a_0 = 1$, $a_1 = n$ e $a_n = 1$. Assim, podemos reescrever $(x+h)^n$ da seguinte forma,

$$(x+h)^n = a_0x^n + a_1x^{n-1}h + a_2x^{n-2}h^2 + \cdots + a_{n-1}xh^{n-1} + a_nh^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}h + a_2x^{n-2}h^2 + \cdots + a_{n-1}xh^{n-1} + h^n.$$

Temos então,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + a_2x^{n-2}h^2 + \cdots + a_{n-1}xh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + a_2x^{n-2}h^2 + \cdots + a_{n-1}xh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(\,nx^{n-1} + a_2x^{n-2}h + \cdots + a_{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\,)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + a_2x^{n-2}h + \cdots + a_{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}.$$

Assim, $f'(x) = nx^{n-1}$, $n \in N$ e $x \in R$.

**Teorema 2.2.5**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$ e $x \in R$. Temos $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $x \in R$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$ e $x \in R$. Pela regra das potências sabemos que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Vamos considerar a mudança de variável $\frac{1}{n} = p$.

Temos assim,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= g'(x)$$

com $g(x) = x^p$. Considerando agora a Nota 2.2.4, temos $p \epsilon R$. Assim $g'(x) = p\, x^{p-1}$, x ∈ R.

Voltando à variável inicial temos,

$$g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Assim, concluímos que $f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $x \in R$.

**Teorema 2.2.6**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = a^x$, $a \in R^+$ e $x \in R$. Temos $f'(x) = a^x \ln a$, $x \in R$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = a^x$, $a \in R^+$ e $x \in R$.

Temos,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Consideremos a mudança de variável $a^h - 1 = z$, vamos ter $h = log_a(z+1)$ e $z$ a tender para $0$. Assim,

$$a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{z \to 0} \frac{z}{log_a(z+1)}$$

$$= a^x \lim_{z \to 0} \frac{z}{\frac{ln(z+1)}{ln\, a}}$$

$$= a^x\, ln\, a \lim_{z \to 0} \frac{z}{ln(z+1)}$$

$$= a^x\, ln\, a,$$

pois $log_a(z+1) = \frac{ln(z+1)}{ln\, a}$ e temos o limite notável

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{ln(z+1)} = 1.$$

Concluímos assim que $f'(x) = a^x\, ln\, a,\ x \in R.$

**Teorema 2.2.7**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = e^x,\ x \in R$. Temos $f'(x) = e^x,\ x \in R$.

**Demonstração:**

Considerando o teorema anterior, com $a = e$, vamos ter $f(x) = e^x,\ x \in R$.

Assim,

$$f'(x) = e^x\, ln\, e = e^x,$$

qualquer que seja $x \in R$.

**Teorema 2.2.8**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = \ln x,\ x \in R^+$. Temos $f'(x) = \frac{1}{x},\ x \in R^+$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = \ln x,\ x \in R^+$. Temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

Consideremos a mudança de variável $\frac{h}{x} = z$, temos

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{xz} \ln(1+z) = \frac{1}{x} \lim_{z \to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}$$

$$= \frac{1}{x},$$

pois, recorremos ao limite notável

$$\lim_{z \to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1.$$

Assim, $f'(x) = \frac{1}{x},\ x \in R^+$.

**Teorema 2.2.9**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = \log_c x,\ c \in R^+ \setminus \{1\},\ x \in R$. Temos $f'(x) = \frac{1}{x \ln c},\ x \in R$.

**Demonstração:**

Considerando o teorema anterior e as propriedades dos logaritmos, temos,

$$f(x) = \log_c x = \frac{\ln x}{\ln c}.$$

Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{ln(x+h)}{ln\, c} - \frac{ln\, x}{ln\, c}}{h}$$

$$= \frac{1}{ln\, c} \lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - ln\, x}{h}$$

$$= \frac{1}{ln\, c} (ln\, x)'$$

$$= \frac{1}{x\, ln\, c},$$

qualquer que seja $x \in R$.

**Teorema 2.2.10**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = sen\, x,\ x \in R$. Temos $f'(x) = cos\, x,\ x \in R$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = sen\, x,\ x \in R$. Considerando a fórmula trigonométrica

$$sen\, x - sen\, y = 2\, sen \frac{x-y}{2}\, cos \frac{x+y}{2}$$

quaisquer que sejam $x, y \in R$, vamos ter

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen\, x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2sen \frac{x+h-x}{2}\, cos \frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sen \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$= cos\, x.$$

Pois, fazendo a mudança de variável $z = \frac{h}{2}$, temos o conhecido limite notável

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{z\to 0} \frac{sen\, z}{z} = 1.$$

Assim, $f'(x) = cos\, x,\ x \in R$.

**Teorema 2.2.11**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = cos\, x,\ x \in R$. Temos $f'(x) = -sen\, x,\ x \in R$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = cos\, x,\ x \in R$. Considerando a fórmula trigonométrica

$$cos\, x - cos\, y = -2\, sen \frac{x+y}{2}\ sen \frac{x-y}{2}$$

quaisquer que sejam $x, y \in R$, vamos ter

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{cos(x+h) - cos\, x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2sen \frac{x+h+x}{2}\ sen \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= - \lim_{h \to 0}\ sen\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{sen\ \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -sen\, x.$$

O resultado foi obtido considerando a mesma mudança de variável feita na demonstração anterior e tendo em conta o mesmo limite notável.

Assim, $f'(x) = -sen\, x,\ x \in R$.

**Teorema 2.2.12**

Seja $f$ a função definida por $f(x) = tg\, x,\ \ x \in R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$. Temos, $f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$, $x \in R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$.

**Demonstração:**

Consideremos $f(x) = tg\, x,\ x \in R$. Considerando a fórmula trigonométrica

$$tg\, x - tg\, y = \frac{sen\,(x-y)}{cos\, x\, cos\, y}$$

quaisquer que sejam $x, y \in R\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,, k \in Z\right\}$, e o limite notável apresentado anteriormente, vamos ter

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{tg(x+h) - tg(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{sen\,(x+h-x)}{cos\,(x+h)\,cos\,x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\,h}{h} \frac{1}{cos\,(x+h)\,cos\,x}$$

$$= \frac{1}{cos^2\,x}.$$

Assim, $f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$, $x \in R\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,, k \in Z\right\}$.

**Teorema 2.2.13**

Seja $f$ uma função diferenciável e $c \in R$ uma constante. Se $g$ é uma função definida por $g(x) = c\,f(x)$, $x \in R$, então $g$ é diferenciável e temos $g'(x) = c\,f'(x)$, $x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $(c\,f)' = c\,f'$.

**Demonstração:**

Consideremos a função $g$ definida por $g(x) = c\,f(x)$, $c \in R$ e $f$ uma função diferenciável. Temos,

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= c\,f'(x),$$

pois $f$ é diferenciável. Assim, $g'(x) = c\,f'(x)$.

**Teorema 2.2.14**

Sejam $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis. Temos $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, $x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

**Demonstração:**

Consideremos $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis. Temos,

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

O caso da subtração é análogo. Assim, $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, $x \in R$.

**Teorema 2.2.15**

Sejam $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis. Temos $(f \times g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)g'(x)$, $x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $(f \times g)' = f'g + fg'$.

**Demonstração:**

Consideremos $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis. Temos,

$$(f\, g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\, g)(x+h) - (f\, g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) . g(x+h) - f(x) . g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

pois

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Assim, $(f \times g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)g'(x),\ x \in R.$

**Teorema 2.2.16**

Sejam $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis e $g(x) \neq 0,\ x \in R$. Temos $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Simbolicamente escrevemos $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\ g'}{g^2}$.

**Demonstração:**

Vamos considerar primeiro o caso particular $f(x) = 1$ e $g$ uma função diferenciável com $g(x) \neq 0,\ x \in R$. Temos,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h.g(x)g(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{g(x)} \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x+h)}$$

$$= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

pois

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}.$$

Para obtermos o resultado pretendido consideramos o teorema anterior (derivada da multiplicação de duas funções) e o facto de $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$. Assim,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\ \frac{1}{g}\right)'(x)$$

$$= f'(x)\ \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)$$

$$= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.$$

**Teorema 2.2.17**

Sejam $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis. Temos $(f \; o \; g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x),\; x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $(f \; o \; g)' = f'(g)\; g'$.

**Demonstração:**

Sejam $f$ e $g$ duas funções diferenciáveis. Temos,

$$(f \; o \; g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \; o \; g)(x+h) \; - (f \; o \; g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(g(x+h)\right) - f\big(g(x)\big)}{h}.$$

Vamos admitir que existe $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja $h \epsilon V_{\delta}(0)$, temos $(x+h) \in D_g$ e $g(x+h) - g(x) \neq 0$. Assim,

$$(f \; o \; g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(g(x+h)\right) - f\big(g(x)\big)}{h} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(g(x+h)\right) - f\big(g(x)\big)}{g(x+h) - g(x)} \times \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Fazendo a mudança de variável $g(x+h) = y$, temos que quando $h \to 0$ então $y \to g(x)$. Assim

$$(f \; o \; g)'(x) = \lim_{y \to g(x)} \frac{f(y) \; - f\big(g(x)\big)}{y - g(x)}\; g'(x)$$

$$= f'\big(g(x)\big)\; g'(x).$$

**Teorema 2.2.18**

Seja $f$ uma função diferenciável. Temo $(f(x)^n)' = n\,(f(x))^{n-1} f'(x),\; x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $(f^n)' = n\, f^{n-1}\, f'$.

**Demonstração:**

Como $f$ é diferenciável então existe $f'$. Consideremos $g(x) = x^n$. Pelo Teorema 2.2.3 sabemos que $g'(x) = n\, x^{n-1}$, $\mathrm{x} \in \mathrm{R}$.

Assim, podemos considerar

$$(f(x))^n = g(f(x)) = (g\ o\ f)(x).$$

Temos então, usando o Teorema 2.2.17,

$$\begin{aligned}\left((f(x))^n\right)' &= (g\ o\ f)'(x)\\ &= g'(f(x))\, f'(x)\\ &= n(f(x))^{n-1}\, f'(x).\end{aligned}$$

**Teorema 2.2.19**

Seja $f$ uma função diferenciável. Temos $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\, f'(x),\ x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $(e^f)' = e^f\, f'$.

**Demonstração:**

Como $f$ é diferenciável então existe $f'$. Consideremos $g(x) = e^x$. Pelo Teorema 2.2.7 sabemos que $g'(x) = e^x,\ x \in R$. Assim, podemos considerar

$$e^{f(x)} = g(f(x)) = (g\ o\ f)(x).$$

Temos então, usando o Teorema 2.2.17,

$$\begin{aligned}\left(e^{f(x)}\right)' &= (g\ o\ f)'(x)\\ &= g'(f(x))\, f'(x)\\ &= e^{f(x)}\, f'(x).\end{aligned}$$

**Teorema 2.2.20**

Seja $f$ uma função diferenciável. Temos $(ln\, f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ , $x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $(ln\, f)' = \frac{f'}{f}$.

**Demonstração:**

Como $f$ é diferenciável então existe $f'$. Consideremos $g(x) = ln\, x$. Pelo Teorema 2.2.8 sabemos que $g'(x) = \frac{1}{x},\ x \in\ R$. Assim, podemos considerar

$$ln(f(x)) = g(f(x)) = (g\ o\ f)(x).$$

Temos então, usando o Teorema 2.2.17,

$$(ln\, f(x))' = (g\ o\ f)'(x)$$

$$= g'(f(x))\, f'(x)$$

$$= \frac{1}{f(x)}\, f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

**Teorema 2.2.21**

Seja $f$ uma função diferenciável. Temos $(sen\, f(x))' = f'(x)\, cos\, f(x),\ x \in R$.

Simbolicamente escrevemos $(sen\, f)' = f' cos\, f$.

**Demonstração:**

Como $f$ é diferenciável então existe $f'$. Consideremos $g(x) = sen\, x$. Pelo Teorema 2.2.10 sabemos que $g'(x) = cos\, x,\ x \in R$. Assim, podemos considerar

$$sen\, f(x) = g(f(x)) = (g\ o\ f)(x).$$

Temos então, usando o Teorema 2.2.17,

$$(sen\, f(x))' = (g\ o\ f)'(x)$$

$$= g'(f(x))\, f'(x)$$

$$= cos\, f(x)\, f'(x).$$

## 2.3. Teoremas Fundamentais

Vamos agora enunciar e demonstrar alguns dos teoremas mais importantes que envolvem o conceito de derivada. Mais uma vez, as referências bibliográficas que nos permitiram elaborar esta secção foram [1], [3], [18], [22] e [24].

**Proposição 2.3.1**

Se $f: D \subset R \to R$ é uma função derivável em $a \in int\ D$, então $f$ é contínua nesse ponto.

**Demonstração:**

Para $x \in D$ , com $x \neq a$, temos

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Assim,

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

$$= f'(x) \cdot 0$$

$$= 0.$$

Ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, o que prova que a função $f$ é contínua em $a$.

**Proposição 2.3.2**

Uma função $f$ definida num intervalo aberto $I$ é diferenciável num ponto $a \in I$ se e só se existir um número $l$ tal que numa vizinhança de $a$ se verificar $f(x) - f(a) = l(x - a) + r(x)$, com $r$ uma função contínua e nula no ponto $a$ verificando o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x - a} = 0.$$

O número $l$ é único e igual a $f'(a)$.

**Demonstração:**

Nas condições do enunciado deduzimos que para $x \neq a$ temos,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l + \frac{r(x)}{x - a}.$$

Fazendo o limite em ambas as parcelas da igualdade anterior, com $x \to a$, temos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Isto prova que $f$ é diferenciável em $a$ e que $f'(a) = l$.

Reciprocamente, se $f$ é diferenciável no ponto $a$, definimos

$$r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

Obtemos $f(x) - f(a) = l(x - a) + r(x)$ com $l = f'(a)$.

Assim, a função $r$ verifica as condições da proposição, pois é a diferença de duas funções contínuas, logo é uma função contínua, é nula no ponto $a$ e verifica

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

$$= 0.$$

**Teorema 2.3.3 (Teorema do Valor Extremo ou Teorema de Weierstrass)**
Seja $f$ uma função. Se $f$ for contínua num intervalo fechado $[a, b]$, $a, b \in R$, então $Im(f)$ é um conjunto limitado e $f$ assume um valor mínimo absoluto, $f(x_m)$, e um valor máximo absoluto, $f(x_M)$, em $[a, b]$. Ou seja, existem $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que,

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

para todo $x \in [a, b]$.

**Nota 2.3.4**
Este Teorema aparece também muitas vezes designado por Teorema de Bolzano-Weierstrass.

**Demonstração:**
Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Se $Im(f)$ não é limitada então para cada $M > 0$ existe $x = x(M) = x_M$ no intervalo $[a, b]$ tal que $|f(x_M)| > M$. A sucessão $(x_M)_M$ é limitada.

É possível escolher uma subsucessão $(x_{M_n})_n$ monótona, que também é limitada por ser subsucessão, portanto, também será convergente. Assim, quando $n$ cresce indefinidamente, $x_{M_n}$ tende para $l \in [a, b]$ enquanto $|f(x_{M_n})|$ tende para $+\infty$, contrariando o fato de $f$ ser contínua. Logo, podemos concluir que $Im(f)$ é limitada, e portanto garantir a existência de $\sup(Im(f))$ e $\inf(Im(f))$ de modo que

$$\inf(Im(f)) \leq f(x) \leq \sup(Im(f))$$

para todo $x \in [a, b]$. Resta agora mostrar que existem $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que $f(x_m) = \inf(Im(f))$ e $f(x_M) = \sup(Im(f))$.

Vamos mostrar a existência de $x_M$ pois o caso $x_m$ é análogo.

Suponha que $f(x) < K = \sup(Im(f))$ para todo $x \in [a, b]$. Então a função

$$g(x) = \frac{1}{K - f(x)}$$

é contínua para todo $x \in [a, b]$, pois é a divisão de funções contínuas e também é limitada pois $f$ também o é.

Se $g$ é limitada, então para algum $k$ vamos ter

$$0 < \frac{1}{K - f(x)} < k.$$

Assim, $f(x) < K - \frac{1}{k}$ para todo $x \in [a, b]$, o que contradiz o fato de $K$ ser o supremo de $Im(f)$. Portanto, existirá $x_M \in [a, b]$ tal que $f(x_M) = \sup(Im(f))$.

