



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Faculdade de Engenharia

Eléctrodos de Terra: Análise e Projecto Optimizado em Dois Estratos

(Versão final após defesa pública)

António Mário Ribeiro Martins

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Electrotécnica e de Computadores
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Sílvio José Pinto Simões Mariano

Covilhã, Julho de 2017

Por opção do autor, esta tese não obedece às regras do novo acordo ortográfico da Língua Portuguesa.

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Os meus agradecimentos ao Professor Doutor Sílvio José Pinto Simões Mariano, Professor Associado com Agregação, orientador científico desta tese de doutoramento. A disponibilidade e facilidade com que orientou, sugeriu e corrigiu, nomeadamente os cinco artigos científicos publicados que balizaram esta tese, revelaram um profundo conhecimento científico. Destaco, ainda, o tempo que passamos juntos em frente ao seu computador numa partilha generosa do seu saber.

Os meus agradecimentos também, à Professora Doutora Maria do Rosário Calado, Professora Auxiliar nesta Universidade, que sem um vínculo formal à orientação da tese, sugeriu e criticou os quatro artigos internacionais publicados. Agradeço também ao Professor Associado Felipe de Souza pela ajuda nas traduções para inglês, em artigo e no resumo desta tese.

Agradeço ainda à Directora de Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico da Guarda (IPG), Professora Doutora Maria Clara Silveira, que em alguns semestres me permitiu uma redução horária para dois terços do estipulado na lei, especialmente nos primeiros anos de estudo como doutorando e ao Presidente do IPG pelo apoio financeiro. Um agradecimento também ao Engenheiro Carlos Aquino que desenhou todas as figuras em CAD nesta tese, agradecimentos extensíveis a todos os colegas da referida Escola que de alguma forma me ajudaram em determinados aspectos específicos, na apresentação formal da presente tese.

Finalmente um agradecimento ao meu amigo Paulo Rato que me ajudou a abrir valas, a enterrar eléctrodos, a fazer as medidas em todos os ensaios que constam desta tese, bem como à sua família que disponibilizou os terrenos para os referidos ensaios.

Resumo

Nesta tese analisam-se os eléctrodos de terra, primeiro em solo homogéneo e depois em solo com dois estratos. Em solo homogéneo são estudados em pormenor varas e cabos enterrados, analisando a distribuição de potencial à superfície, obtendo-se, desta forma, as tensões de passo e de toque. As fórmulas para o cálculo da resistência também são comparadas inclusive as da legislação nacional. Finalmente eléctrodos planos como quadrados, chapas e grelhas também são consideradas. Em solo de dois estratos é analisado pormenorizadamente o método da matriz, que é o mais simples de todos, evidenciando as singularidades do método numérico, onde ocorrem e como as superar. O método mais usado para o cálculo da resistência nesta tese é o método dos momentos, que se obtém por dupla integração do método da matriz. As singularidades deste são rastreadas no processo de integração, permitindo identificar assim as regiões de singularidade do método dos momentos, a sua localização, sugerindo-se também alternativas para evitar a impossibilidade de calcular as grandezas em estudo. O terceiro método numérico usado foi o método dos elementos finitos, aplicado à formulação diferencial do problema, dada pela equação de Laplace, método este que não sofre os efeitos das imagens, geradoras das singularidades nos métodos anteriores, sendo usado para validar as alternativas de superação das singularidades referidas dos outros métodos. O conhecimento do solo, obtendo-se modelos de solo homogéneo, de solo de dois estratos e de solos de três estratos também foi considerado, apresentando-se os métodos mais comuns para se obterem modelos de solo de duas camadas e divulgando também o método de Pirson que permite obter modelos de três estratos. Dada a dificuldade em medir a resistividade em zonas urbanas, esta pode ser obtida a partir da medida de resistência de uma vara durante o enterramento, tendo-se desenvolvido métodos por optimização para obter tais modelos de solo, usando-se para tal o método do gradiente e o método de Newton. Os ensaios de campo que foram feitos são finalmente analisados, enfatizando o eléctrodo em serpentina para o qual se propõe uma nova metodologia de cálculo.

Palavras chave

Resistência de terra, tensões de passo e de toque, método da matriz, método dos momentos, elementos finitos, solo de duas camadas, optimização, método do gradiente, método de Newton, eléctrodo em serpentina.

Abstract

The present thesis analyzes the ground electrodes, first in homogeneous soils and then in two layer soils. In soils with constant resistivity, ground rods and wires are first considered, by computing surface potentials and then step and touch voltages. The resistance calculation is made by comparing several formulae including those from Portuguese standards. Finally two dimension electrodes are considered, such as squares, grids and plates. In soils with two layers the matrix method, which is the simplest method, is carefully considered showing the singularities of the method, where they occur and how to avoid them. The method of moments is the reference method in the thesis to compute ground electrode resistance, which is obtained through the double integral of the matrix method expressions. In this computation the singularities of this method are tracked through the integration process, allowing the identification of the singularities of the method of the moments, their location, and how to avoid the regions where calculations are impossible. The third numerical method herein used was the finite element method (FEM), using the differential operator, since Laplace equation is representative of the phenomenon under study. FEM is image independent, so it does not have the singularities detected in the other methods, allowing its use to validate the options to avoid singularities. The knowledge of the soil was also considered in order to obtain models for one layer, two layers and three layers soils. The most common methods to obtain a two layer soil are presented and Pirson's method for a three layer soil is also considered. Since resistivity measurements in cities are difficult to be made, they can be obtained by measuring a rod resistance during the burying process and using optimization techniques, such as the gradient method or the Newton method, to compute a soil model. Finally field measurements are presented, focusing on the sinusoidal electrode for which a new algorithm to compute the electrode resistance is proposed.

Keywords

Ground resistance, touch and step voltage, matrix method, method of moments, finite elements, two-layer soil, optimization, gradient method, Newton method, sinusoidal electrode.

Índice

Índice de figuras.....	ix
Índice de tabelas.....	xv
Lista de siglas e acrónimos.....	xix
Capítulo 1 - Enquadramento e motivação.....	1
1.1 Enquadramento.....	1
1.2 Motivação.....	9
1.3 Organização do texto.....	11
1.4 Notação.....	13
Capítulo 2 - Formulação matemática.....	18
2.1 O cálculo do potencial e da resistência.....	18
2.1.1 O método da matriz.....	19
2.1.2 O método dos momentos.....	21
2.1.3 O método dos elementos finitos.....	25
2.2 O modelo de solo.....	26
2.3 Tensões de passo e de toque.....	28
2.3.1 Tensões de passo e de contacto em solo homogéneo.....	29
2.3.2 Tensões de passo e de contacto em solo de duas camadas.....	31
Capítulo 3 - Eléctrodos de terra em solo homogéneo.....	32
3.1 Tensões de passo e de toque do eléctrodo em vara.....	32
3.1.1 Tensões de passo.....	35
3.1.2 Tensão de toque.....	38
3.1.3 Cálculo da resistência.....	40
3.2 Tensões de passo e de toque do cabo horizontal.....	42
3.2.1 Tensões de passo na perpendicular à trincheira.....	43
3.2.2 Tensões de passo na direcção paralela à trincheira.....	45
3.2.3 Tensões de toque.....	48
3.2.4 Cálculo da resistência.....	49
3.3 Pontos de descontinuidade no método dos momentos.....	50
3.4 Eléctrodos planos.....	53
3.5 Conclusões.....	62
Capítulo 4 - O método da matriz em solo de dois estratos.....	63
4.1 Eléctrodos no estrato superior.....	63
4.1.1 Vara no estrato superior.....	66

4.1.2 Cabo no estrato superior	69
4.2 Eléctrodos no estrato inferior.....	73
4.3 Vara em dois estratos	77
4.4 Conclusões.....	84
Capítulo 5 - O método dos momentos em solo de dois estratos	85
5.1 Eléctrodos no estrato superior	85
5.1.1 Resistência mútua de segmentos com a mesma orientação.....	88
5.1.2 Resistência mútua de segmentos perpendiculares	92
5.1.3 Resistência mútua no caso geral	97
5.2 Eléctrodos no estrato inferior.....	99
5.3 Vara nos dois estratos.....	107
5.4 Conclusões.....	111
Capítulo 6 - O método dos elementos finitos.....	112
6.1 O método dos elementos finitos em problemas de simetria axial.....	112
6.1.1 Elementos triangulares de primeira ordem.....	113
6.1.2 Reunião de elementos	116
6.2 Vara em solo homogéneo.....	118
6.3 Vara em solo de dois estratos.....	121
6.4 Potencial de superfície devido a cabo colocado no estrato inferior	124
6.5 Conclusões.....	125
Capítulo 7 - Medida da resistividade e da resistência.....	127
7.1 - Fundamentação teórica da medida da resistividade	127
7.1.1 O método de Wenner	129
7.1.2 O método de Palmer.....	130
7.1.3 O método da vara cravada.....	131
7.2 A resistividade do solo e os factores que a influenciam	132
7.3 Perfis típicos de solos	134
7.3.1 Solo homogéneo.....	134
7.3.2 Solo com duas camadas e duas assíptotas	137
7.3.2 Perfil sem a assíptota de maior profundidade	141
7.3.3 Perfil de resistividade sem a assíptota de menor profundidade.....	144
7.3.4 Perfil de resistividade sem assíptotas.	145
7.4 Modelo de solo de 3 camadas e o método de Pirson.....	145
7.5 Medida da resistência de eléctrodos	150

7.6 Conclusões.....	153
Capítulo 8 - Optimização de parâmetros do terreno	154
8.1 Modelo optimizado de solo homogéneo.....	154
8.2 Derivadas parciais das fórmulas de Tagg.....	157
8.2.1 Vara no estrato superior	157
8.2.2 Cabo no estrato superior	158
8.2.3 Vara em dois estratos	161
8.3 O método do gradiente aplicado a eléctrodos de terra.....	163
8.3.1 Optimização para vara em dois estratos	164
8.3.2 Optimização para vara no estrato superior.....	168
8.4 Optimização dos parâmetros do terreno, usando medidas de varas	169
8.5 Obtenção dos parâmetros do terreno pelo método de Newton.....	171
8.6 Conclusões.....	174
Capítulo 9 - Ensaio de campo e de laboratório.....	175
9.1 Experimentação em tina de água	175
9.2 Ensaio de campo, na Vagueira, em Dezembro de 2011	179
9.2.1 Estratificação do solo	180
9.2.2 Comparação dos modelos de solo com os valores experimentais.....	183
9.3 Ensaio de campo na Vagueira, em Abril de 2012.....	187
9.4 Ensaio de campo na Vagueira, em Outubro de 2012.....	189
9.4.1 Estratificação do solo	189
9.4.2 Comparação dos modelos de solo com os valores experimentais.....	196
9.5 Conclusões.....	198
Capítulo 10 - Eléctrodo em serpentina, estudo de um caso.	199
10.1 Apresentação do eléctrodo	199
10.2 Análise teórica	200
10.2.1 Eléctrodos em solo homogéneo	200
10.2.2 Eléctrodos em solo de dois estratos com $k>0$	202
10.2.3 Eléctrodos em solo de dois estratos com $k<0$	204
10.3 Algoritmo alternativo e ensaios de campo	206
10.4 Conclusões.....	210
Capítulo 11 - Conclusão	211
11.1 Conclusões	211
11.2 Directrizes de investigação.....	213

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS	214
Anexo A - Fórmulas de Dwight	220
Anexo B - Fórmulas da resistência mútua entre segmentos	221
Anexo C - Fórmulas de Tagg.....	223

Índice de figuras

Fig. 2. 1 Modelo de uma vareta de terra de fronteira fechada.....	18
Fig. 2. 2 Fonte pontual de corrente	19
Fig. 2. 3 Discretização de uma vara	20
Fig. 2. 4 Segmento fonte e corrente que este liberta.....	22
Fig. 2. 5 Potencial num segmento passivo, devido ao segmento fonte inferior.....	23
Fig. 2. 6 Discretização por elementos finitos de uma vara de terra.....	26
Fig. 2. 7 Curva de resistividade com o espaçamento, Vagueira Abril de 2012.....	27
Fig. 2. 8 Gráfico de resistividade sem assíntotas	28
Fig. 2. 9 Tensão de passo representada por um circuito equivalente de Thevenin.....	30
Fig. 3. 1 Vara cravada em profundidade	32
Fig. 3. 2 Comparação para o potencial de superfície dos modelos teóricos	34
Fig. 3. 3 Potencial à superfície para duas profundidades	34
Fig. 3. 4 Tensão de passo para diferentes profundidades da vara	35
Fig. 3. 5 Equipotenciais espaçadas de 2 KV em torno de vara	36
Fig. 3. 6 Aproximação à tensão de passo para vara cravada a 0,5 m.....	37
Fig. 3. 7 Tensão de toque ao longo da distância para dois enterramentos.....	39
Fig. 3. 8 Variação da resistência da vara segundo as três fórmulas para $\rho=500 \Omega\text{m}$	41
Fig. 3. 9 Cabo eléctrico enterrado horizontalmente	42
Fig. 3. 10 Tensão de passo segundo y para várias rectas de equação $x=c$	44
Fig. 3. 11 Comparação de curvas para a tensão de passo.	45
Fig. 3. 12 Tensão de passo segundo x para várias rectas de equação $y=c$	46
Fig. 3. 13 Tensão de passo ao longo do semieixo longitudinal da trincheira.....	48
Fig. 3. 14 Resistência de cabo enterrado segundo os autores indicados. $\rho=500 \Omega\text{m}$	50
Fig. 3. 15 Configuração em 'L' na horizontal	52
Fig. 3. 16 Eléctrodo de terra em quadrado de lado $2L$	54
Fig. 3. 17 Potencial à superfície segundo recta horizontal que bissecta dois lados paralelos .	55
Fig. 3. 18 Grelha de 8x8 m	56
Fig. 3. 19 Superfície canelada obtida por discretização da chapa em condutores.....	58
Fig. 3. 20 Variação da resistência da chapa com o comprimento	59
Fig. 3. 21 Variação da resistência da chapa com a largura, método dos momentos a '*'	59
Fig. 3. 22 Variação da resistência da chapa com a profundidade, método dos momentos a '*'	60
Fig. 3. 23 Chapa discretizada com pontos fonte separados por 1 cm	60

Fig 4. 1	Localização de imagens em solo de 2 estratos	64
Fig 4. 2	Distribuição de potencial à superfície para vara de 3 m	67
Fig 4. 3	Potencial à superfície para diferentes profundidades de enterramento	68
Fig 4. 4	Tensão de passo para a vara às mesmas profundidades	69
Fig 4. 5	Digitalização da fórmula de Tagg	69
Fig 4. 6	Aumento da resistência devido a uma camada inferior mais resistiva	70
Fig 4. 7	Potencial à superfície segundo a recta $y=0$	71
Fig 4. 8	Potencial à superfície segundo a recta $x=5$	71
Fig 4. 9	Tensão de passo segundo a recta $y=0$	72
Fig 4. 10	Tensão de passo segundo a recta $x=5$	72
Fig 4. 11	Vara em solo com 2 estratos	74
Fig 4. 12	Potencial à superfície para vara em diferentes tipos de solo	75
Fig 4. 13	Tensão de passo para a vara anterior em solo de dois estratos	76
Fig 4. 14	Grelha enterrada no estrato inferior	76
Fig 4. 15	Vara em duas camadas.	77
Fig 4. 16	Perspectiva 3D da matriz de coeficientes	80
Fig 4. 17	Cálculo de potencial num ponto à superfície da vara	81
Fig. 5. 1	Fonte filiforme de corrente no estrato superior	85
Fig. 5. 2	Potencial no segmento 2 devido a corrente que sai do segmento 1	88
Fig. 5. 3	Grelha de Amoroso e outros	96
Fig. 5. 4	Equipotenciais verticais em grelha a 0,1 m de profundidade	97
Fig. 5. 5	Equipotenciais verticais em grelha a 0,9 m de profundidade	97
Fig. 5. 6	Eléctrodo de Amoroso do tipo β	99
Fig. 5. 7	Eléctrodo nas condições de gerar singularidade	102
Fig. 5. 8	Equipotenciais no estrato superior	103
Fig. 5. 9	Equipotenciais à superfície	103
Fig. 5. 10	Equipotenciais em profundidade para uma espessura de 0,2 m	104
Fig. 5. 11	Potencial de superfície para duas espessuras do estrato	105
Fig. 5. 12	Potencial no plano vertical de grelha	106
Fig. 5. 13	Potencial à superfície devido a grelha de terra	106
Fig. 5. 14	Variação do erro da resistência para diferentes comprimentos de vara $k>0$	109
Fig. 5. 15	Variação do erro da resistência para diferentes comprimentos de vara $K<0$	110
Fig. 6. 1	Malha de elementos finitos na ponta inferior da vara	113
Fig. 6. 2	Elemento finito triangular	113

Fig. 6. 3	Numeração local de nodos de elementos finitos	116
Fig. 6. 4	Numeração nodal global	117
Fig. 6. 5	Discretização da zona cilíndrica	119
Fig. 6. 6	Potencial a 1 cm de distância ao eixo	119
Fig. 6. 7	Modelização da ponta da vara com a equipotencial de zero volt a 3 cm	121
Fig. 6. 8	Curvas equipotenciais em profundidade para uma vara de 2 m.....	124
Fig. 6. 9	Malha de elementos finitos em torno de cabo enterrado	125
Fig. 7. 1	Eléctrodo hemisférico de raio 'b'	127
Fig. 7. 2	Circuito com eléctrodos hemisféricos com afastamento $o \gg b$	128
Fig. 7. 3	Diferenças de potencial no solo	129
Fig. 7. 4	Medida da resistividade pelo Método de Wenner	130
Fig. 7. 5	Distribuição de corrente em profundidade	130
Fig. 7. 6	Medição da resistividade pelo método de Palmer	131
Fig. 7. 7	Medição da resistividade pelo método da vara enterrada.....	132
Fig. 7. 8	Variação da resistividade com a temperatura.	133
Fig. 7. 9	Variação da resistividade com o índice de humidade	134
Fig. 7. 10	Perfil típico de um solo homogéneo	134
Fig. 7. 11	Curva de resistividade com o espaçamento, Guarda 28 de Maio de 2015.....	135
Fig. 7. 12	Curva de resistividade com o espaçamento.	135
Fig. 7. 13	Curva de resistividade com o espaçamento, Vagueira Abril de 2012.	137
Fig. 7. 14	Obtenção de $M(\delta=h)$ pela curva	139
Fig. 7. 15	Obtenção do espaçamento igual à espessura do estrato	139
Fig. 7. 16	Curvas de Sunde	140
Fig. 7. 17	Detecção de a/h na curva de resistividade	141
Fig. 7. 18	Curva de resistividade sem assíptota baixa	142
Fig. 7. 19	Curvas fundamentais de Tagg, para a curva da fig. 7.18	143
Fig. 7. 20	Solução gráfica do sistema	144
Fig. 7. 21	Resistividade aparente de solo de 3 estratos	146
Fig. 7. 22	Cruzamento das curvas fundamentais de Tagg com as rectas $y=0,69$ e $y=0,56$	147
Fig. 7. 23	Cruzamento de curvas.....	148
Fig. 7. 24	Intersecção das rectas horizontais com as curvas mestras de Tagg para $k>0$	149
Fig. 7. 25	Cruzamento de curvas para o trecho ascendente da curva de resistividade	150
Fig. 7. 26	Medida de terra pelo método da queda de tensão	151
Fig. 7. 27	Parâmetros para estimar distância da pinça de tensão	152
Fig. 7. 28	Curvas para obtenção da distância da haste de tensão	152

Fig. 8. 1	Varição da função objectivo em solo homogéneo.	156
Fig. 8. 2	Varição da função objectivo para vara longa, 1ª iteração	166
Fig. 8. 3	Varição da função objectivo para vara longa (2ª iteração)	167
Fig. 8. 4	Varição da função objectivo com o parâmetro t (1ª iteração)	170
Fig. 8. 5	Varição da função objectivo com o parâmetro t , (2ª iteração)	171
Fig. 9. 1	Tina de ensaios.....	175
Fig. 9. 2	Circuito com tina de água potável.....	176
Fig. 9. 3	Eléctrodo à escala e pontos de medida.....	176
Fig. 9. 4	Parâmetros da fórmula (9.1)	177
Fig. 9. 5	Fio horizontal imerso e fios de medida de potencial.....	178
Fig. 9. 6	Fio simulando cabo de 10 m	178
Fig. 9. 7	Varição da resistividade do terreno com a profundidade, em 12/2011	180
Fig. 9. 8	Curva $M(a=h)$ para ensaios na Vagueira, em Dezembro 2011	181
Fig. 9. 9	Obtenção da espessura do estrato pelo método simplificado.	181
Fig. 9. 10	Curvas de Sunde para ensaios na Vagueira, em Dezembro 2011.....	182
Fig. 9. 11	Cálculo da espessura do estrato superior segundo o padrão do IEEE	183
Fig. 9. 12	Curvas para detectar a colocação das pinças	184
Fig. 9. 13	Validação da medida da vara	185
Fig. 9. 14	Curva de resistividade típica de um solo de três estratos	190
Fig. 9. 15	Curvas fundamentais de Tagg para $k>0$ e rectas de interesse.	190
Fig. 9. 16	Cruzamento das curvas obtidas pelo método de Tagg.....	191
Fig. 9. 17	Curvas mestras de Tagg para $k<0$ e rectas de interesse.....	193
Fig. 9. 18	Cruzamento das curvas obtidas pelo método de Tagg.....	194
Fig. 9. 19	Modelo A de solo com três estratos	194
Fig. 9. 20	Curvas de Sunde para o trecho inferior	195
Fig. 9. 21	Modelo B de solo com três estratos	196
Fig. 10. 1	Eléctrodo de terra em serpentina.....	199
Fig. 10. 2	Pontos fonte e de superfície para a serpentina	200
Fig. 10. 3	Comparação entre eléctrodos em solo homogéneo ($k=0$)	201
Fig. 10. 4	Potencial à superfície para a serpentina ($k=0$)	201
Fig. 10. 5	Potencial à superfície ao longo da vala (a) e na perpendicular ao meio (b) ($k=0$) .	202
Fig. 10. 6	Comparação entre eléctrodos em solo de 2 estratos ($k>0$)	203
Fig. 10. 7	Potencial à superfície para a serpentina ($k>0$)	203

Fig. 10. 8 Potencial à superfície ao longo da vala (a) e na perpendicular ao meio (b) ($k>0$) .	204
Fig. 10. 9 Comparação entre eléctrodos em solo de 2 estratos ($k<0$)	205
Fig. 10. 10 Potencial à superfície devido à serpentina ($k<0$)	205
Fig. 10. 11 Potencial à superfície ao longo da vala (a) e na perpendicular ao meio (b) ($k<0$)	206
Fig. 10. 12 Resistência da serpentina, calculada pelos métodos da matriz e empírico.....	207
Fig. 10. 13 Comparação entre eléctrodos em solo de 2 estratos ($k>0$) com algoritmo alternativo	208

Índice de tabelas

Tabela 2. 1 Resultados em função do número de pontos da discretização.....	21
Tabela 2. 2 Resistência e erro relativo em função da segmentação	24
Tabela 2. 3 Valores máximos do potencial de contacto	30
Tabela 3. 1 Factores de escala, para o paralelo de varas	42
Tabela 3. 2 Resistência de cabo para diferentes limiares de corrente	49
Tabela 3. 3 Resistência da chapa vertical em função do comprimento.....	61
Tabela 4. 1 Resistência de vara de 3 m, 8 mm de raio, no estrato superior	67
Tabela 4. 2 Resistência de cabo de 10 m, enterrado a $\frac{1}{2}$ m	73
Tabela 4. 3 Cálculo do potencial em função da região onde se localizam os pontos.....	77
Tabela 4. 4 Vara de 2 m, 8 mm de raio, em dois estratos	79
Tabela 4. 5 Termos da série	81
Tabela 4. 6 Vara de 2 m, 8 mm de raio, com deslocamento de pontos de superfície.....	82
Tabela 4. 7 Aferição da fórmula de Hummel para vara de 2 m, 8 mm de raio.	83
Tabela 5. 1 Comparação da função R_{1x1x} com a fórmula de Tagg	91
Tabela 5. 2 Comparação da função R_{1y1y} com a fórmula de Tagg	92
Tabela 5. 3 Comparação da função R_{1z1z} com a fórmula de Tagg	92
Tabela 5. 4 Resistência de eléctrodos em grelha, comparação com Amoruso.....	96
Tabela 5. 5 Especificação da função M em função da orientação dos segmentos	98
Tabela 5. 6 Método dos momentos versus fórmula de Tagg para vara longa	108
Tabela 5. 7 Efeito do deslocamento de imagens no Método dos momentos.	109
Tabela 6. 1 Variação do potencial com a distância em superfícies cilíndricas.	120
Tabela 6. 2 Variação da resistência, com a espessura do estrato nos 3 cm iniciais ($k=2/3$) ..	122
Tabela 6. 3 Variação da resistência, com a espessura do estrato nos 3 cm iniciais ($k=-2/3$) .	122
Tabela 6. 4 Variação da resistência, com a espessura do estrato nos 15 cm iniciais ($k=2/3$).	122
Tabela 6. 5 Variação da resistência, com a espessura do estrato nos 15 cm iniciais ($k=-2/3$)	122
Tabela 6. 6 Variação da resistência com a espessura do estrato, modelo do IEEE, ($k=2/3$) ..	123
Tabela 6. 7 Variação da resistência com a espessura do estrato, modelo do IEEE, ($k=-2/3$) .	123
Tabela 7. 1 Intervalos da resistividade eléctrica de solos.....	132
Tabela 7. 2 Valores típicos da resistividade eléctrica.....	133
Tabela 7. 3 Modelos de solo homogéneo para exemplo da fig.7.12.	136
Tabela 7. 4 Abcissas dos pontos de intersecção para $\delta = 4$	143

Tabela 7. 5	Abcissas dos pontos de intersecção para $\delta = 7$.	143
Tabela 7. 6	Valores da resistividade de solo.	145
Tabela 7. 7	Pontos de intersecção com a recta $y=0,69$	146
Tabela 7. 8	Pontos de intersecção com a recta $y=0,56$	147
Tabela 7. 9	Pontos de intersecção com a recta $y=0,77$	149
Tabela 7. 10	Pontos de intersecção com a recta $y=0,71$	149
Tabela 7. 11	Distâncias das hastes auxiliares ao eléctrodo a medir	151
Tabela 8. 1	Resistência medida para diferentes varas	154
Tabela 8. 2	Resistência medida e simulada	156
Tabela 8. 3	Acréscimos e resistência calculada em torno de um ponto (500 100 1.5)	158
Tabela 8. 4	Derivadas parciais numéricas obtidas da tabela 8.3	158
Tabela 8. 5	Derivadas parciais numéricas em torno do ponto (100,500,1)	158
Tabela 8. 6	Resistência calculada em torno de um ponto inicial ($k=2/3$)	160
Tabela 8. 7	Derivadas parciais numéricas, obtidas da tabela 8.6	160
Tabela 8. 8	Resistência calculada para em torno de um ponto inicial ($k=-2/3$)	161
Tabela 8. 9	Calculo das derivadas numéricas ($k=-2/3$) para a tabela 8.8	161
Tabela 8. 10	Resistência em torno de um ponto inicial ($k=-2/3$) para vara longa	163
Tabela 8. 11	Derivadas numéricas, obtidas da tabela 8.10	163
Tabela 8. 12	Resistência calculada para em torno de um ponto inicial ($k=2/3$)	163
Tabela 8. 13	Derivadas numéricas obtidas de tabela 8.12	163
Tabela 8. 14	Resultados das iterações para optimização de uma medida	168
Tabela 8. 15	Resistências medidas e simuladas para três varas	171
Tabela 8. 16	Resistências medidas e simuladas para o método de Newton	173
Tabela 9. 1	Medidas efectuadas para simular vara em tina	177
Tabela 9. 2	Comparação de potenciais teóricos e medidos em tina para cabo	179
Tabela 9. 3	Resistividade aparente versus espaçamento de pinças	180
Tabela 9. 4	Valores da Resistências dos eléctrodos testados.	184
Tabela 9. 5	Comparação de estimativas em solo homogéneo equivalente, ρ : média aritmética, dois valores extremos, do estrato e por Hummel.	185
Tabela 9. 6	Comparação de modelos de solo pela fórmula de Tagg	186
Tabela 9. 7	Aferição dos resultados obtidos pelo método dos momentos	187
Tabela 9. 8	Medidas de Abril	187
Tabela 9. 9	Comparação de estimativas em solo homogéneo equivalente, ρ : média aritmética, dois valores extremos, do estrato e por Hummel.	188

Tabela 9. 10 Comparação de modelos de solo pela fórmula de Tagg	188
Tabela 9. 11 Aferição dos resultados obtidos pelo método dos momentos	188
Tabela 9. 12 Coordenadas dos pontos de intersecção da recta 0,91 com as curvas mestras .	191
Tabela 9. 13 Coordenadas dos pontos de intersecção da recta 0,58 com as curvas mestras .	191
Tabela 9. 14 Valores da solução para $a=4,7$ m.	193
Tabela 9. 15 Valores da solução para $a=4,92$ m.	193
Tabela 9. 16 Medidas de campo de varas em Outubro 2012	196
Tabela 9. 17 Comparação de estimativas em solo homogéneo equivalente, ρ : média aritmética, do estrato e por Hummel.	197
Tabela 9. 18 Aferição do método dos momentos pelos resultados obtidos	197
Tabela 10. 1 Comparação de valores medidos e calculados	209

Lista de siglas e acrónimos

Lista de Siglas

EDP	Electricidade de Portugal
IEEE	Institute of Electric and Electronic Engineers
Mdm	Método dos momentos
RTIEBT	Regras Técnicas das Instalações Eléctricas de Baixa Tensão
VDF	Voltage Distribution Factors

Lista de Acrónimos

FEM	Método dos elementos finitos
-----	------------------------------

Capítulo 1 - Enquadramento e motivação

Introdução

Neste capítulo é feita uma breve introdução à problemática dos eléctrodos de terra, quer do ponto de vista funcional, quer da óptica da segurança dos seres humanos. Apresenta-se uma revisão bibliográfica desde os primeiros autores que deduziram fórmulas para o cálculo aproximado de algumas geometrias específicas de eléctrodos, até aos métodos numéricos gerais para usar em qualquer configuração de eléctrodos. Apresentam-se as ideias fundamentais que motivaram a investigação deste tema, e apontam-se as principais inovações que incidem na detecção e superação das singularidades dos métodos numéricos, baseados na teoria das imagens, e numa abordagem nova ao eléctrodo em serpentina, donde resultaram três artigos internacionais e um capítulo de livro.

1.1 Enquadramento

A segurança e o desempenho de um sistema eléctrico, devem-se em grande parte ao sistema de terra. Este, permite à corrente fluir para a terra durante um curto-circuito, numa situação de desequilíbrio e, ainda, numa descarga atmosférica. Será necessário então, uma ligação à terra para garantir que haja um sistema de terra de protecção a fim de assegurar a eficiência de exploração e, em particular, a segurança dos utilizadores, a protecção de pessoas, das instalações e do equipamento sendo, por isso, vital a sua existência, assumindo, este sistema, um factor preponderante para garantir os níveis de segurança. A resistência do eléctrodo de terra terá de ser baixa, caso contrário, durante a corrente de defeito, a tensão nos condutores ligados ao referido eléctrodo, terá um potencial demasiado elevado, podendo originar danos na estrutura a proteger, bem como aos seus utilizadores.

H. B. Dwight foi o primeiro a apresentar, em 1936, um formulário para a resistência de terra de vários eléctrodos, em terrenos homogéneos [1]. Dwight considerou que a corrente eléctrica de uma vareta de terra, para e através da terra, é facilmente obtida a partir da expressão do fluxo dieléctrico de um cilindro carregado isolado, ou seja, o problema do cálculo da resistência de difusão da vareta é reduzido ao cálculo da capacidade de um cilindro isolado cujo comprimento seja muito maior que o raio. A capacidade é calculada pelo método do potencial médio, tendo Dwight relacionado, por uma fórmula simples, a resistência em corrente contínua com a capacidade. O mesmo princípio foi aplicado a outras configurações de eléctrodos. Embora um padrão do IEEE [2] do século passado indique que estas fórmulas dão valores por excesso na ordem dos 13 %, a referida organização continua a aconselhar o uso do referido formulário em solo homogéneo, em actualizações recentes do referido padrão [3]. Os eléctrodos tratados por este autor são anéis, discos, varas e condutor

horizontal isolado ou constituindo estrelas. Na década de 40 do século XX surge outro sistematizador, Reinhold Rudenberg, que obteve fórmulas aproximadas [4], usando a teoria das imagens, para vários eléctrodos em terrenos homogéneos. Rudenberg deduz uma fórmula para o potencial à superfície provocado por uma vara de terra cravada com o topo rente à superfície do solo, obtendo-se por subtracção as tensões de passo e de toque e permitindo, portanto, calcular a corrente de electrocussão em seres humanos. O eléctrodo mais fácil de enterrar é a vara, o que geralmente se consegue sem abrir cova pelo que Zaborsky e Rittenhouse apresentaram um estudo, no início dos anos 50 [5], sobre as dimensões óptimas das varas de terra, concluindo que é mais barato aumentar o comprimento das varas do que o seu diâmetro, para se obter uma dada resistência de terra. Em terrenos rochosos popularizou-se, nos Estados Unidos, a grelha enterrada entre 30 a 60 cm de profundidade, na zona de terra vegetal sobre o estrato rochoso. As grelhas têm a vantagem de quase equalizar o potencial à superfície do solo que lhe está directamente por cima, pormenor importante pois evita quedas de tensão entre as carcaças de máquinas eléctricas que são aparafusadas ao chão de muitas fábricas. Entre os artigos antigos que o standard do IEEE [3] considera relevantes, inclui-se o de Gross, Chitnis e Stratton [6], 1953, em que estes autores apresentam a primeira definição concisa de resistência de terra: resistência de terra é a resistência entre o eléctrodo protector da instalação e um outro a uma distância infinita e de resistência nula. No mesmo artigo, os autores obtêm uma fórmula para a resistência de terra de um quadrado enterrado. Esta fórmula é um majorante para grelhas quadradas. Por outro lado, se a densidade de condutores que constituem a grelha aumentar indefinidamente, obtém-se uma chapa quadrada cuja resistência eléctrica é, obviamente, um minorante para grelhas de igual dimensão. Segundo os mesmos autores, o projectista de grelhas deve considerar duas conclusões importantes: A área da grelha deve ser a maior possível e o diâmetro do condutor é determinado por considerações térmicas e não eléctricas. A profundidade de colocação dos eléctrodos é determinada pela natureza do solo. Deve ser a maior possível, sem grandes custos de escavação. Em 1954, Schwarz apresenta no seu artigo [7] fórmulas para grelhas, varas múltiplas e grelhas com varas. Para grelhas com varas verticais ligadas, deve considerar-se a resistência mútua entre as varas e a grelha. Schwarz conclui que acrescentar varas a uma grelha traduz uma diminuição de resistência da ordem dos 5 %. Assim, só vale a pena acrescentar as varas se a resistividade superficial do solo tiver grandes flutuações que possam levar a resistência total da grelha a subir demasiado. Nestes casos, a resistência do conjunto de varas deve, por si só, ser suficientemente baixa e nunca depender da resistência da grelha.

Nos anos 60 do século XX, Tagg [8] deduziu fórmulas para cabo e vara em solo de dois estratos podendo esta estar no estrato superior ou atravessar o referido estrato até ao estrato inferior e considerando o cabo no estrato superior. Contudo, o número de eléctrodos com uma fórmula, reduz-se a estes três casos já que a dedução de expressões para a resistência dos eléctrodos de terra num solo com dois estratos, se revela extremamente complexa. Tagg formulou o problema por uma equação de Laplace ao potencial eléctrico, que resolveu para

os casos considerados. Na mesma obra, são apresentados os primeiros métodos de Tagg para se obter um modelo de solo de dois estratos, partindo das medidas da resistividade aparente. Em 1969, Sunde [9] apresentou um método numérico para solo com dois estratos, que também pode ser usado em solos homogêneos, quando o eléctrodo de terra tem uma geometria para a qual não existe uma fórmula de cálculo da resistência. Para Sunde, o eléctrodo fundamental é a fonte pontual de corrente, para a qual deduziu a solução da equação de Laplace do potencial no solo e o método numérico proposto baseia-se nos seguintes pressupostos: Os condutores que constituem o eléctrodo estão ao mesmo potencial; os condutores são substituídos pelo seu eixo; o eixo é discretizado num conjunto de pontos fontes de corrente. O potencial, em qualquer ponto do solo, é obtido pelo princípio da sobreposição, considerando a corrente que sai das várias fontes pontuais de corrente. Este método é conhecido pelo método da matriz e requer muita memória para cálculo da resistência de grelhas de terra com alguma dimensão. É considerado o método numérico fundamental já que alguns dos outros são derivações deste. A solução de Sunde para a fonte pontual de corrente pode ser integrada segundo qualquer um dos eixos coordenados, obtendo-se uma fórmula para o potencial de um condutor orientado segundo x , y ou z . As fórmulas assim obtidas são a base do método dos momentos para cálculo da resistência de um condutor e foram apresentadas em 1979 por Joy [10] e complementados por Meliopoulos *et al* [11] em 1981. Uma generalização foi obtida ainda no mesmo ano por Robert Heppe [12] para eléctrodos com qualquer orientação, embora na prática seja pouco utilizada já que os eléctrodos mais comuns, grelhas com varas, têm os condutores com ângulos rectos entre si, ou seja, orientados cartesianamente por escolha conveniente da origem e orientação dos eixos. Tão importante como calcular a resistência de um eléctrodo de terra é a sua medida, através do método da queda de potencial. As distâncias de colocação das pinças de corrente e de tensão foram reavaliadas para os solos de dois estratos [13], considerando também o caso frequente em que não existe espaço em torno do eléctrodo para a colocação das referidas pinças às distâncias convenientes, num artigo que foi determinante nos ensaios de terreno efectuados no decorrer desta tese.

Na década de 90, surgem alguns artigos usando o método dos elementos finitos, por acaso em países de Língua Portuguesa, como o de Cardoso *et al* [14], no Brasil e de Antunes *et al* [15], em Portugal, neste último caso considerando solos homogêneos. Este método é dos mais precisos mas exige uma pesada discretização do solo envolvente. É um método indirecto de resolver a equação de Laplace, já que é sabido que a solução particular desta, minimiza a energia armazenada em torno do eléctrodo, pelo que o método se reduz a minimizar uma funcional de energia. Em Espanha um artigo de interesse que usa o mesmo método, é o de Alonso *et al* [16] dos poucos com comparação entre valores teóricos e medidos, tendo os valores teóricos uma precisão de três casas decimais 0,987 Ω , para uma medida pouco precisa de 1 Ω . Em meados da década, Salama *et al* [17] desenvolveram fórmulas para estimar a resistência de grelhas, usando a aproximação assintótica-sintética em solos de duas camadas. A aproximação referida, é uma expressão obtida a partir das assíntotas

definidoras de dois casos limite, derivados da espessura do estrato superior tender para zero ou para infinito, ou seja, o solo no limite é homogéneo, ora com a resistividade do estrato inferior, ora com a resistividade do estrato superior. Em 1998 Ma *et al* [18] comparam o método dos momentos com outros em que se abandona a premissa de que o eléctrodo de terra é uma estrutura equipotencial, usando nomeadamente a teoria do campo eléctrico. Os resultados da comparação mostram que, em grelhas de 60x40 m, os valores calculados, quer para a resistência, quer para o potencial da grelha, são idênticos pelos dois métodos. Em grelhas de 280x140 m, os resultados diferem 3 % e em grelhas de 440x280 m, o desvio entre a resistência calculada pelo método dos momentos e as outras aproximações, é de 15%. Os autores concluem que o método dos momentos, muito mais simples de usar, continua a ser uma boa aproximação do fenómeno.

Os eléctrodos de terra nas fundações de cimento, um aproveitamento feliz do aço existente na estrutura das fundações dos edifícios, poupado à corrosão e mantido num meio que preserva um certo grau de humidade, começaram a ser usados nos Estados Unidos na primeira metade do século XX e foram objecto de estudo detalhado e sistemático por Kostic [19] [20] [21] durante a década de 90 do referido século. Na passagem do milénio, no período entre 1998 e 2003, apareceram vários artigos sobre o método dos elementos de fronteira aplicado a eléctrodos de terra. Autores como Colominas *et al*, [22] [23] [24], Adriano *et al* [25] e J. Ma *et al* [26], transformaram a equação diferencial que governa o fenómeno numa equação integral equivalente, aplicada à fronteira do modelo. A discretização é feita na fronteira dos modelos e não obriga a uma discretização da região envolvida pelas fronteiras. Um outro modelo numérico alternativo é o método das imagens complexas, quase estáticas, considerando a forma fechada da função de Green e formulando o fenómeno por uma equação de Poisson [27].

Em 2003, Berberovic *et al* [28] refinam o método dos momentos, usando polinómios de segunda e terceira ordem, na estimativa da distribuição de correntes nos segmentos de discretização. As formulações teóricas do método são, contudo, muito mais claras do que em Joy [10]. Uma variação neste tema foi devida a Sharma *et al* que usaram o método dos momentos de Galerkin [29].

O modelo de duas camadas de solo é usado, em 2004, para estudar o fenómeno da ionização do terreno, por Liu *et al* [30], onde se conclui que, na região de ionização, a resistividade do solo é drasticamente reduzida a 7% do seu valor, anterior ao fenómeno de ionização. Estes autores consideraram o eléctrodo como uma linha de transmissão, cujos parâmetros distribuídos foram calculados por elementos finitos e também analiticamente. Uma técnica inovadora para baixar a resistividade dos terrenos, sem custos ambientais, foi desenvolvida na China, efectuando furos artesianos com 5 cm de diâmetro e profundidades entre os 11 e os 15 m, na periferia de uma grelha de terra [31]. Em 2006, o método de medida da resistência de eléctrodos, próximos de uma falha vertical, é discutido em [32]. Neste ano Salam *et al* [33] apresentam o cálculo da resistência de terra de uma vara enterrada num solo de três estratos, usando redes neuronais, e fazendo a previsão da variação sazonal da resistência de

terra. A medida regular da resistência de eléctrodos instalados, obrigava ao corte de serviço das instalações em funcionamento com os custos inerentes a uma paragem, pelo que, em 2007, Choi *et al* apresentam uma metodologia para medir a resistência de terra de um eléctrodo em serviço [34].

As últimas tendências da instalação e melhoramentos de eléctrodos de terra apontam para o tratamento de solo com químicos. Assim, em 2011, Feng *et al* [35] apresentam um relatório sobre o melhoramento de terras numa linha de alta tensão, usando materiais de baixa resistividade no enchimento parcial de covas. Na mesma linha, Khan *et al* [36] usaram materiais do mesmo tipo no enchimento de covas para enterrar varas, mas apresentam fórmulas teóricas para a estimativa da resistência da vara, além de calcularem as dimensões da zona de enchimento, dos materiais de baixa resistividade, por optimização, de modo a poupar no volume de materiais a usar.

O primeiro autor que se preocupou com a variação da resistividade com a profundidade, foi Rudenberg na obra já citada [4]. O cálculo era feito a partir de medidas parciais de uma vara cravada no solo, obtendo a partir destas, a resistividade do terreno à profundidade que a vara atingia na altura da medida. O pioneiro a desenvolver metodologias para solos de dois estratos foi F. Tagg na obra já referida [8]. Tagg apresenta dois métodos gráficos, mantendo-se o primeiro deles em uso, na obtenção de modelos de solos de três estratos. Em 1984, Meliopoulos *et al* [37] propõem uma abordagem totalmente nova para se obter o perfil de um solo a partir das medidas de resistência de uma ou mais varas, fazendo a estimativa dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados ponderados, procurando minimizar a soma dos quadrados dos erros relativos entre as medidas no terreno e a estimativa para um dado conjunto de parâmetros do solo. Em alternativa, Mombello *et al* [38] desenvolveram um método para obterem um modelo de solo de dois estratos, para eléctrodos no estrato superior, preservando a resistividade deste, assim como a espessura, focando o estudo no cálculo de uma resistividade equivalente para o estrato inferior, que substitui os restantes estratos, usando o método dos mínimos quadrados. Em Portugal, Ressureição Cordeiro [39] apresenta uma tese de doutoramento em que passa em revista o estado da arte e, ciente de que o valor da resistividade usado no projecto é a grande fonte de erro, apresenta um método analítico conhecido por caminho do gradiente máximo para estimar o valor da 'resistividade média real' [39] de um solo. Como corolário, R. Cordeiro publicou artigos que sintetizam a sua investigação [40] e [41]. Em 1996, J. Ma *et al*, publicaram um trabalho relevante [42] sobre a obtenção de modelos equivalentes de solos com 1 ou 2 estratos, para solos que, na realidade, possuíam 3 ou 6 estratos. Estes autores salientaram que, se for considerada a maior das resistividades medidas, supondo um solo homogéneo com essa resistividade, se pode obter um majorante para a resistência do eléctrodo, enquanto que se for usada a menor das resistividades se obterá um minorante. Contudo, o majorante pode ser vinte vezes maior que o minorante, resultando num intervalo bastante largo. Os mesmos autores mostraram que o referido intervalo é uma ordem de grandeza mais estreito se forem

usados solos equivalentes de dois estratos. Em 1997, é publicado um artigo pouco citado [43], o qual quantifica um critério para definir se um solo deve, ou não, ser considerado homogêneo. Slaoui *et al* [44], propuseram uma abordagem para a determinação dos parâmetros do solo com mais do que dois estratos, baseada na teoria dos filtros eléctricos, propondo o conceito de transformada da resistividade. A curva de resistividade aparente, é obtida a partir das medidas e comparada aquela curva a um sinal temporal que está a ser amostrado. O efeito da chuva e do gelo na camada superior do solo é apresentado em [45], deduzindo-se a necessidade de usar varas longas se a componente horizontal do sistema, por exemplo a grelha, ficar na faixa de solo que gela no inverno. Uma estimativa de parâmetros de solo multicamada, usando o método das imagens complexas, é apresentado em [46]. Os parâmetros do solo são estimados de modo a que a curva teórica seja calculada com um mínimo de desvios para a curva real. A optimização é feita com o algoritmo de minimização quase-Newton mas a novidade do artigo reside na utilização do quadrado das resistividades e das espessuras dos estratos, obtendo-se, assim, um problema de optimização não-linear sem restrições. Refira-se, finalmente, que já existe a estimativa de parâmetros usando algoritmos genéticos [47].

Os riscos inerentes aos potenciais eléctricos no solo, durante uma corrente de defeito, cedo foram descobertos pelos electricistas e pessoal que trabalhava em instalações eléctricas, logo de início nas instalações de Edison. Rudenberg [4] apresentou uma fórmula para cálculo de potenciais à superfície para a vara cravada com o topo rente ao solo, pelo que os valores calculados eram exageradamente elevados face aos valores de varas enterradas com o topo a 0,8 m, conforme prática corrente em muitas empresas. Contudo, só depois dos muitos estudos publicados por Dalziel, o principal dos quais foi publicado em 1960 [48], onde refere que 99,5% dos seres humanos saudáveis podem suportar correntes eléctricas, à frequência industrial, de 165 mA durante um segundo sem fibrilhação ventricular, é que a engenharia procurou quantificar os potenciais de superfície, para se poderem então calcular potenciais de toque e de passo. O citado artigo de Dalziel, foi fundamental na influência sobre o Std 80 do ANSI/IEEE que, em 1961, definiu pela primeira vez critérios de segurança para as tensões de passo e de toque, além de assumir que a resistência média do corpo humano entre as duas mãos ou entre mão e pé tem o valor de 1000 Ω . Refira-se que, a edição de 1986 do referido Std 80, estabeleceu o limiar de fibrilhação de 116 mA para os mais jovens, com 50 kg de peso, baixando também o limiar dos adultos para 157 mA, supondo um peso médio de 70 kg, em virtude de um artigo do mesmo Dalziel [49], que introduziu também um factor de correcção nos critérios de segurança, para solos com uma camada superior fina e de alta resistência, tal como a gravilha usada em subestações. O factor de correcção foi redefinido na edição de 1986 do referido guia ANSI/IEEE. Relativamente ao cálculo de tensões de passo sobre o vértice de grelhas em subestações, formulada inicialmente no Std 80 de 1961, foram actualizadas em 1986, devido às correcções de Sverak [50] nas fórmulas aproximadas que dão a tensão de passo, e num dos parâmetros reequacionados na edição de 1996 para uma

generalização a grelhas não rectangulares. Esta perspectiva histórica sobre o Std 80, pode encontrar-se em [51]. Recuando um pouco no tempo, refira-se que, em 1972, Mukhedkar *et al* [52] apresentaram um estudo experimental sobre a distribuição de potenciais à superfície, tendo concluído que, nas proximidades de um eléctrodo, as curvas equipotenciais seguem a forma do eléctrodo mas a uma distância três a quatro vezes maior do que a maior dimensão do eléctrodo as curvas tornam-se iguais e sensivelmente circulares. Concluíram, ainda, que o campo eléctrico é máximo na proximidade do eléctrodo e que para um eléctrodo colocado na camada superior, o referido campo eléctrico depende apenas da resistividade da camada superior. Assim, o cálculo de potenciais de passo ou toque, depende fundamentalmente da resistividade do estrato superior, podendo-se usar o formalismo desenvolvido em solo homogéneo [53]. Em 1992, Chow *et al* [54], apresentam um método para calcular os potenciais no estrato superior, provocados por um anel no mesmo estrato, eléctrodo que tem simetria axial, num solo com quatro estratos, considerando imagens complexas geradas pelo método de Prony. O cálculo de potenciais à superfície por diferenças finitas é apresentado em [55] enquanto que as tensões de passo e contacto são calculadas pelo método do gradiente de potencial por M. Cordeiro [56]. Em 1999, Lee e Meliopoulos [57], fazem uma comparação entre os critérios de segurança do IEEE Std 80 e os critérios do IEC 479-1, concluindo que há mais exigência, ora num ora noutra, mas relevando a simplicidade das fórmulas propostas pelo Std 80, sem descurar a precisão. Em Taiwan, um país com 42 % da área de Portugal, mas com uma população de 23 milhões de habitantes, a pressão imobiliária leva a operadora de energia eléctrica a construir subestações mais pequenas em área, dentro de edifícios, o que torna mais exigente o dimensionamento, de modo a garantir tensões de passo razoáveis na periferia das instalações, que já não estão em lugares ermos, mas sim em ruas com pessoas na proximidade. Um artigo que apresenta as diferenças de dimensionamento entre subestações fora de portas e dentro de portas, foi publicado em 2005 [58]. Neste ano, He *et al* [59], publicaram um estudo sobre desenho óptimo de grelhas com maior densidade de condutores na periferia destas, a fim de minimizar as tensões de toque e a resistência das grelhas. Este estudo definiu uma taxa de compressão da separação entre condutores do centro para a periferia da grelha. A análise considerou a influência de um estrato gelado, na parte superior do solo.

Em 2006, Nayel *et al* [60] apresentam um trabalho sobre tensões de passo e toque provocadas por uma descarga atmosférica directa numa torre de alta tensão, considerando efeitos capacitivos no solo, concluindo que aquelas tensões são proporcionais à altura da torre e inversamente proporcionais à resistividade do solo. Um estudo menos exaustivo [61], sobre torres de comunicações de 60 m de altura, foi apresentado dois anos depois, onde se calculam tensões de passo fora da vedação trapezoidal com 22x29 m nas maiores dimensões, usando a teoria do campo eléctrico. Em 2007, Colominas *et al* [62], usando o método dos elementos de fronteira, consideraram os efeitos de condutores inertes e calcularam os potenciais transferidos ao longo dos condutores, esticando as equipotenciais relativamente altas para longe do eléctrodo activo. Em 2009, Khodr *et al* [63] desenvolveram um modelo de

optimização, usando programação linear, minimizando uma função de custos dos eléctrodos a instalar com restrições técnicas definidas pelas tensões máximas de toque e de passo admissíveis, numa parceria com investigadores portugueses.

Os primeiros estudos sistemáticos de fenómenos transitórios em terras de protecção, foram feitas por Bellachi *et al* [64], [65] e [66] que, em 1941-43, apresentaram uma análise completa das características das varas de terra. Quase quarenta anos depois, Gupta e Thapar [67], apresentaram fórmulas empíricas para a impedância de uma grelha de terra numa subestação, definida como o quociente entre o pico de tensão e o pico de corrente, no ponto de ligação do cabo de terra à grelha. Como os referidos máximos não coincidem temporalmente, o conceito foi refinado em [68], usando um modelo circuital para os eléctrodos de terra. Em 1980, Verma *et al*, apresentaram um artigo [69] em que trataram um eléctrodo horizontal como uma linha de transmissão, tendo aplicado as equações das linhas de transmissão e obtido a impedância característica do eléctrodo, usando para a entrada uma função de Dirac, definida no espaço e no tempo, como representativa da descarga atmosférica. Os mesmos autores obtiveram uma expressão aproximada para a impedância de grelhas em solo homogéneo [70] em 1981. Em 1995, o modelo de J. Marti para linhas de transmissão, foi aplicado a condutores enterrados [71]. Em 2001, Grcev [72] mostrou que os fenómenos transitórios são desprezáveis se o comprimento do eléctrodo for menor do que uma décima do comprimento de onda, associado à maior componente espectral do sinal que se pretende escoar pelo eléctrodo de terra. Ainda segundo o mesmo autor, há uma frequência crítica para todos os eléctrodos de terra a partir da qual o módulo da impedância aumenta com a frequência, sendo aquela frequência inversamente proporcional ao comprimento do eléctrodo, e directamente proporcional à resistividade do solo. O comprimento do eléctrodo pode duplicar se o ponto de injeção de corrente for o ponto médio do eléctrodo de terra. Neste trabalho, é assumido que a maior componente espectral de interesse nas descargas atmosféricas é de 1 MHz. Em 2003, Lorentzou *et al* [73] obtiveram uma solução “closed form” para as equações dos telegrafistas tendo verificado que, sem ionização do solo, o módulo da impedância durante o regime livre é maior que o valor em regime forçado, tendo usado uma dupla exponencial com um crescimento de 7 μ s. Estes autores apresentaram fórmulas para o cálculo do valor crítico do campo eléctrico que provoca a ionização, assim como para o raio da região ionizada. O efeito da ionização é mais explícito num artigo de 2005 [74], onde ficou esclarecido que, para correntes de terra maiores que 5 kA, a impedância de terra de um eléctrodo em solo arenoso se reduz para o intervalo de 40 a 50% do valor a 60 Hz, enquanto que em terrenos barrentos a redução não é tão acentuada, já que o valor da impedância se fica pelo intervalo de 60 a 80 % do seu valor à frequência industrial. Um cálculo do regime transitório de eléctrodos horizontais, usando o método das diferenças finitas no domínio dos tempos e representando o eléctrodo por uma linha de transmissão não uniforme, foi apresentado por Liu *et al* em 2005 [75]. A análise de eléctrodos de terra no domínio da frequência é complexo já que exige o uso do método dos momentos, com um sistema de

equações que tem de ser resolvido para calcular a corrente que sai de cada segmento da discretização, para cada frequência, pelo que era pouco usado no século XX. No caso da descarga atmosférica, a largura de banda envolvida produz um largo número de valores discretos da frequência, o que torna o cálculo muito lento. Um método com duas etapas simplificadoras de todo o processo é apresentado em [76], consistindo a primeira numa amostragem adaptativa no domínio da frequência e a segunda etapa na construção de uma função de transferência, cujos coeficientes polinomiais são obtidos por interpolação. Uma discussão sobre as definições propostas para o comprimento efectivo de um cabo e para a área efectiva de uma grelha, é feita por Liu *et al* em [77], já que a impedância tende para um valor assintótico com o aumento do comprimento do cabo. Um circuito equivalente, para torres de suporte de linhas de alta tensão, de parâmetros concentrados com uma malha em π , quer para um modelo linear, quer para um modelo não linear, no estudo de fenómenos transitórios, usando algoritmos micro-genéticos, é apresentado em 2009 por Gatta *et al* [78]. Em 2013, a dependência dos parâmetros de solo, condutividade e constante dieléctrica relativa, com a frequência é considerada, concluindo-se que, com a omissão dessa dependência se obtêm elevações de potencial no eléctrodo de terra que são excessivas, acabando o projecto por estar sobredimensionado, quando submetido a descargas atmosféricas [79]. Contudo, um dos autores em artigo no ano seguinte [80], mostra que se a constante dieléctrica relativa for retirada do estudo, ficando o eléctrodo de terra puramente óhmico, as tensões calculadas estarão então estimadas por defeito. Realce-se que, nestes artigos, não foi considerada a ionização do solo.

1.2 Motivação

A motivação para um trabalho em eléctrodos de terra vem desde o tempo em que o autor era engenheiro de campo nos extintos CTT-Telecomunicações, hoje Portugal Telecom, numa altura em que instalar eléctrodos de terra consistia pura e simplesmente em enterrar cobre até que a resistência dos eléctrodos fosse inferior aos valores máximos admissíveis. O hábito de efectuar uma ou duas medidas da resistividade do solo existia, mas com o objectivo de constar no relatório de execução, não existindo um trabalho de projecto do eléctrodo, nem sequer uma utilização das fórmulas básicas constantes do Regulamento Técnico de Instalações Eléctricas de Baixa Tensão (RTIEBT). Tal prática poderá ter derivado da constatação, de gerações anteriores de engenheiros da referida empresa, de que os modelos teóricos existentes, que supunham solos homogéneos, seriam incapazes de prever a resistência dos eléctrodos usados. Posteriormente, já num contexto académico, como estudante de mestrado e de doutoramento, verificou-se que a escassa produção científica portuguesa na área estava, com uma ou outra excepção, reduzida a artigos em solos homogéneos, pelo que o projecto de eléctrodos de terra em solo com dois estratos se impunha, até porque os trabalhos percussores do Professor R. Cordeiro, incidiam principalmente sobre o estudo da resistividade do terreno em solos de dois estratos, a fim de obter uma média ponderada.

Numa fase inicial de prospecção científica, tomou-se conhecimento de vários métodos numéricos para a obtenção da resistência, tendo-se optado pelo método dos momentos por ser bastante usado e de fácil aplicação, especificamente na discretização do eléctrodo. Na altura, supôs-se que a investigação e a inovação consequente, poderiam estar na obtenção dos modelos de solo de dois estratos, nomeadamente usando técnicas de optimização. Com o decorrer dos trabalhos, verificou-se que, em eléctrodos colocados no estrato inferior, se obtiveram resultados sem significado físico no cálculo de potenciais à superfície, por vezes até impossibilidade de os mesmos se efectuarem. Surgiram, também, erros inaceitáveis no valor da resistência. A investigação foi assim, focada no estudo do método dos momentos, mas dada a complexidade matemática das funções utilizadas para o cálculo da resistência mútua entre segmentos, o referido método foi substituído pelo método da matriz proposto originalmente por Sunde. Inicialmente não se optou pelo último método referido, devido à grande extensão da matriz por ele gerada, a qual iria ocupar muita memória em computador. A investigação foi, assim, dirigida para o mais simples dos métodos, usando eléctrodos simples, como vara e cabo horizontal, tendo-se concluído que havia singularidades e detectado as situações em que estas ocorrem à superfície, impedindo o cálculo do potencial nesses pontos. Foi esta conclusão a primeira inovação da tese, com artigo em congresso internacional. Sabendo-se as condições de ocorrência das singularidades e sendo o método dos momentos obtido por integração do método da matriz, seguiu-se o rasto das referidas singularidades no processo de integração. Concluiu-se que tais singularidades eram preservadas pelo processo de integração matemática, que existiam no método dos momentos nas mesmas condições espaciais, tendo sido esta a segunda contribuição original da tese. As dificuldades referidas foram superadas, ou mitigadas, com o deslocamento das imagens no estrato superior do solo, constituindo esta proposta a base de um artigo em revista internacional. O trabalho com o método da matriz permitiu desenvolver uma fórmula mais aperfeiçoada para o eléctrodo em serpentina do que a fórmula original usada pela EDP, em solos de um ou dois estratos, constituindo esta fórmula a terceira inovação da tese, tendo originado o último artigo em revista internacional.

A validação dos resultados obtidos com os métodos anteriormente descritos, foi feita em dois casos, recorrendo ao método dos elementos finitos: O cálculo da resistência de uma vara que atinge o estrato inferior, exemplificado em capítulo de livro internacional, e o cálculo do potencial de superfície, provocado por um cabo horizontal colocado no estrato inferior, nas condições de singularidade descritas, ou seja, quando os métodos anteriores falhavam, comparação que foi publicada num dos artigos já referidos.

Relativamente aos propósitos iniciais de obtenção de modelos de solo com duas camadas resistivas, foram sistematizados os modelos existentes, consoante existam uma, duas ou nenhuma assíntota na curva da resistividade com a profundidade, foi feita uma abordagem à metodologia para solos de três camadas e propostos métodos de optimização, nomeadamente a do gradiente e a de Newton.

Finalmente, uma das motivações iniciais era a confrontação de resultados entre os valores estimados teoricamente e os valores medidos, seguindo a tradição científica de Galileu. Para o efeito, foram efectuados testes em tina de água, metodologia já usada por autores anteriores, para comparação de potenciais em solo homogéneo, bem como testes no terreno para comparação de valores de resistência de eléctrodos, em solo de dois estratos.

1.3 Organização do texto

O texto da tese está organizado em onze capítulos. O capítulo dois, faz uma introdução ao problema a resolver com a formulação teórica, quer para o cálculo da resistência e dos potenciais perigosos para as pessoas, quer para o modelo de solo. O capítulo três faz uma revisão dos eléctrodos em solo homogéneo. O capítulo quatro apresenta o método da matriz, que foi o primeiro método numérico, sendo o método dos momentos obtido a partir deste e apresentado no capítulo cinco. O capítulo seis apresenta o método dos elementos finitos aplicados à temática dos eléctrodos de terra. No capítulo sete faz-se uma síntese dos métodos, para se obter um modelo de solo de dois estratos, com algumas revisões básicas sobre a medida da resistividade e da resistência. No capítulo oito considera-se a optimização dos parâmetros do terreno. O capítulo nove apresenta os ensaios de campo e de laboratório. O capítulo dez apresenta o eléctrodo em serpentina, um caso analisado pormenorizadamente e o capítulo onze conclui a tese. Apresenta-se, a seguir, uma descrição com algum detalhe dos capítulos que foram enumerados.

O capítulo dois começa por apresentar a equação representativa do fenómeno eléctrico considerado, descrevendo sucintamente os três métodos numéricos usados nesta tese para solucionar a equação proposta, nomeadamente o método da matriz, dos momentos e dos elementos finitos. Assim, é apresentada a equação que a generalidade da literatura considera como representativa do fenómeno, a equação de Laplace. Para esta equação, o padrão do IEEE [2] considera que o modelo é fechado, ou seja, a equipotencial de zero volt está a uma distância finita, enquanto que o método da matriz e dos momentos, baseado na teoria das imagens de Maxwell, consideram o problema de fronteiras abertas com o potencial nulo no infinito. O modelo de solo de dois estratos é exemplificado com dois casos, assim como a obtenção dos valores da resistividade das duas camadas do solo, facilmente identificadas para o caso modelo de duas assíptotas. A segurança de seres humanos é analisada em seguida, desde os limiares da corrente eléctrica que provocam a fibrilhação ventricular, até aos valores máximos admissíveis de tensões de passo e de toque em solos homogéneos.

No capítulo três, é feita inicialmente a comparação de soluções, usando o modelo de fronteiras abertas e o modelo de fronteiras fechadas para a equação de Laplace. Ainda neste capítulo, é feito um estudo das tensões de passo e toque para vara e cabo horizontal, assim como uma comparação das várias fórmulas propostas para calcular a resistência de terra. Os eléctrodos bidimensionais, como quadrados, grelhas e chapas são também considerados.

O capítulo quatro, apresenta o método da matriz num solo de dois estratos, primeiro considerando eléctrodos no estrato superior, cujas imagens estão no ar ou no estrato inferior e em número infinito e depois supondo os eléctrodos no estrato inferior, cujas imagens ascendentes podem ficar à superfície. As imagens são singularidades onde não se pode calcular o potencial. Finalmente, considera-se a vara longa que atravessa dois estratos. As validações do método e da programação, foram feitas recorrendo às fórmulas de Tagg para cabo no estrato superior e para vara no mesmo estrato, ou em ambos.

O capítulo cinco, considera o método dos momentos em solos de dois estratos, com uma sequência de apresentação em tudo semelhante à do capítulo anterior, já que começa com eléctrodos no estrato superior, considera depois a colocação destes no estrato inferior, completando o estudo com eléctrodos nos dois estratos. Em qualquer dos casos a validação continua a ser feita, recorrendo às já referidas fórmulas de Tagg, tendo-se verificado que as imagens são singularidades onde não se pode computar o potencial.

No capítulo seis, é feito o estudo do método dos elementos finitos em problemas de simetria axial, como é o caso da vara cravada no solo. As bases teóricas do método são aprofundadas, tendo as malhas geradas sido testadas em solo homogéneo, considerando dois cilíndricos coaxiais para verificar se a malha estava adaptada em tensão e em potência. A resistência é calculada pela lei de Joule, usando a aproximação energética do método. A fronteira Dirichlet de zero volt foi colocada a 0,03 m, depois afastada para 0,15 m e, finalmente, colocada a 7,6 m de distância ao eixo da vara para validar, ou não, as percentagens de resistência indicadas pelo Std 142 do IEEE [2] em solo homogéneo e em solo de dois estratos. Um problema a duas dimensões foi também considerado, como foi o caso de calcular o potencial à superfície de um cabo enterrado no estrato inferior, nas condições de singularidade detectadas nos capítulos precedentes.

O capítulo sete, apresenta a fundamentação teórica da medida da resistividade em solo homogéneo, os métodos de Wenner, Palmer e o método da vara cravada no solo, para se obter a variação da resistividade com a profundidade. Os factores que influenciam a resistividade de um solo são referidos, e são ilustrados os perfis típicos de solos homogéneos e de duas camadas com estrato inferior menos resistivo. Neste capítulo são apresentados os métodos para obter o modelo de solo quando a curva de resistividade apresenta duas assíptotas, apenas uma - a de baixa profundidade ou a de maior profundidade - e quando não existe assíptota. A medida da resistência em solo de dois estratos é, finalmente, considerada.

O capítulo oito, contém as metodologias de optimização dos parâmetros de terreno, de modo a coincidirem com algumas medidas de prospecção que devem anteceder um projecto de eléctrodos de terra. Apresenta-se uma optimização em solo homogéneo pelo método dos

mínimos quadrados. Para solo de dois estratos a optimização é feita usando o método do gradiente ou o método de Newton para solução de equações não-lineares. Os problemas considerados foram: Optimização usando a medida da resistência de uma vara no estrato superior, nos dois estratos e considerando a medida de três varas.

O capítulo nove, relata os ensaios efectuados, que vão da experimentação em tina de água até ensaios no terreno na praia da Vagueira, procurando-se com a escolha deste local um tipo de solo com uma superfície de separação de camadas que fosse horizontal, proporcionada pelo lençol freático, próximo, portanto, do modelo teórico que se pretende validar.

O capítulo dez, contém a análise do eléctrodo em serpentina em solos homogéneos e com duas camadas. Propõe-se uma nova fórmula para estimar a resistência da serpentina já que a análise apresentada mostra que a fórmula empírica que a EDP usa tem erros grandes. A distribuição de potencial à superfície também foi considerada.

No capítulo onze conclui-se a tese, congregando todas as conclusões parcelares que fecham os capítulos daquela.

1.4 Notação

As expressões, figuras e tabelas, são numeradas de forma sequencial em cada capítulo e são identificadas ao longo do texto com referência ao capítulo onde são inicialmente apresentadas, preservando a numeração desse capítulo. A identificação das expressões matemáticas é apresentada entre parênteses curvos e as referências bibliográficas são apresentadas entre parênteses rectos.

Apresenta-se, de seguida, a lista dos símbolos usados no texto, bem como do seu significado.

Lista de símbolos latinos

a : raio do eléctrodo

A : área do elemento finito

A_g : área ocupada por grelha de terra

A_x^\pm : parâmetro mudo

b : raio de semiesfera de teste

B : parâmetro mudo

B_z^- : parâmetro mudo

C : matriz de ligação

C_T : comprimento total dos condutores

d : distância do ponto de interesse, para cálculo de potencial, à fonte

dim : distância do ponto onde se calcula o potencial, à imagem da fonte, em solo homogéneo

D : distância entre eléctrodo de injeção de corrente no solo

e : raio exterior de cilindro externo à vara
 E : função necessária para o cálculo da resistência mútua entre segmentos perpendiculares em 2 estratos.
 E_{1x1z} : função necessária para o cálculo da resistência mútua entre segmentos perpendiculares um orientado em x outro em z , em solo de 2 estratos
 \vec{E} : intensidade do campo eléctrico
 F : função necessária para o cálculo do potencial devido a um eléctrodo em 2 estratos
 F_x : função necessária para o cálculo do potencial devido a um eléctrodo segundo x em 2 est.
 F_y : função necessária para o cálculo do potencial devido a um eléctrodo segundo y em 2 est.
 F_z : função necessária para o cálculo do potencial devido a um eléctrodo segundo z em 2 est.
 F_1 : função necessária para o cálculo do potencial devido a um eléctrodo activo em 1 estrato.
 F_2 : função necessária para o cálculo da resistência mútua entre segmentos paralelos
 F_3 : função necessária para o cálculo da resistência mútua entre segmentos perpendiculares
 g : espessura da chapa
 G : função de Green
 $g(t)$: função a minimizar em otimização
 h : espessura do estrato superior
 h_2 : espessura do estrato intermédio em solo de três estratos
 H : função necessária para o cálculo da resistência mútua entre segmentos paralelos em 2 est.
 i : corrente de electrocussão
 I : corrente total que sai de um eléctrodo
 I_F : corrente que sai de um segmento fonte de corrente, ou ativo
 \vec{J} : vector densidade de corrente eléctrica
 Jac : matriz Jacobiana
 k : coeficiente de reflexão de tensão num solo de dois estratos
 k_1 : coeficiente usado por Schwarz
 k_2 : coeficiente usado por Schwarz
 k_{01} : factor de reflexão de tensão entre o ar e a região um
 k_{21} : fator de reflexão de tensão entre região dois e um
 l : comprimento do eléctrodo
 l_1 : comprimento da parte do eléctrodo no estrato superior
 l_2 : comprimento da parte do eléctrodo no estrato inferior
 L : semi-comprimento do eléctrodo em L, ou seja comprimento do braço
 L_1 : semi-comprimento do segmento activo nos métodos numéricos
 L_2 : semi-comprimento do segmento passivo nos métodos numéricos
 M : função necessária para o cálculo da resistência mútua geral entre segmentos em 2 est.
 m, n, o : coeficientes da aproximação polinomial ao potencial, num elemento finito
 p : profundidade de enterramento do eléctrodo
 P : ponto de interesse onde é calculado o potencial

P_{Joule} : potência libertada por efeito de Joule, durante uma corrente de defeito no solo
 P_{11} : factor de escala no estrato superior
 P_{22} : factor de escala no estrato inferior
 q : relação de raios entre cilindros coaxiais
 r : raio vetor do ponto P
 r_c : raio do centróide do elemento finito
 $r_{1,2,3}$: raios dos vértices nodais dos elementos finitos
 r_0' : raio vector do centro do eléctrodo ou do centro do segmento
 r_1' : raio vector do centro da primeira imagem ascendente do eléctrodo ou do segmento
 r_2' : raio vector do centro das imagens ascendentes do eléctrodo ou do segmento
 r_5' : raio vector do centro das imagens descendentes do eléctrodo ou do segmento
 R : resistência do eléctrodo
 R_a : componente da resistência de um eléctrodo provocada pelo estrato inferior
 R_h : componente da resistência de um eléctrodo provocada pelo estrato superior
 R_{ij} : resistência mútua entre o segmento i e o segmento j
 R_{m1} : resistência medida para o comprimento de 0,5 m.
 R_{sim1} : resistência calculada, usando 1), para o comprimento de 0,5 m.
 R_{m2} : resistência medida para o comprimento de 1 m.
 R_{sim2} : resistência calculada, usando 1) para o comprimento de 1 m.
 R_{m3} : resistência medida para o comprimento de 2 m.
 R_{sim3} : resistência calculada, usando 1) para o comprimento de 2 m.
 R_{mc} : resistência medida para o cabo de 10 m.
 R_{simc} : resistência calculada, para o cabo.
 R_{mv} : resistência medida para a vara de 2 m.
 R_{simv} : resistência calculada, para a vara de 2 m.
 R_{Tagg} : valor calculado usando a fórmula de Tagg
 R_{1e} : resistência de solo homogéneo com resistividade igual à do estrato superior de solo real
 R_{1x1x} : resistência mútua entre dois segmentos no estrato superior orientados em x
 R_{1x1y} : resistência mútua entre dois segmentos no estrato superior orientados um em x outro em y
 s : dobro da profundidade de enterramento à imagem, ou distância desta ao eléctrodo
 S : matriz de rigidez dos elementos finitos
 S' : superfície do eléctrodo
 S_{disj} : matriz tridiagonal de Dirichlet
 S_{11} : série para cálculo do potencial no estrato superior no método da matriz
 S_{22} : série para cálculo do potencial no estrato inferior no método da matriz
 S_{12} : série para cálculo do potencial no estrato superior devido a fonte no inferior, met. matriz
 u : potencial dentro de elemento finito
 U : vector de potenciais nodas dos elementos finitos

U_{disj} : vector de potenciais dos nodos disjuntos dos elementos finitos
 $U_{1,2,3}$: potenciais nodais dos elementos finitos
 V_c : 'potencial constante arbitrado para o eléctrodo
 v : potencial eléctrico
 v_i : potencial no ponto i
 v_p : tensão de passo
 v_{pp} : potencial do pé mais próximo do eléctrodo
 v_{pa} : potencial do pé mais afastado do eléctrodo
 v_s : potencial à superfície
 v_{sv} : potencial da vara de terra
 v_t : tensão de toque
 V_{rev} : volume de revolução
 V : potencial eléctrico no caso geral
 V_{H1} : potencial na semi-esfera um
 V_x : potencial à distância x
 V_0 : diferença de potencial entre superfícies cilíndricas coaxiais
 V_{11} : potencial no estrato superior devido a fonte no mesmo estrato
 V_{22} : potencial no estrato inferior devido a fonte no mesmo estrato
 V_{12} : potencial no estrato superior devido a fonte no estrato inferior
 V_{21} : potencial no estrato inferior devido a fonte no estrato superior
 V_{1x1x} : potencial num segmento segundo x no estrato um, devido a outro segundo x e no mesmo estrato
 V_{1x1z} : potencial em segmento segundo x , devido a segmento activo em z , ambos no estrato superior
 V_{1z2z} : potencial em segmento segundo z no estrato superior, devido a segmento activo em z no estrato inferior
 x : abcissa do ponto genérico
 x_a : abcissa de centro de segmento passivo, onde se calcula potencial médio
 x_f : abcissa de um ponto fonte de corrente ou de centro de segmento activo
 X : vector que contém os parâmetros de um solo de dois estratos
 y : ordenada do ponto genérico
 y_a : ordenada de centro de segmento passivo, onde se calcula potencial médio
 y_f : ordenada de um ponto fonte de corrente ou de centro de segmento activo
 w : largura da chapa
 W : energia dissipada no solo durante uma corrente de falha
 z : cota de um ponto genérico
 z_a : cota de centro de segmento passivo, onde se calcula potencial médio
 z_f : cota de um ponto fonte de corrente ou de centro de segmento activo
 $z(t)$: função auxiliar usada em optimização

$z_{1,2,3}$: cotas dos vértices nodais dos elementos finitos

Lista de símbolos gregos

$\alpha_{1,2,3}$: funções de interpolação dos elementos finitos

β : ângulo de 'visão' da ponta da vara para um ponto de superfície

γ : relação entre o espaçamento das pinças de corrente e das pinças de tensão

δ : distância entre pinças no método de Wenner

ρ : resistividade eléctrica em solo homogéneo

ρ_{ma} : resistividade média aritmética usando todas as medidas

ρ_{2v} : resistividade média com o maior e o menor valor

ρ_E : resistividade de solo homogéneo usando apenas a resistividade do estrato superior

ρ_1 : resistividade eléctrica do estrato superior

ρ_2 : resistividade eléctrica do estrato inferior

ρ_m : resistividade eléctrica média para solo homogéneo equivalente

σ_1 : condutividade do estrato superior

σ_2 : condutividade do estrato inferior

ϕ : semi-comprimento entre pinças de corrente

φ : semi-comprimento entre pinças de tensão

Capítulo 2 - Formulação matemática

Introdução

Neste capítulo, pretende-se descrever o modelo matemático que permite calcular a distribuição de potencial em torno de um eléctrodo de terra e, posteriormente, computar a resistência de terra de um eléctrodo com uma qualquer geometria. Como os algoritmos descritos dependem fortemente do conhecimento da resistividade do solo, formula-se o problema de como obter os parâmetros do solo, normalmente supondo dois estratos. Finalmente, apresentam-se as expressões que definem os limiares de fibrilhação ventricular, a partir das quais se definem as tensões máximas de passo e toque.

2.1 O cálculo do potencial e da resistência

À frequência dos sistemas de energia eléctrica, 50 Hz na Europa, as reactâncias dos eléctrodos são desprezáveis, obtendo-se uma resistência puramente óhmica que pode ser calculada usando um modelo electro condutivo essencialmente estático, pelo que a equação que governa o modelo é a bem conhecida equação de Laplace [8],[10].

$$\nabla^2 v(x, y, z) = 0, \quad (2.1)$$

sendo v o potencial eléctrico. Ilustra-se o modelo do padrão do IEEE para uma vara de terra enterrada com o topo rente ao solo. A 7,6 m de distância do eléctrodo o potencial é praticamente zero, constituindo esta superfície a fronteira Dirichlet de potencial nulo e a superfície da vara a fronteira de valor não nulo. À superfície do solo não existe componente vertical da corrente de defeito do eléctrodo, já que se assume que o ar é isolante, pelo que a referida superfície constitui a fronteira de Neuman do modelo, sendo o problema dito de fronteiras fechadas.

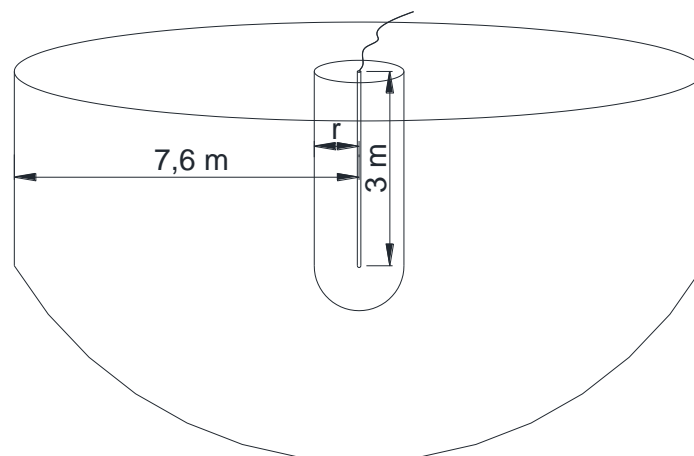


Fig. 2. 1 Modelo de uma vareta de terra de fronteira fechada

De acordo com a física clássica o potencial é nulo no infinito pelo que a fronteira Dirichlet é aberta, constituindo, assim, um problema de fronteiras semiabertas. Os métodos numéricos das duas subsecções seguintes, são baseados no modelo da física clássica e só o terceiro modelo tem fronteiras fechadas, tal como foi formulado pelo padrão do IEEE.

2.1.1 O método da matriz

A equação (2.1) foi resolvida para várias configurações simples de eléctrodos, listadas no anexo A, mas um método geral só foi desenvolvido com o conceito de fonte pontual de corrente, em que se reduziu o eléctrodo à sua forma geométrica mais simples, o ponto fonte, debitando uma corrente I num solo de resistividade ρ , que se apresenta na figura 2.2.

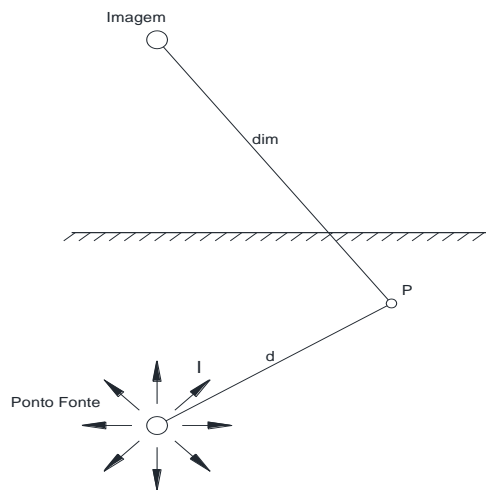


Fig. 2. 2 Fonte pontual de corrente

A solução de (2.1), considerando fronteiras semiabertas, em $P(x, y, z)$ é [53]:

$$v(x, y, z) = \frac{\rho I}{4\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\text{dim}} \right). \quad (2.2)$$

Note-se que (2.2) não permite o cálculo do potencial no ponto fonte, já que a distância d seria nula. A expressão (2.2) pode ser apresentada mais sucintamente, destacando a corrente que sai do ponto fonte:

$$v(x, y, z) = I_f f(x, y, z). \quad (2.3)$$

A função f depende da posição de cada ponto, o de interesse e o ponto fonte, e da resistividade do solo. O cálculo da resistência pode agora ser explicitado usando como exemplo a vara cravada no solo. A vara é dividida em 3 segmentos, cujos pontos centrais são 1,2 e 3. Em cada segmento considera-se um ponto à sua superfície e com a mesma cota do ponto central. A discretização ilustra-se na figura 2.3.

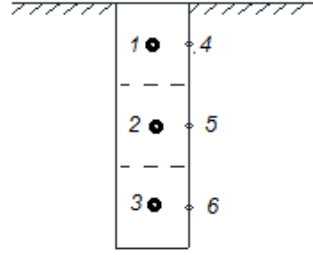


Fig. 2. 3 Discretização de uma vara

No método da matriz vai supor-se que a corrente, em vez de sair da superfície dos segmentos, sai dos seus pontos centrais, o que é uma aproximação razoável, desde que os segmentos sejam pequenos e a vara tenha um raio pequeno, que na prática são alguns milímetros. Pode calcular-se agora o potencial no ponto 4, usando a equação (2.2) representada na forma (2.3) e considerando que o potencial no ponto é a soma das contribuições dos 3 pontos que estão a debitar corrente, pelo princípio da sobreposição. O potencial no ponto 4 será então [53]:

$$V_4 = I_1 f(x_4, y_4, z_4, x_1, y_1, z_1) + I_2 f(x_4, y_4, z_4, x_2, y_2, z_2) + I_3 f(x_4, y_4, z_4, x_3, y_3, z_3). \quad (2.4)$$

Na função f , as primeiras três coordenadas referem-se ao ponto onde se calcula o potencial, enquanto que as três últimas se referem ao ponto fonte que agora muda. Por isso se representou f como uma função de 6 variáveis. Ora esta função associa um número a cada par de pontos, pelo que o potencial em 2.4 é uma combinação linear das 3 correntes que saem dos pontos centrais. Então pode-se representar o potencial em 4, e analogamente em 5 e 6, de uma outra forma que é [53]:

$$\begin{aligned} V_4 &= a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + a_{13}I_3 \\ V_5 &= a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + a_{23}I_3 \\ V_6 &= a_{31}I_1 + a_{32}I_2 + a_{33}I_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que $a_{i,j} = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$. Estes termos designam-se por factores de distribuição de tensão [53] mas a unidade não é o Volt pois têm as dimensões do Ohm. Na nomenclatura anglo-saxónica designam-se por 'Voltage Distribution Factors', VDF.

Como o eléctrodo metálico tem uma resistividade baixíssima quando comparada com a do solo, a sua superfície pode considerar-se uma equipotencial, pelo que $V_4 = V_5 = V_6 = V_C$. Agora, arbitrando-se um valor para a constante V_C , obtém-se um sistema de equações lineares em (2.5) o qual permite calcular as correntes das fontes pontuais que garante aquele potencial no eléctrodo. Resolvido o sistema, a corrente total é a soma das correntes debitadas por todos os pontos [53]:

$$I = \sum_{i=1}^N I_i, \quad (2.6)$$

sendo N o número de pontos que são fontes de corrente. A questão pendente é determinar qual a distância entre os pontos de discretização.

