



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

OBTENÇÃO DE FORMAS DE CASCA ANTI-FUNICULARES PARA SISTEMAS DE FORÇA PREDEFINIDOS

Versão final após defesa

Edgar Alexandre Dias Couto Gonçalves

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil
(Ciclo de estudos integrado)

Orientador: Prof. Doutor Clemente Martins Pinto

Covilhã, Novembro de 2017

Agradecimentos

Agradecer em primeiro lugar aos meus Pais por me terem dado a oportunidade de concluir esta etapa da minha vida. Agradecer aos meus Avós, em particular às duas estrelinhas que me acompanharam de longe, mas sempre perto do coração.

Agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Clemente Martins Pinto, pela paciência, dedicação, empenho e disponibilidade que demonstrou sempre ao longo deste trabalho. Agradecer também o facto de ter a porta sempre escancarada para os alunos e sempre pronto a ajudar.

Resumo

O trabalho desenvolvido nesta dissertação tem como objetivo a obtenção de formas de casca anti-funiculares com sistemas de força predefinidos.

Um dos métodos de obtenção de forma utilizado corresponde à integração do campo gradiente da superfície, que é definido a partir de esforços de membrana obtidos num modelo plano de parede e de um campo de equilíbrio vertical obtido num modelo de laje.

Na presente dissertação são analisados casos de bordos apoiados, similares aos estudados na referida tese, alargando-se o estudo a cascas de bordo livre. O modo como o método trata a questão dos bordos livres é comparado com o de outros métodos de obtenção de forma com predefinição de forças.

Na presente dissertação, além da obtenção de forma por integração do campo gradiente, apresentam-se exemplos de cascas em que a forma foi obtida por aproximações sucessivas. A utilização desse procedimento permite evitar algumas dificuldades numéricas, nomeadamente, em termos da qualidade de resultados obtidos por análise com modelos de elementos finitos.

A análise das soluções obtidas centra-se sobretudo na representação de caminhos de forças, o que permite uma descrição mais global do funcionamento em equilíbrio das soluções obtidas.

Palavras-chave

Casca, Anti-funicular, Predefinidos, Bordos livres, Caminhos de forças.

Abstract

The work developed in this dissertation aims to obtain anti-funicular shell shapes with predefined force systems.

One of the methods to obtain the shells shape corresponds to the integration of the surface gradient field, which is defined for membrane forces obtained in a plane wall model and a vector field of vertical equilibrium obtained from a slab model.

In the present dissertation cases of supported edges, like those studied in that thesis, were analyzed, extending the study to free-edges shells. The way the method addresses the free edges issue is compared with other methods of obtaining shape with predefined forces.

In the present dissertation, in addition to the method of integration of the gradient field, examples of shells are presented in which the shape was obtained by successive approximations. The use of this procedure allows avoiding some numerical difficulties, namely in terms of the quality of results obtained by analysis of finite element models.

The analysis of the obtained solutions focuses mainly on the representation of load paths, which permits a more global description of the equilibrium of the obtained solutions.

Keywords

Shell, Anti-funicular, Predefined, Free edges, Load paths

Índice

Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 Métodos de obtenção de forma de cascas	1
1.2 Métodos com predefinição de forças.....	3
1.2.1 Método das densidades de força	3
1.2.2 Análise da rede de impulso	5
1.2.3 Obtenção de forma por integração do campo gradiente	8
1.3 Tratamento dos bordos livres	10
Capítulo 2 - Solução de bordos apoiados	15
2.1 Caso 1.....	15
2.2 Caso 2.....	20
2.3 Caso 3.....	24
2.4 Discussão de resultados	31
Capítulo 3 - Bordos livres.....	33
3.1 Bordos retos	33
3.1.1 Pré-esforço concentrado nos cantos	33
3.1.2 Pré-esforço distribuído nos cantos	40
3.1.3 Diferentes forças de pré-esforço concentradas nos cantos	44
3.2 Bordos Curvos	49
3.2.1 Pré-esforço aplicado nos cantos	49
3.3 Discussão de resultados	57
Capítulo 4 - Obtenção de forma por aproximações sucessivas	59
4.1 Descrição do método.....	59
4.2 Exemplos de aplicação.....	60
4.2.1 Cascas contínuas a partir de modelos discretos.....	60
4.2.2 Modelos iniciais com rigidez variável	64
4.2.3 Solução de bordos livres com o mesmo pré-esforço aplicado nos cantos	68
4.2.4 Solução de bordos livres com diferentes forças de pré-esforço nos cantos.....	73
4.3 Discussão dos resultados	76
Capítulo 5 - Conclusões	79
Bibliografia.....	81
Anexos	83

Lista de Figuras

Figura 1 - Influência das densidades de força no resultado final da forma e correspondente polígono de forças [19].	4
Figura 2 - Representação do diagrama de forma e força para uma estrutura em arco. a) Diagrama de forma. b) Diagrama de força com equilíbrio global. c) Equilíbrio local de forças na estrutura [19].	5
Figura 3 - Representação dos diagramas de forma e força e da solução anti-funicular. a) Diagrama de forma. b) Diagrama de força. c) Solução anti-funicular [19].	6
Figura 4 - Representação dos caminhos de cargas assumidos por Block numa abóbada. a) Analogia ao caminho da chuva na estrutura. b) Analogia aos caminhos mais curtos até aos apoios. c) Associação dos dois tipos de caminhos de cargas pela disposição dos nós e ramos no diagrama de forma [18].	7
Figura 5 - Influência do fator de escala r na forma final [19].	8
Figura 6 - Elemento de casca sujeito a forças de membrana, com projeções no plano horizontal [1].	9
Figura 7 - Representação da forma final da casca e das disposições das fibras no tecido [29].	10
Figura 8 - Modelo físico experimental de Heinz Isler [19].	11
Figura 9 - Esforços de membrana da casca sem consideração dos elementos de rigidez [29].	11
Figura 10 - Pormenor do canto da cobertura de Heinz Isler [31].	12
Figura 11 - Modelo de análise do parabolóide hiperbólico de Félix Candela [11].	12
Figura 12 - Representação do modelo de cálculo [18].	13
Figura 13 - Representação do modelo de cálculo [18].	13
Figura 14 - Representação da planta da parede e da sua solitação.	15
Figura 15 - Distribuição de forças de membrana N_x numa direção de corte ao longo da parede plana.	16
Figura 16 - Planta da laje com indicação das vigas rígidas e flexíveis.	16
Figura 17 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.	16
Figura 18 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.	17
Figura 19 - Perspetiva e alçado lateral da forma de casca obtida.	17
Figura 20 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.	18
Figura 21 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	18
Figura 22 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo da casca.	19
Figura 23 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.	19
Figura 24 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da casca.	20
Figura 25 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.	20
Figura 26 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.	21

Figura 27 - Perspetiva e alçado lateral da forma de casca obtida.	21
Figura 28 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.	22
Figura 29 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	22
Figura 30 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.	23
Figura 31 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da casca.	23
Figura 32 - Planta de parede com variação de espessura.	24
Figura 33 - Distribuição de forças de membrana N_x numa direção de corte ao longo da parede plana.	24
Figura 34 - Distribuição de forças de membrana N_y numa direção de corte ao longo da parede plana.	25
Figura 35 - Planta de curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.	25
Figura 36 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.	26
Figura 37 - Perspetiva e alçado lateral da forma de casca obtida.	26
Figura 38 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.	27
Figura 39 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	27
Figura 40 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo da casca.	27
Figura 41 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.	28
Figura 42 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da casca.	28
Figura 43 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical da laje com variação de espessura.	29
Figura 44 - Alçado da superfície da casca.	30
Figura 45 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	30
Figura 46 - Alçado da superfície da casca.	30
Figura 47 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	31
Figura 48 - Representação da planta da parede e a sua solitação pelos cantos.	33
Figura 49 - Distribuição dos esforços N_x em secções do modelo plano de parede.	33
Figura 50 - Distribuição dos esforços N_{xy} em secções do modelo plano de parede.	34
Figura 51 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de parede plana sujeito a forças de pré-esforço de 130kN nos cantos.	34
Figura 52 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.	35
Figura 53 - Campo vetorial v_z de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.	35
Figura 54 - Representação do sistema de cargas predefinido. a) Sistema pretendido na solução final de casca; b) Sistema adicional utilizado na obtenção de forma.	36
Figura 55 - Perspetiva e alçado da superfície da casca.	36
Figura 56 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.	37
Figura 57 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	37

Figura 58 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_{XY} ao longo da casca.	38
Figura 59 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca com forças concentradas de 130kN nos cantos.	38
Figura 60 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.	39
Figura 61 - Campo vetorial v_z de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da casca.	39
Figura 62 - Representação da planta da parede e a sua solitação pelos cantos.	40
Figura 63 - Distribuição dos esforços N_x em secções do modelo plano de parede.	40
Figura 64 - Distribuição dos esforços N_{XY} em secções do modelo plano de parede.	40
Figura 65 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de parede plana com forças de pré-esforço distribuídas de 40kN nos cantos.	41
Figura 66 - Descrição do sistema de forças predefinido; a) Sistema pretendido para a solução final; b) Sistema adicional apenas para o procedimento de obtenção de forma.	41
Figura 67 - Perspetiva e alçado da superfície da casca.	42
Figura 68 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.	42
Figura 69 - Representação do pré-esforço considerado na análise da parede e da casca. ..	43
Figura 70 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	43
Figura 71 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_{XY} ao longo da casca.	43
Figura 72 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca com forças de pré-esforço distribuídas de 40kN nos cantos.	44
Figura 73 - Representação do modelo de parede com as forças de pré-esforço nos cantos.	44
Figura 74 - Distribuição dos esforços N_x em secções do modelo plano de parede.	45
Figura 75 - Distribuição dos esforços N_{XY} em secções do modelo plano de parede.	45
Figura 76 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de parede plana.	45
Figura 77 - Descrição do sistema de forças predefinido; a) Sistema pretendido para a solução final; b) Sistema adicional apenas para o procedimento de obtenção de forma.	46
Figura 78 - Perspetiva e alçado da superfície da casca.	46
Figura 79 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.	47
Figura 80 - Representação do pré-esforço considerado na análise da parede e da casca. ..	47
Figura 81 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	48
Figura 82 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_{XY} ao longo da casca.	48
Figura 83 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca.	48
Figura 84 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.	49
Figura 85 - Representação de $\frac{1}{2}$ do campo de equilíbrio vertical da solução de casca.	49
Figura 86 - Representação da planta da parede e a sua solitação pelos cantos.	50
Figura 87 - Distribuição dos esforços N_x em secções do modelo plano de parede.	50
Figura 88 - Distribuição dos esforços N_{XY} em secções do modelo plano de parede.	50
Figura 89 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo plano de parede solicitado por forças de pré-esforço de 20kN nos cantos.	51

Figura 90 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.	51
Figura 91 - Campo vetorial v_z de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.	52
Figura 92 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje com vigas de torção nos bordos.	53
Figura 93 - Campo vetorial v_z de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje com vigas de torção nos bordos.	53
Figura 94 - Perspetiva da superfície da casca.	54
Figura 95 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.	54
Figura 96 - Representação do pré-esforço considerado na análise da parede e da casca. ..	55
Figura 97 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.	55
Figura 98 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_{xy} ao longo da casca.	56
Figura 99 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca solicitado por forças de pré-esforço de 20kN nos cantos.	56
Figura 100 - Linhas de campo do campo de equilíbrio vertical.	57
Figura 101- Planta do modelo discreto de barras ortogonais.	60
Figura 102 - Perspetiva e alçado lateral da solução obtida por inversão do modelo de barras ortogonais.	61
Figura 103 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo do modelo de casca de espessura constante com forças de pré-esforço de 115kN.	62
Figura 104 - Disposição das barras no modelo discreto.	62
Figura 105 - Perspetiva da casca obtida por inversão do modelo com introdução de barras diagonais.	63
Figura 106 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo do modelo de casca de espessura constante com forças de pré-esforço de 150kN.	63
Figura 107 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo do modelo plano de parede de espessura constante com forças de pré-esforço de 150kN.	64
Figura 108 - Representação da solução em planta pretendida.	64
Figura 109 - Planta da membrana com variação de espessura.	65
Figura 110 - Perspetiva e alçado lateral da forma obtida por inversão da membrana.	65
Figura 111 - Distribuição de forças N_y para o modelo de casca com variação de espessura.	66
Figura 112 - Distribuição de forças N_y para o modelo plano de parede com variação de espessura.	66
Figura 113 - Distribuição de forças N_y para o modelo de casca com espessura constante. .	67
Figura 114 - Caminhos de forças horizontais na direção Y no modelo de casca com espessura constante.	67
Figura 115 - Caminhos de forças horizontais na direção Y no modelo de parede com espessura constante.	68
Figura 116 - Representação do modelo inicial para obtenção de forma.	68
Figura 117 - Perspetiva e alçado lateral da solução de casca final.	69
Figura 118 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.	69

Figura 119 - Planta de curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.	70
Figura 120 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.	70
Figura 121 - Representação de 1/4 do campo de equilíbrio vertical da solução de casca. .	71
Figura 122 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo plano de parede com forças de pré-esforço de 130kN nos cantos.	72
Figura 123 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca.	72
Figura 124 - Representação do modelo inicial para obtenção de forma.	73
Figura 125- Perspetiva e alçado da solução de casca obtida por inversão de membrana. ..	73
Figura 126 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.....	74
Figura 127 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.....	74
Figura 128 - Representação de 1/2 do campo de equilíbrio vertical da solução com pré-esforço.	75
Figura 129 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo plano de parede.	75
Figura 130 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca.	76

Capítulo 1 - Introdução

1.1 Métodos de obtenção de forma de cascas

Até ao início do século XX, as cascas executadas em alvenaria de pedra ou tipos rudimentares de cimento e betão, eram exclusivamente cúpulas e abóbadas caracterizadas pelos bordos apoiados. Os condicionamentos em termos de resistência dos materiais implicavam que o equilíbrio estrutural fosse garantido por elevadas cargas permanentes, com elevado consumo de material e secções pouco esbeltas. Nesta altura, os métodos de conceção eram baseados em regras de proporção e geometria. Destaca-se, em Roma, a cobertura do Panteão (125 d.C.) [1] com uma espessura de aproximadamente 1m na parte superior e 6,5m na parte inferior e a cúpula da catedral de São Pedro (1626) [2] com uma espessura de 3m na parte inferior. Com o advento de um material moldável e resistente à tração e à compressão como o betão armado, os projetistas começaram a procurar novas geometrias e formas de construção, originando o início da tecnologia de construção de cascas que hoje se conhece. De acordo com a literatura, o planetário de Zeiss (1926) [3], na Alemanha, foi a primeira estrutura em casca de betão armado no mundo. Este é constituído por uma espessura de apenas 6cm e é suportado por um anel de reação contínuo, capaz de contrariar os esforços circunferenciais de tração, mais significativos na parte inferior.

A obtenção de formas funiculares e anti-funiculares teve como primeiro período relevante o século XVII. Robert Hooke (1635- 1703), através da uma corrente suspensa, sobre ação do seu peso e ancorada nas extremidades, determinou a forma funicular, correspondente à catenária. Esse funicular caracteriza-se por gerar exclusivamente forças de tração que correspondem a forças de compressão no sistema invertido. Assim, esse processo de obtenção de forma permite, à partida, predefinir o tipo de forças na estrutura final, nomeadamente, a inexistência de flexão. Essa possibilidade é relevante quando os materiais utilizados têm reduzida ou nula resistência à tração. O arquiteto catalão Antoni Gaudí (1852-1926) empregou o princípio para a obtenção de formas anti-funiculares espaciais, através de modelos suspensos. A capela Colonia Guell [4] e os arcos da Casa Mila [5] são exemplos.

A obtenção de forma de cascas tem por base relações entre forma e forças, sendo que a primeira é determinante das segundas. Essa relação surge de modo acentuado em construções de Robert Maillart, Félix Candela, Eládio Dieste, entre outros. Um exemplo relevante da consideração dessa relação é o arquiteto alemão Frei Otto que usava como modelos bolas de sabão. Nesses modelos as formas relacionam-se com o fenómeno de tensão superficial, correspondente a forças de atração entre moléculas da matéria líquida. A superfície assume áreas mínimas, o que corresponde ao "aproveitamento" mais eficiente das forças geradas internamente para gerar equilíbrio. Este tipo de análise foi considerada na conceção da cobertura do Estádio Olímpico de Munique [6], construído em 1972.

O arquitecto espanhol Félix Candela (1910-1997) utilizou de forma intensa paraboloides hiperbólicos [7] para conceber cascas finas de betão armado. Esse tipo de formas responde de forma eficiente às questões de equilíbrio e estabilidade estrutural, para além de aspetos de natureza construtiva. Como exemplo, refere-se a cobertura do restaurante Los Manantiales no México [8], composta por uma abóbada octogonal com quatro hiperboloides que se intersectam. A eficiência deste sistema estrutural permite espessuras de 4 cm, à exceção de zonas localizadas de rigidificação [9].

O engenheiro suíço Heinz Isler (1926-2009) foi o principal impulsionador da obtenção de formas tridimensionais de cascas a partir de modelos físicos experimentais à escala reduzida [10][11][12]. O seu principal meio de controlo era a medição experimental. As formas eram obtidas com modelos suspensos de borracha ou tecido, ou através de sistemas insufláveis sujeitos a pressão interior. Conforme [13] o tipo de material condiciona a forma através do sistema de forças gerado. As estruturas construídas são de espessura reduzida, sendo a aplicação de pré-esforço um aspeto relevante para corrigir desvios entre a forma pré-determinada e a forma construída e para equilibrar as elevadas reações horizontais, mantendo a globalidade da estrutura sob esforços de compressão.

O engenheiro Alistair Day desenvolveu em 1965 um método numérico de obtenção de forma denominado por *Dynamic Relaxation* [14]. Este método dinâmico determina, para pequenos incrementos de tempo, o movimento dos nós de uma estrutura até que, devido a um amortecimento artificial, esta fica em equilíbrio. O procedimento permite a integração da segunda lei de Newton ao longo do tempo a partir da resolução de um sistema de equações não-linear.

Hans-Jörg Schek [15] desenvolveu um novo método para o cálculo de coberturas de rede de cabos pré-esforçados e aplicou esse método à análise de coberturas nos Jogos Olímpicos de Munique em 1972. Este método mais conhecido por "*Force Density Method*" ou "*(Stuttgart) direct approach*" tem como característica principal a atribuição direta a cada elemento de cabo de um coeficiente de densidade de força correspondente a uma relação entre força e comprimento. O método da densidade de força, da classe dos métodos de rigidez geométrica, consiste no cálculo da posição de equilíbrio de um sistema estrutural submetido a um sistema de forças predefinido, proporcionando ao usuário uma forma simples de encontrar o equilíbrio de membrana a partir de uma rede de cabos.

Em 2009, Philippe Block desenvolveu a versão tridimensional de *Thrust Line Analysis* designado por *Thrust Network Analysis* [16]. Neste método existe o controlo direto sobre a distribuição das forças horizontais, utilizando a relação recíproca entre diagrama de forma e de força. Em [17] refere-se o seguinte: "*The intuitive force diagrams allow the designer to visually and explicitly distribute internal forces that define the three-dimensional equilibrium shape*".

Em [18] surge desenvolvido um procedimento de obtenção de forma de cascas anti-funiculares com predefinição do sistema de forças, no caso projeções horizontais das forças de membrana e forças verticais. O procedimento corresponde a determinar o campo gradiente da superfície com base no sistema de forças predefinido que, após integração, resulta na superfície da casca. O sistema de forças predefinido resulta de um modelo de parede para projeções horizontais dos esforços de membrana e de um modelo de laje para forças verticais. O procedimento é independente de parâmetros de rigidez. Na referência [18] foram analisados casos de estruturas com bordos apoiados, em que o sistema de forças pré-definido resulta efetivamente na solução final. Na presente dissertação alarga-se o estudo a cascas de bordo livre.

1.2 Métodos com predefinição de forças

A obtenção de forma de cascas por determinados procedimentos tem como característica o facto de não ser possível controlar à partida o sistema de forças que se irá gerar na mesma. Assim, determinada forma obtida pode implicar sistemas de forças mais ou menos adequados às condicionantes, por exemplo a existência de forças de tração em materiais que não possuam resistência mecânica desse tipo.

Alguns dos procedimentos de obtenção de forma que implicam a predefinição de forças funcionam para modelos discretos, como malhas de cabos, não contabilizando o efeito da continuidade do material nos caminhos de forças, nomeadamente, o efeito de forças N_{xy} . Por outro lado, em alguns métodos a definição dos sistemas de forças iniciais tem alguma natureza intuitiva e são baseados em formulações geométricas do equilíbrio, tendo por base analogias, carecendo de maior base mecânica em termos de condições de equilíbrio. O procedimento desenvolvido em [18] resolve algumas limitações por permitir trabalhar com modelos contínuos e pelo facto de os sistemas de forças predefinidos serem baseados em condições de equilíbrio com determinação precisa dos caminhos de forças. Nesse caso não existe de modo tão acentuado o recurso à intuição do utilizador para a definição de caminhos de forças no interior da casca.

1.2.1 Método das densidades de força

O método das densidades de força estabelece o equilíbrio de um nó a partir do somatório de forças em direções ortogonais no espaço. Numa fase inicial, as equações de equilíbrio são determinadas aliando a mecânica estrutural e alguns princípios básicos da teoria da elasticidade, nomeadamente o alongamento elástico e posterior determinação da distância entre pontos no espaço, com princípios geométricos, tal como o coseno director (ver equação (6.8) de [17]). O sistema de equações de equilíbrio é não linear em relação à geometria e ao material, pelo facto das coordenadas desconhecidas estarem contidas no comprimento das barras, não sendo a sua resolução trivial. A introdução de coeficiente de densidade de força surge da necessidade de se linearizar o problema. Por observação da equivalência entre as equações não linear e linear contacta-se que a solução é idêntica. Assim, para um dado

conjunto de densidades de força diretamente atribuído, coordenadas dos pontos fixos e componentes do carregamento segundo cada direção, é possível determinar-se as coordenadas do nó livre (ver equação (6.13) de [17]).

Com o objetivo de generalizar este procedimento a redes de topologia arbitrária constituídas por inúmeros ramos e nós livres e fixos, é fundamental a introdução de formulações matriciais combinadas com a teoria gráfica. Neste sentido, introduzem-se dois conceitos: a matriz ramo-nó e o Jacobiano (ver equações 6.14 e 6.24, respetivamente, de [17]). Desta forma, é possível reescrever o sistema de equações lineares formulado para um nó e generalizar para formas tridimensionais em equilíbrio para cada conjunto de densidades de força prescritas, carregamento e posição dos nós fixos (ver equações (6.32) em [17]).

A particularidade das densidades de força prende-se com o facto de que numa fase de ante-projecto se lida com formas em equilíbrio não materializadas, sem necessidade de considerar uma lei material. Esta independência é superada posteriormente, por atribuição material aos elementos constituintes da casca, sem mudança da forma criada com as densidades de força. O objetivo é determinar o comprimento inicial de cada barra na fase estacionária, por atribuição de rigidez axial às mesmas, de tal forma que os alongamentos de cada barra são os necessários para a obtenção da solução de equilíbrio. (ver equação (6.37) em [17]).

A partir das equações de equilíbrio constata-se que a solução é inteiramente independente das coordenadas iniciais dos nós livres, bastando apenas conhecer as coordenadas dos nós fixos. Na Figura 1 observa-se o impacto da atribuição direta de densidades de força diferentes em cada barra. Conclui-se que ocorre uma alteração na distribuição inicial dos nós livres e na distribuição relativa das forças nos ramos na forma final. Em [17] refere-se que: *“Changing the value of each individual force density effectively changes the distribution of the nodes in the final shape and the relative distribution of forces in the branches. Generally, higher force densities mean that higher forces are attracted, but since the branch lengths also change, the overall impact of changing force densities is hard to anticipate”*.

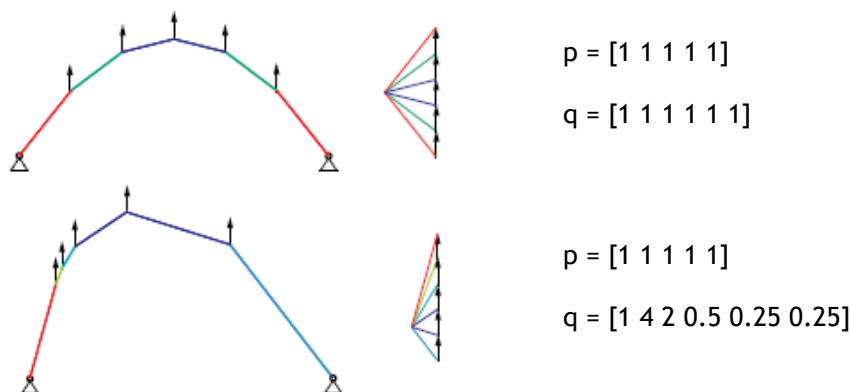


Figura 1 - Influência das densidades de força no resultado final da forma e correspondente polígono de forças [17].

1.2.2 Análise da rede de impulso

A partir da estática gráfica é possível a análise do equilíbrio de modelos bidimensionais, o que ocorre de forma interativa e intuitiva [19][20][21]. Esta ferramenta permite, de forma automática, a determinação de formas anti-funiculares, com conhecimento simultâneo da magnitude das forças dos seus elementos. Em [17] é referida a importância de se estabelecer um critério rigoroso para a análise de estruturas em arco de alvenaria não reforçada. Conforme essa referência, a análise por linhas e redes de impulso enquadra-se no teorema do limite inferior ou de segurança, estabelecido por Jacques Heyman [22].

Na análise por linhas de impulso introduz-se o conceito de diagrama de forma e força. Considere-se um arco bidimensional discretizado, em que o seu diagrama de forma representa a geometria da estrutura através de um polígono de forças (Figura 2a). A magnitude destas forças em cada elemento do diagrama de forma é obtida pela medição do comprimento do elemento paralelo correspondente no diagrama de força (Figura 2b).

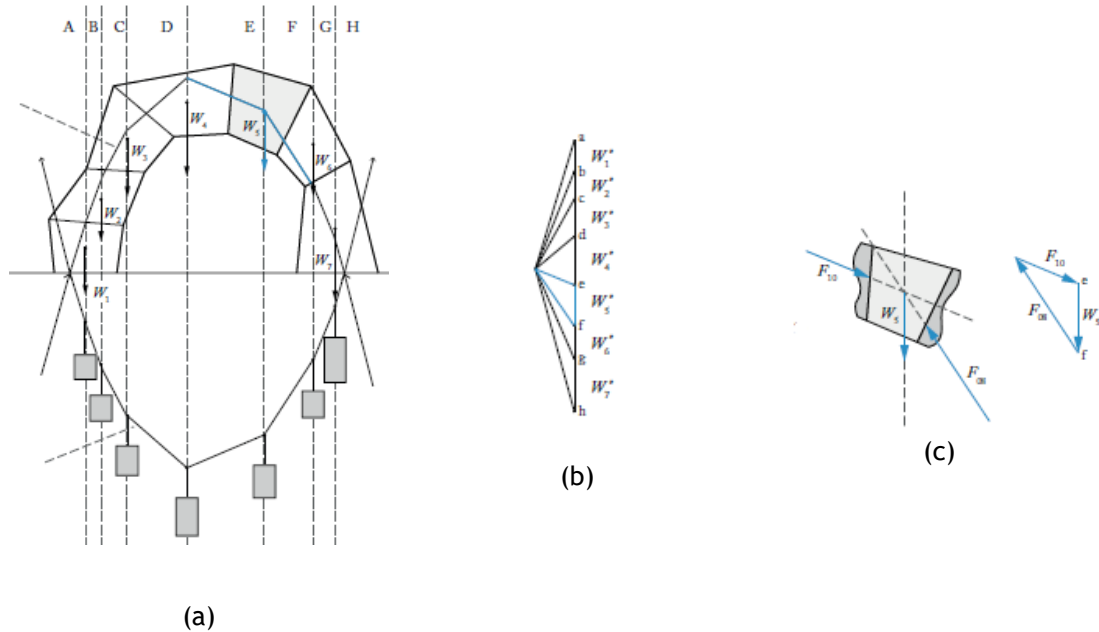


Figura 2 - Representação do diagrama de forma e força para uma estrutura em arco. a) Diagrama de forma. b) Diagrama de força com equilíbrio global. c) Equilíbrio local de forças na estrutura [17].

Como a estática gráfica é limitada a problemas bidimensionais, a análise de redes tridimensionais só é conseguida com recurso a uma analogia computacional de modelos físicos suspensos de redes de arcos bidimensionais, sendo o apuramento das forças feito separadamente por arcos bidimensionais [17]. A versão tridimensional surge desenvolvida em [19], com aplicação na obtenção de forma de cascas anti-funiculares de alvenaria.

À semelhança do método de origem, a análise de rede de impulso apresenta o diagrama de forma Γ (Figura 3a), que é a projeção horizontal da solução de equilíbrio anti-funcular G (Figura 3c)) e o diagrama de força Γ^* (Figura 3b)) que é o diagrama recíproco de Γ [16]. O procedimento inicia-se com a disposição dos nós e ramos do diagrama de forma, conforme as opções do utilizador. Nesse procedimento tem que se basear na sua experiência e intuição, tendo também em consideração os requisitos apresentados em [16] para a definição de diagramas de forma viáveis. De facto, o utilizador está a definir a geometria de um sistema discreto de projeções de caminhos de força que irão equilibrar as cargas verticais aplicadas. A título de exemplo, em [16] refere-se que as principais ações estruturais numa casca devem surgir representadas no seu diagrama de forma e que o equilíbrio da solução e a distribuição de forças é fortemente dependente da escolha deste, mais do que de uma otimização estrutural.

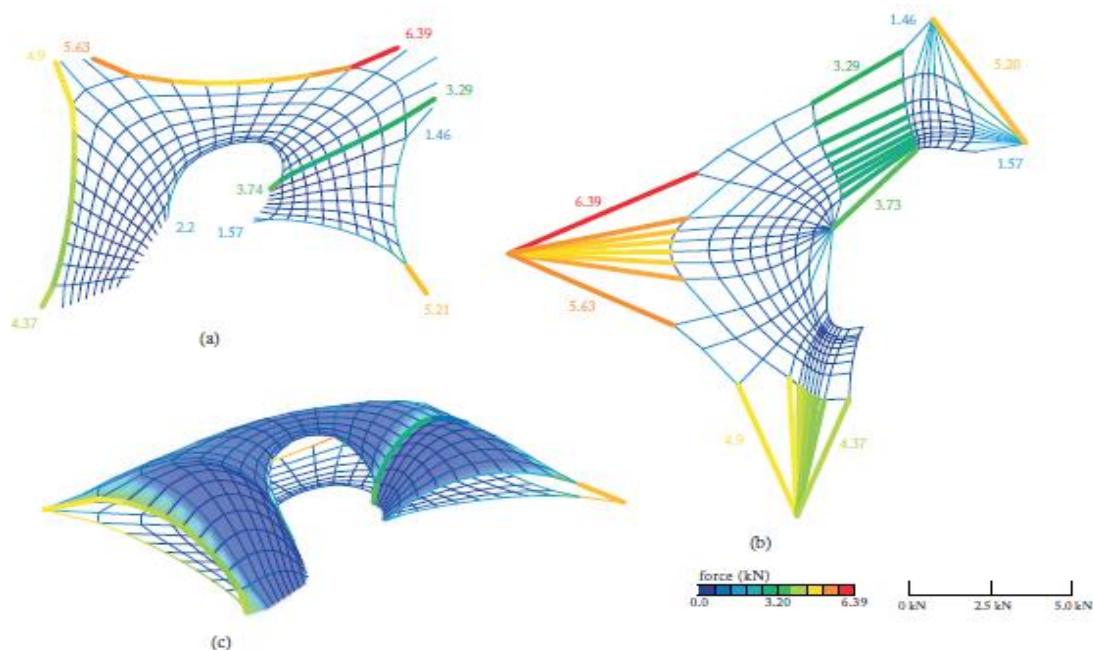


Figura 3 - Representação dos diagramas de forma e força e da solução anti-funcular. a) Diagrama de forma. b) Diagrama de força. c) Solução anti-funcular [17].

O procedimento em análise implica uma antecipação de caminhos de cargas, o que parece ser feito com base em algumas analogias sem uma base mecânica e de equilíbrio. Uma das analogias é de Abraham (1934) [23] que considera os caminhos de cargas análogos ao percurso da água da chuva na estrutura da casca, ou seja, as cargas seguem os caminhos de maior inclinação (Figura 4a). Conforme [18], esta analogia é apenas válida para casos particulares de forças de membrana constantes para toda a casca e valores nulos para as forças N_{xy} . Uma outra possibilidade para os caminhos de forças, referida em [16], corresponde a associá-los aos caminhos mais curtos até aos apoios (Figura 4b), numa interpretação exclusivamente geométrica. Segundo [16]: “Ideally, the chosen network topology would reflect all imaginable structural logics” (Figura 4c).

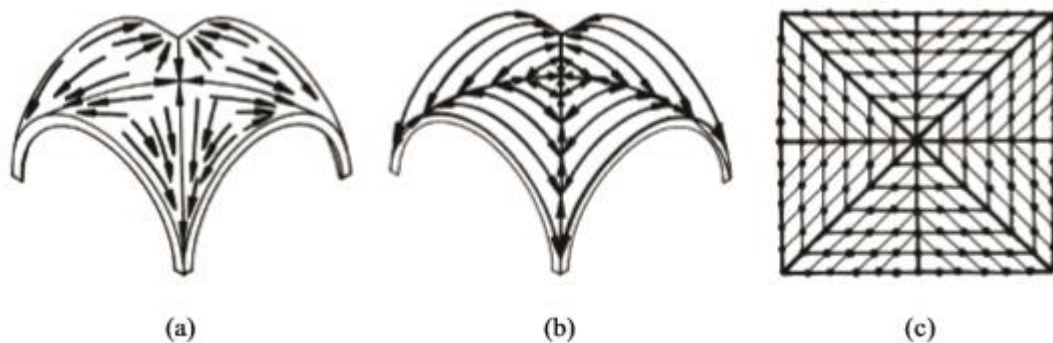


Figura 4 - Representação dos caminhos de cargas assumidos por Block numa abóbada. a) Analogia ao caminho da chuva na estrutura. b) Analogia aos caminhos mais curtos até aos apoios. c) Associação dos dois tipos de caminhos de cargas pela disposição dos nós e ramos no diagrama de forma [16].

A consideração de diferentes analogias para os caminhos de forças demonstra algumas dificuldades resultantes de inexistência de metodologias mais robustas de determinação e definição de caminhos de forças. A utilização de campos vetoriais pode ser uma possibilidade para contornar essas dificuldades [18][24].

Se o carregamento aplicado representar o peso próprio da estrutura, sendo a sua linha de ação exclusivamente vertical, o equilíbrio horizontal é independente do equilíbrio vertical e, portanto, é possível determinar primeiro o equilíbrio dos impulsos horizontais no diagrama de forma. Em [16] refere-se que se não houver cargas externas na direção horizontal, p_x e p_y , a resolução das equações (ver equações 3.23a e 3.23b de [16]) é trivial e o equilíbrio horizontal da solução é garantida pela existência de um diagrama de força viável.

Maxwell, em 1864, estabeleceu que: “*Reciprocal figures are geometrically related such that corresponding branches are parallel and branches which come together in a node in one of the networks form a closed polygon in the other and vice-versa*” [25]. Mecanicamente isto significa que o polígono fechado na figura recíproca representa o equilíbrio estático dos nós na figura original e os comprimentos dos ramos são proporcionais às forças axiais nos ramos correspondentes na figura original [16]. A partir desta relação de reciprocidade e a possibilidade do uso da estática gráfica, devido à bidimensionalidade do diagrama de forma, é possível estabelecer explicitamente o equilíbrio no plano de Γ , usando o seu diagrama de força Γ^* .

