



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Ciências

O número de Ouro

Carlos Domingues dos Afeitos

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
**Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no
Ensino Secundário**
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Pinto Rebelo

Covilhã, Outubro de 2013

Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo.

Zeizing, 1855

A Geometria tem dois grandes tesouros; um é o torema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento de recta na sua média e extrema razão. O primeiro, podemos compará-lo com uma medida de ouro; ao segundo, podemos chamar-lhe uma pedra preciosa.

Kepler (1571-1630)

Agradecimentos

Desde o início deste curso, tenho tido vários apoios de variadas pessoas.

Tive o privilégio de ter o Professor Doutor Paulo Rebelo como orientador de todo um processo ao qual agradeço o apoio incondicional tendo em conta a situação em que me encontro. Sua disponibilidade foi sempre total e sem quaisquer restrições.

À Professora Doutora Isabel Cunha quero agradecer-lhe por ter-me iniciado neste processo e ter-me apoiado nas várias etapas do mesmo.

Agradeço também à minha namorada, Teresa Ferreira, por todo o apoio que me deu. À minha família que sempre me deu o seu apoio e me ajudou com todas as questões relacionadas com o curso.

Resumo

Sendo o Número de Ouro, Φ , um dos mais enigmáticos números conhecidos até hoje, propõe-se este trabalho a desmitificá-lo um pouco. Começa-se pela História: como e onde apareceu o número de Ouro e os vários nomes - tais como Fibonacci, Luca Pacioli e Leonardo DaVinci - que em muito contribuíram para a sua divulgação. Faz-se ainda referência a uma fórmula algébrica em como encontrar o Φ .

Em seguida, discutem-se as aplicações, passadas e presentes, do Número de Ouro, bem como as diversas áreas onde o podemos encontrar. Estas vão da geometria, pintura, arquitectura, passando pela música e até mesmo pela natureza, embora haja alguma controvérsia entre vários autores em relação à última.

No capítulo final, apresentam-se algumas actividades que podem ser efectuadas em contexto de sala de aula. Actividades essas que podem abranger alunos de vários anos lectivos, desde do 5º ao 10º ano de escolaridade, assim como de várias disciplinas, como por exemplo em Arte com a elaboração de cartazes e anúncios publicitários.

Abstract

The Golden Number, Φ , is perhaps one of the most enigmatic numbers known to humankind; therefore it is the purpose of this dissertation to demystify it a little. We start with History: how and where the Golden Number appeared and the various names - such as Fibonacci, Luca Pacioli and Leonardo DaVinci - that strongly contributed for its expansion. We refer as well to an algebraic formula to find Φ .

We, then, discuss the past and present applications of the Golden Number, as well as the several areas where it can be found. These include geometry, painting, architecture, music and even nature, although there is a lot of controversy amongst authors regarding the latter. In the last chapter, we introduce some activities that can be delivered in a classroom. These activities can be done by students from different year groups, from 5th to 10th grade, and are also interdisciplinary. They can be looked at in different subjects like, for example, in Art when designing posters and adverts.

Índice

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
1 Introdução	1
2 Breve história do número de ouro	5
2.1 Euclides	8
2.2 Algumas propriedades	12
2.3 A contribuição de Fibonacci	17
2.3.1 Leonardo de Pisa	17
2.3.2 O problema de Fibonacci	21
2.3.3 Uma abordagem algébrica	26
2.3.4 Os números de Lucas	30
2.3.5 Propriedades dos números de Fibonacci	31
2.4 Luca Pacioli	33
2.5 A contribuição de Leonardo DaVinci	34
2.5.1 Leonardo DaVinci	34

2.5.2	A obra de Leonardo	38
3	Aplicações do número de Ouro	39
3.1	Na Geometria	39
3.1.1	Divisão de um segmento de recta na divina proporção	39
3.1.2	Rectângulo de ouro	41
3.1.3	Pentágono e o Pentagrama	43
3.1.4	Triângulo de ouro	44
3.1.5	Espiral dourada e a Espiral Rectangular	48
3.2	Na Música	51
3.3	Na literatura	53
3.4	Na arquitectura	54
3.5	Design	58
3.6	Na arte	59
3.7	No corpo humano	63
3.8	Na Natureza	66
3.9	Algumas críticas ao número de Ouro	70
4	O número de Ouro no Ensino em Portugal	72
4.1	Actividades	72
4.1.1	Proposta de Atividade - I	72
4.1.2	Proposta de Atividade - II	74
4.1.3	Proposta de Atividade - III	76
4.1.4	Proposta de actividade - IV	79
4.1.5	Proposta de actividade - V	82
4.1.6	Proposta de actividade - VI	86
5	Conclusões	88
	Bibliografia	90

Lista de Figuras

2.1	Imagem de Phidias.	7
2.2	Proporção entre comprimentos	9
2.3	Esquema de uma pirâmide.	12
2.4	Leonardo de Pisa (1170-1250).	17
2.5	Elementos da sucessão $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ e o número Φ	26
3.1	Divisão de um segmento segundo a razão de Ouro.	40
3.2	Rectangulo de Ouro.	42
3.3	Pentagrama de Ouro.	43
3.4	Pentagrama de Ouro.	44
3.5	Triângulo de Ouro no Pentagrama.	45
3.6	Triângulo isóceles.	45
3.7	Triângulo, I.	46
3.8	Triângulo, II.	46
3.9	Triângulo de Ouro.	48
3.10	Espiral dourada, I.	49
3.11	Espiral dourada, II.	50
3.12	Espiral dourada, III.	50
3.13	Pauta, I.	51
3.14	Pauta, II.	52

3.15	Violino Stradivarius.	53
3.16	Teclado de um piano.	53
3.17	Φ e o Partenon.	54
3.18	Φ e a Pirâmide.	55
3.19	Porta do Sol, I.	55
3.20	Porta do Sol, II.	55
3.21	Φ na Universidade de Salamanca.	56
3.22	Escolas Heinz-Galinsky.	56
3.23	Edifício da Onu.	57
3.24	Homem do Modulor.	57
3.25	Φ em Quincy Park.	57
3.26	“Nave”Enterprise, I.	58
3.27	“Nave”Enterprise, II.	58
3.28	Austin Martin Rapide <i>S</i>	58
3.29	Símbolo da Toyota.	59
3.30	Símbolo da Nissan.	59
3.31	Símbolo da Disney.	59
3.32	Garrafas de Sumos.	59
3.33	A Última Ceia.	61
3.34	A “Mona Lisa”e o número de Ouro, I.	61
3.35	“Mona Lisa”e a espiral de Ouro.	62
3.36	“A Flagelação”.	62
3.37	O “Nascimento de Vénus”e o número de Ouro, I.	63
3.38	O “Nascimento de Vénus”e o número de Ouro, II.	63
3.39	Obra de Michelangelo.	63
3.40	Obra de Piet Mondrian, I.	64
3.41	Obra de Piet Mondrian, II.	64
3.42	Estátua Ateniense.	64
3.43	A mona Lisa.	65

3.44	Dimensões áureas do Homem.	66
3.45	O homem Vitruviano.	67
3.46	O homem Vitruviano com medidas.	68
3.47	Φ no corpo humano, I.	68
3.48	Φ no corpo humano, II.	68
3.49	Φ e o conceito de beleza I.	69
3.50	Φ e o conceito de beleza II.	69
3.51	Flor de Girassol.	70
3.52	Nautilus pompilius.	70
4.1	Quadrado.	75
4.2	Corpo Humano.	77
4.3	Pentagono regular.	80
4.4	Triângulo regular.	84
4.5	Segmento de Ouro.	87

Capítulo 1

Introdução

Em Matemática existem algumas constantes que, por diversas razões, foram (e são) motivo de uma maior atenção quer por parte dos Matemáticos quer por parte de outros elementos da sociedade. Entre estas constantes, podemos referir o número π , por vezes designado por constante de Arquimedes (287A.C.-212A.C.), que estabelece a relação entre o perímetro e a área de um círculo. No entanto, historicamente, nem sempre foi assim. Sabe-se que esse número irracional surgiu nos cálculos dos geometras ao longo do tempo como uma constante de proporcionalidade em pelo menos 4 relações

- Entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro;
- Entre a área de um círculo e o quadrado de seu diâmetro;
- Entre a área de uma esfera e o quadrado de seu diâmetro;
- Entre o volume de uma esfera e o cubo de seu diâmetro.

As primeiras referências escritas conhecidas sobre π apareceram na Babilónia por volta do ano 2000AC. Desde então, muitos matemáticos tentaram obter melhores (e algumas piores!) aproximações para π , desde aproximações com algumas casas

décimais ou mesmo com alguns bilhões de casas decimais (mediante a utilização de computadores).

Uma das aproximações históricas “mais exatas” do π , se é que uma aproximação pode ser exata, e, curiosamente também umas das mais antigas, foi usada pelo matemático chinês Zu Chongzhi (Sec. 450DC), que considerava o π como “algo” entre 3.1415926 e 3.1415927. A pior aproximação data de 1897DC no estado de Indiana, Estados Unidos, quando se apresentou uma proposta de lei em que se decretava que o valor de π seria 4. Felizmente, não foi aprovada!

O número π pode ser apresentado também como a solução do Problema de Basileia, proposto pela primeira vez por Pietro Mengoli e resolvido por Leonhard Euler em 1735 que consiste em encontrar a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais¹, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \quad (1.1)$$

Leibniz em 1682, provou que:

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (1.2)$$

Aproximações para este número foram utilizadas pelos Gregos e pelos Egípcios que, de entre outras coisas, já tinham a necessidade de calcular volumes.

Uma outra constante muito importante mas menos conhecida é a constante de Nepper, representada por e . O número de Nepper é o limite da sucessão,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 0. \quad (1.3)$$

O número de Nepper tem muitas aplicações que vão desde a teoria das probabilidades até à teoria das equações diferenciais.

¹Em rigor, devemos referir-nos a π^2 uma vez que $\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}$.

Uma curiosidade acerca deste número é que relaciona o número π , a unidade imaginária, i , onde $i^2 = -1$, com o 1 (o “gerador de todos os números”) e o número 0 (o “nada”), através da fórmula:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (1.4)$$

Convém, ainda a título de curiosidade, mencionar a constante de Gelfand,

$$e^\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!}. \quad (1.5)$$

Neste trabalho vamos apresentar algumas curiosidades de resultados sobre um número ainda não mencionado: o chamado número de Ouro.

A importância deste número é devida ao facto de que tem muitas aplicações, algumas das quais nos passam despercebidas no dia a dia. Estas aplicações vão desde a Geometria, Análise, Biologia, Estética, ... Mais, permite uma abordagem interdisciplinar.

A título de exemplo, podemos colocar as seguintes questões:

- o que terá em comum o quadro pintado por Leonardo Da Vinci, a *Mona Lisa* com o *Nautilus pompilius*, molusco marinho?
- Podemos estabelecer alguma relação entre as proporções do corpo humano e a disposição das sementes numa flor de girassol?
- Por que esse número é tão apreciado por artistas, arquitetos, projetistas e músicos?

Estas questões vão ser respondidas nos capítulos seguintes. Neste trabalho vamos apresentar algumas propriedades, curiosidades e críticas a este número. Vamos também apresentar como este número é (ou poderia ser) introduzido o no ensino secundário.

A resposta a estas questões passam pelo facto de que a proporção áurea, está presente na natureza, no corpo humano e no universo.

Este número, assim como outros, por exemplo o π , estão presentes no mundo por uma razão matemática existente na natureza.

Essa sucessão aparece na natureza, no DNA, no comportamento da refração da luz, dos átomos, nas vibrações sonoras, no crescimento das plantas, nas espirais das galáxias, dos marfins de elefantes, nas ondas no oceano, furacões, etc. . .

Capítulo 2

Breve história do número de ouro

É atribuída ao matemático grego Hipasus Metapontum ou Hípaso de Metaponto (470-400 a.C.) nascido na cidade grega de Metaponto sul da Itália, a descoberta de grandezas incomensuráveis (não-rationais). Teria sido Hípaso, o principal responsável por profundas mudanças no pensamento filosófico da escola pitagórica em meados do século V a.C., de que tudo no universo podia ser reduzido somente a números comensuráveis (rationais) ou suas razões.

A demonstração de que $\sqrt{2}$ não é um número racional é elegante, razão pela qual, a vamos apresentar.

Vamos supor que $\sqrt{2}$ é um número racional e que pode ser escrito como o quociente dos números n e m , inteiros e primos entre si isto é, $\text{mdc}(n, m) = 1$. Então,

$$\frac{n}{m} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{n^2}{m^2} = 2 \Leftrightarrow n^2 = 2m^2. \quad (2.1)$$

Isto é, $n^2 = 2m^2$. Como $2m^2$ é par, então n^2 também é par isto é, existe um número natural p tal que $n = 2p$. Substituindo obtemos

$$n^2 = 2m^2 \Leftrightarrow (2p)^2 = 2m^2 \Leftrightarrow 4p^2 = 2m^2 \Leftrightarrow m^2 = 2p \quad (2.2)$$

isto é, m é um número par, o que vai entrar em contradição com o facto de que são

primos entre si.

Hípaso produziu um elemento não-inteiro que negava os ensinamentos adquiridos nos cultos secretos onde era discípulo do mestre Pitágoras de Samos (570-495 a.C.). Não se sabe ao certo como Hípaso de Metaponto observou os irracionais pela primeira vez, mas, é bastante provável que os primeiros incomensuráveis conhecidos por ele, venham de demonstrações precisas sobre o valor da diagonal de um quadrado de lado unitário ou, do valor da base de um triângulo isósceles retângulo de lado também unitário ou ainda, da razão entre diagonal e lado de um pentágono regular. A seguir, veremos como tais demonstrações ocorreram, supondo que a percepção dos não-rationais veio com a aplicação do teorema de Pitágoras, já bastante conhecido entre os membros da escola pitagórica àquela época, sendo somente válido ao quadrado e triângulo retângulo isósceles, o que não ocorre com o pentágono regular.

O número de Ouro é um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, sendo considerada por muitas como uma “*oferta de Deus*” ao mundo. Não se sabe ao certo quem começou a estudar esse numero, muitos matemáticos tentaram descobrir o que seria esta relação, por exemplo, Pitágoras, Platão, Euclides entre outros. Este número não é mais do que um valor numérico é reconhecido por muitos como o símbolo da harmonia. A escola grega de Pitágoras estudou e observou muitas relações e modelos numéricos que apareciam na natureza, beleza, harmonia musical e outros, mas provavelmente a mais importante é a razão áurea, razão divina ou proporção divina.

Durante o século XIX foi designado por número de ouro, razão de ouro e secção de Ouro e mais recentemente, é representado pela letra grega, Φ ¹. No início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão o nome de *Phi*, Φ , a primeira letra grega do nome de *Phídias* (que viveu entre 490 e 430 a.C.), o grande escultor grego, responsável pela construção do Partheneon. Mark Barr decidiu hom-

¹Alguns autores utilizam Φ para designar o número que designamos por $\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0.6180339887$.

enaguar o escultor pois alguns historiadores da arte afirmavam que Phídias utilizava frequentemente o número de Ouro nas suas esculturas.



Figura 2.1: Imagem de Phidias.

É referido que Phídias viu a imagem dos Deuses e posteriormente revelou-a aos Homens. Mais tarde, quando Pericles subiu ao poder colocou Phídias com encarregado das obras artísticas. Nenhuma das suas esculturas sobreviveu até aos dias de hoje.

Devemos referir que nessa altura utilizavam Φ arredondado a três casas decimais de $\Phi = 1.618$.

Este número também é conhecido por: média e extrema razão (Euclides), razão áurea, secção áurea (do latim *sectio aurea*), proporção divina, divina secção (do latim *sectio divina*), razão de Phidias, secção dourada, rácio médio e extremo.

No século XVI, Luca Pacioli juntamente com Leonardo DaVinci, (1445-1517) publicou o livro “*De Divine Proportione*”, foi ao ponto de remeter o número como sendo uma oferta de Deus, divina proporção. A palavra proporção é usada por nós diariamente e não só no contexto matemático. Expressamos através da palavra proporção uma relação entre partes de coisas relativamente ao seu tamanho ou à sua

quantidade, mas também de uma maneira estética, a forma de como observamos uma relação harmoniosa e agradável aos nossos sentidos, especificamente a visão.

Se recorrermos à matemática, podemos formular algo mais aprofundado e com um sentido mais próprio. Diz que há uma proporção entre duas quantidades quando estas mudam segundo um mesmo valor, por exemplo, 4 está para 12 assim como 3 está para 9, isto é,

$$\frac{4}{12} = \frac{3}{9}. \quad (2.3)$$

Com a razão de ouro, o que podemos observar é uma mistura das duas, temos a parte da harmonia² para os nossos sentidos (a visão) que utilizamos todos os dias e também o aspecto matemático em que se verificou que anteriormente foi enunciado.

§2.1 Euclides

A primeira definição documentada do número de Ouro foi “apresentada” cerca de 300A.C. por Euclides de Alexandria, (360A.C.-295A.C) o fundador da geometria como sistema dedutivo formal. A obra prima de Euclides, *Os Elementos*, foi o primeiro bestseller científico a ser publicado. O matemático Lucio Radice (1916-1982) escreveu:

“Depois da Bíblia e das obras de Lenine, é o (livro) que mais edições teve e que foi traduzido para mais línguas; até há alguns decénios, foi o livro de geometria para o ensino médio.”

É claro que sendo a matemática uma das disciplinas nucleares dos sistemas de educação do mundo, todas as pessoas que foram à escola utilizaram de uma forma escondida ou não “os Elementos”. Com os Elementos, Euclides conseguiu compilar todos os dados matemáticos até então e também apresentar um método para demonstrar resultados e construir teoria matemática, com axiomas e regras de dedução.

²Este número irracional é considerado por muitos o símbolo da harmonia.

Os Elementos são constituídos por 13 volumes e Euclides baseou-se nos seus antecessores gregos. Podemos assim afirmar que estão os Pitagóricos nos volumes I-IV, VII e IX; Arquitas no livro VIII; Eudócio nos livros V, VI e XII; Taeteto nos livros X e XIII. Além de Euclides ter compilado a matemática através dos seus predecessores, também os organizou da seguinte forma, do volume I ao VI geometria elementar, do VII ao X questões numéricas e do XI ao XIII geometria de sólidos. A referência à razão de Ouro aparece no VI volume, terceira definição dos Elementos de Euclides:

“Diz-se que um segmento de recta foi cortado na média e extrema razão quando todo o segmento está para o segmento maior assim como o segmento maior está para o mais pequeno.”

