UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Ensino baseado em resolução de problemas com recurso à folha de cálculo:
Uma proposta didática para abordagem ao tópico Sucessões Numéricas

Óscar Mavungo Cumbo

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Didática da Matemática
(3º ciclo de estudos)

Orientadora: Prof. Doutora Susana Paula Graça Carreira
Co-orientador: Prof. Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva

Covilhã, Julho de 2018

Dedico esta tese

À minha mais que amada família…

… e a Deus que sempre coloca no meu caminho pessoas extraordinariamente especiais como são todos os professores e investigadores que diariamente trabalham com o objetivo de melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática e combater o tédio que esta disciplina causa nos alunos, incluindo aqueles que passaram por mim, pois que quando me deixaram, deixaram comigo uma parte de si.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus que permitiu que tudo acontecesse, ao longo da minha vida, não somente nestes anos como universitário mas em todos os momentos, e que é o maior Mestre que alguém pode ter.

À Faculdade de Ciências da Universidade da Beira Interior pela oportunidade de fazer o curso de Doutoramento em Didática da Matemática e aos Serviços de Ação Social da Universidade da Beira Interior e da Universidade de Algarve pela hospitalidade manifestada durante os períodos em que permaneci na espetacular cidade da Covilhã e na maravilhosa cidade de Faro.

À Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira e ao Professor Doutor Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva, não somente por me terem orientado ao longo deste processo, mas sobretudo por impulsionarem a minha apetência pelo conhecimento e pela investigação, pelo que, por justiça, terão os meus eternos agradecimentos que se estendem a todos os que contribuíram para minha formação.

Resumo

O presente estudo tem como foco central os resultados da implementação de uma sequência didática para o ensino-aprendizagem de Sucessões Numéricas, numa disciplina de Análise Matemática do 1º ano de uma licenciatura em Engenharia do Ambiente.

As questões de investigação incluem: a aquisição de diretrizes para a elaboração e implementação de uma sequência didática baseada na resolução de problemas contextualizados e no recurso à folha de cálculo; a compreensão sobre o modo como os alunos fazem uso de diferentes registos de representação semiótica; e a caraterização dos processos de construção de modelos conceptuais pelos alunos. Para tal, são analisados os tipos de registos de representação semiótica que os alunos produzem, a natureza dos modelos que os alunos criam quando se envolvem em atividades propulsoras de modelos, inerentes ao tópico de Sucessões Numéricas, e a utilidade que a folha de cálculo revela ter nestas circunstâncias.

Para o enquadramento teórico do estudo foram consideradas as contribuições de diversas linhas de investigação, designadamente em torno da resolução de problemas e da didática das situações de aprendizagem que sublinham o papel do aluno e do contexto educacional na sua aprendizagem. Assim, o estudo apoia-se em princípios essenciais propostos pela Teoria das Situações Didáticas para sustentar as opções didáticas e metodológicas assumidas. A natureza das questões de investigação, por seu turno, justificou a procura de articulações entre duas teorias chave, designadamente a Teoria de Registos de Representação Semiótica (TRSS) e a Perspetiva de Modelos e Modelação (M&M)

O estudo seguiu uma metodologia interpretativa, baseada em estudos de caso, e foi delineado segundo os pressupostos da Engenharia Didática enquanto modalidade de investigação de índole qualitativa, integrando uma vertente de experiência de ensino. Os participantes são os alunos do 1.º ano do curso de licenciatura em Engenharia do Ambiente ministrado na Escola Superior Politécnica do Namibe (ESPtN). Entre estes, foram selecionados três alunos que permitiram a realização de três estudos de caso. O autor do presente estudo assumiu o papel de professor-investigador, sendo assim o docente que lecionou as aulas da sequência didática implementada.

A recolha de dados incluiu a observação participante, em sala de aula, dos alunos no decurso da realização das tarefas propostas, os seus relatórios escritos, o registo vídeo e áudio das falas, argumentações e comentários proferidos pelos três alunos-casos durante a resolução de problemas e ainda os resultados de inquéritos aplicados a todos os alunos do primeiro ano do referido curso e aos professores de matemática da escola supracitada.

Com este estudo, foi possível concluir que a realização de atividades propulsoras de modelos inerentes ao tópico de Sucessões Numéricas, com recurso à folha de cálculo, fornece oportunidades para os alunos alcançarem aprendizagens específicas, inerentes a conceitos matemáticos, mas também aprendizagens de caráter mais abrangente, como seja, a sua capacidade de interpretar uma situação e de a matematizar, mobilizando os seus conhecimentos anteriores ou prosseguindo para novos conhecimentos.

Os resultados evidenciaram a possibilidade de um paralelismo entre os ciclos de modelação efetuados pelos alunos e as sucessivas conversões de registos semióticos, o que confirma que a experiência do ensino proporcionou a aprendizagem dos alunos, na ótica das duas perspetivas teóricas. Por fim, importa referir que o estudo revelou que a folha de cálculo subsidiou, de forma relevante, a concretização de tratamentos de registos numéricos, bem como múltiplas conversões de registos.

Palavras-chave

Sucessões Numéricas, Folha de Cálculo, Registos de Representações Semióticas, Modelos e Modelação, Ensino Superior.

Abstract

The present study has as its central focus on the results of the implementation of a didactical sequence for the teaching and learning of Numerical Sequences, in a Real Analysis course, as part of the 1st year of a degree in Environmental Engineering.

The research questions include: the acquisition of guidelines for the elaboration and implementation of a didactical sequence based on solving contextualized problems and the use of the spreadsheet; the understanding of how students make use of different registers of semiotic representation; and the characterization of the processes of construction of conceptual models by the students. To do so, we analyse the types of registers of semiotic representation that students produce, the nature of the models that students create when engaging in modelling activities in the topic of Numerical Sequences, and the usefulness that the spreadsheet reveals under these circumstances.

For the theoretical framework of the study, the contributions of several lines of research were considered, namely around problem solving and the didactics of learning situations that emphasize the student's role and the educational context in learning. Thus, the study is based on essential principles proposed by the Theory of Didactical Situations to support the didactical and methodological options assumed. The nature of the research questions, in turn, justified the search for articulations between two key theories, namely the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRSS) and the Models and Modelling Perspective (M&M).

The study followed an interpretative methodology, based on case studies, and was delineated according to the assumptions of Didactical Engineering as a research approach of a qualitative nature, integrating a teaching experience. The participants are the 1st year students of a degree in Environmental Engineering taught at the Namibe Polytechnic School (ESPtN). Among those, three students were selected, allowing three case studies to be carried out. The author of the present study assumed the role of teacher-researcher, being thus the teacher who taught the classes of the didactical sequence implemented.

The data collection included participant observation of the students in the course of carrying out the proposed tasks, their written reports, the video and audio recording of the statements, arguments and comments made by the three student-cases during the resolution of the problems, as well as the results of surveys applied to all students in the first year of the mentioned course and to the mathematics teachers of the aforementioned School.

With this study, it was possible to conclude that the model eliciting activities related to the topic of Numerical Sequences, using the spreadsheet, provided opportunities for students to achieve specific learning, regarding mathematical concepts, but also learning of a more comprehensive nature, such as the ability to interpret a situation and to mathematise it, by activating previous knowledge or pursuing new knowledge.

The results evidenced the possibility of a parallelism between the modelling cycles carried out by the students and the successive conversions of semiotic registers, confirming that the teaching experience generated relevant learning, from the perspective of the two theoretical perspectives. Finally, it should be noted that the spreadsheet significantly subsidized the processing of numerical registers as well as multiple conversions between semiotic registers.

Keywords

Numerical Sequences, Spreadsheet, Registers of Semiotic Representations, Models and Modelling, Higher Education.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Acrónimos

DAAc-ESPtN: Departamento de Assuntos Académicos da Escola Superior Politécnica do Namibe

ESPtN- Escola Superior Politécnica do Namibe

GDAs- Guided Discovery Activities (Atividades de descoberta guiada)

INE-Instituto Nacional de Estatística

M&M-Models and Modeling (Modelos e Modelação)

MEAs- Model-eliciting Activities (Atividades propulsoras de modelos)

NCISLA - National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science Education.

NCTM- National Council of Teachers of Mathematics

PME-NA - North American Group for the Psychology of Mathematics Education

RP- Resolução de Problemas

TRRS- Teoria de Registos de Representações Semióticos

TSD- Teoria das Situações Didáticas

UAN- Universidade Agostinho Neto

UBI- Universidade da Beira Interior

UMN- Universidade Mandume ya Ndemufayo

Capítulo 1

Introdução

Este primeiro capítulo começa com uma breve contextualização do estudo, com a qual se pretende situar o trabalho na realidade em que ele se desenvolve, tendo em conta os fatores motivadores mais pertinentes que justificaram a sua realização. Em seguida, é destacada a relevância e atualidade do trabalho de investigação, tendo em conta não só o contexto do estudo mas sobretudo as tendências atuais e os desenvolvimentos estabelecidos, no plano internacional, na área da Educação Matemática. Para tornar claros os intentos da investigação levada a efeito é então apresentado o problema de investigação e são formuladas as questões de investigação que norteiam a pesquisa. Procurando deixar patente o que se deseja alcançar com o presente estudo, foram explicitados os respetivos objetivos e também anunciada a opção metodológica que se considera adequada aos referidos objetivos e à natureza do estudo. No final, como forma de guiar o leitor, é apresentada a estrutura geral da tese.

1.1 Equadramento situacional do estudo

O presente estudo desenvolveu-se na Escola Superior Politécnica do Namibe (ESPtN), geograficamente localizada na cidade de Moçâmedes, Província do Namibe, situada na região sul da República de Angola. A ESPtN é uma das unidades orgânicas da Universidade Mandume ya Ndemufaio, uma das sete universidades públicas de Angola.

A escola tem cerca de 1900 alunos matriculados em seis cursos de licenciatura com a duração de cinco anos curriculares. Na referida escola são ministrados os cursos de Biologia Marinha, Contabilidade e Gestão, Engenharia do Ambiente, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica e Engenharia Metalúrgica.

O curso de Licenciatura em Engenharia do Ambiente foi idealizado para formar a curto prazo cidadãos com senso prático, capacitados para responder positivamente, através das suas competências adquiridas, às exigências académicas e técnico-profissionais conforme solicitado pelo mercado laboral e pelo meio académico, no que se refere às problemáticas ambientais que assolam ou poderão vir a atingir a região sul de Angola e o mundo em geral.

As estatísticas apontam que a quantidade de reprovações, repetências e desistências aumenta ano após ano (DAAc-ESPtN, 2014, 2015, 2016), e a realidade mostra que os alunos revelam algumas dificuldades na interpretação e descrição matemática de esquemas, gráficos, leis, princípios e teorias científicas.

Em fóruns em que se aborda esta problemática, as opiniões dos docentes divergem; alguns alegam uma falta de atitude e postura académica por parte dos alunos e outros, mesmo sem fundamentos rigorosos, acreditam que os professores que trabalham com as disciplinas básicas falham na planificação e/ou na abordagem de conteúdos realmente essenciais para um aluno de engenharia e, ao mesmo tempo, utilizam métodos essencialmente expositivos.

Durante os seminários das unidades curriculares Complementos de Didática da Matemática I e II, ministradas no 1.º ano do curso de Doutoramento em Didática da Matemática (oferecidos pela UBI, em 2012/2013), tivemos contacto com um artigo científico referente à chamada perspetiva de *Models and Modeling* (M&M), publicado por Richard Lesh e Lyn English na 29ª Conferência Internacional do Grupo de Psicologia da Educação Matemática (PME), o qual refere, entre outros aspetos, a importância da discussão sobre a natureza dos conhecimentos e habilidades necessários a desenvolver na educação matemática dos jovens para que os mesmos se tornem capazes de usar, em diversas situações, o que presumivelmente aprenderam na sala de aula (Lesh & English, 2005).

No mesmo texto, Lesh e English (2005) sublinham que temos de conceder uma renovada atenção a essa problemática pois, no século XXI, vivemos numa era baseada na tecnologia da informação, pelo que mudanças significativas estão ocorrendo nos tipos de "pensamento matemático" que inevitavelmente se tornarão necessários no quotidiano das pessoas comuns, assim como na vida das pessoas que trabalham em setores (ou especialidades) voltados para o futuro, as quais serão fortes utilizadoras de matemática, ciência e tecnologia.

Na qualidade de estudante de Didática da Matemática, a situação observada na escola superior acima referida e a preocupação levantada por Lesh e English (2005) provocaram-me o interesse e a necessidade não apenas de compreender, com bases científicas, a real situação de ensino-aprendizagem de matemática mas sobretudo de propor uma metodologia que possa melhorar esse processo. Neste ponto, identifico-me com a perspetiva de Brousseau (1996) para quem a Didática da Matemática não deve simplesmente preocupar-se com o florescimento de explicações, conceitos e teorias, mas deve também ocupar-se do desenvolvimento de meios de previsão e análise, incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, sem descurar os tipos de situações propostas na sala de aula e os fenómenos de comunicação do saber.

Deste modo, o presente estudo foi desencadeado com a ambição, entre outros aspetos, de analisar como os alunos tratam e coordenam os registos de representações semióticas e que modelos criam e como se manifesta a criação de modelos quando se envolvem na resolução de problemas na sala de aula. Para a concretização deste desígnio foi concebida uma sequência didática para a abordagem do tópico sucessões numéricas na unidade curricular de Análise Matemática, ministrada no curso de Licenciatura em Engenharia do Ambiente, na ESPtN. E como se revelou natural ao longo da construção do projeto de investigação, para a elaboração e implementação da referida sequência didática, foram considerados os subsídios de Resolução de Problemas (como estratégia didática), da Teoria das Situações Didáticas, da Teoria de Registos de Representação Semiótica, da perspetiva de Modelos e Modelação e ainda da abordagem da Engenharia Didática.

A sequência didática proposta neste estudo visa capacitar os alunos no que se refere ao uso, tratamento, transformação e coordenação adequada de registos de representações semióticas no âmbito de atividades propulsoras de modelos (no Inglês, Modeling Eliciting Activities, MEAs,), valendo-se das potencialidades da folha de cálculo no que concerne ao tratamento e diversificação de representações matemáticas disponibilizadas.

O presente estudo pretende assim dar uma contribuição para o esclarecimento e resolução da problemática de insucesso vivida na ESPtN e espera-se poder servir como referência ou ponto de partida para futuras intervenções pedagógicas tanto na referida escola como em contextos similares.

1.2 Relevância e atualidade do trabalho de investigação

A relação que este estudo estabelece com os hiatos e/ou recomendações implícita ou explicitamente expressos no âmbito de outras investigações já realizadas, nomeadamente a nível internacional, ilustra de alguma forma a sua relevância. Por exemplo, pode ser aqui referida a análise feita por Allevato (2005), segundo a qual grande parte dos estudos existentes sobre ou envolvendo resolução de problemas em sala de aula têm um pendor quantitativo, pelo que geralmente apresentam resultados tendo como foco a quantidade de problemas resolvidos e de problemas resolvidos corretamente. Faltam portanto estudos que se debrucem de forma detalhada e profunda sobre a forma como os alunos constroem a sua aprendizagem de conceitos matemáticos a partir da resolução de problemas e, em particular, quando fazem uso de tecnologias digitais que podem ter uma influência decisiva na construção de modelos mediante o uso e coordenação de múltiplas representações.

Ponte et al (1999) faz uma apreciação da investigação sobre a prática e a reflexão sobre a prática do professor e propõe que sejam realizados estudos que especialmente dediquem maior atenção à experimentação de novas ideias na sala de aula, ao considerar que "o conhecimento profissional está estreitamente ligado à acção (…) e ganha consistência quando se articula com o conhecimento académico" (p.43).

Assim, apesar do presente estudo enfatizar, antes de mais, a atividade matemática dos alunos, acredito que é um estudo muito relevante no plano das práticas profissionais docentes, pois assenta, concretamente, sobre a prática na sala de aula, e mais ainda, não só descreve como também analisa a realidade ocorrida em sala de aula, onde as situações vivenciadas pelos alunos foram intencionalmente moldadas pela forma como as situações propostas foras engenhadas e implementadas.

O presente estudo tem um pendor qualitativo e preocupa-se com a natureza dos modelos criados pelos alunos quando participam em atividades propulsoras de modelos (MEAs), bem como o tratamento e a coordenação dos registos de representações semióticas (RRS) que os alunos fazem ao estudarem conceitos e noções do tópico de sucessões numéricas através da resolução de problemas com recurso à folha de cálculo MS-Excel.

Embora existam alguns trabalhos sobre o uso da folha de cálculo para o estudo de conceitos relacionados com sucessões numéricas, como é o caso de Abramovich & Levin (1994) e Abramovich (1995), os mesmos não recorrem e nem fazem alusão à resolução de problemas, e os que se referem a resolução de problemas, no âmbito de outros tópicos matemáticos – por exemplo, Vera (2010) e Lagdem (2011) – não se referem à obtenção de conceitos.

Na atualidade, a atividade investigativa no campo da educação matemática não é obviamente uma novidade e, pelo contrário, já é legítimo assumir que a investigação em educação matemática representa uma área científica claramente firmada. Em Domingos (2003) podemos encontrar bem interpretado o resumo feito por Artigue (2003) apresentado no *International Congress on Mathematics Education* (ICME) sobre as bases e os desenvolvimentos desta área de investigação no que toca ao ensino superior. Na referida síntese, destaca-se que as principais tendências da investigação em educação matemática podem ser encontradas no domínio das abordagens construtivistas, inspiradas na epistemologia genética de Piaget, ou nos movimentos fundamentados em abordagens como o construtivismo social, o interacionismo ou a antropologia, que procuram ter em conta as dimensões social e cultural dos processos de ensino e aprendizagem.

Na mesma síntese, a autora destaca que as principais preocupações dos investigadores em educação matemática remetem para as repentinas mudanças qualitativas vivenciadas no início do ensino superior e para a inflexibilidade cognitiva que se manifesta com a obsessão desmedida no que concerne à apologia da formalização súbita de elementos matemáticos, dentre outras dimensões.

Muito das mudanças que ocorrem na fase inicial do ensino superior explica-se porque aos alunos é imposta bruscamente uma forma de trabalhar excessivamente formalística, em oposição à forma com que habitualmente trabalharam durante o ensino pré-universitário. Este fenómeno de insistência na formalização, que deveria ser um processo gradual, em nada ajuda ao conhecimento dos alunos sobre áreas específicas, com especial relevo para a Análise Matemática elementar, área onde há grandes dificuldades reconhecidas ao nível do ensino superior.

Importa salientar que vários estudos realçam os obstáculos impostos pelas práticas de ensino, sobretudo aquelas que reduzem a Análise a uma espécie de cálculo algorítmico ou as que são demasiado formais e teóricas, refletindo o estilo de Bourbaki. Há também vários trabalhos que revelam as dificuldades que os alunos sentem ao lidar com as representações gráficas, depois que trabalham com bastante formalização simplesmente algébrica, sobretudo quando mais tarde se procura fazer a ligação entre as representações analítica e gráfica. Os estudos de Alcock & Simpson (2004, 2005) são uma evidência neste âmbito e apontam o empobrecimento ou total ausência das conversões no "tratamento" de objetos matemáticos como causa destes obstáculos.

A preocupação com a flexibilidade cognitiva nos processos de ensino e aprendizagem, outra dimensão referida por Artigue (1996), centra-se nas relações que se estabelecem entre os conceitos matemáticos e as suas representações semióticas e tem vindo a ser alvo de uma maior atenção por parte de investigadores em didática da matemática.

A cada dia que passa, a educação matemática como campo de investigação está a conhecer uma vertiginosa evolução, fortemente relacionada com quadros teóricos globais onde as abordagens socioculturais e antropológicas são especialmente sensíveis ao papel desempenhado pelas ferramentas materiais e simbólicas da atividade matemática no processo de aprendizagem. O estudo de Calder et al (2006) evidencia claramente este facto.

A peculiaridade desta abordagem consiste na quebra da visão comum das competências instrumentais e semióticas como um derivado da conceptualização, admitindo a hipótese de fortes relações dialéticas no seu desenvolvimento recíproco. Esta visão assume uma importância particular se tivermos em consideração a evolução tecnológica atual dos instrumentos envolvidas na atividade matemática.