Finalmente, a resistência é calculada usando a lei de Ohm, visto ter-se arbitrado o potencial V_C e se conhecer a corrente eléctrica estimada pelo método da matriz.

$$R = \frac{V_C}{I}. \quad (2.7)$$

O método é facilmente generalizável a um solo de dois estratos redefinindo (2.2) [10].

A distância entre os pontos de discretização é seguidamente analisada a fim de se obter um valor óptimo entre os referidos pontos de discretização. Apresenta-se a tabela 2.1 em que se usaram várias distâncias entre os pontos fonte, para o cálculo da resistência da vara de três metros e resistividade de $1000 \Omega\text{m}$. A comparação do valor da resistência é feita com a fórmula de Dwight [3], constante no anexo A, que fornece o valor de 335Ω .

Tabela 2. 1 Resultados em função do número de pontos da discretização

Distância entre pontos fonte (m)	0,1	0,01	0,001
Número de pontos	30	300	3000
Resistência calculada pelo método (Ω)	525	332	331
Erro para 335Ω (%)	+57	-0,9	-1,2

Uma separação entre pontos fonte de um decímetro está, obviamente, fora de hipótese. Com os pontos fonte separados por um centímetro ou um milímetro, o resultado é quase igual, mas o tempo de cálculo aumenta consideravelmente no último caso, assim como o tamanho da matriz de coeficientes, pelo que se escolheu uma distância de um centímetro entre pontos fonte como distância padrão neste trabalho.

O método da matriz, embora conceptualmente simples, produz matrizes demasiado grandes. Para as diminuir tem de se diminuir o número de segmentos e, portanto, também de fontes pontuais de corrente. Infelizmente os erros aumentam. Apresenta-se outro método, usado largamente nesta tese, que tenta manter a precisão manipulando matrizes muito mais pequenas.

2.1.2 O método dos momentos

Considere-se um segmento fonte genérico de comprimento $2L_1$, centrado no ponto de coordenadas x_f, y_f, z_f e suponha-se que a corrente debitada pelo segmento, I_f , sai do seu eixo de simetria, uniformemente, como mostra a figura 2.4. Supondo constante a densidade de corrente, no eixo de simetria do segmento, ela valerá $\frac{I_f}{2L_1}$ e a corrente que sai do comprimento infinitesimal dz é $\frac{I_f}{2L_1} dz$.

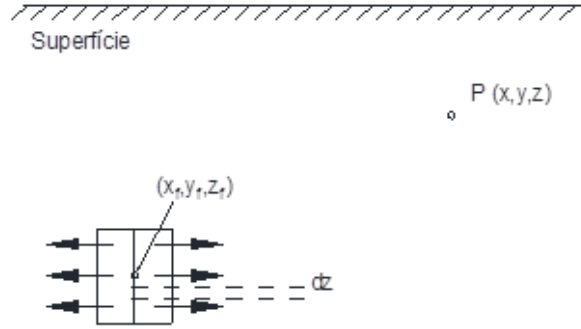


Fig. 2. 4 Segmento fonte e corrente que este liberta

A contribuição deste comprimento infinitesimal para o potencial em $P(x, y, z)$ é, pela equação fundamental (2.2) e usando a expressão cartesiana para a distância entre dois pontos [53]:

$$dv(x, y, z) = \frac{\rho I_f}{8\pi L_1} \left[\frac{1}{\sqrt{B + (z - z_f)^2}} + \frac{1}{\sqrt{B + (z + z_f)^2}} \right] dz \quad \text{com } B = (x - x_f)^2 + (y - y_f)^2. \quad (2.8)$$

A tensão em $P(x, y, z)$, devido à contribuição de todo o segmento em causa é [53]:

$$v(x, y, z) = \int_{z_f - L_1}^{z_f + L_1} dv(x, y, z). \quad (2.9)$$

O potencial em qualquer ponto $P(x, y, z)$, solução da integração definida em (2.9), é [53]:

$$V(x, y, z) = \frac{I_f \rho}{8\pi L_1} [F_1(z - z_f + L_1, A) - F_1(z - z_f - L_1, A) + F_1(z + z_f + L_1, A) - F_1(z + z_f - L_1, A)], \quad (2.10)$$

em que:

$$A = [(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2]^{0.5},$$

$$F_1(t, u) = \ln(t + \sqrt{t^2 + u^2}).$$

Se o segmento fosse horizontal, orientado segundo x , a integração seria em ordem a esta variável e o resultado final seria [53]:

$$V(x, y, z) = \frac{I_f \rho}{8\pi L_1} [F_1(x - x_f + L_1, A_x^-) - F_1(x - x_f - L_1, A_x^-) + F_1(x - x_f + L_1, A_x^+) - F_1(x - x_f - L_1, A_x^+)], \quad (2.11)$$

com :

$$A_x^\pm = \sqrt{(y - y_f)^2 + (z \pm z_f)^2}.$$

Para segmentos orientados segundo y ter-se-á [53]:

$$V(x, y, z) = \frac{I_f \rho}{8\pi L_1} [F_1(y - y_f + L_1, A_y^-) - F_1(y - y_f - L_1, A_y^-) + F_1(y - y_f + L_1, A_y^+) - F_1(y - y_f - L_1, A_y^+)], \quad (2.12)$$

com:

$$A_y^\pm = \sqrt{(x - x_f)^2 + (z \pm z_f)^2}.$$

Nesta abordagem desprezou-se a corrente que sairia pelas faces planas do segmento cilíndrico, pelo que este método é válido se o comprimento do segmento for muito maior do que o seu raio [53]. As expressões anteriores, indicam o potencial num ponto devido a uma fonte filiforme, já não pontual, de corrente, contendo a informação do comprimento do segmento discretizado, o que não acontecia no método da matriz. O método descrito é válido para eléctrodos orientados segundo os eixos cartesianos.

Sabido o potencial provocado por uma fonte filiforme de corrente de comprimento $2L_1$, o próximo passo é calcular o potencial a que fica submetido um segmento passivo, devido à corrente que sai do segmento fonte. A figura 2.5 ilustra esta situação.

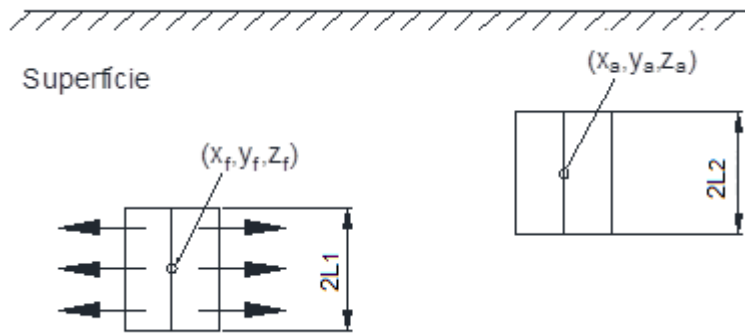


Fig. 2. 5 Potencial num segmento passivo, devido ao segmento fonte inferior

Em primeiro lugar, vai-se substituir o segmento do eléctrodo, onde se calcula o potencial, pelo seu eixo de simetria e calcular o valor médio do potencial gerado pelo segmento debitador de corrente, ao longo daquele eixo. Trata-se, portanto, de integrar $V(x, y, z)$, dado pela expressão (2.10), segundo z e desde $z_a - L_2$ a $z_a + L_2$, já que o comprimento do segmento passivo é $2L_2$. Usando a bem conhecida fórmula da média tem-se:

$$V_{zz} = \frac{1}{2L_2} \int_{z_a - L_2}^{z_a + L_2} V(x, y, z) dz. \quad (2.13)$$

O resultado para segmentos orientados segundo z é [53]:

$$V_{zz} = \frac{I\rho}{16\pi L_1 L_2} \left[\begin{aligned} &F_2(z_a - z_f + L_1 + L_2, B_z^-) - F_2(z_a - z_f + L_1 - L_2, B_z^-) \\ &\quad - F_2(z_a - z_f - L_1 + L_2, B_z^-) + F_2(z_a - z_f - L_1 - L_2, B_z^-) \\ &+ F_2(z_a + z_f + L_1 + L_2, B_z^-) - F_2(z_a + z_f + L_1 - L_2, B_z^-) \\ &\quad - F_2(z_a + z_f - L_1 + L_2, B_z^-) + F_2(z_a + z_f - L_1 - L_2, B_z^-) \end{aligned} \right], \quad (2.14)$$

com:

$$B_z^- = \sqrt{(x_a - x_f)^2 + (y_a - y_f)^2}, \text{ e}$$

$$F_2(t, u) = t \ln\left(t + \sqrt{t^2 + u^2}\right) - \sqrt{t^2 + u^2}.$$

Se na expressão anterior for isolado o quociente V_{zz}/I , obtém-se uma resistência, chamada de resistência mútua entre os dois segmentos que é o conceito central no método dos momentos.

Finalmente, o potencial à superfície de um segmento, de comprimento $2L$, devido à corrente que sai do seu eixo de simetria, um caso limite do exemplo anterior quando os segmentos coincidem, é [53]:

$$V(x, y, z) = \frac{I_f \rho}{16\pi L^2} [F_2(2L, a) + F_2(-2L, a) + 2a + F_2(2|z_1| + 2L, a) + F_2(2|z_1| - 2L, a)], \quad (2.15)$$

em que a representa o raio do condutor.

O quociente entre o potencial e a corrente de defeito, facilmente deduzido da equação (2.15), fornece então a resistência própria de um segmento, constituindo uma fórmula geral para calcular a resistência de uma vara discretizada num único segmento. Existem, obviamente, fórmulas para segmentos orientados nas restantes direcções espaciais [53], conforme se pode consultar no anexo B.

Para dois quaisquer segmentos há então seis situações: três casos referentes a segmentos alinhados segundo o mesmo eixo e três casos para segmentos alinhados segundo eixos diferentes xy , yz e xz . Os resultados constam do anexo B. Discretizado um eléctrodo em vários segmentos, obtém-se um sistema na forma da expressão (2.5) com a resistência mútua entre segmentos substituindo os coeficientes a_{ij} . Os coeficientes diagonais constituem a resistência própria de cada segmento. Resolvido o sistema, somam-se todas as correntes e usa-se a lei de Ohm, de acordo com a sequência definida em (2.6) e (2.7).

O método dos momentos foi aplicado ao eléctrodo referenciado pelo padrão do IEEE [3], uma vara vertical de 3 metros de comprimento e 8 mm de raio, cuja resistência era de 335 Ohm conforme a fórmula de Dwight [1], que consta do anexo A. A resistividade do solo era de 1000 ohm metro. Os resultados apresentam-se na tabela 2.2.

Tabela 2. 2 Resistência e erro relativo em função da segmentação

Nº de Segmentos da discretização	30	3	1
Comprimento dos segmentos (m)	0,1	1	3
Resistência calculada pelo método (Ω)	332	334	335
Erro para 335 Ω (%)	-0,9	-0,3	-0,0

A precisão do método é boa, já que os desvios para a fórmula de Dwight são inferiores a um por cento, semelhante á do método da matriz. A grande vantagem é o diminuto número de equações lineares envolvidas. Note-se que, na última linha da tabela 2.2, não há um sistema

de equações, mas uma única. Conclui-se que uma vara de 3 m pode ser trabalhada como um único segmento. Em solos de dois estratos o método dos momentos é igualmente aplicável, existindo seis possibilidades para o segmento activo, já que pode estar orientado segundo os três eixos cartesianos e nos dois estratos. Assim, (2.9) tem seis soluções distintas. Relativamente ao segmento passivo também existem as mesmas seis hipóteses de orientação, pelo que, quando se calcula a resistência mútua, se obtêm trinta e seis possibilidades [10].

2.1.3 O método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos triangulares de primeira ordem, usado na resolução numérica da equação de Laplace, pode considerar-se como "uma generalização das técnicas de aproximação linear por troços" ([81], pag. 25), bem conhecido em Engenharia Electrotécnica. Este método apresenta uma grande versatilidade na escolha da topologia das malhas e fácil tratamento das condições de fronteira bem como das suas geometrias por mais complexas que sejam.

A solução da equação de Laplace, submetida ao valor especificado nas fronteiras do modelo, condições de Dirichlet, e à exigência da derivada da solução ser tangencial aos planos de simetria, condição de Neumann, é equivalente, segundo o conhecido princípio do mínimo de energia potencial, à minimização da seguinte funcional de energia [81]:

$$W(v) = \frac{1}{2} \iiint_{V_{rev}} |\nabla v|^2 dV_{rev}, \quad (2.16)$$

com:

v : potencial

V_{rev} : volume de revolução,

sendo a integração efectuada sobre todo o volume definido pela fronteira de Dirichlet do problema. Este método numérico aplica-se a problemas de fronteiras fechadas, como a definida pelo padrão do IEEE.

O volume entre a equipotencial de zero volt e a equipotencial constituída pela superfície do eléctrodo é discretizado, no plano rz em virtude de haver simetria axial, em elementos finitos triangulares e dentro de cada elemento faz-se uma aproximação linear ao potencial. 'A distribuição real de potencial no referido plano é substituída por uma aproximação facetada e, dentro de cada elemento, as equipotenciais são paralelas' [82].

A expressão (2.16) pode ser calculada para cada elemento finito, obtendo-se uma formulação matricial fácil de trabalhar e representada por [81]:

$$W^e(u) = \frac{1}{2} U^T S^e U, \quad (2.17)$$

sendo U o vetor dos potenciais nodais e S^e a matriz de rigidez do elemento, que depende exclusivamente das suas coordenadas. A energia total do modelo é o somatório das energias de todos os elementos finitos e é dada por [81]:

$$W(u) = \frac{1}{2} U_{conj}^T S U_{conj}, \quad (2.18)$$

em que U_{conj} representa o vector de potenciais nodais numerados globalmente e S a matriz de rigidez global dada por [81]:

$$S = C^T S_{disj} C, \quad (2.19)$$

sendo C a matriz de ligação que permite transformar a numeração local em numeração global garantindo, assim, a continuidade do potencial eléctrico entre elementos.

A minimização da energia do sistema consegue-se derivando (2.18) em ordem ao vector de potenciais e igualando a zero a derivada, deduzindo-se assim o seguinte sistema de equações:

$$S U = 0. \quad (2.20)$$

Para evitar a solução trivial $U = 0$, deve-se particionar a matriz S em blocos, tal como o vector dos potenciais nodais U [81].

O modelo da figura 2.1, possui simetria axial e a sua discretização em elementos finitos no plano rz ilustra-se na figura 2.6.

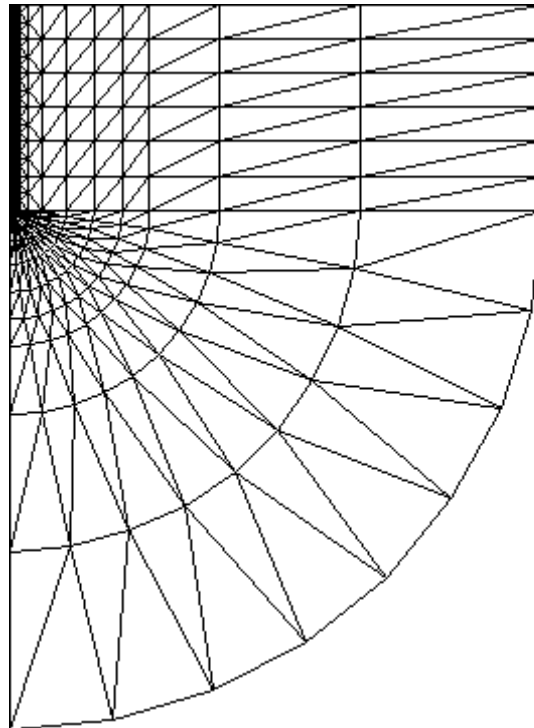


Fig. 2. 6 Discretização por elementos finitos de uma vara de terra

2.2 O modelo de solo

O perfil de um solo é obtido pela análise das medidas de resistividade a várias profundidades. O objectivo é obter um modelo de solo que seja uma boa aproximação de um solo real. ‘Um

modelo de solo uniforme deve ser usado quando existe uma variação moderada da resistividade aparente' [83]. Infelizmente o padrão referido não quantifica a referida variação. Uma proposta, que passou relativamente despercebida, foi a de considerar que o solo é homogéneo se as medidas de resistividade estiverem dentro de um intervalo de $\pm 15\%$ da média dos valores medidos [43], podendo-se eliminar um que esteja fora do intervalo e isolado. Contudo, o padrão referido do IEEE, aponta duas médias a calcular, a aritmética e a dos valores, maior e menor, das medidas de resistividade, inclinando-se o Std 80 [83] mais para a segunda destas médias. Uma aferição destas propostas será efectuada com os ensaios de campo.

Os modelos de solo com dois estratos são mais comuns. Mesmo que um solo tenha vários estratos, uma representação do solo 'baseado num modelo equivalente de duas camadas é suficiente para projectar um eléctrodo de terra' [83]. A variação da resistividade com a profundidade, ilustra-se na figura 2.7 que representa o gráfico desejável de um solo de dois estratos.

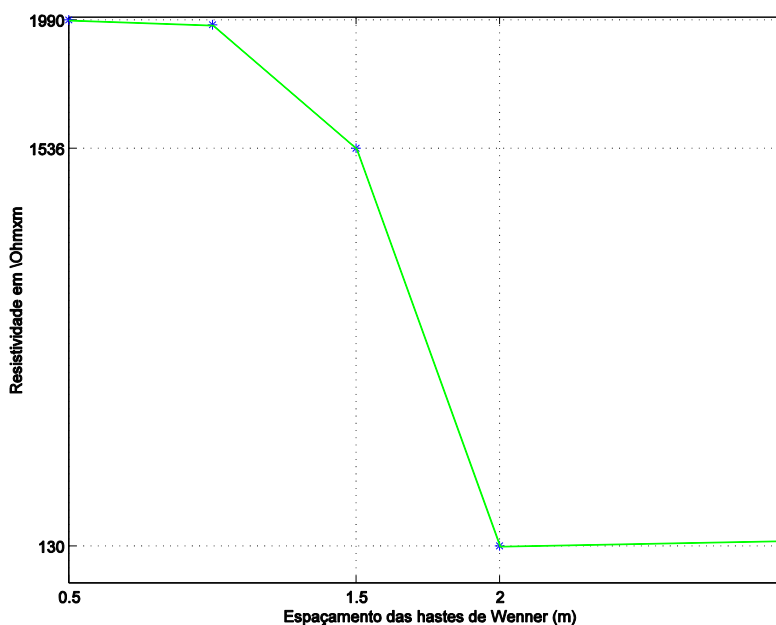


Fig. 2. 7 Curva de resistividade com o espaçamento, Vagueira Abril de 2012.

As duas médias referidas pelo padrão do IEEE, na suposição de que o terreno seria homogéneo [83], rondam os 1100 Ωm , e todos os valores têm um tal afastamento que o solo não pode considerar-se homogéneo. As assimptotas indicam as resistividades dos dois estratos, a de pequenas profundidades fornece o valor da resistividade do estrato superior, a de maiores profundidades do estrato inferior e a espessura do primeiro dos estratos referidos será calculada por métodos empíricos, analíticos e gráficos, tendo-se aferido tais métodos pelos resultados no terreno. Casos de perfis atípicos, que não têm o aspecto da figura anterior, como o da figura 2.8, também foram tratados, tendo-se sistematizado os métodos para cada tipo de perfil.

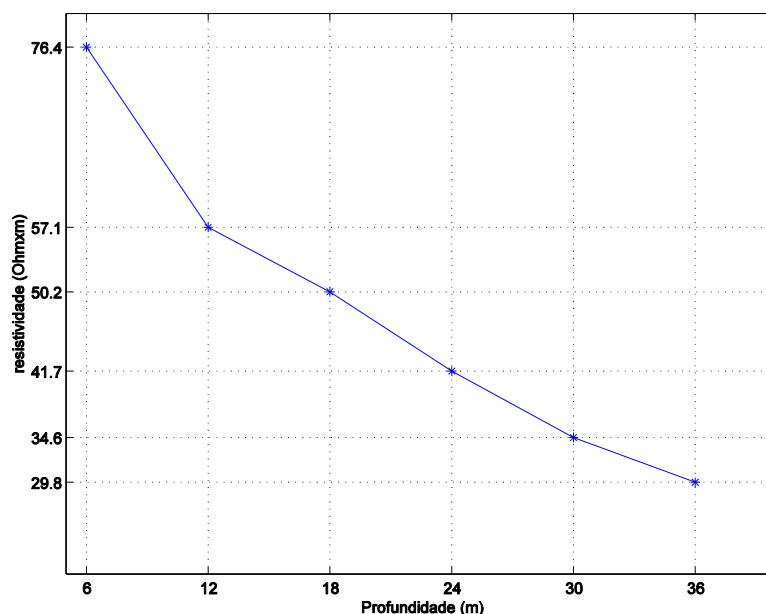


Fig. 2. 8 Gráfico de resistividade sem assíntotas

Nem sempre é possível ter acesso ao terreno para fazer as medições da resistividade pelo método de Wenner, como por exemplo em cidade, podendo enterrar-se uma vara de terra e ir medindo a resistência desta ao longo do enterramento. Mesmo a medida da resistência do eléctrodo, em ambiente citadino, não pode ser efectuada com hastes auxiliares em linha, em virtude de prédios e ruas não o permitirem. Neste caso, a prática de engenharia usa métodos pouco ortodoxos, tais como ligar os 220 V ao eléctrodo através de um amperímetro, calculando a resistência de terra pela aplicação da lei de Ohm. Embora o padrão do IEEE forneça fórmulas para se obter a resistividade sabendo a resistência e o comprimento enterrado [83], este procedimento reduz geralmente a quantidade de medidas a duas ou três, não permitindo construir gráficos como nos dois casos anteriores, pelo que se optou por métodos de optimização para se obter um modelo de solo, cujas previsões se aproximem das medidas, usando para tal o método do gradiente e o método de Newton já que o pequeno número de medidas permite construir sistemas não lineares com solução.

2.3 Tensões de passo e de toque

A maior parte dos acidentes que ocorrem, traduzidos na electrocussão de pessoas ou animais, são causados por descargas atmosféricas ou por correntes de defeito a 50 Hz. As correntes eléctricas perigosas são quantificadas usando equações ditas de electrocussão. Estas, ‘estabelecem a relação entre a corrente a partir da qual há fibrilhação, a duração do choque e relativos à pessoa em causa, em função da frequência e da grandeza da tensão’ [39]. Dalziel propôs, para pessoas que pesam 70 kg, a seguinte expressão da corrente de electrocussão [39]:

$$I_B = \frac{0,157}{\sqrt{t_s}}, \quad (2.21)$$

t_s : tempo de duração da corrente de electrocussão.

Contudo o ANSI/IEEE Standard 80 [53] sugere uma corrente máxima mais baixa:

$$I_B = \frac{0,116}{\sqrt{t_s}}, \quad (2.22)$$

Existem fórmulas de outros autores, como Ogykka, Geddes e Biegelmeier, cujo estudo comparativo já foi feito por Ressureição Cordeiro [39], bem como os sucessivos efeitos fisiológicos que o aumento da intensidade da corrente eléctrica provoca no ser humano desde a percepção à queimadura passando pela morte por fibrilhação ventricular ‘que é a principal causa de morte’ [84].

No outro extremo da perigosidade, tem-se o limite superior da corrente que fisiopatologicamente não é perigosa, para um intervalo de tempo em que há corrente t [85]:

$$I = I_1 + \frac{10}{t}, \quad (2.23)$$

com:

$$6 \text{ mA} < I_1 < 20 \text{ mA}.$$

Usando para I_1 o valor mais prudente de 6 mA, para uma corrente de 1 s de duração, o valor de I será de 16 mA. Em instalações com um aparelho de corte sensível à corrente diferencial com um tempo de corte de 0,5 s o limiar é 26 mA.

‘Em termos eléctricos, o corpo humano corresponde a uma impedância capacitiva. A capacidade reside principalmente na pele, que se interpõe como isolante entre o eléctrodo em tensão e o tecido humano condutor’ [84]. O valor da impedância depende de vários factores para além do trajecto de corrente. Assim, ‘tensão e superfície de contacto, pressão exercida, humidade da pele, frequência e temperatura’ [84] são factores que influenciam a impedância. O trajecto de maior impedância é mão-mão ou mão-pé, possuindo valor similar [84]. Verifica-se que a impedância à tensão de 220 V só é menor do que 1000 Ohm para 5% da população [84]. Este valor também é usado por Ressurreição Cordeiro [39] como referência.

2.3.1 Tensões de passo e de contacto em solo homogéneo

Quando uma pessoa caminha à superfície perto de um eléctrodo de terra, emanando uma corrente de defeito, é submetida a uma diferença de potencial entre os seus pés, pelo que o solo poderá ser representado por um circuito equivalente de Thevenin. A situação está representada na figura 2.9.

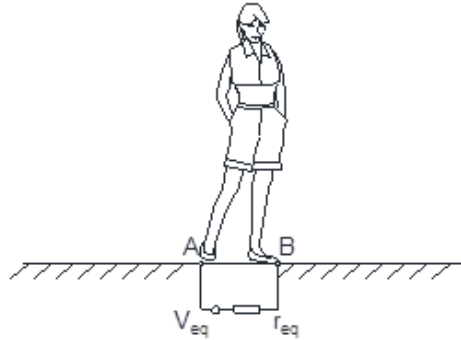


Fig. 2. 9 Tensão de passo representada por um circuito equivalente de Thevenin

A tensão de Thevenin é a tensão de passo. A resistência equivalente de Thevenin, é a resistência de difusão dos dois pés em série, já que a corrente passa por um e depois pelo outro [53]. Finalmente a resistência de corpo é a resistência de carga do circuito. Segundo o mesmo autor a resistência de difusão do pé é 3ρ e a resistência do corpo humano é $1\text{ k}\Omega$. Assim, a corrente que passa no corpo humano é [53]:

$$i = \frac{v_{Th}}{6\rho + 1000} . \quad (2.24)$$

‘A tensão entre dois pontos à superfície da Terra, distanciados por um metro é denominada tensão de passo’ [83]. Contudo Meliopoulos usa uma distância de 3 pés para a tensão de passo [53], o que dá 0,915 m. A corrente máxima terá o valor definido pela equação (2.22), obtendo-se assim o valor admissível do potencial de passo [53]:

$$V_{passo} = (6\rho + 1000) \frac{0,116}{\sqrt{t}} , \quad (2.25)$$

em que ρ representa a resistividade do solo e t o tempo de duração da corrente de defeito. Para uma resistividade de $100\ \Omega\text{m}$ e um tempo de duração da corrente de 1 s , a equação (2.25) fornece o valor de 186 V . Quando um ser humano toca numa superfície que, por deficiência de isolamento, tem uma tensão, diz-se que foi submetido a um potencial de contacto. ‘A tensão que, em caso de defeito de isolamento, aparece entre partes simultaneamente acessíveis é a tensão de contacto’ [84]. A corrente resultante é obviamente a corrente de defeito. O Regulamento de Instalações Eléctricas em Baixa Tensão, RTIEBT [86], estipulam valores máximos para o potencial de contacto em função do uso. Como exemplo apresenta-se a tabela 2.3 [84].

Tabela 2. 3 Valores máximos do potencial de contacto

	Locais ou espaços secos	Estaleiros de obras	Piscinas
Tensão alternada (valor eficaz)	50 V	25 V	12 V
Tensão contínua	120 V	60 V	30 V

O circuito equivalente de Thevenin tem uma fonte igual ao valor da tensão do eléctrodo subtraído do potencial do solo, com uma resistência que é o paralelo da resistência dos dois pés, ou seja $1,5\rho$ [53]. A resistência de carga do circuito é 1000Ω , valor já assumido para a resistência do corpo humano. Assim, a corrente que passa pelo ser humano é:

$$i = \frac{v_{TH}}{1,5\rho + 1000}. \quad (2.26)$$

Substituindo a corrente em (2.26) pelo valor máximo indicado por (2.22), obtém-se a tensão máxima tolerável para o contacto [39]:

$$v = \frac{116 + 0,174\rho}{\sqrt{t}}. \quad (2.27)$$

2.3.2 Tensões de passo e de contacto em solo de duas camadas

Em solos de duas camadas, a tensão de passo ou de toque só pode ser geralmente computada por métodos numéricos. Contudo, o Std 80-2000 do IEEE [83] comparou modelos homogéneos com modelos de solo de duas camadas, para uma grelha de 76 por 76 m com 64 varas, tendo concluído que o modelo de solo homogéneo, cuja resistividade era a média do valor mais alto com o valor mais baixo da curva de resistividade, obtinha valores próximos dos modelos de duas camadas mais complexos, (Std 80-2000 pag 56-57) pelo que neste trabalho serão analisados os referidos potenciais apenas em solo homogéneo.

Capítulo 3 - Eléctrodos de terra em solo homogéneo

Introdução

Neste capítulo é analisado o potencial à superfície provocado por varas e cabos horizontais, obtendo-se aproximações para os potenciais de passo e de toque dos eléctrodos referidos, sendo, ainda, investigado o potencial de toque de um quadrado enterrado. O método dos momentos é pormenorizado, destacando os pontos de descontinuidade das fórmulas e sugerindo-se alternativas para superar as referidas descontinuidades. Refira-se, ainda, que neste capítulo são comparadas as fórmulas para o cálculo da resistência de varas, cabos, grelhas e chapas, avaliando-se as fórmulas sugeridas pela legislação portuguesa.

3.1 Tensões de passo e de toque do eléctrodo em vara

A tabela 2.2 permitiu concluir que é possível discretizar uma vara num só segmento, o que facilita o estudo do potencial de superfície e das tensões de passo e de toque, provocados pela vara de terra. Tal vara ilustra-se na figura 3.1, coincidente com o eixo das cotas [87].

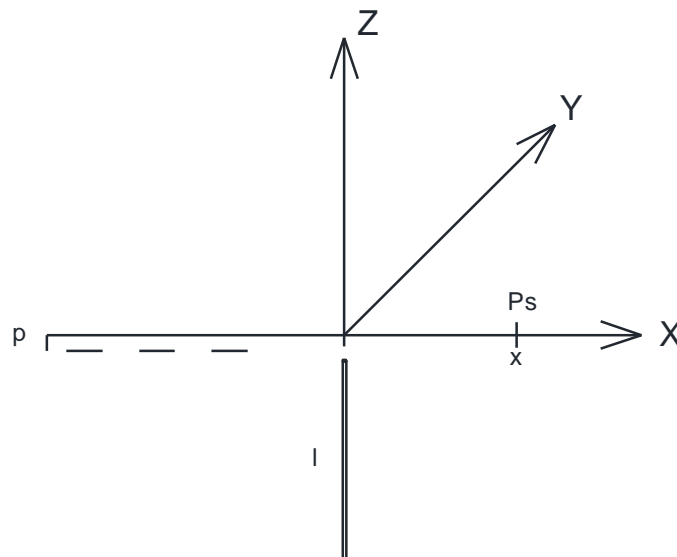


Fig. 3. 1 Vara cravada em profundidade

O potencial em qualquer ponto (x,y,z) , de uma vara de terra centrada em (x_f, y_f, z_f) , é dado pela expressão (2.10). Devido à simetria axial o potencial de superfície é calculado ao longo do eixo das abcissas, pelo que $y = 0$ e $z = 0$. Adicionalmente, o eixo do eléctrodo define o eixo das cotas pelo que:

$$x_f = 0 \quad \wedge \quad y_f = 0. \quad (3.1)$$

A cota do centro do eléctrodo é $z_f = -p - l/2$. Assim, verifica-se que:

$$z - z_f + l/2 = l + p; \quad (3.2)$$

$$z - z_f - l/2 = p; \quad (3.3)$$

$$z + z_f + l/2 = -p; \quad (3.4)$$

$$z + z_f - l/2 = -l - p; \quad (3.5)$$

$$A_z^- = x. \quad (3.6)$$

Substituindo estas expressões nos argumentos dos logaritmos de (2.10) obtém-se:

$$v = \frac{\rho I}{4l\pi} \left\{ \ln \left[l + p + \sqrt{(l+p)^2 + x^2} \right] - \ln \left(p + \sqrt{p^2 + x^2} \right) + \ln \left(-p + \sqrt{p^2 + x^2} \right) - \ln \left[-l - p + \sqrt{(L+p)^2 + x^2} \right] \right\}. \quad (3.7)$$

Usando as propriedades dos logaritmos, o potencial à superfície é dado por [87]:

$$v = \frac{\rho I}{4l\pi} \left\{ \ln \left[\frac{\left[\sqrt{(l+p)^2 + x^2} + l + p \right] \left(\sqrt{p^2 + x^2} - p \right)}{\left[\sqrt{(l+p)^2 + x^2} - l - p \right] \left(\sqrt{p^2 + x^2} + p \right)} \right] \right\}. \quad (3.8)$$

Importa comparar a solução a que se chegou com a que se obteria se fosse considerado um modelo de fronteira Dirichlet fechada, conforme proposto pelo padrão do IEEE. Assim, para uma resistividade do solo de $200 \Omega\text{m}$, uma corrente de defeito de 100 A e uma vara de 2 m , cravada rente ao solo, apresentam-se as duas soluções que mostram claramente que, na zona de maior declive da curva, as duas soluções coincidem, diferindo as duas curvas apenas na zona mais suave destas, onde as tensões de passo são mais pequenas, conforme mostra o gráfico da figura 3.2. A $7,6 \text{ m}$ a fronteira Dirichlet de potencial nulo, obriga a curva descontínua, obtida pelo método dos elementos finitos, a ter o valor zero, mantendo-se a curva contínua com um potencial que é 7% do seu valor máximo. A solução dada por (3.8) pode ser usada para calcular a tensão de passo. Os modelos podem, assim, considerar-se equivalentes em tensão.

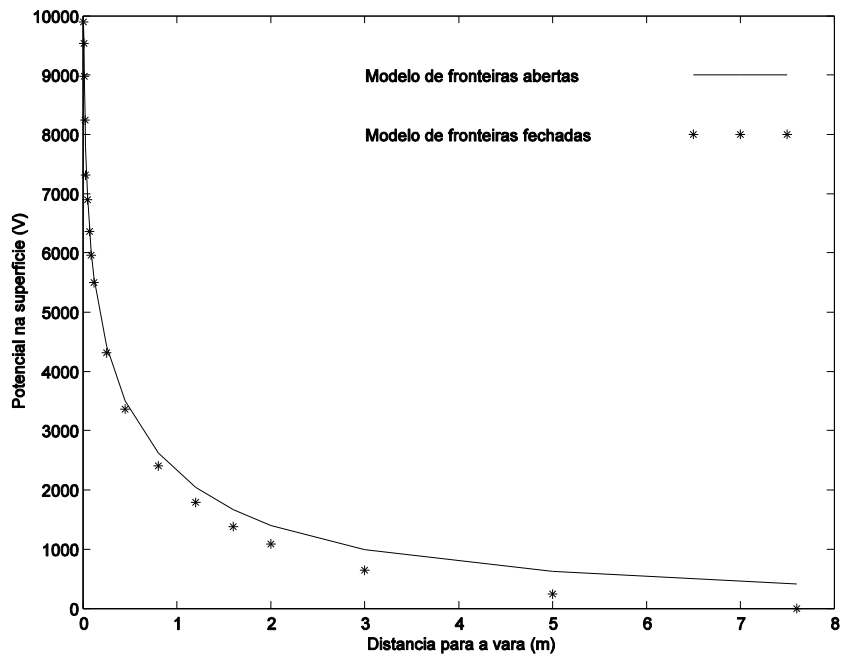


Fig. 3. 2 Comparação para o potencial de superfície dos modelos teóricos

Usando a equação (3.8) apresenta-se, na figura 3.3, uma comparação das curvas de potencial no solo para uma profundidade do topo da vara de 0,5 m e para uma vara cravada com o topo à superfície do solo.

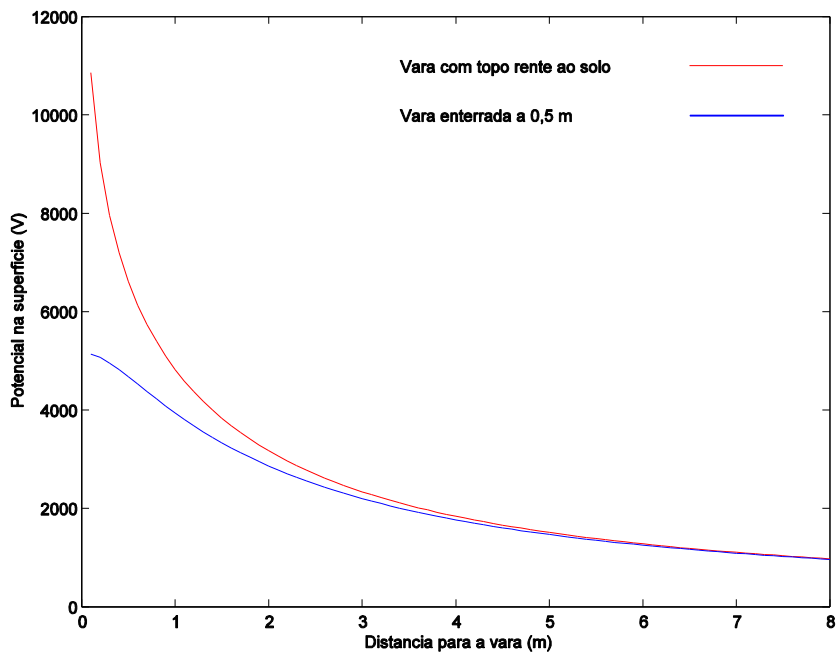


Fig. 3. 3 Potencial à superfície para duas profundidades

Na proximidade do eléctrodo, a curva de potencial da vara cravada, cujo topo está a meio metro, é inferior e, mais importante, mais suave, pelo que são de esperar menores tensões de passo.

3.1.1 Tensões de passo

Para o pé mais próximo, o potencial à distância x será v_{pp} , dado pela equação (3.8), pelo que o pé mais afastado fica à distância $x+1$ e o potencial deste último v_{pa} , usando (3.8), é [87]:

$$v_{pa} = \frac{\rho I}{4l\pi} \left\{ \ln \frac{\left[\sqrt{(l+p)^2 + (x+1)^2} + l+p \right] \left[\sqrt{p^2 + (x+1)^2} - p \right]}{\left[\sqrt{(l+p)^2 + (x+1)^2} - l-p \right] \left[\sqrt{p^2 + (x+1)^2} + p \right]} \right\}. \quad (3.9)$$

A tensão de passo é $v_p = v_{pp} - v_{pa}$. Subtraindo as expressões anteriores, evidenciando a fracção inicial e usando as propriedades da função logaritmo obtém-se [87]:

$$v_p = \frac{\rho I}{4l\pi} \left\{ \ln \frac{\left[\sqrt{(l+p)^2 + x^2} + l+p \right] \left[\sqrt{p^2 + x^2} - p \right] \left[\sqrt{(l+p)^2 + (x+1)^2} - l-p \right] \left[\sqrt{p^2 + (x+1)^2} + p \right]}{\left[\sqrt{(l+p)^2 + x^2} - l-p \right] \left[\sqrt{p^2 + x^2} + p \right] \left[\sqrt{(l+p)^2 + (x+1)^2} + l+p \right] \left[\sqrt{p^2 + (x+1)^2} - p \right]} \right\}. \quad (3.10)$$

Comparem-se agora as tensões de passo para varas enterradas com $p=0$ e $p=0,5$ m na fig. 3.4.

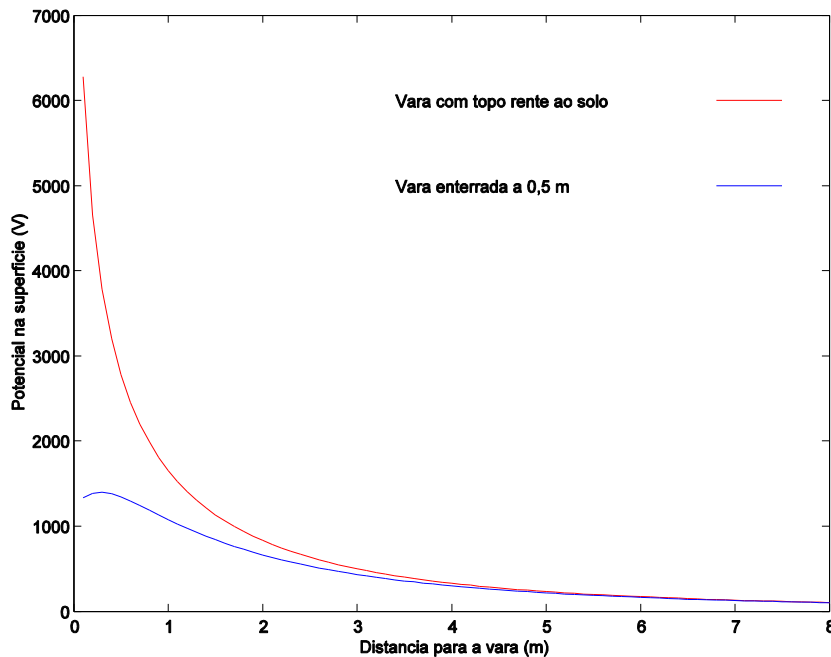


Fig. 3. 4 Tensão de passo para diferentes profundidades da vara

A tensão de passo para a vara, cujo topo está a meio metro da superfície é, na proximidade do ponto de enterramento, muito menor do que para aquela que tem o seu topo à superfície. Para perceber esta substancial redução da tensão de passo à superfície, talvez seja útil ter uma visão das superfícies equipotenciais em torno do eléctrodo. Para tal, vai-se estudar o potencial em profundidade, usando a equação (2.10), com a vara discretizada como segmento

único, fazendo o estudo no plano xz com $y = 0$ em todos os pontos. Usando as propriedades dos logaritmos, obtém-se para (2.10) supondo uma resistividade de $500 \Omega\text{m}$, uma corrente de defeito $I=100 \text{ A}$ durante $0,5 \text{ s}$, uma vara de 3 m cravada no solo, com o topo a uma profundidade de $0,5 \text{ m}$, a seguinte expressão:

$$v = 1327 \ln \frac{\left[z + 3,5 + \sqrt{(z + 3,5)^2 + x^2} \right] \left[z - 0,5 + \sqrt{(z - 0,5)^2 + x^2} \right]}{\left[z - 3,5 + \sqrt{(z - 3,5)^2 + x^2} \right] \left[z + 0,5 + \sqrt{(z + 0,5)^2 + x^2} \right]}. \quad (3.11)$$

Apresentam-se as curvas equipotenciais com 2 KV de incremento em torno do eléctrodo no plano xz , na figura 3.5.

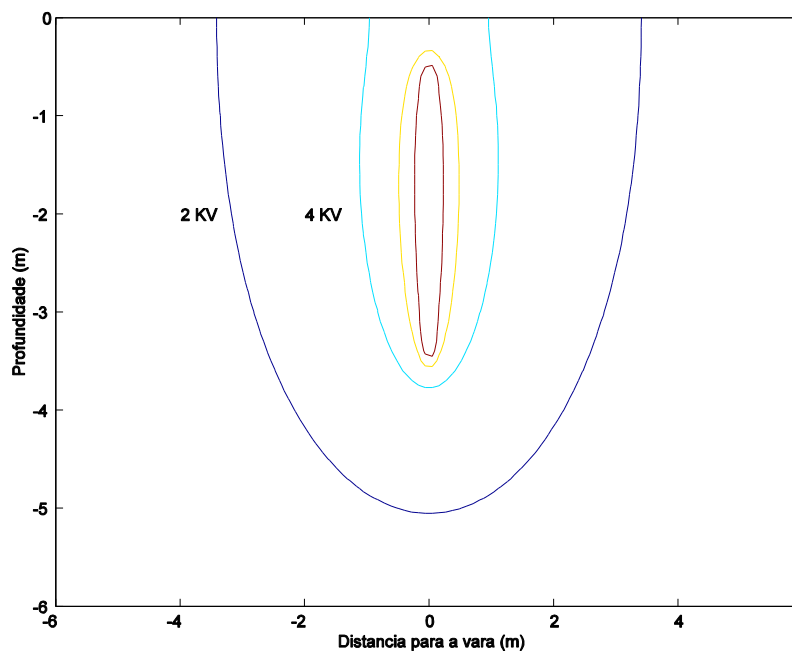


Fig. 3. 5 Equipotenciais espaçadas de 2 KV em torno de vara

Como se verifica, as equipotenciais de 6 e 8 kV já não intersectam a superfície. O facto destas equipotenciais não atingirem a superfície, justifica a diminuição verificada nas tensões de passo. Pelo contrário, se a profundidade de enterramento fosse nula, todas as equipotenciais intersectariam a superfície do solo o que explica as maiores tensões de passo. A fórmula (3.10) é desadequada, pela sua dimensão, para uma derivação analítica do máximo exibido na figura 3.4. Procurou-se uma versão mais simples, pelo que se apresentam as aproximações realizadas, para distâncias inferiores a um metro $x < 1$ que é o intervalo que exhibe o máximo, sabendo-se que a vara tem 3 m de comprimento com o topo a $0,5 \text{ m}$, pelo que o quadrado desta soma $l + p$ é preponderante.

$$\sqrt{(l + p)^2 + x^2} + l + p = 2(l + p); \quad (3.12)$$

$$\sqrt{(L + p)^2 + (x + 1)^2} + L + p = 2(L + p). \quad (3.13)$$

Para os seguintes radicais, usou-se a série de Taylor com dois termos, tendo-se obtido:

$$\sqrt{(l+p)^2 + x^2} - l - p = \frac{x^2}{2(l+p)}; \quad (3.14)$$

$$\sqrt{(l+p)^2 + (x+1)^2} - l - p = \frac{(x+1)^2}{2(2l+p)}; \quad (3.15)$$

substituindo em (3.10) e simplificando obtém-se [87]:

$$v_p = \frac{\rho I}{4l\pi} \left\{ \ln \frac{(\sqrt{p^2 + x^2} - p)(x+1)^2 [\sqrt{p^2 + (x+1)^2} + p]}{x^2 (\sqrt{p^2 + x^2} + p) [\sqrt{p^2 + (x+1)^2} - p]} \right\}. \quad (3.16)$$

O argumento do logaritmo fica independente do comprimento do eléctrodo, muito conveniente, já que se procura calcular o referido comprimento para diferentes correntes de passo. Na figura 3.6 [87] compara-se a função (3.10) com a sua versão simplificada (3.16), para as dimensões já referidas.

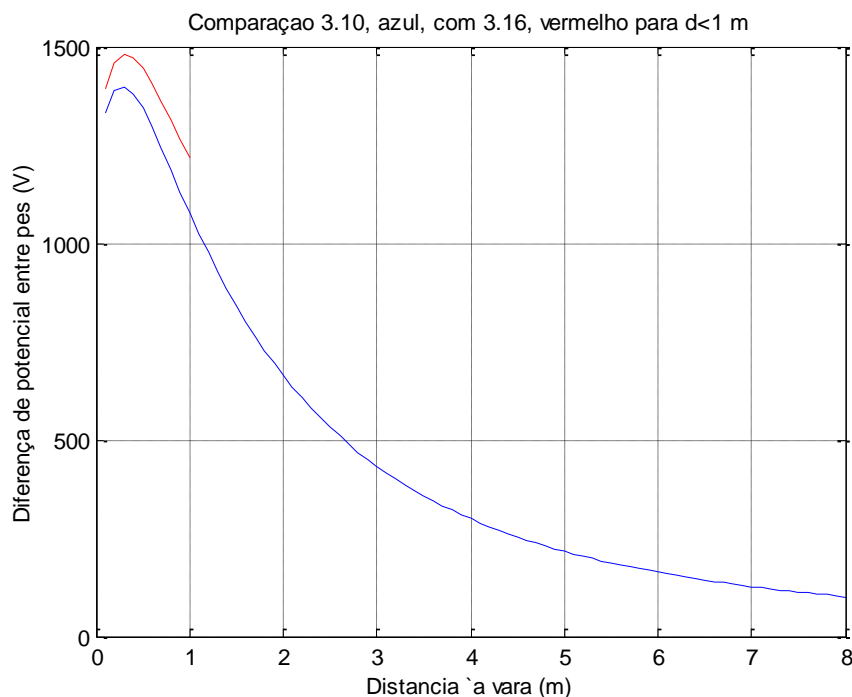


Fig. 3. 6 Aproximação à tensão de passo para vara cravada a 0,5 m.

Na zona do máximo, a curva vermelha está 5% acima da curva azul o que pode ser considerado um factor de segurança adicional. Assim, pode-se trabalhar com aproximação dada por (3.16), fórmula substancialmente mais fácil, para o projecto da tensão de passo na zona crítica, ou seja o primeiro metro. O máximo de tensão de passo ocorre a uma distância de 0,3 m, de distância do pé mais próximo, e vale 1409 V. Usando $x=0,3$ e $p=0,5$ o logaritmo na equação (3.16) vale 1,117. Assim, a 0,3 m a tensão de passo é [87]:

$$v_p = 1,117 \frac{\rho I}{4l\pi} . \quad (3.17)$$

A corrente que passa entre os dois pés é dada pela equação (2.24). Substituindo (3.17) em (2.24) obtém-se:

$$i = \frac{1,117 \rho I}{4\pi l(6\rho + 1000)} . \quad (3.18)$$

Finalmente, resolvendo em ordem a l , obtém-se uma fórmula para o comprimento do eléctrodo [87]:

$$l = \frac{1,117 \rho I}{4\pi(6\rho + 1000)i} . \quad (3.19)$$

Para uma resistividade de 500 Ω m, uma corrente de defeito $I=100$ A durante 0,5 s e uma profundidade de enterramento do topo da vara de 0,5 m, tem-se:

$$l = \frac{1,11}{i} . \quad (3.20)$$

Pretende-se calcular o comprimento do eléctrodo para diferentes valores da corrente que passa no corpo humano. Apresentam-se 3 casos para uma vara enterrada no solo.

Caso I - Tamanho mínimo do eléctrodo que provoca fibrilhação ventricular pela equação de Dalziel (2.21), usada por R. Cordeiro [39], da corrente limite de fibrilhação ventricular. Para meio segundo de duração da corrente, o valor de fibrilhação é 0,222 A. O comprimento do eléctrodo é de 5 m, usando (3.20). Só um eléctrodo maior evita a fibrilhação ventricular.

Caso II - Limiar de fibrilhação aconselhado pelo padrão do IEEE, computando a equação (2.22), a corrente de fibrilhação é 0,164 A e o comprimento do eléctrodo, usando (3.20), é de 7 m.

Caso III - Tamanho do eléctrodo que provoca correntes inofensivas no corpo humano. Para $t=0,5$ s e usando já o majorante de 20 mA para I_f , tem-se de acordo com a equação (2.23) uma corrente de 40 mA. Usando (3.20) obtém-se, para o comprimento da vara de terra, o valor de 28 m.

A garantia de que a corrente que passa pelo corpo humano seja inofensiva exige uma vara de 28 m, muito maior que as varas de 5 ou 7 m que evitam a fibrilhação ventricular, aceitando, contudo, danos no ser humano.

3.1.2 Tensão de toque

A tensão de toque é a diferença de potencial entre o eléctrodo, com todas as massas a ele ligadas, e o potencial à superfície da terra.

$$V_t = RI - V_s, \quad (3.21)$$

em que:

- V_t : tensão de toque;
- R : resistência do eléctrodo
- I : corrente de defeito
- V_s : tensão à superfície

Usando a equação (3.8) para o potencial de superfície vem:

$$v_T = RI - \frac{\rho I}{4l\pi} \left\{ \ln \left[\frac{\left[\sqrt{(l+p)^2 + x^2} + l + p \right] \left(\sqrt{p^2 + x^2} - p \right)}{\left[\sqrt{(l+p)^2 + x^2} - l - p \right] \left(\sqrt{p^2 + x^2} + p \right)} \right] \right\}. \quad (3.22)$$

Apresenta-se um gráfico que ilustra a tensão de toque, variando com a distância, para a vara cravada, na figura 3.7. A simulação foi feita para uma resistividade de 500 Ωm , uma corrente de descarga $I=100$ A, durante 0,5 s, uma vara de 3 m e uma profundidade de enterramento do topo de 0 e 0,5 m. A resistência, na fórmula (3.22), é dada pela fórmula de Rudenberg [4].

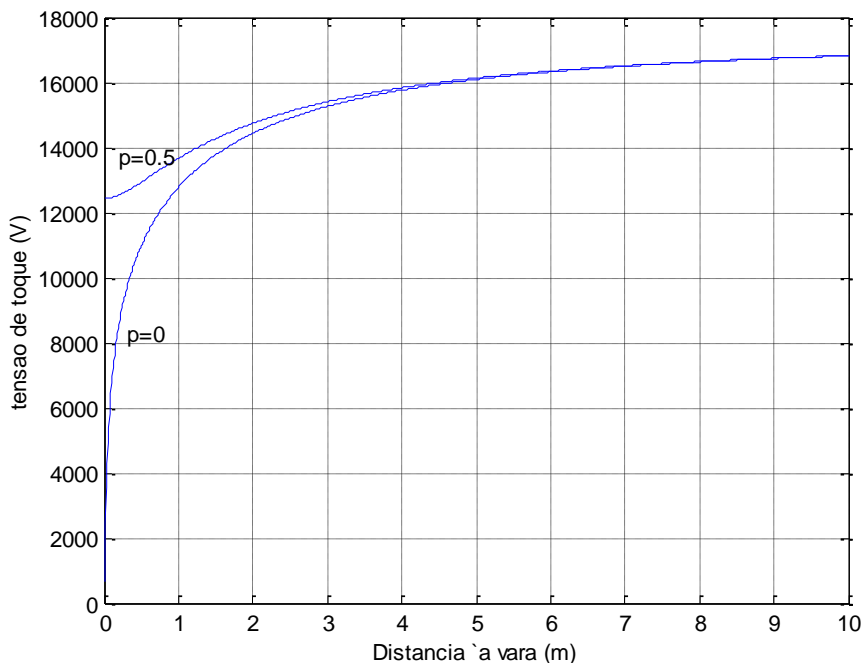


Fig. 3. 7 Tensão de toque ao longo da distância para dois enterramentos

Note-se que a vara cravada à superfície tem uma tensão de toque, próxima da origem, muito pequena. Isto acontece porque a tensão à superfície é próxima da tensão do eléctrodo. De qualquer modo para distâncias suficientemente grandes, a tensão à superfície tende para zero e a tensão de toque acaba por ser o potencial do eléctrodo. Assim, este pode ser usado como potencial de toque, até porque para o padrão do IEEE a tensão de superfície é nula a partir dos 7,6 m, distância muito pequena dentro de uma fábrica. Qualquer máquina colocada a 8 m de uma vara de terra, numa pretensa instalação fabril protegida por uma vara, está sobre a equipotencial zero no solo, pelo que a tensão de toque é a tensão do eléctrodo.

Assim, substituindo na equação (2.26) a tensão de Thevenin pelo potencial do eléctrodo e usando a lei de Ohm para este último, obtém-se:

$$RI = (1,5\rho + 1000)i , \quad (3.23)$$

com:

I : Corrente de defeito para a terra;

i : Corrente que passa pelo ser humano.

A fórmula mais simples, para a resistência da vara cravada, é a proposta pelo RTIEBT, reduzida ao quociente simples entre a resistividade e o comprimento do eléctrodo. Usando esta fórmula em (3.23), deriva-se facilmente a expressão do comprimento da vara, em função das correntes especificadas em (3.23).

$$l = \frac{\rho I}{(1,5\rho + 1000)i} , \quad (3.24)$$

sendo l o comprimento do eléctrodo.

Retomando os 3 casos já estudados, num solo de resistividade de 500 Ωm e uma corrente de defeito de 100 A, apresentam-se as seguintes conclusões:

Caso I - Tamanho mínimo do eléctrodo que provoca fibrilhação ventricular usando a equação de Dalziel [39], equação (2.21), da corrente limite de fibrilhação ventricular. Para meio segundo de duração da corrente, o valor de fibrilhação é 0,222 A. O comprimento do eléctrodo é de 130 m, usando (3.24). Só um eléctrodo maior evita a fibrilhação ventricular.

Caso II - Limiar de fibrilhação aconselhado pelo padrão do IEEE, computando a equação (2.22) a corrente de fibrilhação é 0,164 A e o comprimento do eléctrodo, usando (3.24), é de 174 m.

Caso III - Tamanho do eléctrodo, que provoca correntes inofensivas no corpo humano. Para $t=0,5$ s, e usando já o majorante de 20 mA para I_1 , tem-se de acordo com a equação (2.23) uma corrente de 40 mA. Usando (3.24) obtém-se para o comprimento da vara de terra o valor de 714 m.

Estes casos mostram, pelo comprimento necessário das varas, que o potencial de toque pode ser a característica mais exigente para uma vara de terra e que o requisito de uma corrente de passagem no corpo humano, totalmente inofensiva, exige varas enormes, totalmente impraticáveis. No caso em apreço, uma só vara não é solução como eléctrodo de terra.

3.1.3 Cálculo da resistência

Para o modelo clássico de fronteiras abertas, existem fundamentalmente duas fórmulas que permitem obter a resistência de difusão de uma vara de terra, sabendo as dimensões da vara e a resistividade do solo. A fórmula mais antiga é devida a Herbert Dwight e apresenta-se na equação (3.25) [3].

$$R = \frac{\rho}{2\pi\ell} \left(\ln \frac{4\ell}{a} - 1 \right) , \quad (3.25)$$

em que:

R - resistência da vara de terra

ρ - resistividade do solo

ℓ - comprimento do eléctrodo

a - raio do eléctrodo

Uma outra fórmula bastante usada é proposta por Rudenberg [4], mais fácil de trabalhar em optimização, por exemplo, definida na equação (3.26).

$$R = \frac{\rho}{2\pi\ell} \ln \frac{2\ell}{a}, \quad (3.26)$$

em que:

R - resistência da vara de terra

ρ - resistividade do solo

ℓ - comprimento do eléctrodo

a - raio do eléctrodo.

Refira-se que a fórmula aconselhada nas Regras Técnicas das Instalações Eléctricas de Baixa Tensão é [86]:

$$R = \frac{\rho}{\ell}. \quad (3.27)$$

Ilustra-se a variação da resistência com as três fórmulas na figura 3.8. O comprimento da vareta de terra variou desde os 1,5 aos 12 m, valores comuns em Portugal. O raio usado é de 8 mm.

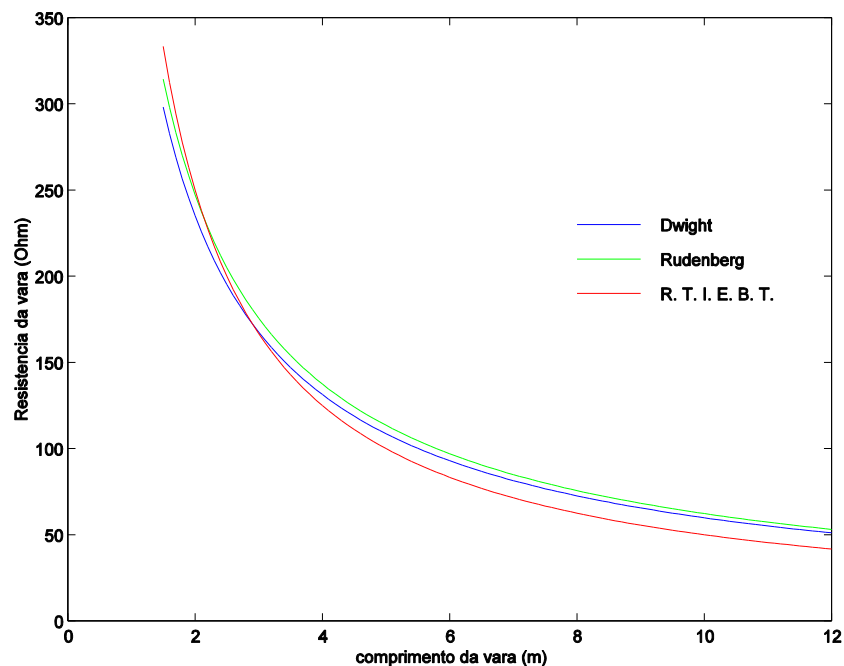


Fig. 3. 8 Variação da resistência da vara segundo as três fórmulas para $\rho=500 \Omega\text{m}$

O padrão do IEEE aconselha a fórmula de Dwight, indicando que esta tem um erro por excesso de 13%, tal como referido no Std 142 de 1982 [2]. A escolha desta fórmula só pode ser entendida se os 13 % forem considerados como uma margem adicional de segurança. A fórmula de Rudenberg, dá valores ligeiramente maiores 4 a 5%. A fórmula constante nas RTIEBT, tem um erro por defeito de -18% em varas de 12 m, para a fórmula de Dwight, ou seja, dará valores inferiores ao valor real no intervalo mais usado [2 12] para o comprimento das varas. Dada a sua simplicidade é uma boa aproximação.

Relativamente ao modelo de fronteiras fechadas, desconhecem-se aproximações teóricas para o cálculo da resistência.

Para grupos de varas iguais, com o mesmo comprimento, o padrão do IEEE [3] recomenda o cálculo do paralelo eléctrico das referidas varas, que sendo iguais se traduz na divisão da resistência de uma delas pelo número de varas, multiplicando o resultado do referido paralelo pelo factor de escala, constante na tabela 3.1 [53]. Refira-se que o espaçamento das varas é igual ao seu comprimento.

Tabela 3. 1 Factores de escala, para o paralelo de varas

Número de Varas	2	3	4	8	12	16	20	24
Factor de escala	1,16	1,29	1,36	1,68	1,8	1,92	2	2,16

3.2 Tensões de passo e de toque do cabo horizontal

Apresenta-se na figura 3.9 um cabo como eléctrodo de terra enterrado à profundidade p de comprimento $2L$, em que o plano xy coincide com a superfície do solo [87]:

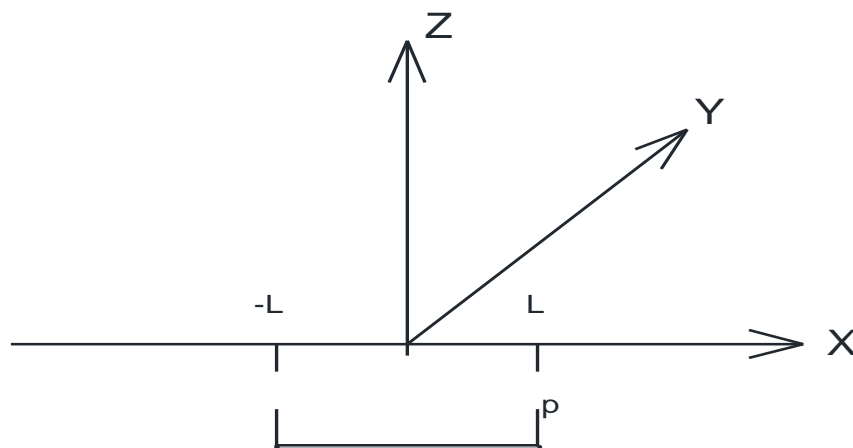


Fig. 3. 9 Cabo eléctrico enterrado horizontalmente

O potencial em qualquer ponto $P(x,y,z)$, provocado por um cabo de terra centrado em (x_f, y_f, z_f) de comprimento $2L$ e orientada segundo x , é dado por (2.11). No caso do cabo da figura 3.9 tem-se para as coordenadas do centro:

$$x_f = 0 \quad \wedge \quad y_f = 0 \quad \wedge \quad z_f = -p, \quad (3.28)$$

sendo p a profundidade de enterramento.

3.2.1 Tensões de passo na perpendicular à trincheira

O potencial à superfície será calculado ao longo de uma recta paralela ao eixo das ordenadas, de equação $x = c$, sendo c uma constante. Usando a equação (2.11), com $z = 0$, ou seja, no plano xy , tem-se para o segundo argumento de F_1 , usado na equação (3.30):

$$A_x^\pm = \sqrt{y^2 + p^2}. \quad (3.29)$$

Substituindo os parâmetros em (2.11), obtém-se a expressão mais simples:

$$v = \frac{\rho I}{4L\pi} [F_1(c + L, A_x^\pm) - F_1(c - L, A_x^\pm)]. \quad (3.30)$$

Substituindo a função F_1 e usando as propriedades logarítmicas, obtém-se, para o potencial superficial ao longo de $x = c$ [87]:

$$v = \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \frac{\sqrt{y^2 + (c+L)^2 + p^2} + c + L}{\sqrt{y^2 + (c-L)^2 + p^2} + c - L}. \quad (3.31)$$

Um ponto da mesma recta, com ordenada $y+1$, tem o potencial de:

$$v(y+1) = \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \frac{\sqrt{(y+1)^2 + (c+L)^2 + p^2} + c + L}{\sqrt{(y+1)^2 + (c-L)^2 + p^2} + c - L}. \quad (3.32)$$

A diferença de potencial entre os dois pontos será $v(y) - v(y+1)$. Fazendo uso das propriedades dos logaritmos, tem-se [87]:

$$v_{Passo} = \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \frac{\left[\frac{\sqrt{y^2 + (c+L)^2 + p^2} + c + L}{\sqrt{y^2 + (c-L)^2 + p^2} + c - L} \right] \left[\frac{\sqrt{(y+1)^2 + (c-L)^2 + p^2} + c - L}{\sqrt{(y+1)^2 + (c+L)^2 + p^2} + c + L} \right]}{\left[\frac{\sqrt{y^2 + (c-L)^2 + p^2} + c - L}{\sqrt{(y+1)^2 + (c-L)^2 + p^2} + c - L} \right] \left[\frac{\sqrt{y^2 + (c+L)^2 + p^2} + c + L}{\sqrt{(y+1)^2 + (c+L)^2 + p^2} + c + L} \right]}. \quad (3.33)$$

Apresentam-se na figura 3.10, os gráficos da tensão de passo ao longo das rectas $x = 0$ (azul), $x = 3$ (vermelho), $x = 5$ (verde) e $x = 7$ (preto), para o cabo horizontal de 10 m de comprimento, colocado a 0,5 m de profundidade, nas condições da figura 3.9 e num solo cuja resistividade é de 500 Ωm . [87].

Como se verifica, a tensão de passo é maior na recta perpendicular ao meio do eléctrodo, $x = 0$, o que era previsível por simetria. Para outros comprimentos do eléctrodo e noutros solos as conclusões foram as mesmas.

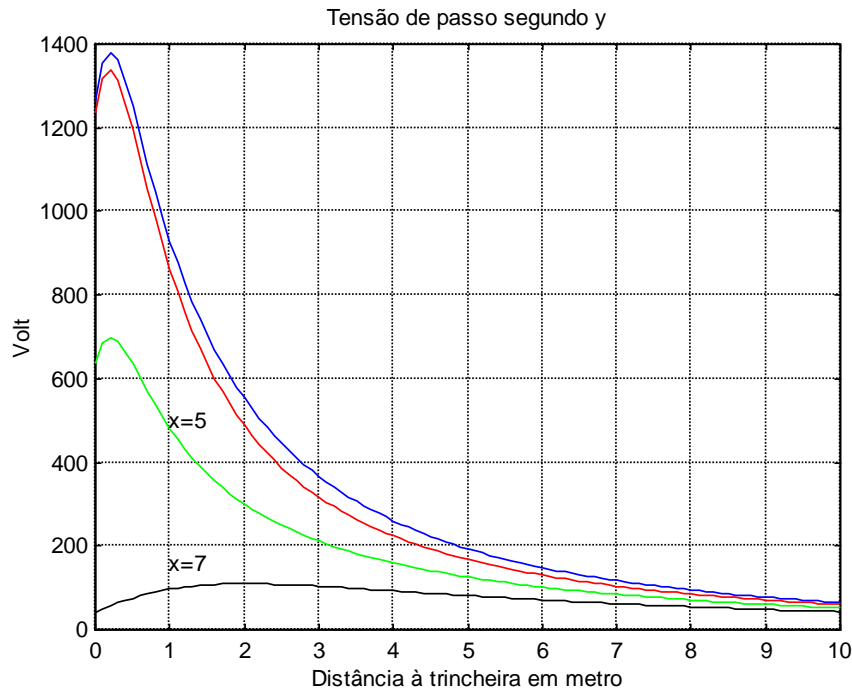


Fig. 3. 10 Tensão de passo segundo y para várias rectas de equação $x=c$

Pode obter-se uma versão simplificada da tensão de passo definida em (3.33), com as seguintes aproximações, recordando que um cabo enterrado tem alguns metros de comprimento, que a profundidade de enterramento é menor do que um metro, e que a ordenada do máximo está no primeiro metro:

$$\text{Se } L^2 \gg y^2 + p^2 \Rightarrow \sqrt{y^2 + L^2 + p^2} + L \approx 2L. \quad (3.34)$$

Para os restantes radicais usam-se dois termos da série de Taylor, ficando:

$$\text{Se } L^2 \gg y^2 + p^2 \Rightarrow \sqrt{y^2 + L^2 + p^2} - L \approx \frac{y^2 + p^2}{2L}. \quad (3.35)$$

$$\text{Se } L^2 > (y+1)^2 + p^2 \Rightarrow \sqrt{(y+1)^2 + L^2 + p^2} \approx L + \frac{(y+1)^2 + p^2}{2L}. \quad (3.36)$$

Com estas simplificações, obtém-se uma expressão aproximada para a função da tensão de passo, definida em (2.78), que a seguir se apresenta [87]:

$$v = \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \frac{(y+1)^2 + p^2}{y^2 + p^2}. \quad (3.37)$$

Na figura seguinte apresenta-se a função dada por (3.37), a vermelho e a curva teórica expressa por (3.33), a azul. Esta curva encontra-se muito próxima da função simplificada, na zona do máximo, o qual se pretende calcular pela função aproximada.

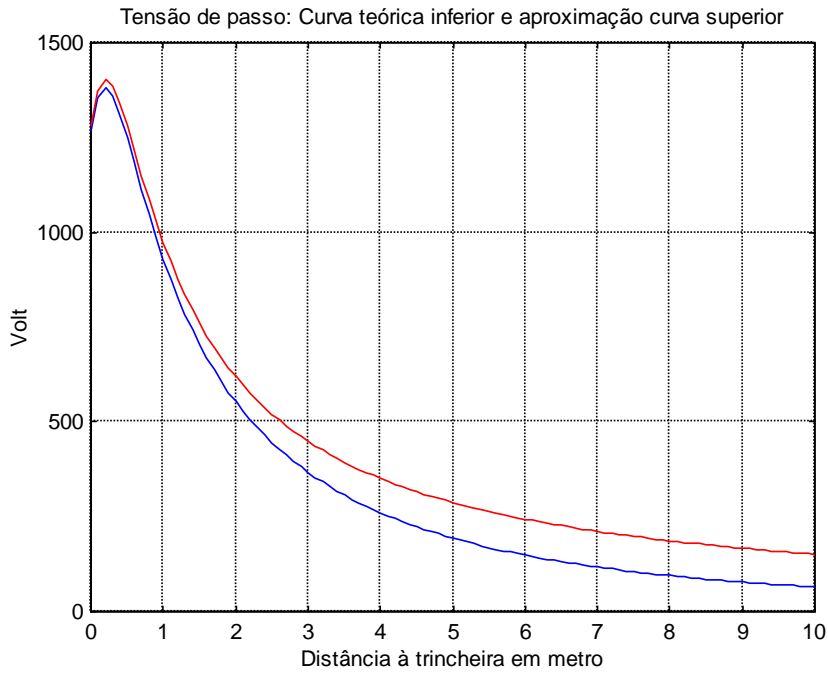


Fig. 3. 11 Comparação de curvas para a tensão de passo.

A função dada por (3.37) é fácil de extremar, possuindo um máximo em:

$$y = \frac{\sqrt{1+4p^2} - 1}{2}. \quad (3.38)$$

O valor desse máximo é dado por:

$$v_{p_{\max}} = \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \frac{1+4p^2 + \sqrt{1+4p^2}}{1+4p^2 - \sqrt{1+4p^2}}. \quad (3.39)$$

Esta expressão dá um majorante para a máxima tensão de passo na aproximação segundo y . O desvio entre os dois máximos é de 1,6 %.

3.2.2 Tensões de passo na direcção paralela à trincheira

Far-se-á, finalmente, o estudo do potencial de passo, ao longo do eixo das abcissas. Considerando o cabo da figura 3.9, centrado em $(0,0,-p)$, o potencial ao longo da superfície, $z = 0$, segundo a recta $y = c$, é dado pela equação (2.11) com diferentes valores para o parâmetro A_x^\pm já que $z_f = -p$. O parâmetro referido vale [53]:

$$A_x^\pm = \sqrt{c^2 + p^2}. \quad (3.40)$$

Usando este parâmetro na equação (2.11) obtém-se:

$$v_1 = \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \frac{\sqrt{(x+L)^2 + c^2 + p^2} + x + L}{\sqrt{(x-L)^2 + c^2 + p^2} + x - L}. \quad (3.41)$$

À distância $x+1$, na recta $y = c$, tem-se a seguinte expressão para o potencial:

$$v_2 = \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \frac{\sqrt{(x+L+1)^2 + c^2 + p^2} + x + L + 1}{\sqrt{(x-L+1)^2 + c^2 + p^2} + x - L + 1}. \quad (3.42)$$

A tensão de passo é $v_{Passo} = v_1 - v_2$. Substituindo tem-se:

$$v_{Passo} = \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \left[\frac{\sqrt{(x+L)^2 + c^2 + p^2} + x + L}{\sqrt{(x-L)^2 + c^2 + p^2} + x - L} \right] \left[\frac{\sqrt{(x-L+1)^2 + c^2 + p^2} + x - L + 1}{\sqrt{(x+L+1)^2 + c^2 + p^2} + x + L + 1} \right]. \quad (3.43)$$

Ilustra-se a tensão de passo para o eléctrodo que tem sido usado, com um comprimento de 10 m ($L=5$), enterrado a 0,5 m de profundidade ($p=0,5$), num terreno de resistividade de 500 Ωm , escoando uma corrente de defeito de 100 A, para um passo de 1 m e para várias rectas, nomeadamente $y=0$, $y=2$ e $y=3$, como se pode ver na figura 3.12, [87].

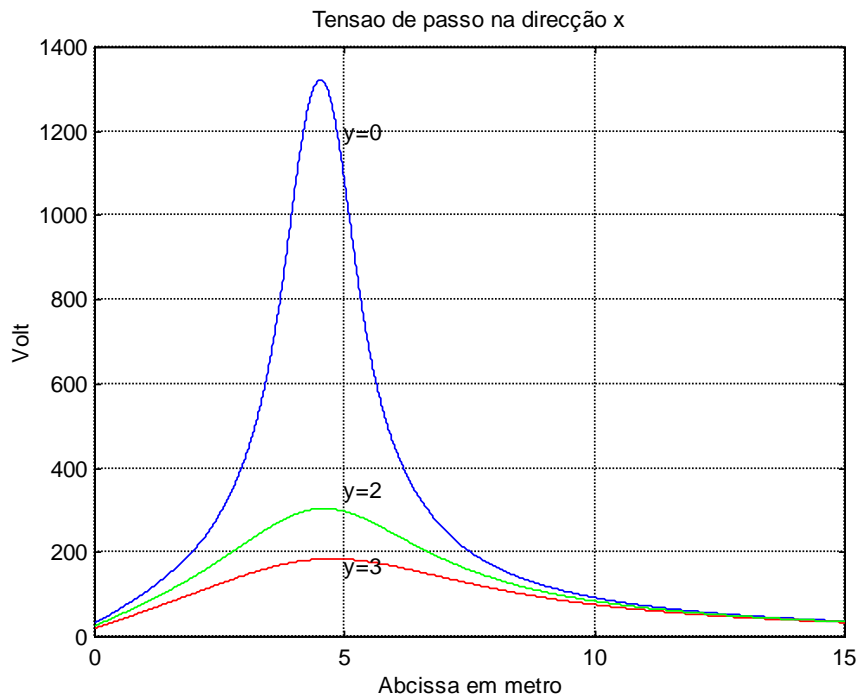


Fig. 3. 12 Tensão de passo segundo x para várias rectas de equação $y=c$

É evidente, pela figura, que é no percurso exactamente por cima do eléctrodo que a tensão de passo toma valores mais altos, sendo o máximo perto da ponta do eléctrodo como mostra a curva a azul. Note-se que, sobre o centro do eléctrodo, para valores de x próximos de zero a tensão de passo é próxima de zero, sinal de que se caminha sobre uma equipotencial. Assim, o pior percurso é ao longo do eixo da trincheira. Contudo como o máximo existe para valores

razoáveis da variável independente, ou seja não desprezáveis, não é possível fazer as aproximações anteriores para obter uma expressão mais simples.

Tal como na vara, apresenta-se o estudo de três casos, procurando-se, analiticamente, calcular o valor do comprimento do cabo, que satisfaz os requisitos da tensão de passo na aproximação perpendicular ao meio da trincheira, onde o cabo foi enterrado, ou seja, segundo a recta à superfície, de equação $x = 0$. A existência de uma fórmula, permite obter o máximo da função, e depois verificar graficamente a variação da tensão de passo ao longo do eixo da superfície da trincheira, cuja equação no plano de superfície é $y = 0$. Em todos os casos se supõe uma resistividade de $500 \Omega\text{m}$, uma corrente de defeito de 100 A , com uma duração de meio segundo. O cabo foi colocado à profundidade de $0,5 \text{ m}$ e o passo humano é de 1 m [83].

A corrente que passa entre os dois pés, é dada pela equação (2.24), que pode ser resolvida em ordem à tensão equivalente de Thevenin e igualada à fórmula que fornece o valor da máxima tensão de passo (3.39), na aproximação segundo a perpendicular ao meio da trincheira. Como, nesta última, o argumento do logaritmo depende apenas da profundidade de enterramento da vara, valor fixo em cada situação, pelo que o referido logaritmo assume o valor de $1,76$ para a profundidade de $0,5 \text{ m}$. A igualdade das duas expressões fica, assim, formulada:

$$1.76 \frac{\rho l}{4L\pi} = (6\rho + 1000)i. \quad (3.44)$$

Para os valores indicados da resistividade e da corrente de defeito, obtém-se a seguinte relação:

$$L = \frac{1,75}{i}. \quad (3.45)$$

Caso I - Usando a equação de Dalziel para a corrente de fibrilhação ventricular, o valor de fibrilhação é $0,222 \text{ A}$, obtido pela equação (2.21). A função (3.45) permite calcular um valor de $L=7,9 \text{ m}$ o que, arredondado, dá um eléctrodo de 16 m . Com este valor de L e usando (3.43), verifica-se o valor da tensão de passo ao longo do eixo das abcissas, ou seja, tem-se a tensão de passo segundo x , representada na figura 3.13. O valor máximo é de 846 V , quando a fórmula (3.39) obtém um valor ligeiramente superior de 876 V . Conclui-se que o comprimento de 16 m é aceitável nas duas direcções de progressão.

Caso II - Usando a equação (2.22), para a corrente de fibrilhação ventricular, o valor de fibrilhação é $0,164 \text{ A}$. A função (3.45) permite computar um valor de $L=10,7 \text{ m}$ o que, arredondado, dá um eléctrodo de 22 m . A tensão de passo, quando alguém caminha segundo o eixo dos y tem um máximo dado pela equação (3.39) de 656 V . Para investigar o valor do passo, segundo x , apresenta-se a figura 3.13, para um comprimento de 22 m , usando a equação (3.43). O valor máximo é de 621 V , abaixo do limiar do padrão do IEEE de 656 V , que

coincide com o máximo quando se faz a aproximação na perpendicular ao meio da trincheira, para este caso. Nestas circunstâncias o eléctrodo a enterrar é de 22 m.

Caso III - A fórmula (2.23) estabelece uma corrente majorada de 40 mA como limiar de segurança para o ser humano. Usando a equação (3.45), obtém-se $L = 43,8$ m, valor que pode ser arredondado a 44 m, ou seja, um eléctrodo de 88 m garante que, ao longo do eixo das ordenadas, a tensão é inofensiva, com um valor de 160 V conforme a equação (3.39). Com este valor de L e usando (3.43), tem-se o seguinte gráfico para a tensão de passo ao longo do eixo das abcissas na figura 3.13.

Segundo o valor máximo da tensão de passo também não ultrapassa os 160 V, pelo que o eléctrodo de 88 m garante uma tensão de passo inofensiva. A pretensão de projectar um cabo de terra garantindo que as correntes de passo são inofensivas, aumenta significativamente o comprimento do eléctrodo, embora não se tenha calculado o acréscimo de custo daí resultante.

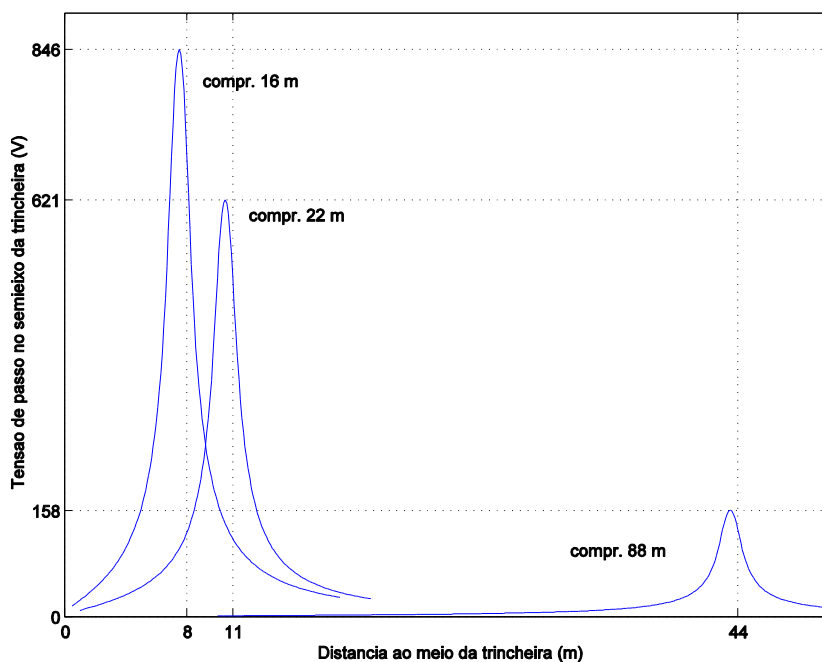


Fig. 3. 13 Tensão de passo ao longo do semieixo longitudinal da trincheira

3.2.3 Tensões de toque

A tensão de toque provocada por uma corrente de defeito de um cabo horizontal é máxima a partir dos 7,6 m, conforme o modelo do padrão do IEEE. Neste caso, tal como na vara tratada anteriormente, a equação a considerar é a (3.23). Se for usada uma fórmula simples para a resistência, como a que consta do RTIEBT, indicando esta que o cabo enterrado tem uma resistência dupla da vara de igual dimensão, obtém-se comprimentos para os três casos anteriormente considerados, que são o dobro dos obtidos, mantendo-se as mesmas conclusões. Se, contudo, se pretender usar as fórmulas recomendadas pelo padrão do IEEE, de

Dwight, não se conseguiu deduzir uma função simples como a (3.24). Neste caso, calcula-se a resistência do eléctrodo, usando (3.23) que permite manter baixo o potencial de toque. Os resultados apresentam-se na tabela 3.2. É de novo evidente que a exigência de uma corrente totalmente inofensiva para o ser humano, em caso de toque em carcaças de máquinas, implica menores valores para a resistência do eléctrodo, quando comparada com os valores que apenas evitam a fibrilhação ventricular. Os resultados da comparação constam da tabela 3.2.

Tabela 3. 2 Resistência de cabo para diferentes limiares de corrente

Casos	I	II	III
Limiar de corrente (A)	0,222	0,164	0,04
Limiar de tensão (V)	389	287	70
Resistência (Ohm)	3,9	2,9	0,7

O cálculo da dimensão da vara partindo da resistência pretendida, ou vice-versa, são tratados na subsecção seguinte.

3.2.4 Cálculo da resistência

Para o modelo clássico de fronteiras abertas, existem fundamentalmente duas fórmulas para obter a resistência de um eléctrodo horizontal. A primeira delas é devida a Dwight [3], a segunda a Meliopoulos, e como muitos dos parâmetros são comuns estes apresentam-se posteriormente à segunda. A fórmula de Dwight é definida em (3.46).