Era conhecido pelos Antigos Gregos (possivelmente utilizado nos edifícios e esculturas). Utilizando uma linguagem mais formal,

Considere um segmento de comprimento $a + b$. Como dividir o segmento de modo a que o comprimento total é comparado com o segmento maior, é igual ao comprimento maior comparado com o segmento mais pequeno.

Esta questão está representada na figura 2.2:

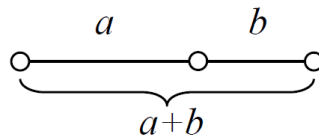


Figura 2.2: Proporção entre comprimentos

Com ajuda da figura 2.2, podemos então apresenta a seguinte versão,

“O segmento de recta AB é maior do que o segmento de recta AC que por sua vez é maior do que o segmento de recta CB . Se a razão entre o comprimento de AB e o de AC for igual à razão entre o de AC e o de CB , então o segmento de recta foi dividido nas condições anteriores, segundo a razão de ouro”.

O matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, o seguinte princípio:

“Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo.”

Matematicamente podemos escrever a relação anterior da seguinte forma:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Obtemos a equação de segundo grau:

$$a^2 - ab - b^2 = 0 \tag{2.4}$$

cujas raízes são

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2} = \frac{b \pm \sqrt{5}b}{2}, \quad a > 0 \Rightarrow a = \frac{b + \sqrt{5}b}{2}. \tag{2.5}$$

Portanto, obtemos

$$\frac{b}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339887 \text{ e } \frac{a}{b} \approx 1.618033989. \tag{2.6}$$

Alguns autores defendem que o número de Ouro é o número

$$\frac{1}{\Phi} = 0.6180339887\dots$$

E assim podemos considerar que começou uma epopeia através de uma definição e de uma propriedade geométrica curiosa enunciada por Euclides. Foi através desta divisão do segmento de recta que muitos estudiosos passaram anos a estudar as suas propriedades e as implicações de Φ em todas as maneiras possíveis.

O que se passa não só a nível matemático mas, talvez mais conhecida onde podemos encontrar a razão de Ouro na natureza e as implicações que tem na nossa vida e no viver do dia-a-dia.

A solução da equação é uma relação entre o comprimento de dois segmentos de recta, logo ela será a mesma independentemente do comprimento do segmento de recta inicial. Este facto tem a seguinte consequência: a razão aurea tem sempre o mesmo valor qualquer que seja o comprimento do segmento inicial.

Logo por aqui podemos observar a mística que rodeia este número. Como podemos observar o valor numérico de Φ é um valor que não é inteiro, e a sua parte decimal não é constante o que também elimina a possibilidade de ser uma dízima finita ou então uma dízima infinita periódica. Sendo a última hipótese verdadeira implicava que Φ seria um número racional, ou seja que seria possível expressá-lo através de uma fracção, uma razão entre dois números inteiros. Esgotando estas duas hipóteses só nos resta a hipótese de ser um número irracional, pois trata-se de uma dízima infinita não periódica.

Esta hipótese levantou uma grande questão:

Como é que uma razão de dois comprimentos nos leva a um valor irracional?

Tal pensamento era completamente inaceitável e mantido em segredo pelos Pitagóricos, que se dedicavam sobretudo ao estudo dos números inteiros naturais ou das suas razões. Não se sabe exactamente em que época a descoberta dos números irracionais ocorreu, mas situa-se a sua descoberta no século V a.C. Podemos associar que a descoberta da razão de Ouro está associada à descoberta da incomensurabilidade. Ou seja, dois comprimentos que não tenham uma medida em comum são chamados de incomensuráveis. Será que terá sido Pitágoras quem descobriu o número de ouro? E mais tarde Euclides representou geometricamente nos Elementos?

Sabe-se que grandes civilizações como a Babilónica e a Egípcia evoluíram bastante a matemática. Como a civilização Grega é posterior às referidas anteriormente, então leva-nos a pensar que talvez o número de Ouro já seja conhecido destas civilizações. Esta razão já era utilizada pelos gregos e pelos egípcios que fizeram o mesmo com as pirâmides:

Uma das razões que nos leva a pensar neste sentido é o relato em vários livros acerca das dimensões da Grande Pirâmide de Quêops, em Gizé. No Egito as pirâmides de Gizé foram construídas tendo em conta a razão áurea uma vez que a altura de uma face e metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro: cada pedra era 1.61803399 menor do que a pedra de baixo, a de baixo era 1.61803399 maior que a de cima, que era 1.61803399 maior que a da terceira fila, e assim por diante. As câmaras no interior das pirâmides também seguiam essa proporção, de forma que os comprimentos das salas são 1.61803399 vezes maior que as larguras.

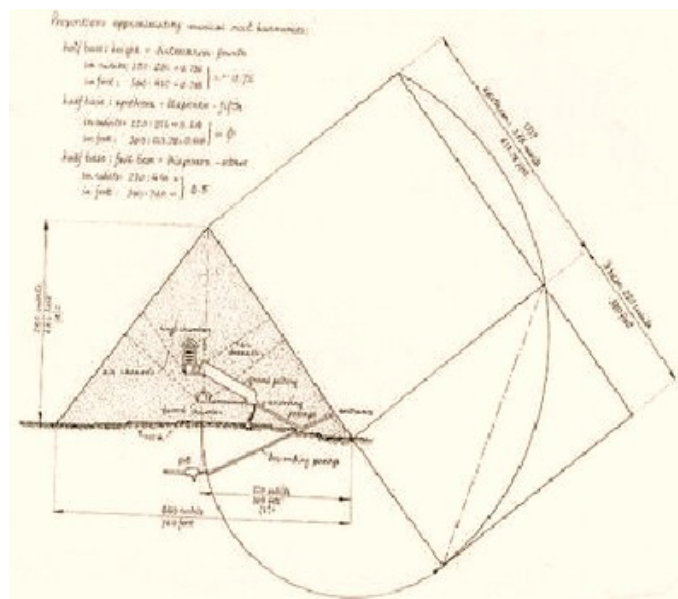


Figura 2.3: Esquema de uma pirâmide.

O Papiro de Rhind refere-se a uma “razão sagrada” que se crê ser o número de ouro. Esta razão ou secção áurea surge em muitas estátuas da antiguidade.

§2.2 Algumas propriedades

O número de Ouro goza de algumas propriedades muito interessantes. De entre elas, salientamos as seguintes:

- a) A soma de duas potências inteiras consecutivas de Φ é igual à seguinte potência

de Φ :

Sabemos que $\Phi^2 = \Phi + 1 \Leftrightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. Então, multiplicando por Φ , obtemos sucessivamente

$$\Phi\Phi^2 = \Phi(\Phi + 1) = \Phi^2 + \Phi, \quad (2.7)$$

portanto

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi. \quad (2.8)$$

Multiplicando (2.8) por Φ , obtemos

$$\Phi\Phi^3 = \Phi(\Phi^2 + \Phi) = \Phi^3 + \Phi^2, \quad (2.9)$$

isto é,

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2. \quad (2.10)$$

Procedendo da mesma forma, obtemos

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n. \quad (2.11)$$

De um ponto de vista mais formal, utilizando o Método de Indução Matemática, temos

- Hipótese: A relação é válida para $n = 0$, isto é, $\Phi^2 = \Phi + 1$.
- Tese: A relação é válida para $n > 0$, isto é, $\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$.

Portanto,

P_1 O resultado é válido para $n = 0$, pois

$$\Phi^2 = \Phi + 1. \quad (2.12)$$

P₂ Suponhamos agora o resultado válido para $k = n$, isto é,

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}. \quad (2.13)$$

Multiplicando a relação anterior por Φ obtemos

$$\begin{aligned} \Phi\Phi^n &= \Phi(\Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}) \\ \Phi^{n+1} &= \Phi^n + \Phi^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

b) A propriedade anterior também é válida para as potências negativas de Φ ;

Dividindo $\Phi^2 = \Phi + 1$ por Φ , obtemos

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \Phi^{-1}. \quad (2.15)$$

Multiplicando $\Phi^{-1} + 1 = \Phi$ por Φ^{-1} , obtemos

$$\Phi^{-2} + \Phi^{-1} = \Phi^0; \quad (2.16)$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi^{-3} + \Phi^{-2} &= \Phi^{-1}; \\ \Phi^{-4} + \Phi^{-3} &= \Phi^{-2}; \\ \Phi^{-5} + \Phi^{-4} &= \Phi^{-2}; \\ &\vdots \\ \Phi^n + \Phi^{n+1} &= \Phi^{n+2}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

para $n \leq 0$.

c) A soma de todas as potências com expoentes inteiros negativos e base igual a Φ , isto é,

$$\sum_{n \geq 1} \Phi^{-n} = \Phi. \quad (2.18)$$

Tendo em conta a propriedade b, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \Phi^{-n} &= \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \Phi^{-5} + \Phi^{-6} + \dots \\
&= (\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) + (\Phi^{-3} + \Phi^{-4}) + (\Phi^{-5} + \Phi^{-6}) + \dots = \\
&= \Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \Phi^{-6} + \dots + \Phi^{-2n} + \dots \\
&= 1 + \Phi^{-2} (\Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \dots) \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Seja $x = \Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \dots$.

Então,

$$\begin{aligned}
x = 1 + \Phi^{-2}x &\Rightarrow x - 1 = \frac{x}{\Phi^2} \Rightarrow \frac{x}{x-1} = \Phi^2 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = \Phi^2 + 1 \\
&\Rightarrow \frac{x}{x-1} - 1 = \Phi^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{x - x + 1}{x-1} = \Phi \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \Phi \\
&\Rightarrow x = \frac{1 + \Phi}{\Phi} = \frac{\Phi^2}{\Phi} \Rightarrow x = \Phi. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Como

$$x = \Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \dots = \Phi,$$

temos

$$\begin{aligned}
&= (\Phi^{-1} + \Phi^{-2}) + (\Phi^{-3} + \Phi^{-4}) + (\Phi^{-5} + \Phi^{-6}) + \dots = \\
&= \Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \Phi^{-6} + \dots + \Phi^{-2n} + \dots \\
&= 1 + \Phi^{-2} (\Phi^0 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4} + \dots) \\
&= 1 + \Phi^{-2}\Phi \\
&= 1 + \Phi^{-1} \\
&= \Phi. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\sum_{n \geq 1} \Phi^{-n} = \Phi. \quad (2.22)$$

É ainda possível determinar o número de Ouro por outros modos. Vamos calcular o valor da expressão,

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}. \quad (2.23)$$

Seja

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}. \quad (2.24)$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, obtemos

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}, \quad (2.25)$$

isto é, obtemos

$$x^2 = 1 + x, \quad (2.26)$$

cuja solução é Φ , uma vez que $x > 1$.

Outro método de determinar Φ , consiste na utilização de frações contínuas. Seja

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}. \quad (2.27)$$

Observando o membro esquerdo da equação anterior, vemos que se pode escrever na forma

$$x = 1 + \frac{1}{x}, \quad (2.28)$$

e procedendo como anteriormente, segue-se que $x = \Phi$.

§2.3 A contribuição de Fibonacci

Nesta secção vamos apresentar os trabalhos de Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci. A razão pela qual apresentamos esta secção é que os trabalhos de Leonardo de Pisa podem ser associados ao número de Ouro.

§2.3.1 Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci (que significa filho de Bonaccio), foi um dos matemáticos mais importantes da idade média. Nasceu na Toscânia por volta de 1170 e ficou conhecido pela descoberta da sucessão que hoje leva o seu nome, a sucessão de Fibonacci, e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa.



Figura 2.4: Leonardo de Pisa (1170-1250).

Pouco se sabe sobre a vida de Fibonacci para além do que o próprio escreveu nos seus livros. Julga-se que terá nascido por volta de 1170 em Pisa, cidade do seu pai, e que terá falecido entre 1240 e 1250. Por essa altura, Pisa mantinha uma importante atividade comercial nos portos do Mediterrâneo, tornando-se numa das primeiras

idades a manter um comércio próspero com o mundo árabe. Guglielmo dei Bonacci, pai de Leonardo, era um mercador abastado que, durante a infância de seu filho, se tornou cônsul dos comerciantes da República de Pisa (“Publicus scriba pro pisanis mercatoribus”) em Bugia, um importante porto na região de Cabília, Argélia, no norte de África. Guglielmo atuava também como uma espécie de fiscal alfandegário, o que fez com que Leonardo desde cedo fosse iniciado nos negócios e nos cálculos, o que despertou em si um forte interesse pela matemática. Deste modo, grande parte da sua educação foi obtida no Oriente com mestres árabes. Os seus estudos levá-lo-iam para o Egito, Síria, Grécia, Sicília e Provença. Seria nas várias regiões do mundo islâmico que Leonardo viria a estudar sistemas numéricos e métodos de cálculo diferentes, que eram difundidos por escolares muçulmanos no Oriente, mas desconhecidos na Europa. Foi também nesta altura, em que Itália usava ainda a numeração romana, que Fibonacci teve o primeiro contacto com o sistema decimal hindu-árabe, até aí conhecido somente por alguns intelectuais europeus através de traduções de textos do século IX do matemático árabe Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.

Na idade média havia dois tipos de matemáticos:

- 1) os de escolas religiosas ou de universidades, com um âmbito mais teórico e exaustivo;
- 2) os que exerciam actividades de comércio e negócios, mais prática e objectiva.

Fibonacci pertencia a este último grupo. Ele exercia uma actividade comercial que obrigava á realização de muitos cálculos, como por exemplo conversão de moedas, de pesos e medidas bem como o cálculo de lucros e de juros, que, utilizando a numeração romana, se tornavam muito tediosos e complicados. Foi então que Fibonacci começou a utilizar o sistema de numeração hindu-árabe que simplificava bastante e tornava mais eficientes as operações e a representação das mesmas. Embora Fibonacci tenha sido um grande difusor das obras dos mestres árabes mais importantes de então, o seu trabalho não ficou só por aí. Em 1202, aos 32 anos,

publicou o “Liber Abaci” (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), que introduziu a numeração hindu-arábica na Europa e que foi a primeira obra importante sobre matemática desde Eratóstenes (276a.C.-194a.C), perto de mil anos antes. No “Liber Abaci”, Fibonacci apresenta o chamado “modus Indorum” (método dos hindus), hoje conhecido como algarismos arábicos. O livro defendia a numeração com os dígitos 0 – 9 e a notação posicional, esclarecendo o sistema de posição árabe dos números, incluindo o número zero. O livro mostrou a importância prática do novo sistema de numeração, aplicando-o á contabilidade comercial, conversão de pesos e medidas, o cálculo de lucros, de juros, taxas de câmbio, etc... Abordava também diversos temas de álgebra e geometria e propunha vários problemas, que tentava solucionar usando diferentes técnicas. Conseqüentemente, o “Livro do Ábaco” foi bem recebido em toda a Europa intelectual e teve um impacto profundo no pensamento europeu. Esse elegante sistema de sinais numéricos, em breve, substituiria o não mais oportuno sistema de algarismos romanos. Em 1220, Fibonacci escreveu o livro “Practica Geometriae”, onde descrevia o que tinha descoberto nas áreas de geometria e trigonometria. Por esta altura, a aceitação do “Liber Abaci” era tal que chamou a atenção de Frederico II, Sacro-Imperador Romano-Germânico (1194-1250). Este, chamando Fibonacci á sua presença, em Pisa, pediu-lhe que resolvesse uma série de problemas do matemático da corte, alguns dos quais eram debatidos no “Livro do Ábaco”. O facto de Fibonacci o ter feito com sucesso fez com que o imperador lhe atribuísse um rendimento vitalício, o que lhe permitiria dedicar-se completamente aos estudos. Durante vários anos, Fibonacci trocou correspondência com Frederico II e com os seus escolares. Em 1225, escreveu o “Liber quadratorum” (“Livro de Números Quadrados”), o qual dedicou ao imperador. Este livro era inteiramente dedicado a equações diofantinas de segundo grau e foi considerado a obra-prima de Fibonacci, pois, embora o “Liber Abaci” tenha tido uma divulgação e uma influência maiores, o “Liber Quadratorum” fez de Fibonacci o maior contribuidor para a teoria de números entre Diofanto e o matemático francês do século XVII Pierre de Fermat. Em 1228, surge a segunda edição de “Liber Abaci”, a que hoje é conhecida. Este

livro contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e a Álgebra da época, e realizou um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes, pois, foi através deste que os europeus vieram a conhecer os algarismos hindus, também denominados arábicos. A teoria contida em “Liber Abaci” é ilustrada com muitos problemas que representam uma grande parte do livro. Depois de 1228, não se encontram mais referências a Fibonacci, excepto por um decreto de 1240, da República de Pisa, que atribuía uma renda ao “sério e sábio mestre Leonardo Bigollo”, em reconhecimento dos serviços prestados à cidade, particularmente em matéria de contabilidade e na instrução dos cidadãos. Fibonacci terá morrido alguns anos mais tarde, provavelmente em Pisa. No século XIX, uma estátua foi erguida em sua homenagem na mesma cidade. Hoje está localizada na galeria ocidental do Camposanto, cemitério histórico da Piazza dei Miracoli. Os seus estudos foram de tal modo importantes que nos dias de hoje existe uma publicação periódica, “Fibonacci Quarterly”, inteiramente dedicada à sucessão aritmética elaborada por ele. Existe ainda um asteróide que também tem o seu nome: o 6765 Fibonacci.

Como se referiu anteriormente, a teoria contida no “Liber Abaci” é ilustrada através de muitos problemas. A contribuição de Fibonacci para o número de Ouro está relacionada com a solução do problema apresentado no livro, páginas 123 e 124, conhecido como o “Problema dos pares de coelhos” (paria coniculorum). Este apresentado de uma forma simplificada, consiste no seguinte: Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano?

A solução, de geração em geração, foi uma sucessão de números mais tarde conhecida como sucessão de Fibonacci. A sucessão numérica era conhecida por matemáticos indianos já no século VI, mas foi o “*Liber Abaci*” que a introduziu no Ocidente. A solução deste problema é uma sucessão numérica e um matemático francês, Edouard Lucas (1842-1891), ao editar um trabalho seu, ligou o nome de Fibonacci a essa sucessão.