Nesta perspetiva, tal como destaca Domingos (2003), "a aprendizagem da matemática pode deixar de ser vista como uma ascensão para níveis cada vez mais altos de abstração e formalização, deixando espaço para as ligações entre os campos de experiência matemática, pontos de vista, cenários e registos semióticos que representam uma parte crucial dessa aprendizagem" (p.7).

Concordado com Domingos (2003), é nesta perspetiva que podemos enquadrar o papel das tecnologias digitais que, quando usadas adequadamente, prometem substancialmente ser de grande utilidade no desenvolvimento de relações entre representações semióticas, como por exemplo entre representações gráficas, numéricas e simbólicas no estudo de sucessões, séries e funções, fazendo com que as representações gráficas possam ser ferramentas efetivas no trabalho matemático.

Considerando esta perspetiva, o presente estudo ganha razão de ser, uma vez que ao defender a necessidade das MEAs não coloca o formalismo em primeiro lugar e ao mesmo tempo possibilita que o aluno recorra a ferramentas digitais e crie hábitos e habilidade em trabalhar com elas pois certamente, tais ferramentas e o modo de as tirar partido, farão parte do seu dia-a-dia após a formação académica, tal com referem Lesh & English (2005).

Steen (2001) destaca que a "Matemática Real"[1] no ensino superior é "aprendida" fundamentalmente em três modalidades curriculares, a saber: no âmbito de cursos tradicionalmente organizados pelos departamentos de matemática; ao longo de cursos com uma forte base matemática ensinados noutros departamentos; em cursos de outras áreas que empregam métodos matemáticos significativos, ainda que de uma forma indireta.

Este autor norte-americano considera que a matemática que é ensinada se distribui equitativamente por estas três formas e defende que aquela que é aprendida, recordada e útil ao fim de alguns anos não se inclina na direção da primeira modalidade referida acima, mas tem haver com aquela em que a matemática se encontra escondida no currículo de uma outra área. Ele infere que muito do que é aprendido em contexto é lembrado por muito mais tempo e que a maior parte do que é ensinado no currículo tradicional é esquecido pelos alunos após terminarem os seus estudos.

A situação descrita e conjeturada por Steen (2001) aconselha-nos a desenvolver "contextos" onde a mesma matemática que devia ser ensinada num currículo tradicional seja aprendida durante as aulas de matemática mas em circunstância que sejam mais parecidas aos verdadeiros contextos de criação e aplicação da matemática. Esta é talvez a forma de proporcionar uma aprendizagem holística, significativa e duradoura.

Importa reconhecer que, tal como Henriques (2010) refere, é uma insensatez refutar a existência de resultados de estudos já realizados, os quais de certo modo podem ajudar a estruturar e melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática no ensino superior, visando uma maior compreensão e um melhor desempenho por parte dos alunos, mas é importante referir que existem áreas que necessitam de mais estudos.

A visão de Artigue (2003) não enjeita as ideias de Bass (1998) que além de sustentar a preocupação com a necessária articulação na passagem do ensino pré-universitário para o universitário, defende vivamente a necessidade de se realizarem estudos sistemáticos a respeito do uso didático das tecnologias. Este autor considera que na atualidade deve-se ter em conta as tecnologias que favorecem a visualização e que são cada vez mais comuns. O mesmo autor comenta ainda que apesar de alguns céticos afirmarem que uma provável predominância das tecnologias pode enfraquecer, de certa forma, a proficiência e a intuição

[1] "Matemática Real" é entendida como aquela que foi sendo desenvolvida ao longo do século XX, em universidades e institutos de investigação.

matemática, a verdade é que o uso destas tecnologias é pertinente se for destacado o papel destas ferramentas para favorecer a compreensão matemática dos alunos.

Domingos (2003) reforça que se sabe pouco sobre a utilização destas tecnologias no ensino superior, pelo que considera pertinente investigar alguns aspetos, como as relações que os alunos estabelecem com a matemática abordada nas aulas com ajuda de tecnologias ou ainda como algumas ferramentas tecnológicas particulares influem no desenvolvimento matemático dos alunos.

A preocupação deste estudo é a de proporcionar bases científicas que possam racionalmente suportar decisões necessárias sobre o ensino de matemática no ensino superior no sentido de debelar as diversas dificuldades com que o mesmo se vem debatendo, tendo em atenção as necessidades de investigação referidas acima.

O trabalho desenvolvido neste estudo prende-se assim com o uso educativo da tecnologia e considera a aprendizagem no segundo tipo contexto apresentado por Steen (2001) , uma vez que tencionamos aplicar a tecnologia – concretamente a folha de cálculo – no estudo de sucessões numéricas através de resolução de problemas, com recurso a ferramentas que proporcionam múltiplas representações. Pretende-se assim desenvolver um trabalho de investigação, com alunos do 1º ano do Ensino Superior, na área disciplinar de Análise Matemática, nomeadamente no tópico respeitante ao estudo de sucessões, introduzindo os conceitos através da resolução de MEAs com recurso à folha de cálculo.

Neste estudo parte-se do princípio de que o ensino da matemática não deve simplesmente consistir na realização de atividades de descoberta guiada (GDAs) mas deve fundamentalmente envolver os alunos com as MEAs pois o trabalho matemático realizado em atividades desta natureza permite que os processos de raciocínio e a construção de conceitos surjam de uma forma natural. E, por outro lado, é de notar que as MEAs não são apenas uma forma de transpor as fronteiras do ensino rotineiro; elas surgem como uma metodologia que permite desenvolver competências diversificadas já que possibilitam encorajar os alunos a realizarem uma aprendizagem mais entusiástica, efetiva e eficaz.

Considera-se que a aplicação e a análise das MEAs podem proporcionar-nos um rumo norteador para encontrar alternativas que levem a bom porto e de forma conseguida a aprendizagem matemática dos estudantes (Doerr, 2006). Acresce a isto que diversos estudos realizados por pesquisadores e académicos vinculados a instituições de renome têm revelado que as atividades de cariz análogo ao das MEAs, no ensino pré-universitário, contribuem significativamente para desenvolver o pensamento matemático dos alunos além de fomentarem a compreensão de novos conceitos (Henriques, 2006; Ponte, 2007). No entanto, a introdução de MEAs em sala de aula como estratégia de ensino-aprendizagem da Matemática no ensino superior ainda é uma prática pouco comum, em grande medida devido ao facto dos dados de investigação continuarem a ser insuficientes para fundamentar a sua implementação neste nível de ensino e na sala de aula. Por esta razão, os resultados deste estudo poderão ser úteis para os investigadores em educação matemática e para os professores do ensino superior, seja como contribuição para fazer avançar o conhecimento e melhorar as práticas existentes, seja como ponto de partida para futuras intervenções pedagógicas em contextos similares.

1.3 Problema de investigação

De uma forma geral, vários estudos realizados sob diversas perspetivas e em diferentes contextos já oferecem alguns elementos que permitem analisar as dificuldades inerentes à aprendizagem de conceitos intrínsecos ao tema das sucessões numéricas. Alguns destes estudos mostram uma certa preocupação com a apresentação formal e linear dos enunciados matemáticos, num encadeamento de resultados que parecem indiscutíveis (Tall, 1991; Sad 1998; Zuchi, 2005).

Zuchi (2005) destaca que as atuais abordagens aos conceitos matemáticos no ensino superior podem simplesmente oferecer aos alunos os resultados áridos e incompreensíveis do pensamento matemático, descurando o pensamento matemático como tal, o que inviabiliza as aprendizagens significativas em que os alunos são levados a investigar e a procurar o conhecimento. Nesta perspetiva, nenhum conceito matemático deveria ser apresentado aos alunos da forma arrumada mas antes deverão envolver-se os alunos em atividades matemáticas que os levem a esquematizar, conjeturar, refinar e solidificar conceitos, um pouco como ocorre na história de matemática.

A situação acima exposta suscita a necessidade de outras reflexões sobre o que fazer e com que bases teóricas, ou seja, saber qual a melhor interpretação teórica que nos permite abordar a situação e que bases científicas podem apoiar as possíveis alternativas. Uma primeira ideia consiste em introduzir os conceitos matemáticos através da resolução problemas, ou mais especificamente de problemas contextualizados, como é o caso das MEAs, de tal modo que os alunos experimentem a trajetória do surgimento dos conceitos matemáticos. Nesse caso, o ponto de partida é a situação ou facto ou contexto de problema que leva à formulação de conjeturas, à constituição de afirmações e justificativas, até ao estádio final de produtos ou objetos matemáticos refinados com as respetivas demonstrações bem estruturadas.

Em Análise Matemática, o ensino do conteúdo de sucessões numéricas (e conceitos inerentes como convergência, divergência, limite, majorante e minorante, etc.) é abordado geralmente no primeiro ano dos cursos de Engenharias e áreas afins, de acordo com o objetivo de cada curso. A importância do estudo das sucessões é indubitável, pois propicia a introdução de conceitos fulcrais da Análise Matemática como é o caso de convergência, divergência, infinito, vizinhança e limite que subsidiam a compreensão ou servem como pano de fundo para a construção de outros conceitos que emergem no âmbito do cálculo integral e diferencial.

Tendo em conta a importância basilar do tema de sucessões numéricas, defende-se a ideia de que o mesmo deve ser abordado com recurso a diversas representações e em contextos ricos, o que de certo modo suscita a profundidade das compreensões dos alunos, de tal modo que os mesmos possam continuar a reconhecer os conceitos inerentes a sucessões numéricas, mesmo quando estes surgem com outra roupagem ou diferentes representações e em diversos contextos.

Assume-se que, ao trabalhar com turmas de cursos superiores, a abordagem contextualizada e a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos fundamentais, pode possibilitar e acelerar o desenvolvimento e facilitar o avanço dos alunos na atividade matemática subsequente, em que se requer ou se invoca tais conceitos.

As apreciações anteriores concorrem para o reforço da ideia de que há uma necessidade de propor uma abordagem mais eficaz para o estudo de sucessões numéricas, recorrendo a MEAs e fazendo uso de recursos que permitem a manipulação e a exploração de diferentes registos de representações semióticas.

À semelhança de outras atividades humanas, o trabalho matemático em geral implica frequentemente o recurso a tecnologia; de facto, nos dias de hoje é impossível considerar a existência de uma dicotomia entre Matemática e TIC, uma vez que é evidente a imprescindibilidade do uso de ferramentas de natureza informática em quase todos campos da Matemática. Esta conexão cada vez mais vincada e natural deveria cobrir integralmente os diversos âmbitos da educação matemática de modo a permitir também a criação de novas bases, regras e procedimentos de condução do processo de ensino-aprendizagem.

O processo de ensino-aprendizagem da matemática requer novos princípios ou pelo menos readaptação; não se deve admitir que ano após ano se mantenha a tendência de ensinar os mesmos conteúdos e da mesma forma. Sem isso, os processos de ensino-aprendizagem de matemática não mudam, chegando a equiparar-se a rituais. Em muitos casos, o professor parte do princípio que o aluno não o entende e este limita-se a mecanizar técnicas e a resolver principalmente questões de tipo algorítmico.

D'Ambrósio (1996) constata que:

> Estamos entrando na era do que se costuma chamar a "sociedade do conhecimento". A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto, sobretudo, ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial

> para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro. (p. 80).

Nesta senda, a matemática e a sua metodologia de ensino deve mudar conforme o mundo se altera e deve ser relacionada com os demais setores da sociedade de modo a evitar que alguns conteúdos matemáticos se tornem ou pelo menos aparentem estar obsoletos.

As TIC, entre outros atributos, permitem descortinar aspetos matemáticos que de outra forma nunca seriam vislumbrados ou cujo tratamento resultaria em atividade extremamente fastidiosa. Em particular, a folha de cálculo é por "natureza" recursiva e permite a visualização gráfica e numérica além de ter enorme capacidade de cálculo; estes atributos levam-nos a crer que a folha de cálculo é um ambiente de aprendizagem vantajoso para que os alunos adquiram compreensão sobre o tema sucessões numéricas, trabalhando com diversos registos de representações que podem usar-se na exploração matemática do tema.

Face ao exposto, o problema que será abordado no presente estudo consiste em: conhecer e analisar os resultados da implementação de uma sequência didática para o ensino-aprendizagem de Sucessões Numéricas, tendo por base a resolução de problemas contextualizados e o recurso à folha de cálculo, dando especial atenção ao uso de registos de representação semiótica e ao processo de construção de modelos concetuais pelos alunos.

1.4 Questões de investigação

Perante a situação preocupante que se verifica na ESPtN e os estudos e posicionamentos de investigadores e teóricos já referidos ao longo desta introdução, considero oportuno especificar três questões de investigação que concretizarão a abordagem ao problema global do estudo que visa uma possibilidade de alterar a situação vivida na ESPtN na disciplina de Análise Matemática no curso de Engenharia do Ambiente. Estas questões são a seguir explicitadas:

1. Como pode ser estruturada uma sequência didática para o ensino-aprendizagem de Sucessões Numéricas, através da resolução de problemas (MEAs) com recurso à folha de cálculo?

2. Que registos de representações semióticas os alunos produzem e qual a natureza dos modelos que os alunos criam quando se envolvem na resolução de MEAs com auxílio da folha de cálculo, no tópico de sucessões numéricas, em contexto de sala de aula?

    a. Qual é a natureza das transformações de registos de representação semiótica que ocorrem durante a criação de modelos?

b. Que significados têm as conversões e tratamentos de representações semióticas feitas pelos alunos?

c. Como podem ser caraterizados os diversos ciclos de desenvolvimento dos modelos criados pelos alunos?

3. Que importância/utilidade revela ter a folha de cálculo na resolução de problemas e na aprendizagem dos conceitos do tópico sucessões numéricas?

Para atender às questões de investigação, propusemo-nos realizar o presente estudo, tendo como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, a Teoria de Registos de Representações Semióticas (TRRS), de Raymond Duval, e a perspetiva de Modelos e Modelação (M&M), de Richard Lesh e colaboradores. Foi ainda decidido adotar a Engenharia Didática como método de investigação, que abrange quatro fases: i) análise preliminar do problema a ser investigado; ii) conceção e análise *a priori* de uma sequência didática; iii) experimentação e análise *a posteriori* da intervenção didática; validação da intervenção face aos resultados de investigação obtidos.

1.5 Objetivos específicos

Tendo em conta a problemática de investigação e as questões que o presente estudo se propõe abordar, o projeto de pesquisa foi elaborado com os seguintes objetivos específicos, distribuídos entre metas pedagógicas e propósitos de investigação. Assim, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

1. Retratar a situação de aprendizagem no tema sucessões numéricas no ensino pré-universitário angolano e caraterizar a abordagem de ensino predominante na ESPtN

2. Elaborar e implementar uma sequência didática no tópico sucessões numéricas através de resolução de problemas contextualizados em situações do mundo real (MEAs), utilizando a folha de cálculo como recurso didático e tendo em consideração os princípios da Teoria das Situações Didáticas, da Teoria dos Registos de Representações Semióticas e a perspetiva de Modelos e Modelação.

3. Analisar os registos de representações semióticas que os alunos produzem e a natureza dos modelos que criam quando participam em MEAs no âmbito da aprendizagem do tópico sucessões numéricas com recurso à folha de cálculo, no contexto de sala de aula.

4. Descrever e analisar o significado das transformações de registos que ocorrem durante a criação de modelos nas tarefas propostas.

5. Analisar a utilidade da folha de cálculo na aprendizagem de conceitos inerentes ao tópico sucessões numéricas.

1.6 Opção Metodológica Fundamental

Esta investigação é de índole qualitativa e interpretativa (à luz da Engenharia Didática), onde o investigador é, também, o professor. Esta opção baseia-se no pressuposto de que as situações reais vividas pelo professor, na conceção e implementação das tarefas, são uma mais-valia para a apreensão holística do objeto de estudo. Pretende-se, assim, uma ligação coesa entre a teoria e a prática (Bogdan & Biklen, 1994), num inevitável diálogo permanente entre ambas, durante a investigação, assumindo-se que o plano de trabalho não será absolutamente rígido, podendo sofrer alterações conforme necessidades sobrevindas no decurso do processo.

O estudo iniciou-se com uma revisão de literatura, teve um marco essencial na conceção e implementação da sequência didática e uma fase de significativa duração com a recolha e análise de dados. A principal intenção do investigador durante este estudo foi a de atuar sempre em direção à compreensão daquilo que direta ou indiretamente ocorreu a partir das situações vividas com os alunos. O seu propósito central durante o estudo foi o de formular respostas para as questões formuladas no início, as quais foram sempre entendidas como questões orientadoras que poderiam ser revistas e reajustadas se as circunstâncias o impusessem.

1.7 Estrutura da Tese

A presente tese encontra-se organizada em seis capítulos.

No Capítulo 1 é apresentada a introdução geral do trabalho, iniciando-se com algumas considerações sobre o enquadramento situacional do estudo, bem como sobre a relevância e atualidade da investigação: Neste capítulo é enunciado o problema do estudo e formulam-se as questões e os objetivos de investigação. Este capítulo termina com uma breve referência à opção metodológica adotada na investigação desenvolvida.

No Capítulo 2 desenvolve-se o enquadramento teórico; é feita uma síntese teórica sobre a Teoria das Situações Didáticas, a Resolução de Problemas, a Perspetiva de Modelos e Modelação (M&M), e a Teoria de Registos de Representação Semiótica (TRSS), que são tomadas como referencial teórico norteador do presente estudo.

No Capítulo 3 é descrito detalhadamente o contexto e a metodologia do estudo, enfatizando as etapas da Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa, evidenciado a articulação entre as etapas que esta preconiza e os procedimentos fundamentais de uma investigação qualitativa.

No Capítulo 4 é apresentada a conceção e a análise a priori da sequência didática implementada, precedida da respetiva análise preliminar. No Capítulo 5 apresenta-se a análise de dados empíricos resultantes da aplicação da sequência didática e, por fim, no Capítulo 6, é apresentado um conjunto de conclusões e recomendações, em torno dos objetivos definidos e visando dar resposta às questões de investigação formuladas.

Capítulo 2

Referencial Teórico

No presente capítulo é feita uma apresentação e discussão das principais referências teóricas consideradas para o presente estudo, que foram adotadas como teorias sustentadoras da investigação, de acordo com os objetivos e propósito do estudo.

Concordando com Camacho e outros (2009), a aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento matemático é um processo que exige reflexão contínua por parte dos alunos para que se tornem capazes de representar e analisar conceitos matemáticos de diferentes pontos de vista e construir relações e significados associados a cada conceito. A evolução desse processo de construção depende diretamente dos sistemas de representação utilizados e da coordenação que se conseguir fazer entre eles (Duval, 2006a, 2009). Por outro lado, a aprendizagem de um conceito matemático está diretamente relacionada com a atividade de resolução de problemas (Santos-Trigo, 2007). De certa forma, a resolução de problemas é aqui colocada como estratégia de ensino, ou seja, a aprendizagem ocorre durante a resolução de problemas e a resolução de problemas não é cogitada como via de consolidação ou de avaliação da aquisição de noções matemáticas.

Entende-se que utilizar a resolução de problemas, nesta perspetiva, equivale a colocar os alunos em situações didáticas onde o contexto os leva a construir, expressar, interpretar, avaliar, reavaliar e melhorar os seus próprios modelos, de tal modo que estes sejam reutilizáveis e generalizáveis e que sirvam para explicar a realidade.

Nas secções seguintes, apresentaremos algumas contribuições teóricas que oferecem suporte aos pressupostos e posicionamentos assumidos neste trabalho.

2.1 A Teoria das Situações Didáticas: Uma Súmula

Um referencial a ter em conta quando se faz uma reflexão a respeito da criação das circunstâncias adequadas para a atividade intelectual do aluno na busca do saber matemático, em sala de aula, é a Teoria das Situações Didáticas (TSD). Na presente secção, o nosso objetivo não é o de descrever pormenorizadamente todos os aspetos da TSD, mas antes o de fazer uma súmula dos principais elementos-chave desta teoria que, em certa medida, marcam esta investigação.

A adoção desta teoria justifica-se tendo em conta a premissa de que o envolvimento do aluno depende da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem por meio de uma situação didática. Assim, conceber e analisar diferentes formas de apresentação do conteúdo matemático aos alunos implica trilhar a teoria das situações didáticas e, por outro lado, a TSD tem uma notória relevância quando se confronta com outras teorias desenvolvidas nas últimas décadas, pois aborda com simplicidade e especificidade questões relacionadas com o saber matemático, ou seja, examina o processo de produção do saber matemático numa situação de aprendizagem em sala de aula.

