

Aproximação Numérica de Equações Diferenciais Parciais Não Lineares com Aplicações em Finanças

Teófilo Domingos Chihaluca

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Matemática e Aplicações
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Manuel Pires Almeida
Co-orientador: Prof. Doutor José Carlos Matos Duque

Júri:
Prof. Doutora Maria do Rosário Lourenço Grossinho
Prof. Doutor Adérito Luís Martins Araújo
Prof. Doutora Maria Fernanda de Almeida Cipriano Salvador Marques
Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Pinto Rebelo

Covilhã, junho de 2021

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Dedicatória

Dedico à minha amada esposa Elizandra dos Santos e aos meus filhos.

Agradecimentos

Depois de terminar esta longa etapa, quero manifestar os meus agradecimentos a todos que contribuíram para que terminasse este trabalho, nomeadamente:

- a Deus pelo dom da vida;
- à minha esposa Elizandra e aos meus filhos Teoliane, Cassiane e Kenzo, por terem suportado as minhas longas ausências e, mesmo assim, me apoiaram muito;
- aos meus pais Joaquim Chihaluca (in memoriam) e Adelina Chapessala, por serem meus maiores mentores, principalmente no que diz respeito à minha educação;
- aos meus irmãos Isa (in memoriam), Jó, Nina, Nandy e Jofi, por terem acreditado em mim e dado muita força durante a minha longa caminhada estudantil;
- aos meus familiares em geral em, particular às minhas tias Maria, Teresa, Hilária, Nanda e ao meu primo António Jamba;
- aos meus orientadores, Prof. Doutor Rui Almeida e Prof. Doutor José Duque, pelos conhecimentos transmitidos e pela entrega e esforço face às minhas diversas lacunas para que este trabalho fosse concluído;
- ao Prof.Doutor Francisco Xavier Chitoma, Tussamba Manuel e Agostinho Bongue Nivete Pimenta por terem acreditado em mim em momentos difíceis da minha vida;
- à Escola Superior Pedagógica do Bié, em geral, e em particular ao Prof. Doutor Alfredo Maria de Jesus Paulo, pelo apoio moral;
- aos meus amigos que sempre me apoiaram, Anacleto, Belchior e Teotónio.

A todos, muito obrigado.

Este trabalho foi parcialmente apoiado pelos projetos de pesquisa: Grant NÂ UID/MAT /00212/2019 - financiado pelo FEDER através do - Programa Operacional Factores de Competitividade, FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia e Grant BID/ICI-FC/Santander Universidades-UBI/2016.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Resumo

Neste trabalho, faz-se um estudo sobre a aplicação do método de elementos finitos na resolução de uma equação diferencial parcial generalizada de Black-Scholes que surge ao calcular o preço de opções, considerando os custos de transação.

Outro objetivo deste trabalho é o estudo da EDP Delta Greek. No estudo da equação Delta de Black-Scholes não linear, supõe-se que o coeficiente de difusão da equação parabólica não linear para o preço V é uma função linear do preço do ativo subjacente da opção e do Gamma Greek V_{xx} . A existência de solução viscosa é provada, usando o *vanishing viscosity method*. Regularizando a equação, adicionando uma pequena perturbação ao problema inicial, uma sequência de soluções aproximadas u^ε é então construída e, em seguida, o método de limites fracos é aplicado para provar a convergência da sequência para a solução viscosa da equação Delta. Os problemas aproximados construídos demonstram ter boa regularidade, o que permite o uso de métodos numéricos eficientes e robustos. Discretizam-se então os problemas aproximados, utilizando o método dos elementos finitos com aproximação de grau arbitrário no espaço e o método de Crank-Nicolson no tempo. Prova-se a convergência das soluções discretas e obtém-se a ordem de convergência em função dos parâmetros de discretização. Para ilustrar os resultados teóricos e a aplicabilidade do método, são apresentados alguns resultados numéricos implementados em Matlab.

Para as opções americanas, os problemas são considerados de fronteira livre. Um termo de penalidade é acrescentado à equação para resolver a mesma em todo o domínio espacial. O método de elementos finitos com bases de Hermite são usados para discretizar na direção espacial e o método de Crank-Nicolson na direção temporal. A fronteira livre é estimada a partir da condição da primeira derivada. A eficiência e a precisão do método proposto são testadas numericamente. Neste sentido, os resultados computacionais são fornecidos para alguns modelos de opções europeias e americanas de compra e venda e estes confirmam o comportamento teórico das soluções e também são concordantes com as soluções exatas para o caso linear.

Palavras-chave

Método dos elementos finitos, método de Crank-Nicolson, equação de Black-Scholes não linear, Equação Delta, Custos de transação, Opções Europeias e Americanas, Convergência.

Abstract

We study an application of the finite element method for solving numerically a generalized partial differential Black-Scholes equation which arises when calculating option prices with transaction costs.

Another aim of this work is to study the PDE Delta Greek. When studying the nonlinear Black-Scholes Delta equation, the diffusion coefficient of the nonlinear parabolic equation for price V is assumed to be a linear function of the option underlying asset price and the Gamma Greek V_{xx} . The existence of a viscous solution is proven using the *vanishing viscosity method*. Regularizing the equation, by adding a small disturbance to the initial problem, a sequence of approximate solutions u^ε is constructed and then the method of weak limits is applied to prove the convergence of the sequence to the viscous solution of the Delta equation. The approximate problems constructed show good regularity, which allows the use of efficient and robust numerical methods. The approximate problems are then discretized using the finite element method with arbitrary degree approximation in space and the Crank-Nicolson method over time. Convergence of the discrete solutions is proved, and the convergence order is obtained in function of discretization parameters. In order to illustrate the theoretical results and the applicability of the method, some numerical results implemented in Matlab are presented.

For American options, free-bound problems are considered. A penalty term is added to the equation so that it may be solved in the enter special domain. The FEM with Hermite polynomials is used for spatial discretization in the spatial direction and the Crank-Nicolson method for temporal discretization. The free boundary is estimated from the condition of the first derivative. The efficiency and accuracy of the method proposed are tested numerically. Computational results are presented for some European and American trading option models, and these confirm the theoretical behavior models of the solutions and are also in agreement with the exact solutions in the linear case.

Keywords

Finite element method, Crank-Nicolson method, non-linear Black-Scholes equation, Delta equation, Transaction costs, European and American options, Convergence.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Ferramentas Teóricas e Matemáticas	7
2.1	Desigualdades elementares	7
2.2	Definições e conceitos básicos	7
2.3	Distribuições	10
2.4	Espaços de Lebesgue	10
2.5	Espaços de Sobolev	12
2.6	Imersões	13
2.7	Espaços de Bochner	14
2.8	Teoremas fundamentais	15
2.9	Processo estocástico	17
2.10	Integrais estocásticos	19
2.11	Equações diferenciais	21
2.12	Equações diferenciais estocásticas	22
2.13	Equações diferenciais parciais	24
2.14	Aplicação do cálculo estocástico em finanças	26
2.15	Obtenção da equação diferencial de Black-Scholes	27
2.16	Soluções viscosas	28
3	Opções e Modelos de Volatilidade com custos de transação	33
3.1	Opções	33
3.1.1	Opções de compra europeia	33
3.1.2	Opções de venda europeias	34
3.1.3	Opções de compra americanas	34
3.1.4	Opções de venda americanas	35
3.2	A fórmula para o preço de opção de compra europeia	36
3.3	Dedução explícita de uma família de soluções da equação de Black-Scholes linear	38
3.4	Modelos de Volatilidade com custos de transação	40
3.5	Modelo de Leland	41
3.6	Modelo de Parás e Avellaneda	41
3.7	Modelo de Boyle e Vorst	41
3.8	Modelo de Hodges e Neuberger	41
3.9	Modelo de Barles e Soner	42
3.10	Modelo de Kratka	43
4	Equação Delta de Black-Scholes não linear	45
4.1	Equação Delta	45
4.2	Regularização	47
4.3	Estimativas a priori	50
4.4	Convergência da solução viscosa	64
4.5	Discretização do problema regularizado	66
4.5.1	Discretização no tempo	70
4.5.2	Aproximação da solução inicial da equação de Black-Scholes	75

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

4.5.3	Resultados numéricos	76
5	Equação de Black-Scholes não linear	79
5.1	Opções europeias	79
5.1.1	Discretização no espaço	80
5.1.2	Discretização no tempo	86
5.1.3	Resultados numéricos	86
5.2	Opções americanas	89
5.2.1	Discretização no espaço	89
5.2.2	Discretização no tempo	90
5.2.3	Resultados numéricos	91
6	Conclusão e Trabalho Futuro	99
	Bibliografia	101

Lista de Figuras

3.1	Simulação numérica de Ψ .	43
4.1	Análise de convergência para ε .	77
4.2	Análise de convergência para h com $k = 1$.	77
4.3	Análise de convergência para h com $k = 2$.	77
4.4	Análise de convergência para δ .	77
4.5	Derivada para diferentes valores de a .	78
4.6	Solução para diferentes valores de a .	78
5.1	Análise da convergência para h e para δ .	87
5.2	Solução obtida.	87
5.3	Análise da convergência para h .	87
5.4	Solução (à esquerda) e sua derivada (à direita) para equação de Black-Scholes não-linear com diferentes custos de transação para uma opção de compra europeia.	88
5.5	Solução (à esquerda) e sua derivada (à direita) para equação de Black-Scholes não-linear com diferentes custos de transação para uma opção de venda europeia.	88
5.6	Solução obtida (à esquerda) e a derivada (à direita) para equação de Black-Scholes linear, para opções de compra.	92
5.7	Posição da fronteira livre para o caso linear, para opção de compra.	92
5.8	Solução obtida (à esquerda) e a derivada (à direita) para equação de Black-Scholes linear, para opções de venda.	93
5.9	Posição da fronteira livre para o caso linear, para opção de venda.	94
5.10	Análise da convergência para h .	95
5.11	Posição da fronteira livre $S_f(t)$ para o modelo de Leland com vários números de Le (à esquerda) e para o modelo de Barles e Soner para vários valores de a (à direita).	96
5.12	Posição da fronteira livre $S_f(t)$ para o modelo de Kratka com vários valores de M (à esquerda) e a posição da fronteira livre para os vários modelos de custos de transação estudados (à direita).	96
5.13	Solução e a derivada para os diferentes modelos estudados.	97

Lista de Tabelas

5.1	Comparação da precisão para opções de venda americanas	95
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

A avaliação de opções com base em processos estocásticos data de 1877, quando Charles Castelli escreveu o livro "*The Theory of Option in Stocks and Shares*". Duas décadas depois, Louis Bachelier, em "*Théorie de la spéculation*", apresentou a primeira forma analítica para o cálculo do preço de uma opção. Em 1955, no seu artigo não publicado intitulado "*Brownian Motion in the Stock Market*", Paul Samuelson, prémio Nobel de economia em 1970, mostrou que o preço de um ativo pode ser modelado por um processo chamado Movimento Browniano Geométrico.

Em 1962, A. James Boness apresentou uma dissertação intitulada "*Theory and Measurement of Stock Option Value*", onde mostrava um modelo de avaliação de opções que representou um salto relevante em relação aos seus antecessores e serviu de base aos trabalhos desenvolvidos por Black e Scholes. Desde a sua criação em 1973, o modelo desenvolvido por Fisher Black e Myron Scholes, continua a ser um dos preferidos e que fornece uma base para a teoria das opções financeiras. A equação linear de Black-Scholes é dada por

$$0 = V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV, \quad S > 0, \quad \tau \in]0, T[, \quad (1.1)$$

onde V é o valor da opção, T a data de vencimento, S o preço do ativo subjacente, σ a volatilidade e r a taxa de juros sem riscos.

A equação (1.1) permite avaliar o preço das opções europeias e é obtida partindo de alguns pressupostos que a seguir se enumeram:

- (i) O valor financeiro do ativo subjacente à opção pode ser modelado através de um movimento Browniano geométrico;
- (ii) Não existem custos de transação associados à gestão de portfólios de ativos financeiros, nem taxas a pagar no mercado;
- (iii) O mercado não permite oportunidade de arbitragem;
- (iv) É permitido fazer *short selling*;
- (v) Existe uma taxa isenta de riscos que é constante ao longo da vida da opção, ao qual é possível emprestar e pedir emprestado a essa mesma taxa qualquer ativo financeiro;
- (vi) A volatilidade do ativo subjacente é conhecida e permanece constante durante a vida da opção;
- (vii) A transação do ativo financeiro é feita em tempo contínuo e as mudanças no seu preço são também em tempo contínuo;
- (viii) Podem obter-se partes fraccionárias de um ativo;
- (ix) O ativo financeiro não paga dividendos durante a vida da opção.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

O modelo clássico de Black-Scholes é notável por ter uma solução explícita para opções europeias de compra e venda. Muitos pesquisadores tentaram obter a solução da equação de Black-Scholes analítica e/ou numericamente, usando vários métodos. Para um resumo dos métodos clássicos (Binomial, Monte Carlo, Diferenças finitas, elementos finitos), ver [41] e [54], por exemplo.

Para outras abordagens pode referir-se por exemplo, Khatskevich que em [36] obteve o preço de exercício de uma opção na forma de uma série polinomial de Legendre. Em [28] Edeki, Ugbebor e Owoloko propuseram para o cálculo do valor de uma opção um método conhecido como *Projected Differential Transformation Method*. Bohner, Sánchez e Rodríguez [13] aplicaram o método de decomposição de Adomian.

Em [35] fez-se o estudo da equação de Black-Scholes linear para opções de compra europeias e americanas. Na discretização no espaço utilizaram o método de elementos finitos e, no tempo, o método de Euler explícito. Representaram a solução analítica, resolvendo o problema, utilizando a transformada de Fourier; numericamente utilizaram o método dos elementos finitos e fizeram um estudo comparativo com o método das diferenças finitas. Embora os métodos dos elementos finitos possam parecer, à primeira vista, algo complexo para finanças, onde uma grande classe de problemas é unidimensional no espaço, são muito flexíveis e oferecem boas aproximações (ver [54], por exemplo).

A equação de Black-Scholes é muito eficaz em mercados sem custos de transação, mas os custos de transação podem surgir na negociação de títulos, por exemplo. Apesar de serem geralmente pequenos, podem levar a um aumento no preço da opção, caso em que a metodologia de atribuição do preço de Black-Scholes não é válida, uma vez que não existirá cobertura perfeita. Consequentemente, diferentes modelos foram propostos para modificar a equação (1.1) a fim de acomodar os custos de transação como, por exemplo, os referenciados em [6, 40, 43]. Nesses modelos, a volatilidade constante é substituída por uma volatilidade modificada que pode depender do tempo, do preço do ativo, do valor da opção e das suas derivadas. O modelo resultante é uma equação não linear na forma não-divergente.

Para esta equação não linear não existe solução explícita (conhecida), só foi provado que tem uma solução viscosa [6] e as técnicas numéricas disponíveis são muito reduzidas em relação ao modelo linear.

Em 2003, Fournié e Jungel [26] deduziram um esquema de diferenças finitas compactas de alta ordem para o modelo de Black-Scholes não-linear, com custos de transação apresentados em [6], que provou ser incondicionalmente estável e não oscilatório. Recentemente, foram feitos alguns estudos sobre a solução numérica da equação de Black-Scholes com custos de transação, onde foram aplicados os métodos das diferenças finitas.

J. Ankudinova e M.Ehrhardt [4] fizeram um estudo comparativo entre modelos com custos de transação e o modelo linear. A influência dos custos de transação modelados pelas volatilidades dadas pelos modelos de Leland, Barles e Soner e Krakta foi calculada pelo método de Crank-Nicolson no tempo e pelo método das diferenças finitas no espaço. Estudaram a diferença entre o preço da opção de compra europeia com custos de transação e o preço da opção de compra europeia sem custos de transação. Os resultados numéricos obtidos indicam um desvio de preço economicamente significativo entre o modelo padrão de Black-Scholes (linear) e os modelos não lineares (com custos de transação).

Company, Jódar e Pintos [17] construíram e analisaram outro esquema de diferenças finitas para o modelo de Black-Scholes não linear, deduzido por Barles e Soner. Analisaram a consistência e estabilidade do método e apresentaram alguns exemplos numéricos.

D. Lesmana e S. Wang [44] desenvolveram um método numérico para uma equação diferencial parcial parabólica não linear resultante da atribuição do preço de opções europeias com custos de transação. O método baseia-se num esquema de diferenças finitas *upwind* para discretização no espaço, e um esquema totalmente implícito para discretização no tempo. A convergência da solução do sistema discretizado para a solução viscosa do problema contínuo foi provado, mostrando que o esquema é consistente, monótono e estável. Propuseram um método iterativo de Newton para resolver o sistema algébrico não linear e mostraram que a solução do sistema é numericamente estável. Foram feitas simulações para ilustrar a precisão e a utilidade do método e observaram-se ordens de convergência 1.6 e 2 nas normas discretas L^∞ e L^2 , respetivamente. Os resultados também mostraram que o preço de uma opção europeia é uma função crescente do parâmetro "a" do custo de transação.

Radoslav Valkov em [55] apresentou uma análise de convergência, usando o *positivity-preserving fitted finite volume element method* FVEM para equação de Black-Scholes generalizada transformada num intervalo finito, degenerado em ambos os pontos da fronteira. Inicialmente, formulou o FVEM como o método de elementos finitos de Petrov-Galerkin, usando uma discretização no espaço, anteriormente proposta pelo autor em [56]. Foi estabelecida a coercividade de Garding da correspondente forma discreta e bilinear. Obteve-se a estabilidade e limites de erro para a solução do sistema totalmente discreto. A análise do impacto da transformação do domínio finito na solução numérica do problema original foi feita.

O estudo de (1.1) para uma opção de compra americana seria redundante, pois o valor de uma opção de compra americana é igual ao valor de uma opção de compra europeia, se nenhum dividendo for pago e a volatilidade for constante. Para tornar o modelo mais realista, consideraremos uma modificação para opções americanas, em que S paga um dividendo contínuo q , que é dada por

$$0 = V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV, \quad S > 0, \quad \tau \in]0, T[, \quad (1.2)$$

Devido ao facto de que uma opção americana de compra e venda possa ser exercida a qualquer momento até à expiração, o domínio de S deve ser dividido em duas regiões, a região de paragem onde a opção é exercida e a região de continuidade onde a opção é mantida, dando origem ao aparecimento da fronteira livre que separa estas duas regiões. Além disso, a equação de Black-Scholes (1.2) é válida apenas na região de continuidade. O método binomial introduzido por Cox, Ross, e Rubinstein [19] é um método simples e eficaz para avaliar as opções americanas sem utilizar as equações (1.1) e (1.2). No que diz respeito à solução numérica do modelo de Black-Scholes para opções americanas, existem duas abordagens principais: o método da penalidade e o método de fixação da fronteira.

Na abordagem do método da penalidade, a fronteira livre é removida pela adição de um termo de penalidade à equação de Black-Scholes. O problema pode então ser resolvido em todo o domínio com métodos robustos (ver [34], [37] e [60], por exemplo).

No método de fixação da fronteira, é feita uma mudança de variáveis para transformar o problema numa equação diferencial parabólica não linear num domínio fixo (ver, por exemplo [31], [47] e [58] para um estudo comparativo).

Recentemente, foram feitos esforços para adaptar os métodos conhecidos à equação de Black-Scholes não linear com custos de transação. Com a volatilidade não constante, não há solução explícita conhecida; entretanto a existência e unicidade da solução viscosa

é provada em [8],[9].

Ševčovič [21], propôs uma transformação num domínio fixo para o problema não linear de calcular o preço de uma opção americana, que foi investigado em alguns artigos recentes (ver [4] e [23], por exemplo). Como a equação transformada contém um termo convectivo forte, o método de divisão do operador foi usado para superar as dificuldades numéricas. Além disso, a fim de determinar completamente o sistema de equações que calcula o valor da opção, uma equação adicional para a posição da fronteira livre teve de ser deduzida.

Egorova et al. [29] usaram um novo método de transformação, onde a fronteira foi forçada para seguir uma certa trajetória conhecida no tempo. O novo problema transformado foi resolvido por vários métodos de diferenças finitas, como esquemas explícitos e implícitos. Foram aplicados os métodos de Broyden e Schubert como modificação do método de Newton, para o caso da equação não linear. Um método explícito de direção alternada com precisão de segunda ordem no tempo foi usado como exemplo para demonstrar a técnica em opções americanas com custos de transação. Os resultados numéricos mostraram a eficiência e a ordem de convergência destes métodos.

Em [22] foi apresentado um novo método por meio de uma transformação do problema de fronteira livre para desigualdade variacional de Gama com a nova variável, a opção Gama. Foi aplicado um *modified projective successive over-relation method*, a fim de se construir um esquema numérico efetivo para a discretização da desigualdade variacional Gama. Finalmente, foram apresentados vários exemplos computacionais para a equação de Black-Scholes não-linear, para atribuição de preços das opções americanas de compra sob a presença de custos de transação.

Barles e Soner [6] provaram a existência de soluções viscosas para o seu modelo e fizeram algumas simulações usando o método de diferenças finitas, mas nenhuma análise de convergência foi realizada. Entretanto, sabe-se que esquemas explícitos têm a desvantagem de condições restritivas nos parâmetros de discretização (por exemplo, a razão entre o tempo e espaço) serem necessárias para se obter esquemas estáveis e convergentes. Além disso, a ordem de convergência é 1 (um) no tempo e 2 (dois) no espaço. Pooley et al. [49] estudaram numericamente a convergência de alguns esquemas de diferenças finitas aplicados a uma equação de Black-Scholes não linear e apresentaram alguns exemplos onde os esquemas de discretização não monótonos (como o de Crank-Nicolson) podem convergir para soluções incorretas ou levar à instabilidade. Em [27], os autores combinam técnicas de esquemas de diferenças compactas de alta ordem para construir soluções numéricas da equação não linear transformada, usando a transformação $x = \ln(S/K)$ com valores fixos do termo de volatilidade não linear para fazer a formulação linear. Essa transformação faz com que o domínio espacial $[0, \infty[$ se transforme em $] - \infty, \infty[$ e, nos cálculos, esse domínio infinito deve ser truncado, o que essencialmente omite a degeneração da equação em $S = 0$. Mostraram que a solução utilizando o método das diferenças finitas converge local e uniformemente para a única solução viscosa da equação.

Company, Jodar e Pintos, em [18], propuseram uma técnica de semi-discretização que aproxima a equação não-linear a sistema de equações diferenciais ordinárias e resolveram o sistema usando o esquema de Euler implícito. Para que o esquema de alta ordem funcione, é usada uma técnica de suavização da condição do *payoff*, que, essencialmente, altera a natureza do problema de atribuição do preço.

As derivadas parciais da solução, as *Greeks* são consideradas de grande importância nas

finanças. Em particular, a primeira derivada espacial, chamada *Delta Greek* em finanças, é a chave para o processo de *hedge* no tempo, isto é, a projeção de portfólio contra movimentos do mercado, na medida em que isto segue dos argumentos de *hedging* da equação Black-Scholes. Existem poucos estudos relacionados com o cálculo da *Delta Greek* diretamente. Em [56], apresenta-se uma abordagem numérica da *Delta Greek* e o preço da opção na equação de Black-Scholes-Barenblatt. Em [38], desenvolveram um método numérico *upwind* para calcular a *Delta Greek* do problema não linear. Recentemente, Koleva e Vulkov [39] construíram e analisaram a monotonia e a preservação do sinal de esquemas de diferenças finitas de equação Delta. Propuseram alguns procedimentos iterativos de Newton e Picard para a resolução dos sistemas de equações algébricas não lineares.

A teoria das soluções viscosas contínuas para equações elípticas e parabólicas de segunda ordem totalmente não lineares foi introduzida por Crandall-Lions para as equações de Hamilton-Jacobi e está bem estabelecida atualmente. Para mais detalhes sobre essa teoria, aconselhamos a leitura de [20]. Entretanto, para as equações Delta, como a condição inicial é descontínua, não é de se esperar uma solução contínua e as teorias convencionais de soluções viscosas não se aplicam. Existem várias definições de soluções viscosas descontínuas, mas a maioria delas é bastante ad hoc. Em [16], podemos ver as últimas pesquisas desenvolvidas sobre a unicidade e regularidade das soluções descontínuas da equação de Hamilton-Jacobi, com dados iniciais descontínuos que são contínuos fora de um conjunto de medida nula. Os autores provaram que as soluções descontínuas do problema são únicas quando a condição inicial é contínua em todos os lugares. Esclareceram as conexões entre as soluções descontínuas de diferentes noções. Geralmente, um método de alta ordem exige que a solução para a EDP seja suficientemente regular para atingir a ordem de convergência esperada. No entanto, sabe-se que a equação de Black-Scholes não linear, geralmente, não possui soluções clássicas regulares, mas apenas soluções viscosas. Portanto, uma solução numérica para a equação de Black-Scholes não linear por um esquema numérico de alta ordem não é necessariamente mais preciso do que o de um esquema de discretização de primeira ordem, principalmente devido à não regularidade dos dados iniciais e à solução exata. Como as *Greeks* são relevantes para a análise quantitativa, são necessários métodos numéricos confiáveis para a atribuição do preço das opções, que não apenas proporcionem uma boa aproximação ao preço, mas também os seus derivados.

Almeida et al., em [1], [2], [24], estabeleceram a convergência, propriedades e ordens de erro para as soluções totalmente discretas de uma classe de equações não-lineares de difusão e reação não-local, usando um método de elementos finitos linearizado e de Crank-Nicolson-Galerkin com aproximações polinomiais de grau arbitrário.

Em [12], Böhmer apresentou um método intuitivo de elementos finitos não padronizado em C^1 , para aproximar a solução clássica de uma equação elíptica geral não linear de segunda ordem. Usando alguns argumentos intrincados de consistência e estabilidade, provou, sob certas condições, a existência de uma solução única e também derivou estimativas de erros de ordem ideal quando u for suficientemente regular.

Um dos objetivos deste trabalho é estudar a aplicação do método dos elementos finitos de [1], [3] e [24] à equação de Black-Scholes em opções europeias e americanas com custos de transação. Ainda neste trabalho, pretendemos fazer o estudo da convergência do método de elementos finitos complementado com o método de Crank-Nicolson e, por fim, fazer a comparação dos resultados computacionais obtidos com o uso dos diferentes métodos.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Neste trabalho, estudamos uma simplificação da equação de Black-Scholes não-linear proposta por Barles e Soner [6], com foco na correspondente equação Delta. Provamos a existência e unicidade da solução viscosa descontínua para a equação Delta. Em primeiro lugar, regularizamos a equação adicionando um pequeno parâmetro de perturbação e, em seguida, aplicamos o método de limites fracos para provar a convergência das soluções clássicas do problema regularizado para a solução viscosa da equação Delta.

Ainda neste trabalho, e isto para o caso das opções de compra e venda europeias, aplicaremos o método de Böhmer com bases constituídas por polinómios de Hermite cúbicos de classe C^1 para a discretização no espaço e o método Crank-Nicolson para discretização no tempo. Alguns exemplos serão apresentados para testar a eficiência e a precisão do método proposto.

No estudo da equação de Black-Scholes não linear para opções americanas, vamos usar o método da penalidade. Para a discretização no espaço usaremos, os polinómios cúbicos de Hermite e para a discretização no tempo usaremos o método de Crank-Nicolson.

As razões para usarmos os métodos de elementos finitos com bases de Hermite, são a sua regularidade, o seu pequeno erro de truncatura, a regularidade intrínseca das derivadas parciais e a ausência de custos adicionais significativos para obter as *Greeks*.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2, são definidos alguns conceitos matemáticos básicos e notações, bem como conceitos inerentes ao cálculo estocástico aplicado à teoria financeira, equações diferenciais, que serão fundamentais nos capítulos seguintes. No capítulo 3, são lembrados os conceitos de opções *Vanilla* e também definimos alguns modelos de custos de transação que serão muito importantes para o nosso estudo. No capítulo 4, apresentamos uma versão da equação de Black-Scholes a que chamamos de equação Delta. Num domínio fixo, define-se o problema regularizado, introduzindo um parâmetro ε . Demonstram-se estimativas para a solução do problema regularizado em função de ε e prova-se que o problema regularizado possui solução viscosa. É deduzida a ordem de convergência do método de elementos finitos de Lagrange, quando aplicado ao problema regularizado. Discretiza-se o problema no espaço e tempo e provam-se as estimativas do erro e ordem de convergência para as soluções discretas. No final do capítulo, são apresentados exemplos da implementação do método em Matlab. No capítulo 5, estuda-se a equação não linear de Black-Scholes com opções europeias e americanas. A fronteira livre é calculada juntamente com a solução do problema. Para discretização do problema no espaço são utilizados polinómios de Hermite e na discretização no tempo o método de Crank-Nicolson. Finalmente, são apresentados exemplos de implementação do método em Matlab.

Alguns dos resultados obtidos neste trabalho, foram apresentados em seminários na Universidade da Beira Interior como em conferências internacionais "17nd International Conference on Computational and mathematical Methods in Science and engineering: Volume I-VI, Editor: J.Vigo-Aguiar: Proceeding. ISSN:2312-0177.ISSN-L:2312-0177. ISBN: 978-84-617-8694-7, em Cadiz, Julho, 2017. Espanha" e "2nd International Conference on Computational Finance ISEG, Universidade de Lisboa, Editors: Manuel Guerra e João Janela: Proceeding. Lisboa, Setembro 4-8, 2017. Portugal".

Capítulo 2

Ferramentas Teóricas e Matemáticas

Neste capítulo, introduzem-se as noções matemáticas e as notações usadas ao longo do trabalho. São incluídos alguns resultados clássicos bem conhecidos da Análise que, ao enunciá-los aqui, torna a leitura do trabalho mais confortável. Os resultados são apenas enunciados, pois as demonstrações estão em grande parte dos manuais de Análise Matemática e Análise Funcional (ver resumos em [15], [30] e [53], por exemplo).

Apresentamos, também neste capítulo, as principais diretrizes do cálculo estocástico. Primeiro, resumimos os principais conceitos e resultados associados aos processos estocásticos, introduzimos o integral estocástico, o lema ou fórmula de Itô, equações diferenciais e equação diferencial estocástica. Fazemos a conexão entre as equações diferenciais estocástica e as equações diferenciais parciais. Uma das principais aplicações do cálculo estocástico em Finanças é feita com a equação de Black-Scholes (Ver [10], [46], [50], [51] e [57]). E, no final do capítulo, abordamos questões relacionadas com as soluções de equações diferenciais (ver [20], [42] e [45]).

2.1 Desigualdades elementares

De seguida, apresentam-se algumas desigualdades fundamentais que são muitas vezes usadas nas demonstrações. Ao longo deste trabalho, denotam-se as constantes simplesmente por C , independentemente do seu valor.

Lema 2.1. (Cauchy) Sejam $a, b \geq 0$ e $\epsilon > 0$ números reais, então,

$$ab \leq \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon}.$$

Lema 2.2. (Young) Sejam $a, b \geq 0$, $1 < p, p' < +\infty$ e $\epsilon > 0$ números reais, então,

$$ab \leq \frac{\epsilon a^p}{p} + \frac{\epsilon^{1-p'} b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Lema 2.3. (Desigualdade Triangular) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, então,

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, a e b tiverem o mesmo sinal

2.2 Definições e conceitos básicos

Se A e B são dois conjuntos e f é uma função definida em A , com valores em B , então escreve-se $f : A \rightarrow B$. Se $M \subset A$, $f|_M$ denota a restrição de f em M . A composição de funções é representada por $f \circ g$ e definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Definição 2.4. Seja X um espaço normado e x um ponto em X . Dado $r > 0$ um número real, definimos bola aberta e bola fechada da seguinte forma:

- A bola aberta de centro x e raio r é o conjunto, denotado por $B_r(x)$, dos pontos de X cuja distância ao ponto x é menor do que r . Ou seja

$$B_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$$

- A bola fechada de centro x e raio r é o conjunto, denotado por $\overline{B}_r(x)$, dos pontos de X que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto x . Ou seja

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}$$

Definição 2.5. (Conjunto limitado) Um conjunto $M \subset X$ é limitado se existirem $x \in X$ e $r > 0$ tais que $M \subset \overline{B}_r(x)$.

Definição 2.6. (Sucessão limitada) Uma sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada se existir $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.7. (Interior) Um ponto $a \in M$ é ponto interior se existir $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset M$. O conjunto dos pontos interiores de M diz-se o interior de M e denota-se por $int(M)$. O conjunto M é aberto se $M = int(M)$.

Definição 2.8. (Convergência forte) Uma sucessão $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge (fortemente) para $x \in X$, quando $k \rightarrow \infty$, se,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_X = 0.$$

Neste caso, escreve-se,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, \text{ ou simplesmente } x_k \rightarrow x.$$

Definição 2.9. (Fecho) O fecho do conjunto $M \subset X$ é o conjunto \overline{M} definido por:

$$\overline{M} = \{x \in X : \text{existe uma sucessão } \{x_k\} \subset M \text{ tal que } x_k \rightarrow x\}.$$

O conjunto M é fechado se $M = \overline{M}$.

Definição 2.10. (Fronteira) O conjunto,

$$\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)}$$

é chamado a fronteira de M .

Definição 2.11. (Conjunto conexo) Um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é dito conexo se dois quaisquer pontos de Ω puderem ser unidos por uma linha poligonal totalmente contida em Ω .

Definição 2.12. (Domínio) Um domínio é um conjunto aberto e conexo.

Definição 2.13. (Continuidade forte) Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$\|x - a\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_Y < \epsilon.$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Definição 2.14. ($C^k(\Omega)$) Para $k \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $C^k(\Omega)$ representa o conjunto de todas as funções definidas em Ω e que têm todas as derivadas até à ordem k contínuas em Ω .

Definição 2.15. (Hölder-continuidade, Lipschitz-continuidade) Uma função $f : X \rightarrow Y$, é Hölder-contínua com expoente $\mu \in]0, 1]$ se existir uma constante C , tal que:

$$\|f(a) - f(b)\|_Y \leq C\|a - b\|_X^\mu, \quad a, b \in X.$$

Se $\mu = 1$ diz-se que f é Lipschitz-contínua. E se $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é aberto, então $C^{k,\mu}(\Omega)$ denota o conjunto das funções de $C^k(\Omega)$ cuja derivada de ordem k é Hölder-contínua em Ω , com expoente μ .

Definição 2.16. (Dual) O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos em X é chamado dual de X e denotado por X^* .

Proposição 2.17. O conjunto X^* , com a norma,

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \frac{|\langle f, u \rangle|}{\|u\|_X}, \quad f \in X^*,$$

é um espaço de Banach.