Este problema sugere uma situação fictícia, onde os coelhos são colocados numa

área em que nenhum coelho, externo ou interno, pode entrar ou sair do cercado; os coelhos não morrem de velhice, fome ou doença. Para que um par de filhotes possa procriar, é necessário que se passe um mês após o seu nascimento e cada par de coelhos dá a luz a um único par de filhotes a cada mês. Estes serão aptos a procriar no próximo mês. Sendo assim, no primeiro mês, o mês inicial, teríamos um par de coelhos (ainda filhotes). No mês seguinte ainda apenas um par de coelhos (agora adultos), no terceiro mês teremos o par inicial mais o seu par de filhotes. Ao quarto mês o par inicial dá a luz ao seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes).

§2.3.2 O problema de Fibonacci

Em 1202, *Fibonacci* formulou o seguinte problema:

“Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo o mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês”

As condições do problema são as seguintes:

- i) Os coelhos só se podem reproduzir ao fim de um mês;
- ii) Os coelhos necessitam de um mês para se tornarem Adultos;
- iii) Ao fim de um mês nasce um casal de coelhinhos.
- iv) Tal como os pais, eles não se podem reproduzir no primeiro mês.

Devem ser ainda consideradas as seguintes hipóteses:

- i) Os coelhos não morrem;
-

- ii) Há comida e espaço para todos os coelhos;
- iii) Os pais sempre “dão origem” a um casal;
- iv) Os coelhos começam a reproduzir-se após 2 meses.

Tendo em conta as condições do problema, temos que:

- No mês 0, temos um casal de coelhos;
- No primeiro mês temos um casal de coelhos (chegar a adultos);
- No segundo mês, o primeiro par reproduziu-se e temos 2 pares;
- No terceiro mês, teríamos 3 pares;
- Ao fim dos 12 meses teríamos a seguinte sucessão de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... e 144 pares de coelhos.

- Dois anos depois, espera-se que serão 46.368 casais de coelhos ...

A resposta ao problema proposto por Fibonacci, é então, dada pela sucessão:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

na qual, cada termo, começando no terceiro é igual à soma dos dois anteriores.

Esta sucessão, designada por Sucessão de Fibonacci, pelo matemático francês Edouard Lucas, não é unicamente a solução do problema dos coelhos. Mais tarde, veremos que pode ser encontrada em muitos outros fenómenos que aparentemente, não têm nenhuma relação uns com os outros, como por exemplo as o Nautillus e a flor do Girassol.

Formalizando o problema temos:

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.29)$$

Em 1843 Binet³ (1786-1856), apresentou uma fórmula que nos permite saber o $n^{\text{ésimo}}$ número da Sucessão de Fibonacci, calculando unicamente potências do número de Ouro, Φ . Segundo esta fórmula, o $n^{\text{ésimo}}$ número da sucessão de Fibonacci é dado por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (2.30)$$

O número de Ouro é a solução (positiva) da equação de segundo grau

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad (2.31)$$

isto é,

$$\Phi^2 = \Phi + 1. \quad (2.32)$$

Multiplicando (2.32) por Φ^n , obtemos a igualdade

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.33)$$

Os elementos da sucessão, $u_n = \Phi^n$, para $n \in \mathbb{N}$ satisfazem a relação de Fibonacci,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \quad (2.34)$$

Consideremos agora a outra solução da equação (2.31), $r = 1 - \Phi$. É fácil verificar que a sucessão $r_n = r^n$ também satisfaz a relação (2.34).

A sucessão $b_n = u^n - r^n$ também satisfaz a relação (2.34).

Mas os dois primeiros elementos da sucessão são iguais pois Φ e $1 - \Phi$ são soluções da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

Portanto, a sucessão

$$\frac{u^n - r^n}{u - r} \quad (2.35)$$

³Jacques Philippe Marie Binet, foi um matemático, físico e astrónomo Francês. Fez contribuições importantes na Teoria de Números e na Álgebra Matricial.

é uma sucessão de Fibonacci.

A última expressão corresponde à fórmula de Binet. Esta fórmula já era conhecida por Euler, Daniel Bernoulli, e de Moivre um século antes.

Proposição 2.3.1. *A razão entre dois quaisquer termos consecutivos da sucessão de Fibonacci tende para o número de Ouro quando n tende para infinito, isto é,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi. \quad (2.36)$$

DEMONSTRAÇÃO: Utilizando a fórmula de Binet,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pela fórmula de Binet, sabemos que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ isto é,

$$\sqrt{5}F_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

ou equivalentemente,

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n = \sqrt{5}F_n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Portanto (2.37) pode ser apresentado na forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\sqrt{5}F_n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}F_n}. \quad (2.38)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e colocando o termo $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, obtemos as igualdades:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right]}{\sqrt{5}F_n} \quad (2.39)$$

isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{F_n}. \quad (2.40)$$

Vamos agora estudar o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_n} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Atendendo ao facto de que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq 1$, podemos escrever

$$\left| \frac{1}{F_n} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right| \leq \left| \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right| \quad (2.41)$$

e como $\left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| < 1$, segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_n} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n = 0.$$

obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi. \quad (2.42)$$

A figura seguinte mostra os primeiros elementos da sucessão $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, para $0 \leq n \leq 8$,

Nota 2.3.1. *É possível considerar outras sucessões “baseadas” na sucessão de Fibonacci que gozam de propriedades muito interessantes. Como exemplo, podemos*

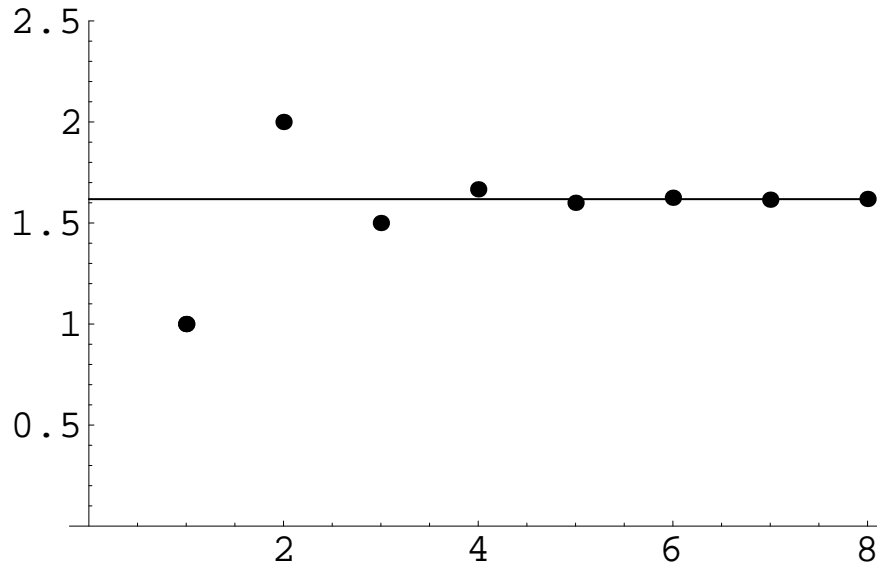


Figura 2.5: Elementos da sucessão $u_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ e o número Φ .

referir a sucessão

$$\begin{cases} G_0 &= 1 \\ G_1 &= 3 \\ G_{n+2} &= G_{n+1} + G_n \end{cases} \quad (2.43)$$

que goza da propriedade de que os próprios números inteiros têm a propriedade de ser exactamente a metade da expressão decimal da proporção áurea. Para mais detalhes, ver *Geometria sagrada*.

§2.3.3 Uma abordagem algébrica

Consideremos a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y) = (y, x + y), \quad (2.44)$$

e defina-se a sucessão v_n da seguinte forma

$$v_{n+1} = T(v_n), \quad v_n = (x_n, y_n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.45)$$

Fixada a base canónica de \mathbb{R}^2 , isto é, a base $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, prova-se que esta transformação linear é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O seu polinómio característico, $p(\lambda)$ é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= |A - \lambda I_2| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \lambda - 1. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Os valores próprios de A , e de T , são as raízes de (2.46) e são

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Os valores próprios associados a cada valor próprio são obtidos resolvendo o sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \end{array} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_1, \lambda_2}.$$

Uma base do espaço dos valores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é

$$\mathcal{B}_{\lambda_1} = \left\{ \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right\}$$

e uma base do espaço dos vectores próprios associado ao valor próprio $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ é

$$\mathcal{B}_{\lambda_2} = \left\{ \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right\}.$$

Tendo em conta que se u é um valor próprio associado ao valor próprio λ então

$$Tu = \lambda u \Rightarrow T^n u = \lambda^n u, \quad (2.47)$$

donde obtens as relações:

$$T^n u = \lambda^n u = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \times (\sqrt{5} - 1, 2) \quad (2.48)$$

e

$$T^n v = \lambda^n v = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \times (-\sqrt{5} - 1, 2). \quad (2.49)$$

Escrevemos o vector $v = (1, 1)$ como combinação linear dos dois vectores $(\sqrt{5} - 1, 2)$ e $(-\sqrt{5} - 1, 2)$, e depois aplicamos T , n vezes.

Isto é,

$$v = (1, 1) = \alpha (\sqrt{5} - 1, 2) - \beta (-\sqrt{5} - 1, 2);$$

para α e β a determinar. Resolvendo o sistema

Atendendo ao facto de que T é linear, segue-se que

$$v_n = T^n(v_0) = \alpha T^n [\sqrt{5} - 1, 2] - \beta T^n [-\sqrt{5} - 1, 2].$$

Substituindo $T^n u$ e $T^n v$ obtemos:

$$\begin{aligned} v_n &= T^n v_0 \\ &= \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n (\sqrt{5} - 1, 2) - \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n (-\sqrt{5} - 1, 2) \end{aligned}$$

Donde podemos concluir que

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Como,

$$\begin{aligned}
 v_0 &= (1, 1) \rightarrow 1^\circ \text{ termo} = F_1 \\
 v_1 &= (1, 2) \rightarrow 2^\circ \text{ termo} = F_2 \\
 v_2 &= (2, 3) \rightarrow 3^\circ \text{ termo} = F_3 \\
 &\vdots \\
 v_{n-1} &= (x_{n-1}, y_{n-1}) \rightarrow n\text{-ésimo termo} = F_n.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (2.51)$$

■

A fórmula de Binet pode ser demonstrada utilizando o seguinte

Lema 2.3.1. *Se $x^2 = x + 1$ então, para $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ temos:*

$$x^n = xF_n + F_{n-1}. \quad (2.52)$$

DEMONSTRAÇÃO: O resultado é trivial para $n = 2$. Suponhamos o resultado válido para algum $n > 2$, isto é,

$$x^n = xF_n + F_{n-1}.$$

Multiplicando a igualdade anterior por x , obtemos

$$\begin{aligned}
 x^{n+1} &= x^2 = (xF_n + F_{n-1})x \\
 &= x^2F_n + xF_{n-1} \\
 &= (x + 1)F_n + xF_{n-1} \\
 &= (F_n + F_{n-1})x + F_n \\
 &= xF_{n+1} + F_n.
 \end{aligned}$$

Mas, os únicos números que satisfazem a equação $x^2 = x + 1$ são $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Portanto, para cada $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ temos

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1} \text{ e } \beta^n = \beta F_n + F_{n-1}. \quad (2.53)$$

Subtraindo $\alpha^n - \beta^n$ obtemos o resultado desejado.

Observação 2.3.1. *Prova-se que esta propriedade é satisfeita por todas as sucessões da forma:*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (2.54)$$

Antes de apresentarmos, a título de curiosidade, algumas propriedades dos números de Fibonacci, vamos apresentar os designados “números de Lucas” uma vez que estes “aparecem” em algumas propriedades dos números de Fibonacci.

§2.3.4 Os números de Lucas

Os números de Lucas, atribuídos ao matemático Francês Edouard Lucas (1842-1891), que, como já referimos atribuiu o nome de sucessão de Fibonacci à sucessão

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \quad (2.55)$$

“encontrou” uma sucessão semelhante à de Fibonacci. A sucessão é:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots \quad (2.56)$$

A regra de adição que existe nos números de Fibonacci é mantida mas, esta sucessão tem início com os números 2 e 1 e a fórmula de recorrência é

$$\begin{cases} L_0 = 2 \\ L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n > 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

O $n^{\text{ésimo}}$ número de Lucas é representado por L_n . Tal como para a sucessão de Fibonacci, é possível deduzir a fórmula de Binet para L_n .

Então,

$$\begin{aligned} L_n &= F_n - F_{n-1} \\ &= \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \left[\alpha^n \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right) - \beta^n \left(\frac{1}{\beta} + \beta \right) \right]. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, obtemos $\frac{1}{\alpha} + \alpha = \sqrt{5} = \alpha - \beta$ e do mesmo modo $\frac{1}{\beta} + \beta = -\alpha + \beta$ e portanto, a fórmula para os números de Lucas é

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \quad (2.58)$$

§2.3.5 Propriedades dos números de Fibonacci

Nesta subsecção vamos apresentar, sem demonstração algumas propriedades dos números de Fibonacci.

Proposição 2.3.2. *A soma dos n primeiros números da sucessão de Fibonacci é,*

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1} - 1. \quad (2.59)$$

Proposição 2.3.3. *A soma dos termos da sequência de índices ímpares é dada por*

$$\sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n} - 1. \quad (2.60)$$

Proposição 2.3.4. *A soma dos termos da sequência de índices pares é dada por*

$$\sum_{k=0}^n F_{2k} = F_{2n+1}. \quad (2.61)$$

Proposição 2.3.5. *A soma dos quadrados dos termos da sequência, pode ser dada por*

$$\sum_{k=0}^n F_{2k}^2 = F_n F_{n+1}. \quad (2.62)$$

Proposição 2.3.6. *Para $m, n > 0$, m e $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$F_{m+n+1} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}. \quad (2.63)$$

Proposição 2.3.7. *A diferença entre os quadrados dos termos da sequência de Fibonacci cujos índices diferem em dois é também um número de Fibonacci.*

Proposição 2.3.8.

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^n, \quad n > 0 \quad (2.64)$$

Proposição 2.3.9. *Para $n, k \in \mathbb{N}$ temos*

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k F_{n+1-k} = \frac{1}{5} [nF_{n+1} + 2(n+1)F_n]. \quad (2.65)$$

Teorema 2.3.1. *Os números consecutivos de Fibonacci são primos entre si.*

Vamos de seguida apresentar, sem demonstração, mais algumas propriedades da sucessão de Fibonacci:

1. Identidade de Catalan:

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r} F_r^2$$

2. Identidade de Cassini:

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

3. Identidade de d'Ocagne:

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}$$

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n (F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n L_n$$

onde L_n é o n -ésimo número de Lucas.

§2.4 Luca Pacioli

Luca Bartolomeu de Pacioli O.F.M. (Toscânia, 1445 - Sansepolcro, 1514) foi um monge Franciscano e célebre matemático italiano. Foi sem dúvida nenhuma um homem do Renascimento mas um dos menos conhecidos. É considerado o pai da contabilidade moderna.

Nasceu no seio de uma família pobre e o seu futuro não era promissor. Pacioli foi aprendiz de um comerciante rico mas, ele sempre teve como paixão os números e decidiu abandonar o seu mestre para se tornar Professor de Matemática. Ele conheceu Piero de della Francesca, que era da mesma terra natal, e tornaram-se amigos. Della Francesca foi um dos primeiros a explorar a perspectiva e a escrever sobre ela. Francesca e Pacioli viajaram até Veneza em 1464, onde Francesca lhe deu acesso à biblioteca do Conde Federico de Urbino. A biblioteca com mais de 4000 livros permitiu a Pacioli aprofundar os seus conhecimentos.

Em 1470, na cidade de Veneza, como tutor dos filhos de um comerciante, escreveu a sua primeira obra de matemática na área de álgebra.

Deixou Veneza e foi para Roma em 1471 onde passou alguns meses na casa de Leone Battista Alberti que era secretário na Chancelaria Papal. Através de Alberti, Pacioli adquiriu ligações à religiosos inflentes e estudou Teologia.

Em 1475, tornou-se o primeiro professor de matemática da Universidade de Perugia.

Mais tarde tornou-se Monge Franciscano após a morte de Alberti. Em 1494, Pacioli escreveu a sua famosa obra “Summa de Arithmetica, Geometria proportioni et propornalità” (Coleção de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade), em resumo tratou-se de uma publicação onde resumia toda a matemática conhecida até então.

Pacioli tornou-se famoso devido a um capítulo deste livro que tratava sobre contabilidade: “Particulario de computies et scripturis”. Nesta secção do livro, Pacioli foi o primeiro a descrever a contabilidade de dupla entrada, conhecido como método Veneziano (“el modo de Vinegia”) ou ainda “método das partidas dobradas”.

O livro “Summa” tornou Pacioli famoso, sendo convidado em 1497 para ensinar matemática na corte de Ludovico em Milão. Um dos seus alunos e amigo foi Leonardo da Vinci.

Ludovico Sforza, na altura regente do duque de Milão, decidiu fazer a sua corte uma das mais ilustres da Europa, para tal convidou Leonardo Da Vinci para trabalhar com pintor e engenheiro chefe. Quando Ludovico tornou-se Duque, Pacioli foi convidado a ensinar matemática. Aí, tornou-se amigo de Leonardo. Em 1509, escreveu a obra “Divina Proportione” com ilustrações de Leonardo. Obra esta que é constituída por três livros:

- i) o primeiro está relacionado com as proporções, polígonos regulares e semi-regulares;
- ii) o segundo expõe a proporção na arte;
- iii) o terceiro é uma tradução para italiano de um livro de Piero della Francesca.

Em 1509, escreveu a sua segunda obra mais importante, “De Divina Proportioni”, ilustrada por da Vinci, que tratava sobre proporções artísticas.

Regressou à sua terra natal onde foi nomeado director do Mosteiro Franciscano. Supõe-se que morreu no mosteiro de Sansepulcro, em 1514 ou 1517.

§2.5 A contribuição de Leonardo DaVinci

§2.5.1 Leonardo DaVinci

Uma contribuição que não pode ser deixada de referir foi a de Leonardo Da Vinci (1452-1519). A qualidade das suas pinturas revela os seus conhecimentos

matemáticos, bem como a utilização da razão áurea como garante de uma perfeição, beleza e harmonia únicas.