A Teoria das Situações Didáticas é fruto dos estudos desenvolvidos no final da década de 1960 por Guy Brousseau, professor e pesquisador da área da Educação Matemática no Instituto de Investigação em Ensino de Matemática (IREM). Importa referir que a vocação do IREM enquanto instituição era a formação contínua de professores de matemática e o desenvolvimento de meios e materiais, como jogos, problemas, experiências de ensino e outros, visando melhorar a atuação dos sujeitos na sala de aula.

A TSD tem influência das contribuições teóricas de Piaget, nomeadamente baseando-se no processo de adaptação (assimilação e acomodação), pois concebe a aprendizagem como sendo uma ação endógena, ou seja, de dentro para fora.

Para exemplificar a estrutura da TSD, Brousseau (1996) sugere que no sistema didático seja considerado o triângulo didático (Figura 1), que abarca os três elementos intrínsecos do ensino-aprendizagem. A relação entre estes três elementos é dinâmica e complexa e é chamada de relação didática, uma relação em que se têm em conta as interações entre professor e alunos (elementos humanos), mediadas pelo saber (elemento não-humano), que determina a forma como tais relações se irão estabelecer.

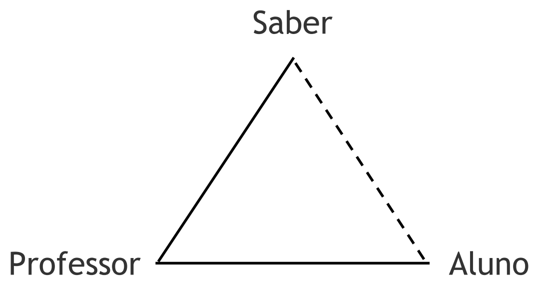


Figura 1: Esquema da relação didática segundo a Teoria das Situações Didáticas

Espera-se que a relação didática jogue um papel importante para o melhoramento da relação aluno- saber, uma vez que o professor e o aluno possuem uma relação assimétrica em relação ao saber, tal como referem Lins, Brito Lima e Bessa de Menezes (2010) e, nesse contexto, propõe-se um papel crucial para o professor que é o de iniciar o aluno no novo saber científico, um projeto possível e viável através de situações didáticas propícias, segundo a visão de Brousseau (1996).

Essencialmente, as situações didáticas devem consistir em apoiar o envolvimento dos alunos com a aprendizagem da matemática e deverão ser concebidas com o propósito de fomentar uma profunda compreensão da matemática por parte dos alunos.

Para Brousseau (2014), as verdadeiras situações didáticas são representações de situações do mundo real que não têm o contexto ou a intenção do ensino. Brousseau referiu-se a essas situações do mundo real como situações a-didáticas. Nesta conformidade, as situações didáticas recomendáveis são as planificadas pelo professor de tal modo que a aquisição do conhecimento e as habilidades necessárias para resolver um problema ocorra num contexto semelhante ao da vida real. É a situação real ou a-didática que deve caracterizar o conhecimento preconizado. Deste modo, recomenda-se vivamente que o professor expurgue as situações de todos os artifícios didáticos, o mais cedo possível, para assim lhes conferir um cariz mais pragmático e possibilitar que o aluno proceda à exploração da situação com o seu conhecimento pessoal e objetivo.

Brousseau (1996) esclarece que se o professor diz ao aluno aquilo que quer ouvir, então não pode esperar que o aluno alcance o conhecimento e se o aluno aceita que o professor lhe ensine os resultados, então não os estabelecerá por si próprio e, como tal, não aprenderá, ou seja a aprendizagem da matemática não ocorre nestas circunstâncias.

A TSD sugere que o aluno aprende, adaptando-se a um ambiente que envolve um elemento de contradição, de dificuldade ou desequilíbrio. Desta forma, a aprendizagem é fruto da adaptação do aluno e manifesta-se com as novas respostas que ele consegue dar e que são a evidência de uma nova aprendizagem. O problema colocado ao aluno é intencionalmente escolhido de tal modo que, com a sua resolução, ele adquira novos conhecimentos. Mas importa notar que esse novo conhecimento do aluno é inteiramente justificado pela atividade do aluno, a qual, por seu turno, é totalmente sugerida pela situação.

Na situação acima descrita, o professor não faz parte do jogo, enquanto tal se desenrola, razão pela qual a situação é chamada de a-didática. O aluno supera as exigências colocadas pela situação sem ser necessariamente por estímulo do professor, ou seja, o que está em causa é somente o aluno e o desafio que ele vai enfrentar. O aluno espontaneamente faz tentativas e verifica a funcionalidade e a eficácia das mesmas e sempre que considera que a tentativa deve ser refeita, interagindo com os elementos do ambiente, altera-a livremente quantas vezes achar necessário. Deste modo, modifica o seu sistema de conhecimentos em resultado das sucessivas adaptações que realiza ao utilizar diferentes estratégias.

A esse respeito, D'Amore (2007) refere que :

> A situação sugere exigências e os alunos respondem a elas. Não existem obrigações didáticas e, portanto, aquilo que se faz não está ligado a estímulos por parte do professor (p. 233-234).

Dir-se-á que os alunos estão envolvidos numa situação a-didática quando consideram que efetuar a atividade matemática não seria necessário do ponto de vista escolar, pelo contrário, tal necessidade é motivada pelo ambiente e não simplesmente imposta pelo professor.

À luz da TSD, a missão do professor é essencialmente fazer com que o aluno se envolva numa situação a-didática, provocando-lhe a intenção de resolver um problema da forma mais independente e fecunda possível. O professor pode desempenhar o seu papel, recorrendo à comunicação ou à abstinência de comunicar, de acordo com o caso, podendo fazer perguntas, sugerir métodos, heurísticas, etc. Nesta senda, o professor encontra-se envolvido com os problemas que coloca e com o sistema de intenções do aluno. O professor faz o seu trabalho de forma implícita, razão pela qual Brousseau (2008) refere que o dever do professor é essencialmente sugerir criteriosamente problemas cuja resolução exige e proporciona aos alunos as adaptações desejadas.

Tal como D'Amore (2007) comenta, o professor estrutura adequadamente o ambiente com instrumentos apropriados tendo como objetivo chegar a um conhecimento específico no final da atividade, mas não o faz de forma ostensiva e muito menos num ambiente de ensino explícito.

Importa dizer que o que se defende na TSD é que haja aceitação do contrato didático, visto como um conjunto de regras implícitas ou explicitas que regem as responsabilidades dos envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem (Brousseau, 1996), mas que esta aceitação deve ser provisória na ótica do aluno.

Brousseau (2008) refere que os comportamentos dos alunos estão diretamente relacionados com o funcionamento do meio, logo é o meio que deve ser moldado de tal modo que o aluno seja conduzido a partir das situações propostas pelo professor; porém terá de haver um certo equilíbrio entre o que se propõe e a capacidade do aluno progredir ao longo da atividade, ou seja, a atividade proposta deve ser doseada: não deve ser tão difícil a ponto de o aluno não conseguir avançar; não deve ser tão fácil a ponto de o aluno não se sentir de certo modo desafiado. O meio concebido nestas condições é denominado de *milieu* (Brousseau, 1996). O *milieu* é tudo o que age sobre o aluno ou tudo sobre o qual o aluno atua dentro de uma situação. É importante notar também que o professor é parte do *milieu*.

Cabe ao professor arquitetar e pôr em prática o *milieu* de tal modo que a aprendizagem ocorra no decurso de uma interação baseada em desequilíbrios, assimilações e acomodações, permitindo ao aluno refletir sobre as suas ações e consequentes retroações, tendo em atenção restrições inerentes ao uso de regras que devem ser respeitadas, tal como Piaget (1990) sugere.

Uma vez que a TSD tem como referência a matemática, uma ciência detentora de características próprias, incluindo conceitos e sistemas de representação simbólica, processos de desenvolvimento e de validação de ideias emergentes, a situação didática aqui referida não pode ser vista como um fenómeno que ocorre instantaneamente mas sim um processo com etapas.

Brousseau (2008) propõe quatro etapas interrelacionadas, a considerar no desenrolar de uma situação didática, que são as seguintes: ação, formulação, validação e institucionalização.

As quatro etapas são precedidas por devolução que consiste essencialmente em influenciar os alunos de tal modo que sintam a necessidade de interagir com o *milieu* sem esperarem que o professor lhes dê as respostas ao problema em resolução mas que experimentem a responsabilidade de buscar explicações para responderem às questões impostas pela situação. Durante a devolução, o professor deve levar os alunos a aceitarem participar do processo de aprendizagem. Nestas circunstâncias, o aluno torna-se responsável por parte da aprendizagem, antes atribuída somente à figura do professor, ou no mínimo o professor remete-se para segundo plano de tal modo que o aluno sinta e assuma tal responsabilidade.

Segundo Brousseau (1996), no contrato didático, é essencial a consciência da não-interferência explícita de conhecimentos, evitando-se explicações ou 'pistas' que facilitem deliberadamente as resoluções dos alunos, propiciando assim condições que permitam a mobilização do aluno em enfrentar o problema e em resolvê-lo, pelo menos em parte, através da lógica interna do seu pensamento e dos conhecimentos anteriores.

Pommer (2013) esclarece que, na fase da devolução, a intenção do professor deve ser a de situar o sujeito em confronto com a situação da forma mais independente possível. Nesta fase, o professor metodicamente suscita a aceitação do aluno em enfrentar o desafio intelectual de resolver as situações propostas, pelo que o problema passa a ser dele, tal como advoga Brousseau (2008).

Na etapa da ação, o aluno, perante a situação didática, interage com o meio e cria procedimentos, planeia estratégias de resolução dos problemas e formula hipóteses. Pommer (2013) sublinha que na etapa da ação o aluno reflete e faz tentativas, escolhe procedimentos de resolução dentro de um esquema de adaptação, através da interação com o *milieu*, tomando as decisões que considera necessárias para organizar a resolução do problema.

Na etapa da formulação, o aluno troca ideias com os outros, nomeadamente com os colegas. Nessa etapa, muitos alunos nem sempre conseguem utilizar efetivamente uma linguagem matemática adequada, pelo que recorrem a uma espécie de linguagem matemática mais contextualizada para explicitar não só os seus resultados mas, acima de tudo, os seus procedimentos. Brousseau (1996) realça que durante esta troca de informação os alunos recorrem a linguagem que conseguem utilizar pois não há a obrigatoriedade expressa do uso explícito de linguagem matemática formal, mas há um grande desejo de ser percebido, pelo que procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar; em muitos casos, ocorrem ambiguidades, redundâncias, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, no decurso de retroações contínuas.

Na etapa da validação a atuação do aluno prende-se com a verificação das informações obtidas a fim de perceber se condizem ou não com o esperado ou, mais importante ainda, se realmente as respostas encontradas são válidas pelo menos para o problema proposto. Pommer (2013) acrescenta que é nesta etapa que o aluno tenta convencer os seus interlocutores da veracidade das afirmações, recorrendo a uma linguagem matemática apropriada.

Na etapa de institucionalização, o professor retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, isto é, o professor e alunos validam o conhecimento construído. Nessa etapa, o professor revela as intenções que presidiram à situação didática, destacando o saber produzido pelos alunos nas etapas anteriores. Neste processo, o conhecimento matemático é identificado, sistematizado e reconhecido.

Na devolução, o professor coloca os alunos numa situação a-didática ou pseudo a-didatica, de tal modo que no transcurso das etapas de ação, formulação e validação, os alunos atuam livremente e fazem as suas produções; na etapa de institucionalização, o papel do professor torna-se predominante e consiste em definir as relações que podem existir entre os comportamentos ou produções 'livres' dos alunos, o conhecimento científico ou cultural e o projeto educativo, ou seja, interpreta as atividades realizadas pelos alunos, tendo em atenção não só os resultados mas sobretudo os processos e dá-lhes um estatuto de legitimidade.

2.2 A Resolução de Problemas e a Aprendizagem da Matemática

Historicamente sabe-se que o conhecimento matemático resultou essencialmente da busca pela solução de problemas específicos e, talvez por isso, historicamente a dinâmica da evolução do conhecimento matemático é caraterizada por incontáveis momentos em que prevalecem resultados obtidos experimental e indutivamente. O caso recente e emblemático é o do matemático inglês Andrew Willes, ao demostrar o último teorema de Fermat, teorema este, cuja demostração constituía um problema que desafiou matemáticos por aproximadamente três séculos e meio (Singh,1999; Allevato, 2005).

A ideia de Barco (1998) de que a matemática é um corpo em construção nutrido pelos problemas que resolve pode ser sustentada ao constatar-se que esta se desenvolve a partir de conhecimentos anteriores em busca de mais conhecimentos necessários à resolução de novos problemas.

Na literatura pertencente ao campo da Educação Matemática, a resolução de problemas, vista na perspetiva histórica, faz-nos perceber diversos adágios da força motivadora que os problemas podem ter, evidenciando o caracter de falibilidade e toda a dinâmica estrutural e epistemológica da matemática (Gazire, 1988; Lester, 1994, 1993; Santos, 2002, Allevato, 2005).

Analisando as atuais tendências do ensino no que se refere à resolução de problemas, sobressai a visão construtivista que enfatiza a ideia de reconstituir o processo histórico da construção do conhecimento, Por exemplo, Santos (2002) afirma que "de uma certa maneira, a ideia construtivista se apoia no próprio processo histórico de construção do conhecimento científico, cujos objetos foram sendo construídos como respostas a problemas específicos" (p. 14). Embora seja necessário reconhecer que a resolução de problemas exige, de alguma forma, algum conhecimento básico anterior de regras e princípios da matemática enquanto área de conhecimento, a visão de Santos (2002) vai de encontro à verdadeira lógica da história da matemática onde os problemas antecedem invariavelmente as descobertas, já que estes provocam a atividade matemática e geralmente culminam com estabelecimento de respostas, conjeturas, princípios e teorias.

Ainda que, na literatura, possamos encontrar diversos posicionamentos teóricos a respeito da resolução de problemas, todos convergem quanto aos benefícios da resolução de problemas como atividade matemática e para a contribuição que oferecem para o desenvolvimento e aprendizagem da matemática.

O conceito de atividade matemática apresentado por Schoenfeld (1992) converge grosso modo com o que se pode considerar como resolução de problemas. Este conceituado investigador concebe a atividade matemática como sendo a tarefa de encontrar a razão de ser das coisas e saber matemática á algo que implica internalizar a estética da Matemática; implica também o interesse pela análise e compreensão, por perceber as estruturas e as relações estruturais, ou seja, por perceber como as coisas se combinam. Interpretando a visão deste teórico, pode-se afirmar que atividade matemática se consubstancia em interpretar situações, resolver problemas, fundamentar respostas e comunicar resultados.

Ponte (1994), teórico de referência incontornável no campo da Educação Matemática em Portugal, e no plano internacional, advoga que a resolução de problemas envolve o tipo de processos que são o centro da atividade matemática e isto justifica a eleição da resolução de problemas como um interessante foco de investigação no âmbito da educação matemática.

Por seu turno, Bassanezi (2002) destaca que, tendo em vista a necessidade e o dever de proporcionar aos alunos uma interpretação integral e uma compreensão holística da matemática, os educadores matemáticos devem privilegiar a resolução de problemas e a modelação matemática.

Os pronunciamentos e referências apresentados nos parágrafos anteriores ilustram claramente que há necessidade de incluir e privilegiar a resolução de problemas em atividades de sala de aula, por ser uma metodologia de capital importância, pelo que consideramos que os problemas devem ser utilizados no ensino da matemática como ponto de partida para a aprendizagem.

2.2.1 O que é um problema matemático

A análise de literatura científica relativa à resolução de problemas leva a constatar que existem diferentes perspetivas ou pontos de partida sobre o que se pode considerar um problema matemático, tal como veremos nos parágrafos subsequentes. De forma geral a noção de problema é relativa, tendo em atenção diversos pressupostos que lhe subjazem; por um lado, sublinha-se a existência de um efetivo ou potencial solucionador com sentido de desejo pela busca da solução, a qual, na realidade, não se espera que seja imediatamente encontrada devido a prováveis obstáculos sugeridos pelo próprio problema; por outro lado, toma-se como referência as capacidades do individuo que se predispõe a resolver uma situação matematicamente explicável.

Klausmeier e Goodwin (1977), sugerem uma visão mais voltada para o campo da Psicologia, ao proporem que um problema é uma situação que deve ser solucionada apesar da ausência, indisponibilidade ou inexistência de informações, conceitos, princípios ou métodos específicos para chegar à solução. Alguns teóricos, como Chi e Glaser (1992), aprofundam esta conceção e consideram que a existência de um problema não pressupõe apenas a presença da necessidade de alcançar alguma resposta mas também se prende fundamentalmente com a necessidade de procurar e estabelecer os mecanismos adequados para alcançar o que se pretende.

A ideia de que um problema não se resume apenas à necessidade de buscar um resultado que se procura mas inclui também o aperfeiçoamento dos mecanismos da busca pode também ser encontrada em Polya (2003), para quem resolver um problema significa procurar conscientemente alguma ação apropriada para atingir um objetivo inequivocamente definido, mas não imediatamente atingível.

Alguns estudiosos, como Echeverría & Pozo (1998) e Sternberg (2000), salientam que a existência de um problema pressupõe duas situações ou estados necessariamente separados por um obstáculo, não imediatamente transponível por falta momentânea de elementos adequados, entre a situação ou estado de partida que em geral uma situação desafiadora apresenta e o estado de chegada ou solução desejada. Nesta conformidade, considera-se que resolver um problema implica essencialmente superar o dito obstáculo para conseguir um objetivo, que no pensar destes teóricos é o alcance do estado de chegada ou situação desejada.

Desta conceção advém a ideia de que a existência, ou não, de um problema depende em certa medida do estado considerado como inicial para cada individuo. Assim, uma questão pode ser um problema para um determinado aluno, por exemplo, mas não ser um problema para outros; isto ocorre porque na resolução de uma questão, se o aluno puder recuperar rapidamente uma resposta da memória, diremos que a questão não é ou não constituía problema para esse aluno. Se não puder recuperar uma resposta imediata, então o aluno tem um problema para ser resolvido (Sternberg, 2000). Ainda a este propósito, Wagner (2003) esclarece que se tem um problema quando não se tem um caminho óbvio para satisfazer uma determinada necessidade. Segundo a visão deste autor, a situação sobre a qual se tem controlo não corresponde a um problema. Na mesma senda, Krulik e Rudnick (1989) enfatizam que o ser ou não ser problema pode ser uma questão temporal e relativa à cultura matemática; uma atividade matemática pode ser um problema para uma pessoa num determinado momento e, quando essa pessoa aumenta o seu conhecimento matemático, tal atividade pode tornar-se um exercício rotineiro.

A visão de Echeverría (1998), Sternberg (2000) e Wagner (2003) leva-nos a advogar que perante uma questão, para melhor opinarmos se é ou não problema, seria necessário conhecer as capacidades ou competências do indivíduo que tem o desejo ou alguma necessidade de resolvê-la. E reforça a opinião de Schoenfeld (1985) de que ser um problema não é uma propriedade inerente de uma tarefa matemática pois uma questão será ou não problema, dependendo de diversos atributos do indivíduo que se propõe a resolver a questão; olhando por este ângulo, o que torna uma questão problema, ou não, é uma relação particular entre o indivíduo e a tarefa.

Dante (2000) apresenta uma definição genérica e objetiva, ao referir que problema matemático é qualquer situação que requer impreterivelmente pensamento e conhecimentos matemáticos para solucioná-la. De acordo com este autor, o conceito de problema inclui questões mais simples ou elementares a que chama de exercícios, considerando que esses constituem recursos para praticar um determinado procedimento ou algoritmo.

Tal como outros autores de referência (Echeverría, 1998; Sternberg, 2000; Wagner, 2003; Schoenfeld, 1985), Echeverría e Pozo (1998) consideram que uma situação ou questão é um problema quando um sujeito tem interesse em resolvê-la mas que não pode concretizar a resolução com base na simples utilização de recursos cognitivos mínimos, como ocorre no caso de resolução de exercícios. Os mesmos autores enfatizam ainda que a diferença entre um problema propriamente dito e um exercício prende-se com o conjunto dos sucessivos passos a serem seguidos na resolução. Eles esclarecem que, na resolução de um exercício, em geral o resolvedor dispõe de e utiliza mecanismos que levam, de forma imediata, à solução, o que não ocorre na resolução de um verdadeiro problema.