**Corolário 2.3.5**

Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então existem reais $c$ e $d$ com $c \leq d$ tais que a imagem da função $f$ é um intervalo fechado definido entre $c$ e $d$ ou seja $Im\, f = [c, d]$.

Este corolário é uma consequência direta do Teorema de Weierstrass pelo que não iremos apresentar a demonstração formal.

O corolário mostra que existem $x_m$ e $x_M$ tais que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para todo $x \in [a, b]$. Particularizando temos $f(x_m) = c$ e $f(x_M) = d$. Assim $Im\, f \subset [c, d]$.

Se $y \in [c, d]$, pelo teorema do valor médio garante-se que existe $x \in [x_m, x_M]$ tal que $f(x) = y$ ou seja $[c, d] \subset Im\, f$. Assim concluiu-se que $Im\, f = [c, d]$ .

**Teorema 2.3.6 (Teorema de Fermat)**

Seja $f$ uma função definida num intervalo aberto $]a, b[$ e $c \in ]a, b[$, se $f$ tiver um máximo ou mínimo local em c, e existir $f'(c)$, então $f'(c) = 0$.

**Demonstração:**

Vamos supor que a função $f$ tem um máximo local em $c$. Assim, existe um intervalo aberto $K$, com $c \in K$ e $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in K \cap ]a, b[$.

Vamos ter $f(x) - f(c) \leq 0$ para todo $x \in K \cap ]a, b[$.

Por hipótese $f'(c)$ existe, assim,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Temos então, se

$$x \to c^+ \;\Rightarrow\; x > c \;\Rightarrow\; x - c > 0 \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0 \;\Rightarrow\; f'(c) \le 0.$$

Por outro lado, se

$$x \to c^- \;\Rightarrow\; x < c \;\Rightarrow\; x - c < 0 \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0 \;\Rightarrow\; f'(c) \ge 0.$$

Concluímos assim que $f'(c) = 0$.

Vamos agora supor que a função $f$ atinge um mínimo local em $c$. Assim, existe um intervalo aberto $K$, com $c \in K$ e $f(c) \le f(x)$ para todo $x \in K \cap ]a, b[$.

Vamos ter $f(x) - f(c) \ge 0$ para todo $x \in K \cap ]a, b[$.

Por hipótese $f'(c)$ existe, logo temos

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \end{aligned}$$

Mais uma vez teremos duas possibilidades. Se

$$x \to c^+ \;\Rightarrow\; x > c \;\Rightarrow\; x - c > 0 \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0 \;\Rightarrow\; f'(c) \ge 0.$$

Por outro lado, se

$$x \to c^- \;\Rightarrow\; x < c \;\Rightarrow\; x - c < 0 \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0 \;\Rightarrow\; f'(c) \le 0.$$

Das duas desigualdades obtidas, concluímos que $f'(c) = 0$.

**Nota 2.3.7**
Se a função $f$ tiver um extremo local em $c$ e existir $f'(c)$ então, o gráfico de $f$ terá uma tangente horizontal em $(c, f(c))$ que satisfaz o teorema de Fermat.

Se a função diferenciável for zero ou seja $f'(c) = 0$, então $f$ pode ter ou não um extremo local em $c$.

Se a função $f'$ não existir em $x = c$, então $f$ pode ter ou não um extremo local em $x = c$.

**Teorema 2.3.8 (Teorema de Rolle)**

Seja $f$ uma função definida e contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto $]a, b[$. Se a função $f$ possuir valores iguais nos extremos do intervalo, ou seja, se $f(a) = f(b)$, então podemos afirmar que existe pelo menos um ponto $c \in ]a, b[$ tal que a reta tangente à curva em $(c, f(c))$ tem inclinação nula, ou seja, $f'(c) = 0$.

Para melhor entender o teorema, apresentamos a seguinte figura.

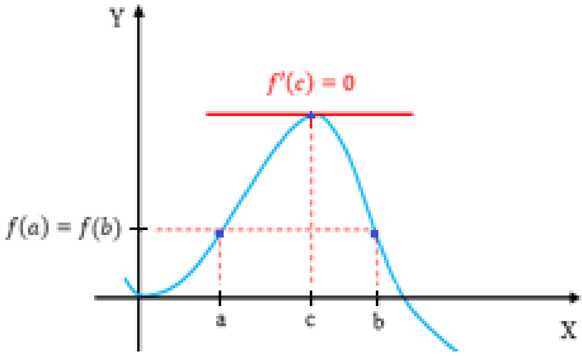



*Figura 3: Interpretação do Teorema de Rolle*

Observando o gráfico, vemos que a reta tangente à função $f$ no ponto $(c, f(c))$ tem inclinação nula.

**Demonstração:**

Se a função $f$ for uma função constante, temos $f(x) = f(a) = f(b)$ para todo $x \in [a, b]$. Assim teremos $f'(c) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Vamos agora ver o caso em que a função não é constante no intervalo $[a, b]$. Quando assim é, veremos que a função vai assumir valores que serão maiores ou menores do que $f(a) = f(b)$. E neste caso surge a necessidade dos teoremas de Weierstrass e de Fermat.

Se $f(x) < f(a)$, para algum $x$ em $]a, b[$, então a função $f$ assume um valor que será mínimo em algum ponto $c$ do intervalo fechado $[a, b]$. Podemos então concluir que $f$ terá um mínimo absoluto em $c \in ]a, b[$. Como $f$ é diferenciável em $]a, b[$, pelo teorema de Fermat, $f'(c) = 0$.

Se $f(x) > f(a)$, para algum $x$ em $]a, b[$, a função $f$ assume um valor que será máximo em algum ponto $c$ do intervalo fechado $[a, b]$. Podemos então concluir que $f$ terá um máximo absoluto em $c \in ]a, b[$. Como $f$ é diferenciável em $]a, b[$, pelo teorema de Fermat, $f'(c) = 0$.

**Exemplo 2.3.9**

Vamos considerar a função $f(x) = x^2 - x$ definida no intervalo $[0,1]$. Vamos ver que $f$ verifica as hipóteses do teorema e vamos representar o seu gráfico de forma a ilustrar o teorema de Rolle.

- A função é contínua em $[0,1]$ pois é uma função polinomial;
- Também é diferenciável em $]0,1[$, pois $f'(x) = 2x - 1$ está definida em qualquer ponto entre $0$ e $1$;
- Temos $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$, ou seja, a última hipótese do teorema de Rolle, $f(0) = f(1)$, também se verifica.

Pelo teorema temos a garantia da existência de pelo menos um ponto $c \in ]0,1[$ tal que $f'(c) = 0$.

Vamos calcular o valor de $c$. Temos,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Assim, temos $c = \frac{1}{2}$. Esse é o único ponto que anula a derivada.

Observemos agora a interpretação geométrica.

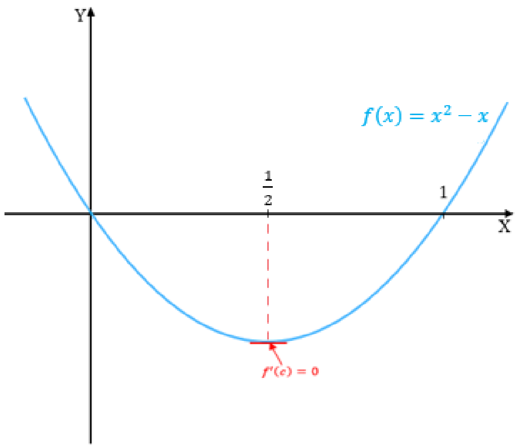



*Figura 4: Primeiro exemplo para Teorema de Rolle*

**Exemplo 2.3.10**

Consideremos agora a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ definida num intervalo $[0,2]$. Vamos ver se a função satisfaz as hipóteses do teorema e representar o seu gráfico.

- Temos uma função contínua em $[0,2]$ pois, é uma função polinomial contínua em todo o $R$;
- Também é diferenciável em $]0,2[$. Temos $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ definida para todos os pontos entre $0$ e $2$;
- Temos por último $f(0) = 2$ e $f(2) = 2$ ou seja $f(0) = f(2)$.

Verificadas as hipóteses, temos a garantia da existência de pelo menos um ponto $c \in ]0,2[$ tal que $f'(c) = 0$.

Calculemos agora o valor de $c$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \cong 1{,}58 \quad \vee \quad x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cong 0{,}42$$

Neste caso obtivemos dois valores de $c$. Estes são os pontos que anulam a derivada. Portanto, neste exemplo, não obtivemos apenas um ponto $c$ mas sim os pontos $c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ e $c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

Geometricamente vamos ter,

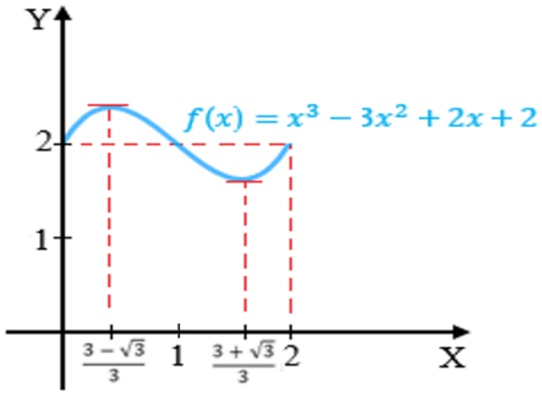



*Figura 5: Segundo exemplo para Teorema de Rolle*

Este é um teorema de existência que vale em geral para qualquer função que satisfaça as hipóteses e serve de base para outros resultados que apresentaremos sob forma de corolários.

**Corolário 2.3.11**

Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há pelo menos um zero da sua derivada.

Para ilustrar o corolário temos as seguintes figuras.

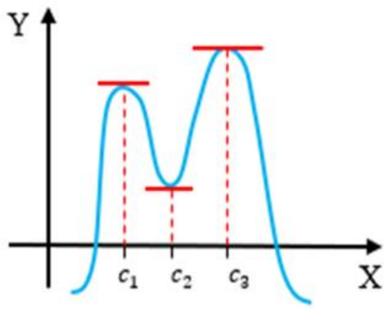



*Figura 6: Primeira interpretação do primeiro Corolário de Rolle*

Na figura podemos ver que entre dois zeros consecutivos da função existem três zero da derivada.

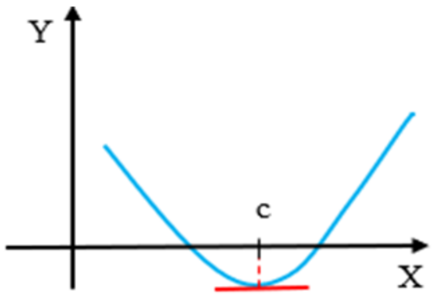



*Figura 7: Segunda interpretação do primeiro Corolário de Rolle*

A figura mostra que entre dois zeros consecutivos da função existe um único zero da derivada.

**Corolário 2.3.12**
Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo não pode haver mais do que um zero dessa função.

Para ilustrar o corolário temos as seguintes figuras.

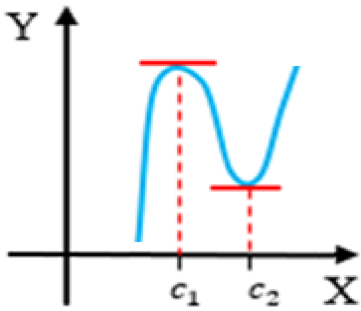



*Figura 8: Primeira interpretação do segundo Corolário de Rolle*

A figura mostra que entre dois zeros consecutivos da função derivada não existe nenhum zero da função.

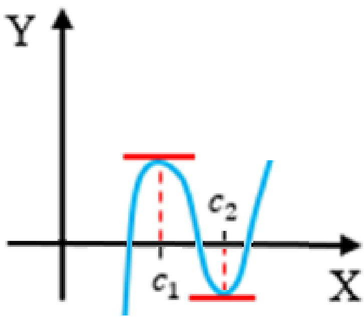



*Figura 9: Segunda interpretação do segundo Corolário de Rolle*

A figura mostra que entre dois zeros consecutivos da função derivada só poderá existir um zero da função.

**Exemplo 2.3.13**

Vamos verificar se o teorema de Rolle se aplica nas seguintes funções,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}.$$

Consideremos a função $f(x) = \frac{x^2-4x}{x-2}$.

Para $x = 0$, temos

$$f(0) = \frac{0^2 - 4.0}{0 - 2} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Para $x = 4$, temos

$$f(4) = \frac{4^2 - 4(4)}{4 - 2} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Assim, constatamos que $f(0) = f(4)$. Poderíamos concluir que o teorema de Rolle se podia aplicar no intervalo $[0,4]$. Mas isso não é verdade pois a função $f$ é descontínua em $x = 2$, que é um ponto que se encontra precisamente no interior do intervalo. Logo neste caso não se aplica o teorema de Rolle.

Consideremos agora a função $g(x) = \frac{x^2-4x}{x+2}$.

Para $x = 0$, temos

$$g(0) = \frac{0^2 - 4.0}{0 + 2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Para $x = 4$, temos

$$g(4) = \frac{4^2 - 4(4)}{4 + 2} = \frac{0}{6} = 0.$$

Assim, constatamos que $g(0) = g(4)$.

A função $g$ é contínua no intervalo $[0,4]$. Note que a função $g$ é descontínua em $x = -2$, um ponto fora do intervalo que estamos a considerar.

Estudemos agora a diferenciabilidade de $g$ no intervalo $]0,4[$. Temos,

$$g'(x) = \frac{(x^2-4x)'.(x+2)-(x^2-4x).(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(2x-4).(x+2)-(x^2-4x)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+4x-4x-8-x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}.$$

Temos a função derivada definida para todos os pontos do intervalo $]0,4[$. Assim, verificadas todas as hipóteses do Teorema de Rolle, temos a garantia da existência de um $c \in ]0,4[$ tal que $g'(c) = 0$. Vamos calcular o valor de $c$. Temos,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4+\sqrt{16+32}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-4-\sqrt{16+32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2+2\sqrt{3} \quad \vee \quad x = -2-2\sqrt{3}.$$

Então temos o único $c = -2+2\sqrt{3}$ pois $-2-2\sqrt{3} \notin ]0,4[$.

Quando as imagens das extremidades do intervalo que estamos a considerar no teorema de Rolle não são iguais, não o podemos aplicar. Surge assim, no seculo XVIII, pelas mãos do matemático Joseph-Louis Lagrange um teorema, que ficou conhecido pelo teorema do valor médio ou teorema de Lagrange, e que não considera essa hipótese.

**Teorema 2.3.14 (Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio)**
Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto $]a,b[$. Então existe pelo menos um ponto $c \in ]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Note que o teorema do valor médio pode ser visto como uma generalização do teorema de Rolle.

**Demonstração:**
Vamos considerar a reta que une os pontos $A(a,f(a))$ e $B(b,f(b))$ definida por

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Consideremos agora a função auxiliar $h$ definida por

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Vamos mostrar que esta função auxiliar satisfaz o teorema de Rolle.

Por definição $g$ é contínua no intervalo $[a, b]$ e por hipótese $f$ também é contínua no intervalo $[a, b]$. Assim concluímos que $h$ é contínua no intervalo $[a, b]$.

Como a função $g$ está definida à custa da função diferenciável $f$, então $g$ também será diferenciável em $]a, b[$ pelo que, também temos a garantia da diferenciabilidade de $h$ no intervalo $]a, b[$.

Vamos agora verificar que $h(a) = h(b)$. Temos,

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a) \\ &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - g(b) \\ &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - f(a) - f(b) + f(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, chegou-se a conclusão de que, $h(a) = h(b)$.

Temos todas as hipóteses do teorema de Rolle verificadas. Assim, existe um $c$ pertencente a $]a,\ b[$ tal que $h'(c) = 0$.

Pela definição da função auxiliar $h$, temos,

$$h'(c) = f'(c) - g'(c) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podemos ilustrar o teorema de Lagrange pela seguinte figura.