Podemos afirmar, sem exagerar que Leonardo DaVinci, representa o Homem da Renascença pois fazia de tudo um pouco sem se fixar em nada.

Leonardo di Ser Piero da Vinci, ou simplesmente Leonardo da Vinci (1452-1519), foi um polímata italiano, uma das figuras mais importantes do Alto Renascimento, que se destacou como cientista, matemático, engenheiro, inventor, anatomista, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico. O seu espírito de crítico científico e as invenções mecânicas estavam séculos adiantadas para a sua época. É ainda conhecido como o precursor da aviação e da balística. Leonardo foi frequentemente descrito como o arquétipo do homem do Renascimento, alguém cuja curiosidade insaciável era igualada apenas pela sua capacidade de invenção. É considerado um dos maiores pintores de todos os tempos e como possivelmente a pessoa dotada de talentos mais diversos a ter vivido. Segundo a historiadora de arte Helen Gardner, a profundidade e o alcance de seus interesses não tiveram precedentes e sua mente e personalidade parecem sobre-humanos para nós, e o homem em si [nos parece] misterioso e distante.

Nascido como filho ilegítimo de um notário, Piero da Vinci, e de uma camponesa, Caterina, em Vinci, na região da Florença, foi educado no ateliê do renomado pintor florentino, Verrocchio. Aos 20 anos foi aceite como membro dos artistas pintores de Florença. Manteve-se com o seu mestre por mais 5 anos. Após este período, trabalhou por conta própria por mais 10 anos em Florença. Passou a maior parte do início de sua vida profissional a serviço de Ludovico Sforza (Ludovico il Moro), em Milão. Durante os 17 anos que trabalhou para Ludovico fez de tudo um pouco. Foi pintor, escultor, engenheiro hidráulico e conselheiro para a construção de fortificações, assim como conselheiro militar. Como pintor, completou seis trabalhos incluindo A virgem do Rochedo e a Última Ceia.

Posteriormente trabalhou em Veneza, Florença, Roma e Bolonha. Quando ele e o seu grande amigo Luca Pacioli chegaram a Florença foram recebidos em grande

ovação. Aí passou vários anos como arquitecto militar e engenheiro chefe que permitiu-lhe percorrer o país como supervisor. Ele também efectuou várias dissecações com o intuito de aumentar o seu conhecimento do funcionamento do corpo humano. Aos 65 anos mudou-se para França onde passou os últimos 3 anos da sua vida numa pequena casa em Loire presenteada pelo rei Francisco I. Também lhe foi atribuído o título de Primeiro arquitecto, pintor e engenheiro do Rei. No seu último ano de vida, passou-o a publicar os seus estudos científicos, incluindo um tratado de pintura e outro de anatomia.

Leonardo era, como até hoje, conhecido principalmente como pintor. Duas de suas obras, a “Mona Lisa” e “A Última Ceia”, estão entre as pinturas mais famosas, mais reproduzidas e mais parodiadas de todos os tempos, e sua fama se compara apenas à “Criação de Adão”, de Michelângelo. O desenho do “Homem Vitruviano”, feito por Leonardo, também é tido como um ícone cultural, e foi reproduzido por todas as partes, desde o euro até camisolas.

Cerca de 17 das suas pinturas sobreviveram até aos dias de hoje e algumas delas são trabalhos incompletos. O número pequeno é devido às suas experiências constantes - e frequentemente desastrosas - com novas técnicas, além de sua procrastinação crônica. Ainda assim, estas poucas obras, juntamente com seus cadernos de anotações - que contêm desenhos, diagramas científicos, e seus pensamentos sobre a natureza da pintura - formam uma contribuição às futuras gerações de artistas que só pode ser rivalizada à de seu contemporâneo, Michelângelo.

Considerado por muitos um génio de pensamento original que utilizou frequentemente os seus conhecimentos de Matemática, entre os quais devemos salientar o Número de Ouro. Utilizou-o nas suas obras de arte. Um exemplo é a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas, que foi baseada nos pentágonos, estrelado e regular, inscritos na circunferência. O desenho conhecido por “Homem de Vitruvius”, ilustra a velha tese de Pitagórica segundo a qual “o homem é a medida de todas as coisas”.

Esta relação foi definida por Marcus Vitruvius Pollio, um escritor, arquitecto e

engenheiro romano. Por volta de 27 A.C. escreveu um livro intitulado *De Architectura*, conhecido hoje em dia por “Os dez livros da Architectura”. Daí o nome o homem Vitruviano. O desenho dos templos depende da simetria. O arquitecto observa e decide a proporção que quer aplicar. No corpo humano esse arquitecto é a Natureza. Tem que existir uma proporção entre os vários membros do corpo humano.

O texto que acompanha o desenho transmite-nos os princípios da geometria na configuração do corpo humano. Leonardo demonstrou que a proporção ideal da figura humana corresponde ao círculo e ao quadrado. A representação do Homem Vitruviano de Leonardo é uma representação a que ele próprio chamou *Cosmografia do Microcosmos*. Ele escreveu que “O Homem foi chamado pelos anciões um mundo menor, e na verdade o nome é bem aplicado; pois o Homem é composto por terra, ar água e fogo. . . o corpo da Terra é semelhante.” Ele comparou o esqueleto humano às rochas (“o suporte da Terra”) e a expansão dos pulmões ao respirar as marés nos oceanos. Para além deste quadro, devemos ainda salientar outro, também mundialmente conhecido: a *Mona Lisa*. DaVinci pintou este quadro aproximadamente em 1505. Tal como o Homem de Vitruvio, também contém o número de ouro, ou melhor, o retângulo de Ouro em múltiplos locais, como se pode verificar na figura 3.45.

Uma outra obra de Leonardo no qual ele utiliza o número de Ouro é na pintura intitulada, “A Anunciação”, pintada entre 1472 e 1475.

Decompondo a figura num quadrado e num rectângulo, o rectângulo obtido tem as proporções de ouro. Curiosamente esta divisão permite que o rectângulo de Ouro enquadre as partes mais importantes da figura: o anjo e a jovem, se o quadrado for construído no lado direito ou no lado esquerdo, respectivamente.

Leonardo é reverenciado por sua engenhosidade tecnológica; concebeu ideias muito à frente de seu tempo, como um protótipo de helicóptero, um tanque de guerra, o uso da energia solar, uma calculadora, o casco duplo nas embarcações, e uma teoria rudimentar das placas tectônicas. Um número relativamente pequeno de seus projetos chegou a ser construído durante sua vida (muitos nem mesmo eram

factíveis), mas algumas de suas invenções menores, como uma bobina automática, e um aparelho que testa a resistência à tração de um fio, entraram sem crédito algum para o mundo da indústria. Actualmente, há um programa de televisão dedicado unicamente à construção dos seus projectos.

Como cientista, foi responsável por grande avanço do conhecimento nos campos da anatomia, da engenharia civil, da óptica e da hidrodinâmica.

Leonardo da Vinci é considerado por vários o maior génio da história, devido a sua multiplicidade de talentos para ciências e artes, sua engenhosidade e criatividade, além de suas obras polêmicas. Num estudo realizado em 1926 seu QI foi estimado em cerca de 180.

§2.5.2 A obra de Leonardo

O Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci. As ideias de proporção e simetria aplicadas à concepção da beleza humana. Proporções áureas na mão.

- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão;
- A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça;
- A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax;
- A medida do ombro á ponta do dedo e a medida do cotovelo á ponta do dedo;
- O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta;
- A medida da dobra central até a ponta dividida e da segunda dobra até a ponta;
- A medida do quadril ao chão e a medida do joelho ao chão.

Tendo em conta a possibilidade de alguns erros nas medições, efectuadas com régua ou uma fita métrica, os valores serão sempre próximos ao número de ouro.

Capítulo 3

Aplicações do número de Ouro

Neste capítulo vamos apresentar algumas áreas e exemplos de aplicação do número de Ouro. Estas áreas são vão desde a Geometria, arquitectura e Biologia.

§3.1 Na Geometria

Anteriormente já introduzimos o Número de Ouro, Φ . Vamos explorar um pouco mais a geometria por detrás do número de Ouro. Onde poderemos aplicar a a razão dourada? Será que já foi utilizada? Como podemos dividir um segmento de recta por forma a obtermos a razão divina?

§3.1.1 Divisão de um segmento de recta na divina proporção

Tomemos o segmento de recta AB tracemos um segmento de recta perpendicular a AB em B , de comprimento igual a metade do comprimento de AB , $(\overline{BD} = \overline{\frac{AB}{2}})$.

Unimos os pontos A e D e traçamos um arco de circunferência no segmento de recta AD com centro em D e raio \overline{DB} . Traçamos novo arco de circunferência no segmento AB com centro em A e raio \overline{AE} . Desta forma podemos dizer que o

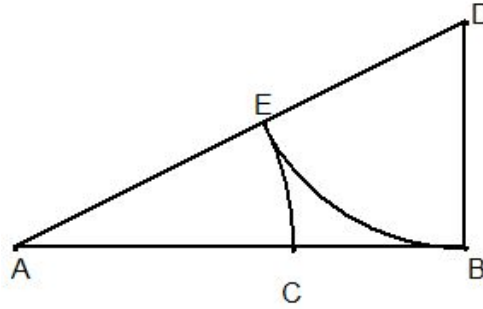


Figura 3.1: Divisão de um segmento segundo a razão de Ouro.

segmento AB está dividido na divina proporção, assim sendo podemos estabelecer as seguintes relações,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \Phi. \quad (3.1)$$

Como podemos explicar esta construção geométrica? Podemos demonstrar a construção geométrica. Sejam $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = x$. Então $\overline{CB} = a - x$. C é o ponto do segmento de recta que estabelece a relação,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Substituindo na relação anterior, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} &\Leftrightarrow x^2 = a(a-x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = a^2 - ax \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + ax = a^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se recorrermos ao Teorema de Pitágoras, podemos dar um novo sentido à expressão (3.2). Consideremos que a hipotenusa do triângulo rectângulo (AD) tem comprimento $x + \frac{a}{2}$ e os catetos, AB e BD , com o comprimento respectivamente

a e $\frac{a}{2}$. Se considerarmos o comprimento da hipotenusa e subtrairmos a distância $\overline{DE} = \overline{DB} = x$, teremos o comprimento de $\overline{AE} = \overline{AC} = x$, como queríamos demonstrar.

§3.1.2 Rectângulo de ouro

Vários estudos foram realizados acerca do uso de rectângulos em publicidade. De entre todos os rectângulos possíveis sobressai sempre um específico. Um rectângulo que tem alguma harmonia e que é mais apelativo à visão e ao bem estar, O rectângulo Dourado. Este rectângulo tem vindo a ser usado por muitos pintores em todas as épocas e ainda permanece entre nós nos dias de hoje. A construção de um rectângulo de Ouro começa a partir de um quadrado. O que é propriamente um rectângulo de ouro? E onde podemos rever a a proporção dourada? E o número Φ ? Partamos então do início. Consideremos um quadrado $ABCD$ e prolonguemos o lado AB . Encontremos o ponto médio do lado AB e denominêmo-lo por E . Tracemos um arco de circunferência de centro em E e raio \overline{EC} e intersectamo-lo com o prolongamento do lado AB . Designemos a intersecção por F . Tracemos um recta perpendicular ao prolongamento do lado AB a passar pelo ponto F . Prolonguemos o lado DC e intersectê-mo-lo com a recta perpendicular. A essa intersecção nomeá-la de G . O rectângulo $AFGD$ é o rectângulo áureo, pois $\frac{\overline{AF}}{\overline{FG}} = \Phi$.

Provemos que o rectângulo $AFGD$ é um rectângulo de ouro, para tal temos de provar que $\overline{AF} = \Phi$. Sejam $\overline{AD} = \overline{AB} = 1$, então $\overline{AE} = \frac{1}{2}$. Então,

$$\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = \frac{1}{2} + \overline{EF}. \quad (3.3)$$

O segmento \overline{EC} é a hipotenusa do triângulo rectângulo BCE . Aplicando o teorema de Pitágoras temos que,

$$\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2. \quad (3.4)$$

Por construção geométrica sabemos que $\overline{EC} = \overline{EF}$ e $\overline{AE} = \overline{EB} = \frac{1}{2}$, logo vem

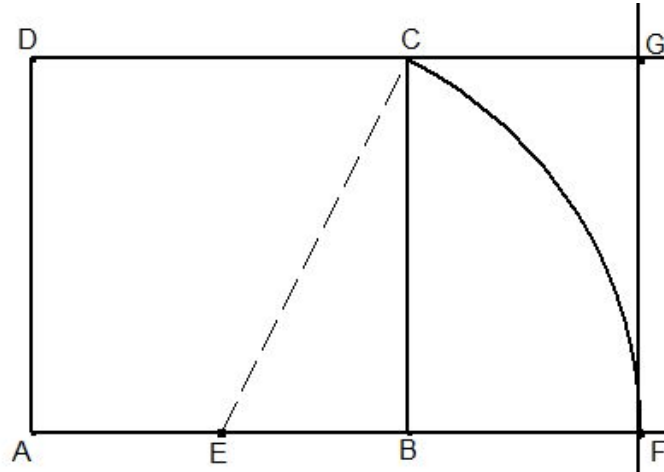


Figura 3.2: Retângulo de Ouro.

que,

$$\begin{aligned} \overline{EF}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 &\Leftrightarrow \overline{EF}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{EF}^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{EF} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo \overline{EF} em $\overline{AF} = \frac{1}{2} + \overline{EF}$ por $\frac{\sqrt{5}}{2}$, vem que

$$\overline{AF} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi. \quad (3.5)$$

Podemos ainda considerar a seguinte abordagem: juntando dois quadrados unitários (lado= 1), teremos um retângulo 2×1 , sendo que o comprimento 2 é igual à soma dos lados dos quadrados anteriores. De novo anexamos outro quadrado com $L = 2$ (o maior dos lados do retângulo anterior) e teremos um retângulo 3×2 . Continuamos a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos antes. A sequência dos lados dos próximos quadrados é: 3, 5, 8, 13, ... que é a sucessão de Fibonacci.

§3.1.3 Pentágono e o Pentagrama

Antes de começar a relacionar o número Φ com o pentágono e o pentagrama abordaremos a irmandade Pitagórica. Existem infinitas figuras regulares em $2D$ mas se formos para $3D$ só existem 5. A estes sólidos chamamos sólidos platónicos, tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro. Na Grécia clássica, cada um destes sólidos estava associado a elementos da natureza: Cubo era associado à Terra; tetraedro ao fogo; octaedro ao ar; icosaedro à água; dodecaedro ao Cosmos. Por assim ser, o dodecaedro o mais importante, uma vez que representava o universo na sua totalidade. Pode dizer-se que este fascínio pelos poliedros podiam resultar da observação de minerais cristalizados, como por exemplo os croitais de pirite que são em forma de dodecaedro.

Vamos centrarmo-nos um pouco mais no dodecaedro. Este possui 12 faces, 30 arestas e 20 vértices. As faces têm a forma de pentágonos regulares. Os Gregos também atribuíam misticismo das doze faces aos 12 símbolos do Zodiaco. Analisemos mais atentamente o pentágono regular. Se unirmos os vértices através das suas diagonais vamos obter o pentagrama.

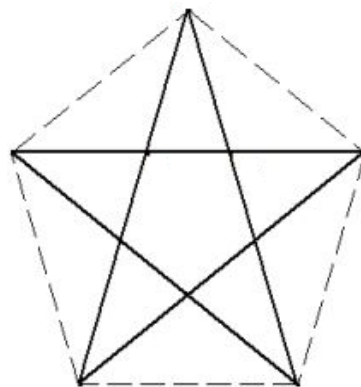


Figura 3.3: Pentagrama de Ouro.

O pentagrama ou estrela pentagonal foi o simbolo dos pitagóricos. Desde dessa altura que o pentagrama está associado a sociedades secretas. Nos dias de hoje também podemos encontrá-lo em algumas bandeiras de alguns países e em outros

contextos mais mediáticos como por exemplo é o símbolo das estrelas de Hollywood no Passeio da Fama de Los Angeles. Que relação poderá ter a estrela pentagonal com o número de ouro? Consideremos a estrela pentagonal ABCDE.

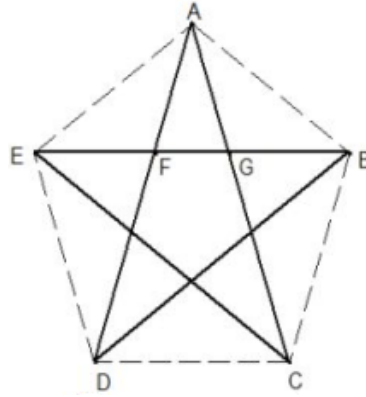


Figura 3.4: Pentagrama de Ouro.

Consideremos a diagonal EB e as suas intersecções. Podemos estabelecer as seguintes relações entre os vários comprimentos:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \Phi. \quad (3.6)$$

Se dobrarmos as pontas da estrela por forma a que o pentágono do centro seja a base de uma pirâmide pentagonal, o vértice do topo irá ficar situado no centro do pentágono regular. Obtemos assim uma pirâmide pentagonal com as medidas aureas.

§3.1.4 Triângulo de ouro

Das maneiras mais fáceis de encontrar o triângulo dourado é através do pentágono regular e do pentagrama. No pentagrama encontramos somente dois tipos de triângulos, sendo os restantes triângulos iguais ou semelhantes obtidos através das várias intersecções das diagonais.