Após a determinação das forças do diagrama de forma, tendo em conta as cargas verticais e as condições de fronteira, determinam-se as alturas desconhecidas dos nós a partir da equação 3.34 de [16]. Tal como no método da densidade de força é necessário linearizar o problema e, conseqüentemente, tornar a solução independente da lei material. No entanto, e ao contrário daquele método, as densidades de força q são determinadas indiretamente através do controlo interativo das componentes horizontais das forças no diagrama de forma a partir do seu recíproco.

Tendo em conta que neste método as densidades de força estão em função dos comprimentos dos ramos do diagrama de forma e, ao contrário do método das densidades de força que é estabelecido diretamente sendo independente das coordenadas iniciais dos nós livres, o comprimento horizontal dos ramos da solução é mantido constante. Assim, a posição dos nós permanece inalterada no plano horizontal (Figura 5). Desta forma, existe um maior controlo da solução relativamente ao método das densidades de força.

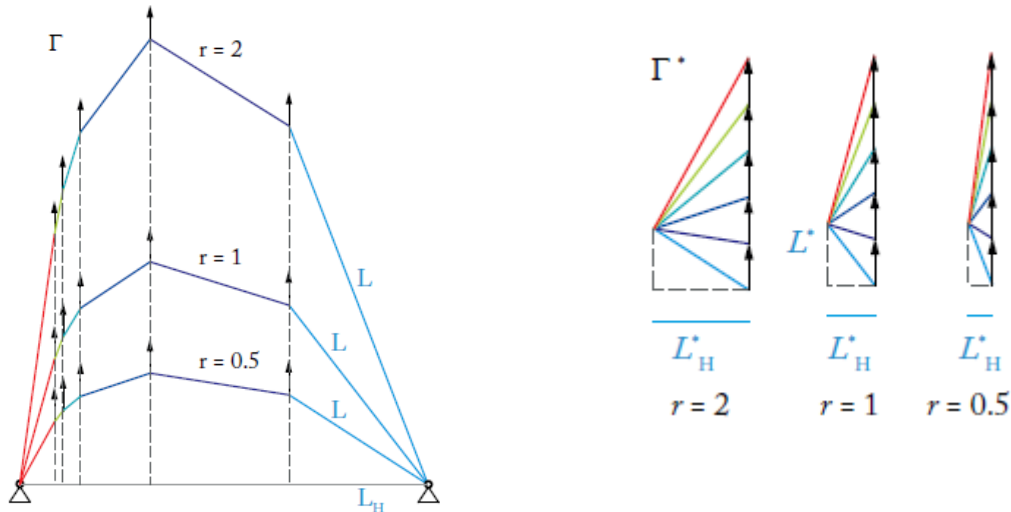


Figura 5 - Influência do fator de escala r na forma final [17].

1.2.3 Obtenção de forma por integração do campo gradiente

Este método utiliza a possibilidade de descrever o equilíbrio de membrana através de campos vetoriais definidos a partir da equação diferencial de equilíbrio (1), estabelecida para cascas de forma arbitrária [18][24][26]. Do equilíbrio na direção ortogonal ao plano de projeção da casca, definida como vertical neste trabalho, resulta o campo vetorial \mathbf{v}_z (2) definido em função das inclinações da superfície e das projeções dos esforços de membrana (Figura 6). A partir das componentes das projeções das forças de membrana no plano horizontal é possível definir os campos \mathbf{n}_x (3) e \mathbf{n}_y (4) e representar caminhos de força [18].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \bar{p}_z = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_z = \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y}, \bar{N}_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (2)$$

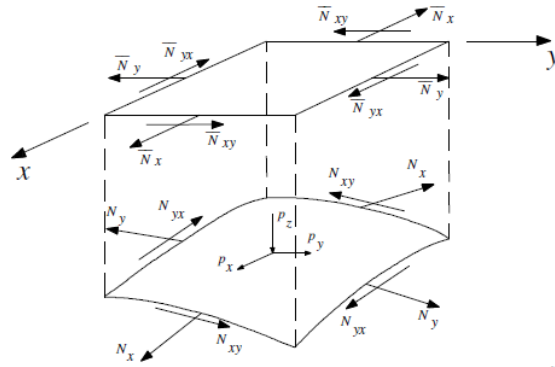


Figura 6 - Elemento de casca sujeito a forças de membrana, com projeções no plano horizontal [1].

Ao contrário do método de rede de impulso, que tenta antecipar os caminhos de carga vertical no diagrama de forma a partir de analogias, no presente método existe determinação mais precisa dos caminhos de forças. Este facto resulta de os sistemas de forças predefinidos resultarem após análise estática de equilíbrio. A determinação dos sistemas de forças predefinidos pode ser realizada através de modelos planos de parede, sujeitos a forças externas de pré-esforço. Os sistemas de forças podem ser manipulados através das condições de rigidez definidos para o modelo. O sistema de forças verticais é determinado pela análise de modelos de laje sujeitos ao carregamento pretendido.

Conforme [18], da igualdade do campo vetorial v_z , com o campo de equilíbrio de laje (5), definido a partir do gradiente da função potencial [24], resultam, após resolução de um sistema de equações lineares, as componentes do campo gradiente da superfície grad z (6). A integração deste campo permite a obtenção de formas anti-funiculares em casca para sistemas de força predefinidos.

$$v = (V_x, V_y) \tag{5}$$

$$\text{grad } z = \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{V_x \bar{N}_y + V_y \bar{N}_{xy}}{\bar{N}_x \bar{N}_y - \bar{N}_{xy}^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{V_y \bar{N}_x + V_x \bar{N}_{xy}}{\bar{N}_x \bar{N}_y - \bar{N}_{xy}^2} \end{cases} \tag{6}$$

Neste procedimento os sistemas de forças predefinidos são determinados através da análise de modelos de elementos finitos de parede e de laje utilizando programas comuns de análise estrutural. A integração do campo gradiente da superfície (6) é feita pelo método das diferenças finitas, tendo no caso sido utilizado o programa de computação Octave [27].

Os resultados foram obtidos a partir de uma malha de elementos finitos predefinida com atribuição sequencial da ordem dos nós. As operações e cálculo no Octave foram efetuadas com os dados organizados em função dessa atribuição sequencial dos nós.

Em suma, o método proposto em [18] permite um controlo do sistema de forças predefinido e que se pretende de forma aproximada na solução final. O facto de trabalhar com modelos contínuos pode ser uma vantagem, tendo em conta a consideração de sistemas de forças mais próximos da realidade de um sistema contínuo. Em [17] refere-se que: *“The resulting thrust network can be seen as an approximation of a continuous compression surface, representing the centre geometry of the vault, excluding the thickness of the structure.”*

1.3 Tratamento dos bordos livres

Nesta secção apresenta-se uma abordagem introdutória do tratamento dos bordos livres em estruturas de casca. Os bordos livres correspondem a zonas de maior complexidade neste tipo de estruturas, onde existe maior suscetibilidade para instabilidade. Adicionalmente, a concentração de caminhos de forças pode implicar o surgimento de esforços de flexão indesejáveis neste tipo de estruturas. Nas primeiras soluções de casca construídas a solução para problema correspondeu à adoção de elementos com rigidez à flexão junto dos bordos.

Heinz Isler e o arquiteto Michael Balz determinaram a forma da cobertura de Naturtheater Grötzingen [28] a partir da inversão de um tecido suspenso. Consideraram duas situações de disposição das fibras no tecido como se pode observar a partir da Figura 7. A disposição adotada foi a das fibras alinhadas a 0° e a 90° em relação ao eixo cartesiano X por permitir uma curvatura mais suave da casca sem o levantamento da cota dos bordos proporcionado pela disposição diagonal das fibras, que comprometia o sombreamento [29].

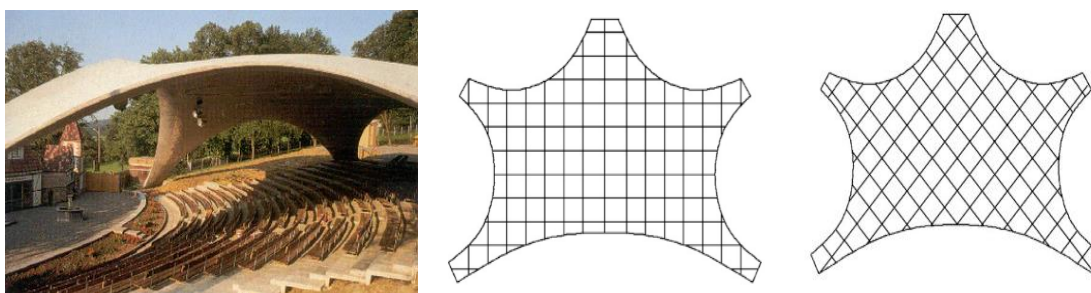


Figura 7 - Representação da forma final da casca e das disposições das fibras no tecido [29].

Após análise experimental foi constatado que o efeito de instabilidade por encurvadura era crítico nas zonas de bordo e junto dos apoios. O problema das zonas de bordo foi resolvido pela adoção de abas semelhantes às que se observam no modelo de tecido suspenso (Figura 8), embora mais suaves.



Figura 8 - Modelo físico experimental de Heinz Isler [17].

Em [29] procedeu-se à modelação numérica desta cobertura a partir do programa de elementos finitos SAP e determinou-se o mapa de esforços de membrana na direção X representado na Figura 9. Por observação do mapa de esforços verificam-se trações nas zonas de bordo e nas zonas junto aos apoios. No entanto, nesta modelação não se considerou o efeito de rigidez das abas nos bordos nem o aumento da espessura nas zonas dos apoios [29].

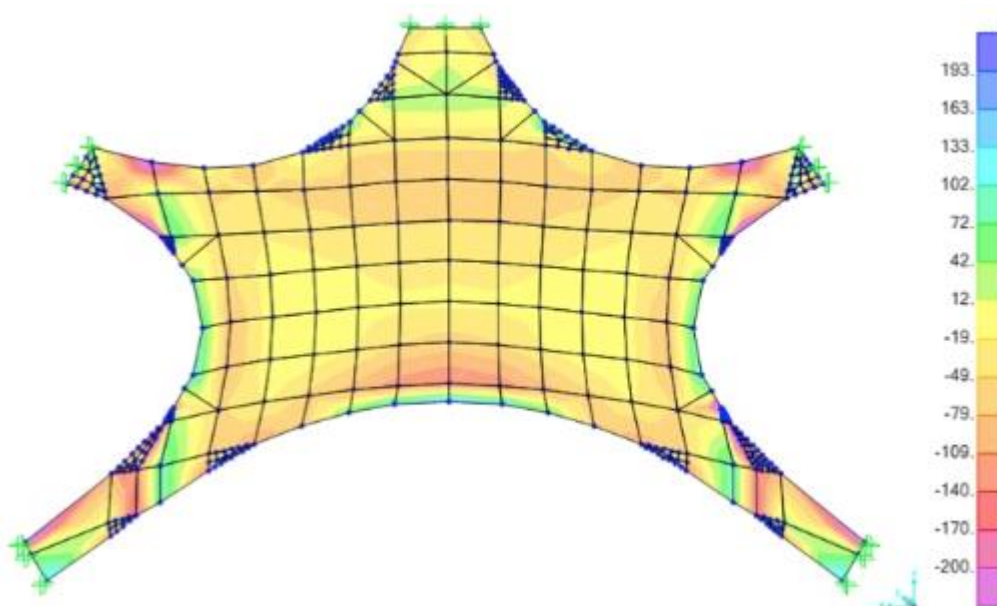


Figura 9 - Esforços de membrana da casca sem consideração dos elementos de rigidez [29].

A cobertura da Deitingen Service Station (Figura 10) é um dos exemplos de Heinz Isler que demonstra que é possível um bom desempenho estrutural sem essas abas suspensas, ou seja, com forma puramente sinclástica até aos bordos. Neste caso a forma foi obtida por inversão de um tecido suspenso [30]. A diferença de cotas entre a zona central e a zona de bordo, correspondente a maior curvatura é resultado da distribuição de forças axiais entre essas zonas no modelo de tecido suspenso, sendo que as zonas com maior esforço axial têm cotas inferiores.



Figura 10 - Pormenor do canto da cobertura de Heinz Isler [31].

Em 1958 Félix Candela determinou a forma da cobertura de Los Manantiales [11] no México a partir de paraboloides hiperbólicos. A curvatura anticlástica da superfície implica a transferência de forças para o interior, na direção das zonas de rigidez correspondente às interseções entre os paraboloides. A partir do mesmo método Félix Candela constrói, em 1960, a Fábrica Bacardí [9] no México. A espessura da casca é de 4 cm na sua maior parte, à exceção das zonas de intersecção entre paraboloides, com uma espessura de 16 cm. O modelo de caminhos de força na estrutura é apresentado na Figura 11. Nestes casos, a forma escolhida desvia as forças dos bordos e, por outro lado, a redução de espessura reduz as tensões devido à redução de peso e de rigidez de flexão.

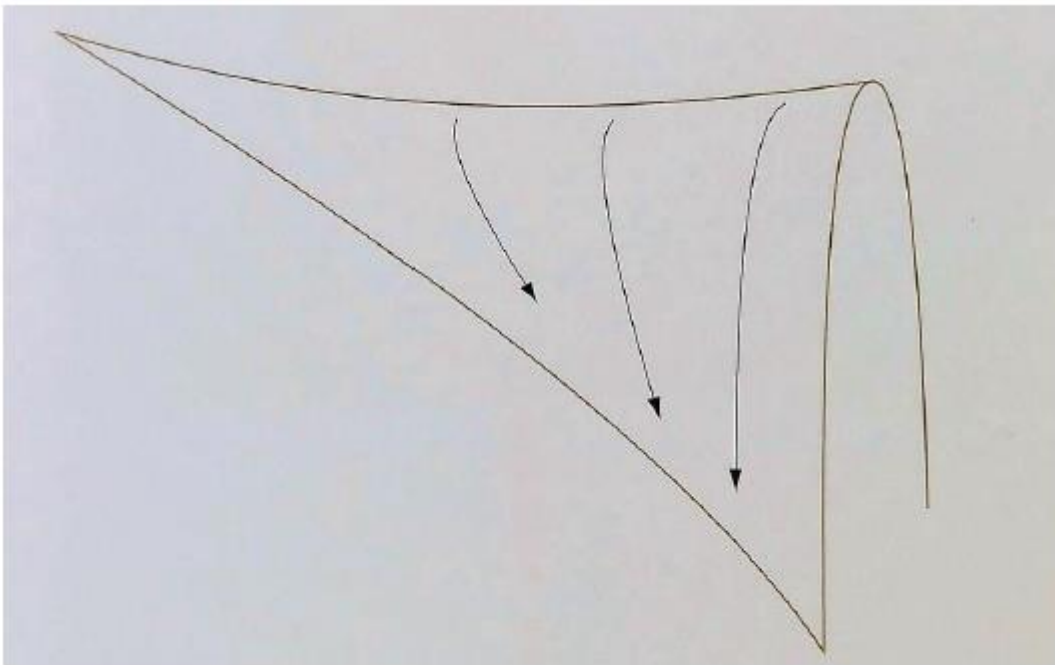


Figura 11 - Modelo de análise do paraboloides hiperbólico de Félix Candela [9].

A obtenção de forma de cascas anti-funiculares de bordo livre por resolução de equações de equilíbrio, conforme o procedimento desenvolvido em [18] e [16], encontra dificuldades que implicam alguns procedimentos abaixo descritos. Na formulação do método das redes de impulso [16], por estar associado a modelos discretos de barras, recomenda-se a definição de um bordo curvo em planta, de modo a que seja possível equilibrar as forças que aí chegam exclusivamente por esforços de membrana. As opções para tal correspondem a:

- Escolher primeiro a distribuição das forças internas nos ramos que terminam no arco e, sabendo que este tem de ser anti-funcular do seu carregamento, determina-se a sua forma a partir da determinação da flecha no plano (d). A Figura 12 descreve esse procedimento.

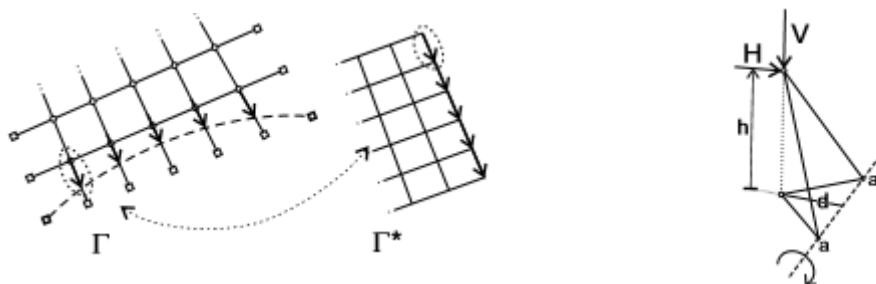


Figura 12 - Representação do modelo de cálculo [16].

- Definir a projeção horizontal do arco de bordo em primeiro lugar no diagrama de forma, que posteriormente determina a distribuição de forças internas e, portanto, os comprimentos dos ramos no diagrama de força. Na Figura 13 surge o modelo de cálculo associado.

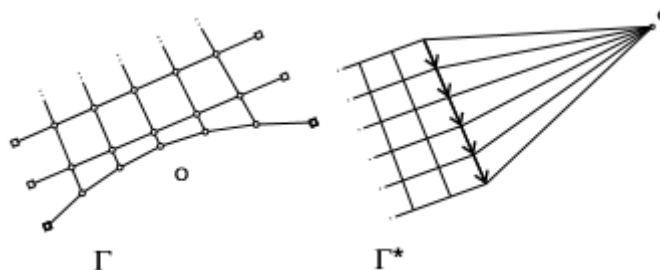


Figura 13 - Representação do modelo de cálculo [16].

Em relação ao método desenvolvido em [18], a obtenção de cascas de bordo livre com predefinição do campo de equilíbrio vertical a partir de uma laje tem como consequência a necessidade de resolver um problema associado a caminhos concentrados de forças junto ao bordo. O modo como o problema foi resolvido surge no capítulo 3 da presente dissertação.

Capítulo 2 - Solução de bordos apoiados

Em [18] constam exemplos de aplicação de obtenção de forma de cascas com predefinição de forças para soluções de bordos apoiados. Nesses exemplos são considerados diferentes sistemas de forças de membrana para o mesmo campo de equilíbrio vertical. No presente trabalho, são estudados casos de diferentes campos de equilíbrio vertical para o mesmo sistema de forças de membrana. Os campos de equilíbrio verticais são alterados através da manipulação das condições de rigidez dos apoios (casos 1 e 2) e por variações na espessura das lajes (caso 3). Os algoritmos usados no procedimento apresentam-se no Anexo A1 e Anexo A2.

2.1 Caso 1

No primeiro caso analisado, similar aos que constam em [18], estuda-se uma casca de planta quadrada e espessura igual a 10cm, simplesmente apoiada ao longo dos bordos. A casca será pré-esforçada com forças de valor constante ao longo dos bordos, com um valor de 20kN/m. A sollicitação vertical considerada corresponde a 3,5 kN/m². A Figura 14 representa a planta da parede e a sua sollicitação.

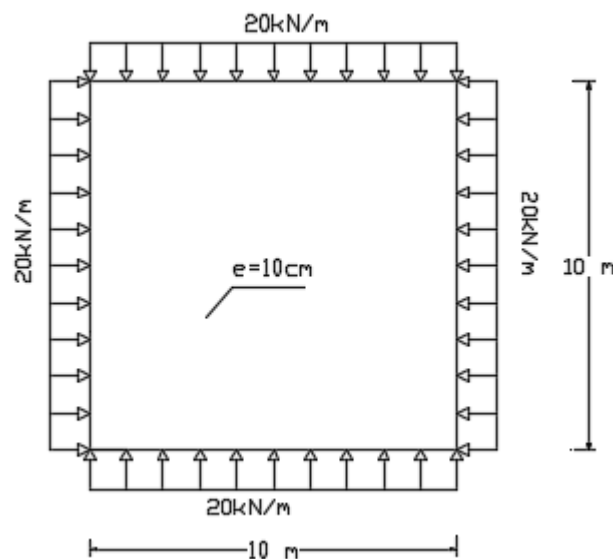


Figura 14 - Representação da planta da parede e da sua sollicitação.

O resultado dos esforços de membrana da parede e de flexão da laje foram obtidos a partir de um programa de elementos finitos - *Robot Structural Analysis 2015* [32]. Na Figura 15 constam as distribuições dos esforços de membrana de uma parede plana, sendo iguais em todas as direções, com valores nulos das forças N_{xy} .

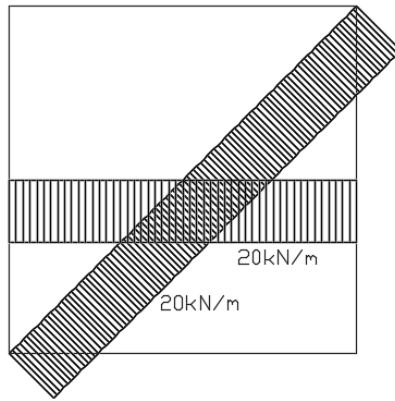


Figura 15 - Distribuição de forças de membrana N_x numa direção de corte ao longo da parede plana.

No caso 1 considera-se um sistema de laje quase unidirecional representado na Figura 16, com o campo de equilíbrio vertical v_z descrito na Figura 17 e na Figura 18.

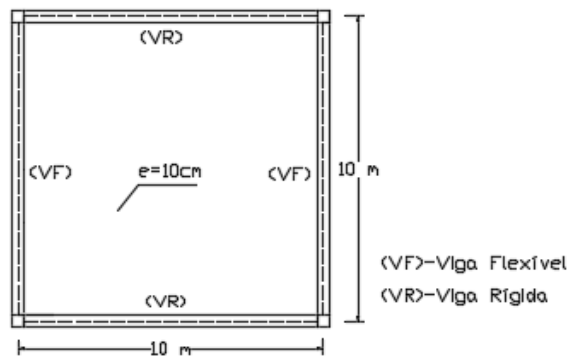


Figura 16 - Planta da laje com indicação das vigas rígidas e flexíveis.

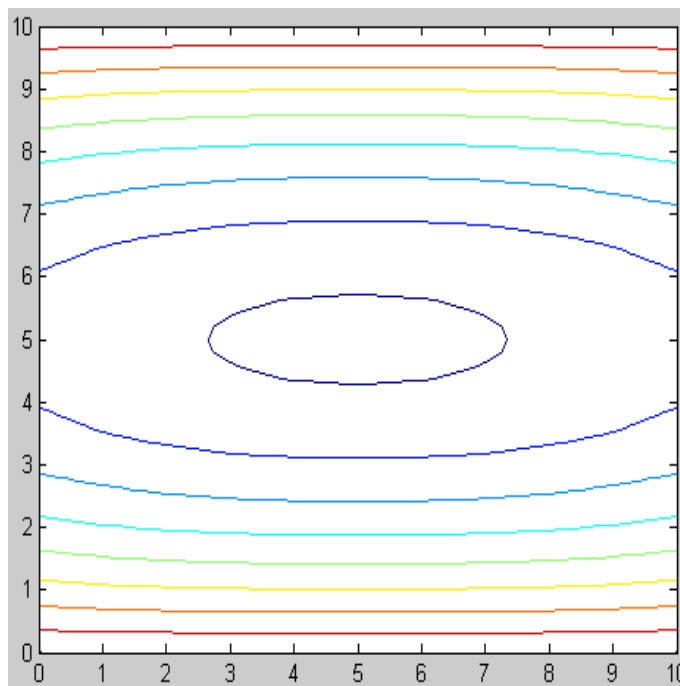


Figura 17 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.

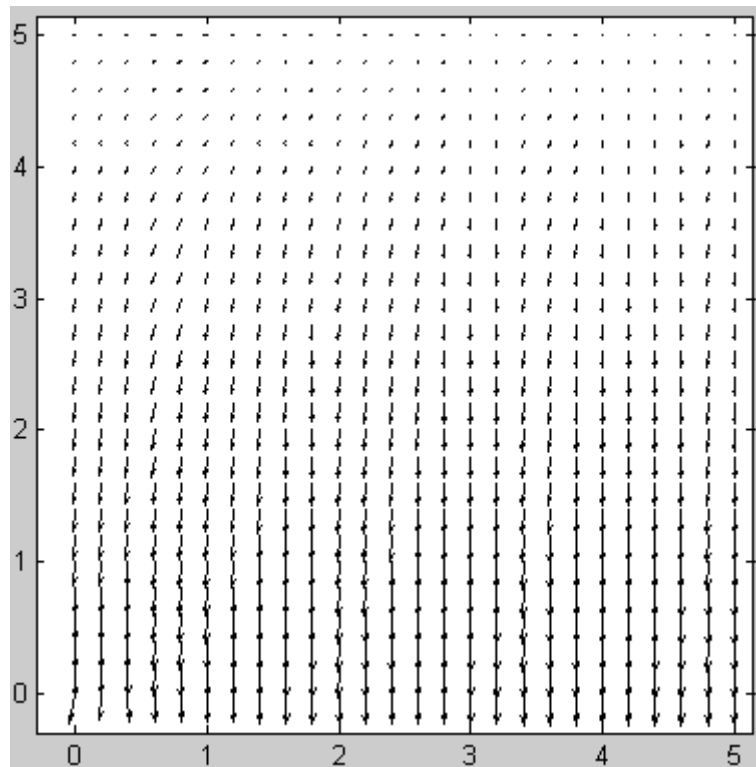


Figura 18 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.

A integração do campo gradiente da função de superfície (6), determinado a partir dos valores resultados do modelo de parede e de laje considerados, permitiu obter a forma descrita na Figura 19, com uma altura máxima $h=2,05$ m. A forma contém curvatura predominante na direção y , o que resulta das características do campo de equilíbrio vertical considerado. A Figura 20 contém as curvas de nível da forma de casca obtida.

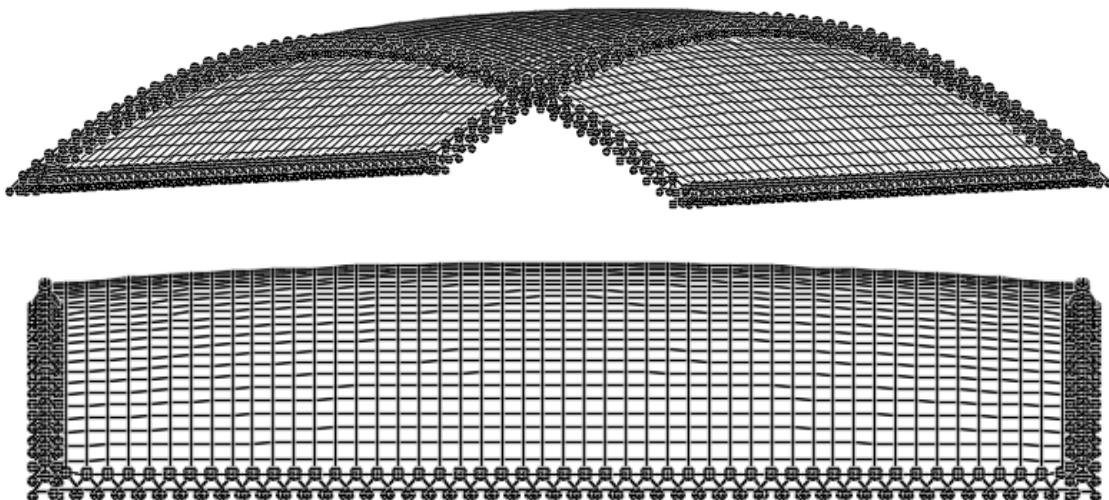


Figura 19 - Perspetiva e alçado lateral da forma de casca obtida.

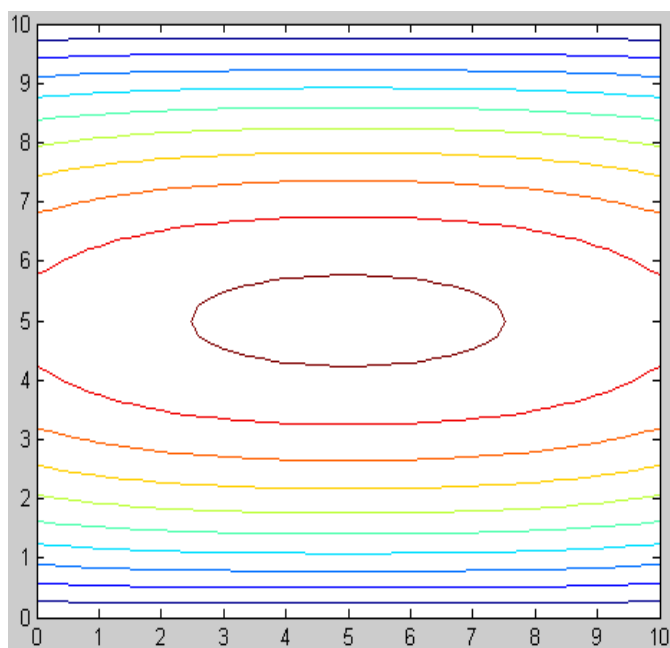


Figura 20 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

A distribuição das projeções das forças de membrana da casca, segundo x e y, são apresentadas na Figura 21 e Figura 22, respetivamente. Na Figura 23 constam as curvas da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca. A Figura 24 surge representado o campo de equilíbrio vertical v_z da casca.

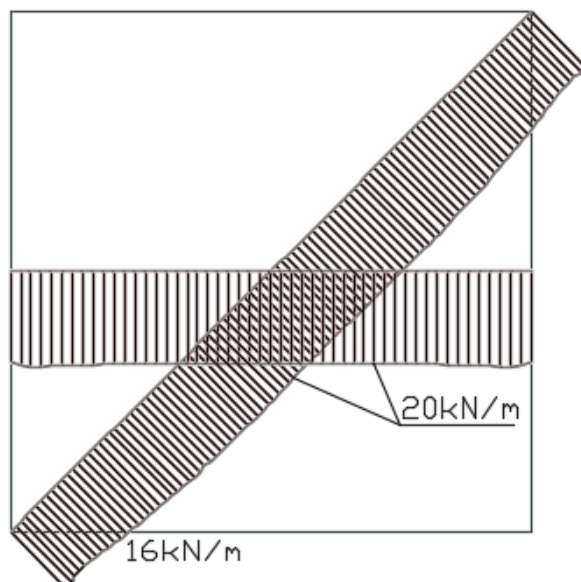


Figura 21 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

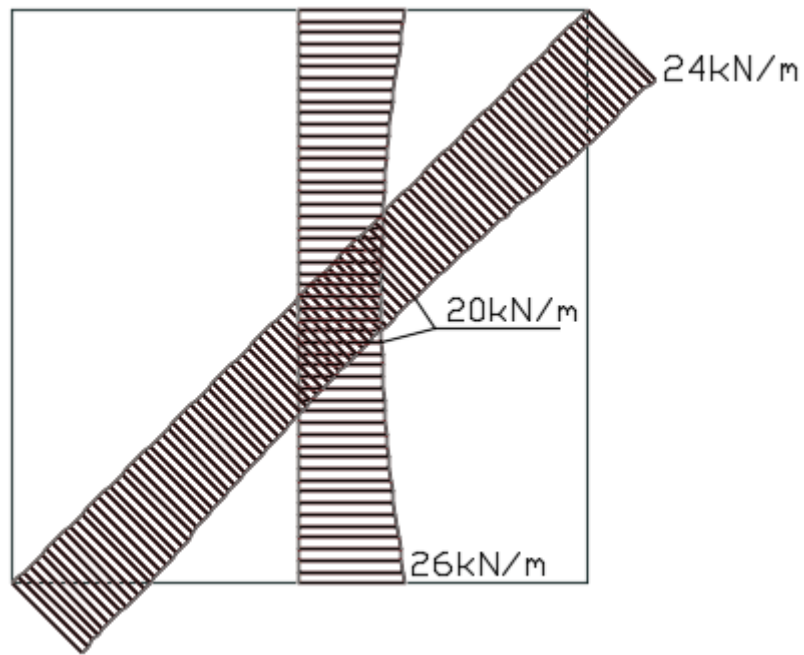


Figura 22 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo da casca.

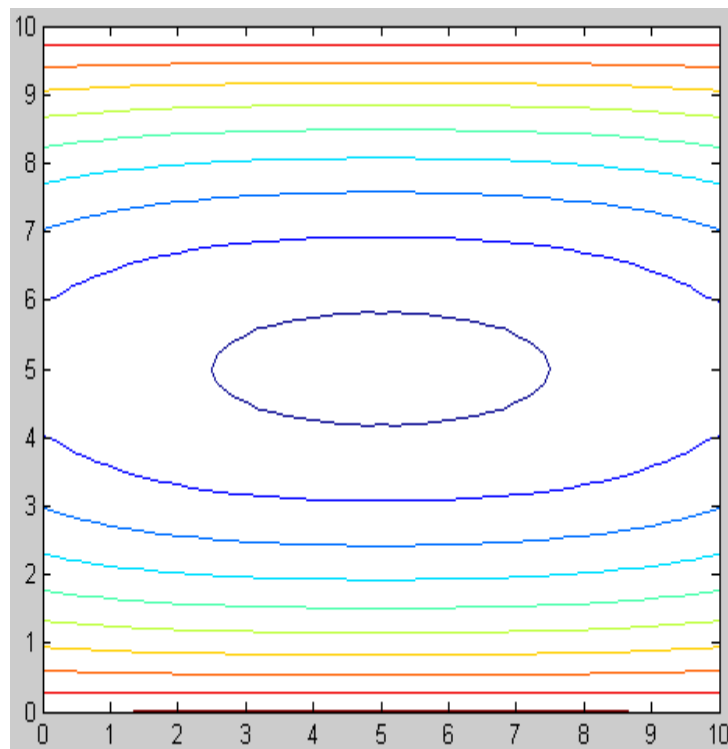


Figura 23 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.

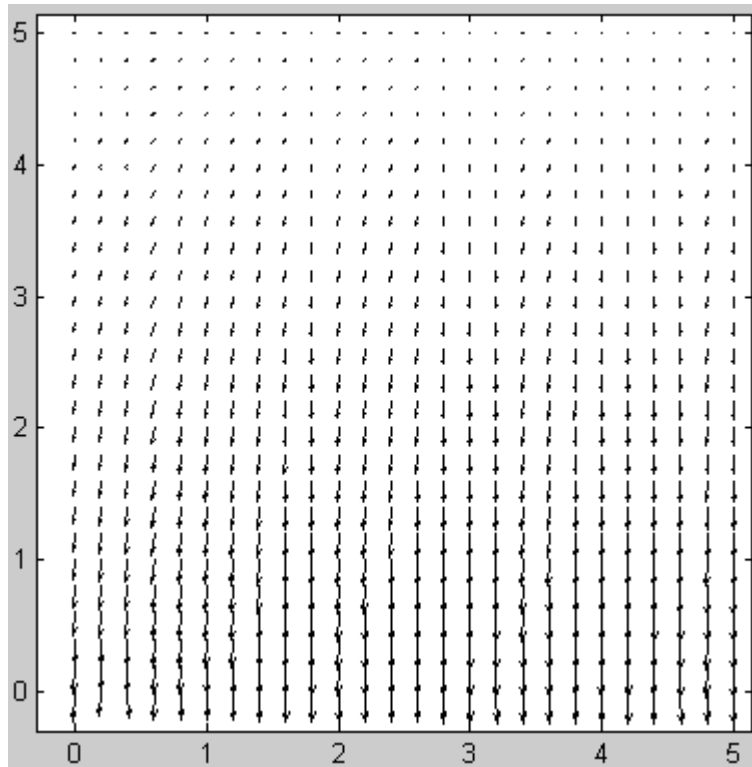


Figura 24 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da casca.