Schroeder e Lester (1989), interpretando as ideias de Charles e Lester (1982), apontam que uma questão a resolver pode ser entendida como uma situação problemática quando quem a resolve não consegue fazê-lo mediante a aplicação de uma operação matemática previamente conhecida, ou seja, quando a resolução da mesma não se resume a uma simples utilização de um modelo previamente conhecido, baseado na tradução de uma tarefa diretamente em uma representação matemática. Esta ideia vai ao encontro do conceito sucinto apresentado por Onuchic (1999) que descreve um problema como sendo algo que um sujeito se interessa por fazer mas não sabe como fazer, diferentemente do que ocorre no âmbito de exercícios em que o sujeito pode aplicar de forma quase mecânica uma fórmula ou uma regra operatória.

Brito (2006), ao analisar as ideias de diversos autores sobre a resolução de problemas matemáticos, evidenciou que há conformidade sobre o facto de um problema ser, em geral, uma situação quase sempre desconhecida, que é passível de ser o ponto de partida de uma atividade matemática pois o contato do sujeito com essa situação não familiar impõe-lhe a necessidade de mobilizar e disponibilizar, na sua estrutura cognitiva, os elementos necessários à solução.

Van de walle (2001) advoga que, do ponto de vista didático, um problema é considerado como qualquer tarefa ou atividade para a qual os alunos desconhecem qualquer método específico conducente a uma solução, nem dispõem de um receituário de procedimentos previamente prescritos ou memorizados que possam permitir-lhes a realização imediata da mesma.

González (1998), com uma visão profundamente voltada para a educação matemática, refere que problemas matemáticos são:

> **Pesquisas** enquadradas em um processo **natural** de indagação onde os intervenientes devem reunir certas **condições iniciais** (em termos de **conhecimento** e grau de **compromisso**) que permitem superar os desafios envolvidos e, na medida em que os fins prosseguidos são alcançados (pelo resolvedor ou instrutor), proporciona aos sujeitos que o abordam uma **mudança** substancial em relação às suas situações iniciais (p. 88, ênfase no original).

Sem menosprezar as demais conceções, para o presente estudo, consideramos as definições apresentadas por González (1998) e Onuchic (1999) e iremos assumir como problema uma questão que o aluno tenciona resolver mas para a qual não conhece ou não dispõe de um método 'correto' específico de resolução e que ao envolver-se no processo de resolução adquire novos conhecimentos que pode aplicar ou reutilizar em outras situações.

2.2.2 Relevância didática da resolução de problemas matemáticos

No seio da comunidade de educadores matemáticos a relevância da resolução de problemas na aprendizagem de matemática parece indiscutível, porém admite-se que se encontram divergências quando se levantam questões como seja o modo como a resolução de problema se pode tornar pertinente no ensino da matemática. A literatura neste domínio indica que essas divergências podem ter razões históricas.

Uma resenha histórica feita por Stanic e Kilpatrick (1989) sobre a temática da resolução de problemas no ensino da matemática revela que a presença da resolução de problemas no currículo, em determinada época, tinha como objetivo apenas o de resolver problemas e que o foco nas capacidades de resolução de problemas começou a acontecer no decorrer do século XX. Estes autores consideram que a resolução de problemas é uma matéria relativamente nova no currículo de matemática, introduzida por se reconhecer que a resolução de problemas contribuiria para a melhoria do pensamento, pois envolve raciocínio matemático, razão pela qual é atualmente considerada como um meio de se estruturar a aprendizagem matemática.

Com um ponto de vista mais lato, George Polya (2003) justifica a necessidade de se trabalhar com resolução de problemas no ensino de matemática, advogando que a prática de resolver problemas é inerente à natureza de qualquer atividade humana e ao mesmo tempo considera-a fundamental para o desenvolvimento da inteligência, que se constitui num dos objetivos da educação.

Estudos revelam que a resolução de problemas começou a ganhar protagonismo no mundo, no final da década de 1970 (Onuchic, 1999; Onuchic & Allevato, 2004). Os mesmos autores apontam que a publicação do NCTM intitulada *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics*, no ano de 1980, que coloca a resolução de problemas como o foco do ensino da matemática escolar, propõe a resolução de problemas como uma das bases da matemática escolar (NCTM, 1989), considerando-a como elemento central do currículo, pois permitiria que os alunos investigassem e compreendessem o conteúdo matemático. Além disso, entre outras situações, essa abordagem possibilitaria aos alunos o desenvolvimento de estratégias para resolver uma variedade de problemas, bem como a oportunidade de formular problemas e usar, significativamente, a matemática.

Ao pronunciar-se a respeito da relevância da resolução de problemas no ensino-aprendizagem de matemática, Dante (2000) destaca que a resolução de problemas na formação matemática leva o aluno a pensar produtivamente e a desenvolver o raciocínio; permite muni-lo de estratégias para resolver problemas; dá-lhe a oportunidade de se envolver com aplicações da matemática, de enfrentar situações novas e de adquirir uma boa base de conhecimento matemático. Interpretando a visão de Dante (2000), pode notar-se que o autor destaca a resolução de problemas como tendo diversos propósitos e sendo um fator que contribui amplamente para o desenvolvimento das capacidades intelectuais do indivíduo.

Para melhor aclarar os diversos propósitos desta abordagem, o mesmo autor apresenta uma tipificação de problemas e atribui a cada um dos seis principais tipos um objetivo específico.

- Exercícios de reconhecimento: têm como objetivo levar o aluno a identificar ou lembrar objetos matemáticos; em geral, consistem em perguntas diretas que sugerem que o aluno faça correspondências, evocando conceitos, fatos específicos, definições ou propriedades.

- Exercícios de algoritmos: servem para treinar a habilidade de execução de um algoritmo; normalmente, o trabalho do aluno resume-se à mobilização e tratamento de registos e, tal como acontece com os exercícios de reconhecimento, os exercícios de algoritmos vivificam e reforçam os conhecimentos anteriores.

- Problemas-padrão: são uma espécie de exercícios que vinculam o emprego de factos básicos e algoritmos em situações do dia-a-dia; neste tipo de problemas é habitual o solucionador ter que converter a linguagem usual em linguagem matemática.

- Problemas-processo ou heurísticos (que se designam simplesmente por problemas): neste tipo de problemas, o solucionador não faz uma aplicação direta dos conhecimentos prévios, pois exigem a criação de um plano de ação e a elaboração de uma estratégia.

- Problemas de aplicação ou situações-problema: permitem levar o aluno a coletar e organizar dados, matematizar uma situação real do dia-a-dia e resolver o problema utilizando a matemática. (Este é o tipo de problemas que será privilegiado no nosso estudo, sendo que se espera não apenas a simples utilização de modelos matemáticos previamente tratados mas sobretudo a obtenção de modelos e a transferência desses modelos para outras situações contextualizadas análogas ou semelhantes).

- Problemas de quebra-cabeça: proporcionam o desenvolvimento da perceção, motivam e desafiam o aluno através da chamada matemática recreativa.

Schroeder e Lester (1989) apresentaram o que se pode entender como dialética entre a resolução de problemas e a compreensão matemática. Segundo estes autores, por um lado, a resolução de problemas fomenta a compreensão matemática e a forma e a capacidade de resolver problemas revela o nível de compreensão do indivíduo a respeito dos conceitos ligados ao problema resolvido e, por outro, a compreensão pode ajudar na resolução de problemas no sentido em que ela aumenta a riqueza dos tipos de representações que uma pessoa é capaz de construir. Em termos "simples", Schroeder e Lester (1989) enfatizam que compreender Matemática corresponde à ideia de relacionar e que os indicadores da compreensão consubstanciam-se na capacidade para relacionar: uma determinada ideia matemática com uma variedade de contextos; um determinado problema com um grande número de ideias; as várias ideias matemáticas expressas num problema.

Para advogarem que a matemática é um caminho para pensar e organizar experiências, de modo a debelar a visão errónea de que a matemática é apenas uma ferramenta para resolver problemas, Schroeder e Lester (1989) destacam que os educadores matemáticos não devem considerar simplesmente a resolução de problemas, por si só, como o foco do ensino da matemática mas também atribuir grande importância à compreensão do problema. Para o presente estudo, a compreensão será de alguma forma privilegiada uma vez que, segundo a Teoria das Situações Didáticas, tida como uma das referências teóricas, o aluno justifica as suas decisões e explica não só os resultados que obtém mas também as estratégias que utiliza para realizar a atividade matemática.

Charles (1985, 1990) aponta que a resolução de problemas na aprendizagem de matemática proporciona o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, que abarca a coordenação de quatro componentes: conhecimento matemático, processos de pensamento, crenças e atitudes. A resolução de problemas, deste modo, possibilitará ao aluno aprender a pensar matematicamente. Tal como Schoenfeld (1990) enfatiza, cria no aluno uma tendência para analisar e entender, garantindo-lhe deste modo a perceção, não só de estruturas mas sobretudo de relações estruturais, o que em grande medida enriquece a percepção lógica e holística da realidade matemática e extra-matemática.

Mendes (2009) apresenta uma visão apologista da TSD ao defender que a resolução de problemas ajuda os alunos a desenvolverem capacidades para utilizar elementos matemáticos já conhecidos para explicar os seus pensamentos, justificar os seus processos de resolução e **fundamentar** as suas respostas; grosso modo, estes são traços nítidos da TSD que pressupõe que perante uma situação em que a intervenção direta do professor é inibida, o aluno deve escolher, desencadear ou explorar mecanismos de modo a buscar estratégias, soluções, e explicações para os problemas ou desafios que o *milieu* impõe. Este autor reforça ainda que o processo de resolução de problemas permite aos alunos alcançarem capacidades mais elevadas de pensamento matemático, relacionadas com raciocínio dedutivo e indutivo, bem como o uso do raciocínio espacial, a formulação de conjeturas e argumentos matemáticos e criação de contraexemplos, o que os ajuda a validar os seus próprios pensamentos.

Segundo Mendes (2009) as capacidades mais elevadas do pensamento matemático, estão relacionadas com o desenvolvimento das representações mentais e simbólicas. E explica que representação mental é o modo individual da pessoa internalizar uma determinada situação-problema ao passo que as representações simbólicas são as manifestações (modos de comunicar) das ideias matemáticas geradas na resolução de problemas. Assim, essas duas representações interligam-se e, por um processo de generalização ou síntese, conduzem o aluno à abstração, favorecendo o desenvolvimento das capacidades mais elevadas de pensamento matemático.

As afirmações deste autor estão, de algum modo, em sintonia com a Teoria dos Registos de Representações Semióticas, de Raymond Duval, segundo a qual as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, pois são também necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática que consiste em produzir, tratar e converter representações semióticas.

Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) enfatizam que a resolução de problemas tem um importante papel no desenvolvimento da proficiência matemática, uma vez que envolve todas as cinco componentes desta proficiência, nomeadamente, compreensão conceptual, fluência processual, competência estratégica, raciocínio adaptativo e disposição produtiva. Nesta senda, trabalhando com resolução de problemas, o aluno ganha na compreensão de conceitos matemáticos, operações e relações, desenvolve a habilidade para realizar procedimentos de forma flexível, aperfeiçoada, eficiente e apropriada. Deste modo, o aluno torna-se capaz de formular, representar e resolver problemas matemáticos, mobilizando, para tal, pensamento lógico, reflexão, explanação e justificação dos seus resultados e ações, desenvolvendo e mostrando assim o sentido utilitário da matemática e a sua eficácia.

A resolução de problemas, assim entendida, é um processo pelo qual um indivíduo usa conhecimento e compreensões previamente adquiridos para satisfazer as demandas de uma situação não familiar, o que implica que o solucionador deve sintetizar o que aprendeu e aplicá-lo em novas e diferentes situações (Krulik & Reys, 1980; Krulik & Rudnick, 2005). Os mesmos autores reiteram que um professor, ao sugerir um problema aos alunos, deve considerar e analisar tudo que ocorre durante a resolução e sobretudo os resultados didáticos preconizados, sejam eles obtidos ou não. Para isso, é importante que ajuste os problemas de tal modo que os processos de resolução, as diferentes soluções obtidas e as dificuldades vivenciadas possibilitem a extensão de conteúdos matemáticos e a geração de novos problemas ou um reaproveitamento de tais aprendizagens. Esta visão converge, de alguma forma, com a perspetiva de Modelos e Modelação (M&M), desenvolvida por Richard Lesh e colaboradores, que advoga que de pouco ou nada vale desenvolver ferramentas matemáticas se estas só vão ser usadas uma única vez, em uma situação única e com um único objetivo.

Todas as colocações apresentadas sobre a importância da resolução de problemas são unanimemente apologistas de que a resolução de problemas favorece a aprendizagem da matemática, no entanto, notam-se algumas discrepâncias quando se analisa a opinião sobre em que momento a resolução de problemas pode ajudar o aluno na sua aprendizagem.

Tal como destacaremos na secção seguinte, alguns professores, autores e investigadores concebem a resolução de problemas como ponto de partida, outros como uma referência a ter em conta no processo de ensino-aprendizagem e um outro grupo concebe a resolução de problemas como o objetivo da aprendizagem da matemática.

2.2.3 Abordagens à resolução de problemas no ensino da matemática

De entre as diversas contribuições relativas à integração da resolução de problemas no ensino da matemática, para este trabalho destacamos, em primeira instância, dois estudos realizados coincidentemente em 1989, que ilustram diversos enquadramentos pedagógicos da resolução de problemas.

Stanic e Kilpatrick (1989, pp. 13, 15-16) analisaram as perspetivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática e destacaram três abordagens que caracterizam, historicamente, o papel da resolução de problemas no currículo de Matemática, desde o antigo Egito até ao final do século XX: resolução de problemas como contexto, como capacidade e como arte.

Resolução de problemas como contexto: esta abordagem baseava-se na ideia de que os problemas e a resolução de problemas eram meios para atingir fins importantes nomeadamente:

- Justificar: a resolução de problemas como justificação partia da ideia de que a necessidade de saber resolver problemas justificava o ensino de matemática e a inclusão destes no currículo de matemática;

- Motivar: a resolução de problemas como motivação manifestava a intenção de atrair o interesse dos alunos por meio de problemas;

- Entreter ou cativar: a resolução de problemas como atividade lúdica envolvia o fato de que os problemas permitiam aos alunos algum divertimento;

- Veicular: a resolução de problemas como veículo concebia os problemas como vias para ensinar novas técnicas e conceitos;

- Praticar: a resolução de problemas como prática visava apenas a prática necessária para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente e é a conceção que mais prevalecia no currículo de Matemática.

Resolução de problemas como capacidade: esta abordagem assumia a resolução de problemas como o topo da hierarquia das capacidades necessárias a serem adquiridas pelos alunos. Assim, “resolver problemas” é identificado como uma capacidade de nível elevado a ser adquirida depois da capacidade de resolução de problemas rotineiros, isto é, depois de os alunos adquirirem capacidades básicas e apreenderem conceitos e capacidades matemáticas elementares, alguns alunos que conseguiam dominar as capacidades elementares eram expostos a resolver autênticos problemas.

Resolução de problemas como arte: esta abordagem relaciona-se com as ideias propostas por George Pólya, que chamou a atenção para o trabalho com as heurísticas e enfatizou a resolução de problemas como arte, mais especificamente como uma arte prática, oriunda de imitação e prática e reconhecendo que "as técnicas de resolução de problemas precisam de ser ilustradas pelo professor, discutidas com os alunos e praticadas de uma maneira compreendida e não mecanizada" (Stanic & Kilpatrick, 1989, p. 16).

Stanic e Kilpatrick (1989) sublinham que esta abordagem é a mais promissora e por outro lado é a mais controversa, as ideias de Pólya são mal percebidas ou mal utilizadas pelo que chegam a ser reduzidas a capacidades comportamentais, algorítmicas ou procedimentais.

Os aspetos apontados nestas três abordagens ilustram claramente, como os próprios autores destacam, que o que os educadores matemáticos defendem hoje acerca da resolução de problemas está ligado a várias tradições nos campos da psicologia, do currículo, e do ensino da matemática.

Stanic e Kilpatrick (1989) realçam ainda que falar de resolução de problemas na aprendizagem da matemática é, por um lado, substancialmente falar do que se crê ser educação, escolaridade e matemática e, por outro, falar dos objetivos do ensino da matemática em geral e da abordagem didática da resolução de problemas em particular.

Ora cada professor, investigador ou educador matemático tem as suas convicções a respeito do que é a matemática e que relevância tem a resolução de problemas no ensino-aprendizagem desta ciência; assim sendo, existem diversas versões sobre como aplicar a resolução de problemas no ensino de matemática.

Através de um outro estudo, os investigadores Schroeder e Lester (1989) constataram que o significado do termo 'resolução de problemas' nem sempre é bem compreendido (ou é compreendido de diversas formas). O estudo constatou a existência de três abordagens à resolução de problemas no ensino da matemática:

- A primeira abordagem consiste em ensinar *sobre* a resolução de problemas, preocupando-se com factos inerentes à própria resolução de problemas;

- A segunda abordagem parte da visão de que se deve ensinar matemática *para* resolução de problemas e a primeira preocupação é o enriquecimento de um suposto reportório de elementos matemáticos que devem posteriormente ser usados para a resolução de problemas;

- A terceira abordagem considera que se deve ensinar a matemática *via* (ou através de) resolução de problemas.

Concordando com Mendonça (1999) e Allevato (2005), fica claro que estas conceções retratam a resolução de problemas como: um objetivo, um processo ou um ponto de partida. No ensino da matemática sobre a resolução de problemas, encara-se a resolução de problemas como processo pois dá-se maior ênfase ao desempenho e às estratégias utilizadas pelos alunos, como Schroeder e Lester destacam: "Na melhor das hipóteses, ensinar sobre resolução de problemas também incluía experiências em que de facto se resolviam problemas, mas sempre envolveu muito da discussão explícita acerca de como os problemas são resolvidos" (Schroeder e Lester, 1989, p. 32). Considerar que se ensina matemática para resolver problemas é essencialmente considerar a resolução de problemas como objetivo. Nesta perspetiva, o que se faz, segundo Schroeder e Lester (1989), é dar aos alunos muitos exemplos de conceitos, procedimentos e estruturas matemáticas e muitas oportunidades para aplicar os referidos conceitos e estruturas na resolução de problemas. Schroeder e Lester (1989) destacam ainda que, neste sentido, "a única razão para aprender matemática é ser capaz de usar o conhecimento obtido para resolver problemas" (Schroeder & Lester, 1989, p. 32). Ao ensinar via resolução de problemas concebe-se a resolução de problemas como ponto de partida. A introdução de um conceito deve começar com a proposta de um bom problema que ao ser resolvido pelos alunos proporciona o que Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) chamaram de proficiência matemática. De acordo com Schroeder e Lester (1989), dar primazia ao ensino através da resolução de problemas é acreditar que o motivo para o ensino da matemática escolar é ajudar os alunos a compreender os conceitos, técnicas e processos matemáticos. E acrescentam:

> O ensino de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspetos-chave desse tópico e daí são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em problemas rotineiros. A aprendizagem da matemática, desse modo, pode ser vista como um movimento do concreto para o abstrato (Schroeder & Lester, 1989, p. 32).

A aprendizagem da matemática ocorre a partir do *concreto* (ou particular), começa como um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica matemática e progride para o *abstrato* que, neste sentido, engloba a representação simbólica de uma classe de objetos matemáticos, técnicas e procedimentos para operar com esses símbolos.

Ponte (1994) considera que a diversidade de visões a respeito da resolução de problemas no âmbito da educação matemática é uma das razões pelas quais as pesquisas nessa linha se justificam e são tão interessantes.

Contreras e Carrillo (1998) realizaram um estudo sobre as conceções relativas à resolução de problemas em sala de aula, considerando seis categorias de análise, nomeadamente, (1) metodologia, (2) sentido da matemática escolar, (3) conceção de aprendizagem, (4) papel do aluno, (5) papel do professor e (6) avaliação. Dessa análise, resultaram quatro tipos de conceções, não mutuamente exclusivas: tradicional, tecnicista, espontaneísta e investigativa. Mais tarde, Allevato (2005), analisando os resultados dessa investigação, descreve as conceções detetadas como se apresenta na Tabela 1.