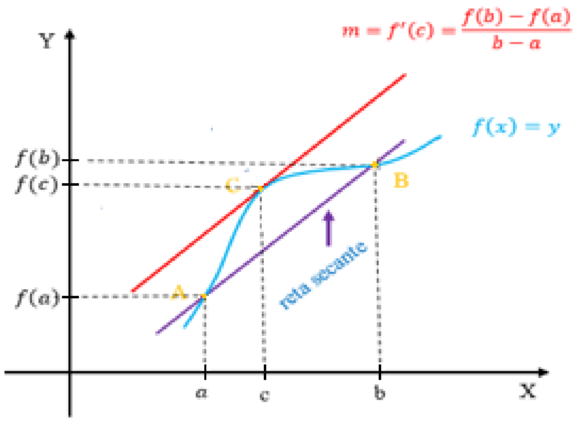



*Figura 10: Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio*

**Exemplo 2.3.15**

Seja a função $f(x) = x^2$ definida no intervalo fechado $[-1, 3]$. Vamos calcular o valor de $c$ que o teorema do valor médio garante existir e apresentar o seu gráfico.

Temos, para $a = -1$ e $b = 3$,

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 = 1,$$

$$f(b) = f(3) = (3)^2 = 9.$$

A derivada da função $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$.

Como $f(x) = x^2$ é contínua para todo $x$ e derivável no intervalo aberto $]-1,3[$ e $f'(c) = 2c$ para $-1 < c < 3$, temos,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Leftrightarrow \quad 2c = \frac{9 - 1}{3 - (-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2c = \frac{8}{4}$$

$$\Leftrightarrow c = 1.$$

Concluímos assim que $c = 1$ e $f'(c) = 2$.

Vamos agora ver a interpretação geométrica do Teorema de Lagrange para este exemplo.

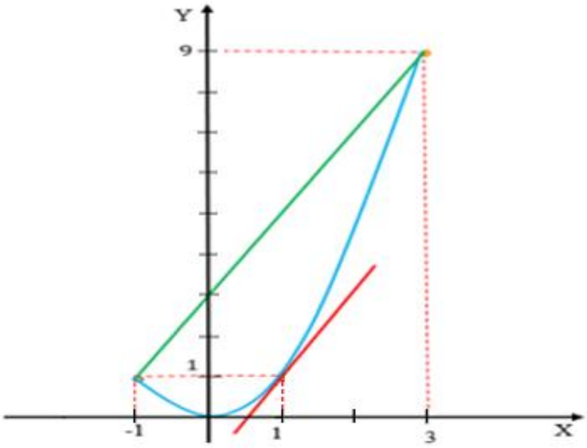



*Figura 11: Exemplo para Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio*

A figura mostra que no ponto $x = 1$, a reta tangente ao gráfico tem inclinação igual à reta que passa nos pontos $(-1, f(-1))$ e $(3, f(3))$.

Por observação, constatou-se que a derivada de uma função constante é igual a zero, em outras palavras, se a derivada de uma função for zero, então a função é constante. Para provar esta evidência vamos apresentar dois corolários que são uma consequência do teorema do valor médio.

**Corolário 2.3.16 (Corolário de funções com derivada zero)**

Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto $]a, b[$. Se $f'(x) = 0$, em $]a, b[$ então a função $f$ é constante no intervalo fechado $[a, b]$. Portanto, existe um número real $c$, tal que $f(x) = c$, para todo $x$ no intervalo fechado $[a, b]$.

**Demonstração:**

Por hipótese sabemos que $f$ verifica o teorema do valor médio no intervalo fechado $[a, b]$. Consideremos $x \in [a, b]$. Vamos agora aplicar o teorema do valor médio no intervalo fechado $[a, x]$. Então, existe $c \in ]a, x[$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)}.$$

Como $f'(x) = 0$ no intervalo aberto $]a, b[$, então temos $f'(c) = 0$ que nos permite concluir que $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a, b]$. Assim, a função $f$ é constante no intervalo fechado $[a, b]$.

**Corolário 2.3.17 (Corolário de funções com derivadas iguais)**

Sejam $f$ e $g$ duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto $]a, b[$. Suponhamos que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in ]a, b[$. Então, $f$ e $g$ distam de uma constante, isto é, existe um número real $c$, tal que, $f(x) = g(x) + c$, para todo $x$ no intervalo fechado $[a, b]$.

**Demonstração:**

Vamos considerar a função auxiliar $h$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$. Temos naturalmente $h$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto $]a, b[$. Então por hipótese temos $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo $x \in ]a, b[$.

Pelo Corolário anterior concluímos que h é uma função constante, ou seja, existe um número real $c$, tal que $h(x) = c$, para todo $x$ no intervalo fechado $[a, b]$. Assim, $f(x) - g(x) = c$, que é equivalente a dizer que $f(x) = g(x) + c$.

**Exemplo 2.3.18**

Vamos determinar uma função cuja derivada seja $f'(x) = 2x + 1$ e que o seu gráfico contenha o ponto $(0,1)$.

Sabemos que a derivada de $x^2$ é $2x$ e a derivada de $x$ é 1. Daqui, podemos concluir que a função $h(x) = x^2 + x$ tem derivada $h'(x) = 2x + 1$. Mas, o gráfico desta função $h$ não contem o ponto $(0,1)$ pois $h(0) = 0$ e não $h(0) = 1$ como se pretende. Pelo corolário 2.3.17, a função $f$ procurada satisfaz $f(x) = h(x) + c$. Portanto,

$$f(0) = h(0) + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 1.$$

Temos assim a função $f(x) = x^2 + x + 1$.

**Teorema 2.3.19 (Teorema de Cauchy ou Teorema de Valor Médio de Cauchy)**

Sejam $f$ e $g$ duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto $]a, b[$. Se $g'(x) \neq 0$, qualquer que seja $x \in ]a, b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in \; ]a, b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Demonstração:**

Note-se que, $g(b) - g(a) \neq 0$, porque caso contrário, pelo teorema de Rolle existiria $c \in ]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$.

Consideremos a função auxiliar $h$ definida por

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x).$$

Temos,

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(b)$$

$$= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \big[\big(g(b) - g(a)\big) + g(a)\big]$$

$$= f(b) - f(b) + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(a)$$

$$= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(a)$$

$$= h(a).$$

Concluímos assim que $h(b) = h(a)$. Como $h$ é contínua em $]a,b[$ e diferenciável em $]a,b[$, porque $f$ e $g$ são contínuas em $]a,b[$ e diferenciáveis em $]a,b[$ podemos aplicar o teorema de Rolle. Assim, existe pelo menos um $c \in ]a,b[$ tal que

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0.$$

Logo,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Nota 2.3.20**

Note que o Teorema de Cauchy é uma generalização do Teorema de Lagrange. Se considerarmos $g(x) = x$, vamos ter,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f'(c)}{1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Exemplo 2.3.21**

Vamos aplicar o Teorema de Valor Médio de Cauchy às funções $f, g: [0,1] \to R$ definidas por $f(x) = 3x^2 + 1$ e $g(x) = x^3 - 2$.

Vamos começar por verificar as hipóteses.

- As funções $f$ e $g$ são contínuas em $[0,1]$, pois são funções polinomiais;
- Também são diferenciáveis em $]0,1[$, pois $f'(x) = 6x$ e $g'(x) = 3x^2$ estão definidas para todos os pontos do intervalo $]0,1[$;
- Temos, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Assim, temos $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in ]0,1[$.

Temos todas as hipóteses verificadas. Como consequência, o teorema de Valor Médio de Cauchy garante a existência de um ponto $c \in ]0,1[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Substituindo temos,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{4 - 1}{-1 + 2} = \frac{3}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6c}{3c^2} = \frac{3}{1}$$

$$\Leftrightarrow 3c = 2$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{2}{3}.$$

Temos assim $c = \frac{2}{3} \in ]0,1[$.

# Capítulo 3

# Utilização da Derivada no Estudo das Funções

De um modo geral a derivada de uma função pode ser utilizada para várias finalidades, por isto, não podemos generalizar o seu estudo no que às aplicações diz respeito. O uso da derivada é uma ferramenta utilizada e muito útil para o estudo do comportamento das funções e, é através dela, que se podem obter conclusões sobre a monotonia, os extremos, o estudo da concavidade, a existência de pontos de inflexão entre outros. Vamos, neste capítulo, dar particular importância a estes tópicos pois são aqueles que melhor demonstram a utilidade do conceito de derivada. As referências bibliográficas que nos permitiram elaborar esta secção foram [2], [8], [11], [23] e [24].

## 3.1. Monotonia

O estudo da monotonia desempenha um papel muito importante na compreensão e na análise das funções. Quando se fala na monotonia de uma função, referimo-nos à forma como a função se comporta geometricamente. Ou seja, se a função é crescente, decrescente ou constante num determinado intervalo. A representação geométrica de uma função monótona num intervalo, poderá ser uma curva crescente, decrescente ou constante. Podemos olhar para a monotonia como uma relação de ordem entre dois conjuntos. O domínio e o contradomínio de uma função. Uma função é crescente quando preserva a ordem, e é decrescente quando inverte a ordem existente entre estes dois conjuntos. Antes de explicar esta relação de ordem, vamos apresentar algumas definições relacionadas com a monotonia.

**Definição 3.1.1**

Diz-se que uma função $f$, definida num intervalo $I$, é monótona crescente em sentido lato, nesse intervalo, se para todo $c_1, c_2 \in I$,

$$c_1 < c_2 \quad \Rightarrow \quad f(c_1) \leq f(c_2).$$

Diz-se que uma função $f$, definida num intervalo $I$, é monótona crescente em sentido estrito, ou apenas crescente, nesse intervalo, se para todo $c_1, c_2 \in I$,

$$c_1 < c_2 \quad \Rightarrow \quad f(c_1) < f(c_2).$$

Diz-se que uma função $f$, definida num intervalo $I$, é monótona decrescente em sentido lato, nesse intervalo, se para todo $c_1, c_2 \in I$,

$$c_1 < c_2 \quad \Rightarrow \quad f(c_1) \geq f(c_2).$$

Diz-se que uma função $f$, definida num intervalo $I$, é monótona decrescente em sentido estrito, ou apenas decrescente, nesse intervalo, se para todo $c_1, c_2 \in I$,

$$c_1 < c_2 \quad \Rightarrow \quad f(c_1) > f(c_2).$$

**Nota 3.1.2**

Note que muitos autores preferem denominar as funções monótonas crescentes em sentido lato por funções monótonas não-decrescentes e as funções monótonas decrescentes em sentido lato por funções monótonas não-crescentes.

Vamos às interpretações geométricas desta definição.

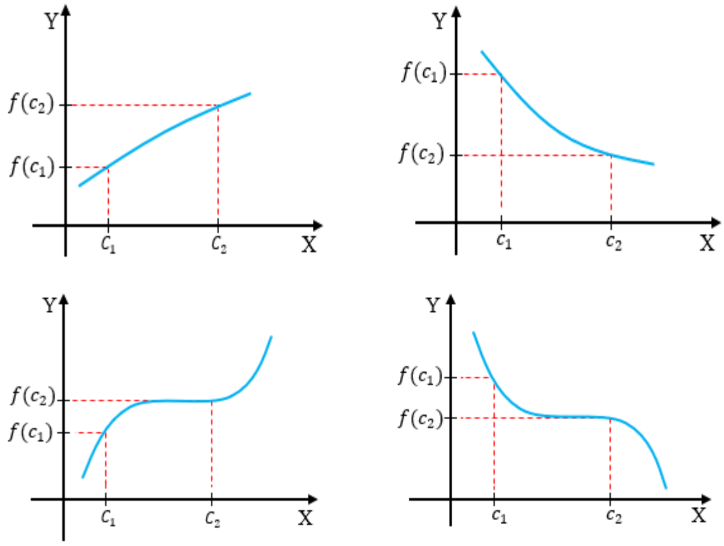



*Figura 12: Monotonia de funções*

Nos dois primeiros gráficos temos uma função crescente em sentido estrito e uma função decrescente em sentido estrito, respetivamente. Nos dois gráficos que se seguem estão representadas duas funções monótonas em sentido lato. Note que nestes dois últimos casos, se considerarmos $c_1 \neq c_2$ temos a possibilidade de que $f(c_1)$ seja igual a $f(c_2)$.

**Proposição 3.1.3**

Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in ]a, b[$, então $f$ é crescente em $[a, b]$;
ii) Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in ]a, b[$, então $f$ é crescente em sentido lato em $[a, b]$;
iii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in ]a, b[$, então $f$ é decrescente em $[a, b]$;
iv) Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in ]a, b[$, então $f$ é decrescente em sentido lato em $[a, b]$.

**Demonstração:**

Seja $f$ uma função nas condições do enunciado e tomemos $x, y \in ]a, b[$, com $x < y$ .

Pelo Teorema de Lagrange existe $c \in \, ]x, y[$ tal que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c).$$

Então, se $f'(c) > 0 \Rightarrow f(y) - f(x) > 0$, pois $y - x > 0$, assim $f(x) < f(y)$, ou seja $f$ é crescente no intervalo $[a, b]$. Do mesmo modo, se $f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0$, pois $y - x > 0$, assim $f(x) \leq f(y)$, ou seja, $f$ é crescente em sentido lato no intervalo $[a, b]$.

Reciprocamente, se $f'(c) < 0 \Rightarrow f(y) - f(x) < 0$, pois $y - x > 0$, assim $f(x) > f(y)$, ou seja $f$ é decrescente no intervalo $[a, b]$. Do mesmo modo, se $f'(c) \leq 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \leq 0$, pois $y - x > 0$, assim $f(x) \geq f(y)$, ou seja, $f$ é decrescente em sentido lato no intervalo $[a, b]$.

**Observações 3.1.4**

1) Tome-se como exemplo a função $f(x) = x^3$, que é estritamente crescente. No entanto $f'(0) = 0$.
2) A hipótese da continuidade de $f$ no intervalo fechado $[a\,, b]$ é muito importante, pois, se não se verificar, o resultado é falso. Vamos ver isso no seguinte exemplo. Consideremos
$$f(x) = \begin{cases} x + 1\,, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 \quad\,, & \text{se} \qquad x = 1 \end{cases}.$$

Temos $f'(x) = 1 > 0$ para todo $x \in \, ]0{,}1[$. No entanto, $f$ não é crescente em $[0\,,1]$.

A proposição não pode ser aplicada porque $f$ não é contínua no ponto $x = 1$.

**Exemplo 3.1.5**

Vamos apresentar os intervalos de monotonia para as seguintes funções.

- $f(x) = x^3 + 1$.

Vamos derivar a função e analisar os pontos $x \in D(f)$ onde $f'(x) > 0$ e os pontos onde $f'(x) < 0$.

Temos, $f'(x) = 3x^2$. Como $3x^2 > 0$, para todo $x \neq 0$, concluímos que a função é sempre crescente.

Para que não restem dúvidas apresentamos o gráfico de $f$.

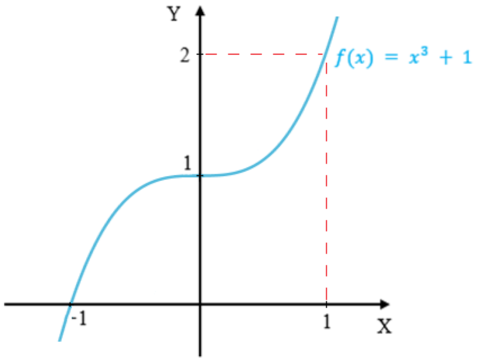



*Figura 13: Exemplo de função crescente*

- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & se \quad x \leq 2 \\ -7x + 16, & se \quad x > 2 \end{cases}$

  A representação geométrica desta função é a seguinte.

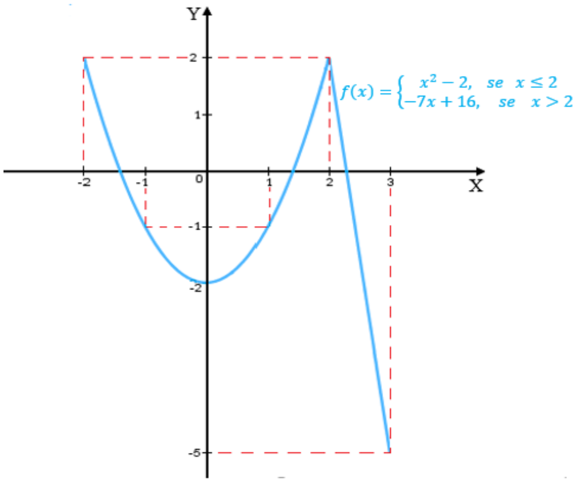



*Figura 14: Exemplo para o estudo da Monotonia*

Note que $f$ não é diferenciável em $x = 2$.