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} + \ln \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right). \quad (3.46)$$

Uma fórmula mais sucinta, devida a Meliopoulos [53], apresenta-se a seguir.

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left(\ln \frac{l}{a} + \ln \frac{l}{2p} \right), \quad (3.47)$$

sendo os parâmetros das duas fórmulas, listados seguidamente:

R - resistência da vara de terra

ρ - resistividade do solo

L - semi-comprimento do eléctrodo

l - comprimento do eléctrodo

a - raio do eléctrodo

s : dobro da profundidade de enterramento

p - profundidade de enterramento

A fórmula (3.47) é válida para profundidades maiores que seis vezes o raio do cabo.

A fórmula aconselhada nas Regras Técnicas das Instalações Eléctricas de Baixa Tensão é [86]:

$$R = \frac{2\rho}{l} . \quad (3.48)$$

Ilustra-se o cálculo da resistência com as fórmulas de Dwight, Meliopoulos e a fórmula constante nas RTIEBT na figura 3.14.

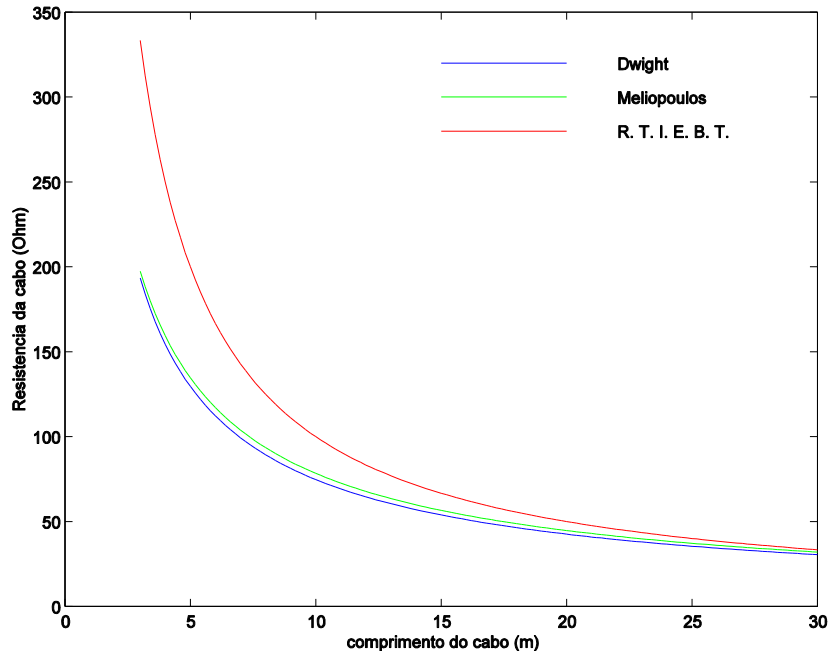


Fig. 3. 14 Resistência de cabo enterrado segundo os autores indicados. $\rho=500 \Omega\text{m}$

As aproximações de Meliopoulos e de Dwight são praticamente idênticas. A fórmula incluída nas RTIEBT, parece dar um valor com grande erro para as outras fórmulas, para cabos menores do que 10 m. Por exemplo, um cabo de 10 m terá 78 Ω de resistência pela fórmula de Dwight, e 100 Ω pela fórmula da norma portuguesa, o que se traduz num erro de 28 %.

Relativamente ao modelo de fronteiras fechadas, desconhecem-se aproximações teóricas para o cálculo da resistência.

3.3 Pontos de descontinuidade no método dos momentos

Regressemos ao exemplo da vara vertical e suponhamos que se quer discretizar o eléctrodo, dividindo-o em três segmentos, como na figura 2.3. O potencial à superfície do segmento um é, pelo princípio da sobreposição, a soma das contribuições devidas às correntes que saem dos eixos de simetria dos três segmentos, ou seja:

$$V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + R_{13}I_3 , \quad (3.49)$$

sendo R_{11} a resistência própria do segmento um, R_{12} a resistência entre os segmentos um e dois e analogamente para R_{13} . Aplicando o mesmo princípio aos restantes segmentos, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
V_1 &= R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + R_{13}I_3 \\
V_2 &= R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + R_{23}I_3 \\
V_3 &= R_{31}I_1 + R_{32}I_2 + R_{33}I_3
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Como o eléctrodo é um condutor, a sua superfície é uma equipotencial e os primeiros membros das equações anteriores são iguais. Arbitrando um valor para estes potenciais resolve-se o sistema obtendo-se o valor das três correntes. A corrente total que sai do eléctrodo será a soma das três e a resistência de difusão do eléctrodo será, pela lei de Ohm,

$$R = \frac{V}{I_{Total}} \tag{3.51}$$

sendo V o potencial arbitrado. O método é generalizável a qualquer número de segmentos [53]. O método exposto provoca indeterminações matemáticas, quando os segmentos são colineares e adjacentes, situação omitida em [53]. Seja z_f a cota do centro do segmento um. Então a extremidade inferior deste, está à profundidade $z_f - L_1$ e a cota do centro do segundo segmento, contíguo, é $z_a = z_f - L_1 - L_2$ o que implica:

$$z_a - z_f + L_1 + L_2 = 0. \tag{3.52}$$

Como todos os centros dos segmentos partilham a mesma abcissa e a mesma ordenada, o parâmetro B_z^- , na equação (2.14) é nulo. Assim, os argumentos da função F_2 , logo no início da expressão (2.14), são ambos nulos, quaisquer que sejam as cotas e os semi-comprimentos dos segmentos, conduzindo ao cálculo de '0 x ln(0)'. Para obviar esta situação, o potencial deverá ser calculado à superfície do segundo segmento, ou seja, deve ser considerado o raio do segmento, fazendo $x_a - x_f = \text{raio}$ ou $y_a - y_f = \text{raio}$ no parâmetro mudo B da equação (2.14). Isto equivale a deslocar o eixo do segundo segmento, onde se calculou o potencial, para a superfície do mesmo e usar a mesma fórmula. Dado que o raio é minúsculo, quando comparado com o tamanho dos segmentos, os resultados obtidos não mudam significativamente, como se viu na tabela 2.2.

Sempre que numa instalação o eléctrodo horizontal for maior que as dimensões físicas do terreno, a introdução de ângulos rectos no cabo de terra é uma solução óbvia. O primeiro desses eléctrodos a tratar é o eléctrodo de terra em 'L'. A fórmula para o cálculo destes eléctrodos com braços iguais é devida a Dwight [3]:

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} - 0.2373 + 0.2146 \frac{s}{L} + 0.1035 \frac{s^2}{L^2} - 0.0424 \frac{s^4}{L^4} \dots \right), \tag{3.53}$$

sendo:

- ρ : resistividade do solo;
- L : comprimento do braço;
- a : raio da vara ;

s/2: profundidade de colocação do eléctrodo

Para braços de diferentes comprimentos, terá de se usar ou o método da matriz ou o método dos momentos. Neste último caso é omitido, novamente, o aparecimento de indeterminações matemáticas [53]. Apresenta-se um exemplo de um eléctrodo em 'L', na figura 3.15, que obriga a uma segmentação e à consequente utilização de resistências mútuas:

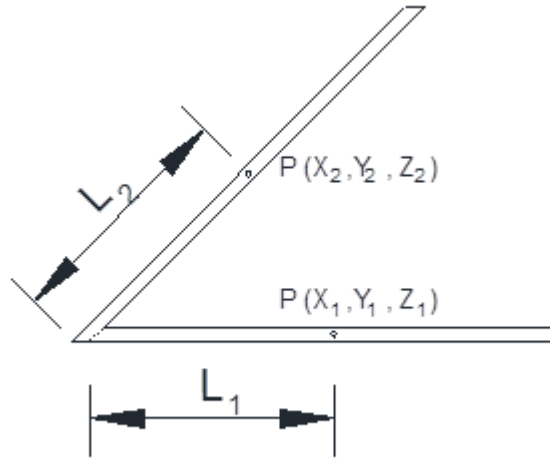


Fig. 3. 15 Configuração em 'L' na horizontal

Nomeando o condutor orientado segundo x como o segmento fonte ou 1, e o orientado segundo y como o segmento passivo ou 2, tem-se, para a resistência mútua entre os dois condutores, a seguinte fórmula [53]:

$$\begin{aligned}
 RM = \frac{\rho}{16\pi L_1 L_2} [& F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 - z_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 - z_1) \\
 & - F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 - z_1) \\
 & + F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 - z_1) + F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 + z_1) \\
 & - F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 + z_1) \\
 & - F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 + z_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 + z_1)].
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

A função F_3 é [53]:

$$\begin{aligned}
 F_3(t, u, v) = & -u + u \ln \left(t + \sqrt{t^2 + u^2 + v^2} \right) + t \ln \left(u + \sqrt{t^2 + v^2 + u^2} \right) \\
 & + 2v \cdot \tan^{-1} \frac{t + u + \sqrt{t^2 + u^2 + v^2}}{v}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Também neste caso é importante considerar o raio, a , dos condutores. Assim:

$$x_2 - x_1 = -(L_1 + a); \tag{3.56}$$

$$y_2 - y_1 = L_2; \tag{3.57}$$

$$z_2 - z_1 = 0. \tag{3.58}$$

Se não se considerar o raio a , na segunda vez que se invoca a função F_3 em (3.54), será com todos os parâmetros nulos, como facilmente se verifica, originando um argumento nulo nos logaritmos e uma indeterminação no arco tangente. A abcissa do segmento segundo x é, assim, deslocada de um valor igual ao raio. Em alternativa, pode considerar-se o raio dos condutores nas cotas, obtendo-se:

$$x_2 - x_1 = -L_1; \quad (3.59)$$

$$z_2 - z_1 = a. \quad (3.60)$$

A expressão (3.57) mantém-se inalterada. Neste caso, o argumento do arco tangente não fica com denominador nulo, pelo que foi esta a alternativa usada em cálculo. Com estas alterações, considerou-se um eléctrodo em 'L' simétrico, com braços de 25 m, 50 mm² de secção, num terreno de resistividade de 1500 Ωm e enterrado a 0,5 metros. Na discretização em dois segmentos obteve-se um resultado de 62 Ω, enquanto que a fórmula de Dwight, para este tipo de eléctrodos, fornece um valor de 61 Ω. O desvio é perfeitamente desprezável.

3.4 Eléctrodos planos

Através do estudo dos casos anteriores, conclui-se que é a tensão de toque o factor mais perigoso para o ser humano. Esta é máxima a partir dos 7,6 m de distância ao eléctrodo, já que a essa distância o potencial no solo é nulo, sendo a tensão de toque, igual à tensão no eléctrodo, ou seja, à elevação de potencial deste. Se a resistência do eléctrodo for baixa, da ordem de alguns ohm, a tensão, neste, também o será de acordo com a lei de Ohm. Assim, para que não haja fibrilhação ventricular, a tensão de toque deverá ser menor do que a tensão que provoca a fibrilhação. Por outro lado, garantir que a corrente seria sempre inofensiva, tornar-se-ia dispendioso e difícil, dado que os comprimentos dos cabos, ou varas, seriam enormes. Trata-se, assim, de garantir que o produto Ri seja menor do que a expressão dada em (3.23). Resolvendo a inequação em ordem a R , e substituindo a corrente que passa pelo corpo humano pelo limiar do padrão do IEEE (2.12), obtém-se facilmente:

$$R < (1,5\rho + 1000) \frac{0,116}{I\sqrt{t}}, \quad (3.61)$$

em que:

I : corrente de defeito

t : tempo de duração da corrente de defeito

R : resistência do eléctrodo

ρ : resistividade do solo

Os eléctrodos de terra em quadrado, ou no caso geral rectangulares, apresentam a possibilidade de se enterrar cabos de cobre de dezenas de metros em áreas relativamente pequenas. A resistência do quadrado pode ser facilmente calculada pelo método dos momentos, ressalvadas as precauções indicadas no parágrafo anterior. O mesmo se aplica

para eléctrodos rectangulares. O interesse destes eléctrodos, reside na possibilidade da tensão de toque no espaço interior, onde o potencial de superfície ainda tem valor significativo, ser menor do que o seu valor máximo que é a elevação do potencial do eléctrodo. Assim, num quadrado com mais de 15,2 m de lado, o seu ponto central fica a mais de 7,6 m de cada lado e, segundo o padrão do IEEE, o potencial no solo será de zero volt nesse ponto. Assim a tensão de toque será igual ao aumento do potencial do eléctrodo de terra. Para quadrados com lado menor do que 15 m, o potencial à superfície no ponto central será maior do que zero e a tensão de toque diminui já que é a diferença entre o potencial do eléctrodo e o do solo naquele ponto. Ilustra-se a planta do eléctrodo, de lado $2L$, na figura 3.16:

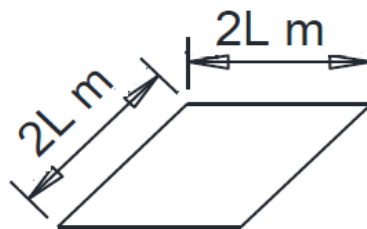


Fig. 3. 16 Eléctrodo de terra em quadrado de lado $2L$

O lado horizontal inferior está nas condições da figura 3.9, colocando a origem dos eixos conforme a referida figura, pelo que o potencial segundo y , devido só ao lado inferior, é dado pela equação (3.31) com $c=0$. O ponto central do quadrado está à distância L do lado referido, pelo que se tem $y=L$. Desprezando o quadrado da profundidade de enterramento face a $2L^2$, já que a profundidade é normalmente menor do que um metro, e simplificando o radical obtém-se:

$$v = 0,14 \rho I / L. \quad (3.62)$$

Aplicando o teorema da sobreposição, devido à simetria do ponto central, pode-se dizer-se que o potencial no ponto central é o quádruplo do valor indicado pela equação (3.62), com uma ressalva, já que a corrente de descarga se reparte por quatro lados iguais, e portanto a corrente em cada lado do quadrado é quatro vezes menor. Isto significa que a equação referida dá o potencial à superfície, no centro do quadrado, onde ele é mais baixo, considerando que I representa a corrente de defeito no eléctrodo. Como a equação (3.62) usa a metade do lado do quadrado, pode-se multiplicar a fracção por dois e obter uma fórmula mais fácil que é:

$$v = 0,28 \rho I / l. \quad (3.63)$$

Esta fórmula é válida, se o lado for muito maior que $\sqrt{2}$ x profundidade.

Para testar a fórmula, simulou-se um eléctrodo quadrado de 10 m de lado, 4 mm de raio do condutor, enterrado a meio metro de profundidade num terreno de resistividade de 1000 Ωm . O método dos momentos indicou um valor de 57 Ω para a resistência e a equação (3.63) forneceu, para o potencial no ponto médio, o valor de 2800 V, para uma corrente de descarga

de 100 A. O referido método dos momentos indicou, para o ponto central, um potencial de 2794 V. O desvio, de qualquer um dos valores para o outro, é inferior a 1%. Apresenta-se o potencial ao longo da recta de ordenada 5 na figura 3.17.

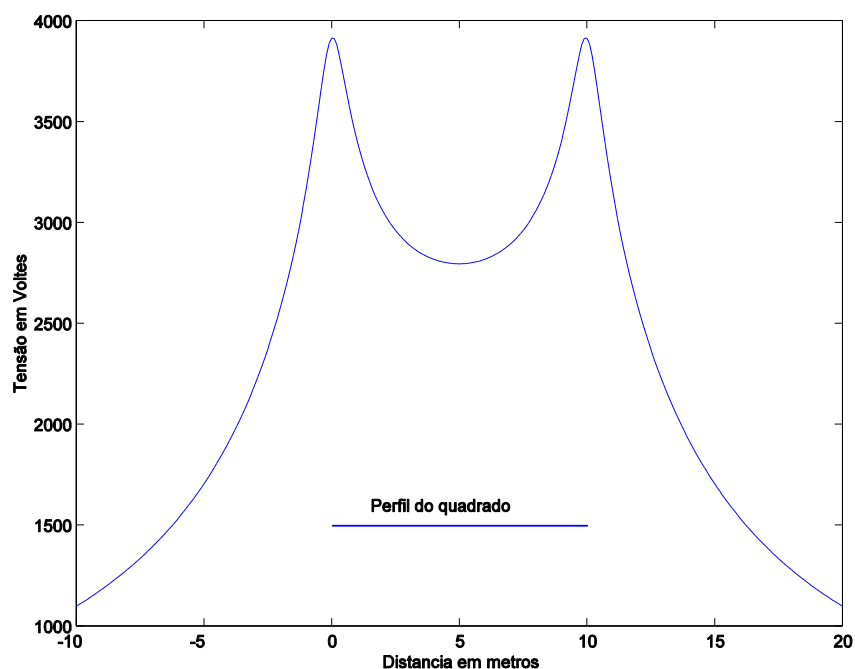


Fig. 3. 17 Potencial à superfície segundo recta horizontal que bissecta dois lados paralelos

O potencial de toque, para quadrados com menos de 15 m de lado, sendo este muito maior que 1,414 vezes a profundidade de enterramento, no centro do quadrado é:

$$V_T = RI - 0,28 \rho I / l, \quad (3.64)$$

sendo R a resistência de difusão e l a corrente de defeito.

Se o quadrado tiver lado maior que 15,2 m, então a tensão de toque será o produto RI , ou seja, a elevação do potencial do eléctrodo em quadrado.

Se o lado do quadrado não for muito maior que $\sqrt{2}$ multiplicado pela profundidade, condição em que é válida a equação (3.63), então o potencial de toque, utilizando a equação (3.31) será dado pela seguinte fórmula:

$$v_T = RI - \frac{\rho I}{4L\pi} \ln \frac{\sqrt{2L^2 + p^2} + L}{\sqrt{2L^2 + p^2} - L}. \quad (3.65)$$

Uma fórmula para a resistência do eléctrodo na forma de quadrado, pode ser encontrada em [6]. Contudo, o caso geral de eléctrodo em quadrado ou com a forma rectangular, é tratado como um eléctrodo em grelha e analisado no parágrafo seguinte.

Quando numa instalação eléctrica de grandes dimensões, as máquinas distam mais de 7,6 m do eléctrodo circundante, na forma de rectângulo por exemplo, as tensões de toque podem ter valores inadmissíveis tal como a resistência do eléctrodo. Os eléctrodos em grelha são

uma solução para estes casos. Uma das mais conhecidas aproximações teóricas para o cálculo da resistência da grelha deve-se a Schwarz [83]:

$$R = \frac{\rho}{\pi C_T} \left(\ln \frac{2C_T}{a'} + k_1 \frac{C_T}{\sqrt{A_g}} - k_2 \right), \quad (3.66)$$

com:

$$a' = \sqrt{2ap},$$

C_T : comprimento total dos condutores

a : raio dos condutores

p : profundidade de enterramento

A_g : área da grelha

k_1, k_2 : coeficientes

Os coeficientes k_j são dados por curvas auxiliares. Para grelhas quadradas e supondo enterramentos a uma profundidade de um décimo da aresta, obtém-se $k_1 = 1,15$ e $k_2 = 4,8$.

Apresenta-se como último exemplo uma grelha simples com 8x8m, pelo que os segmentos serão todos de 4 m, condutores com 50 mm^2 de secção, colocados a uma profundidade de 0,8 m, num solo de resistividade de $1500 \Omega m$, como ilustra a figura 3.18. O valor da resistência pelo método numérico é de $87,5 \Omega$, enquanto a fórmula de Schwarz, dá um valor de $91,5 \Omega$. O desvio de 4,6 % significa que os modelos teóricos são praticamente equivalentes.

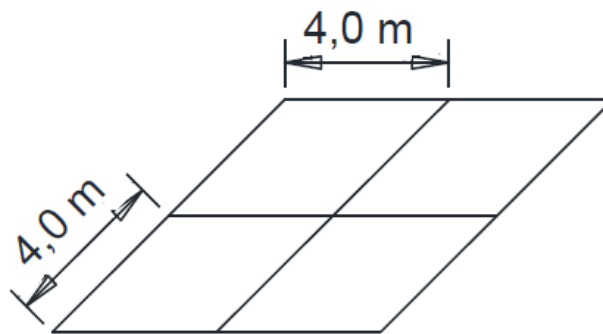


Fig. 3. 18 Grelha de 8x8 m

Meliopoulos estudou detalhadamente eléctrodos em grelha, e concluiu que a tensão de toque máxima, dentro da grelha, é no centro da malha que fica numa esquina da referida grelha, enquanto que a tensão de passo é máxima na diagonal da grelha, e imediatamente do lado de fora do vértice da malha. As fórmulas experimentais de Koch, para a tensão de toque e passo, nas condições atrás definidas, apresentam-se nas equações seguintes [53]:

$$V_T = \frac{\rho K_m K_i I}{C_T}, \quad (3.67)$$

$$V_P = \frac{\rho K_s K_i I}{C_T}, \quad (3.68)$$

com os factores geométricos, K_m , K_s e K_i , definidos da seguinte maneira:

$$K_m = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D_s^2}{32ap} + \frac{1}{\pi} \ln \left(\prod_{i=3}^n \frac{2i-3}{2i-2} \right), \quad (3.69)$$

$$K_s = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{D_s+p} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)D_s} \right], \quad (3.70)$$

$$K_i = 0,65 + 0,172n, \quad (3.71)$$

em que:

- C_T : comprimento total dos condutores
- D_s : espaçamento entre condutores adjacentes
- a : raio dos condutores
- p : profundidade de enterramento
- n : número de condutores em paralelo

Os símbolos da resistividade ρ e da corrente de defeito I já são habituais. Variando os parâmetros fundamentais, Meliopoulos tira as seguintes conclusões [53]:

1 - Quando se varia a área da grelha, acrescentando malhas de igual espaçamento, a resistência varia inversamente com a raiz quadrada da área da grelha, e as tensões de passo e de toque diminuem moderadamente.

2 - Quando se aumenta o espaçamento entre condutores: A variação da resistência é quase inversamente proporcional ao espaçamento da malha e inversamente proporcional à raiz quadrada da área da grelha, a tensão de passo máxima diminui moderadamente, e a tensão de toque máxima aumenta substancialmente com o afastamento dos condutores.

3 - Quando se aumenta a profundidade de enterramento: A resistência diminui moderadamente, a tensão máxima de passo diminui drasticamente, e a tensão máxima de toque é mínima a aproximadamente um metro, e aumenta moderadamente a outras profundidades, maiores ou menores.

4 - Relativamente à variação do calibre dos condutores, foram considerados quatro calibres 1/0 (9,3 mm), 2/0 (10,5 mm), 3/0 (11,786 mm) e 4/0 (12,5 mm) de cabos de cobre. (Valores do diâmetro entre parêntesis). A resistência e a tensão de toque diminuíram substancialmente quando se aumenta o calibre de 1/0 para 2/0. Nos calibres maiores a diminuição das referidas grandezas foi ligeira. A tensão de passo aumentou ligeiramente com o calibre e é sugerido o calibre 2/0, ou seja, 10,5 mm de diâmetro, excepto se o escoamento de grandes correntes de defeito exija maiores calibres.

5 - Variação da resistividade do solo: A resistência do eléctrodo é proporcional à resistividade do solo e as tensões de passo e de toque são insensíveis a este parâmetro.

Os eléctrodos em chapa são usados regularmente. Apresentam-se três aproximações teóricas para o cálculo da resistência de eléctrodos em chapa colocados na horizontal. Em todas as fórmulas ρ representa a resistividade do solo, l o comprimento da chapa, w a largura da chapa e p a profundidade de enterramento. A fórmula de Dwight [3] é dada por uma série,

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left[\ln \frac{2l}{w} + \frac{w^2 - \pi w g}{2(w+g)^2} + \ln \frac{2l}{s} - 1 + \frac{s}{l} - \frac{s^2}{4l^2} + \frac{s^4}{32l^4} - \dots \right], \quad (3.72)$$

sendo:

g : Espessura da chapa,

$s/2$: Profundidade de enterramento.

A fórmula é válida para $g < w/8$.

A fórmula de Rudenberg [4] é mais simples de usar, mas é independente da profundidade de colocação do eléctrodo no solo:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{4l}{w}. \quad (3.73)$$

Finalmente a fórmula de Meliopoulos [53], que depende da geometria da chapa e da profundidade a que é colocada, é mais fácil de usar do que a de Herbert Dwight.

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left[\ln \frac{4l}{w} + \ln \frac{l}{2p} \right]. \quad (3.74)$$

Para as dimensões recomendadas pelas RTIEBT, que são $1 \times 0,5 \times 0,002$ m, têm-se os seguintes valores, para uma resistividade de $500 \Omega \text{m}$: 180Ω pela fórmula de Dwight, 165Ω pela fórmula de Rudenberg e 128Ω pela fórmula de Meliopoulos. A profundidade escolhida foi de $0,8$ m.

A variação entre o menor valor e o maior é de 52Ω . Dada a dificuldade em aferir estas fórmulas, já que é muito difícil encontrar solos homogêneos, fez-se um estudo comparativo usando o método dos momentos, validado pelo método da matriz, referido anteriormente. Assim, a chapa horizontal foi discretizada usando um conjunto de condutores, orientados segundo y , cujo espaçamento entre centros é igual ao diâmetro do condutor, obtendo-se assim uma superfície canelada, como mostra a figura 3.19.

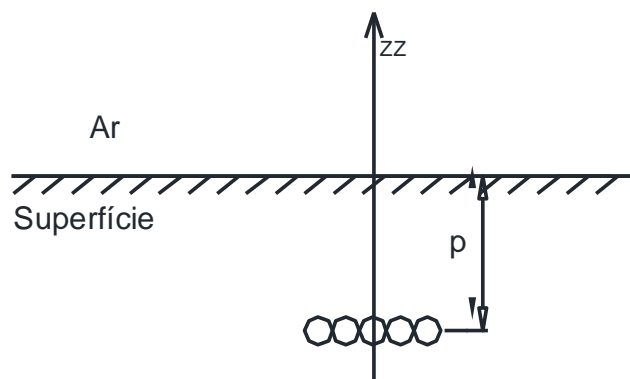


Fig. 3. 19 Superfície canelada obtida por discretização da chapa em condutores

Usando as dimensões já referidas, de um metro de comprimento, meio metro de largura e dois milímetros de espessura, a mesma resistividade do solo e a mesma profundidade, o

método dos momentos forneceu o resultado de 179 Ω , muito próximo do valor indicado pela fórmula de Dwight, que é a adoptada pelo padrão do IEEE. O desvio entre os dois valores é inferior a 1%. Apresenta-se na figura 3.20 o estudo da variação da resistência, com o comprimento para chapas de meio metro de largura e dois milímetros de espessura.

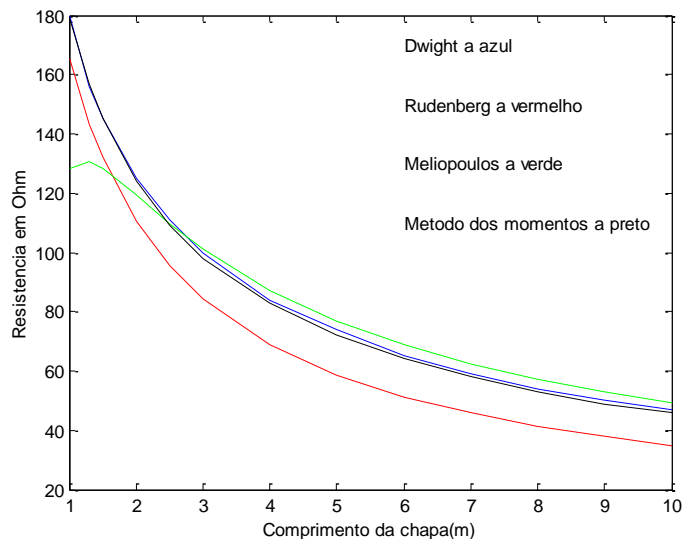


Fig. 3. 20 Variação da resistência da chapa com o comprimento

A curva a negro provêm da simulação numérica pelo método dos momentos e praticamente coincide com a curva de Dwight.

Variou-se a largura da chapa de 1 m de comprimento, entre 0,5 e 1 m. Os resultados provenientes da simulação numérica, pelo método dos momentos, estão acima das curvas teóricas, conforme se verifica na figura 3.21.

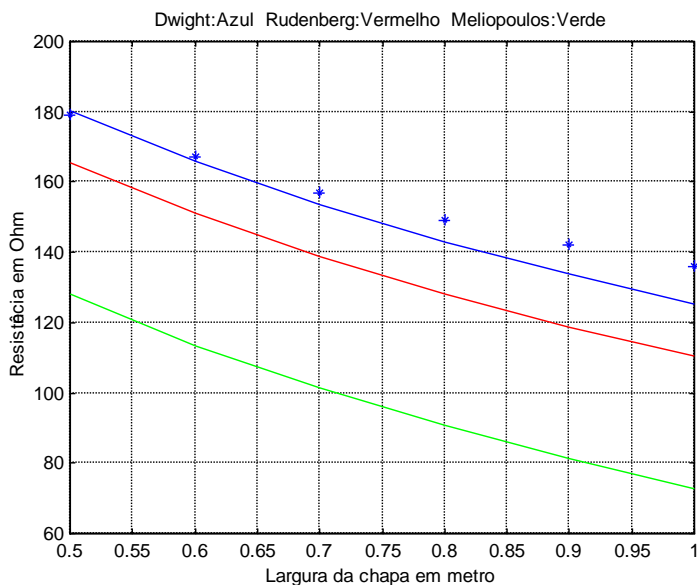


Fig. 3. 21 Variação da resistência da chapa com a largura, método dos momentos a “*”

A curva que mais se aproxima é a de Dwight. O erro percentual da fórmula de Dwight aumenta, face aos valores da simulação. No limite para a chapa quadrada o erro é de 8%.

Apresenta-se, finalmente, o estudo da variação da resistência da chapa horizontal com a profundidade na figura 3.22.

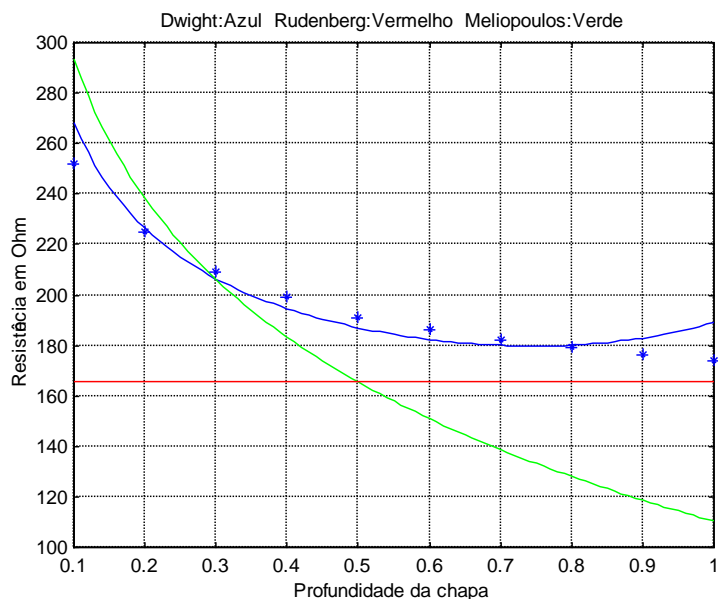


Fig. 3. 22 Variação da resistência da chapa com a profundidade, método dos momentos a “*”

A curva de Dwight acompanha bem a simulação pelo método dos momentos, enquanto a série converge, o que deixa de acontecer a partir dos 0,8 m de profundidade, que por acaso, é a profundidade nominal para muitos eléctrodos horizontais [101]. As fórmulas de Rudenberg e de Meliopoulos são as que mais se afastam da simulação numérica, ficando, assim, claro porque é que as fórmulas de Dwight são consideradas no padrão do IEEE.

Refira-se, finalmente, que houve o cuidado de validar o programa de cálculo de resistências de chapas horizontais, elaborando um programa alternativo pelo método da matriz, conceptualmente mais simples, embora com matrizes enormes. Apresenta-se na figura 3.23 a discretização da chapa de referência 1x0,5x0,002 m.

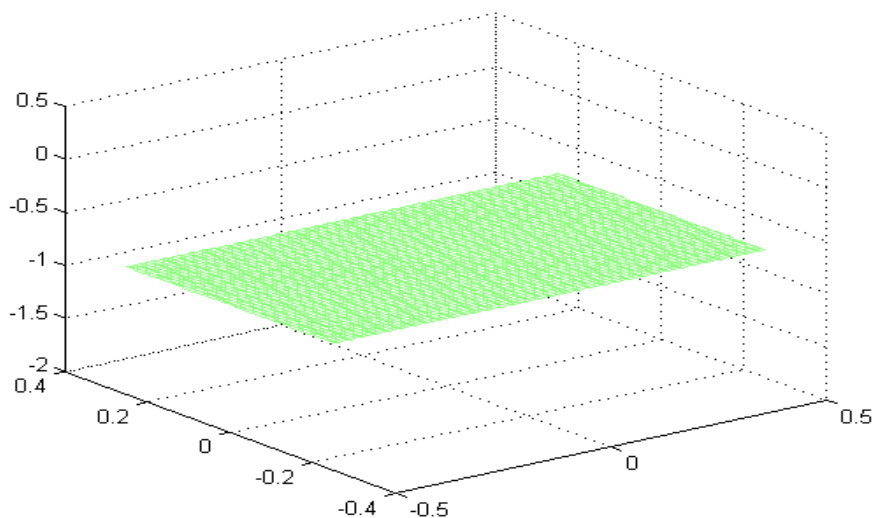


Fig. 3. 23 Chapa discretizada com pontos fonte separados por 1 cm

Os pontos fonte foram separados por 1 cm, de acordo com a conclusão proveniente da tabela 2.1. A chapa foi, assim, discretizada em 5151 pontos, pelo que a matriz de coeficientes do sistema de equações é de 5151x5151, ocupando perto de 212 Mbytes de memória. O resultado da simulação deu um valor para a resistência de 173 Ω , quando pelo método dos momentos se calculou um valor de 179 Ω . Um desvio de 6 Ω representa um erro de 3,5 % para o menor dos valores, pelo que o cálculo de resistência de chapas, por união de condutores, é aceitável. Desconhecem-se na literatura científica fórmulas para chapas de terra enterradas verticalmente. A única aproximação teórica conhecida é a constante nas RTIEBT, uma boa singularidade portuguesa, que seguidamente se apresenta [86]:

$$R = 0,8 \rho / P_r, \quad (3.75)$$

com:

ρ : Resistividade do solo.

P_r : Perímetro da chapa.

A fórmula (3.75) é independente da profundidade de colocação, e dá os mesmos valores para chapas com o mesmo perímetro. Os programas que calculavam a resistência de chapas horizontais foram adaptados para chapas verticais. Para a chapa tipo, o método da matriz forneceu o valor de 169 Ω , o método dos momentos deu um resultado de 174 Ω e a fórmula (3.75) forneceu o valor de 133 Ω . Os dois métodos numéricos têm resultados muito próximos. A fórmula (3.75) tem um erro de -21 % para o valor calculado pelo método da matriz, dentro do intervalo aceitável de 25 % de erro que o padrão do IEEE [83] define, mas será interessante investigar como se comporta a fórmula quando se varia o comprimento. Apresenta-se a tabela 3.3, que compara a resistência da chapa vertical calculada pelo método dos momentos com a fórmula da legislação portuguesa, para variações no comprimento, mantendo constante a largura de 0,5 m e a espessura de 2 mm.

Tabela 3. 3 Resistência da chapa vertical em função do comprimento

Comprimento (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Met. Mom. Ω	173	119	94	80	69	62	56	51	47	44
Fórmula 3.75	133	80	57	44	36	31	27	24	21	19
Erro (%)	-23	-33	-39	-45	-48	-50	-52	-53	-55	-57

A fórmula da norma portuguesa, para chapas verticais, tem erros crescentes e inaceitáveis a partir dos 2 m, inclusive.

Para finalizar este estudo, variou-se a profundidade de enterramento de uma chapa vertical entre 0,4 e 0,8 m, verificando-se que a resistência variou de 184 Ω no primeiro caso para 173 Ω no último, pelo que não há variação significativa com o aumento da profundidade de colocação do eléctrodo.

A proposta da legislação portuguesa devia ser revista, porque tem erros demasiado grandes e por defeito. Se forem comparados os resultados da primeira linha da tabela 3.3 com a curva azul da figura 3.20 verifica-se que estes estão próximos da curva de Dwight, pelo que a fórmula homónima parece uma melhor aproximação para a resistência da chapa.

3.5 Conclusões

O modelo de fronteiras abertas para uma vara, tem valores de potencial à superfície, próximos do modelo de fronteiras fechadas, especialmente na proximidade do eléctrodo, pelo que os dois modelos podem ser considerados equivalentes. A colocação da vara a maiores profundidades, reduz substancialmente o potencial de superfície, e a tensão de passo. O potencial de toque, é o critério de segurança mais exigente e é máximo a 8 m da vara. A pretensão de que as correntes que percorrem o ser humano sejam inofensivas, aumenta enormemente o tamanho das varas. O RTIEBT aconselha uma fórmula simples para o cálculo da resistência neste tipo de eléctrodos, mas que dá resultados por defeito, quando comparada com as fórmulas clássicas de Dwight ou Rudenberg, a partir dos 3 m de comprimento da vara de terra.

Em cabos enterrados, a tensão de passo é máxima quando uma pessoa se aproxima na perpendicular ao meio da trincheira, ou quando se aproxima do início da mesma ao longo da direcção axial daquela. Potenciais de toque inofensivos exigem resistências muito baixas, quando comparados com os mínimos exigidos, para que não haja fibrilhação ventricular. No cálculo da resistência, a fórmula proposta pelo RTIEBT fornece valores exageradamente altos para cabos com menos de 10 m de comprimento.

No método dos momentos existem pontos de descontinuidade que se evitam considerando o raio dos eléctrodos na diferença de ordenadas, abcissas ou cotas, nos segmentos colineares e perpendiculares adjacentes. A consideração do referido raio na diferença das cotas revela-se a melhor solução para evitar as referidas descontinuidades.

Para eléctrodos em quadrado, desenvolveu-se uma fórmula simples para estimar o potencial de superfície no meio do quadrado enterrado, e para a tensão de toque, tendo os valores sido validados pelo método dos momentos. Em chapas horizontais a fórmula de Dwight constitui a melhor aproximação para o cálculo da resistência. Esta fórmula também pode ser aplicada a chapas verticais já que a norma portuguesa fornece valores da resistência muito baixos.

Capítulo 4 - O método da matriz em solo de dois estratos

Introdução

O método da matriz foi apresentado no capítulo dois em solos homogêneo, sendo neste capítulo analisado em solos de dois estratos. A metodologia continua baseada numa decomposição do eléctrodo em pontos fonte de corrente, embora num solo com dois estratos o número de imagens cresça para infinito quer para cima, quer para baixo, devido à existência de dois planos de simetria. São considerados os casos em que o ponto onde se pretende calcular o potencial e a fonte pontual de corrente, estão ambos no estrato superior, ambos no estrato inferior, ou o ponto fonte num estrato e o ponto de interesse no outro. A análise apresentada, contempla o cálculo de resistência e de potencial à superfície. As singularidades da solução por séries, da equação de Laplace, também são investigadas.

4.1 Eléctrodos no estrato superior

A resistividade eléctrica do solo foi considerada constante no capítulo anterior. Mesmo em terrenos geologicamente homogêneos, o nível freático cria uma descontinuidade no solo relativamente à resistividade. Este plano de descontinuidade origina uma segunda superfície de reflexão, gerando-se, assim, um número infinito de imagens, devido ao paralelismo dos planos de simetria, conforme mostrou Maxwell no seu Tratado de Electricidade e Magnetismo [88]. Considere-se, então, uma fonte pontual de corrente centrada no ponto de coordenadas x_f, y_f, z_f , em que, para exemplificar, se considerou uma cota de -0,4 para o ponto fonte, e uma espessura do estrato superior de 0,7 m, para não alongar a escala vertical da figura 4.1. Este ponto fonte, representado por um círculo vermelho, irá ter uma imagem para cima, com cota simétrica, e uma imagem inferior cuja distância ao plano de simetria é de 0,3 m, tal como o ponto fonte, imagem essa que fica com cota -1 m. Estas primeiras imagens estão representadas a amarelo na referida figura. Agora, cada imagem gerada por um plano, irá provocar uma segunda imagem por reflexão no outro plano, pelo que a primeira imagem superior de cota 0,4 m, que dista 0,4+0,7 m do plano de descontinuidade entre estratos, vai reproduzir uma imagem 1,1 m abaixo do referido plano, ou seja à cota de -0,7-1,1 representado na figura 3.1, pelo ponto de cor verde na parte inferior, indicado pelo texto como 2ª imagem inferior. Do mesmo modo, a primeira imagem inferior replica-se à cota simétrica já que o plano de simetria passa pela origem. Da mesma forma, se geram as terceiras imagens e assim sucessivamente. Localizadas as imagens, é altura de quantificar a corrente de defeito associada a cada uma delas, o que exige a definição dos coeficientes de reflexão de tensão entre meios de condutividade diferente.

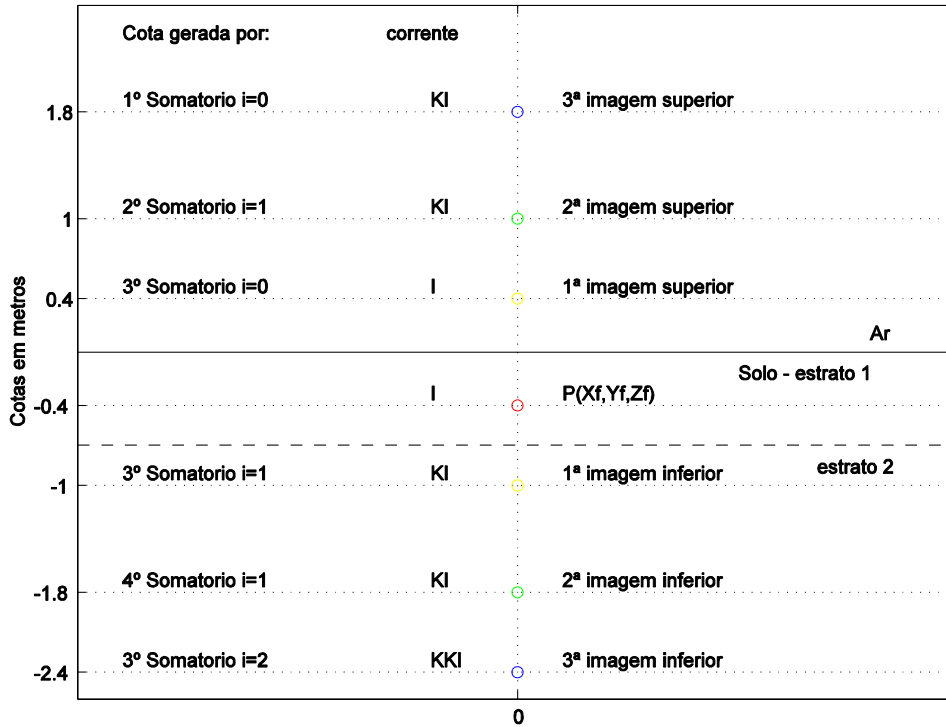


Fig 4. 1 Localização de imagens em solo de 2 estratos

A exigência de que a corrente eléctrica tenha apenas componente horizontal à superfície do solo, implica que o ponto imagem, no ar, liberte a mesma carga por unidade de tempo, ou seja, a mesma corrente, que o ponto fonte, pelo que a corrente do ponto imagem no ar é igual à do ponto fonte. Pelo contrário, a imagem provocada pela superfície de separação dos dois estratos, não obedece a este requisito, já que, a corrente pode, nesta superfície de separação, ter componentes verticais, pelo que as imagens descendentes difundem no solo uma corrente da forma kI , sendo o factor de multiplicação assim definido: o coeficiente de reflexão entre a região 2, de condutividade σ_2 , e a região 1 de condutividade σ_1 , na figura 4.1 é [10]:

$$k_{21} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}. \quad (4.1)$$

Da mesma maneira se define k_{01} o factor de reflexão entre a região 0, o ar, e a região 1, da figura anterior [10]:

$$k_{01} = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1}. \quad (4.2)$$

Como o valor da condutividade eléctrica do ar se assume nula, significa que este último parâmetro vale -1. Isto permite definir um único coeficiente de reflexão num solo de 2 estratos que é [10]:

$$k = k_{21}k_{01}. \quad (4.3)$$

Finalmente, define-se a função auxiliar G , chamada função de Green [10]:

$$G(t, u, v) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + u^2 + v^2}}. \quad (4.4)$$

Esta função é facilmente reconhecida como uma das fracções constante da fórmula (2.2).

Assim, o potencial num ponto genérico do estrato um, de coordenadas (x, y, z) , devido a uma fonte pontual no mesmo estrato, é dado por [10]:

$$V_{11}(x, y, z) = P_{11} S_{11}(k, G(x, y, z)), \quad (4.5)$$

com

$$P_{11} = \frac{I_f}{4\pi\sigma_1},$$

em que I_f é a corrente de defeito e a variável S_{11} é dada por [10]:

$$\begin{aligned} S_{11}(k, G(x, y, z)) &= G(x - x_F, y - y_F, z - z_F) - \\ &k_{21} \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F - 2(i+1)h) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z - z_F - 2ih) \\ &- k_{01} \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z - z_F + 2ih), \end{aligned}$$

em que:

h : Espessura do estrato superior

As expressões anteriores podem ser simplificadas, usando a resistividade dos estratos do solo em vez da condutividade eléctrica, e exprimindo todos os coeficientes de reflexão em função de k . Como a condutividade do ar é nula tem-se $k_{01} = -1$ e $k = -k_{21}$. Adicionalmente k pode representar-se em função das resistividades, obtendo-se a seguinte expressão:

$$k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (4.6)$$

Pode agora apresentar-se a expressão (4.5) na seguinte forma, usando as resistividades em vez das condutividades eléctricas.

$$\begin{aligned}
V_{11}(x, y, z) = & \frac{\rho_1 I_F}{4\pi} [G(x - x_F, y - y_F, z - z_F) + \\
& k \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F - 2(i+1)h) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z - z_F - 2ih) \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z - z_F + 2ih)].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Os dois primeiros somatórios geram as imagens ascendentes, e os dois últimos somatórios indicam as imagens descendentes, como se verifica na figura 4.1. Como existe um par de pontos a debitar uma corrente de kI e o par seguinte estará $1,4$ m acima, o que representa o dobro da espessura do estrato $2h$, são precisos dois somatórios, um para o ponto inferior do par e outro somatório para o ponto superior do par. Cada ponto do par seguinte debitará k^2I . O cálculo da resistência segue a mesma metodologia do método da matriz, explicitado no capítulo 2.

4.1.1 Vara no estrato superior

Para validar o método da matriz, considerou-se uma vara no estrato superior cravada com o topo rente à superfície. A resistência desta é dada pela fórmula de Tagg [8]:

$$R = \frac{\rho_1}{2\pi L} \left(\ln \frac{4l}{a} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{2} \ln \frac{nh+l}{nh-l} \right), \tag{4.8}$$

l : comprimento do eléctrodo

a : raio do eléctrodo

ρ_1 : resistividade do estrato superior

k : coeficiente de reflexão de tensão entre os dois estratos

Variou-se a espessura do estrato superior, usando na primeira simulação uma resistividade de $500 \Omega\text{m}$ para o estrato superior e de $100 \Omega\text{m}$ para o inferior, o que se traduz num coeficiente de reflexão de tensão de $k = -2/3$, usando (4.6), e numa segunda simulação trocaram-se as resistividades dos estratos obtendo-se $k = 2/3$. Os resultados apresentam-se na tabela 3.1 [89], usando a fórmula de Tagg para aferir o erro do método da matriz. É interessante notar que, com a espessura do estrato superior a 11 m, e considerando o modelo do padrão do IEEE para a vara de 3 m, este cabe inteiramente no referido estrato, já que a equipotencial de zero volt estará a $3+7,6$ m de profundidade. Assim, o resultado estará próximo do obtido em solo homogéneo, com resistividade idêntica à do estrato superior. De facto, para solo homogéneo, com uma resistividade de $500 \Omega\text{m}$, uma vara com estas características tem uma resistência de

168 Ω segundo a fórmula de Dwight, e se a resistividade do estrato superior fosse de 100 Ω m a vara teria uma resistência de 33,5 Ω , usando a mesma fórmula. Estes valores estão próximos dos resultados da última linha da tabela 4.1.

Tabela 4. 1 Resistência de vara de 3 m, 8 mm de raio, no estrato superior

Espessura h (m)	K= -2/3			K=2/3		
	Resistência (Tagg) (Ω)	Resistência (Matriz) (Ω)	Desvio para Tagg%	Resistência (Tagg) (Ω)	Resistência (Matriz)(Ω)	Desvio para Tagg %
4	154	155	0,6	38,7	37,9	2,3
6	160	159	0,6	36,6	36,0	1,6
9	163	161	1,2	35,0	35,0	0,0
11	164	162	1,2	35,1	34,7	1,1

A comparação de potenciais à superfície, é também interessante e ilustra-se na figura 4.2 para um coeficiente de reflexão de -2/3 e uma espessura do estrato superior de 11 m, $l=3$ m, permitindo comparar a solução de Rudenberg, para potencial de superfície em solo homogêneo [4], a vermelho, com a solução numérica pelo método da matriz a azul. Junto do máximo, as curvas não coincidem porque a solução numérica tem valor na origem, já que o primeiro ponto da discretização está a uma profundidade de 5 mm. A curva teórica, que representa a fórmula de Rudenberg, não admite a origem no domínio da função. É óbvio, que o andamento das curvas é semelhante e só a alguns metros da origem elas se afastam ligeiramente.

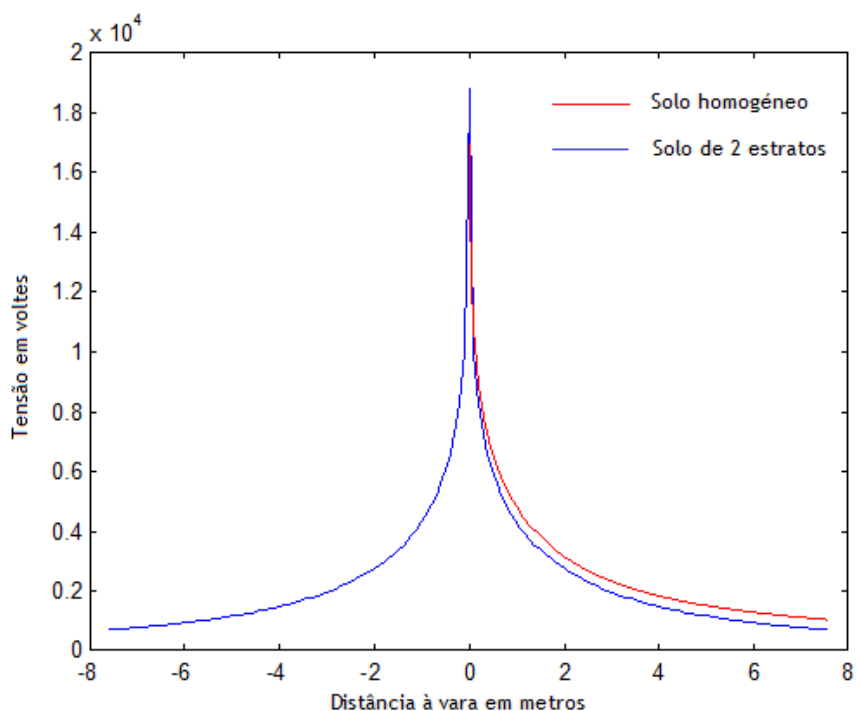


Fig 4. 2 Distribuição de potencial à superfície para vara de 3 m

A figura 4.3 apresenta a variação do potencial à superfície de uma vara cravada no solo com 3 m de comprimento, 8 mm de raio, colocada a diferentes profundidades. A corrente de defeito é de 100 A [55]. A espessura do estrato superior manteve-se fixa e igual a 4 m. Verifica-se que o potencial diminui drasticamente com o enterramento do topo da vara. A colocação deste topo a meio metro, reduz o valor máximo de potencial para menos de um quarto do valor com vara enterrada à superfície.

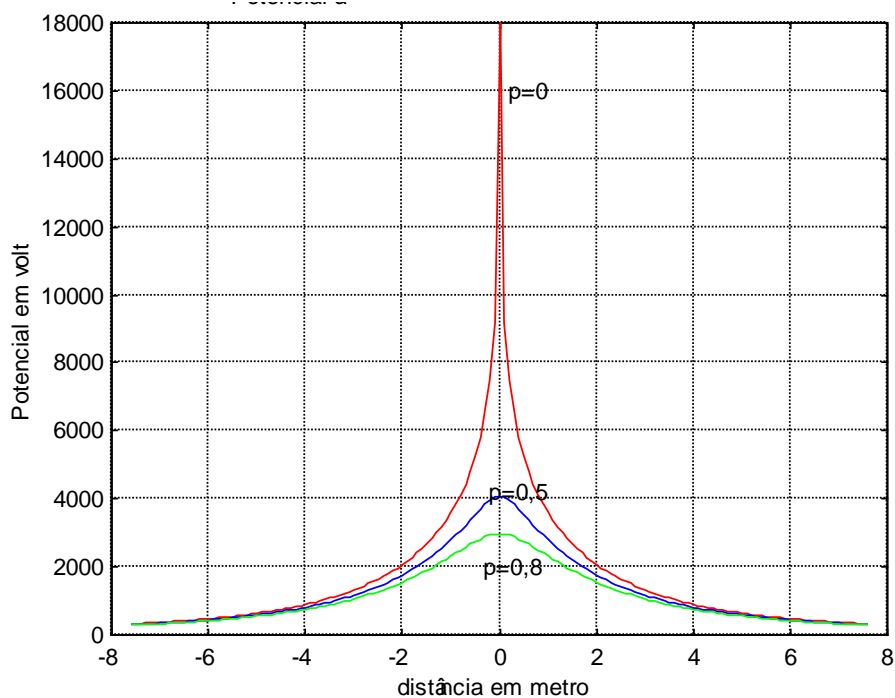


Fig 4. 3 Potencial à superfície para diferentes profundidades de enterramento

A figura 4.4 ilustra a tensão de passo da mesma vara às profundidades referidas. Também neste caso, se nota a vantagem de um enterramento de meio metro. Registe-se que, em termos de resistência da vara de 3 m no terreno referido, com a espessura do estrato superior fixa a 4 m, quando se varia a profundidade do topo da vara, de 0 m a ½ m da superfície do solo, a resistência tem um decréscimo de apenas 9 Ω , passando de 155 para 146 Ω . No cálculo da resistência, a profundidade de colocação do eléctrodo não é determinante, mas é-o para o potencial á superfície, e para a tensão de passo.

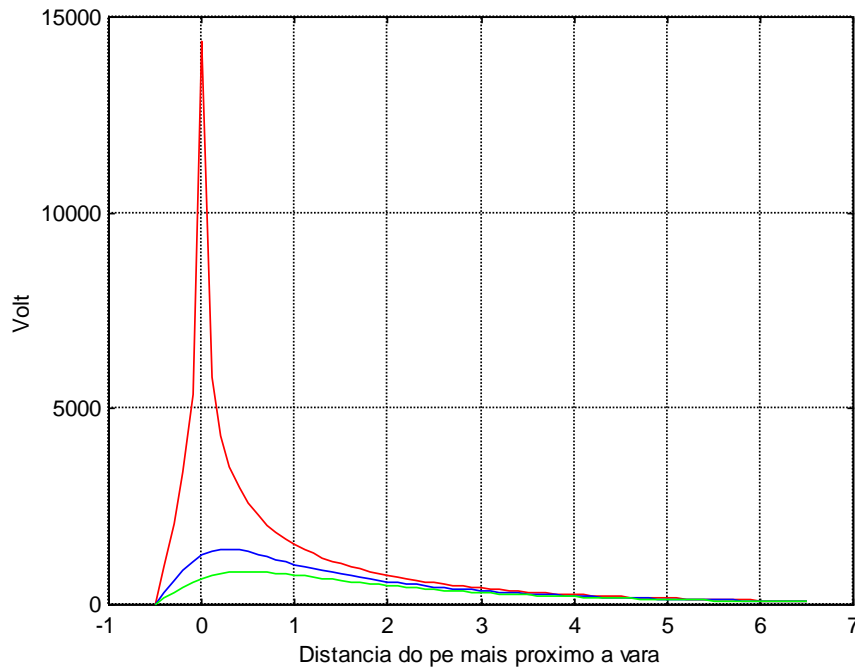


Fig 4. 4 Tensão de passo para a vara às mesmas profundidades

4.1.2 Cabo no estrato superior

Para finalizar a validação do método da matriz no estrato superior, considerou-se um cabo colocado no referido estrato, usando a fórmula de Tagg, abaixo digitalizada devido às dúvidas de interpretação [8]:

$$R_a = \frac{\rho_1}{2\pi l} \sum_{n=1}^{n=\infty} k^n \left\{ 4 \log_e \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{2n \frac{h}{l}} + \frac{8nh}{l} - 4 \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1} \right\}$$

Fig 4. 5 Digitalização da fórmula de Tagg

R_a : Resistência adicional devido à presença do estrato inferior

h : espessura do estrato superior

l : comprimento do eléctrodo

ρ_1 : resistividade do estrato superior

Esta fórmula indica a resistência adicional que a presença do estrato inferior acrescenta, ou diminui, ao valor da resistência considerando solo homogéneo. A fórmula, supõe que o eléctrodo está muito próximo da superfície, e que a profundidade de enterramento é pequena comparada com o comprimento do eléctrodo.

A dúvida que esta fórmula levanta é no último radical, se é uma raiz quarta ou o quádruplo de uma raiz quadrada. Para clarificar a questão, considerou-se um solo cuja resistividade do estrato superior é de 100 Ω m, 3 m de espessura para o referido estrato e 1900 Ω m de

resistividade do estrato inferior. O eléctrodo é um cabo de 30,5 m (100 pés), 50 mm² de secção colocado a uma profundidade de 0,5 m. Se o eléctrodo estivesse num solo homogéneo de resistividade 100 Ωm, a fórmula de Dwight permitirá obter um valor de 6,1 Ω. Se a equação de Tagg tiver uma raiz quarta, o acréscimo de resistência devido à camada inferior muito mais resistiva será de 34,1 Ω. Se se considerar que se trata do quádruplo de uma raiz quadrada, o acréscimo esperado será de 9,4 Ω. Para esclarecer o caso, apresenta-se a figura 4.6 [8]. Note-se que o valor de h/l é $3,0/30,5 = 0,1$ e que o coeficiente de reflexão é $k = 0,9$. O ponto de intersecção da curva de $k=0,9$, passa quase pelo cruzamento da abcissa 0,1 com a ordenada 9, pelo que será este número o aumento esperado do valor da resistência

A simulação computacional, supondo o quádruplo da raiz quarta, obteve um resultado de 9,4 Ω muito perto do valor do gráfico. O desvio da simulação numérica é de 4,5%, relativamente ao valor da curva.

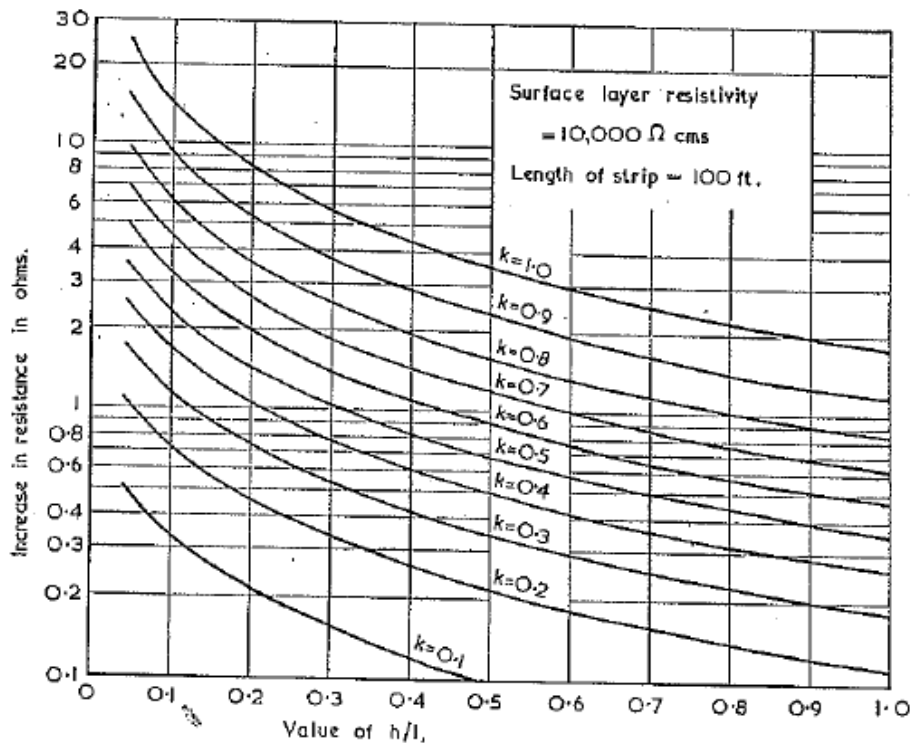


Fig 4. 6 Aumento da resistência devido a uma camada inferior mais resistiva

A fórmula de Tagg poderá agora ser especificada de uma forma inequívoca e simplificada, já que há um factor comum dentro do parêntesis que é o número 4.

$$R_a = R_{1e} + \frac{2\rho_2}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{L}\right)^2 + 1}}{2n \frac{h}{L}} + \frac{2nh}{L} - \sqrt{\left(\frac{2nh}{L}\right)^2 + 1} \right], \quad (4.9)$$

Sendo R_{1e} a resistência de solo com um só estrato.

No caso de um cabo horizontal, com um comprimento de 10m, um raio de 4mm, colocado a 0,5 m de profundidade, cujo centro está em (5,0,-1/2), num solo de resistividade 500 Ωm no estrato superior e 100 Ωm no inferior, tem-se a distribuição de potencial à superfície, segundo o eixo dos x representada na figura 4.7.

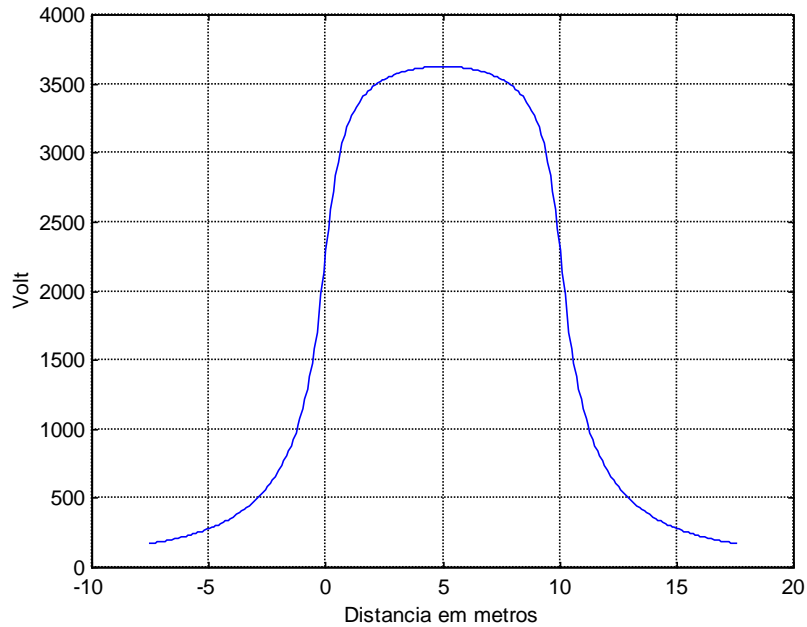


Fig 4. 7 Potencial à superfície segundo a recta $y=0$

Se nos deslocarmos segundo a recta $x=5$, a distribuição de potencial será:

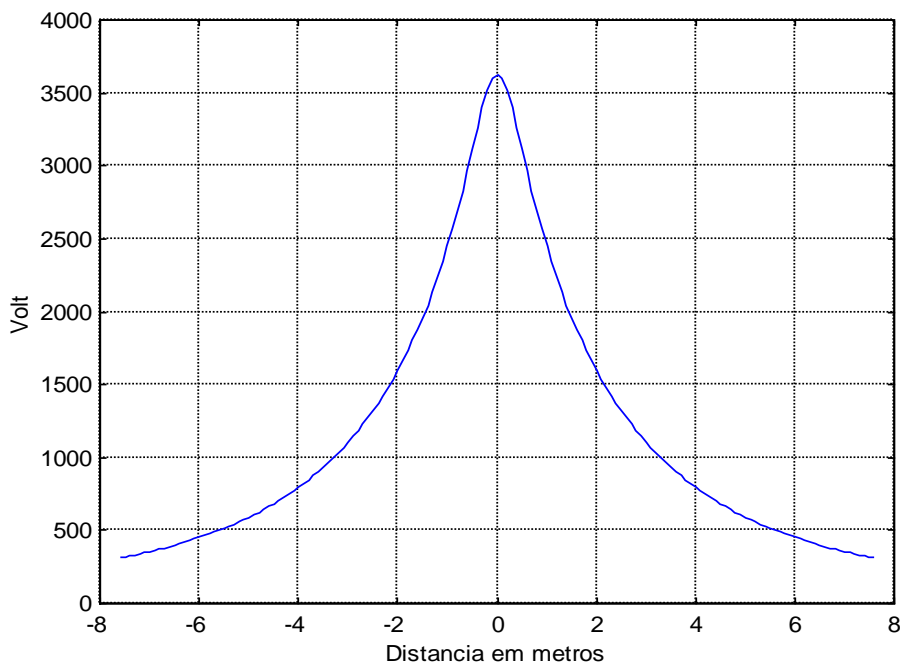


Fig 4. 8 Potencial à superfície segundo a recta $x=5$

As tensões de passo, segundo a recta $y=0$, apresentam-se na figura 4.9, com máximos esperados nas pontas do cabo.

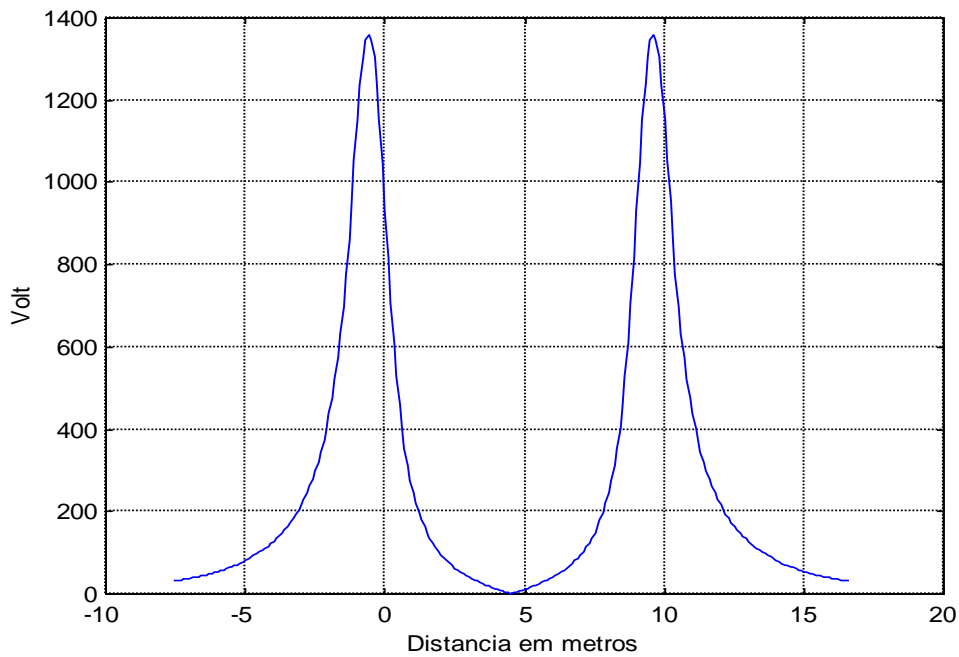


Fig 4. 9 Tensão de passo segundo a recta $y=0$

A tensão de passo, segundo a recta $x=5$, apresenta-se na figura 4.10.

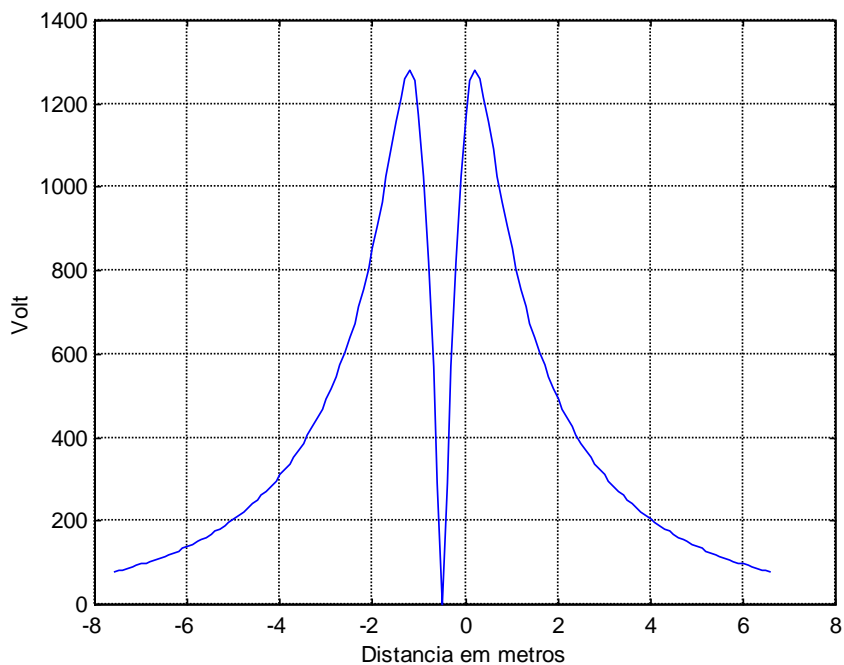


Fig 4. 10 Tensão de passo segundo a recta $x=5$

Supõe-se que o ser humano caminha no sentido negativo, pelo que o mínimo em zero ocorre quando a abcissa é $-0,5m$. A tensão de passo é ligeiramente menor do que no caso anterior.

Para se ter uma ideia da precisão do método no cálculo da resistência de eléctrodos horizontais, fizeram-se várias simulações sintetizadas na tabela 4.2 [89]. O cabo tem 10 m de comprimento, 50 mm² de seção, colocado a 0,5 m de profundidade. As resistividades são as mesmas usadas no cálculo da vara e na construção da tabela 4.1.

Tabela 4. 2 Resistência de cabo de 10 m, enterrado a ½ m

Espessura h (m)	k= -2/3			k=2/3		
	Resist. (Tagg) (Ω)	Resist. (Matriz) (Ω)	Desvio para Tagg %	Resist. (Tagg) (Ω)	Resist. (Matriz) (Ω)	Desvio para Tagg %
1	54,1	54,0	0	27,4	27,3	-0,4
2	62,2	61,4	-1,3	22,6	22,4	-0,9
4	67,4	68,2	1,2	19,2	19,2	1,0
6	69,6	70,3	1,0	17,9	17,9	0
8	72,3	71,7	-0,8	17,3	17,3	0

Os desvios no cálculo da resistência do método numérico para a fórmula analítica são muito pequenos, pelo se considera que o método está validado.

4.2 Eléctrodos no estrato inferior

Para uma fonte pontual de corrente no estrato inferior, o potencial num ponto do mesmo estrato, solução da equação de Laplace, vem dado pela seguinte expressão [10]:

$$V_{22}(x, y, z) = P_{22} S_{22}(k, G(x, y, z)), \quad (4.10)$$

em que

$$P_{22} = \frac{\rho_2 I_F}{4\pi},$$

e

$$S_{22}(k, G(x, y, z)) = G(x - x_F, y - y_F, z - z_F) + k_{21} \sum_{i=0}^{\infty} k^i G[x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2(i-1)h] - k_{01} \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih).$$

Como $k_{01} = -1$ e $k = -k_{21}$, tem-se:

$$S_{22}(k, G(x, y, z)) = G(x - x_F, y - y_F, z - z_F) - K \sum_{i=0}^{\infty} k^i G[x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2(i-1)h] + \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih). \quad (4.11)$$

O cálculo da resistência de um qualquer eléctrodo no estrato inferior, pressupõe uma discretização do mesmo em fontes pontuais de corrente, e a aplicação do teorema da sobreposição, usando a mesma metodologia já indicada anteriormente. O sistema de equações lineares é geralmente grande, tal como já foi referido na apresentação do método da matriz.

Para aferir programas e metodologias, considerou-se uma vara de terra colocada no estrato inferior, a 0,5 m de profundidade, num solo em que a descontinuidade é ligeira. O caso ilustra-se na figura 4.11.

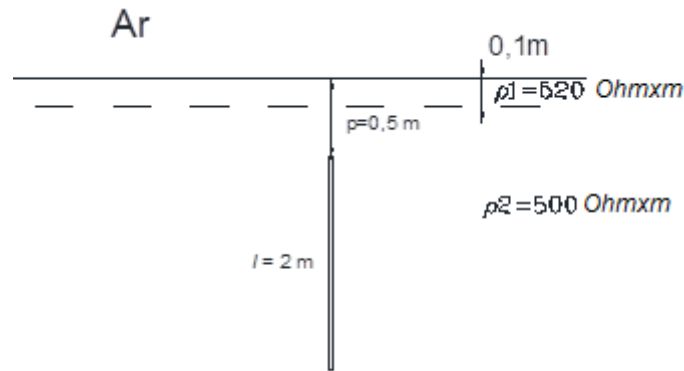


Fig 4. 11 Vara em solo com 2 estratos

O programa desenvolvido, usando a fórmula anterior, obteve para a resistência da vareta o valor de 220 Ω. Se considerarmos a mesma vara num solo homogéneo, obtém-se quer pelo método dos momentos, quer pela fórmula de Meliopoulos [53], o valor de 222 Ω. Usou-se a fórmula de Meliopoulos porque esta permite considerar o enterramento da vara. O afastamento entre os dois valores é mínimo, embora fosse esperável que num solo uniforme com 500 Ωm de resistividade o valor da resistência fosse menor do que quando se considere uma faixa estreita de resistividade ligeiramente maior.

Para calcular o potencial à superfície as expressões anteriores não podem ser usadas, já que o ponto onde se pretende calcular o potencial está no estrato superior, referido como região um na figura 4.1, e o ponto fonte no estrato inferior, na região dois. Neste caso, utilizam-se as seguintes fórmulas [10]:

$$V_{12}(x, y, z) = \frac{I_f}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} S_{12}(k, G(x, y, z)), \quad (4.12)$$

em que:

$$S_{12}(k, G(x, y, z)) = \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z - z_F - 2ih) - k_{01} \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih).$$

O primeiro índice da variável S indica a região onde se calcula o potencial, e o segundo a região do ponto fonte. Como a superfície a cota é nula, e associando os dois somatórios, tem-se:

$$S_{12}(k, G(x, y, z)) = \sum_{i=0}^{\infty} k^i [G(x - x_F, y - y_F, -z_F - 2ih) + G(x - x_F, y - y_F, z_F + 2ih)]. \quad (4.13)$$

Usando esta expressão, calculou-se o potencial à superfície e comparou-se com a distribuição de potencial da mesma vara, em solo homogêneo, para a mesma corrente de defeito. A figura 4.12 ilustra esta comparação. O potencial para o caso da vara estar num solo homogêneo, de resistividade $500 \Omega\text{m}$, é representado pela curva azul. O potencial para um solo heterogêneo, com o estrato superior fino e ligeiramente mais resistivo, apresenta-se a vermelho. As curvas estão muito próximas, como seria de esperar. A camada superior, ligeiramente mais resistiva, provoca uma diminuição ligeira do potencial à superfície.

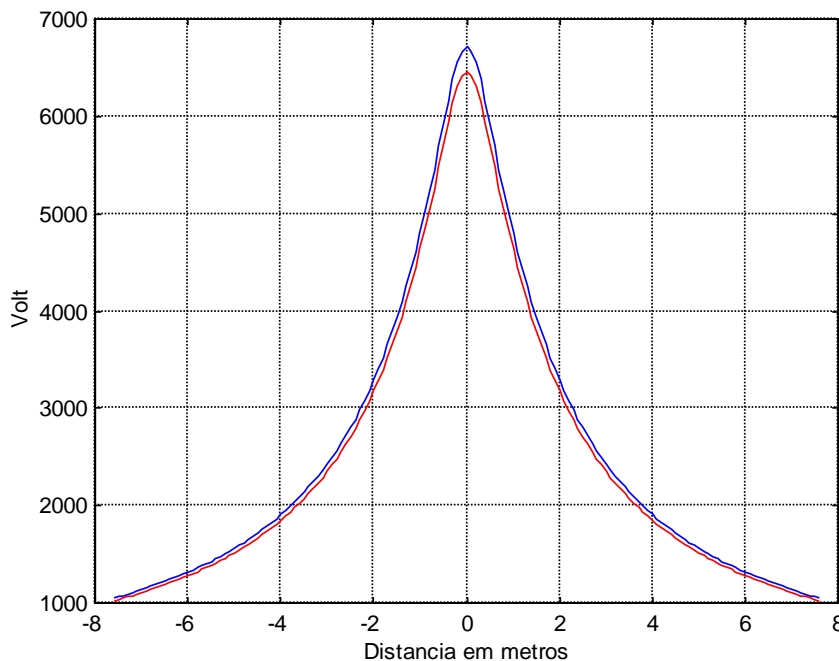


Fig 4. 12 Potencial à superfície para vara em diferentes tipos de solo

A tensão de passo para a vareta em apreço, ilustra-se na figura 4.13.

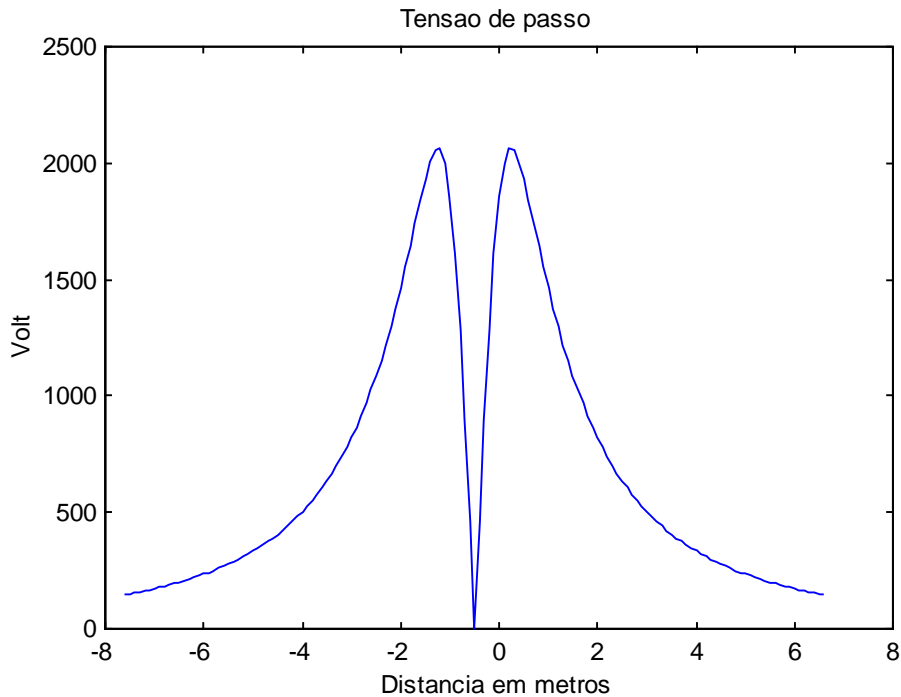


Fig 4. 13 Tensão de passo para a vara anterior em solo de dois estratos

As conclusões são idênticas aos eléctrodos simulados em solos anteriores. Nas simulações anteriores, o factor de reflexão é $k = (500 - 520)/(500 + 520)$, cujo valor é -0,0196, muito próximo de zero. As potências de k são tão próximas de zero, que qualquer erro de programação é diluído em produtos em que um dos factores é quase nulo. Procurou-se outra forma de validar a algoritmia, por comparação com um eléctrodo colocado no estrato inferior. Apresenta-se uma grelha, na figura 4.14 [89], cuja resistência foi calculada e medida por investigadores espanhóis [16]. Registe-se que, no artigo original, o calibre dos cabos foi omitido, pelo que se usou um calibre comum de 50 mm^2 . A grelha foi colocada a uma profundidade de 0,6 m. O valor calculado foi de $0,987 \Omega$ e o valor medido foi de 1Ω [16].

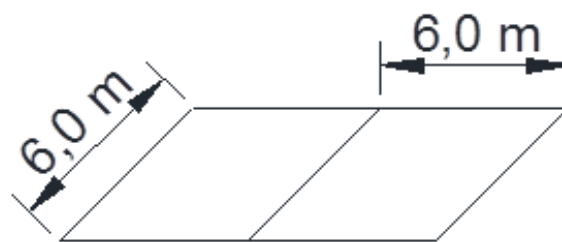


Fig 4. 14 Grelha enterrada no estrato inferior

O terreno tinha uma resistividade do estrato superior de $3000 \Omega\text{m}$, uma resistividade do estrato inferior de $22 \Omega\text{m}$ e uma espessura do estrato superior de $0,2 \text{ m}$ [16]. O valor obtido pelo programa elaborado com esta metodologia foi de $0,924 \Omega$. Este valor, tem um erro para

a medida real de 1Ω , de 7,6 %, e um desvio de 5,4 % para o valor calculado em [16]. A validação é considerada satisfatória.

4.3 Vara em dois estratos

Uma vara de terra, que atravessa as duas camadas de um solo, está ilustrada na figura seguinte.

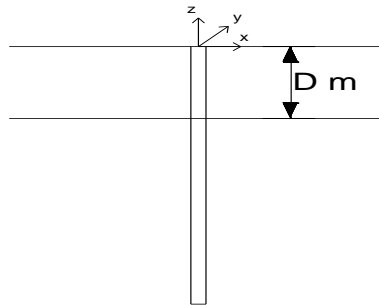


Fig 4. 15 Vara em duas camadas.

Por razões de simplicidade de exposição, existe apenas um ponto fonte em cada camada e um ponto de superfície. Assim, na camada um tem-se o ponto fonte um e o ponto de superfície um, e na camada inferior considera-se o ponto fonte dois e o ponto de superfície dois. Usando o princípio da sobreposição para calcular o potencial nos pontos de superfície, V_1 e V_2 , tem-se:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{11} + V_{12} \\ V_2 &= V_{21} + V_{22} \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que V_{11} é a contribuição do potencial devido ao ponto fonte um, e V_{12} a contribuição do ponto fonte dois para o potencial na superfície superior da vara. Do mesmo modo para o ponto superficial dois. Note-se que $V_{12} = V_{21}$ [10], pelo que há simetria na matriz de coeficientes do sistema. Os termos diagonais já foram tratados nas subsecções anteriores. Os restantes termos envolvem pontos em estratos diferentes. A função S_{12} foi usada nos eléctrodos do estrato inferior para calcular o potencial à superfície, pelo que também já é conhecida. No caso geral identifica-se que tipo de funções usar através da tabela 4.3 [10].

