

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



O ENSINO DA SUCESSÃO DE NEPER

Trabalho realizado por: Ana Margarida Lourenço Martins

Orientação de: Professora Doutora Maria das Neves Rebocho

Outubro 2010



AGRADECIMENTOS

No final deste trabalho não posso deixar de expressar o meu sincero agradecimento às pessoas que, directa ou indirectamente, contribuíram para a concretização desta investigação.

Assim, as minhas palavras de apreço e gratidão vão para a Professora Doutora Maria Rebocho, como minha orientadora do relatório de estágio, pela sua disponibilidade e atenção que sempre me recebeu, pelas suas sugestões sempre pertinentes e pelo seu incondicional apoio durante este ano de trabalho.



ÍNDICE

CAPÍTULOS:

1. Introdução	1
2. O Número de Neper	6
2.1. Aplicações do Número de Neper	6
2.2. Generalidades sobre Sucessões Reais	8
2.3. Generalidades sobre Sucessões de Funções: A Série de Taylor	11
2.4. O Número de Neper como Limite da Sucessão $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$	18
2.5. O Número de Neper como Limite da Sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	20
3. As Sucessões no Ensino da Matemática em Portugal ao longo das últimas seis décadas	25
3.1. A Estrutura do Ensino da Matemática em Portugal nas últimas seis décadas	25
3.1.1. Programas Oficiais	31
3.2. Conteúdos Programáticos	32
3.3. Estudo das Sucessões nos Manuais entre 1960 e 2010	42
3.3.1. O conceito de Sucessão	42



3.3.2. Contextualização do Tema “Sucessões” e relação com outras temáticas, tais como as “Funções”	49
3.3.3. Metodologias de Ensino	53
4. O Ensino da Sucessão de Neper	56
4.1. A demonstração de $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ nos manuais escolares	56
4.2. As limitações da Calculadora Gráfica	71
5. Conclusão	80
Referências Bibliográficas.....	81



Capítulo 1:

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos um estudo acerca do ensino do tema “Sucessões” no ensino da Matemática em Portugal. Em particular, focamos a nossa atenção no estudo da sucessão de Neper, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

O nosso principal objectivo é fazer uma análise do ensino da sucessão de Neper ao longo das últimas cinco décadas, ou seja, estudar a forma como esta sucessão tem vindo a ser tratada no contexto do ensino das sucessões nos currículos do ensino secundário. De um modo mais geral, também pretendemos observar a evolução do currículo de Matemática em Portugal, no ensino secundário, ao longo das últimas seis décadas.

Geralmente, o currículo das disciplinas, tanto em Portugal como nos outros países, tem sofrido alterações ao longo dos tempos. Tal deve-se a vários factores, tais como mudanças sociais, políticas, tecnológicas. No que se refere às alterações curriculares da Matemática das últimas seis décadas, estas foram discutidas em inúmeras conferências¹ e têm vindo a ser objecto de estudos publicados não só em teses académicas, artigos, livros, como também em artigos de jornais e revistas de índole não académica. Remetemos o leitor interessado para algumas referências:

- Livro de Investigação em Educação Matemática - implicações curriculares, da autoria de João Pedro da Ponte, José Manuel Matos e Paulo Abrantes, editado pelo Instituto de Inovação Educacional, que se debruça sobre a investigação em Educação Matemática realizada em Portugal até final de 1996;

¹ Por exemplo, o **Seminário de Vila Nova de Milfontes de 1988** – teve como um dos seus principais impulsionadores e responsáveis, Paulo Abrantes. Este encontro constituiu um momento marcante na discussão das questões curriculares em educação matemática em Portugal. Nele, a avaliação, embora ainda sem grande visibilidade, começa a ser discutida¹. É chamada a atenção para a sobrevalorização da componente sumativa da avaliação e o uso quase exclusivo dos testes escritos. Nas orientações então preconizadas aponta-se para a necessidade de se alargar o âmbito da avaliação, privilegiando a sua vertente formativa, nela se incluindo a auto e a heteroavaliação, e o desenvolvimento de processos avaliativos coerentes com as outras componentes curriculares, nomeadamente de natureza diversa e adequados à especificidade dos alunos (APM, 1988).



- Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal, João Pedro da Ponte - [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Rev-SPCE\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf);
- A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso, Leonor Santos, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, CIEFCUL, Projecto DIF - <http://area.fc.ul.pt/artigos%20publicados%20nacionais/E.pdf>;
- Reflexões sobre os currículos de Matemática em Portugal, Rui Feiteira e Marília Pires - http://www.oei.es/oim/Union_016.pdf#page=183 (Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Dezembro de 2008);
- O Currículo de Matemática do Ensino Secundário – Brochura Didáctica da Matemática de Ponte, J.P., Boavida, A., Boavida, A., Graça, M., e Abrantes, P. (1997), Lisboa: DES do ME.

Tal como já referimos, no presente trabalho apenas focamos as alterações curriculares ocorridas a partir da década de 50. Os programas de então consistiam em relações de conteúdos a tratar e de algumas notas para cada um dos ciclos de ensino.² Uma das razões que levou à alteração dos currículos no final da década de 50 foi a insuficiência de conhecimentos dos alunos que ingressavam nas universidades (os cientistas protestaram contra os conhecimentos ministrados no ensino secundário). Em Portugal seguiu-se esta tendência de alteração curricular, um movimento conhecido como o *movimento da Matemática moderna*, e cujo principal impulsionador foi o Professor José Sebastião e Silva. Este movimento levou à introdução de alguns tópicos de valor nas novas aplicações da Matemática (obviamente, a introdução de novos tópicos levou à remoção de outros considerados ultrapassados): conjuntos, relações binárias, estruturas algébricas, lógica; a abordagem da geometria deixou de ser geométrica para passar a ser algébrica. Um aspecto a salientar é que, a par desta mudança dos conteúdos, também houve preocupação a nível da alteração das metodologias de ensino.

As críticas à Matemática moderna, algumas fundamentadas no fraco desempenho no domínio do cálculo e do raciocínio por parte dos alunos, levaram a que, na década de 80, ocorresse uma alteração dos currículos. Nos novos currículos dos anos 80 e 90 emergem novos temas de estudo, tais como a matemática discreta, estatística e

² É de salientar que a ênfase do ensino na década de 50 era o treino das técnicas de cálculo.



probabilidades; a resolução de problemas surge como um aspecto essencial da actividade matemática; são introduzidas as novas tecnologias computacionais no ensino.

É de notar que, a partir da década de 80, os currículos são entendidos num sentido mais geral pois contêm não só os temas a tratar, os objectivos, as competências, como também focam as metodologias e abordagens de ensino. Além disso verifica-se, desde então, um destaque da investigação sobre o processo de aprendizagem: a cultura da sala de aula³ é, para muitos, determinante da visão da Matemática por parte dos alunos, e a investigação procura encontrar formas de criar na sala de aula um ambiente de estímulo para a experiência matemática.

Ao estudarmos a evolução dos currículos do Ensino Secundário observámos que a Sucessão de Neper deveria merecer uma atenção especial no nosso trabalho. De facto, trata-se de um exemplo muito elucidativo da evolução do ensino das sucessões ao longo das últimas cinco décadas: tomaremos o exemplo da sucessão de Neper para ver a forma como têm vindo a ser expostos e analisados os conteúdos programáticos das sucessões nos manuais escolares. Para além disso, consideramos que o estudo da sucessão de

3

- *As novas escolas querem mudar o ensino em Portugal*, Alexandra Prado Coelho - http://www.publico.pt/Cultura/as-novas-escolas-querem-mudar-o-ensino-em-portugal_1440839;
- Entenda-se a cultura da sala de aula como um tema que tem vindo a ganhar crescente importância no ensino e na aprendizagem da Matemática. Actualmente, reconhece-se que a aprendizagem da disciplina, tanto ao nível da aquisição de conhecimentos como do desenvolvimento de capacidades matemáticas, como ainda do cultivar de certas atitudes nos alunos, não é independente do contexto em que decorre, ou seja, este é um processo situado que depende de um conjunto largo de factores. Desde logo, os papéis desempenhados na aula pelo professor e pelos alunos têm uma influência marcante naquilo que pode ser aprendido. Estreitamente associadas com esses papéis estão as interacções que são geradas entre os diversos actores na aula e o estatuto da comunicação em todo o processo pedagógico. A comunicação pode ser, fundamentalmente, um instrumento de ensino do professor ou algo que é inseparável de toda a actividade da sala de aula e, portanto, inseparável do modo como se aprende. Neste Programa defende-se a segunda perspectiva, através de um forte envolvimento do aluno no discurso da aula, através da apresentação e discussão de ideias. A cultura de sala de aula que assim emerge implica do aluno o comprometimento na construção e validação do conhecimento matemático e do professor a assunção de um “diálogo verdadeiro”, equilibrando disponibilização de informação e regulação do discurso. Os desafios que o professor lança aos alunos – as tarefas – contribuem igualmente para a criação da cultura da sala de aula. Uma aula em que predominam tarefas rotineiras é bem diferente de uma outra em que as tarefas de natureza problemática ocupam um lugar de destaque, dado que a actividade dos alunos tenderá a ser diferente. A forma como os alunos trabalham – individualmente, grupo ou toda a turma – é um outro elemento revelador de diferentes culturas de sala de aula.



Neper é importante por si só, pois esta encontra muitas aplicações noutras áreas, tais como a Física e a Economia.

O método de investigação que utilizámos foi a análise de diversos manuais escolares. Tal como refere [PBGA97], “o currículo de Matemática...inclui igualmente o plano dos materiais educativos, onde sobressai o manual escolar. Qualquer manual escolar constitui sempre uma interpretação...do currículo oficial.”

Vejamos agora, com detalhe, a estrutura de cada um dos capítulos do trabalho que aqui apresentamos. O trabalho é dividido em cinco capítulos. O capítulo 1 é a introdução, que consta de um resumo, menciona os objectivos, identifica as questões de investigação e refere a estrutura do trabalho.

No capítulo 2, “Sucessões”, começamos por referir aplicações do número de Neper. Depois, introduziremos generalidades sobre sucessões numéricas e sucessões de funções, nomeadamente da série de Taylor, bem como as suas condições suficientes de convergência. Finalmente, abordaremos o número de Neper como limite da sucessão

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ bem como o número de Neper como o limite da sucessão } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

O capítulo 3, “As Sucessões no ensino da Matemática em Portugal ao longo das últimas seis décadas”, consistirá numa breve descrição da estrutura do Ensino da Matemática em Portugal (1950 – 2010), será apresentado o programa oficial de Matemática actualmente em vigor. De seguida, abordar-se-ão os conteúdos programáticos que constituem a temática das Sucessões apenas das últimas cinco décadas. Posteriormente será feito um estudo das sucessões nos manuais escolares de 1960 a 2010, onde focamos a forma como é introduzido o conceito de sucessão; a contextualização do tema “Sucessões” e relação com a temática das “Funções”; as metodologias de ensino; e, finalmente, o ensino da sucessão de Neper nestas últimas quatro décadas.

No capítulo 4, “O Ensino da Sucessão de Neper”, proceder-se-á à constatação de como a demonstração de $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é apresentada em alguns dos manuais escolares e expor-se-á as limitações da calculadora gráfica no estudo da sucessão de Neper.



O Ensino da Sucessão de Neper

Por fim, o capítulo 5 é dedicado à apresentação das conclusões do nosso estudo, e de algumas possíveis linhas de investigação futura.



Capítulo 2:

O NÚMERO DE NEPER

2.1. APLICAÇÕES DO NÚMERO DE NEPER

O número de Neper representa-se pela letra e , deve-se ao matemático escocês John Napier (1550-1617) e a designação e ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Pensa-se que a escolha do símbolo e se deve ao facto de ser a primeira letra da palavra "exponencial".

O número de Neper é uma constante que surge em várias aplicações científicas.

A série infinita $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ que foi descoberta por Newton em 1665,

e pode ser obtida da expansão binomial $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende para $+\infty$. O valor deste limite é um número irracional (além disso é, também, transcendente, uma vez que não é solução de qualquer equação algébrica de coeficientes racionais). O número de Neper, escrito com dez casas decimais: $e = 2,7182818285$ (a última casa decimal resulta de arredondamento).

Na matemática o número de Neper é usado como base da função exponencial e sua inversa, o logaritmo na base e diz-se neperiano e denota-se geralmente por \ln , tendo-se $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y \quad \forall x > 0$, sendo a função exponencial a função inversa da função logaritmo. Recorre-se à fórmula de Taylor para definir a função

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta_n x} \text{ com } x \in \mathbb{R}, \theta_n \in]0, 1[.$$

Pode-se encontrar o número de Neper nos seguintes integrais:

1. O integral definido que é usado na teoria das probabilidades, $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$;
2. O integral exponencial que se denota por $E_i(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$;



3. A transformada de Laplace definida por $L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ (ver [Ince56], onde esta é utilizada para resolver equações diferenciais lineares).

O número de Neper é utilizado como base dos espaços lineares, transformações lineares e também se define a Fórmula de Euler (Análise Complexa) por $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

A fórmula de Euler, $e^{\pi i} + 1 = 0$, liga cinco constantes fundamentais da matemática $0, 1, e, \pi$ e $i = \sqrt{-1}$.

A fracção contínua infinita que envolve o e e π , foi descoberta por Euler em 1737,

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + \dots}}}}}$$

Note-se que todo o número irracional pode ser escrito como uma fracção contínua infinita. O recíproco também é válido, ou seja, se um número tiver uma representação em fracção contínua infinita então é irracional [Mont57]. Outra fracção contínua infinita de Euler envolvendo o número de Neper é dado por

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \dots}}}$$

e

$$2 = \frac{e^1}{e^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{3}}}{e^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{5}}}{e^{\frac{1}{6}}} \dots$$

Na resolução dos triângulos esféricos também está patente a regra de Neper: seja o triângulo esférico (ABC) rectângulo em A . Três elementos (os dois dados e o elemento a calcular) só podem ocupar duas disposições, não contendo o ângulo recto: ou são consecutivos e chama-se médio e conjuntos aos dos extremos, ou dois elementos estão separados do terceiro, por outros elementos, e neste caso chama-se médio a este último, dizendo-se os outros dois separados. A regra de Neper enuncia-se da seguinte forma:



“num triângulo esférico rectangular o co-seno do elemento médio é igual ao produto das co-tangentes dos conjuntos ou senos dos separados, substituindo-se, porém, para os catetos a função trigonométrica indicada, pela sua complementar”.

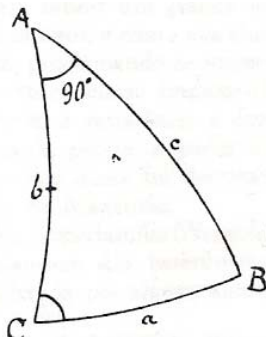


Figura 1: Triângulo esférico rectangular

Por exemplo, suponhamos dados o cateto b e o ângulo C . Para calcular a , B e c , tem-se, respectivamente, pela aplicação da regra:

$$\cos C = \operatorname{ctg} b \cot a; \cos B = \cos b \operatorname{sen} C; \operatorname{sen} b = \cot C \operatorname{tg} c .$$

Na Física, o número de Neper aparece, por exemplo, associado à desintegração radioactiva. Uma substância radioactiva desintegra-se espontaneamente segundo uma lei de decrescimento exponencial dada pela expressão $m = m_0 e^{-kt}$, onde m_0 é a massa inicial, k é uma constante positiva que depende da substância em causa e t é o tempo em anos. O número e tem, também, importância prática noutras áreas tais como a economia, a engenharia, a biologia ou a sociologia.