Tabela 1: Principais conceções sobre resolução de problemas segundo Allevato (2005, p. 46), com base em Contreras e Carrillo (1998)

	Categorias /Indicadores					
Conceções	**Tipo de Problemas**	**Quando e como se usa**	**Como se aprende**	**Atividade do aluno**	**Papel do professor**	**O que/ como se avalia**
Tradicional	Problemas monográficos bem definidos. Resolução com processo e solução únicos.	No final dos temas, como aplicação da teoria ensinada.	Ampliando e reforçando um campo conceptual.	Tenta identificar conceitos e algoritmos a aplicar.	Inicia e protagoniza o processo de forma exclusiva.	A aplicação mecânica de conceitos aprendidos.
Tecnológica	Problemas monográficos bem definidos. Resolução com processo e solução únicos.	No final dos temas, como aplicação da teoria ensinada.	Aplicando a matemática, estruturam-se conceitos.	Tenta assimilar os conceitos teóricos, aplicando-os; reconstrói processos.	Propõe e contextualiza o problema, repartindo a função de protagonista com o aluno.	Identificação e aplicação de algoritmos adequados.
Espontaneísta	Problemas polivalentes que possibilitam modelar, sem um fim conceptual concreto; de múltiplos processos e soluções.	Como veículo para potencializar a descoberta espontânea de noções.	Atribuindo significado ao conhecimento.	Desenvolve atividades de ensaio e erro.	Sugere problemas.	Significado das noções construídas.
Investigativa	Problemas polivalentes, incluindo os abertos. Condições iniciais modificáveis, gerando novos problemas; de múltiplos processos e soluções.	Durante todo o processo como treino em unidades flexíveis de aquisição de conhecimento conceptual e procedimental.	Participando da construção de redes semânticas.	Aborda o problema como uma investigação.	Propõe problemas e envolve os alunos.	Relevância das noções construídas.

Como se pode concluir, as tendências encontradas nas publicações até aqui referenciadas são fonte de alguma controvérsia, mas importa notar que alguns dos trabalhos analisados indicam certas convergências que merecem destaque (como apresentamos na Tabela 2), tendo em conta os objetivos do nosso estudo.

Tabela 2: Compatibilidade entre perspetivas teóricas relativamente às conceções sobre resolução de problemas

<table>
<tr><td></td><td>Contreras & Carrillo</td><td>Schroeder & Lester</td><td>Mendonça</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>(1998)</td><td>(1989)</td><td>(1999)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Conceções</td><td>Tradicional</td><td>Para resolução de problemas</td><td>Como objetivo</td><td>Estuda-se matemática com o objetivo de conseguir resolver problemas.</td></tr>
<tr><td>Tecnológica</td><td>Sobre resolução de problemas</td><td>Como processo</td><td>O estudo de matemática deve simplesmente permitir a compreensão do processo de resolução de problemas.</td></tr>
<tr><td>Espontaneísta</td><td rowspan="2">Através de resolução de problemas</td><td rowspan="2">Como ponto de partida</td><td>Certas noções matemáticas podem ser descobertas através da resolução de problemas.</td></tr>
<tr><td>Investigativa</td><td>O estudo de um conceito deve iniciar-se no âmbito da resolução de um problema e a resolução em si deve proporcionar proficiência matemática.</td></tr>
</table>

Sem desconsiderar a pertinência e a influência das outras conceções, apresentaremos adiante detalhadamente diversos pontos de vista aludidos por vários investigadores relativamente à resolução de problemas como ponto de partida para o ensino da matemática por acreditarmos que esta abordagem é a que mais se adequa aos propósitos do nosso estudo.

2.2.4 A resolução de problema como ponto de partida para a aprendizagem da matemática

A ideia de considerar a resolução de problemas como ponto de partida para a aprendizagem de conceitos matemático emerge no fim da década de 1980 como uma esperança para atingir os propósitos constantes da já referenciada agenda do NCTM. Esta ideia apareceu associada à retoma do construtivismo, segundo o qual os alunos são seres pensantes aos quais se deve proporcionar, através do ensino, oportunidades de interpretar situações ou problemas e de relembrar conhecimentos anteriores a fim de construir novos conhecimentos (Onuchic,1999, 2003; Santos, 2002; Onuchic & Allevato, 2004; Onuchic & Allevato, 2009).

Vários investigadores no campo da Educação Matemática corroboram, de certa forma, esta abordagem. De entre outras, destacaremos as colocações de Burns (1982), Noddings (1989), Schroeder & Lester (1989), Schoenfeld (1989), Jonassen (1999), Santos (2002) e Carlini (2004).

De forma geral, os autores abraçam a ideia de que a resolução de problemas como ponto de partida para aprendizagem de conceitos matemáticos torna o aluno "construtor" de novos conhecimentos, através da utilização e aperfeiçoamento de conceitos previamente conhecidos, adoção de procedimentos que ele pode descobrir através de ensaio e erro e, acima de tudo, a perceção de que a resolução de problema promove atitudes positivas.

Já no início da década 1980, Burns (1982) ao refletir sobre como ensinar a resolução de problemas, recomendou que se proporcionasse aos alunos problemas desafiantes que os levassem a avaliar e modificar as suas próprias estruturas mentais, dando tempo suficiente para explorá-los; deste modo seria possível introduzir um objeto matemático por meio de um problema.

Carlini (2004) também destacou a resolução de problemas como ponto de partida para aprender matemática, sublinhando que a resolução de problemas oferece circunstâncias para cumprir objetivos relacionados não só com o domínio de conceitos mas também objetivos de índole procedimental, além de fomentar atitudes importantes por parte dos alunos. Esta autora afirma que a resolução de problemas além de tornar o aluno autoconfiante e responsável, pode capacitar o aluno no que diz respeito a organização, articulação e registo de informações diante de uma situação concreta e sobretudo impelir os alunos para a busca de novas informações, para a formulação de conjeturas e avaliação das mesmas.

A questão do entrelaçamento entre a resolução de problemas e o construtivismo fica mais evidente se interpretarmos a opinião de Santos (2002), que relaciona a resolução de problemas aos processos históricos de construção do conhecimento científico, ao considerar que a aprendizagem de conceitos matemáticos através da resolução de problemas proporciona uma situação análoga àquela vivida no processo de construção dos conceitos científicos. O sujeito não só tinha a necessidade de resolver um problema mas também carecia das ferramentas necessárias (ou mais económicas) para o fazer; assim, tinha que construir as ferramentas que permitiriam a resolução do seu problema.

Analisando estudos de diversos autores, Schoenfeld (1989) entende que os alunos devem ser levados a pensar matematicamente. Na visão deste teórico, pensar matematicamente abrange o domínio das ferramentas matemáticas (factos e procedimentos) e o desenvolvimento da compreensão de que a matemática é uma atividade que consiste em dar sentido a realidade e que deve ser usada desse modo na aprendizagem.

Jonassen (1999) também sugere o uso de estratégias apoiadas em tecnologia para professores, ao sublinhar que é importante que os professores diagnostiquem ou pelo menos tentem determinar que conhecimentos anteriores os alunos têm, a fim de perceber as suas capacidades e fragilidades, para que possam viabilizar o entrosamento dos conhecimentos anteriores e o preconizado em cada atividade a sugerir. Para melhor diagnosticar,-Noddings (1989) destaca que o professor deve antever os produtos da atividade matemática em que envolve seus alunos. Os conhecimentos prévios dos alunos são regra geral considerados fundamentais, em particular segundo as etapas (ou momentos) estabelecidas por Santos (2002) envolvidas na resolução de problemas em paralelo com os conhecimentos previamente adquiridos e por adquirir. Esses conhecimentos são o ponto de partida para que o aluno possa ter um papel ativo na busca de elementos imprescindíveis para a resolução de problemas e determinam a relação entre o aluno (potencial solucionador) e o problema. Concretamente, Santos (2002) refere:

> a aquisição de novos conhecimentos está estreitamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo; em matemática costumamos dizer que o aluno aprende pela resolução de problemas, e não escutando o professor relatar esse objeto em sua aula (p.14).

Santos (2002) distingue efetivamente três momentos na resolução de problemas, tendo em conta a relevância dos conhecimentos. Num primeiro momento, o aluno investe ou pelo menos tenta investir os seus conhecimentos prévios; o segundo momento a destacar, na visão deste autor, é aquele em que o aluno toma consciência dos seus conhecimentos anteriores, o que de certo modo propicia o terceiro momento, aquele em que, por exigência do contexto, o aluno se empenha na construção de novos conhecimentos para resolver ou esclarecer a situação.

A explicação apresentada por Santos (2002) a respeito desta sequência de passos é análoga ao fator de aprendizagem estabelecido por Brousseau (1996) na teoria das situações didáticas, quando afirma que os problemas são escolhidos para levar o aluno a adquirir novos conhecimentos e que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna do problema e acrescenta que numa situação a-didática o aluno aprende, adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades e desequilíbrios e caso se adapte à situação e chegue a uma 'solução' ele mostra que se apropriou do saber visado. Jonassen (1999), por seu turno, enfatiza que um conhecimento assim construído é, por inerência, significativo. Estas considerações remetem-nos para a interpretação de Onuchic (1999, 2003), segundo a qual a resolução de problemas deve ser adotada como uma metodologia de ensino, no sentido em que:

> o problema é visto como um elemento que pode **desencadear um processo de construção** do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a **contribuir para a formação dos conceitos** antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal (Onuchic, 1999, p.,207, ênfase acrescentada).

Esta autora aconselha que a investigação matemática orientada pela resolução de problemas seja uma realidade no ensino da matemática. Para isso, o início das atividades matemáticas deverá deixar de ser a definição e terá de passar a ser o problema, sendo que "a Resolução de Problemas não é [nem deve ser] uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem" (Onuchic 1999, p. 215).

Lima (1999) reflete também sobre a necessidade de buscar equilíbrio no currículo de matemática, através da consideração de três elementos fundamentais – conceptualização, manipulação e aplicação. No seu trabalho, este autor deixa clara a sua opinião sobre os males causados pela sobrevalorização da manipulação. Ele reitera que, de entre as três componentes, a manipulação é a mais presente em muitos livros adotados nas escolas, muito embora não exija criatividade, imaginação ou capacidade de raciocínio abstrato. E acrescenta: "cada novo capítulo do curso deveria começar com um problema cuja solução requeresse o uso da matéria que vai começar a ser ensinada" (p. 6).

Tudo quanto foi examinado nesta secção confirma a pertinência da resolução de problemas como ponto de partida no ensino de matemática, não só por despertar o entusiasmo mas sobretudo por proporcionar aos alunos uma oportunidade e sensação de descoberta significativa, parecida com aquela que é vivenciada pelos matemáticos que, para levarem avante a sua atividade exprimem, experimentam e reveem os seus raciocínios, em vez de simplesmente adotarem dogmaticamente os modos de pensar previamente elaborados como se todos os indivíduos trilhassem ou mantivessem uma só linha de pensamento.

2.3 A Perspetiva de Modelos e Modelação (M&M)

Na investigação em Educação Matemática, o termo modelo é definido de diversas formas. Uma delas, que está associada à noção de modelo conceptual, considera como modelo tudo o que ocorre na mente do individuo envolvido numa atividade matemática e pode abarcar convicções e justificativas que o sujeito considera ou concebe para desenvolver essa atividade matemática.

O termo 'modelos' refere-se aqui a explicações ou compreensões matemáticas, embutidos em sistemas particulares de prática que apresentam uma epistemologia de ajuste e revisão, os quais 'intencionalmente' mobilizados pelo sujeito durante a realização de uma atividade matemática (Lesh & Lehrer, 2003).

Tal como veremos mais adiante 'modelação' é um processo de desenvolvimento de descrições representacionais para compreender e desenvolver atividade matemática específica em situações específicas. Geralmente envolve uma série de testes iterativos e ciclos de revisões e ajustes em que interpretações menos frutíferas são gradualmente descartadas ou combinadas com outras a fim de torna-las proveitosas.

2.3.1 O surgimento da perspetiva de Modelos e Modelação (M&M)

A perspetiva designada por Modelos e Modelação emergiu no domínio da Educação Matemática quando investigadores de referência, como Kaput, Lehrer, Kim, Schäuble, Konold, Harradine, Kazak, Lesh, Doerr, Caylor, Gupta, English e outros, propuseram-se determinar a natureza dos sistemas conceptuais que os alunos precisavam desenvolver a fim de lidarem com as situações relacionadas com importantes 'grandes tópicos' de matemática elementar e, de modo mas amplo, em contextos fora do âmbito escolar. Para tal, foi desencadeada uma série de estudos sistemáticos acerca dos modelos conceptuais significativos em projetos de investigação e desenvolvimento, envolvendo alunos, professores, materiais curriculares e programas de ensino. Surgiram assim as perspetivas que vieram a ser catalogadas como Modelos e Modelação.

Em termos gerais, os defensores dessas perspetivas assumem os seguintes pressupostos:

- as ferramentas conceptuais que um individuo desenvolve para interpretar as suas experiências influenciam a abrangência e a restrição do seu pensamento;
- para criar novos sistemas, artefactos e ferramentas, um individuo tende a usar as mesmas ferramentas conceptuais desenvolvidas para descrever e explicar situações anteriores;
- quando um individuo desenvolve formas melhores de pensar sobre as coisas, ele tende a mudar a sua forma de pensar, o que torna o desenvolvimento de sistemas conceptuais num processo cíclico sem fim.

Treinar os alunos para a interpretação de problemas é substancialmente prepará-los para desenvolver o seu pensamento e ao mesmo tempo habilitá-los para criar novos sistemas, o que na realidade se consubstancia em artefactos e ferramentas e no desenvolvimento do pensamento do aluno, o que, por seu turno, implica um avanço na sua forma de encarar o mundo.

No início, basicamente a pretensão destes teóricos era usar as tecnologias disponíveis não apenas para ajudar alunos com mais dificuldades, no contexto das abordagens vigentes, e evitar o fracasso destes (Lins & Kaput, 2004), mas de uma forma geral ajudar todos os alunos a desenvolverem poderosas bases para a aprendizagem da matemática (Lesh e Caylor. 2007).

Esta perspetiva conta presentemente com contribuições de diversos investigadores, dentro e fora do campo da Educação Matemática, a maioria deles pertencentes a três prestigiados grupos de investigação (Lesh, 2000), nomeadamente:

- *Models and Modeling Working Group* pertencente à University of Wisconsin (NCISLA[2]);
- *Models and Modeling Working Group* afiliado ao PME-NA[3];
- *Purdue University's Center for Twenty-first Century Conceptual Tools* (TCCT).

Em Lesh et al.(2000), explica se que, de uma forma geral, as perspetivas de Modelos e Modelação abraçam três grandes linhas de investigação, designadamente a resolução de problemas fora do contexto escolar, os princípios para o *design* de atividades de modelação produtivas para a aprendizagem, e a natureza do desenvolvimento profissional dos professores.

A primeira linha de investigação centra-se nos tipos de problemas a abordar numa atividade de sala de aula (Lesh et al., 2000) de modo a permitir: (a) identificar as compreensões matemáticas e habilidades necessárias para o sucesso em situações que requerem

[2] NCISLA - National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science Education.
[3] PME-NA -North American Group for the Psychology of Mathematics Education.

‘pensamento matemático’ fora do âmbito escolar, tendo em atenção a predominância da tecnologia da informação, e (b) identificar os alunos que possuem habilidades extraordinárias que podem não ter sido apreciadas tendo em conta um historial de baixo desempenho nas tarefas enfatizadas nos manuais e testes tradicionais (Lesh, 2001; Lesh & English, 2005).

Os resultados de estudos realizados destacam: (a) a ineficácia dos testes padronizados na medida em que não revelam na íntegra as compreensões matemáticas e habilidades necessários para o sucesso fora do âmbito escolar numa era subordinada pela tecnologia da informação (Lesh, 2001). (b) quanto mais as avaliações privilegiam habilidades e compreensões matemáticas necessárias para o sucesso fora do âmbito escolar mais alunos tendem a manifestar potencial excecional (Lesh, Zawojewski, & Carmona, 2003).

A segunda linha de investigação busca informação na primeira e centra-se sobre a questão: ‘qual é a melhor forma de introduzir boas situações de aprendizagem nas escolas?’ Esta orientação leva a investigações de princípios de *design* para ambientes de modelação produtiva na escola. Consequentemente, o foco das investigações nesta linha de pesquisa prende-se, por um lado, com a conceção de ambientes onde os alunos podem desenvolver compreensões mais profundas e sólidas de grandes tópicos de matemática e, por outro, procurar as melhores formas de utilizar as novas tecnologias de modo a permitir que alunos comuns consigam fazer conquistas conceptuais extraordinárias.

Para o desenvolvimentos de estudos no âmbito desta segunda linha de investigação, muitas vezes, os investigadores consideram as interações professor–aluno tanto quanto as interações aluno-aluno (Zawojewski, Lesh, & English, 2003); em alguns casos, os estudos analisam o envolvimento de uma turma inteira de alunos como comunidades de aprendizagem que desenvolvem, de forma produtiva e compartilhada, normas sobre a natureza da argumentação científica e da justificação (McClain, 2003; van Reeuwijk & Wijers, 2002). Resultados significativos relatam que crianças surpreendentemente jovens, bem como alunos altamente desfavorecidos, muitas vezes produzem resultados de alta qualidade que são muito mais impressionantes do que se poderia prever com base nos seus resultados anteriores baseados nos testes padronizados (Carlson, Larsen, & Lesh, 2003; Doerr & Lesh, 2002; Lehrer & Schauble, 2002; Lesh, 2001; Shternberg & Yerushalmy, 2003).

Em geral, esta segunda linha de investigação complementa a primeira. E ambas estão em sintonia com a interdisciplinaridade e com a transdisciplinaridade no ensino da matemática e ajudam os alunos a desenvolverem modelos matemáticos. Abordam os sistemas conceptuais como uma forma de explicação do mundo natural, ou seja, concentram-se na promoção do desenvolvimento conceptual, colocando os alunos em situações onde repetidamente expressam, testam e reveem as suas próprias maneiras de pensar sobre ‘grandes ideias’ em matemática ou ciências — ao invés de simplesmente serem levados a adotar as ideias ou formas de pensar pré-concebidas dos professores ou patentes em livros e outros suportes.

As investigações marcadas por estas perspetivas são geralmente de índole qualitativa, uma vez que as duas linhas de investigação se esforçam para realizar tratamentos profundos de um pequeno número de 'grandes ideias' — ao invés de estarem preocupadas com a cobertura superficial de um grande número de factos e habilidades de nível inferior.

Os resultados de investigações decorrentes desta segunda linha de pesquisa, sugerem que as atividades a propor aos alunos precisam ser projetadas e implementadas de tal modo que (a) diversas ideias sejam expressas pelos alunos; (b) os próprios alunos selecionem e retenham as ideias produtivas; (c) as ideias preservadas no âmbito da realização de atividades matemáticas sejam reutilizadas como ferramentas concetuais (Lesh & Yoon, 2004).

A terceira linha de investigação interessa-se pela natureza do desenvolvimento profissional de professores (Koellner-Clark & Lesh, 2003; Doerr & Lesh, 2002; Lehrer & Schauble, 2000; Schorr & Lesh, 2003). A preocupação fundamental prende-se com explicar ou verificar até que ponto as experiências de ensino que os professores organizam, com base na perspetiva M&M, se transformam em experiências de aprendizagem produtivas para apoiar o desenvolvimento do professor (Koellner-Clark & Lesh, 2003; Schorr & Lesh, 2003).

Os resultados de estudos realizadas segundo esta linha de pesquisa indicam que as compreensões matemáticas da maioria dos professores precisam de ser aprimoradas para que possam ajudar os seus alunos a expressarem, testarem e reverem produtivamente os seus pensamentos (Schorr & Lesh, 2003).

Tendo em atenção a perspetiva M&M, o presente estudo enquadra-se na segunda linha de investigação pois o seu problema de partida foi o de elaborar e implementar uma sequência didática através de resolução de problemas, utilizando a folha de cálculo como recurso didático como veículo para introduzir boas situações de aprendizagem, tendo em consideração os princípios da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria dos Registos de Representações Semióticas. Em suma, o estudo visou a conceção de um ambiente onde, tal como veremos no capítulo cinco, os alunos desenvolveram certas compreensões profundas e sólidas sobre sucessões numéricas que são um tópico fundamental da Análise Matemática.