Definição 2.18. (Espaço reflexivo) Um espaço de Banach X diz-se reflexivo se $(X^*)^* = X$.

Definição 2.19. (Convergência fraca) Seja X um espaço linear normado e $\{u_n\} \in X$, diz-se que $\{u_n\}$ converge fracamente para $u \in X$ se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u), \quad \forall f \in X^*.$$

Neste caso, escreve-se $u_n \rightharpoonup u$.

Teorema 2.20. Se $u_n \rightarrow u$ em X , então $u_n \rightharpoonup u$ em X .

Teorema 2.21. Se X é um espaço de Banach e $\{u_n\} \in X$ converge fracamente para $u \in X$, então $\{u_n\}$ é limitada.

Definição 2.22. (Operador compacto) Um operador linear limitado $A : X \rightarrow Y$ é dito compacto se para cada sucessão limitada $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in X$ existe uma subsucessão $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty \in \{u_n\}_{n=1}^\infty \in X$, tal que $\{A(u_{n_k})\}$ converge fortemente em Y .

Observação 2.23. Um operador compacto também pode ser denominado operador linear completamente contínuo.

Definição 2.24. (Convergência fraca *) Seja X um espaço linear normado, X^* o dual de X e $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$. Diz-se que f_n converge fracamente-*, e escreve-se $f_n \xrightarrow{*} f$, se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = f(u), \quad \forall u \in X.$$

2.3 Distribuições

Seja Ω um domínio de \mathbb{R}^d .

Definição 2.25. ($C_0^\infty(\Omega)$) Define-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço linear das funções $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ cujo suporte,

$$\text{supp } v = \overline{\{x : v(x) \neq 0\}}$$

é um conjunto compacto de Ω .

Denota-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o dual de $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 2.26. (Distribuição) Os elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ são chamados funções generalizadas ou distribuições.

Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, considera-se $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Definição 2.27. (Derivada distributiva) Uma distribuição $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é dita derivada distributiva (ou generalizada) de ordem α da distribuição $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se,

$$\langle D^\alpha f, v \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha v \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 2.28. Toda a distribuição tem derivada de qualquer ordem.

Observação 2.29. As derivadas distributivas, até à ordem k , de uma função $f \in C^k(\bar{\Omega})$ são iguais às derivadas de f , por isso denotar-se-á por,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

tanto a derivada distributiva como a derivada clássica.

2.4 Espaços de Lebesgue

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável à Lebesgue. Denota-se por $|A| = \text{meas}(A)$ a medida de Lebesgue de A .

Diz-se que duas funções, f_1 e f_2 , mensuráveis definidas em A , são equivalentes se diferirem num conjunto de medida nula. Neste caso, escreve-se $f_1 = f_2$ qtp (quase em toda a parte) em A ou $f_1(x) = f_2(x)$ pqt (para quase todo) $x \in A$.

Definição 2.30. (Espaço L^p) Para $p \in [1, +\infty[$, $L^p(A)$ é o espaço linear de todas as (classes de equivalência das) funções u mensuráveis em A para as quais,

$$\int_A |u|^p dx < \infty.$$

Proposição 2.31. O espaço $L^p(A)$ equipado com a norma,

$$\|u\|_{L^p(A)} = \left(\int_A |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

é um espaço de Banach.

Definição 2.32. (Espaço L^∞) $L^\infty(A)$ é o espaço linear de todas as (classes de equivalência das) funções u em A para as quais:

$$\text{ess sup}(u) = \inf\left\{ \sup_{x \in A \setminus Z} |u(x)| : Z \subset A, \text{meas}(Z) = 0 \right\} < \infty.$$

Proposição 2.33. O espaço $L^\infty(A)$, equipado com a norma:

$$\|u\|_{L^\infty(A)} = \text{ess sup}(u),$$

é um espaço de Banach.

Proposição 2.34. Os espaço $L^p(X)$ têm as seguintes propriedades:

- Se $\Omega \subset X$ é um domínio, então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
- **(Desigualdade de Minkowski)**

$$\|u + v\|_{L^p(X)} \leq \|u\|_{L^p(X)} + \|v\|_{L^p(X)}, \quad \forall u, v \in L^p(X), 1 \leq p \leq +\infty.$$

- **(Desigualdade de Hölder)**

$$\int_G |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(X)} \|v\|_{L^{p'}(X)}, \quad 1 \leq p, p' \leq +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$\forall u \in L^p(X), v \in L^{p'}(X).$$

- O espaço $L^2(X)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar:

$$(u, v) = \int_X uv dx, \quad u, v \in L^2(X).$$

- Se $\text{meas}(X) < \infty$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $L^q(X) \subset L^p(X)$ e,

$$\|u\|_{L^p(X)} \leq (\text{meas}(X))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(X)}, \quad \forall u \in L^p(X).$$

- Sejam,

$1 \leq p \leq r \leq q \leq +\infty$ e $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, e $u \in L^p(X) \cap L^q(X)$ então $u \in L^r(X)$ e,

$$\|u\|_{L^r(X)} \leq \|u\|_{L^p(X)}^\alpha \|u\|_{L^q(X)}^{1-\alpha}.$$

Definição 2.35. Diz-se que $u \in L_{loc}^p(X)$ se $u|_A \in L^p(A)$ para todo o conjunto limitado $A \subset X$, tal que $\bar{A} \subset X$.

Proposição 2.36. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $u_n \rightarrow u$ em $L^p(X)$, então existe uma subsucessão $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ pqt $x \in X$.

Lema 2.37. Seja A um aberto limitado de \mathbb{R}^d , g_k e g funções de $L^q(A)$, $1 < q < \infty$ tais que:

$$\|g_k\|_{L^q(A)} \leq C, \quad g_k \rightarrow g, \quad \text{qtp em } A,$$

então $g_k \rightarrow g$ em $L^q(A)$.

2.5 Espaços de Sobolev

Definição 2.38. ($W^{k,p}(\Omega)$) Seja $k \geq 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Denota-se por $W^{k,p}(\Omega)$ o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que as suas derivadas distributivas até à ordem k são também elementos de $L^p(\Omega)$, ou seja,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| = 0, \dots, k\}.$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ pode ser equipado com a norma,

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^k \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \text{ess sup}_\Omega |D^\alpha u|.$$

Define-se também em $W^{k,p}(\Omega)$ a seminorma,

$$|u|_{W^{k,p,j}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty \text{ e } 0 \leq j \leq k.$$

Proposição 2.39. Os espaços $W^{k,p}$ têm as seguintes propriedades:

- Para $1 \leq p \leq \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.
- O espaço $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto escalar,

$$(u, v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^k D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

- Para $1 \leq p < \infty$, $C^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.

Definição 2.40. ($W_0^{k,p}(\Omega)$)

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Neste trabalho, interpreta-se $W_0^{k,p}(\Omega)$ como o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que $D^\alpha u = 0$ em $\partial\Omega$ para todo $|\alpha| \leq k-1$. Denota-se também $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Observação 2.41. $|\cdot|_{W^{k,p,k}(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{k,p}(\Omega)$. Em particular, denota-se,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 2.42.

$$L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) \supset W^{1,p}(\Omega) \supset W^{2,p}(\Omega) \supset \dots$$

Definição 2.43. ($W^{-k,p'}(\Omega)$) Se $1 \leq p \leq \infty$, denota-se por $W^{-k,p'}(\Omega)$ o espaço dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e por $H_0^{-k}(\Omega)$ o dual de $H^k(\Omega)$.

2.6 Imersões

Definição 2.44. Sejam $X \subset Y$ dois espaços lineares normados, com as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ respetivamente. Define-se o operador identidade por:

$$\begin{aligned} I : X &\rightarrow Y \\ u &\rightarrow I(u) = u \end{aligned}$$

Definição 2.45. (Imersão contínua) Se I é contínuo, então diz-se que é uma imersão contínua de X em Y e escreve-se $X \hookrightarrow Y$.

Proposição 2.46. A continuidade da imersão I é equivalente à existência de uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Definição 2.47. (Imersão compacta) Se I é completamente contínuo, então diz-se que I é uma imersão compacta e escreve-se $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Teorema 2.48. Sejam X e Y dois espaços lineares normados, então,

$$X \hookrightarrow Y \Rightarrow Y^* \hookrightarrow X^*$$

e

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y \Rightarrow Y^* \hookrightarrow\hookrightarrow X^*.$$

Teorema 2.49. Sejam $k \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio de Lipschitz e limitado.

- Se $k < \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$.
- Se $k = \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty[$.
- Se $\frac{d}{p} < k < \frac{d}{p} + 1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,k-d/p}(\bar{\Omega})$.
- Se $k = \frac{d}{p} + 1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha \in]0, 1[$.
- Se $k > \frac{d}{p} + 1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\bar{\Omega})$.

Teorema 2.50. Sejam $k > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio de Lipschitz e limitado.

- Se $k < \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$.
- Se $k = \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty[$.
- Se $k > \frac{d}{p}$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$.

Teorema 2.51. (Desigualdade de Poincaré) Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

onde C depende apenas de Ω .

2.7 Espaços de Bochner

As funções que descrevem problemas evolutivos são, geralmente, da forma $u = u(x, t)$, onde $t > t_0$ é o tempo e $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ é o espaço. Por vezes, é conveniente separar as variáveis considerando u uma função que depende do tempo e tem valores num espaço de Banach. Então, se $u = u(x, t)$, considere-se a função $u(t) = u(\cdot, t)$ que a cada t faz corresponder o valor $u(t)$ que é uma função de x que pertence a um determinado espaço de funções.

Definição 2.52. ($L^p(a, b; X)$) Seja X um espaço de Banach. Para $1 \leq p \leq \infty$ define-se $L^p(a, b; X)$ como sendo o espaço das funções $u : [a, b] \rightarrow X$, tais que:

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ para } 1 \leq p \leq \infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \text{ess sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Proposição 2.53. O espaço $L^\infty(a, b; X)$ é um espaço de Banach.

Definição 2.54. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$. Diz-se que a função $u : [a, b] \rightarrow X$ é contínua num ponto $t_0 \in [a, b]$ se,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in [a,b]}} \|u(t) - u(t_0)\|_X = 0.$$

Denota-se por $C^0([a, b], X)$ o conjunto de todas as funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e com valores em X .

Proposição 2.55. O espaço $C^0([a, b]; X)$, equipado com a norma,

$$\|u\|_{C^0([a,b];X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach.

Definição 2.56. Diz-se que a função $u : [a, b] \rightarrow X$ é diferenciável no ponto $t_0 \in [a, b]$ se existir $w \in X$ tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h} - w \right\|_X = 0.$$

Neste caso, $\frac{du}{dt}(t_0) = u_t(t_0)$ é chamada derivada forte de u em t_0 .

Definição 2.57. Uma função $f \in L^1(a, b; X)$ tem derivada generalizada se existir uma função $g \in L^1(a, b; X)$ tal que:

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{dt}(t) f(t) dt = \int_a^b \varphi(t) g(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a, b).$$

Neste caso, escreve-se $\frac{df}{dt} = f_t = g$.

Definição 2.58. ($W^{k,p}(a, b; X)$) Seja X um espaço de Banach. Para $k = 1, 2, \dots$ e $p \in [1, \infty]$, define-se,

$$W^{k,p}(a, b; X) = \{f \in L^p(a, b; X) : \frac{d^j f}{dt^j} \in L^p(a, b; X), j = 1, \dots, k\}.$$

Em $W^{k,p}(a, b; X)$ pode definir-se a norma:

$$\|f\|_{W^{k,p}(a,b;X)} = \left(\sum_{j=1}^k \left\| \frac{d^j f}{dt^j} \right\|_{L^p(a,b;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Estes espaços têm as mesmas propriedades que foram enunciadas para os espaços L^p . De uma forma semelhante, podem definir-se os espaços $C^k([a, b]; X)$ das funções contínuas e diferenciáveis, em t , até à ordem k , no intervalo $[a, b]$ e com valores em X .

Definição 2.59.

$$C^k([a, b]; X) = \{f \in C^0([a, b]; X) : \frac{d^j f}{dt^j} \in C^0([a, b]; X), j = 1, \dots, k\}.$$

Teorema 2.60. Se $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ então $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

2.8 Teoremas fundamentais

Nesta secção, enunciam-se alguns teoremas que são necessários nas demonstrações, mas não se enquadram nas secções anteriores.

Teorema 2.61. (Banach-Alaoglu) Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sucessão $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in X$ é limitada. Então existe uma subsucessão $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty \in \{u_n\}_{n=1}^\infty \in X$ e $u \in X$ tais que:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Teorema 2.62. (Banach-Alaoglu) Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sucessão $\{f_n\}_{n=1}^\infty \in X^*$ é limitada. Então existe uma subsucessão $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty \in \{f_n\}_{n=1}^\infty \in X^*$ e $f \in X^*$ tais que:

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f.$$

Teorema 2.63. (Brouwer) Se $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é contínua na bola fechada $\overline{B}_\rho(x)$ e $f(\overline{B}_\rho(x)) \subset \overline{B}_\rho(x)$, então existe $x \in \overline{B}_\rho(x)$ tal que: $f(x^*) = x^*$.

Corolário 2.64. (Brouwer) Seja $f : \overline{B}_\rho(x) \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua e $(f(x), x) \geq 0 \forall x \in \partial \overline{B}_\rho(x)$. Então, f tem um zero.

O teorema seguinte é uma generalização do teorema de Brouwer.

Teorema 2.65. (Schauder) Seja X um espaço de Banach, $M \subset X$ um conjunto não vazio, limitado, fechado e convexo, e seja $F : M \rightarrow M$ um operador compacto. Então existe, pelo menos, um ponto fixo $u \in M$ de F .

Teorema 2.66. (Lema de Fatou) Seja $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ uma sucessão de funções mensuráveis. Então,

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx.$$

O teorema que se segue, estabelece um conjunto de condições suficientes para se proceder à troca de limites com integral, quando as funções a integrar tomam valores complexos.

Teorema 2.67. (Convergência dominada) Seja $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma sucessão de funções mensuráveis e $g : X \rightarrow [0, \infty)$ uma função integrável, isto é $g \in L^1(X)$, tal que para todo $n \geq 1$ se tem $|f_n| \leq g$. Se $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ então $f \in L^1(X)$ e,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx = \int_X f dx.$$

Teorema 2.68. (Green) Seja Ω um conjunto convexo limitado com fronteira Lipschitz-continua e seja $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx,$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior à fronteira de Ω .

Teorema 2.69. (Gronwall) O teorema tem duas formas de ser apresentado.

- (i) **Forma diferencial** Suponha-se que h e r são integráveis em $]a, b[$ e não negativas qtp em $]a, b[$. Se $y \in C([a, b])$, $y_t \in L^1([a, b])$ e a desigualdade seguinte é satisfeita:

$$y_t(t) \leq h(t) + r(t)y(t) \text{ pqt } t \in]a, b[,$$

então:

$$y(t) \leq \left(y(a) + \int_a^t h(s) ds \right) e^{\int_a^t r(s) ds}.$$

- (ii) **Forma integral** Suponha-se que h é contínua em $[a, b]$, r integrável em $]a, b[$ e $h, r \geq 0$ q.t.p. em $]a, b[$. Se y é uma função contínua em $[a, b]$ e satisfaz a inequação:

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t r(s)y(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

então:

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)r(s)e^{\int_s^t r(\tau) d\tau} ds, \quad t \in [a, b].$$

Teorema 2.70. (Teorema de Nirenberg) Se u pertencer a $L^q(\Omega)$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e suas derivadas da ordem m , $D^m u$, pertencem a $L^r(\Omega)$, $1 \leq q, r \leq \infty$. Para as derivadas $D^j u$, $0 \leq j < m$, a seguinte desigualdade é válida

$$|D^j u|_{L^p(\Omega)} \leq C |D^m u|_{L^r(\Omega)}^\alpha |u|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha},$$

onde

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q},$$

para todo α no intervalo $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$. As constantes dependem apenas de d, m, j, q, r e α .

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [48], páginas 125-127.

Teorema 2.71. (Desigualdade de interpolação de Gagliardo-Nirenberg) Seja o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ limitado e $1 \leq r \leq \infty$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante C tal que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C \|u\|_{W^{2,r}(I)}^{1/2} \|u\|_{L^q(I)}^{1/2} \quad \forall u \in W_0^{2,p}(I),$$

onde p é a média harmónica de q e r , ou seja $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right)$.

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [15], página 233.

Definição 2.72. Dada uma função regular f em Ω , podemos definir o operador, denotado por $I_h f$, como a função que coincide com f nos pontos $\{P_j\}_{j=1}^{n_p}$, ou seja,

$$I_h f = \sum_{j=1}^{n_p} f(P_j) \varphi_j(x).$$

Lema 2.73. Se $v \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, então

$$\|I_h f - f\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla(I_h f - f)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} \|f\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

2.9 Processo estocástico

Teorema 2.74. (Teorema do Limite Central) Sejam $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid), com média μ e desvio padrão σ , e $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ então

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma \sqrt{n}} \underset{\sim}{\sim} N(0, 1). \quad (2.1)$$

Definição 2.75. Um *Processo estocástico* X é uma coleção de variáveis aleatórias

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega)$$

definido em algum espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) .

Um processo estocástico muito importante é o movimento Browniano, que tem desempenhado um papel central nas Finanças.

Definição 2.76. Um processo estocástico contínuo com valor real $W = (W_t)_{t \geq 0}$ no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) é chamado de *movimento Browniano* (padrão) ou *processo de Wiener*, se as seguintes condições forem verificadas:

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

- $W(0) = 0$.
- Para todo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$, os incrementos

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$$

são independentes.

- Para $s < t$, a variável aleatória $W_t - W_s$ tem distribuição Gaussiana $N(0, \sqrt{t - s})$.
- W tem trajetórias contínuas.

Definição 2.77. Assumindo que $(\mathcal{Q}_t)_{t \geq 0}$ é uma coleção de σ -álgebras no mesmo espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) .

A coleção $(\mathcal{Q}_t)_{t \geq 0}$ é chamada de uma *filtração* se

$$\mathcal{Q}_s \subset \mathcal{Q}_t \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t.$$

Nota 2.78. Uma *filtração* pode ser considerada como um fluxo crescente de informações.

Representando por $\sigma(Y)$ a σ -álgebra gerada pelas informações fornecidas pela variável aleatória Y , podemos definir o conceito de processo adaptado.

Definição 2.79. Seja (Ω, \mathcal{A}, P) um espaço de probabilidade.

- Um processo estocástico $X = (X_t)_{t \geq 0}$ é dito *adaptado à filtração* $(\mathcal{Q}_t)_{t \geq 0}$ se, para qualquer t , X_t é \mathcal{Q}_t -mensurável, ou seja.

$$\sigma(X_t) \subset \mathcal{Q}_t \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

- Diz-se que o processo X é *adaptado ao movimento Browniano* W se X for adaptado à filtragem Browniana natural $(\mathcal{Q}_t)_{t \geq 0}$. Isso significa que X_t é uma função de W_s , para $s \leq t$.

Nota 2.80. Um processo estocástico X é sempre adaptado à *filtração natural* gerada por X

$$\mathcal{Q}_t = \sigma(X_s, s \leq t).$$

A noção de martingale é fundamental na teoria de precificação de derivados financeiros.

Definição 2.81. Um processo estocástico $X = (X_t)_{t \geq 0}$ é chamado de martingale em \mathcal{Q}_t se as seguintes condições forem verificadas

- Para todo $t \geq 0$, $E(|X_t|) < \infty$.
- X é adaptado a filtração \mathcal{Q}_t .
- Para todo $0 \leq s < t$, X_s é a melhor predição de X_t dado \mathcal{Q}_s , ou seja.

$$\mathbf{E}(X_t | \mathcal{Q}_s) = X_s.$$

Proposição 2.82. A função valor esperado de uma martingale é constante.

Proposição 2.83. O movimento Browniano é uma martingale.

2.10 Integrais estocásticos

Falamos do conceito de integral estocástico de Itô. É usado em Finanças para modelar o valor de uma carteira que resulta da negociação de ativos em tempo contínuo. Devido ao facto de uma trajetória Browniana não ser diferenciável e ter variação quadrática, o cálculo usado para manipular esses integrais difere do cálculo comum.

Portanto, estas integrais são representadas na forma $\int_0^t X_s dW_s$, onde $(W_t)_{t \geq 0}$ é um movimento Browniano em \mathcal{Q}_t e $X = (X_t)_{t \geq 0}$ é um processo adaptado em \mathcal{Q}_t .

Definição 2.84. O processo estocástico $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t \geq 0}$ é considerado *simples* se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- Existe uma partição

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T,$$

e uma sequência $(Z_i, i = 1, \dots, n)$ de variáveis aleatórias

$$\mathcal{C}_t = \begin{cases} Z_n & \text{se } t = T \\ Z_i & \text{se } t_{i-1} \leq t < t_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

- A sequência (Z_i) é adaptada para $(\mathcal{Q}_{t_{i-1}})_{i=1, \dots, n}$ ou seja, Z_i é uma função do Movimento Browniano até o momento t_{i-1} e satisfaz $\mathbf{E}(Z_i^2) < \infty$ para todo o $i = 1, \dots, n$.

Definição 2.85. O integral estocástico de Itô de um processo simples \mathcal{C} em $[0, T]$ é dado por

$$\int_0^T \mathcal{C}_s dW_s = \sum_{i=1}^n \mathcal{C}_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n Z_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

O integral estocástico de Itô de um processo simples \mathcal{C} em $[0, t]$, $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, é dado por

$$\int_0^t \mathcal{C}_s dW_s = \int_0^t \mathcal{C}_s I_{[0,t]}(s) dW_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + Z_k (W_t - W_{t_{k-1}}),$$

onde a soma vazia $\sum_{i=1}^0 Z_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = 0$.

Na proposição a seguir, apresentamos algumas propriedades fundamentais do integral estocástico de um processo simples.

Consideramos

$$I_t(\mathcal{C}) = \int_0^t \mathcal{C}_s dW_s, \text{ para } t \in [0, T].$$

Proposição 2.86. Se $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t \geq 0}$ é um processo simples, então

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

1. O processo estocástico $(I_t(\mathcal{C}))_{0 \leq t \leq T}$ é uma martingale relativamente à filtração Browniana natural \mathcal{Q}_t .
2. O integral estocástico de Itô tem valor esperado zero.
3. O integral estocástico de Itô satisfaz a propriedade de isometria.

$$\mathbf{E} \left(\int_0^t \mathcal{C}_s dW_s \right)^2 = \int_0^t \mathbf{E} (\mathcal{C}_s^2) ds, \quad t \in [0, T].$$

4. O integral estocástico de Itô é linear.
5. O processo $(I_t(\mathcal{C}))_{0 \leq t \leq T}$ possui trajetórias contínuas.

Nota 2.87. A definição de integral estocástico será estendida a uma classe maior de processos que denotamos por \mathcal{D} .

Definição 2.88. Dizemos que o processo $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{a \leq t \leq b}$ pertence à classe $\mathcal{D}[a, b]$ se as seguintes condições forem atendidas

- O processo \mathcal{C} é adaptado à filtração natural.
- O integral $\int_a^b \mathbf{E} (\mathcal{C}_s^2) ds$ é finito.

Dizemos que o processo $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{t \geq 0}$ pertence à classe \mathcal{D} se $\mathcal{C} \in \mathcal{D}[0, t]$ para todo $t > 0$.

Proposição 2.89. Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{0 \leq t \leq T}$ um processo de classe \mathcal{D} . Então, existe uma sequência $(\mathcal{C}^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ de processos simples, tal que

$$\int_0^T \mathbf{E} [\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_s^{(n)}]^2 ds \rightarrow 0.$$

Escrevendo $I(\mathcal{C}^{(n)}) = \int_0^t \mathcal{C}_s^{(n)} dW_s$, temos que as sequências $(I(\mathcal{C}^{(n)}))$ do integral estocástico de Itô convergem em média quadrática para um único processo, ou seja, existe um único processo $I(\mathcal{C})$ em $[0, T]$ de modo que

$$\mathbf{E} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} [I_t(\mathcal{C}) - I_t(\mathcal{C}^{(n)})]^2 \right\} \rightarrow 0.$$

Definição 2.90. Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{0 \leq t \leq T}$ um processo de classe \mathcal{D} . O único limite médio quadrático $I(\mathcal{C})$, garantido pela Proposição 2.89, é chamado de *Integral estocástico de \mathcal{C}* e é definido por

$$I_t(\mathcal{C}) = \int_0^t \mathcal{C}_s dW_s, \quad t \in [0, T].$$

Propriedade 2.91. Se $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_t)_{0 \leq t \leq T}$ é um processo de classe \mathcal{D} então

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

1. O processo estocástico $(I_t(\mathcal{C}))_{0 \leq t \leq T}$ é uma \mathcal{Q}_t -martingale.
2. O integral estocástico de I_t tem valor esperado zero.
3. O integral estocástico de I_t satisfaz a propriedade isometria

$$\mathbf{E} \left(\int_0^t \mathcal{C}_s dW_s \right)^2 = \int_0^t \mathbf{E}(\mathcal{C}_s^2) ds, \quad t \in [0, T].$$

4. O integral estocástico de I_t é linear.
5. O processo $I(\mathcal{C})$ possui trajetórias contínuas .

Definição 2.92. Um processo $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ que possui a representação

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dW_s \quad (2.2)$$

com processos $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ adaptados em \mathcal{Q}_t de forma que os integrais acima sejam bem definidos nos sentidos Riemann e Itô, respectivamente, é chamado de *Processo de Itô* .

A equação integral (2.2) pode ser representada em sua forma diferencial

$$dX_t = A_t^{(1)} dt + A_t^{(2)} dW_t,$$

que descreve a "dinâmica" do processo estocástico X .

Proposição 2.93. Se um processo $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ tiver representação (2.2), então os processos $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ são determinados exclusivamente, no sentido de que, se X tiver outra representação (2.2), onde $A^{(i)}$ sejam substituídos por processos adaptados $D^{(i)}$, então $A^{(i)}$ e $D^{(i)}$ coincidem pqt, $i = 1, 2$.

Teorema 2.94. (lema de Itô) Seja $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ um processo de Itô com representação (2.2) e $f(t, x)$ uma função cujas derivadas parciais de segunda ordem sejam contínuas. Então

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) \\ &+ \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + A_s^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} (A_s^{(2)})^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right] ds \\ &+ \int_0^t A_s^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dW_s. \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.11 Equações diferenciais

Definição 2.95. Uma equação diferencial ordinária EDO de ordem n é uma equação que envolve uma função desconhecida de uma única variável e as suas derivadas.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Definição 2.96. Uma equação diferencial estocástica EDE é uma equação diferencial em que um ou mais dos seus termos é um processo estocástico.

Definição 2.97. Uma equação diferencial parcial EDP é uma equação envolvendo uma função desconhecida de duas ou mais variáveis e algumas das suas derivadas parciais. É chamada de EDP de ordem k -ésima, se tiver a forma.

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0,$$

onde

$$F : \mathbb{R}^{d^k} \times \mathbb{R}^{d^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

é dado, e

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

é desconhecida. A EDP é chamada

(i) Linear se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x).$$

para determinadas funções, a_α ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$) e $f, D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}$ sendo o conjunto de todas as derivadas parciais de ordem k .

(ii) Semi-linear se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

(iii) Quasi-linear se tiver a forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0.$$

(iv) E totalmente não-linear, se depender não linearmente da mais alta ordem das suas derivadas.

Nota 2.98. Em termos práticos, vamos trabalhar nesta tese com EDP's de segunda ordem com as variáveis x e t .

2.12 Equações diferenciais estocásticas

Estamos interessados em encontrar um processo estocástico $X = (X_t)_{t \geq 0}$ que satisfaça a equação diferencial

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = Y, \quad (2.4)$$

onde, como sempre, $W = (W_t)_{t \geq 0}$ indica o movimento Browniano e $\mu(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ são funções determinísticas, com $t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$.

A aleatoriedade da solução X , se existir, resulta, por um lado, da condição inicial e, por outro lado, do ruído gerado pelo movimento Browniano.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Podemos interpretar a equação (2.4) como a equação do integral estocástico

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

onde o primeiro integral do lado direito é um integral de Riemann e o segundo é um integral estocástico de Itô.

A equação (2.5) é chamada *equação diferencial estocástica de Itô*.

O movimento Browniano W é chamado *processo de condução* da EDE (2.5).

Definição 2.99. Uma *solução forte para EDE* (2.5) é um processo estocástico adaptado a W , $X = (X_t)_{t \geq 0}$ que satisfaz as seguintes condições

- Os integrais que ocorrem em (2.5) são bem definidos como integrais de Riemann e de Itô respectivamente.
- X satisfaz

$$X_t = Y + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad \forall t \geq 0.$$

Enquanto a solução forte de (2.5) se baseia na trajetória do movimento Browniano subjacente, para as soluções fracas, o comportamento da trajetória não é essencial. Soluções fracas X são suficientes para determinar as características distributivas de X , como as funções de valor esperado, variância e covariância do processo.

Uma solução forte ou fraca X da EDE (2.5) é chamada *processo de difusão*. No caso particular, se considerarmos $\mu(t, x) = 0$ e $\sigma(t, x) = 1$, concluímos que o movimento Browniano é um processo de difusão.

Sobre a existência e unicidade de uma solução forte temos o Teorema seguinte.

Teorema 2.100. Se as funções de coeficientes $\mu(t, x)$ e $\sigma(t, x)$

- são contínuas e
- satisfazem uma condição Lipschitz com relação à variável x , ou seja, existe uma constante K tal que, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|,$$

e se a condição inicial Y

- possui um segundo momento finito: $\mathbf{E}(Y^2) < \infty$, e
- é independente de $W = (W_t)_{t \geq 0}$,

então a EDE (2.5) tem solução forte e única X em $[0, T]$, $T > 0$.

2.13 Equações diferenciais parciais

Nesta secção, pretendemos relacionar a solução X no intervalo de tempo $[t, T]$, para T fixo e $t < T$, da EDE

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s \\ X_t &= x \end{aligned}$$

com a solução do seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= 0 \\ u(T, x) &= \Phi(x), \end{aligned}$$

onde $\mu(t, x)$, $\sigma(t, x)$, e $\Phi(t, x)$ são funções determinísticas.

Define-se o *operador infinitesimal* \mathcal{I} do processo X para qualquer função em $C^2(\mathbb{R})$ por

$$\mathcal{I} = \mu(t, x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Assim, em termos do gerador infinitesimal, a fórmula de Itô (2.3), assume a forma

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{I}f(s, X_s) \right] ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dW_s$$

Usando \mathcal{I} , pode escrever-se o problema de valores na fronteira como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \mathcal{I}u(t, x) = 0 \tag{2.6}$$

$$u(T, x) = \Phi(x). \tag{2.7}$$

Aplicando a formula de Itô ao processo $u(s, X_s)$ no intervalo de tempo $[t, T]$, obtemos

$$\begin{aligned} u(T, X_T) &= u(t, X_t) + \int_t^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{I}u(s, X_s) \right\} ds \\ &\quad + \int_t^T \sigma(s, X_s) \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) dW_s. \end{aligned}$$

Como u satisfaz (2.6), o integral no tempo é nulo. Tomando o valor esperado e assumindo que o integral estocástico existe, ele anula-se também, deixando-nos com a fórmula

$$u(t, x) = \mathbf{E}_{t,x}[\Phi(X_T)],$$

onde a notação $\mathbf{E}_{t,x}$ enfatiza que o valor esperado deve ser calculado tendo em conta o valor inicial $X_t = x$.

Proposição 2.101. (Feynman-Kač fórmula de representação estocástica) Suponha-se que u é uma solução do problema de valores na fronteira

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= 0 \\ u(T, x) &= \Phi(x). \end{aligned}$$

Suponha-se ainda que o processo $\sigma(s, X_s) = \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)$ esteja em \mathcal{D} dado pela Definição 2.88, onde X é definido abaixo. Então u tem a representação

$$u(t, x) = \mathbf{E}_{t,x}[\Phi(X_T)],$$

onde X satisfaz a EDE

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Proposição 2.102. Suponha-se que u é uma solução do problema do valores na fronteira

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - ru(t, x) &= 0 \\ u(T, x) &= \Phi(x) \end{aligned}$$

Suponha-se que o processo $\sigma(s, X_s) = \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s)$ esteja em \mathcal{D} , onde X é definida abaixo. Então, u tem a representação

$$u(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_{t,x}[\Phi(X_T)]$$

onde X satisfaz a EDE

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Proposição 2.103. (Equação inversa de Kolmogorov) Seja X uma solução para EDE

$$dX_s = \mu(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s.$$

Para $0 \leq t < T$, seja $p(t, T; x, y)$ a densidade de transição da solução inicial $X_t = x$ para esta equação (ou seja, se resolvermos a equação com a condição inicial $X_t = x$, a variável aleatória X_T tem densidade $p(t, T; x, y)$ na variável y). Suponha-se que $p(t, T; x, y) = 0$ para $0 \leq t < T$ e $y \leq 0$.

Então, $p(t, T; x, y)$ satisfaz a equação

$$-\frac{\partial p}{\partial t}(t, T; x, y) = \mu(t, x) \frac{\partial p}{\partial x}(t, T; x, y) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, T; x, y) \quad (2.8)$$

A razão pela qual (2.8) é chamada equação inversa, é que o operador diferencial trabalha "variáveis inversas" (t, x) . A equação direta correspondente também é conhecida como equação de Fokker-Planck.

2.14 Aplicação do cálculo estocástico em finanças

Nesta secção, apresentamos o modelo Black-Scholes e alguns resultados famosos do cálculo estocástico em problemas financeiros (ver [10] e [46]).

Consideramos um *ativo com risco* com preço S_t no momento t . Assumindo que o preço das ações seja a solução da EDE

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(s, S_s) S_s ds + \int_0^t \sigma(s, S_s) S_s dW_s, \quad (2.9)$$

onde W é um movimento Browniano, μ e σ são funções determinísticas. A função σ é conhecida como *volatilidade* de S e μ é o *drift* de S .

O caso em que as funções μ e σ são constantes foi apresentado na Secção 2.12, e temos que a única solução forte da equação diferencial estocástica linear, nesse caso, é o movimento Browniano geométrico

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

Considerando que este modelo representa um ativo sem riscos, como por exemplo uma conta bancária.

Assumindo que um investimento de B_0 unidades deste ativo produz um valor de

$$B_t = B_0 \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right), \quad (2.10)$$

onde a *taxa de juros* r muda com o tempo.