Vejamos um exemplo no caso da economia. Seja P um capital composto de n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa anual de juros r . Se permitirmos que n aumente sem limites, a soma do dinheiro, S , é obtida a partir da fórmula $S = P (1 + r/n)^{nt}$. O limite em n parece aproximar-se de $2,718$.

2.2. GENERALIDADES SOBRE SUCESSÕES REAIS

Consideremos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

2.2.1. Definição (ver [Lima95]):



Uma *sucessão de números reais* é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto \mathbb{N} dos números naturais e tomando valores no conjunto \mathbb{R} dos números reais. O termo de ordem n da sucessão x , $x(n)$, será denotado por x_n .

Ao longo do texto escreveremos (x_n) para indicar a sucessão x .

2.2.2. Definição (ver [Lima95]):

Uma *sucessão* (x_n) é *limitada* se existirem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$.

2.2.3. Definição (ver [Lima95]):

Uma *sucessão* (x_n) diz-se *crescente* (não decrescente) se $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$); (x_n) diz-se *decrescente* (não crescente) se $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$). Uma *sucessão* (x_n) designa-se por *monótona* se for ou crescente, ou não decrescente, ou decrescente ou não crescente.

2.2.4. Definição (ver [Lima95]):

Dizemos que um número real a é limite da sucessão (x_n) , e escrevemos $\lim x_n = a$ se se verificar a seguinte condição:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

2.2.5. Propriedade (ver [Cara98]):

Se uma sucessão tem limite positivo, então existe uma ordem a partir da qual todos os termos são positivos.

Utilizaremos a notação $V_\varepsilon(x_0)$ para designar uma vizinhança - ε do número real x_0 , ou seja, para designar o intervalo aberto $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$.

2.2.6. Proposição (ver [Lima95]):

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.



2.2.7. Teorema (Teorema da sucessão enquadrada) (ver [Ferr93]):

Sejam $(x_n), (y_n), (z_n)$ sucessões reais. Suponha-se que existe uma ordem p tal que, para qualquer $n > p$, se tem $x_n \leq y_n \leq z_n$ e $\lim x_n = \lim z_n = a$. Então, (y_n) é também convergente e $\lim y_n = a$.

Demonstração:

Fixado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem inteiros q e r tais que $x_n \in V_\varepsilon(a)$ para $n > q$ e $z_n \in V_\varepsilon(a)$ para $n > r$. Sendo s o maior dos números p, q e r ter-se-á, para $n > s$:

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

e portanto $y_n \in V_\varepsilon(a)$. □

2.2.8. Teorema (ver [Ferr93]):

Sejam $(x_n), (y_n)$ duas sucessões convergentes e suponha-se que $\lim x_n < \lim y_n$. Então, a partir de alguma ordem, verifica-se a desigualdade $x_n < y_n$.

Demonstração:

Seja $a = \lim x_n$, $b = \lim y_n$ e tome-se $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$

$\left(\frac{b-a}{2} \text{ é um número positivo, por ser } a < b \right)$

Determinados inteiros p e q tais que $x_n \in V_\varepsilon(a)$ para $n > p$ e $y_n \in V_\varepsilon(b)$ para $n > q$ ter-se-á, para qualquer inteiro $n > \max\{p, q\}$:

$$x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon < y_n. \quad \square$$

2.2.9. Corolário (ver [Lima76]):

Sejam (x_n) e (y_n) sucessões convergentes. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Demonstração: (Por redução ao absurdo)



Se fosse $\lim x_n > \lim y_n$, então teríamos $0 < \lim x_n - \lim y_n = \lim(x_n - y_n)$ e, daí, teríamos $x_n - y_n > 0$ para todo n suficientemente grande, o que constitui uma contradição relativamente à hipótese. \square

2.3. GENERALIDADES SOBRE SUCESSÕES DE FUNÇÕES : A SÉRIE DE TAYLOR

Denotaremos a n -ésima derivada de uma função f num ponto a por $f^{(n)}(a)$. Uma função real de variável real $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no intervalo I quando existir $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$, e f diz-se n vezes derivável num ponto $a \in I$ se existir um intervalo aberto J contendo a tal que f é $n-1$ vezes derivável na intersecção $I \cap J$ e, além disso, existir $f^{(n)}(a)$.

Diremos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^n , e escreveremos $f \in C^n$ para significar que f é n vezes derivável em I e que $f^{(n)}$ é uma função contínua em I .

2.3.1. Definição (ver [Lima95]):

Seja f uma função, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, n vezes derivável no ponto $a \in I$.

O polinómio $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ designa-se por *polinómio de Taylor* de ordem n de f em torno do ponto a .

2.3.2. Fórmula de Taylor

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$.

Então, f pode escrever-se como



$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \forall x \in I, \quad (1)$$

onde T_n é o polinómio de Taylor de ordem n de f em torno de a ,

$$\text{e onde } R_n(x) \text{ verifica } \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0, \quad \forall x \in I.$$

A função R_n de (1) é conhecida como o *resto de ordem n* .

Veremos, nos teoremas seguintes, que o resto de ordem n se pode definir através de um integral, da seguinte forma:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

2.3.3. Lema (ver [Apos91]):

Se f é de classe C^2 numa certa vizinhança de a , então, para todo o x nessa vizinhança, tem-se:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1(x)$$

com

$$R_1(x) = \int_a^x (x-t) f''(t) dt$$

Demonstração:

De acordo com a definição de resto tem-se

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \\ &= \int_a^x f'(t) dt - f'(a) \int_a^x dt \\ &= \int_a^x [f'(t) - f'(a)] dt \end{aligned}$$

O último integral pode escrever-se na forma $\int_a^x u dv$, fazendo $u = f'(t) - f'(a)$ e

$$v = t - x.$$

Assim $\frac{du}{dt} = f''(t)$, $\frac{dv}{dt} = 1$ e integrando por partes vem

$$R_1(x) = \int_a^x u dv = uv \Big|_a^x - \int_a^x (t-x) f''(t) dt = \int_a^x (x-t) f''(t) dt$$



uma vez que $u = 0$ quando $t = a$ e $v = 0$ quando $t = x$ e o teorema está demonstrado. □

O resultado correspondente para um polinómio de aproximação de grau n é dado pelo seguinte teorema.

2.3.4. Teorema (ver [Lima95]):

Se f é de classe C^{n+1} numa vizinhança de a , então, para todo o x dessa vizinhança, verifica-se a fórmula de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (2)$$

com

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (3)$$

Demonstração:

O teorema demonstra-se por indução matemática.

Para $n = 1$ o teorema é verdadeiro, com base no lema 2.3.3.

Supondo que é verdadeiro para algum n , vamos demonstrá-lo para $n + 1$.

Da fórmula de Taylor (2) escrita com $n + 1$ e com n e subtraindo membro a membro permite-nos obter

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \\ &= R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)n!} (x-a)^{n+1} \\ &= R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Através da expressão de $R_n(x)$ e tendo em conta que $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)} = \int_a^x (x-t)^n dt$,

obtemos



$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n [f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)] dt \end{aligned} \quad (4)$$

O integral (4) pode escrever-se na forma $\int_a^x u dv$ com $u = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)$ e

$v = \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)}$. Integrando por partes para $u=0$ quando $t=a$ e que $v=0$ quando

$t=x$, obtemos

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x u dv = -\frac{1}{n!} \int_a^x v du = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt.$$

Isto completa a passagem de n a $n+1$, pelo que o teorema é verdadeiro para todo $n \geq 1$. □

Consideremos agora uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Se a for um ponto interior do

intervalo I , então podemos escrever $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$, para $x \in I$.

2.3.5. Definição (ver [Lima95]):

À série de potências $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ chamaremos *série de Taylor* de f em torno do ponto a .

CONDIÇÕES SUFICIENTES DE CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE TAYLOR

Note-se que toda a função que seja C^∞ num intervalo I possui uma série de Taylor em cada ponto interior $a \in I$. Mas a série de Taylor pode convergir ou divergir. Veja-se o seguinte exemplo.



2.3.6. Exemplo (ver [Silv94]):

$$\text{Consideremos a função } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

As derivadas de qualquer ordem de f no ponto zero são nulas.

O polinómio de Taylor de f no ponto zero é nulo e a sua fórmula de Taylor é $f(x) = 0 + R_n(x)$.

A série de Taylor de f é a série cujos termos são todos nulos. Logo, é convergente para todo o x e o seu intervalo de convergência é $]-\infty; +\infty[$. Mas a soma da série de Taylor não é obviamente igual à função f .

Estudemos o resto:

$$\text{tem-se } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

O limite não é zero para $x > 0$. Mas e^{-1/x^2} é sempre diferente de zero para $x > 0$. Logo, em nenhum intervalo do tipo $]-r, r[$ se tem que a função f é igual à soma da sua série de Taylor.

Do teorema 2.3.4, provou-se que o resto de ordem n é definido por intermédio de um integral em que qualquer intervalo em torno do ponto a no qual $f^{(n+1)}$ seja uma função contínua. Portanto, se f é infinitamente derivável, temos sempre essa representação do erro, pelo que a série de Taylor converge para $f(x)$ se, e só se, $R_n(x)$ tende para zero quando $n \rightarrow \infty$.

2.3.7. Teorema (ver [Figu96]):

A condição necessária e suficiente para que a função C^∞ , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, seja a soma da série de Taylor numa vizinhança $V_\varepsilon(x_0)$, $x_0 \in I$, é que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in V_\varepsilon(x_0)$.

Partindo deste resultado utilizam-se as condições que se seguem.

2.3.8. Proposição (ver [Lima95]):



Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função indefinidamente diferenciável e suponha-se que existem constantes $M, k \geq 0$ tais que, numa vizinhança $V_\varepsilon(x_0)$, se tenha

$$|f^{(n)}(x)| \leq Mk^n, \quad \forall x \in V(x_0), \quad n > p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então f é soma da sua série de Taylor em $V_\varepsilon(x_0)$.

Demonstração: considerando, por exemplo, o resto de Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta_n(x-x_0)), \quad 0 < \theta_n < 1,$$

Tem-se

$$|R_n(x)| \leq M \frac{(k|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in V(x_0)$$

pois para $x \in V_\varepsilon(x_0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

logo, a conclusão obtém-se através do teorema. □

2.3.9. Corolário (ver [Lima95]):

Se existe $M \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que em $V_\varepsilon(x_0)$ se tenha

$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in V_\varepsilon(x_0), \quad n > p, \quad n \in \mathbb{N}$, então f é soma da fórmula de Taylor em $V_\varepsilon(x_0)$.

2.3.10. Teorema (ver [Apos91]):

Se a derivada de ordem $(n+1)$ de f satisfaz as condições

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M \tag{5}$$



para todo o t num certo intervalo contendo a , então para cada x pertencente a esse intervalo têm-se as seguintes estimativas para o erro:

$$m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(x) \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{se } x > a \quad (6)$$

$$m \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)R_n(x) \leq M \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{se } x < a \quad (7)$$

Demonstração: suponhamos em primeiro lugar que $x > a$. Então o integral de $R_n(x)$ está estendido ao intervalo $[a, b]$. Para cada t neste intervalo tem-se $(x-t)^n \geq 0$, de modo que as desigualdades em (5) dá-nos

$$m \frac{(x-t)^{n+1}}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq M \frac{(x-t)^{n+1}}{n!} .$$

Integrando de a a x obtemos

$$\frac{m}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \leq R_n(x) \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \quad (8)$$

A substituição $u = x-t$, $du = -dt$ dá-nos $\int_a^x (x-t)^n dt = \int_0^{x-a} u^n du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, e assim (8) reduz-se a (6).

Se $x < a$, a integração vem alargado ao intervalo $[x, a]$. Para cada t neste intervalo temos $t \geq x$, de modo que $(-1)^n (x-t)^n = (t-x)^n \geq 0$. Portanto, podemos multiplicar as desigualdades (5) pelo factor não negativo $(-1)^n \frac{(x-t)^n}{n!}$ e integrar de x até a para obtermos (7). □



2.4. O NÚMERO DE NEPER COMO LIMITE DA SUCESSÃO $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

Consideremos o número de Neper e , e mostremos que este pode ser obtido como o limite da sucessão $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, utilizando para tal os resultados da secção anterior.

Seja $f(x) = e^x$. Da fórmula de Taylor temos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x).$$

Então,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x).$$

Tendo em atenção que $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \geq 0$, no ponto $a = 0$, tem-se:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{e^0}{k!} x^k + R_n(x).$$

Logo,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x). \quad (9)$$

2.4.6. Lema:

O resto de ordem n da função e^x verifica

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Como $f^{(n+1)}(x) = e^x$, a derivada $f^{(n+1)}$ é monótona crescente em cada intervalo e, portanto, satisfaz as desigualdades $e^b \leq f^{(n+1)}(t) \leq e^c$ em cada intervalo da forma $[b, c]$.

Sendo c um ponto entre zero e x , considere-se, o intervalo da forma $[0, x]$



As desigualdades para $R_n(x)$ do teorema 2.3.9. são verificadas com $m = e^0 = 1$ e $M = e^c$.

Tem-se

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(x) \leq e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{se } 0 < x \leq c,$$

ou seja,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad 0 < x \leq c. \quad \square$$

2.4.7. Lema: $e = \lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$

Demonstração:

Do lema anterior, para x fixo, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Portanto, pela proposição 2.3.6.,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Logo, para $x = 1$, temos que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, ou ainda,

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \quad (11)$$

□



2.5. O NÚMERO DE NEPER COMO O LIMITE DA SUCESSÃO $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Utilizaremos os resultados da secção 2.2 para mostrar que o número de Neper é o limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

2.5.6. Teorema (ver [Cara98]):

O $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe e está compreendido entre 2 e 3.

Demonstração: o teorema decompõe-se em dois:

I) O $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe.

Provemos que a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n = 1, 2, \dots$), é de termos positivos e crescente. Para provar que os termos são todos positivos basta notar que, qualquer que seja n inteiro e positivo, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é uma potência de base positiva, portanto, também positiva. Para demonstrar que a sucessão é crescente, desenvolvamos o termo geral segundo a fórmula do binómio de Newton.

Vem

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} \times \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} \times \frac{1}{n^n}$$

, ou, pondo $1 \times 2 \times \cdots \times p = p!$ e permutando em cada parcela os numeradores das duas fracções,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} \times \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \times \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!} \times \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!} \times \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \times 1}{n^n}$$

Ou ainda, (12)

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Daqui resulta que



$$u_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \times \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{3!} \times \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \left(1 - \frac{2}{n-1}\right) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \times \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \left(1 - \frac{2}{n-1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-2}{n-1}\right)$$

Note-se que o segundo membro da desigualdade é precisamente u_{n-1} . Conclui-se, pois, que $u_{n-1} < u_n$ para n inteiro e positivo qualquer. Logo, a sucessão é crescente, c.q.d.

Demonstre-se agora que a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é limitada superiormente. Da igualdade (12), resulta, notando que os parênteses do segundo membro são todos menores que a unidade,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}. \quad (13)$$

E, por ser $p! > 2^{p-1}$ para $p \geq 3$, inteiro e positivo, vem de (13) que:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ou, notando que as parcelas a partir da segunda constituem uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ cuja soma é $\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$, então

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que prova que a sucessão (u_n) é limitada superiormente. Logo, o $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe e é finito. □

II) Seja $L = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Então, $2 \leq L \leq 3$.