2.3.2 Bases teóricas da perspetiva M&M

Lesh & Doerr (2002) e Lesh & Lehrer (2003), apoiando-se nas obras de outros teóricos, como Wertsch (1985), Dewey (1982), James (1982) e Peirce (1982), referem que as perspetivas M&M advêm da visão estruturalista de Piaget sobre a natureza holística e construtivista dos sistemas conceptuais que as crianças desenvolvem para compreenderem as suas experiências matemáticas e buscam subsídios na conceção de Vygotsky sobre o pensamento como atividade mediada. Lesh & Lehrer (2003) sublinham ainda que os fundamentos estabelecidos por pragmatistas americanos, como John Dewey (1982), William James (1982) e Charles Sanders

Peirce (1982), que eram céticos relativamente a 'grandes teorias' em educação — focando-se no desenvolvimento de um quadro conceptual cujo pano de fundo é a influência da matemática na resolução de problemas da 'vida real' e a tomada de decisões em contextos não escolares — contribuíram em grande medida para a emergência da perspetiva designada por Modelos e Modelação.

Uma ideia principal que as perspetivas M&M adotam de Piaget é a sua ênfase sobre a natureza holística dos sistemas conceptuais que fundamentam as interpretações matemáticas que as pessoas fazem das suas experiências (Beth & Piaget, 1966 citado por Lesh & Lehher,2003). Lesh & Carmona (2002) referem que na ótica de Piaget, muitas das propriedades mais importantes dos sistemas matemáticos, como um todo, não são derivadas de propriedades dos seus elementos constituintes. Continuando a ideia do Piaget, Lesh & Lehher (2003) sublinham que o desenvolvimento desses sistemas conceptuais é mais do que uma simples montagem, construção ou reconstrução, pois necessariamente envolve elementos, relações, operações e princípios.

Lesh & Lehher (2003) salientam ainda que, à semelhança das famosas tarefas de conservação enfatizadas por Piaget, é necessário que os alunos façam julgamentos sobre as chamadas propriedades de invariância, a partir de diferentes sistemas de operações, relações e/ou transformações. Concordando com Lesh & Carmona (2002), avaliar as propriedades de invariância é substancialmente avaliar a compreensão de todo um sistema.

Lesh & Lehher (2003) referem ainda que as propriedades verificadas em sistemas de nível mais elevado e abstrato evoluem a partir de sistemas de nível mais primitivo, concreto e intuitivo; na perspetiva M&M, considera-se que a passagem de um sistema de nível mais primitivo para um sistema de nível mais elevado é entendida como uma reorganização conceptual que somente é suscetível de ocorrer quando os modelos disponíveis não conseguem adaptar-se às experiências que se pretendem descrever, explicar ou prever. Em geral, uma reorganização conceitual ocorre atingindo uma variedade de dimensões: do concreto para o abstrato, do simples para o complexo, do intuitivo para o formal, do contextualizado para o descontextualizado e do especifico para o geral.

O essencial numa reorganização conceitual ou desenvolvimento de um modelo não são necessariamente características de compreensão mais avançada. A esse respeito, Lesh & Lehrer (2003) destacam que:

> Numa dada situação, o modelo que é mais poderoso e útil não é necessariamente aquele que é mais abstrato, complexo, detalhado, formal, descontextualizado ou geral. Por norma, numa situação específica de aprendizagem ou de resolução de problemas, os 'melhores' modelos (e os sistemas conceptuais correspondentes) são aqueles que conseguem balanços adequados em que se pesam fatores, tais como simplicidade e complexidade ou custo e qualidade (p. 120).

Lesh & Lehrer (2003) reconhecem que, tal como acontece na tradição Vygotskiana do pensamento como atividade mediada, as perspetivas M&M também enfatizam as funções das ferramentas conceptuais que abarcam a linguagem natural ou os sistemas de símbolos, as quais influenciam o poder do pensamento das pessoas. Assim, as ferramentas conceptuais influenciam fortemente os pensamentos dos alunos, até porque viabilizam as funções de comunicação e consequentemente possibilitam as sinergias entre o esforço individual e as contribuições coletivas na sala de aula. Esta simbiose entre a experiência individual e a coletiva tem também uma longa tradição no pragmatismo americano de Dewey.

A outra implicação importante da perspetiva de Dewey que valoriza as ferramentas conceptuais encontra-se plasmada na famosa alegação de Jerome Bruner de que "qualquer conceito pode ser ensinado a qualquer criança, em qualquer momento, de alguma forma intelectualmente respeitável" (Bruner, 1963 citado por Lesh & Lehrer, 2003 p121). Os defensores da perspetiva M&M reconhecem que a alegação de Bruner (1963) é claramente um exagero, mas que não pode ser absolutamente desvalorizada pois os seus pontos centrais são simples e válidos. Primeiro, quando são utilizadas ferramentas conceptuais e meios representacionais cada vez mais poderosos as formas de expressar ideias desenvolvem-se. Em segundo lugar, através da introdução e disponibilização de ferramentas conceptuais adequadas, é possível verificar que construções surpreendentemente sofisticadas podem tornar-se acessíveis à maioria dos alunos, incluindo aqueles historicamente menos privilegiados; isto ocorre geralmente quando as situações de aprendizagem são significativas (Harel & Lesh, 2002; Lehrer & Schauble, 2000 e Lesh & Lehrer, 2003).

Lesh & Lehrer (2003), sintetizando as ideias de outros teóricos, como Kaput, (1993), Cobb & Yackel (1998), McClain (2002) e van Reeuwijk & Wijers (2003), apontam outra ideia central que a perspetiva M&M adota de Vygotsky e que é o conceito de zona de desenvolvimento proximal. Neste sentido, na perspetiva M&M, advoga-se que o nível de entendimento do aluno pode ser influenciado por uma variedade de fatores, tais como: (a) orientação fornecida por um adulto (professor) ou por um colega (Cobb & Yackel, 1998), (b) ferramentas conceptuais que podem estar disponíveis no meio, por acaso ou em resultado de intervenções do adulto ou de um colega que as utiliza (Kaput, 1993), ou (c) abordagens sugeridas (ou conformadas) por normas socioculturais e padrões que foram desenvolvidos por comunidades como, por exemplo, alunos e professores em salas de aula (McClain, 2002; van Reeuwijk & Wijers, 2003). Por conseguinte, o desafio educacional é ajudar os alunos a ampliar, rever, reorganizar, refinar, modificar ou adaptar construções (ou sistemas conceptuais) que possuem e não apenas encontrar ou criar construções que não possuem ou que não estão imediatamente disponíveis.

Tal como Vygotsky (1978), os defensores das perspetivas M&M também reconhecem as influências que a linguagem exerce sobre o pensamento e consideram que a linguagem é apenas uma entre muitas ferramentas conceptuais culturalmente fornecidas que influenciam o pensamento matemático (Cobb & McClain, 2001). Quanto à questão da internalização das funções externas invocada por Vygotsky, a perspetiva M&M reconhece que o desenvolvimento de poderosas ferramentas conceptuais ocorre numa variedade de dimensões (Lesh, 2002). Portanto, a noção de zona de desenvolvimento proximal precisa de ser expandida de um intervalo uni-dimensional para uma região n-dimensional, em que uma variedade de caminhos leva a uma determinada construção. Além disso, os alunos são capazes de fazer progressos através dessas regiões multi-dimensionais, segundo diversas trajetórias possíveis (Lesh & Lehrer, 2003). É aqui importante realçar que colocar os alunos em situações onde eles expressam, testam e reveem as suas próprias formas de pensar é, muitas vezes, completamente diferente do que conduzi-los ao longo de trajetórias estreitas que levam à adoção de modos de pensar do professor, especialmente quando é presumido que todos os alunos se desenvolvem segundo uma mesma trajetória.

À semelhança das ideias Vygotskianas sobre a influência das funções sociais no desenvolvimento conceptual, a perspetiva M&M tem uma relação com a noção de comunidades mentais invocada por Minsky (1987) ou com a ideia de um pluriverso de sistemas conceptuais sugerida por William James (1982). De acordo com Minsky (1987) e James (1982) (citados por Lesh & Lehrer, 2003), quando são exploradas situações de aprendizagem não triviais como as de resolução de problemas, os alunos tendem a experimentar uma comunidade de sistemas conceptuais onde cada um deles é potencial interpretador de experiências relevantes (Zawojewski, Lesh, & English, 2003). Neste sentido, Lesh & Doerr (1998) metaforizam, comparando a comunidade das ideias dos alunos a uma comunidade de seres biológicos que para sobreviverem necessitam de adaptar-se e evoluir continuamente. Consequentemente, deve-se ter em conta que, quando os produtos que os alunos constroem incluem descrições e explicações, deve ser possível uma variedade de tipos de respostas, onde diversos fatores têm de ser pesados, tais como: precisão versus exatidão, complexidade versus oportunidade, simplicidade versus superficialidade, poder versus economia, ou custo versus benefício (Lesh & Lehrer, 2003).

Numa sala de aula, para que um grupo de alunos envolvidos em situações de resolução de problemas se aproxime significativamente de uma comunidade de sistemas conceptuais, as diversidades devem ser encorajadas na mesma medida em que se incentiva a seleção, assim como a comunicação (de modo que as inovações se propaguem) e a conservação (de modo a preservar as inovações). Lesh & Lehrer (2003) alertam que as decisões sobre maneiras de pensar rejeitadas muitas vezes contribuem tanto para a aprendizagem e para a resolução de problemas como as decisões sobre as formas de pensamento a adotar, refinar ou verificar. Por conseguinte, deve-se ter atenção para garantir que os raciocínios são adotados (ou rejeitados) porque são mais adequados ou mais úteis na situação dada e não simplesmente porque uma 'figura de autoridade' o diz. As decisões devem ser tomadas consoante a lógica imposta pela atividade matemática em causa e não por imposição do professor ou outro interveniente.

2.3.3 A perspetiva M&M como tendência pós-construtivista

Qualquer teoria moderna que se debruce sobre a aprendizagem aceitará que o contributo do construtivismo é valioso em numerosos aspetos para compreender e delinear os processos de aprendizagem escolar. Dificilmente encontraremos qualquer teoria moderna de aprendizagem que advogue que os alunos recebem passivamente o conhecimento dos seus professores. As perspetivas M&M não pretendem suprimir o construtivismo enquanto chave teórica, porém apresentam um posicionamento mais profundo no que concerne a alguns aspetos fundamentais inerentes ao processo de aprendizagem que procuram olhar de forma mais holística.

Os construtivistas concordam que o conhecimento é ativamente construído pelo aluno e não simplesmente recebido passivamente do professor. Da mesma forma, a maioria dos construtivistas concordam que o saber não é a descoberta de um objeto e de um mundo preexistente. No entanto, em muitas políticas e decisões educativas importantes, a alegação de que 'o conhecimento é ativamente construído pelo aprendiz' acaba por ser, de certa maneira, invocada superficialmente ou de forma incompleta, especialmente se não houver detalhes sobre como as construções mentais são desenvolvidas. (Lesh & Caylor, 2007)

Lesh et al (2003) observam que publicações recentes têm mostrado que os professores e investigadores que se assumem como construtivistas podem prender-se excessivamente com questões práticas, tais como: os tipos de exemplos e representações que devem ser usados, o papel dos materiais concretos no ensino, a quantidade e o tipo de orientações e o feedback adequado a proporcionar aos alunos, ou as melhores estratégias de uso de ambientes e ferramentas computacionais (Goldin, 2001; Kelly & Lesh, 2000; Steffe & Wood, 1990). A questão que se coloca é se os princípios básicos do construtivismo são significativos e úteis para professores, autores de currículos, investigadores e outros decisores educacionais, quando comparado com outras concorrentes ou perspetivas teóricas.

As perspetivas M&M aprofundam de maneira detalhada como se desenvolvem as 'construções' do conhecimento, uma vez que exploram de forma relativamente mais profunda as implicações que podem ser extraídas da teoria construtivista no contexto das questões prioritárias e de interesse de professores, investigadores e elaboradores de programas. A este respeito, Lesh et al (2003) discutem transversalmente tópicos como: (a) a influência da realidade, (b) a natureza do conhecimento matemático, (c) a natureza do desenvolvimento do conhecimento, (d) os mecanismos que impulsionam o desenvolvimento, e a relação entre contexto e generalização, (f) a resolução de problemas e o desenvolvimento do conhecimento matemático (g) e os tipos de situações que contribuem para o desenvolvimento do conhecimento durante o ensino e aprendizagem. Nas subsecções seguintes apresentaremos a discussão ora referida, evidenciando como estas questões são ponderadas a luz das perspetivas M&M.

A realidade e a aprendizagem do indivíduo

Ao discutirem a natureza da realidade, Lesh et al (2003) centram-se sobre as diferenças nas proposições de partidas que encarnam importantes distinções entre as perspetivas M&M e a visão construtivista sobre a relação entre as experiências do indivíduo e a natureza da realidade. O construtivismo radical é essencialmente uma teoria projetada para abordar questões que são prioridades para os filósofos e, como tal, concede uma atenção especial ao mundo construído pelo conhecedor e à relação desse mundo com a 'realidade'. Isto implica uma oposição à visão positivista que afirma que há 'uma verdade existente' e a ciência ajuda-nos ficar 'mais perto' dessa verdade, como observou Von Glasersfeld (1984, citado por Lesh et al., 2003, p. 212):

> .... é necessário ter em mente a característica mais fundamental da epistemologia construtivista, ou seja, que o mundo construído é um mundo experiencial que consiste em experiências e não faz qualquer reivindicação sobre a 'verdade', no sentido de correspondência com uma realidade ontológica (Von Glasersfeld,1984, p. 29).

De acordo com essa visão, a 'realidade' é construída com base nas experiências do indivíduo; o conhecimento é avaliado com base na sua 'conformidade' com essas experiências. Não há nenhuma realidade externa, verdadeira, construída exatamente da mesma forma por cada indivíduo. Lesh et al (2003) analisaram trabalhos de alguns teóricos como Cobb & Yackel (1996), Steffe & Kieren (1994) e Von Glasersfeld (1991) e salientaram que desta proposição inicial, os construtivistas precisam de gerar explicações acerca do modo como os indivíduos podem chegar a uma compreensão comum da realidade.

Concordando com Lesh et al (2003), do ponto de vista epistemológico, existe uma lacuna ou uma instabilidade pois os construtivistas radicais acreditam que o conhecimento é construído internamente e então exteriorizado, ao passo que os socio-construtivistas advogam que o conhecimento é, em primeira instância, externo e é internalizado subsequentemente. Lesh et al. (2003) defendem que as implicações que possam provir de qualquer uma destas duas tendências simplesmente não fornecem informações úteis para as principais questões confrontadas no âmbito da educação matemática. Mesmo o uso simultâneo destas duas teorias que foi ponderada por socio-construtivistas como Kieran (2006) e Cobb (1994) e (citado por Lesh et al., 2003), não resolve o dilema da diferença entre as duas visões contraditórias no plano epistemológico.

Outros campos de estudo também têm estado preocupados com estas questões ontológicas e entretanto chegaram a resultados práticos diferentes. Latour (1990, 1999), citado em Lesh et al. (2003), refere que a existência de uma suposta lacuna ontológica que separa a linguagem do mundo é errónea. Latour (1990, 1999) desdramatiza esta conclusão, adiantando que não há nenhuma lacuna que possa ser perpetuada e considera que o que tem sido considerado como uma lacuna ontológica precisa ser ultrapassado para se chegar do mundo da experiência ao mundo da representação, algo que acaba por ser uma série de processos (necessários) de tradução, envolvendo entidades no mundo e as palavras usadas para descrever essas entidades.

Apesar da complexidade que podem aparentar, as perspetivas M&M começam com suposições simples e práticas, considerando que: (a) as pessoas interpretam as suas experiências usando modelos; (b) estes modelos consistem em sistemas conceptuais que são expressos usando uma variedade de meios (materiais concretos, símbolos, linguagem falada) para construir, descrever, explicar, manipular, predizer ou controlar sistemas que ocorrem no mundo; e (c) os modelos desenvolvidos no e para o mundo são constantemente interpretados e reinterpretados (Lesh et al, 2003).

De acordo com as perspetivas M&M, a menor unidade de análise epistemológica é o modelo. Um modelo conceptual é desenvolvido por um indivíduo para construir, descrever ou explicar as suas experiências matemáticas. Neste âmbito, um modelo pode ser pensado como tendo componentes internos e externos. O que observamos, em última análise, são os componentes externos (representações), mas estas não podem ser desconectadas dos sistemas conceptuais internos. As interpretações dos indivíduos resultam das interações entre os modelos e os sistemas que eles descrevem. Cada modelo tem alguma característica que o sistema não tem; e cada modelo não tem toda a característica que o sistema tem — caso contrário, o modelo e o sistema seriam a mesma coisa. Muitas vezes são necessários vários meios de expressão para representar sistemas complexos. O desenvolvimento de representações de sistemas conceptuais provoca reinterpretações do sistema descrito, bem como do modelo em si.

Muitas vezes, há diversas camadas ou níveis de interpretação entre a interpretação que um indivíduo faz de uma experiência e a experiência em si. Estas camadas de complexidade são resultado dos vários modelos que podem ser utilizados para interpretar uma experiência. A nossa interpretação é o que sabemos sobre sistemas e os nossos modelos são usados para interpretar e reinterpretar tais sistemas.

A natureza do conhecimento

Os trabalhos de Piaget fundamentam, em certa medida, a construção de conhecimento e os processos de raciocínio na criança, colocando em destaque a construção como um importante processo no que se refere ao desenvolvimento. A alegação construtivista de que todo o conhecimento deve ser construído pelo indivíduo tende a enfatizar ainda mais a importância da construção. Isto levou a uma das mais típicas generalizações associadas com o construtivismo que é a noção de que todo o conhecimento deve ser construído.

Os defensores da perspetiva M&M levantam duas objeções a esta alegação: em primeira instância, a perspetiva M&M reconhece a existência de conhecimentos importantes que não são apropriados sob a forma de construções e em, segunda estância, a construção é reconhecida como apenas um dos muitos processos relevantes na ‘ampliação’ do conhecimento ou do saber. Lesh et al (2003), baseando-se em outros estudos, como os de Dark (2003) e de Lesh e Doerr (2000), argumentam que partes significativas do conhecimento que os alunos precisam de aprender não são construções. Na visão destes autores, alguns conhecimentos (tais como capacidades e procedimentos) não são construídos em qualquer sentido do termo. Capacidades e procedimentos não são construções no sentido de sistemas conceptuais e, portanto, não precisam de ser construídos. Na perspetiva M&M admite-se que os alunos precisam de adquirir proficiência em capacidades e procedimentos, alguns dos quais evoluirão para procedimentos complexos. Estes podem ser usados mais tarde na construção, na reorganização, no teste e na refinação de construções ou sistemas conceptuais, mas as capacidades e procedimentos não são propriamente construções. A complexidade de uma capacidade não deve ser confundida com a compreensão conceptual de um sistema, com os seus objetos, operações e relações (Lesh et al, 2003).

O que se defende na perspetiva M&M é que “construir” é muito limitado para descrever as muitas formas e *nuances* com que os sistemas conceptuais significativos são aprendidos, pois a aprendizagem pode abarcar, por exemplo, a classificação e a seleção de ideias concorrentes, e ainda pode consistir em refinar ou rever ideias que entram em conflito com outras perceções, selecionando partes de informação, representando as relações que já são compreendidas, em parte, e assim por diante. São muito mais do que a construção ou edificação do aprendido anteriormente sobre esquemas prévios. Na perspetiva M&M, os processos relevantes envolvidos na aprendizagem são, entre outros, a filtragem de informações, a diferenciação ou especificação das condições em que uma determinada solução seria aplicável, a integração de resultados anteriormente considerados em novos sistemas de interpretação, e a reestruturação do meio representacional de tal modo que seja útil para outras situações.

Tal como se espelha em Lesh et al (2003), a perspetiva M&M não desvaloriza radicalmente a ‘construção’; apenas salienta o facto de que a ‘construção’ não engloba muitas das mais importantes atividades em que os alunos precisam de se envolver quando aprendem sistemas conceptuais matematicamente significativos. Por exemplo os sistemas de notação e símbolos não precisam de ser construídos por cada indivíduo, embora certos significados associados a eles precisem claramente de ser construídos. Envolver os alunos na ‘descoberta’ ou ‘invenção’ de tais sistemas é uma provável perda de tempo que pode ser investido na aprendizagem de elementos essenciais desses sistemas. No caso em que os sistemas de representação são dados ou ‘anunciados’ aos alunos, a atividade central que os alunos precisam de realizar é a descompactação do significado do sistema e o uso flexível do sistema de modo que lhes permita dar sentido às suas experiências.