Se r for constante, então o ativo B é um *bônus* e, será dado por

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

no tempo t . Observe-se que B satisfaz a equação integral determinística

$$B_t = B_0 + r \int_0^t B_s ds.$$

Construindo um portfólio de a_t unidades de *stock* e b_t unidades de títulos no tempo t . Assume-se que a_t e b_t são processos estocásticos adaptados ao movimento Browniano e denominamos o par (a_t, b_t) , $t \in [0, T]$, por *estratégia de negociação*.

O valor do portfólio no momento t será dado por

$$\Pi_t = a_t S_t + b_t B_t.$$

Em termos de diferenciais, podemos escrever

$$d\Pi_t = d(a_t S_t + b_t B_t) = a_t dS_t + b_t dB_t,$$

que, interpretado no sentido de Itô, temos

$$\Pi_t - \Pi_0 = \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s dB_s$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Teorema 2.104. (Avaliação do Risco Neutral) O preço livre de arbitragem do crédito contingente $\Phi(S(T))$ é dado por $\Pi(t; \Phi) = u(t, S(t))$, onde u é dada pela fórmula

$$u(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_{t,s} [\Phi(S(T))],$$

onde a dinâmica de S é

$$dS_t = S_t \alpha(t, S_t) dt + S_t \sigma(t, S_t) d\tilde{W}_t$$

com \tilde{W} um processo de Wiener.

Teorema 2.105. (A propriedade de Martingale) No modelo de Black-Scholes, o preço $\Pi(t)$ para cada ativo negociado, seja o ativo subjacente ou derivado, possui a propriedade de que o processo normalizado

$$Z(t) = \frac{\Pi(t)}{B(t)}$$

é uma martingale.

Para obter fórmulas específicas para a opção de compra europeia, colocamo-nos novamente num modelo de Black-Scholes, que consiste em dois ativos com dinâmica dada por

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt \\ dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

onde r , α , e σ são constantes determinísticas.

Definição 2.106. (hedge) As operações de cobertura de riscos (*hedge*) consistem, essencialmente, em assumir, para um tempo futuro, a posição oposta à que se tem no mercado à vista.

Definição 2.107. (hedger) São analistas e controladores de risco, estabelecem contratos com vista a eliminarem ou controlarem o risco resultante de possíveis condições adversas em investimentos previamente feitos.

Definição 2.108. (Arbitraders) são investidores que tentam aproveitar deficiências na determinação do valor de ativos *mispricing* que lhes permitam lucros imediatos sem risco. Têm de ter atenção continuada ao mercado, pois estas anomalias estão sempre a ser corrigidas pela oferta e procura, o que leva a que as oportunidades de arbitragem sejam muito breves.

2.15 Obtenção da equação diferencial de Black-Scholes

Considera-se então, a evolução do preço de um ativo S em tempo contínuo, dado por (ver [25]):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad dW = X \sqrt{dt}, \quad X \sim N(0, 1) \quad (2.11)$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Os parâmetros μ e σ representam a taxa de retorno do ativo e a sua volatilidade, respetivamente. Seja $V(t, S)$, o valor de um derivado que depende de t e S , e como $V(t, S)$ é uma função de S , aplicando o Lema de Itô, tem-se:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \quad (2.12)$$

Construir um portfólio composto pelo derivado V em posição curta e por um montante Δ do ativo subjacente S em posição longa. E seja Π tal portfólio, então, o seu valor é dado por:

$$\Pi = \Delta S - V,$$

e a dinâmica é dada por:

$$d\Pi = \Delta dS - dV \quad (2.13)$$

Assim, substituindo (2.12) em (2.13) após simplificação, temos:

$$d\Pi = \left(\Delta \mu S - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\Delta \sigma S - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW.$$

Fazendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, obtém-se:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (2.14)$$

Verifica-se que, deste modo, a componente dW , que introduzia incerteza no valor do seu retorno, foi eliminada. Não havendo oportunidades de arbitragem, a carteira Π deve ter uma rentabilidade igual à de um ativo sem risco, ou seja,

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (2.15)$$

Desta maneira, substituindo (2.15) em (2.14) e simplificando, temos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é conhecida como equação diferencial de Black-Scholes. A solução desta equação determina o valor de V , ou seja, qual o valor do derivado financeiro cujo ativo subjacente é S . Caso a opção pague dividendos contínuos à taxa q , a equação escreve-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.17)$$

ou

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV = 0.$$

2.16 Soluções viscosas

Nesta secção são apresentados alguns teoremas que serão de grande importância na busca da solução viscosa do nosso problema em questão. Considere o problema seguinte na forma geral, encontrar $u(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{F}(x, t, u, u_x, u_{xx}) = 0, & (x, t) \in Q_T = \Omega \times]0, T], \\ u(x, t) = g(x, t), & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (2.18)$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

onde $\mathcal{F} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e g, u_0 são funções dadas.

Definição 2.109. Dado um espaço métrico X , uma função $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ é considerada sub semicontínua (ou semicontínua inferiormente) em $x \in X$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que para cada $y \in X$ com $|x - y| < \delta$ então $u(y) > u(x) - \varepsilon$. De forma similar, dizemos que $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ é super semicontínua (ou semicontínua superiormente) em x se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $u(y) < u(x) + \varepsilon$, sempre que $|x - y| < \delta$.

Nota 2.110. Quando uma função $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ é sub/super em todos os pontos, apenas dizemos que u é sub/ super semicontínua.

Para estender a técnica de soluções viscosas para funções que não precisam ser contínuas, definimos

$$u^*(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup \{u(y, \tau) : |(y, \tau) - (x, t)| \leq r, (y, \tau) \in Q_T\} \quad (2.19)$$

e

$$u_*(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf \{u(y, \tau) : |(y, \tau) - (x, t)| \leq r, (y, \tau) \in Q_T\} \quad (2.20)$$

que são chamadas de super e sub semicontínuas de u .

Definição 2.111. Seja $u : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\phi : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer função em $C^1(0, T, C^2(\Omega))$.

- A função u é chamada de subsolução viscosa da equação (2.18) se sempre que (x_0, t_0) for um máximo de $u^* - \phi$, as condições seguintes forem satisfeitas:

$$\phi_t(x_0, t_0) + \mathcal{F}(x_0, t_0, u^*(x_0, t_0), \phi_x(x_0, t_0), \phi_{xx}(x_0, t_0)) \leq 0, \quad (2.21)$$

quando $(x_0, t_0) \in Q_T$,

$u^*(x_0, t_0) - g(x_0, t_0) \leq 0$ ou (2.21), quando $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times [0, T[$,

e

$u^*(x_0, t_0) - u_{0*}(x_0) \leq 0$ ou (2.21), quando $x_0 \in \bar{\Omega}, t_0 = 0$.

- A função u é chamada de supersolução da equação (2.18) se sempre, que (x_0, t_0) for um mínimo de $u_* - \phi$, as condições seguintes forem satisfeitas:

$$\phi_t(x_0, t_0) + \mathcal{F}(x_0, t_0, u_*(x_0, t_0), \phi_x(x_0, t_0), \phi_{xx}(x_0, t_0)) \geq 0, \quad (2.22)$$

quando $(x_0, t_0) \in Q_T$,

$u_*(x_0, t_0) - g(x_0, t_0) \geq 0$ ou (2.22), quando $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times [0, T[$,

e

$u_*(x_0, t_0) - u_0^*(x_0) \geq 0$ ou (2.22), quando $x_0 \in \bar{\Omega}, t_0 = 0$.

- Uma função limitada u que é tanto sub e supersolução viscosa é chamada de solução viscosa (não necessariamente contínua).

Nota 2.112. A definição de solução viscosa é absoluta. Isto significa que se u é uma subsolução viscosa em Ω , então também é uma subsolução em Ω' , sempre que $\Omega' \subset \Omega$.

Nota 2.113. Na definição de solução viscosa, o máximo local pode ser substituído pelo máximo global e também pelo máximo estrito local ou global. Além disso, as funções $C^1(0, T, C^2(\Omega))$ podem ser substituídas por funções regulares. Também podemos supor que o máximo local seja zero. Observação semelhante aplica-se às supersoluções.

Definição 2.114. Considerando a equação geral não linear (2.18), onde $\mathcal{F} : \Omega \times]0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \wp^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e Ω é qualquer conjunto aberto em \mathbb{R}^N . Aqui \wp^N denota o espaço de todas as matrizes simétricas com valor real de $N \times N$. Se \mathcal{F} satisfizer as condições

$$\mathcal{F}(x, t, r, p, X) \leq \mathcal{F}(x, t, r, p, Y) \quad \text{sempre que} \quad X \geq Y$$

onde $X \geq Y$ significa que $X - Y$ é uma matriz definida não negativa e a condição de monotonicidade na variável r , ou seja,

$$\mathcal{F}(x, t, r, p, X) \leq \mathcal{F}(x, t, s, p, X) \quad \text{sempre que} \quad r \leq s.$$

então diz-se que \mathcal{F} é apropriado.

Assumindo que $\mathcal{F}_\varepsilon : \bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $g_\varepsilon : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $u_\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas para todo $0 < \varepsilon \leq 1$ e

$$\begin{cases} \mathcal{F}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{F}, & \text{em todos os compactos de } \bar{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ g_\varepsilon \rightarrow g, & \text{em todos os compactos de } \partial\Omega, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0^+ \\ u_\varepsilon \rightarrow u_0, & \text{em todos os compactos de } \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Consideramos a família de problemas de valores na fronteira

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{F}_\varepsilon(x, t, u, u_x, u_{xx}) = 0, & \text{em } Q_T \\ u = g_\varepsilon, & \text{em } \partial\Omega \\ u(x, 0) = u_\varepsilon(x), & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

Cujas soluções u_ε satisfazem cada compacto $\kappa \subseteq Q_T$.

$$\sup_{\kappa} |u_\varepsilon| \leq C_\kappa. \quad (2.25)$$

Definição 2.115. Para cada função u_ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, os limites superior e inferior fraco no ponto $(x, t) \in Q_T$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ são

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sup \{ u^\varepsilon(y, \tau) : \|(y, \tau) - (x, t)\| \leq r, \varepsilon \leq r, (y, \tau) \in Q_T \} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup^* u^\varepsilon(t, x) < \infty \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \inf \{ u^\varepsilon(y, \tau) : \|(y, \tau) - (x, t)\| \geq r, \varepsilon \leq r, (y, \tau) \in Q_T \} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_* u^\varepsilon(t, x) > -\infty \end{aligned} \quad (2.27)$$

Lema 2.116. O limite inferior fraco \underline{u} é sub semicontínuo e o limite superior fraco \bar{u} é super semicontínuo.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

A demonstração deste Lema é semelhante à encontrada em [45], página 289.

Lema 2.117. Suponhamos que as funções u_ε da Definição 2.115 satisfazem (2.25) num conjunto compacto κ e que

$$\underline{u} = \bar{u} =: u \quad \text{em } \kappa \quad (2.28)$$

então $u_\varepsilon \rightarrow u$ em κ com $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

A demonstração deste Lema pode, para equações elíticas, ser encontrada em [45], página 291. Para as equações parabólicas, a demonstração é semelhante.

Proposição 2.118. Assumindo (2.23). Se u_ε satisfizer (2.25) e é tal que u_ε^* é uma subsolução (respetivamente, u_ε^* uma supersolução) de (2.24) para $\varepsilon > 0$, então o limite superior fraco \bar{u} é uma subsolução do problema (2.18) (respetivamente, o limite inferior fraco é uma supersolução de (2.18)).

Condição 2.119. Seja \mathcal{F} definido por (2.18). Vamos supor que existe $\gamma > 0$ de tal forma que

$$\gamma(r - s) \leq \mathcal{F}(x, t, r, p, X) - \mathcal{F}(x, t, s, p, X) \quad \text{para } r \geq s \text{ e } x, t, p, X \in \mathbb{R},$$

e que existe uma função $\omega : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ que satisfaz $\omega(0^+) = 0$ de tal forma que

$$\mathcal{F}(y, t, s, \alpha(x - y), Y) - \mathcal{F}(x, t, s, \alpha(x - y), X) \leq \omega(\alpha|x - y|^2 + |x - y|) \quad (2.29)$$

para $x, y \in]0, b[$, $t \in]0, T[$ fixo, $X, Y \in \mathbb{R}$ e α dado por

$$-3\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix} \leq 3\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Teorema 2.120. (Comparação) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e limitado. Seja $\mathcal{F} \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ continua, e satisfaz a Condição (2.119), para cada $t \in [0, T]$, com a mesma função ω . Se u for uma subsolução de (2.18) e v é uma supersolução de (2.18), então $u \leq v$ em $[0, T] \times \Omega$.

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [20], páginas 51-52.

Consideraremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x, t)u = f(x, t) \\ u|_{S_T} = \Phi(x, t) \\ u_0(x) = \varphi(x). \end{cases} \quad (2.31)$$

Suponhamos, além disso, que Ω satisfaz as condições desejadas.

Assumindo que este operador é uniformemente parabólico qtp, nos domínios em que o problema acima é resolvido. Considerando o domínio cilíndrico $Q_T = \Omega \times (0, T)$ com superfície lateral $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$.

Teorema 2.121. Suponha-se que $l > 0$ é um número não inteiro, os coeficientes do operador pertencem à classe $H^{l, l/2}(\bar{Q}_T)$ e a fronteira S pertence à classe H^{l+2} . Então, para qualquer $f \in H^{l, l/2}(\bar{Q}_T)$, $\varphi \in H^{l+2}(\bar{\Omega})$ e $\Phi \in H^{l+2, l/2+1}(\bar{S}_T)$, satisfazendo as condições de compatibilidade de ordem $[l/2] + 1$, o problema (2.31) tem uma única solução para classe $H^{l+2, l/2+1}(\bar{Q}_T)$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [42], página 165.

Para o caso das equações

$$a_{11}(x, t, u, u_x)u_{xx} + a(x, t, u, u_x) = 0 \quad (2.32)$$

com uma variável no espaço, os argumentos e resultados atrás admitem certas simplificações e aprimoramentos. Limitamos ao domínio $Q_T = (-l, l) \times (0, T)$, embora os métodos apresentados aqui sejam aplicáveis sem nenhuma alteração essencial nos domínios da forma $\{(x, t) : \phi_1(t) \leq x \leq \phi_2(t)\}$ com $\phi_i(t) \neq \infty$. Limitou-se apenas a soluções clássicas e funções contínuas $a_{11}(x, t, u, p)$ e $a(x, t, u, p)$. Do que foi dito atrás, é claro que generalizações das proposições dadas à frente são possíveis no que se refere à admissão de várias singularidades das funções $a_{11}(x, t, u, p)$ e $a(x, t, u, p)$ e das soluções de $u(x, t)$.

Para uma função regular $a_{11}(x, t, u, p)$, a equação (2.32) pode ser reduzida à forma de equação com parte principal na forma divergente, a saber

$$u_t - \frac{d}{dx}a_1(x, t, u, u_x) + b(x, t, u, u_x) = 0 \quad (2.33)$$

no qual

$$a_1(x, t, u, u_x) = \int_0^p a_{11}(x, t, u, \tau) d\tau$$

$$b(x, t, u, p) = a(x, t, u, p) + \frac{\partial a_1(x, t, u, p)}{\partial u}p + \frac{\partial a_1(x, t, u, p)}{\partial x}.$$

Além disso, para a sua solução u é possível estimar $\max_{Q_T} |u_x|$ em relação ao domínio inteiro Q_T sem uma estimativa preliminar de $\max_{Q_T} |u_t|$ e portanto, sem suposições sobre o diferencial em relação a t na função que compõe a equação.

Teorema 2.122. Suponha-se que $u(x, t)$ é uma solução de (2.32) que pertence à $C^{2,1}(\overline{Q_T})$ e supomos que para $(x, t) \in \overline{Q_T}$

$$\nu \leq a_{11}(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) \leq \mu$$

$$|a(x, t, u(x, t), u_x(x, t))| \leq \mu, \quad \nu, \mu = \text{const} > 0. \quad (2.34)$$

Então é possível estimar a quantidade $\max_{Q'} |u_x|$ para algum rectângulo $Q' = (-l + \varepsilon, l - \varepsilon) \times (\varepsilon_1, T)$ com $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$, onde as constantes, dependendo apenas $\nu, \mu, M_l = \max_{Q_T} |u_t|$, ε e ε_1 . Para $\varepsilon_1 = 0$ a quantidade $\max_{Q'} |u_x|$ é estimada para uma constante que depende simplesmente $\nu, \mu, M_l, \varepsilon, \langle u_x(x, 0) \rangle_{(-l, l)}^\beta$ e $\beta > 0$. Para o rectângulo $\max_{Q_T} |u_x|$ é estimado para uma constante que depende simplesmente de $\nu, \mu, M_l, \langle u_x(x, 0) \rangle_{(-l, l)}^\beta, \beta$ e $\max_{t \in [0, T]} (|u_t(-l, t)|, |u_t(l, t)|)$. A constante α é determinada por ν, μ, M_l e β .

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [42], página 285.

Capítulo 3

Opções e Modelos de Volatilidade com custos de transação

3.1 Opções

Um contrato de opção dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender um ativo no futuro a um determinado preço acordado hoje. Existem dois tipos de opções *standard*, conhecidas por opções *vanilla* (para mais detalhes ver por exemplo [33]).

- Opção de compra (*call option*),
- Opção de venda (*put option*)

O detentor tem o direito de exercer ou não a opção, conforme as condições que lhe são favoráveis ou não. Um contrato de opção, tem um custo para o seu detentor chamado prêmio da opção ou preço da opção. O preço de compra futuro chama-se preço de exercício. A contraparte numa opção de compra ou venda tem a obrigação de vender ou comprar o ativo, se o detentor exercer a opção. Se o detentor da opção o puder exercer só na data de expiração do contrato, a opção é chamada de tipo europeia. E se o exercício da opção puder ser feita em qualquer momento da vida da opção, ela é então chamada de tipo americana.

Uma opção de compra europeia permite que o comprador compre um ativo de valor S por um valor K na data de vencimento T , enquanto que uma opção de venda europeia permite ao titular vender um ativo de valor S por um valor K na data de vencimento T . Como a opção só pode ser exercida na data de vencimento, complementamos a equação (1.1) com algumas condições, para evitar arbitragem.

3.1.1 Opções de compra europeia

Recordando que a opção de compra dá o direito de comprar um ativo de valor S por um valor K , temos que o *pay-off* de uma opção deste tipo será $S - K$ se for exercida, e 0 (zero) caso não seja exercida. Como a opção só será exercida se $S - K > 0$, o *pay-off* será $\max\{S - K, 0\}$.

Quando o ativo tem valor zero, a opção também valerá zero, pois sempre será preferível comprar diretamente o ativo do que exercer a opção de compra por um valor K .

Se considerarmos que o valor do ativo é tão elevado que pode ser encarado como infinito, o valor K pelo qual compramos o ativo pode ser desprezado e lucraremos tanto como o preço do ativo S .

De forma resumida, podemos então considerar que o preço da opção, satisfaz as condições

$$V(S, T) = \max\{S - K, 0\}, \quad \text{quando } S \geq 0; \quad (3.1)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, \tau)}{S - Ke^{-r(T-\tau)}} = 1, \quad \text{para } \tau \in [0, T]; \quad (3.2)$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad \text{para } \tau \in [0, T]; \quad (3.3)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V_S(S, \tau) = 1, \quad \text{para } \tau \in [0, T]. \quad (3.4)$$

3.1.2 Opções de venda europeias

Para as opções de venda o raciocínio é idêntico, mas, neste caso, a opção dá o direito de vender o ativo S por um valor K . Se exercermos a opção na data de maturidade obtemos o valor $K - S > 0$ e por isso o seu *pay-off* será $\max\{K - S, 0\}$.

Quando o ativo tem valor zero na data de maturidade, o valor da opção é K , que é o preço que obtemos da venda do ativo. Para um tempo τ , e salvaguardando hipóteses de arbitragem, a opção deverá valer $Ke^{-r(T-\tau)}$ (ver [4], por exemplo).

Quando o valor do ativo é equiparado ao infinito, é preferível não exercer a opção e vender o ativo diretamente, por isso a opção valerá zero para estes valores.

De forma esquemática, temos as condições

$$V(S, T) = \max\{K - S, 0\}, \quad \text{quando } S \geq 0; \quad (3.5)$$

$$V(0, \tau) = Ke^{-r(T-\tau)}, \quad \text{para } \tau \in [0, T]; \quad (3.6)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V(S, \tau) = 0, \quad \text{para } \tau \in [0, T]; \quad (3.7)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V_S(S, \tau) = 0, \quad \text{para } \tau \in [0, T]; \quad (3.8)$$

3.1.3 Opções de compra americanas

Contrariamente às opções do tipo europeu, as opções do tipo americano podem ser exercidas em qualquer momento até à respetiva data de maturidade.

Para a opção americana de compra, o domínio espacial é dividido em duas regiões separadas por uma fronteira livre $S_f(\tau)$, a região de paragem $S_f(\tau) < S < \infty$, $0 \leq \tau \leq T$ onde a opção é exercida, com $V(S, \tau) = S - K$ e a região de continuidade $0 \leq S \leq S_f(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ onde a opção é mantida ou permanece ativa e (1.2) é válida (ver [4], por exemplo). Então o problema é encontrar V e $S_f(\tau)$ que satisfazem as condições

$$\begin{cases} V(S, \tau) > (S - K)^+ \\ V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV = 0 \end{cases} \quad \text{para } S \in]0, S_f(\tau)[, \tau \in]0, T[\quad (3.9)$$

e

$$\begin{cases} V(S, \tau) = S - K \\ V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV < 0 \end{cases} \quad \text{para } S \in]S_f(\tau), +\infty[, \tau \in]0, T[\quad (3.10)$$

onde $(S - K)^+ = \max\{S - K, 0\}$.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Com as condições terminais e de fronteira

$$V(S, T) = (S - K)^+, \quad \text{para } S > 0; \quad (3.11)$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq T; \quad (3.12)$$

$$V(S_f(\tau), \tau) = S_f(\tau) - K, \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq T; \quad (3.13)$$

$$V_S(S_f(\tau), \tau) = 1, \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq T; \quad (3.14)$$

$$S_f(T) = \max(K, rK/q)$$

Segundo Jashmidian [34] e Kholodnyi [37], as condições (3.9) e (3.10) podem ser combinadas numa equação que é válida em todo o seu domínio (em ambos os exercícios iniciais e nas regiões sem exercício), considerando a equação

$$V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV = f, \quad S > 0, \quad 0 < \tau < T \quad (3.15)$$

com f definido por

$$f = \begin{cases} 0 & , S \leq S_f \\ rK - qS & , S > S_f. \end{cases}$$

Vamos considerar o caso em que $r > q$, o que implica que $S_f(T) = \frac{rK}{q}$.

3.1.4 Opções de venda americanas

A opção de venda americana é exercida na região de paragem $0 \leq S \leq S_f(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ onde tem valor $V(S, \tau) = K - S$. Na região de continuidade $S_f(\tau) < S < \infty$, $0 \leq \tau \leq T$, a opção permanece viva e (1.2) é válida (ver [4], por exemplo). Então o problema é encontrar V e $S_f(\tau)$ que satisfazem as condições

$$\begin{cases} V(S, \tau) = K - S \\ V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV < 0 \end{cases} \quad \text{para } S \in]0, S_f(\tau)[, \tau \in]0, T[\quad (3.16)$$

e

$$\begin{cases} V(S, \tau) > (K - S)^+ \\ V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV = 0 \end{cases} \quad \text{para } S \in]S_f(\tau), +\infty[, \tau \in]0, T[\quad (3.17)$$

com as condições

$$V(S, T) = (K - S)^+, \quad \text{para } 0 \leq S \leq S_f(T); \quad (3.18)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V(S, \tau) = 0, \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq T; \quad (3.19)$$

$$V(S_f(\tau), \tau) = K - S_f(\tau), \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq T; \quad (3.20)$$

$$V_S(S_f(\tau), \tau) = -1, \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq T, \quad (3.21)$$

$$S_f(T) = \min(K, rK/q),$$

Da mesma forma, consideramos (3.15) com

$$f = \begin{cases} 0 & , S > S_f \\ qS - rK & , S \leq S_f \end{cases}$$

Vamos considerar o caso em que $r > q$, o que implica que $S_f(T) = K$.

3.2 A fórmula para o preço de opção de compra europeia

Nesta secção, vamos deduzir uma expressão analítica para a solução da equação de Black-Scholes, que pode ser encontrada detalhadamente em [11], [41] e [57].

Suponhamos que uma ação está a ser comercializada por um preço S . Seja K o preço de exercício da ação, isto é, o direito de comprar a ação pelo preço K na data de maturidade T . Sejam r a taxa de juros livre de risco e σ a volatilidade, ambas constantes. Vamos estabelecer o preço da opção no instante τ , onde $(0 \leq \tau \leq T)$. Começamos por transformar a equação (1.1) numa equação de difusão de calor, que pode ser resolvida utilizando métodos usuais. Para isso, façamos a seguinte mudança de variável

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$$

e

$$t = \frac{1}{2}\sigma^2(T - \tau)$$

e escrevemos

$$V(S, \tau) = V\left(Ke^x, T - \frac{2t}{\sigma^2}\right) = Kv(x, t). \quad (3.22)$$

Como $\tau \in]0, T[$ e $S \in]0, \infty[$, então $t \in]0, \frac{1}{2}\sigma^2 T[$ e $x \in]-\infty, +\infty[$. Daí, substituindo (3.22) na equação (1.1), obtemos

$$v_t(x, t) - v_{xx}(x, t) + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right)v_x(x, t) + \frac{2r}{\sigma^2}v(x, t) = 0.$$

isto é

$$v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)v_x(x, t) - \frac{2r}{\sigma^2}v(x, t).$$

Consideremos a seguinte mudança de variável

$$v(x, t) = e^{\alpha x + \beta t}u(x, t),$$

onde $\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)$ e $\beta = -\frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)^2$. Então, obtemos a equação de difusão

$$v_t = v_{xx}, \quad (3.23)$$

cujas condições de fronteira são

$$u(x, 0) = \max\left\{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)x} - e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)x}, 0\right\};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)x - \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)^2 t\right)} u(x, 0) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{e^{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)x + \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)^2 t\right)}} = 1$$

Note que a segunda condição acima implica $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, 0) = 0$.

Note, também, que

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)x} - e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)x}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Sabe-se que a solução da equação de difusão (3.23) é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4t}} ds.$$

Com a mudança de variável $s = x + y\sqrt{2t}$, temos

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x + y\sqrt{2t}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad (3.24)$$

onde

$$u_0(x + y\sqrt{2t}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)(x+y\sqrt{2t})} - e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)(x+y\sqrt{2t})}, & \text{se } y \geq -\frac{x}{\sqrt{2t}}, \\ 0, & \text{se } y < -\frac{x}{\sqrt{2t}}. \end{cases}$$

Substituindo a expressão em (3.24), obtém-se

$$u(x, t) = I_1(x, t) - I_2(x, t),$$

$$I_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2t}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)(x+y\sqrt{2t})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

e

$$I_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2t}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)(x+y\sqrt{2t})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Analisando as expressões separadamente, obtém-se

$$I_1(x, t) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)x + \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)^2 t} N(d_1)$$

e

$$I_2(x, t) = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)x + \frac{1}{4}\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)^2 t} N(d_2),$$

onde N é a gaussiana dada por $N(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{q^2}{2}} dq$

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) \sqrt{2t},$$

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \sqrt{2t}.$$

De acordo com as mudanças feitas anteriormente e $V(S, \tau) = Kv(x, t)$, obtemos

$$V(S, \tau) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-\tau)}N(d_2), \quad (3.25)$$

e a derivada

$$V_S(S, \tau) = N(d_1) \quad (3.26)$$

com

$$N(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{q^2}{2}} dq, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}}$$

e

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}}.$$

3.3 Dedução explícita de uma família de soluções da equação de Black-Scholes linear

Vamos obter outra solução da equação de Black-Scholes por um procedimento diferente. Considere-se a equação de Black-Scholes linear (1.1). Substituindo $t = T - \tau$, a equação inicial será escrita sob a forma;

$$0 = V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rSV_S + rV \quad (3.27)$$

Uma forma alternativa de reduzir a equação (1.1) numa equação de calor e tendo em conta as seguintes substituições:

$$u = Ve^{-r\tau} \Leftrightarrow V = ue^{r\tau}.$$

Assim, substituindo na equação (1.1), temos;

$$rue^{r\tau} + e^{r\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 e^{r\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rSe^{r\tau} \frac{\partial u}{\partial S} - rue^{r\tau} \quad (3.28)$$

Simplificando as expressões da equação (3.28), temos,

$$0 = e^{r\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} + rSe^{r\tau} \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 e^{r\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$$

chegando ao resultado,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial \tau} + rS \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \quad (3.29)$$

Aplicando novas substituições de $y = \log S$ e $t = T - \tau$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dS} = \frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.30)$$

e,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.31)$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Substituindo (3.30) e (3.31) em (3.29) temos,

$$0 = -\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

A primeira derivada com respeito a y não se anula (a menos que $r = \frac{1}{2}\sigma^2$), porque não se teve em conta a derivada do movimento Browniano. Assim, para calcular a derivada temos que efetuar a seguinte substituição:

$$z = y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t,$$

obtendo um novo sistema de coordenadas (z, t) ,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}$$

o que conduz à seguinte da equação,

$$0 = -\frac{\partial u}{\partial t} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.32)$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3.33)$$

Sendo $u = u(z, t)$ a solução da equação de difusão (3.33) com $-\infty < z < \infty$ e $0 < t < T$, a solução da equação diferencial de variáveis separáveis será escrita na forma:

$$\begin{aligned} u &= u(z, t) = v(z)w(t) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= v(z)w'(t) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= v'(z)w(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= v''(z)w(t). \end{aligned}$$

Substituindo os termos na equação inicial, temos;

$$v(z)w'(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 v''(z)w(t)$$

tal que,

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{v''(z)}{v(z)}.$$

A igualdade é verdadeira se, $\lambda \in \mathbb{R}$, onde:

$$\begin{cases} \frac{w'(t)}{w(t)} = \lambda \\ \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{v''(z)}{v(z)} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln w(t) = \lambda t + c \\ \frac{1}{2}\sigma^2 v''(z) - \lambda v(z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w(t) = ce^{\lambda t} \\ v(z) = c_2 e^{-\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma} z} + c_3 e^{\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma} z} \end{cases}$$

com $\lambda > 0$

Logo:

$$u(z, t) = Ae^{\lambda t - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma} z} + Be^{\lambda t + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma} z}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Daí que a solução da equação de Black Scholes é dada por:

$$V(S, \tau) = Ae^{r\tau + \sqrt{\lambda} \ln(S) + \sqrt{\lambda} (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - \tau) + \frac{\lambda \sigma^2}{2} (T - \tau)} + Be^{-r\tau - \sqrt{\lambda} \ln(S) - \sqrt{\lambda} (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - \tau) + \frac{\lambda \sigma^2}{2} (T - \tau)}, \quad (3.34)$$

e a derivada

$$V_S(S, \tau) = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{S} \right) Ae^{r\tau + \sqrt{\lambda} \ln(S) + \sqrt{\lambda} (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - \tau) + \frac{\lambda \sigma^2}{2} (T - \tau)} - \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{S} \right) Be^{-r\tau - \sqrt{\lambda} \ln(S) - \sqrt{\lambda} (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - \tau) + \frac{\lambda \sigma^2}{2} (T - \tau)}. \quad (3.35)$$

A condição $V(0, \tau) = 0$, implica $B = 0$. Não vamos impor as restantes condições, pois assim esta solução é mais regular que a anterior e vai ser utilizada para testar os algoritmos.

3.4 Modelos de Volatilidade com custos de transação

Como tem sido apontado por vários autores [4, 6, 41], o modelo de Black-Scholes requer um ajuste de portfólio para proteger uma *hedge* sem risco. Na presença de custo de transação, esse ajuste, provavelmente, será mais caro, pois um número infinito de transações é obrigatório [59]. Mas o *hedger* precisa encontrar o equilíbrio entre os custos de transação que são necessários para reequilibrar o portfólio e os custos implícitos do erro de cobertura. Como resultado dessa cobertura "imperfeita", as opções podem ser excessivamente subestimadas, em que o lucro sem riscos é compensado pelo custo de transação, e não existe um preço único de equilíbrio, mas uma faixa de preços viáveis. Foi demonstrado que, num mercado com custos de transação, não há portfólio replicador para uma opção de compra europeia e o portfólio tem de dominar em vez de replicar o valor da opção (ver [6]).

Soner, Shreve e Cvitanic [52] provaram que o portfólio mínimo de cobertura de uma opção financeira é trivial, por isso, foram feitos esforços para facilitar o critério de condições de cobertura para melhor replicar o pagamento de títulos derivados. Devido à presença de custos de transação (ver [6], [40], [43]), o modelo clássico resulta numa equação de difusão parabólica forte ou totalmente não-linear e possivelmente degenerada, onde a volatilidade σ pode depender do tempo τ , do preço S ou das derivadas do preço da opção V . Neste trabalho, estudamos a equação de Black-Scholes não-linear com alguns modelos de custo de transação para opções europeias e americanas com $\tilde{\sigma}$ uma função de volatilidade modificada não constante

$$\tilde{\sigma}^2 := \tilde{\sigma}^2(\tau, S, V_S, V_{SS}).$$

Dessa maneira, as equações (1.1) e (1.2) tornam-se nas seguintes: equação de Black-Scholes não linear para as opções europeias;

$$0 = V_\tau + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(\tau, S, V_S, V_{SS}) S^2 V_{SS} + r S V_S - r V, \quad S > 0, \quad \tau \in]0, T], \quad (3.36)$$

para as opções americanas temos;

$$0 = V_\tau + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(\tau, S, V_S, V_{SS}) S^2 V_{SS} + (r - q) S V_S - r V, \quad S > 0, \quad \tau \in]0, T]. \quad (3.37)$$

3.5 Modelo de Leland

Em [43], Leland deduz que o preço da opção é a solução da equação de Black-Sholes não linear (3.37) e com a volatilidade modificada dada por

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 (1 + Le \times \text{sign}(V_{SS})). \quad (3.38)$$

Em (3.38) Le é o número de Leland e é dado por

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{k}{\sigma \sqrt{\delta\tau}} \right) \quad (3.39)$$

Com $\delta\tau$ o intervalo entre duas reposições sucessivas de portfólio, k o custo de transação por unidade monetária transacionada e σ a volatilidade histórica.

3.6 Modelo de Parás e Avellaneda

A partir do modelo binomial, e fazendo o uso do modelo de Bensaid em [7], Parás e Avellaneda assumem a volatilidade dada por Leland em (3.38), supondo a convexidade do preço da opção, pois no caso de $V_{SS} < 0$ e $Le \geq 1$ ($\tilde{\sigma} < 0$) a equação (3.37) torna-se matematicamente num problema mal posto e não possui solução geral para função *pay-off*. Para o caso $V_{SS} \geq 0$ e $Le \geq 1$ ($\tilde{\sigma} > 0$) eles propõem várias estratégias de cobertura.