De (13) resultou, como vimos,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, tem-se $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$



De (12) decorre, com $n \geq 2$, por supressão de termos positivos do segundo membro da igualdade,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + \frac{1}{1!} = 2$$

Portanto, vem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

Tem-se, por fim, $2 \leq \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$ □

Note-se que podemos mostrar que o limite da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é igual ao limite dado na secção anterior (cf. (11)).

2.5.7. Teorema (ver [Cara98, Fig96]):

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Demonstração:

Considerem-se as sucessões de termo geral

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Analisemos primeiro a sucessão b_n . Com auxílio da fórmula do binómio de Newton tem-se

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n},$$

ou seja,

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$



Desta última representação observa-se que b_n é soma de parcelas positivas, cada uma das quais crescente com n . Como o número de parcelas também cresce com n , logo se conclui que (b_n) é sucessão crescente. Constatamos ainda que $b_n < a_n < 3$. Assim, as duas sucessões consideradas são ambas crescentes e limitadas e, portanto convergentes.

Como $b_n < a_n$ para todo o n , resulta desde logo que

$$\lim b_n \leq \lim a_n \quad (14)$$

Por outro lado, fixando $p \in \mathbb{N}$, tem-se para $n > p$,

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

Passando ao \lim (e mantendo p fixo) vê-se que o segundo membro da anterior desigualdade converge para a_p . De acordo com a proposição 2.2.6.,

$$\lim b_n \geq a_p \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Passando de novo ao limite quando p tende para $+\infty$, e recorrendo à mesma proposição, conclui-se que

$$\lim b_n \geq \lim a_n. \quad (15)$$

Logo, de (14) e (15), conclui-se que $\lim b_n = \lim a_n$, i.e.,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$

De (11) segue-se que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. □

Vejamos ainda uma generalização do resultado anterior



2.5.8. Proposição (ver [Figu96]):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Demonstração:

No limite quando x tende para mais infinito. Seja $x > 1$ e designemos por $I(x)$ o maior inteiro menor ou igual a x , ou seja, $I(x) \leq x$.

Tem-se $I(x) \leq x < I(x) + 1$

$$\text{Logo, } \frac{1}{I(x)} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{I(x)+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{I(x)} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{I(x)+1}$$

Pela monotonia da exponencial de base maior que 1 tem-se:

$$\left(1 + \frac{1}{I(x)}\right)^{1+I(x)} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{I(x)+1}\right)^{I(x)}.$$

Considerando $n = I(x)$ vem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{I(x)}\right)^{1+I(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

De modo análogo para $n = I(x) + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{I(x)}\right)^{I(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1} = \frac{e}{1} = e.$$

Para obter o a demonstração do limite quando x tende para menos infinito considera-se o valor de $x_1 = -(1+x) = -1-x$.

Então,



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \left(\frac{x_1}{x_1+1}\right)^{x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \left(\frac{x_1}{x_1+1}\right)^{-1-x} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x_1}{x_1+1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x_1}{x_1+1}\right)^{-x_1} \right] = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^1 \cdot \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{x_1} \right] = 1 \cdot e = e \quad \square\end{aligned}$$



CAPÍTULO 3:

AS SUCESSÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA EM PORTUGAL AO LONGO DAS ÚLTIMAS SEIS DÉCADAS

3.1. A Estrutura do Ensino da Matemática em Portugal nas últimas seis décadas (1950 – 2010)

Analogamente ao que acontece com as restantes disciplinas, o currículo da Matemática em Portugal tem, ao longo dos tempos, vindo a sofrer alterações, verificando-se uma alteração não só nos temas tratados, mas também na sua abordagem. Nesta secção apresentamos uma breve descrição da evolução dos currículos de Matemática para o ensino secundário, bem como o seu enquadramento na estrutura do ensino em Portugal, nas últimas seis décadas.

Começemos por referir os anos 50⁴, época em que se intensificou um movimento internacional para a modernização do ensino da Matemática e das Ciências, o qual ficou conhecido como o movimento da *Matemática moderna*⁵. De acordo com [PBGA97], tal movimento deveu-se ao peso crescente dos cientistas na sociedade (relembremos que foi nos anos 50 que, por exemplo, ocorreu o lançamento do primeiro satélite da União Soviética), e aos seus protestos “contra o crescente fosso entre os conhecimentos ministrados aos alunos no ensino secundário e os conhecimentos que se consideravam desejáveis para o início dos estudos superiores” (citação de [PBGA97, pg. 4]). Este

⁴ Eis os conteúdos que constavam nos programas de Matemática do 3º ciclo do ensino liceal, aprovados em 1948 (decreto nº 37112 de 22 de Outubro de 1948): a álgebra compreendia o estudo de funções, limites, polinómios, equações, análise combinatória, números complexos, derivadas; a trigonometria envolvia o estudo das funções circulares directas e inversas, o uso de tábuas trigonométricas (naturais e logarítmicas) e a resolução de equações trigonométricas; a aritmética racional envolvia os números inteiros, potenciação, sistemas de numeração, divisibilidade, divisores e múltiplos.

⁵ A situação do ensino da Matemática em Portugal era alvo de muitas críticas que sublinhavam a reduzida competência dos alunos ao nível do cálculo – apesar do ensino ser essencialmente orientado para o domínio do Cálculo.



movimento defendia a substituição de algumas matérias, então consideradas ultrapassadas, por novas matérias que encontravam novas aplicações da Matemática, a par da apresentação da Matemática de um modo unificado. Foram assim privilegiadas as temáticas conjuntos, relações binárias, estruturas algébricas (grupo, anel, corpo, etc), e lógica; a abordagem da trigonometria passou de geométrica a algébrica; foram introduzidos alguns tópicos de estatística e de teoria das probabilidades. Além disso, pretendia-se que o papel dos alunos na *descoberta matemática* fosse um papel mais dinâmico⁶.

Em Portugal, o movimento da *Matemática moderna* ocorreu em dois períodos: nos anos sessenta, onde se salienta o papel de Sebastião e Silva, e a partir da década de setenta, onde a elaboração de novos programas e manuais escolares se generalizou aos alunos dos restantes níveis de ensino⁷.

Assim, também em Portugal, na década de sessenta, o movimento da *Matemática moderna* levou a reformulações dos currículos da Matemática. Tal como acontecia a nível internacional, também em Portugal se introduziram novas matérias, se eliminaram matérias tradicionais e, sobretudo, introduziu-se uma nova abordagem da Matemática e uma linguagem pontuada pelo simbolismo da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. No novo programa do Ensino Complementar surgem como novos temas: Lógica, Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas, Probabilidades, Números Complexos, Estatística, Cálculo Integral, e Cálculo Numérico Aproximado. São mantidos alguns temas como o Cálculo Diferencial, Geometria Analítica e Trigonometria e é retirada a Aritmética Racional [AiVá05].

O principal impulsionador do movimento *Matemática moderna* em Portugal foi o professor José Sebastião e Silva. O professor José Sebastião e Silva elaborou manuais, assim como livros para os professores, onde se contemplavam as referidas novas matérias. Contrariamente ao que ocorria noutros países, onde se verificava um extremismo formalista e um privilegiar da matemática pura, nos seus manuais verificava-se um empenho nas aplicações da Matemática. Alguns exemplos:

⁶ Segundo [PBG97], as aplicações da Matemáticas foram secundarizadas, acabando por desaparecer dos programas e dos manuais escolares

⁷ Os programas então elaborados vigoraram, a menos de pequenos ajustes, até ao início da década de noventa.



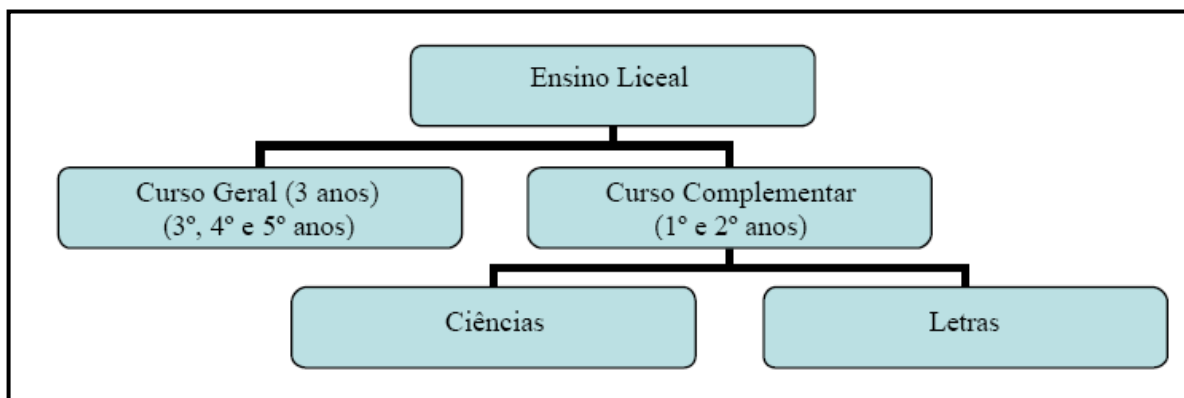
- Transformação de energia eléctrica em calor (7º ano, vol.1, p.171);
- Desintegração radioactiva (7º ano, vol.1, p.172);
- Crescimento populacional (7º ano, vol.1, p.174);
- Descida em pára-quedas (7º ano, vol.1, p.176-8);
- O espaço-tempo de Minkovski (7º ano, vol.2, p.160);
- Aplicação do cálculo das probabilidades aos seguros (6º ano, p.471).

A iniciativa do Professor José Sebastião e Silva permitia criar uma maior aproximação entre a Matemática do Ensino Secundário e a Matemática do Ensino Superior. Ele redigiu um texto - piloto constituído por três volumes, o primeiro para o 6º ano e o segundo e terceiro para o 7ºano [AiVá05]. De acordo com o seu volume II, o conceito de sucessão aparece no 7ºano, num subcapítulo da “Introdução ao Cálculo Diferencial”, designado por “Teoria dos limites de Sucessões”.

Houve também outra iniciativa nas escolas técnicas (notemos que a iniciativa do professor José Sebastião e Silva teve lugar nos liceus) estando envolvidos os professores Aires Biscaia, Santos Heitor, Francelino Gomes e Vítor Pereira.

A partir de 1967 houve criação do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (com a designação de 1º e 2ºanos). Uma das alterações foi o encurtamento do curso geral dos liceus de sete para cinco anos e na criação de dois anos de ensino liceal [AiVá05].

A estrutura do ensino liceal passou a ter a seguinte estrutura:



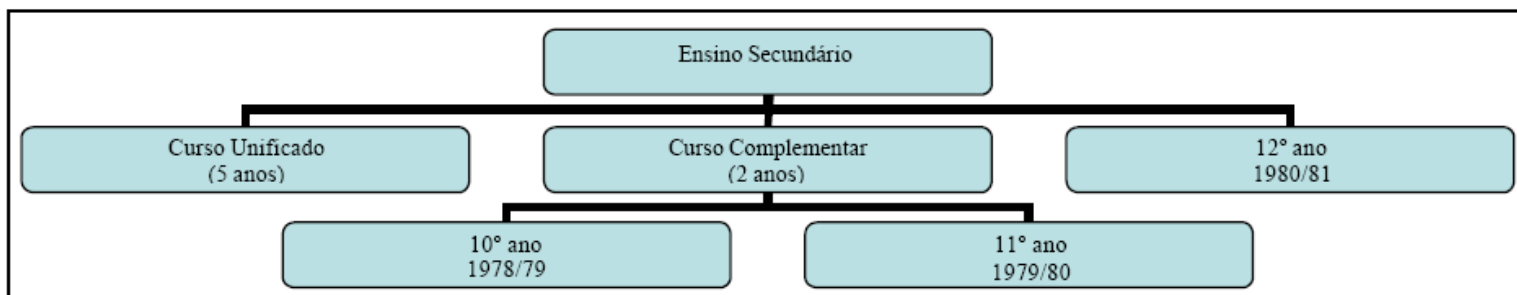
Esquema 1: Estrutura do Ensino Liceal

No início dos anos setenta foram introduzidos novos programas em todos os níveis de ensino. Em 1974 são publicados, pelo Ministério da Educação e Cultura, então presidido pelo Professor José Veiga Simão, novos programas para o Ensino Liceal (O Professor Sebastião e Silva não participou neste processo). Na Matemática são publicados



dois programas: um relativo à Matemática Moderna, onde é ainda patente o a influência do Professor Sebastião e Silva, e um outro programa relativo à Matemática Clássica para o 1º ano. [AiVá05] Nesta remodelação deu-se ênfase ao abstracto e formal, e as aplicações da Matemática acabaram por desaparecer dos programas e dos manuais escolares.

Entre 1974 e 1986 o ensino secundário estava estruturado em dois grandes blocos: o Curso Unificado (duração de três anos, oferecendo para o 9ºano várias áreas vocacionais) e o Curso Complementar (subdividido em dois ciclos). O 1º ciclo do curso complementar integrava o 10º e 11º ano de escolaridade e o 2º ciclo era composto pelo 12º ano, como se pode observar no esquema seguinte:



Esquema 2: Estrutura do Ensino Secundário (1974 – 1986)

Por observação do esquema 2, no Curso Complementar, o 10º ano começou a funcionar no ano lectivo de 1978/79 e o 11ºano no ano lectivo de 1979/80. E no ano lectivo de 1980/81 entrou em funcionamento o 12ºano, ou seja, o 2º ciclo do Ensino Complementar [AiVá05].

Nos anos oitenta deu-se novamente um movimento de reforma da Matemática. Relembremos algumas das críticas aos programas da Matemática moderna que surgiram no início dos anos 80: “acabamos por assistir a um ensino de Matemática orientado numa óptica essencialmente dedutiva, focando os aspectos lógicos, privilegiando o estudo dos mais diversos tipos de estruturas, desde as mais “pobres” às mais ricas. A Matemática aparece aos olhos dos jovens como ciência acabada, artificialmente criada, sem qualquer ligação com a realidade”⁸ [Pont02, pg. 7]. “O simbolismo carregado e a ênfase em estruturas abstractas revelavam-se, afinal, de difícil compreensão para os

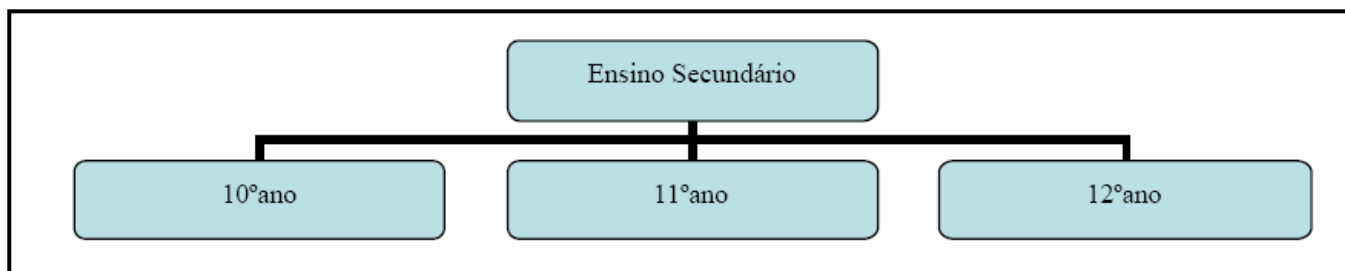
⁸ Citação de António St. Aubyn (1980)



alunos... as competências dos alunos no raciocínio, na resolução de problemas e no domínio do cálculo não mostravam os desejados progressos” [Pont02].