Consideremos o triângulo BCE . É um triângulo isósceles uma vez que dois dos seus lados são compostos por duas diagonais do pentágono (dois lados do penta-

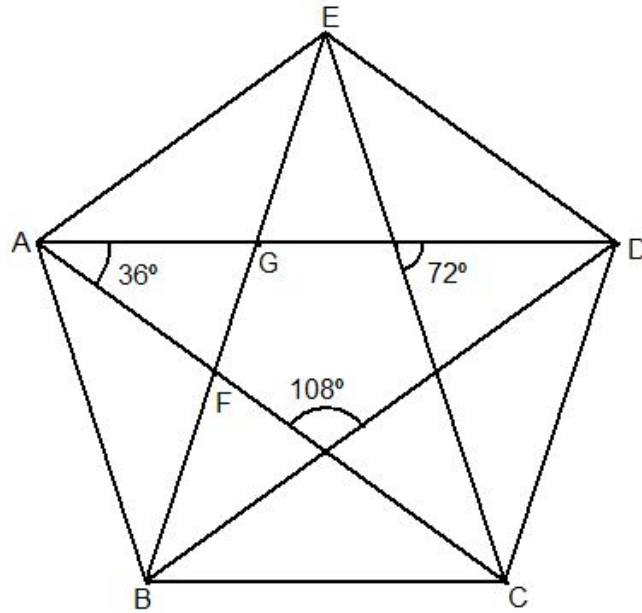


Figura 3.5: Triângulo de Ouro no Pentagrama.

grama). Como é um triângulo isósceles os ângulos internos opostos aos lados de igual medida também têm a mesma amplitude. Consideremos $\overline{EB} = x$, como $\overline{EB} = \overline{EC}$ então $\overline{EC} = x$. O lado BC por seu lado corresponde ao lado do pentágono, consideremos que o mesmo tem de comprimento 1. Provemos que $\frac{\overline{EB}}{\overline{BC}} = \Phi$, ou seja que estamos perante uma relação de ouro.

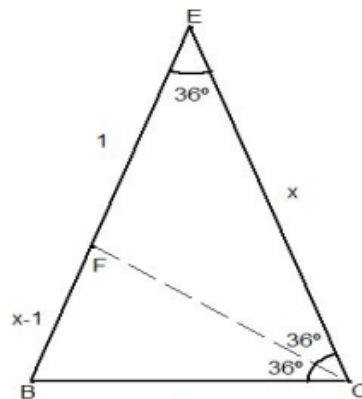


Figura 3.6: Triângulo isósceles.

Tracemos a bissetriz do ângulo C e vamos obter dois triângulos, o triângulo CEF e CFB . Os triângulos BCE e BCF são semelhantes, pois a amplitude dos

seus ângulos internos é a mesma, então podemos escrever,

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FB}}. \quad (3.7)$$

Sabemos que $\overline{BC} = \overline{FC} = \overline{EF} = 1$ e substituindo em (3.7), obtemos

$$\frac{\overline{EB}}{1} = \frac{1}{\overline{EB} - 1} \Leftrightarrow \overline{EB}^2 - \overline{EB} = 1 \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi. \quad (3.8)$$

Em todo o pentagrama verificamos que só existem três amplitudes de ângulos diferentes: 36° , 72° e 108° . Estas amplitudes também estão entre elas relacionadas uma vez que 72 é o dobro de 36 e 108 é o triplo de 36 . Podemos assim afirmar que são todos múltiplos de 36 . Dos dois tipos de triângulos que podemos observar no interior do pentágono estrelado podemos representá-los da seguinte forma:

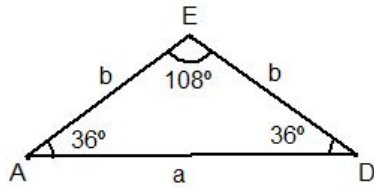


Figura 3.7: Triângulo, I.

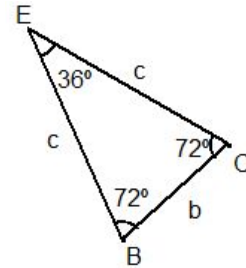


Figura 3.8: Triângulo, II.

Ambos os triângulos são isósceles pelo que possuem dois lados com o mesmo comprimento e conseqüentemente dois ângulos de igual amplitude. Relacionemos o comprimento do lados com a amplitude dos seus ângulos. Para tal iremos usar a Lei dos Senos, que estabelece uma relação entre a mediana de um lado e o seno do ângulo oposto a esse lado. Para um triângulo ABC qualquer de lados a , b e c podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}. \quad (3.9)$$

Voltemos aos triângulos ADE e BCE e relacionemos os elementos. No triângulo

- ADE temos a relação

$$\frac{a}{\text{sen}(108^\circ)} = \frac{b}{\text{sen}(36^\circ)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen}(108^\circ)}{\text{sen}(36^\circ)};$$

- para o triângulo BCE obtemos

$$\frac{b}{\text{sen}(36^\circ)} = \frac{c}{\text{sen}(72^\circ)} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}(72^\circ)}{\text{sen}(36^\circ)} = \frac{\text{sen}(108^\circ)}{\text{sen}(36^\circ)}.$$

Sabemos que são ângulos suplementares e o seno de dois ângulos suplementares é igual, portanto vem que $\text{sen}(72^\circ) = \text{sen}(108^\circ)$. Das relações estabelecidas anteriormente podemos estabelecer as seguintes proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}(108^\circ)}{\text{sen}(36^\circ)} = \Phi. \quad (3.10)$$

Se considerarmos a figura do pentagrama e retirarmos o triângulo AGD , podemos concluir a seguinte relação:

$$\cos(36^\circ) = \frac{\Phi}{2}. \quad (3.11)$$

Sabemos que,

$$\cos(36^\circ) = \frac{\frac{\overline{EA}}{2}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{EA}}{2\overline{EG}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{EA}}{\overline{EG}} \right).$$

Como $\frac{\overline{EA}}{\overline{EG}} = \Phi$, obtemos a relação (3.11). Outra forma de desenhar triângulos de Ouro é usando a construção da divisão de um segmento de recta na divina proporção. Partamos da referida construção.

Com centro em C e raio \overline{AC} tracemos um arco. Com o mesmo raio e centro em B tracemos outro arco por forma a intersectar o primeiro. Nomeemos a intersecção por F . Unamos A , C , e B a K . Por construção geométrica os triângulos resultantes são áureos.

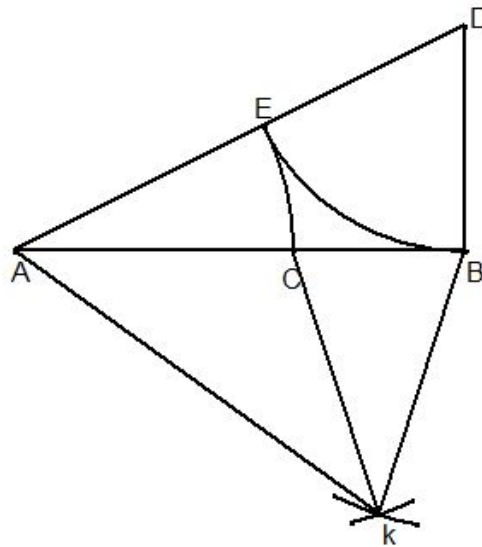


Figura 3.9: Triângulo de Ouro.

§3.1.5 Espiral dourada e a Espiral Rectângular

Utilizando o rectângulo de Ouro ou o triângulo de Ouro podemos encontrar uma das mais prodigiosas e belas manifestação de Φ , a Espiral Dourada também conhecida pela espiral logaritmica. Nela podemos observar alguns comportamentos curiosos do número inigmático. Na generalidade, as espirais despertaram alguma curiosidade no mundo matemático, incluindo Jacob Bernoulli (1654-1705) que dedicou alguns anos a estudá-las. Com intuito de demonstrar a importância destas na sua vida, ele mandou esculpir uma espiral no seu túmulo dizendo “Eaden mutato resurgos”, traduzindo “embora transformado, ressurjo sempre”. A espiral dourada pode ser obtida através do rectângulo de Ouro ou do triângulo de ouro. Partindo do rectângulo de Ouro retiremos um quadrado de comprimento igual ao seu lado mais curto. Iremos obter um novo rectângulo de ouro. Efectuemos novamente a mesma operação e iremos obter novamente um novo rectângulo de ouro. Podemos efectuar esta operação indefinidamente. Posteriormente tracemos vários arcos de circunferência de raio igual ao comprimento do lado de cada um dos quadrados que vamos retirando e centro no vértice de cada um deles. Com a junção dos arcos

iremos obter a espiral dourada, como mostra a figura.

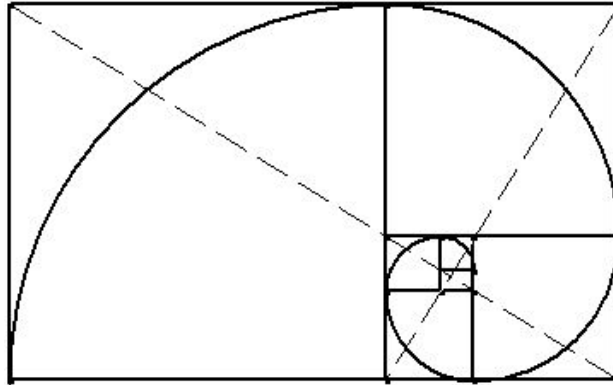


Figura 3.10: Espiral dourada, I.

A espiral pode ser definida partindo de qualquer rectângulo de ouro, neste caso, não interessando as dimensões do rectângulo de ouro inicial. À medida que vamos retirando os quadrados de acordo com a figura definida em cima, vamos aproximando-nos do número de ouro. A própria espiral logarítmica, à medida que se vai fechando também vai-se aproximando de Φ . Se traçarmos uma diagonal no primeiro triângulo de Ouro e uma outra diagonal no segundo triângulo de ouro, a sua intersecção é sempre um ângulo recto. Ao criarmos novos rectângulos de Ouro cada vez mais pequenos, como na figura, e se traçarmos as diagonais desses rectângulos todas elas vão estar sobre as duas diagonais iniciais. Estas irão ser sempre perpendiculares e o seu ponto de intercepção será sempre o mesmo ponto apesar de reduzirmos o seu lado por um factor Φ .

A mesma espiral pode ser obtida através de um triângulo de ouro, para tal temos de bissectar um dos ângulos de amplitude 72° e vamos obtendo triângulos áureos. Um deles semelhante ao original e outro com os ângulos internos de amplitude 72° , 72° e 108° . Continuando a bissectar o triângulo isósceles com dois ângulos de 72° , vamos sempre obtendo triângulos de Ouro semelhantes aos anteriores. Os arcos de circunferência são traçados com centro na intersecção do lado do triângulo com a bissecção do ângulo e amplitude no vértice oposto do triângulo.

Também podemos construir a espiral rectangular partindo de um rectângulo de

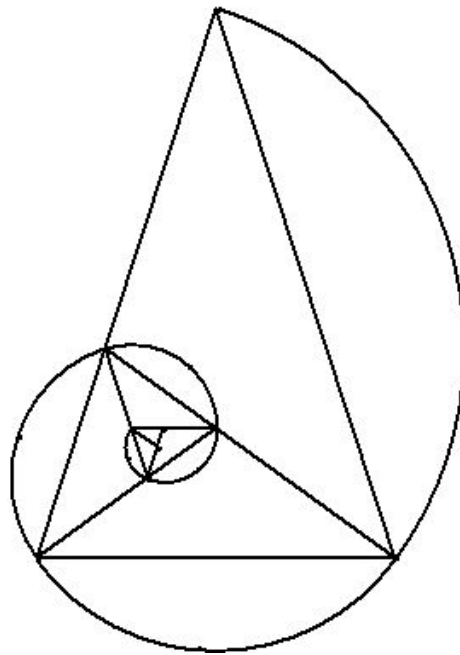


Figura 3.11: Espiral dourada, II.

ouro, mas desta vez vamos construir a nossa espiral usando o lado do rectângulo. Vamos partindo o nosso rectângulo inicial em sucessivos rectângulos de ouro. Consideremos inicialmente que $\overline{AB} : \overline{BC} = \Phi$, então todos os rácios que se obtêm daí irão ser sempre iguais a Φ .

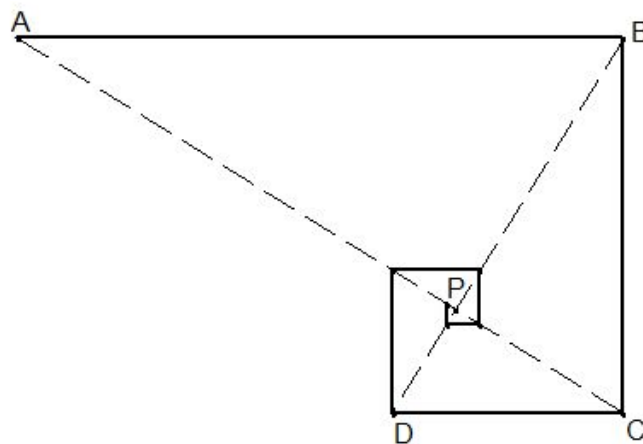


Figura 3.12: Espiral dourada, III.

§3.2 Na Música

Desde tempos antigos, o homem sempre tentou alcançar a perfeição, quer seja nas pinturas, nos projectos arquitectónicos ou até mesmo em obras musicais. Os pitagóricos tinham 4 grandes disciplinas que estudavam, Harmonico (numero no tempo) Música, aritmética números puros, geometria número no espaço e Sberics números no espaço e tempo. Um elo de ligação entre as quatro disciplinas é o número de Ouro. O uso da música e de ritmos na proporção certa permite que os pensamentos fluem facilmente. A estrutura do ritmo e da harmonica na música é baseado no rácio. Consideremos os vários intervalos musicais o mais simples, a oitava (2:1) e a quinta (3:2) são os mais simples e mais agradáveis de ouvir. Se repararmos bem nos números do rácio, reparamos que são os primeiros elementos da sequencia de Fibonacci. Esta proporção continua com a sexta maior e menor (5:3 e 8:5) e o próximo é (13:8). Outra vez temos a continuação da série de Fibonacci que se vai formando por si própria. O número de Ouro está presente nas famosas sinfonias Sinfonia nº5 e na Sinfonia nº9, de Ludwig van Beethoven e em outras obras famosas. Se considerarmos o início da Vasilissa de Dufay sob o ponto de vista musical,



Figura 3.13: Pauta, I.

E analisemos agora a mesma pauta mas do ponto de vista matemático,

Podemos concluir que a estrutura the toda a obra é baseada no Número de ouro. Outro facto interessante registrado na Revista Batera, num artigo sobre o baterista de jazz Max Roach, é que, nos seus solos curtos, aparece, se considerarmos as relações que aparecem entre os tempos do bombo e da caixa. Também o compositor Béla Bartók utiliza esta relação de proporcionalidade constantemente nas suas obras. Este facto pode ser consultado na análise da música de Bartók feita por Ernő Lendvai

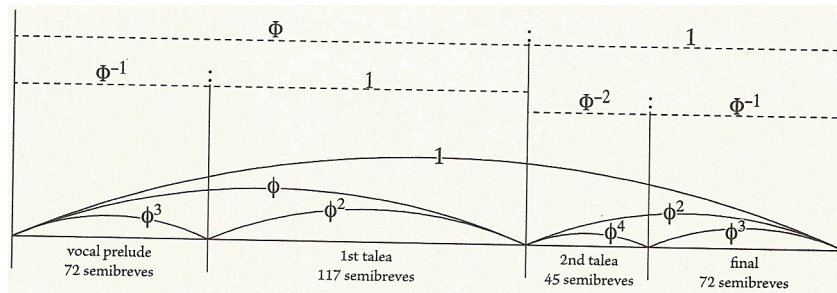


Figura 3.14: Pauta, II.

(Béla Bartók: And Analysis of his Music).

Em 1925, Sabaneev musicólogo russo afirmou que o número de Ouro foi utilizado por Beethoven em 97% do seu trabalho, por Hayden em 97%, por Arensky em 95%, Chopin em 92%, Schubert em 91%, Mozart em 91% e Scriabin em 90%. Também podemos encontrar a Porporção Aurea não só nas pautas musicais mas também nos próprios instrumentos musicais. Como um dos mais famosos exemplos temos os violinos de Stradivarius.

Actualmente, crê-se que os Gregos utilizaram o número de Ouro para obter um “som e uma acústica” ideais e que as suas habitações utilizavam frequentemente a proporção de Ouro na construção de casas e suas habitações. Muitas Catedrais utilizam o número de Ouro, em parte, pelo mesmo motivo. O número de Ouro não só minimiza a ressonância acustica mas também tem um papel importante na música

It is believed the Greeks used Golden Ratio to achieve the wonderful sound and “ideal acoustics” that Golden Proportion rooms have. Many cathedrals also use the Golden Section, in part, for the same reason. The Golden Section not only minimizes acoustic resonance, it also imparts a very musical quality to the remaining sound.

Se olharmos com mais atenção para o teclado de um piano podemos afirmar que numa pequena secção temos 5 notas nas teclas pretas (2 notas mais 3 notas), 8 notas nas teclas brancas prefazendo um total de 13 notas numa oitava repetindo-se a primeira e a última nota.

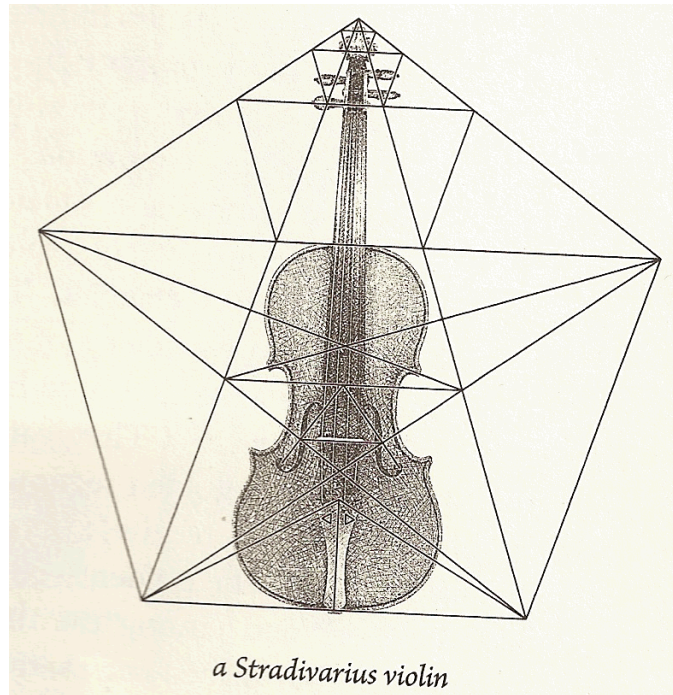


Figura 3.15: Violino Stradivarius.

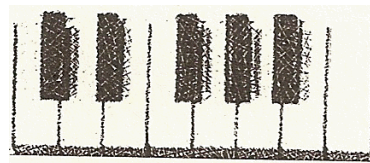


Figura 3.16: Teclado de um piano.

§3.3 Na literatura

Na literatura o número de Ouro encontra sua aplicação mais notável no poema épico grego *Ilíada*, de Homero, que narra os acontecimentos dos últimos dias da Guerra de Tróia. Quem o ler notará que a proporção entre as estrofes maiores e as menores dá um número próximo ao 1.618, o número de ouro.