Tabela 4. 3 Cálculo do potencial em função da região onde se localizam os pontos

Ponto de interesse		Ponto no estrato 1	Ponto no estrato 2
Região da fonte	1	$V_{11}(x, y, z) = P_{11}S_{11}(k, G(x, y, z))$	$V_{21}(x, y, z) = P_{21}S_{21}(k, G(x, y, z))$
	2	$V_{12}(x, y, z) = P_{12}S_{12}(k, G(x, y, z))$	$V_{22}(x, y, z) = P_{22}S_{22}(k, G(x, y, z))$

Finalmente, apresentam-se os parâmetros que falta definir [10]:

$$P_{21} = \frac{I_f}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}; \quad (4.15)$$

$$S_{21}(k, G(x, y, z)) = \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_f, y - y_f, z - z_f - 2ih) - k_{01} \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_f, y - y_f, z + z_f + 2ih). \quad (4.16)$$

Sendo -1 o coeficiente de reflexão de tensão entre o estrato zero, que é o ar, e o estrato um, tem-se num único somatório:

$$S_{21}(k, G(x, y, z)) = \sum_{i=0}^{\infty} k^i \left[G(x - x_f, y - y_f, z - z_f - 2ih) + G(x - x_f, y - y_f, z + z_f + 2ih) \right]. \quad (4.17)$$

Para se aferir a metodologia proposta neste parágrafo, considera-se uma vara que atravessa os dois estratos e os resultados fornecidos pelo método numérico, serão comparados com a fórmula de Tagg para vara em dois estratos, apresentada seguidamente [8]:

$$R = \frac{\rho_1}{2\pi l} \frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \left[\ln\left(\frac{2l}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \ln\left(\frac{2nh+l}{(2n-2)h+l}\right) \right], \quad (4.18)$$

em que se listam as variáveis usadas:

- R - resistência da vara de terra
- ρ_1 - resistividade do estrato superior
- l - comprimento do eléctrodo
- h - Espessura do estrato superior
- a - raio do eléctrodo
- k - coeficiente de reflexão de tensão

Os resultados apresentam-se na tabela 4.4 [89], para uma vara de 2 m de comprimento, 8 mm de raio, enterrada rente à superfície, e usando um par de valores para as resistividades dos estratos de 100 Ω m e de 500 Ω m, permitindo ter valores simétricos do coeficiente k por troca das resistividades, e variando a espessura do estrato superior. Comparando os resultados das simulações com os resultados obtidos pela fórmula de Tagg, verificam-se erros de 20%, quando o estrato superior é menos resistivo e com o coeficiente de reflexão de tensão a valer 2/3, até erros de 50 % no caso simétrico. Registe-se que neste último caso, com o estrato superior mais resistivo, $k < 0$, se nota uma inversão de valores, já que a resistência devia ser crescente com a espessura do estrato. Uma segunda discretização, com pontos espaçados de 1 mm, não alterou nada, conforme se pode ver nas duas últimas colunas para $k = -2/3$. Os potenciais em pontos colocados num estrato diferente do ponto fonte, foram calculados através da função V_{12} , preenchendo-se uma das triangulares da matriz de coeficientes por

simetria. Não se tendo encontrado nenhum erro de programação, elaborou-se um programa alternativo usando a função V_{21} , em vez de V_{12} . Os resultados foram praticamente os mesmos, o que era esperado devido à simetria das funções.

Tabela 4. 4 Vara de 2 m, 8 mm de raio, em dois estratos

Espessura h (m)	$k = -2/3$					$k = 2/3$		
	Resist. (Tagg) (Ω)	Resist. (Matriz) (Ω) (1 cm)	Desvio para Tagg %	Resist. (Matriz) (Ω) (1 mm)	Desvio para Tagg %	Resist. (Tagg) (Ω)	Resist. (Matriz) (Ω)	Desv. para Tagg %
0,5	60,1	52,0	-13	51,2	-15	134,5	160,9	19
1	77,3	42,5	-45	42,2	-45	93,4	102,7	10
1,5	114,4	57,5	-50	56,5	-51	72,0	72,9	1

Registe-se que o padrão do IEEE [83] aceita erros até 25% no cálculo de resistência de terra, pelo que o método da matriz parece aceitável para coeficientes de reflexão de tensão positivos. Repare-se que algo continua errado, já que, com a discretização de cabo ou vara no estrato superior, os erros do cálculo de resistência eram sempre inferiores a 2% no cabo e 3% na vara, pelo que fica por explicar como os erros aumentam uma ordem de grandeza. Para k negativo, o método tem erros inaceitáveis, e a única conclusão é a de que discretizações com espaçamentos de 1 cm são suficientes, já que, espaçamentos de pontos de 1 mm conduziram aos mesmos resultados. Voltou-se à discretização inicial, com 200 pontos para a vara, e investigou-se a matriz de coeficientes do sistema de equações, representado pela equação (2.6), e embora os termos a_{ij} sejam obtidos por séries, em solo de dois estratos, continuam a ter dimensões de resistência, sendo a matriz considerada uma matriz de resistências mútuas entre os pontos fonte e os pontos de superfície [53], embora o conceito seja mais apropriado no método dos momentos. Representando a referida matriz como uma função de duas variáveis, em que os índices de linha e de coluna funcionam como abcissas e ordenadas, e o valor a_{ij} como o valor da função, obteve-se a representação da respectiva matriz na figura 4.16.

A conclusão é óbvia e curiosa: existem valores negativos na matriz de resistências mútuas. Nota-se claramente a diagonal dominante, típica destes métodos numéricos, tendo os primeiros 150 pontos, que estão no estrato mais resistivo, maior amplitude que os últimos 50 pontos, que já estão no estrato inferior e menos resistivo.

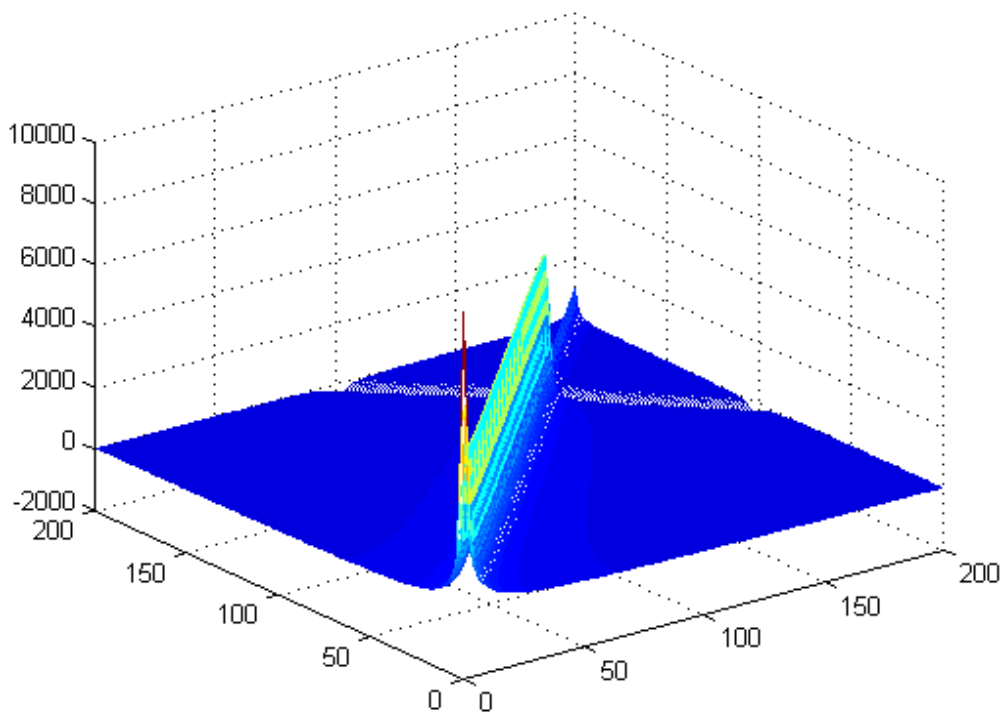


Fig 4. 16 Perspectiva 3D da matriz de coeficientes

Os valores negativos aparecem na submatriz inferior esquerda, que relaciona pontos de um estrato com pontos fonte no outro estrato. As submatrizes diagonais dizem respeito a pontos do mesmo estrato. Estes valores negativos, não foram detectados nos casos de eléctrodos num só estrato.

Para entender esta conclusão, considerou-se o cálculo de potencial de um ponto no estrato superior, na superfície do eléctrodo, devido a uma fonte pontual de corrente no estrato inferior. A resistividade do estrato superior é de $500 \Omega\text{m}$, com uma espessura fixa de 2 m, e a resistividade do estrato inferior de $100 \Omega\text{m}$, garantindo um coeficiente de reflexão de tensão de $k=-2/3$, tal como no exemplo analisado. O eléctrodo tem 4 m, discretizado em dois segmentos de 2 m cada. Estes valores foram escolhidos para facilitar a exposição. As coordenadas do ponto fonte são $x = 0, y = 0, z = -3$, cota do ponto central do segmento inferior. O ponto à superfície onde se vai calcular o potencial do segmento superior, partilha a cota do ponto central do mesmo segmento, ou seja, $x = \text{raio}, y = 0, z = -1$, conforme a fig. 4.17.

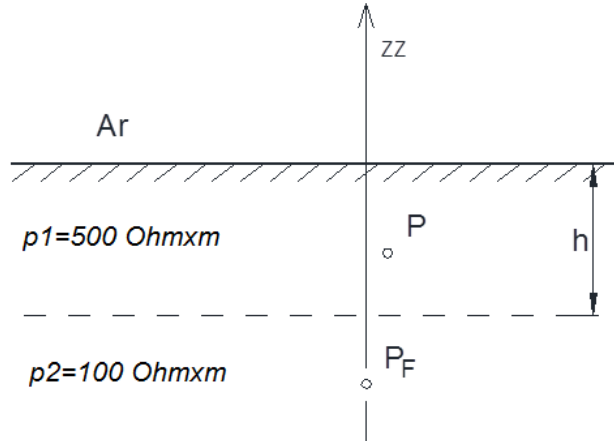


Fig 4. 17 Cálculo de potencial num ponto à superfície da vara

Os parâmetros da função de Green, têm os seguintes valores:

$$\begin{aligned} x - x_F &= \text{raio}; \\ y - y_F &= 0; \\ z - z_F &= -1 - (-3) = 2; \\ z + z_F &= -1 + (-3) = -4; \\ 2h &= 4. \end{aligned}$$

Usando estes valores, no parâmetro S_{12} da equação (4.12), esta fica com o seguinte aspecto:

$$S_{12}(K, G(x, y, z)) = \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(\text{raio}, 0, 2 - 4i) + \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(\text{raio}, 0, -4 + 4i). \quad (4.19)$$

Apresenta-se a seguinte tabela com os primeiros seis termos. Como $k < 0$ a série é alternada.

Tabela 4. 5 Termos da série

i	0	1	2	3	4	5	6
Termo	0,75	-83,67	0,18	-0,07	0,03	-0,02	0,01

O termo dominante da série é o segundo, e como é negativo o resultado é negativo. Com estes sete termos, a soma parcial é de -82,77 e o último termo é muitíssimo pequeno. O segundo termo ($i=1$), está explicitado na equação (4.20):

$$\begin{aligned} k[G(\text{raio}, 0, -2) + G(\text{raio}, 0, 0)] &= k \left(\frac{1}{\sqrt{\text{raio}^2 + 4}} + \frac{1}{\sqrt{\text{raio}^2 + 0}} \right) \\ &= k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{raio}} \right) \approx \frac{k}{\text{raio}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Refira-se que, para o coeficiente de reflexão de tensão positivo $k=2/3$, o que acontece se as resistividades dos estratos forem trocadas, o resultado é de 84,45. A função S_{21} tem o mesmo comportamento. Se o ponto fonte estiver no estrato superior e o ponto de superfície no estrato inferior S_{21} vale o mesmo -82,77 com $k=-2/3$.

O critério de paragem nos somatórios, foi determinado pelo primeiro termo cujo valor é menor que 1% do módulo da soma acumulada. Todos os pontos da discretização do eixo da vara no estrato inferior, têm uma primeira imagem para cima, que está a uma distância dos pontos de superfície no estrato superior, igual ao raio ou a um valor muito próximo deste, explicando-se assim a linha rebaixada da figura 4.16. Também é claro que, para coeficientes de reflexão positivos, a série tenha resultado positivo com erros sempre por excesso, às vezes demasiado elevado, como se viu na tabela 4.4.

Uma solução para resolver este problema, mantendo os pontos da discretização a uma distância razoável entre si de 1 cm, é afastar os pontos da superfície da vara do eixo desta, no estrato superior, 5% ou 10% do comprimento da mesma, quando se calcula o potencial num ponto do estrato superior, devido à corrente de defeito de um ponto fonte no outro estrato. Com esta alteração, apresenta-se a tabela 4.6 com os resultados das simulações [89].

Tabela 4. 6 Vara de 2 m, 8 mm de raio, com deslocamento de pontos de superfície

Espessura <i>h</i> (m)	<i>k</i> = -2/3			<i>k</i> = 2/3		
	Resist. (Tagg)	Resist./erro (deslc 0,1m)	Resist./erro (deslc 0,2m)	Resist. (Tagg)	Resist./erro (deslc 0,1m)	Resist./erro (deslc 0,2m)
	(Ω)	(Ω) / %	(Ω) / %	(Ω)	(Ω) / %	(Ω) / %
0,5	60,1	53 / -12	52 / -13	134,5	159/ 18	154 / 15
1	77,3	56 / -28	58/ -24	93,4	101 / 8,3	99 / 6
1,5	114,4	77 / -34	78 / -32	72,0	74 / 2,2	73 / 1,4

Para *k* negativo, solo em que o estrato superior é mais resistivo, a resistência da vara aumenta com a espessura do estrato, o que já faz sentido, mas mantendo ainda erros inaceitáveis, para qualquer dos deslocamentos 0,1 ou 0,2 m. Para *k* positivo, o método pode usar-se, já que, os erros melhoraram, tendo o erro máximo diminuído para 15 % com um deslocamento de 0,2 m.

Uma outra solução proposta [89], é adaptar a fórmula de Hummel [90] que num solo com vários estratos substitui dois deles por um só, calculando-se uma média ponderada para a resistividade do estrato equivalente. A fórmula apresenta-se a seguir.

$$\rho_m = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{\rho_1} + \frac{l_2}{\rho_2}}, \quad (4.21)$$

definindo-se os parâmetros de seguida:

l_1 : comprimento da vara no estrato um.

l_2 : comprimento da vara no estrato dois.

ρ_1 : resistividade eléctrica no estrato um.

ρ_2 : resistividade eléctrica no estrato dois.

Os resultados apresentam-se na tabela 4.7 [89].

Tabela 4. 7 Aferição da fórmula de Hummel para vara de 2 m, 8 mm de raio.

Espessura h (m)	k= -2/3			k=2/3		
	Resistividade (Tagg) (Ω)	Resistivida. (Ωm)	Resist./erro (Ω) / %	Resistividade (Tagg) (Ω)	Resistivida. (Ωm)	Resist./erro (Ω) / %
0,5	60,1	125	58,7 / -2	134,5	250	118 / -13
1	77,3	167	78,4 / 0,1	93,4	167	78,4/ -16
1,5	114,4	250	118 / 3	72,0	125	58,8 / -18

Para $k=-2/3$ esta metodologia apresenta-se como a melhor de todas, com um erro máximo de 3 %. Para $k = 2/3$ os erros são aceitáveis, infelizmente por defeito, pelo que a técnica de deslocamento no método da matriz, com erros por excesso de 15 %, parece ser a melhor proposta. Esta proposta pode ser útil para grupos de varas, já que para uma só vara a fórmula de Tagg fornece, ‘de per si’, a resistência do eléctrodo.

O cálculo da resistência da vara, exige que se calculem as séries associadas à função ‘S’ na superfície dos condutores, a escassos milímetros das imagens geradas pelos pontos fonte do segmento inferior. Para completar o estudo, deve considerar-se o problema do cálculo do potencial na própria imagem. Se na figura 4.17 o ponto P se deslocar para o eixo das cotas, a diferença de abcissas entre o ponto fonte e o ponto de cálculo será igual a zero e como a diferença de ordenadas já é zero, a equação (4.20) não pode ser calculada, em virtude de o denominador ser zero, em vez de tomar o valor do raio. Neste caso, a série tem uma singularidade no ponto considerado. Assim, a função de Green (4.4) tem os dois primeiros argumentos nulos, pelo que a equação (4.12) pode ser apresentada da seguinte forma:

$$S_{12}(k, G(0,0, v)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{|z - z_f - 2ih|} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i}{|z + z_f + 2ih|}. \quad (4.22)$$

Os denominadores anulam-se quando:

$$\begin{aligned} z - z_f &= 2hi; \\ z + z_f &= -2hi. \end{aligned} \quad (4.23)$$

As singularidades das séries acontecem quando a diferença entre cotas, dos pontos que estão na mesma vertical, for um múltiplo par da espessura do estrato superior, ou quando a soma das referidas cotas for simétrica do mesmo múltiplo.

A primeira condição é particularmente interessante no caso em que um eléctrodo horizontal é enterrado no estrato inferior, com uma profundidade de enterramento que é o dobro da espessura do estrato superior. Tal pode acontecer em subestações que têm uma camada de gravilha, o estrato superior, com 20 ou 30 cm de espessura, havendo um eléctrodo horizontal

a 40 ou 60 cm de profundidade, no estrato inferior, portanto. A primeira imagem superior do ponto fonte fica à superfície, impedindo o cálculo do potencial na superfície. Mesmo que a condição não seja rigorosamente satisfeita, ficando a imagem a alguns centímetros, o cálculo próximo da singularidade vem 'inquinado', podendo até ser negativo para coeficientes de reflexão negativos, como acontece no caso exemplificado. A alternativa é usar uma espessura, para o estrato superior, ligeiramente diferente, fugindo assim à situação de singularidade na solução por séries da equação de Laplace. Registe-se que a espessura do estrato superior é um parâmetro difícil de definir, pelo que se aceita introduzir uma variação de 1 ou 2 dm evitando a singularidade matemática.

4.4 Conclusões

Os erros de cálculo da resistência de uma vara cravada no estrato superior, têm desvios inferiores a 3% para a fórmula de Tagg. Variações na profundidade de colocação da vara pouco afectam o valor da resistência, mas diminuem drasticamente o potencial de superfície e a tensão de passo. As variações do potencial de superfície e da tensão de passo provocadas por um cabo localizado no estrato superior do solo, têm um comportamento semelhante aos do cabo em solo homogéneo. O cálculo da resistência do cabo enterrado, executado pelo método da matriz, apresenta erros inferiores a 2% para a fórmula de Tagg.

No estrato inferior, foi considerada uma grelha de uma subestação, tendo o valor da resistência, obtido pelo método da matriz, apresentado um desvio de 7,6% para a medida e um desvio de 5,4 % para o cálculo, efectuados ambos por investigadores espanhóis [16].

Numa vara que atravessa os dois estratos de um solo, as singularidades do método da matriz tornam-no inútil para se estimar o cálculo da resistência, quando o coeficiente de reflexão de tensão é negativo. Para coeficientes de reflexão positivos os erros de cálculo, quando se usa a fórmula de Tagg como referência, atingem valores próximos de 20%. As imagens dos pontos fontes constituem os pontos singulares do método numérico. Quando estas imagens estão no estrato superior, impossibilitam o cálculo de potencial e influenciam negativamente o referido cálculo numa vizinhança da imagem. Uma alternativa para o cálculo do potencial, é afastar o ponto, 1 ou 2 dm da imagem o que baixa significativamente os erros, embora esta solução se revele verdadeiramente útil quando o coeficiente de reflexão de tensão é positivo. No caso em que o coeficiente de reflexão de tensão é negativo, a melhor solução parece ser o uso de um modelo de solo homogéneo equivalente, por adaptação da fórmula de Hummel, considerando que o estrato inferior tem uma espessura finita e igual ao comprimento da vara no referido estrato.

Capítulo 5 - O método dos momentos em solo de dois estratos

Introdução

Neste capítulo faz-se a transição de uma fonte pontual de corrente para uma fonte filiforme de corrente em qualquer dos estratos, num solo de duas camadas e para qualquer orientação cartesiana da referida fonte filiforme de corrente. Posteriormente, calcula-se o potencial provocado pela referida fonte filiforme num segmento passivo com a mesma orientação ou perpendicular, derivando daqui a resistência mútua dos segmentos pelo isolamento simples do quociente V/I , no mesmo estrato ou em estratos diferentes. Finalmente, validam-se as fórmulas obtidas e propõem-se alternativas quando a teoria das imagens falha. O método dos momentos permite reduzir drasticamente a matriz de coeficientes do sistema de equações a resolver, apesar da sua complexidade matemática, mormente em solo de dois estratos. Uma matriz de resistências mútuas pequena, permite calcular a resistência de eléctrodos grandes e daí o seu interesse.

5.1 Eléctrodos no estrato superior

Considere-se um segmento orientado segundo z e de comprimento $2L_1$, centrado em x_F, y_F, z_F e suponha-se que a corrente I_F sai do eixo de simetria do segmento, como mostra a figura 5.1:

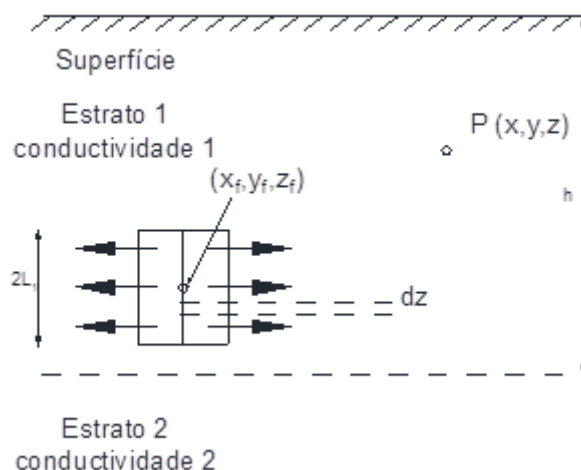


Fig. 5. 1 Fonte filiforme de corrente no estrato superior

A densidade de corrente, suposta constante ao longo do segmento, será $I_F/2L_1$. A corrente que sai do comprimento infinitesimal dz_F é:

$$dI = \frac{I_F dz_F}{2L_1}. \quad (5.1)$$

A contribuição para a tensão em P desta corrente infinitesimal é, substituindo (5.1) em (4.7):

$$\begin{aligned} dV_{11}(x, y, z) &= \frac{\rho_1}{4\pi} [G(x - x_F, y - y_F, z - z_F) + \\ &k \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F - 2(i+1)h) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z - z_F - 2ih) \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih) \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} k^i G(x - x_F, y - y_F, z - z_F + 2ih)] \frac{I_F}{2L_1} dz_F. \end{aligned} \quad (5.2)$$

A tensão em P, devido às contribuições de todos os pontos no eixo do segmento, será:

$$V_{11}(x, y, z) = \int_{z_F - L_1}^{z_F + L_1} dV_{11}. \quad (5.3)$$

A integração é feita por decomposição. As primitivas a calcular são do tipo:

$$\int \frac{dz_F}{\sqrt{B^2 + (a \pm z_F)^2}}, \quad (5.4)$$

com:

$$B^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2.$$

Usando a mudança de variável $u = a \pm z_F$, obtém-se uma primitiva que consta das tabelas e chega-se à seguinte solução para (5.4):

$$\ln \left| \frac{a \pm z_F + L_1 + \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (a \pm z_F + L_1)^2}}{a \pm z_F - L_1 + \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (a \pm z_F - L_1)^2}} \right|. \quad (5.5)$$

Esta função pode ser representada de forma mais compacta usando as seguintes variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} t &= x - x_F; \\ u &= y - y_F; \\ v &= z \pm z_F. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Obtendo-se finalmente:

$$F_z(t, u, v, L_1) = \ln \left| \frac{\sqrt{t^2 + u^2 + (v + L_1)^2} + v + L_1}{\sqrt{t^2 + u^2 + (v - L_1)^2} + v - L_1} \right|. \quad (5.7)$$

O potencial em P, solução de (5.3), devido a uma fonte filiforme de corrente orientada segundo z será então:

$$\begin{aligned}
V_{11}(x, y, z) = & \frac{\rho_1 I}{8\pi L_1} [F_z(x - x_F, y - y_F, z - z_F, L_1) + \\
& k \sum_{i=0}^{\infty} k^i F_z(x - x_F, y - y_F, z + z_F - 2(i+1)h, L_1) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} k^i F_z(x - x_F, y - y_F, z - z_F - 2ih, L_1) \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} k^i F_z(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih, L_1) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} k^i F_z(x - x_F, y - y_F, z - z_F + 2ih, L_1)].
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A expressão (5.8) pode ser obtida directamente da expressão (5.2), substituindo-se a função de Green pela função F_z e acrescentando apenas o quarto parâmetro, que é o semi-comprimento do eléctrodo, havendo o cuidado de multiplicar a fracção que precede o parêntesis recto pela fracção que o sucede. O factor de escala em (5.8) é diferente do de (5.2) apenas no denominador.

Considere-se agora um segmento horizontal, orientado, por exemplo, segundo o eixo das abcissas. Tal como no segmento vertical, supõe-se densidade de corrente constante e integram-se as contribuições infinitesimais ao longo do eixo do segmento em causa, obtendo-se de novo a expressão (5.3), variando apenas a variável de integração. Assim, a primitiva a calcular será do mesmo tipo da (5.4), mas o parâmetro B será:

$$B^2 = (y - y_F)^2 + (a \pm z_F)^2. \tag{5.9}$$

Verifica-se uma troca de papéis entre a diferença de abcissas e a diferença de cotas. A primitiva a usar é a mesma da integração segundo z_F , depois da mudança de variável. A solução será dada por (5.8) com a função F_z substituída por uma F_x definida da seguinte maneira:

$$F_x = \ln \left| \frac{x - x_F + L_1 + \sqrt{(x - x_F + L_1)^2 + (y - y_F)^2 + (a \pm z_F)^2}}{x - x_F - L_1 + \sqrt{(x - x_F - L_1)^2 + (y - y_F)^2 + (a \pm z_F)^2}} \right|. \tag{5.10}$$

Se o segmento estivesse orientado segundo y, o potencial provocado pelo segmento também seria dado por (5.8) sendo F_y formulado analogamente:

$$F_y = \ln \left| \frac{y - y_F + L_1 + \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F + L_1)^2 + (a \pm z_F)^2}}{y - y_F - L_1 + \sqrt{(x - x_F - L_1)^2 + (y - y_F - L_1)^2 + (a \pm z_F)^2}} \right|. \tag{5.11}$$

Quando se passa de (5.10) para (5.11) e olhando para o radical, o termo L_1 'roda' dos parêntesis que contêm a diferença de abcissas para os que contêm a diferença de ordenadas. O conteúdo do parêntesis que contém o parâmetro L_1 , repete-se fora do radical. Acontece o

mesmo na função definida em (5.5) em que L_1 aparece associado às diferenças de cotas. Assim, pode definir-se uma só função que, por rotação de índices, serve as três integrações. Defina-se então a função F , usando a integração segundo x como referência, da seguinte forma [10]:

$$F(t, u, v, L_1) = \ln \left| \frac{\sqrt{(t + L_1)^2 + u^2 + v^2} + t + L_1}{\sqrt{(t - L_1)^2 + u^2 + v^2} + t - L_1} \right|, \quad (5.12)$$

em que:

$$t = x - x_F,$$

$$u = y - y_F,$$

$$v = z \pm z_F.$$

A rotação de índices fica claramente definida da seguinte forma:

$$F_x(t, u, v, L_1) = F(t, u, v, L_1); \quad (5.13)$$

$$F_y = F(u, v, t, L_1); \quad (5.14)$$

$$F_z = F(v, t, u, L_1). \quad (5.15)$$

5.1.1 Resistência mútua de segmentos com a mesma orientação

O cálculo da resistência mútua entre segmentos, exige o cálculo do potencial médio num segmento do estrato superior centrado em (x_a, y_a, z_a) , de comprimento $2L_2$, devido à corrente que sai de um outro segmento no mesmo estrato, centrado em (x_f, y_f, z_f) e cujo comprimento é $2L_1$. O problema ilustra-se na figura 5.2.

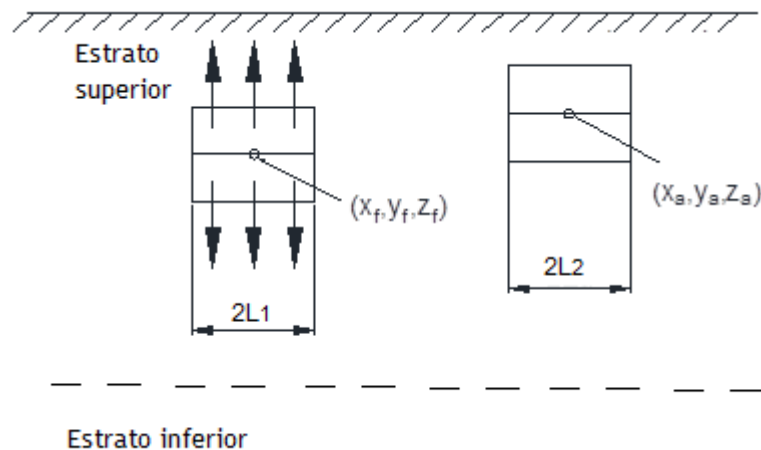


Fig. 5. 2 Potencial no segmento 2 devido a corrente que sai do segmento 1

O referido potencial, é calculado ao longo do eixo de simetria do segmento 2, usando a fórmula da média. Deve integrar-se a expressão (5.8), usando a função $F(t, u, v, L_F)$ definida

em (5.13), ao longo do eixo do segmento 2. A fórmula, bem conhecida da análise matemática, é:

$$V_{1x1x}(x_a, y_a, z_a) = \frac{1}{2L_2} \int_{x_a-L_2}^{x_a+L_2} V_{11}(x_F, y_F, z_F, L_F) dx. \quad (5.16)$$

Os índices de V_{1x1x} referem-se ao potencial num segmento orientado segundo x devido a um outro, também orientado segundo o mesmo eixo. Note-se que, ao longo do eixo do segundo condutor, a ordenada e a cota mantêm-se constantes. Expandindo os somatórios tem-se:

$$V_{1x1x}(x_a, y_a, z_a) = \frac{1}{2L_2} \frac{\rho_1 I}{8\pi L_1} \left\{ \begin{aligned} & \int_{x_a-L_2}^{x_a+L_2} F(x-x_F, y_a-y_F, z_a-z_F, L_1) dx + \\ & k \sum_{i=0}^{\infty} k^i \int_{x_a-L_2}^{x_a+L_2} F[x-x_F, y_a-y_F, z_a+z_F-2(i+1)h, L_1] dx \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} k^i \int_{x_a-L_2}^{x_a+L_2} F(x-x_F, y_a-y_F, z_a-z_F-2ih, L_1) dx \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} k^i \int_{x_a-L_2}^{x_a+L_2} F(x-x_F, y_a-y_F, z_a+z_F+2ih, L_1) dx \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} k^i \int_{x_a-L_2}^{x_a+L_2} F(x-x_F, y_a-y_F, z_a-z_F+2ih, L_1) dx \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

A primeira primitiva é, expandindo F :

$$\int_{x_a-L_2}^{x_a+L_2} \ln \left| \frac{x-x_F+L_1+\sqrt{(x-x_F+L_1)^2+(y_a-y_F)^2+(z_a-z_F)^2}}{x-x_F-L_1+\sqrt{(x-x_F-L_1)^2+(y_a-y_F)^2+(z_a-z_F)^2}} \right| dx. \quad (5.18)$$

Definindo:

$$B^2 = (y_a - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2, \quad (5.19)$$

e

$$a_{\pm} = -x_F \pm L_1, \quad (5.20)$$

obtêm-se, depois de decompor o logaritmo do quociente na diferença de dois logaritmos, primitivas da forma:

$$\int_{x_a-L_2}^{x_a+L_2} \ln \left| x + a_{\pm} + \sqrt{(x + a_{\pm})^2 + B^2} \right| dx. \quad (5.21)$$

Note-se que para o primeiro somatório o parâmetro B seria:

$$B^2 = (y_a - y_F)^2 + [z_a + z_F - 2(i+1)h]^2. \quad (5.22)$$

Em qualquer dos casos, a primitiva a calcular é sempre dada por (5.21). Usando a mudança de variável:

$$t = x + a_{\pm}, \quad (5.23)$$

obtém-se a seguinte primitiva [10]:

$$\int \ln(t + \sqrt{t^2 + B^2}) dt = t \ln|t + \sqrt{t^2 + B^2}| - \sqrt{t^2 + B^2}, \quad (5.24)$$

ou, voltando à variável original no segundo termo desta equação:

$$(x + a_{\pm}) \ln|x + a_{\pm} + \sqrt{(x + a_{\pm})^2 + B^2}| - \sqrt{(x + a_{\pm})^2 + B^2}. \quad (5.25)$$

Assim, o integral definido do logaritmo do numerador de (5.18) será:

$$\begin{aligned} & (x_a + L_2 + a_+) \ln|x_a + L_2 + a_+ + \sqrt{(x_a + L_2 + a_+)^2 + B^2}| - \sqrt{(x_a + L_2 + a_+)^2 + B^2} \\ & - (x_a - L_2 + a_+) \ln|x_a - L_2 + a_+ + \sqrt{(x_a - L_2 + a_+)^2 + B^2}| + \sqrt{(x_a - L_2 + a_+)^2 + B^2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Da mesma forma se obtém o integral definido do logaritmo do denominador, entrando com a_- em vez de a_+ . A diferença dos dois integrais definidos, é representada como a função H [10], ressaltando que a expressão aqui deduzida está isenta das gralhas de impressão da função H no artigo citado, gralhas essas que inviabilizam o seu uso.

$$\begin{aligned} H(t, u, v, L_1, L_2) = & (t + L_1 + L_2) \ln|t + L_1 + L_2 + \sqrt{(t + L_1 + L_2)^2 + u^2 + v^2}| - \sqrt{(t + L_1 + L_2)^2 + u^2 + v^2} \\ & - (t + L_1 - L_2) \ln|t + L_1 - L_2 + \sqrt{(t + L_1 - L_2)^2 + u^2 + v^2}| + \sqrt{(t + L_1 - L_2)^2 + u^2 + v^2} \\ & - (t - L_1 + L_2) \ln|t - L_1 + L_2 + \sqrt{(t - L_1 + L_2)^2 + u^2 + v^2}| + \sqrt{(t - L_1 + L_2)^2 + u^2 + v^2} \\ & + (t - L_1 - L_2) \ln|t - L_1 - L_2 + \sqrt{(t - L_1 - L_2)^2 + u^2 + v^2}| - \sqrt{(t - L_1 - L_2)^2 + u^2 + v^2}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

com:

$$\begin{aligned} t &= x_a - x_F, \\ u &= y_a - y_F, \\ v &= z_a - z_F. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Voltando à expressão (5.17), substituindo os integrais e evidenciando o quociente V/I , obtém-se a expressão para a resistência mútua entre os dois segmentos:

$$R_{1x1x} = \frac{V_{1x1x}(x_a, y_a, z_a)}{I} = \frac{\rho_2}{16\pi L_1 L_2} \left\{ \begin{aligned} & H(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F, L_1, L_2) + \\ & k \sum_{i=0}^{\infty} k^i H[x_a - x_F, y_a - y_F, z_a + z_F - 2(i+1)h, L_1, L_2] \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} k^i H(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F - 2ih, L_1, L_2) \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} k^i H(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a + z_F + 2ih, L_1, L_2) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} k^i H(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F + 2ih, L_1, L_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Para validar todo este cálculo, considerou-se um cabo de 10 m, 50 mm² de seção, colocado a meio metro de profundidade, orientado segundo x, num solo com dois estratos, tendo o estrato superior uma resistividade de 500 Ωm e o estrato inferior uma resistividade de 100 Ωm, variando-se a espessura do estrato superior. O coeficiente de reflexão de tensão é $k = -2/3$. O eixo do cabo é a fonte filiforme de corrente e usou-se a função (5.29), para calcular a resistência do eléctrodo discretizado num único segmento. Assim: $x_a - x_F = 0$, $y_a - y_F = a$ e $z_a - z_F = 0$. Com estes valores não se consegue executar o cálculo, devido ao argumento de alguns logaritmos se anular na equação (5.27). Deve, então, considerar-se o raio do condutor na diferença de abcissas, ou de ordenadas, ou de cotas para se calcular a função H . Os resultados apresentam-se na tabela 5.1 e compararam-se com a fórmula de Tagg [8] para cabos horizontais no estrato superior.

Tabela 5. 1 Comparação da função R_{1x1x} com a fórmula de Tagg

Parâmetros					
h (m)	1	2	4	6	8
Resistencia R_{1x1x} Ω	53	61	67	70	72
Resistência (Tagg) Ω	54	61	67	70	72
Erro %	-1,9	0	0	0	0

O erro máximo é de -1,9 %, o que atesta a validade do conceito de resistência própria do segmento.

Mudou-se a orientação do eléctrodo, considerando-o orientado segundo y, e mudou-se para outro tipo de solo com resistividade do estrato superior de 100 Ωm e de 500 Ωm no estrato inferior. O coeficiente de reflexão de tensão é $k = 2/3$. A espessura do estrato superior será variada entre 1 e 8 m, tal como no caso anterior. O cabo é idêntico e colocado à mesma profundidade. Usou-se a expressão (5.29) considerando a rotação de índices na função H , com o objectivo de testar a referida rotação. Assim, a ordenação de variáveis em H foi a seguinte:

$$H(u,v,t,L1,L2), \quad (5.30)$$

em que se considerou o raio do eléctrodo na diferença de abcissas t . O resultado das simulações apresenta-se na tabela 5.2, tendo a comparação com a referida fórmula de Tagg.

Tabela 5. 2 Comparação da função R_{1y1y} com a fórmula de Tagg

Parâmetros					
h (m)	1	2	4	6	8
Resistencia R_{1y1y} Ω	27,6	22,6	19,3	18,0	17,4
Resistência (Tagg) Ω	27,4	22,6	19,4	18,1	17,4
Erro %	0,7	0	-0,5	-0,6	0

O erro máximo é de 0,7 %, o que atesta a validade da rotação de índices, usando a mesma fórmula.

Num último teste à rotação de índices, analisou-se uma vara enterrada no estrato superior. Consideraram-se os dois tipos de terreno dos dois exemplos anteriores, e supôs-se a vara enterrada à superfície com 3 m de comprimento e 8 mm de raio. A ordenação de variáveis em H foi:

$$H(v,t,u,L1,L2). \quad (5.31)$$

Esta função foi usada na fórmula (5.29). O resultado apresenta-se na tabela 5.3. Considerou-se a vara discretizada num só segmento e usou-se o valor do raio do eléctrodo para a variável t . A comparação foi feita com a fórmula de Tagg para varas no estrato superior.

Tabela 5. 3 Comparação da função R_{1z1z} com a fórmula de Tagg

Parâmetros				
Espessura h	4	6	9	11
R_{1z1z} $k=-2/3$	156	160	163	164
Formula Tagg	154	160	163	164
Erro %	1,3	0	0	0
R_{1z1z} $k = 2/3$	38,2	36,4	35,4	35,0
Formula Tagg	38,7	36,6	35,0	35,1
Erro %	-1,3	-0,5	1,1	-0,3

O cálculo recorrendo à função H , com rotação de índices, foi amplamente validado pela fórmula de Tagg, já que os desvios não excedem 1,3%.

5.1.2 Resistência mútua de segmentos perpendiculares

Considere-se que o segmento activo está no estrato superior, orientado segundo x . O potencial em qualquer ponto desse estrato é dado por (5.8), considerando a função F definida

em (5.12). O potencial médio ao longo de um segmento orientado segundo y , de comprimento $2L_2$, e centrado em (x_a, y_a, z_a) é representado por:

$$V_{1x1y}(x_a, y_a, z_a) = \frac{1}{2L_2} \int_{y_a-L_2}^{y_a+L_2} V_{11}(x_a, y, z_a) dy. \quad (5.32)$$

Note-se que se calcula a média da função ao longo de uma recta, orientada segundo y , em que nem a cota nem a abcissa variam. Como a integranda é uma soma, obtém-se, pela técnica da decomposição, as primitivas da função F , mas agora segundo y , ou seja, trata-se de integrar a expressão (5.18) em ordem a y . Assim, para o primeiro termo do parêntesis da expressão (5.8), decompondo o logaritmo do quociente em dois logaritmos, obtêm-se os seguintes integrais:

$$\begin{aligned} & \int_{y_a-L_2}^{y_a+L_2} \ln \left| x_a - x_F + L_1 + \sqrt{(x_a - x_F + L_1)^2 + (y - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2} \right| dy \\ & - \int_{y_a-L_2}^{y_a+L_2} \ln \left| x_a - x_F + L_1 + \sqrt{(x_a - x_F + L_1)^2 + (y - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2} \right| dy. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Fazendo as seguintes mudanças de variável:

$$\begin{aligned} t &= x_A - x_F + L_1, \\ u &= y_A - y_F, \\ v &= z_A - z_F, \end{aligned} \quad (5.34)$$

obtém-se a seguinte primitiva, com a respectiva solução [10]:

$$\begin{aligned} \int \ln \left| t + \sqrt{t^2 + u^2 + v^2} \right| du &= -u + u \ln \left| t + \sqrt{t^2 + u^2 + v^2} \right| + t \ln \left| t + \sqrt{t^2 + u^2 + v^2} \right| + \dots \\ &+ 2v \cdot a \tan \frac{t + u + \sqrt{t^2 + u^2 + v^2}}{v}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Voltando às variáveis originais tem-se para o primeiro integral I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= y_F - (y_a + L_2) \\
&+ (y_a + L_2 - y_F) \ln \left| \frac{x_a - x_F + L_1 + \sqrt{(x_a - x_F + L_1)^2 + (y_a + L_2 - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2}}{x_a - x_F + L_1} \right| \\
&+ (x_a - x_F + L_1) \ln \left| \frac{y_a + L_2 - y_F + \sqrt{(x_a - x_F + L_1)^2 + (y_a + L_2 - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2}}{y_a + L_2 - y_F} \right| + \\
&2(z_a - z_F) \cdot a \tan^{-1} \frac{x_a - x_F + L_1 + y_a + L_2 - y_F + \sqrt{(x_a - x_F + L_1)^2 + (y_a + L_2 - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2}}{z_a - z_F} \\
&- y_F + (y_a - L_2) \\
&- (y_a - L_2 - y_F) \ln \left| \frac{x_a - x_F + L_1 + \sqrt{(x_a - x_F + L_1)^2 + (y_a - L_2 - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2}}{x_a - x_F + L_1} \right| \\
&- (x_a - x_F + L_1) \ln \left| \frac{y_a - L_2 - y_F + \sqrt{(x_a - x_F + L_1)^2 + (y_a - L_2 - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2}}{y_a - L_2 - y_F} \right| \\
&- 2(z_a - z_F) \cdot a \tan^{-1} \frac{x_a - x_F + L_1 + y_a - L_2 - y_F + \sqrt{(x_a - x_F + L_1)^2 + (y_a - L_2 - y_F)^2 + (z_a - z_F)^2}}{z_a - z_F}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Para o segundo integral, basta trocar na expressão (5.36) L_1 pelo seu simétrico. Existem termos simétricos a simplificar. Redefinindo t , u , v do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
t &= x_a - x_F, \\
u &= y_a - y_F, \\
v &= z_a - z_F,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

obtm-se a função E , primitiva de F segundo y :

$$\begin{aligned}
E = (t, u, v, L_1, L_2) &= (u + L_2) \ln \left| \frac{t + L_1 + \sqrt{(t + L_1)^2 + (u + L_2)^2 + v^2}}{t - L_1 + \sqrt{(t - L_1)^2 + (u + L_2)^2 + v^2}} \right| + \\
&(t + L_1) \ln \left| \frac{u + L_2 + \sqrt{(t + L_1)^2 + (u + L_2)^2 + v^2}}{u - L_2 + \sqrt{(t + L_1)^2 + (u - L_2)^2 + v^2}} \right| \\
&+ (t - L_1) \ln \left| \frac{u - L_2 + \sqrt{(t - L_1)^2 + (u - L_2)^2 + v^2}}{u + L_2 + \sqrt{(t - L_1)^2 + (u + L_2)^2 + v^2}} \right| \\
&+ (u - L_2) \ln \left| \frac{t - L_1 + \sqrt{(t - L_1)^2 + (u - L_2)^2 + v^2}}{t + L_1 + \sqrt{(t + L_1)^2 + (u - L_2)^2 + v^2}} \right| \\
&+ 2v \cdot \left[\arctan \frac{t + u + L_1 + L_2 + \sqrt{(t + L_1)^2 + (u + L_2)^2 + v^2}}{v} \right. \\
&- \arctan \frac{t + u + L_1 - L_2 + \sqrt{(t + L_1)^2 + (u - L_2)^2 + v^2}}{v} \\
&- \arctan \frac{t + u - L_1 + L_2 + \sqrt{(t - L_1)^2 + (u + L_2)^2 + v^2}}{v} \\
&\left. + \arctan \frac{t + u - L_1 - L_2 + \sqrt{(t - L_1)^2 + (u - L_2)^2 + v^2}}{v} \right].
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Para os restantes integrais a variável v conterá os índices dos somatórios, em virtude de as imagens estarem na vertical, partilhando a abcissa e a ordenada do segmento fonte. Esta fórmula não é igual à apresentada por Joy *et al* [10], pelo que convém testar a sua validade. O potencial médio no segundo condutor, será então dado por (5.29), com a função H substituída pela função E :

$$R_{1x1y} = \frac{V_{1x1y}(x_a, y_a, z_a)}{I} = \frac{\rho_1}{16\pi L_1 L_2} \left\{ \begin{aligned} & E(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F, L_1, L_2) + \\ & k \sum_{i=0}^{\infty} k^i E[x_a - x_F, y_a - y_F, z_a + z_F - 2(i+1)h, L_1, L_2] \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} k^i E(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F - 2ih, L_1, L_2) \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} k^i E(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a + z_F + 2ih, L_1, L_2) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} k^i E(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F + 2ih, L_1, L_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Quando se aplicam as fórmulas (5.39) e (5.38) a eléctrodos perpendiculares e adjacentes, convém ter alguns cuidados. Considere-se a figura 3.15, onde se analisam dois eléctrodos horizontais e perpendiculares, no mesmo plano. A diferença de cotas entre os centros dos dois segmentos é zero, o que coloca problemas no cálculo da função E , nomeadamente no cálculo dos arcos tangente. Há dois processos para se resolver este problema: ou calculando o limite dos termos contendo o referido arco, que tem zero como resultado, ou considerando o raio do eléctrodo na diferença entre cotas. Repare-se que o problema só se coloca quando se calcula a resistência mútua entre os dois segmentos. Quando se considera a resistência entre as imagens do segmento fonte e o segmento passivo, a diferença de cotas já não é zero e esta questão já não se coloca. Para testar a fórmula apresentada em (5.38), que não consta na literatura, considerou-se que o eléctrodo da figura 3.15 tem dois braços iguais com 6 m de comprimento cada. O eléctrodo foi enterrado a meio metro de profundidade num terreno cujo estrato superior tem uma resistividade de 500 Ωm , o estrato inferior 100 Ωm e a espessura do estrato superior é de um metro. Na discretização, considerou-se cada braço um segmento de corrente. A seção do cabo é de 50 mm^2 . A resistência obtida pelo método dos momentos foi de 45,3 Ω , enquanto que o resultado obtido pelo método da matriz foi de 46,3 Ω . O desvio de 1 Ω representa 2,2% de erro para o menor valor, 45,3 Ω , já que não se sabe qual deles é o correcto. É interessante olhar para a matriz de resistências mútuas dos dois segmentos, que se apresenta:

$$R_M = \begin{bmatrix} 84,4266 & 6,2461 \\ 6,2461 & 84,4266 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Os termos diagonais, foram obtidos com a função H e representam a resistência própria de cada um dos segmentos isolados. Como estes são iguais, do mesmo calibre e enterrados à

mesma profundidade, as suas resistências isoladas são, naturalmente, iguais. Note-se que a fórmula de Tagg, para cabos horizontais de 6 m enterrados no mesmo solo, indica um valor de 86,6 Ω , ligeiramente mais alto. O termo não diagonal obtém-se usando a função E e representa a resistência mútua entre os dois segmentos. Refinou-se a discretização, considerando o eléctrodo subdividido em seis segmentos de dois metros. O resultado obtido para a resistência de difusão foi de 45,2 Ω , valor muito semelhante ao da discretização, usando segmentos de 6 m. Procurou-se uma comparação com outros autores, pelo que se considerou a grelha apresentada na figura 5.3 e compararam-se os resultados obtidos com os valores de Amoruso e outros [13]. A grelha é constituída por condutores de raio igual a 10 mm, enterrada a 0,5 m ou a 1m, num solo com uma resistividade do estrato superior igual a 100 Ωm e uma resistividade do estrato inferior de 53,8 Ωm . Para a espessura do estrato superior, usaram-se os valores de 2,5 e 10 m. Os resultados comparativos com os valores de Amoruso apresentam-se na tabela 5.4.

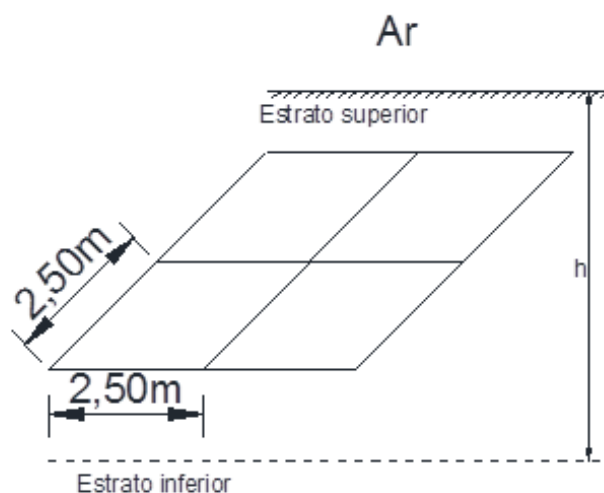


Fig. 5. 3 Grelha de Amoruso e outros

Tabela 5. 4 Resistência de eléctrodos em grelha, comparação com Amoruso

Espessura estrato superior	Profund. Enterr. grelha	R (Amoruso)	R (Mdm)	Erro para Amoruso
2,5	0,5	7,40	7,07	-4,5%
2,5	1,0	6,50	6,42	-1,2%
10	0,5	8,36	8,04	-3,8%
10	1,0	7,75	7,43	-4,1%

Os desvios, entre as simulações com as fórmulas desenvolvidas e os resultados de Amoruso, são menores do que 5 %. Se a resistividade do estrato inferior fosse alterada para 184 Ωm , o coeficiente de reflexão de tensão k passaria a valer 0,3. Para uma espessura do estrato superior de 0,5 m, a resistência obtida seria de 11,9 Ω [91], valor que tem um excesso de 2,5 % relativamente ao valor de Amoruso. A metodologia e as fórmulas estão, assim, validadas. Para este último solo e colocando a grelha a 0,1 e a 0,9 m, mantendo a espessura do estrato

superior em um metro, calcularam-se as curvas equipotenciais para os dois casos limites de enterramento, segundo o plano vertical que cruza o condutor central da grelha. A corrente de defeito foi de 100 A. Como se verifica nas figuras 5.4 e 5.5 [91] a condição de Neumann é satisfeita à superfície do solo, já que as linhas são perpendiculares ao plano $z=0$.

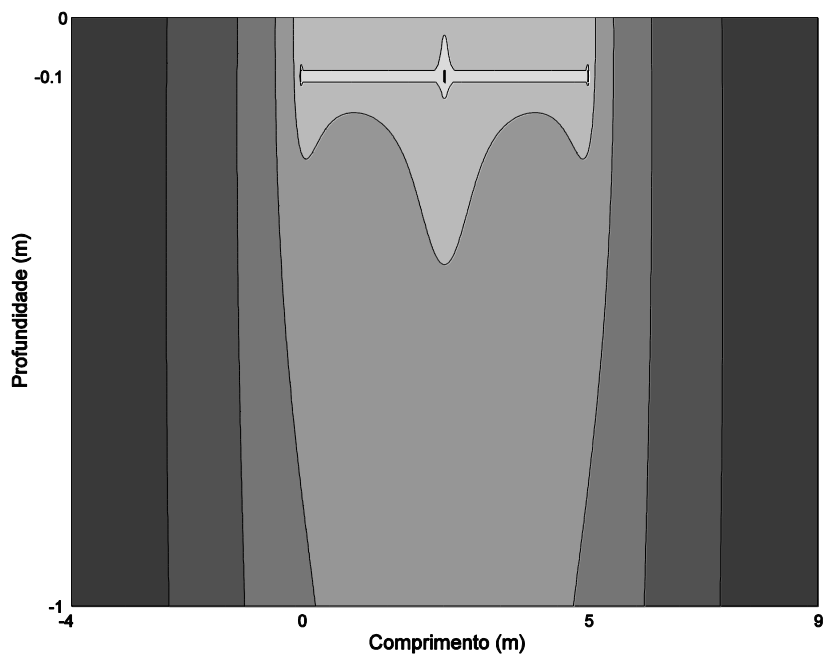


Fig. 5. 4 Equipotenciais verticais em grelha a 0,1 m de profundidade

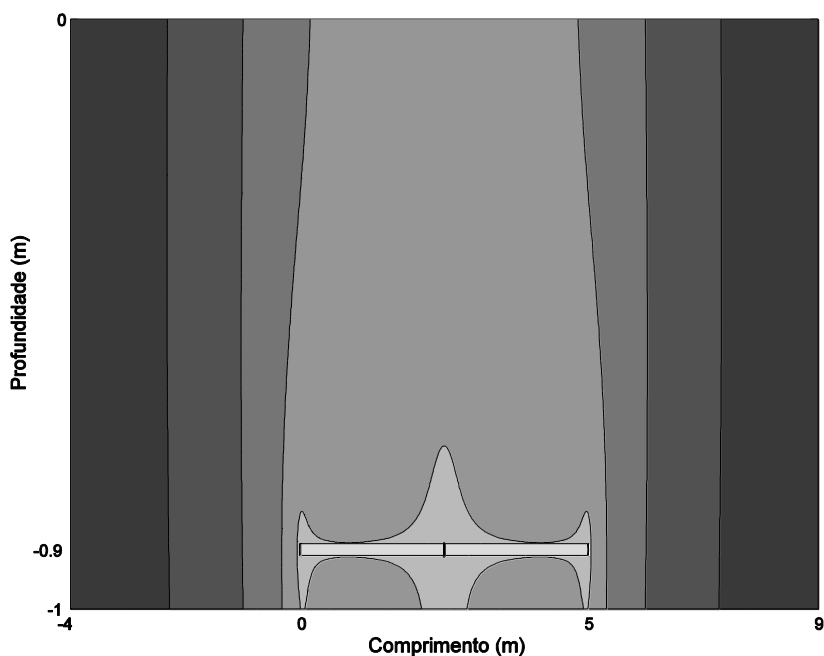


Fig. 5. 5 Equipotenciais verticais em grelha a 0,9 m de profundidade

5.1.3 Resistência mútua no caso geral

Para se verificar a possibilidade de se usar a rotação de índices na função E , tal como se fez com as funções F e H , considerou-se um eléctrodo em 'L' no plano xz , no estrato superior. O

potencial em qualquer ponto deste estrato, provocado por um segmento orientado segundo x e a debitar uma corrente I é da mesma forma da equação (5.8), em que a função F é dada pela equação (5.10). O potencial médio gerado no segmento orientado segundo z é, tal como em (5.32), dado por:

$$V_{1x1z}(x_a, y_a, z_a) = \frac{1}{2L_2} \int_{z_a-L_2}^{z_a+L_2} V_{11}(x_a, y_a, z) dz. \quad (5.41)$$

A primitiva a usar é também dada por (5.35), ressalvando que a integração é em ordem a z , obtendo-se uma equação equivalente à equação (5.39), mas em que na função E a diferença de cotas toma o papel da diferença de ordenadas e vice-versa. Assim, tem-se:

$$E_{1x1z}(t, u, v, L_1, L_2) = E(t, v, u, L_1, L_2). \quad (5.42)$$

Neste caso particular, no plano xz , a diferença de ordenadas é dada pelo raio dos condutores. No caso geral da resistência entre dois segmentos orientados segundo os eixos cartesianos, pode apresentar-se a seguinte fórmula:

$$V_{11} = \frac{\rho_1 I}{16\pi L_a L_F} \left\{ \begin{array}{l} M(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F, L_F, L_A) + k \sum_{i=0}^{\infty} k^i M[x_a - x_F, y_a - y_F, z_a + z_F - 2(i+1)h, L_F, L_A] \\ + \sum_{i=1}^{\infty} k^i M(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F - 2ih, L_F, L_A) \\ + \sum_{i=0}^{\infty} k^i M(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a + z_F + 2ih, L_F, L_A) \\ + \sum_{i=1}^{\infty} k^i M(x_a - x_F, y_a - y_F, z_a - z_F + 2ih, L_F, L_A) \end{array} \right\} \quad (5.43)$$

A função M é dada pela tabela 5.5 [10].

Tabela 5. 5 Especificação da função M em função da orientação dos segmentos

		Orientação Condutor Passivo (Índice A)		
Orientação		x	y	z
Condutor	x	$H(t, u, v, L_F, L_A)$	$E(t, u, v, L_F, L_A)$	$E(t, v, u, L_F, L_A)$
	y	$E(u, t, v, L_F, L_A)$	$H(u, t, v, L_F, L_A)$	$E(u, v, t, L_F, L_A)$
Activo (Índice F)	z	$E(v, t, u, L_F, L_A)$	$E(v, u, t, L_F, L_A)$	$H(v, t, u, L_F, L_A)$

Fez-se uma validação final da metodologia e da tabela 5.5 e, para tal, foi testado o eléctrodo de Amoruso *et al* ilustrado na figura 5.6, que é uma grelha com varas [13]. Os cabos têm 10 mm de raio e as varas 8 mm. A grelha foi enterrada a 0,5 m. A grelha é de 5x5 m e as varas têm 2,5 m de comprimento, ou seja, todos os segmentos são iguais. As características do solo são as seguintes: Resistividade do estrato superior é de 100 Ωm e a do estrato inferior de 53,8 Ωm . A espessura do estrato superior é de 4 m. O valor indicado no artigo é de 5,9 Ω [13]. O resultado com a metodologia proposta e fazendo uso da tabela 4.5 foi de 6,0 Ω . O erro para Amoruso *et al* é de 1,7 %.

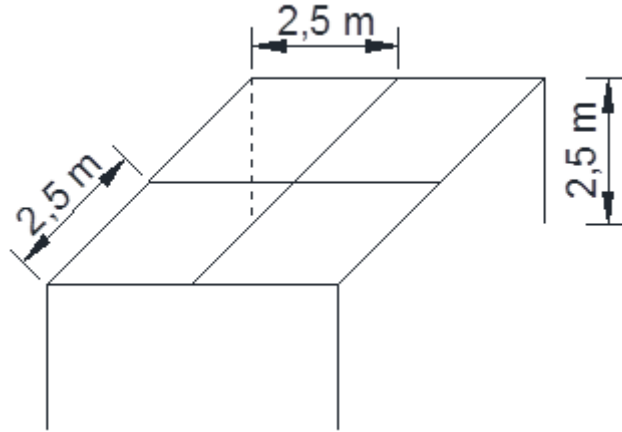


Fig. 5. 6 Eléctrodo de Amoruso do tipo B

5.2 Eléctrodos no estrato inferior

O potencial, num ponto genérico $P(x, y, z)$ no estrato inferior, devido a uma fonte pontual de corrente no mesmo estrato, situada em $P_F(x_F, y_F, z_F)$, é dado por (4.10). Quando se considera um eléctrodo genérico, centrado no referido ponto P_F e de comprimento $2L_1$, o potencial em $P(x, y, z)$, devido a esta fonte filiforme de corrente e supondo densidade de corrente constante, é obtido por integração de (3.14), tal como se fez no estrato superior, cujo resultado é:

$$V_{22} = \frac{\rho_2 I}{8\pi L_1} \left[\begin{aligned} & F(x - x_F, y - y_F, z - z_F, L_1) - k \sum_{i=0}^{\infty} k^i F(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2(i-1)h, L_1) \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} k^i F(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih, L_1) \end{aligned} \right]. \quad (5.44)$$

Este caso é geral e a orientação do segmento irá definir a rotação de índices, como se verificou na subsecção anterior. Em (5.44), e na ausência dessa rotação, o eléctrodo está orientado segundo o eixo das abcissas. Quando se calcula o potencial médio gerado no eixo de um segundo segmento passivo, de comprimento $2L_2$, integra-se (5.44) ao longo do eixo do segundo segmento, pela conhecida fórmula da média e usando as primitivas apresentadas anteriormente, obtém-se uma expressão geral dada por:

$$V_{22} = \frac{\rho_2 I}{16\pi L_1 L_2} \left[\begin{aligned} & M(x - x_F, y - y_F, z - z_F, L_1) - k \sum_{i=0}^{\infty} k^i M(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2(i-1)h, L_1) \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} k^i M(x - x_F, y - y_F, z + z_F + 2ih, L_1) \end{aligned} \right]. \quad (5.45)$$

A função M , com a respectiva rotação de índices, está definida na tabela 5.5 dependendo, obviamente, da orientação dos segmentos. A resistência mútua entre os dois segmentos obtém-se facilmente isolando o quociente V_{22}/I na equação (5.45). Procurou-se testar a formulação definida em (5.45), calculando-se a resistência da grelha da figura 4.14. Obteve-

se para a resistência o valor de 1,23 Ω , tendo os investigadores espanhóis [16] medido 1 Ω . Se o resultado do cálculo for arredondado às unidades, então não há erro, mas a comparação é pobre. Quando se usou o método da matriz, obteve-se 0,92 Ω . A diferença entre os dois valores do cálculo é de 0,31 Ω , obviamente pequena. Com valores tão baixos, os erros relativos são grandes. No artigo citado [16] é apresentado um valor de cálculo de 0,98 Ω . O desvio de 1,23 Ω para este valor é de 0,25 Ω . Embora a comparação seja fraca é aceitável, dados os baixos valores em causa. Procedeu-se a uma segunda comparação, usando a grelha da figura 5.3, enterrada a 0,5 m de profundidade com um solo cuja resistividade do estrato superior é de 100 Ωm , com 0,4 m de espessura, tendo a resistividade do estrato inferior o valor de 186 Ωm . O valor obtido para a resistência da grelha foi de 16,6 Ω , que está 9,2% acima do valor referido em [13] de 15,2 Ω .

Para o cálculo de potencial no estrato superior devido a eléctrodo no estrato inferior, particularmente importante quando se pretende calcular o potencial à superfície, sem o qual não haverá previsão da tensão de passo ou de toque, deve considerar-se de novo a fonte pontual de corrente situada em P_F e integrar a equação (4.12), para se obter o potencial, devido a uma fonte filiforme de corrente, como se fez anteriormente. Como se concluiu no capítulo 4, se a espessura do estrato superior for metade da profundidade de enterramento da fonte pontual, haverá uma singularidade na imagem, à superfície do solo. Neste caso, a diferença de abcissas e de ordenadas entre os dois pontos é nula e a série é dada por um somatório simples de fracções como se viu na equação (4.42), sendo o último parâmetro a cota dos pontos imagem pelo que ao calcular a primitiva se obtém uma série de logaritmos da forma $\log(z-a)$. A singularidade continuará para $z=a$. Dado que o original tem várias gralhas, para se obter uma formulação mais recente, procuraram-se outros autores.

Considere-se um ponto $P(x,y,z)$, representado pelo raio vector r , cujo potencial pode ser calculado usando a equação integral [28]:

$$V(r) = \rho_2 \int_S J(r')G(r,r')dS', \quad (5.46)$$

onde r' é o raio vector do centro do condutor activo ou das suas imagens, G a função de Green, J a densidade de corrente e S' a superfície do eléctrodo de terra. Se o eléctrodo for reduzido ao seu eixo, já que o seu raio é muito menor do que o seu comprimento, o integral de superfície converte-se num integral de linha [91] e, se for considerada a densidade de corrente constante ao longo de comprimento $2L$ do eléctrodo, o seu valor será $I_F/2L$. Nestas condições, o integral da equação (5.46) reduz-se à integração da função de Green devido a uma fonte filiforme de corrente no estrato inferior para se obter o potencial no estrato superior. Assim, para um eléctrodo orientado segundo x , com a primeira imagem em r_1' e as restantes no sentido ascendente em r_2' e no sentido descendente em r_5' tem-se, para o integral definido em 4.56 [28]:

$$V_{21x}(x, y, z, L_F) = \frac{\rho_2 I_F}{2L} \int_{x_F-L}^{x_F+L} \left[\frac{1-K}{4\pi} \left(\frac{1}{|r-r'_0|} + \frac{1}{|r-r'_1|} \right) + \frac{1-K}{4\pi} \sum_{i=1}^{\infty} K^i \left(\frac{1}{|r-r'_2|} + \frac{1}{|r-r'_5|} \right) \right] dx, \quad (5.47)$$

sendo k o coeficiente de reflexão de tensão e:

$$\begin{aligned} |r - r'_0| &= \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (z - z_F)^2}, \\ |r - r'_1| &= \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (z + z_F)^2}, \\ |r - r'_2| &= \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (z - z_F - 2ih)^2}, \\ |r - r'_5| &= \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (z + z_F + 2ih)^2}. \end{aligned}$$

Como facilmente se verifica, as primeiras fracções, que envolvem a norma da diferença de dois raios vectores, podem ser incluídas nos somatórios se eles começarem em zero. O resultado é:

$$V_{21}(x, y, z, L) = \frac{\rho_{eq} I}{4\pi L} \left[\sum_{i=0}^{\infty} K^i F(x - x_A, y - y_A, z - z_A - 2ih) + \sum_{i=0}^{\infty} K^i F(x - x_A, y - y_A, z + z_A + 2ih) \right], \quad (5.48)$$

em que ρ_{eq} é dado por:

$$\rho_{eq} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (5.49)$$

Relembremos a função F para se analisar o domínio:

$$F(t, u, v, L) = \ln \left| \frac{\sqrt{(t+L)^2 + u^2 + v^2} + t + L}{\sqrt{(t-L)^2 + u^2 + v^2} + t - L} \right|. \quad (5.50)$$

Se u ou v forem diferentes de zero, então o radical é sempre maior em módulo do que $t+L$ no numerador ou $t-L$ no denominador, evitando zeros que inviabilizariam o cálculo do logaritmo, no primeiro caso ou o cálculo da fracção no segundo. Se u e v forem nulos, tem-se:

$$F(t, u, v, L) = \ln \left| \frac{|t+L| + t + L}{|t-L| + t - L} \right|, \quad (5.51)$$

pelo que, se $t+L < 0$, então o numerador será nulo e portanto $t < -L$ inviabiliza o cálculo do logaritmo. Por outro lado, se $t-L < 0$, desta vez anula-se o denominador e conclui-se que $t < L$ não permite o cálculo da fracção. Esta última condição é a que deve ser considerada já que engloba a primeira. Assim, os pontos fora do domínio da função devem cumprir as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
 t &< L; \\
 u &= 0; \\
 v &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.52}$$

Considere-se agora o primeiro somatório de (5.58) que representa as contribuições das imagens ascendentes. Relembrando as definições de t , u , v , como ficou definido em (5.6) têm-se:

$$\begin{aligned}
 x - x_F &< L; \\
 y - y_F &= 0; \\
 z - z_F - 2hi &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.53}$$

Deduzem-se agora as seguintes condições para a existência de singularidade:

$$\begin{aligned}
 x &< x_F + L; \\
 y &= y_F; \\
 z &= z_F + 2hi.
 \end{aligned}
 \tag{5.54}$$

Quando se calcula o potencial à superfície $z = 0$, a terceira condição é cumprida para:

$$z_F = -2hi.
 \tag{5.55}$$

Para $i=1$, ou seja, para a primeira imagem acima do eléctrodo, obtém-se a cota de enterramento igual ao dobro da espessura do estrato superior h . É fácil verificar que o ponto central do eléctrodo e das suas imagens, têm a mesma ordenada e a mesma abcissa, pelo que se obtém uma singularidade à superfície para toda a imagem e para os pontos à sua esquerda, ou seja $x < x_F + L$. Para ilustrar esta situação, considere-se um eléctrodo horizontal com 10 m de comprimento, centrado em $(0, 0, -1/2)$, estando a origem das coordenadas à superfície. O estrato superior é gravilha com resistividade de $3 \text{ k}\Omega\text{m}$ e $0,25 \text{ m}$ de espessura, situação típica em subestações, e o estrato inferior tem uma resistividade de $200 \Omega\text{m}$. O eléctrodo é apresentado na figura 5.7 [91], em que a espessura do estrato superior está referenciada como D , tendo-se nesta tese usado o parâmetro h .

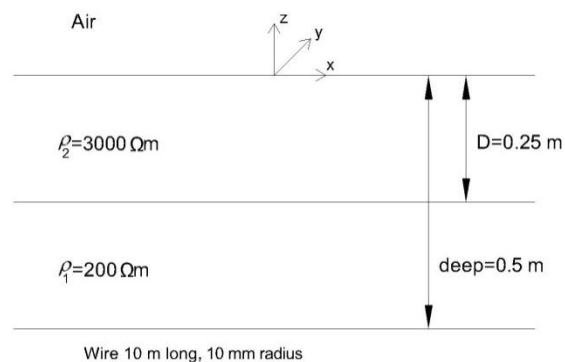


Fig. 5. 7 Eléctrodo nas condições de gerar singularidade

As curvas equipotenciais no plano vertical, que contém o cabo, apresentam-se na figura 5.8, restringidas ao estrato superior. Como se verifica, as curvas de nível não intersectam a

superfície à esquerda da imagem, situada na superfície do solo, como mostra a zona a branco na figura 5.8 [91].

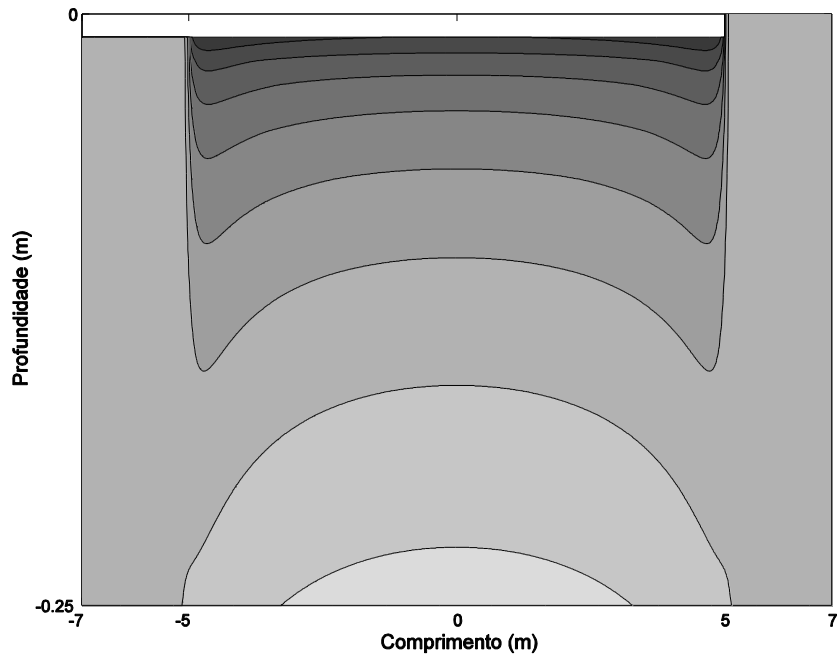


Fig. 5. 8 Equipotenciais no estrato superior

As curvas equipotenciais à superfície, apresentam-se na figura 5.9 [91], estando expandidas sobre as extremidades do condutor de terra. Como se verifica, as curvas fecham-se sobre a extremidade direita da imagem mas não sobre a esquerda.

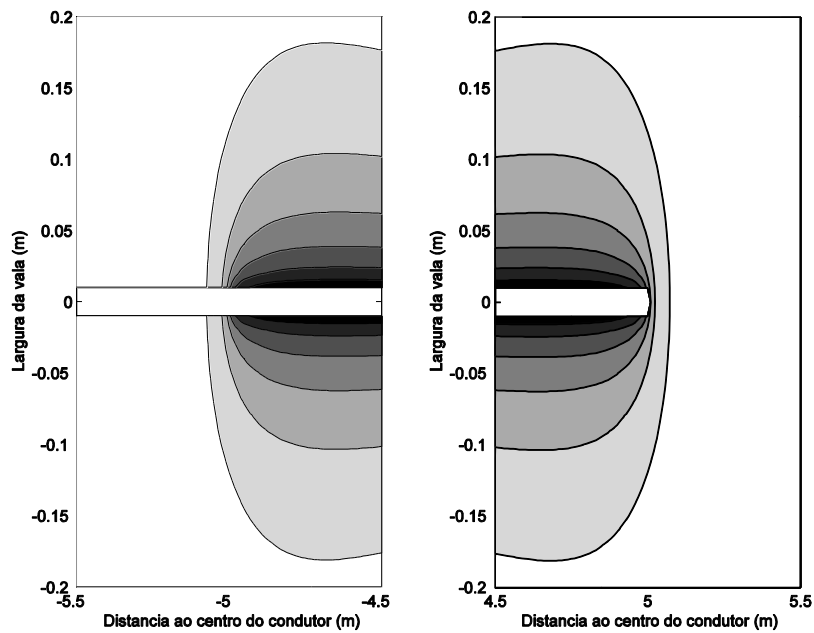


Fig. 5. 9 Equipotenciais à superfície

Os valores do potencial à superfície, à esquerda da imagem, podem ser calculados por simetria, usando os valores equidistantes do centro da imagem que estão à direita, mas ficam

por calcular os potenciais dos pontos sobre a imagem. Alterou-se a espessura do estrato superior, fugindo à condição de singularidade, para 0,2 m e apresentam-se as curvas equipotenciais na figura 5.10 [91], verificando-se que a barra branca deixa de estar à superfície, que indica a zona onde o cálculo não pode ser efectuado, porque é uma segunda imagem relativamente ao plano $z=0$, da primeira imagem gerada pelo plano $z=-0,2$ m. As linhas equipotenciais satisfazem a equação de Neumann para a superfície do solo, já que são perpendiculares à superfície, garantindo que o vector densidade de corrente eléctrica só tem componentes horizontais. Contudo, os padrões de cinzento mais carregado, em 5 e -5, significam extremos da função do potencial à superfície, o que não faz sentido. O potencial de superfície deve decair monotonamente como se viu por exemplo na figura 4.7. Uma solução para ultrapassar este problema é calcular o potencial na superfície de separação entre camadas como uma aproximação ao potencial à superfície, bem como variar a espessura do estrato superior, normalmente estimada com alguma ambiguidade [91].

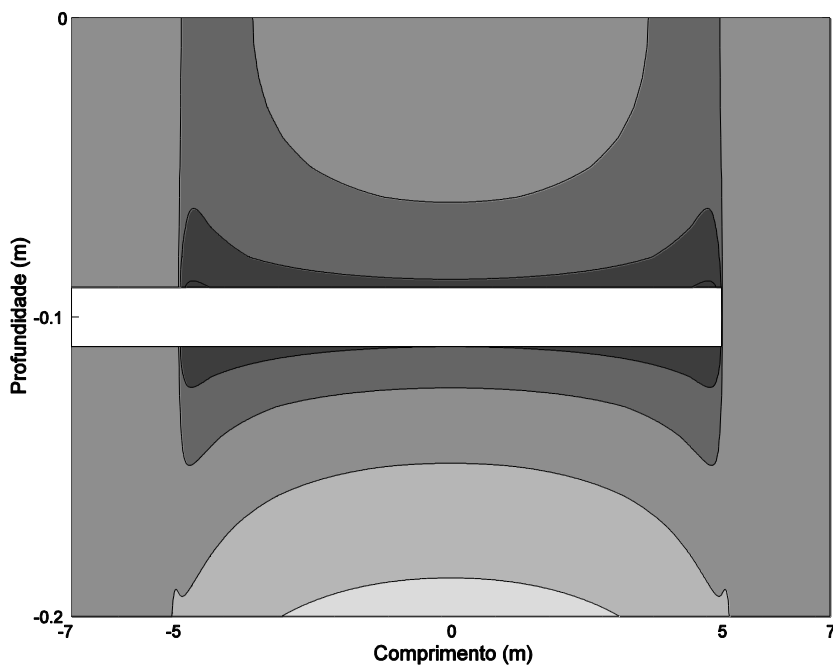


Fig. 5. 10 Equipotenciais em profundidade para uma espessura de 0,2 m

Na figura 5.11 [91], apresenta-se o potencial na superfície de separação de camadas, como uma aproximação ao potencial à superfície, sobre o eixo da trincheira, para duas espessuras do estrato superior, uma maior e outra menor, relativamente ao valor original de 0,25 m. As curvas estão tão próximas que é indiferente a escolha de uma delas, pelo que se consideram aceitáveis as duas aproximações ao potencial de superfície. No capítulo seguinte far-se-á uma comparação do cálculo de potencial, usando estas aproximações, com o método dos elementos finitos que valida a curva ilustrada em 5.11.

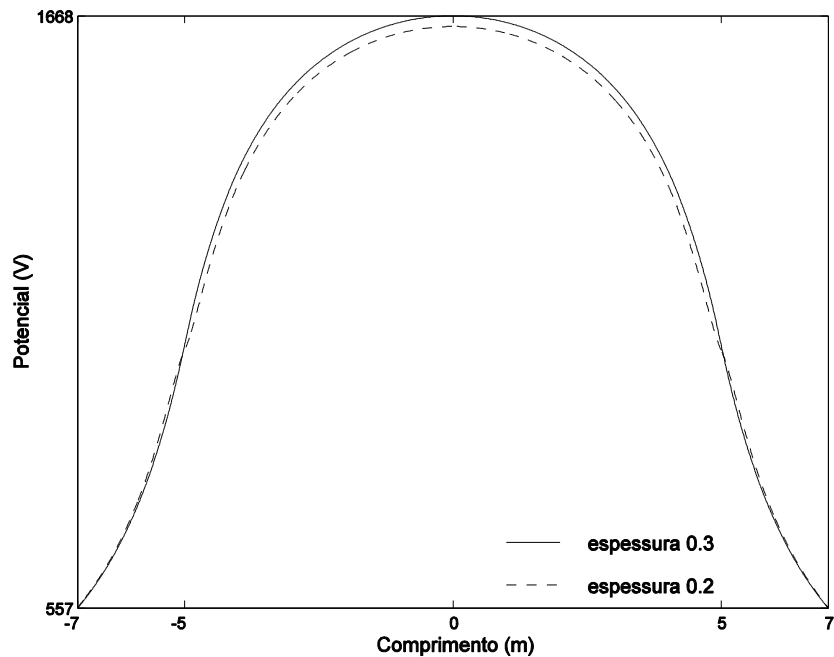


Fig. 5. 11 Potencial de superfície para duas espessuras do estrato

A espessura do estrato superior foi variada de 0,15 a 0,35 m. Abaixo deste intervalo, o somatório responsável pelas imagens ascendentes tem valor negativo, o que não tem significado, e para valores superiores ao intervalo definido, as curvas da figura 5.11 afastam-se, tornando a escolha aleatória. Dado que as profundidades típicas de enterramento dos eléctrodos estão no intervalo 0,5 a 0,8 m, repetiram-se as simulações neste intervalo, supondo sempre uma espessura do estrato superior, inicialmente metade da profundidade de enterramento, concluindo-se que variações de 5 cm eram suficientes para se obterem curvas como as ilustradas na figura 5.11, tendo-se chegado às mesmas conclusões. Finalizou-se o estudo do potencial à superfície, usando a grelha da figura 5.3, colocada a 0,5 m de profundidade, num solo cuja resistividade do estrato superior é de $100 \Omega\text{m}$, com 0,4 m de espessura, tendo a resistividade do estrato inferior o valor de $186 \Omega\text{m}$. Como se está longe de uma situação de singularidade à superfície, o método permite calcular facilmente o potencial no estrato superior.

O potencial à esquerda do eixo da imagem foi obtido por simetria, usando o potencial dos pontos equidistantes do centro da imagem que se encontram à direita. As linhas equipotenciais no plano vertical, que contém o condutor central do eléctrodo de terra, apresentam-se na figura 5.12 [91], sendo visível a primeira imagem superior ao eléctrodo, reflectida pelo plano de separação de camadas, com uma cota de -0,3 m.

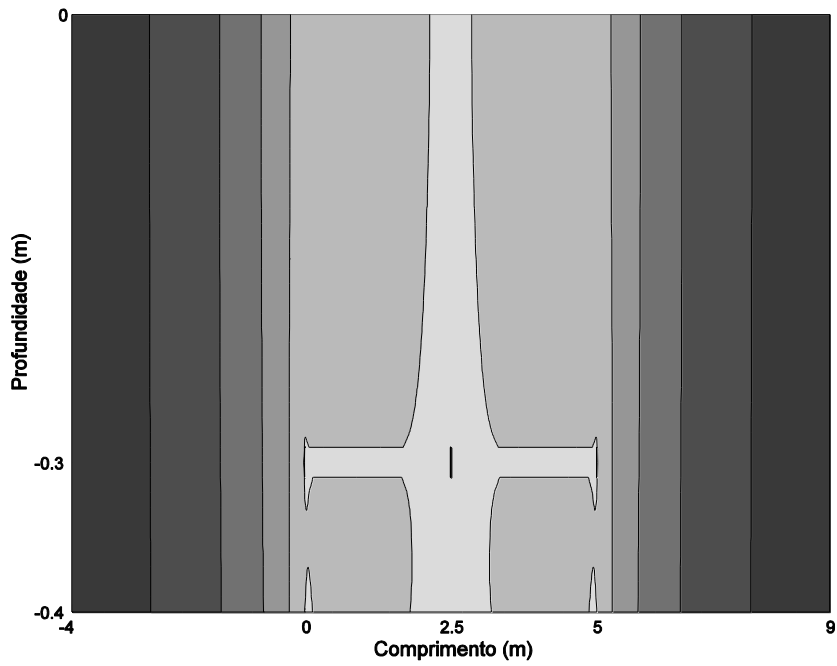


Fig. 5. 12 Potencial no plano vertical de grelha

O potencial à superfície, para a grelha enterrada, apresenta-se na figura 5.13 [91].

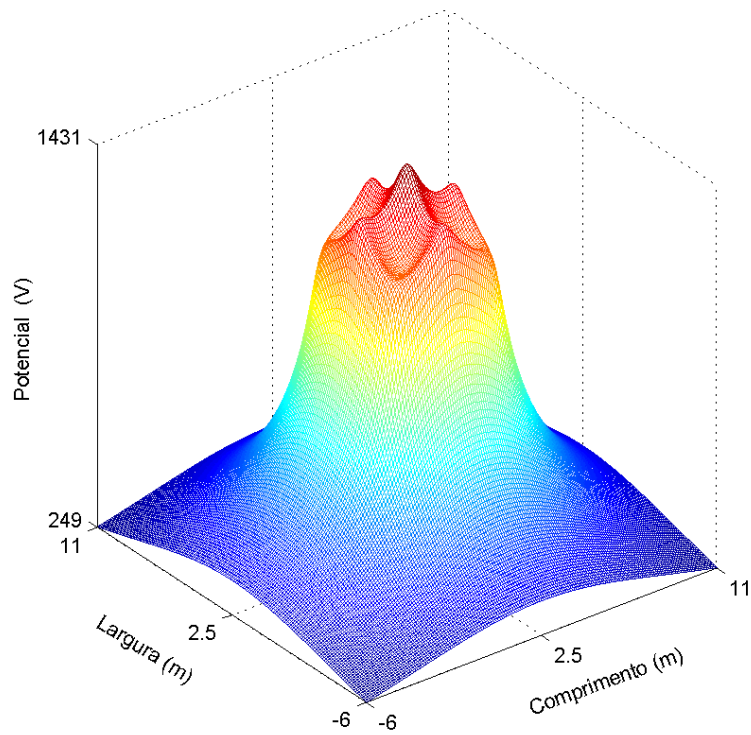


Fig. 5. 13 Potencial à superfície devido a grelha de terra

5.3 Vara nos dois estratos

O cálculo da resistência de uma vara que atravessa os dois estratos, segue a metodologia apresentada no capítulo anterior, secção 3, que dá origem a um sistema com duas equações se a discretização for de um segmento por camada. O sistema pode ser representado por uma matriz de resistências mútuas, cujos termos diagonais são as resistências próprias dos segmentos da discretização e cujos termos não diagonais constituem a resistência mútua entre os dois segmentos. É, precisamente, esta última fórmula que falta deduzir e analisar. O potencial num ponto genérico $P(x,y,z)$ do estrato inferior é dado por (5.48), com a rotação de índices para segmentos verticais dada por (5.15). O potencial médio, gerado num segmento vertical no estrato superior de comprimento $2L_2$, é dado por:

$$V_{1z2z}(x_a, y_a, z_a) = \frac{1}{2L_2} \int_{z_a-L_2}^{z_a+L_2} V_{12}(x_F, y_F, z_F, L_1) dz. \quad (5.56)$$

Como se trata de segmentos colineares a primitiva de F será H e o resultado é:

$$V_{1z2z}(x_a, y_a, z_a) = \frac{\rho_e}{8\pi L_2 L_1} \left[\sum_{i=0}^{\infty} K^i H(t, u, z_a - z_F - 2hi, L_2, L_1) + \sum_{i=0}^{\infty} K^i H(t, u, z_a + z_F + 2hi, L_2, L_1) \right], \quad (5.57)$$

sendo t a diferença de abcissas e u a diferença de ordenadas dos centros dos dois segmentos. No primeiro somatório, o terceiro argumento pode escrever-se na forma $z_a - (z_F + 2hi)$ em que este último parêntesis representa a cota das imagens ascendentes, já que o seu valor cresce com a variável de controlo do somatório i . Ao invés, o segundo somatório representa as imagens descendentes.