Perante isso deu-se a publicação da Lei de Bases do Sistema Educativo, a 14 de Outubro de 1886, onde houve novas exigências, tais como o alargamento da escolaridade obrigatória e a integração no ensino do 12ºano.

A estrutura do ensino secundário passa a ser a seguinte:



Esquema 3: Estrutura do Ensino Secundário (1986)

No final dos anos 80, em consequência da reforma introduzida pela Lei de Bases do Sistema Educativo (Decreto nº286/89 do D.R. nº198), o Ministério da Educação procedeu a uma reformulação geral de programas. Uma das mudanças que então se verifica nos 10º e 11º anos é a passagem da disciplina de Matemática de 5 para 4 horas semanais. Nestes novos programas de Matemática dá-se ênfase à resolução de problemas desde o ensino básico, e permite-se o uso das novas tecnologias “quando possível e necessário” [Pont02].

Em 1991 são publicados novos programas para o Ensino Secundário, postos em prática no ano lectivo de 1991/92 (e vigoraram até 1997). A aplicação destes novos programas de Matemática fora acompanhada de um movimento de protesto, onde algumas das críticas se encontravam ligadas à demasiada extensão do programa para ser leccionado em 4 horas semanais.

No ano de 1997 deu-se um novo processo de revisão curricular no ensino secundário, denominado “reajustamento”. A Equipa Técnica responsável foi coordenada por Jaime Carvalho e Silva. Assim, novos programas do ensino secundário entraram em vigor no ano lectivo de 1997/98. Neles se dá continuidade à tradição de privilegiar a iniciação à Análise Infinitesimal, sem esquecer o Cálculo Algébrico e a Trigonometria, assim como se dá um lugar significativo à Geometria, à Estatística e às Probabilidades. Um dos aspectos mais marcantes neste processo de revisão curricular é a ênfase no uso



das calculadoras gráficas. De acordo com J. Pedro da Ponte, “...este programa teve o mérito de estabilizar a situação no ensino secundário. Dado o seu equilíbrio e o modo cuidadoso como foi posto em prática, trata-se de um dos momentos de desenvolvimento curricular em Matemática mais conseguidos no nosso país.”

3.1.1. PROGRAMAS OFICIAIS

Com base no site da Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular tivemos acesso ao programa oficial de matemática A do 11ºano, actualmente em vigor, cuja homologação foi feita em 01/04/2002. Os autores foram os professores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Maria Graziela Fonseca, Arsélio Almeida Martins, Cristina Maria Cruchinho da Fonseca e Ilda Maria Couto Lopes.

Matemática A – 11º Ano:

Tema III – Sucessões Reais

24 aulas de 90 minutos (8 semanas)

A resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e especialmente úteis, bem como à necessidades de elaboração de representações formalizadas. Este assunto permite também, com facilidade e vantagens, a utilização intensiva de calculadoras. E permite exercícios de comunicação (pela fala e pela composição escrita). As propriedades das progressões e outras sucessões definidas por recorrência justificam a aprendizagem do método de indução matemática.

Pré-Requisitos: Os estudantes precisam de deter capacidades de cálculo elementares e devem dominar o conceito de função.

DESENVOLVIMENTO:

SUCESSÕES

- Definição e diferentes formas de representação.



- Estudo de propriedades: monotonia e limitação.
- Progressões aritméticas e geométricas: termo geral e soma de n termos consecutivos.
- Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática; primeira definição do número e .

LIMITES:

- Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.
- Limites de sucessões e convergência. Noção de limite real. Ilustração de alguns resultados que justifiquem a unicidade do limite seguida da demonstração desse teorema.
- A convergência das sucessões monótonas e limitadas. Exemplos de sucessões monótonas não convergentes. Exemplos de sucessões limitadas não convergentes. Critério de majuração e teorema das sucessões enquadradas.
- Problemas de limites com progressões.

3.2. CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS

Vejamos os conteúdos programáticos de alguns manuais que nos propomos analisar.

Ano do Manual Escolar	Conteúdos programáticos de 11º ano	Conteúdos programáticos de 12º ano
Compêndio de Álgebra Ensino Liceal – 2º ciclo	<p>➤ Noção e exemplos de sucessões:</p> <ul style="list-style-type: none">• Definição;• Exemplos de sucessões;• Notação;• Sucessões finitas e infinitas;• Sucessões monótonas;• Termo geral de uma sucessão.	



<p>1960</p>	<p>➤ Noção de infinitamente grande e infinitamente pequeno:</p> <ul style="list-style-type: none">• Crescimento indefinido e crescimento infinito;• Infinitamente grande e definição;• Infinitamente pequeno e definição. <p>➤ Noção de limite:</p> <ul style="list-style-type: none">• Definição;• Aplicações geométricas da noção de limite.	<p>Nada a apresentar</p>
<p>Compêndio de Matemática – 1º volume</p> <p>1976</p>	<ul style="list-style-type: none">• Conceito de sucessão de números reais;• Sucessões monótonas;• Progressões aritméticas e progressões geométricas;• Termo geral das progressões;• Soma de n termos consecutivos das progressões;• Sucessões limitadas;• Convergência de uma sucessão;• Conceito de infinitésimo;• Unicidade do limite de uma sucessão de números reais;• Limite da sucessão constante;• Critérios particulares de convergência:<ul style="list-style-type: none">○ Critério das sucessões monótonas;○ Critério das sucessões enquadadas.• Álgebra dos limites;• Símbolos de impossibilidade e do símbolo de indeterminação $\frac{0}{0}$;• Limites infinitos;• Operações com limites infinitos;• Os símbolos de indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ e $\infty - \infty$;• Limite da exponencial;• Limite da soma dos termos de uma progressão geométrica;	<p>Nada a apresentar</p>
	<ul style="list-style-type: none">• Métodos de aproximações sucessivas;	



<p>Compêndio de Matemática – Ano Propedêutico – 2º volume</p> <p>1978</p>	<ul style="list-style-type: none">• Convergência de uma sucessão;• Pormenores de terminologia;• Primeiros teoremas sobre limites;• Álgebra dos limites;• Métodos de iteração;• Critérios particulares de convergência:<ul style="list-style-type: none">○ Critério das sucessões monótonas;○ Critério das sucessões enquadadas.• Símbolos de impossibilidade e símbolos de indeterminação;• Limites infinitos;• Operações com limites infinitos;• Regras de cálculo com o símbolo ∞;• Novos símbolos de indeterminação;• Limite da exponencial;• Soma de todos os termos duma progressão geométrica;• Aproximações por meio de séries. Série binomial.	<p>Nada a apresentar</p>
<p>Matemática – Tomo I</p> <p>1979</p>	<p>➤ Limites de Sucessões:</p> <ul style="list-style-type: none">• Conceito de sucessão e de subsucessão;• Sucessões monótonas;• Sucessões limitadas;• Limite de uma sucessão;• Sucessões convergentes e sucessões divergentes;• Operações com limites;• Infinitamente grandes;• Extensão da noção de limite duma Sucessão;• Operações sobre limites infinitos;• A recta acabada;• Indeterminações;• Estudo intuitivo da sucessão $a^n, a \in \mathfrak{R}$;• Soma dos termos de uma progressão geométrica;• Exemplos de cálculo de limites de sucessões.	<p>Nada a apresentar</p>
		<p>➤ Método de indução</p>



<p>Livro de Texto – 12º Matemática</p> <p>1986</p>	<p>Nada a apresentar</p>	<p>matemática;</p> <p>➤ Sucessões de números reais (complemento):</p> <ul style="list-style-type: none">• Definições:<ul style="list-style-type: none">○ Sucessão de números reais;○ Subsucessão de uma sucessão;○ Sucessões convergentes;○ Sucessões monótonas;○ Sucessões limitadas.• Teoremas sobre limites;• Estudo da sucessão (a^n), $a \in \mathfrak{R}$;• Generalização da designação da sucessão a^x, $a \in \mathfrak{R}^+$ e $x \in \mathfrak{R}$;• Estudo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Definição do número e.
<p>Livro de Texto – 11º Matemática</p> <p>1988</p>	<p>➤ Funções reais de variável natural:</p> <ul style="list-style-type: none">• Conceito de sucessão;• Formas de definir uma sucessão:<ul style="list-style-type: none">○ Termo geral;○ Processo de recorrência.• Conceito de subsucessão;• Sucessões monótonas:<ul style="list-style-type: none">○ Sucessões crescentes;○ Sucessões decrescentes.• Sucessões limitadas:<ul style="list-style-type: none">○ Majurantes e minorantes de um conjunto;○ Conjuntos limitados;○ Sucessão limitada.• Progressões aritméticas e geométricas:<ul style="list-style-type: none">○ Definição;○ Termo geral;○ Soma de n termos consecutivos. <p>➤ Limites de sucessões:</p>	<p>Os conteúdos correspondentes são os do manual correspondente ao ano de 1986.</p>



	<ul style="list-style-type: none">• Erro de um valor aproximado. Vizinhança;• Limite de uma sucessão;• Sucessão convergente;• Propriedades dos limites;• Operações com sucessões convergentes;• Infinitamente grandes;• Infinitamente grandes e infinitésimos;• Operações com limites infinitos;• Indeterminações;• Estudo intuitivo da sucessão $n \rightarrow a^n$;• Soma de todos os termos de uma progressão geométrica.	
<p>Matemática – teoria e prática – 2º volume</p> <p>1993</p>		<ul style="list-style-type: none">➤ Sucessões de números reais:<ul style="list-style-type: none">• Definição de sucessão de números reais;• Subsucessão de uma sucessão;• Sucessão monótona;• Sucessão limitada. Propriedades;• Sucessão convergente e sucessão divergente. Propriedades;• Infinitamente grandes. Propriedades;• Classificação das sucessões quanto à existência e natureza do limite;• Estudo da sucessão $a^n, a \in \mathfrak{R}$;• Regras de cálculo com o símbolo ∞;• Símbolos de indeterminação.➤ Teorema das sucessões enquadadas.



		➤ Sucessão de termo geral. Propriedades.
Xeqmat 1994	<ul style="list-style-type: none">• Sucessões. Noções básicas:<ul style="list-style-type: none">○ Sucessão monótona;○ Sucessão limitada.• Infinitamente grandes e teoremas;• Infinitésimos e teoremas;• Sucessões convergentes;• Progressões aritméticas:<ul style="list-style-type: none">○ Definição;○ Termo geral;○ Soma de n termos consecutivos.• Progressões geométricas:<ul style="list-style-type: none">○ Definição;○ Termo geral;○ Soma de n termos consecutivos.• Termo geral e soma de n termos consecutivos.	Nada a apresentar
Matemática – Livro de Texto – 2º volume 1998	Nada a apresentar	➤ A sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: <ul style="list-style-type: none">• Limite da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;• Aplicação do número e ao cálculo de limites.
Sucessões – Parte 3 2000	<ul style="list-style-type: none">• Sucessões;• Sucessões monótonas;• Sucessões limitadas;• Majurantes, minorantes e enquadramentos;• Progressões aritméticas:<ul style="list-style-type: none">○ Definição;○ Termo geral;○ Soma de n termos consecutivos.• Progressões geométricas:<ul style="list-style-type: none">○ Definição;○ Termo geral;○ Soma de n termos	Não fazia parte do programa o estudo das sucessões.



	<p>consecutivos.</p> <ul style="list-style-type: none">• Monotonia de uma progressão geométrica;• Limite de uma sucessão:<ul style="list-style-type: none">○ Infinitamente grandes e infinitésimos (Definição);○ Sucessões infinitamente grandes e sucessões monótonas;○ Sucessões infinitamente grandes e sucessões limitadas;○ Subsucessão de uma sucessão;○ Infinitamente grande e infinitésimos de referência;○ Teoremas sobre infinitamente grandes e infinitésimos;○ Sucessões convergentes (Definição e teoremas);○ Classificação das sucessões.• Cálculo do limite de sucessões:<ul style="list-style-type: none">○ Operações com sucessões convergentes e divergentes;○ Levantar algumas indeterminações;○ Soma de todos os termos de uma progressão geométrica.• O número de Neper;• O número de Neper na matemática financeira;• Princípio da Indução matemática;• Extensão do princípio de indução matemática.	
<p>Espaço 11</p> <p>2004</p>	<p>➤ Sucessões:</p> <ul style="list-style-type: none">• Modos de definir uma sucessão;• Sucessões monótonas;• Sucessões limitadas;• Progressões aritméticas:<ul style="list-style-type: none">○ Definição;○ Termo geral;○ Soma de n termos consecutivos.• Progressões geométricas:<ul style="list-style-type: none">○ Definição;	



	<ul style="list-style-type: none">○ Termo geral;○ Soma de n termos consecutivos.● Indução matemática;● Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ num contexto de modelação matemática;➤ Limites:<ul style="list-style-type: none">● Infinitamente grandes positivos e negativos;● Infinitamente pequenos (Infinitésimos);➤ Limites de sucessões e convergência:<ul style="list-style-type: none">● Noção de limite real;● Convergência da sucessão constante;● Operação com limites;● Operações com infinitamente grandes;● Sucessões monótonas, limitadas e convergentes;● Teorema das sucessões enquadadas;● Problemas com limites de progressões.	
<p>Sucessões – Parte 3</p> <p>2009</p>	<ul style="list-style-type: none">➤ Sucessões:<ul style="list-style-type: none">● Definição;● Sucessões monótonas;● Sucessões limitadas;➤ Progressões aritméticas e geométricas:<ul style="list-style-type: none">● Definição;● Termo geral;● Soma dos n termos consecutivos;● Monotonia de uma progressão aritmética.➤ Limites de Sucessões:<ul style="list-style-type: none">● Noção intuitiva de limite de uma sucessão;● Limites infinitos;● Classificação das sucessões	<ul style="list-style-type: none">➤ Limites de sucessões (Revisão do 11º ano):<ul style="list-style-type: none">● Cálculo de limites de sucessões;● Cálculo de limites de sucessões envolvendo o número de Neper;● Limite da soma dos termos de uma progressão geométrica.



	<p>quanto à existência e natureza do limite;</p> <ul style="list-style-type: none">• Subs sucessão de uma sucessão;• Teoremas e propriedades sobre sucessões;• Teoremas e operações sobre sucessões convergentes;• Operações com limites infinitos;• Indeterminações;• Estudo da sucessão a^n, $a \in \mathfrak{R}$;• Soma dos termos de uma progressão geométrica;• Número de Neper;• Indução Matemática.	
--	---	--

<p>Matemática Livro de texto – 2º vol. 1993</p>	<p>10.º Ano</p> <ul style="list-style-type: none">• Definição;• Sucessões monótonas;• Sucessões limitadas.
---	--

Da observação dos conteúdos programáticos presentes em cada manual escolar constata-se que nestas últimas quatro décadas o capítulo das Sucessões é organizado de forma idêntica, abordando de uma forma geral os mesmos conteúdos.

De modo a poder observar-se as diferenças entre os conteúdos programáticos dos vários manuais, optamos por comparar os manuais de ano escolar mais próximo.

Ao comparar o manual escolar [Cala60] com [GAR76], observa-se que não são abordadas as progressões aritméticas e geométricas. No manual de 1960 não são referidas as sucessões limitadas, apenas se refere à noção de limite de uma sucessão, não são abordados os símbolos de indeterminação, a álgebra de limites, as operações com limites infinitos, o limite da exponencial, a convergência de uma sucessão. É notória uma grande diferença a nível de conteúdos programáticos, isto deve-se a serem anos em que a estrutura do ensino da Matemática sofreu frequentemente mudanças a nível do programa curricular.