2.2 Caso 2

No segundo caso analisado o campo de equilíbrio vertical v_z é manipulado no sentido de que as forças verticais sejam preferencialmente conduzidas para a zona central dos bordos, conforme a Figura 25 e a Figura 26. Para esse efeito, foi considerada elevada rigidez de torção nas vigas de bordo.

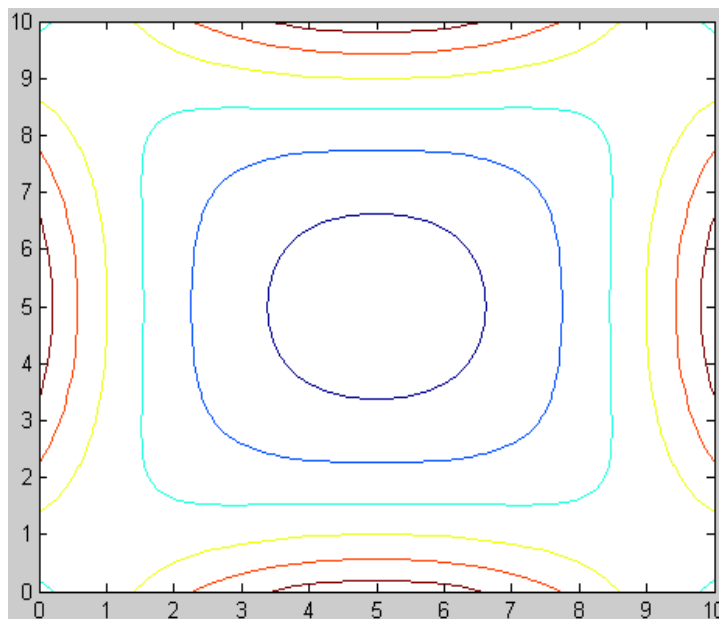


Figura 25 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.

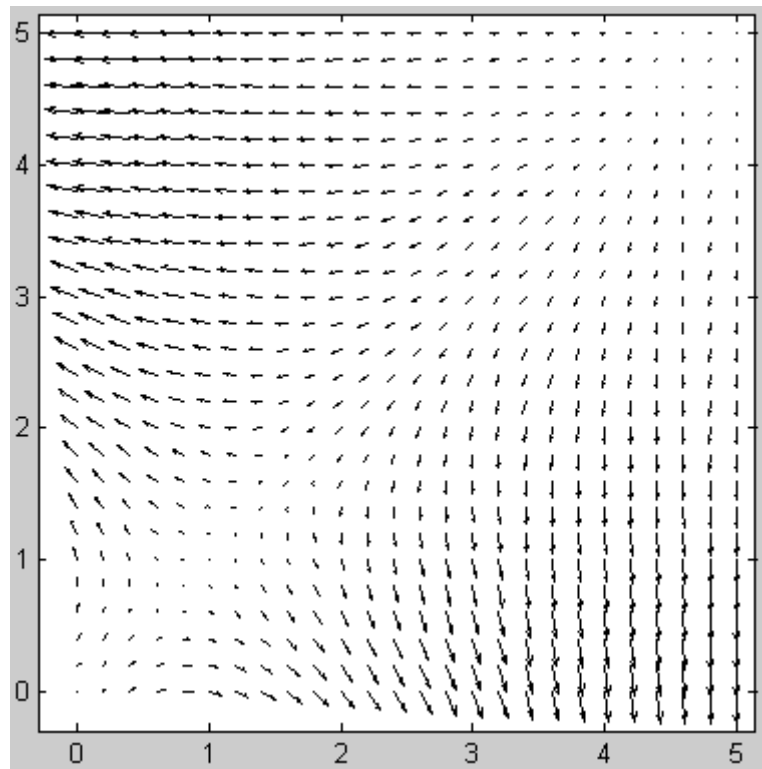


Figura 26 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.

Da integração do campo gradiente da função de superfície (6), resulta uma solução de casca de cota máxima $z = 0,62\text{m}$ e cota mínima $z = -0,89\text{m}$, o que corresponde a uma diferença de cotas de $1,51\text{m}$. Este “afundamento” da casca na zona central dos bordos acompanha o facto do campo v_z considerado tender para essa zona. A Figura 27 e Figura 28 descrevem a geometria obtida para a casca.

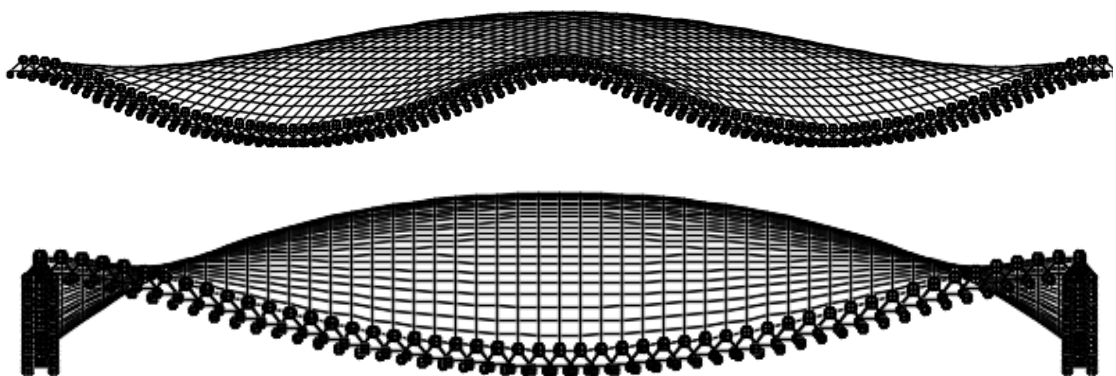


Figura 27 - Perspetiva e alçado lateral da forma de casca obtida.

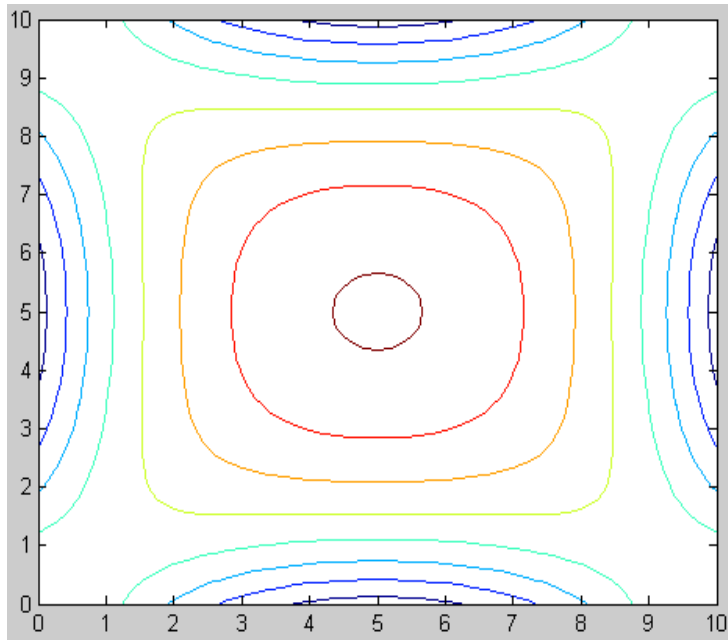


Figura 28 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

A distribuição das projeções das forças de membrana da casca segundo x é apresentada na Figura 29. A Figura 30 representa as curvas nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca. Na Figura 31 está representado o campo de equilíbrio vertical v_z .

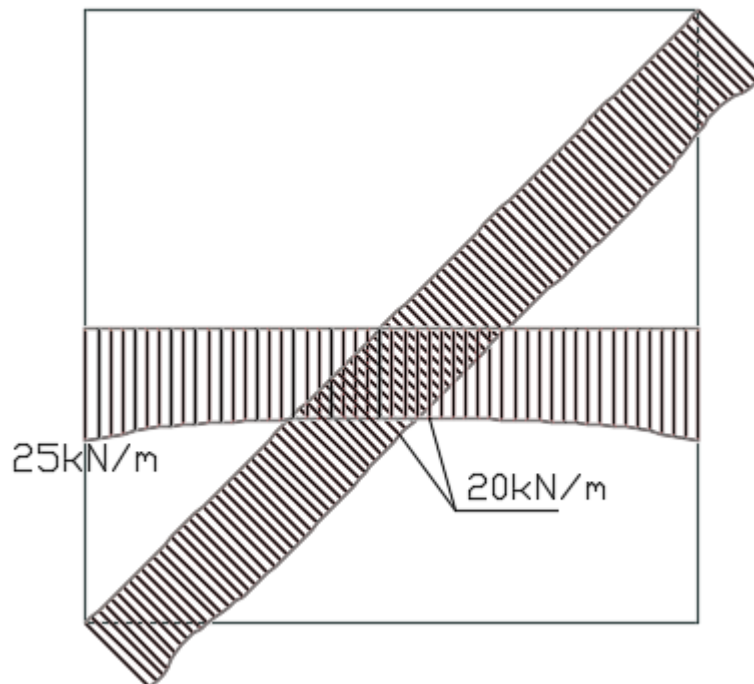


Figura 29 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

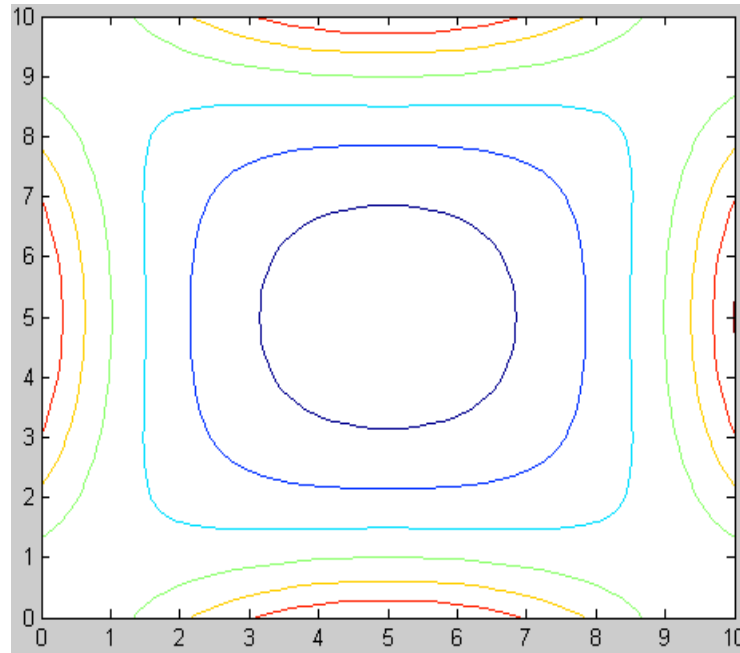


Figura 30 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.

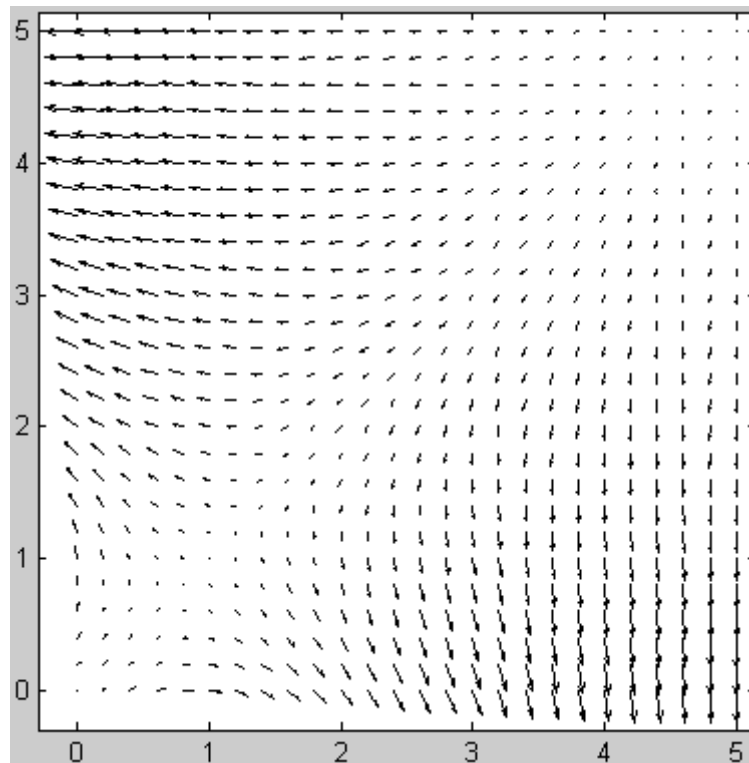


Figura 31 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da casca.

2.3 Caso 3

No caso analisado de seguida consideram-se espessuras variáveis na solução de parede e espessura constante na solução de laje. A distribuição das forças de membrana predefinidas é influenciada pela variação de espessura considerada, sendo que nas zonas mais espessas, por serem mais rígidas, verificam-se esforços maiores. (Figura 32).

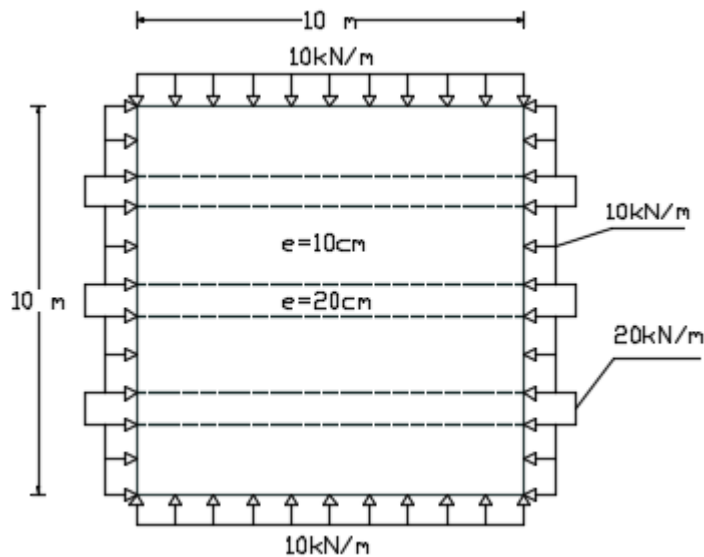


Figura 32 - Planta de parede com variação de espessura.

A distribuição dos esforços de membrana da parede N_x e N_y estão representados na Figura 33 e Figura 34, respetivamente.

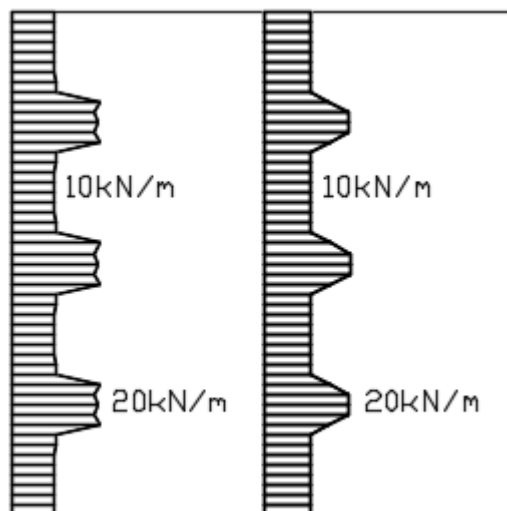


Figura 33 - Distribuição de forças de membrana N_x numa direção de corte ao longo da parede plana.

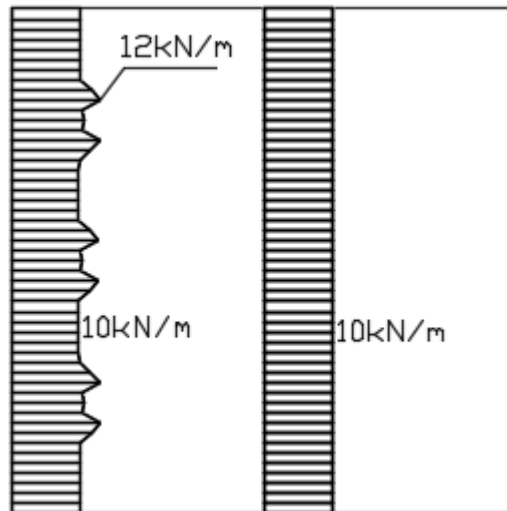


Figura 34 - Distribuição de forças de membrana N_y numa direção de corte ao longo da parede plana.

O campo de equilíbrio vertical resultou de uma laje quadrada de espessura constante apoiada nos bordos, conforme a Figura 35 e a Figura 36.

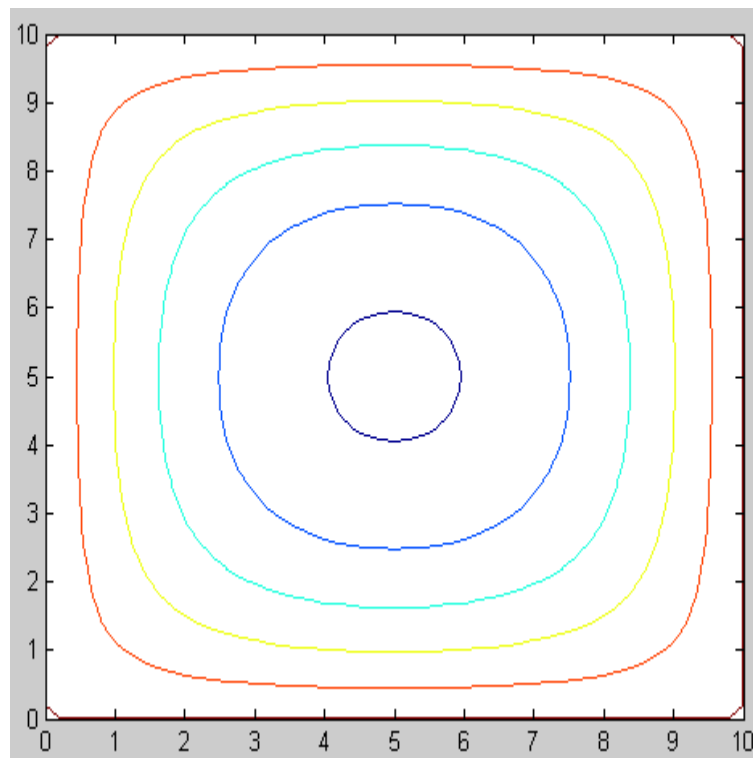


Figura 35 - Planta de curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.

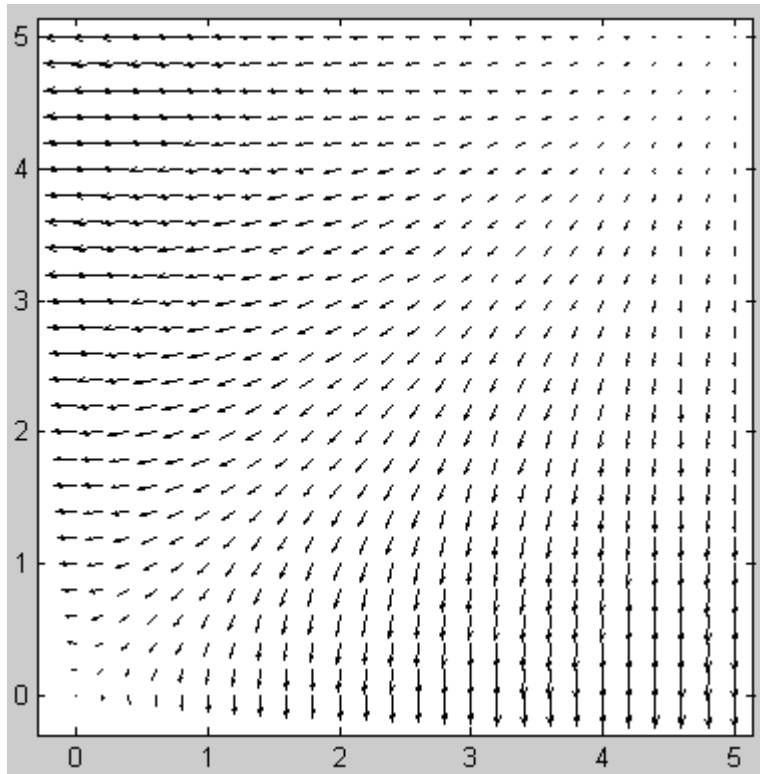


Figura 36 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.

A integração do campo gradiente da função de superfície (6) resultou na geometria descrita na Figura 37 e na Figura 38, com uma cota máxima 2,31m.

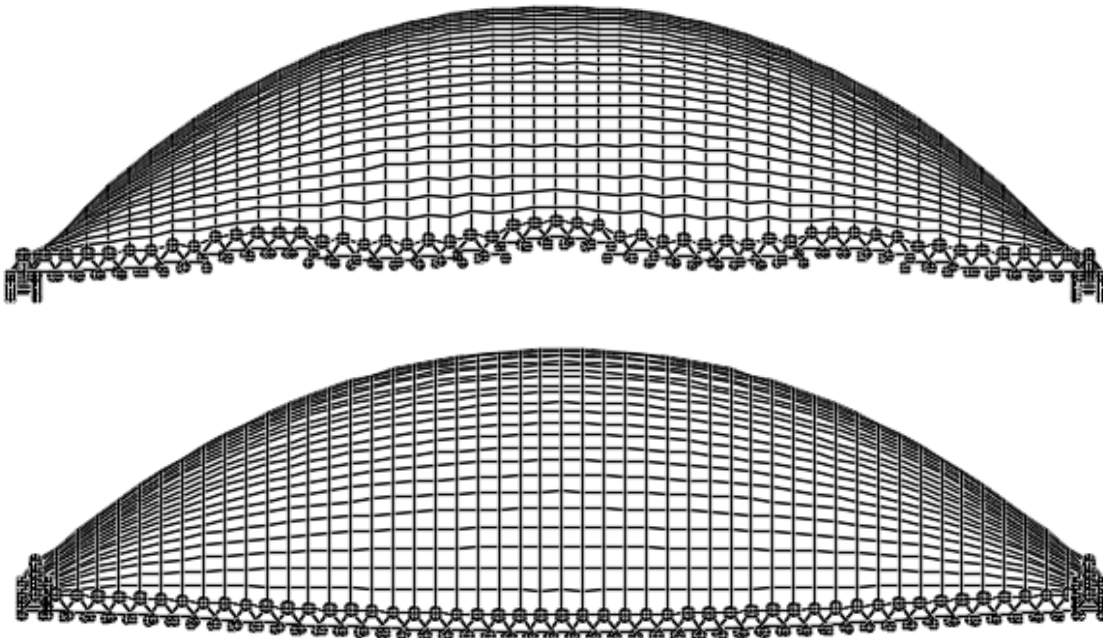


Figura 37 - Perspetiva e alçado lateral da forma de casca obtida.

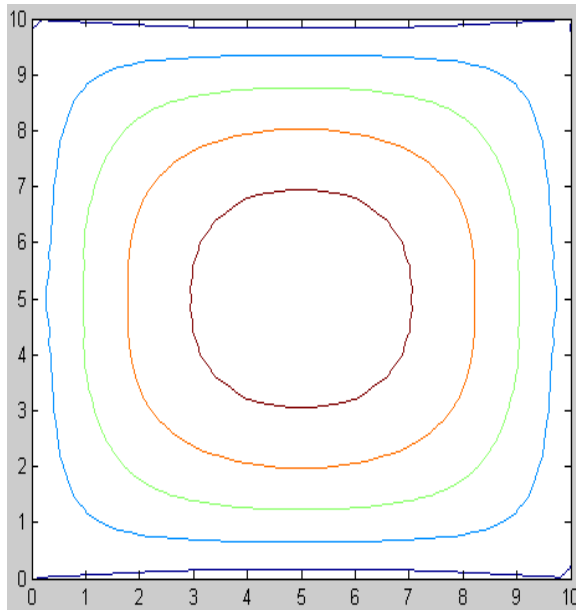


Figura 38 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

A análise de um modelo de casca com variação de espessura mostra que os esforços na solução obtida são similares aos predefinidos e obtidos no modelo de parede plana, conforme a Figura 39 e Figura 40. A conclusão é similar para o campo de equilíbrio vertical v_z , conforme a Figura 41 e a Figura 42.

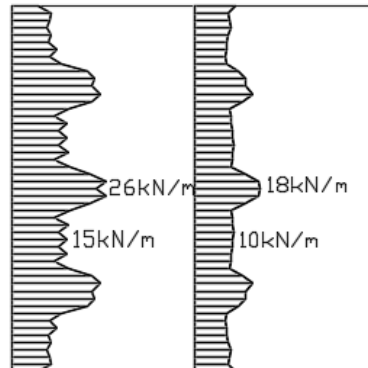


Figura 39 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

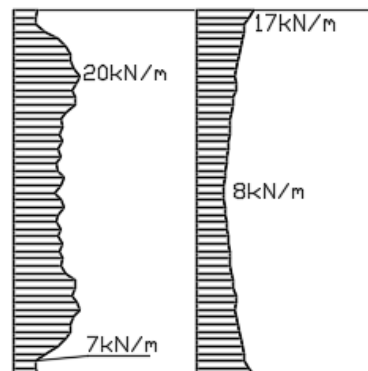


Figura 40 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo da casca.

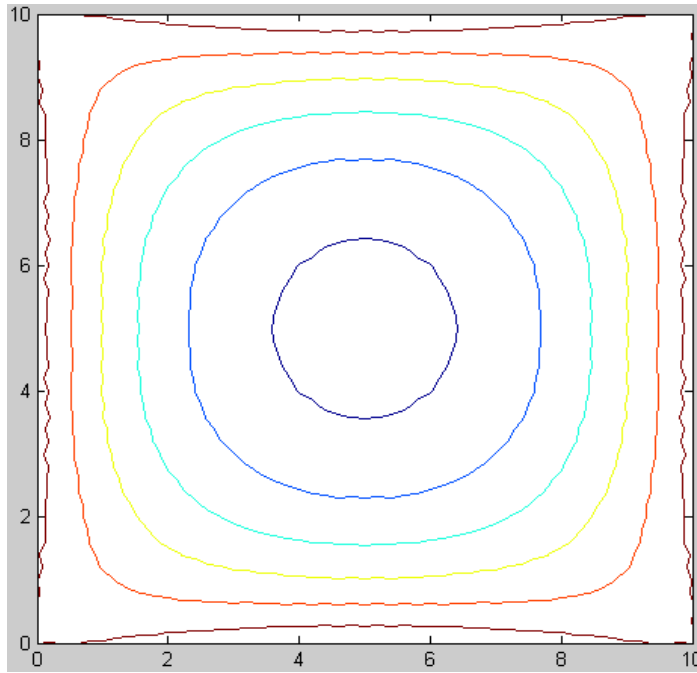


Figura 41 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.

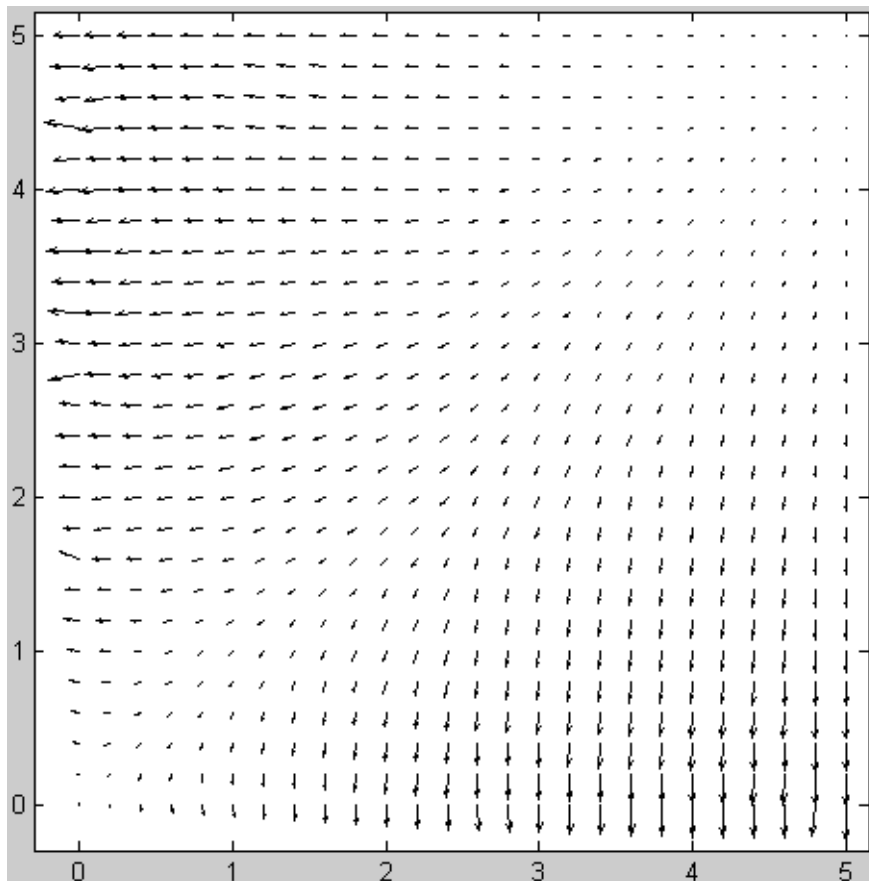


Figura 42 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da casca.

O campo de equilíbrio vertical que resulta de um modelo plano de laje com as espessuras da Figura 32 é apresentado na Figura 43. Esta perturbação no caminho de forças introduz dificuldades para a aplicação do método utilizado, não se obtendo soluções adequadas relativamente ao sistema de forças predefinido e o que efetivamente se verifica na casca, conforme demostram a Figura 45 e Figura 47. A ligação entre os elementos de diferente rigidez gera um encastramento que atrai forças na sua direção.

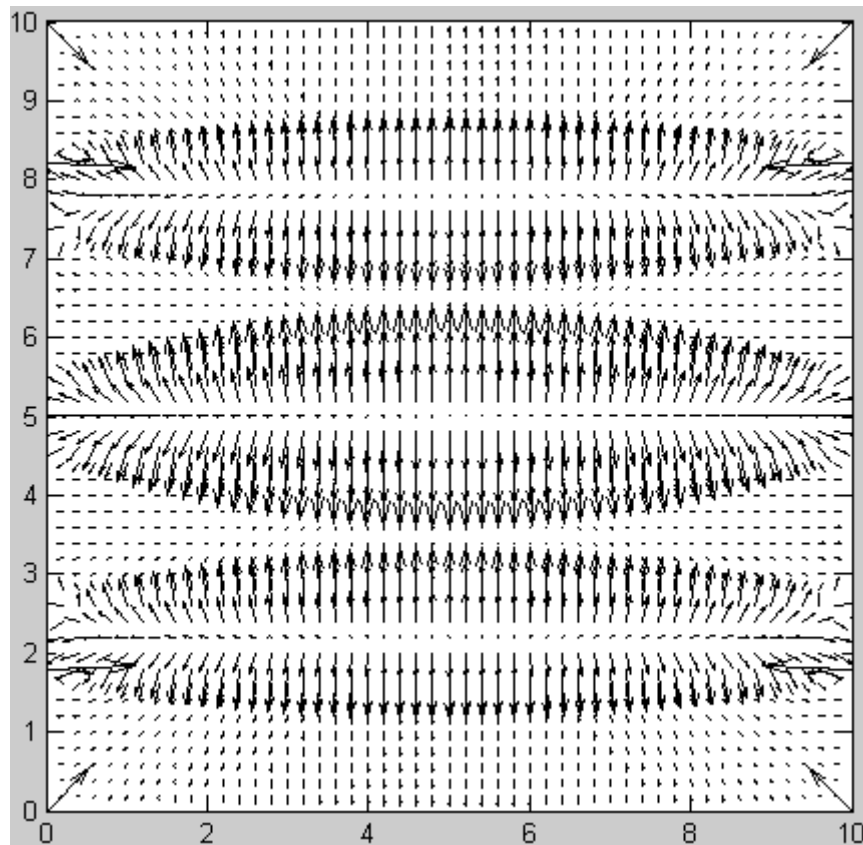


Figura 43 - Representação do campo vetorial de equilíbrio vertical da laje com variação de espessura.

A solução de casca que resulta da integração do campo gradiente obtido com o campo vertical de equilíbrio vertical descrito na Figura 43 surge representado na Figura 44. A Figura 45 mostra a distribuição de esforços N_x , com grande diferença com o predefinido e obtido na solução de parede.

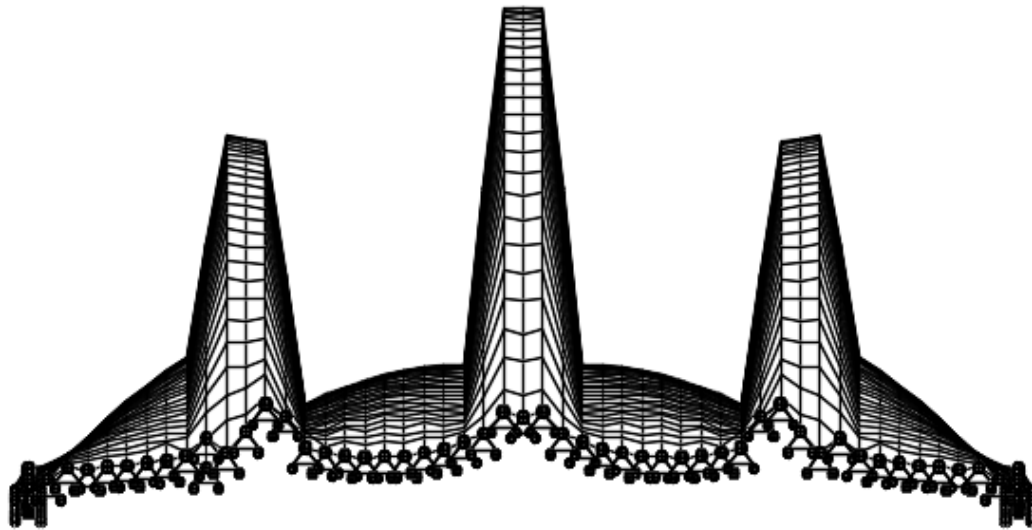


Figura 44 - Alçado da superfície da casca.

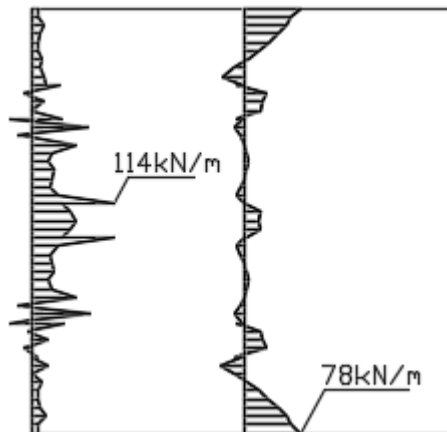


Figura 45 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

A suavização da função potencial da solução de laje de espessura variável implica algumas melhorias junto dos apoios. No entanto, os esforços verificados na solução obtida na Figura 46 não se aproximam do sistema de forças predefinido (Figura 47).

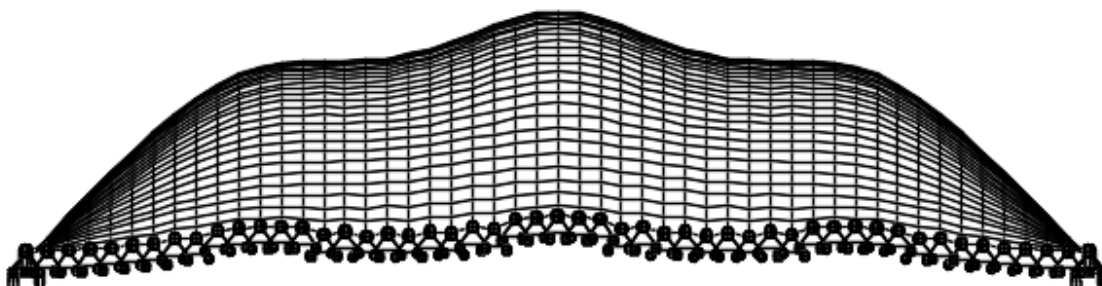


Figura 46 - Alçado da superfície da casca.