Assim, para $x < 2$, temos $f'(x) = 2x$ e, portanto: $2x > 0$ para $x \in ]0,2[$ e $2x < 0$ para $x \in ]-\infty, 0[$. Concluímos assim que a função $f$ é crescente em $]0,2[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$.

Para $x > 2$, temos $f'(x) = -7$. Logo, $f'(x) < 0$ para todo $x \in ]2, +\infty[$. Assim, $f$ é decrescente no intervalo $]2, +\infty[$.

Concluímos assim que a função $f$ é crescente em $]0,2[$ e decrescente em $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$. Podemos ainda acrescentar que $x = 0$ é um ponto crítico da função $f$. Veremos o que é um ponto crítico na secção seguinte.

## 3.2. Extremos de uma Função

Quando queremos estudar os extremos de uma função, pretende-se obter os pontos máximos e/ou mínimos dessa função, bem como analisar as regiões de crescimento e/ou decrescimento que permitem uma construção do seu gráfico. Estes conceitos são de grande importância quando se pretende representar e visualizar o gráfico de uma função assim como quando se pretende aplicar esta teoria na resolução de problemas que exigem a determinação dos extremos. A necessidade destes conceitos verifica-se em vários ramos do conhecimento. Como exemplo disso, podemos considerar o caso em que se pretende determinar o lucro máximo na venda de um determinado produto ou o cálculo do custo mínimo numa determinada produção. Para esse efeito, e partindo do pressuposto que estamos na presença da função que expressa esses comportamentos, o primeiro passo será determinar os pontos críticos da função e em seguida, analisar se esses pontos críticos são maximizantes, minimizantes ou nenhum dos casos.

Antes de avançarmos com a definição formal de extremos, podemos começar desde já por dizer que os máximos e mínimos se distinguem em máximos absolutos ou máximos globais e máximos relativos ou máximos locais. De forma análoga, podemos caracterizar os mínimos dessa forma.

**Definição 3.2.1**
Seja $f: D \subset R \rightarrow R$ e $a \in D$.

Diz-se que $f$ tem em $a$ um máximo local (ou relativo) se existir $\varepsilon > 0$ tal que,

$$f(x) \leq f(a), \text{ para todo } x \in V_\varepsilon(a) \cap D.$$

Do mesmo modo, diz-se que $f$ tem em $a$ um mínimo local (ou relativo) se existir $\varepsilon > 0$ tal que,

$$f(x) \geq f(a), \text{ para todo } x \in V_\varepsilon(a) \cap D.$$

Diz-se que $f$ tem em $a$ um máximo absoluto se

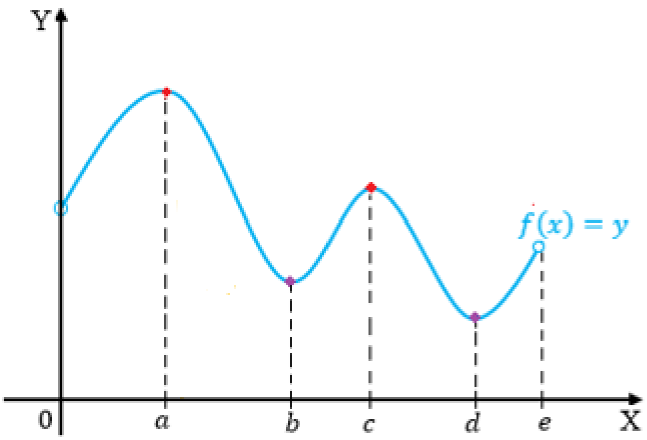
$$f(x) \leq f(a), \text{ para todo } x \in D.$$

Do mesmo modo, diz-se que $f$ tem em $a$ um mínimo absoluto se

$$f(x) \geq f(a), \text{ para todo } x \in D.$$

Se a função possui um máximo ou mínimo (relativo ou absoluto) dizemos que a função tem um extremo (relativo ou absoluto) nesse ponto $x = a$.

A título meramente exemplificativo, considere-se o gráfico da seguinte função $f$, cujo domínio é $D = ]0, e[$, $e > 0$, $e \in R$.




**LEGENDA**
$a$- Maximizante absoluto
$b$- Minimizante relativo
$c$- Maximizante relativo
$d$- Minimizante absoluto
$f(a)$- Máximo absoluto
$f(d)$- Mínimo absoluto
$f(c)$- Máximo relativo
$f(b)$- Mínimo relativo

*Figura 15: Extremos de uma função*

Observando o gráfico, vemos que a função $f$ tem um máximo absoluto em $x = a$ pois $(a, f(a))$ é o ponto mais elevado na representação gráfica da função $f$. O ponto $x = c$ é um maximizante relativo pois, $(c, f(c))$ não sendo o ponto mais elevado na representação gráfica da função $f$, verificamos que numa vizinhança suficientemente pequena de $x = c$, $(c, f(c))$ é o ponto mais elevado nessa vizinhança. De igual forma, podemos dizer que a função $f$ tem um mínimo absoluto em $x = d$ pois $(d, f(d))$ é o ponto menos elevado na representação gráfica da função $f$. O ponto $x = b$ é um minimizante relativo pois, $(b, f(b))$ não sendo o ponto menos elevado na representação gráfica da função $f$, verificamos que numa vizinhança suficientemente pequena de $x = b$, $(b, f(b))$ é o ponto menos elevado nessa vizinhança.

**Exemplo 3.2.2**

Consideremos a função $f(x) = x^4 - 2x^2$ no intervalo fechado $[-2,2]$. Vamos representar o gráfico da função e estudar a monotonia e os extremos desta função.

Então temos um máximo relativo em $x = 0$, pois no intervalo $]-1,1[$ temos $f(0) \geq f(x)$ para todo $x \in ]-1,1[$. Em $x = -1$ e $x = 1$, $f$ tem mínimos relativos pois considerando o intervalo $]-2,0[$ temos $f(-1) \leq f(x)$ para todo $x \in ]-2,0[$ e, considerando o intervalo $]0,2[$, temos $f(1) \leq f(x)$ para todo $x \in ]0,2[$. Podemos ainda concluir que $f$ é crescente no conjunto $]-1,0[ \cup ]1,+\infty[$ e decrescente no conjunto $]-\infty,-1[ \cup ]0,1[$.

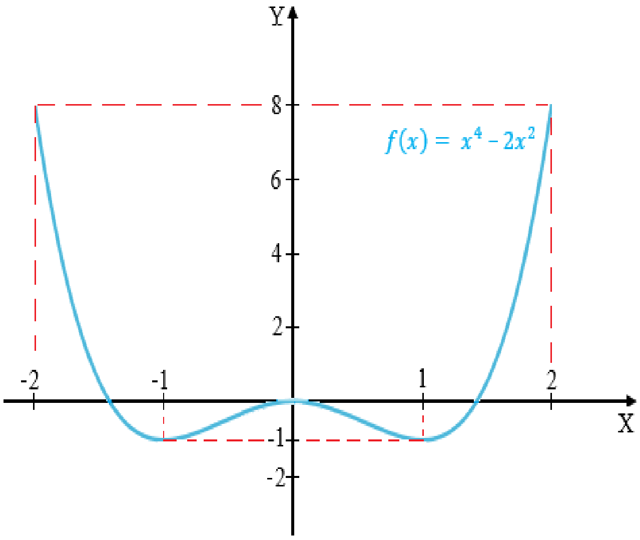



*Figura 16: Extremos Relativos e Monotonia*

**Proposição 3.2.3**

Suponhamos que a função $f$ está definida para todos os pontos do intervalo $]a,b[$ e que $f$ tem um extremo relativo em $x = c$, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Geometricamente esta proposição indica que se a função $f$ tem um extremo relativo em $x = c$ e se $f'(c)$ existir, então o gráfico da função $f$ tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

Constatamos que o recíproco da Proposição 3.2.3 não é verdadeira, ou seja, $f'(c) = 0$ não implica que a função $f$ atinja um extremo em $x = c$.

O exemplo mais simples que ilustra este fato é a função $f(x) = x^3$. Vemos claramente que $f'(0) = 0$, porém, a função $f$ não tem extremo em $x = 0$ . Assim podemos dizer que quando $f'(c) = 0$, a função $f$ poderá ter ou não um extremo relativo em $x = c$.

**Exemplo 3.2.4**

Consideremos o gráfico da função $f(x) = x^3$.

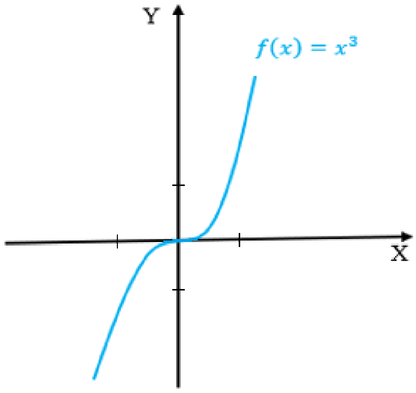



*Figura 17: Primeiro exemplo para Extremos de uma função*

Vemos que essa função não tem valor máximo absoluto nem valor mínimo absoluto, também não tem nenhum extremo local.

O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'(c) = 0$ é chamado de ponto crítico da função $f$.

Um ponto crítico pode ser ou não um ponto extremo. Por isso, uma condição necessária para que exista um extremo relativo em um ponto $x = c$ é que $c$ tenha de ser um ponto crítico. Por outras palavras, todo o ponto extremo é ponto crítico e nem todo o ponto crítico é ponto extremo. É importante observar que uma função definida em um dado intervalo pode admitir diversos extremos relativos. O maior valor da função neste intervalo é chamado máximo absoluto e o menor valor, mínimo absoluto.

**Proposição 3.2.5**

Seja $f$ uma função contínua, definida num intervalo fechado $[a, b]$. Então $f$ possui máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

**Exemplo 3.2.6**

Consideremos o gráfico da função $f(x) = 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 6x$ no intervalo fechado $[-1,4]$.

Temos $f(-1) = 3$ o máximo local, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{8}$ um mínimo local, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}$ um máximo local, $f(3) = -45$ um mínimo absoluto e $f(4) = 8$ um máximo absoluto.

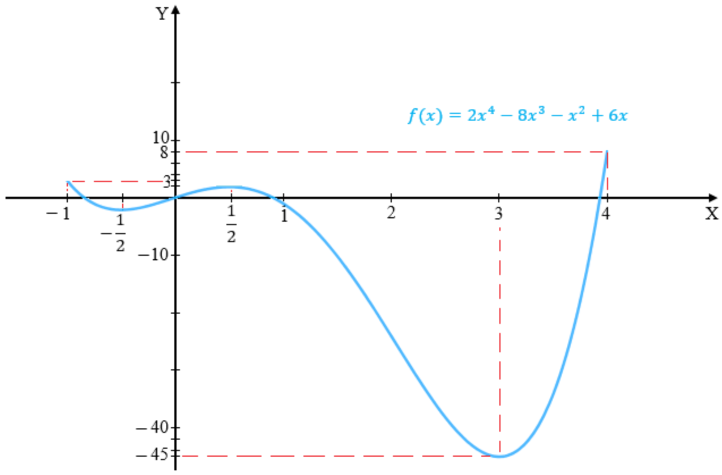



*Figura 18: Segundo exemplo para Extremos de uma função*

## 3.3. Critérios para Determinar a Natureza dos Extremos de uma Função

Para determinar a natureza dos extremos de uma função, existem dois critérios que são essenciais para este fim. Vamos nesta secção apresentar cada um deles.

**Primeiro critério (Teste da Primeira Derivada)**

**Definição 3.3.1**

Seja $f$ uma função definida e contínua num intervalo fechado $[a, b]$, que possui derivada no intervalo aberto $]a, b[$, ou seja, diferenciável em $]a, b[$, excepto num ponto $c$.

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(c) \cap D$ e $x < c$ e se $f'(x) < 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(c) \cap D$ e $x > c$, então $f$ tem um máximo local em $c$.

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(c) \cap D$ e $x < c$ e se $f'(x) > 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(c) \cap D$ e $x > c$, então $f$ tem um mínimo local em $c$.

iii) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e se $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $f$ tem um máximo absoluto em $c$.

iv) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e se $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $f$ tem um mínimo absoluto em $c$.

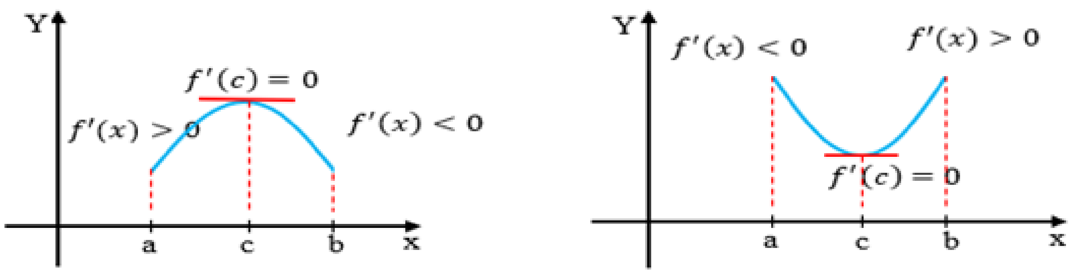



*Figura 19: Critérios para determinar Extremos de uma função*

**Exemplo 3.3.2**

Vamos definir os intervalos de crescimento, decrescimento, obter os máximos e os mínimos relativos da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$.

Derivando vem, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$.

Fazendo $f'(x) = 0$ e reescrevendo o polinómio como sendo a multiplicação de polinómios de grau igual ou inferior a 1, obtemos $6(x+2)(x-3) = 0$.

Portanto, os pontos cítricos da função $f$ são $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$.

É fácil verificar que para $x < -2$ e $x > 3$ , tem-se $f'(x) > 0$, o que implica que a função $f$ é crescente nos intervalos $]-\infty, -2[$ e $]3, +\infty[$ . Para $-2 < x < 3$ , tem-se $f'(x) < 0$, logo $f$ é decrescente em $]-2\,,3[$.

Considerando o teste da primeira derivada, temos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(-2) \cap D$ e $x < -2$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(-2) \cap D$ e $x > -2$, então $f$ tem um máximo local em $x_1 = -2$. Constatamos ainda, pelo mesmo critério que, $f'(x) < 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(3) \cap D$ e $x < 3$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(3) \cap D$ e $x > 3$, então $f$ tem um mínimo local em $x_2 = 3$.

Observemos o gráfico.

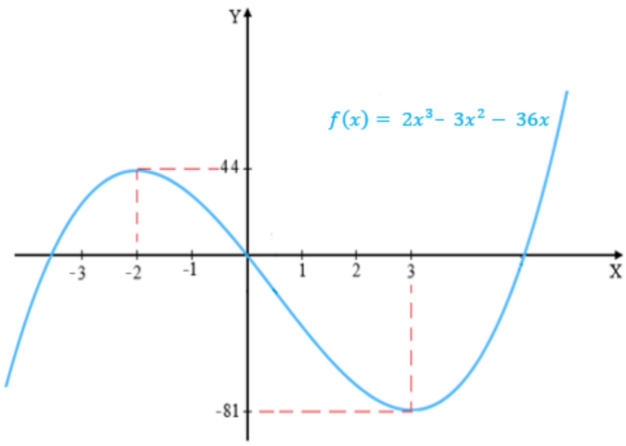



*Figura 20: Exemplo para determinar Extremos de uma função*

Observamos que o teste apenas nos informa quais as regiões do domínio onde a função é crescente e onde ela é decrescente. Não nos diz de que modo isso ocorre, nem nos diz nada sobre a curvatura do gráfico, ou seja, se o gráfico é côncavo, convexo ou reto. Tendo em conta este facto, houve a necessidade de construir um teste, que apresentaremos sob a forma de uma proposição, que recorre à segunda derivada pois, quem fornece estas informações, é precisamente a segunda derivada de uma função. Mas primeiro, vamos apresentar a definição de segunda derivada ou derivada de segunda ordem.

**Definição 3.3.3**

Seja $f: D \subset R \to R$, uma função diferenciável em $D$ e seja $a \in int\,(D)$.

Se $f'$ é diferenciável em $a$ então diz-se que $f$ é duas vezes diferenciável em $a$. A segunda derivada de $f$ em $a$, representa-se por $f''(a)$, e é dada por,

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}.$$

Se existirem $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ em $D$ e $f^{(n-1)}$ é derivável em $a$, então diz-se que $f$ tem derivada de ordem $n$ em $a$, e a sua definição será

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

A função $f$ diz-se de classe $C^2$ em $D$ e escreve-se $f \in C^2$ em $D$, ou $f \in C^2(D)$, se $f'$ e $f''$ forem contínuas em $D$.