A nível de estruturação, o manual de [Cala60], “Compêndio de Álgebra”, apresenta-se somente com texto (definições, alguns exemplos e exercícios práticos no final do capítulo) recorrendo a poucas figuras relacionadas com o tema “Aplicações



geométricas da noção de limite”. O manual de [GAR76], “Compêndio de Matemática”, apresenta-se de uma forma diferente do anterior, pois já é mais pormenorizado na exposição dos conteúdos programáticos,

Relativamente ao manual de [GAR76] e [Silv78] os conteúdos programáticos são os mesmos, à excepção de um conteúdo que não é abordado no manual de [GAR76], “Métodos de aproximações sucessivas”, e no manual de [Silv78] são estudados métodos de iteração e fórmula de recorrência. Estes dois manuais são precedidos de um capítulo intitulado de “Cálculo Numérico Aproximado”.

Comparativamente aos manuais de [Silv78] e [FrGo79], observa-se que os conteúdos programáticos no manual de 1979 fazem referência ao conceito de subsucessão e à recta acabada $(\overline{\mathbb{R}} \cup \{-\infty, +\infty\})$, enquanto que o manual de 1978 não o faz, sendo todos os outros conteúdos iguais.

Comparativamente ao manual entre [FrGo79] e [NVA87], observa-se que no manual de [NVA87] se refere o modo de definir uma sucessão pelo processo de recorrência, os majurantes e minorantes de um conjunto, o erro de um valor aproximado e o conceito de vizinhança. Neste mesmo manual é antecedido pelo capítulo das funções polinomiais, ao qual se seguem as Sucessões e os limites de sucessões.

No manual de [NVA86] os conteúdos abordados no 12ºano são um complemento do 11ºano e é introduzido como novo tema o método de indução matemática. De acordo com os manuais de [NVA87] e [Câma93], os conteúdos do manual de [Câma93] são um complemento ao estudo referente a sucessões de números reais, feito no 11ºano, no 12ºano são introduzidos conteúdos relacionados com o cálculo de limites, nomeadamente o teorema das sucessões enquadradas e o estudo da sucessão de termo geral e respectivas propriedades. Por exemplo, o manual de [NVA87] não revê a sucessão pelo processo de recorrência.

Os conteúdos programáticos do manual de [LiGo94] são os mesmos que o complemento inserido no manual de [Câma93], apesar de que no manual de [LiGo94] está implícito o conceito de subsucessão, enquanto no manual de [Câma93] é abordado como conteúdo. A estruturação do manual de [Câma93] é idêntica ao do manual de [NVA87].



No manual de [NeBr98], no 12º ano apenas é abordado o estudo da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e respectivo limite (então designado por número de Neper).

Relativamente aos manuais de [Neve00] e [CRR04], aí são abordados os mesmos conteúdos divergindo apenas no teorema das sucessões enquadradas que não é abordado no manual de [Neve00].

No manual referente ao 12º ano do ano de [Neve00] não fazia parte do programa o estudo das sucessões, nem mesmo constava no manual a revisão das mesmas.

É de notar que os manuais de [Câma93] (inclusive) até à actualidade apresentam uma estruturação diferente dos manuais até então, pois os livros mais actuais são compostos por mais exemplos, mais exercícios para consolidação dos conteúdos programáticos, esquemas, figuras ilustrativas dos conteúdos a leccionar, contudo omitem demonstrações que antes de [Câma93] eram abordadas. Em todos estes manuais o tema das Sucessões é antecedido pelo tema das funções.

3.3. ESTUDO DAS SUCESSÕES NOS MANUAIS ENTRE 1960 E 2010

3.3.1. O CONCEITO DE SUCESSÃO

Para analisar a evolução da aprendizagem do conceito de sucessão nas últimas quatro décadas, passaremos a analisar a forma como é introduzido o conceito de sucessão em alguns dos manuais, de modo a identificar as diferenças entre estes.

Observemos como as definições são apresentadas nos manuais escolares.

[Cala60] – “Chama-se sucessão numérica toda a colecção de números dispostos numa certa ordem (uns após os outros), tornado deste modo possível a sua enumeração. Os números que constituem a sucessão chamam-se termos da sucessão. Considerada a sucessão sob aquele aspecto, resulta que os seus termos se podem numerar – o que significa poder-se indicar qual é o 1.º, 2.º, 3.º, etc., termos da sucessão”.



[GAR76] –

1. Conceito de sucessão de números reais

O termo sucessão é já nosso conhecido. Expressões como
sucessão dos números pares positivos
sucessão dos números ímpares positivos
sucessão dos números primos
sucessão dos dias e das noites

são de uso corrente. Mas afinal, que deve entender-se, em Matemática, por sucessão? Damos a resposta, apresentando a seguinte

definição: Chama-se sucessão de elementos dum conjunto A a toda a aplicação de \mathbb{N} em A .

Recordando o conceito de sequência, vemos que o conceito de sucessão o generaliza. Por esse facto as sequências são, por vezes, designadas por sucessões finitas.

Se os transformados de todos os elementos de \mathbb{N} forem números reais, a sucessão dir-se-á *sucessão real* ou *sucessão de números reais*. Temos, assim, a

definição: uma sucessão de números reais é uma aplicação de \mathbb{N} em \mathbb{R}

Como exemplos de sucessões podemos apresentar as aplicações seguintes:

$$\begin{array}{lll} n \mapsto 2n + 3 & n \mapsto \frac{1}{n} & n \mapsto 1 - \frac{1}{10^n} \\ n \mapsto n^2 & n \mapsto \frac{(-1)^n}{n} & n \mapsto \text{resto da divisão de } n \text{ por } 2 \end{array}$$

Tal como fizemos a propósito das sequências, representaremos por a_1 a imagem de 1, por a_2 a imagem de 2, ..., por a_n a imagem de n , tendo-se, portanto, para representar uma sucessão $n \mapsto f(n)$ o esquema

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & \dots \end{pmatrix}$$



ou, mais simplesmente,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

a_1 diz-se o primeiro termo (ou termo de ordem 1) da sucessão, a_2 o 2.º termo (ou termo de ordem 2), ..., designando-se duma maneira geral por termo de ordem n numa sucessão o transformado de n nessa sucessão.

[Silv78] –

20. Pormenores de terminologia. O conceito de 'sucessão' foi apresentado já no 2.º ciclo. *Dar (ou definir) uma sucessão de*

números reais equivale a dar um processo qualquer, pelo qual, a cada número natural n , fique a corresponder um determinado número real u_n . Neste caso, u_1 é o *primeiro termo* da sucessão, u_2 o *segundo termo* da sucessão, etc.; u_n é o *termo da ordem n (ou termo geral)* da sucessão. Deste modo, a variável u_n representa uma *função real da variável natural n* ou seja uma *aplicação*

$$n \curvearrowright u_n \text{ de } \mathbb{N} \text{ em } \mathbb{R}$$

É precisamente esta aplicação (ou função) que se chama 'sucessão de números reais'. Tal aplicação é normalmente chamada '*a sucessão de termo geral* u_n , ou, simplesmente, a '*sucessão* u_n '. Em vez da notação u_n , podem também usar-se notações tais como $u(n)$, $f(n)$, $\varphi(n)$, ..., que se empregam habitualmente a respeito de funções em geral (isto é, escrevendo a variável independente n entre parênteses, a seguir ao símbolo da função, em vez de pôr essa variável como índice).

Como qualquer outra função, uma sucessão pode, em muitos casos, ser definida por uma expressão designatória (chamada, neste caso, '*expressão do termo geral*'), como se verifica nos exemplos anteriores. Mas também se define muitas vezes uma sucessão por um processo de recorrência, de que vimos alguns exemplos no n.º 18, ao tratar do método de Newton para extracções de raízes. Mais tarde trataremos, em pormenor, de métodos de recorrência.

Dum modo geral, dado um conjunto A qualquer, chama-se *sucessão de elementos de A* toda a aplicação $n \curvearrowright u_n$ de \mathbb{N} em A . Por exemplo, a expressão i^n define uma sucessão de números complexos:

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, \dots$$

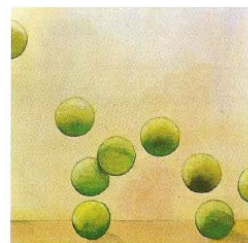


[Câma93] –

FUNÇÕES DE DOMÍNIO IN: SUCESSOES

Definição

Imaginemos que tínhamos uma bola a um metro do solo. Deixamos cair a bola e ela subiu até metade da altura inicial. Voltou a cair e subiu novamente metade da altura anterior, e assim sucessivamente.



A distância, em metros, que a bola percorreria, nas descidas, seria dada pela expressão:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

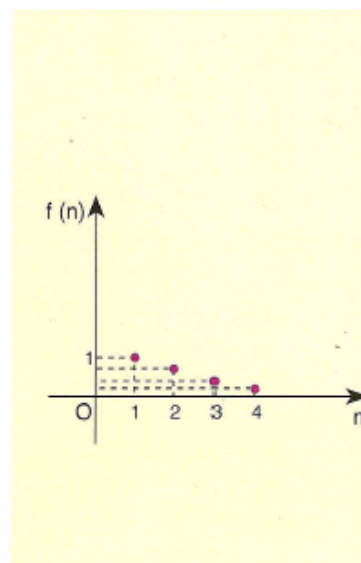
Esta expressão tem infinitas parcelas, pois teoricamente a bola nunca mais pararia. Humanamente é impossível escrever todas as parcelas da soma, mas é possível calcular o seu valor que é 2. Estas somas são estudadas mais tarde (estudo das séries); para já estudamos o comportamento das suas parcelas.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

A esta sequência infinita chama-se **sucessão**.

Uma sucessão pode ser encarada como uma função de domínio IN.

1	↪	f	↪	1
2	↪		↪	$\frac{1}{2}$
3	↪		↪	$\frac{1}{4}$
4	↪		↪	$\frac{1}{8}$
5	↪		↪	$\frac{1}{16}$
⋮				⋮
n	↪		↪	f(n)
⋮				⋮





Uma sucessão é uma função de domínio \mathbb{N} .

O gráfico de uma sucessão é um conjunto de pontos isolados.

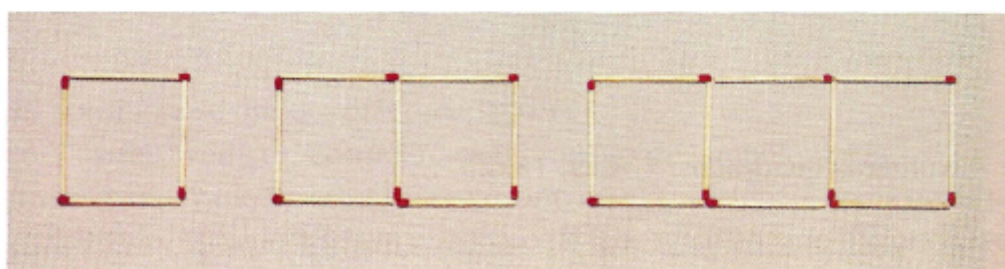


[CRR04] -

Considere-se a sequência numérica:

4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

A esta sequência numérica pode associar-se um modelo geométrico constituído por uma sequência de “quadrados” feitos com fósforos, como é sugerido na figura.



Assim, à ordem de cada elemento da sequência é possível associar-lhe o número de fósforos da figura correspondente.

Ordem	1	2	3	4	...	n	...
Nº de fósforos	4	7	10	13	...	$3n + 1$...



Tem-se, assim, uma função u , real de variável natural (\mathbb{N}):

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto 3n + 1$$

Chama-se **sucessão de números reais**, ou, simplesmente, **sucessão**, a uma função que a cada número natural faz corresponder um número real.

As sucessões têm notações e nomenclatura próprias.

É usual utilizar-se a notação (U_n) para designar a sucessão

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n$$

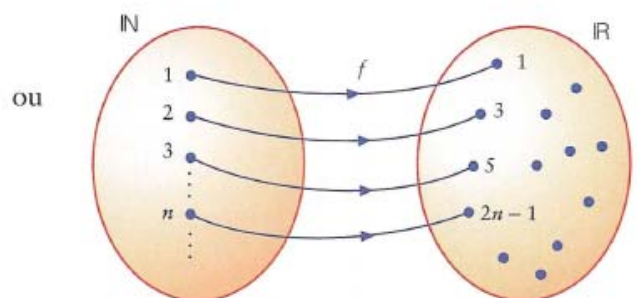
[NGM09] –

1. Sucessões. Definições

1.1 Definição de sucessão

O Pedro vive do lado ímpar de uma rua, na casa que fica em 40.º lugar. Qual é o número da porta da casa onde vive o Pedro?

Lugar da rua	N.º da porta
1	1
2	3
3	5
⋮	⋮
n	$2n - 1$
40	$2 \times 40 - 1 = 79$



A porta da casa do Pedro tem o número 79 .

A correspondência $n \mapsto 2n - 1$ é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, e o contradomínio é um subconjunto de todos os números reais, \mathbb{R} . Por isso à função chama-se **sucessão**.



1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ... ← são os termos da sucessão.

↓ ↓ ↓

1.º termo 4.º termo n.º termo (n.º lê-se enésimo)

ou ou ou

termo de termo de termo de

ordem 1 ordem 4 ordem n

À expressão $(2n - 1)$ chama-se termo geral da sucessão e escreve-se:

$$a_n = 2n - 1 \quad \text{ou} \quad f(n) = 2n - 1$$

Definição

Uma sucessão de números reais, (a_n) , é uma função, f , real de variável natural em que o domínio é o conjunto dos números naturais e as imagens são números reais.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$

• Os valores da função:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

são os termos da sucessão.

• $f(n) = a_n$ é o termo geral da sucessão.

Assim numa sucessão:

$$n \longrightarrow \text{ordem do termo}$$

$$f(n) = a_n \longrightarrow \text{é o termo geral da sucessão de números reais}$$

$$(f(n)) \text{ ou } (a_n) \longrightarrow \text{representa a sucessão}$$

$$\{f(n)\} \text{ ou } \{a_n\} \longrightarrow \text{representa o contradomínio}$$

A sucessão também pode ser representada como uma função qualquer:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto 2n - 1 \quad \text{ou} \quad a_n = 2n - 1$$

Nos manuais que estudámos, tem-se vindo a verificar grandes diferenças na forma de apresentar a definição de sucessão, sendo que estas diferenças são bastante notórias nos manuais anteriores a 1993 relativamente aos posteriores a essa data.



Uma primeira nota é que, devido ao tema “sucessões” ser introduzido a seguir às funções, a sucessão é sempre retratada como uma particularidade das funções.

Observa-se que nos manuais que abordámos anteriores a 1993 a unidade didáctica das sucessões se inicia com a apresentação da definição de sucessão, sendo posteriormente apresentados alguns exemplos. Nos manuais [GAR76] e [Silv78] dá-se a definição mais geral, de *sucessão de elementos dum conjunto A*.

Nos manuais posteriores a 1978 até 2009, a definição de sucessão é antecipada pela apresentação de exemplos que vêm do quotidiano (por exemplo, actividades com fósforos, contagem de números de portas numa rua), exemplos estes que por vezes são trabalhados exaustivamente (compare-se a abordagem de [GAR76] com a de [Câma93], [CRR04], [Neve09]). Nestes manuais a definição é apresentada de uma forma mais simplificada, contudo continua a manter-se o rigor teórico que os manuais mais antigos expunham em texto mais corrido.