3.7 Modelo de Boyle e Vorst

Usando o teorema do limite central, Boyle e Vorst [14], utilizam o modelo binomial com custos de transação e processos de negociação discretos, à medida em que $\delta\tau$ e K tendem para zero, o preço da opção converge para o preço de Black-Scholes com volatilidade modificada dada por,

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + Le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sign}(V_{SS}) \right). \quad (3.40)$$

Assim se $V_{SS} > 0$, a volatilidade modificada é dada por $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + Le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$ e a equação (3.37) transforma-se em linear.

3.8 Modelo de Hodges e Neuberger

Em [32] Hodges e Neuberger, sugerem uma abordagem diferente para os modelos de custos de transação. Consideram uma função utilidade e assumem que o comportamento do investidor é caracterizado por esta função. A função utilidade mede a satisfação relativa do investidor a partir de um *input*. Mostram que o preço de Black-Scholes é a diferença da utilidade máxima de riqueza, com ou sem opção passiva. Eles afirmam que o preço de uma opção num mercado com custos de transação deve ser igual ao montante único que compensa esta diferença.

3.9 Modelo de Barles e Soner

Em 1998 Barles e Soner [6] desenvolveram um modelo complexo que modifica a equação (1.1) e que engloba os custos de transação. Seguindo a função de utilidade com as abordagens de Hodges e Neuberger [32], propuseram uma função de volatilidade

$$\tilde{\sigma} = \sigma^2 (1 + \Psi(e^{r(T-\tau)} a^2 S^2 V_{SS})), \quad (3.41)$$

onde σ é a volatilidade histórica, $a = \frac{k}{\sqrt{\epsilon}}$ e a função $\Psi(A)$ é a solução para seguinte equação diferencial ordinária não linear (EDO)

$$\Psi'(A) = \frac{\Psi(A) + 1}{2\sqrt{A\Psi(A)} - A}, \quad A \neq 0, \quad (3.42)$$

com a condição inicial

$$\Psi(0) = 0. \quad (3.43)$$

Desta forma, a equação (3.37) torna-se na seguinte equação de Black-Scholes não linear para o modelo de Barles e Soner

$$0 = V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 + \Psi(e^{r(T-\tau)} a^2 S^2 V_{SS})\right) S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV, \quad S > 0, \tau \in]0, T[, \quad (3.44)$$

que consideraremos para as opções europeias, onde S paga continuamente dividendo $qSd\tau$ com um espaço de tempo $d\tau$.

Barles e Soner provaram a existência de uma solução viscosa para a opção de compra europeia com volatilidade dada por (3.41). Os seus resultados numéricos indicam um fator economicamente diferente do preço entre o modelo padrão de Black-Scholes e o modelo não linear com custos de transação.

É desconhecida uma solução explícita para o problema (3.42)-(3.43), no entanto podemos obter algumas informações sobre o seu comportamento.

Lema 3.1 ([6]). Uma análise direta da equação diferencial ordinária (3.42) mostra-nos que

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\Psi(A)}{A} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{A \rightarrow -\infty} \Psi(A) = -1. \quad (3.45)$$

Lema 3.2 ([6]). Se

$$A \geq 0 \quad \text{então} \quad \Psi(A) \geq 0$$

e se

$$A \leq 0 \quad \text{então} \quad -1 < \Psi(A) \leq 0.$$

Lema 3.3 ([6]). O diferencial $\Psi'(A) \geq 0$.

Lema 3.4 ([17]). Se $A \geq 0$ então $\Psi(A) \leq C_1 A + C_2$ com $C_1 \approx 1.1$ e $C_2 \approx 2.62$.

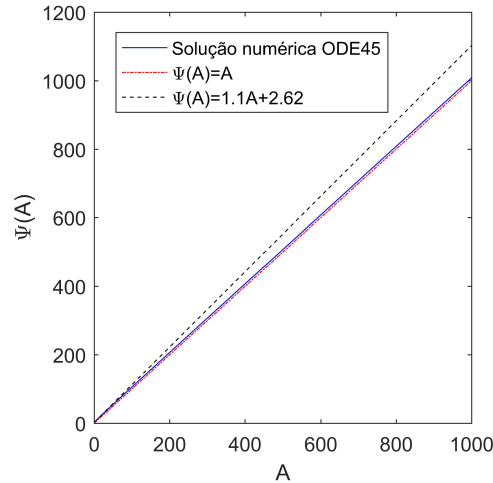


Figura 3.1: Simulação numérica de Ψ .

Uma solução numérica para o Problema (3.42)-(3.43) é representado na Figura 3.1. Pelos lemas acima referidos e a Figura 3.1 é razoável simplificar o modelo considerando $\Psi(A) = A$ para $A > 0$. Portanto, no Capítulo 4, estudamos a equação de Black-Scholes (3.44), na qual a volatilidade é assumida como sendo uma função do ativo subjacente S , tempo τ e *Gamma* da opção (o *Greek Gamma* é a segunda derivada V_{SS}) da forma,

$$0 = V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 (1 + e^{r(T-\tau)}a^2S^2V_{SS}) S^2V_{SS} + (r - q)SV_S - rV, \quad S > 0, \tau \in]0, T[. \quad (3.46)$$

Sabe-se que $V_{SS} \geq 0$ para as opções europeias de compra e venda na ausência dos custos de transação. No caso $V_{SS} < 0$, o Problema (3.46) é mal posto e sem solução geral para as funções *pay-off* (ver[5, 43] para casos semelhantes). Portanto, a partir de agora assumiremos que $V_{SS} \geq 0$.

3.10 Modelo de Kratka

Neste modelo, proposto por Krakta em [40], a melhor reposição sucessiva de portfólio δt entre as transações é encontrada para minimizar as taxas dos custos de transação e a taxa de risco de um portfólio desprotegido. Desta forma, o portfólio está bem protegido com o *Risk Adjusted Pricing Methodoly* (RAPM) e a volatilidade modificada é dada por

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + 3 \left(\frac{C^2 M}{2\pi} S V_{SS} \right)^{\frac{1}{3}} \right), \quad (3.47)$$

onde $M \geq 0$ é a medida do custo da transação e $C \geq 0$ é o prêmio de risco. De salientar que os modelos não lineares de custo de transação descritos acima são todos consistentes ao modelo linear, se os parâmetros adicionais para o custo da transação forem zero.

Neste trabalho vamos nos focar apenas em três modelos, como o de Leland, Barles e Soner e o de Kratka.

Capítulo 4

Equação Delta de Black-Scholes não linear

Neste capítulo, estudamos uma simplificação da equação de Black-Scholes não-linear proposta por Barles e Soner [6], com foco na correspondente equação Delta. Provamos a existência e unicidade da solução viscosa descontínua para a equação Delta. Primeiro regularizamos a equação, adicionando um pequeno parâmetro de perturbação ϵ , em seguida, aplicamos o método de limites fracos para provar a convergência das soluções clássicas do problema regularizado para a solução viscosa da equação Delta. O principal objetivo deste capítulo é também criar uma base para estabelecer a convergência de métodos numéricos robustos de elevada ordem, uma vez que o problema regularizado possui boas soluções regulares.

Na secção 1, o problema é descrito. Na secção 2, definimos o problema regularizado aproximado como uma equação geral não linear. A secção 3 é dedicada a obter algumas estimativas a priori e na secção 4 provamos a convergência da solução viscosa. Na secção 5 discretiza-se o problema e prova-se a convergência da solução semidiscreta e da solução discreta. Finalmente complementa-se a teoria com algumas simulações numéricas.

4.1 Equação Delta

Dos modelos de custos de transação apresentados no Capítulo 3, vamos estudar apenas o modelo de Barles e Soner, visto que, para os outros modelos, o estudo é similar.

Diferenciado (3.46) com respeito a S , o resultado é a equação

$$V_{S\tau} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \left(1 + e^{r(T-\tau)} a^2 S^2 V_{SS} \right) S^2 V_{SS} \right)_S + (r - q) S V_{SS} - q V_S = 0. \quad (4.1)$$

Diferenciando (3.1), temos

$$V_S(S, T) = \begin{cases} 0, & S < K \\ 1, & S > K \end{cases}. \quad (4.2)$$

Considerando $x = S$, $t = T - \tau$ e $u(x, t) = V_S(S, T - \tau)$, obtemos a seguinte equação diferencial parcial parabólica na forma divergente,

$$u_t = ((a_0(t, x, u_x) u_x)_x + (r - q) x u_x - q u, \quad x > 0, \quad t \in]0, T]. \quad (4.3)$$

a qual chamaremos de equação Delta. Com $a_0 = 0.5 x^2 \sigma^2 (1 + e^{rt} a^2 x^2 u_x)$ e, consideremos a correspondente condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < K \\ 0.5, & x = K \\ 1, & x > K. \end{cases} \quad (4.4)$$

Por (3.3) e (3.4), as condições de fronteira são

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (4.5)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 1, \quad t \in [0, T]. \quad (4.6)$$

Note-se que a condição $u(0, t) = 0$ é necessária para garantir a compatibilidade entre a equação e os dados iniciais. Não é possível definir u_0 em $x = K$ para o modelo de Black-Scholes, uma vez que $V(S, T)$ não é diferenciável em $S = K$. No entanto, como veremos à frente, esse valor não é essencial, portanto, consideraremos o valor $u_0(K) = 0.5$ para propósitos práticos.

Proposição 4.1. Se a função $V(S, \tau)$ é uma solução do problema (3.46), (3.1) e (3.4), então $u(x, t) = V_S(S, T - \tau)$ é uma solução do problema (4.3)-(4.6). Reciprocamente se $u(x, t)$ é solução do problema (4.3)-(4.6), então

$$V(S, \tau) = \int_0^S u(x, T - \tau) dx \quad (4.7)$$

é solução do problema (3.46), (3.1) e (3.4).

Demonstração

A primeira afirmação foi provada acima.

Suponhamos agora que $V(S, \tau)$ é dada por (4.7). Fazendo a mudança de variável $t = T - \tau$, temos que

$$\begin{aligned} V_\tau(S, \tau) &= \int_0^S u_\tau(x, T - \tau) dx = \int_0^S -u_t(x, t) dx = \\ &= - \int_0^S \left[\left(\frac{1}{2} \sigma^2 (1 + e^{rt} a^2 x^2 u_x) x^2 u_x \right)_x + (r - q) x u_x - q u \right] dx. \end{aligned}$$

Usando a integração por partes, obtemos

$$V_\tau(S, \tau) = -\frac{1}{2} \sigma^2 (1 + e^{rt} a^2 S^2 u_S(S, t)) S^2 u_S(S, t) - (r - q) S u(S, t) + r \int_0^S u(x, t) dx$$

Diferenciando (4.7) temos $V_S(S, \tau) = u(S, T - \tau)$ e $V_{SS}(S, \tau) = u_S(S, T - \tau)$. Substituindo na última equação, obtemos (3.46).

Para que se verifique (3.1), precisamos calcular o integral

$$\begin{aligned} V(S, T) &= \int_0^S u(x, 0) dx = \\ &= \begin{cases} \int_0^S 0 dx & , S < K \\ \int_0^K 0 dx + \int_K^K 0.5 dx & , S = K \\ \int_0^K 0 dx + \int_K^K 0.5 dx + \int_K^S 1 dx & , S > K \end{cases} = \begin{cases} 0 & , S < K \\ 0 & , S = K \\ S - K & , S > K \end{cases}. \end{aligned}$$

Como dissemos anteriormente, qualquer valor $u(K, 0)$ verifica (3.1).

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

A condição (3.2) é obtida aplicando a regra de L'Hôpital, isto é,

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, \tau)}{S - Ke^{-r(T-\tau)}} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\int_0^S u(x, T - \tau) dx}{S - Ke^{-r(T-\tau)}} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{u(S, T - \tau)}{1} = 1$$

por (4.6). A condição (3.3) é óbvia. Finalmente, a condição (3.4) é a mesma que (4.6). ■ Como é difícil lidar com o domínio espacial infinito, consideramos o domínio espacial $]0, b[$ com b suficientemente distante de K e a equação substituta de (4.6) é dada por

$$u(b, t) = 1, \quad t \in [0, T]. \quad (4.8)$$

Existem dois problemas principais relacionados à função Delta com os quais precisamos ainda de lidar. Primeiro, a condição inicial não é regular, possui uma descontinuidade em $x = K$ e, em segundo lugar, o termo de difusão torna-se zero em $x = 0$. Portanto, esperamos que a equação Delta tenha apenas solução viscosa.

O problema (4.3)-(4.5), (4.8) pode ser escrito como (2.18) com $\Omega =]0, b[$, considerando

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, t, u, u_x, u_{xx}) = & - (0.5x^2\sigma^2 (1 + 2e^{rt}a^2x^2u_x)) u_{xx} \\ & - 2\sigma^2 e^{rt} a^2 x^3 u_x^2 - (r - q + \sigma^2) x u_x + qu \end{aligned} \quad (4.9)$$

$u(0, t) = 0$, $u(b, t) = 1$ e u_0 definido por (4.4).

4.2 Regularização

Para se superar os problemas da equação Delta acima mencionados e obter uma equação mais adequada com soluções aproximadas suficientemente regulares, propomos uma pequena perturbação no problema inicial, considerando um novo problema aproximado. Buscamos uma função $u^\varepsilon(x, t)$ que satisfaz a equação

$$u_t^\varepsilon = ((a_0^\varepsilon(t, x, u_x^\varepsilon)u_x^\varepsilon)_x + (r - q)xu_x^\varepsilon - qu^\varepsilon, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (4.10)$$

com $a_0^\varepsilon = 0.5x^2\sigma^2(1 + e^{rt}a^2x^2u_x^\varepsilon) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (pequeno), com as condições de fronteira (4.5), (4.8) e a condição inicial

$$u^\varepsilon(x, 0) = \begin{cases} u_0(x), & 0 \leq x < K - \varepsilon \\ H_5(x), & K - \varepsilon \leq x \leq K + \varepsilon \\ u_0(x), & K + \varepsilon < x \leq b \end{cases} \quad (4.11)$$

Onde $H_5(x)$ é um polinómio de Hermite de grau 5 que satisfaz $H_5(K - \varepsilon) = u_0(K - \varepsilon)$, $H_5(K + \varepsilon) = u_0(K + \varepsilon)$, $H_5'(K - \varepsilon) = H_5''(K - \varepsilon) = H_5'(K + \varepsilon) = H_5''(K + \varepsilon) = 0$. Para definirmos uma solução fraca, multiplicamos (4.10) por ψ e integramos com respeito a x :

$$\int_0^b u_t^\varepsilon \psi dx - \int_0^b (a_0^\varepsilon u_x^\varepsilon)_x \psi dx - \int_0^b (r - q)xu_x^\varepsilon \psi dx + \int_0^b qu^\varepsilon \psi dx = 0.$$

Em seguida, integrando por partes, e assumindo que $\psi(0) = \psi(b) = 0$, obtemos

$$\int_0^b u_t^\varepsilon \psi dx + \int_0^b a_0^\varepsilon u_x^\varepsilon \psi_x dx - \int_0^b (r - q)xu_x^\varepsilon \psi dx + \int_0^b qu^\varepsilon \psi dx = 0. \quad (4.12)$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Note-se que para a equação (4.12) fazer sentido, devemos ter $\psi, \psi_x, u^\varepsilon, u_t^\varepsilon$ e $u_x^\varepsilon \in L^2(0, b)$, para $t \in]0, T[$. Levando em consideração as condições (4.5) e (4.8) escolhemos o espaço das funções teste

$$V_0 = \{\psi, \psi_x \in L^2(0, b) : \psi(0) = \psi(b) = 0\} = H_0^1(0, b),$$

e para os espaço das soluções, consideramos

$$V = \{u, u_t, u_x \in L^2(0, b) : u(0, t) = 0, u(b, t) = 1, \text{ para todo } t \in [0, T]\}.$$

Definição 4.2 (Solução fraca). Uma função $u^\varepsilon \in V$ é considerada uma solução fraca do problema (4.10)-(4.11) se satisfizer (4.11) e a relação (4.12) para todo $\psi \in V_0$, e $t \in]0, T[$. A relação (4.12) deve ser entendida como uma igualdade em $D'(0, T)$.

Vamos começar por provar que se a solução fraca de (4.4) existir e for suficientemente regular, então a solução fraca de (4.11) converge para solução fraca de (4.4) em $L^2(Q)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lema 4.3. Sejam $u_0(x)$ definido como em (4.4) e u_0^ε definido como em (4.11) então

$$\|u_0(x) - u_0^\varepsilon(x)\|_{L^2(0, b)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Usando o método das diferenças divididas

$$H_5(x) = \frac{1}{8\varepsilon^3}(x - K + \varepsilon)^3 - \frac{3}{16\varepsilon^4}(x - K + \varepsilon)^3(x - K - \varepsilon) + \frac{3}{16\varepsilon^5}(x - K + \varepsilon)^3(x - K - \varepsilon)^2.$$

Então, fazendo os cálculos obtém-se

$$\int_0^b (u_0(x) - u_0^\varepsilon(x))^2 dx = \int_{K-\varepsilon}^K (0 - H_5(x))^2 dx + \int_K^{K+\varepsilon} (1 - H_5(x))^2 dx = \frac{355}{3696}\varepsilon.$$

■

Teorema 4.4. Sejam $u(x, t)$ a solução fraca do problema (4.3)-(4.4) e $u^\varepsilon(x, t)$ a solução fraca do problema (4.10)-(4.11). Se $u_x \in L^2(Q_T)$, então

$$\|u - u^\varepsilon\|_{L^2(0, b)} < C\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad t \in]0, T]$$

onde C não depende ε .

Demonstração

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Subtraindo o problema inicial (4.3) pelo problema regularizado (4.10), multiplicando por uma função teste $\psi \in V_0$ e integrando em x obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^b (u_t - u_t^\varepsilon) \psi \, dx + \int_0^b \left(a_0(u_x) u_x - a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon) u_x^\varepsilon \right) \psi_x \, dx \\ &= \int_0^b (r - q)x (u_x - u_x^\varepsilon) \psi \, dx - \int_0^b q (u - u^\varepsilon) \psi \, dx \\ & \int_0^b (u_t - u_t^\varepsilon) \psi \, dx + \int_0^b \left((a_0(u_x) - a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon)) u_x + a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon) (u_x - u_x^\varepsilon) \right) \psi_x \, dx \\ &= \int_0^b (r - q)x (u_x - u_x^\varepsilon) \psi \, dx - \int_0^b q (u - u^\varepsilon) \psi \, dx \end{aligned}$$

Se definirmos $e = u - u^\varepsilon$

$$\begin{aligned} & \int_0^b e_t \psi \, dx + \int_0^b \left((a_0(u_x) - a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon)) u_x + a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon) e_x \right) \psi_x \, dx \\ &= \int_0^b (r - q)x e_x \psi \, dx - \int_0^b q e \psi \, dx \\ \Leftrightarrow & \int_0^b e_t \psi \, dx + \int_0^b a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon) e_x \psi_x \, dx = \int_0^b (r - q)x e_x \psi \, dx - \int_0^b q e \psi \, dx \\ & \quad - \int_0^b (a_0(u_x) - a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon)) u_x \psi_x \, dx, \end{aligned}$$

Fazendo $\psi = e \in V_0$ chegamos a

$$\begin{aligned} & \int_0^b e_t e \, dx + \int_0^b a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon) e_x^2 \, dx = \int_0^b (r - q)x e_x e \, dx - \int_0^b q e^2 \, dx \\ & \quad - \int_0^b (a_0(u_x) - a_0^\varepsilon(u_x^\varepsilon)) u_x e_x \, dx \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b e_t^2 \, dx + \varepsilon \int_0^b e_x^2 \, dx &\leq \frac{q-r}{2} \int_0^b e^2 \, dx - q \int_0^b e^2 \, dx + \int_0^b \varepsilon u_x e_x \, dx \\ &\quad - \int_0^b \frac{1}{2} \sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 e_x^2 u_x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b e_t^2 dx + \varepsilon \int_0^b e_x^2 dx &\leq \frac{q-r}{2} \int_0^b e^2 dx - q \int_0^b e^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b u_x^2 dx \\ &+ \varepsilon \int_0^b e_x^2 dx - \int_0^b \frac{1}{2} \sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 e_x^2 u_x dx \end{aligned}$$

A suposição de $u_x \geq 0$ permite-nos obter

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b e_t^2 dx \leq -\frac{q+r}{2} \int_0^b e^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b u_x^2 dx.$$

que pode ser escrito como

$$y'(t) \leq -c_0 y(t) + c_1 \varepsilon$$

com $y(t) = \int_0^b e^2 dx$. Aplicando o teorema de Gronwall, obtemos

$$y(t) \leq e^{-c_0 t} y(0) + e^{-c_0 t} c_1 \varepsilon$$

Recordando a definição de y e o Lema 4.3, o resultado está provado. ■

4.3 Estimativas a priori

Estamos interessados em obter soluções clássicas usando a teoria da existência de Leray-Schauder. Então, seguindo [42], precisamos obter estimativas a priori para todas as possíveis soluções fracas da equação (4.10).

Esta secção é dedicada a obter as estimativas desejadas. As principais ferramentas são cálculos integrais, incluindo desigualdades integrais e lemas de Gronwall. Uma vez que temos as condições

$$\psi(0) = \psi(b) = 0, \quad u^\varepsilon(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u^\varepsilon(b, t) = 1,$$

não podemos considerar $\psi = u^\varepsilon$ em (4.12), então vamos introduzir uma nova função v definida por

$$v(x, t) = u^\varepsilon(x, t) - \frac{x}{b}.$$

Temos as propriedades

$$u^\varepsilon(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{b},$$

$$u_t^\varepsilon(x, t) = v_t(x, t),$$

$$u_x^\varepsilon(x, t) = v_x(x, t) + \frac{1}{b} \quad \text{e} \quad u_{xx}^\varepsilon(x, t) = v_{xx}(x, t).$$

De acordo com (4.10) a nova função satisfaz

$$v_t = \left(a_0^\varepsilon \left(v_x + \frac{1}{b} \right) \left(v_x + \frac{1}{b} \right) \right)_x + (r - q)x \left(v_x + \frac{1}{b} \right) - q \left(v + \frac{x}{b} \right), \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow v_t &= \left(\left(0.5x^2\sigma^2 + 0.5\sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 \left(v_x + \frac{1}{b} \right) + \varepsilon \right) v_x \right)_x \\ &+ \left(\left(0.5x^2\sigma^2 + 0.5\sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 \left(v_x + \frac{1}{b} \right) + \varepsilon \right) \frac{1}{b} \right)_x \\ &+ (r - q)xv_x - qv + \frac{(r - 2q)x}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow v_t &= \left(\left(0.5x^2\sigma^2 + 0.5\sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 \left(v_x + \frac{1}{b} \right) + \varepsilon + \frac{0.5\sigma^2 e^{rt} a^2 x^4}{b} \right) v_x \right)_x \\ &+ (r - q)xv_x - qv + \frac{(\sigma^2 + r - 2q)x}{b} + \frac{2x^3\sigma^2 e^{rt} a^2}{b^2} \end{aligned}$$

isto é,

$$v_t = ((a_1 + a_2 + \varepsilon)v_x)_x + (r - q)xv_x - qv + f, \quad (x, t) \in Q_T \quad (4.14)$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.5x^2\sigma^2 \left(1 + e^{rt} a^2 x^2 \left(v_x + \frac{1}{b} \right) \right), \\ a_2 &= \frac{0.5\sigma^2 e^{rt} a^2 x^4}{b}, \\ f &= \frac{(\sigma^2 + r + 2q)x}{b} + \frac{2x^3\sigma^2 e^{rt} a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

As condições de fronteira e iniciais do problema são

$$v(0, t) = 0, \quad v(b, t) = 0, \quad (4.15)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) = \begin{cases} -\frac{x}{b}, & 0 \leq x < K - \varepsilon \\ H_5(x) - \frac{x}{b}, & K - \varepsilon \leq x \leq K + \varepsilon \\ 1 - \frac{x}{b}, & K + \varepsilon < x \leq b. \end{cases} \quad (4.16)$$

A definição de solução fraca para o Problema (4.14)-(4.16) é semelhante à Definição 4.2.

Observação 4.5. Assumir que $u_x \geq 0$ é equivalente a assumir que $v_x(x, t) + \frac{1}{b} \geq 0$, logo $a_1 \geq 0$, $(x, t) \in Q_T$.

Primeiro, provamos que a condição inicial é regular.

Lema 4.6. Seja $v_0(x)$ definida em (4.16), então para $x \in [0, b]$,

$$|v_0(x)| \leq C, \quad (4.17)$$

$$|v_0'(x)| \leq C\varepsilon^{-1}, \quad \text{e} \quad (4.18)$$

$$|v_0''(x)| \leq C\varepsilon^{-2}, \quad (4.19)$$

onde C não depende de ε .

Demonstração

Atendendo a (4.16), precisamos apenas de provar os resultados para $H_5(x)$ onde $H_5(x)$ é definido em (4.11). Já vimos que aplicando o método das diferenças divididas, podemos escrever

$$H_5(x) = \frac{1}{8\varepsilon^3}(x - K + \varepsilon)^3 - \frac{3}{16\varepsilon^4}(x - K + \varepsilon)^3(x - K - \varepsilon) + \frac{3}{16\varepsilon^5}(x - K + \varepsilon)^3(x - K - \varepsilon)^2 \quad x \in [K - \varepsilon, K + \varepsilon].$$

Usando a desigualdade triangular, temos que

$$|H_5(x)| \leq \frac{1}{8\varepsilon^3}|x - K + \varepsilon|^3 + \frac{3}{16\varepsilon^4}|x - K + \varepsilon|^3|x - K - \varepsilon| + \frac{3}{16\varepsilon^5}|x - K + \varepsilon|^3|x - K - \varepsilon|^2.$$

É claro que $|x - K + \varepsilon| \leq 2\varepsilon$ e $|x - K - \varepsilon| \leq 2\varepsilon$ para $x \in [K - \varepsilon, K + \varepsilon]$, e então

$$|H_5(x)| \leq 10,$$

o que prova (4.17). Diferenciando $H_5(x)$, obtemos

$$H'_5(x) = \frac{3}{8\varepsilon^3}(x - K + \varepsilon)^2 - \frac{9}{16\varepsilon^4}(x - K + \varepsilon)^2(x - K - \varepsilon) - \frac{3}{16\varepsilon^4}(x - K + \varepsilon)^3 + \frac{9}{16\varepsilon^5}(x - K + \varepsilon)^2(x - K - \varepsilon)^2 + \frac{6}{16\varepsilon^5}(x - K + \varepsilon)^3(x - K - \varepsilon)$$

Usando a desigualdade triangular temos

$$|H'_5(x)| \leq \frac{45}{2}\varepsilon^{-1}$$

e então (4.18) é provada. Aplicando também a mesma técnica para provar (4.19) estimamos

$$|H''_5(x)| \leq \frac{81}{2}\varepsilon^{-2}.$$

■

Teorema 4.7. Seja v uma solução fraca de (4.14)-(4.16) que satisfaz a Observação 4.5, então

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} \leq C \tag{4.20}$$

$$\text{e } \|v_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tag{4.21}$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Considerando $\psi = v$ na definição de solução fraca, obtemos

$$\int_0^b v_t v \, dx + \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_x^2 \, dx = (r - q) \int_0^b x v_x v \, dx - q \int_0^b v^2 \, dx + \int_0^b f v \, dx.$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado direito obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b v^2 \, dx + \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_x^2 \, dx = -\frac{r+q}{2} \int_0^b v^2 \, dx + \int_0^b f v \, dx.$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Pela desigualdade de Cauchy, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L^2(0,b)}^2 + \varepsilon \|v_x\|_{L^2(0,b)}^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(0,b)}^2 + \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(0,b)}^2.$$

Integrando com respeito a t ,

$$\|v(x,t)\|_{L^2(0,b)}^2 + 2\varepsilon \int_0^t \|v_x\|_{L^2(0,b)}^2 dt \leq \int_0^t \|f\|_{L^2(0,b)}^2 dt + \int_0^t \|v\|_{L^2(0,b)}^2 dt + \|v(x,0)\|_{L^2(0,b)}^2.$$

Tendo em conta que $v_0 \in L^2(0,b)$ e $\int_0^T \|f\|_{L^2(0,b)}^2 dt < C$ e aplicando a desigualdade de Gronwall, provamos (4.20), e então (4.21) segue facilmente. ■

O próximo teorema mostra que v é uniformemente limitada em L^∞ .

Teorema 4.8. Seja v uma solução fraca de (4.14)-(4.16) que satisfaça a Observação 4.5, então

$$\|v\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(0,b))} \leq C \quad (4.22)$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Multiplicando (4.14) por v^{2k-1} , $k \geq 1$, e integrando com respeito a x , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^b v_t v^{2k-1} dx + \int_0^b a_0^\varepsilon \left(v_x + \frac{1}{b} \right) v_x (2k-1) v^{2k-2} v_x dx \\ & + \int_0^b \frac{1}{b} a_0^\varepsilon \left(v_x + \frac{1}{b} \right) (2k-1) v^{2k-2} v_x dx \\ & = (r-q) \int_0^b x v_x v^{2k-1} dx - q \int_0^b v^{2k} dx + \int_0^b f v^{2k-1} dx \\ & \int_0^b v_t v^{2k-1} dx + (2k-1) \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon) v^{2k-2} v_x^2 dx \\ & = (r-q) \int_0^b x v_x v^{2k-1} dx - q \int_0^b v^{2k} dx + \int_0^b f v^{2k-1} dx \end{aligned}$$

Aplicando a integração por partes ao primeiro termo do lado direito, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \int_0^b v^{2k} dx + (2k-1) \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon) v^{2k-2} v_x^2 dx \\ & = -\frac{r + (2k-1)q}{2k} \int_0^b v^{2k} dx + \int_0^b f v^{2k-1} dx. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Pela Observação 4.5, podemos ignorar o segundo termo do lado esquerdo e, aplicando a desigualdade de Hölder, chegamos a

$$\|v\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1} \frac{d}{dt} \|v\|_{L^{2k}(0,b)} \leq \|f\|_{L^{2k}(0,b)} \|v\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1}.$$

Cancelando o termo $\|v\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1}$ temos

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{L^{2k}(0,b)} \leq \|f\|_{L^{2k}(0,b)}.$$

Integrando com respeito a t resulta em

$$\|v\|_{L^{2k}(0,b)} \leq \|v_0\|_{L^{2k}(0,b)} + \int_0^T \|f\|_{L^{2k}(0,b)} dt.$$

Como $v_0 \in L^\infty(0,b)$ e $\int_0^T \|f\|_{L^\infty(0,b)} dt < C$, fazendo $k \rightarrow \infty$, obtém-se (4.22). ■

A equação (4.14) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} v_t &= ((a_1 + a_2 + \varepsilon)v_x)_x + (r - q)xv_x - qv + f \\ &= ((a_1)_x v_x + (a_2)_x v_x + (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_{xx} + (r - q)xv_x - qv + f \\ &= \left(0.5x^2\sigma^2 \left(1 + e^{rt}a^2x^2 \left(v_x + \frac{1}{b}\right)\right)\right)_x v_x + \left(\frac{0.5\sigma^2 e^{rt}a^2x^4}{b}\right)_x v_x \\ &\quad + (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_{xx} + (r - q)xv_x - qv + f \\ &= \left(0.5x^2\sigma^2 + 0.5x^4\sigma^2 e^{rt}a^2 v_x + \frac{0.5x^4\sigma^2 e^{rt}a^2}{b}\right)_x v_x + \left(\frac{0.5\sigma^2 e^{rt}a^2x^4}{b}\right)_x v_x \\ &\quad + (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_{xx} + (r - q)xv_x - qv + f \\ &= \left(x\sigma^2 + 2x^3\sigma^2 e^{rt}a^2 v_x + 0.5x^4\sigma^2 e^{rt}a^2 v_{xx} + \frac{2x^3\sigma^2 e^{rt}a^2}{b}\right)_x v_x + \left(\frac{2x^3\sigma^2 e^{rt}a^2}{b}\right)_x v_x \\ &\quad + (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_{xx} + (r - q)xv_x - qv + f \\ &= (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_{xx} + 2x^3\sigma^2 e^{rt}a^2 v_x^2 + 0.5x^4\sigma^2 e^{rt}a^2 v_{xx}v_x \\ &\quad + \frac{4x^3\sigma^2 e^{rt}a^2}{b}v_x + (\sigma^2 + r - q)xv_x - qv + f \end{aligned}$$

$$v_t = (a_1 + a_3 + \varepsilon)v_{xx} + a_4 v_x^2 + a_5 v_x - qv + f \quad (4.23)$$

com

$$a_3 = 0.5x^4\sigma^2 e^{rt}a^2 \left(v_x + \frac{1}{b}\right) \geq 0 \text{ pela Observação 4.5,}$$

$$a_4 = 2x^3\sigma^2 e^{rt}a^2 \text{ e}$$

$$a_5 = \frac{4x^3\sigma^2 e^{rt}a^2}{b} + (r - q + \sigma^2)x.$$

Teorema 4.9. Se v é uma solução fraca de (4.14)-(4.16) que satisfaz a Observação 4.5, então

$$\|v_x\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

$$\text{e } \|v_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-1} \quad (4.25)$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Multiplicando (4.23) por v_{xx} , e integrando com respeito a x , temos

$$\begin{aligned} \int_0^b v_t v_{xx} dx &= \int_0^b (a_1 + a_3 + \varepsilon) v_{xx}^2 dx + \int_0^b a_4 v_x^2 v_{xx} dx \\ &\quad + \int_0^b a_5 v_x v_{xx} dx - q \int_0^b v v_{xx} dx + \int_0^b f v_{xx} dx \\ \Leftrightarrow [v_x v_t]_0^b - \int_0^b v_x v_{xt} dx - \int_0^b (a_1 + a_3 + \varepsilon) v_{xx}^2 dx &= \frac{1}{3} [v_x^3 a_4]_0^b \\ - \int_0^b \frac{v_x^3}{3} (a_4)_x dx + \frac{1}{2} [v_x^2 a_5]_0^b - \int_0^b \frac{v_x^2}{2} (a_5)_x dx - q \int_0^b v v_{xx} dx &+ \int_0^b f v_{xx} dx, \end{aligned}$$

onde usamos a integração por partes. Pela desigualdade de Hölder chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b v_x^2 dx + \varepsilon \int_0^b v_{xx}^2 dx &= C v_x^3(b, t) + C \int_0^b v_x^3 dx + C v_x^2(b, t) \\ + C \int_0^b v_x^2 dx + \frac{\varepsilon}{3} \int_0^b v_{xx}^2 dx + C \varepsilon^{-1} \int_0^b v^2 dx &+ \frac{\varepsilon}{3} \int_0^b v_{xx}^2 dx + C \varepsilon^{-1} \int_0^b f^2 dx. \end{aligned}$$