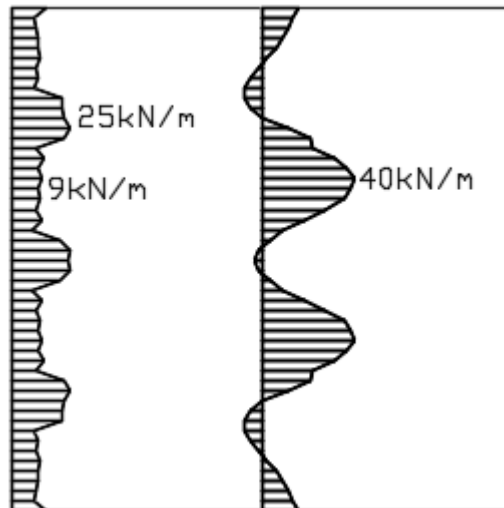


Figura 47 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

2.4 Discussão de resultados

A formulação matemática do método em estudo permite a manipulação de campos de membrana e de equilíbrio vertical a partir de modelos planos, como forma de condicionar uma solução final. Este facto possibilita ao usuário, numa fase de anteprojecto, experimentar diversas situações até determinar uma solução em equilíbrio que se adeque às condicionantes.

O método em análise associa uma solução de equilíbrio de parede a uma solução de equilíbrio de laje. A manipulação do campo de equilíbrio vertical de laje a partir da alteração das condições de rigidez nos apoios dos bordos, para um sistema de forças de membrana constante, possibilitou a predefinição de um sistema de caminhos de carga.

A manipulação do sistema de forças de membrana através de espessuras variáveis no modelo de parede plana revelou-se viável quando o campo de equilíbrio vertical é obtido para lajes de espessura constante. A manipulação do campo de equilíbrio vertical através da variação da espessura da laje não produziu resultados satisfatórios. Tal facto está associado a descontinuidades no modelo de laje que se refletem no campo de equilíbrio vertical. A solução obtida embora apresente reduzidos esforços de flexão resultam em esforços de membrana muito diferentes dos predefinidos.

Nos casos de bordo apoiado com campos de equilíbrio vertical obtidos para lajes de espessura constante foram obtidos resultados satisfatórios, em que o sistema de forças de membrana na solução da casca não difere muito do predefinido e obtido na solução de parede plana. Nos casos analisados o campo de equilíbrio vertical v_z e as projeções dos esforços de membrana são independentes, em que a geometria é uma consequência exclusiva do equilíbrio do sistema de forças predefinido.

Capítulo 3 - Bordos livres

Neste capítulo apresentam-se casos de estudo de cascas de bordo livre. Os exemplos analisados agrupam-se em dois casos de geometria em planta distinta e, tal como nos exemplos anteriores, considera-se uma espessura máxima de 0,10 m. Os algoritmos usados no procedimento apresentam-se no Anexo A3.

3.1 Bordos retos

3.1.1 Pré-esforço concentrado nos cantos

O primeiro exemplo analisado corresponde a uma planta quadrada (10m x 10m) e espessura de 0,10m. A solução será apoiada nos cantos e pré-esforçada diagonalmente a partir destes, conforme a Figura 48. As projeções dos esforços de membrana utilizadas no processo de obtenção de forma foram obtidas para forças nos cantos de valor igual a 130 kN.

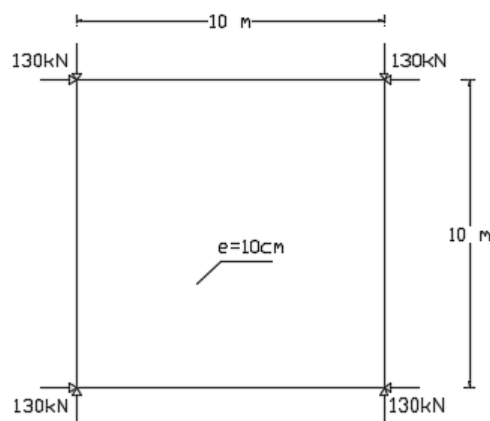


Figura 48 - Representação da planta da parede e a sua solicitação pelos cantos.

A Figura 49 e a Figura 50 descrevem os esforços obtidos para a solução de parede. Na Figura 51 surgem representados os caminhos de forças horizontais na direção X. Os caminhos de forças na direção Y são similares, mas rodados de 90°.

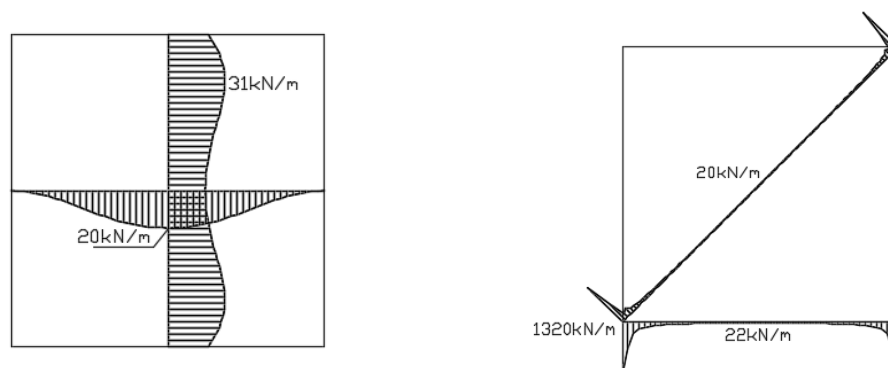


Figura 49 - Distribuição dos esforços N_x em seções do modelo plano de parede.

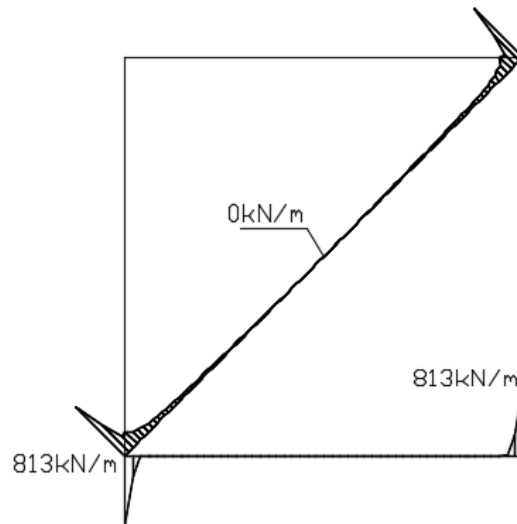


Figura 50 - Distribuição dos esforços N_{xy} em secções do modelo plano de parede.

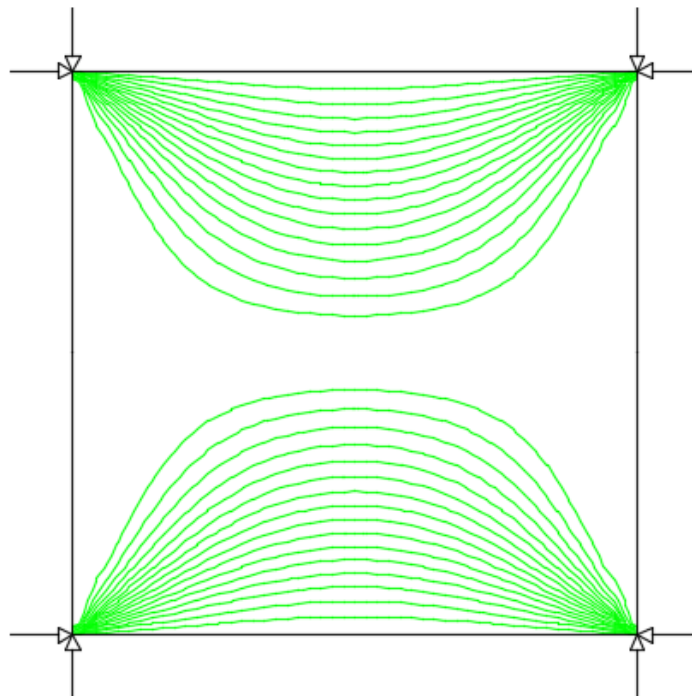


Figura 51 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de parede plana sujeito a forças de pré-esforço de 130kN nos cantos.

O campo de equilíbrio vertical resulta de uma laje simplesmente apoiada nos cantos por apoios rígidos verticais e solicitada por uma carga vertical uniformemente distribuída. A função potencial surge representada na Figura 52. A Figura 53 contém os vetores do campo de equilíbrio vertical, representando-se 1/4 da laje.

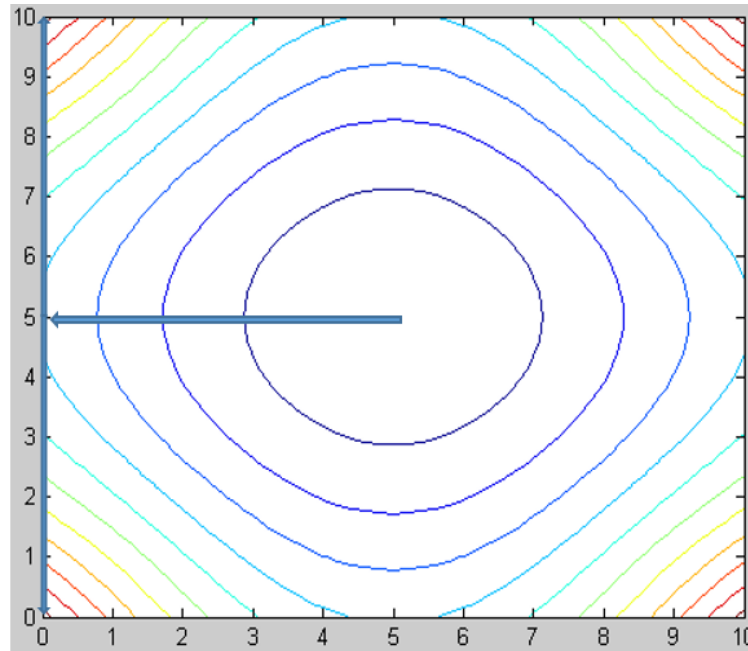


Figura 52 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.

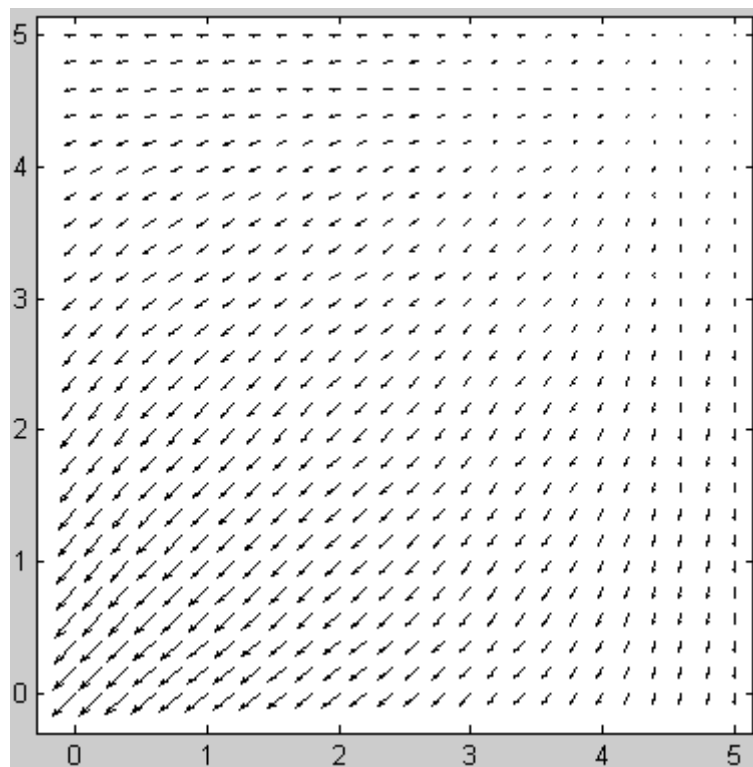


Figura 53 - Campo vetorial v_z de equilíbrio vertical de $1/4$ da laje.

A Figura 52 e Figura 53 mostram que os bordos livres podem corresponder a caminhos de concentrados de forças que chegam a essa zona. Inicialmente, a integração do gradiente da função de superfície (6) foi feita a partir dos esforços de membrana da parede plana solicitada pelos cantos (Figura 48) e do campo de equilíbrio vertical de uma laje solicitada por carga uniforme de $3,5\text{kN/m}^2$ (Figura 53). Com esse procedimento não foi possível obter uma solução,

peelo facto de não ser possível obter equilíbrio de membrana das forças que chegam ao bordo. Assim, foi necessário considerar no procedimento de obtenção de forma forças de compressão perpendiculares ao bordo que garantem o equilíbrio no modo desejado, sem esforços de flexão.

A consideração do carregamento vertical de $6,5\text{kN/m}^2$ da Figura 54b resolveu problemas devidos à utilização de funções de suavização dos dados de entrada do procedimento de obtenção de forma. Essa suavização foi necessária pela qualidade dos resultados obtidos na análise dos modelos de parede plana e de laje, especialmente nas zonas próximas dos cantos em que as forças de pré-esforço são concentradas. As funções de suavização alteram globalmente os sistemas de forças predefinidos. Com o intuito de se retirar este carregamento vertical em excesso, as forças de compressão perpendiculares ao bordo foram incrementadas, resultando no sistema de forças da Figura 54b para o processo de obtenção de forma. Esse procedimento permitiu o funcionamento em equilíbrio da casca apenas com forças de pré-esforço nos cantos de 130 kN e a carga vertical distribuída de $3,5\text{ kN/m}^2$ (Figura 54a).

A solução obtida possui uma cota máxima na zona central de $h = 2\text{m}$ e nos bordos de $h = 1,14\text{m}$. A Figura 55 e a Figura 56 descrevem a geometria resultante.

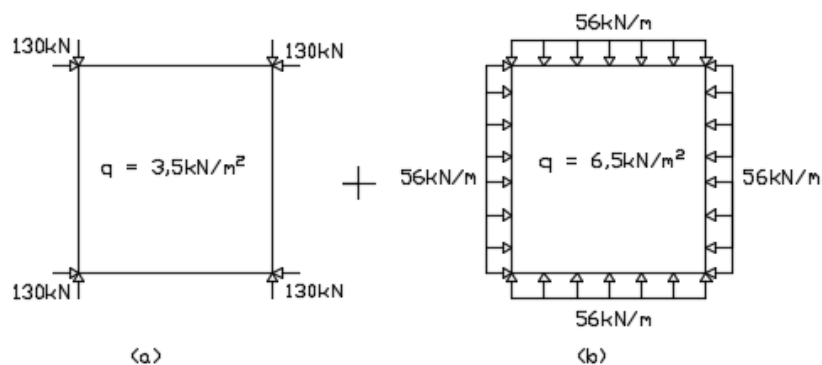


Figura 54 - Representação do sistema de cargas predefinido. a) Sistema pretendido na solução final de casca; b) Sistema adicional utilizado na obtenção de forma.

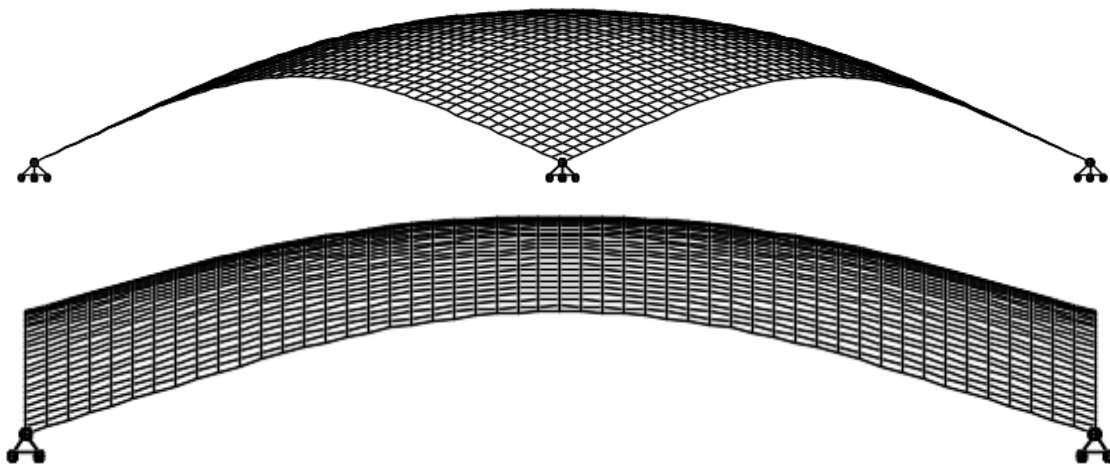


Figura 55 - Perspetiva e alçado da superfície da casca.

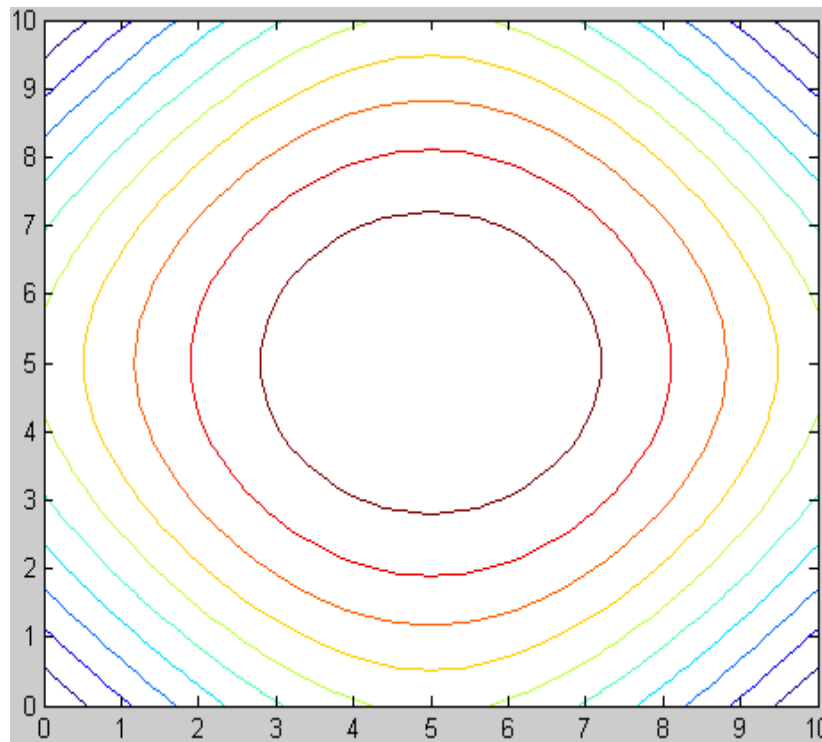


Figura 56 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

A análise estrutural da solução obtida resulta em distribuições das projeções horizontais dos esforços de membrana (Figura 57 e Figura 58) muito próximos dos predefinidos no modelo de parede. Um aspeto relevante é o facto da estrutura conseguir equilíbrio exclusivamente de membrana sem forças de pré-esforço perpendiculares ao bordo. Na Figura 59 surge o caminho de forças horizontais na direção X para o modelo de casca. Na direção ortogonal resulta uma representação similar rodada de 90° .

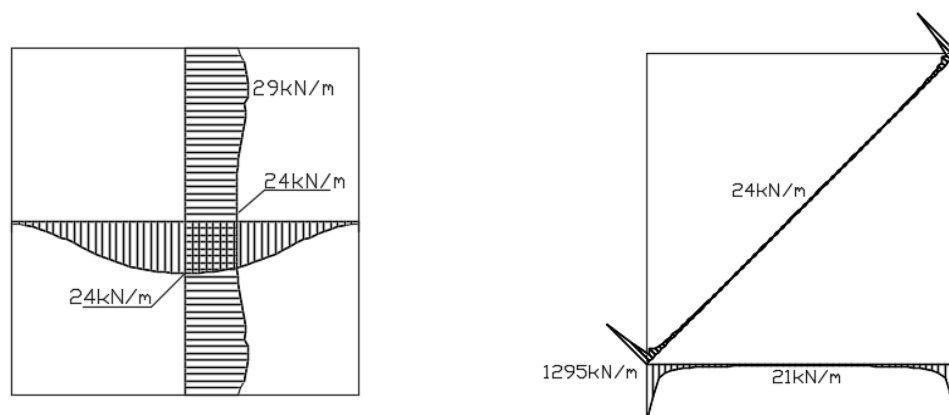


Figura 57 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

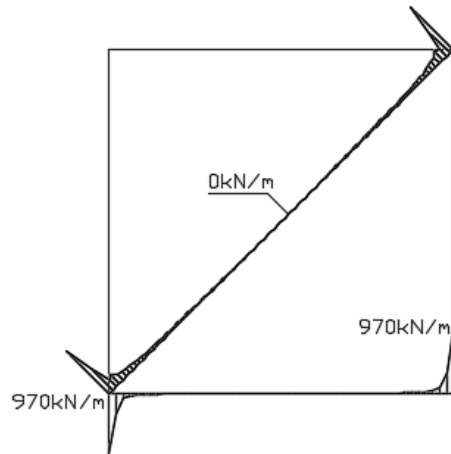


Figura 58 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_{xy} ao longo da casca.

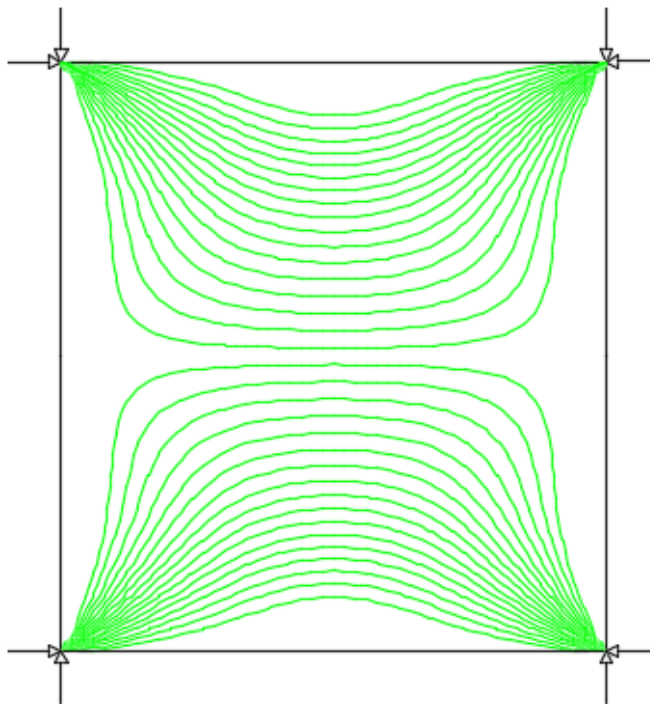


Figura 59 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca com forças concentradas de 130kN nos cantos.

A aplicação de pré-esforço distribuído nos bordos implica deslocamentos ascendentes e esforços de flexão, com distribuição de esforços de membrana diferentes dos predefinidos. Esse facto mostra que essas forças distribuídas de pré-esforço estão em excesso relativamente ao equilíbrio de membrana. É possível verificar que apenas com pré-esforço nos cantos a solução de casca consegue encontrar um campo de equilíbrio vertical diferente do predefinido, mantendo o funcionamento sem esforços de flexão. Nesse modo de equilíbrio alternativo as forças verticais são desviadas dos bordos e conduzidas para os apoios por um sistema de arcos inclinados gerados na estrutura da casca, mesmo sem bordos livres de planta curva, conforme se sugere em [16]. A comparação dos campos de equilíbrio vertical para a casca (Figura 60 e a Figura 61) e para a laje (Figura 52 e Figura 53) permite perceber o comportamento descrito.

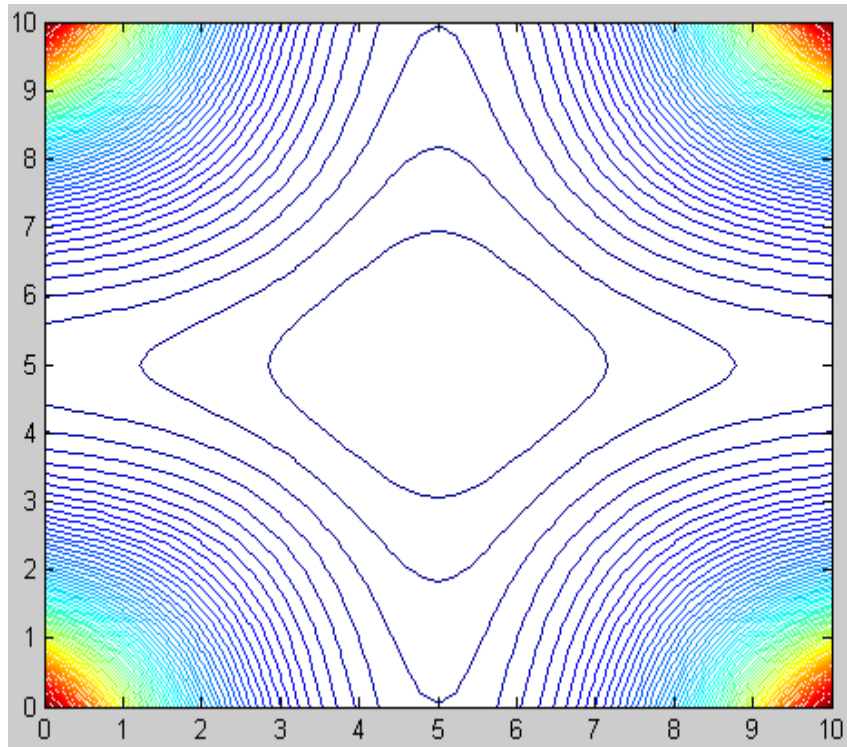


Figura 60 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.

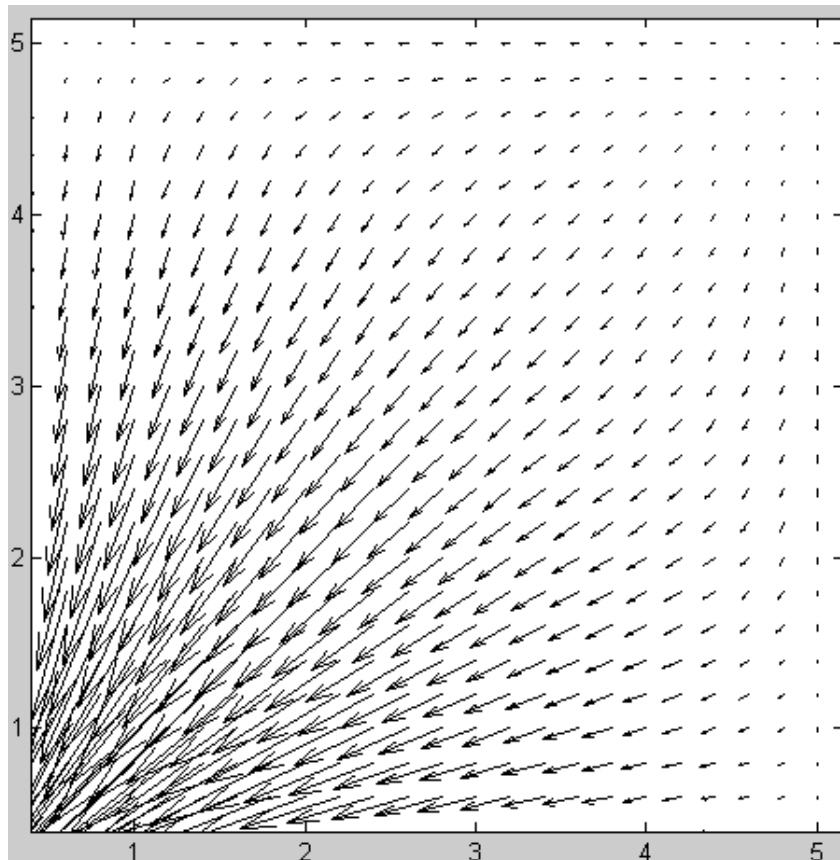


Figura 61 - Campo vetorial v_z de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da casca.

3.1.2 Pré-esforço distribuído nos cantos

O segundo caso analisado corresponde à consideração das forças de pré-esforço de forma mais distribuída, conforme a Figura 62, aplicadas num comprimento de 0,40m. Na Figura 63 surgem representadas as distribuições dos esforços N_x em diferentes secções do modelo de parede e na Figura 64 a distribuição das forças N_{xy} . A Figura 65 contém os caminhos de força na direção X para o modelo plano. Na direção ortogonal resulta uma representação similar rodada de 90° .

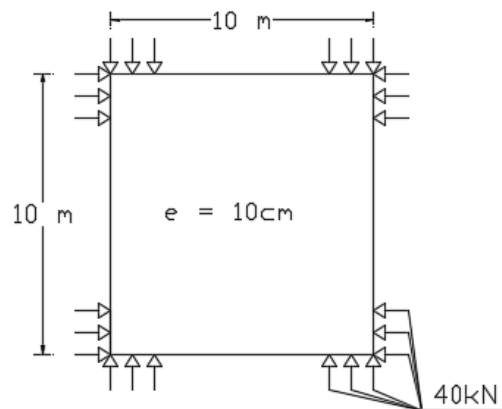


Figura 62 - Representação da planta da parede e a sua solicitação pelos cantos.

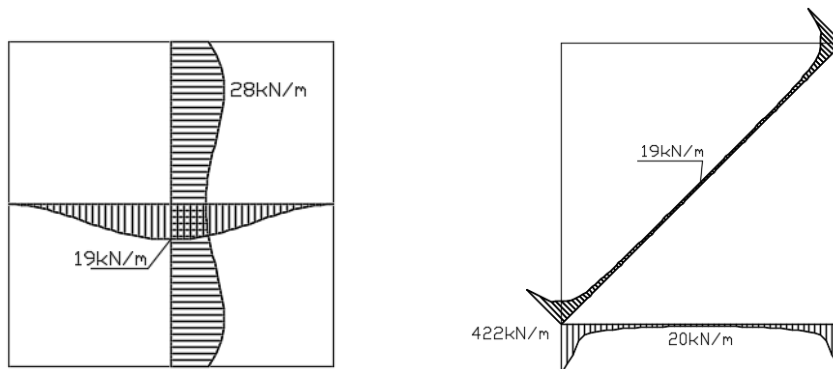


Figura 63 - Distribuição dos esforços N_x em secções do modelo plano de parede.

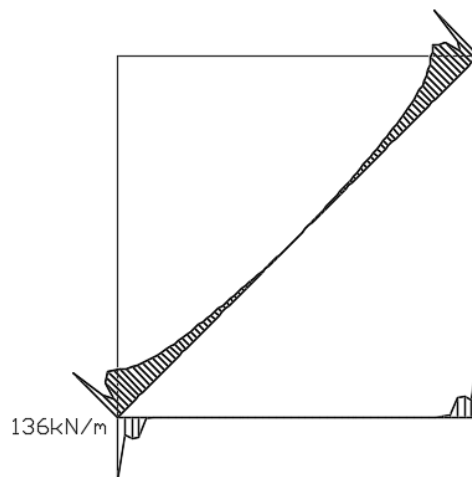


Figura 64 - Distribuição dos esforços N_{xy} em secções do modelo plano de parede.

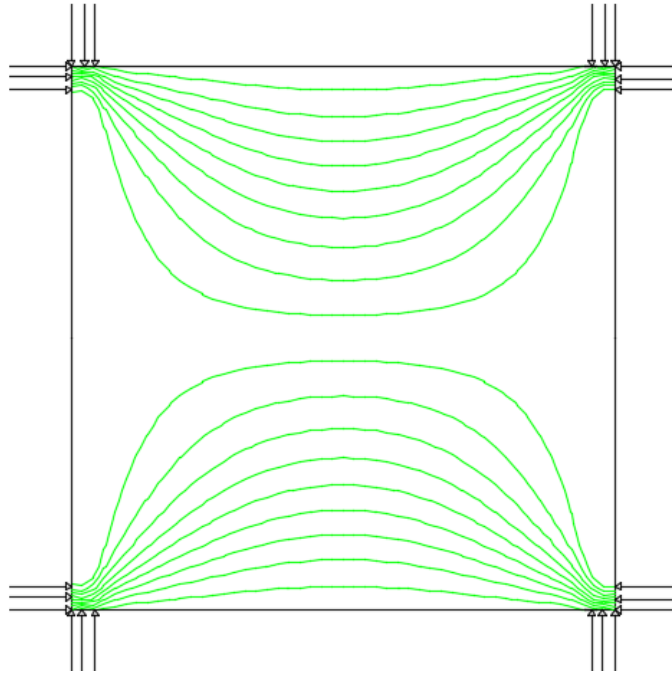


Figura 65 - Caminhos de força horizontais na direção X no modelo de parede plana com forças de pré-esforço distribuídas de 40kN nos cantos.

O campo de equilíbrio vertical de laje resulta de uma laje simplesmente apoiada nos cantos por apoios rígidos verticais e solicitada por uma carga vertical uniformemente distribuída (Figura 52 e Figura 53). A distribuição do pré-esforço nos cantos implica menor concentração de forças tornando desnecessária a utilização de funções de suavização para os resultados obtidos na análise dos modelos planos. Neste caso apenas foram consideradas funções de suavização na forma final obtida. O equilíbrio das cargas verticais de $3,5 \text{ kN/m}^2$ na solução de casca, sem esforços de flexão, é possível quando na obtenção de forma apenas se consideram forças perpendiculares ao bordo (Figura 66b), sem considerar cargas verticais adicionais, contrariamente ao caso anterior. Esse equilíbrio é possível apenas com as forças de pré-esforços aplicadas próximo dos cantos, conforme a Figura 66a. A solução obtida possui uma cota máxima na zona central de $h = 2,20\text{m}$ e nos bordos de $h = 1,26\text{m}$. A Figura 67 e Figura 68 descrevem a geometria resultante.

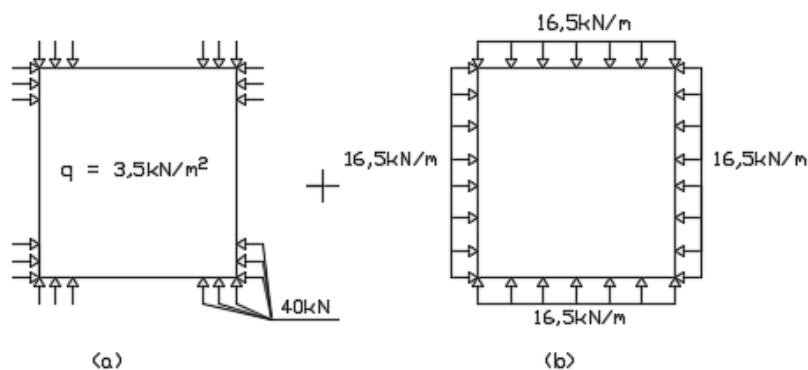


Figura 66 - Descrição do sistema de forças predefinido; a) Sistema pretendido para a solução final; b) Sistema adicional apenas para o procedimento de obtenção de forma.

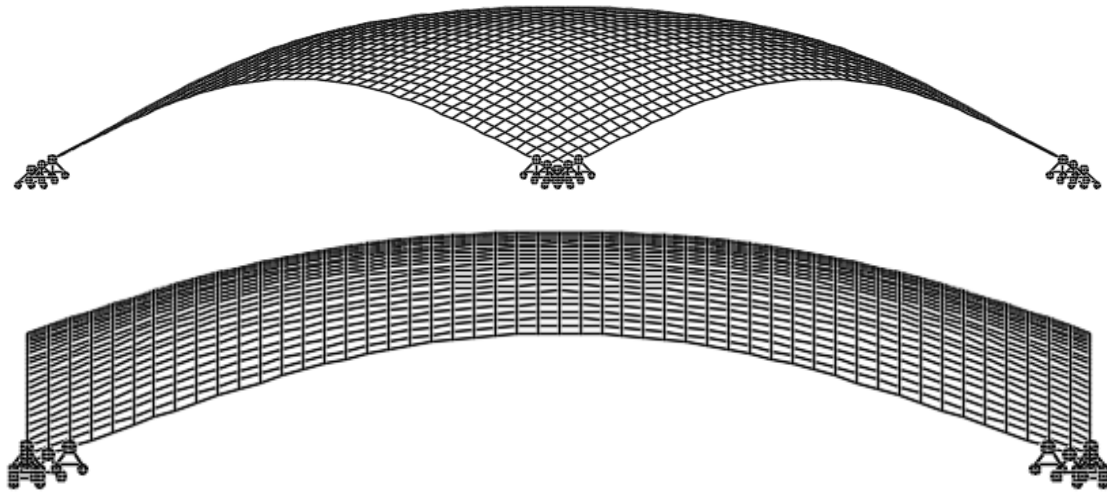


Figura 67 - Perspetiva e alçado da superfície da casca.