**Segundo critério (Teste da Segunda Derivada)**

**Proposição 3.3.4**

Seja $f: [a, b] \subset R \to R$, uma função duas vezes diferenciável num ponto $c \in ]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. Então,

i) Se $f''(c) < 0 \Rightarrow c$ é ponto de máximo local.
ii) Se $f''(c) > 0 \Rightarrow c$ é ponto de mínimo local.

**Demonstração**:

Vamos começar por demonstrar a alínea i).

Por hipótese sabemos que

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

e, como $f'(c) = 0$, podemos concluir que

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0.$$

Então para valores de $x$ próximos de $c$, verifica-se que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$. Ou seja, existem $a_1, b_1 \in R$ com $a < a_1 < c < b_1 < b$ tais que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$ para todo $x \in ]a_1, b_1[$, $x \neq c$.

Para todo $x \in ]a_1, c[$, temos $x - c < 0$, assim $f'(x) > 0$ para todo $x \in ]a_1, c[$. Do mesmo modo, para todo $x \in ]c, b_1[$, temos $x - c > 0$, assim $f'(x) < 0$ para todo $x \in ]c, b_1[$. Recorrendo agora ao Teste da Primeira Derivada podemos concluir que $f$ possui um máximo relativo em $x = c$.

Para a alínea ii), por hipótese sabemos que

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

e, como $f'(c) = 0$, podemos concluir que

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} > 0$$

Então para valores de $x$ próximos de $c$, verifica-se que $\frac{f'(x)}{x-c} > 0$. Ou seja, existem $a_1, b_1 \in R$ com $a < a_1 < c < b_1 < b$ tais que $\frac{f'(x)}{x-c} > 0$ para todo $x \in ]a_1, b_1[$, $x \neq c$.

Para todo $x \in ]a_1, c[$, temos $x - c < 0$, assim $f'(x) < 0$ para todo $x \in ]a_1, c[$. Do mesmo modo,

para todo $x \in ]c, b_1[$, temos $x - c > 0$, assim $f'(x) > 0$ para todo $x \in ]c, b_1[$. Recorrendo agora ao Teste da Primeira Derivada podemos concluir que $f$ possui um mínimo relativo em $x = c$.

**Observação 3.3.5**

Observamos que o Teste da Segunda Derivada não nos diz nada para o caso em que $f''(c) = 0$, ou seja, não podemos concluir nada acerca do ponto crítico $x = c$.

**Exemplo 3.3.6**

Vamos considerar a função $f(x) = x^2 - 6x$. Temos $f'(x) = 2x - 6$ e $f''(x) = 2$. Temos $f'(3) = 0$ e $f''(3) = 2 > 0$. Assim, pelo Teste da Segunda Derivada $f$ possui um mínimo relativo em $x = 3$.

**Exemplo 3.3.7**

Vamos agora considerar a função $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$. Temos $g'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ e $g''(x) = 12x - 6$. Verifiquemos as hipóteses do Teste da Segunda Derivada para $x = -1$. Temos $g'(-1) = 0$, $g''(-1) = -18$, ou seja, existe a segunda derivada de $g$ no ponto $x = -1$, e $g''(-1) = -18 < 0$. Assim, pelo Teste da Segunda Derivada $g$ possui um máximo relativo em $x = -1$.

Para $x = 2$ também podemos aplicar o teste. Temos $g'(2) = 0$, $g''(2) = 18$ e $g''(2) > 0$. Assim, pelo Teste da Segunda Derivada $g$ possui um mínimo relativo em $x = 2$.

## 3.4. Estudo da Concavidade e Pontos de Inflexão de uma Função

**Definição 3.4.1 (Concavidade)**

Seja $f$ uma função diferenciável num intervalo aberto $]a,b[$ até à segunda ordem.

Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in ]a,b[$, então a primeira derivada $f'$ é crescente no intervalo aberto $]a,b[$ e a concavidade do seu gráfico é voltada para cima.

Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in ]a,b[$, então a primeira derivada $f'$ é decrescente no intervalo aberto $]a,b[$ e a concavidade do seu gráfico é voltada para baixo.

Para melhor compreensão, observemos as seguintes figuras.

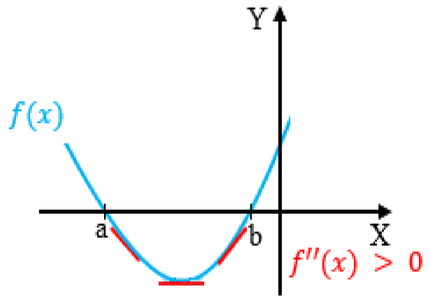



*Figura 21: Estudo da Concavidade voltada para cima*

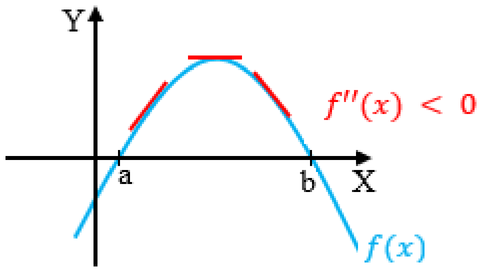



*Figura 22: Estudo da Concavidade voltada para baixo*

**Definição 3.4.2 (Ponto de Inflexão)**

Seja $f$ uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$, diferenciável em um intervalo aberto $]a,b[$ e $p \in ]a,b[$. Dizemos que o ponto $(p, f(p))$, no gráfico da função contínua $f$, é um ponto de inflexão, se a concavidade desta função muda neste ponto.

**Nota 3.4.3**

Existem autores que são mais específicos quando definem pontos de inflexão. Dividem estes pontos em duas categorias: pontos de inflexão horizontais e pontos de inflexão oblíquos.

Se $f$ for uma função diferenciável num ponto de inflexão $(p, f(p))$, e $f'(p) = 0$, então esse ponto é chamado de ponto de inflexão horizontal.

Se $f$ for uma função diferenciável num ponto de inflexão $(p, f(p))$, e $f'(p) \neq 0$, então esse ponto é chamado de ponto de inflexão oblíquo.

Observemos a figura abaixo.

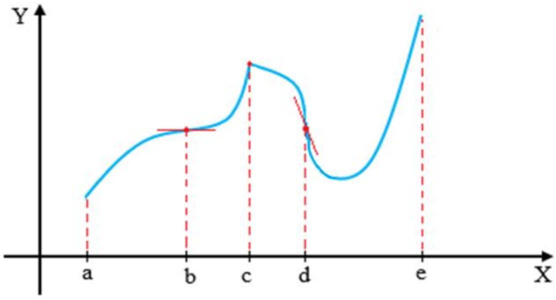



*Figura 23: Estudo do Ponto de Inflexão*

Os pontos de abscissas $b$, $c$ e $d$ são pontos de inflexão; O ponto $b$ é ponto de inflexão horizontal; O ponto $d$ é ponto de inflexão oblíquo. Note que em $x = c$, temos um extremo relativo para $f$ e $f$ não é diferenciável nesse ponto.

**Exemplo 3.4.4**

Vamos apresentar os pontos de inflexão e o sentido das concavidades para a função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$. Derivando uma vez temos $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$. Para estudar o sentido das concavidades, fazemos a segunda derivada, $f''(x) = 12x - 6$. Calculamos agora o zero da segunda derivada. Obtemos $x = \frac{1}{2}$.

Para $x < \frac{1}{2}$ temos $f''(x) < 0$. Assim, a função tem o sentido da concavidade voltado para baixo em $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.

Para $x > \frac{1}{2}$ temos $f''(x) > 0$. Assim, a função tem o sentido da concavidade voltado para cima em $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Vamos ter o ponto de inflexão $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

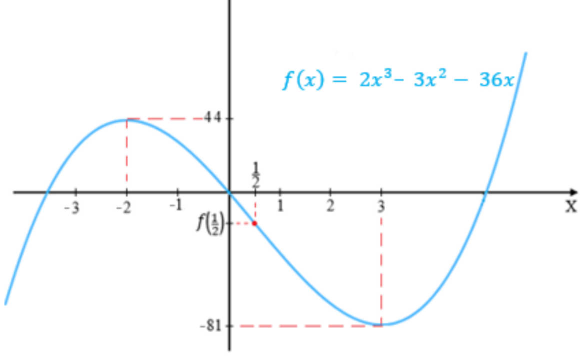



*Figura 24: Exemplo para o Ponto de Inflexão de uma função*

## 3.5. Aproximações Lineares

Nesta secção vamos apresentar uma importante aplicação dada ao conceito de derivada.

Vamos recorrer à figura 25 para ilustrar o conceito de aproximação linear de uma função num ponto.

Consideremos $f$ uma função diferenciável. Vamos construir a reta tangente, $r$, ao gráfico da função $f$ no ponto $(p, f(p))$. Sabemos que a equação desta reta tangente é dada por,

$$r(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

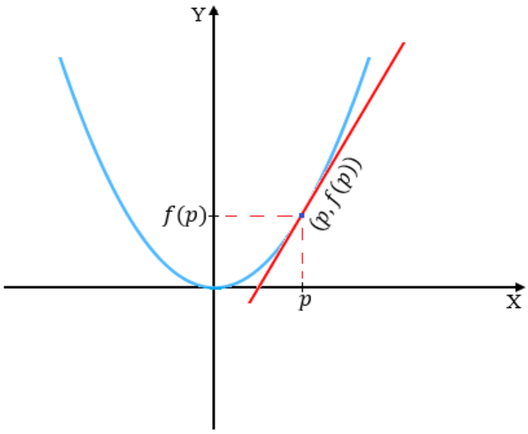



*Figura 25: Aproximações Lineares*

Olhando para as figuras abaixo, constatamos que ao fazermos zoom na região próxima do ponto $(p, f(p))$, o gráfico da função vai-se aproximando cada vez mais do gráfico da reta tangente.

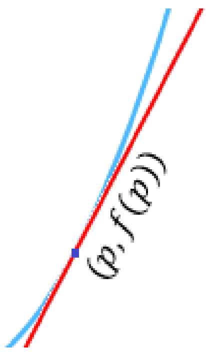



*Figura 26: Zoom de Aproximações Lineares*

Assim, podemos dizer que a reta tangente é uma excelente forma para obtermos uma aproximação do gráfico da função $f$ em torno do ponto $(p, f(p))$. Podemos então escrever,

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p)$$

numa vizinhança suficientemente pequena de $p$.

Tendo em conta que a reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é um polinómio de grau $1$, esta aproximação é chamada de aproximação linear ou linearização e é denotada muitas vezes por $L$, ficando assim definida por

$$L(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Ou seja ficamos com $f(x) \approx L(x)$.

**Exemplo 3.5.1**

Consideremos a função $f(x) = \cos x$. Vamos determinar a linearização de $f$ em $p = \frac{\pi}{2}$. Com esta linearização vamos apresentar uma aproximação para $\cos(1.58)$.

Temos $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Sendo assim, a linearização esperada é

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 - 1.\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -x + \frac{\pi}{2}$$

Então, para apresentar uma aproximação de $\cos(1.58)$, basta lembrar que $f(x) \approx L(x)$. Sendo assim, $L(1.58) = \frac{25\pi - 79}{50}$, temos então que $\cos(1.58) \approx \frac{25\pi - 79}{50}$.

**Exemplo 3.5.2**

Vamos construir a linearização de $f(x) = 7x - 5$ em $p = 3$.

Vemos que $f'(x) = 7$ e que $f(3) = 21 - 5 = 16$.

Logo, $L(x) = 16 + 7(x - 3) = 7x - 5$

**Observação 3.5.3**

Observamos que a linearização coincide com a função dada. Assim, não faz sentido obter uma linearização de uma função quando esta já é uma função linear.

**Exemplo 3.5.4**

Encontremos a linearização da função $g(x) = x^2 - 9x - 7$ em torno de $p = 5$. Sabemos que $g'(x) = 2x - 9$. Assim, $g'(5) = 1$ e $g(5) = -27$, temos,

$$L(x) = -27 + 1\,(x - 5)$$

$$= x - 32.$$

A aproximação linear correspondente é dada por $g(x) \approx L(x)$, então $x^2 - 9x - 7 \approx x - 32$ para valores de $x$ próximos de $5$.

# Capítulo 4

# Aplicações da Derivada

A derivada apresenta diversas aplicações práticas. Ela é constantemente aplicada em muitos problemas que envolvem atividades do ser humano, possibilitando a resolução de situações envolvendo taxas de variação. A derivada aplica-se nos casos onde é necessário obter extremos, sendo uma ferramenta de cálculo fundamental no estudo de máximos e mínimos nas mais diversas ciências. Podemos aplicar o conceito de derivada na resolução de exercícios e problemas da Engenharia, da Biologia, da Economia, da Física, e de muitas outras. Na Matemática, os máximos e mínimos de uma função, conhecidos como extremos de uma função, são o valor máximo e valor mínimo que uma função toma em um determinado conjunto, de modo que, o máximo e o mínimo localizam os valores extremos da otimização matemática. As referências bibliográficas que nos permitiram elaborar esta secção foram [9], [12], [13], [14], [15] e [21].

## 4.1. Aplicações na Engenharia

Como já se referiu anteriormente, o conceito de derivada intervém na resolução de inúmeros problemas cotidianos. A necessidade de apresentar a aplicação da derivada no campo da Engenharia, tem como objetivo mostrar o quanto ela é importante em vários domínios. Sendo assim, vamos observar como ela é utilizada em alguns problemas de construção.

A finalidade desta secção é apresentar e introduzir o conceito da derivada de forma aplicada nos cursos de engenharia de forma a motivar os alunos a aprender e compreender a aplicação do conceito em exemplos muito simples e de particular interesse.

**Problema 4.1.1 (Problema do Tanque de Rega)**

A senhora Berta pretende construir um tanque de rega no seu campo agrícola. Como não sabe construir, contratou pedreiros para esse fim. A senhora apresentou a planta que orientava que o tanque tinha de ser de formato quadrangular com capacidade para $108\, m^3$ de água. Pretende-se calcular as dimensões do tanque de modo que o consumo de material utilizado para o seu revestimento interior seja mínimo.

**Resolução:**

Para as suas dimensões, denotamos por $x$ a largura e o comprimento e por $y$ a altura.

Sabemos que o seu volume é de $108\, m^3$. Temos,

$$V(x,y) = x^2 \cdot y = 108 \iff y = \frac{108}{x^2}.$$

Note-se que se o tanque fosse fechado teríamos $A(x, y) = 4 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x^2$, mas como é aberto então, a área total do revestimento é de

$$A(x, y) = 4 \cdot x \cdot y + x^2.$$

Substituindo o valor de $y$ vem,

$$A(x, y) = 4 \cdot x \frac{108}{x^2} + x^2 := A(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = \frac{432 + x^3}{x}.$$

Derivando a função área temos,

$$A'(x) = \frac{(432 + x^3)'x - (432 + x^3)x'}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 432}{x^2}.$$

Igualamos agora a função derivada a zero e obtemos

$$\frac{2x^3 - 432}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 - 432 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{216} = 6\, m.$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $6$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x^3 - 432$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $A'(x)$ | $-$ | $s/s$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $A(x)$ | ↘ | | ↘ | Mínimo | ↗ |

*Tabela 1: Problema do Tanque de Rega*

Substituindo em $y$ obtemos

$$y = \frac{108}{6^2} = 3\, m.$$

Logo, as dimensões que minimizam os gastos de material são respetivamente, $6\, m$ de largura, $6\, m$ de comprimento e $3\, m$ de altura.

**Problema 4.1.2 (Problema do Cercado)**

O veterinário Peter possui cavalos e comprou $750\, m$ de grades que servirão na construção de um cercado. Ele pretende que o cercado seja dum formato retangular para pôr os seus cavalos. Quais são as dimensões que devem ter este cercado de modo que se obtenha uma área máxima?

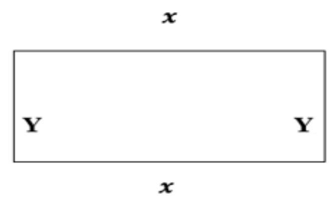



*Figura 27: Problema do Cercado*

**Resolução:**

Queremos maximizar a área do cercado. A equação é $A(x, y) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$, onde $x$ é o comprimento do cercado e $y$ a sua largura.