De acordo com (3.2) e (3.4), é razoável considerar $v_x(b, t) = 0$, pois b é suficientemente grande. Agora usamos as desigualdades de interpolação Gagliardo-Nirenberg para eliminar os termos com v_x^3 e, assim, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b v_x^2 dx + \frac{\varepsilon}{3} \int_0^b v_{xx}^2 dx \leq C \varepsilon^{-1} + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b v_{xx}^2 dx + C \varepsilon^{-1} \int_0^b v^6 dx.$$

Integrando com respeito a t e lembrando os teoremas anteriores, o resultado segue. ■

Corolário 4.10. Seja u uma solução fraca de (4.10)-(4.11) que satisfaz $u_x^\varepsilon > 0$, então

$$\int_0^T \|u_x^\varepsilon\|_{L^\infty(0,b)}^2 dt \leq C \varepsilon^{-1}$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Pela desigualdade de interpolação de Gagliardo-Nirenberg e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|u_x^\varepsilon\|_{L^\infty(0,b)} &\leq C \|u_{xx}^\varepsilon\|_{L^2(0,b)}^{\frac{1}{2}} \|u_x^\varepsilon\|_{L^2(0,b)}^{\frac{1}{2}} \\ \|u_x^\varepsilon\|_{L^\infty(0,b)}^2 &\leq C \|u_{xx}^\varepsilon\|_{L^2(0,b)}^2 + C \|u_x^\varepsilon\|_{L^2(0,b)}^2. \end{aligned}$$

Integrando com respeito a t e lembrando os teoremas anteriores, o resultado segue. ■

Teorema 4.11. Seja v uma solução fraca de (4.14)-(4.16) que satisfaz a Observação 4.5, então

$$\|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-1}$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Multiplicando (4.14) por v_t , e integrando com respeito x , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^b v_t^2 dx + \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_x v_{xt} dx &= (r - q) \int_0^b x v_x v_t dx - q \int_0^b v v_t dx \\ &\quad + \int_0^b f v_t dx \\ \Leftrightarrow \int_0^b v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon)(v_x^2)_t dx &\leq C \int_0^b v_x^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^b v_t^2 dx \\ &\quad - \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b v^2 dx - C \int_0^b f^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^b v_t^2 dx. \end{aligned}$$

Em relação ao segundo termo do lado esquerdo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon)(v_x^2)_t dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_x^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon)_t v_x^2 dx. \end{aligned}$$

Com

$$\begin{aligned} (a_2)_t &= \frac{0.5rx^4\sigma^2e^{rt}a^2}{b} = ra_2, \\ (a_1)_t &= 0.5rx^4\sigma^2e^{rt}a^2v_x + 0.5x^4\sigma^2e^{rt}a^2v_{xt} + \frac{0.5rx^4\sigma^2e^{rt}a^2}{b} \\ &= rba_2v_x + ba_2v_{xt} + ra_2, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^b v_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_1 + a_2 + \varepsilon)v_x^2 dx + \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b v^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_0^b bra_2v_x^3 dx \\ &\quad + \int_0^b ra_2v_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^b ba_2v_{xt}v_x^2 dx + C \int_0^b v_x^2 dx + C \int_0^b f^2 dx. \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\frac{1}{2} \int_0^b ba_2v_{xt}v_x^2 dx = \frac{1}{6} \int_0^b ba_2(v_x^3)_t dx = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \int_0^b ba_2v_x^3 dx - \frac{1}{6} \int_0^b bra_2v_x^3 dx,$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^b v_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_1 + a_2 - \frac{1}{3} b a_2 v_x + \varepsilon) v_x^2 dx + \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b v^2 dx \leq \\ \frac{1}{3} \int_0^b b r a_2 v_x^3 dx + \int_0^b r a_2 v_x^2 dx + C \int_0^b v_x^2 dx + C \int_0^b f^2 dx. \end{aligned}$$

Definimos $a_6 = 0.5x^2\sigma^2(1 + x^2a^2e^{rt}(\frac{2}{3}v_x + \frac{1}{b})) \geq 0$, pela Observação 4.5. Se aplicarmos as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, a última equação torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^b v_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_6 + a_2 + \varepsilon) v_x^2 dx + \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b v^2 dx \leq C \int_0^b v_{xx}^2 dx \\ + C \int_0^b v^6 dx + C \int_0^b v_x^2 dx + C \int_0^b f^2 dx. \end{aligned}$$

Integrando com respeito a t temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^b v_t^2 dx dt + \int_0^b (a_2 + a_6 + \varepsilon) v_x^2 dx + q \int_0^b v^2 dx \leq C \int_0^T \int_0^b v_{xx}^2 dx dt \\ + C \int_0^T \int_0^b v^6 dx dt + C \int_0^T \int_0^b f^2 dx dt + C \int_0^T \int_0^b v^2 dx dt + q \int_0^b v_0^2 dx \\ + \int_0^b (a_2 + a_6 + \varepsilon) v_x^2(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Aplicando o teorema anterior, o resultado segue. ■

Escrevendo a equação (4.10) como

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon = (0.5x^2\sigma^2 + \sigma^2e^{rt}a^2x^4u_x^\varepsilon + \varepsilon) u_{xx}^\varepsilon + 2\sigma^2a^2e^{rt}x^3(u_x^\varepsilon)^2 \\ + (r - q + \sigma^2)xu_x^\varepsilon - qu^\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.26)$$

e diferenciando com respeito a x , obtemos

$$\begin{aligned} u_{tx}^\varepsilon = ((0.5x^2\sigma^2 + \sigma^2e^{rt}a^2x^4u_x^\varepsilon + \varepsilon) u_{xx}^\varepsilon)_x + 4\sigma^2e^{rt}a^2x^3u_x^\varepsilon u_{xx}^\varepsilon \\ + (r - q + \sigma^2)xu_{xx}^\varepsilon + 6\sigma^2e^{rt}a^2x^2(u_x^\varepsilon)^2 + (r - 2q + \sigma^2)u_x^\varepsilon. \end{aligned}$$

Definindo $w = u_x^\varepsilon$, chegamos à equação

$$\begin{aligned} w_t = ((0.5x^2\sigma^2 + \sigma^2e^{rt}a^2x^4w + \varepsilon) w_x)_x + 4\sigma^2e^{rt}a^2x^3ww_x \\ + (r - q + \sigma^2)xw_x + 6\sigma^2e^{rt}a^2x^2w^2 + (\sigma^2 - 2q + r)w \end{aligned} \quad (4.27)$$

com as condições inicial e de fronteira

$$w(x, 0) = u'_0(x), \quad w(0, t) = w(b, t) = 0, \quad (4.28)$$

e satisfazendo $w = u_x^\varepsilon > 0$, $(x, t) \in Q_T$.

Teorema 4.12. Seja w uma solução fraca de (4.27)-(4.28), então

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,b))} \leq C\varepsilon^{-1} \quad (4.29)$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

A prova a seguir é semelhante à do Teorema 4.8. Multiplicando (4.27) por w^{2k-1} , $k \geq 1$, e integrando em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^b w_t w^{2k-1} dx + (2k-1) \int_0^b (0.5x^2\sigma^2 + \sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 w + \varepsilon) w_x^2 w^{2k-2} dx \\ &= \int_0^b 4\sigma^2 e^{rt} a^2 x^3 w_x w^{2k} dx + \int_0^b (r-q+\sigma^2) x w_x w^{2k-1} dx \\ & \quad + \int_0^b 6\sigma^2 e^{rt} a^2 x^2 w^{2k+1} dx + \int_0^b (\sigma^2 + r - 2q) w^{2k} dx. \end{aligned}$$

Aplicando a integração por partes no lado direito da equação, obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \int_0^b w^{2k} dx + (2k-1) \int_0^b (0.5x^2\sigma^2 + \sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 w + \varepsilon) w_x^2 w^{2k-2} dx \\ &= - \int_0^b \frac{12}{2k+1} \sigma^2 e^{rt} a^2 x^2 w^{2k+1} dx - \int_0^b \frac{r-q+\sigma^2}{2k} w^{2k} dx \\ & \quad + \int_0^b 6\sigma^2 e^{rt} a^2 x^2 w^{2k+1} dx + \int_0^b (\sigma^2 + r - 2q) w^{2k} dx. \end{aligned}$$

Tendo em conta as majorações dos coeficientes, temos

$$\frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \int_0^b w^{2k} dx + (2k-1)\varepsilon \int_0^b w_x^2 w^{2k-2} dx \leq C \int_0^b w^{2k+1} dx + C \int_0^b w^{2k} dx.$$

Ignorando o segundo termo, porque é não negativo pela Observação 4.5, e usando uma imersão de Sobolev, obtém-se

$$\|w\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^{2k}(0,b)} \leq C \|w\|_{L^\infty(0,b)}^2 b^{\frac{2k-1}{(2k-1)(2k)}} \|w\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1} + C \|w\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k}.$$

Por isso

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{L^{2k}(0,b)} \leq C \|w\|_{L^\infty(0,b)}^2 b^{\frac{1}{2k}} + C \|w\|_{L^{2k}(0,b)}.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall e o Corolário 4.10,

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^{2k}(0,b)} & \leq C \|w(x,0)\|_{L^{2k}(0,b)} + C b^{\frac{1}{2k}} \int_0^T \|w\|_{L^\infty(0,b)}^2 dt \\ & \leq C \|w(x,0)\|_{L^{2k}(0,b)} + C b^{\frac{1}{2k}} \varepsilon^{-1}. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Finalmente fazendo, $k \rightarrow \infty$ e atendendo a (4.18), o resultado está provado. ■
Estas estimativas acima calculadas são suficientes para análise da solução viscosa.

É sabido, no entanto, que a convergência de qualquer método numérico depende da regularidade da solução exata. Para obter uma ordem de convergência para os esquemas numéricos propostos, precisamos de algumas estimativas adicionais para a solução exata.

Teorema 4.13. Seja w a solução fraca de (4.27)-(4.28) que satisfaz $w > 0$, então

$$\begin{aligned}\|w_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,b))} &\leq C\varepsilon^{-14} \\ \|w_x\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} &\leq C\varepsilon^{-27/2}\end{aligned}$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

A equação (4.27) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}w_t = (0.5x^2\sigma^2 + \sigma^2e^{rt}a^2x^4w + \varepsilon)w_{xx} + \sigma^2e^{rt}a^2x^4w_x^2 + 8\sigma^2e^{rt}a^2x^3ww_x \\ + (r - q + 2\sigma^2)xw_x + 6\sigma^2e^{rt}a^2x^2w^2 + (r - 2q + \sigma^2)w.\end{aligned}\quad (4.30)$$

Para uma questão de simplicidade, usamos as seguintes notações

$$\begin{aligned}a_1 = 0.5x^2\sigma^2 + \sigma^2e^{rt}a^2x^4w & & a_2 = \sigma^2e^{rt}a^2x^4 & & a_3 = 8\sigma^2e^{rt}a^2x^3 \\ a_4 = (r - q + 2\sigma^2)x & & a_5 = 6\sigma^2e^{rt}a^2x^2 & & a_6 = (r - 2q + \sigma^2)\end{aligned}$$

Multiplicando (4.30) por w_{xx} , e integrando com respeito a x , obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^b w_t w_{xx} dx = \int_0^b (a_1 + \varepsilon) w_{xx}^2 dx + \int_0^b a_2 w_x^2 w_{xx} dx + \int_0^b a_3 w w_x w_{xx} dx \\ + \int_0^b a_4 w_x w_{xx} dx + \int_0^b a_5 w^2 w_{xx} dx + \int_0^b a_6 w w_{xx} dx.\end{aligned}$$

Usando a integração por partes, segue-se que

$$\begin{aligned}[w_x w_t]_0^b - \int_0^b w_x w_{xt} dx - \int_0^b (a_1 + \varepsilon) w_{xx}^2 dx = \frac{1}{3} [w_x^3 a_2]_0^b - \int_0^b \frac{1}{3} (a_2)_x w_x^3 dx \\ + \frac{1}{2} [a_3 w w_x^2]_0^b - \int_0^b \frac{1}{2} (a_3)_x w w_x^2 dx - \int_0^b \frac{1}{2} a_3 w_x^3 dx + \frac{1}{2} [a_4 w_x^2]_0^b \\ - \int_0^b \frac{1}{2} (a_4)_x w_x^2 dx + \int_0^b a_5 w^2 w_{xx} dx + \int_0^b a_6 w w_{xx} dx.\end{aligned}$$

Para b suficientemente grande, podemos considerar $w_x(t, b) = 0$. Consequentemente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b w_x^2 dx + \int_0^b (a_1 + \varepsilon) w_{xx}^2 dx = \int_0^b \frac{1}{3} (a_2)_x w_x^3 dx + \int_0^b \frac{1}{2} (a_3)_x w w_x^2 dx \\ + \int_0^b \frac{1}{2} a_3 w_x^3 dx + \int_0^b \frac{1}{2} (a_4)_x w_x^2 dx - \int_0^b a_5 w^2 w_{xx} dx - \int_0^b a_6 w w_{xx} dx.\end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Em seguida, usamos a desigualdade de interpolação de Gagliardo-Nirenberg para eliminarmos os termos com w_x^3 e a desigualdade de Young para lidar com os termos restantes, obtendo assim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b w_x^2 dx + \varepsilon \int_0^b w_{xx}^2 dx \\ & \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b w_{xx}^2 dx + C \int_0^b |w_x|^3 dx + C \int_0^b w_x^2 dx + C \int_0^b |w|^3 dx + C\varepsilon^{-1} \int_0^b w^2 dx \\ & + C\varepsilon^{-1} \int_0^b w^4 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^b w_{xx}^2 dx + C\varepsilon^{-3} \int_0^b w^6 dx + C\varepsilon^{-1} \int_0^b w^2 dx + C\varepsilon^{-1} \int_0^b w^4 dx. \end{aligned}$$

Fazendo o uso das estimativas anteriores, chegamos a

$$\frac{d}{dt} \int_0^b w_x^2 dx + \varepsilon \int_0^b w_{xx}^2 dx \leq C\varepsilon^{-27} + C \int_0^b w_x^2 dx.$$

Integrando em respeito a t e usando o Lema de Gronwall, obtemos os resultados pretendido. ■

Teorema 4.14. Seja w a solução fraca de (4.27)-(4.28) que satisfaça $w \geq 0$, então

$$\|w_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-15},$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Multiplicando (4.30) por w_t e integrando com respeito a x , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^b w_t^2 dx - \int_0^b (a_1 + \varepsilon) w_{xx} w_t dx = \int_0^b a_2 w_x^2 w_t dx + \int_0^b a_3 w w_x w_t dx \\ & + \int_0^b a_4 w_x w_t dx + \int_0^b a_5 w^2 w_t dx + \int_0^b a_6 w w_t dx \\ & \Leftrightarrow \int_0^b w_t^2 dx + \int_0^b (a_1 + \varepsilon) w_x w_{xt} dx + \int_0^b (a_1)_x w_x w_t dx = \int_0^b a_2 w_x^2 w_t dx \\ & + \int_0^b a_3 w w_x w_t dx + \int_0^b a_4 w_x w_t dx + \int_0^b a_5 w^2 w_t dx + \int_0^b a_6 w w_t dx \\ & \Leftrightarrow \int_0^b w_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^b (a_1 + \varepsilon) (w_x^2)_t dx + \int_0^b (a_1)_x w_x w_t dx \leq \int_0^b a_2 w_x^2 w_t dx \\ & + \int_0^b a_3 w w_x w_t dx + \int_0^b a_4 w_x w_t dx + \int_0^b a_5 w^2 w_t dx + \int_0^b a_6 w w_t dx. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

O segundo termo do lado esquerdo pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2} \int_0^b (a_1 + \varepsilon)(w_x^2)_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_1 + \varepsilon)w_x^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^b (a_1 + \varepsilon)_t w_x^2 dx.$$

Tendo em conta que

$$(a_1)_x = x\sigma^2 + 4\sigma^2 e^{rt} a^2 x^3 w + \sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 w_x$$

$$(a_1)_t = r\sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 w + \sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 w_t$$

obtemos

$$\int_0^b w_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_1 + \varepsilon)w_x^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^b r a_2 w w_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^b a_2 w_x^2 w_t dx + \frac{1}{2} \int_0^b a_3 w w_x w_t dx$$

$$+ \int_0^b (a_4 - x\sigma^2) w_x w_t dx + \int_0^b a_5 w^2 w_t dx + \int_0^b a_6 w w_t dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_0^b w_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_1 + \varepsilon)w_x^2 dx \leq C \int_0^b w^2 dx + C \int_0^b w_x^4 dx + C \int_0^b w_x^4 dx$$

$$+ \frac{1}{6} \int_0^b w_t^2 dx + C\varepsilon^{-2} \int_0^b w_x^2 dx + \frac{1}{6} \int_0^b w_t^2 dx + C \int_0^b w_x^2 dx + \frac{1}{6} \int_0^b w_t^2 dx$$

$$+ C \int_0^b w^4 dx + \frac{1}{6} \int_0^b w_t^2 dx + C \int_0^b w^2 dx + \frac{1}{6} \int_0^b w_t^2 dx.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^b w_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_1 + \varepsilon)w_x^2 dx \leq C \int_0^b w^2 dx + C \int_0^b w_x^4 dx$$

$$+ C\varepsilon^{-2} \int_0^b w_x^2 dx + C \int_0^b w^4 dx + C \int_0^b w_x^2 dx.$$

Aplicando a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg nos termos com w_x^4 , temos

$$\frac{1}{2} \int_0^b w_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^b (a_1 + \varepsilon)w_x^2 dx \leq C\varepsilon^{-2} \int_0^b w_{xx}^2 dx + C\varepsilon^{-2} \int_0^b w_x^2 dx$$

$$+ C \int_0^b w_x^2 dx + C \int_0^b w^4 dx + C \int_0^b w^2 dx.$$

Integrando com respeito a t , temos

$$\int_0^t \int_0^b w_t^2 dx dt + \varepsilon \int_0^b w_x^2 dx \leq \int_0^b (a_1 + \varepsilon)w_x^2(x, 0) dx + C\varepsilon^{-30} + C\varepsilon^{-6} + C\varepsilon^{-4}$$

$$+ C\varepsilon^{-1} \leq C\varepsilon^{-30}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

e o resultado segue. ■

Diferenciando a equação (4.30) com respeito a x e considerando $\nu = w_x$, obtemos

$$\nu_t = ((a_1 + \varepsilon)\nu_x)_x + c_1\nu\nu_x + c_2\nu_x + c_3\nu^2 + c_4\nu + c_5 \quad (4.31)$$

com

$$\begin{aligned} c_1 &= 2\sigma^2 e^{rt} a^2 x^4 & c_2 &= (r - q + 2\sigma^2)x + 8\sigma^2 e^{rt} a^2 x^3 w \\ c_3 &= 12\sigma^2 e^{rt} a^2 x^3 & c_4 &= 12\sigma^2 e^{rt} a^2 x^2 w + r - 2q + \sigma^2 & c_5 &= 12\sigma^2 e^{rt} a^2 x w^2 \end{aligned}$$

e

$$\nu(x, 0) = u_0'', \quad \nu(0, t) = \nu(b, t) = 0. \quad (4.32)$$

Agora acharemos estimativas para ν .

Lema 4.15. Se ν é uma solução fraca de (4.31)-(4.32), então

$$\int_0^T \|\nu\|_{L^\infty(0,b)}^2 dt \leq C\varepsilon^{-28},$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Aplicando a desigualdade de interpolação, seguida pela desigualdade de Hölder, temos

$$\|\nu\|_{L^\infty(0,b)} \leq C\|\nu_x\|_{L^2(0,b)}^{\frac{1}{2}}\|\nu\|_{L^2(0,b)}^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto

$$\|\nu\|_{L^\infty(0,b)}^2 \leq C\|\nu_x\|_{L^2(0,b)}^2 + C\|\nu\|_{L^2(0,b)}^2.$$

Integrando com respeito a t , obtemos

$$\int_0^T \|\nu\|_{L^\infty(0,b)}^2 dt \leq C \int_0^T \|\nu_x\|_{L^2(0,b)}^2 dt + C \int_0^T \|\nu\|_{L^2(0,b)}^2 dt.$$

O resultado agora segue do Teorema 4.13 e do facto de que $\nu_x = w_{xx}$ e $\nu = w_x$. ■

Teorema 4.16. Se ν é uma solução fraca (4.31)-(4.32), então

$$\|\nu\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-28}, \quad (4.33)$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Multiplicando (4.31) por ν^{2k-1} , onde $k \geq 1$ é um número inteiro positivo e, integrando com respeito a x , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^b \nu_t \nu^{2k-1} dx &= \int_0^b ((a_1 + \varepsilon)\nu_x)_x \nu^{2k-1} dx + \int_0^b c_1 \nu \nu_x \nu^{2k-1} dx + \int_0^b c_2 \nu_x \nu^{2k-1} dx \\ &\quad + \int_0^b c_3 \nu^2 \nu^{2k-1} dx + \int_0^b c_4 \nu \nu^{2k-1} dx + \int_0^b c_5 \nu^{2k-1} dx. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Aplicando a integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \int_0^b \nu^{2k} dx + \int_0^b (2k-2)(a_1 + \varepsilon) \nu^{2k-1} \nu_x^2 dx &= - \int_0^b \frac{(c_1)_x}{2k+1} \nu^{2k+1} dx \\ &- \int_0^b \frac{(c_2)_x}{2k} \nu^{2k} dx + \int_0^b c_3 \nu^{2k+1} dx + \int_0^b c_4 \nu^{2k} dx + \int_0^b c_5 \nu^{2k-1} dx \\ &= \frac{2k+2}{2k+1} \int_0^b c_3 \nu^{2k+1} dx + \frac{2k+1}{2k} \int_0^b c_6 \nu^{2k} dx + \int_0^b c_5 \nu^{2k-1} dx, \end{aligned}$$

com $c_6 = 8e^{rt} a^3 x^2 w_x + 60\sigma^2 e^{rt} a^2 x^2 w$.

Então

$$\begin{aligned} \|\nu\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1} \frac{d}{dt} \|\nu\|_{L^{2k}(0,b)} &\leq C \|\nu\|_{L^\infty(0,b)}^2 b^{\frac{1}{2k}} \|\nu\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1} \\ &+ C\varepsilon^{-4} \|\nu\|_{L^\infty(0,b)} b^{\frac{1}{2k}} \|\nu\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1} + C\varepsilon^{-8} b^{\frac{1}{2k}} \|\nu\|_{L^{2k}(0,b)}^{2k-1} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \|\nu\|_{L^{2k}(0,b)} &\leq C \|\nu\|_{L^\infty(0,b)}^2 b^{\frac{1}{2k}} + C\varepsilon^{-4} \|\nu\|_{L^\infty(0,b)} b^{\frac{1}{2k}} + C\varepsilon^{-8} b^{\frac{1}{2k}}. \end{aligned}$$

Integrando com respeito a t e considerando o Lema 4.15, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt} \|\nu\|_{L^{2k}(0,b)} dt &\leq C \int_0^t \|\nu\|_{L^\infty(0,b)}^2 b^{\frac{1}{2k}} dt + C\varepsilon^{-4} \int_0^t \|\nu\|_{L^\infty(0,b)} b^{\frac{1}{2k}} dt \\ &+ C\varepsilon^{-8} \int_0^t b^{\frac{1}{2k}} dt. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\|\nu\|_{L^{2k}(0,b)} \leq C b^{\frac{1}{2k}} T \varepsilon^{-28} + C\varepsilon^{-18} T b^{\frac{1}{2k}} + C\varepsilon^{-8} T b^{\frac{1}{2k}}.$$

Então, fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos (4.33). ■

Teorema 4.17. Se ν é uma solução fraca de (4.31)-(4.32), então

$$\|\nu_x\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-171}. \quad (4.34)$$

$$\|\nu_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-86}. \quad (4.35)$$

$$\|\nu_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,b))} \leq C\varepsilon^{-44}. \quad (4.36)$$

onde $C = C(a, \sigma, r, q, b, T)$ não depende de ε .

Demonstração

Repetindo as etapas das demonstrações dos Teoremas 4.13 e 4.14 para o Problema (4.31) - (4.32), temos o resultado necessário. ■

Mais estimativas para as derivadas de u^ε podem ser obtidas, usando as ferramentas acima. Apresentamos, no próximo Teorema, apenas aquelas que serão necessárias posteriormente.

Teorema 4.18. Seja u^ε a solução fraca (4.10), então

$$\begin{aligned} \|u_{xxt}^\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} &\leq C\varepsilon^{-44}, \\ \|u_{tt}^\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} &\leq C\varepsilon^{-12}, \\ \|u_{xtt}^\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} &\leq C\varepsilon^{-\frac{97}{2}}, \\ \|u_{ttt}^\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))} &\leq C\varepsilon^{-\frac{193}{2}}, \end{aligned}$$

onde C não depende de ε .

4.4 Convergência da solução viscosa

Nesta secção, provamos a convergência das soluções aproximadas u^ε para a solução viscosa u de (4.3)-(4.5) e (4.8). A ideia é que o chamado limite superior fraco \bar{u} e o limite inferior fraco \underline{u} sejam, respetivamente, uma subsolução e supersolução viscosa (4.3). Por um lado, temos sempre $\underline{u} \leq \bar{u}$ em Q_T e, por outro lado, o princípio de comparação implica que $\bar{u} \leq \underline{u}$ em Q_T . Finalmente, é fácil perceber que essa igualdade implica a convergência local L^∞ de u^ε para a função $u = \underline{u} = \bar{u}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, que acaba sendo uma solução viscosa limitada única de (4.3). Com as estimativas da última secção em mãos, agora podemos provar a existência e unicidade de uma solução clássica u^ε .

Teorema 4.19. O problema (4.10)-(4.11) tem uma única solução clássica

$$u^\varepsilon \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T). \quad (4.37)$$

Demonstração

Atendendo a (4.5) e (4.29), podemos considerar a equação (4.10) como uma equação linear com coeficientes limitados. Portanto, aplicando o Teorema 2.122, temos que $u_x^\varepsilon \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T)$ $0 < \alpha < 1$. O que nos permite provar que os coeficientes são Hölder contínuos. Usando a teoria de Leray-Schauder, ou seja, o Teorema 2.121, concluímos que existe uma solução clássica única de (4.10) satisfazendo (4.37).

■

Como u^ε é a solução clássica de (4.10)-(4.11), também é uma solução viscosa para cada $\varepsilon > 0$. Aplicando a Proposição 2.118, podemos provar o próximo resultado.

Teorema 4.20. Seja $u^\varepsilon(x, t)$ a solução clássica de (4.10)-(4.11) então \bar{u} e \underline{u} da Definição 2.115 são sub e supersoluções viscosas de (4.3), respetivamente.

Para aplicarmos o Teorema 2.120, precisamos dos dois próximos Lemas.

Lema 4.21. O operador \mathcal{F} definido em (4.9) é apropriado, isto é

$$\mathcal{F}(x, t, s, p, X) \leq \mathcal{F}(x, t, s, p, Y) \quad \text{sempre que} \quad X \geq Y \quad (4.38)$$

e

$$\mathcal{F}(x, t, r, p, X) \leq \mathcal{F}(x, t, s, p, X) \quad \text{sempre que} \quad r \leq s \quad (4.39)$$

onde $x, t, r, s, p, X, Y \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Pela definição de \mathcal{F} e pelas suposições sobre o problema, temos

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}(x, t, s, p, X) - \mathcal{F}(x, t, s, p, Y) \\
 &= s - a_0X - (a_0)_xp - (r - q)xp + qu - s + a_0Y + (a_0)_xp + (r - q)xp - qu \\
 &= s - a_0X - \left(x\sigma^2(1 + e^{rt}a^2x^2p) + 0.5x^2\sigma^2(2e^{rt}a^2x^2p + e^{rt}a^2x^2X) \right)p \\
 &\quad - (r - q)xp + qu - s + a_0Y + \left(x\sigma^2(1 + e^{rt}a^2x^2p) \right. \\
 &\quad \left. + 0.5x^2\sigma^2(2e^{rt}a^2x^2p + e^{rt}a^2x^2Y) \right)p + (r - q)xp - qu \\
 &= -a_0X - 0.5x^2\sigma^2(e^{rt}a^2x^2Xp) + a_0Y + 0.5x^2\sigma^2(e^{rt}a^2x^2Yp) \\
 &= a_0(Y - X) + 0.5x^2\sigma^2(e^{rt}a^2x^2p)(Y - X) \\
 &= \underbrace{\left(0.5x^2\sigma^2 + x^4\sigma^2e^{rt}a^2p \right)}_{\geq 0} (Y - X) \leq 0 \\
 &\quad \text{sempre que } X \geq Y
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}(x, t, r, p, X) - \mathcal{F}(x, t, s, p, X) \leq 0 \\
 &= r - a_0X - (a_0)_xp - (r - q)xp + qu - s + a_0X + (a_0)_xp + (r - q)xp - qu \\
 &= r - s \leq 0 \quad \text{sempre que } r \leq s
 \end{aligned}$$

■

Lema 4.22. Seja \mathcal{F} definido por (4.9), então \mathcal{F} satisfaz a Condição (2.119), ou seja, existe $\gamma > 0$ de tal forma que

$$\gamma(r - s) \leq \mathcal{F}(x, t, r, p, X) - \mathcal{F}(x, t, s, p, X) \text{ para } r \geq s \text{ e } x, t, p, X \in \mathbb{R},$$

e existe uma função $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ que satisfaz $\omega(0^+) = 0$ e é de tal forma que

$$\mathcal{F}(y, t, s, \alpha(x - y), Y) - \mathcal{F}(x, t, s, \alpha(x - y), X) \leq \omega(\alpha|x - y|^2 + |x - y|)$$

para $x, y \in]0, b[, t \in]0, T[$ fixo, $X, Y \in \mathbb{R}$ e α dado por

$$-3\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{bmatrix} \leq 3\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Demonstração

A primeira condição foi provada no lema anterior com $\gamma = q$. Com relação à segunda condição, temos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - 3\alpha & 3\alpha \\ 3\alpha & -Y - 3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq 0$$

Multiplicando as matrizes teremos

$$\begin{bmatrix} xX - 3\alpha x + 3\alpha y & yY - 3\alpha y + 3\alpha x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq 0$$

$$x^2X - 3\alpha x^2 + 3\alpha xy - y^2Y - 3\alpha y^2 + 3\alpha xy \leq 0$$

$$x^2X - y^2Y - 3\alpha(x^2 - 2xy + y^2) \leq 0$$

$$x^2X - y^2Y \leq 3\alpha(x - y)^2. \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y, t, s, \alpha(x - y), Y) - \mathcal{F}(x, t, s, \alpha(x - y), X) &= 0.5\sigma^2(x^2X - y^2Y) + \\ &+ \sigma^2 e^{rt} a^2 \alpha(x - y)(x^4X - y^4Y) + (r - q)\alpha(x - y)^2 + \\ &+ 2\sigma^2 e^{rt} a^2 \alpha^2(x - y)^2(x^3 - y^3). \end{aligned}$$

Usando as estimativas dadas por (4.41), temos

$$\begin{aligned} 0.5\sigma^2(x^2X - y^2Y) + \sigma^2 e^{rt} a^2 \alpha(x - y)(x^4X - y^4Y) + (r - q)\alpha(x - y)^2 + \\ + 2\sigma^2 e^{rt} a^2 \alpha^2(x - y)^2(x^3 - y^3) \leq 1.5\sigma^2 \alpha(x - y)^2 + 3\sigma^2 e^{rt} a^2 \alpha^2(x - y)^3 \\ + (r - q)\alpha(x - y)^2 + 2\sigma^2 e^{rt} a^2 \alpha^2(x - y)^2(x^3 - y^3). \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(y, t, s, \alpha(x - y), Y) - \mathcal{F}(x, t, s, \alpha(x - y), X) \leq C(|x - y| + \alpha|x - y|^2).$$

O resultado agora segue, levando $\omega(s) = Cs$. ■

Considerando o Teorema 4.20 e o Teorema 2.120, agora temos o seguinte teorema.

Teorema 4.23. Seja \bar{u} e \underline{u} definida na Definição 2.115 respetivamente, então $\bar{u} \leq \underline{u}$ qtp, em Q_T .

Pela definição $\underline{u} \leq \bar{u}$ em Q_T e pelo teorema anterior $\underline{u} \geq \bar{u}$, ou seja, em Q_T , considere-mos $u = \underline{u} = \bar{u}$. Usando o Lema 2.117, concluímos que, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, u^ε converge em L^∞ para a solução viscosa $u = \underline{u} = \bar{u}$ de (4.3).

4.5 Discretização do problema regularizado

Nesta secção vamos utilizar uma função de custos de transação realista, que não é infinitamente crescente em relação à quantidade de transações e, que não torna a volatilidade negativa.

Definição 4.24. Definimos uma função de custos de transação $\Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -1 < \Upsilon(\xi) \leq M < +\infty, \\ \Upsilon(0) = 0, \\ \Upsilon(\xi) - \Upsilon(\eta) = C_1(\xi - \eta), \quad 0 < C_1 < C < \infty, \end{cases} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Um exemplo de Υ para $M > 1$, pode ser

$$\Upsilon(\xi) = \frac{M - 1}{2} + \frac{M + 1}{2} \tanh\left(\frac{5\xi}{M} - \tanh^{-1}\left(\frac{M - 1}{M + 1}\right)\right).$$

Consideraremos o problema regularizado

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = ((0.5x^2\sigma^2(1 + \Upsilon(e^{rt}a^2x^2u_x^\varepsilon)) + \varepsilon)u_x^\varepsilon)_x + (r - q)xu_x^\varepsilon - qu^\varepsilon, (x, t) \in Q_T \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < K - \varepsilon \\ H_5(x) & , \quad K - \varepsilon \leq x \leq K + \varepsilon \\ 1 & , \quad K + \varepsilon < x \leq b \end{cases} \\ u^\varepsilon(0, t) = 0, \quad t \in]0, T[\\ u^\varepsilon(b, t) = 1, \quad t \in]0, T[\end{cases}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

e a definição de solução fraca idêntica à Definição 4.2 com o coeficiente do termo difusivo $b_0^\varepsilon = 0.5x^2\sigma^2(1 + \Upsilon(e^{rt}a^2x^2u_x^\varepsilon)) + \varepsilon$. Considere-se $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n_p}$ a base de Lagrange para S_h^0 associada aos nós $\{P_j\}_{j=1}^{n_p}$. Então podemos representar todos os $\psi^h \in S_h^0$ na forma

$$\psi^h(x) = \sum_{j=1}^{n_p} \psi_j \varphi_j(x). \quad (4.42)$$

O problema semidiscreto, baseado na Definição 4.2, consiste em encontrar u^h pertencente a S_h , para $t \geq 0$, de modo que, para todo $\psi^h \in S_h^0$ e $t \in]0, T[$,

$$\int_0^b u_t^h \psi^h dx + \int_0^b b_0^h u_x^h \psi_x^h dx = \int_0^b (r - q)x u_x^h \psi^h dx - \int_0^b q u^h \psi^h dx. \quad (4.43)$$

com $b_0^h = 0.5x^2\sigma^2(1 + \Upsilon(e^{rt}a^2x^2u_x^h)) + \varepsilon$.