Como se verificou no capítulo anterior, o método da matriz não consegue computar satisfatoriamente a resistência de uma vara em dois estratos, pelo que é de todo o interesse investigar como se comporta o método dos momentos no mesmo cálculo. Foi considerada uma vara de 2 m, com um raio de 8 mm, ilustrada na figura 4.15. A vara foi inicialmente discretizada em dois segmentos, um por camada. O estrato superior tem uma resistividade de 100 Ω m e para o inferior considerou-se um valor de 500 Ω m. Para a espessura do estrato superior, usaram-se valores correspondentes a 25%, 50 % e 75 % do comprimento da vara. A resistividade das camadas foi trocada, permitindo dois conjuntos de simulações com coeficientes de reflexão de tensão k simétricos. Os resultados obtidos apresentam-se na tabela 5.6. Verifica-se, de novo, que para o coeficiente de tensão de $-2/3$, ou para uma espessura de 0,5 m, os resultados têm erros inaceitáveis, quando comparados com a fórmula de Tagg.

Tabela 5. 6 Método dos momentos versus fórmula de Tagg para vara longa

Espessura do estrato h (m)	$k = 2/3$			$k = -2/3$		
	Tagg (Ω)	Simul. (Ω)	Erro (%)	Tagg (Ω)	Simul. (Ω)	Erro (%)
0,5	134	186	38,8	60	42,9	-28,5
1	93,4	103	10,3	77	39,6	-48,6
1,5	72	73,5	2,1	114	65,7	-42,4

Para um coeficiente de reflexão de tensão de $-2/3$ e para $h=1$ m tem-se o pior caso, com um erro de -49% . Melhorou-se a discretização com seis segmentos mas o resultado foi quase igual com um valor de resistência de $40,2\Omega$. Além disso, quando a espessura do estrato superior aumenta, a resistência da vara deveria também aumentar, já que o estrato superior se torna mais grosso, o que não acontece. As semelhanças com a tabela 4.4 são evidentes. O método é baseado numa matriz de resistência mútua, cuja diagonal deve ser dominante já que nela constam as resistências próprias dos segmentos. Numa discretização com dois segmentos, os termos fora da diagonal da referida matriz dependem fortemente da primeira imagem para cima, gerada pelo plano de separação entre as duas camadas, que se sobrepõe ao segmento passivo do estrato superior, originando um valor demasiado alto para coeficientes de reflexão positivos e demasiado baixos, eventualmente negativos, para convergência muito rápida, quando o coeficiente de reflexão de tensão é negativo. Os erros, no primeiro caso, são por excesso e por defeito no segundo. Numa discretização com dois segmentos, os valores calculados fora da diagonal da matriz de resistências mútuas, que constituem metade dos elementos da matriz, estão incorrectos devido ao efeito da primeira imagem. Se um condutor horizontal é acrescentado ao eléctrodo, contribuindo com outro segmento no estrato superior, a matriz referida passará a ter agora nove elementos, em que apenas dois estão errados. A percentagem de termos errados passa de 50% , quando há só uma vara, para 22% com o segmento horizontal acrescentado, explicando-se, assim, porque é que este método dá resultados razoáveis no cálculo da resistência de grelhas com varas incluídas. Por outro lado, se acrescentar uma segunda vara, construindo um eléctrodo em ' π ', introduzem-se mais dois elementos errados fora da diagonal, elevando o número de termos da matriz para 16, o que com quatro elementos errados perfaz 25% do total, pelo que se mantém o interesse em superar esta questão.

A proposta para resolver esta questão é deslocar a imagem sobreposta 10% do comprimento da vara, ou seja $0,2$ m, afastando-a do eixo da vara, que é a zona de singularidade [91]. Este deslocamento, atenua o efeito da singularidade no cálculo da resistência mútua entre segmentos. As simulações iniciais desta seção foram repetidas com esta metodologia, mantendo a discretização simples com um segmento por camada. Os resultados apresentam-se na tabela 5.7 e mostram que, em todos os casos, os erros obtidos são menores do que os erros da tabela 5.6 e muito menores para o coeficiente de reflexão de tensão negativo. Registe-se que os resultados fazem sentido, visto que quando a camada superior, com $k<0$,

fica mais espessa a resistência da vara aumenta. Para $k=2/3$ e $h=0,5$ m, o erro ainda é razoável. O método proposto é aceitável para coeficientes de reflexão de tensão positivos mas ainda inaceitável para valores negativos do referido coeficiente. Recorde-se que o padrão do IEEE aceita um limite máximo para o erro de 25% [83]. A experiência em medidas de campo mostra que os erros por vezes são maiores.

Tabela 5. 7 Efeito do deslocamento de imagens no Método dos momentos.

Espessura do estrato h (m)	$k = 2/3$			$k = -2/3$		
	Tagg (Ω)	Simul. (Ω)	Erro (%)	Tagg (Ω)	Simul. (Ω)	Erro (%)
0.5	134	165	23,1	60	52	-13
1	93.4	101	8,1	77	58	-25
1.5	72	73.2	1,7	114	80	-30

Um teste final à técnica de deslocamento das imagens, consistiu em simular varas de 2 a 12 m, uma gama comum em Portugal, para relações entre espessura do estrato superior e comprimento da vara, de 25%, 50% e 75%. A discretização manteve-se reduzida a dois segmentos. Os resultados obtidos apresentam-se na figura 5.14 [91] e são bons para rácios de 50% e 75% da relação espessura/comprimento. Para rácios de 25%, os erros são geralmente maiores do que 25%, devido a uma grande imagem do segmento inferior que se sobrepõe ao segmento superior, apesar de deslocada 0,2 m deste.

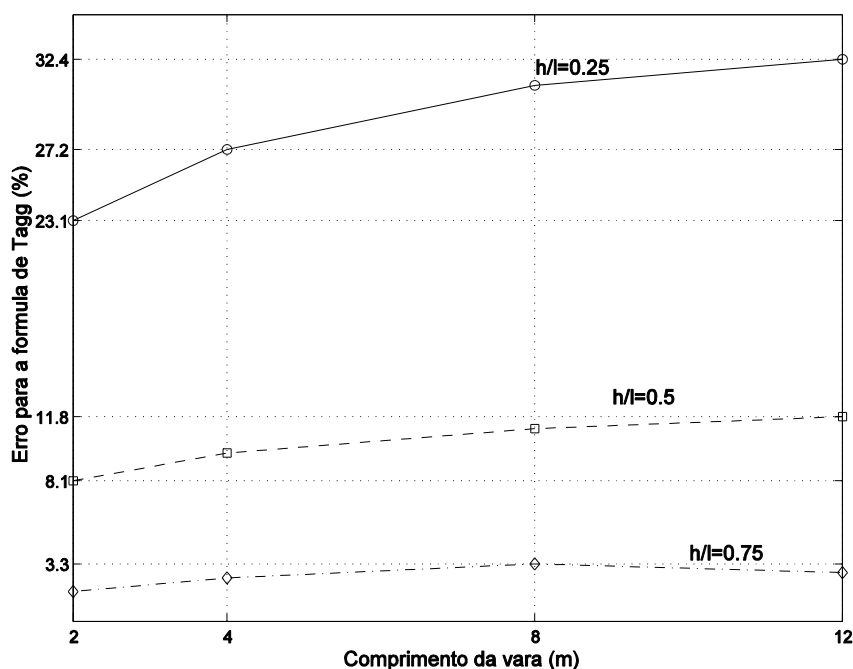


Fig. 5. 14 Variação do erro da resistência para diferentes comprimentos de vara $k>0$.

Adicionalmente, refinou-se a discretização para a curva $h/l=0,25$, em que a espessura está representada por h e l , representa o comprimento da vara e, para o caso em que esta tem 12 m de comprimento, dividiu-se o eléctrodo em 8 partes: 3 no estrato superior com os comprimentos 0,6+1,8+0,6 e 5 no inferior com os comprimentos 1,2+1,8+3+1,8+1,2. O resultado foi de 34,4 Ω . Só com dois segmentos a mesma rotina dá o valor de 34,7 Ω , pelo que não vale a pena refinar a discretização. Conclui-se que a técnica de deslocamento lateral é aceitável para o cálculo de resistência de varas em solos com coeficiente de tensão positivo, para rácios iguais ou maiores do que 50% da relação espessura do estrato para comprimento da vara. Para coeficientes de reflexão de tensão negativos, com erros ainda grandes, conforme se verificou na tabela 5.6 e em que a resistência mútua entre segmentos é por vezes negativa, optou-se por usar o módulo da referida resistência, em vez de deslocar o segmento. Os resultados obtidos com esta aproximação estão todos abaixo dos 20%, mas são por defeito, sendo em engenharia preferíveis os erros por excesso. A figura 5.15 [91] mostra os erros para a fórmula de Tagg para varas até 12 m. Para espessuras do estrato superior, que são menores ou iguais a 50% do rácio espessura/comprimento, a aproximação à fórmula de Tagg é muito boa, com erros em módulo inferiores a 5 %.

Ambas as propostas apresentadas apresentam melhores resultados do que a aplicação simples do método dos momentos. A deslocação da imagem é melhor para $k>0$ e o uso do módulo da resistência mútua é melhor para $k<0$.

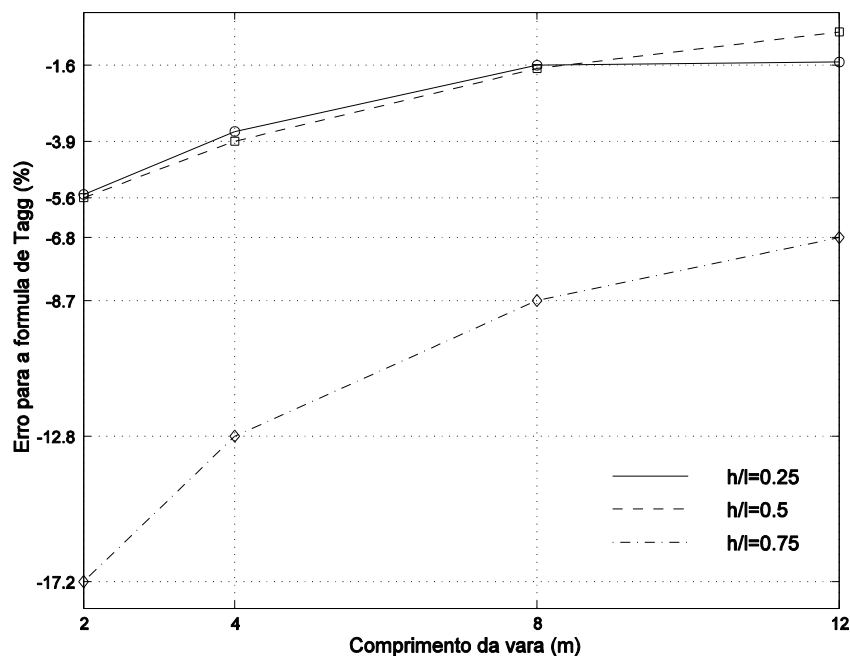


Fig. 5. 15 Variação do erro da resistência para diferentes comprimentos de vara $K<0$.

Registe-se, para finalizar este capítulo, que não foi considerado o caso em que o segmento activo está no estrato superior e o segmento passivo no estrato inferior, já que a resistência

mútua é recíproca [10], ou seja, a matriz de resistências mútuas é simétrica. Por outro lado, não há interesse em calcular potencial em pontos genéricos no estrato inferior, visto que o importante é o cálculo de potencial à superfície.

5.4 Conclusões

Para eléctrodos unidimensionais no estrato superior, o cálculo da resistência do método dos momentos teve sempre erros inferiores a 2 % em módulo. Para grelhas no mesmo estrato, a comparação com os resultados de outros investigadores manteve-se boa, em virtude de os erros nunca excederem os 5 %, em módulo. A comparação do valor da resistência de uma grelha com varas foi excelente, com um desvio de apenas 1,7%.

O teste de eléctrodos em grelha no estrato inferior, revelou piores resultados. A comparação com os valores de Amoruso *e al* revela desvios de 9% por excesso, mas a comparação com investigadores espanhóis [16], que analisaram uma grelha numa subestação, fornece piores resultados, já que se obteve um valor de 1,23 Ω , quando os referidos investigadores obtiveram 0,98 Ω , traduzindo-se este resultado num erro de 25,5%, ultrapassando o limite do padrão do IEEE. Como em [16] a medida divulgada é de 1 Ω , o resultado obtido pelo método dos momentos, por arredondamento, tem erro nulo. Considera-se o modelo aceitável também no estrato inferior.

As singularidades da solução por séries são as imagens dos eléctrodos enterrados no estrato inferior, ou os prolongamentos daquelas. Se as referidas imagens coincidem com a superfície do solo, o que acontece se a profundidade de enterramento for o dobro da espessura do estrato superior, é necessário variar ligeiramente a referida espessura, para se poder calcular o potencial de superfície, ou então, usar o potencial no plano de descontinuidade, onde não há singularidades, suficientemente perto da superfície e equidistantes do eléctrodo e da sua imagem, para constituir uma boa aproximação. Note-se que o cálculo da resistência não é afectado pelas singularidades.

Para varas no estrato superior, as singularidades vão afectar o cálculo da resistência. Sugere-se que se desloque a superfície do segmento superior alguns decímetros, para coeficientes de reflexão positivos e que se use o módulo das resistências mútuas para coeficientes de reflexão negativos. Na primeira sugestão os erros estão perto de 10%, desde que o rácio entre a espessura do estrato superior e o comprimento da vara esteja acima dos 40%. Para rácios de 25%, o método proposto já é inaceitável. Para a segunda sugestão, de usar o módulo das resistências mútuas, os erros são sempre inferiores a 20%, embora por defeito, pelo que se considera a proposta aceitável.

Capítulo 6 - O método dos elementos finitos

Introdução

Este capítulo apresenta o método dos elementos finitos para o cálculo da resistência de uma vara, num solo de dois estratos. São considerados elementos finitos de primeira ordem, no plano rz , devido à simetria axial. As expressões para o potencial, dentro de cada elemento, são deduzidas, tal como as funções interpoladoras, bem como a matriz de rigidez do elemento. A partir da reunião de elementos é, então, obtida a matriz de rigidez global. A energia armazenada é representada matricialmente e também explicitado como se minimiza a referida energia, evitando a solução trivial de potencial nulo. A expressão do campo eléctrico é deduzida e a resistência é calculada pela lei de Joule, somando a energia dissipada por todos os elementos finitos. A zona cilíndrica das malhas desenvolvidas é comparada com as soluções teóricas, para o potencial e a resistência, para as aferir. O cálculo da resistência da vara em solo de dois estratos é considerado, não se tendo verificado as percentagens que o padrão do IEEE apontava para a resistência nos primeiros 3 e 15 cm em solo homogéneo. Finalmente, é analisado o potencial à superfície, no ponto do máximo, provocado por um cabo no estrato inferior.

6.1 O método dos elementos finitos em problemas de simetria axial

O método dos elementos finitos triangulares de primeira ordem, usado na resolução numérica da equação de Laplace, pode considerar-se como "uma generalização das técnicas de aproximação linear por troços" [81], bem conhecido em Engenharia Electrotécnica. Este método apresenta uma grande versatilidade na escolha da topologia das malhas e fácil tratamento das condições de fronteira, bem como das suas geometrias por complexas que sejam. A solução da equação de Laplace, submetida ao valor especificado nas fronteiras do modelo (condições de Dirichlet) e à exigência da derivada da solução ser tangencial aos planos de simetria (condição de Neumann) é equivalente, segundo o conhecido princípio do mínimo de energia potencial, à minimização da funcional de energia representada pela equação (2.16) [81]. Para calcular a distribuição de potencial em torno de uma vara, representada na figura 2.1, o método utiliza uma solução numérica aproximada, tirando partido da isotropia do meio, sendo suficiente discretizar o modelo segundo um plano que contenha o eixo do eléctrodo. Além disso, devido à simetria, basta discretizar metade dessa região. Esta é dividida em elementos finitos triangulares, como se exemplifica na figura seguinte 6.1 (dimensões alteradas para facilidade de visualização). A densidade de elementos junto à vara é maior, porque também é maior a densidade de corrente. A discretização foi

feita no plano rz , considerando-se a origem à superfície, coincidindo com o topo da vara. Foram usadas coordenadas cilíndricas. O modelo completo encontra-se na figura 2.6.

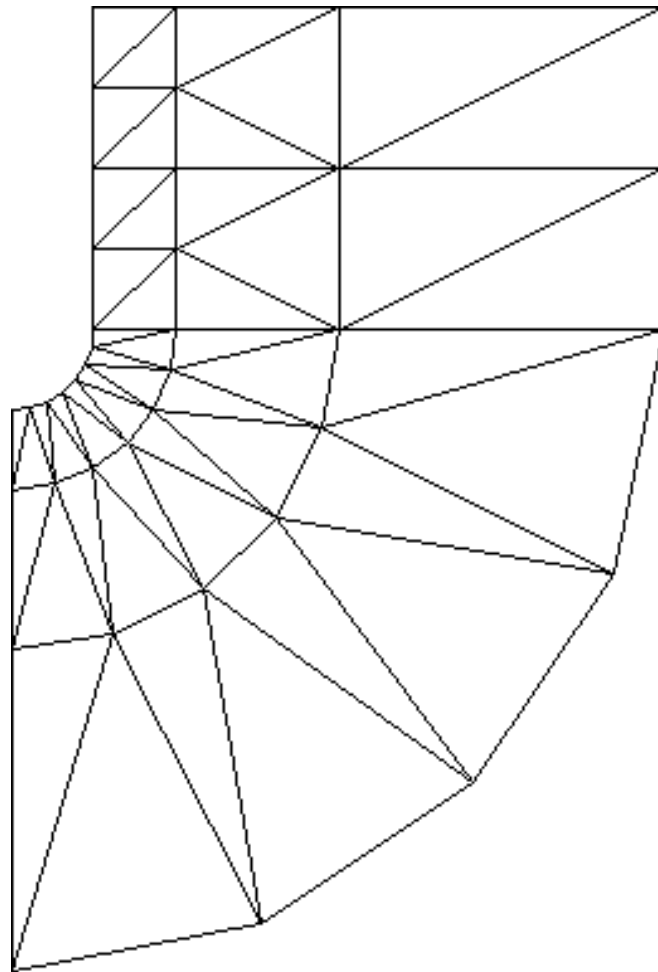


Fig. 6. 1 Malha de elementos finitos na ponta inferior da vara

6.1.1 Elementos triangulares de primeira ordem

Seja o elemento genérico de coordenadas dos vértices (r_1, z_1) , (r_2, z_2) e (r_3, z_3) :

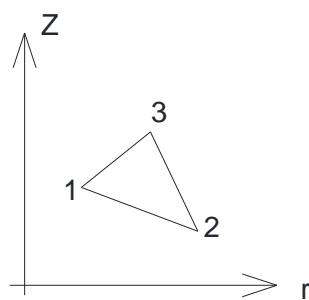


Fig. 6. 2 Elemento finito triangular

Segundo Silvester e Ferrari ([81], pag 28) "A essência do método reside primeiro na aproximação do potencial, dentro de cada elemento de uma forma padronizada, e depois na distribuição do potencial nos vários elementos de modo a obrigá-los a serem contínuos nas fronteiras entre elementos". Essa padronização é feita usando um polinómio de primeira ordem, derivando daqui o nome de elementos finitos triangulares de primeira ordem. Assim, dentro de cada elemento, o potencial será dado por [81]:

$$u(r, z) = m + nr + oz, \quad (6.1)$$

sendo esta a solução aproximada à verdadeira função, dentro do elemento finito em causa. A solução real é, assim, aproximada por uma solução "facetada". Note-se que o potencial num lado de um elemento finito é uma interpolação linear entre os potenciais dos vértices. A equação (6.1) deverá satisfazer os valores dos potenciais nos vértices. Aplicando-a aos três nodos, obtém-se um sistema que permite calcular as constantes m , n e o em função daqueles potenciais.

$$\begin{aligned} U_1 &= m + nr_1 + oz_1; \\ U_2 &= m + nr_2 + oz_2; \\ U_3 &= m + nr_3 + oz_3. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Usando a regra de Cramer, obtém-se para m :

$$m = \frac{\begin{vmatrix} U_1 & r_1 & z_1 \\ U_2 & r_2 & z_2 \\ U_3 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}}. \quad (6.3)$$

O determinante do denominador é o dobro da área do elemento finito, $2A$ [81]. Esta dedução é obtida por integração, pelo que o resultado só é positivo se os nodos forem numerados no sentido directo. De modo semelhante, obtém-se as expressões para n e o . A equação (6.1) é usada no cálculo de grandezas derivadas, como por exemplo o campo eléctrico, a fase chamada de pós-processamento no método dos elementos finitos. Contudo, neste ponto desta breve exposição, em que as tais constantes são desconhecidas, há toda a vantagem em apresentar a equação (6.1) em função dos potenciais nodais. Substituindo as expressões obtidas para m , n e o na equação referida e evidenciando U_1 , U_2 e U_3 , obtém-se:

$$u = \left\{ \begin{aligned} &[(r_2 z_3 - r_3 z_2) + (z_2 - z_3)r + (r_3 - r_2)z]U_1 + \\ &[(r_3 z_1 - r_1 z_3) + (z_3 - z_1)r + (r_1 - r_3)z]U_2 + \\ &[(r_1 z_2 - r_2 z_1) + (z_1 - z_2)r + (r_2 - r_1)z]U_3 \end{aligned} \right\} / 2A. \quad (6.4)$$

Os factores que multiplicam os potenciais U_i , depois de divididos por $2A$, são polinómios do primeiro grau chamados funções de interpolação, pelo que se pode escrever a equação anterior na forma:

$$u(r, z) = \alpha_1(r, z)U_1 + \alpha_2(r, z)U_2 + \alpha_3(r, z)U_3, \quad (6.5)$$

ou mais sucintamente [81]:

$$u(r, z) = \sum_{i=1}^3 U_i \alpha_i(r, z). \quad (6.6)$$

Estas funções, chamadas interpoladoras, têm duas propriedades importantes, que facilmente se verificam: Em primeiro lugar, valem 1 no vértice nodal associado e 0 nos outros vértices, e em segundo, num ponto qualquer dentro do elemento finito a soma das três funções é 1.

A energia associada a um elemento finito pode agora ser calculada. A região de integração em (2.16) é o volume de revolução gerado por esse elemento, quando roda 360° em torno do eixo de simetria, ou seja do eixo do eléctrodo. Contudo, primeiro é preciso calcular o gradiente do potencial. Os potenciais nodais, sendo valores desconhecidos, são constantes, pelo que, calculando o gradiente de (6.6) se obtém [82]:

$$\vec{\nabla} u = \sum_{i=1}^3 U_i \vec{\nabla} \alpha_i(r, z). \quad (6.7)$$

A funcional de energia para o elemento em questão, representada por (2.16) e considerando que a expressão integranda terá 9 termos, devido ao quadrado do gradiente, pode representar-se sucintamente por [82]:

$$W^e(u) = \frac{1}{2} \iiint_{V_{rev}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_i U_j \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dV_{rev}. \quad (6.8)$$

Como o integral da soma é a soma dos integrais tem-se:

$$W^e(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_i \iiint_{V_{rev}} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dV_{rev} U_j, \quad (6.9)$$

definindo a variável S da seguinte maneira [81]:

$$S_{ij} = \iiint_{V_{rev}} \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dV_{rev}. \quad (6.10)$$

Como as funções interpoladoras são polinómios do primeiro grau, os gradientes destas são constantes, tal como o produto interno, pelo que o integral conduz ao cálculo do volume do elemento de revolução em causa e que vale $2\pi r_c A$, sendo r_c o raio do centróide do elemento finito em causa. Considera-se que o eixo dos z coincide com o eixo do eléctrodo. Assim, as expressões finais para S_{ij} são [92]:

1) para índices iguais :

$$S_{11}^e = \frac{(z_2 - z_3)^2 + (r_2 - r_3)^2}{2A} \pi r_c; \quad (6.11)$$

2) para índices diferentes :

$$S_{12}^e = \frac{(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) + (r_3 - r_2)(r_1 - r_3)}{2A} \pi r_c. \quad (6.12)$$

Os restantes termos S_{22} , S_{33} , S_{13} e S_{23} , obtêm-se por rotação cíclica dos índices.

O valor da funcional poderá, agora, ser representado de uma forma elegante, pela equação (2.17).

6.1.2 Reunião de elementos

A energia total do modelo é o somatório das energias de todos os elementos finitos. Esta formulação deve, contudo, garantir a continuidade do potencial eléctrico quando se passa de um elemento finito para um vizinho. Considerem-se os dois elementos da figura 6.3 com uma numeração local, também chamada disjunta.

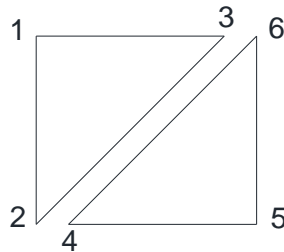


Fig. 6. 3 Numeração local de nodos de elementos finitos

O vector de potenciais nodais é:

$$U_{dis}^T = \left[U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \right], \quad (6.13)$$

em que os três primeiros componentes respeitam ao primeiro elemento finito e os três últimos se referem ao segundo. A matriz S_{dis} será formada pelas matrizes elementares dos dois elementos, ou seja [81]:

$$S_{dis} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Esta matriz tridiagonal tem o nome de matriz de Dirichlet [81]. Assim, a funcional de energia dos dois elementos é representada pela seguinte expressão [81]:

$$W(u) = \frac{1}{2} U_{dis}^T S_{dis} U_{dis}. \quad (6.15)$$

O facto de o requisito do potencial ser contínuo, obriga a que os potenciais associados a vértices correspondentes sejam iguais, pelo que os potenciais nos vértices 3 e 6 terão que ser iguais, tal como em 2 e 4, como se verifica na figura 6.3. Deve, então, ser definida uma numeração global ou conjunta para a reunião destes dois elementos ilustrada na figura 6.4.

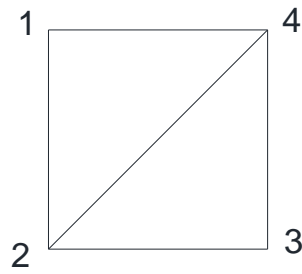


Fig. 6. 4 Numeração nodal global

A igualdade do potencial, nos vértices correspondentes, será garantida por uma transformação linear simples, que relaciona a numeração disjunta com a numeração conjunta. Especificamente para este exemplo obtém-se:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}_{dis} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}_{conj}, \quad (6.16)$$

Ou mais genericamente [81]:

$$U_{dis} = CU_{conj}. \quad (6.17)$$

Esta transformação linear, a introduzir em (6.15), é a responsável pela continuidade do potencial eléctrico na solução numérica, obtendo-se (2.18). Para evitar a solução trivial $U=0$, na equação (2.29), deve-se particionar a matriz S em blocos, tal como o vector dos potenciais nodais U [81].

$$\begin{bmatrix} S_n & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ U_k \end{bmatrix} = 0, \quad (6.18)$$

sendo U_n o vector formado pelos potenciais desconhecidos e U_k o vector dos potenciais conhecidos. Esta partição obriga-nos a numerar, primeiro os nodos cujos potenciais são desconhecidos e, no final, os nodos da fronteira de Dirichlet. Esta imposição é, obviamente, válida para a numeração conjunta. As dimensões de S_n e S_k , devem permitir o produto de matrizes. A solução para o vector dos potenciais desconhecidos é, finalmente, dada por:

$$U_n = -S_n^{-1}S_k U_k. \quad (6.19)$$

O método dos elementos finitos possui outras variantes, sendo esta chamada "aproximação à energia armazenada" [82]. Note-se que a matriz S depende apenas das coordenadas dos elementos finitos e o vector U_k depende da condição na fronteira, pelo que (6.19) é resolúvel a partir destes dados. Os elementos finitos não devem ter ângulos [93] menores do que 5°

porque tal está associado a áreas muito pequenas que afectam negativamente o cálculo do sistema (6.19). Sabidos os potenciais nodais, os coeficientes m , n e o são imediatos, usando a regra de Cramer, como na equação (6.3). O campo eléctrico é, então, calculado a partir de (6.1) obtendo-se:

$$\vec{E} = -n\hat{i} - o\hat{j}. \quad (6.20)$$

6.2 Vara em solo homogéneo

Uma vara de terra foi modelizada, considerando apenas os primeiros 3 cm de solo em torno do eixo da vara já que 25% da resistência da vara estão nesta região do solo envolvente [2]. Assim, evita-se a discretização de todo o modelo com a fronteira Dirichlet de zero volt a 7,6 m, multiplicando a resistência obtida por 4, para se obter o valor final. Para testar a malha desenvolvida, que permite maior densidade de elementos junto à vara, conforme se pode verificar na figura 6.1, foi considerada apenas a região cilíndrica da vara. Este problema tem solução teórica, visto que se trata de calcular o potencial entre dois cilindros carregados e coaxiais. O cilindro interno tem como raio e da vara, e o cilindro externo tem 3 cm de raio e está a um potencial de zero volt. O potencial em qualquer ponto entre as superfícies cilíndricas é fácil de obter e é dado por:

$$v(r) = \frac{V_0}{\ln q} \ln \frac{e}{r}, \quad (6.21)$$

sendo e o raio do cilindro exterior, q , o quociente entre o raio do cilindro exterior e o raio do cilindro interior, V_0 , a diferença de potencial entre as superfícies cilíndricas e r a distância ao eixo comum. Com as dimensões indicada $e=0,03$ m, $q=3,75$ e $V_0 = 220$ V, a equação (6.21) fica com o seguinte aspecto:

$$v(r) = 166,4 \ln \frac{0,03}{r}. \quad (6.22)$$

O tipo de malha usado ilustra-se na figura 6.5, para 3 cm de vara.

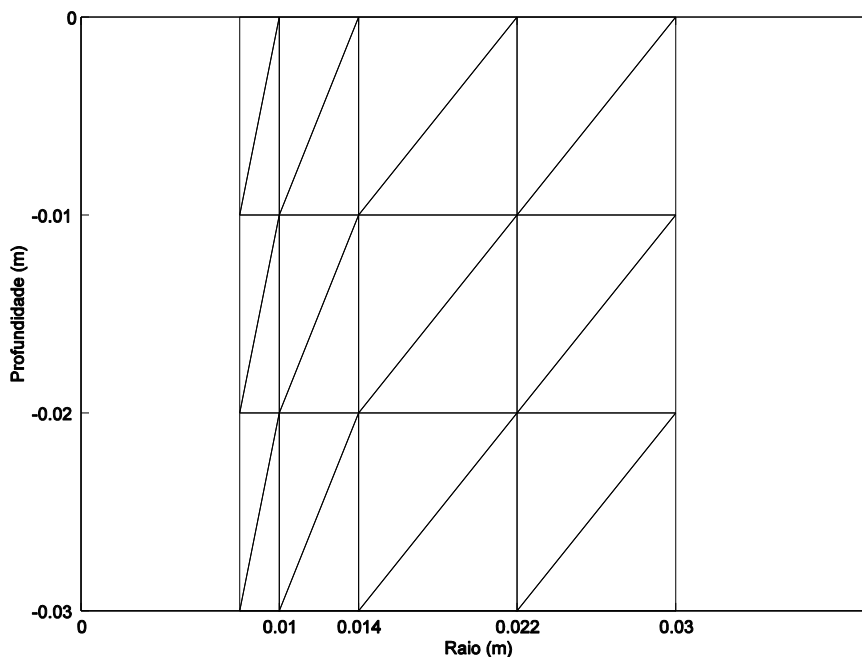


Fig. 6. 5 Discretização da zona cilíndrica

O potencial eléctrico foi calculado pelo método dos elementos finitos ao longo de uma paralela às superfícies, distando 1 cm do eixo, ou seja, a 2 mm da superfície electricamente carregada. A variação do potencial ilustra-se na figura 6.6 e é praticamente constante, excepto nos topos, como se esperava.

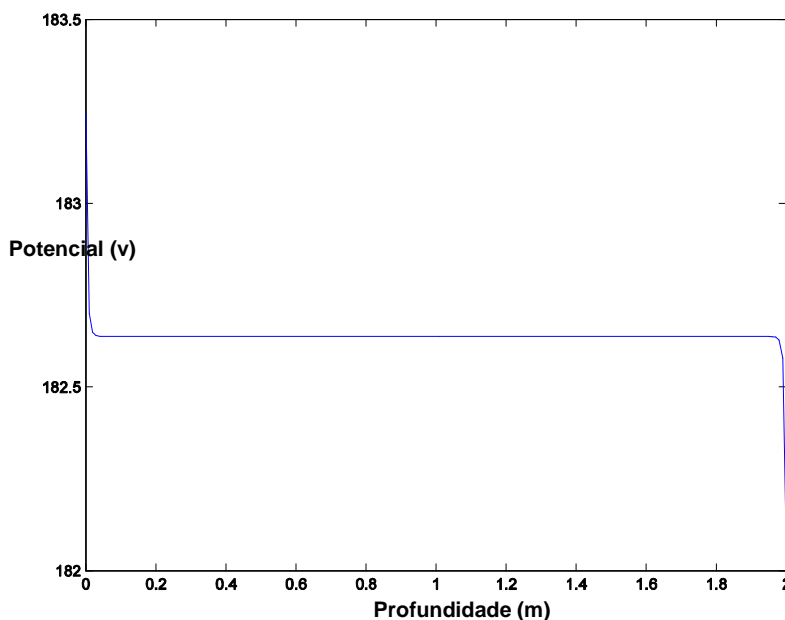


Fig. 6. 6 Potencial a 1 cm de distância ao eixo

Note-se que a escala da figura é muito pequena. O primeiro ponto tem um potencial de 183,2V e o último tem um valor de 182,1 V. O processo repetiu-se para distâncias de 0,014 e 0,021 m, constando os resultados na tabela 6.1.

Tabela 6. 1 Variação do potencial com a distância em superfícies cilíndricas.

Distancia (m)	Valor teórico (Volt)	Valor médio (Volt)	Erro da média (%)	Erro máximo (%)
0.01	182.9	182.6	-0.2	-0.4
0.014	126.9	126.6	-0.2	-0.6
0.021	59.4	59.3	-0.2	-0.2

Os gráficos de potencial para as distâncias de 0,014 e 0,021 m, são idênticos aos da figura 6.6. Conclui-se que a malha está adaptada em tensão.

Para calcular a resistência entre os dois cilindros foi usada a aproximação energética pelo método dos elementos finitos dada por [93]:

$$R = \frac{v^2}{P_{JOULE}} = \frac{v^2}{\sigma \int_V |E|^2 dV}, \quad (6.23)$$

em que v é a diferença de potencial entre cilindros, definida quando se considerou a fronteira Dirichlet, σ a condutividade do solo entre os dois cilindros, E a intensidade do campo eléctrico e V o volume de revolução gerado por cada elemento finito. O valor obtido para a resistência eléctrica entre os dois cilindros foi de 20,8 Ω , considerando uma resistividade eléctrica do meio de 200 Ωm . Aquele valor deve ser comparado com o valor teórico da resistência entre dois cilindros dado por [94]:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln q, \quad (6.24)$$

sendo ρ a resistividade eléctrica, ' l ' o comprimento dos cilindros e o parâmetro ' q ' definidos para a equação (6.21). Para o caso considerado, o valor teórico e usando (6.24), é de 21,0 Ω , pelo que o valor de 20,8 Ω tem um erro inferior a 1%, o que permite concluir que a malha também está adaptada em energia.

Quando se considera o modelo completo, a corrente na ponta teve que ser considerada pelo que aquela zona foi modelizada, de forma muito simples, conforme mostra a figura 6.7.

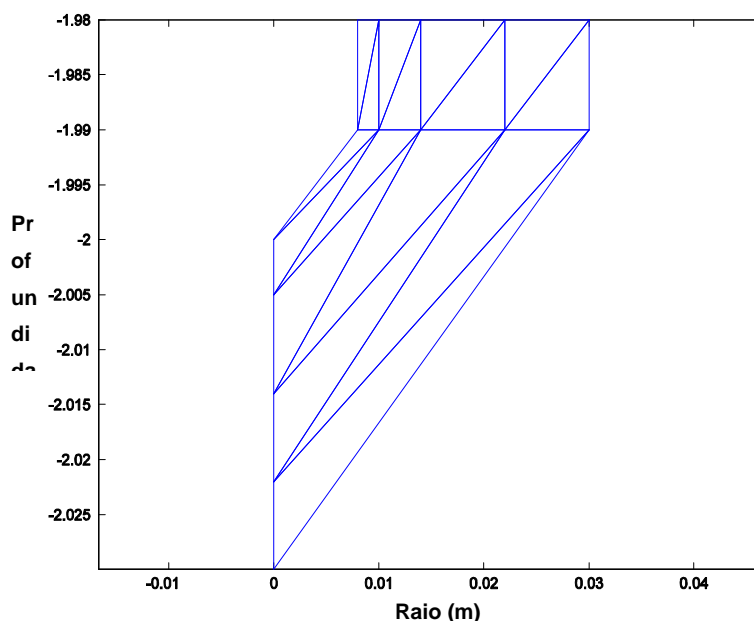


Fig. 6. 7 Modelização da ponta da vara com a equipotencial de zero volt a 3 cm

Com esta alteração o modelo passou de 1600 para 1608 elementos finitos, pelo que o resultado da resistência calculada por este método foi praticamente igual ao valor obtido exclusivamente com a malha cilíndrica. Para uma vara de 2 m a fórmula de Dwight [3], fornece um valor de 94 Ω . O quadruplo do valor obtido na solução por elementos finitos é 83,2 Ω , (4x20,8), pelo que o erro para Dwight é de 11 Ω . Ora, o referido padrão do IEEE [3] indica que a fórmula de Dwight tem um erro de 13 a 15% por excesso e 11 Ω tem um excesso de 13% para o valor de 83,2 Ω , obtendo-se o valor estimado por Dwight. O resultado é muito bom. Adicionalmente, confirma-se que 25% da resistência da vara está nos primeiros 3 cm de solo que a rodeia, conforme especifica o padrão do IEEE.

6.3 Vara em solo de dois estratos

Num solo de duas camadas, a equação de Laplace deve ter em conta a mudança de condutividade no solo, pelo que fica [95]:

$$\sigma \nabla^2 u = 0, \quad (6.25)$$

sendo σ a condutividade e u o potencial. As matrizes elementares S^e são multiplicadas pela condutividade associada a cada elemento. Como no exemplo anterior, supôs-se inicialmente que a fronteira Dirichlet de 0 volts estava a 3 cm do eixo da vara, para se verificar a percentagem de resistência associada aos primeiros 3 cm num solo de dois estratos. Os resultados para uma vara de 2 m de comprimento, 8 mm de raio, enterrada ao nível do solo com uma resistividade do estrato superior de 100 Ωm , e uma resistividade do estrato inferior de 500 Ωm , estão sumariados na tabela 6.2 para diferentes espessuras do estrato superior. Os valores teóricos de comparação para a resistência da vara são fornecidos pela forma de Tagg, verificando-se que nos primeiros 3 cm a percentagem de resistência é perto de 19%. Mudando

as resistividades dos dois estratos obteve-se um coeficiente de reflexão de tensão de $-2/3$ e a percentagem de resistência subiu para os 22 ou 23 %, considerando o valor dado pela fórmula de Tagg, conforme se pode verificar na tabela 6.3.

Tabela 6. 2 Variação da resistência, com a espessura do estrato nos 3 cm iniciais ($k=2/3$)

Espessura do estrato sup. (m)	Resistência teórica (Ω)	Valores por FEM (Ω)	Erro da resistência para Tagg(%)
0.5	134	26,0	19
1.0	93.4	17,4	19
1.5	72.0	13,0	18

Tabela 6. 3 Variação da resistência, com a espessura do estrato nos 3 cm iniciais ($k=-2/3$)

Espessura do estrato sup. (m)	Resistência teórica (Ω)	Valores por FEM (Ω)	Erro da resistência p/ Tagg(%)
0.5	60	13,0	22
1.0	77	17,3	22
1.5	114	26,0	23

O mesmo procedimento foi repetido, considerando a fronteira Dirichlet de zero volt nos 15 cm. A modelização da ponta do eléctrodo foi alterada, conforme se pode ver na figura 6.1. Os resultados apresentam-se nas tabelas 6.4 e 6.5.

Tabela 6. 4 Variação da resistência, com a espessura do estrato nos 15 cm iniciais ($k=2/3$)

Espessura do estrato sup. (m)	Resistência teórica (Ω)	Valores por FEM (Ω)	Erro da resistência para Tagg(%)
0.6	124	52	42
1.2	83	34	41
1.8	63	25	40

Tabela 6. 5 Variação da resistência, com a espessura do estrato nos 15 cm iniciais ($k=-2/3$)

Espessura do estrato sup. (m)	Resistência teórica (Ω)	Valores por FEM (Ω)	Erro da resistência para Tagg(%)
0.6	63	30	48
1.2	89	43	48
1.8	162	77	48

Os valores indicados pelo padrão do IEEE não são verificados. Finalmente, todo o modelo do referido padrão do IEEE para a vara de terra foi discretizado, conforme mostra a figura 2.6. Refira-se que o processo de validação da malha na zona cilíndrica também foi usado na região hemisférica. Para validar a malha global foi considerado um solo homogéneo com uma condutância de $0,005 \text{ S/m}$. O valor obtido para a resistência, pelo método aqui apresentado, foi de 87Ω . Se este valor for aumentado em 13% o resultado é de 98Ω quando a fórmula de

Dwight, que tem, segundo o referido padrão do IEEE, um acréscimo de 13% sobre o valor real, indica uma resistência de 94Ω . O erro rondará os 5% pelo que a malha pode, agora, ser usada com estratos diferentes, já que está devidamente validada. Para a primeira simulação considerou-se um coeficiente de reflexão de tensão de $2/3$ com os valores de resistividade já indicados, para a vara de 2 m. Os resultados apresentam-se na tabela 6.6:

Tabela 6. 6 Variação da resistência com a espessura do estrato, modelo do IEEE, ($k=2/3$)

Espessura do estrato sup. (m)	Resistência teórica (Ω) (Tagg)	Valores por FEM (Ω)	Erro para Tagg (%)
0,5	134	118	-12
1,5	93	81	-13
2,0	72	62	-14

Trocando as resistividades dos estratos, obtém-se um coeficiente de reflexão de tensão simétrico ao anterior. Os resultados ilustram-se na tabela 6.7:

Tabela 6. 7 Variação da resistência com a espessura do estrato, modelo do IEEE, ($k=-2/3$)

Espessura do estrato sup. (m)	Resistência teórica (Ω) (Tagg)	Valores por FEM (Ω)	Erro para Tagg (%)
0,5	60	53	-13
1,5	77	67	-13
2,0	114	93	-18

Os erros estão no intervalo de -18% a -12%. O método dos elementos finitos apresenta resultados aceitáveis, com o senão de serem por defeito. Note-se que o erro máximo que o padrão do IEEE aceita é de 25 %, como já tem sido referido neste trabalho.

Para mostrar as capacidades de pós-processamento do método, apresentam-se as curvas equipotenciais na figura 6.8, para uma vara de terra de 2 m de comprimento, raio de 8 mm, num solo de resistividade de $1734 \Omega\text{m}$ para o estrato superior, $94,5 \Omega\text{m}$ para o estrato inferior e 1,5 m de espessura para o estrato superior. A resistência obtida pelo método dos elementos finitos foi de 113Ω .

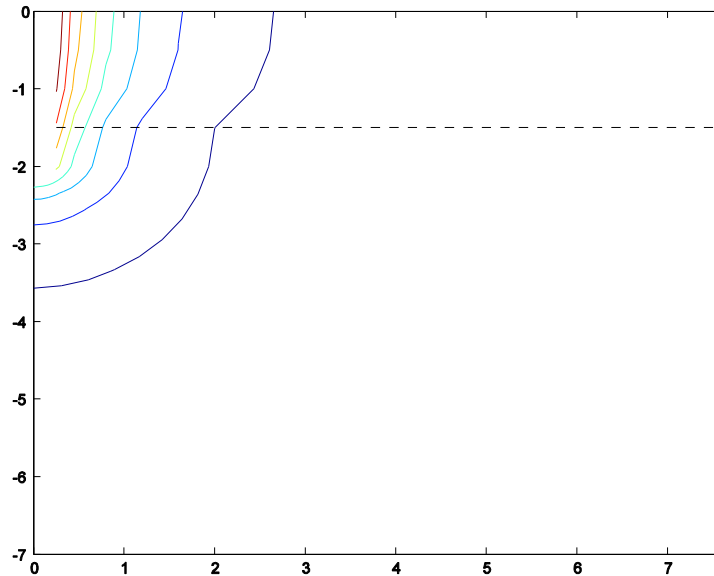


Fig. 6. 8 Curvas equipotenciais em profundidade para uma vara de 2 m.

O método dos elementos finitos apresenta menores erros em solo homogêneo, embora o padrão do IEEE não indique a precisão da fórmula de Tagg, como fez para a fórmula de Dwight, pelo que não se consegue fazer uma comparação rigorosa.

6.4 Potencial de superfície devido a cabo colocado no estrato inferior

No capítulo cinco, secção dois, foi enunciada a condição para a existência de singularidade provocada por um cabo horizontal no estrato inferior. Verificou-se que tal singularidade existe, sempre que a profundidade a que está o cabo é o dobro da espessura do estrato superior, impossibilitando o cálculo de potenciais à superfície. Para obstar a essa dificuldade, sugeriu-se alterar ligeiramente a espessura do estrato superior e usar o potencial na superfície de separação entre camadas como uma aproximação ao potencial à superfície, já que esta superfície está equidistante do cabo e da sua primeira imagem ascendente. O que se pretende nesta secção é validar tal aproximação pelo método dos elementos finitos, que não sendo um método baseado na teoria das imagens, não tem singularidades provocadas pelas referidas imagens. Neste problema pretende-se calcular o potencial à superfície sobre o ponto central de um cabo colocado a uma profundidade de 0,5 m. O ponto de interesse, é o ponto central da superfície da vala, onde ocorre o valor máximo do potencial de superfície, e está a 0,5 m de distância do cabo de 10 m, ou seja, dista apenas 5% do comprimento do eléctrodo, do seu ponto central. Nestas condições, o problema pode ser considerado como o cálculo do potencial provocado por um cabo infinito à distância de 0,5 m do referido cabo. Este valor poderá ser comparado com o potencial a meio da trincheira do referido cabo à superfície, obtido pelo método dos momentos. A discretização far-se-á num plano

perpendicular ao meio da trincheira, perpendicular ao cabo e a meio deste. Como se trata de um problema bidimensional, duas alterações são importantes no formalismo matemático definido anteriormente: na equação (2.16) o integral será de superfície e não de volume e nas equações (6.11) e (6.12), estas terão que ser divididas pelo perímetro de revolução do centróide do elemento finito, já que não existe simetria axial. O tratamento completo de problemas bidimensionais pode ser pesquisado em [82]. Foi desenvolvida uma malha de elementos finitos triangulares com 237 nós, refinada junto ao cabo, com camadas em progressão geométrica e considerando a condição de Dirichlet de potencial zero a 7,6 m de distância do cabo. A malha apresenta-se na figura 6.9. O potencial obtido sobre o centro do cabo foi de 1942 V, quando o potencial máximo indicado na figura 5.11 é de 1668 V. O desvio de 274 V representa um erro de 16 % para o menor dos valores. Repare-se que a consideração de um fio infinito provoca um valor majorado no cálculo de potencial pelo método dos elementos finitos, pelo que o verdadeiro valor estará mais baixo e mais próximo do valor de 1668 V. Este cálculo valida, assim, a aproximação proposta no capítulo 5.

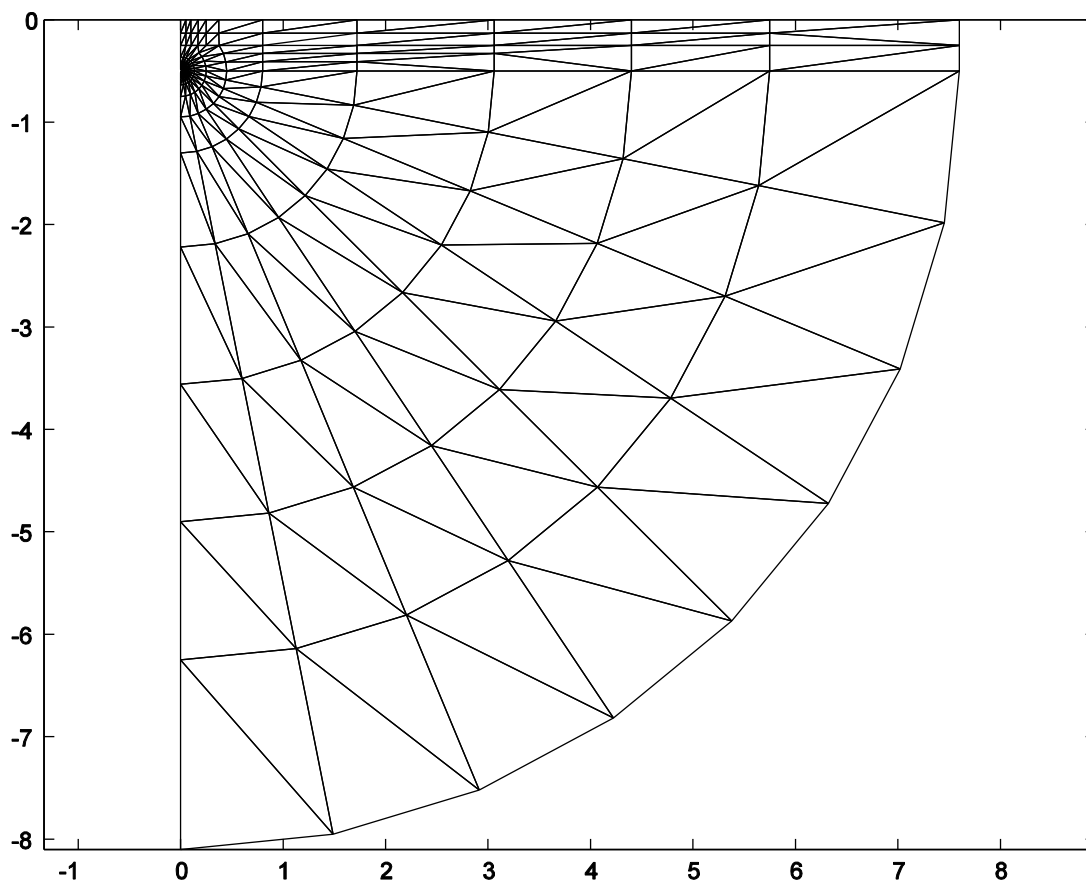


Fig. 6. 9 Malha de elementos finitos em torno de cabo enterrado

6.5 Conclusões

As malhas de elementos finitos foram testadas em solo homogêneo, usando a zona cilíndrica do modelo, a fim de verificar se a malha estava adaptada em tensão e em energia. A resistência foi calculada pela lei de Joule, usando a aproximação energética do método. A

fronteira Dirichlet de zero volt foi colocada a 0,03, 0,15 e a 7,6 m de distância do eixo da vara a fim de verificar se as relações de resistência indicadas pelo padrão do IEEE, em solo homogêneo, se mantinham válidas num solo de dois estratos. Os valores simulados foram comparados com a fórmula de Tagg. As referidas relações de resistência não são válidas em solos de dois estratos. A resistência do modelo completo exibe erros com uma variação entre -12% e -18% dos valores de Tagg.

Finalmente, foi calculado o potencial a meio de um cabo enterrado no estrato inferior, nas condições de singularidade definidas anteriormente, obtendo-se um desvio de 16 % entre o potencial calculado pelo método dos elementos finitos e os valores calculados no capítulo 4, no ponto central da superfície da vala.

Capítulo 7 - Medida da resistividade e da resistência

Introdução

Neste capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica da medida da resistividade em solo homogêneo, alguns métodos de medida da referida grandeza, e listam-se alguns dos factores que mais influenciam a resistividade. Na secção 3 apresentam-se os métodos mais comuns para se obter um perfil de solos de uma e duas camadas. Neste último caso, consideram-se as várias hipóteses do perfil da resistividade com a profundidade, nomeadamente quando há duas, uma ou nenhuma assíptota. O método de Pirson para uma estratificação de um solo em três camadas também é considerado. Finalmente, apresenta-se o método da queda de tensão que permite medir a resistência de um eléctrodo em solos de um e dois estratos.

7.1 - Fundamentação teórica da medida da resistividade

Os fundamentos teóricos dos métodos de medida da resistividade do terreno, são baseados no estudo de eléctrodos hemisféricos, enterrados com o seu plano equatorial rente à superfície do solo, que se ilustra na figura 7.1.

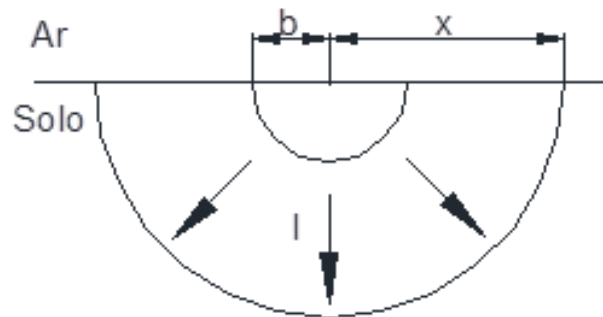


Fig. 7. 1 Eléctrodo hemisférico de raio 'b'

A corrente que sai do eléctrodo é I . Num solo homogêneo e isotrópico a densidade de corrente à distância x , é a aquela grandeza dividida pela superfície hemisférica de raio x .

$$|J| = \frac{I}{2\pi x^2}. \quad (7.1)$$

Considerem-se duas semiesferas iguais, muito espaçadas, de modo que o potencial de qualquer delas não perturbe a densidade de corrente produzida pela outra. Tal, é válido desde que a distância entre as duas semiesferas seja muito maior que os raios das mesmas [53]. Se as referidas semiesferas estiverem ligadas, externamente, a um gerador, conforme mostra a figura 7.2, tem-se uma sobreposição das densidades de corrente dos dois eléctrodos.

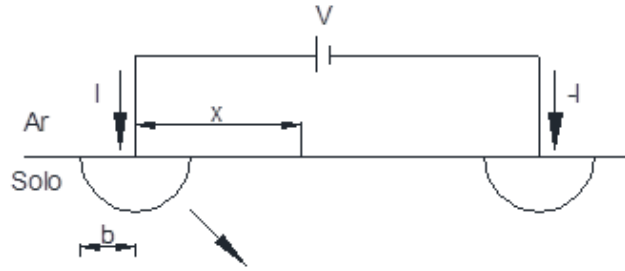


Fig. 7. 2 Circuito com eléctrodos hemisféricos com afastamento $\gg b$

Dado que o potencial de interesse é o que está à superfície, considera-se o ponto x de cota nula e na recta que liga as duas semiesferas, coincidindo a referida recta com o eixo das abcissas. Assim, a densidade de corrente, devido à semiesfera da esquerda em, x será:

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi x^2} \vec{i}, \quad (7.2)$$

sendo \vec{i} o versor segundo x . A densidade de corrente no mesmo ponto, devido à semiesfera da direita da fig. 7.2, considerando-as separadas pela distância D , é:

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi(D-x)^2} \vec{i}. \quad (7.3)$$

Registe-se que o sentido é o mesmo porque a corrente no segundo eléctrodo está invertida. O campo eléctrico no ponto x será:

$$\vec{E} = \left(\frac{\rho I}{2\pi x^2} + \frac{\rho I}{2\pi(D-x)^2} \right) \vec{i}. \quad (7.4)$$

O potencial entre a semiesfera da esquerda e o ponto x , calculado ao longo da recta que liga as semiesferas é, por definição:

$$V_{H1} - V_x = - \int_x^b E dx. \quad (7.5)$$

Note-se que o campo eléctrico é colinear com o versor i . Transportando o sinal para dentro do integral e decompondo este, obtêm-se primitivas imediatas. O resultado é:

$$V_{H1} - V_x = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{x} - \frac{1}{D-b} + \frac{1}{D-x} \right). \quad (7.6)$$

Dividindo a distância D , na figura 7.2, em 3 partes iguais tem-se $D = 3\delta$. À distância δ tem-se para a diferença de potencial entre a semiesfera da esquerda e o ponto referido:

$$V_{H1} - V_\delta = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\delta} - \frac{1}{D-b} + \frac{1}{2\delta} \right). \quad (7.7)$$

Note-se que $D - x = 2\delta$. Simplificando, obtém-se:

$$V_{H1} - V_{\delta} = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2\delta} - \frac{1}{D-b} \right). \quad (7.8)$$

À distância 2δ da semiesfera da esquerda a diferença de potencial, já simplificada, é:

$$V_{H1} - V_{2\delta} = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2\delta} - \frac{1}{D-b} \right). \quad (7.9)$$

Os potenciais calculados estão ilustrados na figura 7.3.

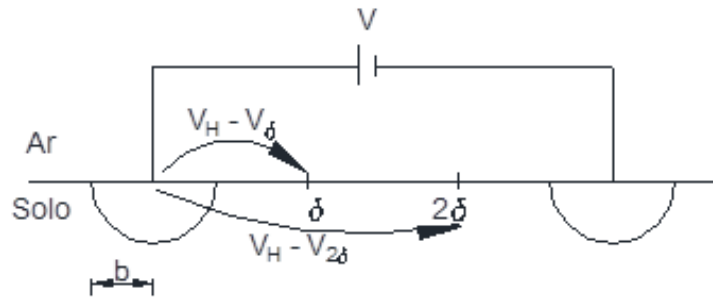


Fig. 7. 3 Diferenças de potencial no solo

A diferença de potencial entre δ e 2δ é a diferença entre as expressões (7.9) e (7.8) já que a primeira é a maior. Obtém-se, para a subtração indicada, a expressão:

$$V_{\delta} - V_{2\delta} = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{2\delta} + \frac{1}{2\delta} \right). \quad (7.10)$$

Esta expressão permite obter uma fórmula para a resistividade do terreno. Assim, tem-se finalmente:

$$\rho = 2\pi\delta \frac{V_{\delta} - V_{2\delta}}{I}. \quad (7.11)$$

7.1.1 O método de Wenner

No método de Wenner usam-se pequenas varetas como eléctrodos, com aproximadamente 20 a 40 cm de comprimento. ‘Supõe-se que a distâncias grandes, comparadas com o tamanho das varetas, a densidade de corrente tem o mesmo comportamento que o de uma fonte pontual de corrente, modelada como um eléctrodo hemisférico’ [53]. Assim, a fórmula (7.11) é a usada para o cálculo da resistividade, já que as quatro pinças estão igualmente afastadas pela distância δ , tal como na figura 7.3. Ilustra-se a colocação do gerador e do aparelho de medida na figura 7.4 [53].

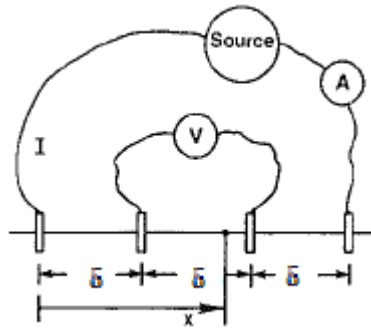


Fig. 7. 4 Medida da resistividade pelo Método de Wenner

‘O método considera que praticamente 58 % da distribuição de corrente que passa entre as hastes externas, ocorre a uma profundidade igual a δ [90], como mostra a fig. 7.5 [90] pelo que se deve elaborar um gráfico de resistividade *versus* espaçamento ou profundidade.

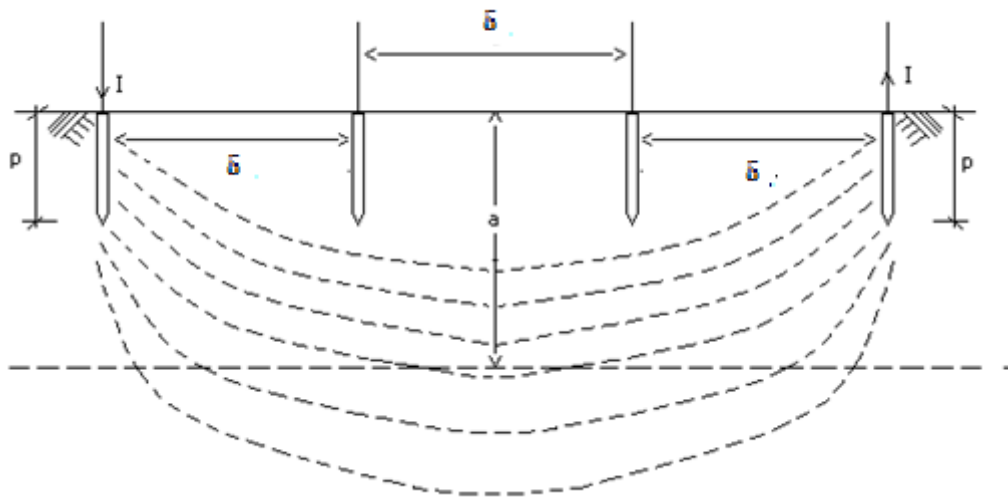


Fig. 7. 5 Distribuição de corrente em profundidade

O método obriga à deslocação das quatro pinças para novas medidas. Na realidade, o aparelho a usar tem incluído a fonte e o voltímetro digital, apresentando logo o valor da resistência pela lei de Ohm. Assim, a equação a usar para traçar uma curva da resistividade aparente com a profundidade é (7.11) mas substituindo o quociente pelo valor da resistência lida. Assim, a fórmula simplificada é [90]:

$$\rho = 2\pi\delta R \cdot \quad (7.12)$$

7.1.2 O método de Palmer

Enquanto no método de Wenner a distância entre os eléctrodos é igual, no método de Palmer abandona-se este requisito, mantendo-se, contudo, a simetria do arranjo. Ilustra-se o método referido na figura 7.6 [39].

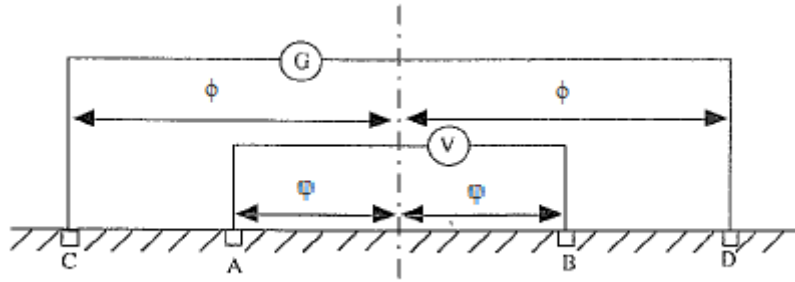


Fig. 7. 6 Medição da resistividade pelo método de Palmer

A resistividade é dada por [39]:

$$\rho = 2\pi\phi R \left| \frac{\gamma^2 - 1}{4} \right|, \quad (7.13)$$

com

$$\gamma = \frac{\phi}{\varphi},$$

e

$$R = \frac{V}{I}.$$

Agora, uma segunda ou terceira medida pode ser obtida deslocando apenas os eléctrodos centrais. Note-se que, se os espaçamentos das 4 hastes forem iguais, a equação (7.13) degenera na equação (7.12). Este método exige menos trabalho se as pinças de corrente forem logo afastadas à distância máxima.

7.1.3 O método da vara cravada

Este método, bastante simples, consiste em medir a resistência de terra de uma vara cravada e usando uma fórmula conhecida para a resistência da vara, como a de Dwight [3] ou de Rudenberg [4], calcular a resistividade do terreno. O método está esquematizado na figura 7.7 [53]. É um dos métodos aconselhados pelo padrão do IEEE [83]. Os eléctrodos auxiliares devem estar afastados da vara bem como um do outro. Num solo homogéneo, este método fornecerá a resistividade do terreno independentemente do comprimento da vara [53].

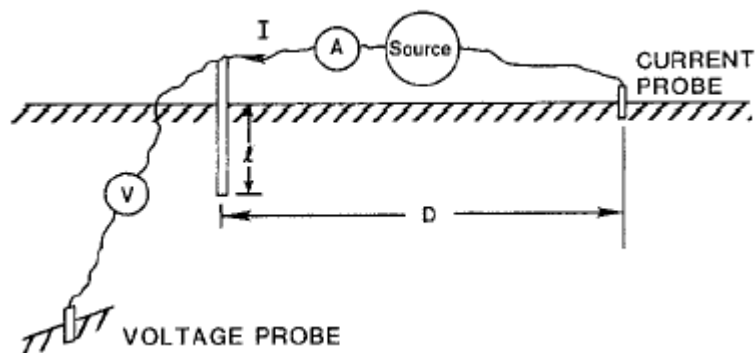


Fig. 7. 7 Medição da resistividade pelo método da vara enterrada

7.2 A resistividade do solo e os factores que a influenciam

Os principais factores que influenciam a resistividade de um solo são: o tipo de solo, se é poroso, arenoso, rochoso, etc; a composição química; a temperatura; a humidade e a estratificação. A natureza do solo influencia, enormemente, a resistividade. Apresenta-se a tabela 7.1 com os valores mínimos e máximos expectáveis e a tabela 7.2 apresenta os valores médios de resistividade do solo, ambas retiradas de [96].

Tabela 7. 1 Intervalos da resistividade eléctrica de solos

Natureza do terreno	Mínimo (Ωm)	Máximo (Ωm)
Terreno pantanoso	1	30
Lama, barro, areia e barro	20	100
Húmus, terra vegetal	10	150
Turfa húmida	5	100
Barro moldável	40	50
Marga, mistura de terra com vestígios calcários	100	200
Marga do Jurássico	30	40
Areia barrenta	50	500
Areia silicosa	200	3000
Solo pedregoso	1500	3000
Solo pedregoso coberto de erva curta	300	500
Calcários moles	100	300
Calcários compactos	1000	5000
Calcários com fissuras	500	1000
Xistos	50	300
Micaxistos	800	1000
Granitos e grés	1500	10 000
Granitos e grés muito alterados	100	600

Tabela 7. 2 Valores típicos da resistividade eléctrica

Tipos de solo ou rocha	Resistividade típica (Ωm)
Argila	40
Mistura de argila e areia	100
Ardósia, xisto e grés	120
Turfeira, lodo, lama	150
Areia	2 000
Fragmentos de rocha	3 000
Granito	25 000

Quanto às características físicas, é óbvio que quanto mais fino for o grão do solo, menor será a resistividade eléctrica. Relativamente à composição química importa ter em conta que ‘Os dois principais compostos químicos existentes no solo são os óxidos de silício e alumínio. Qualquer destes dois óxidos, é electricamente mau condutor’ [96]. A temperatura desempenha, igualmente, um papel importante na resistividade eléctrica do solo. Usando os dados em [90], apresenta-se a variação da resistividade de um solo arenoso, provavelmente com bastante humidade. Para temperaturas negativas a resistividade é enorme e varia muito com a temperatura, ao contrário do que acontece para temperaturas positivas, como se pode ver na figura 7.8. Verifica-se uma descontinuidade na origem, devido à mudança de estado. A humidade desempenha também um papel preponderante na resistividade eléctrica do solo, tal como a temperatura. Na figura 7.9 apresenta-se essa variação, baseada nos dados de Kindermann [90]. Finalmente, a estratificação do solo é outro factor de grande importância. Se uma vara atinge o nível freático, a resistência da vara baixa muito e, tão importante como isso, tem menores flutuações sazonais.

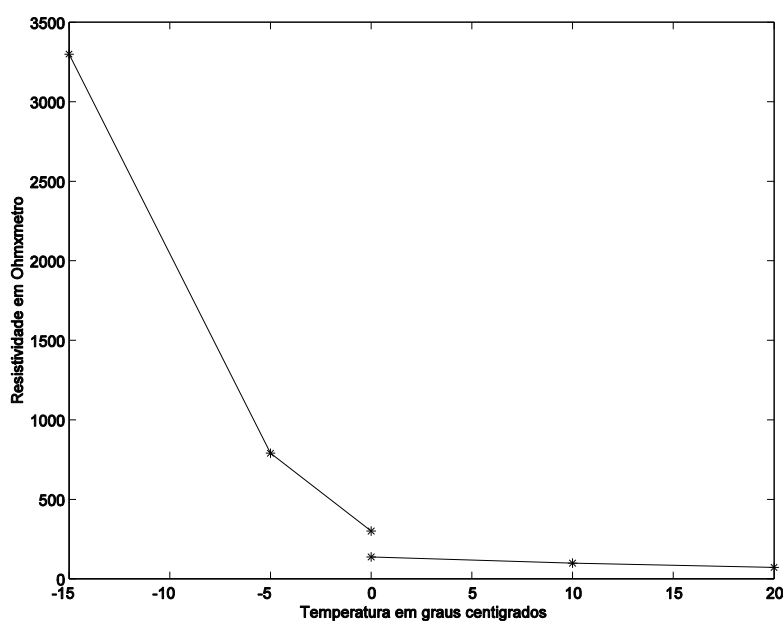


Fig. 7. 8 Variação da resistividade com a temperatura.

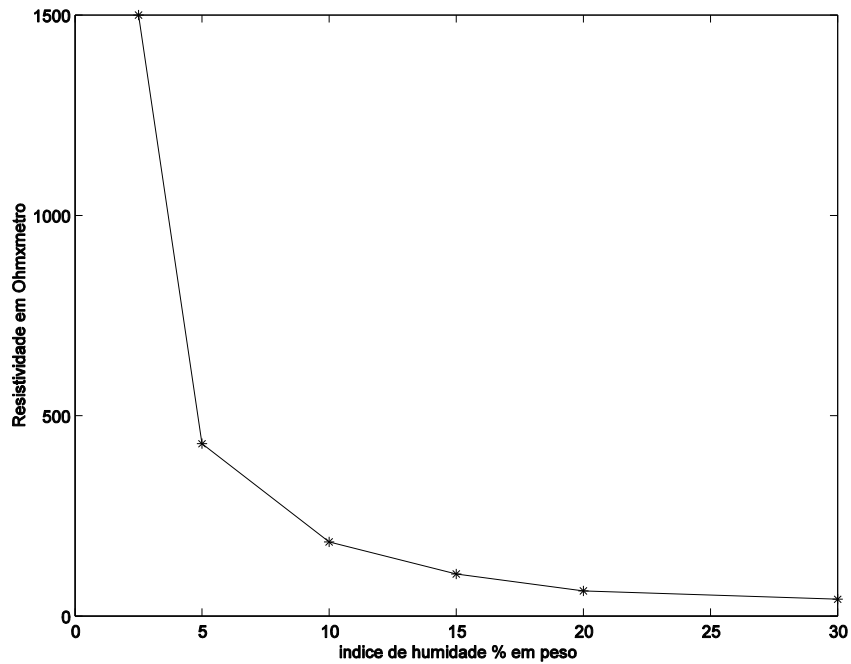


Fig. 7. 9 Variação da resistividade com o índice de humidade

7.3 Perfis típicos de solos

Nesta seção serão apresentados vários perfis de medidas de solo, desde os perfis teóricos aos reais.

7.3.1 Solo homogéneo

Num solo homogéneo as medidas de resistividade serão muito próximas, independentemente da profundidade. Ilustra-se um perfil típico de solos electricamente homogéneos, na figura seguinte [39]:

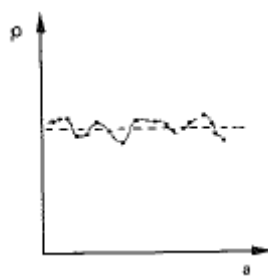


Fig. 7. 10 Perfil típico de um solo homogéneo

Seria interessante saber a dispersão aceitável das medidas. Apresenta-se um exemplo de uma curva de resistividade quantificada, obtida num solo de dois estratos, terra vegetal sobre saibro, na figura 7.11.

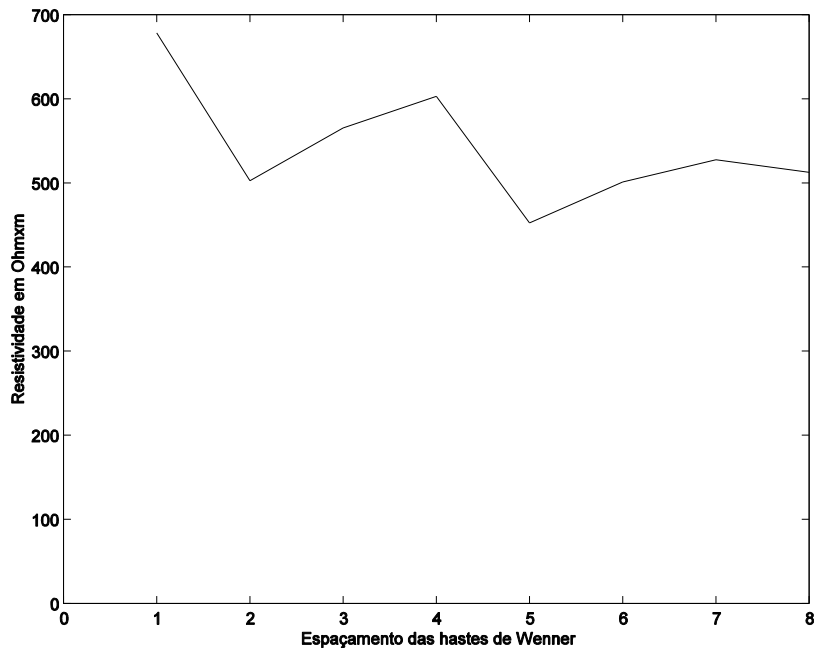


Fig. 7. 11 Curva de resistividade com o espaçamento, Guarda 28 de Maio de 2015.

A primeira questão que se coloca é que média usar. Se for usada a média aritmética, obtém-se um valor de 543 Ω com um desvio padrão de 71 Ω e um coeficiente de variação de Pearson [97], que é o rácio do desvio padrão para a média em percentagem, de 13 %. Ora, estes números induzem uma classificação do terreno como homogéneo, usando o critério de Yague et al [43], que aceita desvios das amostras até 15% do valor médio da resistividade. Considere-se agora um outro exemplo, apresentado na figura 7.12.

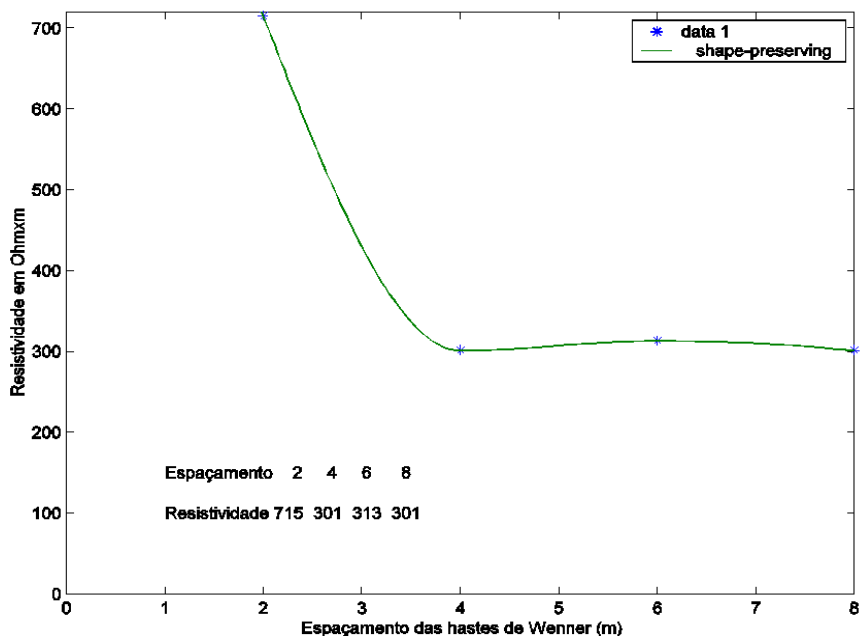


Fig. 7. 12 Curva de resistividade com o espaçamento.

Este perfil, indicia a existência de uma camada superior mais resistiva e uma camada inferior menos resistiva. Poder-se-á, mesmo assim, obter um solo homogéneo equivalente? A média

aritmética das quatro amostras da resistividade fornece um valor de 408 Ωm , com um desvio padrão de 205 Ωm , o que representa aproximadamente 50% da média. Contudo, neste caso, o facto de três das amostras estarem no estrato inferior, fenómeno que acontece regularmente e em especial no inverno quando o nível freático está alto, 'puxa' a média para baixo. Ora, o Std 80-2000 [83] do IEEE, propõe duas médias, uma a aritmética e uma outra, que é a média simples do valor máximo com o valor mínimo das resistividades medidas. A proliferação de medidas num dos estratos é, assim, superada. Usando esta média com apenas dois valores, obtém-se uma resistividade de 508 Ωm , valor este que tem um acréscimo de 25 % relativamente ao anterior. Finalmente, a norma referida indica que se pode usar uma destas médias das resistividades ou a resistividade do estrato em que o eléctrodo está enterrado, já que, como refere o mesmo Std-2007, 52% da resistência está nos primeiros 15 cm em torno da vara de terra. Para cabos, o valor não será muito diferente. Ressalta, desta análise, a existência de três maneiras de calcular a resistividade de um solo homogéneo, equivalente a modelos de solo mais complexos. Os resultados apresentam-se na tabela 7.3, para o exemplo da figura 7.12, em que se comparam os modelos de solo homogéneo com o modelo de solo de dois estratos. Os valores da resistência em solo de dois estratos, foram obtidos pelas fórmulas de Tagg. A resistividade do estrato superior é obtida pela primeira amostra, a resistividade do estrato inferior pelo valor da última amostra e a espessura considerada para o estrato superior foi de 3 m, usando métodos que serão apresentados nas subsecções seguintes.

Tabela 7. 3 Modelos de solo homogéneo para o exemplo da fig.7.12. A resistividade média aritmética é ρ_{ma} ; A resistividade média como maior e o menor valor é ρ_{2v} ; A resistividade usando apenas o estrato superior é ρ_E .

Cabo 10 m, profundidade 0.8 m	Tipo de solo	Dois estratos	Um estrato ρ_{ma}	Um estrato ρ_{2v}	Um estrato ρ_E
	Resistividade (Ωm)	715/301	408	508	715
	Resistência (Ω)	99	61	89	107
	Erro para Tagg (%)	0	-38	-10	8
Vara de 2 m	Resistência (Ω)	320	192	239	336
	Erro par Tagg (%)	0	-40	-25	5

A conclusão é óbvia: usar a resistividade do estrato onde estão os eléctrodos é a melhor opção, obtendo-se o menor erro e por excesso. Usar para a resistividade a média aritmética é a pior. O caso de vara em dois estratos foi tratado nos capítulos 4 e 5.

Numa instalação de pequena potência é muitas vezes suficiente fazer as medidas segundo uma única direcção, por exemplo ao longo da linha de alimentação, ou pela direcção definida pelo ponto de aterramento e a fonte de alimentação, conforme Kindermann [90]. Contudo, à medida que aumenta a potência instalada, devem ser consideradas outras direcções, ao longo de duas perpendiculares ou ao longo de três rectas em angulo de 60° entre elas [90]. Ainda,

segundo o mesmo autor, se os valores medidos à mesma profundidade, nas várias direcções, tiverem um desvio, para a média, inferior a 50%, a estratificação pode considerar-se horizontal. O uso de direcções alternativas testa se a estratificação é horizontal.

7.3.2 Solo com duas camadas e duas assíptotas

O perfil desejável de um solo de duas camadas é apresentado na figura 7.13. A curva apresenta assíptotas bem definidas, nas pequenas e nas maiores profundidades, representando a ordenada da assíptota da esquerda a resistividade do estrato superior e a ordenada da assíptota da direita a resistividade do estrato inferior [39].

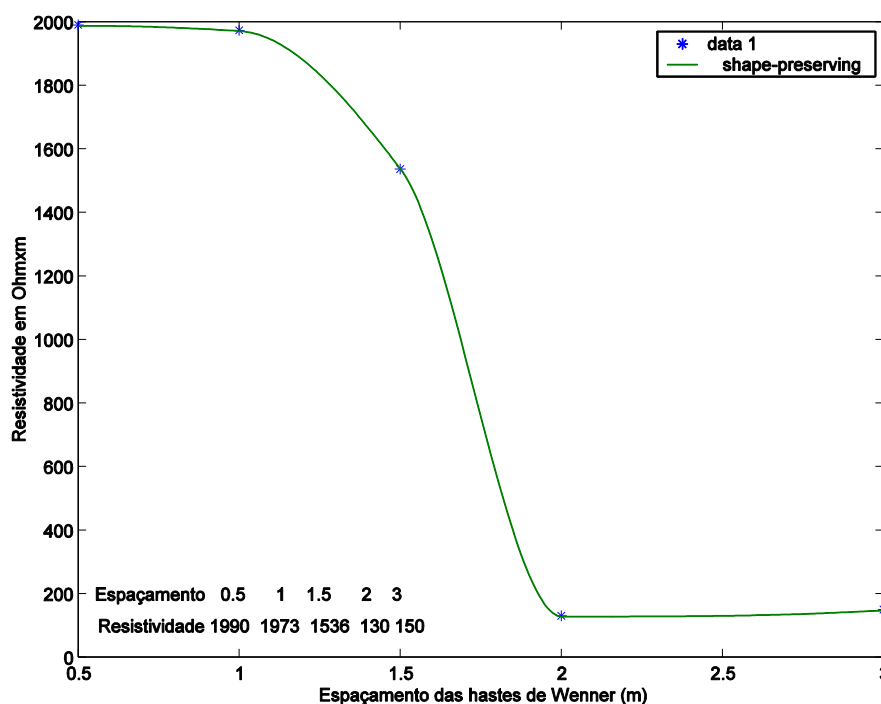


Fig. 7. 13 Curva de resistividade com o espaçamento, Vagueira Abril de 2012.

A resistividade do estrato superior será 1990 Ωm . Para o estrato inferior pode usar-se o último valor ou a média dos dois últimos que daria 140 Ωm . Para este perfil, o único parâmetro que falta obter é a espessura do estrato superior.

Segundo Lancaster-Jones, a espessura do estrato superior obtém-se a partir do ponto de inflexão da curva de resistividade, multiplicando a respectiva abcissa por 2/3. O método intuitivo de Lancaster-Jones [39] foi severamente criticado por Tagg [8], que afirma que aquele só é correto para coeficientes de reflexão de tensão próximos de 1. Contudo, autores mais recentes [90] continuam a usar o referido método, dada a sua enorme simplicidade. Um defeito do método reside na ambiguidade da escolha do referido ponto. No caso da figura 7.13 a curva muda de concavidade entre os pontos de abcissas 1,5 e 2. Escolhendo o ponto intermédio 1,75 e multiplicando por 2/3, obtém-se finalmente 1,2 m. Dada a ambiguidade do

método, uma casa decimal no resultado é suficiente. É um método razoavelmente bom para engenheiros de campo em virtude da sua simplicidade.

O método analítico simplificado de Tagg, usa uma relação entre a resistividade aparente, ou medida, a uma profundidade específica e a resistividade do estrato superior, distinta da relação simples definida pela equação (7.12), em virtude do modelo possuir dois estratos e não um. A resistividade aparente continua a medir-se com o arranjo de Wenner e a nova relação é [8]:

$$\frac{\rho_{\delta}}{\rho_1} = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k^n}{\sqrt{1 + \left(2n \frac{h}{\delta}\right)^2}} - \frac{k^n}{\sqrt{4 + \left(2n \frac{h}{\delta}\right)^2}} \right], \quad (7.14)$$

definindo-se seguidamente o significado dos parâmetros usados:

ρ_{δ} : resistividade aparente à profundidade δ

ρ_1 : resistividade do estrato superior

k : Coeficiente de reflexão de tensão

h : espessura do estrato superior

δ : espaçamento entre pinças.