Existem $750\, m$ de grade, e o perímetro do cercado é dado por $p(x, y) = 2(x + y)$. Assim,

$$\frac{750}{2} = x + y \iff x + y = 375$$

$$\iff x = 375 - y.$$

Substituindo na equação temos

$$A(x, y) = x \cdot y \iff A(x, y) = (375 - y)y := A(y)$$

$$\iff A(y) = 375\mathrm{y} - y^2.$$

Deriva-se a função área em função de $y$, isto é,

$$A'(y) = 375 - 2\mathrm{y}.$$

Iguala-se a função derivada a zero, e obtemos

$$375 - 2\mathrm{y} = 0 \iff y = 187{,}5\, m.$$

| $y$ | $-\infty$ | $187{,}5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $375 - 2y$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $A'(y)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $A(y)$ | ↗ | Máximo | ↘ |

*Tabela 2: Problema do Cercado*

Substituindo em $x$ vem

$$x = 375 - y \iff x = 375 - 187{,}5$$

$$\iff x = 187{,}5\ m.$$

Tendo o valor de $x$ e $y$, substituindo na equação $A(x, y) = x \cdot y$ vem

$$A = 187{,}5 \cdot 187{,}5 \iff A = 35.156{,}25\ m^2.$$

Logo a dimensão máxima da área é de $35.156{,}25\ m^2$.

**Problema 4.1.3 (Problema do Lagar)**
Kanansevele pretende construir um novo lagar para a sua adega feito de granito e cimento, revestido a argila. Pretende-se que o lagar tenha uma capacidade de $144\ m^3$ e tenha o comprimento igual ao triplo da largura. Precisa-se determinar as dimensões do lagar para que o custo do material na sua construção seja mínimo.

**Resolução:**
Denominamos a largura por $x$, o comprimento por $3x$ e a altura por $y$, o volume desta caixa é dado por $V(x, y) = 3x \cdot x \cdot y = 3x^2y$ e então,

$$V(x, y) = 3x^2y \iff V = 144\ m^3$$

$$\iff 144 = 3x^2 \cdot y$$

$$\iff y = \frac{48}{x^2}.$$

A área total da caixa é $A(x, y) = 3x \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 3x \cdot y$, logo a área é dada por

$$A(x, y) = 3x^2 + 8xy.$$

Substituindo $y$ na função área, obtemos

$$A(x, y) = 3x^2 + 8x\frac{48}{x^2}$$

$$= 3x^2 + \frac{384}{x}$$

$$= \frac{3x^3 + 384}{x} := A(x).$$

Vamos derivar a função área e igualar a zero para encontrar o valor máximo e mínimo. Temos,

$$A'(x) = \frac{9x^2x - (3x^3 + 384).1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{-3x^3 + 9.x^3 - 384}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^3 - 384}{x^2}.$$

Igualando a função área a zero, temos,

$$\frac{6x^3 - 384}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 384 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4\,m.$$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $6x^3 - 384$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x^2$ | $+$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $A'(x)$ | $-$ | s/s | $-$ | 0 | $+$ |
| $A(x)$ | ↘ | | ↘ | Mínimo | ↗ |

*Tabela 3: Problema do Lagar*

Sabendo que o comprimento é $3x$, então será de $12\,m$.

Substituindo a medida $x$ em $y$ vem $y = \frac{48}{x^2} = \frac{48}{16} = 3\,m$.

Logo as dimensões que permitem a máxima economia de material para construir o lagar de volume $144\,m^3$ são, $12\,m$ de comprimento, $4\,m$ de largura e $3\,m$ de altura.

**Problema 4.1.4 (Problema da Coelheira)**

O caçador Sebastião pretende construir uma coelheira. Deseja que seja construída de madeira com um formato retangular, e revestida com rede. A rede que possui tem $32\,m$ de comprimento e tem a altura desejada para a construção. Sabendo que ele vai aproveitar uma parede como fundo da coelheira, calcule as dimensões da coelheira para que as dimensões sejam máximas.

**Resolução:**

O comprimento da rede é $p = 32\,m$.

O comprimento será denotado por $x$ e a largura por $y$. Temos,

$$p(x,y) = (x + y) \cdot 2 \Leftrightarrow 32 = 2x + 2y.$$

Como vamos aproveitar a parede, se for no comprimento teremos $p_1(x,y) = 2x + 2y - x$ e se for na largura será $p_2(x,y) = 2x + 2y - y$.

Ora, é no comprimento, então $p_1(x,y) = 2x + 2y - x$, e assim obtemos,

$$32 = x + 2y \iff y = \frac{32 - x}{2}.$$

A função área será

$$A(x,y) = x \cdot y \iff A(x,y) = x\left(\frac{32 - x}{2}\right) := A(x).$$

Derivando a função área temos,

$$A'(x) = \tfrac{1}{2}(32 - 2x).$$

Igualando a função área a zero, vem

$$A'(x) = 0 \iff 32 - 2x = 0$$

$$\iff x = 16\,m.$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $16$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $32 - 2x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $2$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $A'(x)$ | $+$ | $s/s$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $A(x)$ | ↗ | | ↗ | ↑ Máximo | ↘ |

*Tabela 4: Problema da Coelheira*

Substituindo $x$ em $y$ vem

$$y = \frac{32 - 16}{2} \iff y = 8\,m.$$

Logo, as dimensões são de $16\,m$ de comprimento e $8\,m$ de largura.

**Problema 4.1.5 (Problema do Detergente)**

Uma empresa de produtos de limpeza propõe lançar um novo detergente em embalagens de plástico no mercado. Para isso, foi feito um contrato com a fábrica de embalagens, que deve fabricar recipientes com formato cilíndrico com capacidade para $250\,ml$. Qual será a medida do raio da base, $r$, e a medida da sua altura, $h$, para cada um destes recipientes de modo que a quantidade de plástico utilizado para a sua fabricação seja mínima?

**Resolução:**

A área total do cilindro é de

$$A(r,h) = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$$

E o seu volume é de,

$$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Sabendo que o volume é de $250\, ml$, temos

$$250 = \pi \cdot r^2 \cdot h \iff h = \frac{250}{\pi \cdot r^2}.$$

Substituindo na fórmula da função área vem,

$$A(r,h) = 2\pi \cdot r \cdot \frac{250}{\pi r^2} + 2\pi \cdot r^2$$

$$= \frac{500 \cdot \pi \cdot r}{\pi \cdot r^2} + 2\pi \cdot r^2$$

$$= \frac{500}{r} + 2\pi \cdot r^2$$

$$= \frac{500 + 2\pi \cdot r^3}{r} := A(r)$$

Derivando a função área em $r$, temos

$$A'(r) = \frac{(6\pi r^2)r - (500 + 2\pi \cdot r^3) \cdot 1}{r^2}.$$

Igualando a função derivada a zero, vem

$$A'(r) = 0 \iff \frac{4\pi \cdot r^3 - 500}{r^2} = 0$$

$$\iff r = 5\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\ cm$$

$$\iff r = 3{,}41392\ cm.$$

Substituindo em $h = \frac{250}{\pi . r^2}$ , obtemos

$$h = \frac{250}{\pi \cdot \left[\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}\right]^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}} \iff H = 10\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} cm$$

$$\Leftrightarrow \; r = 6{,}8278cm.$$

| $r$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3.4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4\pi r^3 - 500$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $r^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $A'(r)$ | | $-$ | $S/S$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $A(r)$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | $\uparrow$ Mínimo | $\nearrow$ | |

*Tabela 5: Problema do Detergente*

Logo, as medidas do raio e da altura são $3{,}41392\ cm$ e $6{,}8278\ cm$, respetivamente.

## 4.2. Aplicações na Biologia

Na Biologia, segundo Santana [21], a matemática desempenha um papel bastante importante quando se trata de resolver problemas num contexto de modelação matemática. Na Biologia, procura-se muitas vezes gerir da melhor forma a relação existente entre os modelos matemáticos e a realidade dos problemas analisados. Assim, por exemplo, podemos ter modelos que mostram como uma epidemia se pode propagar numa área Florestal. Mais importante será perceber como uma determinada epidemia se pode propagar numa determinada população. Através de cálculos complexos, recorrendo ao conceito de derivada, será possível saber o número de pessoas atingidas por esta epidemia, depois de um certo tempo $t$. Para o efeito, é construída uma função dependente do tempo e é possível analisar a taxa de expansão da epidemia após alguns dias e saber quantas pessoas serão atingidas pela epidemia durante esses dias, recorrendo a cálculos que recorrem ao conceito de derivada. Assim, a aplicação da derivada é muito importante na resolução de problemas das ciências biológicas.

**Problema 4.2.1 (Problema do Espirro)**

Um médico examina um paciente que se apresenta com um quadro clínico de espirros constantes. Sabe-se que durante o espirro há um decréscimo no raio da traqueia do indivíduo. Consideremos o raio da traqueia denotado por $R$, em centímetros $(cm)$ e que no momento do espirro este raio passe a ser denotado por $r$. Assim, $R$ será uma constante e $r$ uma variável. Podemos mostrar que a velocidade do ar através da traqueia é expressa pela função $V(r) = k \cdot r^2(R - r)$, onde $k$ é uma constante positiva e $r \in \left[\frac{1}{2}R, R\right]$. Pede-se para determinar o raio da traqueia no momento de espirro que maximiza a velocidade do ar.

**Resolução:**

Temos a expressão da função velocidade definida por

$$V(r) = kr^2R - kr^3.$$

Derivando a função velocidade vem,

$$V'(r) = 2krR - 3kr^2.$$

Igualando esta função derivada a zero temos,

$$V'(r) = 0 \iff 2krR - 3kr^2 = 0$$

$$\iff kr(2R - 3r) = 0$$

$$\iff kr = 0 \ \vee \ 2R - 3r = 0$$

$$\iff r = 0 \quad \vee \quad r = \frac{2R}{3}.$$

| $r$ | $-\infty$ | $0$ | | $2R/3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $kr$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2R-3r$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $V'(r)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $V(r)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $\uparrow$ Máximo | $\searrow$ |

*Tabela 6: Problema do Espirro*

Concluímos assim que a velocidade do ar é máxima quando o raio da traqueia é de $\frac{2R}{3} cm$. Podemos ainda dizer que a velocidade do ar será de $V\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4k \cdot R^3}{27}\ cm/s$.

**Problema 4.2.2 (Problema da Reserva de Caça)**

Um médico veterinário em serviço de vacinação de animais, relata que, uma centena de animais selvagens foram dispostos numa reserva de caça. Sabemos que o crescimento do número de indivíduos da referida espécie depende do tempo. Deseja-se calcular em quantos anos o número de indivíduos na reserva de caça será máximo. Sabe-se ainda que o crescimento populacional da raça é expresso pela função

$$P(t) = 100\frac{t^2 + 3{,}5t + 12{,}25}{t^2 + 12{,}25}$$

onde $P$ denota o número de indivíduos e $t$ o tempo decorrido desde a colocação dos animais na reserva.

**Resolução:**

Sabemos que o crescimento populacional desses animais é dado pela expressão

$$P(t) = 100\frac{t^2 + 3{,}5t + 12{,}25}{t^2 + 12{,}25}.$$

Esta função está definida em função do tempo $t$. Derivando a função em relação ao tempo obtemos,

$$P'(t) = \ 100\frac{(2t + 3{,}5)(t^2 + 12{,}25) - (t^2 + 3{,}5t + 12{,}25)2t}{(t^2 + 12{,}25)^2}$$

$$= 100\frac{-3{,}5t^2 + 42{,}875}{(t^2 + 12{,}25)^2}.$$

Igualando esta função derivada a zero, obtemos o ponto crítico onde o número de indivíduos poderá ser máxima. Temos,

$$P'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 100\frac{-3{,}5t^2 + 42{,}875}{(t^2 + 12{,}25)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3{,}5t^2 + 42{,}875 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 3{,}5.$$

| $t$ | $-\infty$ | | $3{,}5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $42{,}87 - 3{,}5t^2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $P'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $P(t)$ | | $\nearrow$ | $\uparrow$ *Máximo* | $\searrow$ | |

*Tabela 7: Problema da* Reserva de Caça

Analisando agora a tabela de variação da função $P'$ e construindo o respectivo comportamento da função $P$, podemos concluir que após $3$ anos e $6$ meses a reserva de caça terá o valor máximo possível de animais dessa raça.

**Problema 4.2.3 (Problema do Borboletário)**

Um borboletário pode sustentar até $30.000$ borboletas no máximo. Sabe-se que a taxa de crescimento do número de borboletas depende do número de indivíduos no instante inicial. Essa taxa de crescimento está definida tendo em conta o número de borboletas no instante inicial de acordo com a função $P(x) = x(30.000 - x)$. Deseja-se calcular o número de borboletas necessárias para que a taxa de crescimento seja máxima. Note que $P$ denota a taxa de crescimento do número de borboletas e $x$ o número de indivíduos da população.

**Resolução:**

Derivando esta função em relação a $x$, temos

$$P'(x) = 30.000 - 2x.$$

Igualando este resultado a zero obtemos

$$P'(x) = 0 \iff 30.000 - 2x = 0$$

$$\iff x = 15.000.$$

| $x$ | $-\infty$ | 15000 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $30000 - 2x$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $P'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $P(x)$ | $\nearrow$ | Máximo | $\searrow$ |

*Tabela 8: Problema do Borboletário*

Concluímos assim que para a taxa de crescimento ser máxima o borboletário deve iniciar com $15.000$ borboletas.

**Problema 4.2.4 (Problema da Pressão Sanguínea)**

Um paciente apresenta um quadro de pressão sanguínea reduzida. Após um estudo realizado, detetou-se que a pressão sanguínea depende de uma determina quantidade de droga enjerida. Suponha-se que o paciente enjeriu $x\, mg$ dessa droga. A pressão sanguínea terá uma variação expressa pela função $Q(x) = 3x^2(k - x)$ onde $x \in [0, k]$ e $k$ é uma constante positiva. Procura-se determinar o valor de $x$ que provoca o maior valor da pressão sanguínea.

**Resolução:**

Sabemos que $Q(x) = 3k \cdot x^2 - 3x^3$. Vamos derivar a função $Q$ em relação a $x$. Temos,

$$Q'(x) = 6k \cdot x - 9x^2.$$

Igualando $Q'$ a zero, vem

$$Q'(x) = 0 \iff 6(k \cdot x) - 9x^2 = 0$$

$$\iff x(6k - 9x) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}k.$$

Logo o valor de $x$ para que se tenha a maior pressão é de $\frac{2}{3}k\, mg$.

## 4.3. Aplicações nas Ciências Económicas

Na Economia, as funções diferenciáveis chamam-se marginais [9]. O conceito de derivada é aplicado no tratamento de problemas que dizem respeito à oferta e à procura de determinados produtos ou serviços, à resolução de problemas onde se pretende maximizar o lucro ou minimizar os custos. Este tipo de problemas e análise é denominada de **Análise Marginal**.

O conceito da derivada na economia, tem uma função preponderante quando se trata do estudo da procura de determinado bem ou serviço. Isto deve-se ao fato de que quando o preço de um bem aumenta, a procura do mesmo diminui e vice-versa, ou seja, se o preço diminui a procura aumenta. Assim, se a função da procura for decrescente e diferenciável, teremos que, $\frac{dx}{dp} < 0$.

Em [15], descreve-se que de um modo recorrente, os problemas analisados na administração e na economia, na maior parte das vezes, envolvem problemas de maximização de lucro e, por outro lado, problemas de minimização de custos. Com o auxílio da derivada, é possível calcular o lucro máximo que uma indústria pode obter e o custo mínimo na confeção de determinado produto.

Segundo MUNEM e FOULIS (1982), [15], na economia, o termo "marginal" é usualmente usado como sinónimo para "derivada de". Por exemplo, se $C$ é uma função custo tal que a sua imagem, $C(x)$, é o custo da produção de $x$ unidades de certo produto, $C'(x)$ é chamado de custo marginal da produção de $x$ unidades e $C'$ é chamada de função de custo marginal. Assim, o custo marginal será a taxa de variação do custo da produção por unidade.

Vamos aos problemas práticos.