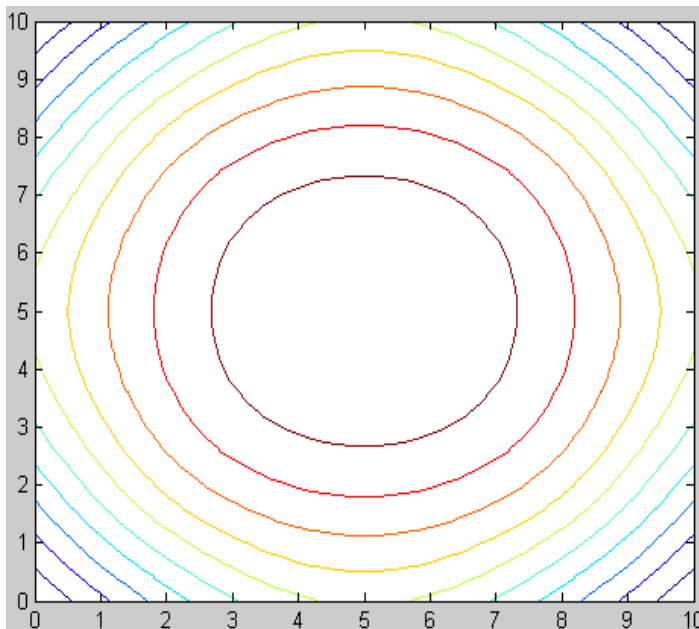


Figura 68 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

A análise estrutural da solução obtida resulta em distribuições das projeções horizontais dos esforços de membrana (Figura 70 e Figura 71) muito próximos dos predefinidos no modelo de parede (Figura 69). Na Figura 72 surge o caminho de forças horizontais na direção X para o modelo de casca. Na direção ortogonal resulta uma representação similar rodada de 90°.

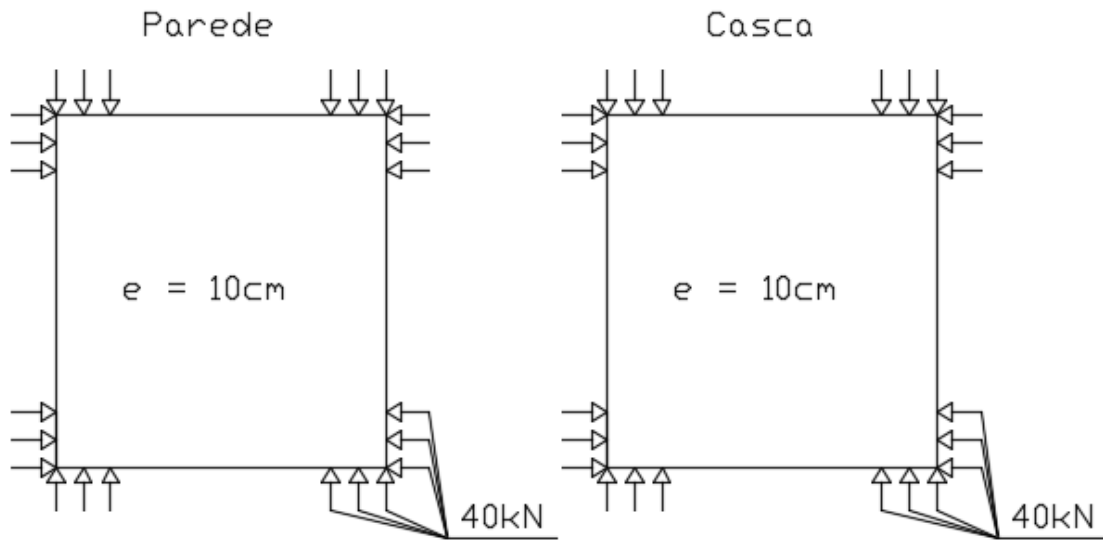


Figura 69 - Representação do pré-esforço considerado na análise da parede e da casca.

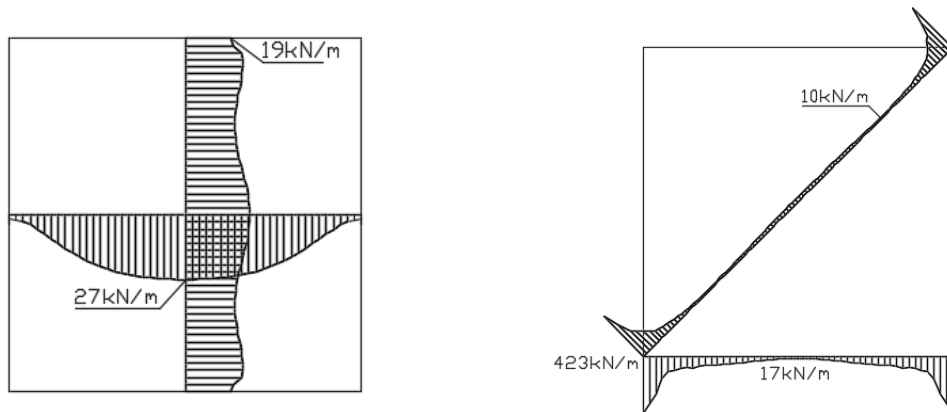


Figura 70 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

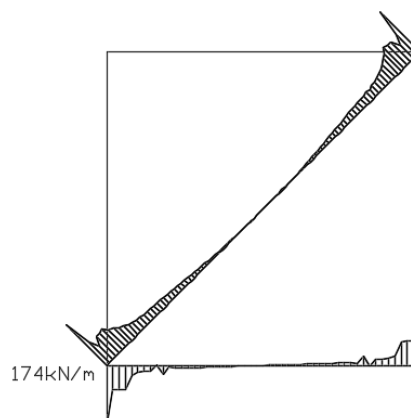


Figura 71 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_{xy} ao longo da casca.

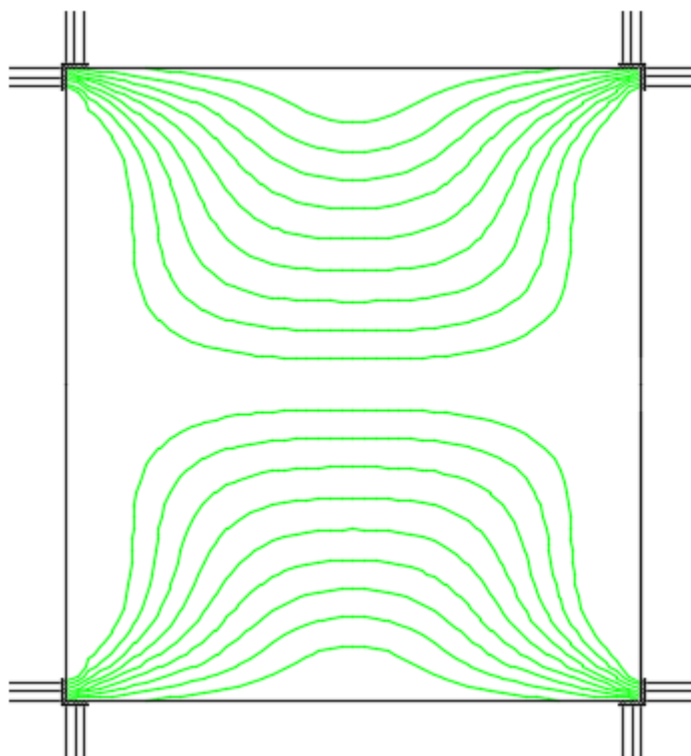


Figura 72 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca com forças de pré-esforço distribuídas de 40kN nos cantos.

3.1.3 Diferentes forças de pré-esforço concentradas nos cantos

No terceiro exemplo consideram-se forças de pré-esforço concentradas nos cantos de diferente valor, conforme a Figura 73. Na Figura 74 e na Figura 75 constam distribuições dos esforços de membrana para diferentes secções. A Figura 76 apresenta o caminho de forças horizontais na direção X para o modelo plano de parede solicitado com forças concentradas nos cantos.

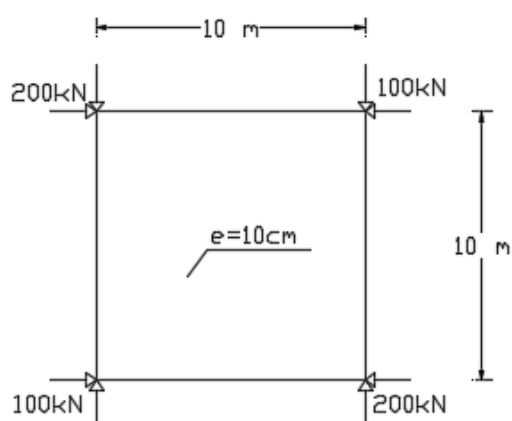


Figura 73 - Representação do modelo de parede com as forças de pré-esforço nos cantos.

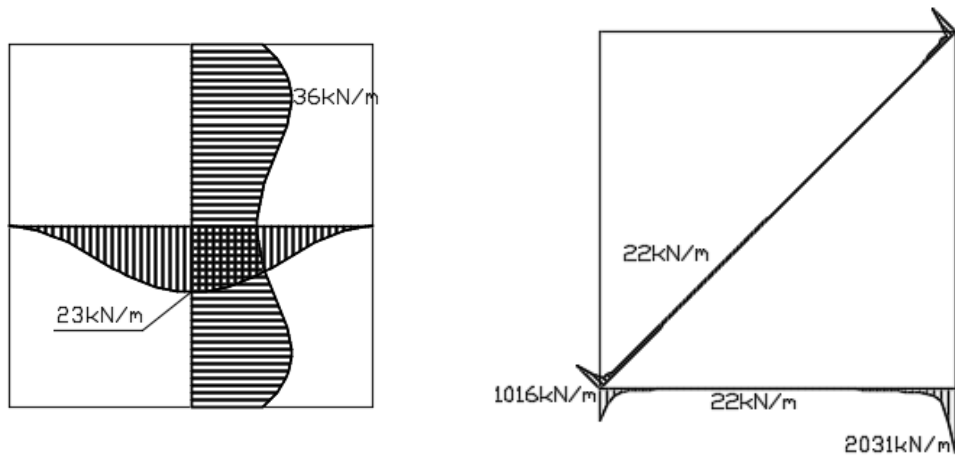


Figura 74 - Distribuição dos esforços N_x em secções do modelo plano de parede.

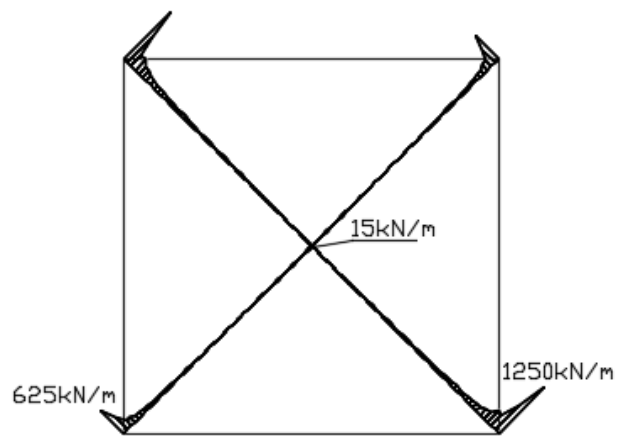


Figura 75 - Distribuição dos esforços N_{xy} em secções do modelo plano de parede.

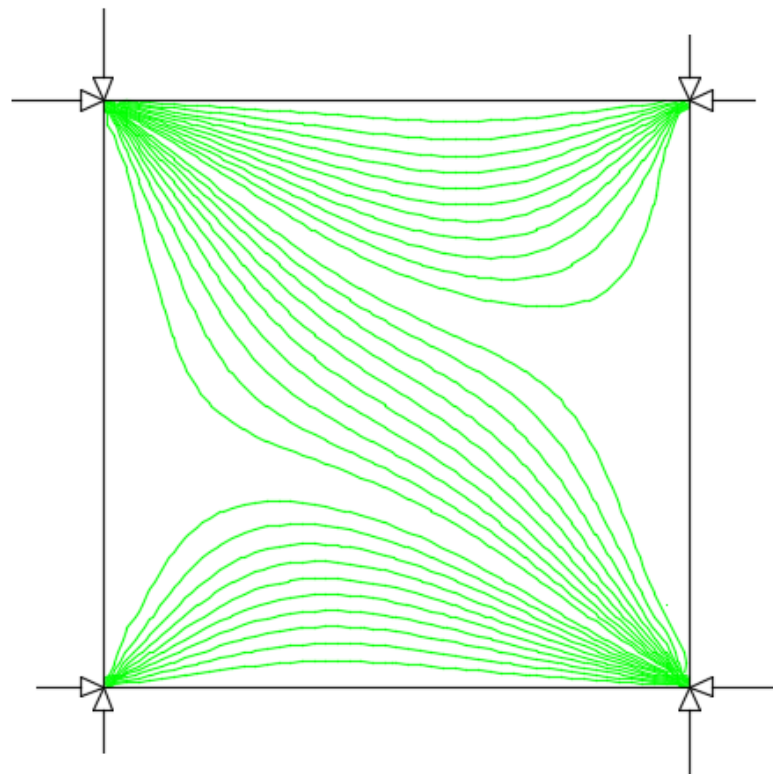


Figura 76 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de parede plana.

O campo de equilíbrio vertical de laje é igual ao utilizado para os exemplos anteriores e consta na Figura 52 e Figura 53. O procedimento de obtenção de forma foi similar ao efetuado no primeiro exemplo de aplicação considerando-se o sistema de forças descrito na Figura 77. A solução final de casca é solicitada conforme a Figura 77a, com funcionamento sem esforços de flexão.

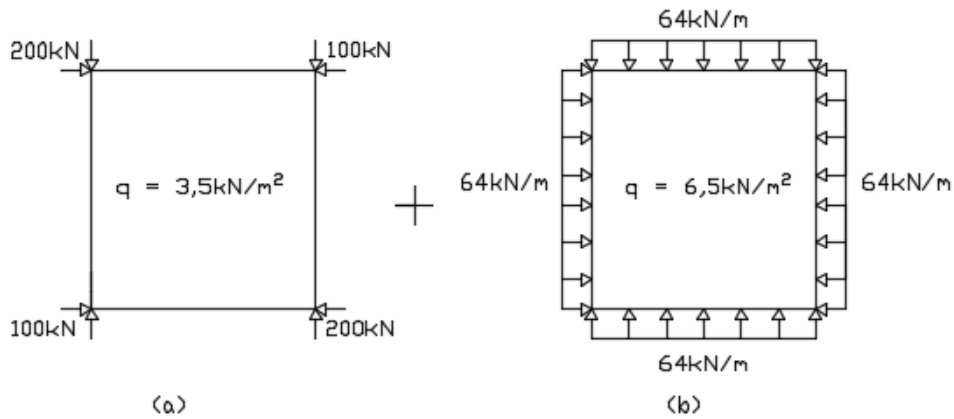


Figura 77 - Descrição do sistema de forças predefinido; a) Sistema pretendido para a solução final; b) Sistema adicional apenas para o procedimento de obtenção de forma.

A solução obtida possui uma cota máxima na zona central da casca de $h = 1,86\text{m}$ e na zona central dos bordos de $h=1,08\text{m}$ aumentando até $h=1,09\text{m}$ para o lado do canto com menor pré-esforço aplicado. Por observação da Figura 78 e da Figura 79 conclui-se que a cota z dos cantos com maior pré-esforço é mais elevada em relação aos cantos com menor pré-esforço. A Figura 78 e Figura 79 representam uma perspectiva e alçado da superfície da casca e a sua planta de curvas de nível, respetivamente.

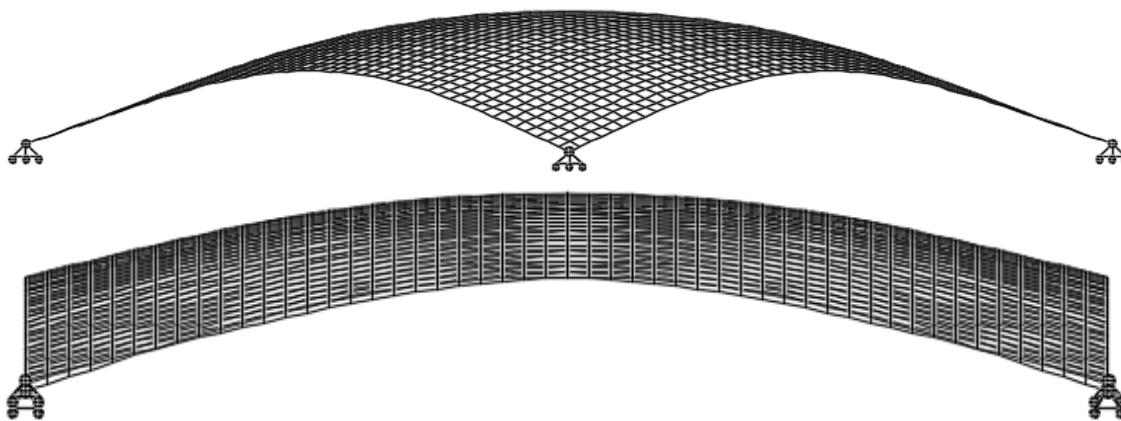


Figura 78 - Perspetiva e alçado da superfície da casca.

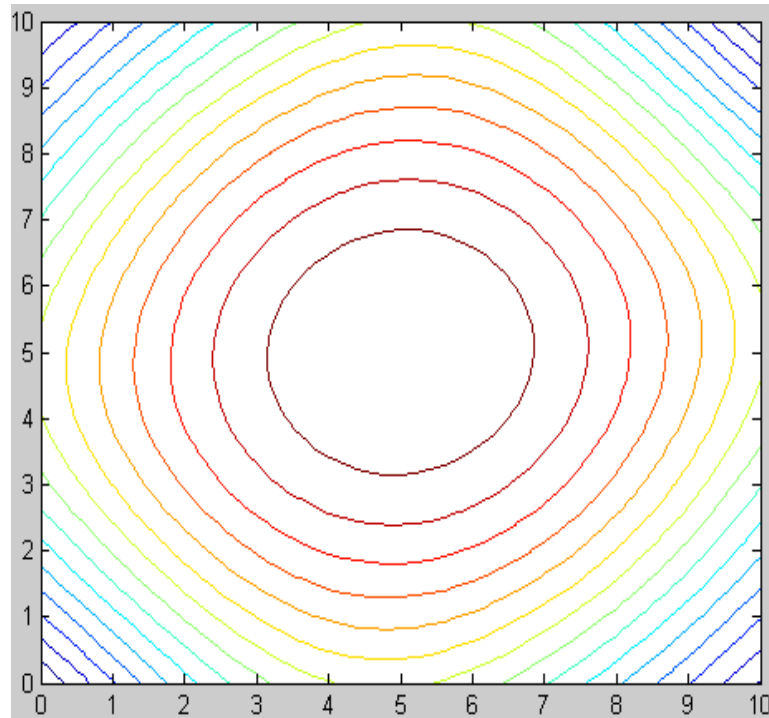


Figura 79 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

Da análise da solução por elementos finitos do tipo casca resultam projeções dos esforços de membrana muito próximos dos esforços de membrana predefinidos de parede, como é possível observar pela Figura 81 e Figura 82. Na análise apenas se consideraram as forças de pré-esforço nos cantos (Figura 80). Na Figura 83 verifica-se uma maior distribuição dos caminhos de força da solução de casca em relação ao modelo de parede plana. Da Figura 84 e Figura 85 constata-se que o campo de equilíbrio vertical de casca é caracterizado pelo desvio de forças do bordo, com maior transferência na direção dos apoios no canto com maior pré-esforço. Este caso realça a ideia de que em cascas de bordo livre e suportadas exclusivamente pelos cantos, o caminho preferencial de carga vertical é ao longo dos arcos inclinados tridimensionais mais pré-esforçados.

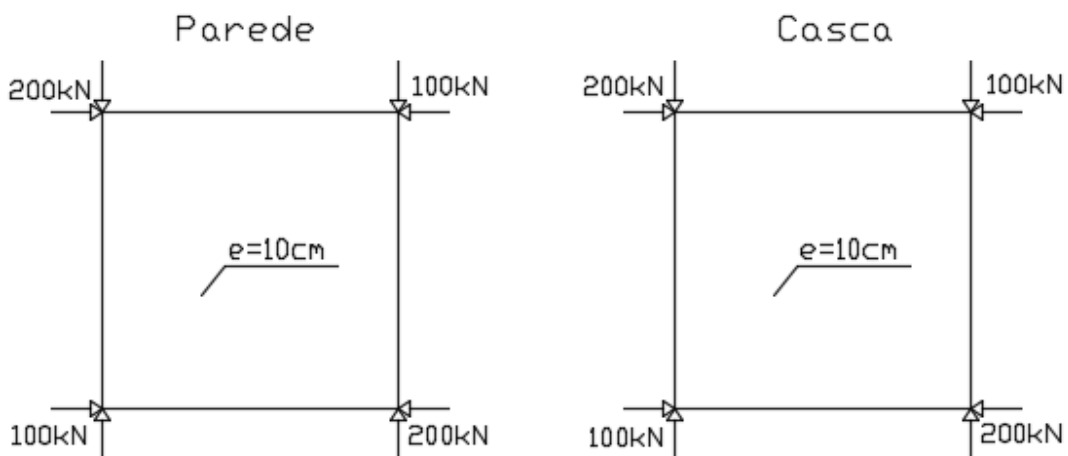


Figura 80 - Representação do pré-esforço considerado na análise da parede e da casca.

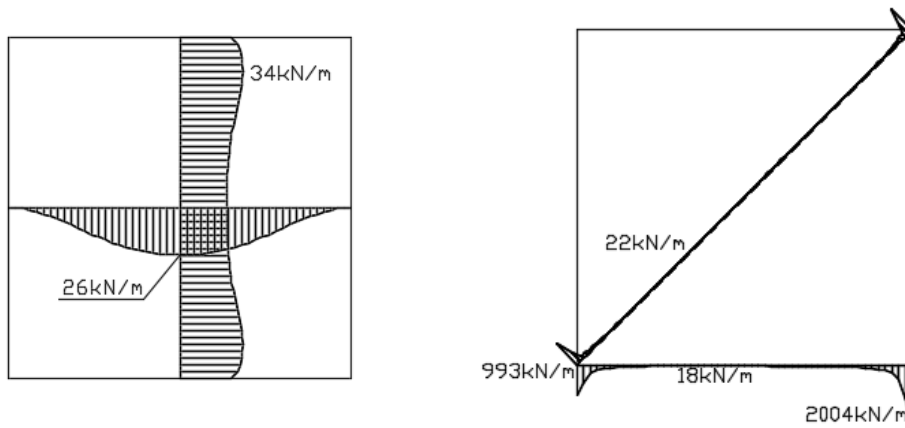


Figura 81 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

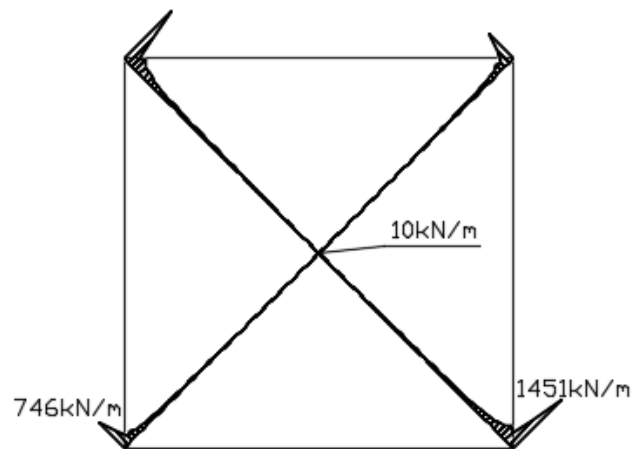


Figura 82 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_{xy} ao longo da casca.

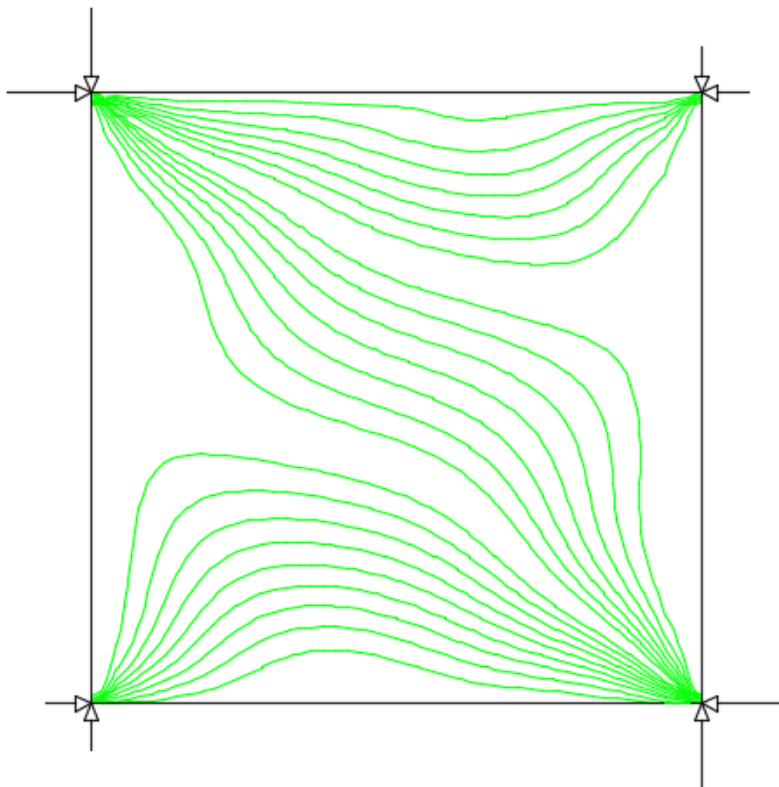


Figura 83 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca.

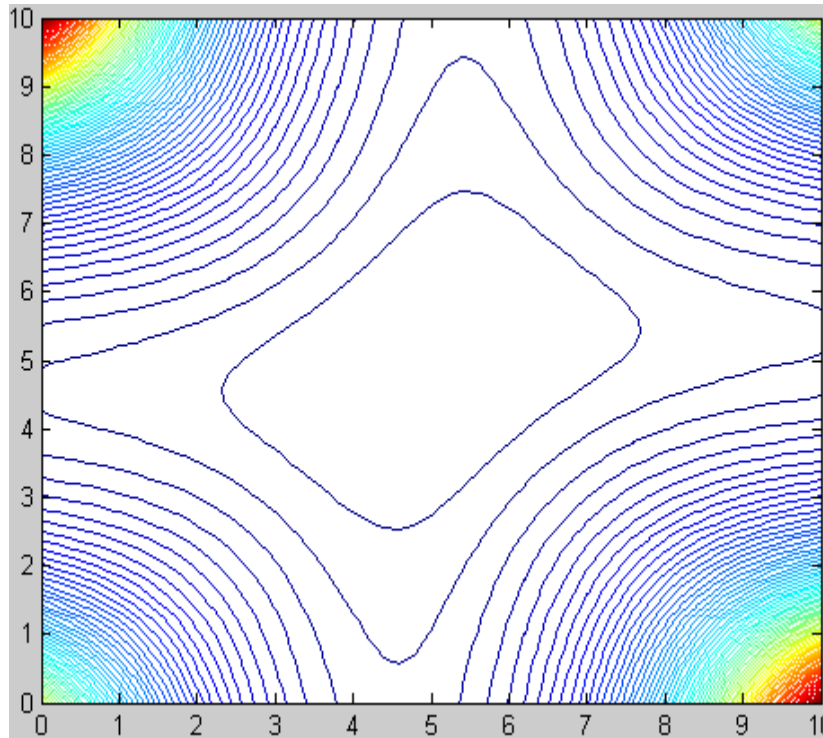


Figura 84 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.

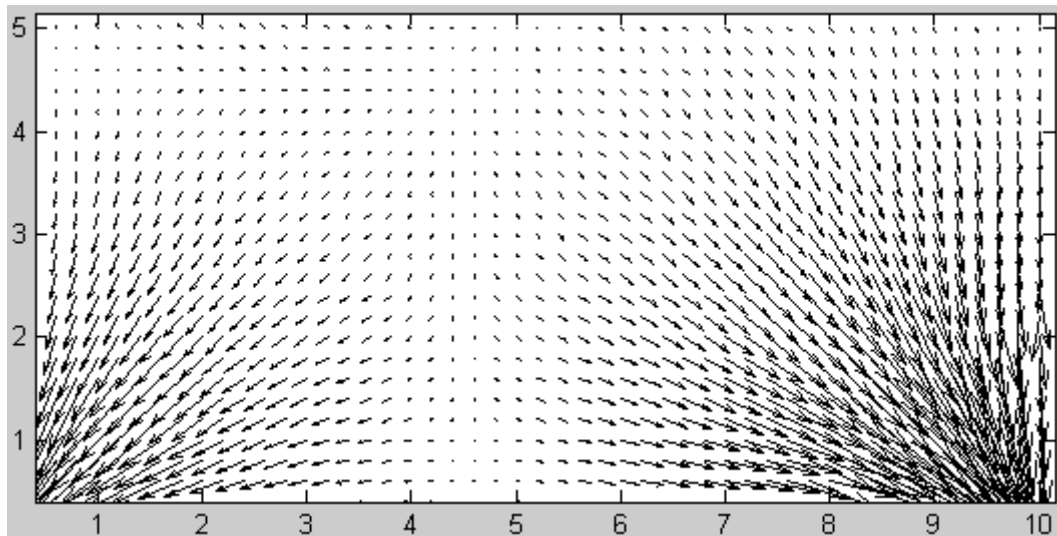


Figura 85 - Representação de $\frac{1}{2}$ do campo de equilíbrio vertical da solução de casca.

3.2 Bordos Curvos

3.2.1 Pré-esforço aplicado nos cantos

No primeiro exemplo de bordos curvos analisado pretende-se uma solução de casca de 0,10 m de espessura, com a geometria em planta descrita na Figura 86. O pré-esforço resulta de forças ortogonais nos cantos de igual valor entre si (Figura 86). A Figura 87 e a Figura 88 mostram distribuições de esforços ao longo de secções da parede.

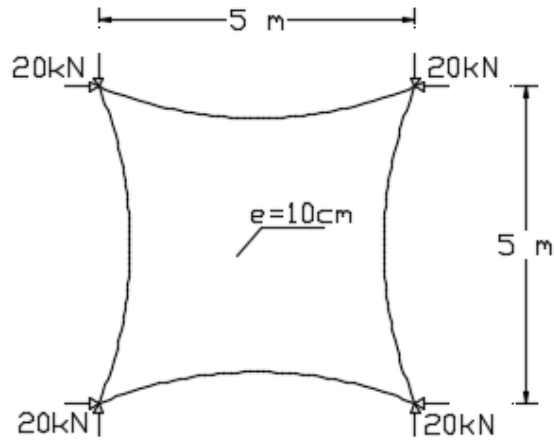


Figura 86 - Representação da planta da parede e a sua solicitação pelos cantos.

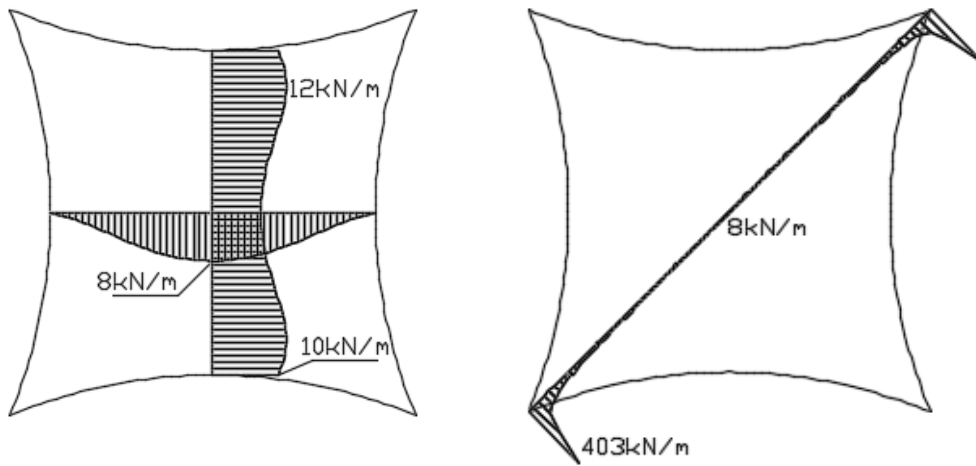


Figura 87 - Distribuição dos esforços N_x em secções do modelo plano de parede.

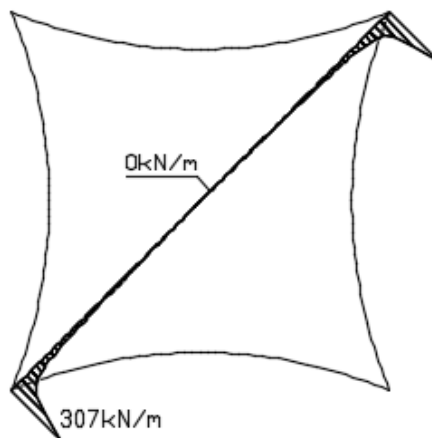


Figura 88 - Distribuição dos esforços N_{xy} em secções do modelo plano de parede.

Na Figura 89 surgem representados os caminhos de forças na direção X, obtidas para o modelo de parede solicitado pelas forças de pré-esforço nos cantos. Na direção ortogonal resulta uma representação similar rodada de 90° .

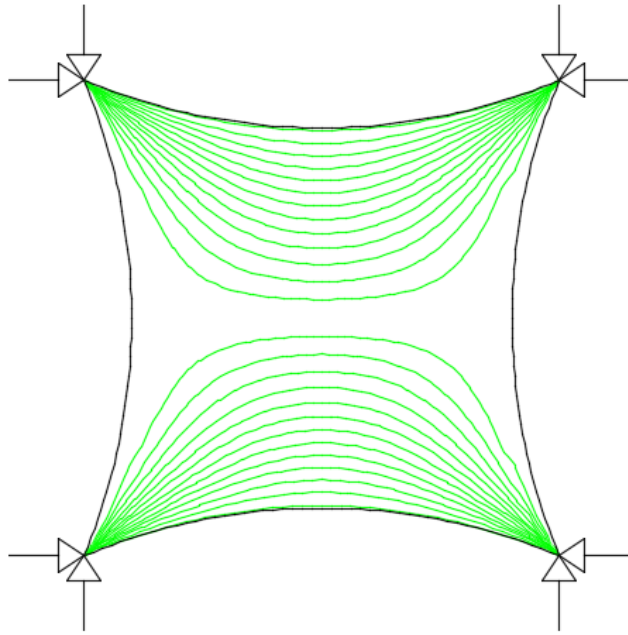


Figura 89 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo plano de parede solicitado por forças de pré-esforço de 20kN nos cantos.

O campo de equilíbrio vertical resulta de uma laje simplesmente apoiada nos cantos por apoios rígidos verticais sob carga uniforme, com função potencial descrita na Figura 90. A Figura 91 representa o campo que equilíbrio vertical para $\frac{1}{4}$ de laje.