Teorema 4.25. Se u é a solução fraca de (4.10)-(4.11) e u^h é a solução de (4.43), então

$$\|u - u^h\|_{L^2(0,T;L^2(0;b))} \leq C\varepsilon^{-1}h^k, \quad \text{para } t \in]0, T[,$$

onde C não depende de ε , h ou k , mas pode depender de $\|u_x\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0;b))}$, $\|u\|_{L^2(0,T,H^{k+1}(\Omega))}$ ou $\|u_t\|_{L^2(0,T,H^{k+1}(\Omega))}$.

Demonstração

Fazendo

$$u(x, t) - u^h(x, t) = (u(x, t) - I_h u(x, t)) + (I_h u(x, t) - u^h(x, t)) = \rho(x, t) + \theta(x, t),$$

temos

$$\|u - u^h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\rho(x, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}$$

e, pelo Lema 2.73,

$$\|\rho(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Em seguida, determinamos o limite superior para $\|\theta(x, t)\|_{L^2(\Omega)}$. Subtraindo a Equação (4.12) (com $\psi = \psi^h \in S_h^0 \subset V_0$) pela Equação (4.43), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^b (u_t - u_t^h) \psi^h dx + \int_0^b (b_0^\varepsilon u_x - b_0^h u_x^h) \psi_x^h dx &= \int_0^b (r - q)x (u_x - u_x^h) \psi^h dx \\ &\quad - \int_0^b q (u - u^h) \psi^h dx \\ \Leftrightarrow \int_0^b (u_t - u_t^h) \psi^h dx + \int_0^b (b_0^\varepsilon u_x - b_0^h u_x + b_0^h u_x - b_0^h u_x^h) \psi_x^h dx \\ &= \int_0^b (r - q)x (u_x - u_x^h) \psi^h dx + \int_0^b q (u - u^h) \psi^h dx. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Se considerarmos $u_t - u_t^h = u_t - I_h u_t + I_h u_t - u_t^h = \rho_t + \theta_t$, então

$$\begin{aligned} \int_0^b \theta_t \psi^h dx + \int_0^b b_0^h \theta_x \psi_x^h dx &= - \int_0^b b_0^h \rho_x \psi_x^h dx - \int_0^b \rho_t \psi^h dx - \int_0^b (b_0^\varepsilon - b_0^h) u_x \psi_x^h dx \\ &+ (r - q) \int_0^b x \rho_x \psi^h dx + (r - q) \int_0^b x \theta_x \psi^h dx - q \int_0^b \rho \psi^h dx - q \int_0^b \theta \psi^h dx. \end{aligned}$$

Definindo $\psi^h = \theta \in S_h^0$,

$$\begin{aligned} \int_0^b \theta_t \theta dx + \int_0^b b_0^h \theta_x^2 dx &= - \int_0^b b_0^h \rho_x \theta_x dx - \int_0^b \rho_t \theta dx - \int_0^b (b_0^\varepsilon - b_0^h) u_x \theta_x dx \\ &+ (r - q) \int_0^b x \rho_x \theta dx + (r - q) \int_0^b x \theta_x \theta dx - q \int_0^b \rho \theta dx - q \int_0^b \theta^2 dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Resolvendo termo a termo a equação (4.44)

- $\int_0^b \theta_t \theta dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$
- $\int_0^b b_0^h \theta_x^2 dx \geq \varepsilon \|\theta_x\|_{L^2(\Omega)}^2$
- $-\int_0^b \rho_t \theta dx \leq \frac{1}{2} \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$
- $(r - q) \int_0^b x \rho_x \theta dx \leq C \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$
- $(r - q) \int_0^b x \theta_x \theta dx = \frac{r-q}{2} \left([x\theta^2]_0^b - \int_0^b \theta^2 dx \right) = \frac{(q-r)}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$
- $q \int_0^b \rho \theta dx \leq \frac{q}{2} \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{q}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$
- $q \int_0^b \theta^2 dx = q \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2$
- $-\int_0^b (b_0^\varepsilon - b_0^h) u_x^\varepsilon \theta_x dx = -\int_0^b C_1 0.5x^4 \sigma^2 e^{rt} a^2 \rho_x u_x^\varepsilon \theta_x dx - \int_0^b C_1 0.5x^4 \sigma^2 e^{rt} a^2 u_x^\varepsilon \theta^2 dx$
 $\leq C\varepsilon^{-1} \|u_x^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\theta_x\|_{L^2(\Omega)}^2$
- $-\int_0^b b_0^h \rho_x \theta_x dx \leq C\varepsilon^{-1} \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\theta_x\|_{L^2(\Omega)}^2$

Usando a integração por partes e a desigualdade de Hölder, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\theta_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^{-1} \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\theta_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\varepsilon^{-1} \|u_x\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,b))}^2 \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\theta_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & + \frac{(q-r)}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{q}{2} \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{q}{2} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + q \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned}$$

Usando o Teorema 4.12, podemos concluir que

$$\frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0 \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + q \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \varepsilon^{-2} \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Aplicando o Teorema de Gronwall, chegamos à desigualdade

$$\|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{C_0 T} \int_0^T \left(\|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + q \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \varepsilon^{-2} \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt.$$

Pelo Lema 2.73,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|\rho_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dt & \leq Ch^{2(k+1)} \|u_t\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))}^2, \\
 \int_0^T \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 dt & \leq Ch^{2(k+1)} \|u\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))}^2, \\
 \int_0^T \|\rho_x\|_{L^2(\Omega)}^2 dt & \leq Ch^{2k} \|u\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))}^2,
 \end{aligned}$$

e então

$$\|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^{-2} h^{2k}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|u - u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt & \leq \int_0^T \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
 & \leq Ch^{2(k+1)} + C\varepsilon^{-1} h^{2k} \\
 & \leq C\varepsilon^{-2} h^{2k},
 \end{aligned}$$

onde C não depende de h ou k . ■

Nota 4.26. Para polinômios de grau 1 ($k = 1$), se considerarmos que para esta função de custos de transação as estimativas obtidas nos Teorema 4.17 e Teorema 4.18 são semelhantes, então

$$\|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^{-88} h^4 + \varepsilon^{-8} \varepsilon^{-4} h^4 + \varepsilon^{-2} \varepsilon^{-4} h^2 \leq C\varepsilon^{-88} h^2$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|u - u^h\|_{L^2(\Omega)}^2 dt & \leq C\varepsilon^{-4} h^4 + C\varepsilon^{-88} h^2 \\
 & \leq C\varepsilon^{-88} h^2.
 \end{aligned}$$

o que sugere que nas simulações numéricas o valor de ε deve ser moderado, pois tem uma grande influência no erro.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Lembremos que qualquer função $\psi^h \in S_h^0$ pode ser escrita como (4.42) e que qualquer função $u^h \in S_h$ pode ser escrita como

$$u^h(x, t) = \sum_{i=1}^{n_p} \varphi_i(x) U_i(t) + \varphi_{n_p+1}(x). \quad (4.45)$$

Agora, substituindo (4.42) e (4.45) na Equação (4.43) e simplificando as expressões, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias, que pode ser escrito em forma matricial:

$$MU'(t) + A(U(t))U(t) - BU(t) - CU(t) = D(t), \quad (4.46)$$

com a incógnita

$$U(t) = [U_1, \dots, U_{n_p}]^T.$$

e as matrizes são dadas por:

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}]_{n_p \times n_p}, & a_{ij} &= \int_0^b b_0^h(U) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx, \\ B &= [b_{ij}]_{n_p \times n_p}, & b_{ij} &= \int_0^b (r - q)x \varphi_i(x) \varphi_j'(x) dx, \\ C &= [c_{ij}]_{n_p \times n_p}, & c_{ij} &= \int_0^b -q \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ M &= [m_{ij}]_{n_p \times n_p}, & m_{ij} &= \int_0^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} D &= [d_i]_{n_p \times 1}, & d_i &= \int_0^b b_0^h(U) \varphi_i'(x) \varphi_{n_p+1}'(x) dx + \int_0^b (r - q)x \varphi_i(x) \varphi_{n_p+1}'(x) dx \\ & & & - \int_0^b q \varphi_i(x) \varphi_{n_p+1}(x) dx \end{aligned}$$

Em geral, a solução $U(t)$ não é explicitamente conhecida para todos os $t \geq 0$, portanto, é necessário usar um método numérico para obter uma solução aproximada.

4.5.1 Discretização no tempo

Prestemos atenção à discretização do tempo. Vamos considerar a partição uniforme $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, de $[0, T]$, com o passo δ . Pelo método de Crank-Nicolson,

avaliado (4.43) em $t = t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{t_n+t_{n+1}}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^b u_t^h(x, t_{n+1/2}) \psi^h dx + \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} u_x^h(x, t_{n+1/2}) \psi_x^h dx \\ &= \int_0^b (r - q) x u_x^h(x, t_{n+1/2}) \psi^h dx - \int_0^b q u^h(x, t_{n+1/2}) \psi^h dx, \quad \forall \psi^h \in S_h^0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$(4.48)$$

Usando o expoente (n) para representar a função avaliada em $t = t_n$ e as aproximações

$$u_t^h(x, t_{n+1/2}) \approx \frac{u^h(x, t_{n+1}) - u^h(x, t_n)}{\delta} = \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\delta} = \bar{\partial}U^{(n+1)}, \quad (4.49)$$

$$u^h(x, t_{n+1/2}) \approx \frac{u^h(x, t_{n+1}) + u^h(x, t_n)}{2} = \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2} = \hat{U}^{(n+1)}, \quad (4.50)$$

o problema totalmente discreto é encontrar $U^{(n+1)}$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_0^b \bar{\partial}U^{(n+1)} \psi^h dx + \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} \hat{U}_x^{(n+1)} \psi_x^h dx = \int_0^b (r - q) x \hat{U}_x^{(n+1)} \psi^h dx \\ & - \int_0^b q \hat{U}^{(n+1)} \psi^h dx, \quad \forall \psi^h \in S_h^0, \quad n = 0, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Teorema 4.27. Seja u a solução fraca de (4.10) e $U^{(n)}$ a solução (4.51). Então, se δ for suficientemente pequeno,

$$\|u(x, t_n) - U^{(n)}(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{-1}(h^k + \delta^2), \quad n = 0, \dots, N$$

onde C não depende de ε , h ou k , mas pode depender de $\|u_x\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,b))}$, $\|u_{xx}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))}$, $\|u_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))}$, $\|u_{xxt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))}$, $\|u_{xtt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))}$ ou $\|u_{ttt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))}$.

Demonstração

Subtraindo a Equação (4.12), avaliada em $t = t_{n+1/2}$ com $\psi = \psi^h \in S_h^0 \subset V_0$, da Equação (4.51) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^b \left(u_t^{(n+1/2)} - \bar{\partial}U^{(n+1)} \right) \psi^h dx + \int_0^b \left(b_0^{\varepsilon(n+1/2)} u_x^{(n+1/2)} - b_0^{h(n+1/2)} \hat{U}_x^{(n+1)} \right) \psi_x^h dx \\ &= \int_0^b (r - q) x \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{U}_x^{(n+1)} \right) \psi^h dx - \int_0^b q \left(u^{(n+1/2)} - \hat{U}^{(n+1)} \right) \psi^h dx. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Adicionando e subtraindo $b_0^{h(n+1/2)} u_x^{(n+1/2)}$ no segundo termo, no lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \left(u_t^{(n+1/2)} - \bar{\partial} U^{(n+1)} \right) \psi^h dx + \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{U}_x^{(n+1)} \right) \psi_x^h dx \\
 &= \int_0^b (r - q)x \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{U}_x^{(n+1)} \right) \psi^h dx - \int_0^b q \left(u^{(n+1/2)} - \hat{U}^{(n+1)} \right) \psi^h dx \\
 &+ \int_0^b \left(b_0^{\varepsilon(n+1/2)} - b_0^{h(n+1/2)} \right) u_x^{(n+1/2)} \psi_x^h dx. \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Seja

$$\hat{\theta}^{(n+1)} = \frac{\theta^{(n+1)} + \theta^{(n)}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{\partial} \theta^{(n+1)} = \frac{\theta^{(n+1)} + \theta^{(n)}}{\delta}$$

Então, fazendo $\psi^h = \hat{\theta}^{(n+1)}$ na Equação (4.53), temos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \left(u_t^{(n+1/2)} - \bar{\partial} U^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx + \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{U}_x^{(n+1)} \right) \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx \\
 &= \int_0^b (r - q)x \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{U}_x^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx - \int_0^b q \left(u^{(n+1/2)} - \hat{U}^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx \\
 &+ \int_0^b \left(b_0^{\varepsilon(n+1/2)} - b_0^{h(n+1/2)} \right) u_x^{(n+1/2)} \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx. \tag{4.54}
 \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo funções adequadas, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \bar{\partial} \theta^{(n+1)} \hat{\theta}^{(n+1)} dx + \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} \left(\hat{\theta}_x^{(n+1)} \right)^2 dx \\
 &= - \int_0^b \left(u_t^{(n+1/2)} - \bar{\partial} u^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx - \int_0^b \bar{\partial} \rho^{(n+1)} \hat{\theta}^{(n+1)} dx \\
 &- \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x^{(n+1)} \right) \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx - \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} \hat{\rho}_x^{(n+1)} \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx \\
 &+ \int_0^b (r - q)x \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx + \int_0^b (r - q)x \hat{\rho}_x^{(n+1)} \hat{\theta}^{(n+1)} dx \\
 &- q \int_0^b \left(u^{(n+1/2)} - \hat{u}^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx - q \int_0^b \hat{\rho}^{(n+1)} \hat{\theta}^{(n+1)} dx \\
 &- \int_0^b 0.5\sigma^2 C_1 e^{rt} a^2 x^4 \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x^{(n+1)} \right) u_x^{(n+1/2)} \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx - \int_0^b 0.5\sigma^2 C_1 e^{rt} a^2 x^4 \hat{\rho}_x^{(n+1)} u_x^{(n+1/2)} \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx
 \end{aligned}$$

$$- \int_0^b 0.5\sigma^2 C_1 e^{rt} a^2 x^4 u_x^{(n+1/2)} \left(\hat{\theta}_x^{(n+1)} \right)^2 dx - \int_0^b \frac{r+q}{2} \left(\hat{\theta}^{(n+1)} \right)^2 dx$$

Considerando termo por termo, obtemos

- $$\begin{aligned} \bullet - \int_0^b \left(u_t^{(n+1/2)} - \bar{\partial} u^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^b \left(u_t^{(n+1/2)} - \bar{\partial} u^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^b \left(\hat{\theta}^{(n+1)} \right)^2 dx \\ \leq C\delta^4 \int_0^b (u_{ttt}(x, \xi))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^b \left(\hat{\theta}^{(n+1)} \right)^2 dx \\ \leq C\delta^4 \|u_{ttt}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,b))}^2 + \frac{1}{2} \|\hat{\theta}^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \bullet - \int_0^b \bar{\partial} \rho^{(n+1)} \hat{\theta}^{(n+1)} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^b \left(\bar{\partial} \rho^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^b \left(\hat{\theta}^{(n+1)} \right)^2 dx \\ \leq Ch^{2(k+1)} \|u_t\|_{L^\infty(0,T,H^{k+1}(0,b))}^2 + \frac{1}{2} \|\hat{\theta}^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \bullet - \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x^{(n+1)} \right) \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx \\ \leq C\varepsilon^{-1} \int_0^b \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b \left(\hat{\theta}_x^{(n+1)} \right)^2 dx \\ \leq C\varepsilon^{-1} \delta^4 \|u_{xtt}\|_{L^\infty(0,T,L^2(0,b))}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\hat{\theta}_x^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \bullet - \int_0^b b_0^{h(n+1/2)} \hat{\rho}_x^{(n+1)} \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx \\ \leq C\varepsilon^{-1} \int_0^b \left(\hat{\rho}_x^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b \left(\hat{\theta}_x^{(n+1)} \right)^2 dx \\ \leq C\varepsilon^{-1} h^{2k} \|u\|_{L^\infty(0,T,H^{k+1}(0,b))}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\hat{\theta}_x^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \bullet \int_0^b (r-q)x \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx \\ \leq \frac{(r-q)b}{2} \int_0^b \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x \right)^2 dx + \frac{(r-q)b}{2} \int_0^b \left(\hat{\theta}^{(n+1)} \right)^2 dx \\ \leq C\delta^4 \|u_{xtt}\|_{L^\infty(0,T,L^2(0,b))}^2 + \frac{(r-q)b}{2} \|\hat{\theta}^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^b (r-q)x \hat{\rho}_x^{(n+1)} \hat{\theta}^{(n+1)} dx &\leq \frac{(r-q)b}{2} \int_0^b \left(\hat{\rho}_x^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{(r-q)b}{2} \int_0^b \left(\hat{\theta}^{(n+1)} \right)^2 dx \\ &\leq Ch^{2k} \|u\|_{L^\infty(0,T,H^{k+1}(0,b))}^2 + \frac{(r-q)b}{2} \|\hat{\theta}^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet -q \int_0^b \left(u^{(n+1/2)} - \hat{u}^{(n+1)} \right) \hat{\theta}^{(n+1)} dx \\ &\leq \frac{q}{2} \int_0^b \left(u^{(n+1/2)} - \hat{u}^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{q}{2} \int_0^b \left(\hat{\theta}^{(n+1)} \right)^2 dx \\ &\leq C\delta^4 \|utt\|_{L^\infty(0,T,L^2(0,b))}^2 + \frac{q}{2} \|\hat{\theta}^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet -q \int_0^b \hat{\rho}^{(n+1)} \hat{\theta}^{(n+1)} dx &\leq \frac{q}{2} \int_0^b \left(\hat{\rho}^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{q}{2} \int_0^b \left(\hat{\theta}^{(n+1)} \right)^2 dx \\ &\leq Ch^{2(k+1)} \|u\|_{L^\infty(0,T,H^{k+1}(0,b))}^2 + \frac{q}{2} \|\hat{\theta}^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet - \int_0^b (0.5\sigma^2 C_1 e^{rt} a^2 x^4) \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x^{(n+1)} \right) u_x^{(n+1/2)} \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx \\ &\leq C\varepsilon^{-1} \|u_x\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(0,b))}^2 \int_0^b \left(u_x^{(n+1/2)} - \hat{u}_x^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b \left(\hat{\theta}_x^{(n+1)} \right)^2 dx \\ &\leq C\varepsilon^{-1} \delta^4 \|u_x\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(0,b))}^2 \|u_{xtt}\|_{L^\infty(0,T,L^2(0,b))}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\hat{\theta}_x^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet - \int_0^b (0.5\sigma^2 C_1 e^{rt} a^2 x^4) \hat{\rho}_x^{(n+1)} u_x^{(n+1/2)} \hat{\theta}_x^{(n+1)} dx \\ &\leq C\varepsilon^{-1} \|u_x\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(0,b))}^2 \int_0^b \left(\hat{\rho}_x^{(n+1)} \right)^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^b \left(\hat{\theta}_x^{(n+1)} \right)^2 dx \\ &\leq C\varepsilon^{-1} h^{2k} \|u_x\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(0,b))}^2 \|u\|_{L^\infty(0,T,H^{k+1}(0,b))}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\hat{\theta}_x^{(n+1)}\|_{L^2(0,b)}^2 \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \bar{\partial} \|\hat{\theta}^{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\hat{\theta}_x^{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \varepsilon \|\hat{\theta}_x^{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + (r-q)b + q) \|\hat{\theta}^{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\varepsilon^{-2} h^{2k} + Ch^{2(k+1)} + C\varepsilon^{-2} \delta^4 + C\delta^4, \end{aligned}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Isto é,

$$(1 - \delta(1 + (r - q)b + q)) \|\theta^{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1 + \delta(1 + (r - q)b + q)) \|\theta^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta\varepsilon^{-2}(h^{2k} + \delta^4).$$

Para um δ pequeno, $1 - \delta(1 + (r - q)b + q) > 0$. Iterando, concluímos que

$$\|\theta^{(n+1)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|\theta^{(0)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\varepsilon^{-2}(h^{2k} + \delta^4)$$

onde C não depende ε , h ou k . Adicionando a estimativa para ρ , o resultado é provado. ■

Nota 4.28. Para polinômios de grau 1 ($k = 1$), e tendo em conta a nota 4.26, podemos considerar

$$\|\theta^{(n)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\varepsilon^{-88}h^4 + \varepsilon^{-36}h^2 + \varepsilon^{-97}\delta^4 + \varepsilon^{-106}\delta^4 + \varepsilon^{-193}\delta^4) \leq C(\varepsilon^{-88}h^2 + \varepsilon^{-193}\delta^4)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(x, t_n) - U^{(n)}(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &\leq C\varepsilon^{-4}h^4 + C(\varepsilon^{-88}h^2 + \varepsilon^{-193}\delta^4) \\ &\leq C(\varepsilon^{-88}h^2 + \varepsilon^{-193}\delta^4). \end{aligned}$$

Mais uma vez, observamos que o parâmetro ε deve ter uma forte influência no erro.

Avaliando a Equação (4.46) em $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ e usando as aproximações em (4.49) e (4.50), obtemos

$$\begin{aligned} &(2M + \delta(A^{(n+1)} + B + C))U^{(n+1)} \\ &= (2M - \delta(A^{(n+1)} + B + C))U^{(n)} - 2\delta D^{(n+1/2)}, \\ &n = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Para cada $n = 0, 1, \dots, N - 1$, o sistema de equações algébricas não lineares (4.55) pode ser resolvido usando o método do ponto fixo :

$$U_0^{(n+1)} = U^{(n)}$$

$$\begin{aligned} &(2M + \delta(A_m^{(n+1)} + B + C))U_{m+1}^{(n+1)} \\ &= (2M - \delta(A_m^{(n+1)} + B + C))U^{(n)} - 2\delta D^{(n+1/2)}, \\ &m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

4.5.2 Aproximação da solução inicial da equação de Black-Scholes

Tendo calculado a solução aproximada para a derivada do problema inicial, passamos a calcular a sua solução. Pela equação (4.7)

$$V(x_{i+1}, t_j) = V(x_i, t_j) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, T - t_j) dx.$$

Como usamos os polinômios de Lagrange para resolver a nossa equação, propomos o uso de Fórmulas de Newton-Cotes. Por exemplo, para polinômios de grau $k = 1, 2$, usamos,

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

em cada intervalo espacial, as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} V(x_{i+1}, t_j) &\approx V^{(j)}(x_{i+1}) \\ &= V^{(j)}(x_i) + \frac{h}{2} \left(U_i^{(N-j)} + U_{i+1}^{(N-j)} \right), \quad \text{para } k = 1, \\ &= V^{(j)}(x_i) + \frac{h}{6} \left(U_{2i}^{(N-j)} + 4U_{2i+1}^{(N-j)} + U_{2i+2}^{(N-j)} \right), \quad \text{para } k = 2, \end{aligned}$$

$j = 1, \dots, N$.

4.5.3 Resultados numéricos

Nesta secção, apresentamos os resultados da implementação em Matlab da teoria apresentada. Primeiro, validamos o código simulando a equação linear e analisamos a ordem da convergência. Em seguida, no exemplo 2, estudamos a influência dos custos de transação no preço do derivado.

Exemplo 1

A solução analítica da equação de Black-Scholes linear (1.1), onde r e σ são ambas constantes e satisfazem a condição (3.1), é dada pela fórmula da solução (3.25) e a sua derivada (3.26). Conhecer a solução explícita exata permitiu-nos calcular o erro exato das aproximações. Simulámos a Equação (1.1), usando os parâmetros $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $b = 1$, $K = 0.4$, $T = 1$ e $u_0(x) = \max\{x - 0.4, 0\}$.

Na Figura 4.1, é estudado o erro para ε , onde considerámos um valor fixo $h = 0.01$, $\delta = 0.001$ e diferentes valores de $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}$. Para cada valor de ε , calculámos o erro na norma $L^2(0, b)$ e coletámos os resultados no gráfico apresentado. A partir do gráfico, podemos concluir que a ordem de convergência é 1, tanto para a solução quanto para a derivada, que está de acordo ao que provamos no teorema.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

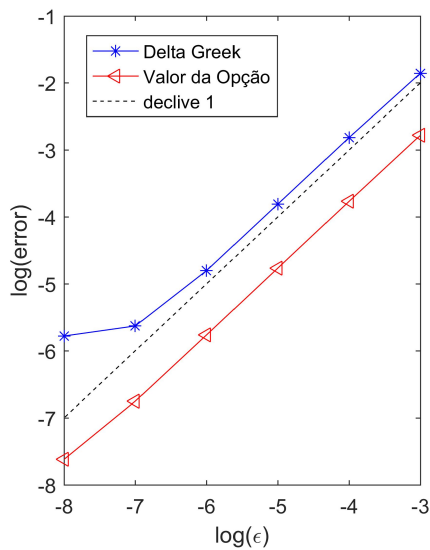


Figura 4.1: Análise de convergência para ϵ .

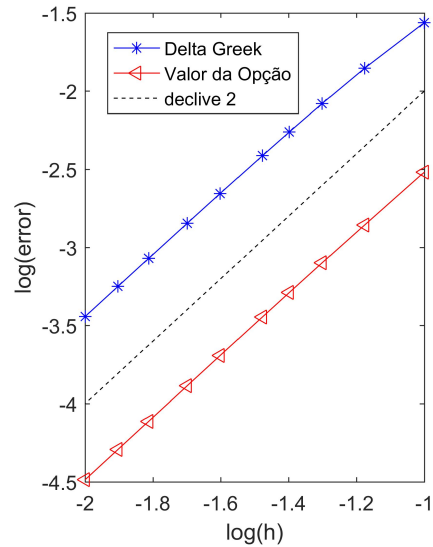


Figura 4.2: Análise de convergência para h com $k = 1$.

Na Figura 4.2 e 4.3, é estudado o erro para h , em que consideramos um valor fixo $\delta = 0.001$ e valores diferentes de $h = 0.1, 0.06667, 0.05, 0.04, 0.033, 0.025, 0.015385, 0.0125, 0.01$. Para cada valor de h , calculamos o erro na norma $L^2(0, b)$ e coletamos os resultados no gráfico apresentado. A partir do gráfico, podemos concluir que a ordem de convergência é 2 para polinômios de grau 1 e, se usarmos polinômios de grau 2, a ordem de convergência é 3 para a derivada e 4 para a solução. Suspeitamos que essa diferença de comportamento se deve à fórmula do erro de Newton-Cotes.

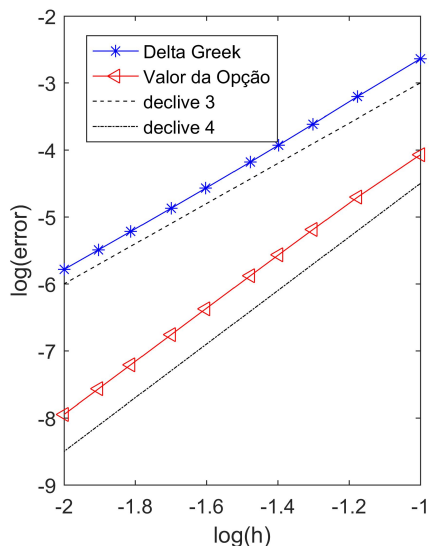


Figura 4.3: Análise de convergência para h com $k = 2$.

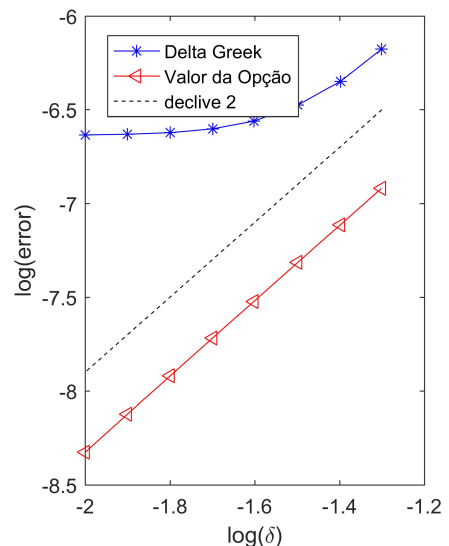


Figura 4.4: Análise de convergência para δ .

Para δ , não foi possível calcular a ordem de convergência, porque no Teorema 4.27 há uma condição em δ . Portanto, se fixarmos ϵ e h e simularmos valores pequenos para δ , o único erro que obtemos é o erro de h . No entanto, para a solução, observamos uma

convergência de ordem 2 (Figura 4.4). Consideramos um valor fixo $h = 0.01$ e valores diferentes de $\delta = 0.0625, 0.05, 0.04, 0.031766, 0.025, 0.02, 0.012576, 0.01$.

Exemplo 2

Neste exemplo, simulamos a equação não linear para diferentes valores de "a" com a opção de compra europeia. Representamos a solução e a derivada da equação de Black-Scholes não linear, usando polinômios de Lagrange de grau 2.

Os parâmetros usados são $r = 0.1, \sigma = 0.2, q = 0.05, a^2 = 0, 0.13, 0.25, 0.35$ e $0.75, b = 1, K = 0.4, T = 1$ e $u_0(x) = \max\{x - 0.4, 0\}$.

O gráfico mostra a diferença entre o preço linear e o não linear, com valores diferen-

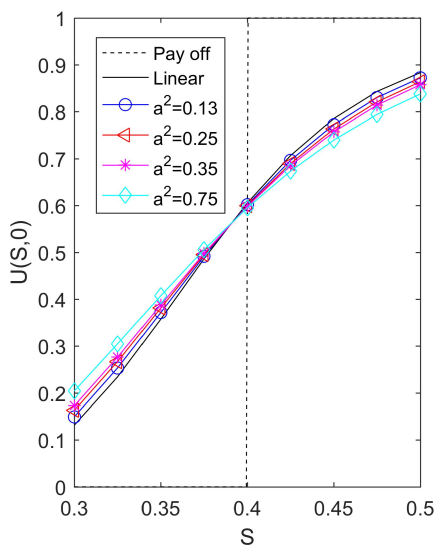


Figura 4.5: Derivada para diferentes valores de a .

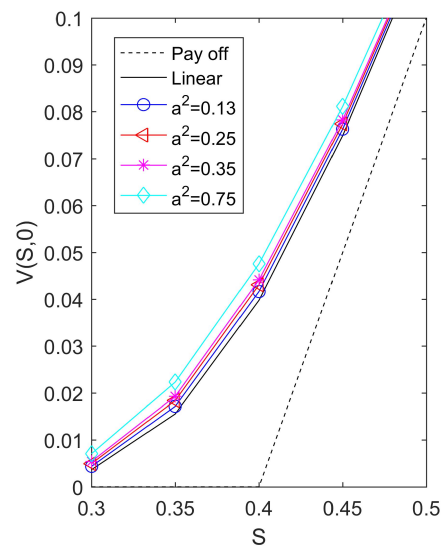


Figura 4.6: Solução para diferentes valores de a .

tes de "a". A diferença aumenta à medida que "a" aumenta. Como esperado, para o modelo de custo de transação apresentado aqui, os valores da solução e da derivada são mais altos em relação ao modelo linear.

Capítulo 5

Equação de Black-Scholes não linear

Neste capítulo, vamos estudar a equação geral de Black-Scholes não linear, para opções europeias e americanas, tendo em conta os modelos de custos de transação apresentados no Capítulo 3. Na discretização no espaço utiliza-se o método elementos finitos com polinómios de Hermite e na discretização no tempo o método de Crank-Nicolson. Tivemos que impor algumas condições artificiais no problema em questão de modo a definir completamente os polinómios de Hermite. A aproximação da posição da fronteira da equação é calculada simultaneamente com a solução do problema, isto para o caso das opções americanas. No final, são apresentados alguns resultados numéricos da implementação do método em Matlab.

5.1 Opções europeias

Uma vez que o domínio espacial de S é infinito, vamos truncá-lo num valor b suficientemente grande.

Fazendo a mudança de variável $u(x, t) = V(S, T - \tau)$ em (3.15) com $\sigma^2 = \tilde{\sigma}^2$ obtemos então o problema

$$u_t = \frac{1}{2}x^2\tilde{\sigma}^2(x, t, u_{xx})u_{xx} + (r-q)xu_x - ru + f, \quad \text{para } 0 < x < b, \quad 0 < t < T. \quad (5.1)$$

Sob as condições iniciais e de fronteira

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < b,$$

$$\begin{cases} u(0, t) = g_1(t) \\ u(b, t) = g_2(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = g_3(t) \\ u_x(b, t) = g_4(t) \end{cases} \quad 0 < t < T, \quad (5.2)$$

onde $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$, $g_4(t)$ e $u_0(x)$ são funções limitadas reais conhecidas. Observe-se que (5.1) - (5.2) é um modelo geral que inclui o problema em estudo.

$$u(x, 0) = \max\{K - x, 0\} \quad \text{ou} \quad u(x, 0) = \max\{x - K, 0\}$$

por (3.1) e (3.5).

Para uma opção de compra, a condição (3.3) é satisfeita, considerando $g_1(t) = 0$. Para b suficientemente grande as condições, (3.2) e (3.4) podem ser aproximadas por $g_2(t) = b - Ke^{-rt}$ e $g_4(t) = 1$.

Como necessitamos outra condição, motivada pelo comportamento da solução para a equação linear, consideramos $g_3(t) = 0$.