Luís de Camões na sua obra “*Os Lusíadas*”, colocou a chegada à Índia no ponto que divide a obra na razão de ouro.

Virgílio em sua obra *Eneida*, construiu a razão áurea com as estrofes maiores e menores.

§3.4 Na arquitectura

Os gregos criaram o retângulo dourado. Com base na relação existente no rectângulo de Ouro, construíram o Partenon entre os edifícios. Utilizando a relação de Ouro, os Egípcios construíram as pirâmides. Cada bloco da pirâmide era 1.618 vezes maior que o bloco do nível acima. O Homem Vitruviano, de Leonardo Da Vinci, ilustra claramente a ocorrência do número de Ouro no corpo humano.

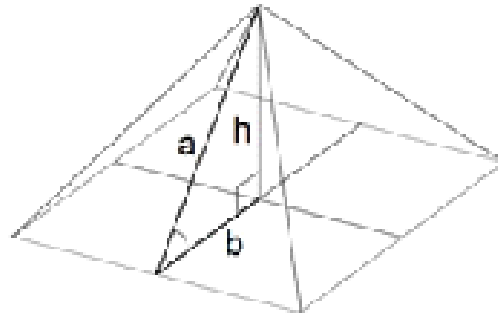


Figura 3.17: Φ e o Partenon.

Edifícios projetados por Lê Corbuiet, ou a sede das Nações Unidas contêm elementos arquitetônicos na forma de retângulo de ouro. Assim como obras como o Parthenon.

Ao longo dos séculos tem-se vindo a utilizar com alguma regularidade o número de ouro. Como foi referido anteriormente no capítulo 2, talvez como primeira referência na arquitectura, temos as pirâmides que possuem o número de Ouro incutido. Onde cada bloco da pirâmide era 1.6818 vezes maior que o bloco do nível de cima.

A pirâmide de Quéops em Gisé, no Egipto, foi construída tendo em conta a razão áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro.

Figura 3.18: Φ e a Pirâmide.

Também o podemos observar no Arco do Triunfo em Roma, nos túmulos lícios e igrejas na antiga cidade de Mira, Turquia. Não se pense que o número de Ouro só surgiu na cultura clássica se atravessarmos o Atlântico, na Bolívia podemos ver a Porta do Sol de Tiwanaku, um monumento pré-Inca onde se encontra a proporção áurea no seu pleno.



Figura 3.19: Porta do Sol, I.

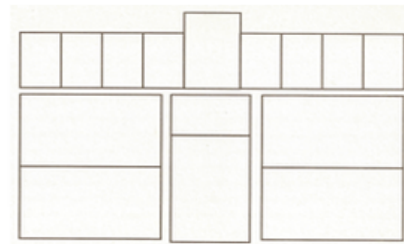


Figura 3.20: Porta do Sol, II.

Outro clássico é a fachada da universidade de Salamanca que foi construída no século XV, a parte central foi construída dentro de um retângulo dourado.

Já na arquitectura contemporânea temos alguns belos exemplos do uso da proporção que foi possível através de novos materiais e novas técnicas de construção. A rampa do Museu Guggenheim de Nova Iorque foi desenhada pelo norte-americano Frank Lloyd Wright e tem a estrutura da concha do nautilus, é uma espiral dourada. Por sua vez o arquitecto polaco Zvi Hecker utilizou a mesma espiral no desenho das escolas Heinz-Galinsky de Berlim. Desta vez a inspiração veio do crescimento das pétalas do girassol que se efectua seguindo a espiral áurea.



Figura 3.21: Φ na Universidade de Salamanca.



Figura 3.22: Escolas Heinz-Galinsky.

E é claro o edifício das nações unidas projectado por Le Corbusier. Mas Le Corbusier não se ficou só pela utilização da proporção áurea, ele redesenhou uma nova escala não utilizando o sistema métrico, mas sim utilizando o sistema áureo. Começou por tomar a distância do solo à cabeça e até ao braço, depois encontrou a secção áurea e posteriormente com estas proporções criou um sistema de dimensões que correspondem às dimensões do corpo humano.

Veio assim o “*Homem do Modulor*” que viria a contrastar com o Homem Vitruviano de Leonardo DaVinci. O modulor foi construído através das medidas ideais

sugeridas por Le Corbusier. O homem com a mão levantada mede 226cm e exactamente a metade da altura encontra-se o umbigo. Estes dois valores quando são multiplicados ou divididos por Φ , geram uma sucessão de Fibonacci.

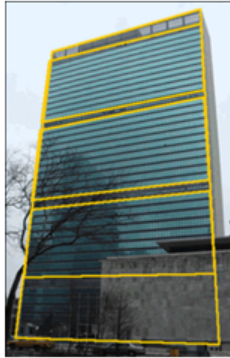


Figura 3.23: Edifício da Onu.



Figura 3.24: Homem do Modulor.

Se formos ao Quincy Park em Cambridge, podemos ver uma aplicação directa de Φ . Podemos observar uma placa comemorativa ao número de ouro.



Figura 3.25: Φ em Quincy Park.

§3.5 Design

Desde do renascimento que a busca do perfeito, do belo e do harmonioso tem sido uma busca constante, como já foi referido anteriormente, mas mesmo assim e após tantos séculos continua a existir uma razão que reúne estas condições, Φ . O número de Ouro também é bastante utilizado no design. Desde do desenho de naves espaciais, USS Enterpriser, até ao desenho de logotipos de marcas de automóveis.

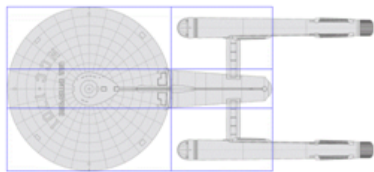


Figura 3.26: “Nave” Enterprise, I.



Figura 3.27: “Nave” Enterprise, II.

Como podemos observar pelas figuras, a nave espacial está inserida em vários rectângulos de ouro, quer na perspectiva superior ou na perspectiva frontal.

O mundo automóvel também reconheceu esta razão como uma óptima oportunidade de melhorar os seus logotipos e não só. Austin Martin utilizou intensivamente a razão de Ouro no design do Rapide S e DB9.



Figura 3.28: Austin Martin Rapide *S*.

Muitas outras marcas no ramo automóvel utilizaram o número de ouro. Um

de forma mais exaustiva e outras de forma mais simples.



Figura 3.29: Símbolo da Toyota.



Figura 3.30: Símbolo da Nissan.

Como podemos observar nas figuras em baixo, conseguimos observar através das linhas a razão de Ouro aplicada nas mesmas. Algumas empresas têm o símbolo do número de Ouro no seu logo, como é o caso da “Disney” que utiliza ϕ (se bem que minúsculo). Outras companhias utilizam as proporções aureas no desenho dos seus próprios produtos, à semelhança da Austin Martin.



Figura 3.31: Símbolo da Disney.



Figura 3.32: Garrafas de Sumos.

§3.6 Na arte

O número de Ouro não é só estudado pelos matemáticos, mas ao longo dos séculos também tem vindo a ser intensamente utilizado pelos pintores, escultores, arquitetos, Durante o Renascimento, deu-se o desenvolvimento da perspectiva e uma busca incessante das proporções ideais e harmonia para os sentidos. Com a representação de forma realista em duas dimensões de objectos tridimensionais, surgiu um novo ramo da geometria a que chamaram de Geometria Projectiva. Alguns nomes

muito importantes deste período foram Leonardo DaVinci, Rafael e Dürer.

Com o “Tratado da Pintura” de Leon Battista Alberti, surgiram os primeiros documentos a explicar como podia representar a realidade.

A partir destas ideias começaram a surgir as primeiras ligações realmente estabelecidas entre a geometria e a arte, onde os pintores utilizavam de forma sistemática a geometria para dar “mais Vida” às suas pinturas. Por exemplo, Alberti procurava regras teóricas e práticas para “guiar” o trabalho dos artistas. A desvantagem deste tipo de regras é que se poderia perder alguma originalidade e criatividade. É nesta altura que se começam a utilizar as frases como

“o primeiro requisito para um pintor é conhecer a geometria”

e

“o quadro é a janela aberta através da qual se vê o objecto pintado”

O estudo de Albertini, leva-o a “descrever” a primeira definição de perspectiva científica, mais tarde também descreve o conceito de arquitectura moderna que está completamente imerso no conceito da proporção aurea. Mais tarde veio Leonardo Davinci também ele procurando e utilizando os resultados teóricos no seu trabalho. Ele próprio viria a afirmar que “a perspectiva é a rédea e o leme da pintura”. Não existem quaisquer provas de que DaVinci utilizou a proporção de dourada, mas se analisarmos “A Última Ceia” de Leonardo podemos encontrar alguns rectângulos de ouro.

No quadro Gioconda também podemos observar com precisão que o mesmo se enquadra numa elegante sucessão de vários rectângulos de ouro.

Os artistas não utilizaram só o rectângulo de ouro, Michelangelo também utilizou a estrela pentagonal na composição de “A Sagrada Família”. A utilização da estrela pentagonal por parte do artista, permite dar uma novo arranjo e mais ênfase a determinadas personagens. Por Piero della Francesca podemos ver também o re-arranjo que se pode encontrar em “A Flagelação”.

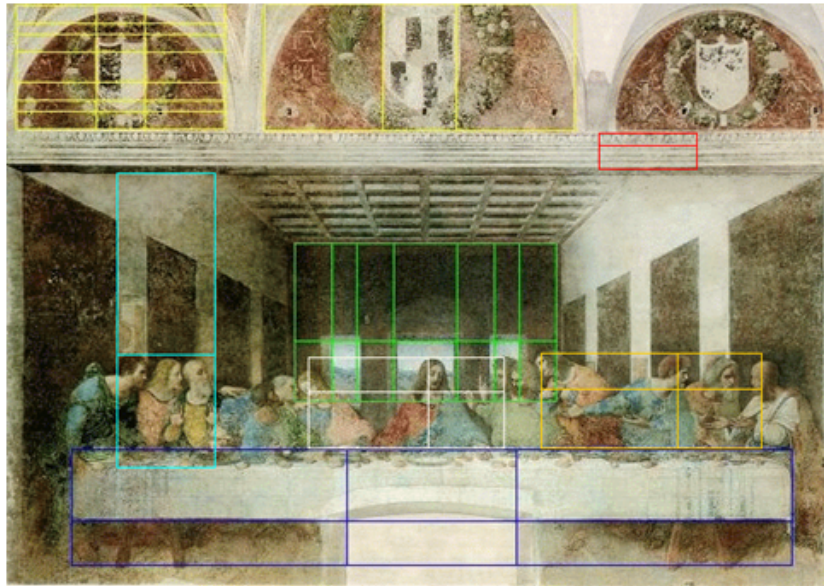


Figura 3.33: A Última Ceia.

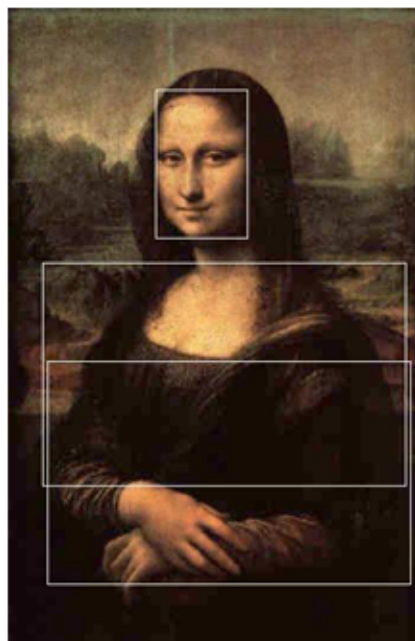


Figura 3.34: A “Mona Lisa” e o número de Ouro, I.

No nascimento de Vénus podemos ver várias utilizações do número de ouro.

Na figura 3.39, a falange, a falanginha e a falangeta do indicador têm comprimentos que estão na proporção de ouro.

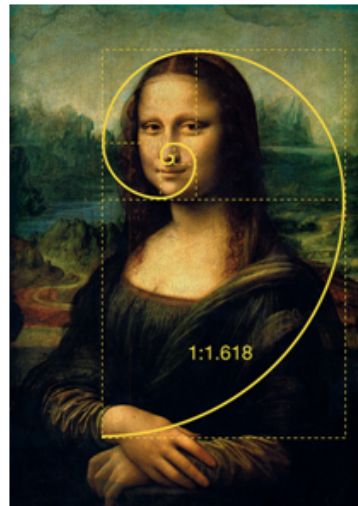


Figura 3.35: “Mona Lisa” e a espiral de Ouro.



Figura 3.36: “A Flagelação”.

Outros artistas, já no século XX, utilizaram o próprio retângulo de Ouro nas suas pinturas como é o caso de Piet Mondrian.

Na escultura podemos observar como o número de Ouro está presente no rosto da estátua de Atenas através do retângulo de ouro. Alguns estudiosos referem que a proporção dourada pode ser encontrada em muitos estilos de pintura, mas muitas vezes elas foram criadas mais pela intuição do artista do que pela construção geométrica da mesma.

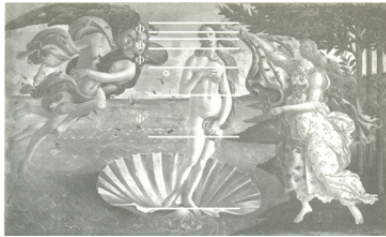


Figura 3.37: O “Nascimento de Vénus” e o número de Ouro, I.

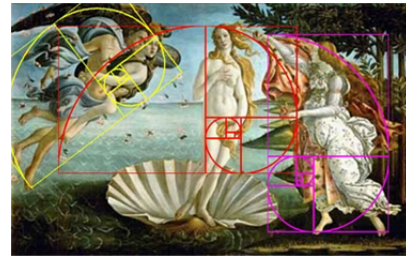


Figura 3.38: O “Nascimento de Vénus” e o número de Ouro, II.



Figura 3.39: Obra de Michelangelo.

Na arquitectura, e ao longo dos séculos tem-se vindo a utilizar com alguma regularidade o número de ouro. Talvez como primeira referência temos as pirâmides que possuem o número de Ouro incutido. Como poderemos obter tal razão?

§3.7 No corpo humano

As idéias de proporção e simetria aplicadas à concepção da beleza humana. Assim, podemos encontrar o número Φ na

- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão;
- A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça;

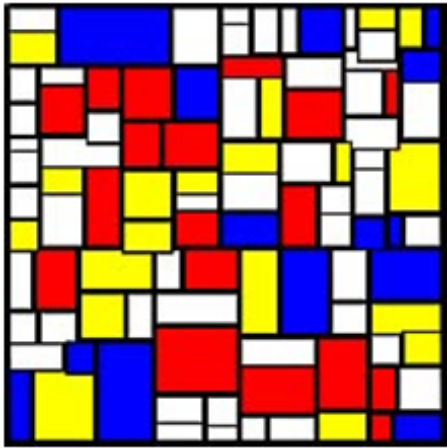


Figura 3.40: Obra de Piet Mondrian,
I.

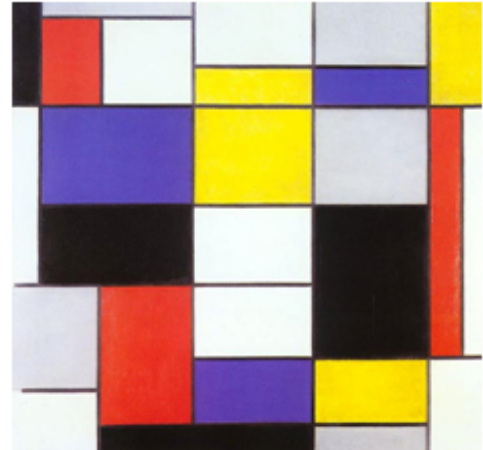


Figura 3.41: Obra de Piet Mondrian,
II.

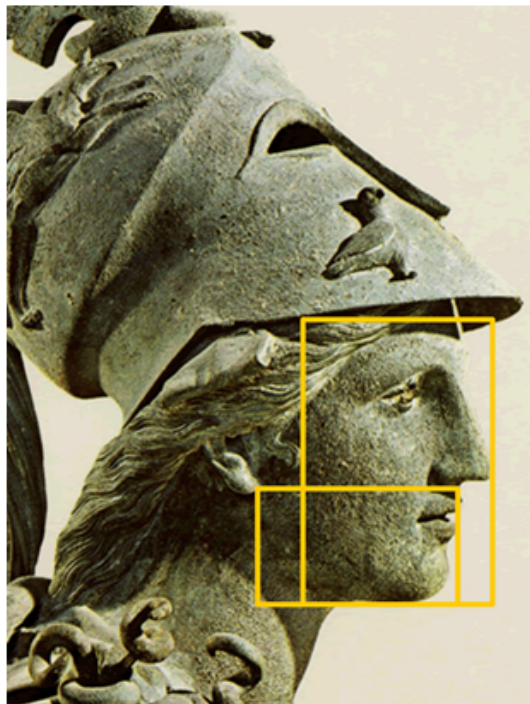


Figura 3.42: Estátua Ateniense.