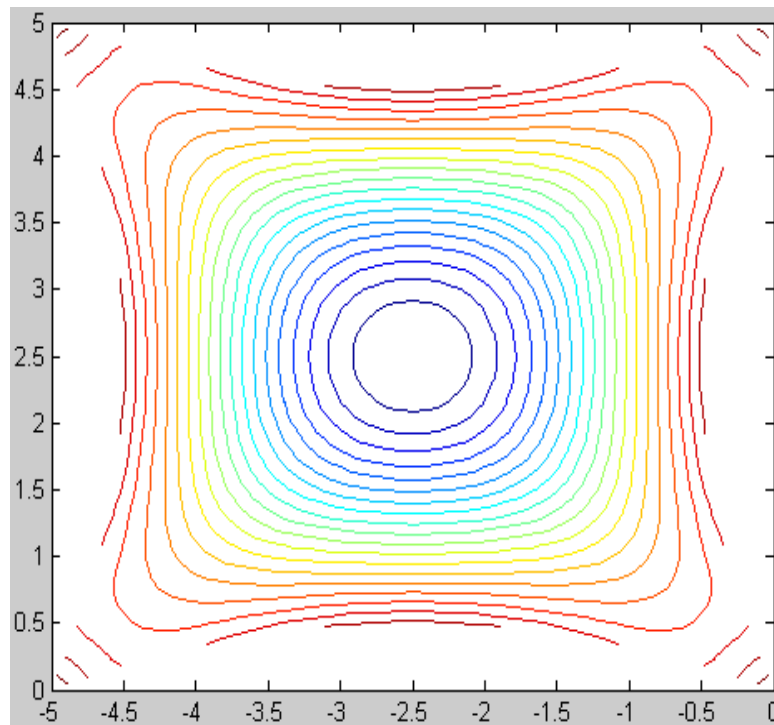


Figura 90 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.

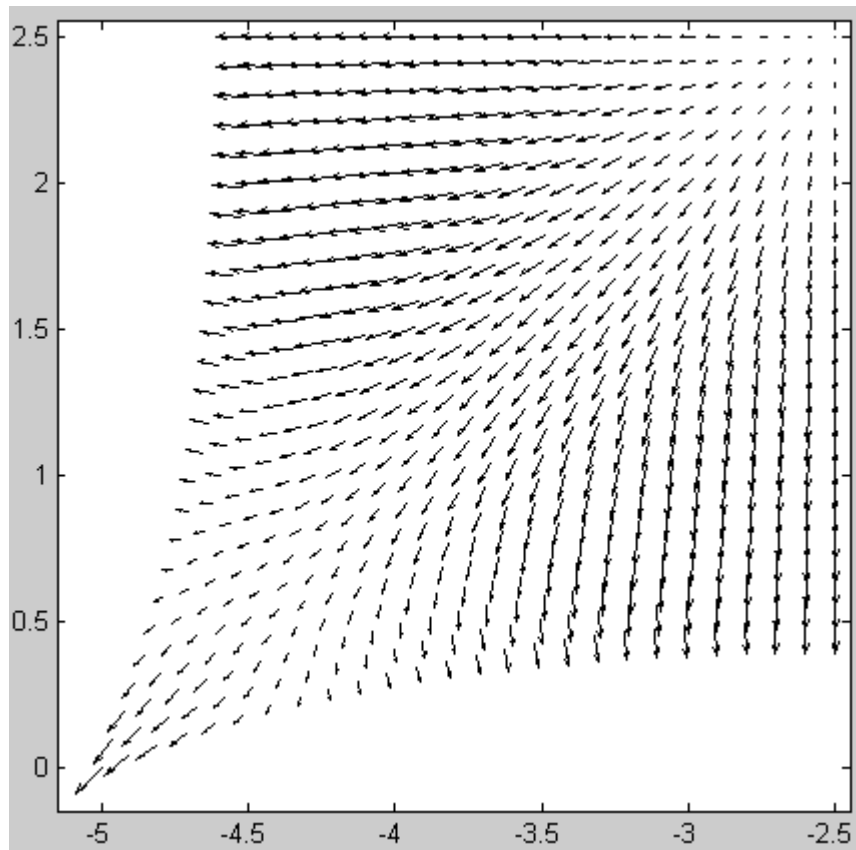


Figura 91 - Campo vetorial v_z de equilíbrio vertical de $\frac{1}{4}$ da laje.

A Figura 90 e a Figura 91 mostram que os bordos livres curvos correspondem a caminhos mais concentrados que os bordos livres retos. A flexão dos bordos de planta curva implica caminhos de forças na direção dos mesmos, nomeadamente, com uma tendência para as suas zonas centrais. A introdução de vigas com elevada rigidez de torção altera este efeito, permitindo um desvio de forças do bordo, como é possível observar pela Figura 92 e Figura 93. Assim, o equilíbrio da casca de bordos curvos sem esforços de flexão é possível se no modelo de laje forem adotadas vigas de grande rigidez de torção, para além de forças distribuídas aplicadas nos bordos da solução de parede, tal como nos casos analisados anteriormente.

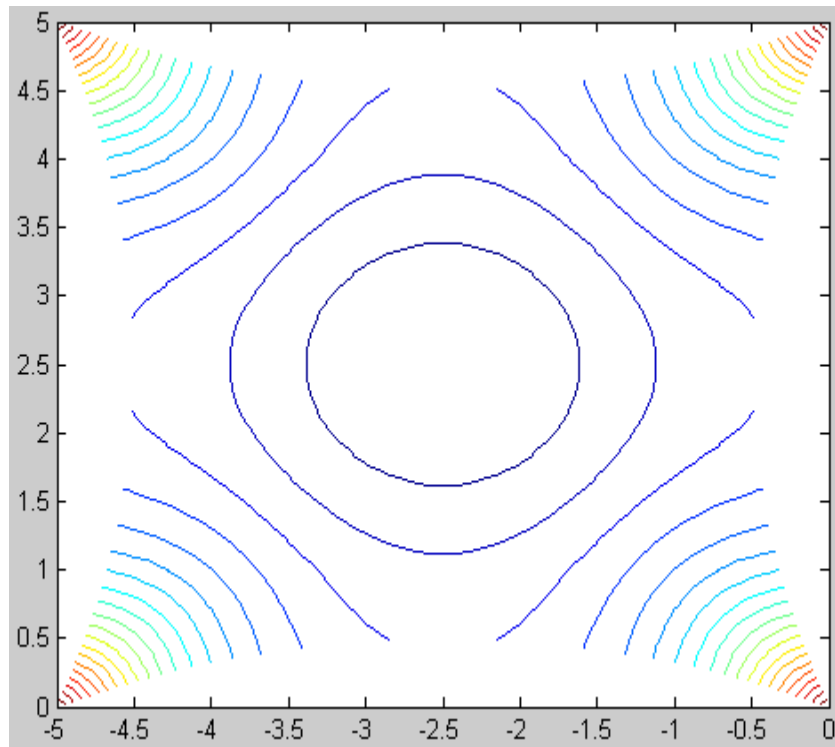


Figura 92 - Planta das curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje com vigas de torção nos bordos.

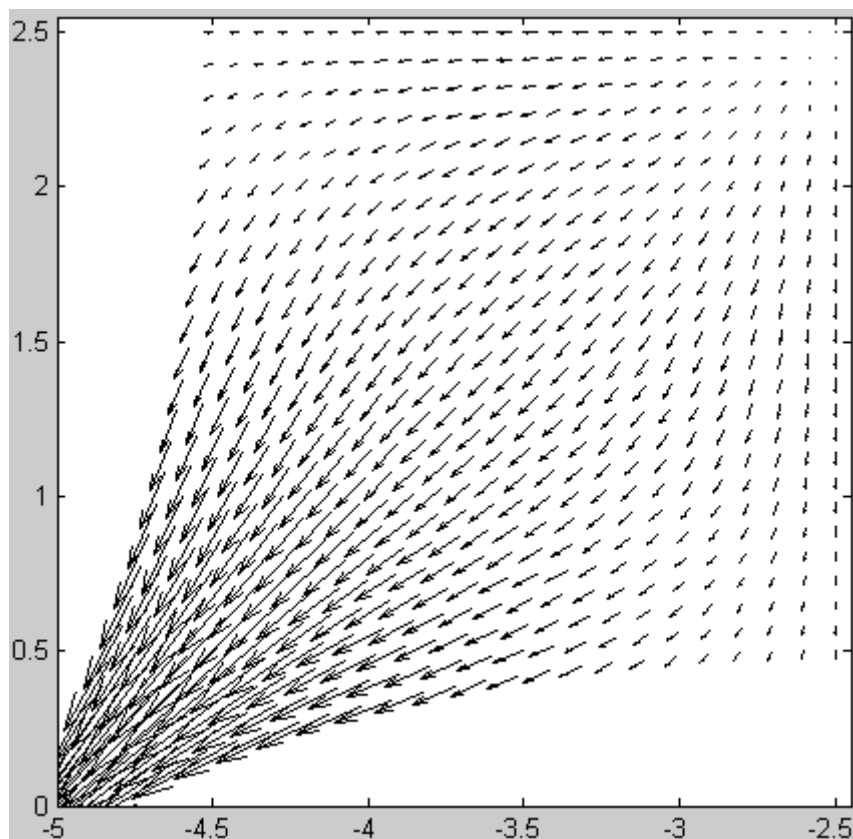


Figura 93 - Campo vetorial v_z de equilíbrio vertical de $1/4$ da laje com vigas de torção nos bordos.

A solução obtida possui uma cota máxima na zona central de $h = 1,40$ m e nos bordos de $h=0,94$ m. A Figura 94 e a Figura 95 descrevem a geometria da casca obtida.

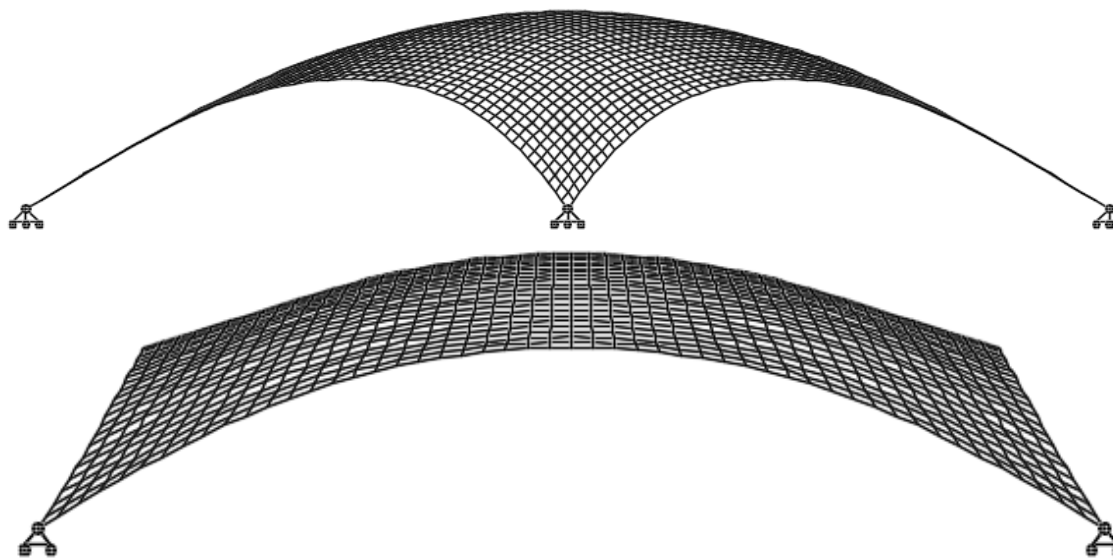


Figura 94 - Perspetiva da superfície da casca.

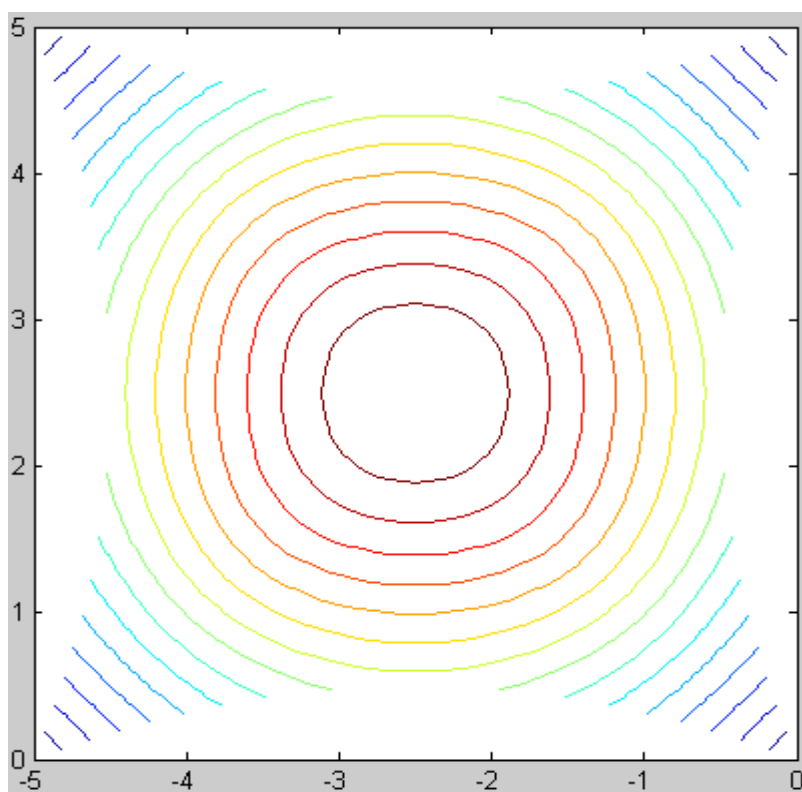


Figura 95 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

Da análise por elementos finitos do tipo casca resultam projeções dos esforços de membrana muito próximos dos esforços de membrana obtidos no modelo de parede plana solicitada por forças de pré-esforço nos cantos, como é possível observar pela Figura 97 e Figura 98. Nesta análise apenas se consideram as forças de pré-esforço nos cantos, não se considerando o pré-esforço distribuído ao longo dos bordos (Figura 96). Na Figura 99 surgem representados os caminhos de forças na direção X obtidas para o modelo de casca solicitado pelas forças de pré-esforço consideradas. Na Figura 99 é possível observar uma maior distribuição de forças, comparativamente ao modelo de parede. Na Figura 100 verifica-se que o campo de equilíbrio vertical tende para as zonas de apoio nos cantos, diferindo do que se obtém no modelo de laje.

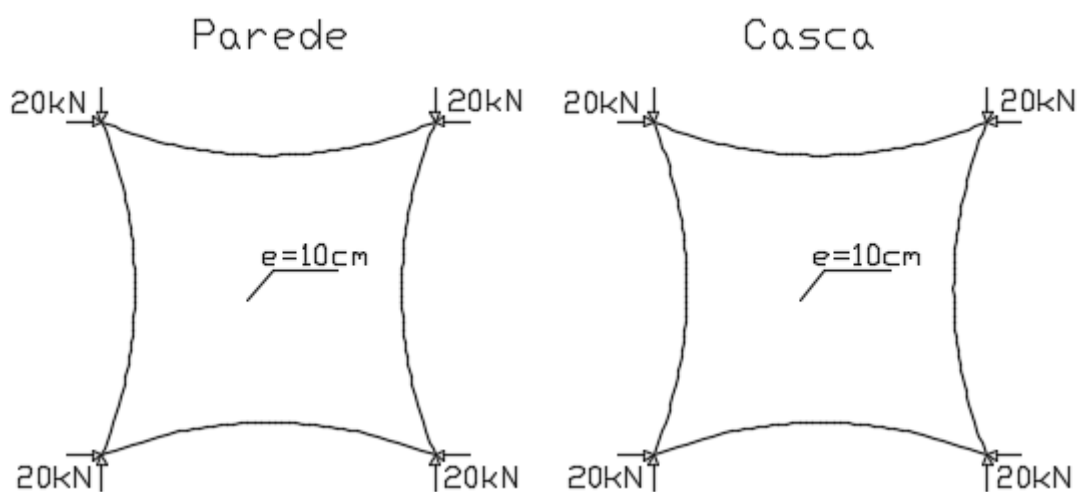


Figura 96 - Representação do pré-esforço considerado na análise da parede e da casca.

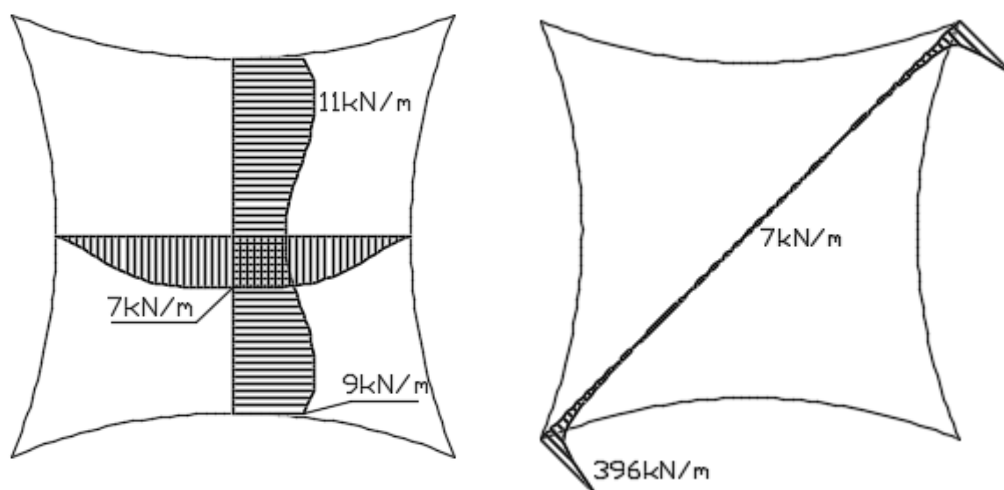


Figura 97 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_x ao longo da casca.

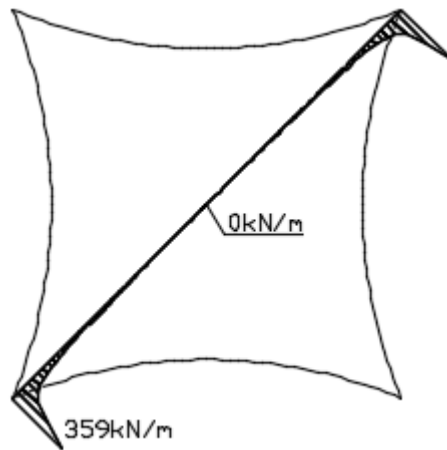


Figura 98 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_{xy} ao longo da casca.

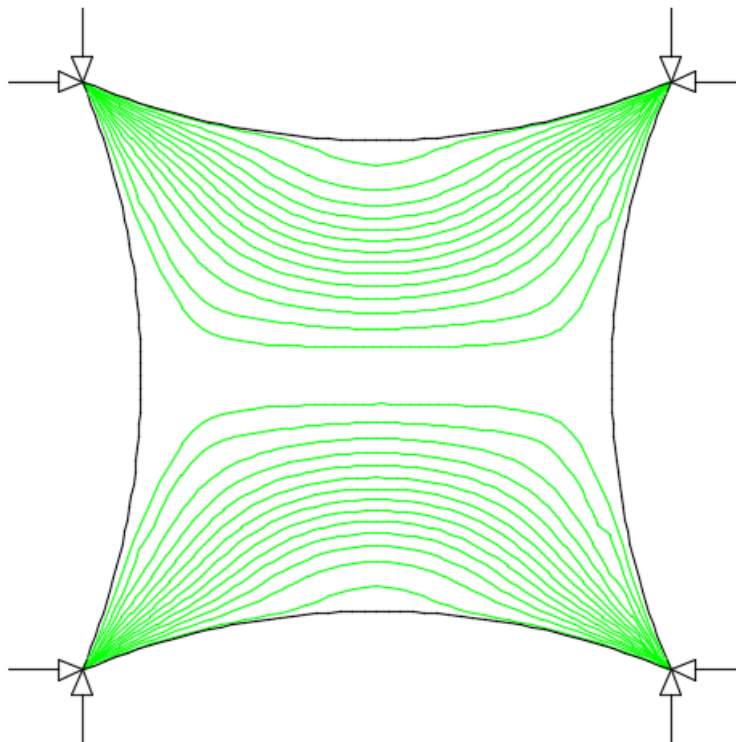


Figura 99 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca solicitado por forças de pré-esforço de 20kN nos cantos.

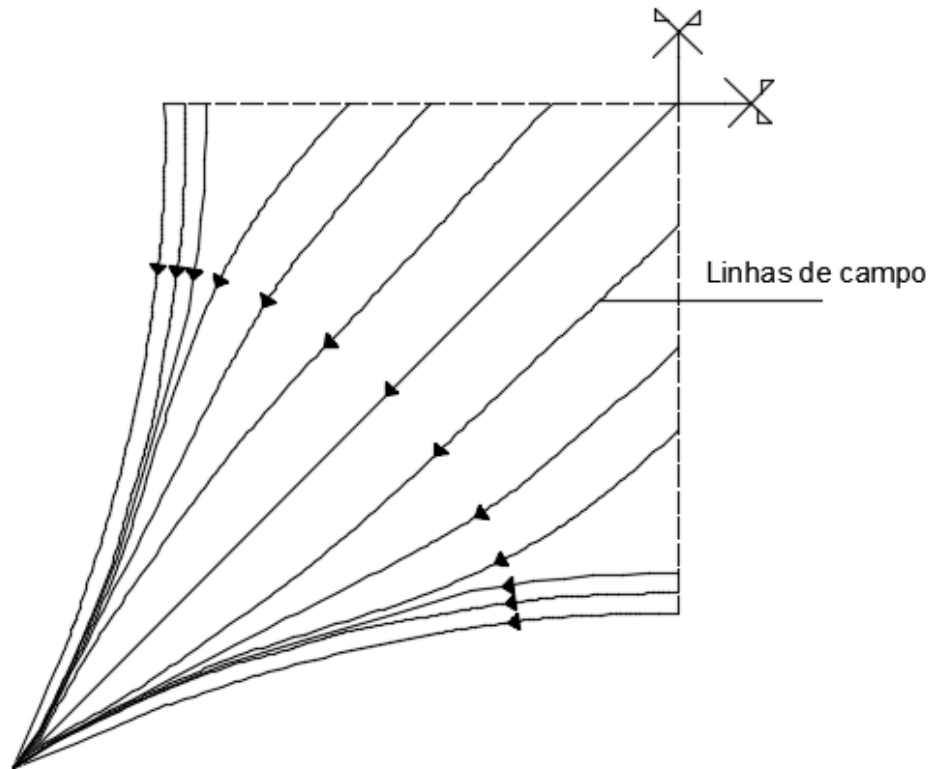


Figura 100 - Linhas de campo do campo de equilíbrio vertical.

3.3 Discussão de resultados

Neste capítulo analisaram-se soluções de casca de bordos livres para dois casos de geometria em planta distinta. Para o caso de bordos retos, após a determinação da função potencial de equilíbrio vertical de um modelo plano de laje sob carga uniforme, observou-se que os bordos livres correspondem a caminhos concentrados das forças que chegam a essa zona. Esse facto implica, para efeitos de equilíbrio da casca sem esforços de flexão, a consideração no processo de obtenção de forma de forças adicionais perpendiculares ao bordo. Essas forças são apenas necessárias na obtenção de forma, não sendo aplicadas na solução final de casca. O equilíbrio da casca sem esforços de flexão é possível apenas com forças de pré-esforço nos cantos. Assim, parece ser possível afirmar que o efeito dessas forças de pré-esforço distribuídas é substituído por um funcionamento com arcos espaciais inclinados que se formam na estrutura da casca e que garantem a transferência das forças até aos apoios.

Os resultados descritos mostram que é evitável o tratamento proposto em [18] para bordos livres, em que se propõe sempre a existência de bordos curvos em planta que materializem arcos inclinados. A diferença desse procedimento comparativamente aos resultados apresentados no presente trabalho são consequência de um procedimento com modelos discretos em vez de modelos contínuos, em que os arcos se materializam naturalmente na estrutura da casca.

A comparação dos modelos de casca e de modelo de parede plana mostram no primeiro caso um desvio dos caminhos de forças dos bordos para o interior, especialmente na zona central destes.

No segundo exemplo de aplicação, com forças de pré-esforço diferentes nos cantos sendo iguais em cantos diagonalmente opostos, observa-se no campo de equilíbrio vertical da casca uma maior tendência de equilíbrio de forças na direção dos cantos com maiores forças de pré-esforço. Este caso mostra que em cascas de bordo livre suportadas nos cantos os caminhos preferenciais de carga vertical verificam-se ao longo de arcos inclinados tridimensionais mais pré-esforçados. Em relação à inclinação da casca na zona central, as diferenças não são perceptíveis devido à subida da cota z dos apoios onde o pré-esforço é maior.

Nas soluções de bordos curvos a observação da função potencial do campo de equilíbrio vertical da laje mostra a transferência de forças para junto dos bordos mais significativa do que acontece nas soluções de bordos retos. A introdução de vigas com elevada rigidez de torção altera o efeito acima referido, tornando o campo de equilíbrio vertical mais adequado para uma solução de casca. A solução de casca sem esforços de flexão é possível com a utilização do modelo de laje com vigas de grande rigidez de torção no bordo e com pré-esforço distribuído nos bordos do modelo de parede. O equilíbrio pretendido para a solução de casca é possível apenas com forças de pré-esforço nos cantos.

Da análise das soluções por elementos finitos do tipo casca, resultam projeções dos esforços de membrana muito próximos dos obtidos no modelo de parede plana. Contrariamente, o campo de equilíbrio vertical da casca difere do campo de equilíbrio obtido no modelo de laje. Esse facto demonstra a capacidade da solução de casca para gerar sistemas de equilíbrio vertical melhor ajustados às forças de pré-esforço predefinidas, com influência da rigidez da casca. Este tipo de comportamento é diferente do que se verifica nos casos de bordos apoiados em que o campo de equilíbrio vertical não difere do que é predefinido no procedimento de obtenção de forma, não existindo nesse caso qualquer efeito da rigidez da casca.

Capítulo 4 - Obtenção de forma por aproximações sucessivas

4.1 Descrição do método

No presente capítulo estuda-se o procedimento de obtenção de forma por aproximações sucessivas a partir de um modelo plano. No modelo inicial partida podem ser consideradas forças de pré-esforço concentradas ou distribuídas ou podem considerar-se apoios fixos. No primeiro caso existe predefinição do sistema de forças de membrana através das forças de pré-esforço.

O procedimento em análise não é afetado de constrangimentos numéricos relativos aos resultados obtidos com modelos de elementos finitos. O procedimento funciona facilmente para modelos discretos e modelos contínuos, sendo possível considerar diferentes manipulações de rigidez no modelo de partida. Este é similar à aplicação do método de Picard [33] para a resolução de equações diferenciais, sendo a solução anti-funicular para a casca obtida por aproximações sucessivas.

A primeira iteração corresponde aos deslocamentos obtidos num modelo plano sob carregamento externo. Nesta iteração as forças internas são geradas por mobilização da rigidez de flexão que decresce durante as iterações seguintes à custa da alteração da forma da estrutura que incrementa a rigidez de membrana. A convergência para uma forma anti-funicular é garantida geralmente porque a rigidez de membrana resulta significativamente maior do que a rigidez de flexão. A equação 7 descreve o equilíbrio das cargas externas aplicadas para funcionamento simultâneo por flexão e membrana, associados a dois tipos distintos de rigidez.

$$\bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} + \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = \bar{p}_z + \bar{p}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{p}_y \frac{\partial z}{\partial y} \quad (7)$$

As coordenadas obtidas em cada iteração (equações 8 a 10) resultam a partir dos deslocamentos (δ_k) obtidos da análise estrutural e adicionado às coordenadas das iterações anteriores.

$$x_k = x_{k-1} + \delta_{xk} \quad (8)$$

$$y_k = y_{k-1} + \delta_{yk} \quad (9)$$

$$z_k = z_{k-1} + \delta_{zk} \quad (10)$$

Em programas de análise estrutural por elementos finitos, como é o caso do *Robot Structural Analysis*, é possível a automatização do procedimento, conforme o código no Anexo A4 que corresponde ao trabalho com API's.

4.2 Exemplos de aplicação

4.2.1 Cascas contínuas a partir de modelos discretos

O primeiro exemplo de aplicação pretende avaliar o comportamento de um modelo contínuo de casca obtido a partir de um modelo discreto de barras. Considerou-se, inicialmente, um modelo discreto de barras ortogonais e, de seguida a introdução de barras diagonais, com a intenção de perceber o efeito dessa alteração de rigidez no funcionamento da forma obtida. O objetivo é perceber as diferenças fundamentais entre os modelos contínuos obtidos a partir dos modelos discretos de barras e comparar com o modelo plano de parede.

A Figura 101 descreve o modelo plano de partida para o procedimento, com planta quadrada e as forças de pré-esforço indicadas. Na Figura 102 surgem representadas a perspetiva e um alçado lateral da geometria obtida. A forma resultante caracteriza-se por zonas mais abatidas onde os esforços axiais das barras são mais elevados, ou seja, nos alinhamentos entre os apoios.

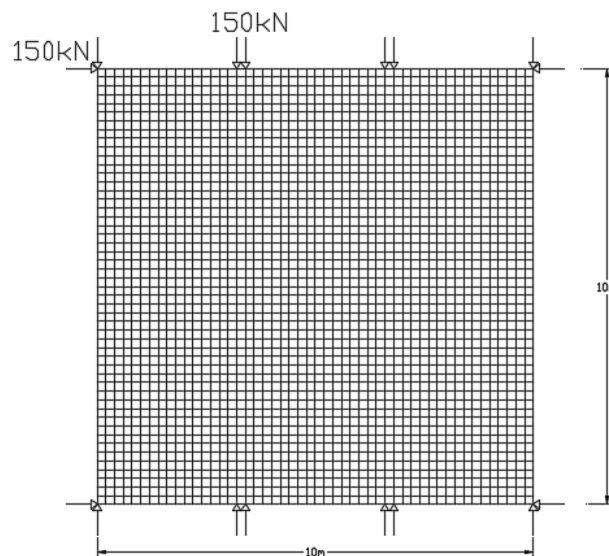


Figura 101- Planta do modelo discreto de barras ortogonais.

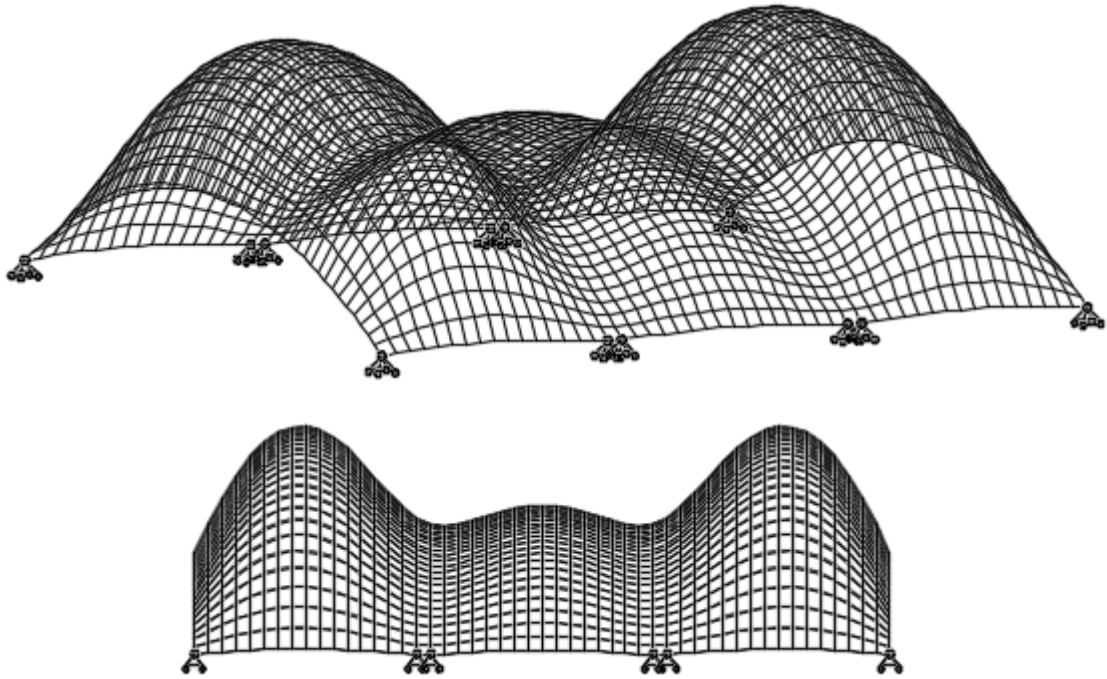


Figura 102 - Perspetiva e alçado lateral da solução obtida por inversão do modelo de barras ortogonais.

A análise de um modelo de casca contínua a partir da geometria da Figura 102 mostra que com as forças de pré-esforço predefinidas o comportamento obtido não é satisfatório, com o surgimento de elevadas forças de tração inexistentes no modelo inicial de partida. Esse comportamento resulta das diferenças de rigidez entre o modelo discreto e o modelo contínuo que, forçosamente, corresponde a alterações nos caminhos de forças. No exemplo em análise o comportamento foi melhorado pela redução por tentativas das forças de pré-esforço até ao valor de 115 kN. Na Figura 103 consta a distribuição de esforços em duas secções para o valor de forças de pré-esforço de 115 kN, não se verificando significativas forças de tração.

O exemplo em causa mostra que a consideração de modelos discretos para obtenção de estruturas contínuas de casca implica uma incerteza relativamente ao sistema de forças que resultará na estrutura final. Contrariamente ao caso analisado, pode considerar-se que um sistema de forças indesejado nem sempre pode ser melhorado por alteração do valor das forças de pré-esforço, num processo de tentativas. As diferenças de rigidez entre modelos contínuos e discretos podem constituir uma limitação de procedimentos baseados em modelos discretos para obtenção de cascas de estrutura contínua.

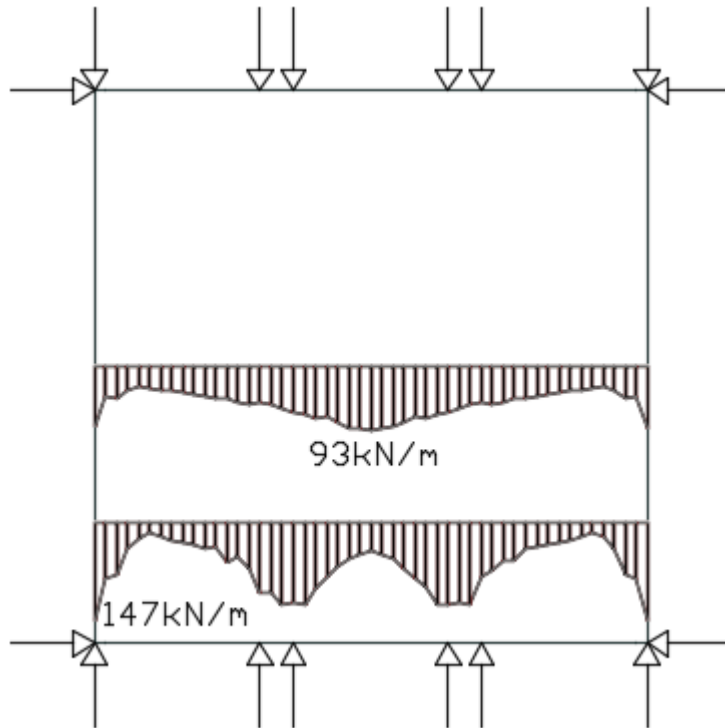


Figura 103 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo do modelo de casca de espessura constante com forças de pré-esforço de 115kN.

O exemplo apresentado a seguir corresponde à introdução de diagonais (Figura 104) no modelo inicial de barras, avaliando-se que implicações esse facto tem na forma estrutural obtida. A Figura 105 mostra uma perspectiva da estrutura obtida.