3.3.2. CONTEXTUALIZAÇÃO DO TEMA “SUCESSÕES” E RELAÇÃO COM OUTRAS TEMÁTICAS, TAIS COMO AS “FUNÇÕES”

Em seguida serão expostos dois exemplos de como a contextualização das sucessões com a temática das funções surge em alguns dos manuais escolares.

Começamos por indicar a definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine.

3.3.2.1. Definição (de Heine):

Seja f uma função real, de variável real, e a um ponto de acumulação do seu domínio.

Diz-se que $f(x)$ tende para b quando x tende para a e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$



se, e somente se, a toda a sucessão de valores de x do domínio f tendente para a (sendo esses valores diferente de a) corresponde uma sucessão de valores de $f(x)$ tendente para b .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \rightarrow a \wedge (x_n \in D_f \setminus \{a\}, \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b$$

No manual de [NVA87], depois de se ter estudado o tema das sucessões e ao introduzir a definição de limite de uma função, segundo Heine, recorre a exemplos em que é usado as sucessões para comprovar a definição de limite.

Vejamos o seguinte exemplo [NVA87, pg. 156 - 157]

Consideremos, definida em \mathbb{R} , a função

$$x \mapsto y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

E vamos mostrar a partir da definição que $\lim_{x \rightarrow 2} y = \frac{6}{5}$.

Seja (x_n) uma qualquer sucessão de valores de x convergente para 2 por valores diferentes de 2

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rightarrow 2,$$

A que corresponde a sucessão (y_n) de valores da função

$$\frac{3x_1}{x_1^2 + 1}, \frac{3x_2}{x_2^2 + 1}, \dots, \frac{3x_n}{x_n^2 + 1}, \dots$$

Ora,

$$\lim(y_n) = \lim \frac{3x_n}{x_n^2 + 1} = \frac{3 \lim x_n}{(\lim x_n)^2 + 1}.$$

Como $x_n \rightarrow 2$

$$\frac{3 \lim x_n}{(\lim x_n)^2 + 1} = \frac{3 \times 2}{2^2 + 1} = \frac{6}{5}.$$

Então, é verdadeira a proposição



$$\forall (x_n) : x_n \rightarrow 2 \wedge (x_n \in D_y \setminus \{2\}, \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow y_n \rightarrow \frac{6}{5}$$

e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} y = \frac{6}{5}.$$

No manual escolar de [NGM09], averigua-se que após ter sido leccionada a temática das sucessões no 11ºano, e visto que no 12ºano se faz uma revisão das sucessões, nomeadamente o limite das sucessões.

Pode referir-se o facto de que no 12ºano se faz o estudo das funções exponenciais recorrendo à temática das sucessões.

Como se pode observar em seguida [NGM09, pgs. 12-13]:

Exemplo 1 Evolução da população mundial

Durante as últimas décadas verificou-se que a população mundial crescia 2% ao ano e que em 1992 era cerca de 6 milhares de milhão.

Mostre que a população P pode ser dada pela expressão

$P(t) = 6(1 + 0,02)^t$ com t em anos e $t = 0$ corresponde a 1992.

Represente graficamente a função. Qual será a população em 2100 ?



O Ensino da Sucessão de Neper

Resolução

Com a ajuda da calculadora, construiu-se a seguinte tabela:

Tempo em anos (t)	População mundial em milhares de milhão (P)
(1992 $\rightarrow t = 0$) 0	6
1	$6 + 6 \times 0,02 = 6 (1 + 0,02)$
2	$6 (1 + 0,02) (1 + 0,02) = 6 (1 + 0,02)^2$
3	$6 (1 + 0,02)^2 (1 + 0,02) = 6 (1 + 0,02)^3$
...	...
30	$6 (1 + 0,02)^{30}$
60	$6 (1 + 0,02)^{60}$
...	...
t	$6 (1 + 0,02)^t$

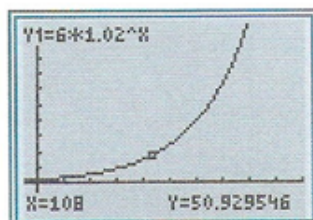
A população mundial pode ser encontrada pela função:

$$P(t) = 6 (1 + 0,02)^t,$$

com t em anos após 1992 .

Assim, no ano 2100 ($2100 - 1992 = 108$) , a população mundial prevista será $6 \times (1,02)^{108} \approx 51$ milhares de milhão.

Representando graficamente a função P , vem:





3.3.3. METODOLOGIAS DE ENSINO

Vejamos as indicações metodológicas relativas aos programas curriculares dos anos 1994, 2000, 2004 e 2009, e que constam em [LiGo94], [Neve00], [CRR04] e [NGM09] respectivamente.

As indicações metodológicas sugeridas no manual de 1994 são que, os conceitos deverão ser intuídos, numérica e geometricamente, antes de serem definidos; as definições, sem perda de rigor, serão dadas em linguagem corrente. Esta unidade deve ser entendida como uma introdução ao conceito de limite (à Heine) de função real de variável real, razão porque a «prática» relativa a sucessões será reduzida a exemplos essenciais. O conceito de sucessão convergente será dado a partir da noção de infinitésimo. [LiGo94]

Segundo [Neve00], os programas curriculares sugeriam que as sucessões devem aparecer como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve ser servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita introduzindo vários problemas de tipo geométrico tal como vêm propostos no articulado do actual programa. Outros exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria – por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia – por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia – por exemplo, cálculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento.... O estudo das sucessões como funções de variável natural deve ser feito só depois de terem sido construídos vários exemplos/modelos. Mas a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo se devem introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão, etc. O estudo da monotonia, minorantes, majurantes, etc. deve ser feito à medida que vão aparecendo como aspectos a considerar durante a resolução dos diferentes problemas.



Do mesmo modo, devem ser abordadas as propriedades de certas sucessões (progressões). Estes problemas devem ainda servir para introduzir a definição por recorrência para casos simples. Os estudantes podem utilizar livremente a calculadora.

O professor deve explorar o uso da calculadora e deve ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redacções, devem ser introduzidas as redacções simbólicas consagradas. As redacções simbólicas devem então ser testadas com exercícios rápidos. Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc. podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos, chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno, de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contra-exemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais concepções alternativas e erradas. Deste modo, os estudantes ganham confiança nos seus próprios saberes e compreendem as novas aquisições como complementares e facilitadoras, aprofundamentos das suas competências para dar respostas a situações cada vez mais complexas. As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo-se-lhes as conclusões a tirar de cada exemplo e contra-exemplo. Após cada redacção em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redacção em simbologia matemática e devem então ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas sejam testadas.

De acordo com [CRR04] as sugestões/orientações referidas é que se deve encarar as sucessões como um caso particular das funções já estudadas, mas com notações e nomenclaturas específicas. Identifica situações diversas do dia-a-dia em que o conceito de sucessão esteja presente. Por exemplo, reconhecer sucessões e determinar o termo geral é um bom exercício que se deve trabalhar. Verificar que a condição é hereditária e apresentar sempre uma conclusão. Recorrendo à calculadora, faz um estudo intuitivo da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, construindo tabelas de valores. Verifica que a sucessão tende para um determinado valor que é representado por $e \approx 2,7182818$ (número irracional) designado por número de Neper. Os limites de sucessões e os conceitos de infinitamente grandes devem ser consolidados após várias experiências com diversas sucessões, com recurso à calculadora, a tabelas, gráficos e cálculos. Recorre a exemplos e contra-



exemplos para cada uma das situações. Para cada um destes conceitos, faz em casos simples, a correspondência entre a linguagem corrente e a linguagem simbólica. Deve aplicar por linguagem própria que uma sucessão não pode convergir para dois valores distintos. Tentar dar exemplos de: sucessões monótonas limitadas, sucessões monótonas não limitadas e sucessões limitadas e não monótonas. Tentar dar exemplos de sucessões que satisfaçam determinadas condições, como, por exemplo: convergente para 2 e decrescente e, convergente para 2 e crescente. Aplicar, em casos simples, o critério de majuração e o teorema das sucessões enquadradas para justificar a convergência (ou não) de sucessões. E, nos problemas com limites de progressões é importante que verifique o que se passa para alguns valores da variável n , conjecturar o que se passa quando $n \rightarrow +\infty$ e validar a conjectura.

Relativamente a [NGM09] as sugestões metodológicas são similares às de 2000, apenas com o reforço de que os estudantes utilizem conhecimentos já adquiridos sobre algumas funções reais de variável real e os transfiram com as devidas cautelas para as sucessões. É importante que se aproveitem momentos como este para obrigar os estudantes a reflectir (pedindo-lhes contra-exemplos em que os recíprocos nem sempre são válidos). O estudante poderá ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os estudantes encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões. Descobrirão que têm comprimento (ou superfície) infinito e uma superfície (ou volume) finita (quer a tratem no plano ou no espaço).



CAPITULO 4:

O ENSINO DA SUCESSÃO DE NEPER

4.1. A DEMONSTRAÇÃO DE $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ NOS MANUAIS ESCOLARES

A sucessão de Neper é estudada nos manuais escolares de 1986, 1993, 2000, 2004 e 2009, que constam em [NVA86], [Câma93], [Neve00], [CRR04] e [NGM09], respectivamente.

O manual escolar [NVA86] (livro de Texto – 12º) faz o estudo a sucessão de Neper de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, do seguinte modo:

“ O limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que vamos provar existir, é um número muito importante em toda a Análise Matemática.

A existência deste numero, que se designa por e em homenagem a Euler, ficará assegurada depois de provarmos que a sucessão é monótona e limitada.

Com efeito temos:

1. A sucessão é crescente:

O termo de ordem n da sucessão obtém-se pelo desenvolvimento do binómio de Newton.



$$\begin{aligned}
 U_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + {}^n C_1 \times \frac{1}{n} + {}^n C_2 \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + {}^n C_n \times \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\
 &= 1 + n \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \times \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \times \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n(n-1)]}{n!} \times \frac{1}{n^n} = \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n(n-1)}{n} = \\
 &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n(n-1)}{n}\right)
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, teríamos:

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\
 &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

Comparando as $n+1$ parcelas do desenvolvimento de U_{n+1} com as n parcelas de U_n , conclui-se:

- ✓ U_{n+1} tem mais uma parcela positiva;
- ✓ A primeira parcela é igual;
- ✓ Cada uma das restantes parcelas de U_n é menor que a correspondente parcela de U_{n+1} .

Portanto, $\forall n \in N, u_n < u_{n+1} \Leftrightarrow (u_n)$ é crescente.

2. A sucessão é limitada:

Além da sucessão

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n(n-1)}{n}\right)$$

Consideremos as duas sucessões seguintes:



O Ensino da Sucessão de Neper

$$v_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{e} \quad w_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Comparando termo a termo as três sucessões, temos

$$u_n < v_n < w_n, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Mas como,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$$

são termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, a sua soma será

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Logo,

$$w_n = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

Podemos então escrever,

$$2 < u_n < v_n < w_n < 3, n \geq 2$$

O que prova que u_n é limitada.

Provou-se que a sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada, logo é convergente.

O limite desta sucessão é, por definição, o número e .

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828$$



Este número e chama-se Número de Neper e o seu valor aproximado pode determinar-se calculando os sucessivos termos da sucessão.”

De seguida, apresentamos as demonstrações que foram usadas para calcular o limite da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n}$.

“Para demonstrar que, sendo (u_n) infinitamente grande positivo ou negativo, se tem

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Provaremos sucessivamente:

1. $u_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e$

Se u_n é infinitamente grande positivo, existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores que 1. A partir da ordem p ($n > p$), se representarmos por k_n o maior inteiro contido em u_n , temos:

$$k_n \leq u_n < k_n + 1, \quad n > p \tag{16}$$

e, pela monotonia parcial da divisão,

$$\frac{1}{k_n + 1} \leq \frac{1}{u_n} < \frac{1}{k_n} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{k_n + 1} \leq 1 + \frac{1}{u_n} < 1 + \frac{1}{k_n}$$

Atendendo a (16) e como as bases são maiores do que a unidade, vem:

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}$$

Como

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} = \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} \times \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{-1} \rightarrow e \times 1 = e$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1} = \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \times \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^1 \rightarrow e \times 1 = e$$

Conclui-se pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim u_n = e$.



$$2. \quad u_n \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)^{u_n} = e$$

Se $u_n \rightarrow -\infty$, então, $v_n = -u_n \rightarrow +\infty$

Temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned} \lim \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)^{u_n} &= \lim \left(1 - \frac{1}{v_n} \right)^{-v_n} = \lim \left(\frac{v_n - 1}{v_n} \right)^{-v_n} \\ &= \lim \left(\frac{v_n}{v_n - 1} \right)^{v_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{v_n - 1} \right)^{v_n} \\ &= \lim \left(1 + \frac{1}{v_n - 1} \right)^{v_n - 1} \times \left(1 + \frac{1}{v_n - 1} \right) \end{aligned}$$

Como

$$v_n - 1 \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad \lim \left(1 + \frac{1}{v_n - 1} \right) = 1$$

vem finalmente,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)^{u_n} = e \times 1 = e$$

$$3. \quad u_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim \left(1 + \frac{x}{u_n} \right)^{u_n} = e^x$$

- Se $x \neq 0$,

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n} \right)^{u_n} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}} \right)^{\frac{u_n}{x}} \right]^x$$



então, pela primeira ou segunda demonstração, quer

$\frac{u_n}{x} \rightarrow +\infty$ quer $\frac{u_n}{x} \rightarrow -\infty$, temos:

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n} \right)^{u_n} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}} \right)^{\frac{u_n}{x}} \right]^x = e^x$$

- Se $x = 0$,

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n} \right)^{u_n} = 1^{u_n} = 1 = e^0$$

Consequentemente se u_n é um infinitésimo grande ou negativo,

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n} \right)^{u_n} = e^x, \forall x \in \mathfrak{R}."$$

Note-se que $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ é um caso particular da sucessão $\left(1 + \frac{x}{u_n} \right)^{u_n}$ quando $u_n \rightarrow \infty$.

No manual escolar de [Câma93] são dadas as seguintes indicações gerais para a demonstração.

SUCESSÃO DE TERMO GERAL:

$$\left(1 + \frac{x}{u_n} \right)^{u_n}, u_n \rightarrow \infty \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

Caso particular ($u_n = n \wedge x = 1$)

Consideremos a sucessão:

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$



Prova-se que:

- (v_n) é monótona crescente
- (v_n) é limitada:

$$2 \leq v_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja, (v_n) é uma sucessão convergente

$$\text{— } \lim v_n = 2,71828\dots\dots$$

Por definição, o número de Nepper, e , é tal que:

$$e = 2,71828\dots\dots$$

Propriedades

$$1. \lim_{u_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e$$

$$2. \lim_{u_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x, x \in \mathbb{R}$$

Verificação :

$$\begin{aligned} \lim_{u_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} &= \lim_{u_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x} \cdot x} \\ &= \lim_{u_n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x}} \right]^x \\ &= \left[\lim_{u_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x}} \right]^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

No manual escolar [CRR04] o estudo da sucessão de Neper é introduzido recorrendo à actividade que a seguir se apresenta.



“O ESTUDO INTUITIVO DA SUCESSÃO DE TERMO GERAL $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ NUM CONTEXTO DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA”



Actividade 10

Um banco oferece juros a uma taxa anual de 4%. No entanto, tem várias modalidades que diferem apenas na periodicidade da composição dos juros, isto é, no número de vezes que, ao longo do ano, são acumulados os juros na conta do cliente (capitalizam), permitindo, assim, que os juros pagos aumentem o capital, dando origem a mais juros.