O chamado método simplificado usa-se quando a curva tem as assíntotas bem definidas pelo que o cálculo do coeficiente de reflexão de tensão k é imediato. Neste método, procura-se a profundidade de espaçamento das hastes δ que é igual á espessura h ou seja $\delta = h$. Neste caso, a equação (7.14) simplifica-se em virtude de a fracção do radical ter valor unitário, obtendo-se [90]:

$$\frac{\rho_{\delta}}{\rho_1} = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k^n}{\sqrt{1 + (2n)^2}} - \frac{k^n}{\sqrt{4 + (2n)^2}} \right]. \quad (7.15)$$

Sabendo k , o somatório é calculável e, portanto, a razão entre as resistividades. O segundo membro de (7.15) é designado por $M(\delta = h)$ [90] e a curva que permite obter o resultado graficamente é apresentada na figura 7.14. Como no exemplo da figura 7.13 se tem $k=-0,87$ a ordenada, por leitura na figura 7.14, é 0,73. Este número representa o segundo termo da equação (7.15), obtendo-se facilmente a resistividade aparente procurada que é:

$$\rho(\delta = h) = 0,73 \cdot 1990 = 1447 \text{ } \Omega m.$$

Na curva de resistividade, basta obter a abcissa equivalente à ordenada 1447, como se pode ver na figura 7.15.

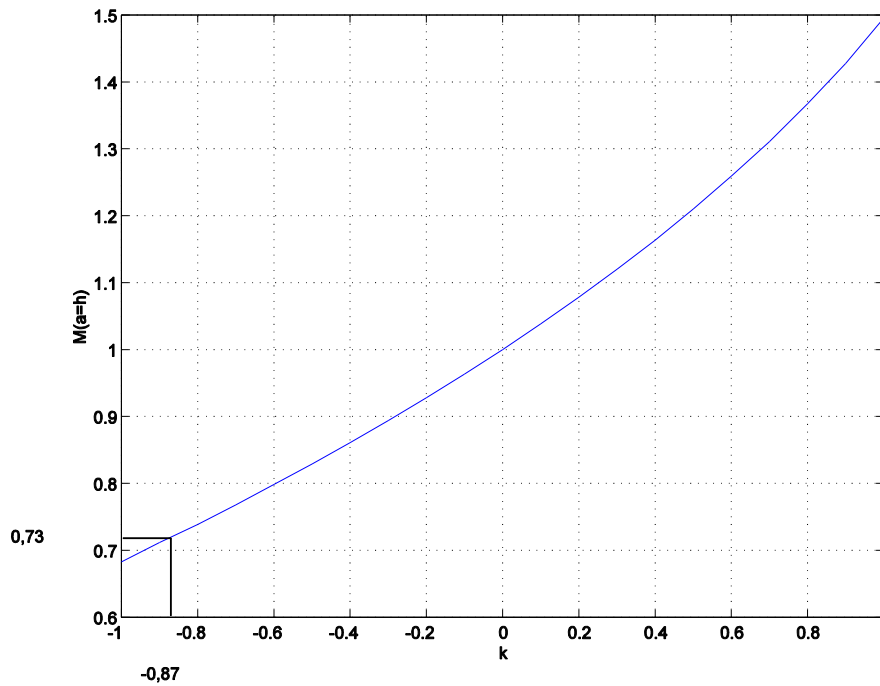


Fig. 7. 14 Obtenção de $M(\delta=h)$ pela curva

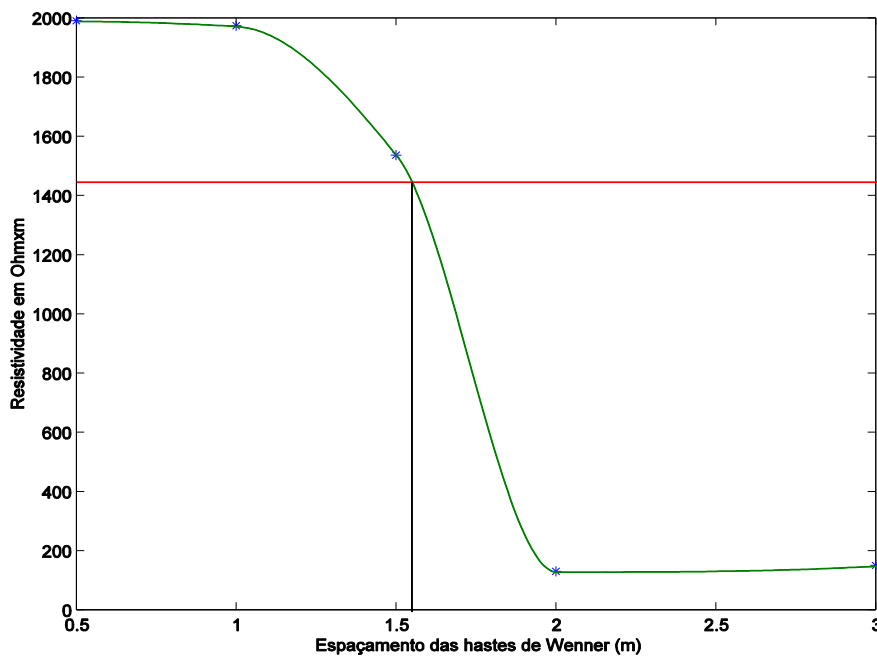


Fig. 7. 15 Obtenção do espaçamento igual à espessura do estrato

A espessura do estrato superior é, por interpolação 1,52 m. Arredondou-se o valor a 1,5 m.

O método gráfico do padrão do IEEE [83], devido a Sunde, obtém as resistividades dos dois estratos por inspeção do gráfico da resistividade. A resistividade do estrato superior é de 1990 Ωm e a resistividade do estrato inferior é de 140 Ωm , como já se viu. O primeiro passo é calcular o quociente entre as duas resistividades, a do estrato inferior dividida pela do estrato

superior, que resulta em $140/1990 = 0,07$. Sunde apresenta um conjunto de curvas para cada valor deste quociente, apresentadas na figura 7.16. Não havendo curva para o valor de 0,07 foi interpolada uma curva, de cor castanha clara, entre as curvas de 0,05 e 0,1. Nesta curva inserida, escolhe-se um ponto 'within the sloped region', ou seja, na parte da curva que tem declive e lêem-se as coordenadas cartesianas do ponto escolhido. Escolheu-se um ponto coincidente com uma das linhas da grelha para facilitar a leitura, conforme se vê na figura 7.16 [83].

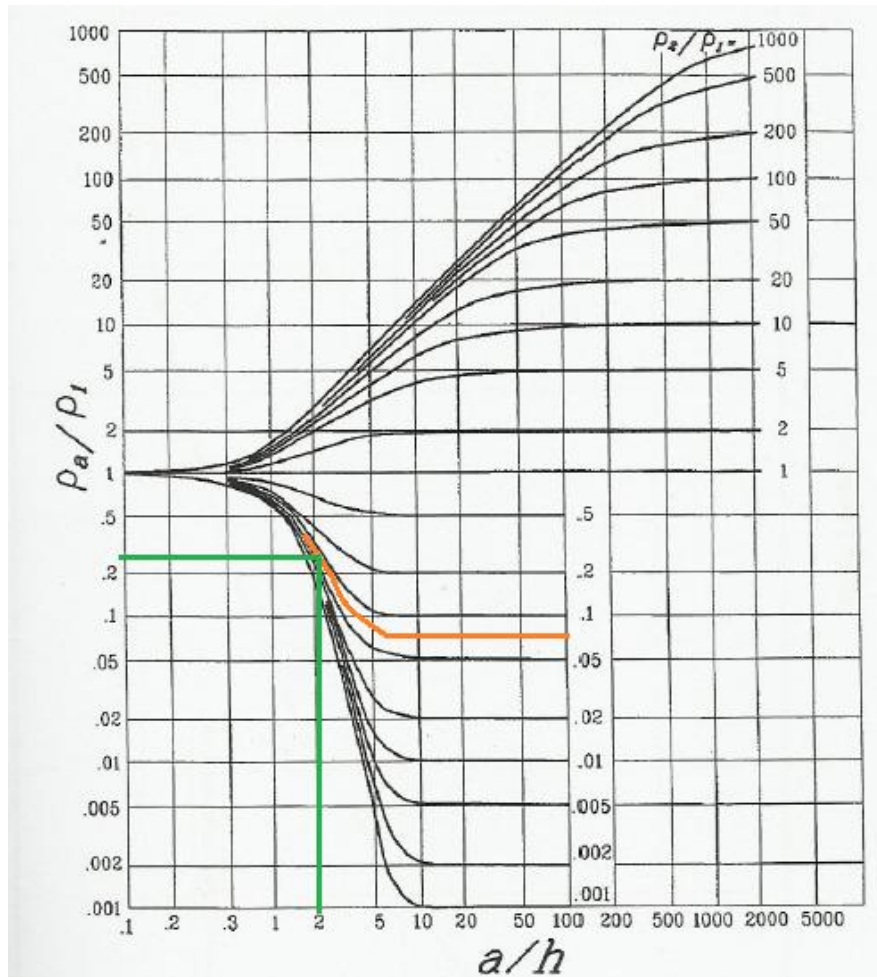


Fig. 7. 16 Curvas de Sunde

Considerando que o ponto escolhido tem abcissa 2 e ordenada 0,28, obtém-se do gráfico:

$$\delta/h = 2, \quad (7.16)$$

$$\rho_a/\rho_1 = 0,28. \quad (7.17)$$

O valor da resistividade aparente é, usando (7.17), $557 \Omega\text{m}$. Com esta resistividade verifica-se qual a separação de pinças associada na curva de resistividade. A intersecção da curva de resistividade com a recta vermelha dá-se sensivelmente para $\delta=1,8 \text{ m}$, por interpolação linear, como se pode verificar na figura 7.17.

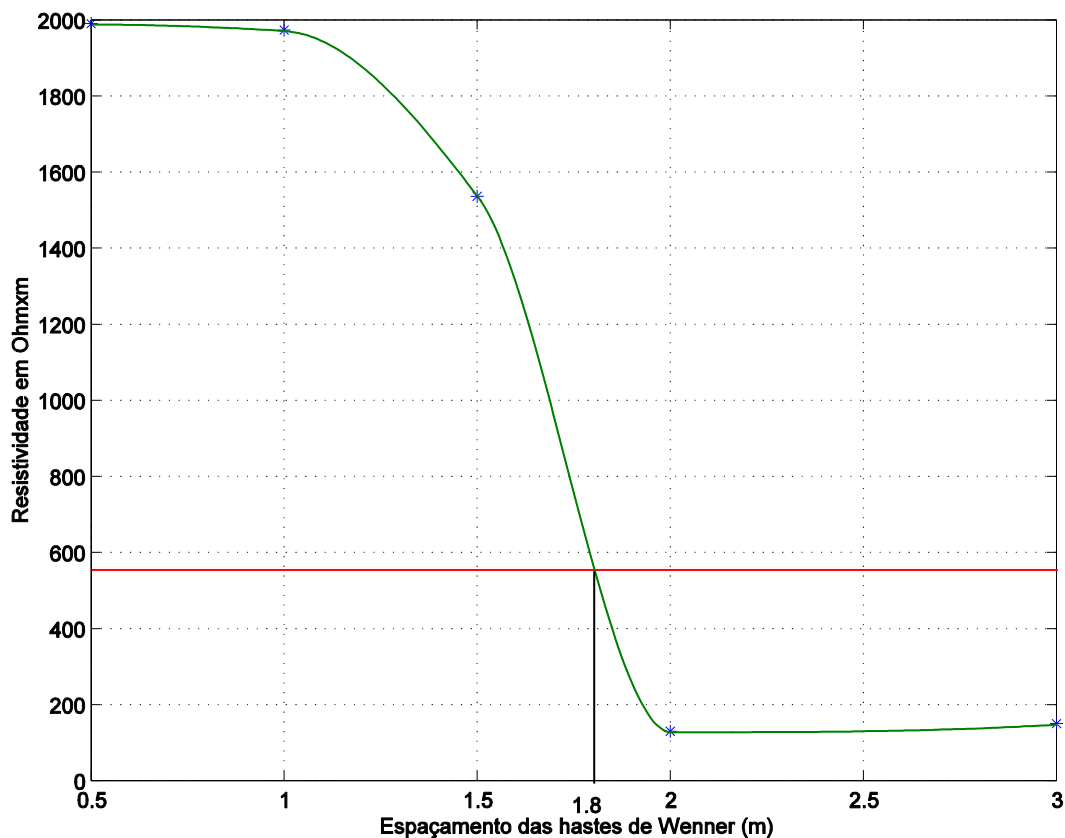


Fig. 7. 17 Detecção de a/h na curva de resistividade

Em virtude de o quociente pretendido valer 1,8, conforme o gráfico anterior, usando a equação (7.16) computa-se o valor de $h=0,9$ m.

Comparando os três métodos apresentados, segundo o padrão do IEEE a espessura do estrato será de 0,9 m, pelo método analítico é 1,5 m e por Lancaster-Jones o valor da espessura é de 1,2 m, que, curiosamente, é o valor médio dos outros dois.

7.3.2 Perfil sem a assíptota de maior profundidade

Um perfil sem a assíptota de maior profundidade é apresentado na figura 7.18. A parte esquerda da curva inclina-se para o valor de 1600 Ω m, que será considerado o valor da assíptota de baixa profundidade. O tratamento destes casos é feito pelo primeiro método de Tagg [8], único método que permite calcular com rigor os parâmetros em falta que são a espessura do estrato superior e a resistividade do estrato inferior. A equação (7.14) é usada duas vezes permitindo, assim, obter um sistema de equações não lineares a duas incógnitas. Para tal escolhem-se dois espaçamentos distintos e fora da assíptota, por exemplo ' $\delta=4$ ' e ' $\delta=7$ ' na figura 7.18. A curva de resistividade, permite ler as resistividades àquelas profundidades que, no caso em apreço, são respectivamente 1440 e 1075 Ω m.

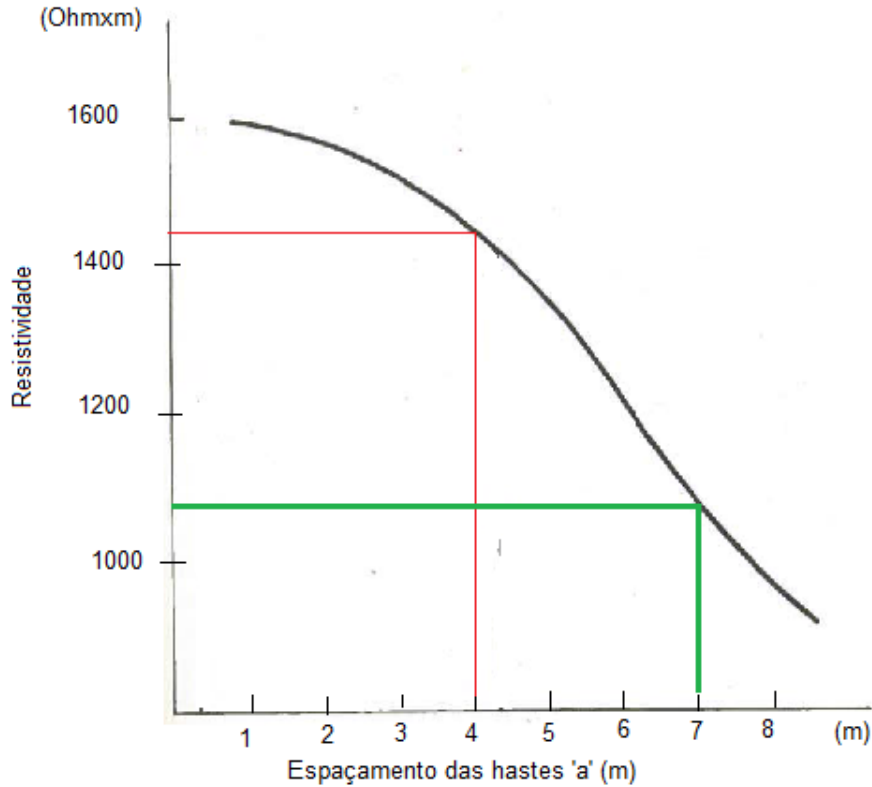


Fig. 7. 18 Curva de resistividade sem assíntota baixa

Para 'δ=4' o quociente do primeiro membro da equação (7.14) dá 1440/1600 = 0,90. Substituindo em (7.14), tem-se:

$$0,9 = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k^n}{\sqrt{1 + \left(2n \frac{h}{\delta}\right)^2}} - \frac{k^n}{\sqrt{4 + \left(2n \frac{h}{\delta}\right)^2}} \right] \quad (7.18)$$

Repetindo o procedimento para 'δ=7', obtém-se o quociente 1075/1600 = 0,67 e a equação é:

$$0,67 = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k^n}{\sqrt{1 + \left(2n \frac{h}{\delta}\right)^2}} - \frac{k^n}{\sqrt{4 + \left(2n \frac{h}{\delta}\right)^2}} \right] \quad (7.19)$$

Para solucionar o sistema, Tagg considera a função constituída pelo segundo membro, comum às duas últimas equações, uma função implícita nas variáveis k e h/δ da forma:

$$f(k, h/\delta) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k^n}{\sqrt{1 + \left(2n \frac{h}{\delta}\right)^2}} - \frac{k^n}{\sqrt{4 + \left(2n \frac{h}{\delta}\right)^2}} \right] \quad (7.20)$$

Para cada valor de k há uma curva para a função h/δ numa só variável, derivando-se uma família de curvas, às quais Tagg chamou as ‘master curves’ [8], que poderíamos traduzir por curvas fundamentais, representadas na figura 7.19, em que se apresenta o cruzamento com a ordenada 0,9 a vermelho e com a ordenada 0,67 a verde.

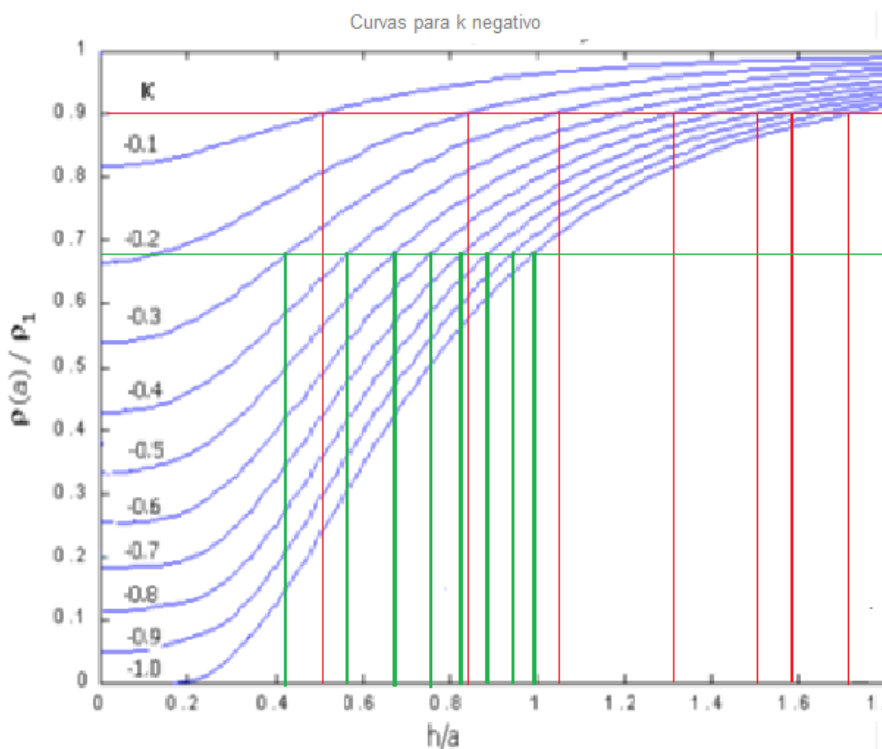


Fig. 7. 19 Curvas fundamentais de Tagg, para a curva da fig. 7.18

Agora, o cruzamento de cada recta horizontal com as curvas fundamentais, permite associar o par $k, h/\delta$ e construir por tabela as funções implícitas dadas por (7.18) e (7.19). Assim, a solução de (7.18) está apresentada na tabela 7.4 e a função solução de (7.19), consta da tabela 7.5. Na última linha os valores de h/δ , são multiplicados por δ obtendo-se a espessura h como variável de interesse.

Tabela 7. 4 Abcissas dos pontos de intersecção para $\delta = 4$.

k	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1
h/δ	0,51	0,84	1,05	1,19	1,31	1,42	1,50	1,58	1,65	1,71
h	2,04	3,36	4,20	4,76	5,24	5,68	6,00	6,32	6,60	6,84

Tabela 7. 5 Abcissas dos pontos de intersecção para $\delta = 7$.

k	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1
h/δ	0,12	0,42	0,56	0,67	0,76	0,83	0,89	0,94	0,99
h	0,84	2,94	3,92	4,69	5,32	5,81	6,23	6,58	6,93

Finalmente, apresenta-se na figura 7.20 o gráfico referente às duas curvas tabeladas, e o ponto de cruzamento destas dá a solução do sistema, neste caso a espessura será de 6,7 m, aproximadamente, e o coeficiente de reflexão de tensão, K, estará próximo de -0,92.

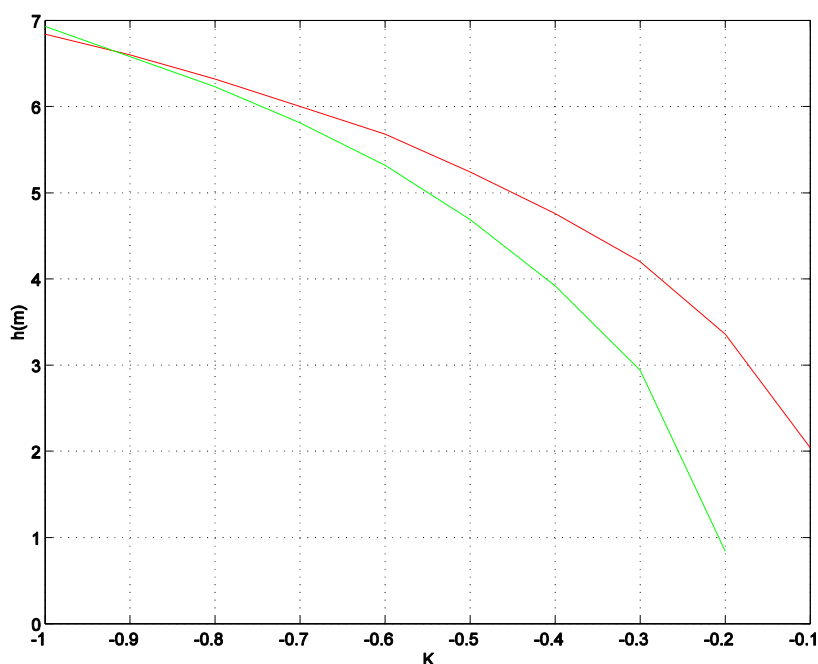


Fig. 7. 20 Solução gráfica do sistema

Nestes casos, é útil representar a equação (4.6) na seguinte forma:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1+K}{1-K}. \quad (7.21)$$

Sabendo que \$K=-0.92\$ e que a resistividade do estrato superior é \$1600 \Omega\text{m}\$, obtém-se, usando (7.21), um valor de \$67 \Omega\text{m}\$ para a resistividade do estrato inferior \$\rho_2\$. ‘Se a curva de resistividade for ascendente, \$k>0\$, efectua-se o cálculo de \$\rho_1/\rho_\delta\$’ [90]. Uma inspecção rápida à figura 7.18 indica que haverá uma inflexão da curva, ligeira, próximo dos 6 m. Dois terços deste valor são 4 m, que seria o valor da espessura do estrato por Lancaster-Jones, quase metade do valor a que chegou o método de Tagg. A rapidez do método de Lancaster-Jones, devido à sua simplicidade, torna-o interessante para se ter uma ideia do valor da espessura do estrato.

7.3.3 Perfil de resistividade sem a assíntota de menor profundidade.

A figura 7.12 ilustra este caso. Em rigor, nenhum dos métodos trata este caso, já que, quer os métodos analíticos, baseados nas metodologias desenvolvidas por Tagg, quer o método gráfico do padrão do IEEE, exigem o conhecimento da resistividade do estrato superior. Também não se nota uma mudança de concavidade na parte inicial descendente da curva, pelo que o método de Lancaster-Jones não é aplicável. Ressureição Cordeiro [39], aconselha o uso da resistividade no ponto de menor abcissa para a resistividade do estrato superior e Tagg [8] aconselha que se extrapole a curva até esta encontrar o eixo das abcissas. O IEEE Std 2000

[83], subscreve a proposta de R. Cordeiro, mas acrescenta que, se não for claro, deve fazer-se a extrapolação, sem um critério objectivo de quando se deve ou não fazer a extrapolação. No caso considerado, seria muito difícil extrapolar já que o ponto mais à esquerda tem abcissa 2. Uma vez escolhida a referida resistividade, o problema a resolver é fácil já que são sabidas as duas resistividades, pelo que deve usar-se o método de Tagg simplificado ou o método gráfico do padrão do IEEE. Nestes casos é, normalmente, difícil usar o método de Lancaster-Jones.

7.3.4 Perfil de resistividade sem assíptotas.

Esta situação exemplifica-se com a figura 2.8, escolhendo a resistividade do estrato superior por um dos critérios definidos na subsecção anterior, obtém-se um problema em que se conhece a resistividade do estrato superior e desconhecem-se os restantes parâmetros. O método a usar é o primeiro método de Tagg o qual permitirá obter a espessura do estrato superior e a sua resistividade.

7.4 Modelo de solo de 3 camadas e o método de Pirson

O enterramento de uma vara de 36 m, com medidas regulares da resistência da vara de 6 em 6 m é apresentado em [33], embora os autores não tenham especificado o diâmetro da vara. Assim, assumiu-se o diâmetro de 25 mm, que é o maior existente no mercado, dado o comprimento envolvido. A partir das medidas de resistência, podem obter-se as medidas da resistividade do terreno, usando por exemplo a fórmula de Dwight, como aconselha o padrão do IEEE [83]. Os valores assim obtidos, são listados na tabela 7.6:

Tabela 7. 6 Valores da resistividade de solo.

L (m)	6	12	18	24	30	36
ρ (Ω m)	173	158	124	101	97	106

A curva de resistividade com a profundidade é apresentada na figura 7.21. A curva exhibe um mínimo a que corresponde um solo de três camadas com um estrato intermédio menos resistivos do que os restantes. Tomou-se para a resistividade do estrato superior o valor de 179 Ω m, que se obtém por extrapolação da curva, de representação fácil no Matlab, se for usada uma cúbica como aproximação.

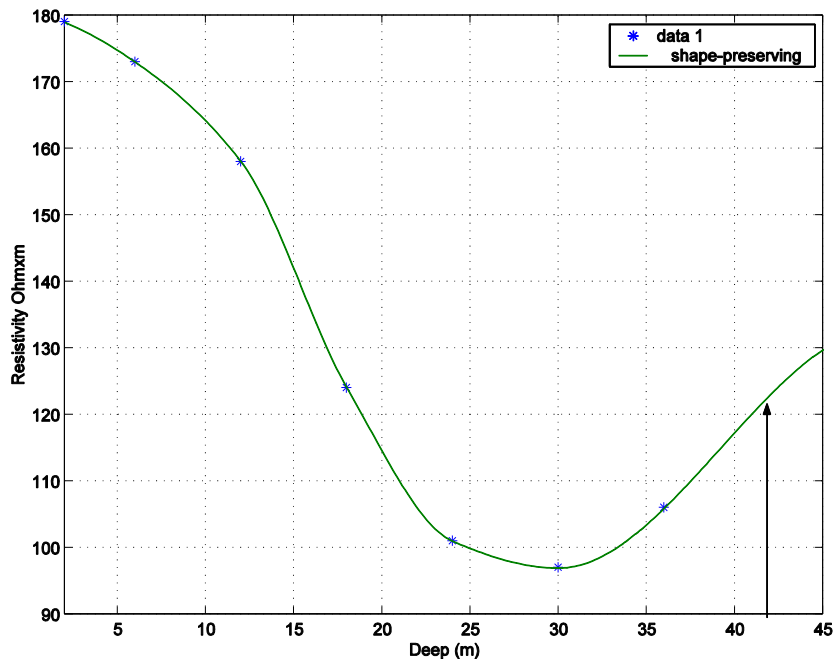


Fig. 7. 21 Resistividade aparente de solo de 3 estratos

Na figura 7.21 usou-se uma curva ‘shape preserving’, o que permite detectar uma mudança de concavidade na parte final do gráfico, importante como se verá adiante.

Para se obter um modelo de solo, usa-se o método de Pirson [98] que divide a curva em trechos descendente e ascendente. Assim, para o primeiro trecho, descendente, que representa um solo de dois estratos, usa-se a metodologia definida em 7.3.3, ou seja, será usado o primeiro método de Tagg. Escolheu-se para primeiro ponto o valor de 18 m, a que corresponde uma resistividade de 124 Ωm, por consulta da tabela 7.6. Assim, tem-se $\delta = 18$ e o quociente entre a resistividade do ponto escolhido e a resistividade do estrato superior é $124/179=0,69$. Escolheu-se um segundo ponto $\delta = 24$ m, e o quociente de resistividades é $101/179 = 0,56$. A recta de ordenada constante 0,69 está a vermelho e a recta de ordenada 0,56 está a verde na figura 7.22. A tabela 7.7 contém as abcissas da recta vermelha, com as curvas mestras e o valor de ‘h’ obtido por multiplicação daquelas por 18 m.

Tabela 7. 7 Pontos de intersecção com a recta $y=0,69$

<i>k</i>	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
<i>h/a</i>	0,19	0,45	0,59	0,69	0,78	0,85	0,91	0,96	1,01
<i>h</i>	3,42	8,10	10,62	12,42	14,04	15,3	16,38	17,28	18,18

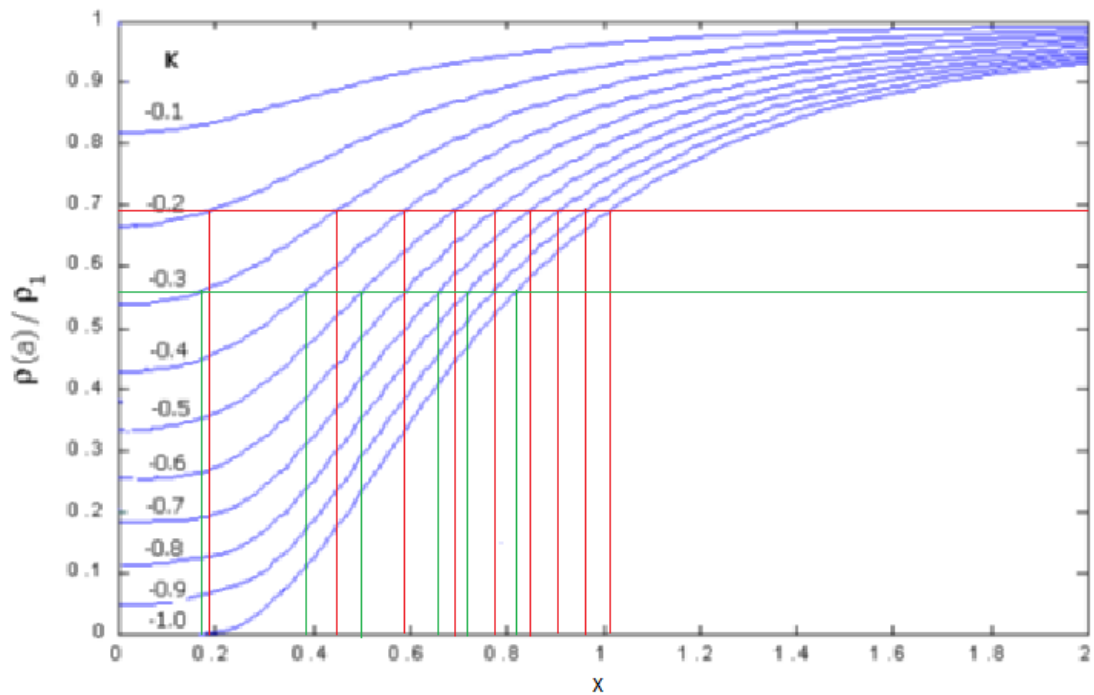


Fig. 7. 22 Cruzamento das curvas fundamentais de Tagg com as rectas $y=0,69$ e $y=0,56$

A tabela 7.8 contém as abcissas da recta verde, com as curvas mestras e o valor de 'h' obtido por multiplicação daquelas por 24 m.

Tabela 7. 8 Pontos de intersecção com a recta $y=0,56$

k	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
h/a	0,17	0,39	0,50	0,59	0,66	0,72	0,78	0,82
h	4,08	9,36	12	14,16	15,84	17,28	18,72	19,68

As curvas representam-se na fig. 7.23 e cruzam-se no ponto $k=-0,58$ e $h=13,8$ m. A espessura do estrato superior é, assim, 13,8 m. Do valor de k obtém-se, para a resistividade do estrato intermédio, o valor de $47,6 \Omega\text{m}$, usando a equação (7.21).

Se tivessem sido considerados os dois primeiros pontos da tabela 7.6, as curvas da figura 7.23 seriam paralelas, pelo que a repetição do processo, com dois pontos diferentes, permitiu resolver o sistema graficamente.

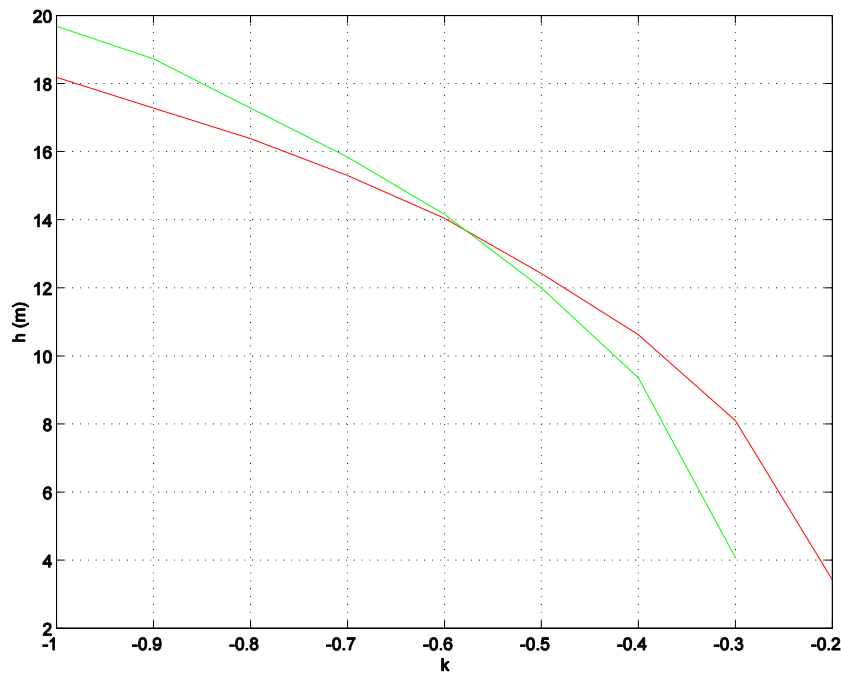


Fig. 7.23 Cruzamento de curvas

Para completar a caracterização do terreno, falta obter a espessura do estrato intermédio e a resistividade do estrato inferior. Para tal, torna-se necessário substituir os dois estratos superiores por um equivalente, o que requer uma estimativa da espessura do estrato intermédio. Há uma mudança da concavidade da curva aos 42 m, conforme se pode ver na figura 7.21. Usando a regra de Lancaster-Jones tem-se, para a cota do plano de descontinuidade, o valor de 2/3 de 42, ou seja, 28m. A espessura do estrato superior valerá então $28 - 13.8 = 14.2$ m. As duas camadas superiores podem agora ser simplificadas para uma equivalente, usando a fórmula de Hummel [90], aqui repetida na sua versão original, ao contrário da adaptação feita no capítulo 4.

$$\rho_{eq} = \frac{h_1 + h_2}{\frac{h_1}{\rho_1} + \frac{h_2}{\rho_2}}, \quad (7.22)$$

sendo os parâmetros definidos de seguida.

h_1, ρ_1 : Espessura e resistividade do estrato superior

h_2, ρ_2 : Espessura e resistividade do estrato intermédio

Com os valores obtidos anteriormente, os dois estratos superiores são substituídos por um estrato único de resistividade $75 \Omega\text{m}$ e com uma espessura que é a soma das duas espessuras, ou seja 28 m. Finalmente, o primeiro método de Tagg é repetido com uma resistividade do estrato superior de $75 \Omega\text{m}$. No trecho ascendente da curva de resistividade escolhem-se dois valores, sendo o primeiro 'a'=30 m, com uma resistividade associada de $97 \Omega\text{m}$ de acordo com a tabela 7.6, a que corresponde um quociente assim obtido:

$$\frac{\rho_1}{\rho_a} = \frac{75}{97} = 0,77 .$$

De forma semelhante para 'a'=36 m, a que corresponde uma resistividade de 106 Ωm, obtém-se:

$$\frac{\rho_1}{\rho_a} = \frac{75}{106} = 0,71 .$$

As intersecções das retas de ordenadas constantes iguais a 0,77 e 0,71, apresentam-se na figura 7.24:

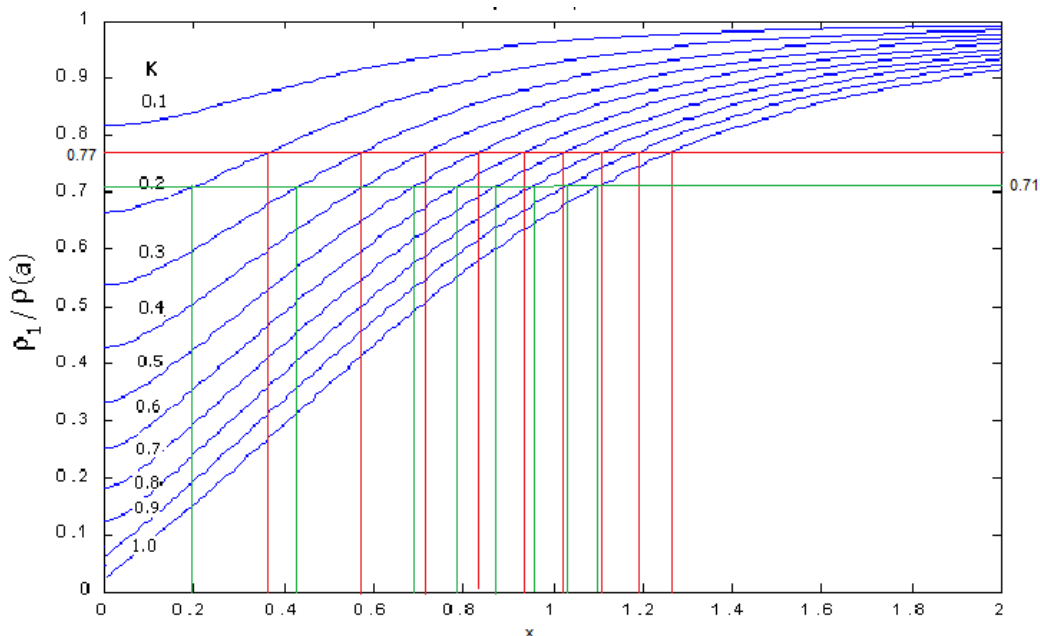


Fig. 7. 24 Intersecção das rectas horizontais com as curvas mestras de Tagg para k>0

A tabela 7.9 contém as abcissas da recta vermelha, com as curvas fundamentais, e o valor de 'h', obtido por multiplicação daquelas por 30 m.

Tabela 7. 9 Pontos de intersecção com a recta y=0,77

k	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
h/a	0,36	0,57	0,72	0,84	0,94	1,02	1,11	1,19	1,26
h	10,8	17,10	21,60	25,20	28,20	30,60	33,30	35,70	37,80

A tabela 7.10 contém as abcissas da recta verde, com as curvas mestras e o valor de h obtido por multiplicação daquelas por 36 m.

Tabela 7. 10 Pontos de intersecção com a recta y=0,71

k	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
h/a	0,2	0,43	0,56	0,69	0,79	0,87	0,96	1,03	1,11
h	7,20	15,48	20,16	24,84	28,44	31,32	34,56	37,08	39,96

As duas curvas apresentam-se na figura 7.25. O ponto de encontro das curvas dá-se para $k=0,56$ e para $h= 27$ m. Subtraindo a espessura do estrato superior a este valor, calcula-se a espessura do estrato intermédio. Com o valor de 'k' e sabendo que a resistividade do estrato superior equivalente é de $75 \Omega\text{m}$, obtém-se, para o estrato inferior, o valor de $266 \Omega\text{m}$, usando a equação (7.21).

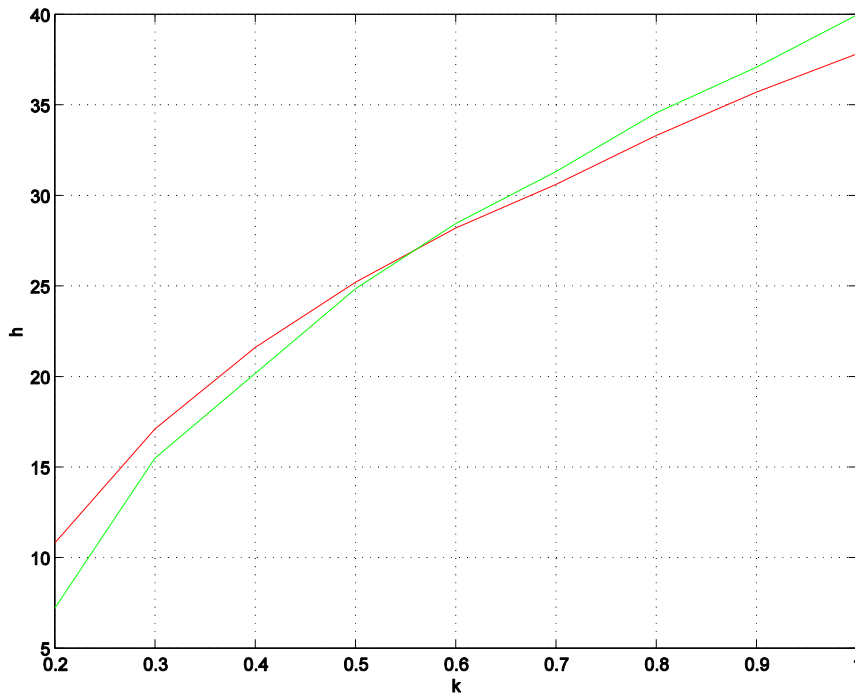


Fig. 7. 25 Cruzamento de curvas para o trecho ascendente da curva de resistividade

O solo fica, assim, caracterizado: Resistividade do estrato superior de $179 \Omega\text{m}$ e espessura de $13,8$ m, resistividade do estrato intermédio de $47,6 \Omega\text{m}$ e espessura de $13,2$ m e resistividade do estrato inferior de $266 \Omega\text{m}$.

7.5 Medida da resistência de eléctrodos

Nesta seção apresenta-se o circuito de medida da resistência de eléctrodos de terra pelo método da queda de tensão. A medida exemplifica-se na figura 7.26 [39]. Variando a localização da haste de tensão, segundo a recta definida pelos outros eléctrodos, e calculando o quociente entre o potencial na haste móvel e a corrente do circuito, constrói-se o gráfico representado na parte inferior da figura 7.26. O valor do patamar da curva corresponde à resistência de difusão do eléctrodo a medir, enquanto que a resistência total corresponde à soma das resistências dos dois eléctrodos que estão ligados ao gerador.

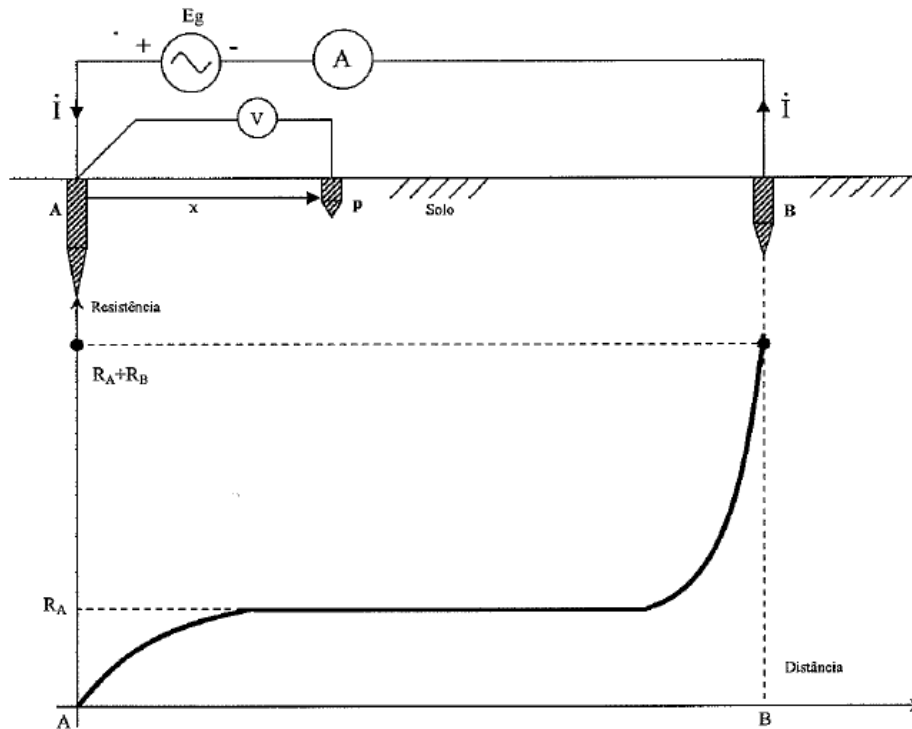


Fig. 7. 26 Medida de terra pelo método da queda de tensão

Muitas vezes, nos pátios das empresas os construtores deixam umas hastes de ferro para medida da resistência do eléctrodo de terra, importantes quando o solo é pavimentado. Quando assim é, não se pode variar a distância da haste de tensão e fica-se restringido às distâncias pré-definidas do enterramento dos referidos espigões metálicos. Nestes casos, em que há a chamada medida única, a distância das pinças auxiliares ao eléctrodo a medir não é consensual. Apresenta-se a tabela 7.11 com algumas distâncias indicadas, quer por académicos, quer por organizações ligadas às empresas das áreas eléctricas.

Tabela 7. 11 Distâncias das hastes auxiliares ao eléctrodo a medir em solo homogéneo

Fonte	Distância da haste de corrente	Distância da haste de tensão
Miguel [84]	>20 m	68 % da distância da haste de corrente
Amoruso [13]	>10xmaior que a maior dimensão do eléctrodo	62 % da distância da haste de corrente
Manual medidor MIT 904	>10xprofundidade do eléctrodo	>5xprofundidade do electrodo
CTT [96]	>50 m	60 % da distância da haste de corrente

Quando o solo tem dois estratos, esta relação é dinâmica, e foi estudada por Amoruso [13]. Apresenta-se a figura 7.27 que ilustra os parâmetros que o autor usa:

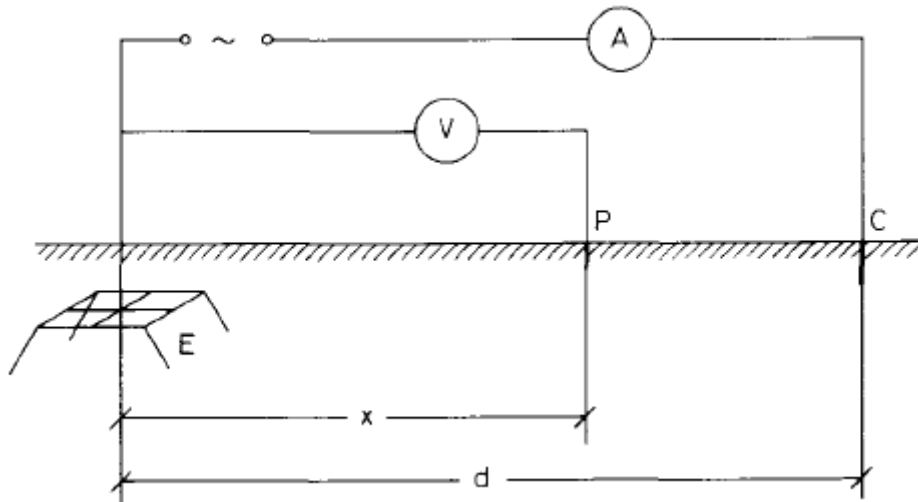


Fig. 7. 27 Parâmetros para estimar distância da pinça de tensão

A relação entre x e d , depende da espessura do estrato superior e do coeficiente de reflexão de tensão k . Suponha-se que a haste de corrente está a 20 m e que a espessura do estrato superior é 1,2 m. Assim, e relativamente à figura 7.28, como a escala de abcissas é logarítmica, o valor de entrada é o $\log(1,2/20)$, na base dez, ou seja -1,2. Supondo o coeficiente de reflexão de tensão de -0,8, escolhe-se esta curva e lê-se a ordenada associada à abcissa de entrada como se pode verificar na figura 7.28 [13].

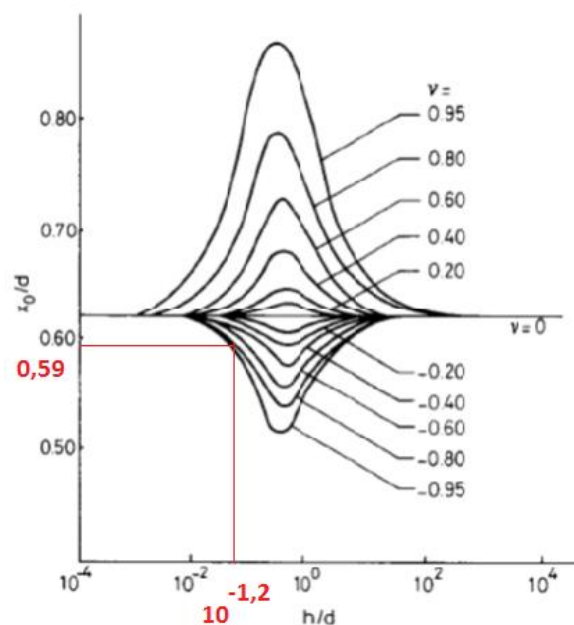


Fig. 7. 28 Curvas para obtenção da distância da haste de tensão

Como se pode verificar, a haste de tensão deve estar a uma distância de 59% da distância a que está a haste de corrente, ou seja, $0,59 \times 20 = 11,8$ m.

7.6 Conclusões

A resistividade de um solo decresce com o aumento da temperatura e do teor de humidade do solo, estando neste último caso próximo de uma relação inversamente proporcional.

Em eléctrodos no estrato superior de um solo de dois estratos, o uso da resistividade do estrato superior para ser usada como a resistividade de um solo homogéneo é uma boa aproximação, melhor do que qualquer média de resistividades.

Na análise de solos de dois estratos, se as duas assimptotas estão presentes na curva de resistividade aparente, existem três métodos para calcular a espessura do estrato superior, única incógnita, sem recorrer a optimização. O método de Lancaster-Jones fornece uma estimativa rápida e aceitável, podendo também ser usado o método padronizado pelo IEEE ou o método simplificado de Tagg. Existindo apenas a assimptota de pequenas profundidades, que indica a resistividade do estrato superior, só o chamado primeiro método de Tagg permite obter os restantes parâmetros, tal como no caso em que não existem assimptotas. Quando existe a assimptota de grande profundidade, que fornece a resistividade do estrato inferior, o uso do ponto mais á superfície pode definir a resistividade do estrato superior, obtendo-se um caso igual ao da curva de duas assimptotas, com o senão de raramente se poder usar o método de Lancaster-Jones.

Na medida de resistência num solo de dois estratos, devem fazer-se três ou quatro medidas, variando a pinça de tensão, para se verificar que as medidas são constantes. Caso contrário, devem considerar-se as curvas de Amoruso *et al* para se escolher a distância a que deve estar a haste de potencial.

Capítulo 8 - Optimização de parâmetros do terreno

Introdução

Em cidades, a medida de resistividade pelo método de Wenner torna-se muito difícil, devido ao facto de o asfalto, passeios, bem como outros factores impedirem o acesso ao solo. Este capítulo apresenta a optimização pelo método do gradiente e pelo método de Newton. Procura-se minimizar o quadrado dos desvios entre valores medidos e estimados, primeiro para solos homogéneos e, depois, para solos de dois estratos. Dado que os modelos destes solos possuem três graus de liberdade, -as duas resistividades e a espessura do estrato superior- a optimização requer o conhecimento do gradiente, tendo sido, por isso, utilizadas as fórmulas de Tagg para efeito do cálculo de eléctrodos unidimensionais. Assim se deduziram as derivadas parciais das referidas fórmulas relativamente às três variáveis de interesse. Com o conhecimento analítico do gradiente a optimização é ilustrada com exemplos de um eléctrodo simples e com um grupo de três varas. A alternativa baseada no método de Newton também é considerada.

8.1 Modelo optimizado de solo homogéneo

Enterrou-se uma vara e mediu-se a resistência de difusão desta para três comprimentos. Apresentam-se as medidas na tabela 8.1

Tabela 8. 1 Resistência medida para diferentes varas

Comprimento (m)	0,5	1	2
Resistência (kΩ)	6,8	4,0	0,150

O que se pretende é concluir se, a partir da primeira medida, se poderá criar um modelo de previsão das seguintes. A resistência de uma vara, usando a fórmula de Rudenberg, que é mais curta, equação (3.26), pode ser resolvida em ordem à resistividade, ficando, assim, com o seguinte aspecto:

$$\rho = \frac{2\pi l R m}{\ln \frac{2l}{a}}. \quad (8.1)$$

Para a primeira medida, considerando-se um raio da vara de 8 mm e usando a equação anterior, obtém-se um valor para a resistividade de 4423 Ωm. Partindo deste valor as estimativas para as outras medidas são:

$l = 1$ m resistência de simulação de 3887 Ω . (Erro de 1% para o valor medido).

$l = 2$ m resistência de simulação de 2781 Ω . (O erro é enorme para o valor medido).

O modelo de solo, obtido a partir da primeira medida, prevê um valor muito próximo da segunda, provavelmente devido ao facto de o primeiro estrato ter mais do que um metro de espessura. No entanto, falha na previsão da terceira. Pode-se tentar fazer um modelo a partir das duas primeiras medidas, mas não se poderão esperar resultados muito diferentes para o valor da resistividade já obtido de 4423 Ω m.

Para se trabalhar com a totalidade das medidas teria que se definir a função objectivo a minimizar:

$$f = (Rm_1 - Rsim_1)^2 + (Rm_2 - Rsim_2)^2 + (Rm_3 - Rsim_3)^2, \quad (8.2)$$

Listando-se os parâmetros da fórmula nas linhas seguintes:

R_{m1} : Resistência medida para o comprimento de 0,5 m.

R_{sim1} : Resistência calculada, usando (8.1), para o comprimento de 0,5 m.

R_{m2} : Resistência medida para o comprimento de 1 m.

R_{sim2} : Resistência calculada, usando (8.1) para o comprimento de 1 m.

R_{m3} : Resistência medida para o comprimento de 2 m.

R_{sim3} : Resistência calculada, usando (8.1) para o comprimento de 2 m.

Associando as dimensões de cada vara ao seu valor medido, usando (8.1) e arredondando o valor dos logaritmos às centésimas, obtém-se:

$$f = (6800 - 1,54\rho)^2 + (4000 - 0,88\rho)^2 + (150 - 0,49\rho)^2. \quad (8.3)$$

A derivada desta função é:

$$\frac{df}{d\rho} = 2(3.39\rho - 14066). \quad (8.4)$$

Pesquisando o zero e o sinal da derivada, obtém-se um mínimo para de $\rho=4149$ Ω m.

O resultado obtido pode ser mais facilmente calculado usando a fórmula de Rudenberg, para os três casos, e construindo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2\pi \cdot 0,5} \ln \frac{2 \cdot 0,5}{0,008} &= 6800; \\ \frac{\rho}{2\pi \cdot 1} \ln \frac{2 \cdot 1}{0,008} &= 4000; \\ \frac{\rho}{2\pi \cdot 2} \ln \frac{2 \cdot 2}{0,008} &= 150. \end{aligned} \quad (8.5)$$

O sistema simplificado tem o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}
 1,54\rho &= 6800, \\
 0,88\rho &= 4000, \\
 0,49\rho &= 150.
 \end{aligned}
 \tag{8.6}$$

Representando o sistema vectorialmente e pré-multiplicando ambos os termos pela transposta da matriz dos coeficientes, obtém-se uma única equação na resistividade e o mesmo valor: 4149Ωm.

A variação da função objectivo com a resistividade do solo, pode ser observada na figura 8.1. Com o valor da resistividade obtido, calcularam-se as resistências para as três varas, apresentadas na tabela 8.2. O resultado é totalmente insatisfatório para a terceira medida.

Tabela 8. 2 Resistência medida e simulada

Comprimento (m)	0,5	1	2
Resistência medida (Ω)	6800	4000	150
Resistência simulada (Ω)	6377	3646	2052
Erro em % do valor simul.	-6,2	-8,9	1268

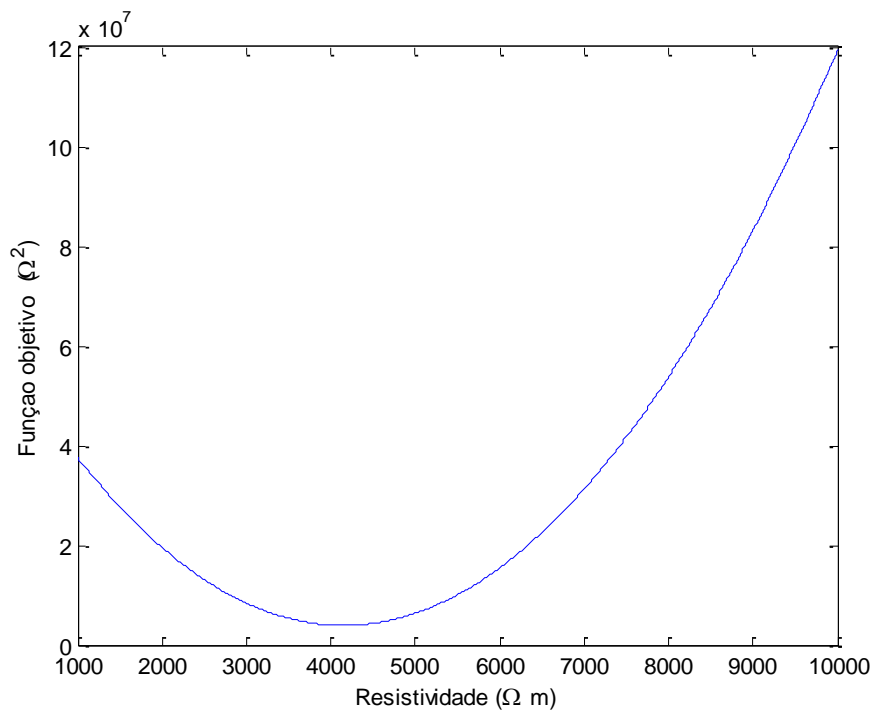


Fig. 8. 1 Variação da função objectivo em solo homogéneo.

Solos homogéneos, apesar de não fornecerem um modelo adequado, podem, contudo, dar um majorante para a resistência de difusão de um eléctrodo de terra, bastando, para tal, usar o maior valor das resistividades medidas por este processo, ou obtidas pelo método de Wenner.

Da mesma forma se pode obter um minorante. O projecto de um eléctrodo usando o majorante pode, no entanto, revelar-se caríssimo.

8.2 Derivadas parciais das fórmulas de Tagg

Como anteriormente se referiu, a optimização dos parâmetros do terreno requer o conhecimento do gradiente. Embora este possa ser calculado numericamente, o conhecimento analítico do vector em causa acelera a convergência dos processos numéricos iterativos. Como a optimização que se pretende fazer parte de um conjunto de medidas de um eléctrodo de teste, normalmente varas, calcularam-se as derivadas parciais das fórmulas de Tagg relativamente às resistividades dos estratos e à espessura do estrato superior.

8.2.1 Vara no estrato superior

Para a vara no estrato superior, a resistência é dada pela equação (4.8). Para o cálculo da derivada parcial segundo a resistividade do estrato superior ρ_s , utiliza-se a seguinte expressão auxiliar:

$$\frac{\partial k^n}{\partial \rho_s} = -\frac{2n\rho_i}{(\rho_s + \rho_i)^2} k^{n-1}. \quad (8.5)$$

A derivada direccional segundo a resistividade do estrato superior ρ_s é:

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_s} = \frac{1}{2\pi l} \left(\ln \frac{4l}{a} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{2} \ln \frac{nh+l}{nh-l} \right) - \frac{\rho_s}{2\pi l} \frac{\rho_i}{(\rho_s + \rho_i)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} nk^{n-1} \ln \frac{nh+l}{nh-l} \right). \quad (8.6)$$

Para o cálculo da derivada parcial segundo a resistividade do estrato inferior ρ_i , apresenta-se a expressão auxiliar:

$$\frac{\partial k^n}{\partial \rho_i} = \frac{2n\rho_s}{(\rho_s + \rho_i)^2} k^{n-1}. \quad (8.7)$$

A derivada segundo a resistividade do estrato inferior ρ_i , é:

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_i} = \frac{1}{2\pi l} \frac{\rho_s^2}{(\rho_s + \rho_i)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} nk^{n-1} \ln \frac{nh+l}{nh-l} \right). \quad (8.8)$$

Para o cálculo da derivada parcial segundo a espessura do estrato superior, usou-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial h} \ln \frac{nh+l}{nh-l} = \frac{2nl}{l^2 - (nh)^2}. \quad (8.9)$$

A última derivada parcial é:

$$\frac{\partial R}{\partial h} = \frac{\rho_s}{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{n}{l^2 - (nh)^2} \right]. \quad (8.10)$$

Para detectar erros no cálculo das derivadas, efectuou-se uma comparação com a derivada numérica. Assim, considerou-se um eléctrodo de um metro de comprimento enterrado num solo com resistividade do estrato superior de 500 Ωm , espessura de 1,5 m, e resistividade do

estrato inferior de 100 Ωm . Incrementaram-se as resistividades e a espessura do estrato superior de 1%, mas apenas um incremento de cada vez. Os resultados apresentam-se na tabela seguinte, 8.3.

Tabela 8. 3 Acréscimos e resistência calculada em torno de um ponto (500 100 1.5)

Resistividade superior (Ωm)	estrato	Resistividade inferior (Ωm)	estrato	Espessura do estrato superior (m)	Resistência (Tagg) (Ω)
500		100		1,5	380,9181
505		100		1,5	384,6103
500		101		1,5	381,0348
100		500		1,515	381,4495

Partindo dos resultados da tabela anterior, pode obter-se uma aproximação à derivada analítica, que se apresenta na tabela 8.4.

Tabela 8. 4 Derivadas parciais numéricas obtidas da tabela 8.3

$\Delta\rho_s=5$ (Ωm)	$\Delta R=3,6922$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_s=0,7384$ (m^{-1})
$\Delta\rho_i=1$ (Ωm)	$\Delta R=0,1167$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_i=0,1167$ (m^{-1})
$\Delta h=0,015$ (m)	$\Delta R=0,5314$ (Ω)	$\Delta R/\Delta h=35,4267$ (m^{-1})

O gradiente analítico, usando as fórmulas deduzidas é: $0,7388i+0,1163j+36,2003k$. O erro relativo, calculado para o menor dos valores em comparação, é menos de 1% para as primeiras duas componentes e 2,2 % para a derivada, segundo a espessura do estrato.

Num segundo teste, trocaram-se as resistividades dos dois estratos, considerou-se uma vara de meio metro, num solo com uma espessura do estrato superior de 1 m. Apresentam-se na tabela 8.5, os acréscimos da função quando se consideram acréscimos isolados das três variáveis em estudo.

Tabela 8. 5 Derivadas parciais numéricas em torno do ponto (100,500,1)

$\Delta\rho_s=1$ (Ωm)	$\Delta R=1,4888$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_s=1,4888$ (m^{-1})
$\Delta\rho_i=5$ (Ωm)	$\Delta R=0,135$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_i=0,027$ (m^{-1})
$\Delta h=0,01$ (m)	$\Delta R=-0,2102$ (Ω)	$\Delta R/\Delta h=-21,02$ (m^{-1})

A derivação analítica, usando as fórmulas desenvolvidas, tem como resultado $1,4879i+0,0271j-21,13k$. As diferenças entre os valores da derivada, na tabela 8.5, e os valores analíticos, são percentualmente inferiores a 0,6%, considerando o menor dos valores comparados como referência.

8.2.2 Cabo no estrato superior

Para um cabo no estrato superior a resistência é dada por [8]:

$$R = R_h + R_a. \quad (8.11)$$

A fórmula da resistência tem duas componentes: uma relativa à resistência em solo homogêneo R_h , com a resistividade igual à do estrato superior, outra, R_a que considera o acréscimo, ou decréscimo, provocado pelo segundo estrato, sendo esta última da autoria de Tagg. Para a primeira componente, usou-se a fórmula de Meliopoulos dada em (4.9). A componente R_a é dada por [8]:

$$R_a = \frac{2\rho_s}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\frac{2nh}{l}} + \frac{2nh}{l} - \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1} \right]. \quad (8.12)$$

Foram calculadas as derivadas parciais, segundo as variáveis do terreno, necessárias ao cálculo do gradiente, que, para a resistividade do estrato superior envolve as duas componentes: R_h e R_a . A derivada, segundo a resistividade do estrato superior, para a equação (4.9) é fácil de obter. Para a equação (7.12) é necessário aplicar a regra do produto e usar a derivada do coeficiente de reflexão k , já expressa na equação (8.5). A derivada em ρ_s é a seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \rho_s} &= \frac{1}{2\pi l} \left(\ln \frac{l}{r} + \ln \frac{l}{2p} \right) + \frac{2}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\frac{2nh}{l}} + \frac{2nh}{l} - \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1} \right] - \\ &\frac{4\rho_s\rho_i}{\pi l(\rho_s + \rho_i)^2} \sum_{n=1}^{\infty} nk^{n-1} \left[\ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\frac{2nh}{l}} + \frac{2nh}{l} - \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1} \right]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Para a derivada em ρ_i , tem que se usar de novo a derivada do coeficiente de reflexão de tensão, mas, agora, em ordem à resistividade do estrato inferior, conforme a equação (8.7):

$$\frac{\partial R}{\partial \rho_i} = \frac{4\rho_s^2}{\pi l(\rho_s + \rho_i)^2} \sum_{n=1}^{\infty} nk^{n-1} \left[\ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\frac{2nh}{l}} + \frac{2nh}{l} - \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1} \right]. \quad (8.14)$$

Finalmente para a derivada segundo h tem-se:

$$\frac{\partial R}{\partial h} = \frac{2\rho_s}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{\partial}{\partial h} \left[\ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\frac{2nh}{l}} + \frac{2nh}{l} - \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1} \right]. \quad (8.15)$$

A derivada do logaritmo é:

$$\frac{\partial}{\partial h} \ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\frac{2nh}{l}} = \frac{\frac{\partial}{\partial h} \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\frac{2nh}{l}}}{\frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\frac{2nh}{l}}}. \quad (8.16)$$

O factor $1/2n/l$ é simplificável. Derivando a fracção do numerador principal obtém-se:

$$= \frac{\frac{4n^2h}{l^2} \cdot 1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1} \cdot h} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}. \quad (8.17)$$

A expressão anterior, devidamente simplificada conduz a:

$$= -\frac{1}{h \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}. \quad (8.18)$$

Trabalhando a equação (8.15) e simplificando-a apresenta-se a derivada segundo h :

$$\frac{\partial R}{\partial h} = \frac{2\rho_s}{\pi l} \sum_1^\infty k^n \left[\frac{2n}{l} - \frac{\sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{h} \right]. \quad (8.19)$$

Executou-se uma validação numérica aproximada, tendo-se utilizado um cabo de 10 m, 4 mm de raio, colocado no estrato superior a 0,5 m, de um solo, cujas características estão listadas na primeira linha da tabela 8.6. Variaram-se os três parâmetros do terreno e calculou-se a resistência do cabo, com os resultados constantes da referida tabela.

Tabela 8. 6 Resistência calculada em torno de um ponto inicial ($k=2/3$)

Resistividade estrato superior (Ω m)	Resistividade estrato inferior (Ω m)	Espessura do estrato superior (m)	Resistência (Tagg)(Ω)
100	500	1	28,1851
101	500	1	28,3641
100	501	1	28,2055
100	500	1,01	28,1065

Com base nesta tabela calculam-se os acréscimos das variáveis e o seu quociente apresentados na tabela 8.7.

Tabela 8. 7 Derivadas parciais numéricas, obtidas da tabela 8.6

$\Delta\rho_s=1$ (Ω m)	$\Delta R=0,1790$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_s=0,1790$ (m-1)
$\Delta\rho_i=1$ (Ω m)	$\Delta R=0,0204$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_i=0,0204$ (m-1)
$\Delta h=0,01$ (m)	$\Delta R=-0,0786$ (Ω)	$\Delta R/\Delta h=-7,86$ (m-1)

A última coluna contém as aproximações às derivadas parciais da função. A partir das fórmulas acima deduzidas obtém-se um vector gradiente cujas componentes são: (0,1792;0,0203;-7,8076). A comparação entre os valores da derivada analítica e da derivada

numérica, usando o menor dos valores como referência, apresenta erros percentuais de (0,11;0,49;0,64). No pior dos casos o erro é inferior a 0,7%.

Numa segunda simulação trocaram-se os valores das resistividades dos estratos. A tabela 8.8 lista os resultados obtidos.

Tabela 8. 8 Resistência calculada em torno de um ponto inicial (k=-2/3)

Resistividade estrato superior (Ωm)	Resistividade estrato inferior (Ωm)	Espessura do estrato superior (m)	Resistência (Tagg) (Ω)
500	100	1	58,1664
501	100	1	58,2692
500	101	1	58,2341
500	100	1,01	58,2782

Com base nesta tabela, calcularam-se os acréscimos das variáveis apresentadas na tabela 8.9.

Tabela 8. 9 Cálculo das derivadas numéricas (k=-2/3) para a tabela 8.8

$\Delta\rho_s=1$ (Ωm)	$\Delta R=0,1028$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_s=0,1028$ (m-1)
$\Delta\rho_i=1$ (Ωm)	$\Delta R=0,0677$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_i=0,0677$ (m-1)
$\Delta h=0,01$ (m)	$\Delta R=0,1118$ (Ω)	$\Delta R/\Delta h=11,18$ (m-1)

A última coluna contém as aproximações às derivadas parciais da função. A partir das fórmulas acima deduzidas obtém-se um vector gradiente cujas componentes são: (0,1028;0,0669;11,2660). O maior erro, calculado da forma anteriormente indicada, é inferior a 1,3%.

8.2.3 Vara em dois estratos

A resistência de uma vara que atravessa o estrato superior, chegando ao inferior, é dada pela equação (4.18). Para se obter a derivada parcial relativamente a ρ_s , note-se que R é o produto de três factores, pelo que a derivada obtém-se através da seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \rho_s} &= \frac{1}{2\pi l} \frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \left[\ln \frac{2l}{a} + \sum_1^{\infty} k^n \ln \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right] \\ &\quad + \frac{\rho_s}{2\pi l} \frac{\partial}{\partial \rho_s} \left(\frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \right) \left[\ln \frac{2l}{a} + \sum_1^{\infty} k^n \ln \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right] + \\ &\quad \frac{\rho_s}{2\pi l} \frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \left[0 + \frac{\partial}{\partial \rho_s} \sum_1^{\infty} k^n \ln \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right]. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Considerando que:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_s} \left(\frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \right) = \frac{-4\rho_i}{(\rho_s+\rho_i)^2} \frac{1-\frac{h}{l}}{\left(1-k+2k\frac{h}{l}\right)^2}, \quad (8.21)$$

e usando a equação (8.5) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \rho_s} = & \frac{1}{2\pi l} \left[\frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} - \frac{4\rho_i\rho_s}{(\rho_s+\rho_i)^2} \frac{1-\frac{h}{l}}{\left(1-k+2k\frac{h}{l}\right)^2} \right] \left[\ln \frac{2l}{a} + \sum_1^\infty k^n \ln \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right] - \\ & \frac{2\rho_i\rho_s}{2\pi l(\rho_s+\rho_i)^2} \frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \left[\sum_1^\infty nk^{n-1} \ln \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

A derivada parcial relativamente à resistividade do estrato inferior exige menos trabalho.

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \rho_i} = & \frac{\rho_s}{2\pi l} \frac{4\rho_s}{(\rho_s+\rho_i)^2} \frac{1-\frac{h}{l}}{\left(1-k+2k\frac{h}{l}\right)^2} \left[\ln \frac{2l}{a} + \sum_1^\infty k^n \ln \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right] + \\ & \frac{2\rho_s^2}{2\pi l(\rho_s+\rho_i)^2} \frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \left[\sum_1^\infty nk^{n-1} \ln \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Para o cálculo da derivada parcial, relativamente à espessura do estrato superior, apresentam-se alguns resultados intermédios.

$$\frac{\partial}{\partial h} \frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} = -\frac{2k}{l} \frac{1+k}{\left(1-k+2k\frac{h}{l}\right)^2}. \quad (8.24)$$

Derivada do argumento do logaritmo:

$$\frac{\partial}{\partial h} \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} = \frac{2l}{[(2n-2)h+l](2nh+l)}. \quad (8.25)$$

Finalmente, obtém-se a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial h} = & \frac{\rho_s}{\pi} \frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \left[\sum_1^\infty \frac{k^n}{[(2n-2)h+l](2nh+l)} \right] - \\ & \frac{\rho_s k}{\pi l^2} \frac{1+k}{\left(1-k+2k\frac{h}{l}\right)^2} \left[\ln \frac{2l}{a} + \sum_1^\infty k^n \ln \frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right]. \end{aligned} \quad (8.26)$$

É de referir que a validação das fórmulas deduzidas e das rotinas realizadas foi efectuada nos mesmos moldes dos casos anteriores. Apresenta-se a tabela 8.10 com o cálculo da resistência em torno do ponto inicial (500,100,1), alterando-se ligeiramente cada uma das variáveis, a fim de construir uma tabela de acréscimos, onde se apresenta o resultado dos quocientes dos referidos acréscimos, bem como da variável dependente dividida por cada uma das variáveis independentes, apresentando os resultados na tabela 8.11.

Tabela 8. 10 Resistência em torno de um ponto inicial ($k=-2/3$) para vara longa

Resistividade estrato superior (Ωm)	Resistividade estrato inferior (Ωm)	Espessura do estrato superior (m)	Resistência (Tagg) (Ω)
500	100	1	125,0909
505	100	1	125,4153
500	101	1	125,9991
500	100	1,01	126,4619

Tabela 8. 11 Derivadas numéricas, obtidas da tabela 8.10

$\Delta\rho_s=5$ (Ωm)	$\Delta R=0,3244$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_s=0,0649$ (m^{-1})
$\Delta\rho_i=1$ (Ωm)	$\Delta R=0,9082$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_i=0,9082$ (m^{-1})
$\Delta h=0,01$ (m)	$\Delta R=1,3710$ (Ω)	$\Delta R/\Delta h=137,10$ (m^{-1})

A última coluna contém as aproximações às derivadas parciais da função. A partir das fórmulas acima deduzidas obtém-se um vector gradiente cujas componentes são: (0,0652;0,9244;134,5). Convém salientar que em todos os casos os desvios são menores que 2%.

Trocando as resistividades do meio repetiram-se as simulações apresentadas na tabela 8.12.

Tabela 8. 12 Resistência calculada para em torno de um ponto inicial ($k=2/3$)

Resistividade estrato superior (Ωm)	Resistividade estrato inferior (Ωm)	Espessura do estrato superior (m)	Resistência (Tagg) (Ω)
100	500	1	99,6815
101	500	1	100,4695
100	505	1	99,8791
100	500	1,01	99,0315

Com base nesta tabela calculam-se os acréscimos das variáveis resumidas na tabela 8.13.

Tabela 8. 13 Derivadas numéricas obtidas de tabela 8.12

$\Delta\rho_s=1$ (Ωm)	$\Delta R=0,7880$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_s=0,7880$ (m^{-1})
$\Delta\rho_i=5$ (Ωm)	$\Delta R=0,1976$ (Ω)	$\Delta R/\Delta\rho_i=0,0395$ (m^{-1})
$\Delta h=0,01$ (m)	$\Delta R=-0,6500$ (Ω)	$\Delta R/\Delta h=-65,00$ (m^{-1})

A última coluna contém as aproximações às derivadas parciais da função. As fórmulas acima deduzidas produzem um vector gradiente cujas componentes são: (0,7977;0,0395;-65,38). Neste caso os erros são novamente inferiores a 2%.

8.3 O método do gradiente aplicado a eléctrodos de terra

Num problema de optimização o objectivo é optimizar, minimizando ou maximizando, uma função f , chamada função objectivo [99]. Esta depende de múltiplas variáveis x_1, \dots, x_n , chamadas de variáveis de controlo, uma vez que permitem, mediante escolha acertada, obter o máximo ou o mínimo da função. As variáveis de controlo têm algumas restrições, por exemplo: se representarem a resistividade de um solo não podem ser negativas.

Se uma função tem um mínimo em um ponto x_0 , então:

$$\nabla f(x_0) = 0. \quad (8.27)$$

Esta condição, sendo necessária, não é suficiente para que haja mínimo, dado que o gradiente também se anula nos pontos de inflexão.

O método do gradiente, inventado por Cauchy em 1847 [99], calcula o mínimo de f , calculando repetidamente o mínimo de uma função $g(t)$. Suponhamos que f tem um mínimo em x_0 e que x é um qualquer ponto de partida. O objectivo é procurar um mínimo de f , próximo de x ao longo da recta dada pela direcção do máximo decrescimento, ou seja, por:

$$-\nabla f(x). \quad (8.28)$$

Considere-se a seguinte função auxiliar [99]:

$$z(t) = x - t\nabla f(x). \quad (8.29)$$

Define-se a função g da seguinte maneira [99]:

$$g(t) = f[z(t)]. \quad (8.30)$$

Procura-se o valor do parâmetro t que minimiza a função g . O valor de t , assim encontrado, permite definir um novo ponto de aproximação ao mínimo, usando a equação (8.29).

8.3.1 Optimização para vara em dois estratos

Pretende-se conseguir um modelo de solo de dois estratos, a partir da medida da resistência de uma vara de 2 m. O valor medido foi de 131 Ω . A função objectivo, a minimizar, é a seguinte:

$$f(\rho_s, \rho_i, h) = [R_m - R_{Tagg}(\rho_s, \rho_i, h)]^2, \quad (8.31)$$

em que:

R_m : Valor medido

R_{Tagg} : Valor calculado pela fórmula de Tagg.

Definindo o triplete $x = (\rho_s, \rho_i, h)$, obter-se-á uma representação mais sucinta de f .

$$f(x) = [R_m - R_{Tagg}(x)]^2. \quad (8.32)$$

Considere-se a seguinte função auxiliar:

$$z(t) = x - t\nabla f(x). \quad (8.33)$$

O gradiente de f é:

$$\nabla f = 2[R_m - R_{\text{Tagg}}(x)][-\nabla R_{\text{Tagg}}(x)]. \quad (8.34)$$

A equação (8.33) fica com o seguinte aspecto:

$$z(t) = x + 2t[R_m - R_{\text{Tagg}}(x)][\nabla R_{\text{Tagg}}(x)]. \quad (8.35)$$

Partindo de uma estimativa inicial x_0 calcula-se z , seguidamente obtém-se $f^{\circ}z$ e verifica-se qual o t que minimiza a função $f[z(t)]$. O valor que minimiza (8.32), permite obter uma estimativa x_1 usando (8.33). Particularizando para o caso em questão e usando uma estimativa inicial $x_0 = (2000,470,1)$, tem-se para a equação (8.32):

$$f(x) = [131 - R_{\text{Tagg}}(x)]^2. \quad (8.36)$$

Sabendo que a fórmula de Tagg fornece o valor de 357 Ω , e que o parêntesis recto vale -226 Ω $z(t)$ fica com o seguinte valor usando a equação (8.35):

$$z(t) = x - 452t[\nabla R_{\text{Tagg}}(x)]. \quad (8.37)$$

O gradiente no ponto considerado vale:

$$\nabla R_{\text{Tagg}} = 0,0303\hat{i} + 0,6308\hat{j} + 205\hat{k}. \quad (8.38)$$

A expressão (8.37) fica com o seguinte aspecto:

$$z(t) = (2000 - 8t)\hat{i} + (470 - 159t)\hat{j} + (1 - 51771t)\hat{k}. \quad (8.39)$$

As componentes de $z(t)$ deverão ser todas positivas, para terem significado físico, e adicionalmente a terceira delas deve ser menor do que 2, garantindo que a vara atinge o estrato inferior. Assim, o intervalo de variação de t só poderá ser:

$$-1.9 \times 10^{-5} < t < 1.9 \times 10^{-5}. \quad (8.40)$$

Como para t negativo as resistividades crescem, dado que o valor de Tagg é já maior do que o valor real, colocou-se o limite inferior a zero. As componentes de $z(t)$ serão usadas na equação (8.36). Esta deveria ser derivada para se pesquisar o zero da derivada. Dada a complexidade da função, optou-se pela representação gráfica de $f[g(t)]$, apresentada na figura 8.2.

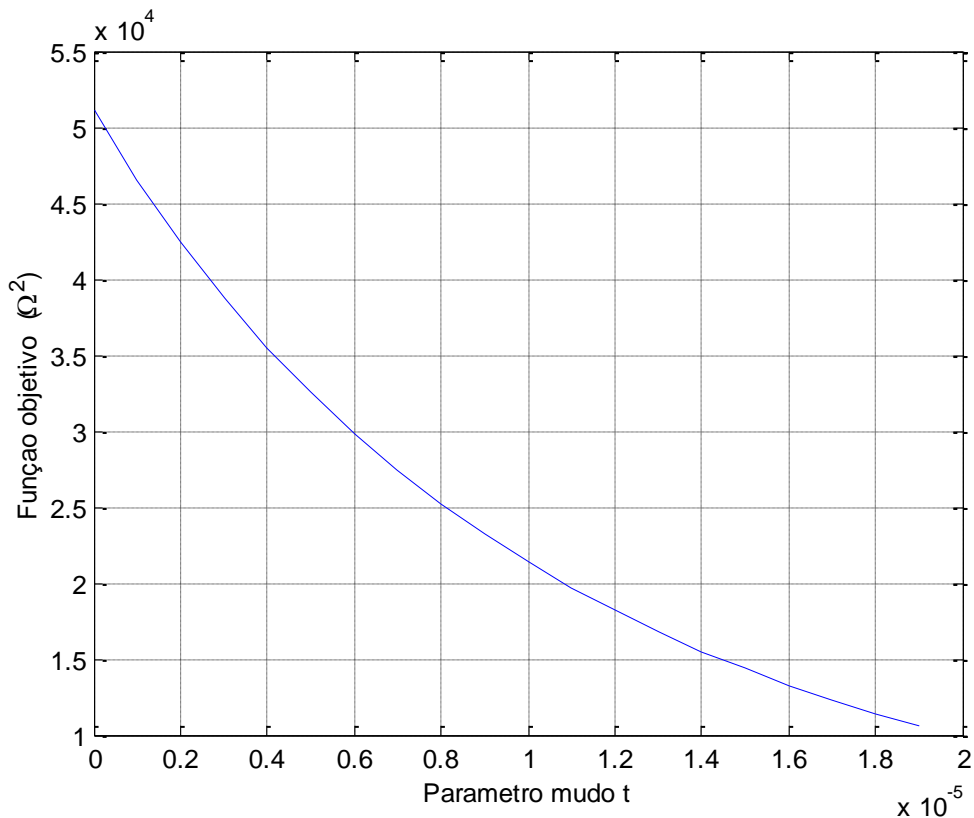


Fig. 8. 2 Variação da função objetivo para vara longa, 1ª iteração

A função decresce com o decréscimo das suas componentes, pelo que não há um mínimo. Fisicamente, se diminuirmos as resistividades das duas camadas e a espessura da camada superior mais resistiva, a resistência da vara decresce. Se for usado o valor mais à direita no intervalo de t obtém-se, para a espessura do estrato superior, o valor de 16 mm ficando a camada superior quase inexistente. Escolheu-se $t = 1,2 \times 10^{-5}$. Com este valor de t introduzido na equação (8.39), as resistividades ficam praticamente com o mesmo valor mas a espessura do estrato superior fica com um novo valor de 0,38 m. Assim, tem-se $x_1 = (2000,470,0.38)$. Para este triplete a fórmula de Tagg fornece o valor de 226 Ω, bem mais perto do valor medido do que os 357 Ω fornecidos pela estimativa inicial.