A natureza do desenvolvimento

Muita investigação de pendor construtivista em Educação Matemática tem-se revelado em estudos precisos sobre a natureza do desenvolvimento da compreensão dos alunos. Além de Piaget, que foi um dos primeiros investigadores a revelar a natureza de algumas das mais importantes construções que os alunos devem desenvolver, Lesh et al (2003) relatam que vários outros investigadores, como Fuson (1986, 1990), Steffe & (Cobb, 1988), Carpenter et al (1998), Lesh, Post, & Behr (1989) Confrey & Smith (1995) e Vinner & Dreyfus(1989) deram descrições detalhadas sobre as sequências e estádios que os alunos percorrem em algumas áreas de conteúdos matemáticos. Nesta linha, foram desenvolvidos materiais curriculares e abordagens de ensino que orientam as construções dos alunos ao longo de trajetórias de aprendizagem baseadas em investigações (por exemplo, *Cognitive Tutor*[4]; e *Mathematics in Context*).

A metáfora da construção sugere que as construções são criadas nas mentes dos alunos e que a tarefa do professor é fornecer um conjunto de experiências para orientar essa concatenação que é semelhante ao processo de montagem de peças e subconjuntos de uma máquina ou à programação de um computador. Em Lesh et al (2003) relata-se que trabalhos como os de Fennema & Carpenter (1996), Franke & Kazemi (2001) e Yackel & Cobb (1996) evidenciam as referidas metáforas construtivistas nas abordagens para o ensino e aprendizagem da matemática que apresentam sequências cuidadosamente delineadas de materiais de ensino destinadas a orientar o pensamento das crianças através de alguns conjuntos de experiências, muitas vezes com materiais concretos para as crianças mais jovens.

Do ponto de vista construtivista, o desenvolvimento provém da aplicação de técnicas cuidadosamente orientadas para mudar o pensamento dos alunos em direção ao (preconizado) do professor ou ao modo de pensar do investigador sobre a construção ou o problema. Uma marca de tais abordagens é a noção de que o desenvolvimento das ideias é sequencial e linear, como uma escada, ou ao longo de uma trajetória pré-concebida por investigadores ou professores.

Na perspetiva M&M apresenta-se uma visão diferente quanto à natureza do desenvolvimento. Lesh et al (2003) referem que em algumas áreas matemáticas importantes envolvendo medida, tais como razões, taxas, raciocínio proporcional e outros conceitos fundamentais, geometria, álgebra e cálculo, tornou-se cada vez mais claro que: (a) frequentemente as compreensões primordiais de modelos relevantes começam muito cedo (por exemplo, muitos conceitos de aritmética dos inteiros surgem em estádios iniciais de desenvolvimento), (b) o desenvolvimento de qualquer modelo geralmente continua durante um período de muitos anos (em vez de se aplicar a todos os contextos durante um curto período de tempo), e (c)

[4] É um tipo particular de sistema de tutoria inteligente que utiliza um modelo cognitivo para fornecer feedback aos alunos enquanto trabalham com os problemas

em qualquer instante, a evolução de um determinado modelo tende a envolver diversas dimensões (por exemplo, concreto–abstrato, simples–complexo, intuitivo–formal, situado-descontextualizado).

Na prática, é notório que as crianças muitas vezes mudam de uma forma de pensamento para outra sem sequer percebermos o que de facto ocorre (Lesh & Doerr, 2000). Assim, a aparente fase de desenvolvimento do raciocínio, muitas vezes, varia significativamente, através de modelos e representações, dentro de uma determinada situação de aprendizagem ou de resolução de problemas. Concordando com Lesh et al (2003), usar a metáfora de uma única sequência hierárquica ou de estádios tende a ser demasiado simplista para descrever o desenvolvimento conceptual; neste sentido, o mais correto é considerar que o desenvolvimento conceptual geralmente envolve múltiplas dimensões e processos iterativos e cíclicos.

Partindo do princípio de que o desenvolvimento conceptual geralmente envolve múltiplas dimensões e processos iterativos e cíclicos e considerando que há uma multiplicidade de processos envolvidos no desenvolvimento, englobando simultaneamente vários sistemas conceptuais, trabalhos de vários teóricos de renome (como Lesh, Lester & Hjalmarson, 2002; Harel & Lesh, 2002; Lesh & Harel, 2003), explicitaram que os alunos começam por conceber modelos dotados de uma imprecisão considerável e à medida que semelhanças e diferenças se tornam claras esses modelos são refinados, pelo que se tornam mais precisos.

À luz da perspectiva M&M, as explicações de como os alunos desenvolvem uma construção particular, num momento específico, são relativamente pouco interessantes, pois embora seja verdade que, após se ter realizado a aprendizagem, a trajetória pode ser descrita, na prática, a aprendizagem parece-se mais com o vaguear num terreno complexo do que com uma linha de movimento ao longo de uma trajetória particular. Por isso, Lesh et al (2003) referem que o mais interessante é saber como o conhecimento se desenvolve em contextos ao longo do tempo.

Os mecanismos do desenvolvimento

A perspetiva M&M não é de todo antagónica ao construtivismo pois alguns dos mecanismos que conduzem ao desenvolvimento do conhecimento, segundo o construtivismo, são integralmente estendidas para as perspetivas M&M. A este respeito Lesh et al (2003) enfatizam três tipos de conflitos cognitivos considerados pertinentes no desenvolvimento de modelos dos alunos: (a) incompatibilidade entre o modelo e a realidade, (b) incompatibilidades internas do modelo e (c) incompatibilidades entre modelos.

A estratégia básica da perspetiva M&M consiste em envolver os alunos em processos de seleção entre ideias alternativas, variação de representações e mudança de perspetivas, de modo a conceberem modelo úteis para uma finalidade entendida pelo aluno, mas que também sejam modelos úteis para outros indivíduos não envolvidos na criação dos mesmos. Durante o envolvimento dos alunos nos processos de seleção, os três tipos distintos de conflitos cognitivos manifestam-se claramente: (a) as incompatibilidades modelo-realidade ocorrem quando as previsões do modelo não correspondem à realidade; (b) as incompatibilidades internas do modelo ocorrem quando a atenção se desloca de um meio representacional para outro; e (c) as incompatibilidades entre modelos ocorrem quando há discordância entre duas maneiras distintas de pensar sobre um problema.

Dentro das perspetivas M&M admite-se que a incompatibilidade modelo-realidade implicitamente envolve as outras incompatibilidades, mas quando se trabalha com desenvolvedores de modelos matemáticos significativos é importante que se faça a distinção dos três conflitos. Portanto, o conflito modelo-realidade, que leva a alterações ou melhorias de um modelo, não é necessariamente equivalente à incompatibilidade entre os modelos dos alunos e os de um especialista, (pois não se espera que os alunos construam modelos tão eficientes ou tão precisos que os previamente conhecidos pelos professores e especialistas); em vez disso os conflitos são discrepâncias que ocorrem quando o modelo é menos útil para o aluno na discrição ou explicação de experiências. Assim, um elemento importante na noção de incompatibilidade modelo-realidade é a finalidade do desenvolvimento do modelo. Analisa-se se é útil ou adequado simultaneamente na perspetiva (a) do aluno que desenvolveu o modelo, (b) de outra pessoa que pode usar o modelo e (c) de alguém que usa ou vier usar o modelo em uma situação relacionada.

As incompatibilidades dentro do modelo são especialmente suscetíveis de ocorrer quando os alunos exploram os seus sistemas de representação e quando são usadas ferramentas tecnológicas em tarefas de modelação. Lesh & Doerr (2000) referem que a interpretação de novas quantidades e qualidades geradas pelo uso de ferramentas representacionais conduz a mudanças no modelo para seu desenvolvimento posterior e proporciona aos alunos formas de pensar cada vez mais diferenciadas. Por exemplo, a folha de cálculo pode servir para restruturar representações de dados e facilitar uma visão mais clara de aspetos a melhorar.

As inadequações do modelo também ocorrem ou são percebidas quando os alunos se envolvem no processo de integração de novos elementos num sistema existente, ao fazerem uma reorganização de um sistema para explicar melhor os objetos e relações e diferenciar entre condições, significados e consequências. Lesh et al (2003) sublinham que essas atividades tornam-se a fonte de incompatibilidades internas do modelo e conduzem à continuação do desenvolvimento do modelo, pois as soluções iniciais dos alunos para uma tarefa de modelação tornam-se cada vez mais diferenciadas à medida que estes vão dando conta de novos elementos e refletindo sobre as várias condições e restrições a ser usadas dentro do seu modelo. Nesta senda, entende-se que a integração de elementos dentro de um modelo, a resolução de discrepâncias entre os elementos representados e a interpretação de novas quantidades são os mecanismos que impulsionam o desenvolvimento dos modelos do aluno de maneira a torna-los mais úteis para o próprio aluno, mas sem que isso subentenda um caminho predeterminado.

As incompatibilidades entre modelos ocorrem quando um modelo é contrastado com outro. Geralmente, as pessoas reconhecem que dois modelos são incompatíveis quando começam a notar diferenças, ao tentarem determinar qual dos modelos parece ser mais apto (para um contexto e propósito específico), ou a desenvolver um novo modelo que incorpora elementos de ambos os modelos ou características inteiramente novas.

A resolução de problemas e o desenvolvimento do conhecimento

Os problemas de matemática escolar são geralmente cuidadosamente construídos para garantir que os alunos consigam resolvê-los e obter resposta a partir de informação e de relações matemáticas muito específicas. Os dados e objetivos de um problema são estruturados de tal forma que a informação irrelevante fique excluída. A formulação do problema em si conduz a uma estrutura matemática específica. A tarefa central para o aluno, em tais situações, é encontrar o caminho não óbvio a partir dos dados para alcançar o objetivo ou então recordar uma ferramenta, técnica ou procedimento que o ajude a resolver o problema.

A perspetiva M&M propõe que a tarefa de resolução de problemas se centre em interpretações de situações significativas. O que se espera do aluno é que desenvolva formas úteis de interpretar dados, objetivos e que engendre caminhos de solução. O processo de interpretação pode incluir filtragem e classificação da informação, testes e revisão de resultados possíveis. Os raciocínios dos alunos sobre a situação são revelados no processo de desenvolvimento de interpretações, através de explicações, previsões e descrições que estão relacionadas com a situação do problema.

No âmbito das perspetivas M&M acredita-se que o aluno, ao resolver problemas, produz modelos focados em estruturas matemáticas significativas, padrões e regularidades, e que o desenvolvimento de tais modelos requer vários ciclos de interpretação. Assim, numa atividade de resolução de problemas, em vez de se considerar apenas as soluções finais, começa-se por considerar os produtos iniciais do aluno envolvido em problemas e tarefas de modelação.

A questão central na resolução de problemas é que o aluno desenvolva um modelo que consiste num sistema conceptual, modelo esse expresso por um sistema de representações, que é útil para algum propósito percebido pelo aluno. Em geral, o modelo representa um processo de lidar com uma tarefa de mundo real. O modelo deve permitir ao aluno criar, descrever, explicar, manipular, predizer ou controlar sistemas que ocorrem no mundo de forma significativa e útil (Lesh et al, 2003).

O critério para avaliar a 'correção' do modelo é ditado por dois fatores principais: utilidade e generalização. Lesh et al (2003) referem que os modelos são aprovados ou rejeitados por causa da sua utilidade, e sublinham ainda que os modelos (ou teorias ou sistemas conceptuais) úteis são aqueles que: (a) começam com pressupostos simples e claramente compreendidos (ou 'axiomas') e (b) geram conclusões (ou 'teoremas') que são poderosos e não óbvios. Em particular, o modelo deve ser útil para o aluno como alguém que usa o modelo e para qualquer outro utilizador do modelo numa situação relacionada. A generalização é avaliada através da determinação do modelo desenvolvido como útil para um eventual destinatário, em circunstâncias que diferem do contexto original em que o modelo foi desenvolvido.

Os modelos que os alunos desenvolvem durante as tarefas de modelação são muito mais complexos e poderosos do que uma resposta correspondente a uma palavra ou um número, portanto, os processos de desenvolvimento são mais complexos do que sequências lineares, que levam dos dados para as metas. Porque o objetivo de resolver problemas é desenvolver um modelo que incorpora um sistema conceptual, as descrições dos processos cíclicos de resolução de problemas são muito semelhantes às descrições do desenvolvimento do conhecimento. Os mecanismos que contribuem para o desenvolvimento do conhecimento também contribuem para a resolução de problemas. O desenvolvimento de um modelo requer vários ciclos de interpretação e cada mudança de uma forma de pensamento para outra representa o movimento de um ciclo para outro. Nos estádios iniciais de desenvolvimento do conhecimento, a compreensão inicial do problema é muitas vezes fragmentada, mal coordenada e confusa. A evolução do modelo desenvolvido ocorre ao longo de várias dimensões (por exemplo concreto-abstrato; simples-complexo, situado-generalizado). Deve-se recordar que são as incompatibilidades surgidas que incentivam o desenvolvimento conceptual, levando os alunos a conjeturar, testar, rever e reformular os modelos que desenvolvem para resolver problemas.

O ambiente de trabalho de grupo na resolução de problemas oferece oportunidades para que os alunos divulguem os seus modelos perante os colegas e desse modo gera ocasiões em que as incompatibilidades do modelo são suscetíveis de ocorrer (Zawojewski, Lesh, & English, 2003). Depois de passar por vários ciclos no processo de resolução de um problema e resolver as incompatibilidades do modelo, o produto acabado representa uma solução mais completa e complexa do que as primeiras conceções dos alunos sobre o problema (Lesh et al, 2003).

2.3.4 O processo de modelação e a sua relação com sistemas concetuais

Tal como foi exposto anteriormente, no âmbito da perspetiva M&M os modelos matemáticos são sistemas conceptuais:

> (a) Expressos para alguma finalidade específica (que John Dewey referiu como um 'fim em vista') e (b) expressos, usando alguns (e geralmente

vários) suportes representacionais. Ou seja, os modelos matemáticos são descrições ou explicações intencionais (Lesh & Lehrer, 2003, pp. 111,112).

Lesh & Doerr (2003b) realçam que os modelos matemáticos dizem respeito a padrões, regularidades e outras características de determinados sistemas que são estruturalmente significativos. Os seus fins, muitas vezes, envolvem a construção, manipulação, ou previsão de sistemas a serem modelados e o seu processo de desenvolvimento é motivado por alguma finalidade específica e é uma atividade que geralmente envolve uma série de ciclos iterativos de testes e revisão.

Durante uma atividade de modelação, os alunos passam por uma série de ciclos, pelo que se espera o surgimento de diferentes formas de pensar sobre a natureza dos objetos, relações, operações e padrões ou regularidades, perante uma situação de resolução de problemas. Isso ocorre porque, segundo Lesh & Lehrer (2003), os modelos matemáticos e os seus sistemas conceptuais subjacentes, geralmente são definidos pela especificação de quatro componentes:

(a) a natureza dos seus 'objetos matemáticos' (por exemplo, quantidades, formas, posições), (b) a natureza das relações matemáticas que existem entre os 'objetos', (c) a natureza das operações matemáticas sobre os 'objetos', (d) a natureza dos padrões matemáticos e das regularidades dos objetos, relações e operações (p. 112).

Tal como se ilustra na figura abaixo (Figura 2), os modelos matemáticos envolvem um propósito, um sistema conceptual de suporte e os meios representacionais em que o sistema conceptual é expresso, além de um processo de construção e revisão, de caráter cíclico.

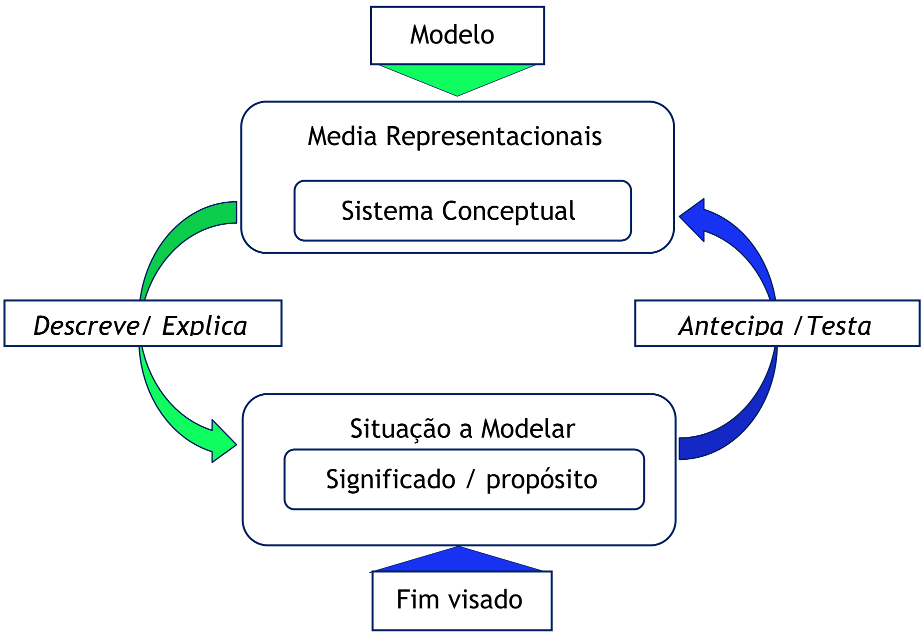


Figura 2. O processo de construção de modelos, segundo Lesh & Lehrer (2003, p.112)

Uma vez que os modelos são desenvolvidos para fins específicos, em situações específicas, eles envolvem formas situadas de aprendizagem e de resolução de problemas (Greeno, 1991). Por outro lado, sabendo que os modelos descrevem ou explicam, então a necessidade de desenvolver modelos é inerente à necessidade de compartilha-los e de reutilizá-los noutras situações; em conformidade, a modelação é intrinsecamente uma atividade social e nela estão envolvidas formas significativas de generalização e transferibilidade.

2.3.5 Modelação como aplicação e como criação de matemática

A modelação enfatizada na perspetiva M&M consiste no desenvolvimento de sistemas de interpretação, compartilháveis e reutilizáveis. Tais modelos podem ser pensados como sistemas utilizados para projetar, interpretar, descrever ou criar novos sistemas. No mesmo sentido, é importante salientar que os modelos matemáticos são diferentes de outros tipos de modelos porque o foco dos modelos matemáticos está em propriedades estruturais ao invés de propriedades físicas, químicas ou biológicas. Os sistemas matemáticos podem ser desenvolvidos e/ou investigados por sua própria causa ou podem ser usados para projetar e descrever outros sistemas. Além disso, um sistema que está a ser modelado num dado momento pode ser usado para modelar outros sistemas mais tarde. Mas, regra geral, os sistemas matemáticos somente se tornam modelos quando são usados para modelar outros sistemas.

A preocupação com a interpretação de situações que, direta ou indiretamente, envolvem matemática não é uma novidade; o que se enfatiza na perspetiva M&M é que esta exigência está a acentuar-se dia após dia, já que preparar um cidadão para o dia de amanhã equivale a equipá-lo com ferramentas conceptuais significativas.

Sempre que são discutidas questões relacionadas com *Modelos e Modelação*, uma questão recorrente é a da falta de alguma clareza sobre se a ênfase é na: (a) modelação como aplicação ou (b) modelação como uma forma de criar matemática. Na investigação que nos propusemos realizar, concebemos acima de tudo a modelação como uma maneira de criar matemática. No entanto, para o tipo de situações que queremos considerar, os tipos de atividades podem ser destinadas a compreender a matemática e a matematizar situações que podem ocorrer na realidade. A este respeito, tomando como referência o trabalho de Lesh & Caylor (2007), a compreensão dos alunos sobre conceitos relevantes pode depender da ordem em que são utilizados os seguintes dois tipos de atividades no processo de ensino e aprendizagem:

- Atividades propulsoras de modelos (Model-eliciting Activities (MEAs))
- Atividades de descoberta guiada (Guided Discovery Activities (GDAs))

As atividades propulsoras de modelos são situações de resolução de um problema ‘da vida real’ em que os alunos passam por sequências iterativas em que expressam, testam e reveem as suas próprias maneiras de desenvolver ferramentas conceptuais, compartilháveis e reutilizáveis, para tratar regularidades ou tecer considerações sobre as mesmas. Ao passo que as atividades de descoberta guiada são sequências orientadas de tarefas onde a técnica de lançar questões orientadoras permite aos alunos experimentarem uma aprendizagem baseada em trajetórias hipotéticas em que são guiados a interpretar os conceitos e procedimentos conforme surge geralmente nos manuais ou livros didáticos (Lesh & Caylor, 2007)

As atividades propulsoras de modelos e as atividades de descoberta guiada podem ser usadas e combinadas de duas formas, originando assim as abordagens didáticas conforme se segue: quando a GDA precede a MEA, o ensino centra-se na compreensão matemática porque as MEAs são tratadas como aplicações de conceitos que foram ensinados anteriormente; quando a MEA precede a GDA, o ensino concentra-se na matematização da realidade porque as MEAs são usadas para permitir que os alunos criem os seus próprios conceitos matemáticos que posteriormente são analisados, ajustados e formalizados de diversas maneiras (Figura 3).