Para uma opção de venda, (3.6), (3.7) e (3.8) implicam que $g_1(t) = Ke^{-rt}$, $g_2(t) = 0$, $g_3(t) = -1$ e $g_4(t) = 0$.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

Multiplicando (5.1) pela função teste w e integrando em $]0, b[$, obtemos

$$\int_0^b u_t w \, dx = \int_0^b \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 x^2 u_{xx} w \, dx + \int_0^b (r - q) x u_x w \, dx - \int_0^b r u w \, dx + \int_0^b f w \, dx. \quad (5.3)$$

Como $\tilde{\sigma}^2$ depende de u_{xx} , a integração por partes não nos ajuda. Para que a relação (5.3) faça sentido, devemos ter u, u_t, u_x e $u_{xx} \in L^2(0, b)$, ou seja, u deve estar em $C^1(0, b)$, para $t \in]0, T]$. De acordo com as condições em (5.2), escolhemos o espaço da solução

$$V = \{u, u_t, u_x, u_{xx} \in L^2(0, b) : u(0, t) = g_1(t), u(b, t) = g_2(t), u_x(0, t) = g_3(t), u_x(b, t) = g_4(t) \quad \forall t \in [0, T]\}.$$

e para o espaço das funções teste

$$V_0 = \{w, w_x, w_{xx} \in L^2(0, b) : w(0) = w(b) = w_x(0) = w_x(b) = 0\},$$

Observação 5.1. Para os opções europeias a função $f = 0$ e o parâmetro $q = 0$, por causa de suas características.

5.1.1 Discretização no espaço

Considerando a discretização $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} = b$ de $[0, b]$, com espaçamento h . Como precisamos de uma solução em C^1 , definimos para cada nó x_i , dois polinômios de interpolação de Hermite, $\varphi_i(x)$ e $\psi_i(x)$. Os polinômios de interpolação de Hermite têm suporte $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, e são definidos por

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} -2 \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 - 3 \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 + 1, & x \in [x_{i-1}, x_i[, \\ 2 \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^3 - 3 \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 + 1, & x \in [x_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

e

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)^3}{h^2} + \frac{(x-x_i)^2}{h} + (x-x_i), & x \in [x_{i-1}, x_i[, \\ \frac{(x-x_i)^3}{h^2} - \frac{(x-x_i)^2}{h} - (x-x_i), & x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Os polinômios de Hermite satisfazem as seguintes propriedades de interpolação:

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \varphi_j'(x_i) = 0,$$

$$\psi_j(x_i) = 0, \quad \psi_j'(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 0, \dots, m+1$$

e, portanto, satisfazem as condições de continuidade necessárias .

Sejam $T > 0$ e $\mathcal{H} = \langle \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m+1} \rangle$ o sub espaço vetorial gerado pelos $2m + 2$ elementos da base de Hermite. Se considerarmos o espaço da solução aproximada

$$V_m = \{u_m(x, t) \in \mathcal{H} : u_m(0, t) = g_1(t), u_m(b, t) = g_2(t), (u_m)_x(0, t) = g_3(t), (u_m)_x(b, t) = g_4(t), \quad \forall t \in [0, T]\} \subset V.$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

e o espaço das funções teste

$$V_{0m} = \{w_m(x) \in \mathcal{H} : w_m(0) = w_m(b) = (w_m)_x(0) = (w_m)_x(b) = 0\} \subset V_0$$

Uma função $u_m \in V_m$ é dita uma solução aproximada de (5.1) se, para todo $t \in]0, T]$, satisfizer

$$\begin{aligned} & \int_0^b (u_m)_t w_m dx - \int_0^b \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 x^2 (u_m)_{xx} w_m dx - \int_0^b (r - q)x (u_m)_x w_m dx \\ & + \int_0^b r u_m w_m dx = \int_0^b f w_m dx, \quad \forall w_m \in V_{0m}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Todas as funções $w_m \in V_{0m}$ podem ser escritas como

$$w_m(x) = \sum_{i=1}^m w_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^m z_i \psi_i(x), \quad (5.5)$$

e todas as funções $u_m \in V_m$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned} u_m(x, t) &= \varphi_0(x) g_1(t) + \psi_0(x) g_3(t) + \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) u_i(t) + \psi_i(x) v_i(t) \\ &+ \varphi_{m+1}(x) g_2(t) + \psi_{m+1}(x) g_4(t). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Substituindo (5.5) e (5.6) na equação (5.4) e simplificando as expressões, temos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \varphi_0(x) \varphi_i(x) g_1'(t) dx + \int_0^b \varphi_0(x) \psi_i(x) g_1'(t) dx + \int_0^b \psi_0(x) \varphi_i(x) g_3'(t) dx \\
 & + \int_0^b \psi_0(x) \psi_i(x) g_3'(t) dx + \sum_{j=1}^n \int_0^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) u_j'(t) dx + \sum_{j=1}^n \int_0^b \varphi_i(x) \psi_j(x) u_j'(t) dx \\
 & + \sum_{j=1}^n \int_0^b \psi_i(x) \varphi_j(x) v_j'(t) dx + \sum_{j=1}^n \int_0^b \psi_i(x) \psi_j(x) v_j'(t) dx + \int_0^b \varphi_{n+1}(x) \varphi_i(x) g_2'(t) dx \\
 & + \int_0^b \varphi_{n+1}(x) \psi_i(x) g_2'(t) dx + \int_0^b \psi_{n+1}(x) \varphi_i(x) g_4'(t) dx + \int_0^b \psi_{n+1}(x) \psi_i(x) g_4'(t) dx \\
 & + \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \varphi_0''(x) \varphi_i(x) g_1(t) dx + \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \varphi_0''(x) \psi_i(x) g_1(t) dx \\
 & + \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \psi_0''(x) \varphi_i g_3(t) dx \\
 & + \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \psi_0''(x) \psi_i(x) g_3(t) dx \\
 & + \sum_{j=1}^n \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \varphi_i(x) \varphi_j''(x) u_j(t) dx \\
 & + \sum_{j=1}^n \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \varphi_i(x) \psi_j''(x) u_j(t) dx \\
 & + \sum_{j=1}^n \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \psi_i(x) \varphi_j''(x) v_j(t) dx \\
 & + \sum_{j=1}^n \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \psi_i(x) \psi_j''(x) v_j(t) dx \\
 & + \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \varphi_{n+1}''(x) \varphi_i(x) g_2(t) dx \\
 & + \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \varphi_{n+1}''(x) \psi_i(x) g_2(t) dx \\
 & + \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \psi_{n+1}''(x) \varphi_i(x) g_4(t) dx \\
 & + \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \psi_{n+1}''(x) \psi_i(x) g_4(t) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^b (r - q)x\varphi'_0(x)\varphi_i(x)g_1(t) dx + \int_0^b (r - q)x\varphi'_0(x)\psi_i(x)g_1(t) dx \\
& + \int_0^b (r - q)x\psi'_0(x)\varphi_i(x)g_3(t) dx + \int_0^b (r - q)x\psi'_0(x)\psi_i(x)g_3(t) dx \\
& + \sum_{j=1}^n \int_0^b (r - q)x\varphi'_j(x)\varphi_i(x)u_j(t) dx + \sum_{j=1}^n \int_0^b (r - q)x(u, x)\varphi'_j(x)\psi_i(x)u_j(t) dx \\
& + \sum_{j=1}^n \int_0^b (r - q)x\psi'_j(x)\varphi_i(x)v_j(t) dx + \sum_{j=1}^n \int_0^b (r - q)x\psi'_j(x)\psi_i(x)v_j(t) dx \\
& + \int_0^b (r - q)x\varphi'_{n+1}(x)\varphi_i(x)g_2(t) dx + \int_0^b (r - q)x\varphi'_{n+1}(x)\psi_i(x)g_2(t) dx \\
& + \int_0^b (r - q)x\psi'_{n+1}(x)\varphi_i(x)g_4(t) dx + \int_0^b (r - q)x\psi'_{n+1}(x)\psi_i(x)g_4(t) dx \\
& - \int_0^b r\varphi_0(x)\varphi_i(x)g_1(t) dx - \int_0^b r\varphi_0(x)\psi_i(x)g_1(t) dx \\
& - \int_0^b r\psi_0(x)\varphi_i(x)g_3(t) dx - \int_0^b r\psi_0(x)\psi_i(x)g_3(t) dx \\
& - \sum_{j=1}^n \int_0^b r\varphi_i(x)\varphi_j(x)u'_j(t) dx - \sum_{j=1}^n \int_0^b r\varphi_i(x)\psi_j(x)u'_j(t) dx \\
& - \sum_{j=1}^n \int_0^b r\psi_i(x)\varphi_j(x)v'_j(t) dx - \sum_{j=1}^n \int_0^b r\psi_i(x)\psi_j(x)v'_j(t) dx \\
& - \int_0^b r\varphi_{n+1}(x)\varphi_i(x)g_2(t) dx - \int_0^b r\varphi_{n+1}(x)\psi_i(x)g_2(t) dx \\
& - \int_0^b r\psi_{n+1}(x)\varphi_i(x)g_4(t) dx - \int_0^b r\psi_{n+1}(x)\psi_i(x)g_4(t) dx \\
& = \int_0^b f\varphi_i(x) dx + \int_0^b f\psi_i(x) dx. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Desta feita, a partir de (5.7), obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser escrito na forma matricial:

$$MU'(t) = A(U(t))U(t) + BU(t) + CU(t) + F(t) + D(t) \tag{5.8}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

com a incógnita

$$U(t) = [u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m]^T.$$

As matrizes são dadas por:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix}$$

$$M_1(i, j) = \int_0^b \varphi_i \varphi_j dx$$

$$M_2(i, j) = \int_0^b \varphi_i \psi_j dx$$

$$M_3(i, j) = \int_0^b \psi_i \psi_j dx$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

$$A_1(i, j) = \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \varphi_i \varphi_j'' dx$$

$$A_2(i, j) = \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \varphi_i \psi_j'' dx$$

$$A_3(i, j) = \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \psi_i \varphi_j'' dx$$

$$A_4(i, j) = \int_0^b \frac{1}{2} x^2 \tilde{\sigma}^2(x, t, (u_m)_{xx}) \psi_i \psi_j'' dx.$$

Com

$$\begin{aligned} (u_m)_{xx} &= \varphi_0''(x)g_1(t) + \psi_0''(x)g_3(t) + \sum_{i=1}^m \varphi_i''(x)u_i(t) + \psi_i''(x)v_i(t) \\ &+ \varphi_{m+1}''(x)g_2(t) + \psi_{m+1}''(x)g_4(t), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

$$B_1(i, j) = \int_0^b (r - q)x\varphi_i \varphi_j' dx$$

$$B_2(i, j) = \int_0^b (r - q)x\varphi_i \psi_j' dx$$

$$B_3(i, j) = \int_0^b (r - q)x\psi_i \varphi_j' dx$$

$$B_4(i, j) = \int_0^b (r - q)x\psi_i \psi_j' dx$$

$$C = -rM$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$F_1(i) = \int_0^b f\varphi_i dx$$

$$F_2(i) = \int_0^b f\psi_i dx$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_1(i) = & -M_1(i, 0)g_1'(t) - M_1(i, n+1)g_2'(t) - M_2(i, 0)g_3'(t) - M_2(i, n+1)g_4'(t) \\ & + A_1(i, 0)g_1(t) + A_1(i, n+1)g_2(t) + A_2(i, 0)g_3(t) + A_2(i, n+1)g_4(t) \\ & + B_1(i, 0)g_1(t) + B_1(i, n+1)g_2(t) + B_2(i, 0)g_3(t) + B_2(i, n+1)g_4(t) \\ & + C_1(i, 0)g_1(t) + C_1(i, n+1)g_2(t) + C_2(i, 0)g_3(t) + C_2(i, n+1)g_4(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_2(i) = & -M_2^T(i, 0)g_1'(t) - M_2^T(i, n+1)g_2'(t) - M_3(i, 0)g_3'(t) - M_3(i, n+1)g_4'(t) \\ & + A_3(i, 0)g_1(t) + A_3(i, n+1)g_2(t) + A_4(i, 0)g_3(t) + A_4(i, n+1)g_4(t) \\ & + B_3(i, 0)g_1(t) + B_3(i, n+1)g_2(t) + B_4(i, 0)g_3(t) + B_4(i, n+1)g_4(t) \\ & + C_2^T(i, 0)g_1(t) + C_2^T(i, n+1)g_2(t) + C_3(i, 0)g_3(t) + C_3(i, n+1)g_4(t) \end{aligned}$$

Em geral, a solução $U(t)$ não é explicitamente conhecida para todo $t \geq 0$, portanto, é necessário usar um método numérico para se obter a solução aproximada.

5.1.2 Discretização no tempo

Consideremos a partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, com o passo δ , de $[0, T]$. Pelo método de Crank-Nicolson, avaliando (5.8) em $t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{t_n+t_{n+1}}{2}$ e usando as aproximações

$$U' \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\delta} = \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\delta}$$

e

$$U \left(t_{n+\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{U(t_{n+1}) + U(t_n)}{2} = \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} (2M + \delta (A^{(n+1/2)} + B + C)) U^{(n+1)} &= (2M - \delta (A^{(n+1/2)} + B + C)) U^{(n)} \\ &+ 2\delta F^{(n+1/2)} + 2\delta D^{(n+1/2)}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

A fim de se resolver o sistema de equações algébricas (5.10), propomos o método do ponto fixo:

$$\begin{aligned} (2M + \delta (A_{(k)}^{(n+1/2)} + B + C)) U_{(k+1)}^{(n+1)} \\ = (2M - \delta (A_{(k)}^{(n+1/2)} + B + C)) U_{(k)}^{(n)} \\ + 2\delta F_{(k)}^{(n+1/2)} + 2\delta D_{(k)}^{(n+1/2)} \end{aligned}$$

$$U_{(0)}^{(n+1)} = U_{(0)}^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5.1.3 Resultados numéricos

Primeiro, validamos o código, simulando a equação linear e calculando o erro, em seguida, comparamos as soluções da equação não linear obtida com as diferentes volatilidades modificadas.

Exemplo 1

Para calcularmos o valor da opção de compra e venda, vamos considerar a solução dada pela fórmula (3.34) e sua derivada (3.35).

Simulamos a equação (1.1) com $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $\lambda = 25$, $A = 1$, $b = 1$, $T = 1$, $g_1(t) = 0$, $g_2(t) = e^{(0.5-0.4t)}$, $g_3(t) = 0$, $g_4(t) = 5e^{(0.5-0.4t)}$ e $u_0(x) = e^{5\ln(x)+0.5}$.

Na Figura 5.1, a imagem da esquerda mostra o erro de h , com $\delta = 0.0001$ e os valores variáveis de $h = 0.333, 0.170, 0.1, 0.056, 0.032, 0.018$. Na imagem à direita temos o erro de δ , considerando $h = 0.001$ e os valores variáveis $\delta = 0.1, 0.01, 0.001$.

Observamos que as ordens de convergência são ótimas, ou seja, $\mathcal{O}(h^4)$ para a solução, $\mathcal{O}(h^3)$ para a derivada e $\mathcal{O}(\delta^2)$ para a solução e a derivada.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

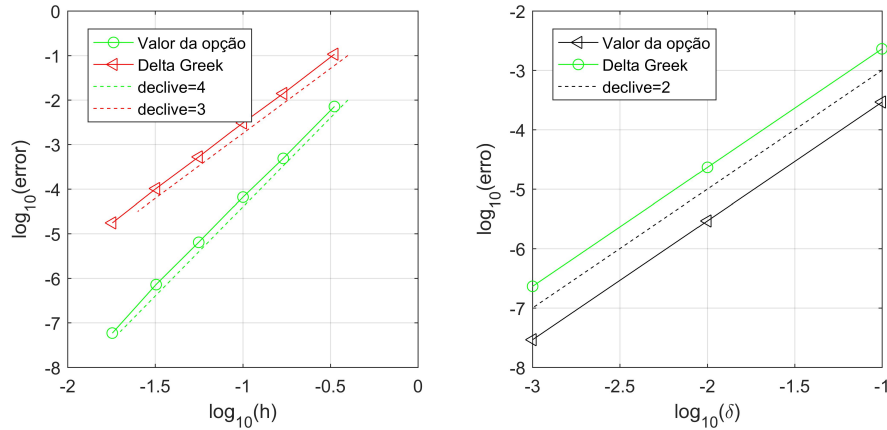


Figura 5.1: Análise da convergência para h e para δ

Exemplo 2

Neste exemplo, vamos considerar a solução analítica da equação de Black-Scholes linear (1.1), onde r e σ são ambas constantes e satisfazem a condição (3.1), que é dada pela fórmula (3.25) e a sua derivada por (3.26). Simulamos a equação (1.1), usando os parâmetros $T = 1$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $b = 1$, $K = 0.4$, $T = 1$, $g_1(t) = 0$, $g_2(t) = 1 - 0.4e^{rt}$, $g_3(t) = 0$, $g_4(t) = 1$ e $u_0(x) = \max\{x - 0.4, 0\}$.

Na Figura 5.2, apresentamos a solução obtida com $h = 0.01$ e $\delta = 0.001$, em alguns instantes, podemos observar que o comportamento é semelhante ao comportamento da solução exata.

Na Figura 5.3 é estudada a convergência para h , onde consideramos um valor fixo $\delta = 0.001$ e valores diferentes para $h = 0.1, 0.01, 0.001$. Para cada valor de h , calculamos o erro, tendo em conta a norma em $L^2(0, b)$ e representamos os resultados no gráfico apresentado.

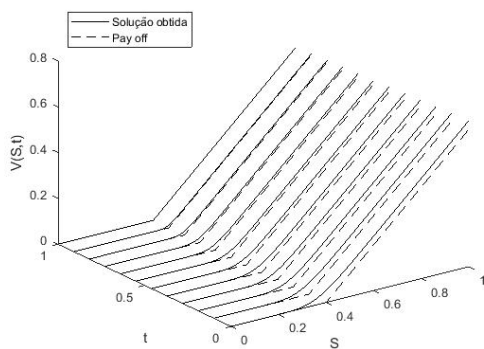


Figura 5.2: Solução obtida.

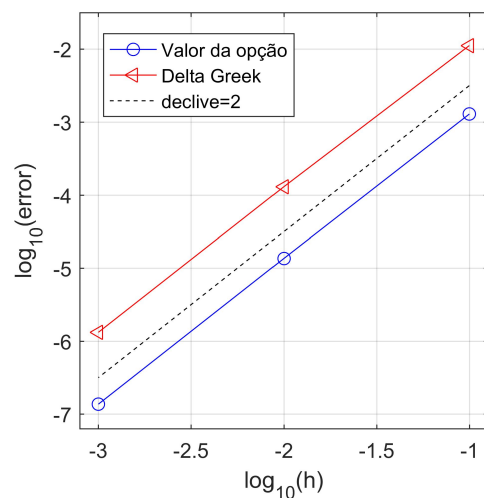


Figura 5.3: Análise da convergência para h .

A partir do gráfico, podemos concluir que a convergência é apenas de ordem 2. Suspeitamos que esse comportamento se deve ao facto de a solução não ser regular, pois no

Exemplo 1 a ordem da convergência é 4.

Exemplo 3

Para compararmos o comportamento da solução para os diferentes modelos apresentados, simulamos a equação (5.1) para cada modelo numa opção de compra europeia. Na Figura 5.4, representamos a solução e a primeira derivada da equação de Black-Scholes não linear para os diferentes modelos de custo de transação em $t = 0$. Os parâmetros utilizados são $r = 0.2$, $\sigma = 0.2$, $Le = 0.6$, $M = 30$, $C = 0.01$, $a^2 = 0.4$, $K = 0.4$, $T = 1$, $h = 0.1$, $\delta = 0.001$, $g_1(t) = 0$, $g_2(t) = 1 - 0.4e^{rt}$, $g_3(t) = 0$, $g_4(t) = 1$, $u_0(x) = \max\{x - 0.4, 0\}$ e $f = 0$.

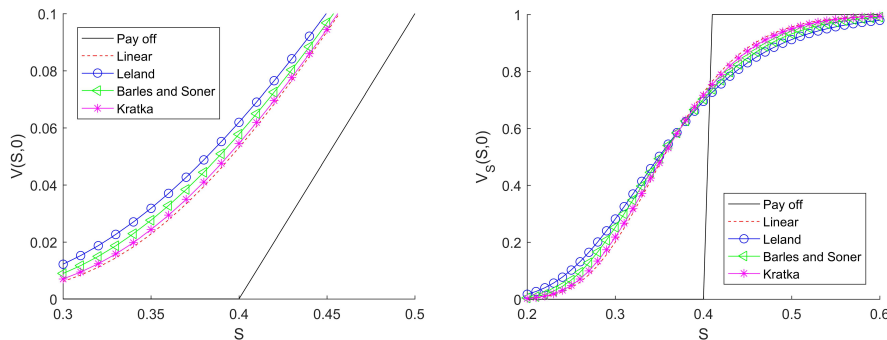


Figura 5.4: Solução (à esquerda) e sua derivada (à direita) para equação de Black-Scholes não-linear com diferentes custos de transação para uma opção de compra europeia.

Exemplo 4

Finalmente, simulamos a equação (5.1) para cada modelo para uma opção de venda europeia. Em cada imagem da Figura 5.5, representamos a solução e também a primeira derivada da equação de Black-Scholes não linear para os diferentes modelos de custos de transação. Os parâmetros utilizados são $r = 0.2$, $\sigma = 0.2$, $Le = 0.6$, $M = 30$, $C = 0.01$, $a^2 = 0.4$, $K = 0.4$, $T = 1$, $h = 0.1$, $\delta = 0.001$, $g_1(t) = 0.4e^{rt} - 1$, $g_2(t) = 0$, $g_3(t) = -1$, $g_4(t) = 0$, $u_0(x) = \max\{0.4 - x, 0\}$ e $f = 0$.

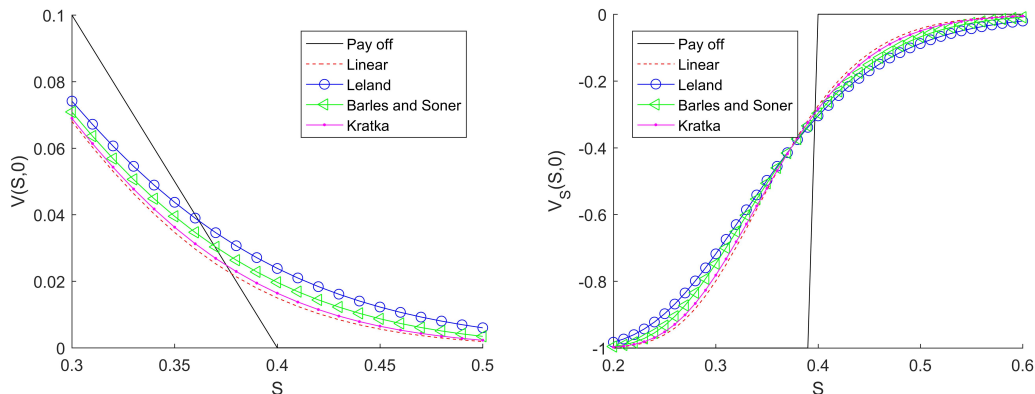


Figura 5.5: Solução (à esquerda) e sua derivada (à direita) para equação de Black-Scholes não-linear com diferentes custos de transação para uma opção de venda europeia.

Os gráficos mostram que a diferença entre os vários modelos de custo de transação não é significativa. Neste caso, com os parâmetros utilizados, o modelo de Leland fornece o preço mais alto, seguido pelo modelo de Barles e Soner, e o modelo de Kratka, finalmente, o modelo linear com volatilidade constante, sem custos de transação. Uma análise desde a data inicial até à data de vencimento permite concluir que a diferença entre os vários modelos diminui à medida que se aproximam da data de vencimento. Esta é uma consequência esperada da necessidade cada vez menor de ajuste do portfólio e, portanto, menores custos de transação mais próximos da data de vencimento. A diferença é maior no início do ano, onde o preço não linear é maior do que o preço linear.

5.2 Opções americanas

A principal diferença entre as opções europeias e americanas é a existência de uma fronteira livre. Vamos seguir Jashmidian [34] e Kholodnyi [37], e utilizar as condições (3.14) e (3.21) para localizar a fronteira.

Consideremos agora o problema (5.1) com;

$$f = \begin{cases} 0 & , x \leq S_f \\ qx - rK & , x > S_f \end{cases}, \quad S_f = \inf\{x : u_x(x, t) = 1\}$$

$u_0(x) = \max\{x - K, 0\}$, $g_1(t) = 0$, $g_2(t) = b - K$, $g_3(t) = 0$, $g_4(t) = 1$ e $S_f(0) = \max\{K, \frac{rK}{q}\}$, para a opção de compra.

$$f = \begin{cases} 0 & , x > S_f \\ rK - qx & , x \leq S_f \end{cases}, \quad S_f = \sup\{x : u_x(x, t) = -1\}$$

$u_0(x) = \max\{K - x, 0\}$, $g_1(t) = K$, $g_2(t) = 0$, $g_3(t) = -1$, $g_4(t) = 0$ e $S_f(0) = \min\{K, \frac{rK}{q}\}$, para uma opção de venda.

Portanto, os espaços de funções teste são os mesmos para o caso das opções europeias, o que significa que os procedimentos são os mesmos. A única diferença significativa é o tratamento da fronteira livre.

5.2.1 Discretização no espaço

$$S_f(t) = \min\{x : (u_m(x, t))_x = 1\}$$

para opção de compra, e

$$S_f(t) = \max\{x : (u_m(x, t))_x = -1\}$$

para opção de venda.

As funções $w_m \in V_{0m}$ podem ser escritas como (5.5) e as funções $u_m \in V_m$ podem ser escritas como (5.6).

Substituindo (5.5) e (5.6) na equação (5.4) e simplificando as expressões, temos (5.7). Desta feita, a partir de (5.7), obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias (5.8)

com a incógnita

$$U(t) = [u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m]^T.$$

A posição aproximada da fronteira é obtida por

$$S_f(t) = \min_{i=0, \dots, m+1} \{x_i : v_i(t) = 1\}$$

para opção de compra e

$$S_f(t) = \max_{i=0, \dots, m+1} \{x_i : v_i(t) = -1\}$$

para opção de venda.

As matrizes são as obtidas anteriormente.

5.2.2 Discretização no tempo

Consideremos a partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, com o passo δ , de $[0, T]$. pelo método de Crank-Nicolson, avaliando (5.8) em $t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n+1}}{2}$ e usando as aproximações

$$U'(t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\delta} = \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\delta}$$

e

$$U(t_{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{U(t_{n+1}) + U(t_n)}{2} = \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2},$$

obtemos

$$(2M + \delta(A^{(n+1/2)} + B + C))U^{(n+1)} = (2M - \delta(A^{(n+1/2)} + B + C))U^{(n)} + 2\delta F^{(n+1/2)} + 2\delta D^{(n+1/2)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.11)$$

Para os cálculos de F usaremos

$$f(x, t_{n+\frac{1}{2}}) = \begin{cases} 0 & , x \leq (S_f)^{(n+1/2)} \\ qx - rK & , x > (S_f)^{(n+1/2)} \end{cases},$$

$$(S_f)^{(n+1)} = \min_{i=0, \dots, m+1} \{x_i : (v_i)_{n+1} = 1\}$$

para opção de compra e

$$f(x, t_{n+\frac{1}{2}}) = \begin{cases} 0 & , x > (S_f)^{(n+1/2)} \\ rK - qx & , x \leq (S_f)^{(n+1/2)} \end{cases},$$

$$(S_f)^{(n+1)} = \max_{i=0, \dots, m+1} \{x_i : (v_i)_{n+1} = -1\}$$

para opção de venda. Em (5.11) usamos as aproximações

$$A^{(n+1/2)} \approx A\left(x, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2}\right) \quad \text{e} \quad (S_f)^{(n+1/2)} \approx \frac{(S_f)^{(n)} + (S_f)^{(n+1)}}{2}.$$

Então, para cada $n = 0, 1, \dots, N-1$, temos que resolver o sistema algébrico não linear (5.10) e assim determinar a solução $u(x, t)$ em tempos discretos $t_{n+1} = (n+1)\delta$.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

A fim de se resolver o sistema de equações algébricas (5.11), propomos o método do ponto fixo:

$$\begin{aligned} & \left(2M + \delta \left(A_{(k)}^{(n+1/2)} + B + C\right)\right) U_{(k+1)}^{(n+1)} \\ & = \left(2M - \delta \left(A_{(k)}^{(n+1/2)} + B + C\right)\right) U^{(n)} \\ & \qquad \qquad \qquad + 2\delta F_{(k)}^{(n+1/2)} + 2\delta D_{(k)}^{(n+1/2)} \end{aligned}$$

$$(S_f)_{(k+1)}^{(n+1)} = \min_{i=0, \dots, m+1} \{x_i : (V_i)_{(k)}^{(n+1)} = 1\} \quad \text{ou} \quad (S_f)_{(k+1)}^{n+1} = \max_{i=0, \dots, m+1} \{x_i : (V_i)_{(k)}^{(n+1)} = -1\}$$

$$U_{(0)}^{(n+1)} = U^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ressaltamos que a aproximação da fronteira obtida por este método é uma função em escada, devido à discretização no espaço. Para uma melhor aproximação, consideramos uma interpolação linear. Por exemplo, no caso de uma opção de compra, o valor da fronteira obtido pelo algoritmo é sempre o limite inferior ao valor verdadeiro e, para venda, o valor obtido pelo algoritmo é sempre o limite superior do valor verdadeiro, portanto, consideramos apenas na interpolação aos instantes em que ocorre o salto (ver figuras 5.7 e 5.9).

5.2.3 Resultados numéricos

Primeiro simulamos a equação linear de Black-Scholes linear e comparamos o método atual com outros métodos conhecidos e também comparamos a posição da fronteira livre obtida com a solução assintótica conhecida (cf. [3], [57]). Em seguida, estudamos a influência dos parâmetros em cada modelo no tempo ótimo de exercício. Por fim, comparamos a posição da fronteira livre em todos os modelos de custos de transação considerados.

Exemplo 1

Neste exemplo, consideramos uma opção de compra com os parâmetros $r = 0.1, \sigma = 0.2, b = 30, q = 0.05, T = 1, h = 0.03, \delta = 2.5e - 5, g_1(t) = 0, g_2(t) = 20, g_3(t) = 0, g_4(t) = 1$ e $u_0(x) = \max\{x - 10, 0\}$. Na Figura 5.6 representamos (à esquerda) a solução obtida e (à direita) a derivada em momentos diferentes (linha azul). A posição da fronteira livre é representada pela linha vermelha. Podemos ver na figura à direita que a derivada é inferior a 1 antes da fronteira e igual a 1 após a fronteira.

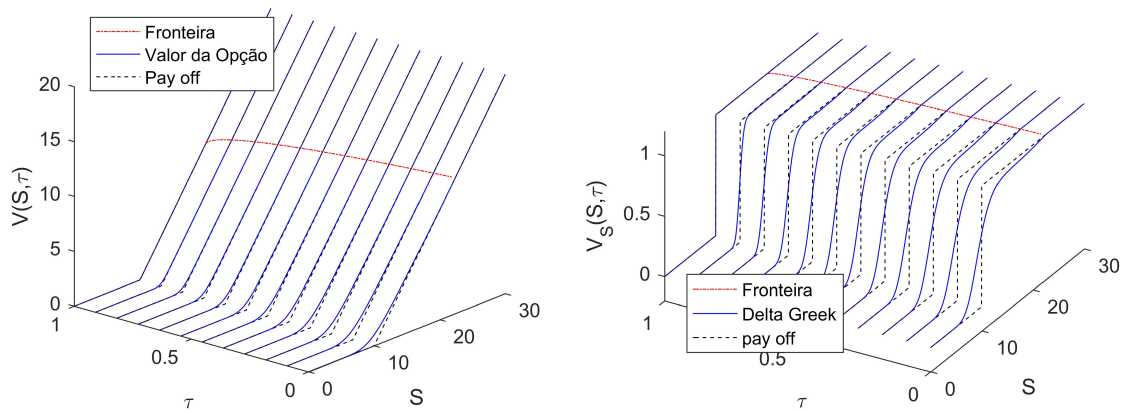


Figura 5.6: Solução obtida (à esquerda) e a derivada (à direita) para equação de Black-Scholes linear, para opções de compra

Na Figura 5.7 representamos a posição no tempo da fronteira livre para o caso linear. A linha azul sólida representa a posição obtida, a posição assintótica é representada por uma linha preta pontilhada e a interpolação linear, em cada elemento finito, da posição da fronteira livre é representada por uma linha tracejada vermelha.

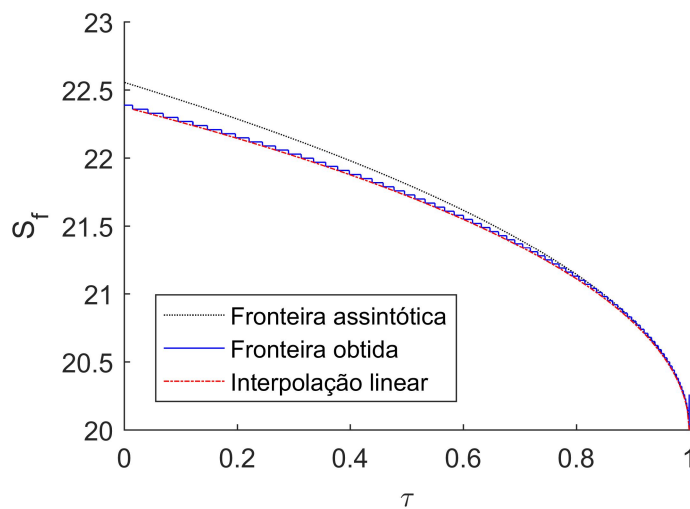


Figura 5.7: Posição da fronteira livre para o caso linear, para opção de compra.

Exemplo 2

Neste exemplo, consideramos uma opção de compra com os parâmetros $r = 0.1, \sigma = 0.3, b = 3, q = 0, T = 1, h = 0.003, \delta = 10^{-3}, g_1(t) = 3, g_2(t) = 0, g_3(t) = -1, g_4(t) = 0$ e $u_0(x) = \max\{x - 1, 0\}$. Na Figura 5.8 representamos (à esquerda) a solução obtida e (à direita) a derivada em momentos diferentes (linha azul). A posição da fronteira livre é representada pela linha vermelha. Podemos ver na imagem à direita que a derivada é igual a -1 antes da fronteira e superior a -1 após a fronteira.