Para uma segunda iteração considera-se o novo ponto de partida x_1 , mas forçou-se a derivada segundo h , espessura do estrato superior, a ser zero. Parte-se, assim, para o ajuste das resistividades, assumindo-se que a espessura do estrato superior está obtida e já não varia. Com o valor de x_1 , $z(t)$ será:

$$z(t) = (2000 - 2,78t)\hat{i} + (470 - 254t)\hat{j} + 0,38\hat{k}. \quad (8.41)$$

A representação gráfica de $f[g(t)]$ é apresentada na figura seguinte, 8.3.

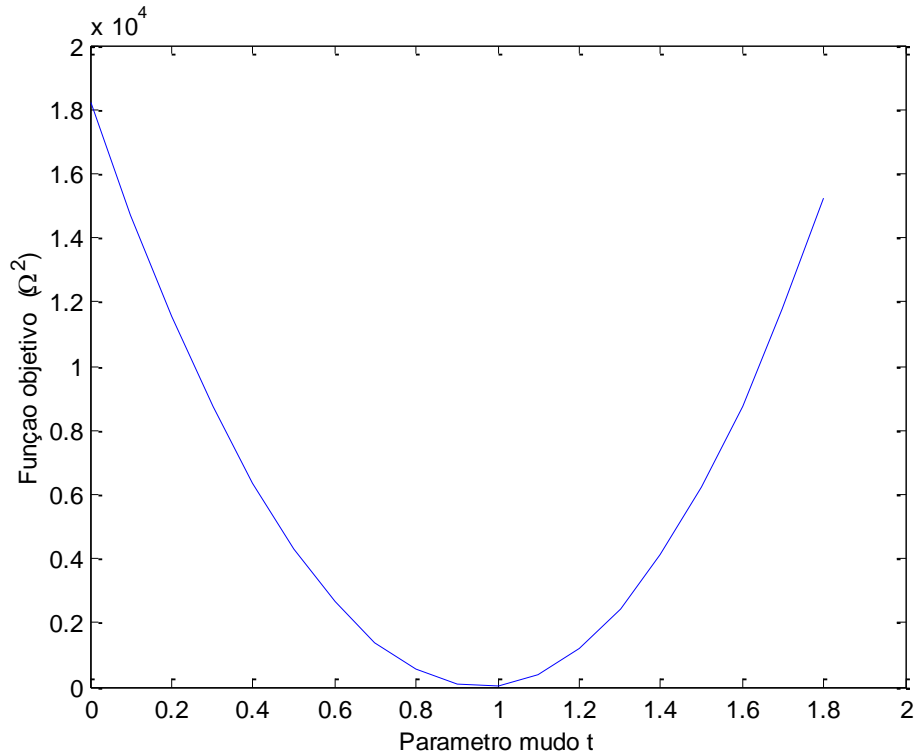


Fig. 8. 3 Variação da função objetivo para vara longa (2ª iteração)

Escolhendo $t=1$, obtém-se, usando (8.41) o triplo (1997, 216, 0,38), como solução ótima. A fórmula de Tagg permite obter um valor de $R=126 \Omega$, 5Ω a menos do que o valor medido.

O processo anterior obriga a desenhar gráficos a cada iteração, devido à complexidade da função a derivar. Procurou-se uma solução alternativa para este problema. Trata-se de resolver a equação seguinte:

$$R_{Tagg}(\rho_s, \rho_i, h) - 131 = 0, \quad (8.42)$$

em que R é a fórmula de Tagg para vara em dois estratos dado pela equação (4.18). Esta equação tem três incógnitas, pelo que se podem escolher duas delas e calcular a terceira, significando isto que existe um número infinito de soluções, logo de modelos de dois estratos. Pode procurar-se uma solução para a terceira variável pela fórmula de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (8.43)$$

Sabendo, pelo estudo anterior, que é a espessura do estrato superior a variável determinante escolhe-se esta como incógnita, sendo as resistividades consideradas dados de entrada. Note-se que:

$$f(h) = R_{Tagg}(\rho_s, \rho_i, h) - 131; \quad (8.44)$$

$$\frac{df}{dh} = \vec{v}R_{Tagg}(3). \quad (8.45)$$

A equação (8.45), significa que a derivada é a terceira componente do gradiente, aproveitando, assim, as rotinas desenvolvidas.

Tal como no exemplo de otimização, supuseram-se as mesmas estimativas iniciais, ou seja, (2000,470,1), o que implica que a estimativa inicial para a espessura do estrato seja de um metro. Como na primeira iteração se obtém um resultado negativo para a referida espessura, sem sentido, considerou-se, então, a resistividade do estrato inferior como a incógnita, já que o gradiente da função referida, em (8.45), indica ser aquela a segunda variável com mais peso. A espessura ficou arredondada a 0,2 e mantida constante a partir daí. Os resultados constam da tabela 8.14 que a seguir se apresenta:

Tabela 8. 14 Resultados das iterações para otimização de uma medida

Incógnita	Número da iteração	x_n	x_{n+1}	Erro (Ω)
Espessura estrato	1	1	-0,10	--
Resistência Estrato Inferior	2	470	242	-2

A solução encontrada para as características do estrato é (2000 242 0,2). A convergência do processo foi grande, em apenas duas iterações.

8.3.2 Otimização para vara no estrato superior

Repetiram-se os processos anteriores para uma vara curta de 0,5 m, com uma resistência medida de 6800 Ω , num solo cuja estimativa inicial era o tripleto [6800 25000 2]. A convergência foi rápida pelo método do gradiente, mas a solução óptima foi o tripleto [4800 25000 330x10³]. Ora, com a espessura do estrato superior de 330 km, o terreno torna-se homogéneo. Neste solo, a resistência calculada para a referida vara é de 6768 Ω , com um erro para o valor medido inferior a 1%.

A otimização, pelo método de Newton, permitiu as seguintes conclusões:

Se a variável a determinar for a resistividade do estrato superior, obtém-se um valor de 4403 Ω m, tendo a resistência prevista da vara um valor de 6763 Ω menos de 1% do que o valor medido.

Se a variável a calcular for a resistividade do estrato inferior, obtém-se um valor negativo para esta, o qual não permite continuar o processo, mesmo assumindo um valor mínimo de 1 Ω m para a referida resistividade nas iterações seguintes.

Se a variável de interesse for a espessura do estrato superior o método diverge com $h_1=16,4$ m e $h_2=911$ m.

Conclusão: O método de Newton é bastante mais simples e fácil de realizar do que o método pelo caminho do gradiente máximo, mesmo que se tenha de mudar a variável em estudo. Na vara curta, ambos os métodos divergem, nomeadamente quando se enfatiza a espessura do estrato superior. Isto acontece, ou porque se permite que a derivada relativamente à

espessura do estrato, dominante, indique a direcção do máximo, ou porque no método de Newton se escolheu a referida espessura como variável de estudo.

8.4 Optimização dos parâmetros do terreno, usando medidas de varas

Como já se referiu, em meio urbano é muito difícil medir os parâmetros do terreno, impedidos que estão, os que trabalham em eléctrodos de terra, de obter uma linha de 30 m a direito, nomeadamente, para colocação das hastes de Wenner. A medida da resistência de um novo eléctrodo, também é dificultada pelo mesmo motivo, pelo que, o hábito de ligar o eléctrodo a medir, à fase, através de um amperímetro, calculando-se a resistência pela lei de Ohm, se tornou uma prática comum, pelo menos em instalações de pequena potência. Um perfil do terreno pode ser obtido à medida que se vai cravando uma vara, medindo a sua resistência nos valores intercalares do enterramento. Como se pretende calcular as três grandezas que caracterizam um solo de dois estratos, uma medida única permite obter um número infinito de soluções, tal como duas medidas, pelo que se sugerem três medidas da vara de teste. Esta seção trata, assim, este caso.

Regressa-se ao problema inicial de obter um modelo de solo conhecendo três medidas de uma vara enterrada listadas na tabela 8.1. O problema será tratado pelo método do gradiente e posteriormente pelo método de Newton.

A função objectivo é dada pela equação (8.2), em que a variável independente é vectorial.

$$x = (\rho_s, \rho_i, h). \quad (8.46)$$

O gradiente da função é:

$$\nabla f = -2 \sum_{i=1}^3 (Rm_i - Rsim_i) \nabla Rsim_i. \quad (8.47)$$

Ou de uma forma mais sucinta e útil para o programador em matlab:

$$\nabla f = -2J^T E, \quad (8.48)$$

sendo J a matriz Jacobiana das funções que permitem calcular a resistência dos eléctrodos e E o vector de erro, entre os valores medidos e os simulados, para os três comprimentos da vara. A optimização será feita pelo método do gradiente, sendo a função auxiliar:

$$z(t) = x_0 - t \nabla f. \quad (8.49)$$

Na estimativa inicial de parâmetros, através da qual se iniciaram as simulações, usou-se para a resistividade do estrato superior o valor obtido na optimização em solo homogéneo que é de 4423 Ωm . Para a resistividade do estrato inferior, aplicou-se à vara de 2 m a fórmula de Rudenberg, para que esta tivesse como resultado a medida efectuada, tendo-se obtido o valor aproximado de 300 Ωm . Para a espessura do estrato superior, considerou-se que as varas de 0,5 e 1 m estão no estrato superior e a de 2 m no estrato inferior. Usou-se, assim, o valor

médio de 1,5 m para a espessura do estrato. O valor da função f , no ponto inicial, é $1,14 \cdot 10^6 \Omega^2$. A matriz Jacobiana, apresenta-se a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1,36 & 0,11 & 227 \\ 0,74 & 0,13 & 401 \\ 0,02 & 1,25 & 671 \end{bmatrix}. \quad (8.50)$$

A derivada segundo a espessura do estrato superior, terceira variável da equação (8.46), é dominante para todas as funções. A função auxiliar fica, assim, definida:

$$z(t) = (4423 + 3050t)\hat{i} + (300 - 410t)\hat{j} + (1,5 - 501.950 \cdot t)\hat{k}, \quad (8.51)$$

submetida às restrições seguintes: as resistividades devem ser positivas, condição para as primeiras duas componentes, e a espessura do estrato superior será maior que 1 e menor que 2, pelo pressuposto que a vara mais longa chega ao nível freático, menos resistivo. O parâmetro t irá variar entre -0,9 e 0,9 micros. O gráfico apresenta-se na figura 8.4:

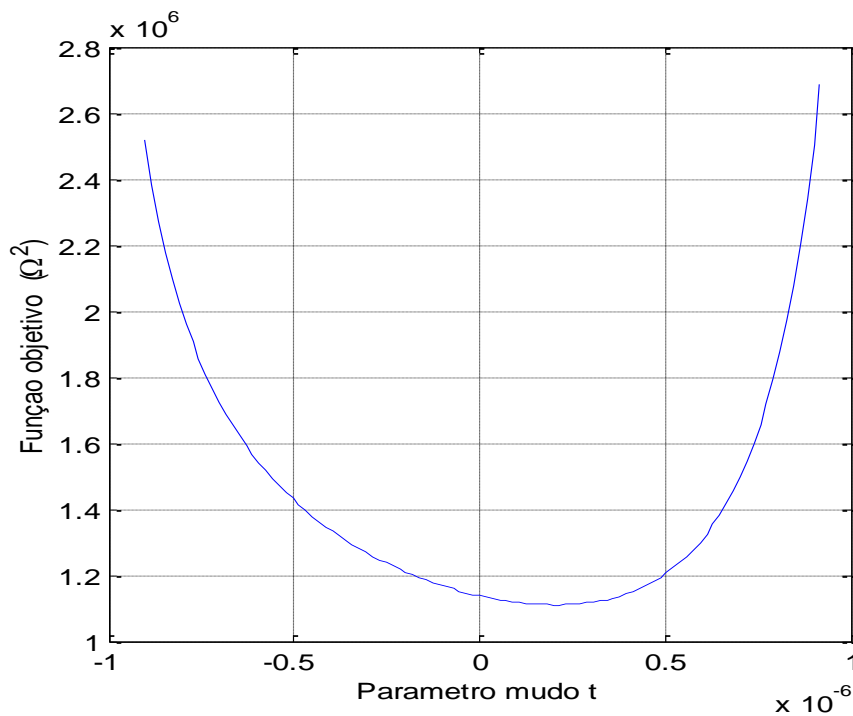


Fig. 8. 4 Variação da função objetivo com o parâmetro t (1ª iteração)

O mínimo da função objetivo, dá-se aos 0,2 micro, mas é de salientar que a função objetivo desce muito ligeiramente de $t=0$ para $t=0,2$ micro. Pode sempre considerar-se a ocorrência do factor “sorte” na escolha da estimativa inicial. O valor da iteração seguinte, usando o mínimo de t em $z(t)$ é:

$$X_1 = [4423 \quad 300 \quad 1,60]. \quad (8.52)$$

A espessura do estrato teve um acréscimo aproximado de 7%, tendo passado de 1,5 para 1,6 m. As restantes variáveis mantiveram o valor. Na segunda iteração obteve-se a seguinte curva, (figura 8.5), com um mínimo a -1 micro. O novo valor é quase idêntico ao anterior com

uma variação de apenas 2 mm na espessura do estrato superior. Partindo destas variáveis a estimativa das varas consta da tabela 8.15.

Tabela 8. 15 Resistências medidas e simuladas para três varas

Comprimento (m)	0,5	1	2
Resistência medida (K Ω)	6,8	4,0	0,150
Resistência simulada (K Ω)	6,1	3,3	0,527
Erro absoluto p/ med. (K Ω)	0,7	0,7	0,377
Erro em % do valor simul.	-10	-17,5	251

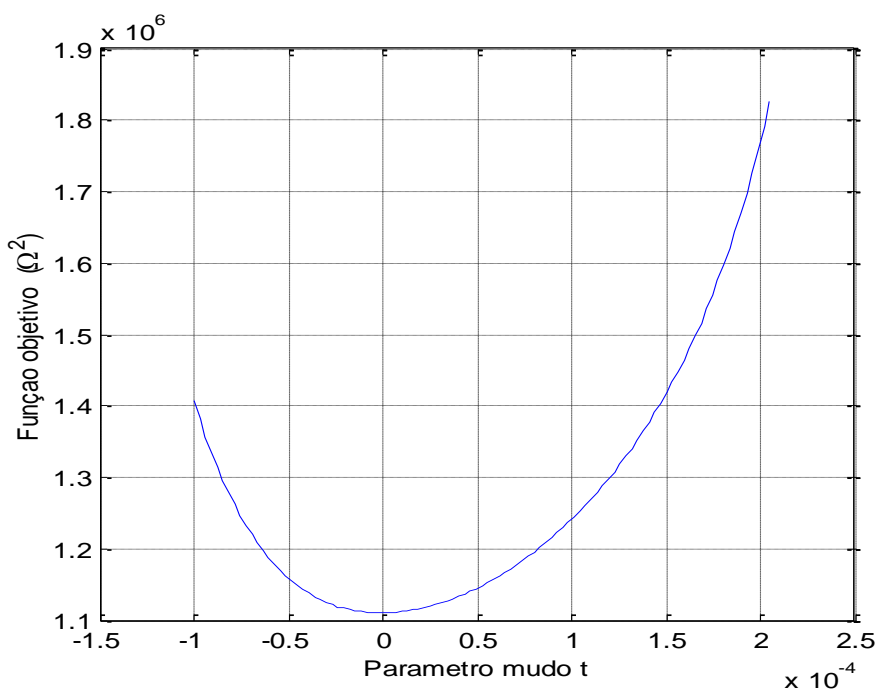


Fig. 8. 5 Variação da função objetivo com o parâmetro t , (2ª iteração)

A otimização detém-se num mínimo local ‘puxado’ pelas varas curtas. O erro da estimativa destas, pela fórmula de Tagg, é de 700 Ω e, para a maior vara, o erro é pouco mais de metade. Os erros relativos são aceitáveis para as varas curtas e totalmente inaceitável para a vara de 2 m. As varas curtas, que se supõem no mesmo estrato, são determinantes no sentido em que geram um mínimo local, devido ao alto valor das suas resistências. Em alternativa, repetiu-se o modelo mas, desta vez dividindo a componente do gradiente por 100 tendo-se obtido os mesmos resultados.

8.5 Obtenção dos parâmetros do terreno pelo método de Newton

O método de Newton para resolução de sistemas de equações não lineares apresenta-se neste parágrafo. Considerando o seguinte sistema de equações:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (8.53)$$

.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (8.54)$$

ou, na forma vectorial [100]:

$$F(x) = 0, \quad (8.55)$$

com:

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T. \quad (8.56)$$

Fazendo a expansão em série vectorial de Taylor no ponto $x^{(0)}$ e usando apenas o primeiro termo [100]:

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^{(0)}) + J(\underline{x}^{(0)})(\underline{x} - \underline{x}^{(0)}), \quad (8.57)$$

sendo J a matriz Jacobiana:

$$J(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\underline{x}^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (8.58)$$

a equação (8.55) pode agora escrever-se na forma:

$$F(\underline{x}^{(0)}) + J(\underline{x}^{(0)})(\underline{x} - \underline{x}^{(0)}) = \underline{0}. \quad (8.59)$$

Definindo Δ como a diferença das incógnitas entre duas iterações, obtém-se [100]:

$$J(\underline{x}^{(k)})\underline{\Delta x}^{(k)} = -F(\underline{x}^{(k)}). \quad (8.60)$$

Assim, em cada iteração do sistema não linear, resolve-se um sistema de equações lineares.

Procurou-se uma solução óptima usando as medidas das três varas e forçando as fórmulas de Tagg a igualarem as três medidas, obtendo-se três equações não lineares nas três variáveis, a saber, as duas resistividades e a espessura do estrato superior. A estimativa inicial é dada pela fórmula de Rudenberg, tendo-se utilizado a vara mais curta para se obter o valor inicial da resistividade do estrato superior e a resistência medida da vara mais longa para a resistividade do estrato inferior. Para a espessura do estrato superior usou-se 1,5 m, valor médio entre 1 e 2 m, já que a descontinuidade da resistividade se situa entre 1 e 2 m. Assim, tem-se:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 4423 \\ 300 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \quad (8.61)$$

$$F(x_0) = \begin{bmatrix} -744 \\ -703 \\ 298 \end{bmatrix}. \quad (8.62)$$

A partir daqui obtém-se a primeira estimativa que é a seguinte:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 4821 \\ -657 \\ 2,8 \end{bmatrix}. \quad (8.63)$$

As fórmulas da Tagg não permitem o uso de resistividades negativas, embora se possa colocar a resistividade do estrato inferior a 1 Ωm para se poder continuar com as iterações. Contudo, o valor da espessura obtido, implica que todas as varas estão no estrato superior o que obriga a mudar de fórmula no que diz respeito à terceira vara. Com este procedimento o método divergiu, fundamentalmente na segunda componente tendo esta passado para 35 $\text{k}\Omega$. Assim, o coeficiente de reflexão de tensão, muda de sinal. Adicionalmente, a espessura do estrato desceu para 0,2 m, ou seja, todas as varas atravessavam o estrato superior, chegando ao estrato inferior.

Um procedimento alternativo será colocar a espessura do estrato superior a 1,5 m, excluir uma equação, neste caso a referente à vara mais curta, e resolver o sistema de duas equações não lineares às resistividades.

$$f_1(\rho_s, \rho_i) = R_{varacurta} - 4000 = 0, \quad (8.64)$$

$$f_2(\rho_s, \rho_i) = R_{varalonga} - 150 = 0. \quad (8.65)$$

A solução, após duas iterações, foi um valor de 5,4 $\text{k}\Omega\text{m}$ para a resistividade do estrato superior e um valor de 88 Ωm para a resistividade do estrato inferior. Apresenta-se a tabela 8.16 contendo a estimativa teórica, usando o modelo de solo obtido.

Tabela 8. 16 Resistências medidas e simuladas para o método de Newton

Comprimento (m)	0,5	1	2
Resistência medida ($\text{k}\Omega$)	6,8	4,0	0,150
Resistência simulada ($\text{k}\Omega$)	7,4	4,0	0,150
Erro absoluto para a medida ($\text{k}\Omega$)	0,6	0,0	0,000
Erro em % do valor simulado	9	0	0

A comparação de valores entre os erros das tabelas 8.15 e 8.16, mostra que o modelo de solo trabalhado nesta última, gera erros menores, quer absolutos quer relativos.

8.6 Conclusões

Em solos homogéneos a função objectivo, na forma de mínimos quadrados, foi otimizada, procurando-se o valor óptimo da resistividade que satisfizesse três medidas de varas. A solução encontrada foi satisfatória para as varas no estrato superior mas totalmente errada para a vara de 2 m que cruza os dois estratos com erros superiores a mil por cento.

Num solo com dois estratos, o método do gradiente só permite uma optimização efectiva para uma medida de eléctrodo. O método de Newton mostrou-se mais rápido, podendo até gerar um número infinito de soluções, dado que se resolve uma equação em três incógnitas.

No caso das três varas, os eléctrodos de maior resistência, as varas curtas, acabam por fixar o vector optimizado num mínimo local, o que gera grandes erros percentuais para as varas longas de menor resistência, que são as de maior interesse. O método de Newton revelou-se mais eficaz e mais rápido na procura de modelos virtuais de terreno, construídos a partir de três medidas. No caso das três varas é preferível fixar a espessura do estrato superior e calcular as resistividades.

Capítulo 9 - Ensaio de campo e de laboratório

Introdução

Pretende-se, no presente capítulo, apresentar o estudo de medidas em tina de água, onde foram simulados eléctrodos, em cabo e vara, em solo homogéneo, e realizados vários ensaios com eléctrodos de terra, permitindo aferir a qualidade dos modelos teóricos desenvolvidos, quer para obter perfis do terreno, quer para estimar a resistência dos eléctrodos.

9.1 Experimentação em tina de água

A distribuição de potencial à superfície, pode ser testada num modelo à escala, usando uma tina metálica com água, com uma resistividade de $100 \Omega\text{m}$, valor próximo dos solos mergulhados em água, ou seja, da resistividade de solos que têm lençol de água. Usou-se, para tal, uma tina com 53 cm de comprimento por 25 cm de largura, tendo a água uma altura de 10 cm e pretendendo-se uma escala de um para cem. Uma das faces da tina era de vidro, forrada internamente por uma grelha de metal, permitindo visualizar os eléctrodos mas garantindo que a superfície interna da face com vidro fosse condutora. Apresenta-se na figura 9.1 a tina usada nas experiências.

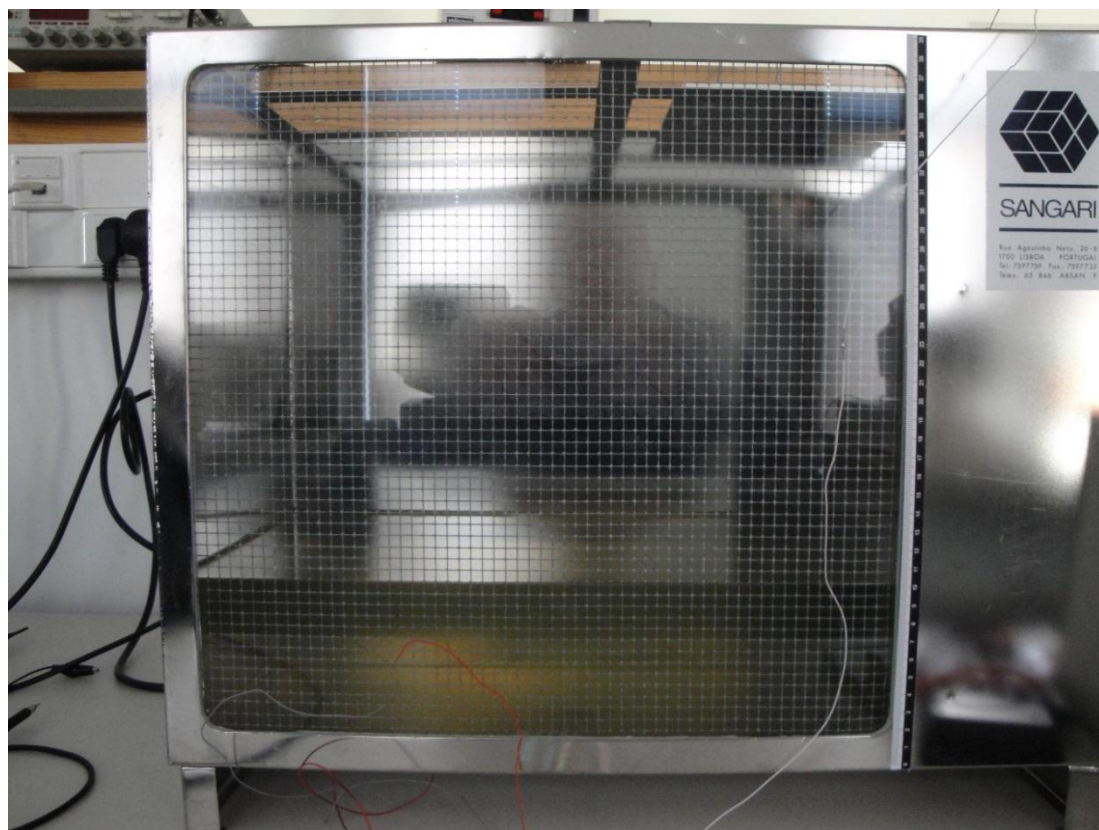


Fig. 9. 1 Tina de ensaios

O primeiro circuito testado, apresenta-se na figura 9.2. Pretendeu-se simular o potencial provocado por uma vara de 2 m, usando-se, para tal, um fio nu de 2 cm, conforme a escala definida anteriormente. Repare-se que o modelo do padrão do IEEE para uma vara de terra, à escala de um para cem é um cilindro de 7,5 cm, fechado por uma semiesfera com o mesmo raio. Com uma largura de 25 cm da tina, o condutor no meio da tina tem 12 cm para cada lado. Em profundidade ter-se-á $2+7,5$ cm, pelo que se colocou a água a 10 cm de altura.

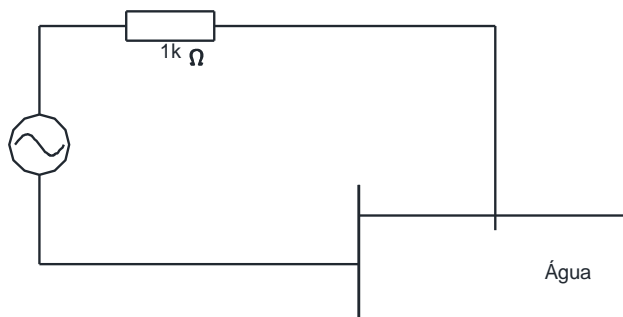


Fig. 9. 2 Circuito com tina de água potável

O potencial, relativamente ao terminal negativo, foi medido à superfície da água, usando o dispositivo apresentado na figura 9.3. O condutor mais comprido simula a vara de terra de comprimento l , enquanto que os outros condutores apenas tocam a superfície da água para se obter uma medida a $l/2$, l e $2l$, ou seja, a 1, 2 e 4 cm.

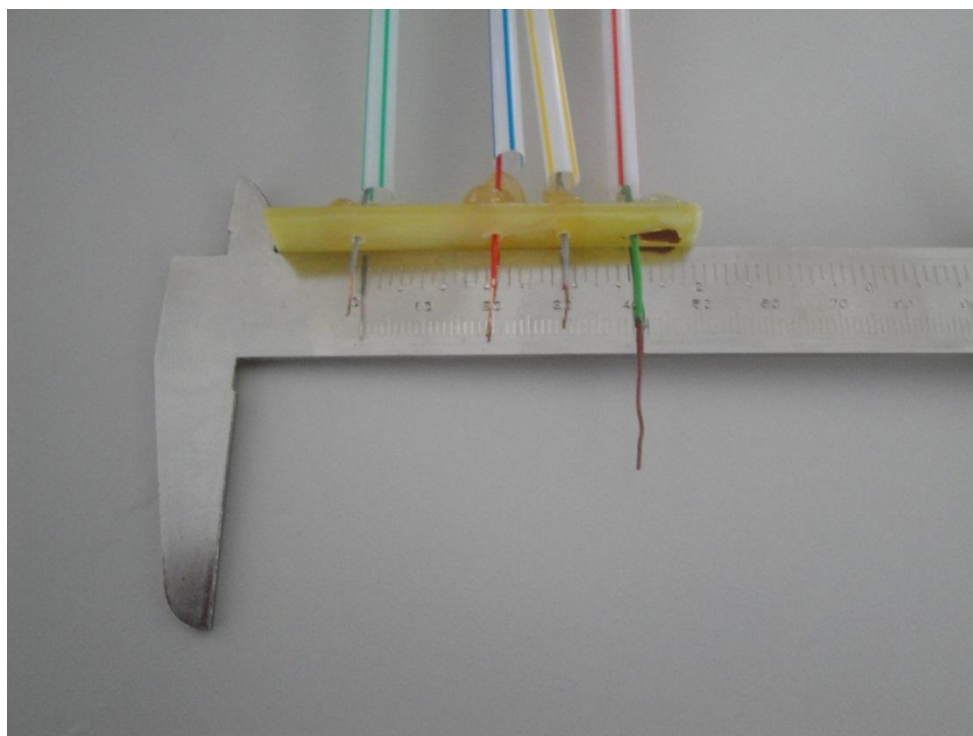


Fig. 9. 3 Eléctrodo à escala e pontos de medida

A diferença de potencial medida nos terminais da resistência foi de 0,5 V, pelo que, a corrente no circuito é de 0,5 mA. A resistência da tina é, pela lei de Ohm, $4,5/0,5 = 9 \text{ k}\Omega$. Conhecida, assim, a ordem de grandeza da corrente, a tensão de alimentação foi aplicada directamente ao eléctrodo. O potencial à superfície do solo, provocado por uma corrente eléctrica I , saída de uma vara enterrada de comprimento l , num solo de resistividade ρ e enterrada rente à superfície é dado pela fórmula de Rudenberg [8]:

$$v = \frac{\rho I}{2\pi} \ln(\cot g(\beta/2)), \quad (9.1)$$

estando o ângulo β está representado na fig. 9.4:

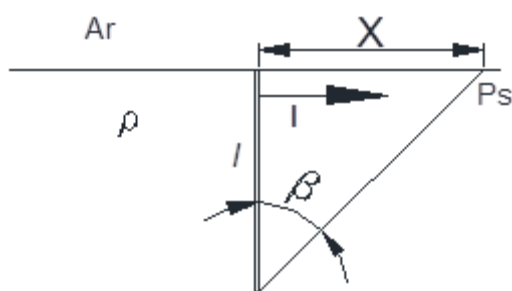


Fig. 9. 4 Parâmetros da fórmula (9.1)

Se o ponto de superfície na figura 9.4 distar $l/2$, l e $2l$ da vara, o argumento do logaritmo fica independente de 'l' em (9.1). Para uma corrente de defeito de 100 A, num solo de resistividade de $100 \text{ }\Omega\text{m}$, para uma vara de 2 m é fácil calcular o potencial de superfície usando (9.1). Se dividirmos o referido potencial pela tensão da vara, dada pelo produto RI , usando a fórmula de Rudenberg, por coerência, (3.26) a qual fornece um valor de $49,45 \text{ }\Omega$, pode obter-se a percentagem de potencial da vara às referidas distâncias na superfície do solo. Os valores referidos foram comparados com os valores de medida, também representados em percentagem do potencial do eléctrodo e apresentados na tabela 9.1. Usou-se uma tensão de alimentação alternada com frequência de 1KHz a fim de se evitarem efeitos electrolíticos. Conclui-se que a concordância ou proximidade entre valores, valida o uso de tina de água para simulações.

Tabela 9. 1 Medidas efectuadas para simular vara em tina

Potencial na vara	Distância ao eléctrodo em comprimentos da vara					
	Metade L/2		Iguar L		Dobro 2L	
4945 V (Teórico)	1146 V	23 %	700 V	14 %	383 V	8 %
10 Vpico alter.(med.)	2,7 Vp	27 %	1,5 Vp	15 %	0,8 Vp	8 %

Note-se que o raio da vara não consta na fórmula (9.1), pelo que se conclui que o potencial à superfície é independente do raio, permitindo a analogia do potencial de uma vara real, conforme se pode verificar na primeira linha de dados da tabela 9.1, com o potencial no

modelo à escala, constando na segunda linha de dados da mesma tabela. Relativamente ao calibre do condutor usado, a escala não foi seguida e os resultados em resistência não podem ser comparados. A resistência do circuito em tina foi de $9\text{ K}\Omega$ e a vara real teria aproximadamente $49\ \Omega$.

Simulou-se um cabo de dez metros de comprimento, usando um fio de 10 cm. O potencial foi medido à superfície, em cinco pontos : a meio do cabo, sobre as pontas e nos pontos médios entre estes, em ambos os lados. Apresenta-se a tina, na figura 9.5, com o suporte do cabo e dos fios de contacto. O cabo foi mergulhado 1 cm na água, que é o equivalente a uma profundidade de um metro de colocação do eléctrodo. Uma manga térmica de 1 cm de comprimento permitiu controlar a profundidade de imersão.



Fig. 9. 5 Fio horizontal imerso e fios de medida de potencial

A figura 9.6, torna claro os pontos de medida.

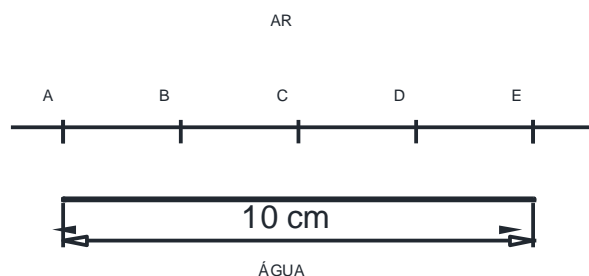


Fig. 9. 6 Fio simulando cabo de 10 m

O potencial foi inicialmente aplicado usando um circuito do género da figura 9.2, tendo-se verificado que a resistência da tina era de $1\text{ K}\Omega$. Posteriormente, removeu-se a resistência,

pelo que se aplicou uma diferença de potencial de 10 V de pico no eléctrodo, à frequência de 1 kHz. Calculou-se o potencial à superfície segundo a recta que contém a projecção do eléctrodo sobre a referida superfície. A fórmula foi obtida a partir da equação com $y = 0$, $p = 1$ e assumindo a abcissa os valores indicados na fig. 9.6 mas em metros. Note-se que o potencial não depende do raio do condutor. A equação deve ser aplicada a um eléctrodo real. Por exemplo, um cabo de 10 m enterrado a uma profundidade de 1 m, num solo de resistividade $100 \Omega\text{m}$, tem uma Resistência de $15,1 \Omega$ e a corrente debitada com uma tensão aplicada ao eléctrodo de 10 Vp é, pela lei de Ohm, $0,664 \text{ Ap}$. Ora, é este valor que deve entrar na expressão (3.31) para I , já que o estudo foi feito usando os valores de pico medidos em osciloscópio. A comparação dos valores medidos com os valores teóricos dados pela fórmula anterior, para cabo de 10 m, enterrado a 1 m de profundidade, apresentam-se na tabela 9.2. A apresentação é diferente da tabela 9.1 a fim de permitir comparar percentualmente os dois modelos: teórico e em tina.

Tabela 9. 2 Comparação de potenciais teóricos e medidos em tina para cabo

Pontos de medida de potencial superficial	A	B	C	D	E
Potencial calculado para cabo real (Vp)	3,2	4,6	4,9	4,6	3,2
Potencial medido (Vp)	3,3	4,8	5,1	4,8	3,4
Erro relativo para o potencial calculado (%)	3,1	4,3	4,1	4,3	6,3

Salienta-se que o maior erro relativo do potencial da tina relativamente ao potencial de um cabo de 10 m é de 6,3 %. Nota-se uma falta de simetria na medida de potencial sobre as extremidades. Os resultados são próximos, pelo que se pode concluir que uma tina de água pode ser usada para estudar a distribuição de potencial à superfície, provocada por um eléctrodo real.

O cabo enterrado, de 10 m, simulado à escala por um condutor de 10 cm, tem um raio original de 3,34 mm. O condutor que foi usado na tina tinha um raio de 0,45 mm. O factor de escala dos calibres é de 7,4 e não de 100. A resistência da tina estava próxima de $1 \text{ k}\Omega$, o que, dividido por 100, daria uma resistência real de 10Ω . Contudo, a resistência do eléctrodo real seria de $14,6 \Omega$, pelo que, a estimativa de 10Ω teria um erro por defeito de 32 %, o qual seria totalmente inaceitável.

9.2 Ensaios de campo, na Vagueira, em Dezembro de 2011

O local escolhido para os ensaios, foi uma zona terraplanada no cordão dunar da ria de Aveiro, na praia da Vagueira. Na manhã do dia 31 efectuaram-se as medidas de resistividade no sentido norte-sul, verificando-se que o solo se encontrava seco. De tarde foram colocados os eléctrodos, tendo-se efectuado as medidas da resistência dos mesmos.

9.2.1 Estratificação do solo

As medidas obtidas no terreno usando o método de Wenner apresentam-se na tabela 9.3:

Tabela 9. 3 Resistividade aparente versus espaçamento de pinças

Distância (m) - A -	0,5	1	2	3	4	5	6	8
Resistividade (Ωm) - ρ -	1734	1301	515	132	101	63	113	101

A curva de resistividade é ilustrada a seguir na figura 9.7.

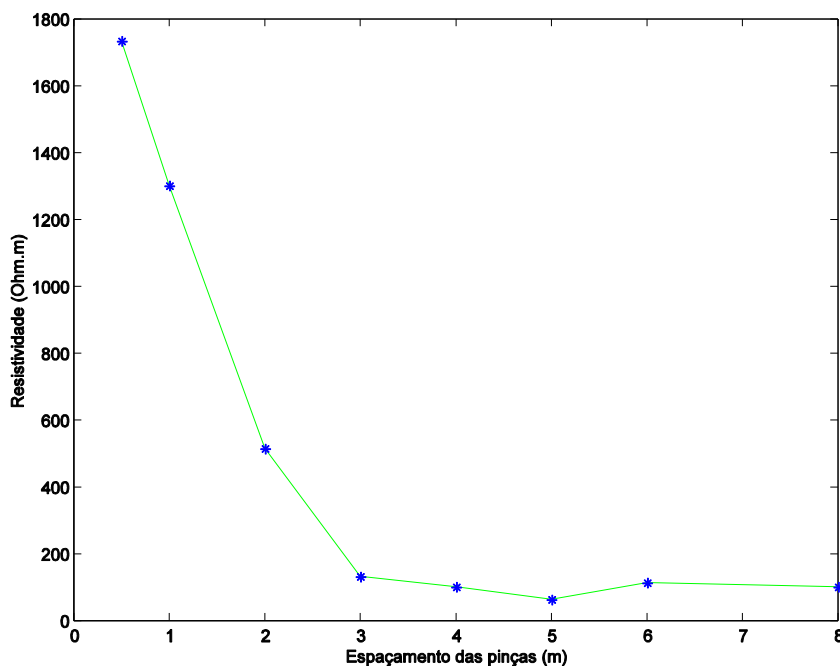


Fig. 9. 7 Variação da resistividade do terreno com a profundidade, em 12/2011

A curva de resistividade não possui a assíntota de superfície, pelo que, esta terá de ser estimada. Este caso foi considerado no capítulo 7. O ponto de menor profundidade, no qual foi medida a resistividade, tem abcissa 0,5 m, pelo que faz sentido usar o critério de R. Cordeiro [39] e associar a resistividade do ponto à resistividade do estrato. Assim, para a resistividade do estrato superior, considera-se o valor de 1734 Ωm . Para a resistividade do estrato inferior, considerou-se a do último ponto, aos 8 m, cuja resistividade é 101 Ωm . Falta, apenas, calcular a espessura do estrato superior.

O método de Tagg simplificado, foi o primeiro a ser considerado. O coeficiente de reflexão de tensão é, usando (4.6), $k = -0,89$. Entrando com este valor no eixo das abcissas da curva $M(a=h)$ obtém-se o valor de 0,72, no eixo das ordenadas, como se pode verificar na figura 9.8:

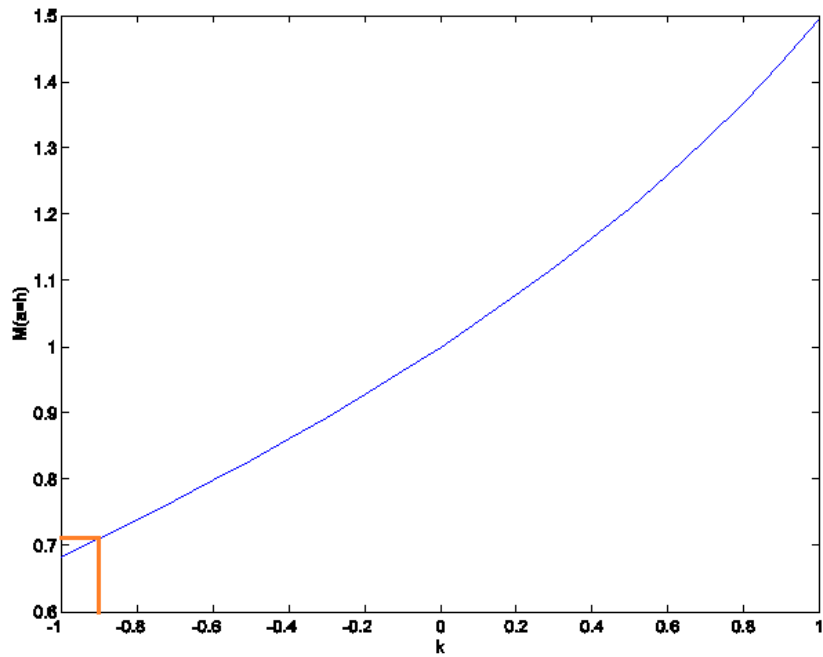


Fig. 9. 8 Curva $M(a=h)$ para ensaios na Vagueira, em Dezembro 2011

Dado que o quociente das resistividades procurado vale 0,72, a resistividade aparente pretendida é de $0,72 \times 1734$, ou seja, de $1248 \Omega\text{m}$. A curva horizontal, com este valor de ordenada, intersecta a curva de resistividade no ponto que indica a espessura do estrato. A referida espessura é de 1,1 m, conforme se pode verificar na figura 9.9:

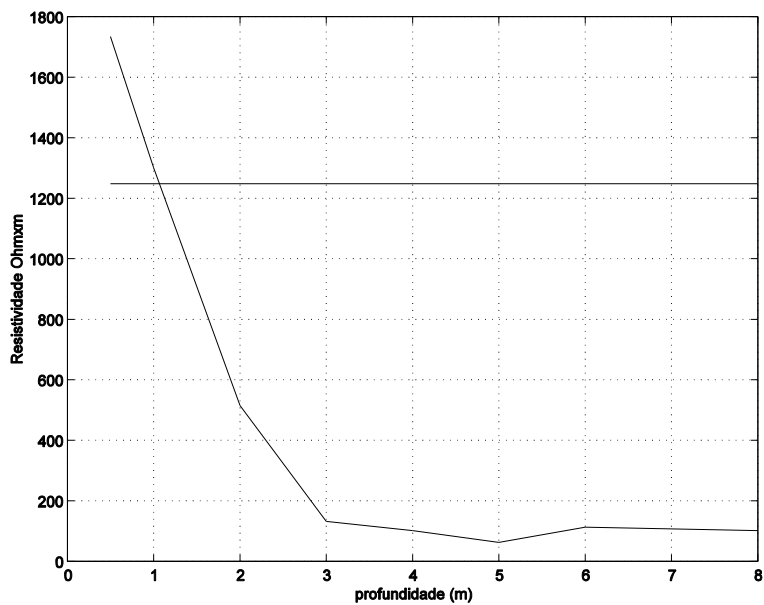


Fig. 9. 9 Obtenção da espessura do estrato pelo método simplificado.

A metodologia proposta pelo padrão do IEEE, obtém, para o quociente entre as duas resistividades, o valor de 0,058, o qual foi aproximado a 0,05, curva especificada na família de curvas consideradas. As curvas padronizadas, apresentam-se na figura 9.10.

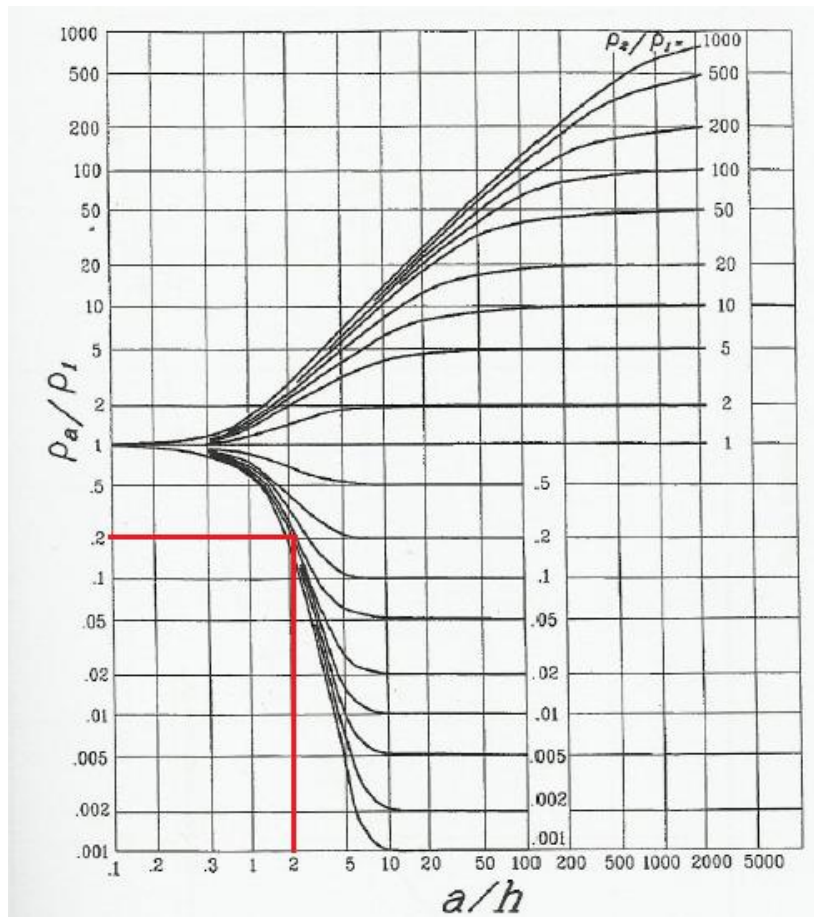


Fig. 9. 10 Curvas de Sunde para ensaios na Vagueira, em Dezembro 2011

A partir do gráfico obtém-se, então:

$$\frac{a}{h} = 2, \tag{9.2}$$

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 0,2. \tag{9.3}$$

O valor da resistividade aparente é, usando (9.3), $\rho_a = 0,2 \times 1734 = 347 \Omega m$. Com esta resistividade, verifica-se qual a separação associada na curva de resistividade, repetida na figura 9.11.

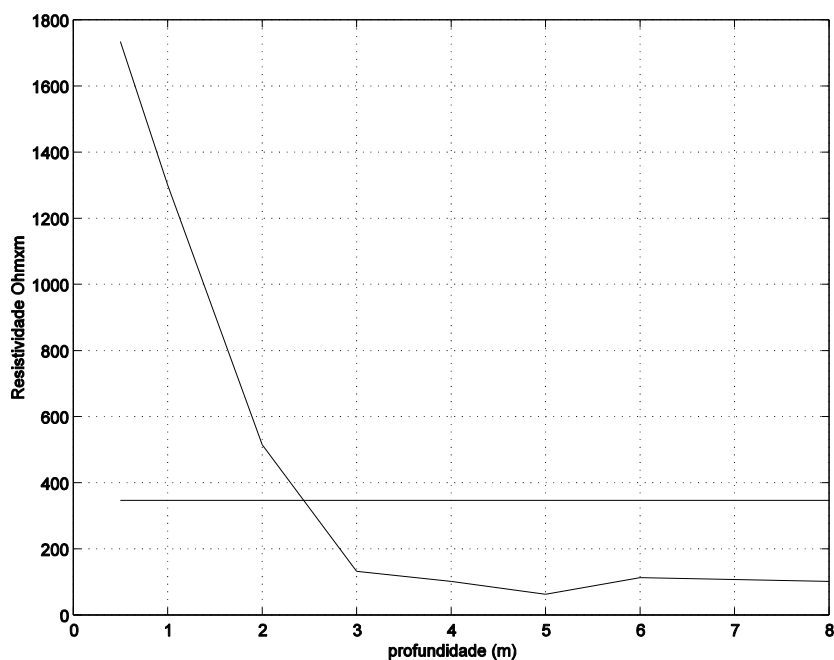


Fig. 9. 11 Cálculo da espessura do estrato superior segundo o padrão do IEEE

O espaçamento, que corresponde à intersecção da recta com a curva de resistividade, é ligeiramente inferior a 2,5 m. Usando a equação (9.2) obtém-se, para a espessura do estrato superior, o valor de 1,2 m. Este valor é muito próximo do obtido pelo método simplificado de Tagg que era de 1,1 m.

O método de Lancaster-Jones, não é recomendado para esta curva devido à ausência do ponto de inflexão e só consta desta análise porque na altura da medida era o único conhecido do autor, tendo constado de um capítulo de livro publicado [92]. Os primeiros três pontos estão em linha recta e têm, portanto, concavidade nula. Depois do terceiro ponto, tem-se uma concavidade positiva. Considerou-se um ponto ligeiramente à frente, onde a curva de resistividade cruza a recta $y=400 \Omega m$, como se pode verificar pela grelha da figura 9.11, a que corresponde a abcissa 2,3 m, e em que muda a concavidade. Usando este ponto, a espessura do estrato será $2/3$ de 2,3 m, ou seja 1,5 m.

9.2.2 Comparação dos modelos de solo com os valores experimentais

Na medida da resistência dos vários eléctrodos, a pinça de corrente foi colocada a 20 m. Por um lado, a vara de 2 m exigia uma pinça a uma distância dez vezes superior, tal como aconselha o manual do aparelho de medida, MIT 904, e, por outro lado A. Miguel [84], indica claramente esta distância, qualquer que seja o eléctrodo. A pinça de tensão foi colocada a 68% da distância de 20 m, tal como aconselha A. Miguel que era a única fonte bibliográfica na altura, ou seja, a 13,6 m, o que também satisfaz o manual do medidor. As medidas efectuadas apresentam-se na tabela seguinte, 9.4.

Tabela 9. 4 Valores da Resistências dos eléctrodos testados.

Eléctrodo	Vara de 0.5 m	Vara de 1 m	Vara de 2 m
Resistência (Ω)	2490	376	108

As medidas foram efectuadas de uma só vez, considerando o solo homogéneo. Se usarmos a estratificação obtida pelos métodos de Tagg simplificado, ou pelo método do padrão do IEEE obtém-se para a espessura do estrato superior o valor de 1,1 m. Tendo-se colocado a pinça de corrente aos 20 m, o quociente h/d é de 0,055 em [13], valor cujo logaritmo decimal é de -1,26. Este valor foi colocado na curva de Amoruso [13], tendo-se lido o rácio de 58% para a distância entre a pinça de tensão e a de corrente, como se pode ver na figura 9.12 [13]. Relembre-se que $K = -0,89$.

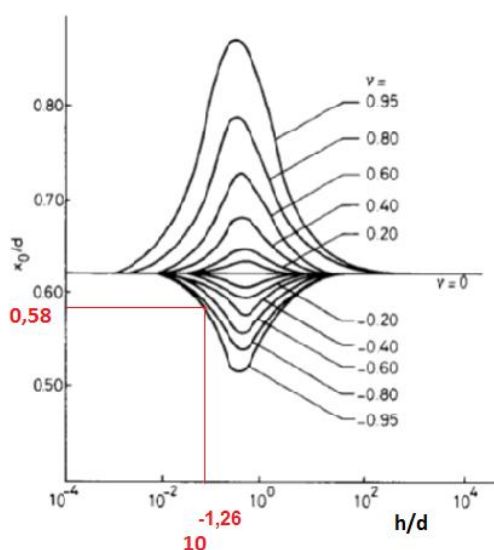


Fig. 9. 12 Curvas para detectar a colocação das pinças

Como se pode verificar, as curvas de $k = -0,8$ e de $k = -0,95$ estão quase sobrepostas na zona de interesse. Mesmo qualquer introdução deficiente da abcissa, por erro de interpolação, é atenuada. A distância da pinça de tensão foi de 68%, da distância da pinça de corrente, muito acima do que devia estar: 58%, pelo que, a medida carece de uma validação. Conclui-se deste procedimento que, para uma pinça de corrente colocada a 20 m, a pinça de tensão deverá estar a 11,6 m e não a 13,6 m, como foi o caso. A questão que se coloca é perceber qual a margem de erro devida a uma colocação da pinça afastada 2 m do local ideal. Na figura seguinte é simulada a distribuição de potencial no solo entre o eléctrodo e a pinça de corrente, supondo que esta tem um comprimento de 20 cm. É fácil de verificar que a zona de potencial nulo vai dos 8 aos 16 m, validando, assim, a medida efectuada no terreno. A proposta de Amoruso poderá ser uma condição suficiente, mas não necessária, especialmente para distâncias da pinça de corrente suficientemente grandes.

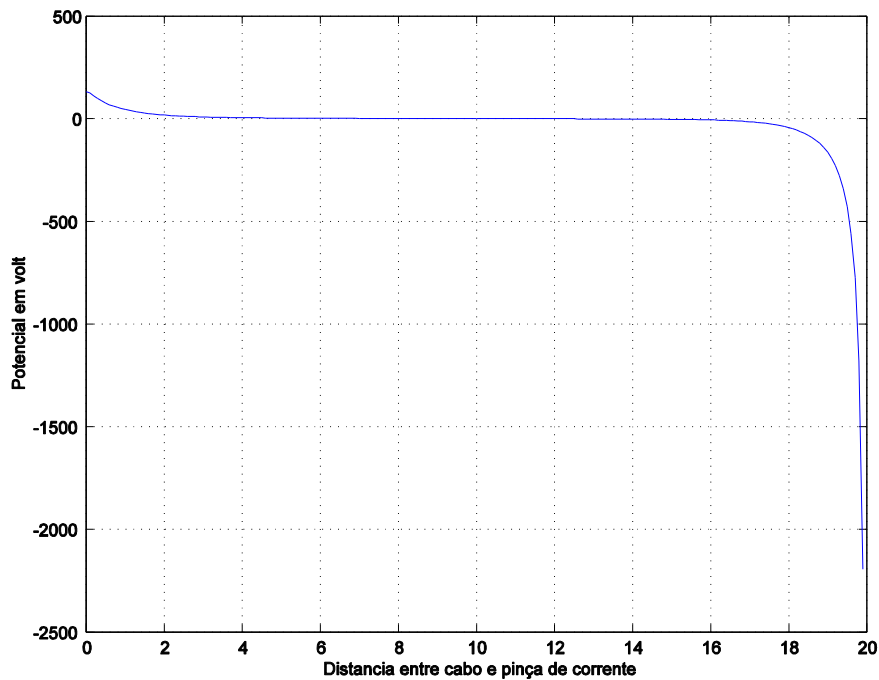


Fig. 9. 13 Validação da medida da vara

Apresenta-se, seguidamente, na tabela 9.5, os vários solos homogêneos equivalentes para comparação. A resistividade é calculada pela média aritmética ρ_{ma} , pela média do maior e menor valor ρ_{2v} , pelo mesmo valor da resistividade do estrato ρ_E e pela fórmula de Hummel, dada por (4.21) ρ_H . A segunda linha contém os valores medidos e por baixo destes o valor estimado, bem como o erro percentual de cada modelo de solo homogêneo.

Tabela 9. 5 Comparação de estimativas em solo homogêneo equivalente, ρ : média aritmética, dois valores extremos, do estrato e por Hummel.

Eléctrodo		Vara de 0.5 m	Vara de 1 m	Vara de 2 m
Resistência (Ω)		2490	376	108
ρ_{ma}	508	732/-71%	422/12%	239/121%
ρ_{2v}	899	1295/-48%	746/98%	423/292%
ρ_E	1734	2497/0,3%	1440/283%	816/656%
ρ_H	210	302/-88%	174/-54%	99/-8%

A média aritmética, para a resistividade, permite obter um valor bom para a resistência da vara de 1m, falhando os restantes, enquanto que a média, usando dois valores extremos para a resistividade, não acerta um único valor, entendendo-se por acertar, obter um valor dentro do erro aceitável definido pelo padrão do IEEE que é de 25%. Se for usada a resistividade do estrato superior, para valor da resistividade equivalente, o modelo permite uma estimativa

excelente para a vara curta, precisamente o eléctrodo que está longe do plano de separação de camadas. Ao invés, se for considerada a resistividade obtida pela fórmula de Hummel, só se acerta na vara de 2 m, precisamente o tipo de eléctrodo para o qual foi desenvolvida a referida fórmula.

Para comparar os modelos de solo de duas camadas, usa-se a fórmula de Tagg como instrumento de cálculo e os valores medidos como valores de referência, na tradição científica de Galileu. Um modelo de solo adicional, foi obtido por optimização, usando os valores medidos da resistência das varas, conforme se mostrou no capítulo anterior. Os resultados listam-se na tabela 9.6:

Tabela 9. 6 Comparação de modelos de solo pela fórmula de Tagg

	Eléctrodo			Vara de 0.5 m	Vara de 1 m	Vara de 2 m
	Resistência (Ω)			2490	376	108
Modelo	Ps	Pi	H			
Tagg	1734	101	1,1	2320/-7%	1135/202%	96/-11%
Padrão do IEEE	1734	101	1,2	2337/-6%	1208/221%	106/-2%
L.-Jones	1734	101	1,5	2372/-4,6%	1291/244%	154/42%
Optimização	1988	155	0,7	2490/0%	347/-8%	108/0%

É, assim, facilmente verificável que, com excepção do modelo de Lancaster-Jones, todos os outros modelos se aproximam do valor medido a menos de 25% em duas medidas. Note-se, também, que falham a estimativa da vara de 1 m, por excesso, com excepção do modelo optimizado. Nos solos de areia fina, acontece um fenómeno de capilaridade, cuja franja pode subir 30 ou 40 cm acima do nível freático, baixando significativamente a resistividade do solo na ponta da vara, melhorando, assim, a condutividade desta. Os valores da tabela 9.6, se contabilizarmos os que estão dentro do erro permitido, são melhores do que os da tabela 9.5 mostrando que uma estratificação em solo de duas camadas se aproxima mais da realidade do que solos homogéneos equivalentes. O modelo obtido por optimização, pelo método de Newton, é de longe o melhor. Neste último caso, a estimativa inicial era constituída pelos parâmetros do modelo de Tagg e na primeira iteração a espessura teve um resultado negativo. Fixou-se a espessura em 0,7 m, mantendo a vara mais curta no estrato superior, e eliminou-se a equação relativa à vara de 1m, ajustando-se as duas resistividades.

Finalmente, afere-se a algoritmia desenvolvida e testa-se a tese de que, no cálculo de uma vara que atravessa os dois estratos, o uso do módulo da resistência mútua entre segmentos da mesma vara, já que o coeficiente de reflexão é negativo, atenua os efeitos da imagem que se sobrepõe ao segmento do estrato superior. Para tal, usa-se o método obtido por optimização já que é o que possui menos erros. Os resultados apresentam-se na tabela 9.7. Nas varas que

atingem estrato inferior, o uso do módulo da resistência mútua reduziu o erro substancialmente.

Tabela 9. 7 Aferição dos resultados obtidos pelo método dos momentos

Eléctrodo	Vara de 0.5 m	Vara de 1 m		Vara de 2 m	
Resistência (Ω) (medida)	2490	376		108	
Resistência (Ω) (Tagg)	2490	347		108	
Resistência (Ω) método dos momentos	2549	192	262*	69	87 *
Erro para a medida	2,4%	-49%	-30%	-36%	-19%

*Usando o módulo da resistência mútua

9.3 Ensaio de campo na Vagueira, em Abril de 2012

A segunda sessão de medidas decorreu no mesmo local da anterior, com solo seco e nas mesmas direcções, no dia 25 de Abril. As medidas de resistividade, assim como a respectiva curva, estão representadas na figura 7.13, tendo sido o único caso de uma curva real com as duas assíptotas. Os perfis do terreno estão apresentados em 7.3.2 onde se deduziram os modelos de solo. A espessura do estrato superior é de 0,9 m, segundo o método do padrão do IEEE e de 1,5 m, segundo o método simplificado de Tagg. O valor médio, coincidente com o valor obtido por L. Jones, é de 1,2 m tendo, o mesmo, sido usado para validação das medidas. As resistividades têm o valor de 1990 e 140 Ω m, para os estratos superior e inferior, respectivamente. Cravou-se uma vara tendo-se medido os valores da resistência durante o processo. As distâncias a que foram colocadas as pinças de medida são as mesmas do caso anterior. As medidas realizadas, listam-se na tabela 9.8:

Tabela 9. 8 Medidas de Abril

Comprimento (m)	0.5	1	2
Resistência (Ω)	2870	465	113

O majorante, para a vara de meio metro, é de 2866 Ω , valor este que, supondo solo homogéneo com uma resistividade igual à maior das resistividades medidas, é ligeiramente menor do que o valor medido, o que é de estranhar. O cálculo da distância a que deveria estar a pinça de tensão, em valores percentuais da distância da pinça de corrente, tal como no exemplo anterior em que se usou a figura 9.12, foi efectuado indicando um valor mais baixo, pelo que as medidas carecem de validação. A figura obtida, é muito parecida com a figura do caso anterior (figura 9.13) com um patamar constante, entre os 4 e os 13,8 m. Com a pinça de corrente ligeiramente colocada nos 13,6 m, a medida, está validada.

Os vários solos homogéneos equivalentes, são comparados na tabela 9.9 tal como já se tinha feito no ensaio anterior.

Tabela 9. 9 Comparação de estimativas em solo homogêneo equivalente, ρ : média aritmética, dois valores extremos, do estrato e por Hummel.

Eléctrodo		Vara de 0.5 m	Vara de 1 m	Vara de 2 m
Resistência (Ω)		2870	465	113
ρ_{ma}	1156	1665 / -42%	960 / 106%	544 / 381%
ρ_{2v}	1060	1526 / -47%	880 / 89%	499 / 342%
ρ_E	1990	2866 / -0,1%	1652 / 255%	936 / 728%
ρ_H	317	456 / -84%	262 / -44%	149 / 32%

As resistividades, obtidas por médias, produziram modelos de solo homogêneo que falharam todas as estimativas, tal como a da fórmula de Hummel. Usando a resistividade do estrato superior voltou-se a obter uma boa estimativa apenas para a vara mais curta.

Procurou-se uma comparação de modelos de solos de duas camadas, usando a fórmula de Tagg para calcular as resistências das três varas e para aferir o modelo mais representativo do solo. Os resultados apresentam-se na tabela 9.10:

Tabela 9. 10 Comparação de modelos de solo pela fórmula de Tagg

		Eléctrodo		Vara de 0.5 m	Vara de 1 m	Vara de 2 m
		Resistência (Ω)		2870	465	113
Modelo	Ps	Pi	H			
Jones	1990	140	1,2	2686 / -6%	1391 / 199%	145 / 28%
Padrão do IEEE	1990	140	0,9	2608 / -9%	664 / 43%	111 / -1
Tagg	1990	140	1,5	2726 / -5%	1484 / 219%	208 / 84%
Otimiz	2427	198	0.6	2870 / 0%	355 / -24%	129 / 14%

O modelo otimizado é o único que tem todas as estimativas dentro dos limites dos 25% do padrão do IEEE. O mesmo padrão do IEEE apresenta duas boas estimativas, os restantes apenas uma. A comparação com a tabela 9.9, mostra que um modelo de duas camadas tem menos erros do que modelos de solo homogêneo. A estimativa da vara de 1 m sofre com erros por excesso, devido à provável capilaridade de areias finas. Finalmente, faz-se a aferição do método dos momentos, usando a solução do padrão do IEEE já que é a que apresenta o melhor resultado para a vara mais longa e de maior interesse. Os resultados constam da tabela 9.11. Para a vara de meio metro, o desvio para a medida do método dos momentos é bom. Para as varas que debitam corrente nos dois estratos, o uso do módulo da resistência mútua reduz substancialmente o erro para valores aceitáveis.

Tabela 9. 11 Aferição dos resultados obtidos pelo método dos momentos

Eléctrodo	Vara de 0.5 m	Vara de 1 m		Vara de 2 m	
Resistência (Ω) (medida)	2870	465		113	
Resistência (Ω) (Tagg)	2608	664		111	
Resistência (Ω) Met. Momentos	2631	300	421*	73	101 *
Erro p/ med.	-8%	-35%	-9%	-35%	-11%

*Usando o módulo da resistência mútua

9.4 Ensaio de campo na Vagueira, em Outubro de 2012

A terceira sessão de ensaios de campo, no mesmo local, foi efectuada no dia 5 de Outubro, com o terreno seco. Começou por se medir a resistividade do terreno e, só depois se enterraram as varas. As medidas da resistividade foram efectuadas no sentido norte-sul.

9.4.1 Estratificação do solo

As medidas obtidas no terreno, usando o método de Wenner, apresentam-se na figura 9.14, sinalizadas com um asterisco, representando, a escala, os valores referidos. Esta curva configura um solo de três estratos, sendo, o do meio, o mais resistivo. Segundo informações de quem terraplanou o terreno as acácias haviam sido cortadas e colocadas nas depressões do terreno, tendo no mesmo sido posteriormente colocada areia retirada da parte alta da duna durante o processo de terraplanagem. Assim, o terreno apresenta uma camada superficial de areia com acácias em decomposição sobre uma camada de areia limpa. Durante o inverno e na primavera, o nível freático atinge o estrato superior e, enquanto que, o modelo até aqui observado era o de uma camada com 1700 a 2000 Ωm , de resistividade, a referida camada de areia com compostos de carbono, seguida do nível freático com 100 a 150 Ωm de resistividade. No verão, com a descida do nível freático, aparece uma faixa de alta resistividade, a qual, só poderá ser a faixa de areia limpa, entre o estrato superior e o nível freático.

Os modelos aproximados a duas camadas, partem do conhecimento da estratificação em três camadas que tem que ser efectuada inicialmente. Para tal, usa-se o método de Pirson [90]. A curva de resistividade começa por ser trabalhada no trecho ascendente, do primeiro valor até ao máximo, derivando-se daqui um modelo de dois estratos, usando o primeiro método de Tagg.

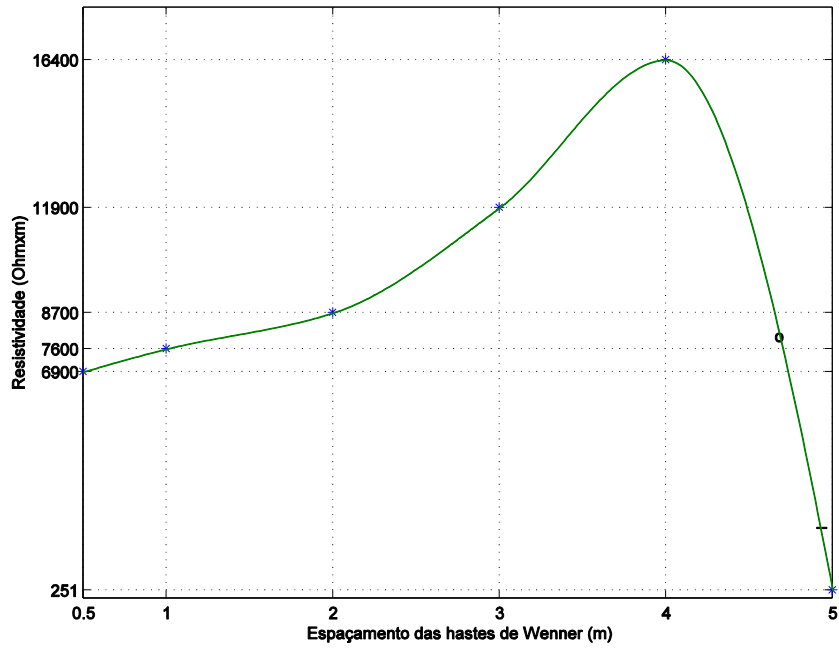


Fig. 9. 14 Curva de resistividade típica de um solo de três estratos

Assume-se para a resistividade do estrato superior o valor da resistividade aparente, para o menor dos espaçamentos, ou seja, para $a=0,5$ m. O valor da resistividade será, então, de $6900 \Omega\text{m}$. O primeiro ponto escolhido foi para $a=1$ m. O quociente entre a resistividade do estrato superior e a resistividade aparente para este valor do espaçamento é de $6900/7600$, ou seja, de $0,91$. A recta de ordenada constante, igual a este valor, apresenta-se sobre as curvas mestras de Tagg, na figura 9.15, desenhada a laranja. Na figura anterior 9.14, escolheu-se também o ponto $a=3$, para o qual a resistividade medida é de $11900 \Omega\text{m}$ tendo-se repetido o procedimento. A ordenada obtida foi de $6,9/11,9 = 0,58$ e representou-se a verde na fig. 9.15.

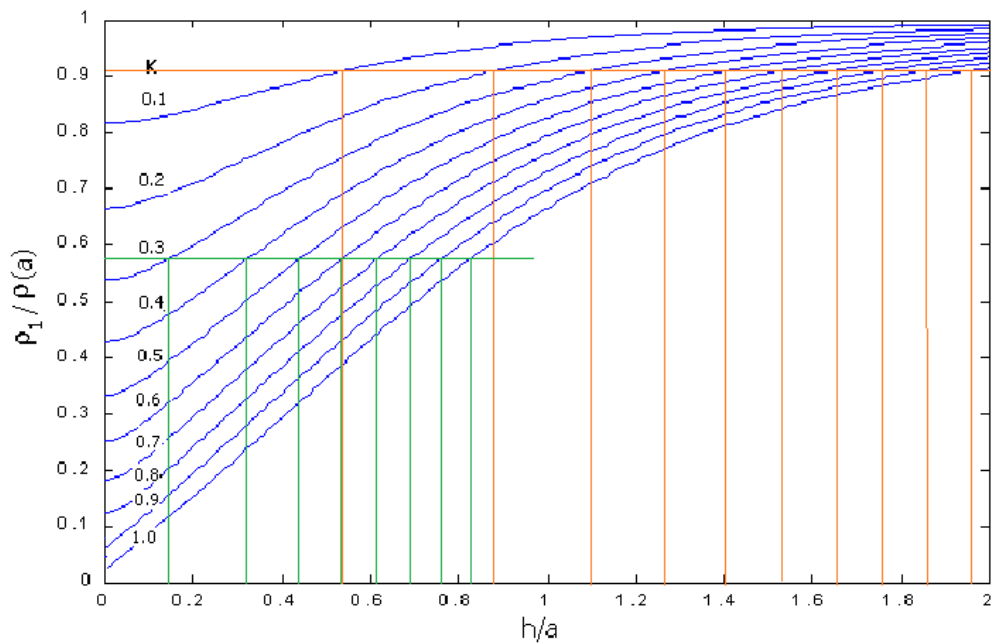


Fig. 9. 15 Curvas fundamentais de Tagg para $k>0$ e rectas de interesse.

Da figura 9.15 retiram-se as tabelas 9.12 e 9.13. Cada tabela representa a função implícita definida em (7.14) para cada valor de a .

Tabela 9. 12 Coordenadas dos pontos de intersecção da recta 0,91 com as curvas mestras

k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	1,0
h/a	0,54	0,88	1,1	1,27	1,41	1,58	1,66	1,76	1,86	1,96

Como $a=1$, a segunda linha indica as distâncias de interesse.

Tabela 9. 13 Coordenadas dos pontos de intersecção da recta 0,58 com as curvas mestras

k	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
h/a	0,14	0,32	0,43	0,53	0,61	0,69	0,76	0,83
$h (m)$	0,42	0,96	1,29	1,59	1,83	2,07	2,28	2,49

A terceira linha foi obtida multiplicando a segunda pelo valor de a que é 3 m. As duas funções apresentadas nas tabelas 9.12 e 9.13, encontram-se representadas na figura 9.16. O ponto de encontro dá-se para $k=0,6$ e, por interpolação linear, para $h=1,59$ m, valor este que foi arredondado a 1,6 m. O estrato superior tem, então 1,6 m de espessura.

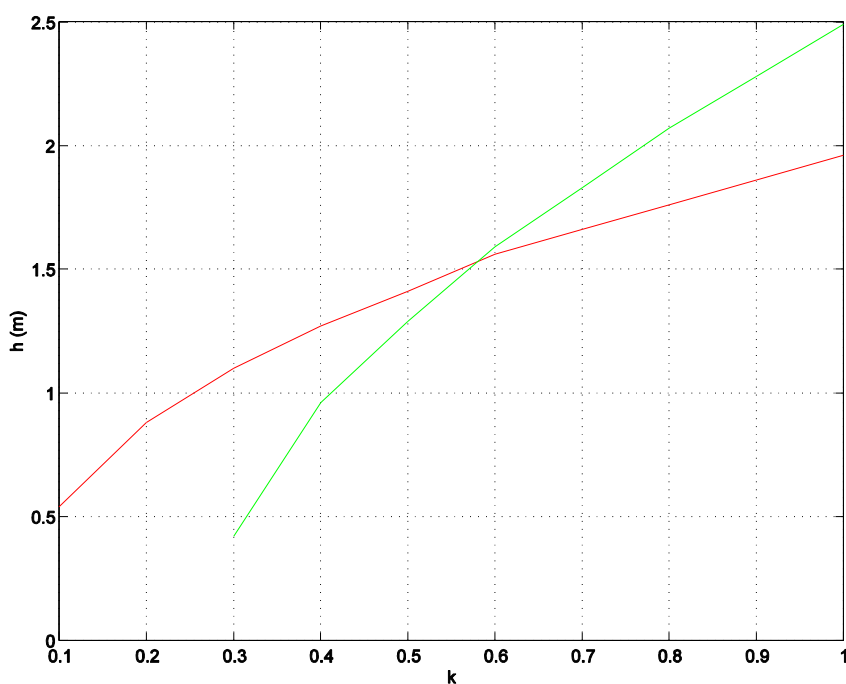


Fig. 9. 16 Cruzamento das curvas obtidas pelo método de Tagg

Sabendo-se o coeficiente de reflexão de tensão, aproximadamente 0,6 e a resistividade do estrato superior, obtém-se a resistividade do estrato intermédio, usando (7.21) que é de 27,6 kΩm.

O trecho descendente terá que dar informação sobre a espessura do estrato intermédio e a resistividade do estrato inferior. Numa primeira aproximação, procura-se o ponto de inflexão do trecho descendente da curva de resistividade e usa-se o método de Lancaster-Jones para obter a cota, a que se dá a descontinuidade na resistividade [90]. Não havendo um ponto de inflexão, procura-se um ponto em que a curva passa de uma concavidade negativa, ou de boca para baixo, para a zona linear em que a concavidade é nula. O ponto escolhido está marcado com um 'o' na figura 9.14, já que a curva de resistividade é praticamente linear até ao fim do gráfico. A abcissa associada ao referido ponto é de 4,7 m, por interpolação linear, pelo que, a cota do plano de descontinuidade será 2/3 da referida abcissa, ou seja 3,1 m. A ordenada do ponto é de 8000 Ωm. A espessura do estrato intermédio será, então, 3,1-1,6= 1,5m.

O passo seguinte, será o cálculo da resistividade média equivalente das duas camadas superiores, ou seja, a resistividade vista pela terceira camada, dada pela fórmula de Hummel (7.22) [90] [98]. Assim, obtém-se, neste exemplo, uma resistividade equivalente de 10,9 kΩm.

A espessura equivalente é, numa primeira aproximação, a soma das duas espessuras, embora se faça, posteriormente, a refinação deste valor, dada a ambiguidade do método de Lancaster-Jones. Sabendo-se a resistividade equivalente dos dois estratos superiores, recorre-se, de novo, ao método de Tagg a fim de se obter a espessura corrigida do estrato superior equivalente, refinando o valor anterior, e obtendo, assim, a resistividade do estrato inferior. Escolhem-se de novo dois pontos, agora do trecho descendente, com uma resistividade aparente inferior à resistividade equivalente, ou seja, inferior a 10,9 kΩm. Na figura 9.14, escolheram-se os pontos de abcissa 4,7 e de ordenada 8 kΩm, marcado com 'o', tendo o quociente de interesse o valor de 0,72, representado pela recta horizontal a laranja na figura 9.17. Na figura 9.14 escolheu-se um segundo ponto de abcissa de 4,95 e ordenada 2,2 kΩm, marcado por um pequeno traço, cujo quociente de interesse ρ_a/ρ_s é 0,2 representado, na figura 9.17, pela recta horizontal de cor verde.

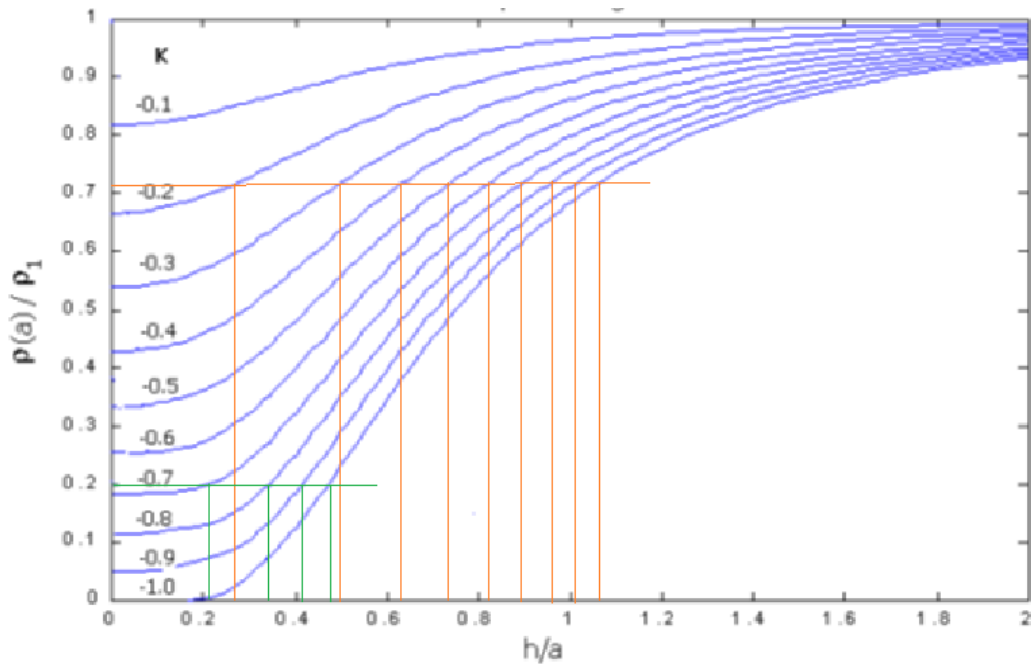


Fig. 9. 17 Curvas mestras de Tagg para $k < 0$ e rectas de interesse

Da figura 9.17 retiram-se os valores, que permitem tabelar as funções, representadas pelas coordenadas cartesianas dos pontos de intersecção das rectas horizontais com as curvas fundamentais de Tagg. As duas funções listam-se nas tabelas 9.14 e 9.15, contendo uma terceira linha que representa o produto da segunda linha pelo parâmetro a .

Tabela 9. 14 Valores da solução para $a=4,7$ m.

k	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
h/a	0,27	0,50	0,63	0,73	0,83	0,89	0,96	1,01	1,06
h (m)	1,27	2,34	2,95	3,42	3,89	4,17	4,50	4,74	4,97

Tabela 9. 15 Valores da solução para $a=4,92$ m.

k	-0,7	-0,8	-0,9	-1,0
h/a	0,21	0,34	0,42	0,47
h (m)	1,03	1,67	2,07	2,31

Na figura 9.18 ilustram-se as funções definidas pelas tabelas 9.14 e 9.15. Não existindo cruzamento, não se consegue refinar a espessura do estrato intermédio, nem calcular a resistividade do último estrato.

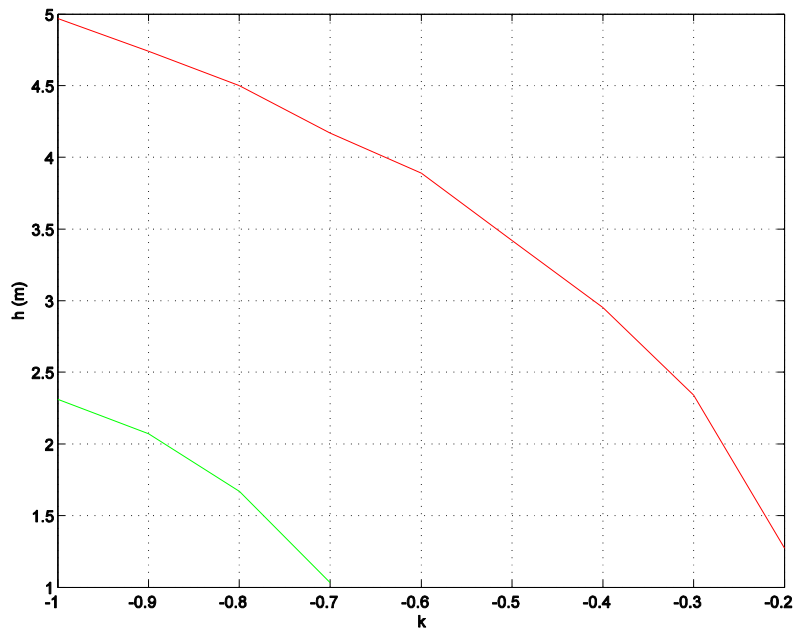


Fig. 9. 18 Cruzamento das curvas obtidas pelo método de Tagg

Procurou-se um terceiro ponto na curva descendente, mas de novo se obtiveram figuras do mesmo género da figura 9.18. A falta de uma assíptota em profundidade, não permite ter um ponto noutra segmento da curva. A escolha do último ponto na curva de resistividade, também foi tentada, mas como a recta só cruza uma das curvas mestras, apenas permite representar um ponto. Mesmo assim, sabem-se as resistividades dos dois estratos superiores e a espessura do estrato superior que foi calculada pelo primeiro método de Tagg. Dado que se obteve uma estimativa da espessura do estrato intermédio, pelo método de Lancaster-Jones, falta apenas saber a resistividade do estrato inferior. Para esta, pode usar-se o valor obtido para o maior espaçamento do método de Wenner que foi 251 Ωm para $a=5$ m. Assim, apresenta-se na figura 9.19 um modelo aproximado para o solo.

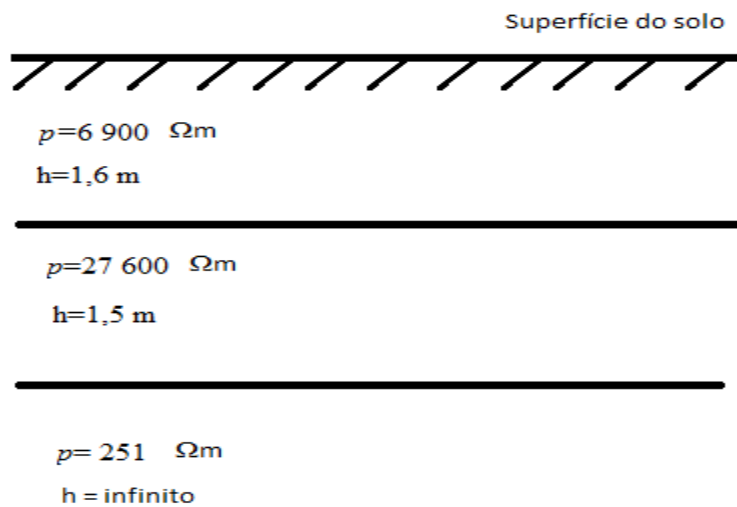


Fig. 9. 19 Modelo A de solo com três estratos

Na tentativa de refinar o modelo, usou-se o método do padrão do IEEE, não contemplado pelo método de Pirson, a fim de se obter a espessura do estrato superior equivalente. Torna-se agora necessário calcular o quociente entre a resistividade inferior, menor, e a resistividade equivalente das duas camadas superiores, dada pela equação (7.22) que vale 251/10900, ou seja, 0,023. Usou-se o valor de 0,02, o qual corresponde a uma das curvas no gráfico de Sunde. Na figura 9.20 escolheu-se o ponto médio da subida na zona linear a partir do qual se podem ler as coordenadas respectivas.