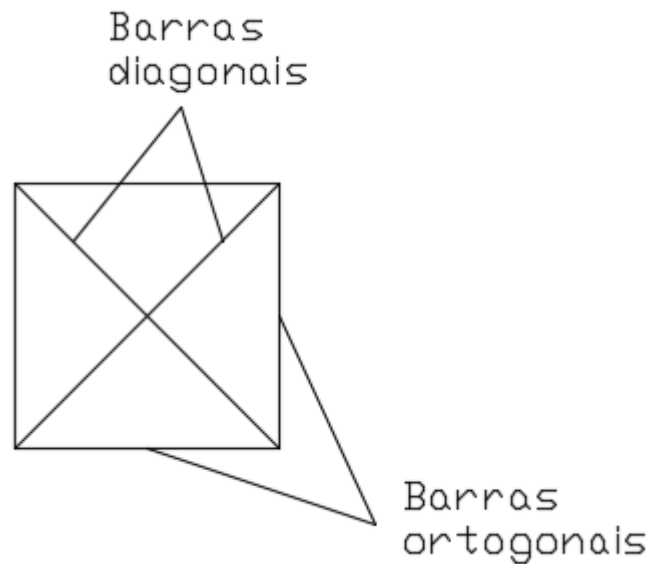


Figura 104 - Disposição das barras no modelo discreto.

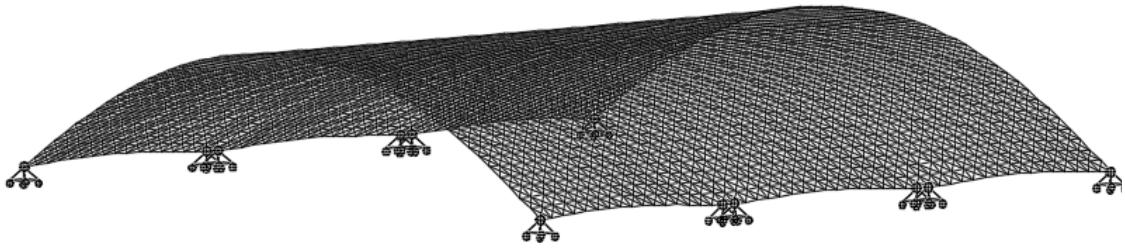


Figura 105 - Perspetiva da casca obtida por inversão do modelo com introdução de barras diagonais.

Da análise da solução de espessura constante, através de elementos finitos do tipo casca, resultam os esforços de membrana N_y representados na Figura 106. No modelo discreto, a introdução de rigidez de corte no plano permitiu a distribuição de forças e consequente suavização das curvaturas. Esta aproximação ao funcionamento estrutural de um elemento contínuo é perceptível por observação da Figura 106 e Figura 107.

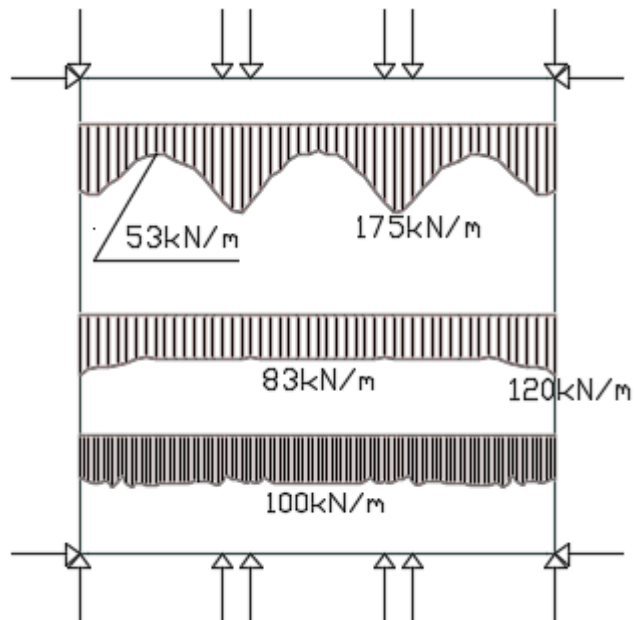


Figura 106 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo do modelo de casca de espessura constante com forças de pré-esforço de 150kN.

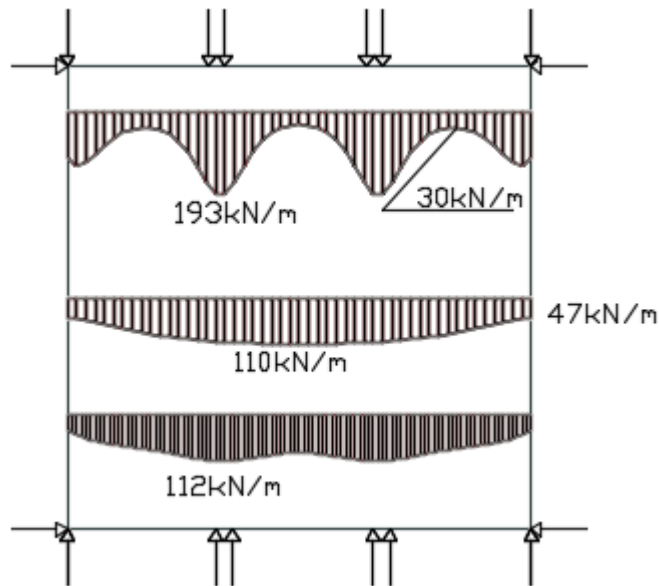


Figura 107 - Distribuição das projeções das forças de membrana N_y ao longo do modelo plano de parede de espessura constante com forças de pré-esforço de 150kN.

4.2.2 Modelos iniciais com rigidez variável

O segundo caso analisado tem como objetivo a obtenção de uma estrutura de casca de espessura constante, com as forças de pré-esforço indicadas na Figura 108, pretendendo-se dupla curvatura mais acentuada, contrariamente à solução da Figura 105. A obtenção de uma forma com essa característica é conseguida com um modelo plano de partida com variação de espessura. As zonas mais espessas correspondem a maior rigidez, concentrando mais esforços. Nessas zonas a casca será mais abatida, resultando o requisito de forma pretendido. Após o procedimento de obtenção de forma analisa-se uma solução de espessura constante.

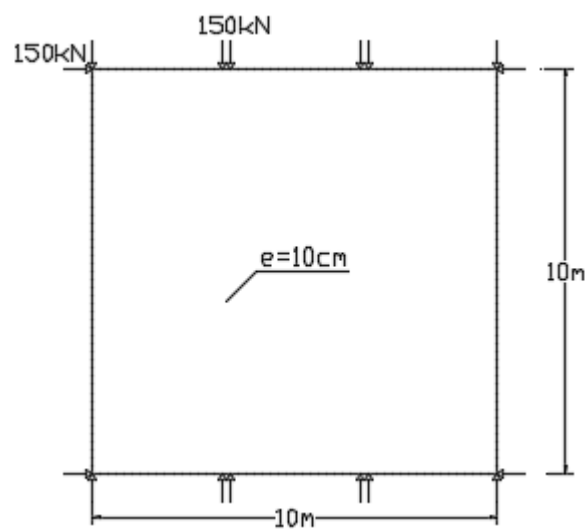


Figura 108 - Representação da solução em planta pretendida.

A Figura 110 mostra a perspectiva e o alçado lateral da solução de casca obtida, sendo possível observar a variação de curvatura pretendida. Na Figura 111 e Figura 112 constam distribuições de forças para o modelo de casca e para o modelo plano de parede, ambos com as espessuras da Figura 109. A comparação de ambas as figuras permite verificar uma semelhança na distribuição de forças para os dois modelos. Na Figura 113 surgem representadas as distribuições de forças para a solução de casca de espessura constante. No caso verifica-se uma suavização na distribuição dos esforços em resultado da maior uniformidade de rigidez no modelo de espessura constante.

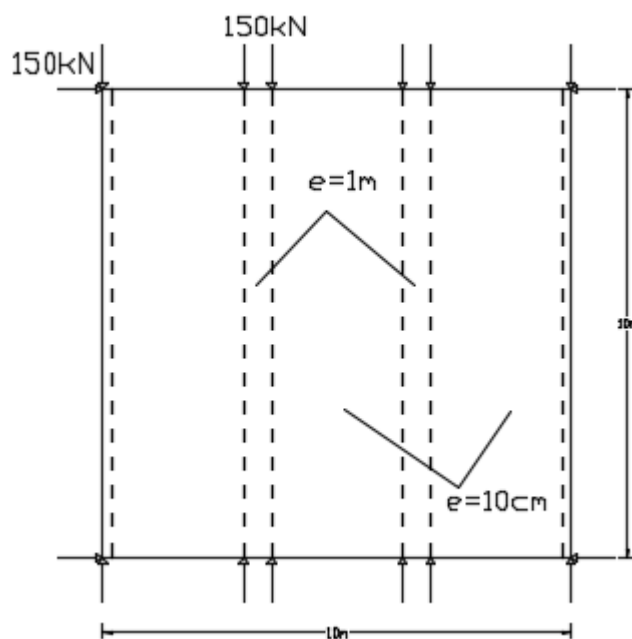


Figura 109 - Planta da membrana com variação de espessura.

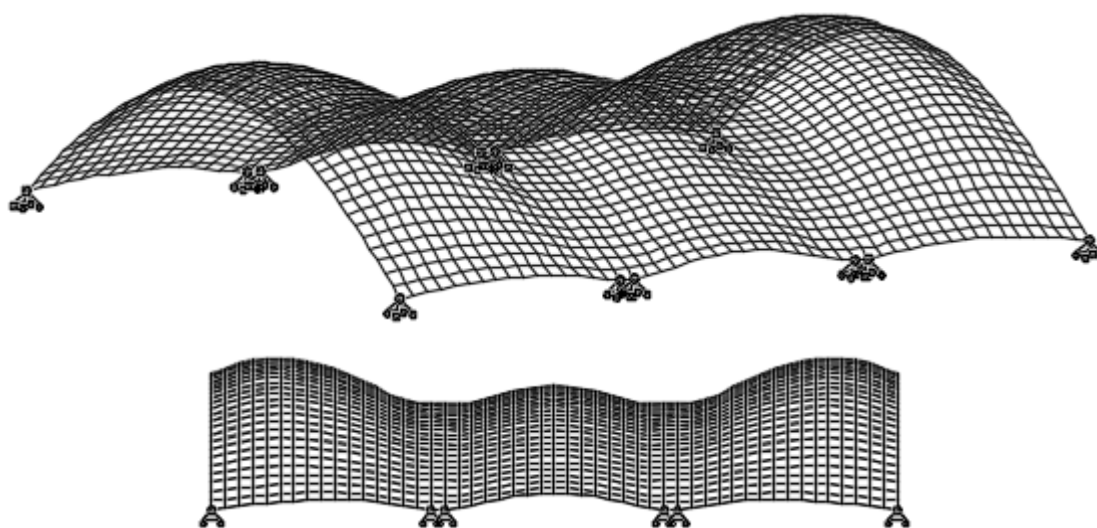


Figura 110 - Perspetiva e alçado lateral da forma obtida por inversão da membrana.

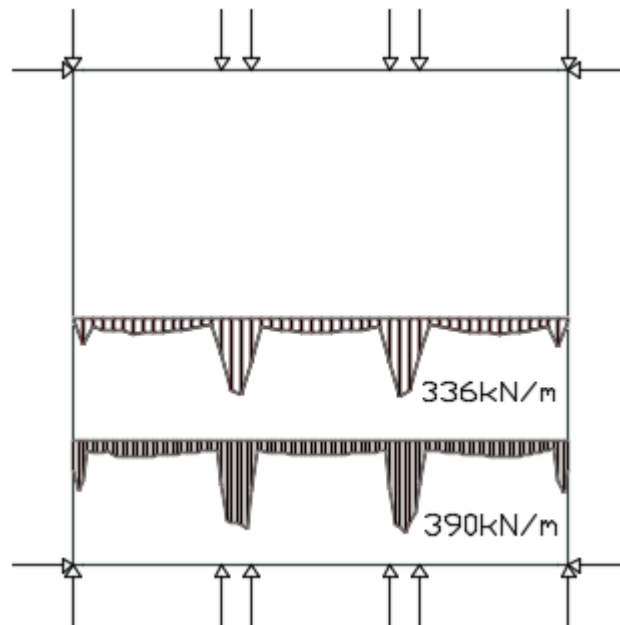


Figura 111 - Distribuição de forças N_y para o modelo de casca com variação de espessura.

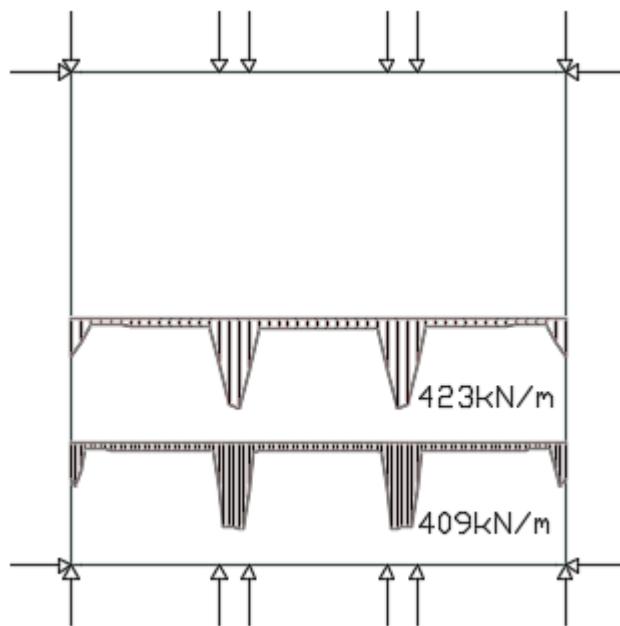


Figura 112 - Distribuição de forças N_y para o modelo plano de parede com variação de espessura.

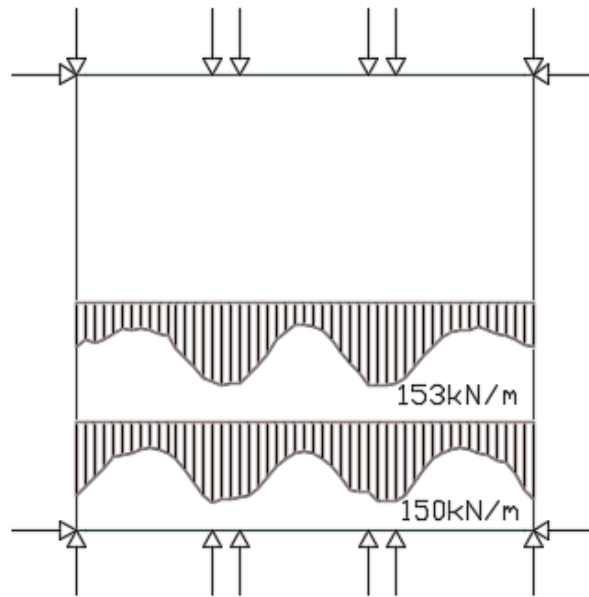


Figura 113 - Distribuição de forças N_y para o modelo de casca com espessura constante.

Na Figura 114 e na Figura 115 surgem representados os caminhos de forças na direção y para o modelo de casca e para o modelo plano, ambos de espessura constante. No modelo de casca os caminhos são mais concentrados nas zonas mais abatidas, associada à influência da geometria na rigidez da casca.

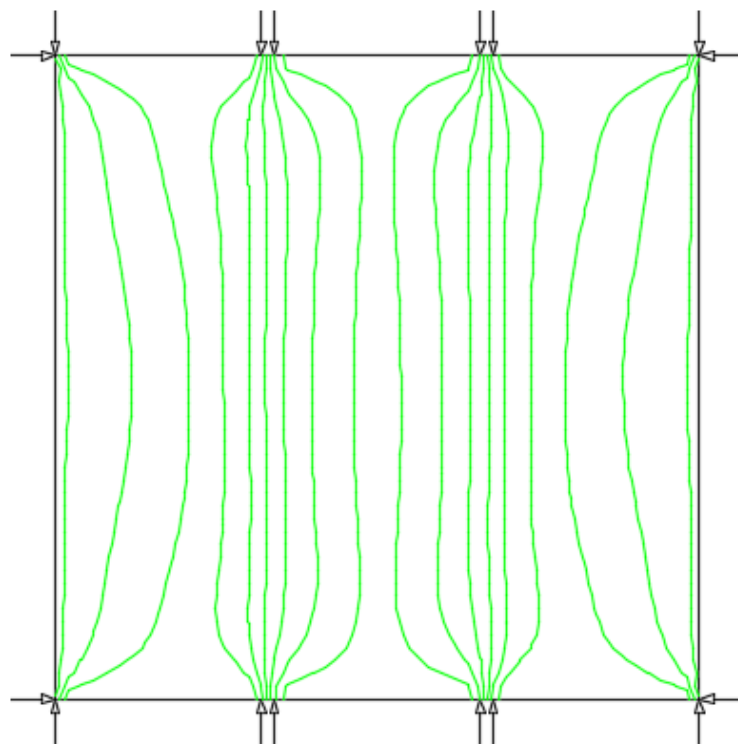


Figura 114 - Caminhos de forças horizontais na direção Y no modelo de casca com espessura constante.

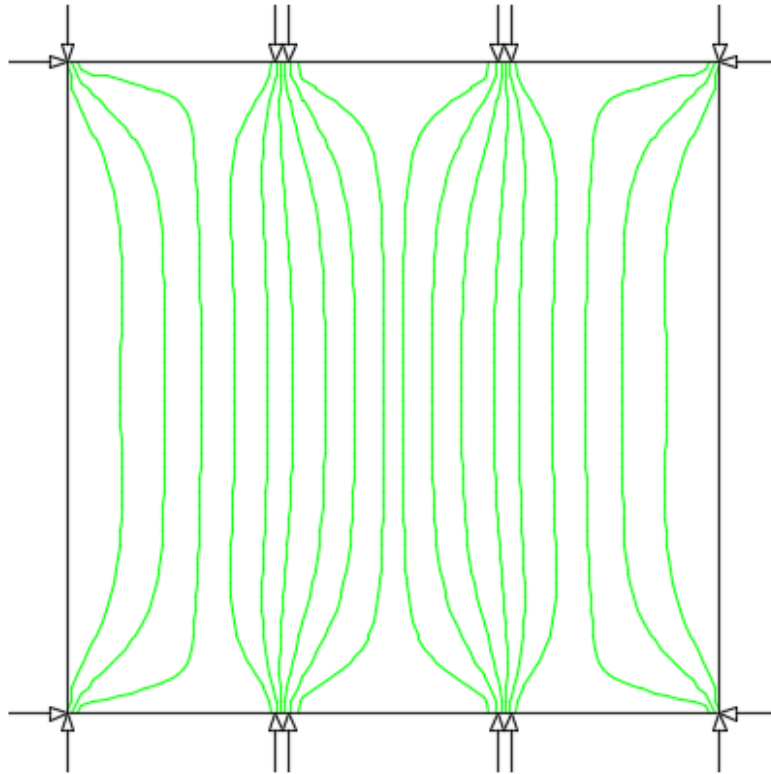


Figura 115 - Caminhos de forças horizontais na direção Y no modelo de parede com espessura constante.

4.2.3 Solução de bordos livres com o mesmo pré-esforço aplicado nos cantos

No exemplo de aplicação pretende-se determinar a forma para o caso de planta quadrada e bordos livres analisado pelo método de integração do campo gradiente no subcapítulo 3.1.1. O objetivo é comparar a relação entre forma e forças das soluções obtidas pelos dois métodos. O modelo inicial surge descrito Figura 116. A solução obtida possui uma cota máxima na zona central de $h = 1,89\text{m}$ e nos bordos de $h=1,39\text{m}$. Na Figura 117 e Figura 118 estão as perspectivas da solução obtida e a planta de curvas de nível da mesma, respetivamente.

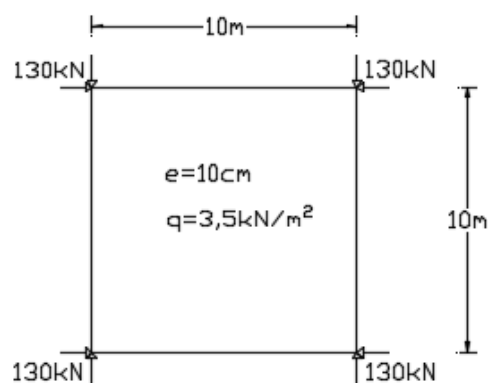


Figura 116 - Representação do modelo inicial para obtenção de forma.

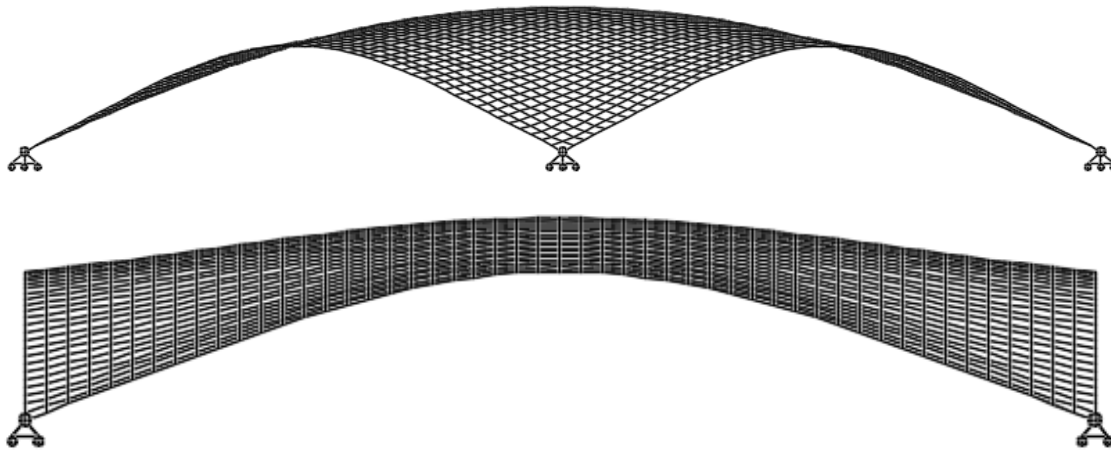


Figura 117 - Perspetiva e alçado lateral da solução de casca final.

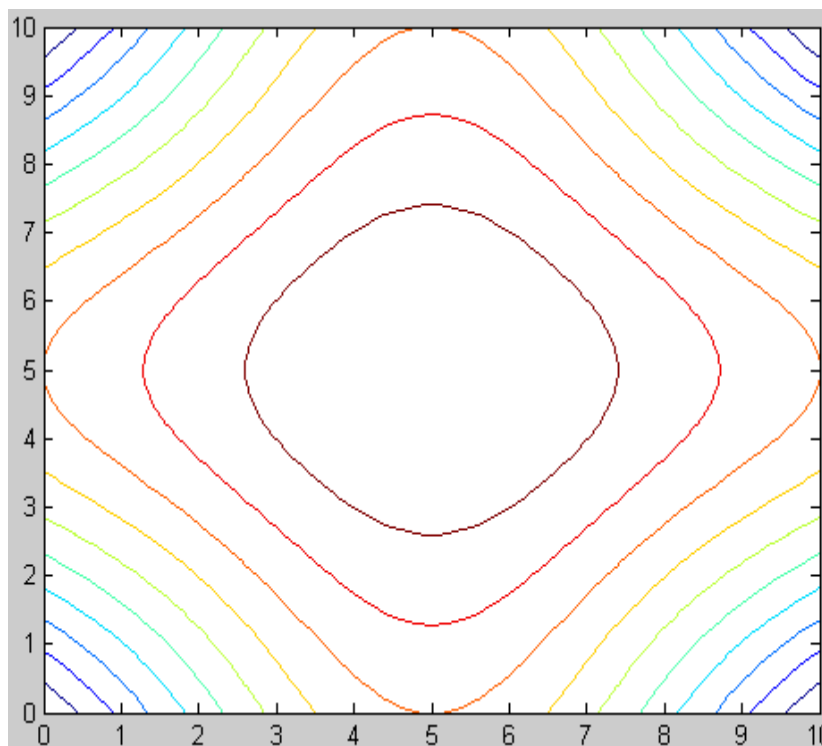


Figura 118 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

A curvas equipotenciais do funcionamento inicial de laje surgem representadas na Figura 119. Na Figura 120 estão representadas as curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da solução final de casca. Na Figura 121 surgem representados os vetores do campo de equilíbrio vertical da casca. É possível verificar diferenças no equilíbrio de forças verticais que no caso da casca depende do sistema de forças de membrana gerado e da geometria.

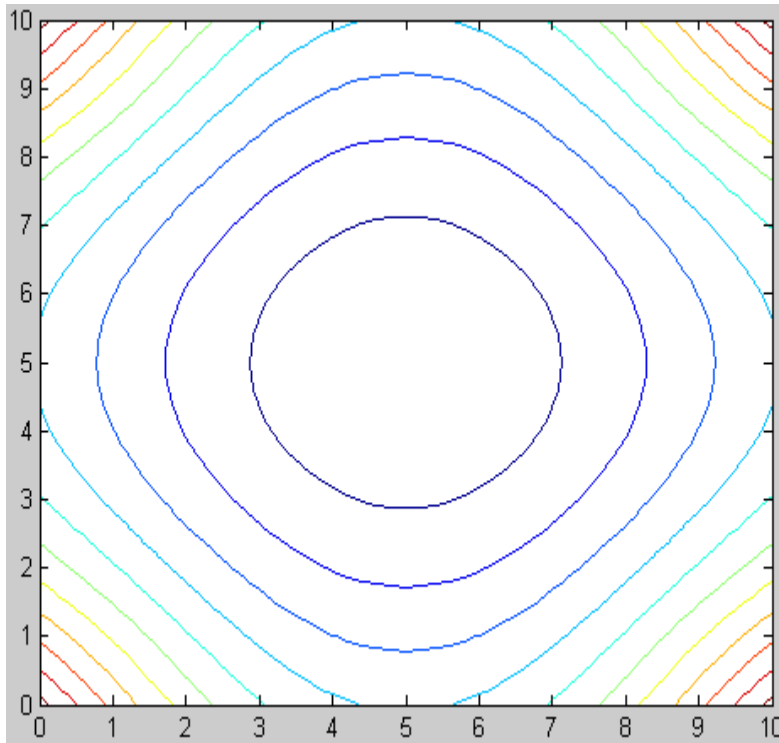


Figura 119 - Planta de curvas equipotenciais da função potencial de equilíbrio vertical da laje.

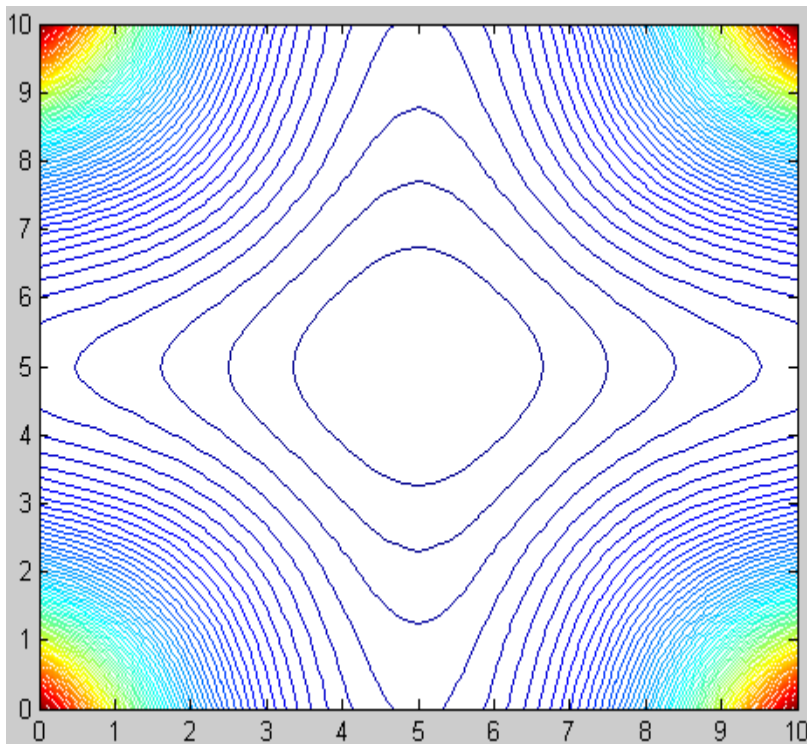


Figura 120 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.

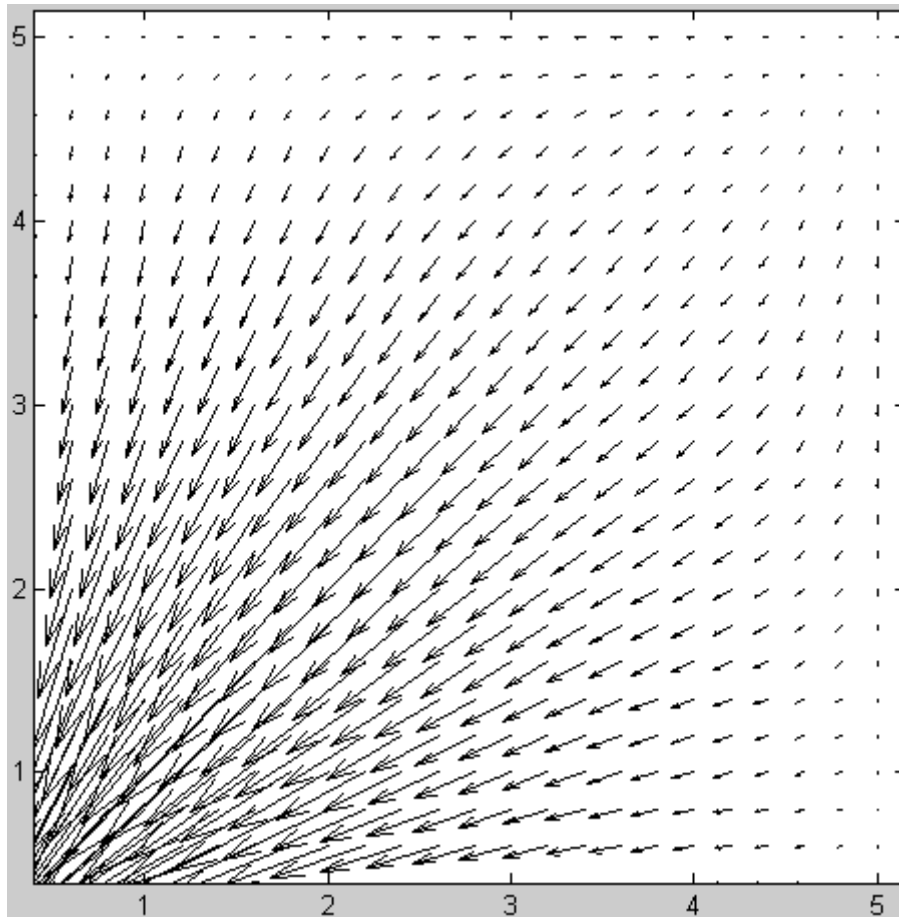


Figura 121 - Representação de 1/4 do campo de equilíbrio vertical da solução de casca.

A representação dos caminhos de forças na direção X do modelo de parede surge na Figura 122. Na Figura 123 surge a mesma representação para o modelo de casca. É possível observar diferenças na zona central dos bordos com desvio mais acentuado dos caminhos de forças para o interior no caso da estrutura de casca. Adicionalmente, é mais uniforme a distribuição de forças na zona central, contrariamente ao que acontece na solução de parede. O afastamento dos caminhos de forças verticais e horizontais da extremidade dos bordos (Figura 120, Figura 121 e Figura 123) pode estar associado a uma tendência dos caminhos de forças acompanharem a tendência de maior rigidez para o interior da casca.

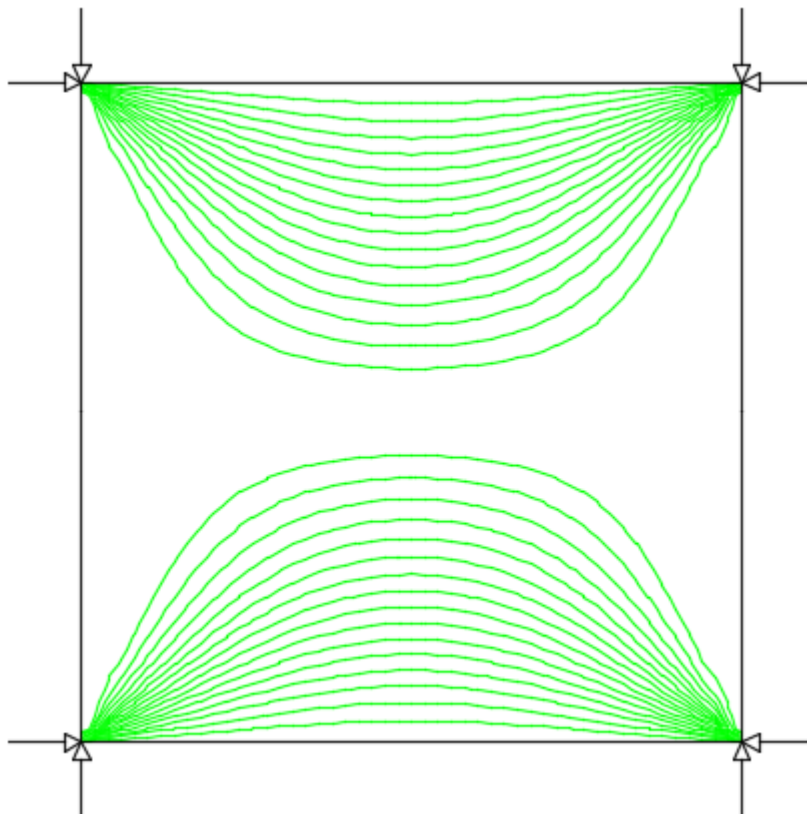


Figura 122 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo plano de parede com forças de pré-esforço de 130kN nos cantos.

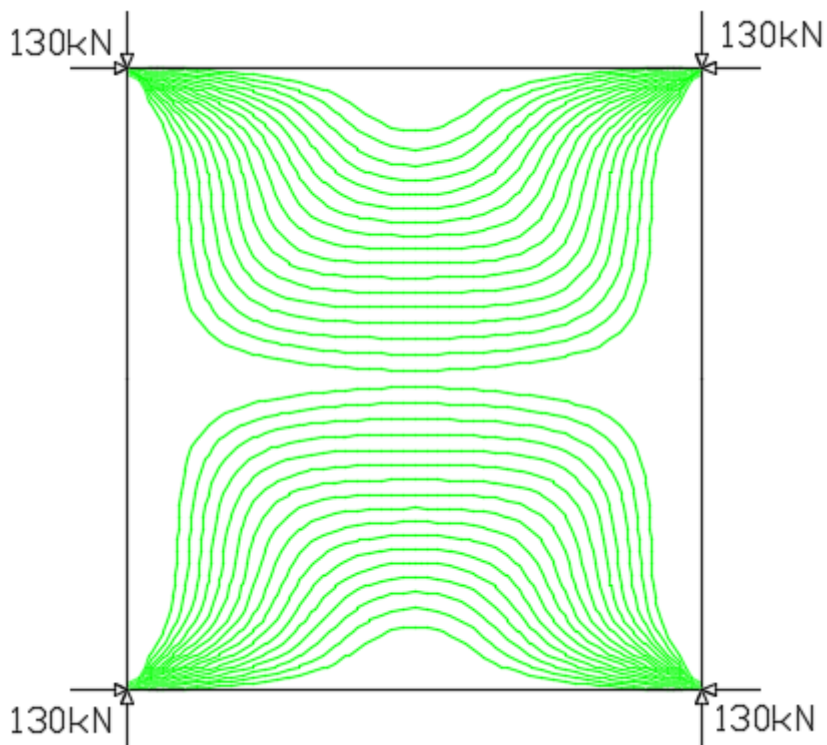


Figura 123 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca.