Num folheto informativo encontra-se um quadro com as várias modalidades e respectivas condições.

Capital inicial	Modalidade A	Modalidade B	Modalidade C	Modalidade D
Até 1000 €	Capitalizações anuais			
De 1000 até 3000 €	Capitalizações anuais	Capitalizações semestrais		
De 3000 até 5000 €	Capitalizações anuais	Capitalizações semestrais	Capitalizações mensais	
Superior a 5000 €	Capitalizações anuais	Capitalizações semestrais	Capitalizações mensais	Capitalizações diárias



1. O Sr. Silva vai depositar 2000 €. Qual a modalidade que lhe é mais favorável e qual o capital que poderá obter ao fim de um ano?

Tendo em conta o valor a depositar, o Sr. Silva poderá optar apenas entre capitalizações anuais, em que os juros serão pagos ao fim de cada ano, ou capitalizações semestrais, isto é, os juros são divididos em duas partes e, assim, ao fim de seis meses, são depositados na conta 50% dos juros, o que vai aumentar o capital, aumentando o rendimento mais um pouco no segundo semestre.

No primeiro caso, o Sr. Silva receberá

$$2000 + 2000 \times 0,04 = 2000 \times (1 + 0,04) = 2080$$

Se as capitalizações forem semestrais, e designando por u_1 e u_2 o capital obtido no fim da primeira e da segunda capitalização respectivamente, o capital do Sr. Silva será:

– no fim do 1º semestre

$$u_1 = 2000 + 2000 \times \frac{0,04}{2} = 2000 \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right) = 2040; \quad (1)$$

– no fim do 2º semestre

$$u_2 = 2040 + 2040 \times \frac{0,04}{2} = 2040 \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right).$$

Como se sabe que $2040 = 2000 \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)$ (resultado obtido em (1)),

pode-se deduzir que

$$u_2 = 2000 \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right) \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right) = 2000 \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^2 = 2080,8$$

Capital inicial	Modalidade A	Modalidade B
2000 €	2080 €	2080,80 €



2. Sabendo que um cliente pretende depositar 6000 €, qual o capital que poderá obter ao fim de um ano em cada uma das modalidades?

Para dar resposta a esta questão é conveniente fazer um estudo comparativo dos valores que é possível obter em cada caso.

Através de um processo análogo ao anterior, calculam-se os montantes a receber em cada modalidade.

Se designarmos por b_n , c_n e d_n o montante acumulado ao fim de n capitalizações ($n \in \mathbf{N}$) em cada uma das modalidades B, C e D, obtém-se:

$$b_n = 6000 \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^n, \quad n \leq 2$$

$$c_n = 6000 \times \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^n, \quad n \leq 12$$

$$d_n = 6000 \times \left(1 + \frac{0,04}{365}\right)^n, \quad n \leq 365$$

Os montantes que se podem obter ao fim de um ano nas várias modalidades são:

$$b_2 = 6000 \times \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^2 = 6242,4;$$

$$c_{12} = 6000 \times \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12} \approx 6244,45;$$

$$d_{365} = 6000 \times \left(1 + \frac{0,04}{365}\right)^{365} \approx 6244,85.$$



Capital inicial	Modalidade A	Modalidade B	Modalidade C	Modalidade D
6000 €	6240 €	6242,4 €	6244,45 €	6244,85 €

Observa-se que a variação não é muito significativa, mesmo quando se passa para capitalizações diárias.

3. Qual a expressão que permite calcular o montante C obtido ao fim de um ano quando o capital inicial é C_0 , a taxa de juros anual é j , com n capitalizações ao longo do ano?

Generalizando o estudo feito anteriormente, é imediato que, ao fim de

um ano, $C = C_0 \times \left(1 + \frac{j}{n}\right)^n$.

Nesta actividade, recorreu-se a uma sucessão do tipo $u_n = \left(1 + \frac{j}{n}\right)^n$.

Uma sucessão deste tipo e de grande importância em matemática é a que se obtém para $j = 1$.

A sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Vamos proceder ao estudo intuitivo desta sucessão, recorrendo à calculadora gráfica.

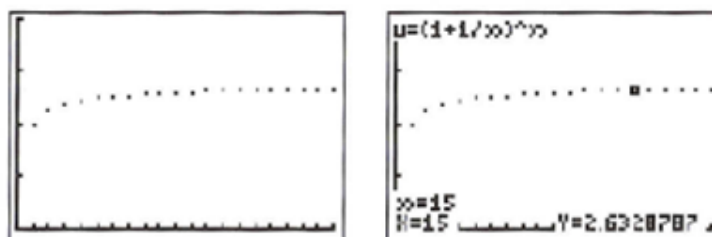
Introduzindo a expressão da sucessão na calculadora e definindo uma janela de visualização que nos permita observar as imagens dos vinte primeiros termos,

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=(1+1/n)^n
u(nMin)
u(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=
```

```
WINDOW
nMin=1
nMax=20
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=
```

```
WINDOW
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=4
Yscl=
```

observa-se:

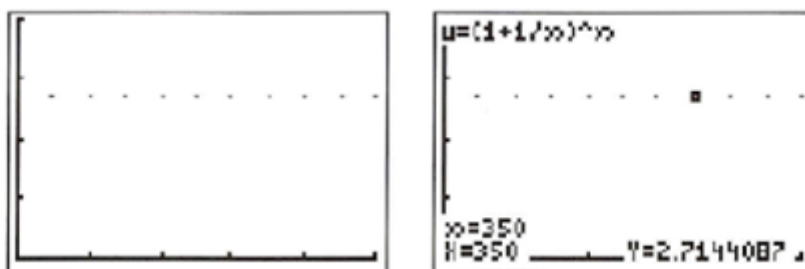


Recorrendo a **TRACE** e percorrendo as imagens, verifica-se que os termos vão aumentando e se situam entre dois e três. Será que este comportamento se mantém à medida que n aumenta?

Se definirmos a janela,

```
WINDOW
XMin=1
XMax=500
PlotStart=50
PlotStep=50
Xmin=0
Xmax=500
Xscl=100
```

podemos visualizar as imagens de 50 em 50, até 500, ficando assim com uma ideia intuitiva do que poderá acontecer à medida que n aumenta.



Estas observações sugerem que a sucessão é estritamente crescente e os termos da sucessão são inferiores a 3, o que, na realidade, acontece.

Podemos considerar como minorante o seu primeiro termo e 3 como majorante.

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donde se conclui que é limitada.}$$



Prova-se que, à medida que n aumenta, os termos da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tendem para um número irracional, que se representa por e e se designa por **número de Neper**.

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 45\dots$$

Assim, podemos definir o número de Neper, e , como sendo o valor para o qual tende a sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ à medida que n aumenta.

Simbolicamente, $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Os manuais escolares [Neve00] e [NGM09] são similares. Vejamos, por exemplo, como é abordado o número de Neper no manual escolar [NGM09].

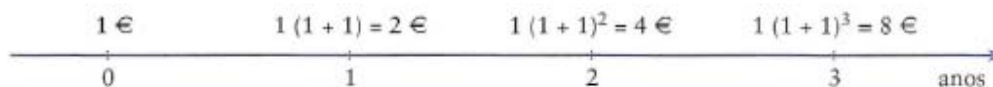
12. O número de Neper

12.1. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Se colocarmos num banco 1 euro à taxa anual de 100% , no final do ano o capital duplicaria.

No final de dois anos teríamos 4 euros, no final de três 8 euros, ...

$$(1 + 100\% \text{ de } 1) = (1 + 1)$$



Se o juro fosse calculado mensalmente teríamos no fim de um ano

$$1 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2,61 \text{ euros.}$$



Se o juro fosse calculado diariamente teríamos no fim de um ano

$$1 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2,71 \text{ euros.}$$

Se o juro fosse calculado minuto a minuto, segundo a segundo, o capital iria aumentado, mas teria um limite.

Se dividíssemos o ano em n partes iguais, fazendo tender n para infinito, ter-se-ia:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\dots$$

Nunca, um euro, no final do ano, poderia dar três euros. O máximo rendimento não ultrapassaria

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\dots$$

A sucessão de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é convergente e o seu limite designa-se por número de Neper e representa-se por e .

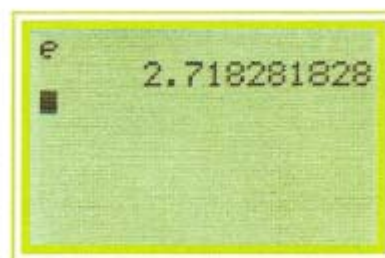
D e f i n i ç ã o Número de Neper

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

O número e é um número irracional, isto é, corresponde a uma dízima infinita não periódica.

$$e = 2,718281828459\dots$$

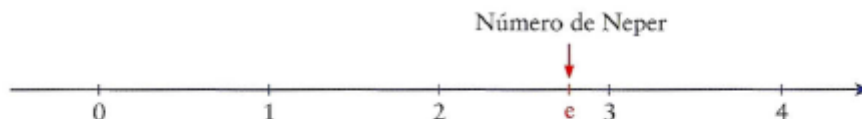
Com uma calculadora gráfica podemos procurar valores aproximados do limite da sucessão de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.





O Ensino da Sucessão de Neper

O número de Neper, e , é hoje um número importante em quase todas as áreas do conhecimento.



Na Matemática, noutras ciências e em particular na Matemática Financeira, tem particular interesse o cálculo de limite de sucessões onde está presente o número de Neper.

Constata-se que a demonstração de $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ surge apenas nos manuais escolares estudados de [NVA86] e [Câma93], sendo que no manual escolar de [NVA86] é feita uma demonstração completa, enquanto que no manual escolar de [Câma93] são apenas dadas orientações gerais para esta se efectuar.

Nos restantes manuais escolares que abordámos, o estudo do limite da sucessão de Neper, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, é levado a cabo recorrendo à modelação matemática. Aqui estão bem presentes as tendências das reformas curriculares que referimos anteriormente, nomeadamente a utilização das novas tecnologias na sala de aula, pois a tendência nos manuais escolares a partir de 2003 é que o estudo da sucessão de Neper seja um estudo intuitivo, recorrendo à utilização da calculadora gráfica. A calculadora gráfica permite a visualização gráfica da sucessão de Neper, e o número de Neper, e , é definido como sendo o limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Estudaremos com mais detalhe algumas actividades com a calculadora gráfica na secção seguinte, onde se mostra que a sua utilização pode sugerir algumas dúvidas relativamente ao valores do limite da sucessão, quando esta tende para valores “elevados” (tais como para $n = 500$).



4.2. AS LIMITAÇÕES DA CALCULADORA GRÁFICA

A calculadora pode ser usada para estudar, do ponto de vista experimental, o limite de uma função, neste caso concreto, o limite da sucessão de Neper.

O programa de Matemática A de 11ºAno, homologado em 01/04/2002 em vigor até 2010, prevê o estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática, devendo o número de Neper ser definido como o limite desta sucessão. Para determinar um valor aproximado para este limite, deverá ser utilizada a calculadora gráfica.

Por exemplo, tal como já foi referido na subsecção 3.2.5, o manual [Neve09] apresenta a definição do número de Neper como sendo o limite da sucessão $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. O cálculo de valores aproximados do número de Neper é feito recorrendo ao uso de uma calculadora gráfica. Os valores aproximados somente são apresentados para $n = 25$, isto é, $a_{25} \approx 2,6658363$, que possui somente um algarismo correcto!

Apesar deste manual seguir a indicação metodológica do programa oficial, não alerta para as limitações no uso da calculadora gráfica.

Vejamos as seguintes actividades propostas em três manuais do 11ºano.

[GoVi04] – **Xeqmat:**

Actividade 29 Com o número «e»

1.º Obtém com a calculadora vários termos da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ de modo a confirmares que é uma sucessão crescente, majorada e de modo a fazeres uma estimativa do valor de **e**.

2.º Compara o valor que estimaste para **e** com o que podes obter na calculadora, usando a função e^x

Faz **SHIFT**, **e^x**, **1**, **EXE** (Casio) ou
2nd, **e^x**, **(1)**, **ENTER** (Texas)



[JAFB03] – Infinito – volume 2:

Calculadora

Calculemos alguns termos da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, programando uma calculadora, recorrendo a uma folha de cálculo no computador ou usando a calculadora gráfica do modo seguinte:

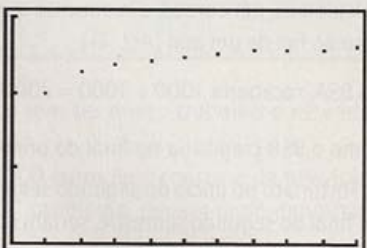
Tecla **MODE** e escolha Seq e Dot.

Em **y=**, vem $u_n =$, e introduz-se a função

$$\left(1 + 1 \div n\right) \wedge n$$

definindo em **WINDOW** nMin = 1, nMax = 100 e o rectângulo de visualização $[0, 10] \times [0, 3]$.

Teclando **GRAPH** vê-se um gráfico sobre o qual estão representados os pontos isolados do gráfico da sucessão, ou seja, os pontos de abcissa natural, 1.



1.

Teclando **TRACE** podemos percorrer, quanto queiramos, o gráfico, verificando-se que não se encontram valores de u_n inferiores a 2 nem superiores a 3.

Pode também, simplesmente, editar em **y=** a função $Y_1 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, teclar **2nd** **TblSet** e escolher

n	U_n
1	2
2	2.25
3	2.3704
4	2.4414
5	2.4883
6	2.5216
7	2.5465

3. $n=1$

TblMin = 1
Tbl = 1

para fazer $x = n$, variável natural. Os pontos (n, u_n) são, então, os pontos de abcissa natural do gráfico de y_1 .

Tecla **2nd** **Table** e verá uma tabela como a apresentada em 3.

n	U_n
30	2.6743
40	2.6851
50	2.6916
60	2.696
70	2.6991
80	2.7015
90	2.7033

4. $n=30$

Volte a teclar **2nd** **TblSet** e mude para Tbl = 10 e TblMin = 30 e teclando de novo **2nd** **Table** obterá nova tabela, como a apresentada em 4.

Repita o procedimento para obter, ainda, a tabela apresentada em 5.

n	U_n
200	2.7115
300	2.7138
400	2.7149
500	2.7156
600	2.716
700	2.7163
800	2.7166

5. $n=200$



[CRR04] - Espaço 11:

A Sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Vamos proceder ao estudo intuitivo desta sucessão, recorrendo à calculadora gráfica.

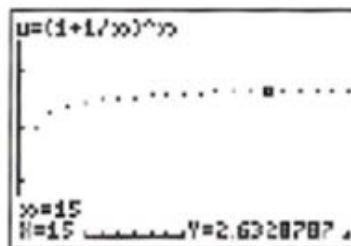
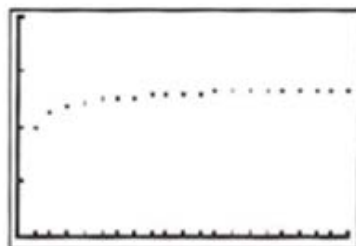
Introduzindo a expressão da sucessão na calculadora e definindo uma janela de visualização que nos permita observar as imagens dos vinte primeiros termos,

```
Plot1 Plot2 Plot3
xMin=1
u(n)=(1+1/n)^n
u(nMin)=
v(n)=
w(n)=
w(nMin)=
```

```
WINDOW
xMin=1
xMax=20
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=
```