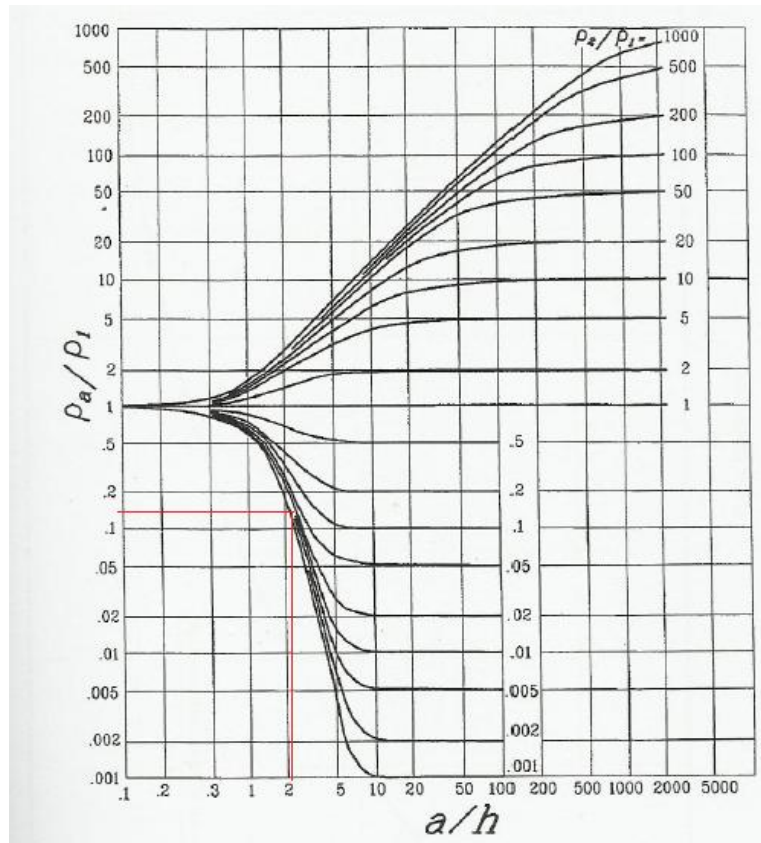


Fig. 9. 20 Curvas de Sunde para o trecho inferior

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 0,15 , \tag{9.4}$$

$$\frac{a}{h} = 2. \tag{9.5}$$

A resistividade aparente, obtida a partir da equação (9.4), é 15% de 10,9 kΩm, ou seja, 1635 Ωm. Uma interpolação linear na figura 9.14, permite obter um valor para a de 4,94 m. Usando a equação (9.5), obtém-se um valor aproximado de 2,47 m para a espessura do estrato superior equivalente, valor este que foi arredondado a 2,5 m. Com este valor, obtém-se para a espessura do estrato intermédio, subtraindo a espessura do estrato superior, 2,5-1,6, ou seja, 0,9 m. O modelo de solo, é ilustrado na figura 9.21 e designado por modelo B.

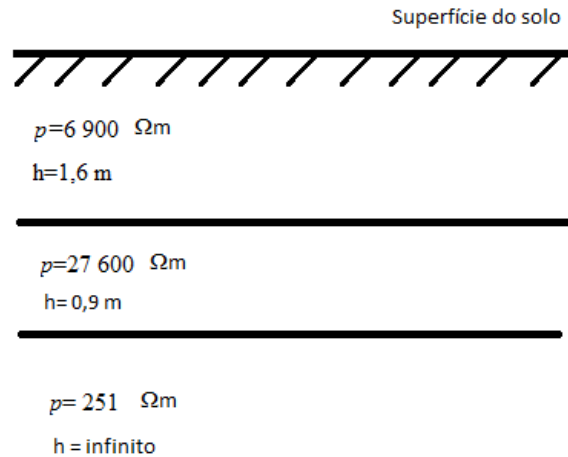


Fig. 9. 21 Modelo B de solo com três estratos

9.4.2 Comparação dos modelos de solo com os valores experimentais

Nas medidas de resistência da vara, houve o cuidado de deslocar a pinça de tensão, para se verificar se os desvios da resistência, lida no medidor, exibia flutuações consideráveis. A pinça de corrente foi colocada a 20 m e a pinça de tensão foi colocada inicialmente a 13 m, reduzindo-se este valor para 12 m. Foi calculada a flutuação de uma medida para a outra, em percentagem, e considerando a menor como referência, que é o pior caso. Na tabela 9.16 apresentam-se as medidas efectuadas.

Tabela 9. 16 Medidas de campo de varas em Outubro 2012

Comprimento vara	Medida 1 (12m)	Medida 2 (13m)	Flutuação	Média
0,5 m	7 k	6k6	6,1 %	6k8
1 m	3k4	4k6	35 %	4k
2 m	148	151	2,0 %	150

A medida para a vara curta e para a vara longa exibem pequenas flutuações, o que significa que se está na zona plana da curva de resistência, considerando-se válidas. Estranhamente, para o comprimento intermédio de 1 m, a flutuação é demasiada e inexplicável.

Consideraram-se inicialmente solos homogéneos. A resistividade, usando a média aritmética, tem um valor muito próximo da resistividade usando a maior e a menor das medidas, sendo o desvio de 3,6% para o menor dos valores, pelo que se usou apenas a média aritmética. A resistividade usando a fórmula de Hummel, que usa a equação (7.22), também foi utilizada. O resultado das simulações em solo homogéneo encontra-se na tabela 9.17.

Tabela 9. 17 Comparação de estimativas em solo homogêneo equivalente, ρ : média aritmética, do estrato e por Hummel.

Eléctrodo		Vara de 0.5 m	Vara de 1 m	Vara de 2 m
Resistência medida (K Ω)		6,8	4	0,15
P_{ma}	8,6 K Ω m	12,4/82%	7,2/82%	4,1/2633%
P_E	6,9 K Ω m	9,9/46%	5,7/43%	3,2/2033%
P_H	9,9 K Ω m	14,3/110%	8,2/105%	4,7/3033%

Conclui-se que nenhuma das simulações efectuadas é aceitável!

Na tentativa de obter um modelo equivalente de dois estratos, J. Ma e outros [42], propuseram um modelo majorado em que a resistividade do estrato superior se torna igual à do estrato do meio, mais resistivo, produzindo um modelo do qual resultam erros por excesso. Segundo os mesmos autores, obtém-se um minorante da resistência quando o estrato do meio tiver uma resistividade igual à do estrato inferior, sendo esta mais baixa. Ora, precisamente para este caso, os minorantes dos modelos de solo A e B, obtidos na seção anterior, são iguais, e têm a particularidade de as resistências minorantes para as diferentes varas terem valores superiores aos valores medidos. Tal, só pode indiciar que os modelos do solo estão errados! Note-se que o método de Pirson não pode ser concluído no modelo de solo A, e que, no modelo de solo B, se assumiu que a resistividade do terceiro estrato era a resistividade aparente da última amostra, não havendo uma assíntota que claramente o indiciasse. A solução para este caso obteve-se por optimização, daí resultando um modelo equivalente de dois estratos, com erros de 9% para a vara de meio metro e de 0% para as restantes, como se viu no capítulo 8, seção 5.

Finalmente, procedeu-se à aferição do método dos momentos, usando a solução por optimização, já que este representa o melhor modelo de solo. Os resultados constam da tabela 9.18.

Tabela 9. 18 Aferição do método dos momentos pelos resultados obtidos

Eléctrodo	Vara de 0.5 m	Vara de 1 m	Vara de 2 m	
Resistência (medida) (Ω)	6800	4000	150	
Resistência (Tagg) (Ω)	7400	4000	150	
Resistência pelo método dos momentos (Ω)	7400	4100	98	107 *
Erro para a medida	9%	3%	-35%	-29%

*Usando o módulo da resistência mútua

As varas do estrato superior estão imunes às singularidades do método das imagens. Na vara de 2 m, o uso do módulo da resistência mútua melhora o erro, sendo este ainda demasiado grande.

9.5 Conclusões

A experimentação em tina de água permite testar a distribuição de potencial à superfície do solo, provocado por eléctrodos enterrados em solo homogéneo, desde que se preserve a escala.

Os modelos de solo de dois estratos revelaram-se melhores do que os modelos de solo homogéneo, já que apresentam menores erros. O modelo de solo menos preciso parece ser o de Lancaster-Jones, dado que é o que exhibe mais resultados com um erro acima do intervalo de 25 %, máximo aceitável pelo padrão do IEEE.

No método dos momentos, o uso do módulo da resistência mútua entre segmentos melhorou o erro em todos os casos, embora nem sempre de forma satisfatória, tal como se viu no último caso tratado.

Os modelos equivalentes de dois estratos de J. Ma e outros [42], mostraram-se úteis na validação das soluções teóricas de solos de três estratos.

A proposta de Amoruso *et al* [13], para a colocação de pinças, poderá ser uma condição suficiente, mas não necessária, especialmente para distâncias da pinça de corrente suficientemente grandes.

Capítulo 10 - Eléctrodo em serpentina, estudo de um caso.

Introdução

Este capítulo apresenta uma análise do eléctrodo em serpentina, normalmente utilizado em Portugal pela EDP no estrato superior, quando o inferior é rochoso e que tem um custo muito menor do que uma chapa. A resistência e o potencial à superfície provocado pela serpentina, pelo cabo horizontal e pela chapa são calculados e comparados em solo homogéneo e em solo de dois estratos, para dois coeficientes de reflexão de tensão. É proposto um novo procedimento, relativamente simples, para calcular a resistência de terra para o eléctrodo em serpentina, fazendo a média da resistência do fio e da chapa. Os resultados teóricos e as medidas de campo mostram que o modelo empírico usado pela EDP produz erros grandes.

10.1 Apresentação do eléctrodo

O eléctrodo de terra em serpentina é comumente usado em Portugal pela empresa eléctrica EDP, em solos em que o extracto inferior é rochoso e, conseqüentemente, tem um coeficiente de reflexão de tensão positivo. Neste tipo de solos é difícil, ou mesmo impossível, enterrar varas, que é a solução tipicamente usada em solos de aluvião. A instalação é feita manualmente, colocando um condutor de cobre com secção de 35 mm² em forma de serpentina no fundo da trincheira. A sua colocação é feita em trincheiras de 3 m, 6 m ou 10 m de comprimento, largura de 60 cm e profundidades máximas de 80 cm. O comprimento do cabo que preenche as trincheiras varia de 10 a 38 m para resistências de terra até 20 Ω . Na figura 10.1 apresenta-se o eléctrodo em serpentina [101].



Fig. 10. 1 Eléctrodo de terra em serpentina

Este tipo de eléctrodo é modelado como uma sinusóide de amplitude 0,25 m, quase metade da largura da vala, com três máximos por metro a que corresponde um perímetro enterrado de 10 m numa trincheira de 3 m. O eixo do condutor foi dividido em pontos fontes, cujas abcissas estão separadas 1 cm. Para cada ponto fonte gerado, existe um ponto à superfície do condutor que partilha a mesma abcissa e ordenada, mas cuja cota é maior do que a cota do ponto fonte. A diferença entre as duas cotas é o raio do condutor. Um perfil do eléctrodo é apresentado na figura 10.2 em que os pontos fonte estão em paralelo, tal como os pontos de superfície [102].

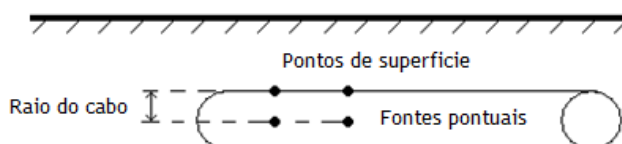


Fig. 10. 2 Pontos fonte e de superfície para a serpentina

O modelo empírico para calcular a resistência da serpentina, proposto e adoptado pela empresa eléctrica portuguesa, está exemplificado na seguinte fórmula [101]:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 0.2\rho \text{ para vala de } 3 \text{ m} \\ 0.15\rho \text{ para vala de } 6 \text{ m} \\ 0.08\rho \text{ para vala de } 10 \text{ m} \end{array} \right\}. \quad (10.1)$$

A resistividade usada em (10.1) pode ser obtida consultando tabelas de solos ou fazendo a média de algumas medidas da resistividade aparente pelo método de Wenner.

10.2 Análise teórica

Nesta secção é apresentada uma comparação entre as resistências da serpentina, da chapa e do cabo horizontal. Além disso, a média da resistência teórica dos dois últimos eléctrodos é também apresentada. A comparação é feita para solos homogéneos e para solos de duas camadas com a camada superior mais resistiva do que a inferior e vice-versa. A resistência da serpentina é calculada pelo método da matriz.

10.2.1 Eléctrodos em solo homogéneo

Neste caso, foi considerado um solo com uma resistividade de 100 Ωm , uma trincheira com meio metro de profundidade e 0,6 metros de largura. O comprimento da trincheira foi variado de 1 a 10 metros. Foi simulada a colocação de uma serpentina e de um cabo, ambos com raio de 3,3 mm. A figura 10.3 [102] mostra os resultados da comparação da resistência para o condutor horizontal, para a serpentina com três máximos por metro, garantindo que o perímetro a enterrar por comprimento da trincheira está de acordo com a norma da EDP. Foi também simulado, para efeitos de comparação de resistência, o enterramento de uma chapa horizontal. A resistência média entre o fio e a chapa também é apresentada. Os valores da resistência destes condutores, foram obtidos com as fórmulas de Dwight. Verifica-se que a

resistência da serpentina é muito próxima da referida resistência média, entre cabo e chapa, com um desvio médio inferior a 5%. No pior dos casos, a média considerada é 11,2% acima do valor da serpentina. Além disso, a resistência da serpentina aproxima-se da resistência da chapa, quando o comprimento da trincheira aumenta.

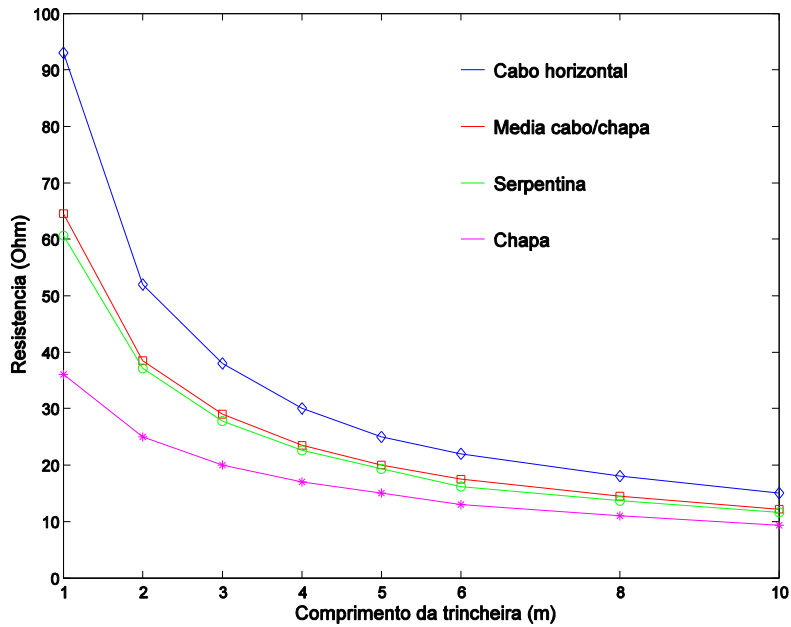


Fig. 10. 3 Comparação entre eléctrodos em solo homogêneo ($k=0$)

O potencial à superfície, devido a uma serpentina numa trincheira de 6 m, considerando uma corrente de defeito de 100 A, é ilustrada na figura 10.4 [102].

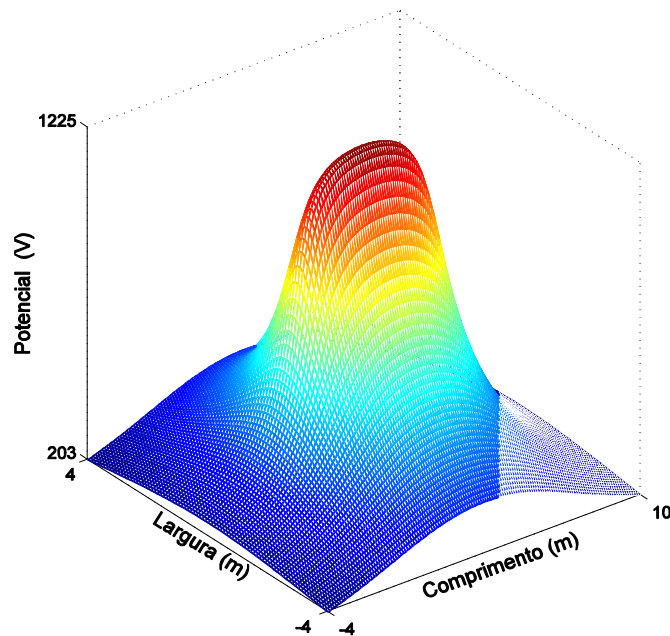


Fig. 10. 4 Potencial à superfície para a serpentina ($k=0$)

Os potenciais de superfície devidos aos três tipos de eléctrodos, ao longo do eixo da trincheira e numa direcção perpendicular a meio da mesma, para a mesma corrente injectada, são apresentados na figura 10.5 [102]. Pode ser facilmente verificado que a serpentina gera menores potenciais de superfície do que os outros eléctrodos.

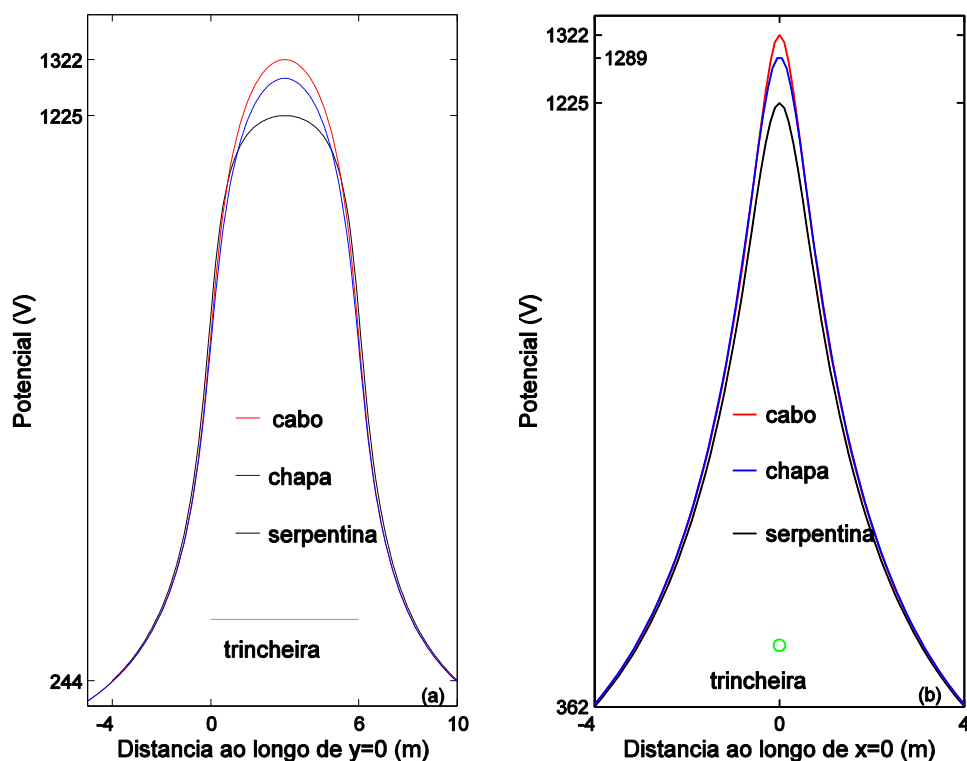


Fig. 10. 5 Potencial à superfície ao longo da vala (a) e na perpendicular ao meio (b) ($k=0$)

10.2.2 Eléctrodos em solo de dois estratos com $k>0$

Neste caso, foi considerado um solo de dois estratos, com um coeficiente de reflexão de tensão positivo. O valor da resistividade da camada superior, com um metro de espessura, é de $100\Omega\text{m}$ e a camada inferior tem uma resistividade de $500\Omega\text{m}$ ($k=2/3$). Com o propósito de comparar a resistência dos três eléctrodos, a profundidade de enterramento foi mantida a $0,5\text{ m}$ para todos eles. A resistência do cabo horizontal foi calculada usando a fórmula de Tagg e a resistência da chapa horizontal foi calculada usando o método dos momentos. Assim, a chapa foi modelizada como um conjunto de condutores lineares, cujo diâmetro é igual à espessura da referida chapa e cujos eixos estão separados pelo diâmetro dos correspondentes condutores. Os resultados teóricos para: a resistência do cabo horizontal; do eléctrodo sinusoidal com três máximos por metro, que simula a serpentina; da chapa e da resistência média entre cabo e chapa, são apresentados na figura 10.6 [102]. Pode ser verificado que a referida média entre as resistências do cabo e da chapa, está muito próxima da resistência da serpentina, com um desvio médio de $3,4\%$. O pior desvio é de $6,5\%$. Com o aumento do comprimento da trincheira a resistência da serpentina aproxima-se da resistência da chapa.

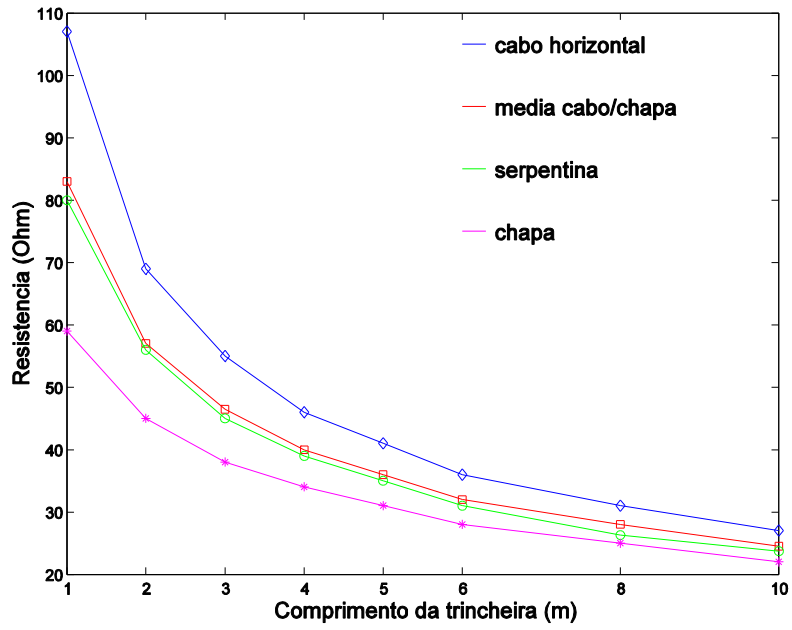


Fig. 10. 6 Comparação entre eléctrodos em solo de 2 estratos ($k>0$)

Ilustra-se na figura 10.7 [102] o potencial à superfície provocado por um eléctrodo sinusoidal numa trincheira de 6 m, supondo a mesma corrente de injeccção.

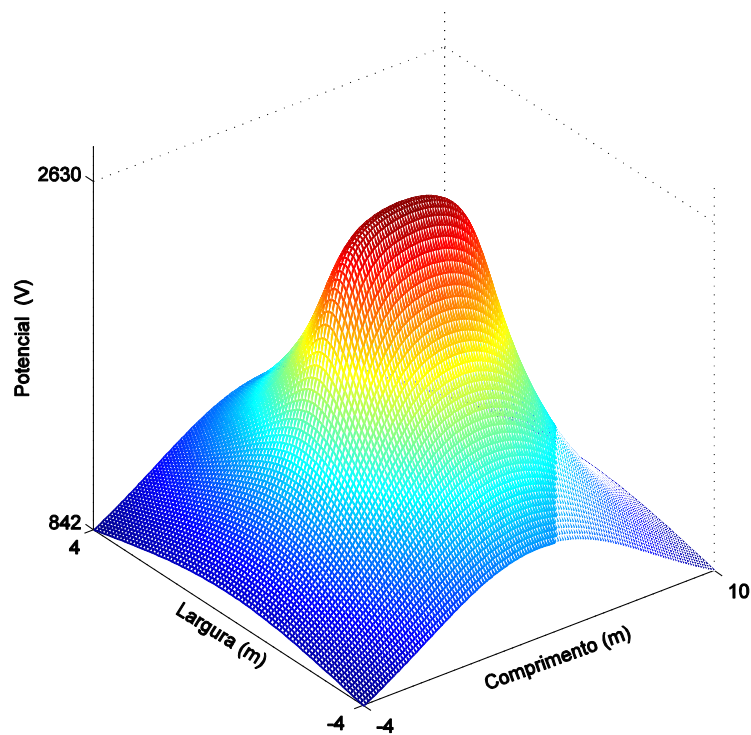


Fig. 10. 7 Potencial à superfície para a serpentina ($k>0$)

O potencial de superfície devido aos 3 tipos de eléctrodos, ao longo do eixo da trincheira e numa perpendicular a meio, submetidos à mesma intensidade de corrente de descarga, é apresentado na figura 10.8 [102]. Fora da trincheira, os potenciais dos eléctrodos são quase coincidentes. A curva de tensão à superfície, na perpendicular a meio da trincheira, devido à chapa é a mais larga, em virtude de existir uma superfície a debitar corrente, como seria de esperar. A tensão de pico provocada pela serpentina é menor que os máximos produzidos pelos outros eléctrodos, aproximadamente 5% menor do que o máximo produzido pela chapa.

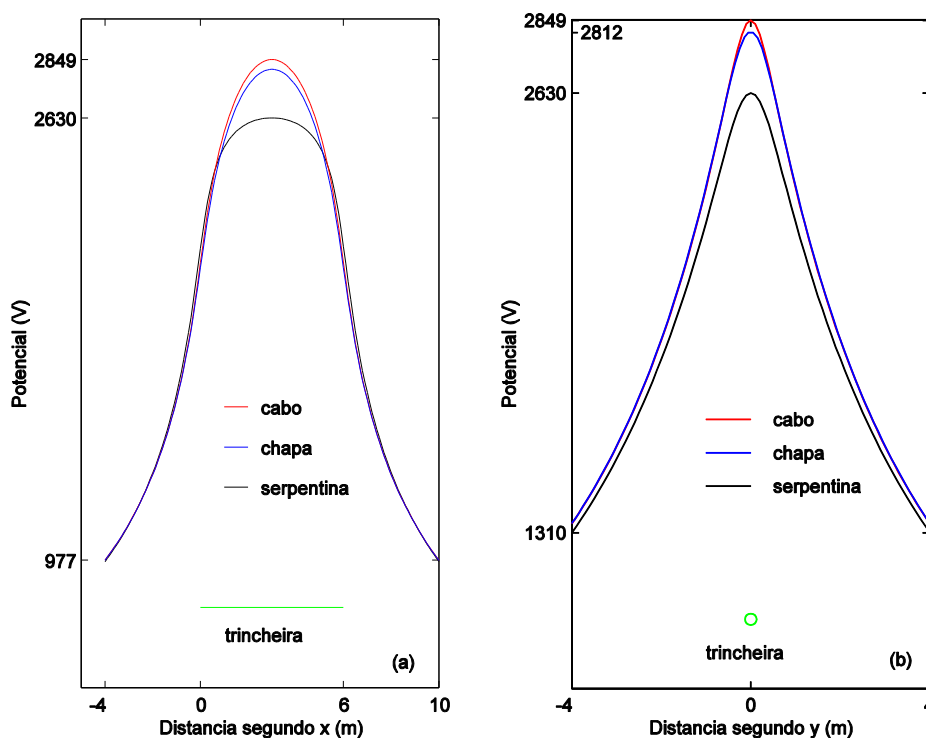


Fig. 10. 8 Potencial à superfície ao longo da vala (a) e na perpendicular ao meio (b) ($k>0$)

10.2.3 Eléctrodos em solo de dois estratos com $k<0$

Trocando os valores das resistividades das camadas consideradas na subsecção anterior, o coeficiente de reflexão de tensão torna-se negativo ($k=-2/3$). Mais uma vez, para efeitos de comparação da resistência, a profundidade de enterramento é mantida a 0,5 m. Também neste caso a resistência foi calculada com os métodos apresentados na subsecção anterior e para todos os eléctrodos considerados. Os resultados teóricos da resistência para o cabo, para a serpentina, para a chapa e para a resistência média da chapa com o cabo, estão ilustrados na figura 10.9 [102]. De novo, a resistência média entre o cabo e a chapa está muito próxima da resistência eléctrica da serpentina e à medida que o tamanho da trincheira aumenta, a resistência da serpentina aproxima-se do valor da resistência da chapa. Para trincheiras pequenas a resistência média entre cabo e chapa pode estar 20% acima do valor da resistência da serpentina. O erro da referida média está, normalmente, 18% acima do valor da resistência da serpentina. Deve fazer-se referência ao facto de que a serpentina não é usada neste tipo de solos onde é muito mais fácil enterrar varas, solução bastante mais económica neste tipo de terrenos.

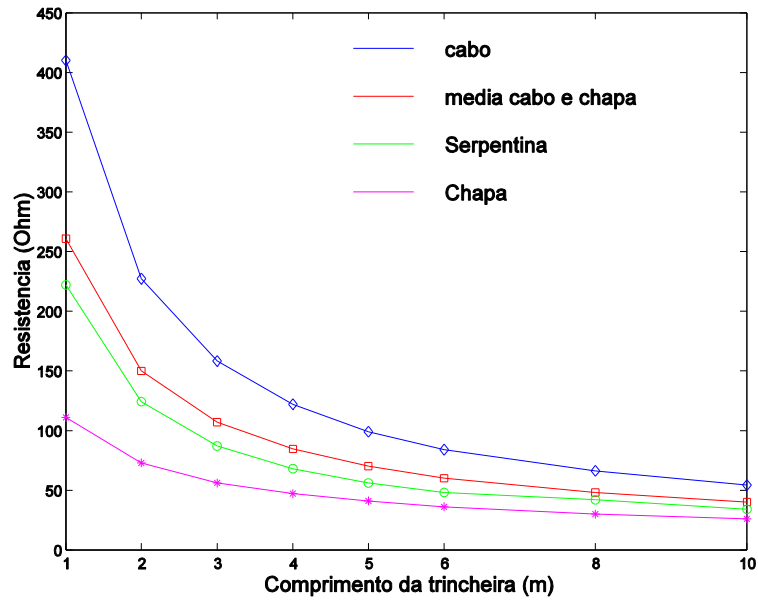


Fig. 10. 9 Comparação entre eléctrodos em solo de 2 estratos ($k < 0$)

O potencial à superfície devido a uma serpentina colocada numa trincheira de 6 m, para a mesma corrente de defeito de 100 A, é mostrada na figura 10.10 [102].

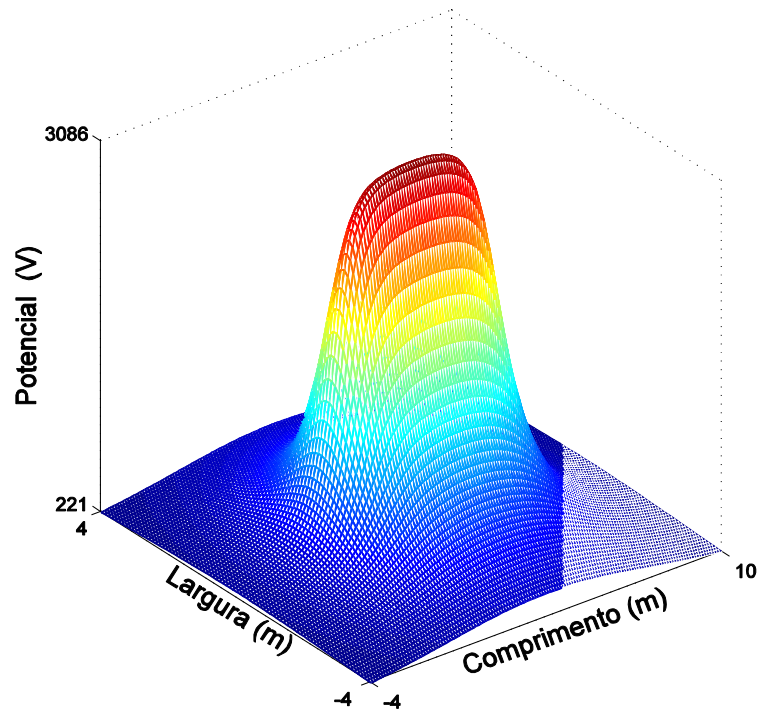


Fig. 10. 10 Potencial à superfície devido à serpentina ($k < 0$)

Para a mesma corrente de defeito, o potencial à superfície devido aos três tipos de eléctrodos, calculado ao longo do eixo da trincheira e numa direcção perpendicular ao meio desta, é apresentado na figura 10.11 [102]. O potencial devido à serpentina tem o menor máximo de tensão à superfície, 5,2% menor que o máximo provocado pela chapa.

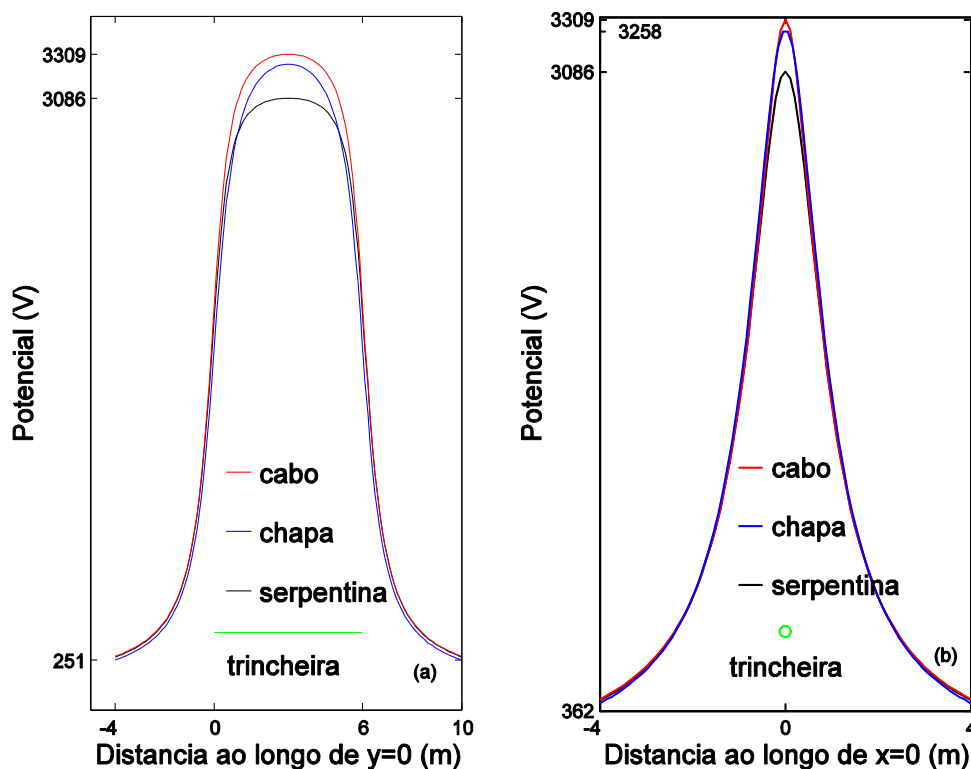


Fig. 10. 11 Potencial à superfície ao longo da vala (a) e na perpendicular ao meio (b) ($k < 0$)

Note-se que o valor máximo do potencial à superfície tem aumentado com o aumento da resistividade do meio envolvente à serpentina. Em solo homogéneo, com uma resistividade de $100 \Omega\text{m}$, o máximo de potencial à superfície é de 1225 V . Quando a resistividade na parte inferior do solo aumentou para $500 \Omega\text{m}$, o valor máximo de potencial subiu para 2630 V . Quando o solo do estrato superior, que envolve directamente os eléctrodos, aumentou para $500 \Omega\text{m}$, o potencial de superfície atingiu o maior dos máximos, com um valor de 3066 V . Este crescimento do potencial com o aumento da resistividade, foi detectado porque a corrente de injeção se manteve constante.

10.3 Algoritmo alternativo e ensaios de campo

Uma comparação entre os valores da resistência para o eléctrodo sinusoidal, obtida pelo método da matriz ou pelo método empírico, é ilustrada na figura 10.12 [102]. Os valores apresentados advieram dos casos considerados nas subsecções anteriores. Em solos homogéneos ($k=0$), tal como num solo de 2 camadas com coeficiente de reflexão de tensão positivo ($k > 0$), em que o extracto inferior tem maior resistividade, o modelo empírico produz erros significativos. Esses valores são mais pequenos do que os obtidos pelo método da matriz, ou seja, são valores por defeito. A serpentina é muito usada neste tipo de solo. Somente em solo onde o estrato inferior é menos resistivo ($k < 0$) do que o estrato superior, nomeadamente devido ao nível freático, é que as formulas empíricas dão valores por excesso,

mas ainda com erros significativos, particularmente para comprimentos de trincheira de 6 a 10 m. Registe-se que os erros relativos do modelo empírico não diminuem necessariamente com o aumento do comprimento da trincheira. Relativamente ao potencial à superfície, a serpentina produz menores máximos de tensão do que os restantes eléctrodos.

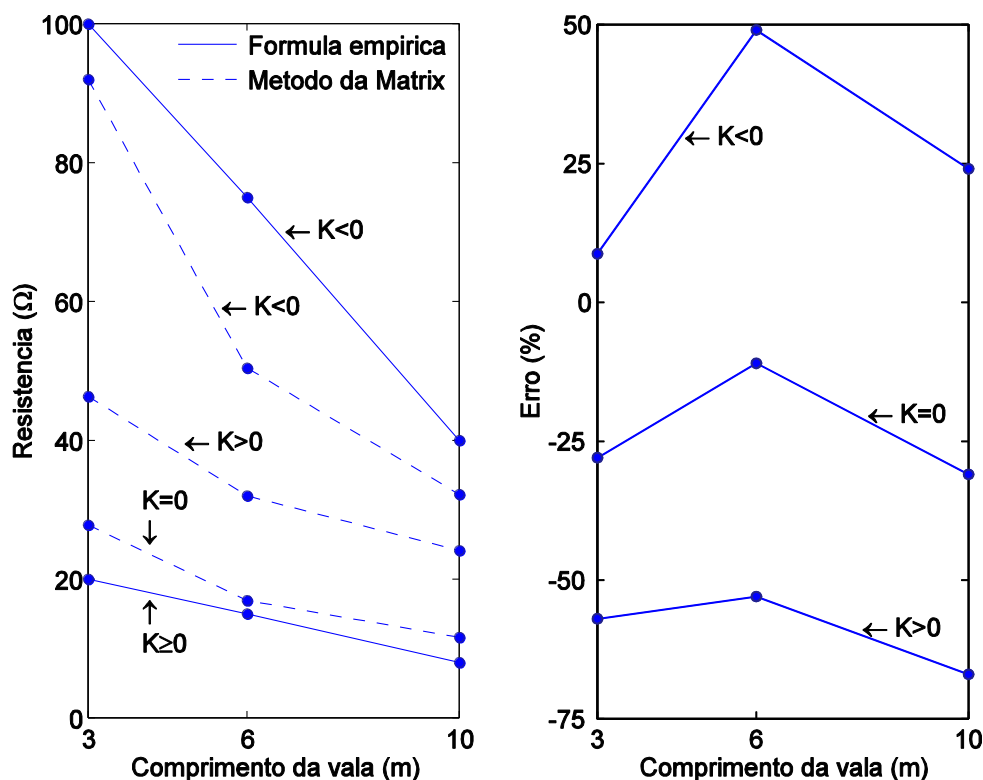


Fig. 10. 12 Resistência da serpentina, calculada pelos métodos da matriz e empírico

O custo do eléctrodo em serpentina é aproximadamente 15% do custo da chapa de aço, normalmente usada em Portugal. O cabo horizontal custa, aproximadamente, três vezes menos do que a serpentina devido ao maior perímetro desta. O custo do cabo é de 6,7 euros por metro, enquanto uma serpentina com três máximos por metro custa, aproximadamente, 21,9 euros, por metro de trincheira. A chapa de dimensões 1x0.5x0.003 m, custa 146 euros. Considerando as comparações apresentadas dos valores da resistência dos três tipos de eléctrodos e o seu custo, facilmente se conclui que a serpentina é uma excelente escolha.

Uma vez que o método empírico não é a melhor escolha para calcular a resistência da serpentina, propõe-se um novo procedimento para esse cálculo, baseado na resistência média do cabo e da chapa, o que conduz a melhores resultados como foi previamente mostrado. Esta escolha é uma boa opção, dado que o erro médio é menor que 5% em solo homogéneo e em solo de duas camadas em que a inferior é mais resistiva. Quando a camada inferior coincide com o nível freático o erro médio pode chegar a 18%. Estes erros são sempre por excesso, relativamente a um cálculo da resistência feito pelo método da matriz, como pode ser verificado na figura 10.3, 10.6 e 10.9.

O método usado (método da matriz), foi executado com um processo de cálculo preciso, que exige um programa computacional específico como, por exemplo, o Matlab. A fim de proporcionar ao engenheiro de campo uma ferramenta simples para o cálculo da resistência da chapa num solo de duas camadas, quando aquela se encontra a pequenas profundidades, propõe-se a adopção de uma fórmula, que originalmente era utilizada para chapas à superfície [17]:

$$R = \rho_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A}} - \frac{\ln\left(\frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1}\right)}{2\pi(D+h_0)} \right], \quad (10.2)$$

em que A é a área da chapa e h_0 , é dado por:

$$h_0 = \sqrt{\frac{A}{2\pi}} \left[\ln\left(\frac{2\rho_2}{\rho_2 + \rho_1}\right) \right] \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \right).$$

O procedimento que se propõe, para estimar a resistência da serpentina, é fazer a média da resistência do cabo, dada pela fórmula de Tagg, com a resistência da chapa calculada com a equação (10.2). A questão que se coloca, é saber qual o impacto nos erros da estimativa, com esta fórmula aproximada. Considere-se, assim, o caso com erros maiores, em que o estrato inferior é o mais resistivo, tal como num solo rochoso, e apresentam-se as curvas da resistência do cabo horizontal, da serpentina pelo método da matriz, da chapa usando (10.2) e da média da chapa com o eléctrodo horizontal, na figura 10.13 [102]. Os resultados obtidos, são uma aproximação por excesso para a resistência do eléctrodo em serpentina, com erros relativos máximos de 27%, 22% e 19%, respectivamente para trincheiras de 10, 6 e 3 m.

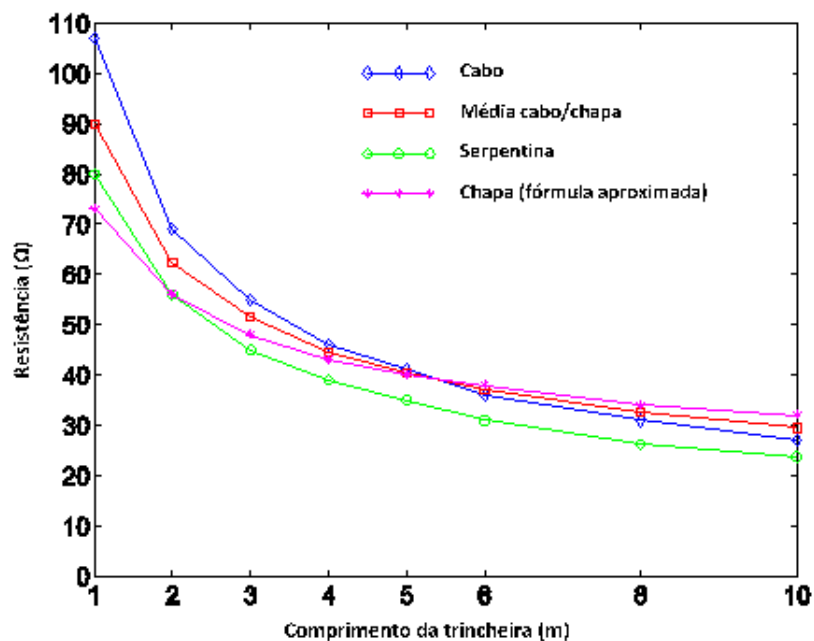


Fig. 10. 13 Comparação entre eléctrodos em solo de 2 estratos ($k > 0$) com algoritmo alternativo

A fórmula simples e o procedimento proposto para calcular a resistência média entre chapa e cabo, é uma aproximação muito melhor do que a formulação do modelo empírico, cujos erros, além de serem por defeito, são de -67%, -53% e -57%, respectivamente para trincheiras de 10m, 6m e 3m como pode ser verificado na figura 10.12.

Para solos com o estrato inferior menos resistivo ($k < 0$), onde este tipo de eléctrodo não é geralmente utilizado, o cálculo da resistência da chapa usando a equação (10.2), conduz a resistências médias entre chapa e cabo com valores maiores do que no caso prévio ($k > 0$), e por excesso.

Apresentam-se dados experimentais, que são comparados com os valores teóricos, para solo geologicamente homogéneos, onde o nível freático produz uma camada inferior e um plano de descontinuidade horizontal entre camadas. Os três tipos de eléctrodos foram testados numa trincheira de 1m, com uma profundidade de 0,3 m num solo arenoso. Este tipo de solo pode ser modelado como um solo de duas camadas devido ao nível freático. A resistividade do estrato superior é de $2400\Omega\text{m}$ com uma espessura de 1,5 m e o estrato inferior tem uma resistividade de $443\Omega\text{m}$. Este tipo de solo foi escolhido de modo a garantir um plano de descontinuidade nivelado com a superfície do solo, já de si horizontal. O tipo de solo considerado, é geologicamente homogéneo e é a presença de água que provoca um estrato inferior menos resistivo. Uma extrapolação linear dos coeficientes do modelo empírico proposto na equação (10.1), foram executados e conduziram a uma fórmula, para uma trincheira de 1m, da forma $R=0.23\rho$, o que permite obter um valor de 560Ω para uma serpentina numa trincheira de 1m. Isto representa um erro considerável, quando comparado com o valor medido. Os resultados são apresentados na tabela 10.1 [102]. A falta de um contacto perfeito entre a superfície inferior da chapa e o solo, devido à presença de bolsas de ar, pode explicar o erro inesperado de -44% para o valor teórico obtido pelo método dos momentos para a referida chapa. Note-se que, quando se abandonava a trincheira depois da colocação da chapa, o ruído do arqueamento desta era audível. Além disso, a pequena profundidade de enterramento, não produziu a pressão suficiente para pressionar a chapa e talvez por este motivo, o valor obtido usando a equação (10.2), apresenta um erro aceitável de -21%, ao contrário do método dos momentos, com um erro de -44%.

Tabela 10. 1 Comparação de valores medidos e calculados

Eléctrodos	Resistência de terra (Ω) / Erro (%)					
	Medida	Calculado e erro para medida	Equação (10.2) e erro para medida	Método empírico/ erro	Média cabo com chapa	
					Média usando Mdm	Média c/ (10.2)
Cabo	2660	2167/-19	-	-	-	-
Chapa	1566	870/-44	1235/-21	-	-	-

Serpentina	1735	1364/-21	-	560/-67,7	1518/-12,5	1701/-2
------------	------	----------	---	-----------	------------	---------

Se as resistências do cabo e da chapa fossem calculadas com erros de -35%, -30%, -20%, -10% e 0%, a média proposta apresentaria resultados com erros de -21%, -15%, -2%, +10% e +22%, respectivamente. Para os casos experimentais analisados e com dados de entrada com erros aproximados de -20%, o método proposto dá resultados com menos de -2%. A estimativa da resistência de cabo e chapa com valores próximos aos medidos, faz com que a resistência média tenha um valor maior do que o esperado, perto de 20%, como foi mostrado na secção 10.2.3 para este tipo de solos. Deve ser realçado que a média proposta para a resistência da serpentina é melhor do que os valores do método empírico que, neste caso, teria um erro de 68% por defeito. Este erro é muito mais alto que o erro máximo de 20% obtido com o método proposto para estimar resistências de cabos e chapas, mesmo que o erro da estimativa destas últimas esteja no intervalo -35 a 0%.

A adopção do novo procedimento proposto, baseado na média dos valores da resistência teórica de cabo e da chapa, são uma opção excelente para estimar a resistência no campo do eléctrodo em serpentina.

10.4 Conclusões

O novo procedimento para calcular a resistência de terra do eléctrodo em serpentina foi teoricamente analisado e validado, particularmente para solos de duas camadas, com o estrato inferior rochoso com um coeficiente de reflexão de tensão positivo. Os erros são pequenos e aceitáveis quando comparados com os erros dos valores obtidos pelo modelo empírico. O uso de uma fórmula simples, para calcular a resistência da chapa, pode aumentar os erros. Contudo, estes ainda se mantêm mais pequenos do que os obtidos pelo modelo empírico, no caso de um coeficiente de reflexão de tensão positivo. As medidas de campo concordam com os resultados experimentais, excepto na chapa, onde as bolsas de ar debaixo desta aumentaram o valor medido da resistência. Mesmo no pior caso, o método proposto tem erros muito menores do que o método empírico: -12% comparados com -68% do modelo empírico.

Em todos os casos considerados, o potencial da superfície provocado pelo eléctrodo sinusoidal produz menores máximos de tensão à superfície, comparado com os restantes eléctrodos. O eléctrodo sinusoidal é fácil de instalar, com um custo muito menor do que a chapa metálica e com menor resistência de terra do que o cabo horizontal.

Capítulo 11 - Conclusão

Introdução

Neste capítulo apresentam-se as conclusões da tese, agregando-se as conclusões parcelares do capítulo 3 em diante. Finaliza-se a apresentação com algumas sugestões para a continuidade da pesquisa nesta área.

11.1 Conclusões

A colocação da vara com o topo desta abaixo da superfície do solo, reduz substancialmente os potenciais de superfície e de passo. Nos cabos enterrados a tensão de passo é máxima quando uma pessoa se aproxima da ponta, caminhando ao longo do cabo, ou quando se aproxima transversalmente a meio do cabo. O potencial de toque é máximo quando o potencial do solo for mínimo, o que acontece a 7,6 m de distância do eléctrodo. Nesta situação o potencial de toque é igual à elevação de potencial do eléctrodo. A pretensão de que estes potenciais criem correntes inofensivas no ser humano exige o enterramento de varas ou cabos enormes, podendo estes atingir muitas centenas de metros. As várias fórmulas testadas para o cálculo da resistência são aceitáveis para varas, mas a fórmula da legislação nacional, para cabos, tem erros significativos por excesso para comprimentos até dez metros. Para eléctrodos em chapa, quer colocados na vertical, quer na horizontal, a fórmula de Dwight tem a melhor aproximação quando comparada com métodos numéricos mais exactos.

Num solo de dois estratos, o método da matriz é uma boa ferramenta de cálculo, quer de potencial à superfície quer da resistência, desde que os eléctrodos estejam totalmente no estrato superior. Para eléctrodos no estrato inferior, o referido método calcula a resistência com erros aceitáveis, mas não consegue calcular o potencial de superfície, se a primeira imagem ascendente, que é uma singularidade, coincidir com a superfície do solo. Se a referida imagem ficar próxima da superfície, o potencial calculado pode até ser negativo, se o coeficiente de reflexão de tensão for negativo. Neste caso, calcular o potencial no plano de separação dos estratos é uma alternativa, até porque este defeito ocorre em estratos superiores pouco profundos. Em varas que atravessam os dois estratos, as singularidades afetam os cálculos das duas grandezas referidas, pelo que deslocar o segmento superior da vara de alguns decímetros é uma alternativa. Este método exige matrizes grandes,

As singularidades que afectam o método da matriz também prejudicam o cálculo no método dos momentos, já que este se obtém por integração do primeiro. Para os eléctrodos no estrato superior potenciais e resistências são calculados com pouco erro, no estrato inferior só o cálculo de resistência é fiável e para as varas que atravessam os dois estratos os erros são muito grandes no cálculo das grandezas referidas. As sugestões para superar estes problemas são as mesmas do parágrafo anterior.

O método dos elementos finitos não sofre dos defeitos atrás referidos porque não é baseado na teoria das imagens. Contudo, com uma formulação baseada na simetria axial, como se fez nesta tese, fica reduzido ao cálculo de varas, discos e anéis. Revela-se útil no cálculo de potenciais de superfície para eléctrodos no estrato inferior, pelo menos numa direcção transversal ao eixo dos cabos enterrados.

A resistividade dos solos tem sido o parâmetro mais descurado em Portugal e, contudo, a resistência dos eléctrodos é proporcional à referida resistividade, em que a constante de proporcionalidade depende da geometria. Os procedimentos foram sintetizados em função das assíntotas existentes. O método intuitivo de Lancaster-Jones, pela sua simplicidade, devia ser do conhecimento dos engenheiros de campo, embora origine resultados aproximados. Os métodos gráficos, quer do padrão do IEEE quer de Tagg, produzem modelos de solo razoáveis, mais preciso o de Tagg mas com o risco de não se obter solução nalgumas situações, ao contrário do método do padrão do IEEE. A estratificação em três estratos pelo método de Pirson é útil, fundamentalmente, para se obterem modelos majorados e minorados em dois estratos.

Na optimização de parâmetros, usou-se inicialmente o método do gradiente em que a função objecto era composta pelo quadrado dos desvios entre medidas e previsões. Neste tipo de optimização, as varas curtas, que têm maior resistência, são determinantes no cálculo do mínimo, já que os seus desvios, que são os maiores em valor absoluto, são preponderantes e acabam por impor um mínimo local. A optimização pelo método de Newton é mais rápida, mas tem constrangimentos regulares, bloqueando o processo iterativo devido ao aparecimento de grandezas negativas. Fixando num valor aceitável a grandeza que provocou a paragem do processo e reduzindo o número de equações, foi o caminho seguro seguido neste trabalho.

A experimentação em tina de água permite testar a distribuição de potencial à superfície de eléctrodos a enterrar em solo homogéneo, desde que se preserve a escala.

Os modelos de solo de dois estratos revelaram-se melhores do que os modelos de solo homogéneo, já que têm menor erro. O modelo de solo menos preciso parece ser o de Lancaster-Jones sendo o que exhibe mais resultados fora do intervalo de 25 % de erro. No método dos momentos o uso do módulo da resistência mútua entre segmentos melhorou sempre o erro, embora nem sempre de forma satisfatória tal como se viu no último caso tratado.

A resistência do eléctrodo em serpentina é muito melhor estimada usando a média da resistência do cabo e da chapa, com o mesmo comprimento de trincheira, em solos homogéneos ou em solos de dois estratos.

11.2 Directrizes de investigação

Um método interessante para calcular a resistência de um eléctrodo genérico num solo de dois estratos, poderá ser o método dos elementos finitos para operadores integrais. O método trabalha directamente com a função de Green, afirmando Sylvester e Ferrari [81] que a singularidade é integrável. Nesta formulação, o problema fica com fronteiras abertas e a matriz de rigidez fica densa e mais pequena [81]. Os pontos de singularidade atrás definidos deverão, contudo, ser sujeitos a uma verificação, nomeadamente quando um eléctrodo está no estrato inferior, colocado a uma profundidade que é o dobro da espessura do estrato superior.

Uma outra direcção da investigação deve ser a do trabalho com solos de três estratos, utilizando por exemplo o método de Prony [54], que considera imagens complexas, já que este tipo de terreno aparece com alguma frequência. Uma outra alternativa é calcular a função kernel de Green em solos de três camadas, eventualmente por integração numérica [103].

O estudo de fenómenos transitórios pode ser uma terceira direcção de investigação e a representação do eléctrodo como uma linha de transmissão, cujo domínio teórico é do conhecimento geral, permitirá uma adaptação fácil a esta linha de investigação [73], embora hoje seja aceite que sem o fenómeno da ionização incorporado, o projecto será sobredimensionado. O método das diferenças finitas no domínio do tempo, talvez permita trabalhar em simultâneo a ionização do solo e o problema da propagação electromagnética [75].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Dwight H. B., Calculation of Resistance to Ground. AIEE Transactions, vol 55, Dec 1936.
- [2] - IEEE Std 142-1982 Grounding of Industrial and Commercial Power Systems
- [3] - IEEE Std 142-2007 Grounding of Industrial and Commercial Power Systems
- [4] - Rudenberg R., Grounding Principles and Practice, Electrical Engineering, vol 64 n° 1, Janeiro 1945.
- [5] - Zaborsky J. and Rittenhouse J., Design Charts for Determining Optimum Ground-Rod Dimensions, AIEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol 72, Aug 1953
- [6] - Gross, E. T. B., Chitnis, B.V. e Stratton, L. J., Grounding Grids for High-Voltage Stations. AIEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol 72, Aug 1953
- [7] - Schwarz, S.J., Analytical Expressions for the Resistance of Grounding Systems. AIEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 73 No. 13 Aug 1954
- [8] - G. F. Tagg, Earth Resistances, George Newnes Limited, London 1964
- [9] - E.D. Sunde, Earth Conduction Effects in Transmission Systems, Dover Publications, Inc., New York, 1968.
- [10] - Joy, M. (1979). Touch and Step Calculations for Substation Grounding Systems. IEEE Power Engineering Society.
- [11] - Meliopoulos et al, Analysis of Grounding Systems, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems Vol. PAS-100 No. 3 March 1981
- [12] - Heppe, R. (1979). COMPUTATION OF POTENTIAL AT SURFACE ABOVE AN ENERGIZED GRID, ALLOWING FOR NON-UNIFORM CURRENT DISTRIBUTION, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-98. No.6 Nov./Dec. 1979.
- [13] - Amoruso V., Savino M. and Labini M., Analysis of large grounding systems for earth resistance measurements in two layer soils, IEE Proceedings Vol. 136, Pt. C, No. 3, May 1989.
- [14] - Cardoso, J. R. Oliveira J.B. (1991). Ground 3D: Um Sistema CAD/CAE para Análise de Sistemas de Aterramento, Anais do XI SNPTEE, Rio de Janeiro.
- [15] - Antunes, Carlos F. R. L. e Coimbra, António P. B., Estudo da Resistência de Terra Para Várias Configurações de Eléctrodos Usando o Método dos Elementos Finitos, Actas das II Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Electrotécnica, Coimbra Julho de 91, II vol. pp 2.144 a 2.151.
- [16] - Alonso, F. et al, Modelo para el Analyse de Redes e Tierra por Elementos Finitos. Calculo de la Resitencia de Tierra. 5 Jornadas Hispano Lusas de Ingenieria Electrica. Salamanca (1997).
- [17] - Salama, Elsherbiny, Chow. Calculation and interpretation of a grounding grid in two-layer earth with the synthetic-asymptote approach. Electric Power Systems Research 35, 1995
- [18] - Ma J., and Dawalibi F., Modern Computational Methods for the Design and Analysis of Power System Grounding, 0-7803-4754-4/98 IEEE.
- [19] - Kostic M., Popovic B. and Jovanovic M., Numerical Analysis of a class of foundation grounding systems, IEE Proceedings Vol. 137, Pt. C, No. 2, March 1990.

- [20] - Kostic M., Analysis of foundation grounding systems with external loops and rods, , IEE Proceedings-C Vol. 140, No. 2, March 1993.
- [21] - Kostic M., ANALYSIS OF COMPLEX GROUNDING SYSTEMS CONSISTING OF FOUNDATION GROUNDING SYSTEMS WITH EXTERNAL GRIDS, IEEE Transactions on Power Delivery Vol. 13 No. 3 July 1998.
- [22] - Colominas, Gomez-Calvino, Navarrina, Casteleiro. A general numeric model for grounding analysis in layered soils. Advances in Engineering Software 33, 2002.
- [23] - Colominas, Navarrina, Casteleiro, A Numerical Formulation for Grounding Analysis in Stratified Soils, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 17, NO. 2, April 2002.
- [24] - Colominas, Aneiros, Navarrina, Casteleiro, A BEM Formulation for Computational Design of Grounding Systems in Stratified Soils, Computational Mechanics: New Trends and Applications, Idelsohn, Onate and Dvorkin (Eds) CIMNE, Barcelona, Spain 1998.
- [25] - Adriano, Bottauscio, Zucca, Boundary Element Approach for the analysis and design of grounding systems in presence of non-homogeneous, IEE Proceedings Gener. Transm. Distrib. Vol 150, No. 3, May 2003.
- [26] - Ma J. and Dawalibi F., Analysis of Grounding Systems in soils with Finite Volumes of Different Resistivities, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 17, NO 2, April 2002.
- [27] - Li Z., et al, A Novel Matematical Modeling of Grounding System Buried in Multilayer Earth, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 21, NO 3, July 2006.
- [28] - Berberovic, Haznadar, Stih. Method of moments in analysis of grounding systems. Engineering Analysis with Boundary Elements 27, 2005
- [29] - Sharma, De Four, Parametric Analysis of Grounding Systems in Two-Laier Earth using Galerkin's Moment Method, IEEE 2006.
- [30] - Liu, Theethayi, Thottappillil, Gonzalez, Zitnik. An improved model for soil ionization around grounding systems and its application to stratified soil. Journal of Electrostatics 60, 2004.
- [31] - He J., Yu G., Yuan J., Zeng R., Zhang B., Zou J. and Guan Z., Decreasing Grounding Resistance of Substation by Deep-Ground-Well Method, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 20, NO. 2, April 2005.
- [32] - Zeng R., He J., Gao Y., Zou J. and Guan Z., Grounding Measurement Resistance Analysis of Grounding Systems in Vertical Layered Soil, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 19, NO. 4, October 2006.
- [33] - Salam M. et al, An artificial neural networks approach to model and predict the relationship between the grounding resistance and length of buried electrode in the soil, Journal of Electrostatics 64, 2006.
- [34] - Choi J.K., Ahn Y.H., Woo J. W., Jung G. J. Han B. S. and Kim K. C., Evaluation of grounding performance of energized substation by ground current measurement, Electric Power System Research, Volume 77, Issue 11, September 2007, pages 1490-1494.
- [35] - Feng Z. et al, Research on Reducing Grounding Resistance of Transmission Line Tower Grounding Grid, 978-1-4244-8165-1/11 (2011)






- [36] - Y. Khan, F. R. Pazheri, N. H. Malik, A. A. Al-Arainy, M. I. Qureshi, Novel approach of estimating grounding rod optimum dimensions in high resistivity soils, *Electr. Pow. Syst. Res.* 92 (2012) 145-154.
- [37] - Meliopoulos S., Papalexopoulos A., e Webb R., ESTIMATION OF SOIL PARAMETERS FROM DRIVEN ROD MEASUREMENTS, *IEEE Transactions on Power apparatus and Systems*, VOL. PAS 103, No. 9, September 1984.
- [38] -Mombello E., Trad O., Rivera J.and Andreoni A., Two-layer soil model for power station grounding system calculation considering multilayer soil stratification, *Electr. Pow. Syst. Res.* 37 (1) (1996) 67-78.
- [39] - Cordeiro. Manuel, R. (1994). Métodos Computacionais para o Tratamento dos Parâmetros Fundamentais no Projecto das Redes de Terra. Tese de Doutoramento, UTAD Vila Real.
- [40] - Cordeiro R., Aplicação do método do caminho do gradiente máximo para o cálculo da resistividade média real de um solo com base no método de Wenner, 4ª Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Eletrotécnica Julho de 1995, Porto, Portugal.
- [41] - Cordeiro M. e Cunha B., RTIE - PROGRAMA PARA ESTUDO DE REDES DE TERRA EM INSTALAÇÕES ELÉCTRICAS, 5ª Jornadas Hispano Lusas de Ingenieria Electrica. Salamanca (1997).
- [42] - Ma, Dawalibi, Southey, On the equivalence of uniform and two-layer soils to multilayer soils in the analysis of grounding systems, *IEE Proceedings Gener. Transm. Distrib.* Vol 143, No. 1, January 1996.
- [43] - Yague E., Alvira D. e Soto F., Diseno de Sistemas de Puestas a Terra, Programa PAT, 5ª Jornadas Hispano Lusas de Ingenieria Electrica. Salamanca (1997).
- [44] - Slaoui F., Georges S., Lagacé P. et Do X., The inverse problem of Schlumberger resistivity sounding measurements by ridge regression, *Electric Power System Research*, Vol. 67 Issue 2, November 2003.
- [45] - Jinliang He et al, Seasonal Influences on Safety of Substation Grounding Systems, *IEEE Transactions on Power Delivery*, VOL. 18, No. 3, July 2003.
- [46] - Bo Zhang et al, Parameter Estimation of Horizontal Multilayer Earth By Complex Image Method, *IEEE Transactions on Power Delivery*, VOL. 20, No. 2, April 2005.
- [47] - Gonos I. and Stathopoulos I., Estimation of Multilayer Soil Parameter Using Genetic Algorithms, *IEEE Transactions on Power Delivery*, VOL. 20, No. 1, January 2005.
- [48] - Dalziel C. F., "Threshold 60-cycle Fibrillating Currents", *AIEE Transactions*. Vol. 79, part III, 1960 pp 667-673.
- [49] - Dalziel C. F. e Lee R. W., "Reevaluation of Lethal Electric Currents", *IEEE Trans. On Industry and General Application* Vol. IGA-4, No. 5, October 1968.
- [50] - Sverak J., 'Simplified Analysis of Electrical Gradients above a Ground Grid I - How Good is The IEEE Method?' *IEEE Trans. On Power Apparatus ans Systems*, Vol. PAS-103, No. 1 January 1984.

- [51] - Sverak J., Progress in Step and Touch Voltage Equation of ANSI/IEEE Std 80 - Historical Perspective, IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 13 No. 3, July 1998.
- [52] - Mukhedkar D., Gervais Y. e Dawalibi F., MODELLING OF POTENTIAL DISTRIBUTION AROUND A GROUND ELECTRODE, IEEE PES Winter Meeting Nova York 1973.
- [53] - Meliopoulos S., Power Systems Grounding and Transients, Merzell Dekker 1986.
- [54] - Chow Y., Yang J. e Srivastava K., Complex images of a ground electrode in layered soils, Journal of Applied Physics, 71, January 1992.
- [55] - Ferragut J., Determinacion de Potenciales Eletricos En Un Terreno Por El Metodo De Las Diferencias Finitas, 4ª Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Electrotécnica, Porto 1995.
- [56] - Cordeiro M. R., Determinação automática de tensões de passo e contacto na malha de uma rede de terra com base num método analítico, 4ª Jornadas Luso-Espanholas de Engenharia Electrotécnica, Porto 1995.
- [57] - Lee C. and Meliopoulos A., Comparison of Touch and Step Voltages Between IEEE Std 80 and IEC 479-1, IEE Proc-Gener. Transm. Distrib., Vol 146, No 5, September 1999.
- [58] - Lee C. and Chang C., Comparison of 161/69-kV Grounding Grid Design Between Indoor-Type and Outdoor-Type Substations, IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 20 No. 1, January 2005.
- [59] - He J., Gao Y., Zeng R., Sun W., Zou J. and Guan Z., Optimal Design of Grounding Systems Considering the Influence of Seazonal Frozen Soil Layer, , IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 20 No. 2, April 2005.
- [60] - Nayel M., Zhao J., He J., Cai Z. and Wang Q., Study of Step and Touch Voltage in Resistive/Capacitive Ground due to Lightning Stroke, CEEM'2006/DALIAN 2P1-07.
- [61] - Markowska R., Sova A. and Wiater J. Step and Touch Voltage Distribution at GSM Base Station during Direct Lightning Stroke, 2008 International Conference on High Voltage Engineering and Applications, Chongqing, China, November 9-13, 2008.
- [62] - Colominas I., Navarrina F. and Casteleiro M., Numerical Simulation of Transferred Potentials in Earthing Grids Considering Layered Soil Models, IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 22 No. 3, July 2007.
- [63] - Kohdr H., Salloum G., Saraiva J. and Matos M., Design of grounding systems in sunstations using a mixed-integer linear programming formulation, Electric Power System Research 79 (2009) 126-133
- [64] - Bellachi P., "Impulse and 60 cycle Characteristics of Driven Grounds Part I", AIEE Transactions, Vol. 60, pp 123-128, March 1941.
- [65] - Bellachi P., Armington R., and Snowden A., "Impulse and 60 cycle Characteristics of Driven Grounds Part II", AIEE Transactions, Vol. 61, pp 349-363, 1942.
- [66] - Bellachi P. and Armington R., "Impulse and 60 cycle Characteristics of Driven Grounds Part III", AIEE Transactions, Vol. 62, pp 334-345, 1943.
- [67] - Gupta B. and Thapar B., "Impulse Impedance of Ground Grids", , IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, VOL. PAS-99. No. 6, pp 2357-2362 November/December 1980.

- [68] - Meliopoulos A. and Moharam M., TRANSIENT ANALYSIS OF GROUNDING SYSTEMS, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, VOL. PAS-102. No. 2, pp 389-399 February 1983.
- [69] - Verma R. and Mukhedkar D., IMPULSE IMPEDANCE OF BURIED GROUND WIRE, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, VOL. PAS-99. No. 5 Sept/Oct. 1980.
- [70] - Verma R. and Mukhedkar D., FUNDAMENTAL CONSIDERATIONS AND IMPULSE IMPEDANCE OF GROUNDING GRIDS, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, VOL. PAS-100. No. 3 March 1981.
- [71] - Popa R., Baran I. and Trecat J., 'ASPECTS CONCERNING THE ANALYSIS OF GROUNDING SYSTEMS' TRANSIENT BEHAVIOUR USING EMTP', IPST 95, International Conference on Power System transients, Lisboa 3 a 7 de Setembro 1995.
- [72] - Grcev L., MODELING OF GROUNDING SYSTEM FOR BETTER PROTECTION OF COMMUNICATION INSTALLATIONS AGAINST EFFECTS FROM ELECTRIC POWER SYSTEMS AND LIGHTNING, INTELEC 2001 14-18 October 2001, Conference Publication No 484, IEE 2001.
- [73] - Lorentzou M., Hatziargyrio N. e Papadias B., Time Domain Analysis of Grounding Electrode Impulse Response, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 18. No. 2 April 2003.
- [74] - Thomas E., Dagenhart J. Barker R. and Allen C., DISTRIBUTION SYSTEM GROUNDING FUNDAMENTALS, IEEE INDUSTRY APPLICATION MAGAZINE SEPT|OCT 2005.
- [75] - Liu Y., Theethayi N. and Thottappillil R. An Engineering Model for Transient Analysis of Grounding Systems Under Lightning Strokes: Nonuniform Transmission-Line Approach, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 20. No. 2 April 2005.
- [76] - Guo J., Zou J. Zhang B. He J. and Guan Z. An Interpolation Model to Accelerate the Frequency-Domain Response Calculation of Grounding Systems Using the Method of Moments, IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 21. No. 1 January 2006.
- [77] - Liu Y., Theethayi N. and Thottappillil R., Investigating the validity of existing definitions and empirical equations off effective length/area of grounding wire/grid for transient studies, Journal of Electrostatics 65 (2007) 329-335.
- [78] - Gatta F., Geri A., Lauria S. and Maccioni M., Equivalent Lumped Parameter Π -Network of Typical Grounding Systems for Linear and Non-Linear Transient Analysis, IEEE Bucharest Power Tech Conference June 28th-July 2nd, Romania 2009.
- [79] - Akhary M., Sheshyckani K. and Alemi M., The Effect of Frequency Dependence of Soil Electric Parameters on the Lightning Performance of Grounding Systems, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, VOL. 55, No. 4, August 2013.
- [80] - Sheshyckani K., Akhary M., Tabei B. and Kazemi R., Wideband Modeling of Large Grounding Systems to Interface With Electromagnetic Transient Solvers, , IEEE Transactions on Power Delivery, VOL. 29. No. 4 August 2014.
- [81] - Silvester P.P. and Ferrari R.L., Finite Elements for Electrical Engineers, 2^a edition, Cambridge University Press, 1990.
- [82] - Antunes C.F.R.L., Elementos Finitos em Eletrotecnia, Publicação interna da FCTUC 1991.

- [83] - IEEE Std 80-2000 IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding.
- [84] - Miguel Manual de Higiene e Segurança no Trabalho. Porto: Porto Editora, 2007.
- [85] - <http://www.univ-ab.pt/formacao/sehit/curso/riscos/objectivos.html>, 2009)
- [86] - Portaria, 9. A. (2006). Regras Técnicas das Instalações Eléctricas de Baixa Tensão. Diário da República. Portugal.
- [87] - Martins A., Mariano S., Tensões de passo e de toque em eléctrodos de terra, Engenharia 09, Congresso nacional na Universidade da Beira Interior 2009.
- [88] - Maxwell J. C., A Treatise on Electricity & Magnetism, vol. 1, unabridged third edition, Dover Publications Inc, New York.
- [89] - Martins A., Mariano S., Calado M. R., Grounding Electrode calculation Using The Matrix Method, World Congress Engineering 2011, Londres pag. 1460 a 1464.
- [90] - Kindermann C., Aterramentos Eléctricos, Editora Sagra de Luzzato, (1995).
- [91] - Martins A., Mariano S., Calado M. R., The Effect of Images on Surface Potential and Resistance Calculation of Grounding Systems, Advances in Electrical and Computer Engineering 2015.
- [92] - Martins A., Mariano S., Calado M. R., Finite Element Analysis INTECHOPEN.COM 2012
- [93]- Martins A., Antunes L., HEMISPHERIC-CILINDRICAL NUMERIC MODELLING OF A GROUND ELECTRODE USING VOLTAGE ADAPTED FINITE ELEMENTS, 5ª JORNADAS HISPANO-LUSAS DE INGENIERIA ELÉTRICA, Salamanca julio 1997, Tomo 1, ACTAS.
- [94] - Purcell. (s.d.). Berkeley Physics Course. Edgar Blucher Lmt.
- [95]- Martins A., Antunes L., MODELIZAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DO IEEE DE UM ELÉTRODO DE TERRA UTILIZANDO MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS ADAPTADAS EM TENSÃO E EM POTÊNCIA, 4ª JORNADAS LUSO-ESPANHOLAS DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA, Porto 1995, VOL. 1
- [96]- Soares J., Redes de Terras para as Telecomunicações, publicação interna dos extintos Correios e Telecomunicações de Portugal, 1989.
- [97] - Fonseca S., Métodos Estatísticos, Publicação interna da Universidade de Aveiro 1978.
- [98]- Rodrigues J., Creppe R., Ulson J., Serni P. and Flauzino R., PIRSON'S METHOD FOR STRATIFICATION IN SEVERAL LAYERS USING NEURAL NETWORK, DINCON'10, 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Application, June 07-11, 2010
- [99] - Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, Wiley, 7ª edição, 1993.
- [100]- Burden R. L., Faires J. D., Numerical Analysis, PWS-KENT Publishing Company, 4ª edição, 1988.
- [101]<http://www.edpdistribuicao.pt/pt/profissionais/Lists/EDPDocumentosNormativos/Attachments/353/DRE-C11-040N.pdf>
- [102] - Martins A. M., Mariano S. J., Calado M.R. e Felipe de Souza, The Sinusoidal Ground Electrode: Theory and case study results, ACES Journal.
- [103] - He J., Zeng R. e Zhang B., Methodology and technology for power system grounding, IEEE, Wiley 2013.

Anexo A - Fórmulas de Dwight

	Hemisphere radius a	$R = \frac{\rho}{2\pi a}$
•	One ground rod length L , radius a	$R = \frac{\rho}{2\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} - 1 \right)$
• •	Two ground rods $s > L$; spacing s	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 - \frac{L^2}{3s^2} + \frac{2L^4}{5s^4} \dots \right)$
• •	Two ground rods $s < L$; spacing s	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} + \ln \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$
—	Buried horizontal wire length $2L$, depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} + \ln \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$
L	Right-angle turn of wire length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} - 0.2373 + 0.2146 \frac{s}{L} + 0.1035 \frac{s^2}{L^2} - 0.0424 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
	Three-point star length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{6\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} + 1.071 - 0.209 \frac{s}{L} + 0.338 \frac{s^2}{L^2} - 0.054 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
+	Four-point star length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} + 2.912 - 1.071 \frac{s}{L} + 0.645 \frac{s^2}{L^2} - 0.145 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
	Six-point star length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{12\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} + 6.851 - 3.128 \frac{s}{L} + 1.758 \frac{s^2}{L^2} - 0.490 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
	Eight-point star length of arm L , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{16\pi L} \left(\ln \frac{2L}{a} + \ln \frac{2L}{s} + 10.98 - 5.51 \frac{s}{L} + 3.26 \frac{s^2}{L^2} - 1.17 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$
○	Ring of wire diameter of ring D , diameter of wire d , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{2\pi^2 D} \left(\ln \frac{8D}{d} + \ln \frac{4D}{s} \right)$
—	Buried horizontal strip length $2L$, section a by b , depth $s/2$, $b < a/8$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} + \frac{a^2 - 2ab}{2(a+b)^2} + \ln \frac{4L}{s} - 1 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$
	Buried horizontal round plate radius a , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8a} + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 - \frac{7}{12} \frac{a^2}{s^2} + \frac{53}{40} \frac{a^4}{s^4} \dots \right)$
	Buried vertical round plate radius a , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8a} + \frac{\rho}{4\pi s} \left(1 + \frac{7}{24} \frac{a^2}{s^2} + \frac{99}{320} \frac{a^4}{s^4} \dots \right)$

Anexo B - Fórmulas da resistência mútua entre segmentos

Fórmulas para o cálculo da resistência mutua entre segmentos, devido a uma distribuição linear de corrente.

TABLE 5.2 Equations for Voltage Distribution Factors Between Two Conductor Segments (Mutual Resistance)

Conductor direction ^{a,b}			
Segment 1	Segment 2	Voltage distribution factors ^{c,d}	
x-directed	x-directed	$\frac{1}{16L_1L_2\pi\sigma}$	$[F_2(x_2 - x_1 + L_1 + L_2, B_x^-) - F_2(x_2 - x_1 + L_1 - L_2, B_x^-)$ $- F_2(x_2 - x_1 - L_1 + L_2, B_x^-) + F_2(x_2 - x_1 - L_1 - L_2, B_x^-)$ $+ F_2(x_2 - x_1 + L_1 + L_2, B_x^+) - F_2(x_2 - x_1 + L_1 - L_2, B_x^+)$ $- F_2(x_2 - x_1 - L_1 + L_2, B_x^+) + F_2(x_2 - x_1 - L_1 - L_2, B_x^+)]$
y-directed	y-directed	$\frac{1}{16L_1L_2\pi\sigma}$	$[F_2(y_2 - y_1 + L_1 + L_2, B_y^-) - F_2(y_2 - y_1 + L_1 - L_2, B_y^-)$ $- F_2(y_2 - y_1 - L_1 + L_2, B_y^-) + F_2(y_2 - y_1 - L_1 - L_2, B_y^-)$ $+ F_2(y_2 - y_1 + L_1 + L_2, B_y^+) - F_2(y_2 - y_1 + L_1 - L_2, B_y^+)$ $- F_2(y_2 - y_1 - L_1 + L_2, B_y^+) + F_2(y_2 - y_1 - L_1 - L_2, B_y^+)]$

TABLE 5.2 (Continued)

Conductor direction ^{a,b}			
Segment 1	Segment 2	Voltage distribution factors ^{c,d}	
z-directed	z-directed	$\frac{1}{16L_1L_2\pi\sigma}$	$[F_2(z_2 - z_1 + L_1 + L_2, B_z^-) - F_2(z_2 - z_1 + L_1 - L_2, B_z^-)$ $- F_2(z_2 - z_1 - L_1 + L_2, B_z^-) + F_2(z_2 - z_1 - L_1 - L_2, B_z^-)$ $+ F_2(z_2 + z_1 + L_1 + L_2, B_z^-) - F_2(z_2 + z_1 + L_1 - L_2, B_z^-)$ $- F_2(z_2 + z_1 - L_1 + L_2, B_z^-) + F_2(z_2 + z_1 - L_1 - L_2, B_z^-)]$
x-directed	y-directed	$\frac{1}{16L_1L_2\pi\sigma}$	$[F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 - z_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2$ $- y_1 - L_2, z_2 - z_1) - F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 - z_1)$ $+ F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 - z_1) + F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2$ $- y_1 + L_2, z_2 + z_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, y_2 - y_1 - L_2, z_2 + z_1)$ $- F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2 - y_1 + L_2, z_2 + z_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, y_2$ $- y_1 - L_2, z_2 + z_1)]$

$$\begin{array}{l}
\text{x-directed} \quad \text{z-directed} \quad \frac{1}{16L_1L_2\pi\sigma} [F_3(x_2 - x_1 + L_1, z_2 - z_1 + L_2, y_2 - y_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, z_2 \\
- z_1 - L_2, y_2 - y_1) - F_3(x_2 - x_1 - L_1, z_2 - z_1 + L_2, y_2 - y_1) \\
+ F_3(x_2 - x_1 - L_1, z_2 - z_1 - L_2, y_2 - y_1) + F_3(x_2 - x_1 + L_1, z_2 \\
+ z_1 + L_2, y_2 - y_1) - F_3(x_2 - x_1 + L_1, z_2 + z_1 - L_2, y_2 - y_1) \\
- F_3(x_2 - x_1 - L_1, z_2 + z_1 + L_2, y_2 - y_1) + F_3(x_2 - x_1 - L_1, z_2 \\
+ z_1 - L_2, y_2 - y_1)] \\
\text{y-directed} \quad \text{z-directed} \quad \frac{1}{16L_1L_2\pi\sigma} [F_3(y_2 - y_1 + L_1, z_2 - z_1 + L_2, x_2 - x_1) - F_3(y_2 - y_1 + L_1, z_2 \\
- z_1 - L_2, x_2 - x_1) - F_3(y_2 - y_1 - L_1, z_2 - z_1 + L_2, x_2 - x_1) \\
+ F_3(y_2 - y_1 - L_1, z_2 - z_1 - L_2, x_2 - x_1) + F_3(y_2 - y_1 + L_1, z_2 \\
+ z_1 + L_2, x_2 - x_1) - F_3(y_2 - y_1 + L_1, z_2 + z_1 - L_2, x_2 - x_1) \\
- F_3(y_2 - y_1 - L_1, z_2 + z_1 + L_2, x_2 - x_1) + F_3(y_2 - y_1 - L_1, z_2 \\
+ z_1 - L_2, x_2 - x_1)]
\end{array}$$

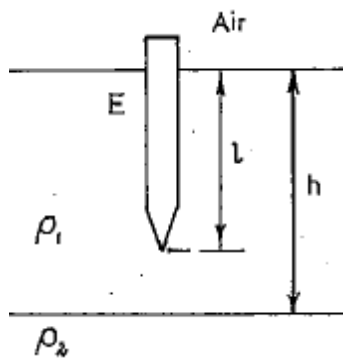
^aSegment 1 length is $2L_1$. Segment 2 length is $2L_2$.

^bSegment 1 is centered at (x_1, y_1, z_1) . Segment 2 is centered at (x_2, y_2, z_2) .

^c $B_x^\pm = [(y_2 - y_1)^2 + (z_2 \pm z_1)^2]^{0.5}$, $B_y^\pm = [(x_2 - x_1)^2 + (z_2 \pm z_1)^2]^{0.5}$, $B_z^\pm = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{0.5}$.

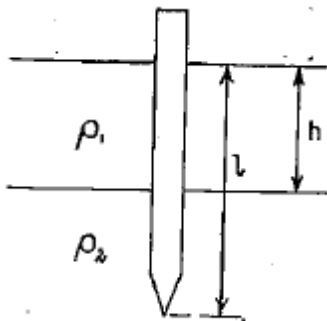
^dThe functions F_2 and F_3 are defined in the text.

Anexo C - Fórmulas de Tagg

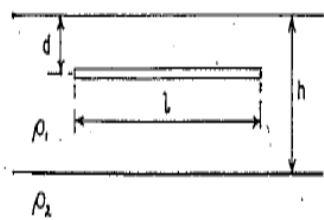


$$R = \frac{\rho_1}{2\pi l} \left(\ln \frac{4l}{a} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{2} \ln \frac{nh+l}{nh-l} \right)$$

$$k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$



$$R = \frac{\rho_1}{2\pi l} \frac{1+k}{1-k+2k\frac{h}{l}} \left[\ln \left(\frac{2l}{a} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \ln \left(\frac{2nh+l}{(2n-2)h+l} \right) \right]$$



$$R = R_{hom} + \frac{2\rho_1}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} k^n \left[\ln \frac{1 + \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1}}{2n\frac{h}{l}} + \frac{2nh}{l} - \sqrt{\left(\frac{2nh}{l}\right)^2 + 1} \right]$$

R_{hom} : Resistência do cabo em solo homogêneo com $\rho = \rho_1$