4.2.4 Solução de bordos livres com diferentes forças de pré-esforço nos cantos

Neste caso pretende-se determinar a forma para o caso de planta quadrada e bordos livres analisado pelo método de integração do campo gradiente no subcapítulo 3.1.3. O objetivo é comparar a relação entre forma e forças das soluções obtidas pelos dois métodos. O modelo inicial surge descrito na Figura 124.

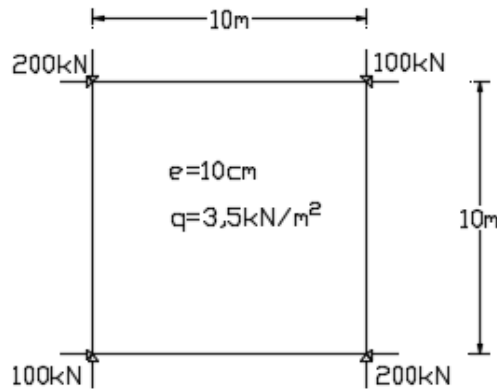


Figura 124 - Representação do modelo inicial para obtenção de forma.

A solução obtida possui uma cota máxima na zona central da casca de $h = 1,62\text{m}$ e na zona central dos bordos de $h = 1,22\text{m}$. A Figura 125 e a Figura 126 descrevem a forma da solução obtida. A Figura 126 permite verificar que a solução obtida tem maior inclinação nas direções dos cantos com maiores forças de pré-esforço. Note-se a diferença com o exemplo do subcapítulo 3.1.3 em que relação entre a geometria e as diferenças nas forças de pré-esforço não é tão evidente como no caso da Figura 126. Em ambos os métodos as direções dos cantos com maiores forças de pré-esforço coincidem com maior transferência de cargas verticais (Figura 128 e Figura 85). No caso estudado no presente subcapítulo existe restrição das cotas dos pontos de apoio, todas iguais e sem alteração durante o procedimento de obtenção de forma.

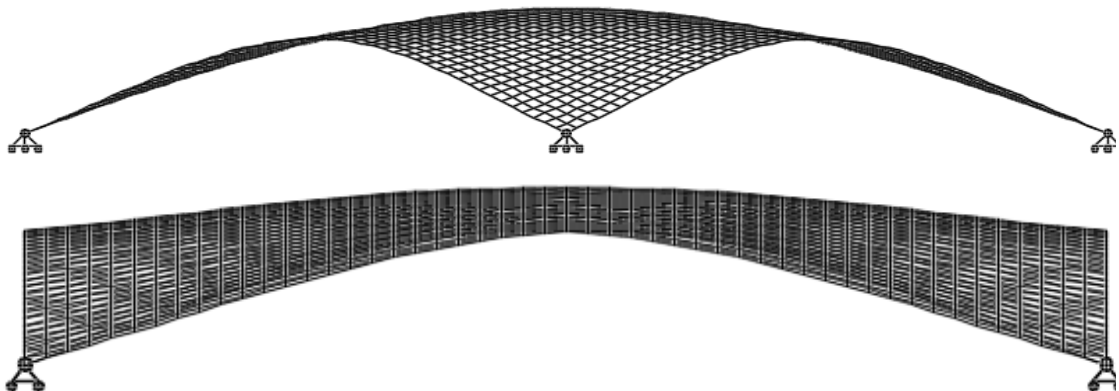


Figura 125- Perspetiva e alçado da solução de casca obtida por inversão de membrana.

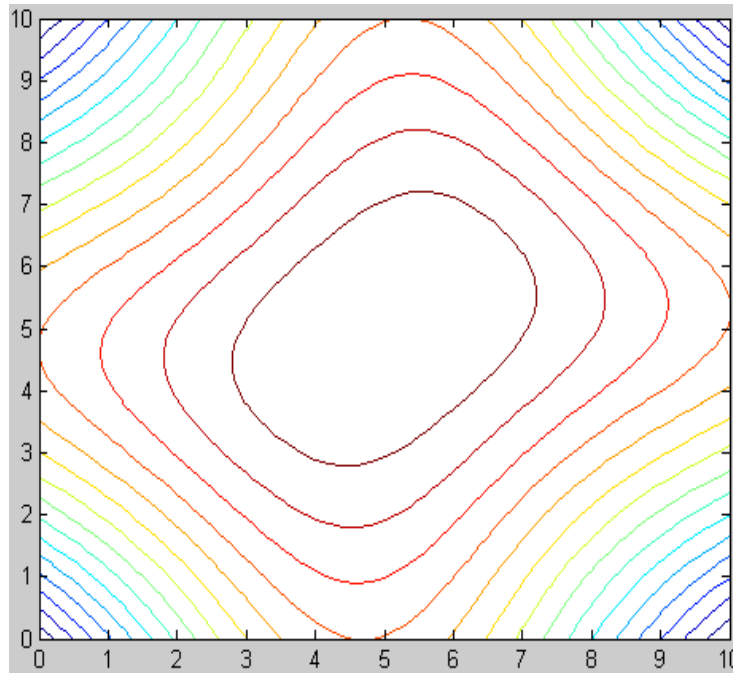


Figura 126 - Planta de curvas de nível da superfície da casca.

As curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical e os vetores de campo (Figura 127 e Figura 128) mostram que as direções com maiores esforços de pré-esforço são as que transferem maior quantidade de cargas verticais, sendo também as que têm maior inclinação.

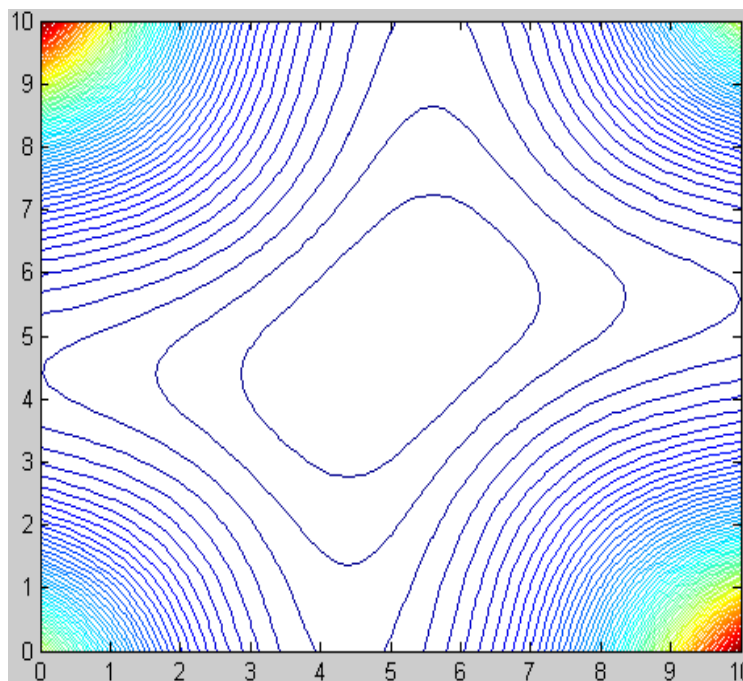


Figura 127 - Planta de curvas de nível da função após integração do campo de equilíbrio vertical da casca.

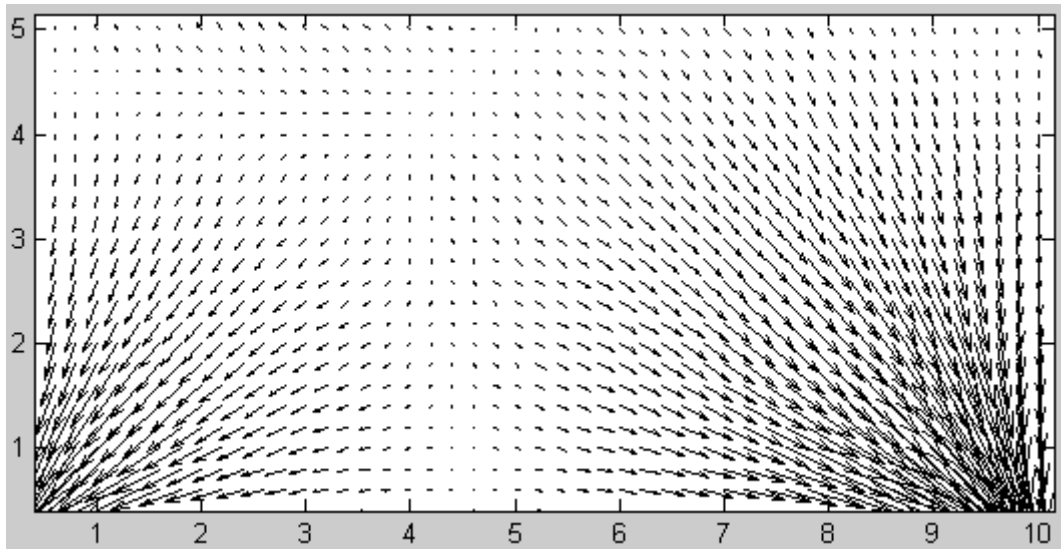


Figura 128 - Representação de $\frac{1}{2}$ do campo de equilíbrio vertical da solução com pré-esforço.

A representação dos caminhos de forças na direção X para o modelo plano de parede e para o modelo de casca surge nas Figura 129 e Figura 130, respetivamente. Também neste caso se verifica um desvio dos caminhos de forças para o interior da casca nas zonas de bordo.

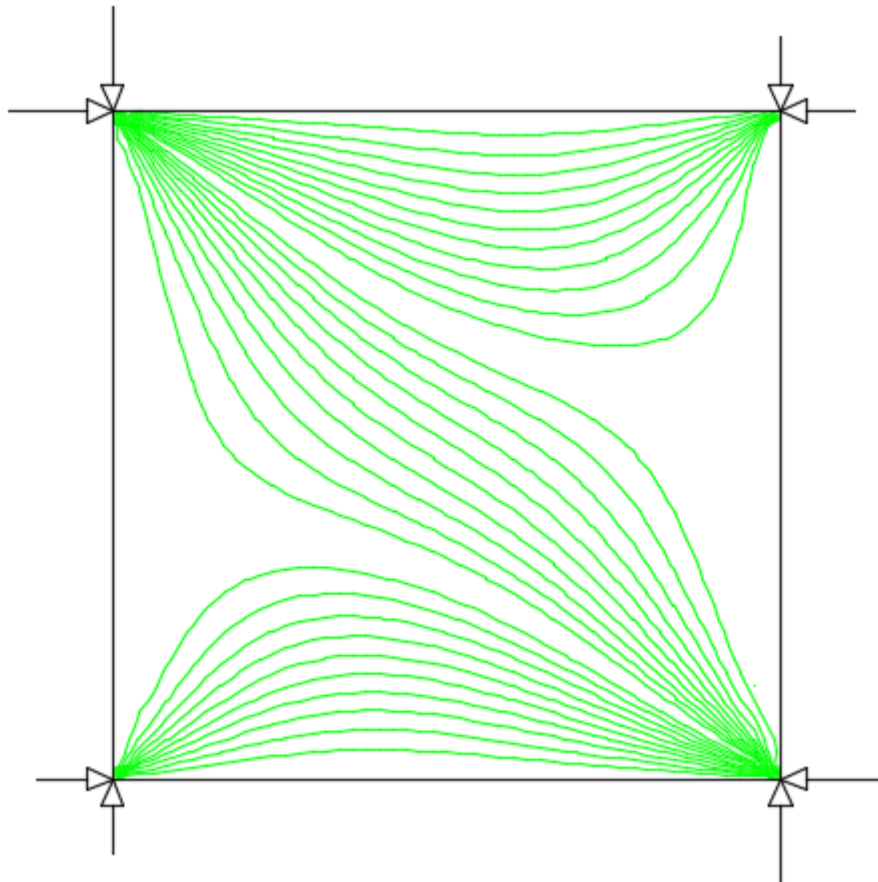


Figura 129 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo plano de parede.

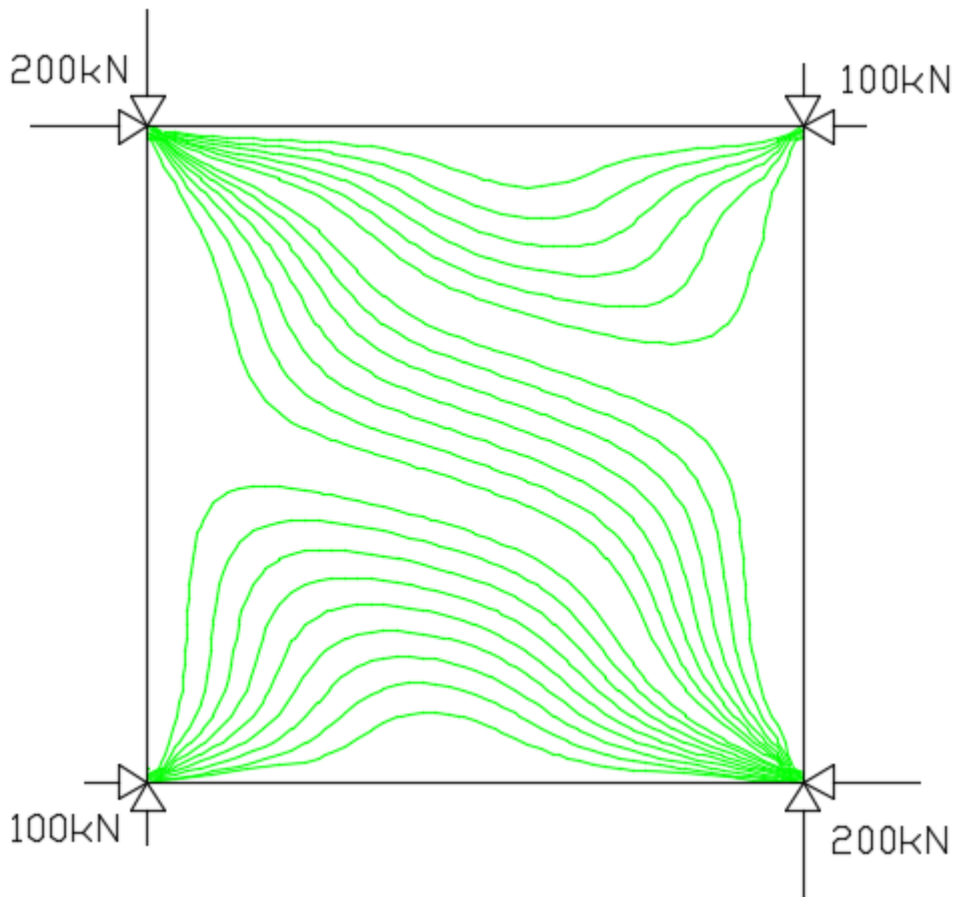


Figura 130 - Caminhos de forças horizontais na direção X no modelo de casca.

4.3 Discussão dos resultados

No primeiro caso deste capítulo, a análise de um modelo contínuo com a forma obtida por um modelo discreto de barras ortogonais mostra um comportamento insatisfatório quando se consideram as forças de pré-esforço consideradas no procedimento de obtenção de forma. No caso, verificam-se elevadas forças de tração que são inexistentes no modelo inicial de partida. Este resultado é devido às diferenças de rigidez entre o modelo discreto e o modelo contínuo que, forçosamente, correspondem a alterações nos caminhos de forças.

A introdução de rigidez através de barras diagonais no modelo discreto de barras ortogonais resulta numa maior distribuição de forças, o que implica redução de curvaturas. A aproximação do modelo discreto ao modelo contínuo pela introdução das diagonais atenua diferenças entre as soluções. No entanto, a aplicação do procedimento no modelo de barras com diagonais não permite uma forma com maiores curvaturas, o que pode ser necessário para melhorar o comportamento relativamente a suscetibilidade para instabilidade por encurvadura.

No segundo caso de estudo, a ondulação característica de caminhos concentrados de força nos modelos discretos de barras foi determinada a partir de um modelo plano contínuo de partida

com variação de espessura. A análise de um modelo de casca de espessura constante permite constatar caminhos de força mais concentrados nas zonas mais abatidas, o que pode ser associada à influência da geometria na rigidez da casca, em comparação a um modelo plano de parede de espessura constante.

O terceiro caso analisado permite a comparação entre forma e forças das soluções de casca de bordos retos livres obtidas pelo método de integração do campo gradiente descrito no subcapítulo 1.2.3 e pelo método de obtenção de forma por aproximações sucessivas deste capítulo.

O procedimento proposto é de utilização muito simples, com utilização de um programa de análise estrutural convencional. No caso, existe predefinição dos sistemas de forças de pré-esforço a partir das zonas de apoio ou de bordo, o que condiciona o sistema interno de forças de membrana. A comparação entre os modelos planos de partida e o modelo final de casca mostra uma tendência para no segundo caso existir um afastamento dos caminhos de forças, de membrana e verticais, das zonas de bordo para o interior. Este comportamento parece poder ser associado ao efeito da forma da casca na rigidez, que tem influência nos caminhos de forças.

Capítulo 5 - Conclusões

A análise de algumas metodologias de obtenção de forma de cascas com predefinição de forças permite verificar algumas dificuldades na definição dos caminhos de forças. A esse respeito salienta-se, por exemplo, a consideração de analogias, como é o caso de se adotar como caminho de forças os percursos da água da chuva nas superfícies, ou seja, os coincidentes com as direções de maior inclinação. Adicionalmente, constata-se a proposta de diferentes alternativas decididas pelo utilizador. O procedimento adotado no presente trabalho tenta ultrapassar estas dificuldades utilizando as ferramentas disponíveis de determinação e representação de caminhos de forças para modelos iniciais de partida, nomeadamente, paredes planas e lajes. Essas mesmas ferramentas são utilizadas no estudo das soluções finais de casca, com descrições mais globais do seu funcionamento em equilíbrio.

O contributo fundamental do presente trabalho é relativo a cascas de bordo livre, comprovando-se não serem necessários bordos de planta curva em procedimentos de obtenção de forma com base em equações de equilíbrio. O funcionamento em equilíbrio com arcos internos inclinados torna possível considerar forças de pré-esforço normais aos bordos unicamente na obtenção de forma, sendo eliminadas na solução final de casca. Nos casos analisados verifica-se uma tendência para os caminhos de forças se desviarem dos bordos para o interior, diferindo assim dos modelos iniciais de partida. Essa tendência de desvio resultante do tipo de rigidez materializado pela estrutura da casca corresponde a algumas alterações nos caminhos de forças comparativamente aos determinados nos modelos de partida, de laje e parede plana.

A obtenção de forma de cascas com modelos discretos pode implicar dificuldades no facto de o sistema de forças predefinido se alterar de forma significativa quando é considerada a rigidez efetiva de uma estrutura contínua. Por exemplo, podem surgir forças de tração que não se verificam no modelo discreto utilizado. Em relação a esse aspeto, a possibilidade de se trabalhar com modelos contínuos revela-se vantajosa.

A introdução de condicionantes geométricas nos problemas, por exemplo a existência de direções preferenciais de curvatura ou curvaturas mais ou menos acentuadas, pode ser feita por manipulação de rigidez nos modelos de partida. No entanto, as alterações de rigidez desses modelos para o que se pretende na solução final de casca introduzem forçosamente alterações nos sistemas de forças, que irão diferir dos que foram inicialmente predefinidos. Nesses casos será necessário avaliar se os novos sistemas de forças são desfavoráveis às condicionantes existentes, sendo que em certos casos as condicionantes geométricas são as mais relevantes, por exemplo, no que toca problemas de instabilidade.

A metodologia utilizada com integração do campo gradiente da superfície predeterminado é afetada por dificuldades numéricas, por exemplo, resultantes da qualidade dos resultados dos modelos de elementos finitos ou no formato de dados utilizado nas plataformas de computação numérica. Esses problemas não foram completamente ultrapassados no presente trabalho, constituindo motivação para desenvolvimentos futuros.

O procedimento de obtenção de forma por aproximações sucessivas permitiu a obtenção de forma com modelos contínuos e discretos. Por esse meio é possível predefinir forças de pré-esforço mantidas constantes no procedimento de obtenção de forma, sem eventuais dificuldades de análise que resultariam num processo de análise não-linear. A convergência do procedimento para uma solução anti-funicular resulta do facto de a rigidez de flexão do modelo inicial se transformar em rigidez de membrana, em virtude da forma que a estrutura vai adquirindo.

Bibliografia

- [1] “Panteão de Roma.” [Online]. Available: <https://www.pinterest.pt/pin/87538786483476173/>. [Accessed: 02-Sep-2017].
- [2] “Basílica de São Pedro.” [Online]. Available: <https://www.pinterest.pt/pin/498140408753162391>. [Accessed: 02-Sep-2017].
- [3] “Zeiss Planetarium.” [Online]. Available: <https://structurae.net/structures/zeiss-planetarium>. [Accessed: 02-Sep-2017].
- [4] J. Tomlow, *Tomlow, J., The Model, Information of the Institute for Lightweight Structures*, 34th ed. 1989.
- [5] S. Huerta, *El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí*, 130th ed. Madrid, 2003.
- [6] “Frei Otto.” [Online]. Available: <https://www.pinterest.pt/pin/432908582911654955>. [Accessed: 02-Sep-2017].
- [7] F. Candela, “New architecture,” *New Jersey*. The Maillart Papers in D. P. Billington J. F. Abel and R. Mark, New Jersey, pp. 119–126, 1973.
- [8] “Los Manantiales.” [Online]. Available: <https://www.pinterest.pt/pin/141230138285819992/>. [Accessed: 02-Sep-2017].
- [9] M. E. Garlock and D. P. Billington, “Félix Candela: Engineer, Builder, Structural Artist.,” in *Princeton University Art Museum.*, Princeton, 2009.
- [10] H. Isler, “New Shapes for Shells,” *Bulletin of the IASS*, no. 8, 1960.
- [11] J. Chilton, *The Engineer’s Contribution to Contemporary Architecture*. London: Thomas Telford, 2000.
- [12] E. Ramm and E. Schunck, “Heinz Isler Schalen.” Exhibition Catalogue, ETH Zürich, 2002.
- [13] T. Sousa, “Diferentes Conceções de Estruturas tipo Casca e a Influência no Comportamento Estrutural.,” Dissertação, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura da Universidade da Beira Interior, 2017.
- [14] A. S. Day, “An Introduction to Dynamic Relaxation,” *Eng.*, vol. 219, pp. 218–221, 1965.
- [15] H. J. Schek, “Computer methods in applied mechanics and engineering,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 3, no. 1, pp. 115–134, 1974.
- [16] P. P. C. V. Block, “Thrust network analysis: exploring three-dimensional equilibrium.,” PhD Thesis. Massachusetts Institute of Technology, 2009.
- [17] S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal, and C. Williams, *Shell structures for architecture: form finding and optimization*. Routledge, 2014.
- [18] C. M. Pinto, “Contribuição para a Conceção e Dimensionamento de Novas Estruturas em Granito de Alta Resistência,” Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura da Universidade da Beira Interior, 2015.
- [19] L. Cremona, *Le figure reciproche nella statica grafica*. Hoepli, 1879.
- [20] C. Culmann, *Die graphische statik.*, Vol. 1. Zürich: Meyer & Zeller, 1864.
- [21] E. Allen and Waclaw Zalewski., *Shaping Structures*. Cambridge University Press, 1998.
- [22] J. Heyman, “The stone skeleton: structural engineering of masonry architecture,” C. U. Press, Ed. 1997.

- [23] P. Abraham, *Viollet-Le-Duc et le rationalisme médiéval*. Paris: Fréal & Cie, 1934.
- [24] J. Fonseca, "Zum Bemessen und Konstruieren von Stahlbetonplatten und –scheiben mit Lastpfaden," Institut für Tragwerksentwurf und –konstruktion der Universität Stuttgart, 1995.
- [25] J. C. Maxwell, "On reciprocal figures and diagrams of forces," *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, vol. 27, no. 182, pp. 250–261, 1864.
- [26] W. Flügge, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag. 1960.
- [27] J. W. Eaton, "GNU Octave," 1988. [Online]. Available: <https://www.gnu.org/software/octave/>.
- [28] "Heinz Isler - Naturtheater Aichtal-Grötzingen." [Online]. Available: <https://www.pinterest.pt/pin/389068855280046667/>. [Accessed: 02-Sep-2017].
- [29] H. Isler, "Modelo físico experimental," 1977. [Online]. Available: <http://shells.princeton.edu/Grotz.html>. [Accessed: 02-Sep-2017].
- [30] M. Hensel and A. Menges, *Versatility and Vicissitude*. London, 2008.
- [31] "Heinz Isler." [Online]. Available: http://www.wikiwand.com/en/Heinz_Isler. [Accessed: 02-Sep-2017].
- [32] AUTODESK, "Robot Structural Analysis," 2015. [Online]. Available: <https://www.autodesk.com/products/robot-structural-analysis/overview>.
- [33] Picard, E. and S. Georges, *Théorie des Fonctions algébriques de deux Variables indépendantes*. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1897.

Anexos

Anexo A - Algoritmos usados ao longo deste trabalho

A1 - Algoritmo para obtenção de forma usado no Capítulo 2

```
clear;

clc;

yin =fopen('Doc.txt','r');

k=input('Número de colunas representativas das variáveis envolvidas:');

A = fscanff(yin,'%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f',[k inf]);

F=A';

%Determinação do função potencial e campo de equilibrio vertical

T=input('Inserir tamanho da matriz Z(mxn):')

v=input('Inserir coeficiente de Poisson,v :')

for i=1:T;

Potencial(i,1)= (F(i,6)+F(i,7))/(1+v);

end

m=input('Numero de linhas da matriz Z:');

n=input('Numero de colunas da matriz Z:')

a=1;

b=1;

for j=1:m;

for i=1:n;

Potencialmatriz(j,b)=Potencial(a,1);

a=a+1;

b=b+1;
```

```

end

b=1;

end

subplot(3,3,1);

surf(Potencialmatriz);

a=1;

b=1;

for j=1:m;

for i=1:n;

X(j,b)=F(a,1);

Y(j,b)=F(a,2);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

[Vx,Vy]=gradient(Potencialmatriz,0.20,0.20);

subplot(3,3,2);

surf(Vx);

subplot(3,3,3);

surf(Vy);

%% Visualização do Campo de membrana

%Campo Nx

for i=1:T;

Nx(i,1)= F(i,3);

end

a=1;

```

```

b=1;

for j=1:m;

for i=1:n

Nxx(j,b)=Nx(a,1);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

subplot(3,3,4);

surf(Nxx)

%Campo Ny

for i=1:T;

Ny(i,1)= F(i,4);

end

a=1;

b=1;

for j=1:m;

for i=1:n;

Nyy(j,b)=Ny(a,1);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

subplot(3,3,6);

surf(Nyy)

```

```

%Campo Nxy

for i=1:T;

Nxy(i,1)= F(i,5);

End

a=1;

b=1;

for j=1:m;

for i=1:n;

Nxyy(j,b)=Nxy(a,1);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

subplot(3,3,7);

surf(Nxyy)

%% Determinação da coordenada Z e posterior superficie

a=1;

b=1;

for j=1:m;

for i=1:n;

Vxcol(a,1)= Vx(j,b);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

```

```

a=1;

b=1;

for j=1:m;

for i=1:n;

Vycol(a,1)= Vy(j,b);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

%Matriz Zx em coluna

for i=1:T;

Zxcol(i,1)= (Vxcol(i,1)*Ny(i,1)+Vycol(i,1)*F(i,5))/(Nx(i,1)*Ny(i,1)-(F(i,5)^2));

end

%Matriz Zx em matriz

b=1;

a=1;

for j=1:m;

for i=1:n;

Zxmat(j,b)=Zxcol(a,1);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

subplot(3,3,8);

surf(Zxmat);

```

```
%Matriz Zy em coluna
```

```
for i=1:T;
```

```
Zycol(i,1)= (Vycol(i,1)*Nx(i,1)+Vxcol(i,1)*F(i,5))/(Nx(i,1)*Ny(i,1)-(F(i,5)^2));
```

```
end
```

```
%Matriz Zy em matriz
```

```
a=1;
```

```
b=1;
```

```
for j=1:m;
```

```
for i=1:n;
```

```
Zymat(j,b)=Zycol(a,1);
```

```
a=a+1;
```

```
b=b+1;
```

```
end
```

```
b=1;
```

```
end
```

```
subplot(3,3,9);
```

```
surf(Zymat);
```

```
tic,Z = intgrad2(Zxmat,Zymat,0.20,0.20);toc;
```

```
subplot(3,3,5);
```

```
surf(Z);
```

```
a=1;
```

```
b=1;
```

```
for j=1:m;
```

```
for i=1:n;
```

```
X(j,b)=F(a,1);
```

```

Y(j,b)=F(a,2);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

figure

contour(X,Y,Z);

% Matriz de coordenadas x,y,z

a=1;

b=1;

for j=1:m;

for i=1:n;

Zcol(a,1)=Z(j,b);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

for i=1:T;

x(i,1)=F(i,1);

y(i,1)=F(i,2);

z(i,1)=Zcol(i,1);

M=[x y z];

end

```



```
    aux1=aux1+H(j,3);  
    aux2=aux2+H(j,4);  
    Media=aux/a;  
    Media1=aux1/a;  
    Media2=aux2/a;  
end  
Medial(i,1)= Media;  
Medial(i,2)= Media1;  
Medial(i,3)= Media2;  
end  
a=0 ;  
aux=0;  
aux1=0;  
aux2=0;  
end
```

Anexo A3- Algoritmo para obtenção de forma usado no Capítulo 3.

```
clear;

clc;

yin =fopen('lol.txt','r');

k=input('Número de colunas representativas das variáveis envolvidas:')

A = fscanf(yin,'%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f',[k inf]);

F=A';

%Determinação da função potencial e posterior campo de equilibrio vertical

T=input('Inserir tamanho da matriz Z(mxn):')

v=input('Inserir coeficiente de Poison,v :')

for i=1:T;

    Potencial(i,1)= (F(i,6)+F(i,7))/(1+v);

End

m=input('Numero de linhas da matriz Z:');

n=input('Numero de colunas da matriz Z:')

for i=1:T;

    X(i,1)= F(i,1);

end

for i=1:T;

    Y(i,1)= F(i,2);

end

Pot=RegularizeData3D(X , Y, Potencial,n,m,'smooth',0.01,'interp','bilinear')/1;
```

```

subplot(3,3,1);

surf(Pot);

[Vx,Vy]=gradient(Pot,0.2,0.2);

subplot(3,3,2);

surf(Vx);

subplot(3,3,3);

surf(Vy);

%% Visualização do Campo de membrana

%Campo Nx

for i=1:T;

    Nx(i,1)= F(i,3);

end

NX=RegularizeData3D(X , Y, Nx,n,m,'smooth',0.01,'interp','bilinear')/1 -0;

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

        Nxx(a,1)=NX(j,b);

        a=a+1;

        b=b+1;

    end

    b=1;

end

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

```

```

NXX(j,b)=Nxx(a,1);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

subplot(3,3,4);

surf(NXX)

%Campo Ny

for i=1:T;

    Ny(i,1)= F(i,4);

end

NY=RegularizeData3D(X , Y, Ny,n,m,'smooth',0.01,'interp','bilinear')/1 -0;

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

        Nyy(a,1)=NY(j,b);

        a=a+1;

        b=b+1;

    end

    b=1;

end

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

```

```

    NYY(j,b)=Nyy(a,1);

    a=a+1;

    b=b+1;

end

    b=1;

end

subplot(3,3,6);

surf(NYY)

%Campo Nxy

for i=1:T;

    Nxy(i,1)= F(i,5);

end

NXY=RegularizeData3D(X , Y, Nxy,n,m,'smooth',0.01,'interp','bilinear')/1;

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

        Nxy(a,1)=NXY(j,b);

        a=a+1;

        b=b+1;

    end

    b=1;

end

a=1;

b=1;

```

```

for j=1:m;
    for i=1:n;
        Nxyy(j,b)=Nxy(a,1);
        a=a+1;
        b=b+1;
    end
    b=1;
end
subplot(3,3,7);
surf(Nxyy)
%% Determinação da coordenada Z e posterior superficie
a=1;
b=1;
for j=1:m;
    for i=1:n;
        Vxcol(a,1)= Vx(j,b);
        a=a+1;
        b=b+1;
    end
    b=1;
end
a=1;
b=1;
for j=1:m;
    for i=1:n;

```

```

Vycol(a,1)= Vy(j,b);

a=a+1;

b=b+1;

end

b=1;

end

%Matriz Zx em coluna

for i=1:T;

    Zxcol(i,1)= (Vxcol(i,1)*Nyy(i,1)+Vycol(i,1)*Nxy(i,1))/(Nxx(i,1)*Nyy(i,1)-(Nxy(i,1)^2));

end

%Matriz Zx em matriz

b=1;

a=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

        Zxmat(j,b)=Zxcol(a,1);

        a=a+1;

        b=b+1;

    end

    b=1;

end

subplot(3,3,8);

surf(Zxmat);

%Matriz Zy em coluna

for i=1:T;

```

```

    Zcol(i,1)= (Vycol(i,1)*Nxx(i,1)+Vxcol(i,1)*Nxy(i,1))/(Nxx(i,1)*Nyy(i,1)-(Nxy(i,1)^2));
end

%Matriz Zy em matriz

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

        Zymat(j,b)=Zcol(a,1);

        a=a+1;

        b=b+1;

    end

    b=1;

end

subplot(3,3,9);

surf(Zymat);

tic,Z = intgrad2(Zxmat,Zymat,0.2,0.2);toc;

% Matriz de coordenadas x,y,z

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

        Zcol(a,1)=Z(j,b);

        a=a+1;

        b=b+1;

    end

    b=1;

end

end

```

```

ZZ=RegularizeData3D(X , Y, Zcol,n,m,'smooth',0.01,'interp','bilinear');

subplot(3,3,5);

surf(ZZ);

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

        XX(j,b)=F(a,1);

        YY(j,b)=F(a,2);

        a=a+1;

        b=b+1;

    end

    b=1;

end

figure

contour(XX,YY,ZZ,15);

a=1;

b=1;

for j=1:m;

    for i=1:n;

        ZZcol(a,1)=ZZ(j,b);

        a=a+1;

        b=b+1;

    end

    b=1;

end

```

```
for i=1:T;
    x(i,1)=F(i,1);
    y(i,1)=F(i,2);
    z(i,1)=ZZcol(i,1);
    M=[x y z];
end
```


Anexo A4 - Algoritmo para obtenção de forma por aproximações sucessivas usado no Capítulo 4.

```
Sub INVERT_M()  
  
Set robapp = New RobotApplication  
  
Dim FERES As RobotDisplacementData  
  
Dim nod_col As IRobotCollection  
  
Set nodal = robapp.Project.Structure.Nodes  
  
Dim Steps As Integer  
  
Steps = 1000  
  
'Dim A As Integer  
  
For J = 1 To Steps  
  
Set nod_col = robapp.Project.Structure.Nodes.GetAll()  
  
For I = 1 To nod_col.Count  
  
    Dim RANode As IRobotNode  
  
    Dim nod As IRobotNode  
  
    Set nod = nod_col.Get(I)  
  
    Dim A As Integer  
  
    Dim cas_col As IRobotCaseCollection  
  
    Set cas_col = robapp.Project.Structure.Cases.GetAll()  
  
    Dim cas As IRobotCase  
  
    Set cas = cas_col.Get(1)  
  
    'Set RANode = robapp.Project.Structure.Nodes.Get(
```

```

'Cells(I, 1) = RANode.Z

    'Cells(I, 1) = nod.Number

Dim res_fx As Double, res_fz As Double, res_my As Double

Set FERES = robapp.Project.Structure.Results.Nodes.Displacements.Value(nod.Number,
1)

res_fx = nod.Z - FERES.UZ

'nodal.Delete (A)

'RANode.Z = 1

nodal.Create nod.Number, nod.X, nod.Y, res_fx

Set cas = Nothing

Set cas_col = Nothing

Set nod = Nothing

Set cas = Nothing

Next

robapp.Project.CalcEngine.Calculate

'robapp.Project.CalcEngine.UseStatusWindow

Next

Set robapp = Nothing

Set RANode = Nothing

End Sub

```