- A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax;
 - A medida do ombro á ponta do dedo e a medida do cotovelo á ponta do dedo;
 - O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta;
-

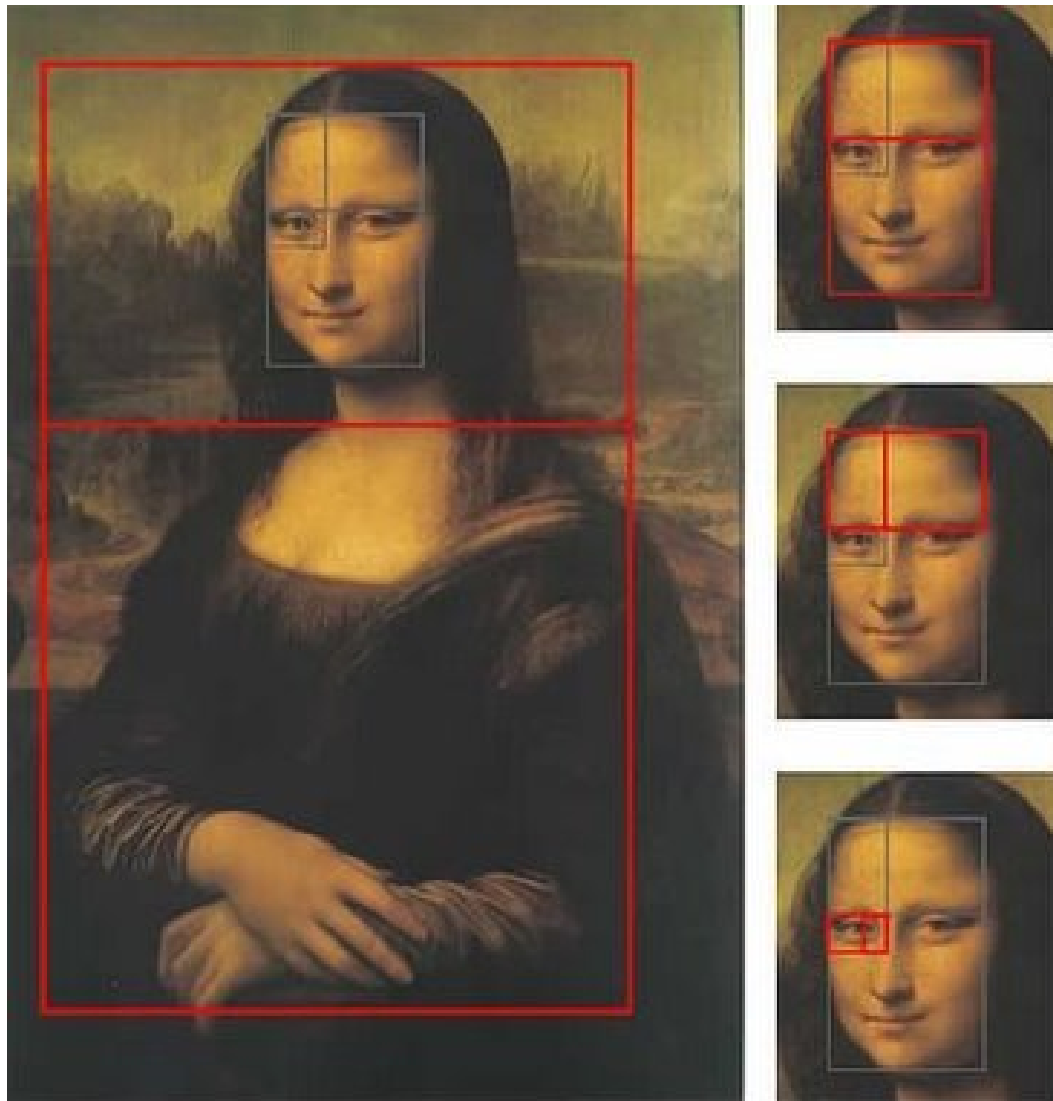


Figura 3.43: A mona Lisa.

- A medida da dobra central até a ponta dividida e da segunda dobra até a ponta;
- A medida do cintura ao chão e a medida do joelho ao chão.

Tendo em conta a possibilidade de alguns erros nas medições, efectuadas com régua ou uma fita métrica, os valores serão sempre próximos ao número de ouro.

Essas proporções anatômicas foram bem representadas pelo “Homem Vitruviano”, obra de Leonardo Da Vinci.

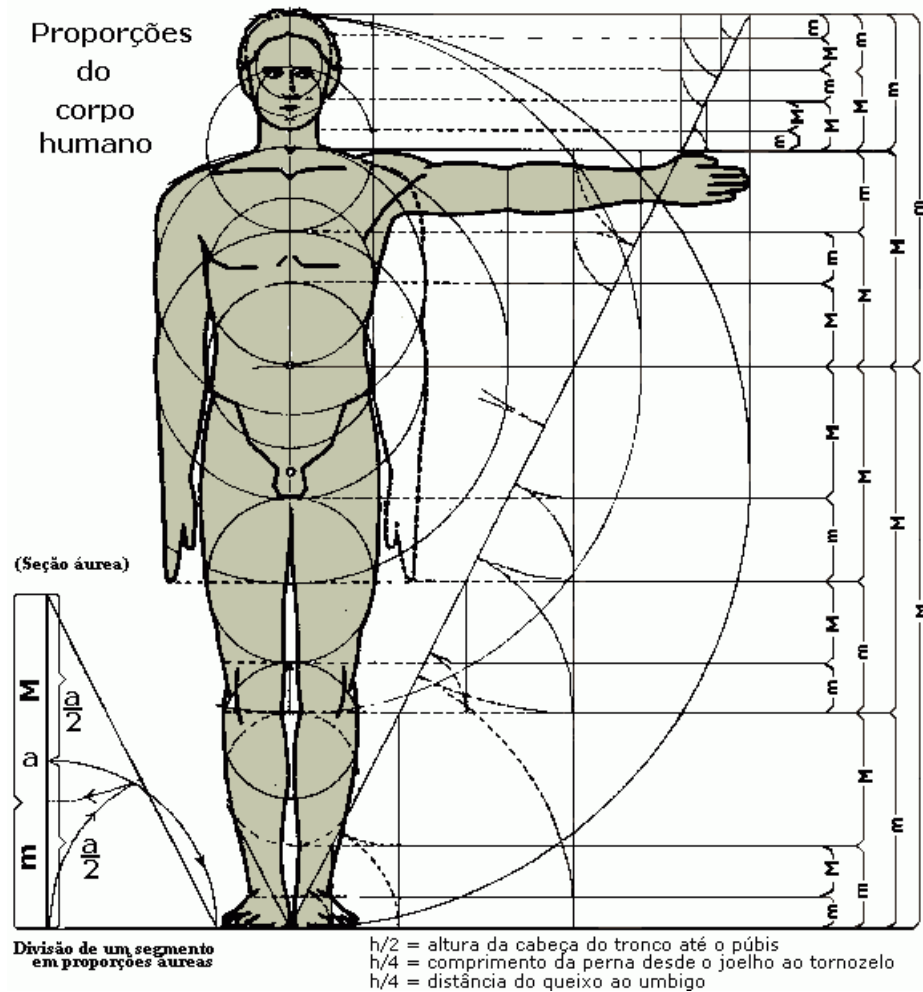


Figura 3.44: Dimensões áureas do Homem.

Dimensão do útero em mulheres jovens (16 e 20 anos), segundo o pesquisador Jasper Vergtus, da Universidade de Leuven.

O número de Ouro também está associado ao “conceito de Beleza”.

Assim, o umbigo divide a altura do corpo em média e extrema razão.

§3.8 Na Natureza

Φ está também nas escamas de peixes, presas de elefantes e no crescimento de plantas.

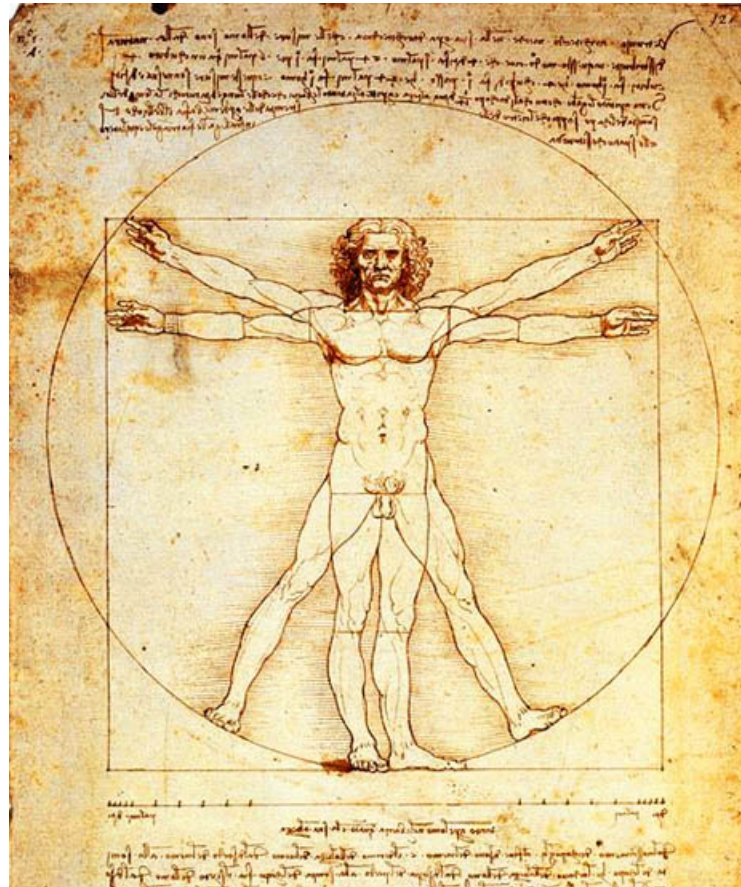


Figura 3.45: O homem Vitruviano.

É o caso dos girassóis que pertencem à família Compositae. As sementes formam dois conjuntos de espirais logarítmicas com sentidos diferentes. O número de sementes de cada conjunto é diferente mas são dois números consecutivos de Fibonacci. A proporção em que aumenta o diâmetro das espirais sementes de um girassol é a razão áurea. A distribuição das sementes de girassol é regida pela espiral logarítmica de Φ . Além disto, o girassol possui 55 espirais orientadas no sentido horário, sobrepostas a 34 ou 89 espirais em sentido anti-horário que é gerada por Φ .

O Nautilus pompilius, é um molusco que vive no sudoeste do oceano pacífico. O nautilus é um dos seres vivos que apresenta a razão áurea em seu desenvolvimento, sendo assim chamado de Espiral de Ouro. A proporção em que cresce o raio do interior da concha desta espécie de caramujo. Este molusco bombeia gás para dentro

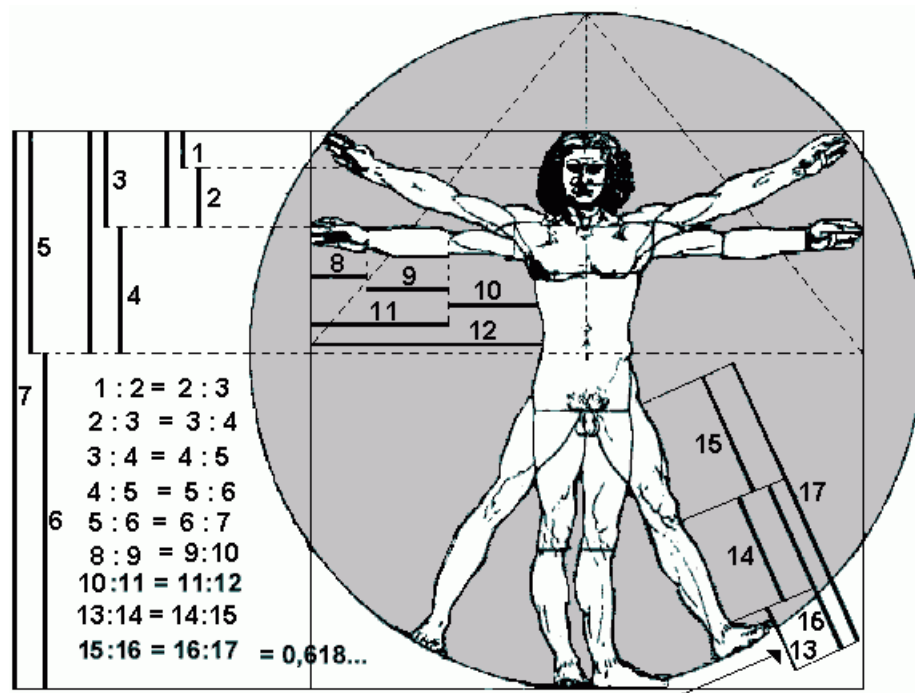
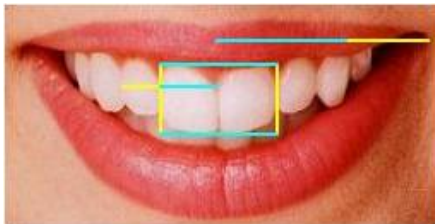


Figura 3.46: O homem Vitruviano com medidas.

Figura 3.47: Φ no corpo humano, I.Figura 3.48: Φ no corpo humano, II.

de sua concha repleta de câmaras pra poder regular a profundidade de sua flutuação.

O dançarino *Siva* do mito hindu segura o Nautilus numa das mãos como um dos instrumentos com os quais inicia a criação. Para os Pitagóricos, contudo, esta forma encarna a dinâmica da geração rítmica do cosmos, e através de seu harmônico princípio representa o amor universal. A espiral logarítmica acaba por ser sobreposição ao feto do homem e dos animais, e está presente no esquema de

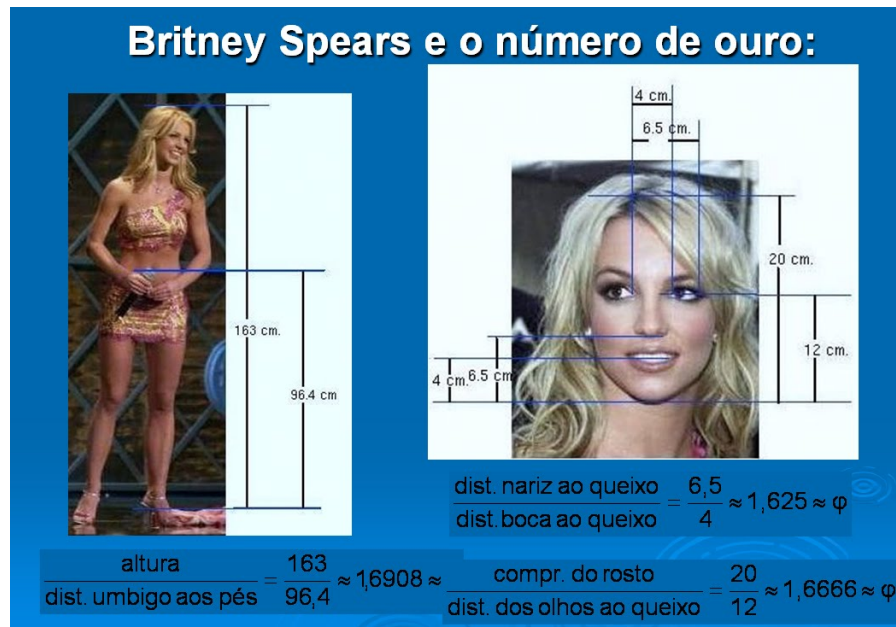


Figura 3.49: Φ e o conceito de beleza I.



Figura 3.50: Φ e o conceito de beleza II.

crescimento de muitas plantas.

Φ está presente também nas escamas de peixes, presas de elefantes, crescimento de plantas.

Na *Achillea Ptarmica*: Razão do crescimento de galhos. Folhas de árvores: a proporção em que se diminuem as folhas de uma árvore à medida que subimos de altura; População de abelhas (a proporção entre abelhas fêmeas e machos em qualquer colméia). Também está presente nas árvores, na proporção em que se diminuem as folhas de uma árvore à medida que subimos de altura.



Figura 3.51: Flor de Girassol.

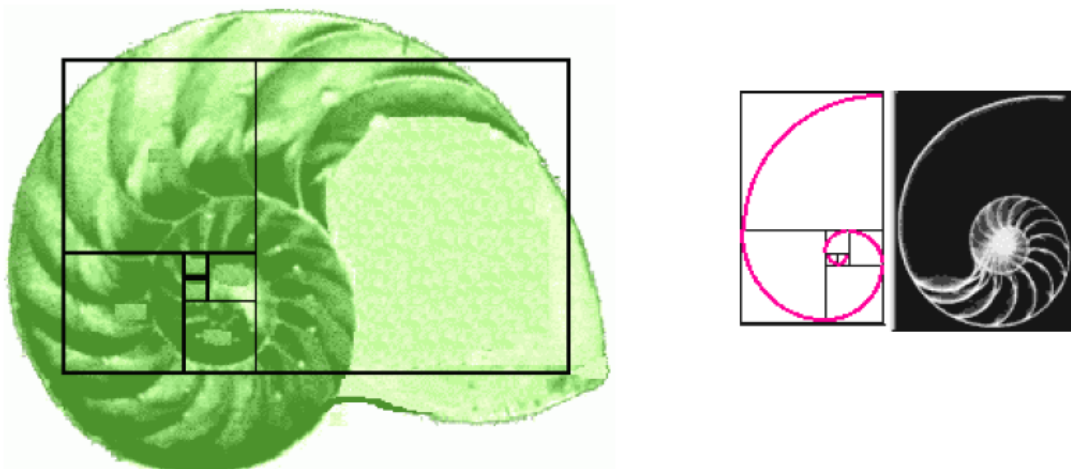


Figura 3.52: Nautilus pompilius.

§3.9 Algumas críticas ao número de Ouro

Não poderíamos terminar este trabalho sem fazer uma breve referência ao artigo de George Markowsky, [10].

Neste artigo o autor apresenta algumas críticas ao número de Ouro. Começa

por referir algumas das suas propriedades. O autor afirma que o termo “número de ouro” não foi utilizado na antiguidade, citando para tal os trabalhos de François Lasserre. Depois, o autor critica os trabalhos de Martin Gardner que, utilizando os dados publicados na “*Pyramidology Fallacy*” mostrou que vários edifícios em Washington D.C. utilizam o número de ouro. O autor defende ainda que muitas das observações contêm erros uma vez que são obtidos através de aproximações. Inclui outros exemplos como por exemplo a “suposta” utilização do número de Ouro na construção das grandes pirâmides. Um outro aspecto que ele salienta é o facto de que o número de Ouro não “aparece” no Partenon.

Refere ainda que muitos pintores incluindo Leonardo Da Vinci, não utilizaram o número de Ouro nas suas obras. O autor afirma ainda que o número de Ouro não foi utilizado na construção do edifício da ONU e que os valores obtidos são substancialmente diferentes de Φ . Refere ainda que o número de Ouro não está presente no corpo humano.

Outros trabalhos que devemos mencionar são [8], [9] e [11].

Capítulo 4

O número de Ouro no Ensino em Portugal

Neste capítulo vamos apresentar algumas actividades que podem ser utilizadas na sala de aula para introduzir o número de Ouro e algumas das suas propriedades a Alunos desde o 5º ano de escolaridade até ao 10º de escolaridade.

Dependo dos programas vigentes, outro de tipo de conteúdos programáticos poderiam ser utilizados para introduzir o número de Ouro e algumas das suas propriedades. De entre eles salientamos as sucessões e o princípio de Indução Matemática.