**Problema 4.3.1 (Problema do Artesão)**
Um artesão de ourivesaria pretende começar a produzir um novo modelo de anéis de prata. O custo total de produção de $x$ anéis por dia é de $\frac{1}{2}x^2 + 35x + 25$ € e o preço de cada anel é de $50 - x$ €. Qual deve ser a produção diária de anéis para que o lucro seja máximo?

**Resolução:**
Podemos denotar o lucro total por $L_t$, o preço de cada anel por $P_t$, o custo total por $C_t$ e a receita por $R$. Temos $L_t = R - C_t$.

A função receita, será definida por

$$R(x) = P_t(x).x,$$

sendo $x$ o número de anéis produzidos. Como $P_t(x) = 50 - x$, teremos

$$R(x) = (50 - x)x \iff R(x) = 50x - x^2.$$

Então, em função de $x$ o custo total será definido pela função $C_t(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 35x + 25)$.

Em função de $x$ o lucro será

$$\begin{aligned} L_t(x) &= R(x) - C_t(x) \\ &= (50x - x^2) - (\tfrac{1}{2}x^2 + 35x + 25) \\ &= 50x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 35x - 25 \\ &= 15x - \frac{3}{2}x^2 - 25. \end{aligned}$$

Derivando a função lucro total temos,

$$L_t{}'(x) = 15 - 3x.$$

Igualando esta derivada a zero temos,

$$\begin{aligned} L'(x) = 0 &\iff 15 - 3x = 0 \\ &\iff x = 5. \end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $15 - 3x$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $L'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $L(x)$ | $\nearrow$ | Máximo | $\searrow$ |

*Tabela 9: Problema do Artesão*

Portanto, é preciso fabricar 5 anéis de prata por dia para maximizar o lucro do artesão.

**Problema 4.3.2 (Problema das Batatas Fritas)**

No Parque de Diversões, o preço de venda de um pacote de batatas fritas é de $5$ €. Se o trabalhador vender $150$ pacotes de batatas fritas com o custo de $1$ € por cada pacote, então por cada cêntimo que o trabalhador baixar no preço do pacote de batatas fritas, a quantidade vendida pode aumentar $50$ unidades. Queremos saber o preço de venda de forma a maximizar o lucro.

**Resolução:**

A princípio, podemos observar que o lucro é de $4$ € em cada pacote. Se denotarmos por $x$ o número de euros que o trabalhador baixa no preço de cada pacote, o lucro na venda de cada pacote de batatas fritas será então de $4-x$ euros, e a quantidade vendida será de $150+50x$. O lucro total é, portanto, o lucro de cada pacote vezes a quantidade vendida, ou seja,

$$L(x) = (4-x)\cdot(150+50x)$$

$$= 600 + 200x - 150x - 50x^2$$

$$= 600 + 50x - 50x^2.$$

Derivando a função lucro e igualando a zero temos

$$L'(x) = 50 - 100x \iff 50 - 100x = 0$$

$$\iff x = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

| $x$ | $-\infty$ | $0{,}5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $50-100x$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $L'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $L(x)$ | $\nearrow$ | Máximo | $\searrow$ |

*Tabela 10: Problema das Batatas Fritas*

Assim, o preço de venda que maximizará o lucro será de $4{,}5$ €.

**Problema 4.3.3 (Problema das Toalhas de Praia)**

Uma fábrica pretende produzir toalhas de praia. O preço da produção de $n$ unidades de toalhas de praia é dada pela função $f(n) = 20 + 10n$. Se o preço de venda de cada toalha de praia for de $50 - \frac{n}{100}$ para $n < 40000$ calcule o número de toalhas de praia que se devem fabricar para maximizar o lucro da fábrica.

**Resolução:**

Vamos considerar a função lucro denotada por $L(n)$ e a função do preço de venda de cada toalha de praia por $P(n)$. Assim, o lucro será igual a $n$ unidades de toalhas de praia vezes o preço de venda de cada toalha de praia menos a função preço da produção, ou seja

$$L(n) = n\cdot P(n) - f(n).$$

Assim,

$$L(n) = n\left(50 - \frac{n}{100}\right) - (20 + 10n) \;\Leftrightarrow\; L(n) = n\left(50 - \frac{n}{100}\right) - 20 - 10n$$

$$\Leftrightarrow\; L(n) = 4000n - n^2 - 2000.$$

Vamos derivar a função Lucro e igualar a zero para determinar o ponto crítico. Obtemos

$$L'(n) = 4000 - 2n = 0 \;\Leftrightarrow\; 4000 - 2n = 0$$

$$\Leftrightarrow\; n = 2000.$$

| $n$ | $-\infty$ | $2000$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $4000 - 2n$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $L'(n)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $L(n)$ | $\nearrow$ | Máximo | $\searrow$ |

*Tabela 11: Problema das Toalhas de Praia*

Sendo assim, o número de toalhas de praia fabricadas para que o lucro seja máximo é de $2000$ unidades.

## 4.4. Aplicações na Física

O conceito de derivada na Física (ver [12] e [21]), desempenha um papel importante no estudo da cinemática, onde o movimento retilíneo uniformemente variado (movimento da trajetória é uma reta e a velocidade varia linearmente com o tempo) obtém uma nova denominação, a partir da sua função horária. Essa denominação dada à derivada é a velocidade. Derivando a função velocidade surge uma nova denominação para a segunda derivada que chamamos da aceleração. Neste caso a cinemática apoia-se na derivada para estudar o comportamento dos corpos que se movem horizontalmente e verticalmente, onde se fixa uma origem $0$.

De acordo com o deslocamento, pode-se obter uma função horária em relação ao tempo da forma $S(t) = at^2 + bt + c$. Podemos encontrar a velocidade nos intervalos de tempo. Assim como a velocidade média no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ que é o valor quociente da taxa média de variação da função posição $S$ entre os instantes $t_i$ e $t_f$. Uma vez que temos um ponto inicial $S_i$ e um final $S_f$, além de um instante inicial $t_i$ e um final $t_f$, assim podemos calcular a velocidade média, isto é, $V_m = \frac{S(t_f)-S(t_i)}{t_f-t_i} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

**Problema 4.4.1 (Problema da Bola de Voleibol)**

Uma seleção de voleibol prepara-se para um jogo. No período de aquecimento, um jogador no movimento da manchete lançou uma bola verticalmente para cima. A posição da bola, denotada por $S$, no decorrer do tempo $t$ é fornecida pela equação horária $S(t) = 80t - 20t^2 - 74$ ($S$ em metros e $t$ em segundos).

a) Calcule o tempo necessário para que a bola atinja a altura máxima.

b) Calcule a altura máxima atingida pela bola de voleibol.

**Resolução:**

a) Como a equação horária determina o espaço em relação ao tempo, então derivando a expressão $S(t) = 80t - 20t^2 - 74$, podemos obter a velocidade instantânea em relação ao tempo, assim,

$$S'(t) = V(t) = 80 - 40t.$$

Igualando a zero a função velocidade obtemos,

$$V(t) = 0 \iff 80 - 40t = 0$$

$$\iff t = 2.$$

| $t$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $80 - 40t$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $S'(t)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $S(t)$ | $\nearrow$ | $\uparrow$ Máximo | $\searrow$ |

*Tabela 12: Problema da Bola de Voleibol*

O tempo gasto para atingir a altura máxima é de $2$ segundos.

b) Para determinar a altura é preciso substituir o tempo na expressão do espaço. Obtemos

$$S(2) = 80 \cdot 2 - 20(2)^2 - 74 = 6\,m.$$

Assim, concluímos que a altura máxima em relação ao solo é de 6 metros.

**Problema 4.4.2 (Problema do Ciclista)**

Um ciclista percorre uma distância sobre um segmento de reta horizontal respeitando a equação horária $S = \sqrt{18}\, sen\, t$.

a) Determine a velocidade do ciclista no instante $t = \frac{\pi}{4}$ segundos.

b) Determine a aceleração do ciclista no instante $t = \frac{7\pi}{6}$ segundos.

**Resolução:**

a) Derivando a função $S(t) = \sqrt{18}\, sen\, t$, obtemos como resultado,

$$S'(t) = V(t) = \sqrt{18}\, cos\, t.$$

A velocidade no instante $t = \frac{\pi}{4}$ será

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{18}\, cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3.$$

Assim a velocidade no instante $t = \frac{\pi}{4}$ será de 3 m/s

b) Derivando a velocidade em função do tempo obtemos a aceleração em função do tempo. Assim, teremos

$$V'(t) = A(t) = -\sqrt{18}\, sen\, t.$$

A aceleração no instante $t = \frac{7\pi}{6}$ será

$$A\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{18}\, sen\left(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\sqrt{18}\left(-sen\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{18} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\approx 2{,}12.$$

Logo, a aceleração será de aproximadamente $2{,}12\; m/s^2$.

**Problema 4.4.3 (Problema da Intensidade e Carga Elétrica)**

Sabendo que a intensidade da corrente elétrica se designa por $i$ e a carga da corrente elétrica por $q$ então consideremos uma carga elétrica, em Coulombs, que se transmite através de um circuito que varia de acordo com a função $q(t) = 24t^4 - 64t^3$ em relação ao tempo. Determine o tempo $t$ quando a intensidade da corrente $i = q'(t)$ atinge o valor mínimo.

**Resolução:**

Vamos derivar a expressão da função carga em relação ao tempo $q(t) = 24t^4 - 64t^3$. Obtemos,

$$q'(t) = 96t^3 - 192t^2.$$

Igualando esta função derivada a zero temos,

$$q'(t) = 0 \iff 96t^3 - 192t^2 = 0$$

| $t$ | $-\infty$ | $0$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $96t^2$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $t-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $q'(t)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $q(t)$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | Mínimo | $\nearrow$ |

*Tabela 13: Problema da Intensidade e Carga Elétrica*

Assim para $t = 2$ temos $q(2) = -128$.

Logo, a intensidade da corrente, $i = q'(t)$, atinge o valor mínimo em $t = 2$ segundos.

**Problema 4.4.4 (Problema do Clima)**

O jornalista Ferraz Mendes que exibe as condições climatéricas no programa Hora Meteorológica, aconselha a população em geral para se proteger da intempérie que se aproxima. As temperaturas irão baixar drasticamente, em graus Celsius, de acordo com a função $T(t) = 0{,}2(800 - 80t + t^2)$, onde $t$ representa a hora. Temos assim $0 \leq t \leq 24$.

a) Calcule a taxa de variação média de $T$ em relação a $t$ entre as $10h$ e as $12h$.

b) Calcule a taxa de variação de $T$ em relação a $t$ às $10h$.

**Resolução:**

a) Como a expressão $T(t) = 0{,}2(800 - 80t + t^2)$, descreve a taxa de variação da temperatura em graus relativamente ao tempo, podemos derivar a função $T$ em relação $t$, pelo que obtemos,

$$T'(t) = 0{,}2(-80 + 2t) \iff T'(t) = -16 + 0{,}4t.$$

O valor médio entre as $10h$ e as $12h$ é $11h$, assim vamos considerar $t = 11h$. Assim, substituindo o tempo médio teremos,

$$T'(11) = -16 + 0{,}4 \cdot 11 \iff T'(11) = -16 + 4{,}4$$

$$\Leftrightarrow \; T'(11) = -11{,}6.$$

Concluímos assim que a taxa de variação média de $T$ entre as $10h$ e as $12h$ é de $-11{,}6°$ Celsius.

b) Pede-se para calcular a variação de $T$ para $t = 10h$. Vamos ter,

$$T'(10) = -16 + 0{,}4 \cdot 10 \; \Leftrightarrow \; T'(10) = -16 + 4$$

$$\Leftrightarrow \; T'(10) = -12.$$

Concluímos assim que a taxa de variação média de $T$ às $10h$ é de $-12°$ Celsius.

# Capítulo 5

# O Conceito da Derivada no Ensino Secundário

Neste capítulo, mostraremos como o conceito da derivada é apresentado nos livros de diferentes níveis do ensino secundário (11º e 12º anos de escolaridade), com o objetivo de compreender como é que este importante conceito é apresentado pela primeira vez aos alunos.

Nesta dissertação iremos apenas quantificar o material fornecido aos alunos, pelo que, não iremos tecer grandes considerações sobre a qualidade do material disponibilizado aos alunos.

Vamos começar com a análise de dois manuais do 11º ano de escolaridade.

## 5.1. Análise do manual “Máximo matemática A, 11º ano parte 2”

No livro [17], MÁXIMO MATEMÁTICA A, 11º ANO PARTE 2 de Maria Augusta Ferreira Neves, Luís Guerreiro e António Pinto Silva, Porto Editora, 2006, 1ª edição, temos o conceito da derivada apresentado no 4º capítulo, nas secções 4.3 e 4.4, com os títulos “Derivadas de funções reais de variável real” e “Aplicações das derivadas ao estudo de funções”, respetivamente. A secção 4.3 está dividida em 4 tópicos e a secção 4.4 em 3.

Começamos pela secção 4.3. intitulada “Derivadas de funções reais de variável real”.

No 1º tópico, intitulado “Taxa média de variação de uma função”, é apresentada a definição de Taxa Média de Variação. Seguidamente são resolvidos dois exercícios. É apresentada uma interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função entre dois pontos, referindo o conceito de declive da reta. O tópico termina com um exercício resolvido e com a proposta de 5 exercícios.

“Taxa instantânea de variação de $f$ num ponto. Derivada de uma função num ponto” é o tópico que se segue. Começa com a definição de derivada de uma função num ponto, seguindo-se a resolução de 3 exercícios. É chamada a atenção para a existência de duas formas diferentes para definir a derivada de uma função num ponto à custa dos limites. É apresentada a interpretação geométrica da derivada e a definição de equação da reta tangente ao gráfico de uma função $f$ num ponto. O tópico termina com 2 exercícios resolvidos e 6 exercícios propostos. Note-se que no final da resolução do segundo exercício, e uma vez que existiu a necessidade de fazer limites laterais para calcular a derivada, é dito que os limites laterais são designados por derivadas laterais e é feita uma interpretação geométrica das derivadas laterais.

O 3º tópico, intitulado "A derivada e a cinemática", começa com a resolução de um exercício sobre os conceitos de deslocamento, posição de um ponto e movimento de um ponto. De seguida são apresentados os conceitos de velocidade média e velocidade instantânea, tendo sempre em consideração o exercício inicialmente considerado. Finaliza com três exemplos de exercícios resolvidos e três propostos.

No 4º tópico, "Função derivada. Propriedades e operações", com base num exercício resolvido anteriormente, são apresentadas as definições de função derivada, de função diferenciável num ponto e num conjunto. São resolvidos 3 exercícios e propostos 5. Segue-se o estudo da monotonia e do sinal da derivada com as respetivas propriedades e demonstrações. Seguidamente é apresentada a relação existente entre a derivabilidade e a continuidade com a respetiva interpretação geométrica. São resolvidos 2 exercícios e propostos 3. Ainda dentro deste tópico, são apresentadas e demonstradas algumas das principais regras de derivação. São elas a derivada da função afim, a derivada da função constante e da função identidade, a derivada do produto de uma constante por uma função, a derivada da soma, do produto, do quociente, da função composta, a derivada de $x^n$, a derivada de uma raiz e a derivada de uma potência de expoente racional. À medida que as regras de derivação vão sendo apresentadas e demonstradas, vão sendo resolvidos inúmeros exercícios e propostos outros tantos, totalizando 34 exercícios resolvidos e 52 propostos.

A secção termina com uma síntese esquemática de todos os conceitos apresentados, a proposta de 59 exercícios complementares e 20 exercícios de avaliação.

Na secção 4.4., "Aplicações das derivadas ao estudo de funções" é apresentada a seguinte curiosidade histórica:

> "Em 1615, Kepler (1571-1630) demonstrou através duma experiência que o maior paralelepípedo que é possível inscrever numa esfera é um cubo."

Assim, fica claro que toda esta secção terá como objetivo apresentar as várias aplicações que poderão ser dadas ao conceito de derivada.

Depois da curiosidade histórica, são propostos 6 exercícios com uma interpretação gráfica.

Segue-se o 1º tópico, intitulado "Diferenciabilidade e extremos locais". É apresentada a propriedade que diz que se uma função atinge um extremo local num ponto então a derivada da função nesse ponto é 0. A propriedade é devidamente demonstrada e é chamada a atenção para o facto de que o recíproco da propriedade não é verdadeira. Este tópico termina com um exercício resolvido e um exercício proposto.