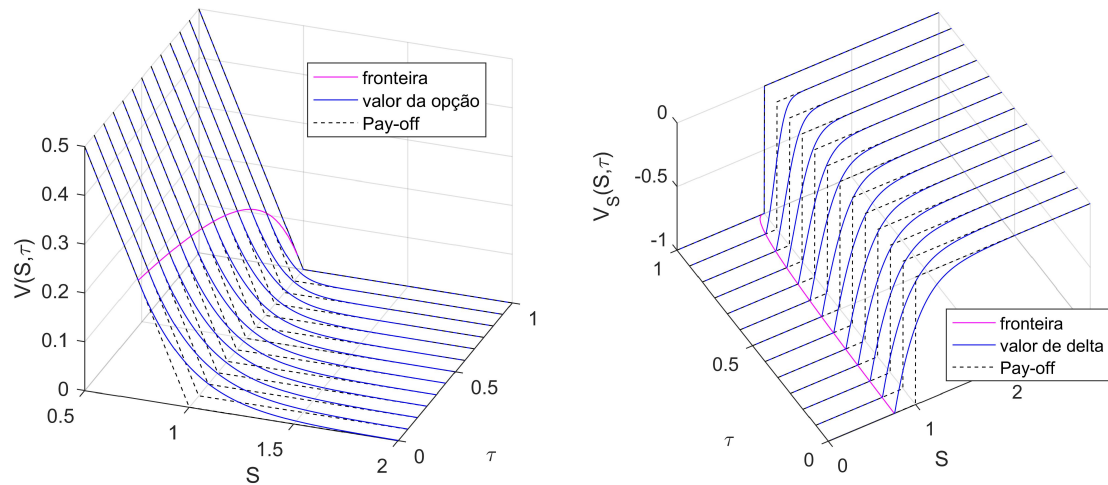


Figura 5.8: Solução obtida (à esquerda) e a derivada (à direita) para equação de Black-Scholes linear, para opções de venda.

Na Figura 5.9 representamos a posição no tempo da fronteira livre para o caso linear. A linha azul sólida representa a posição obtida e a interpolação linear da posição da fronteira livre é representada por uma linha sólida vermelha.

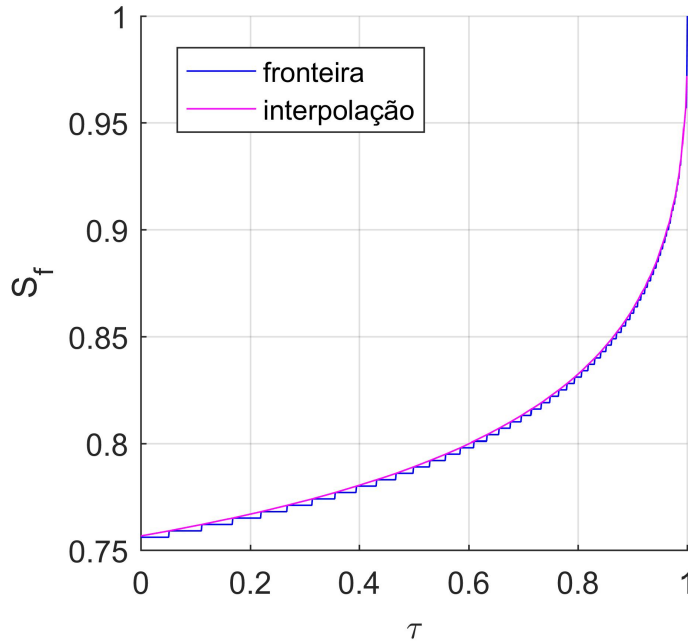


Figura 5.9: Posição da fronteira livre para o caso linear, para opção de venda.

Exemplo 3

Neste exemplo, consideramos uma opção de venda em que o preço de exercício é $K = 100$, a taxa de juros livre de risco é $r = 0.1$, a volatilidade é 30% ($\sigma = 0.3$) por ano e o tempo para expiração é $T = 1$ ano. Com este exemplo, pretendemos comparar a precisão do método apresentado com outros métodos conhecidos, nomeadamente, o método binomial com 100 passos (MB-100) de Cox, Ross e Rubinstein [19] (implementado em Matlab na função *binprice*), o método das diferenças finitas de fixação da fronteira MDFFF de Lixin Wu e Yue-Kuen Kwok [58] e o método das diferenças finitas MDF de Seydel [50]. Como os valores exatos das opções são desconhecidos, usamos o método binomial com um grande número de passos para encontrar os valores das opções. Os resultados do método binomial com um grande número de passos são considerados muito precisos.

O erro é calculado por

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}},$$

onde Y_i é a solução exata, \hat{Y}_i é a solução aproximada e n é o número total de valores da opção obtidos. A solução "exata" necessária é obtida pelo método binomial com 1000 passos no tempo (MB-1000). Na Tabela 5.1, apresentamos alguns resultados obtidos com os diferentes métodos. Os parâmetros numéricos são $h = 0.01$ e $\delta = 0.001$ para elementos finitos, $h = 0.045$ e $M = 107$ para o método de fixação da fronteira, $m = n = 100$ para o método das diferenças finitas com 100 passos e para o método binomial.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

S	MB-1000	MB-100	MDF	MDFFF	Delta	MEF	Delta
77	23.0131	23.0000	23.0156	23.0128	-0.9718	23.0127	-0.9688
78	22.0615	22.0567	22.0593	22.0621	-0.9353	22.0622	-0.9932
79	21.1483	21.1442	21.1436	21.1469	-0.9001	21.1476	-0.8972
80	20.2687	20.2576	20.2628	20.2662	-0.8661	20.2675	-0.8632
85	16.3458	16.3412	16.3362	16.3396	-0.7133	16.3439	-0.7107
90	13.1216	13.1208	13.1103	13.1124	-0.5848	13.1193	-0.5828
95	10.4838	10.4798	10.4726	10.4733	-0.4769	10.4817	-0.4754
100	8.3366	8.3255	8.3275	8.3277	-0.3866	8.3365	-0.3855
105	6.5936	6.6108	6.5934	6.5936	-0.3116	6.6020	-0.3107
110	5.2077	5.2250	5.1997	5.2004	-0.2497	5.2077	-0.2490
115	4.0954	4.1034	4.0860	4.0872	-0.1990	4.0932	-0.1985
120	3.2091	3.1964	3.2008	3.2023	-0.1578	3.2068	-0.1575
RMSE		0.0094	0.0084	0.0071		0.0017	

Tabela 5.1: Comparação da precisão para opções de venda americanas

A tabela (5.1) mostra claramente que o MEF é mais eficiente, em comparação com os outros métodos. Com este exemplo, também analisamos a ordem de convergência numérica. Primeiro, calculamos o RMSE entre o método dos elementos finitos MEF e o método Binomial MB-1000 para diferentes valores de $h = 0.20, 0.100, 0.0500, 0.250$ com um $\delta = 0.001$ fixo. Em seguida, para cada valor de h , calculamos o erro na norma RMSE.

Os resultados são apresentados na Figura 5.10, onde podemos ver que a convergência é apenas de ordem 2.

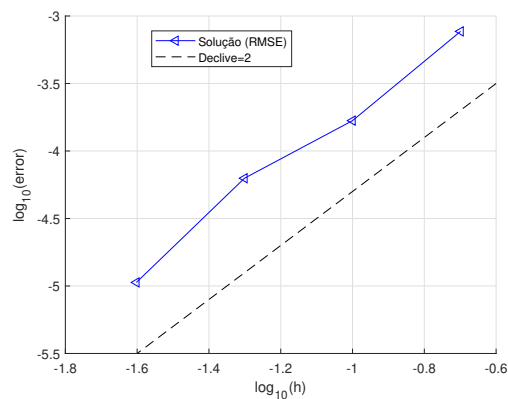


Figura 5.10: Análise da convergência para h .

Exemplo 4

Finalmente, simulamos a equação não linear (5.1), com os mesmos parâmetros do Exemplo 1, para os vários modelos de custo de transação estudados. Na Figura 5.11, a imagem à esquerda mostra os resultados numéricos obtidos por simulação da equação não-linear (3.15) com $\tilde{\sigma}$ dada pelo modelo de Leland para vários valores do número Le . Pode-se observar que a posição avança à medida que Le aumenta.

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

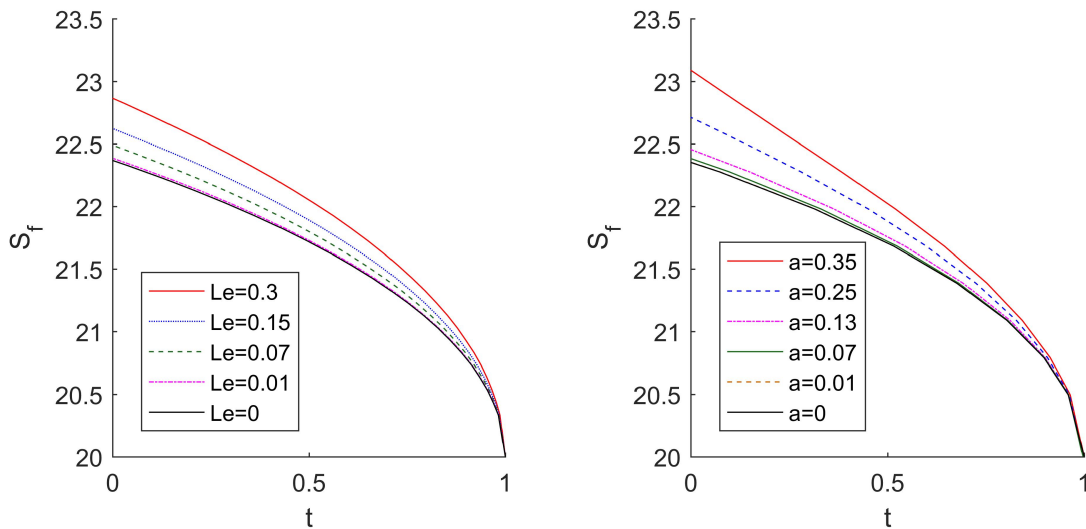


Figura 5.11: Posição da fronteira livre $S_f(t)$ para o modelo de Leland com vários números de Le (à esquerda) e para o modelo de Barles e Soner para vários valores de a (à direita).

Na imagem à direita, Figura 5.11, os resultados numéricos do modelo de Barles e Soner são apresentados para vários valores de a . A diferença entre os resultados para $a = 0$ e $a = 0.01$ é insignificante, e para $a = 0.35$, $S_f(t)$ não é convexa.

Os resultados numéricos do modelo de Kratka são apresentados para vários valores de M na imagem à esquerda, da Figura 5.12. A diferença entre as posições fora do tempo ideal de exercício é muito pequena para esses valores de M .

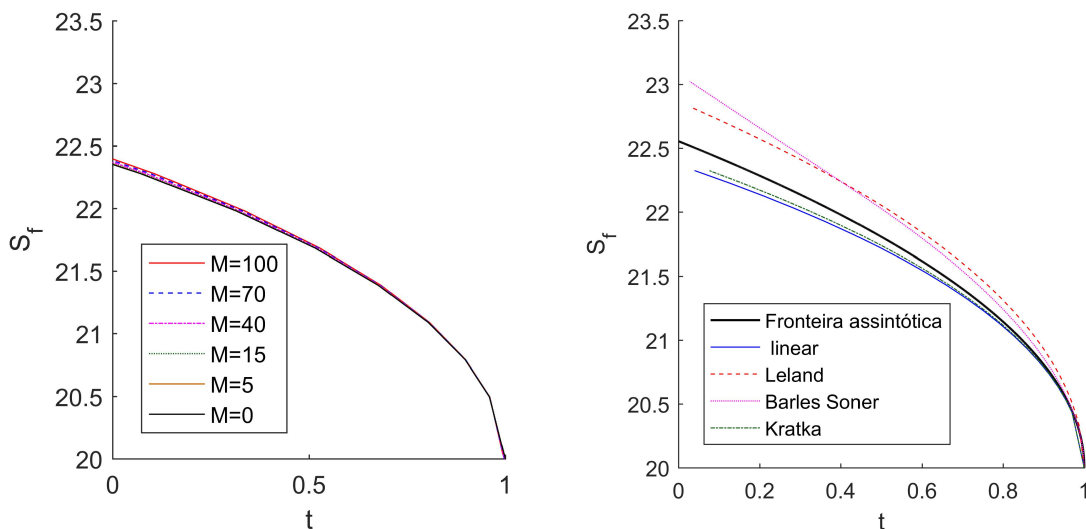


Figura 5.12: Posição da fronteira livre $S_f(t)$ para o modelo de Kratka com vários valores de M (à esquerda) e a posição da fronteira livre para os vários modelos de custos de transação estudados (à direita).

Na imagem à direita, Figura 5.12, coletamos as posições da fronteira livre para os vários modelos de custo de transação estudados, com os parâmetros $Le = 0.3$, $a = 0.35$, $M = 100$. Como esperado, para todos os modelos de custo de transação, os valores da fronteira livre são maiores em relação ao modelo linear. A solução $V(S, 0)$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

e sua derivada $V_S(S, 0)$ na presença de custos de transação, com os parâmetros $Le = 0.3, a = 0.35, M = 100$, podem ser vistas na Figura 5.13. A maior diferença ocorre no modelo de Barles e Soner.

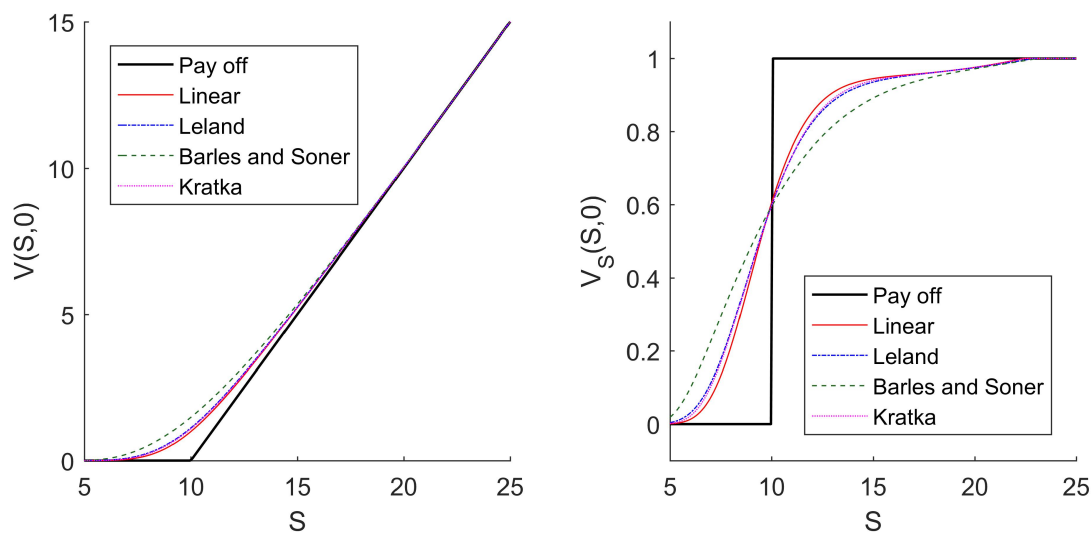


Figura 5.13: Solução e a derivada para os diferentes modelos estudados

Capítulo 6

Conclusão e Trabalho Futuro

Neste trabalho estuda-se uma generalização da equação de Black-Scholes não linear, considerando custos de transação, onde a volatilidade é considerada uma função linear do Gama Greek V_{SS}

$$0 = V_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 (1 + e^{r(T-\tau)}a^2S^2V_{SS}) S^2V_{SS} + (r - q)SV_S - rV, \quad S > 0, \tau \in]0, T[.$$

Visto que a equação é altamente não linear e na forma não divergente, optou-se por considerar a equação Delta

$$V_{S\tau} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 (1 + e^{r(T-\tau)}a^2S^2V_{SS}) S^2V_{SS} \right)_S + (r - q)SV_{SS} - qV_S = 0,$$

uma vez que apresenta melhores propriedades.

Foi feita a regularização da equação Delta de Black-Scholes não linear para o modelo de custo de transação.

Provou-se a existência de solução clássica da equação regularizada e, usando o *vanishing viscosity method*, mostrou-se que esta converge para a solução viscosa do problema.

Discretizou-se o problema regularizado, utilizando o método de elementos finitos de Lagrange, com aproximação de grau arbitrário k , e o método de Crank-Nicolson no tempo. As estimativas a priori aqui apresentadas foram utilizadas para provar analiticamente a convergência e a ordem de convergência do problema regularizado, podendo também vir a ser utilizada em trabalhos futuros.

Demonstrou-se que a ordem convergência da solução semidiscreta é de, pelo menos, h^k e que a ordem convergência da solução totalmente discreta é de, pelo menos, δ^2 . A solução do problema original foi calculada, recorrendo às fórmulas de Newton-Cotes. Os resultados numéricos obtidos estão em conformidade com aos resultados esperados.

Por forma a comparar a eficiência do método apresentado, foi feito o estudo numérico da equação de Black-Scholes na forma não divergente.

Para resolver o problema não linear na forma não divergente, num domínio com fronteiras fixas para opções de compra e venda europeias, apresentou-se um método de elementos finitos baseado em polinómios de Hermite de grau 3, para a discretização no espaço, e o método de Crank-Nicolson na discretização no tempo. Os resultados numéricos obtidos estão de acordo com os resultados obtidos por outros métodos.

De uma forma geral, concluiu-se que a diferença entre os resultados obtidos pelos diferentes modelos de custo de transação não é significativa e diminui quanto mais próximo o tempo estiver da data de vencimento. Constatou-se que a regularidade da solução tem influência nos resultados encontrados. No caso da equação Delta foram conseguidas ordens de convergência 3 e 4 para derivada e para a solução clássica respetivamente, utilizando polinómios de Lagrange de grau 2 na derivada e 3 na solução.

Ao utilizar os polinómios de Hermite diretamente na equação de Black-Scholes conseguimos ordens de convergências idênticas, mas para uma solução mais regular. Para a

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

solução clássica que é menos regular apenas se obteve ordem 2, tanto para a derivada como para a solução.

Da análise do estudo, constatou-se que o método pode ser generalizado para o cálculo de opções americanas, acrescentou-se um termo de penalidade no segundo membro e utilizou-se a condição da derivada para localizar a fronteira. Para o caso linear, os resultados obtidos mostram que o método é eficiente no cálculo do valor da opção e na detecção da fronteira, em comparação com outros métodos existentes.

Deste modo, o estudo realizado é bastante geral, podendo ser aplicado a outros tipos de opções e a outros modelos com custos de transação.

Futuramente, pretende-se ainda fazer um estudo para melhorar as estimativas, na perspectiva de obter melhores ordens de convergência. Ainda se pretende estudar a utilização da equação Delta para simular opções americanas.

Bibliografia

- [1] Rui M. P. Almeida, José C. M. Duque, Jorge Ferreira, and Rui J. Robalo. The Crank-Nicolson-Galerkin finite element method for a nonlocal parabolic equation with moving boundaries. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 31(5):1515–1533, 2015. 5
- [2] Rui M.P. Almeida, Stanislav N. Antontsev, and José C.M. Duque. On the finite element method for a nonlocal degenerate parabolic problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 73(8):1724 – 1740, 2017. 5
- [3] G. Alobaidi. *American option and their strategies*. PhD thesis, University of Western Ontario, Canada, 2000. 5, 91
- [4] Julia Ankudinova and Matthias Ehrhardt. On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(3):799 – 812, 2008. 2, 4, 34, 35, 40
- [5] M. Avellaneda and A. Paras. Dynamic hedging portfolios for derivative securities in the presence of large transaction costs. *Applied Mathematical Finance*, 1:165–193, 1994. 43
- [6] Guy Barles and Halil Mete Soner. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation. *Finance Stoch.*, 2(4):369–397, 1998. 2, 4, 6, 40, 42, 45
- [7] B. Bensaid, J.-P. Lesne, H. Pagès, and J. Scheinkman. Derivative asset pricing with transaction costs. *Mathematical Finance*, 2(2):63–86, 1992. 41
- [8] Fred E. Benth, Kenneth H. Karlsen, and Kristin Reikvam. A semilinear Black and Scholes partial differential equation for valuing american options. *Finance and Stochastics*, 7(3):277–298, Jul 2003. 4
- [9] Fred E Benth, Kenneth Hvistendahl Karlsen, and K Reikvam. A semilinear Black and Scholes partial differential equation for valuing american options: Approximate solution and convergence. *Interfaces and Free Boundaries*, 6(4):379–404, 2004. 4
- [10] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford Finance, New York, 2004. 7, 26
- [11] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, 81(3):637–654, 1973. 36
- [12] Klaus Böhmer. On finite element methods for fully nonlinear elliptic equations of second order. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(3):1212–1249, 2008. 5
- [13] Martin Bohner, Freddy H. Marín Sánchez, and Stefanía Rodríguez. European call option pricing using the Adomian decomposition method. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 9(1):75–85, 2014. 2
- [14] Phelim P. Boyle and Ton Vorst. Option replication in discrete time with transaction costs. *The Journal of Finance*, 47(1):271–293, 1992. 41

- [15] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010. 7, 17
- [16] G.-Qi Chen and B. Su. Discontinuous solutions of Hamilton-Jacobi Equations: Existence, uniqueness, and regularity. In Thomas Y. Hou and Eitan Tadmor, editors, *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, pages 443–453, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer Berlin Heidelberg. 5
- [17] Rafael Company, Lucas Jódar, and José-Ramón Pintos. A numerical method for European option pricing with transaction costs nonlinear equation. *Math. Comput. Modelling*, 50(5-6):910–920, 2009. 2, 42
- [18] Jódar L. Company R. and J.R. Pintos. Consistent stable difference schemes for nonlinear Black-Scholes equations modelling option pricing with transaction costs. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43(6):1045–1061, 2009. 4
- [19] John C. Cox, Stephen A. Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3):229–263, 1979. 3, 94
- [20] Ishii H. Lions P. L. Crandall, M.G. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27:1–67, 1992. 5, 7, 31
- [21] D.Ševčovič. An iterative algorithm for evaluating approximations to the optimal exercise boundary for a nonlinear Black-Scholes equation. *J. Can. Appl. Math. Q.*, 15:77–97, 2007. 4
- [22] M. do Rosario Grossinho, Y. Faghan Kord, and D. Sevcovic. Pricing american call options by the Black-Scholes equation with a nonlinear volatility function. *Journal of Computational Finance*, 23(4):93–113, 2020. 4
- [23] E. Dremkova and M. Ehrhardt. A high-order compact method for nonlinear Black-Scholes option pricing of american options. *Int. J. Comput. Math.*, 88:2782–2797, 2011. 4
- [24] José C. M. Duque, Rui M. P. Almeida, Stanislav N. Antontsev, and Jorge Ferreira. The Euler-Galerkin finite element method for a nonlocal coupled system of reaction-diffusion type. *J. Comput. Appl. Math.*, 296:116–126, 2016. 5
- [25] B. Düring. *Black-Scholes type equations: mathematical analysis, parameter identification and numerical solution*. PhD thesis, University of Mainz, 2005. 27
- [26] Bertram Düring, Michel Fournié, and Ansgar Jüngel. High order compact finite difference schemes for a nonlinear Black-Scholes equation. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 6(7):767–789, 2003. 2
- [27] Jüngel A. Düring B., Fournié M. High order compact finite difference schemes for a nonlinear Black-Scholes equation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 06(07):767–789, 2004. 4
- [28] S. Edeki, O. Ugbebor, and E. Owoloko. Analytical Solutions of the Black-Scholes Pricing Model for European Option Valuation via a Projected Differential Transformation Method. *Entropy*, 17:7510–7521, October 2015. 2

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

- [29] V.N. Egorova, C.H. Lai S.H. Tan, R. Company, and L. Jódar. Moving boundary transformation for american call options with transaction cost: finite difference methods and computing. *International Journal of Computer Mathematics*, 94(2):345–362, 2017. 4
- [30] R. Frey and P.Patie. *Partial differential equations.*, volume 19 of *Mathematics*. Graduate Studies In Mathematics, 1998. 7
- [31] Houde Han and Xiaonan Wu. A fast numerical method for the Black-Scholes equation of american options. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(6):2081–2095, 2004. 3
- [32] S. Hodges and A. Neuberger. Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review of Futures Markets*, 8:222–239, 1989. 41, 42
- [33] J.C. Hull. *Options, Future, And other Derivative*. Eight Edition. Prentice Hall, 2012. 33
- [34] Farshid Jamshidian. An exact bond option formula. *The Journal of Finance*, 44(1):205–209, 1989. 3, 35, 89
- [35] Md Kazi, Md. Kazi Salah Uddin, Mostak Ahmed, and Samir Bhowmik. A note on numerical solution of a linear black-scholes model. *GANIT: Journal of Bangladesh Mathematical Society*, 33, 11 2013. 2
- [36] V. L. Khatskevich. Some properties of Legendre polynomials and an approximate solution of the Black-Scholes equation governing option pricing. *Differ. Equ.*, 51(9):1157–1164, 2015. Translation of *Differ. Uravn.* 51 (2015), no. 9, 1166–1173. 2
- [37] Valery A. Kholodnyi. A nonlinear partial differential equation for American options in the entire domain of the state variable. In *Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 8 (Athens, 1996)*, volume 30, pages 5059–5070, 1997. 3, 35, 89
- [38] M.N Koleva and L.G Vulkov. *Computation of Delta Greek for Non-linear Models in Mathematical Finance*, pages 430–438. Springer International Publishing, Cham, 2017. 5
- [39] M.N Koleva and L.G Vulkov. Fast computational approach to the delta greek of non-linear black–scholes equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 340:508–522, 2018. 5
- [40] M. Kratka. No mystery behind the smile. *Risk*, 9:67–71, 1998. 2, 40, 43
- [41] Y.K. Kwok. *Mathematical models of financial derivatives*. Springer finance. Springer, 1998. 2, 36, 40
- [42] O. Ladyzhenskaja, V. Alekseevich Solonnikov, and N. Ural'tseva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, volume 23. American Mathematical Soc., 1968. 7, 32, 50

- [43] Hayne E. Leland. Option pricing and replication with transactions costs. *The Journal of Finance*, 40(5):1283–1301, 1985. 2, 40, 41, 43
- [44] Donny C. Lesmana and Song Wang. An upwind finite difference method for a nonlinear Black-Scholes equation governing European option valuation under transaction costs. *Appl. Math. Comput.*, 219(16):8811–8828, 2013. 3
- [45] B. Martino and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Springer Science & Business Media, 2008. 7, 31
- [46] Thomas Mikosch. *Elementary stochastic calculus with finance in view*, volume 6 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998. 7, 26
- [47] Bjørn Fredrik Nielsen, Ola Skavhaug, and Aslak Tveito. Penalty and front-fixing methods for the numerical solution of american option problems. *Journal of Computational Finance*, 5:69–98, 2002. 3
- [48] L. Nirenberg. On elliptic partial differential equation. *Annali della scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze*, 13(2):115–162, 1959. 17
- [49] David M Pooley, Peter A Forsyth, and Ken R Vetzal. Numerical convergence properties of option pricing pdes with uncertain volatility. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 23(2):241–267, 2003. 4
- [50] Rüdiger U. Seydel. Beyond and Black and Scholes. In *Tools for Computational Finance*, pages 353–387. Springer, 2017. 7, 94
- [51] Steven E. Shreve. *Stochastic calculus for finance. II*. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, 2004. Continuous-time models. 7
- [52] H. M. Soner, S. E. Shreve, and J. Cvitanic. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *Appl. Probab*, 5:327–355, 1995. 40
- [53] I. Straskraba and A. Novotny. *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, 2004. 7
- [54] J. Topper. *Financial Engineering with Finite Elements*. The Wiley Finance Series. Wiley, 2005. 2
- [55] R. Valkov. Convergence of a finite volume element method for a generalized Black-Scholes equation transformed on finite interval. *Numerical Algorithms*, 68(1):61–80, 2015. 3
- [56] R. Valkov. Predictor-corrector balance method for the worst-case 1D option pricing. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 16(1):175–186, 2016. 3, 5
- [57] Paul Wilmott, Sam Howison, and Jeff Dewynne. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press, 1995. 7, 36, 91
- [58] Lixin Wu and Yue-Kuen Kwok. A front-fixing finite difference method for the valuation of american options. *Journal of Financial Engineering*, 6(4):83–97, 1997. 3, 94

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

- [59] Yue-Kuen. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer, 2008. 40
- [60] R. Zvan, P. A. Forsyth, and K.R. Vetzal. Penalty methods for american options with stochastic volatility. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 91(2):199–218, 1998. 3

Índice de Notações

Geral

\hookrightarrow denota uma imersão contínua

$\hookrightarrow\hookrightarrow$ denota uma imersão compacta

\rightarrow indica uma convergência

\rightharpoonup denota uma convergência fraca

\rightharpoonup^* denota uma convergência fraca estrela

$[g]_+ = \max\{g, 0\}$ representa a parte positiva de g

$[g]_n = \lim_{t \rightarrow t_n, t > t_n} g(t) - \lim_{t \rightarrow t_n, t < t_n} g(t)$ denota o salto de g em t_n

$\text{ess sup}(u) = \inf\{ \sup_{x \in A \setminus Z} |u(x)| : Z \subset A, \text{meas}(Z) = 0\}$

$\text{supp } v = \overline{\{x : v(x) \neq 0\}}$ é o suporte de v

$p' = \frac{p}{p-1}$ é o conjugado de $p > 1$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$\text{sign}(a)$ denota o sinal de a ($\text{sign}(a) = 1$), se $a > 0$ e $\text{sign}(a) = -1$, se $a < 0$).

Acrónimos

UBI	Universidade da Beira Interior
FVEM	<i>Positivity-preserving fitted finite volume element method</i>
EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
EDE	Equação Diferencial estocástica
MEF	Método dos elementos finitos
MDF	Método das diferenças finitas
MDFFF	Método das diferenças finitas de fixação da fronteira
MB-1000	Método binomial com 1000 passos

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

MB-100 Método binomial com 100 passos

qtp quase em toda parte

pqt para quase todo

Conjuntos

$|\Omega| = meas(\Omega) =$ medida de Lebesgue de Ω

$T_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ é o triângulo de referência

$int(\Omega)$ denota o interior de Ω

$\bar{\Omega}$ denota o fecho de Ω

$Q_T = \Omega \times]0, T]$

Q' denota um subconjunto arbitrário de Q_T

$\Gamma = \partial\Omega$ denota a fronteira de Ω

$\Gamma_T = \partial\Omega \times]0, T]$

Ω denota o espaço de probabilidade

Operadores

\mathcal{F} operador para as soluções viscosas.

$D^\alpha u$ denota a derivada fraca de ordem α de u

$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ é o divergente de u

$\operatorname{div}(\nabla u)$ denota o divergente gradiente de u

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)$ denota o vetor gradiente de u

$\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$ é o Laplaciano de u

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ denota a derivada (fraca ou forte) de u em relação à variável temporal

$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ denota a derivada forte de ordem α de u

$\bar{\partial} u(x, t) = \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\delta}$ denota a derivada temporal discreta

$\Pi_S u$ denota a projeção ortogonal de u sobre S

$\langle f, u \rangle$ aplicação do funcional de f à função u .

Normas e Seminormas

$|x|$ denota o módulo de $x \in \mathbb{R}$

$\|x\|$ denota a norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^d$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u|$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^k \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^k \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u|$$

$$\|u\|_{W^{k,p,j}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=j}^k \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty \text{ e } 0 \leq j \leq k$$

$$\|u\|_{C^0([a,b],X)} = \max_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X$$

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|_X < \infty$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(a,b;X)} = \left(\sum_{j=1}^k \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L^p(a,b;X)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Espaços de Funções

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável e } \operatorname{ess\,sup} |u| < \infty\}$$

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq \alpha \leq k\}$$

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$$

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$$

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$$

$$C^{k,\mu}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in C^k(\Omega) \text{ e } D^k u \text{ é Hölder contínua com expoente } \mu\}$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid \operatorname{supp} v \text{ é um conjunto compacto}\}$$

Aproximação Numérica de EDP's Não Lineares com Aplicações em Finanças

$$L^p(a, b; X) = \{u :]a, b[\rightarrow X \mid u \text{ é mensurável e } \int_a^b \|u\|_X^p dt < \infty\}$$

$$W^{k,p}(a, b; X) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) \mid u \text{ é mensurável e } \int_a^b \|u\|_X^p dt < \infty\}$$

$$C^k([a, b]; X) = \{u : [a, b] \rightarrow X \mid u \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$$

$W^{-k,p}(\Omega)$ denota o espaço dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$$

$$S_h = \{w \in C_0^0(\bar{\Omega}) \mid w|_{T_k} \text{ é um polinómio de grau } k \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}$$

Índice

- convergência
 - da solução viscosa, 64
 - dominada, 16
 - forte, 8
 - fraca, 9
 - fraca estrela, 9
- corolário
 - de Brouwer, 15
- definição
 - de conjunto limitado, 8
 - de apropriado, 30
 - de dual, 9
 - de equação diferencial estocástica, 22
 - de equação diferencial ordinária, 21
 - de equação diferencial parcial, 22
 - de espaço de probabilidade, 18
 - de fronteira, 8
 - de integral estocástico de Itô, 19
 - de martingale, 18
 - de movimento Browniano, 17
 - de processo estocástico, 17, 19
 - de solução viscosa, 28
 - de sucessão limitada, 8
- desigualdade
 - de Cauchy, 7
 - de Hölder, 11
 - de interpolação de Gagliardo-Nirenberg, 17
 - de Minkowski, 11
 - de Poincaré, 13
 - de Young, 7
 - triangular, 7
- espaço
 - de Bochner, 14
 - de Sobolev, 12
- imersão
 - compacta, 13
 - contínua, 13
- método
 - Binomial, 94
 - Crank-Nicolson, 2, 70, 86, 90
 - das diferenças finitas, 2, 94
 - das diferenças finitas de fixação da fronteira, 94
 - do ponto fixo, 75, 91
 - dos elementos finitos, 2, 95
- modelo de volatilidade
 - de Barles e Soner, 42
 - de Boyle e Vorst, 41
 - de Hodges e Neuberger, 41
 - de Kratka, 43
 - de Parás e Avellaneda, 41
 - de Leland, 41
- opções
 - americanas, 89
 - de compra americanas, 34
 - de compra europeia, 33
 - de venda americanas, 35
 - de venda europeia, 34
 - europeias, 79
- ordem de convergência, 76–78, 87
- proposição
 - de Feynman-Kač, 25
 - equação inversa de Kolmogorov, 25
 - martingale constante, 18
 - movimento Browniano, 18
 - processo simples, 19
- solução
 - forte, 23, 26
 - fraca, 48, 52
- teorema
 - a propriedade de martingale, 27
 - avaliação do risco neutral, 27
 - de Banach-Alaoglu, 15
 - de Brouwer, 15
 - de Green, 16
 - de Gronwall, 16
 - de Nirenberg, 16
 - de Schauder, 15
 - do limite central, 17
 - lema de Fatou, 16
 - lema de Itô, 21