§4.1 Actividades

§4.1.1 Proposta de Atividade - I

- a) Esta actividade tem como público alvo os Alunos do 5 ao 8 ano de escolaridade e tem como objectivo o desenvolvimento da capacidade do Aluno reconhecer o número de Ouro e utilizá-lo no desenvolvimento do conhecimento matemático.
-

- b) **Descrição da actividade:** Construção de um segmento aureo utilizando régua e compasso.
- c) **Lista de Material necessário:**
- i) Régua de 30cm;
 - ii) Compasso;
 - iii) Folha de papel A4.
- d) **Procedimento da Atividade:**
- i) Traçar um segmento qualquer AB ;
 - ii) Inicialmente determina-se a Mediatriz de AB , que corta o segmento no ponto O ;
 - iii) Apartir de B , levanta-se uma perpendicular a AB ;
 - iv) Com centro em B e raio BO , determina-se o ponto C ;
 - v) Traça-se o segmento CA ;
 - vi) Com centro em C e raio CB , determina-se D , sobre CA ;
 - vii) Com centro em A e raio AD , determina-se E , sobre AB . Finalmente tem-se que: AE é o segmento aureo de AB .
- e) O Aluno deve verificar se alguns objectos do quotidiano, como por exemplo, cartões da escola, televisões, etc ... satisfazem as condições do número de Ouro.
-

§4.1.2 Proposta de Actividade - II

- a) Esta actividade tem como público alvo os Alunos do 5 ao 8 ano de escolaridade e tem como objectivo o desenvolvimento da capacidade do Aluno reconhecer o número de Ouro e utilizá-lo no desenvolvimento do conhecimento matemático.
- b) Descrição da actividade: Construção de um rectângulo aureo utilizando unicamente a régua.
- c) Lista de Material necessário:
- i) Régua de 30cm;
 - ii) Folha de papel A4.
- d) Procedimento da Actividade:
- i) Desenha um quadrado e divide-o ao meio;
 - ii) Desenha o prolongamento do lado maior do rectângulo;
 - iii) Num dos rectângulos obtidos traça a diagonal;
 - iv) Com o compasso, traça um arco de circunferência, cujo raio é a diagonal do rectângulo, até à base prolongada;
 - v) Pelo ponto de intersecção do arco com o segmento da base traça um segmento perpendicular à base. Prolonga o lado superior do quadrado até encontrares este último segmento para formar o rectângulo.
- e) O Aluno deve verificar se alguns objectos do quotidiano, como por exemplo, livros, revistas, embalagens de cereais, etc ... satisfazem as condições do rectângulo de Ouro.
-

Escola de Encosta a Nova

Rectângulo aureo

1. Observa a figura:

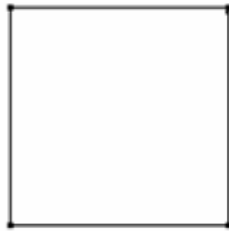


Figura 4.1: Quadrado.

Para construir o rectângulo aúreo, debes seguir os seguintes passos:

- i) Desenha um quadrado e divide-o ao meio;
- ii) Desenha o prolongamento do lado maior do rectângulo;
- iii) Num dos rectângulos obtidos traça a diagonal;
- iv) Com o compasso, traça um arco de circunferência, cujo raio é a diagonal do rectângulo, até à base prolongada;
- v) Pelo ponto de intersecção do arco com o segmento da base traça um segmento perpendicular à base. Prolonga o lado superior do quadrado até encontrares este último segmento para formar o rectângulo.

Averigúe se as razões obtidas anteriormente se aproximam do número de ouro, $\Phi \approx 1.618$.

§4.1.3 Proposta de Atividade - III

- a) Esta actividade tem como público alvo os Alunos do 5 ao 8 ano de escolaridade e tem como objectivo o reconhecimento do número de Ouro no corpo humano.
- b) Descrição da actividade: Verificar se o número de Ouro se encontra no Corpo Humano.
- c) Lista de Material necessário:
- i) Régua;
 - ii) Lápis e papel.
- d) Procedimento da Atividade (*esta parte da actividade deve ser desenvolvida sem a folha prática que se segue*):
- i) Meça o comprimento da falange, da falanginha e da falangeta do indicador de uma das suas mãos;
 - ii) Calcule as seguintes razões:
 - i) falange/falanginha;
 - ii) falanginha/falangeta
 - iii) Averigúe se as razões obtidas em dii se aproximam do número de ouro.
- e) O Aluno deve verificar se alguns objectos do quotidiano, como por exemplo, livros, revistas, embalagens de cereais, etc ...satisfazem as condições do rectângulo de Ouro.
-

Escola de Encosta a Nova

O número de Ouro no corpo humano

1. Observa a figura:

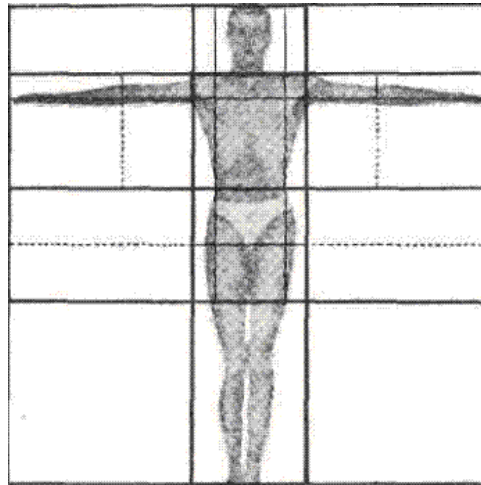


Figura 4.2: Corpo Humano.

Determina as seguintes medidas:

- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão;
 - A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça;
 - A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax;
 - A medida do ombro á ponta do dedo e a medida do cotovelo á ponta do dedo;
 - O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta;
-

Averigüe se as razões obtidas anteriormente se aproximam do número de ouro,
 $\Phi \approx 1.618$.

§4.1.4 Proposta de actividade - IV

- a) Esta actividade tem como público alvo os alunos do 7º ano de escolaridade e tem como objectivo o desenvolvimento da capacidade do Aluno do aluno de medir a amplitude de ângulos, a identificar triângulos congruentes e semelhantes e justificar utilizando os critérios adequados.
- b) Descrição da actividade: A partir de um pentágono regular, traçar as suas diagonais e indentificar e justificar triângulos congruentes e semelhantes. Reconhecer a existência da razão aurea.
- c) Lista de material necessário:
- i) Ficha de trabalho com a figura de um pentagono regular;
 - ii) Régua;
 - iii) Transferidor;
 - iv) Papel.
- d) Procedimento da actividade
- i) Medir vários segmentos de recta presentes nas diagonais e lados do pentágono;
 - ii) Estabelecer a existência de alguma relação entre si;
 - iii) Averigue se as relações anteriores se aproximam do número de ouro;
 - iv) Meça a amplitude dos ângulos encontrados na intersecção das diagonais do pentágono;
 - v) Identifique os diferentes triângulos existentes na construção;
 - vi) Classifique os triângulos quanto ao lados;
 - vii) Existe uma relação entre os vários triângulos? Em caso afirmativo indique a ou as relações presentes e justifique com os critérios adequados.
-

Escola de Encosta a Nova

O Φ no pentágono regular

1. Observa o pentágono.

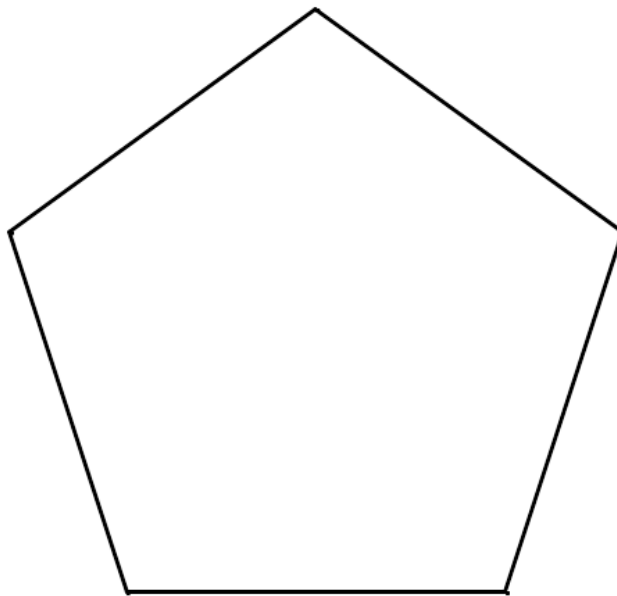


Figura 4.3: Pentágono regular.

- a) Traça as diagonais do pentágono;
 - b) Mede a amplitude dos ângulos formados pelas intersecções das diagonais;
 - c) Quantos triângulos encontras na figura? Como os classificas quanto ao comprimento dos lados?;
 - d) Que relações podes estabelecer entre os vários triângulos? Justifica a tua resposta;
-

e) Onde encontras Φ ?

§4.1.5 Proposta de actividade - V

- a) Esta actividade tem como publico alvo os alunos do 8º ano de escolaridade e tem como objectivo a aprendizagem da construção geométrica para obter a bissecção de um ângulo, identificar dois ou mais triângulos semelhantes e justificar utilizando os critérios de semelhança;
- b) Descrição da actividade: Os alunos irão seguir uma série de instruções para posteriormente conhecerem e utilizarem a construção geométrica para efectuar a bissecção de um ângulo. Após essa construção irão reconhecer a existência de dois triângulos semelhantes e irão justificar utilizando para tal os critérios de semelhança que possam ser mais adequados;
- c) Lista de material necessário:
- i) Régua
 - ii) Compasso
 - iii) Transferidor
 - iv) Ficha de trabalho que conterà uma imagem de um triângulo de Ouro ABC com os ângulos de 72° , 36° e 18° .
- d) Procedimento da actividade:
- i) Utilizando a figura escolha um dos ângulos de 72° para efectuar a bissecção;
 - ii) Traçar um arco de circunferência com centro no vértice do ângulo e amplitude de forma a intersectar os lados do ângulo;
 - iii) Com o compasso traçar arcos de circunferência com centro nas intersecções anteriores, e amplitude igual, por forma a que os arcos se intersectem no interior do ângulo;
 - iv) Traçar uma semi-recta com início no vértice do ângulo e passando pela intersecção;
-

- v) Intersectar a semi-recta com o lado do triângulo;
 - vi) Determinar a relação entre o novo triângulo obtido com o original;
 - vii) Justificar a a relação anterior utilizando os critérios adequados.
-

Escola de Encosta a Nova

Investiga o Triângulo de Ouro

1. Observa o triângulo:

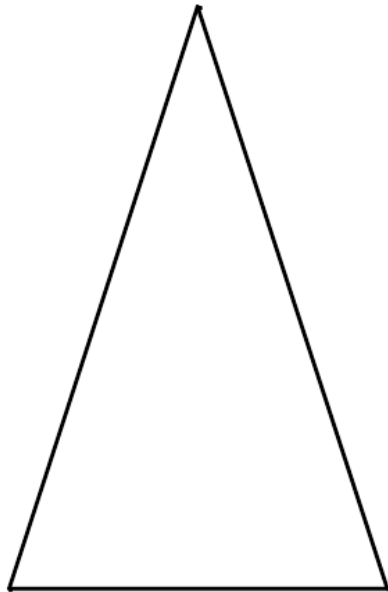


Figura 4.4: Triângulo regular.

- a) Observa a figura em cima.
 - i) Como classificas o triângulo anterior quanto ao comprimento dos lados?
 - ii) Mede a amplitude dos seus ângulos internos.
 - iii) Escolhe o ângulo de menor amplitude e segue os seguintes passos para bissectá-lo.
-

- iv) Que relação encontras entre o primeiro triângulo e o triângulo que obtiveste após a bissecção do ângulo? Justifica a tua resposta.

Nota 4.1.1. *Para determinar a bissetriz de um ângulo, debes:*

- 1) *Traçar um arco de circunferência com centro num dos vértices de amplitude maior do triângulo e raio menor do que o comprimento do lado menor do triângulo por forma a intersectar os dois lados do triângulo;*
 - 2) *Traçar dois arcos de circunferência com centro nas intersecções anteriores por forma aos dois arcos de circunferência intersectarem-se num ponto;*
 - 3) *Traçar uma semi-recta com início no vértice do triângulo a passar pela última intersecção. Essa semi-recta divide o ângulo em dois ângulos iguais.*
-

§4.1.6 Proposta de actividade - VI

- a) Esta actividade tem como público alvo os alunos do 9 e 10o ano de escolaridade, e tem como objectivo a prova do valor através da resolução da equação de segundo grau;
- b) Descrição da actividade: Os alunos devem utilizar a régua para encontrar a razão de Ouro no segmento de recta. Após a definação da proporção aurea os alunos devem encontrar as proporções correctas e colocá-las na forma de proporção. Após efectuar esta tarefa devem efectuar a substituição correcta e dos comprimentos e encontrar o valor aproximado de Φ ;
- c) Lista de material:
- i) Ficha com a divisão do segmento de recta na divisão áurea;
 - ii) Régua.
- d) Procedimento da actividade:
- i) Utilizando a régua o aluno deve medir os vários comprimentos presentes no segmento de recta inicial;
 - ii) Escreve os vários segmentos de recta como uma proporção;
 - iii) Sendo um dos comprimentos 1 e o outro x encontra a solução da equação quadrática que encontrada;
 - iv) Escreve um valor aproximado de Φ .
-

Escola de Encosta a Nova

O segmento de recta áureo

1. Observa a figura:

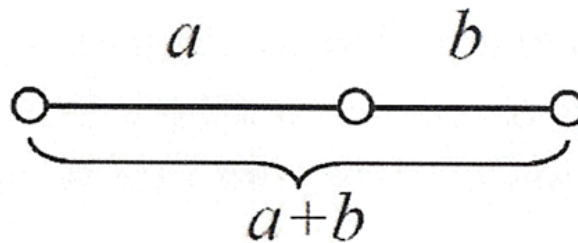


Figura 4.5: Segmento de Ouro.

- a) Considera a divisão do segmento de recta AB .
 - i) Relaciona os vários comprimentos do segmento de recta.
 - ii) Sendo $a = 1$ e $b = x$, e utilizando as relações anteriores, encontra o valor de Φ .

Capítulo 5

Conclusões

Com este estudo foi possível comprovar que realmente muitas coisas do nosso dia a dia contêm matemática, desde a arte, até grandiosas construções. Antigamente eram muito mais evidentes, e muito mais exploradas estas ligações com a matemática, porém mesmo hoje em dia podemos comprovar em alguns prédios, ou nas obras de arte, porém temos a natureza, que sempre independente do homem, terá esta ligação com a matemática. Ainda pensando na natureza, temos em nosso próprio corpo, uma ligação eterna com a matemática, estabelecida através da proporção áurea, encontrada nas mais diversas partes do corpo, como demonstram Vitruvius e Leonardo da Vinci em seus estudos. O número de Ouro é considerado por muitos estudiosos um símbolo da harmonia. Surgiu da necessidade que os antigos tinham de utilizar a contagem como forma matemática para aplicá-las em seus negócios. Fibonacci deu uma grande contribuição à Geometria com a sua descoberta, a qual está relacionada com a solução do problema dos coelhos. Todos esses exemplos nos levam a perceber quão grande é a importância deste número que por este motivo foi chamado “de ouro”. Com o nosso trabalho, pretendemos uma abordagem matemática do Número de Ouro. Tentamos mostrar algumas ocorrências do número de Ouro em campos da actividade humana ao longo da História. Apresentamos uma breve perspectiva da influência de Fibonacci e Leonardo Da Vinci, nesta área e o

celebre problemas dos coelhos.

Bibliografia

Fernando Corbalán, *A Proporção Áurea - A linguagem matemática da beleza*, 2010, RBA Coleccionables, S.A. Printer Industria Gráfica Newco, S.L. Print in Spain.

Scott Olsen, *The golden section - Nature's Greatest Secret*, Walker Publishing Company, 2006, Inc. New York.

Mario Livio, *O número de Ouro - A história de Phi, o número mais assombroso do mundo*, 1ª edição Setembro de 2012, Lisboa.

Vasco Graça Moura, *Camões e a Divina Proporção*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, Lisboa, 1994.

H. E. Huntley, *The Divine Proportion, A study in mathematical beauty*, Dover Publications, Inc. 1970, New York.

Priya Hemenway, *Divine Proportion, Phi In Art, Nature, and Science*, Sterling Publishing Co., Inc New York, 2005

Victor Sae Hon Sung, *Sequência de Fibonacci e suas Aplicações*, Universidade Federal de São Carlos Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia Departamento de Matemática.

George Markowsky, *Misconceptions about the Golden Ratio*, The College Mathematics Journal, Vol. 23, No. 1 (Jan., 1992), pp. 2-19

Clement Falbo, The Golden Ratio-A Contrary Viewpoint, The College Mathematics Journal, Vol. 36, No. 2, (March 2005), pp. 123-134

Robert Lawlor, *A Geometria Sagrada*, Edições Del Prado, 1996

Carlos Afeitos & Paulo Rebelo, *O número de ouro no Ensino Secundário*, Terceira conferência da Faculdade de Ciências da Universidade da Beira Interior, 2012, Covilhã, Portugal.

<https://www.youtube.com/watch?v=mfL6-g5mQw4>, (consultada em Julho de 2013)

https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=xtsTXAwWF20,
(consultada em Julho de 2013)

<http://www.goldennumber.net/> (consultada em Maio de 2013)

http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio (consultada em Maio de 2013)

<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/cos36.shtml> (consultada em Maio de 2013)

<http://cs144-caltech.blogspot.co.uk/2012/02/golden-ratio-and-fibonacci-numbers.html>
(consultada em Maio de 2013)

http://pt.wikipedia.org/wiki/Propor\u00e7\u00e3o_de_Aureo
(consultada em Maio de 2013)

Leonardo da Vinci. (2013). In Encyclopædia Britannica. retirado de <http://library.eb.co.uk/eb/article-9108470> Encyclopædia Britannica Online Library Edition, s.v. accessed October 13, 2013.
(consultada em 13 de Outubro de 2013.)

Leonardo Pisano, In Encyclopædia Britannica, <http://library.eb.co.uk/eb/article-9047817>.
(consultada em 13 de Outubro de 2013.)

Luca Pacioli (2013). In Britannica Student Encyclopedia.
<http://library.eb.co.uk/all/comptons/article-9312873>
(consultada em 13 de Outubro de 2013.)