“Diferenciabilidade e monotonia” é o tópico que se segue. Apresenta o Teorema de Lagrange devidamente demonstrado e com a devida interpretação geométrica. São resolvidos dois exercícios e propostos 7 exercícios. Temos seguidamente os teoremas que relacionam o sinal da derivada e a monotonia, devidamente demonstrados, 1 exercício resolvido e 4 propostos. Seguem-se os teoremas que relacionam o sinal da derivada e os extremos locais. Também aqui temos as devidas demonstrações, as interpretações geométricas, 6 exercícios resolvidos e 20 propostos.

A secção termina com o tópico “Problemas de otimização e outras aplicações das derivadas”. São apresentadas inúmeras aplicações que são dadas ao conceito de derivada nos mais diversos ramos da Física, da Economias e em muitas outras áreas. Neste tópico, são resolvidos 7 problemas e propostos 20.

À Semelhança do que se verificou na secção anterior, esta termina com uma síntese esquemática de todos os conceitos apresentados, a proposta de 43 exercícios complementares e 19 exercícios de avaliação.

## 5.2. Análise do manual “Novo espaço matemática A, 11º ano parte 2”

Temos agora o livro [5], NOVO ESPAÇO MATEMÁTICA A, 11º ANO PARTE 2 de Belmiro Costa e Ermelinda Rodrigues, Porto Editora, 1ª edição, 3ª tiragem 2011.

O conceito da derivada é apresentado no capítulo 2 com o título “Taxa média de variação. Taxa de variação. Derivada”. Este capítulo está dividido em 2 secções.

A primeira secção, intitulada “Taxa média de variação. Taxa de variação”, começa com um exemplo, de forma a explicar o conceito de variação seguindo-se a definição formal. Temos depois dois exercícios resolvidos. Segue-se a definição de taxa média de variação, a sua interpretação geométrica. Note-se que ao longo do texto, os autores dão muita importância à interpretação geométrica dos conceitos apresentados e dos exemplos resolvidos. Estabelece-se a relação existente entre taxa média de variação e declive. Temos a seguir a noção de taxa de variação com um exemplo prático, a definição e a sua interpretação geométrica. Até este momento, são propostos 32 exercícios. A secção termina com a definição de declive da reta tangente. Segue-se uma tarefa composta por 10 exercícios, 2 exercícios resolvidos, uma nova tarefa com 6 exercícios. Temos ainda, ao longo do texto, 9 exercícios propostos, e para terminar, uma referência histórica relativamente ao matemático Pierre de Fermat.

Na segunda secção, intitulada "Função derivada. Derivada de algumas funções" estuda-se a definição de derivada, recordando que François Viete foi um dos primeiros matemáticos a utilizar de forma sistemática as notações simbólicas com recurso a letras nas equações e nas funções. É chamada a atenção para o facto de que a máquina calculadora, adotada na disciplina, permite representar o gráfico de $f'$. Segue-se um exercício resolvido com a respetiva interpretação geométrica e uma chamada de atenção tara as quatro formas possíveis de denotar a derivada. Seguem-se duas tarefas compostas por 14 exercícios. Nas páginas que se seguem, são apresentadas definições, fórmulas, demonstrações, interpretações geométricas e exercícios resolvidos sobre a derivada da função afim, da função polinomial do 2º e 3º grau, de funções racionais e da função módulo. Temos um total de 61 exercícios propostos mais 3 tarefas com 7, 7 e 5 exercícios respetivamente. Seguidamente é apresentada a interpretação do sinal da função derivada e o sentido de variação e os extremos relativos de uma função através de inúmeros exemplos, algumas interpretações geométricas e exercícios resolvidos. Ao longo destas últimas páginas são propostos 19 exercícios e 3 tarefas totalizando 19 exercícios.

Vamos agora expor o conteúdo dois manuais do 12º ano de escolaridade no que ao conceito de derivada diz respeito.

## 5.3. Análise do manual "Livro de texto, matemática 12º ano"

No livro [16], LIVRO DE TEXTO, MATEMÁTICA 12º ANO de Maria Augusta Ferreira Neves, Maria Teresa Coutinho Vieira e Alfredo Gomes Alves, Porto Editora, 1989, o conceito da derivada é apresentado no capítulo 8 com o título "Derivadas de funções reais de variável real". Este capítulo está dividido em 10 secções.

Na 1ª secção, intitulada "A tangente a uma curva num dos seus pontos", é apresentada uma introdução sobre a reta tangente, a sua interpretação geométrica e declive. Nesta secção são apresentados 4 gráficos para melhor compreensão do conceito. Para complementar, é apresentado um exemplo para melhor compreensão do conceito e propostos 3 exercícios.

Na 2ª secção, intitulada "Derivada de uma função num ponto", é apresentada a definição da derivada num ponto e as 4 formas de denotar a derivada. Também são apresentados dois exercícios resolvidos e propostos 8 exercícios.

Na 3ª secção, "Derivadas laterais", apresentam as definições das derivadas laterais e encontramos um exemplo para melhor compreensão. Depois das definições aparece uma interpretação geométrica. A secção termina com 5 exercícios propostos.

Na 4ª secção, “Derivabilidade e continuidade”, apresentam vários teoremas e demonstrações fundamentados por 1 exercício resolvido e uma interpretação gráfica. A secção termina com 2 exercícios propostos.

Na 5ª secção, intitulada “Função derivada”, são apresentadas as definições da derivada com 2 exercícios resolvidos e 4 propostos.

Na 6ª secção, intitulada “Regras de derivação”, são apresentadas 8 subsecções nos quais se encontram as principais propriedades e regras de derivação com algumas interpretações gráficas e 14 exercícios propostos.

Na 7ª secção, intitulada “Derivadas das funções circulares”, são estudados em detalhe as funções trigonométricas de modo a introduzir as regras de derivação, algumas propriedades e respetivas demonstrações. Cada caso é acompanhado de um exercício resolvido. A secção termina com 19 exercícios propostos.

Na 8ª secção, “Derivadas das funções trigonométricas inversas”, temos 4 subsecções nos quais cada uma trata a derivada das funções arco. Ao longo das subsecções são apresentados exercícios e propostos 18 exercícios para os alunos resolverem.

Na 9ª secção, “Derivadas da função exponencial e da função logarítmica” temos 4 subsecções. Cada uma das subsecções explora uma propriedade, devidamente demonstrada e apresenta dois exercícios resolvido. Ao longo da secção são propostos 24 exercícios para os alunos resolverem.

A última secção, “Derivadas sucessivas”, é apresentada a definição de derivada de segunda ordem. Com esta definição, fala-se nas derivadas de ordem $n$. Ao longo da secção são resolvidos 2 exercícios e propostos 4.

No final do capítulo encontram-se duas tabelas com as regras de derivação. São propostos 20 exercícios sobre toda a matéria do capítulo. É apresentado um esquema lógico das secções apresentadas e as soluções de todos os exercícios propostos.

## 5.4. Análise do manual “Espaço 12, matemática A, 12º ano”

No livro [4], ESPAÇO 12, Matemática A, 12º ano, de Belmiro Costa, Lurdes do Céu Resende e Ermelinda Rodrigues, ASA, 2ª edição, 2011, o conceito de derivada é apresentado no capítulo 3 com o título “Calculo diferencial”. Este capítulo está dividido em 9 secções.

A primeira secção, intitulada “Aplicação dos conceitos: taxa média de variação, taxa de variação e derivada”, começa com a proposta de 7 exercícios para o aluno recordar os conceitos de taxa média de variação e taxa de variação aprendidos no 11º ano de escolaridade. Segue-se uma nova atividade composta por 11 exercícios. Para recordar as interpretações geométricas dos conceitos anteriores e dos conceitos de derivada e de derivadas laterais são apresentados vários exemplos e uma nova atividade composta por 5 exercícios. Nesta última atividade são apresentadas as respetivas resoluções. Nesta secção são apresentados vários exemplos de exercícios resolvidos recorrendo à máquina calculadora adotada na disciplina. Temos ainda 25 exercícios para o aluno resolver ao longo da secção.

"Derivabilidade e continuidade" é a secção que se segue. Nela são apresentados e demonstrados os teoremas que relacionam estes dois conceitos. Temos 3 exercícios resolvidos com as respetivas interpretações geométricas e 11 exercícios propostos.

Na terceira secção, intitulada "Funções deriváveis" são resolvidos 7 exercícios subordinados ao tema, com as devidas interpretações geométricas, e são propostos 15 exercícios.

Na 4ª secção "Regras da derivação" são recordadas e demonstradas as fórmulas da derivada da soma, do produto, da potência, do quociente e da função composta. São resolvidos 5 exercícios e propostos 35.

Na 5ª secção, "Derivada da função exponencial $x \to e^x$. Segunda definição do número $e$", é definido o número de Neper e apresentada a derivada da função exponencial. Para demonstrar a derivada da função exponencial é apresentado o limite notável

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

É apresentada ainda a fórmula para a derivada da função exponencial do tipo $y = a^x$.

Temos ao longo desta secção 7 exercícios resolvidos e 25 propostos.

Na 6ª secção, "Derivada da função logarítmica $x \to \ln x$" é recordada a definição e a representação geométrica da função logarítmica. São apresentados os limites notáveis envolvendo a função e as fórmulas para obter as derivadas. Temos 5 exercícios resolvidos e 28 propostos.

Na 7ª Secção "Sinal da derivada e sentido de variação. Extremos relativos de uma função" é apresentada toda a teoria relativa à monotonia e aos extremos de uma função. Temos 4 exercícios resolvidos e 24 propostos.

"Segundas derivadas e concavidade" é a secção que se segue. Nela é apresentada uma informação complementar sobre os dois conceitos físicos de velocidade e a aceleração. Segue-se a definição de segunda derivada de uma função e toda a interpretação teórica e geométrica que poder ser feita relativamente ao estudo do sentido das concavidades de uma função. Temos 2 exemplos resolvidos e 11 propostos.

Na última secção, “Estudo Analítico de funções”, é proposto que o aluno faça um estudo rigoroso de funções tendo em conta os seguintes itens:

- Domínio;
- Paridade;
- Existência de assimptotas;
- Pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados;
- Estudo do sinal da 1ª derivada;
- Estudo do sinal da 2ª derivada;
- Contradomínio;
- Representação gráfica.

São resolvidos 3 exercícios dando particular importância ao 5º e 6ª itens. São ainda propostos 31 exercícios mais 20 problemas.

# Capítulo 6

# Conclusões

Dada a importância do conceito de derivada nas mais diversas áreas, este trabalho teve como objetivo apresentar a definição do conceito de derivada, assim como as suas principais propriedades, teoremas, a sua utilização no estudo de algumas propriedades das funções, as suas aplicações em diversas áreas e por fim analisar como ele é apresentado em diferentes manuais e também como é explicado aos alunos do ensino secundário.

Neste contexto, vemos que a derivada se utiliza em vários ramos do ensino e é uma ferramenta muito útil na resolução de problemas. Assim, de uma forma modesta, um dos objetivos que nos propusemos foi elaborar um documento didático que ilustrasse a utilização do conceito de derivada nas mais diversas áreas tais como da Engenharia, da Economia, da Física e da Biologia, entre outras.

Finalizámos a dissertação com uma análise de quatro manuais do ensino secundário. Pretendeu-se perceber de que forma este importante conceito é apresentado pela primeira vez aos alunos.

Embora o objetivo inicial não passasse por fazer uma análise qualitativa dos manuais, atrevemo-nos a afirmar que, relativamente aos manuais do 11º Ano, consideramos que o mais interessante e aquele que desempenha melhor o propósito de introduzir o conceito de derivada, é o livro [17], "Máximo", Matemática A. Comparativamente ao outro, podemos afirmar que este é muito mais detalhado, apelativo e completo.

No que diz respeito aos livros do 12º Ano, consideramos que o manual escolar [16], "Livro de texto, Matemática 12º Ano", Porto editora, 1989, é mais completo, apresentando todas as demonstrações e interpretações geométricas apropriadas nesta fase de ensino.

# Referências Bibliográficas


[1] ÁLVES, A. M., SILVA, A. T. da, TEIXEIRA, E. J. (2017). MAT 146—Cálculo I Teorema do valor médio. Universidade Federal de Viçosa. Disponível em: http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20140/2017-I/slides.

[2] BALBO, A. R. (2008). Material Didático (BCC-BSI), Universidade Estadual Paulista (UNESP). Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/.

[3] BIANCHINI, W., SANTOS, A. R. (2017). Capítulo 17. Teorema do valor médio. Disponível em: https://www.slideshare.net/fabianoft/teorema-do-valor-mdio.

[4] COSTA, B., RESENDE, L. do C., RODRIGUES, E. (2011). Espaço 12, Matemática A, 12º Ano, 2ª edição. ASA.

[5] COSTA, B., RODRIGUES, E. (2011). Novo Espaço, Matemática A, 11º Ano, Parte 2, 1ª edição. Porto Editora.

[6] DALL'ANESE, C. (2000). Conceito de Derivada: Uma proposta para seu ensino e aprendizagem. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

[7] DINIZ, G. L. (2006). História da Derivada. Universidade Federal de Mato Grosso-Cuiabá.

[8] DINIZ, M., ALMEIDA, A., JÚNIOR, E. N. (2012). Projeto NEWTON, Cálculo 1— Aula 14: Aproximações Lineares e Diferenciais. Regra de L'Hôspital. Disponível em: http://www.aedmoodle.ufpa.br/pluginfile.php?file=%2F294687%2Fmod_folder%2Fcontent%2F0%2FAula%2014.pdf.

[9] DIOGO, K. (2015) Conceitos de derivadas na Economia. Disponível em: https://www.academia.edu/9490479/Conceitos_de_derivadas_na_Economia.

[10] EVES, H. (2011). Introdução à História da Matemática. 5ª ed., Tradução de Hygino H. Domingues. Universidade Estadual de Campinas. Editora da Unicamp.

[11] FERREIRA, B. da S. (2012). Problemas de Máximos e Mínimos. Universidade de Lisboa. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/jspui/handle/10451/9202.

[12] IEZZI, G., MURAKAMI, C., MACHADO, N. J. (1993). Fundamentos de Matemática Elementar, 3 reimp., Vol. 8, 5ª edição. São Paulo.

[13] MANCERA, P. F. de A. (2002). Matemática para Ciências Biológicas: Um estudo introdutório através de programas de álgebra computacional. Nota de aulas. Departamento de Engenharia de Biossistemas, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo. Disponível em: http://www.esalq.usp.br/departamentos/leb/aulas/lce164/MODMAT.pdf.

[14] MARQUES, J. M. (2006). Matemática Aplicada, 5ª edição, Curitiba Juruá. Disponível em: http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_anderso_marcolino.pdf.

[15] MUNEM, M. A., FOULIS, D. J. (1982). Cálculo, Vol 1, LTC-Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, Editora S.A.

[16] NEVES, M. A. F., VIEIRA, M. T. C., ALVES, A. G. (1989). Livro de texto, Matemática 12º Ano, 4ª edição. Porto editora.

[17] NEVES, M. A. F., GUERREIRO, L., SILVA, A. P. (2016). Máximo, Matemática A, 11º Ano, Parte 2, 1ª edição. Porto Editora.

[18] OLIVEIRA, O. R. B. de. (2015). Teorema de Weierstrass. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-WEIERSTRASS.pdf.

[19] PARANHOS, M. de M. (2009). Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

[20] PARANHOS, M. de M. (2009). História de Derivada. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm.

[21] SANTANA, A. M. de. (2010). Aplicação das Derivadas. Universidade Federal de Rondônia. Campus de ji-Paraná. Disponível em: http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_anderso_marcolino.pdf.

[22] SANTOS, A. G. de A. (2017). Cálculo A, Teorema de Rolle e Aplicações. Universidade Federal da Bahia. Disponível em: https://www.scribd.com/doc/25852159/Teorema-de-Rolle-e-aplicacoes-por-Andre-Gustavo.

[23] STEWART, J. (2005). Cálculo Volume I. 5ª Edição.Thomson Pioneira.

[24] STEWART, J. (2005). Cálculo Volume II, 5ª Edição. Thomson pioneira.

[25] VAZ, L. do C. (2010). Os conceitos de limite, derivada e integral em livros didáticos de cálculo e na perspetiva de professores de matemática e de disciplinas específicas em curso de engenharia. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). Disponível em: http://livros01.livrosgratis.com.br/cp149993.pdf.