```
WINDOW
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=4
Yscl=
```

observa-se:



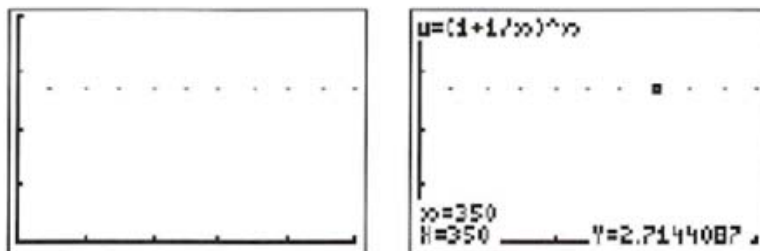
Recorrendo a **TRACE** e percorrendo as imagens, verifica-se que os termos vão aumentando e se situam entre dois e três. Será que este comportamento se mantém à medida que n aumenta?

Se definirmos a janela,

```
WINDOW
xMin=1
xMax=500
PlotStart=50
PlotStep=50
Xmin=0
Xmax=500
Xscl=100
```



podemos visualizar as imagens de 50 em 50, até 500, ficando assim com uma ideia intuitiva do que poderá acontecer à medida que n aumenta.



Estas observações sugerem que a sucessão é estritamente crescente e os termos da sucessão são inferiores a 3, o que, na realidade, acontece.

Podemos considerar como minorante o seu primeiro termo e 3 como majorante.

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donde se conclui que é limitada.}$$

Prova-se que, à medida que n aumenta, os termos da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tendem para um número irracional, que se representa por e e se designa por **número de Neper**.

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 45\dots$$

O objectivo destas três actividades baseia-se em obter uma aproximação para o limite da sucessão de Neper, considerando que uma sucessão tome valores tão próximos do seu limite quanto se queira, desde que se tome um termo de uma ordem suficientemente elevada.

É utilizada a calculadora gráfica para ter uma maior precisão dos valores obtidos. Mas acontece que tal nem sempre se verifica. Para determinadas ordens, os valores expressos pela calculadora gráfica afastam-se do número e . Por conseguinte, o aluno que não esteja familiarizado com a sucessão de Neper e que desconheça o valor exacto do número e , poderá ser induzido em erro pelos resultados que visualiza na calculadora gráfica. Devido a isto o aluno deverá ser chamado à atenção por parte do Professor de



que embora a calculadora gráfica possa permitir ter uma ideia do limite de uma sucessão, em alguns casos, devido aos erros de arredondamento, ela poderá apresentar um valor que pouco tenha a ver com o valor exacto do limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Com a calculadora gráfica Casio CFX – 9950 GB Plus, obtém-se as aproximações de termos da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

N	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
10	2.59374246
10^2	2.704813829
10^3	2.716923932
10^4	2.718145927
10^5	2.718268237
10^6	2.718280469
10^7	2.718281693
10^8	2.718281815
10^9	2.718281827
10^{10}	2.718281828
10^{11}	2.718281828
10^{12}	2.718281828
10^{13}	2.718281828
10^{14}	1
10^{15}	1
10^{16}	1
10^{17}	1
...	...

Tabela 1: Valores obtidos pela Casio CFX – 9950 GB Plus

Constata-se que as aproximações obtidas na tabela 1 vão sendo melhores à medida que n aumenta. Para $n = 10^k$, com k de 1 até 10 (inclusive), as aproximações obtidas



exibem k algarismo correctos. Devido à calculadora gráfica apresentar os resultados com dez algarismos, atinge-se para $n = 10^{10}$ o limite da regularidade proporcionada por esta. E para $n = 10^{11}$ até $n = 10^{13}$ obtém-se a mesma aproximação que em $n = 10^{10}$.

Para $n = 10^k$ com $k \geq 14$, obtém-se sempre o valor 1.

Isto deve-se ao facto de se ter $1 + \frac{1}{10^k} = 1$, $k \geq 14$, uma vez que para a calculadora

gráfica, $\frac{1}{10^k}$, $k \geq 14$, é arredondado para zero.

Considere-se o exemplo de $n = 2^k$ e observe-se a tabela seguinte.

N	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
2	2.25
2^2	2.44140625
2^3	2.565784514
2^4	2.637928497
2^5	2.676990129
2^6	2.697344953
2^7	2.70773902
2^8	2.712991624
2^9	2.715632
2^{10}	2.716955729
2^{11}	2.717618482
2^{12}	2.717950081
2^{13}	2.718115936
2^{14}	2.718198878
2^{15}	2.718240351
2^{16}	2.718261089
2^{17}	2.718271459
2^{18}	2.71827664
...	...



2^{20}	2.718280514
...	...
2^{25}	2.71828157
2^{26}	2.71828159
2^{27}	2.71828160
2^{28}	2.718281606
2^{29}	2.718274311
2^{30}	2.718274313
...	...
2^{34}	2.717924089

Tabela 2: Valores obtidos pela Casio CFX – 9950 GB Plus

Da tabela 2, constata-se que a melhor aproximação do número de Neper obtém-se para $n = 2^k$ com $25 \leq k \leq 27$.

Tendo em consideração que

$$10^{10} < 2^{34} < 10^{11}$$

seria de esperar que a aproximação obtida fosse tão boa quanto a aproximação obtida para $n = 10^{10}$, a qual apresentava os dez algarismos correctos.

Contudo, o aluno irá verificar que relativamente aos valores calculados se tem que

$$\left(1 + \frac{1}{2^{34}}\right)^{2^{34}} < \left(1 + \frac{1}{10^{10}}\right)^{10^{10}},$$

o que acaba por contradizer o conteúdo que lhe foi dado antes sobre o crescimento da sucessão de Neper.

Além disso, para $n = 2 \times 10^{13}$ obtém-se na Texas TI – 83

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 7.6207901$$

Note-se que este resultado contradiz a informação contida nos manuais de que todos os termos da sucessão estão no intervalo $[2,3]$.



O Ensino da Sucessão de Neper

No subcapítulo 2.3. mostrou-se que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Recorrendo à calculadora gráfica Casio CFX – 9950 GB Plus, constrói-se a seguinte tabela de valores, de modo a observar qual a melhor aproximação para o número de Neper.

n	$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$
1	$\sum_{k=0}^1 \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 1 + 1 = 2$
2	$\sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2 + 0,5 = 2,5$
3	$\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2,5 + \frac{1}{6} = 2,666666667$
4	$\sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} = 2,708333333$
5	$\sum_{k=0}^5 \frac{1}{k!} = 2,716666667$
6	$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} = 2,718055556$
7	$\sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!} = 2,718253968$
8	$\sum_{k=0}^8 \frac{1}{k!} = 2,71827877$
9	$\sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} = 2,718281526$
10	$\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} = 2,718281801$
11	$\sum_{k=0}^{11} \frac{1}{k!} = 2,718281826$
12	$\sum_{k=0}^{12} \frac{1}{k!} = 2,718281828$



13	$\sum_{k=0}^{13} \frac{1}{k!} = \mathbf{2.718281828}$
14	$\sum_{k=0}^{14} \frac{1}{k!} = \mathbf{2.718281828}$
...	...
20	$\mathbf{2.718281828}$
...	...

Tabela 3: Valores obtidos pela Casio CFX – 9950 GB Plus

A negrito encontram-se os dígitos correctos do número $e \approx 2,7182818284590452354$, ou seja, como a calculadora gráfica apresenta dez dígitos obtém-se a aproximação do número de Neper quando $n = 12$.

Neste caso a série estudada é convergente, pelo que não existem divergências por parte da calculadora gráfica, ou seja, não leva os alunos a retirarem falsas conclusões.

Mas note-se que tal nem sempre acontece, como podemos ver no exemplo que se segue:

De acordo com a calculadora gráfica, o valor da sucessão $u_n = \frac{1}{n}$, para $n > 10^{99}$, é sempre igual a zero. Assim sendo, a série harmónica, que sabemos ser divergente, passaria a ser convergente uma vez que tem os termos todos nulos a partir de uma certa ordem. Então, como na calculadora toda a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ com $u_n \rightarrow 0$ é convergente, poderemos afirmar que a calculadora “transforma” a condição necessária para uma série convergente, numa condição suficiente. [Gome05]

Dados estes dois exemplos constata-se que é necessário ter em atenção quais as limitações do uso da calculadora gráfica e o aluno ser consciencializado pelo professor de que, embora a calculadora possa permitir ter uma ideia do limite, nalguns casos, devido aos erros de arredondamentos, ela poderá apresentar um valor que pouco ou nada tem a ver com a realidade.



Capítulo 5: CONCLUSÃO

A realização deste trabalho permitiu-me fortalecer o meu conhecimento de conceitos da Análise Real.

Pode-se observar as possíveis aplicações do número de Neper, visto que está patente em diversas áreas não só da matemática (álgebra linear, análise complexa, análise real) mas também na física e economia.

Foi muito útil elaborar os subcapítulos precedentes ao estudo do limite da sucessão

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ e ao de provar que o número de Neper é o limite da sucessão

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, pois deu para compreender o fundamento destes limites, tanto que fortaleci o

estudo acerca da fórmula de Taylor e das condições de convergência da série de Taylor.

Para conseguir compreender certas mudanças no ensino da matemática nomeadamente ao nível do ensino secundário, senti que era importante explorar a estrutura do ensino nas últimas cinco décadas. Na realização desta parte da investigação deparei-me com algumas dificuldades, tais como em obter os programas oficiais destas últimas décadas, tendo por isso apresentado só o programa actualmente em vigor para o ensino secundário relativamente à temática das sucessões. Como os manuais escolares mais recentes colocam os programas actualmente em vigor, consegui assim obtê-los a partir de 1994, e isso ajudou também a comparar os diferentes tipos de sugestões metodológicas. Observei que após ter sido homologado o actual programa de matemática A do 11ºano alguns dos manuais escolares continuaram a optar pelas mesmas tarefas introdutórias dos conceitos.

Nestas últimas décadas observa-se que houve muitas mudanças a nível de exigência de conteúdos programáticos, apesar de serem os mesmos, existe outro nível de exigência que em 1960, por exemplo, não existiria. Sendo caso disso o uso constante das novas tecnologias, nomeadamente a calculadora gráfica, para apreender certos resultados, tais como o limite da sucessão de Neper.

Uma possível investigação futura, no âmbito da temática aqui explorada, seria a análise da evolução de outros conceitos/temas fundamentais nos currículos da Matemática, tais como os limites e as derivadas.



Referências Bibliográficas:

[AiVá05] Aires, A.P.F. e Vázquez, M.S., *O Conceito de Derivada no Ensino Secundário ao longo do Século XX*, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro e Universidade de Salamanca / Espanha, 2005.

[Apos91] Apostol, T. M., *Cálculo, Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear, Volume 1*, Editora Reverté, S. A., Rio de Janeiro, 1991.

[Cala60] Calado, J.J.G., *Compêndio de Álgebra – Ensino Liceal – 2º ciclo*. Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa, 1960.

[Câma93] Câmara, A.M., *Matemática – Teoria e Prática – 12.º ano – 2.º vol.*, Edições Rumo, L.^{da}. Lisboa, 1993.

[Cara98] Caraça, B. J., *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Gradiva – Publicações, L.^{da}, Lisboa, 1998.

[CRR04] Costa, B., Resende, L.C. e Rodrigues, E., *Espaço 11 – Ensino Secundário – 11.º ano*, Edições ASA, Porto, 2004.

[Ferr93] Ferreira, J. C., *Introdução à Análise Matemática (5.ª edição)*, Serviço de Educação Fundação Calouste GulbenKian, Porto, 1993.

[Figu96] Figueira, M.S.R., *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, (3ª edição) Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Lisboa, 1996.

[FrGo79] Freitas, A.C. e Gomes, F., *Matemática – 11º ano de Escolaridade (2.º ano dos cursos complementares*, Tomo I. Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa, 1979.

[GAR76] Garcia, M.M., Anjos, A.O. e Ruivo, A.F., *Compêndio de Matemática – 2.º ano, Curso Complementar – 1.º vol.*, Empresa Literária Fluminense, L.^{da}. Porto, 1976.

[Gome05] Gomes, P.C.C., *Funções e calculadoras gráficas: análise de algumas inferências erróneas.*, Tese de Mestrado, Escola de Ciências, Universidade Do Minho, Portugal, 2005.

[GoVi04] Gomes, F. e Viegas, C., *XEQMAT 11º ano – volume 2*, Texto Editora, Lisboa, 2004.



- [Ince56] Ince, E., *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1956.
- [Jorg04] Jorge, A.M.B. (et al.), *Infinito 11º Ano – volume 2*, Areal Editores, Porto, 2004.
- [Jorg06] Jorge, A.M.B. (et al.), *Infinito 11º Ano – volume 3*, Areal Editores, Porto, 2006.
- [Lima95] Lima, E. L., *Curso de Análise, volume 1 (8.ª edição)*, Projecto Euclides, Brasília, 1995.
- [LiGo94] Lima, Y. e Gomes, F., *Xeqmat – 11.ª Matemática*, Livro, Lisboa, 1994.
- [Mont57] Montel, P., *Leçons sur les récurrences et leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [NVA86] Neves, M.A.F., Vieira, M.T.C., Alves, A.G., “ *Livro de Texto – 12º Matemática*”, Porto Editora, Porto, 1986.
- [NVA87] Neves, M.A.F., Vieira, M.T.C., Alves, A.G., *Livro de Texto – 11º Matemática*, Porto Editora, Porto, 1987.
- [NeBr09] Neves, M.A.F., Brito, M.L.C., “ *Livro de Texto, 2º vol. – 10º Matemática*”, Porto Editora, Porto, 1993.
- [NeBr98] Neves, M.A.F. e Brito, M.L.C, *Matemática 12.º ano – Livro de Texto – 2.º vol.*, Porto Editora, Porto, 1998.
- [Neve00] Neves, M.A.F., *Sucessões – Matemática A – 11.º ano- Parte 3*, Porto Editora, Porto, 2000.
- [NGM09] Neves, M.A.F., Guerreiro, L. e Moura, A., *Sucessões – Matemática A – 11.º ano*, Porto Editora, Porto, 2009.
- [NGM09] Neves, M.A.F., Guerreiro, L. e Moura, A., *Funções III – Matemática A – 12.º ano*, Porto Editora, Porto, 2009.
- [PBGA97] Ponte, J.P., Boavida, A., Graça, M., e Abrantes, P., *O Currículo de Matemática do Ensino Secundário – Brochura Didáctica da Matemática*, Lisboa: DES do ME, 1997.



[Pont03] Ponte, J.P., *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?*. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal, 2003.

[Silv78] Silva, J. C., *Compêndio de Matemática – Ano Propedêutico - 2.º vol.*, Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica, Mafra, 1978.

[Silva94] Silva, J. C., *Princípios de Análise Matemática Aplicada*, Departamento de Matemática – FCTUC, Universidade de Coimbra, McGRAW-HILL, Lisboa, 1994.

[Silv95] Silva, J. C., *A História da Matemática e o Ensino da Matemática*. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Portugal, 1995.

[SiLe96] Silva, J. C., Leal, C. M., *Análise Matemática Aplicada – Exercícios, actividades, complementos e provas de avaliação*, Departamento de Matemática – FCTUC, Universidade de Coimbra, McGRAW-HILL, Lisboa, 1996.

[Silv97] Silva, J. C., *A História da Matemática nos novos programas de Matemática em Portugal*, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Portugal, 1997.

[Silv10] Silva, J. C., *O Pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva – uma primeira abordagem*, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Portugal, 2010.