GDA → MEA	MEA → GDA
Praticar matemática – Quando a GDA precede as MEAs, a MEA é tratada como se fosse uma aplicação dos conceitos e competências que se aprenderam na GDA.	Fazer matemática na prática - Quando a MEA precede a GDA, a GDA reforça e robustece conceitos e capacidades que os alunos desenvolveram por si durante as MEAs.

Figura 3. Duas abordagens didáticas que podem ser criadas usando as mesmas tarefas

No âmbito das perspetivas M&M aceita-se que os modelos dos alunos podem ser tão simples que incorporem apenas uma única condição matemática e tão complexos quanto uma simulação produzida com um *software* como o Excel. Mas, em qualquer caso, os modelos dos alunos tendem a ser similares ao tipo de modelos que os cientistas e matemáticos profissionais usam porque, segundo Lesh& Caylor (2007), em termos gerais tais modelos integram ideias e procedimentos de uma variedade de áreas e tópicos, a variedade de meios de representação que o aluno utiliza para expressar os modelos pode abarcar a linguagem falada, a linguagem escrita, símbolos, diagramas, objetos manipuláveis ou metáforas baseadas na experiência. Os modelos envolvem processos relevantes de quantificação, dimensionamento, coordenação, ou outras formas pertinentes de matematização de experiências (que incluem objetos, propriedades, relações, padrões).

De uma forma sucinta, Lesh & Caylor (2007) caracterizam os modelos dos jovens alunos, referindo que:

> “(a) tendem a ser organizados mais em torno de experiências do que em torno de abstrações; (b) tendem a ser relativamente instáveis no sentido em que, quando a atenção se concentra num aspeto da situação ou modelo, outros aspetos podem ser ignorados; (c) tendem a funcionar mais como janelas através das quais os alunos olham, em vez de serem objetos de pensamento em si” (p. 178).

Assim, à luz das perspetivas M&M, os modelos são sistemas descritivos ou explicativos. Além disso, mesmo nos casos em que os modelos funcionam implicitamente, estes são muitas vezes importantes peças do conhecimento, úteis para criar ou interpretar os tipos de sistemas mais importantes numa era em que predomina a tecnologia da informação.

2.3.6 Caraterísticas das atividades propulsoras de modelos (MEAs)

Tal com foi discutido na secção 2.3.3 do presente capítulo, os tradicionais problemas matemáticos escolares que aparecem cuidadosamente construídos para garantir que os alunos consigam resolvê-los e obter resposta, a partir de informação e de relações matemáticas muito específicas, não são os privilegiados na perspectiva M&M.

Como Kelly & Lesh (2000) e Lesh & Caylor (2007) referem, a perspectiva M&M privilegia a tipologia emblemática de situações-problema, genericamente designadas por "atividades propulsoras de modelos" (*MEAs*). Os mesmos autores sublinham ainda que estas atividades têm servido para proporcionar a aprendizagem dos alunos e permitem investigar o desenvolvimento da compreensão dos alunos na abordagem de conceitos matemáticos.

Lesh e Caylor (2007) destacam també, a relevância das M&M para o trabalho do professor. Estes autores afirmam que as MEAs provaram ser poderosas ferramentas de avaliação, uma vez que enfatizam os mais poderosos conceitos de matemática elementar, centrando-se na ampla e profunda compreensão desses conceitos. E, por outro lado, mostram ser poderosas atividades para o desenvolvimento profissional do professor já que uma das maneiras mais confiáveis de ajudar os professores a melhorar as suas práticas é ajudá-los a ver como os seus alunos pensam sobre conceitos importantes — e permitir-lhes ajudar os alunos a mudar as suas formas de pensar. Isto demonstra claramente a plausibilidade da perspetiva M&M no ensino superior onde os alunos já chegam com algum reportório matemático mas, em muitos casos, com pouca qualidade.

Lesh e Caylor (2007) sublinham que as MEAs são atividades projetadas de modo a desafiar os solucionadores a desenvolver modelos, propondo simulações de situações da 'vida real' que requerem recursos e ferramentas realistas e, por vezes, um grupo de participantes para a obtenção de uma resposta adequada. Tal resposta é normalmente uma ferramenta conceptual, compartilhável e reutilizável.

Durante a realização das MEAs, a matemática é muito mais encarada como uma interpretação e não tanto como uma execução de procedimentos, pelo que exige ao aluno fazer adaptações significativas das suas próprias interpretações da situação problemática. Portanto, exige um pensamento dinâmico por parte do aluno, uma vez que os processos de solução de MEAs geralmente envolvem uma série de ciclos de desenvolvimento iterativo em que os modos de pensar são repetidamente expressos, testados e revistos.

No âmbito das MEAs, os processos de resolução de um problema tendem a gerar registos documentados onde são expressos aspetos pertinentes do pensamento dos solucionadores, que podem ser examinados pelos participantes na atividade, bem como por investigadores que observam.

Tal como apontam Lesh e English (2005), em muitos casos, as perspetivas M&M incluem nas suas linhas de investigação aspetos como o desempenho do aluno no trabalho em grupo ou individual e o desempenho do aluno quando usa ou não tecnologias. Um outro aspeto que as perspetivas M&M incluem nas suas linhas de investigação são as situações de resolução de problemas e de tomada de decisão, que razoavelmente podem ocorrer na vida quotidiana dos alunos (ou seus amigos ou famílias), porque as tarefas que são privilegiadas nesta perspetiva são projetadas para envolver uma gama de compreensões e capacidades mais vasta do que aquelas que são enfatizadas nos manuais escolares (Lesh & Doerr 2003).

Acredita-se que a reduzida utilização das MEAs nas escolas é o motivo que leva alguns recrutadores e empregadores a reconhecerem que os alunos que têm excelentes históricos escolares nem sempre são os mais adequados para contratar; esses empregadores reconhecem também que muitos alunos não têm um histórico escolar prodigioso porque não conseguem executar o tipo de problemas que são enfatizadas em testes padronizados mas que esses alunos podem ser bem sucedidos em tarefas que são de algum modo excelentes MEAs.

Lesh e Caylor (2007) notam que alguns educadores interpretam mal a essência das MEAs. Os autores referem que as atividades propulsoras de modelos (MEAs) são frequentemente interpretadas ou confundidas como simples aplicações, supondo que os alunos devem primeiro aprender conceitos e processos relevantes, para depois os reunirem e aplicá-los numa dada situação. Mas, na verdade, são atividades em que os alunos criam matemática — em vez de simplesmente aplicarem conceitos e processos previamente aprendidos. Da mesma forma, em vez de aprenderem ideias separadamente e, em seguida, juntá-las ou aplicá-las, nos processos de resolução, o que tem lugar é a organização das ideias que muitas vezes aparecem mescladas no pensamento dos alunos.

Lesh & Caylor (2007) constatam, para além disso, que alguns educadores matemáticos consideraram as MEAs como difíceis e acharam que estas deveriam ser reservadas para alunos de elevada capacidade, contudo as perspetivas M&M advogam que as MEAs são projetadas para alunos com médio ou baixo rendimento e mesmo para alunos cujas habilidades foram classificadas de fracas mediante o seu histórico do desempenho escolar. Os mesmos autores acrescentam ainda que um outro erro aparente cometido por educadores matemáticos a respeito das MEAs é a perceção de que são completamente abertas, o que leva a admitir que praticamente qualquer resposta é apropriada. Mas, na verdade, as MEAs são projetadas de tal modo que tanto os professores como os alunos possam fazer julgamentos sobre os pontos fortes e fracos de várias respostas alternativas.

Lesh & Lehrer (2003) e Lesh & Caylor (2007) defendem que é errado pensar que as MEAs são mal estruturadas ou que a estruturação da tarefa é feita principalmente pelos alunos, pois à luz da perspetiva M&M, um bom *design* de problema implica impor uma variedade de restrições que, no entanto, não devem determinar a natureza exata do produto a obter.

Para um bom *design* de problemas adequados e de MEAs interessantes, segundo a perspetiva M&M, é necessário considerar certos princípios. Kelly & Lesh (2000) referem que a versão inicial destes princípios foi desenvolvida durante uma série de três anos de estudos, nos quais mais de trezentos professores desenvolveram gradualmente diretrizes para a criação de situações-problemas que refletem as suas próprias compreensões sobre a natureza de resolução de problemas e os níveis e tipos de 'pensamento matemático' que são necessários para o sucesso fora do âmbito escolar. Lesh, Hamilton & Kaput (2007) referem que estes princípios foram utilizados produtivamente pelos professores do ensino pré-universitário bem como por professores e alunos universitários e profissionais em diversas áreas, desde engenharia ao desenvolvimento profissional do professor.

Os princípios a ter em conta na elaboração das MEAs são destacados em diversos estudos como se pode ver em Lesh et al. (2000), Kelly & Lesh (2000) e Lesh & Caylor (2007). São seis os princípios que regem o desenvolvimento das MEAs, nomeadamente: (1) princípio do significado; (2) princípio da construção do modelo; (3) princípio da autoavaliação; (4) princípio da documentação do modelo; (5) princípio de generabilidade do modelo e (6) princípio do mais simples protótipo. Aqui apresentarei uma descrição basicamente extraída de Lesh & Caylor (2007, pp. 181-184).

O princípio do significado pessoal

O princípio do significado pessoal, também chamado de princípio da 'realidade', centra-se sobre o realismo apresentado na questão. Ao conceber ou ler uma questão, deve colocar-se a seguinte pergunta: isso realmente poderia acontecer na vida de um individuo 'real' fora do âmbito da escola? A preocupação é colocar perguntas que sejam significativas para, pelo menos, alguns alunos da turma, embora se reconheça que o problema pode não ser significativo para todos os alunos. E também pode não ser uma situação problemática para todos os alunos. Pressupõe-se que se coloque uma situação de tal modo que os alunos interpretem a situação com base nas extensões das suas próprias experiências e conhecimento da 'vida real' (fora do âmbito escolar ou pelo menos fora do âmbito da disciplina). Interessa evitar que alunos utilizem somente o que textualmente aprendem na escola mas antes que façam também uso das suas experiencias vividas fora do âmbito escolar.

O princípio da construção do modelo

O princípio da construção do modelo pressupõe que a atividade deve proporcionar a criação consciente de um modelo. Centra-se sobre a questão: a realização da tarefa coloca os alunos numa situação onde claramente reconhecem a necessidade de construir, modificar ou estender um modelo, ou refinar um tipo específico de modelo e sistema conceptual?

As MEAs destinam-se a focar um conjunto de grandes tópicos e uma das suposições subjacentes é a de que a maioria dos ‘grandes tópicos’ em matemática envolve o desenvolvimento de um sistema conceptual que é usado para gerar interpretações (descrições, explicações) de situações relevantes.

De forma geral, a situação em si não é uma MEA. Então, o princípio de construção de modelo exige que reflitamos: o que cria a necessidade de um tipo específico de modelo e seus conceitos subjacentes ou sistema conceptual? Esta reflexão conduz-nos a considerar ‘especificações’ de um projeto na expectativa de os alunos desenvolverem algumas ferramentas conceptuais que devem servir para algum propósito específico em alguma situação específica.

Lesh e Caylor (2007) afirmam que a melhor forma de ir ao encontro do sistema conceptual alvo é estabelecer diretrizes que funcionam como o negativo fotográfico do sistema conceptual cujo desenvolvimento queremos investigar. As especificações ou diretrizes devem permitir aos alunos estabelecerem relações, implementar ações e analisar padrões, de tal modo que as ditas especificações devem gerar um contexto em que os alunos identificam os pontos fortes e fracos das suas formas alternativas de pensar e eliminam modelos inadequados ou menos úteis. No entanto, estas especificações também devem permitir vários níveis e/ou tipos de produtos alternativos (e maneiras de pensar subjacentes).

O princípio da autoavaliação

O princípio de autoavaliação (às vezes chamado de princípio da ‘utilidade’) centra-se sobre a questão: os alunos estarão cientes dos critérios para julgar por si mesmos quão adequadas são as suas respostas? E serão capazes de avaliar os pontos fortes e fracos das respostas alternativas? (Por exemplo, os alunos vão acreditar que as suas ideias serão tomadas a sério? Ou irão acreditar que deles se esperam respostas que devem obedecer a noção do professor (ou do autor) de qual é a maneira ‘correta’ de pensar sobre a situação do problema?).

Fora do âmbito escolar, o pensamento matemático privilegiado é aquele cujo produto matemático geralmente irá servir para algum propósito fora da matemática — tal como permitir atingir um objetivo ou tomar alguma decisão. Portanto, o produto ‘matemático’ é uma ferramenta; e a sua utilidade depende de quão bem essa serve a finalidade prevista. Por conseguinte, se não está claro quem precisa da ferramenta (e quando, porquê e para que propósito), então deixa de haver maneira ou critério de julgar a eficácia de uma ferramenta, ou seja, tende não haverá critérios para julgar os pontos fortes e fracos das ferramentas alternativas (e/ou das subjacentes maneiras de pensar).

O princípio da generabilidade

O princípio da generabilidade do modelo (às vezes chamado princípio de compartilha e reutilização) centra-se sobre a questão: os alunos estarão dispostos a reconhecer a necessidade do produto ser partilhável e reutilizável? De pouco ou nada vale desenvolver ferramentas matemáticas, assim como outros artefactos complexos, se estes só irão ser usados uma única vez, numa única situação e com um único objetivo.

Para que os alunos reconheçam a necessidade de um determinado tipo de ferramenta (e sistema conceptual subjacente), geralmente é importante que eles saibam que a ferramenta não pode ser útil apenas para uma situação específica e para um único propósito, mas que também deve ser compartilhável (com outras pessoas) e reutilizável (para outros fins). Por conseguinte, compartilha e reutilização são importantes critérios para avaliar a qualidade dos resultados produzidos; outras características como adaptabilidade tendem a ser igualmente importantes. Se uma ferramenta conceptual é adaptável, compartilhável e reutilizável, então isso significa que os alunos estão a desenvolver conhecimento transferível ou generalizável.

O princípio da documentação do modelo

O princípio da documentação do modelo refere-se à questão: será que a resposta exige que os alunos revelem explicitamente como ocorre o pensamento deles sobre a situação (dados, metas, estratégias de resolução possíveis)? Desde logo, este princípio garante que os solucionadores irão exteriorizar as suas maneiras de pensar de tal modo que isso facilite a autoavaliação e que a partilha e reutilização sejam mais prováveis de ocorrer. Este princípio assume uma grande importância se tivermos em conta que as MEAs se destinam a ser utilizadas para aprendizagem e para investigação. O princípio da documentação do modelo é essencial para que as atividades gerem automaticamente elementos de documentação que permitam constatar e perceber aspetos da evolução dos modelos dos alunos.

O princípio do mais simples protótipo

O princípio do mais simples protótipo foca-se nas questões: a situação é tão simples quanto possível e induz a necessidade de criação de um modelo significativo? O produto que é construído fornecerá um protótipo útil (ou uma metáfora) para interpretar uma variedade de situações estruturalmente semelhantes?

Lesh e Caylor (2007) referem que investigadores da teoria M&M encontraram muitos casos em que os alunos relataram de forma impressionantemente detalhada as suas experiências passadas com MEAs, às vezes vários semestres após a conclusão das atividades. E foram registados inúmeros casos onde os alunos, ao frequentaram outras disciplinas, disseram algo do género 'isto é como o grande problema (…)', referindo-se a problemas resolvidos no âmbito da atividade matemática em MEAs.

2.4 A Teoria de Registos de Representação Semiótica (TRSS)

A resenha que a seguir se apresenta acerca da Teoria de Registos de Representação Semiótica (TRSS) foi elaborada tendo como principais referências as obras de Duval (2009, 2011, 2012, 2013), as quais foram traduzidas por investigadores e professores brasileiros.

2.4.1 As origens da teoria dos registos de representação semiótica

A teoria dos registos de representação semiótica (TRRS) foi criada pelo teórico francês Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação. Desde a década de 1970, este autor realizou diversos estudos em psicologia cognitiva e trouxe para a área da Educação Matemática contributos marcantes. A origem da TRRS tem uma longa história, conforme relata o próprio autor (Duval, 2013), e foi o culminar de um percurso de desvios e de impasses semelhante a um labirinto. Duval chegou ao IREM de Strasbourg em 1970, um dos três primeiros IREM criados em França para acompanhar a reforma da Matemática Moderna, pouco depois de ter terminado a sua tese, cujo referencial teórico foi a epistemologia genética de Piaget e envolveu o estudo do desenvolvimento de noções físicas e matemáticas em crianças e adolescentes. A referida reforma era de inspiração Bourbakista e tinha como suporte psicológico e cognitivo a teoria cognitivista de Piaget (Duval, 2013).

Os anos de trabalho no IREM proporcionaram-lhe uma visão mais completa dos diferentes aspetos da atividade matemática que as mudanças sucessivas dos programas escolares tinham favorecido, excluído ou ignorado: os raciocínios de tipo dedutivo e de tipo argumentativo em linguagem natural, a compreensão dos enunciados, o uso de letras e de variáveis para resolver equações, a construção de figuras geométricas e sua utilização heurística, a leitura e interpretação de gráficos cartesianos, os diagramas utilizados para representar conjuntos e relações, tabelas de números, etc.

Alguns anos mais tarde, após uma reforma que reagrupou todos os alunos de 11 a 15 anos em um único tipo de estudos, a heterogeneidade dos alunos relativamente à compreensão de enunciados de problemas surgiu como o principal problema do ensino. Duval (2013) enfatiza que reorientou os seus estudos para este problema uma vez que os professores de matemática começavam, então, a atribuir as dificuldades dos alunos em matemática a uma falta de 'domínio da linguagem'. Paralelamente, uma outra abordagem da psicologia cognitiva desenvolvia-se nos Estados Unidos. Esta estava centrada sobre a representação de conhecimentos e sobre a elaboração de programas de computador com capacidade de responder a perguntas, resumir uma explicação, resolver problemas, etc. Perante a situação, Duval levantou algumas inquietações sobre: que tipo de esquema e, de modo mais geral, que tipo de representação é mais pertinente para dar conta não apenas de um texto, mas de um raciocínio dedutivo, de uma argumentação, de uma escrita simbólica, etc.?

Em 1986, com toda a experiência adquirida durante este período de grandes mudanças no ensino da matemática e na formação de professores, e constatando que desde os primeiros anos era solicitado aos alunos um malabarismo com diferentes representações, tomou consciência do caráter fundamentalmente semiótico da atividade matemática independentemente das formas de atividade escolhidas para as “engenharias didáticas”.

O modo de trabalho matemático que o sistema escolar impunha aos alunos levou Duval a eleger duas preocupações primordiais. A primeira consistia em saber se os alunos reconhecem o que é matematicamente preservado quando se passa de um tipo de representação para outra e a segunda consistia em saber se os alunos reconhecem, no conteúdo de uma representação, o que é matematicamente pertinente e o que não é. Duval (2013) salienta que estas duas preocupações se tornaram relevantes para todas as utilizações da língua natural nos enunciados de problemas, para a utilização de figuras em geometria, para os gráficos cartesianos, para os diagramas e tabelas utilizadas para organizar dados, etc.

Para responder à primeira destas duas preocupações, Duval desencadeou um estudo que se iniciou com um questionário sobre o reconhecimento de funções lineares e afins quando passamos de sua representação gráfica para a escrita da equação correspondente. Duval (2013) refere que as questões diziam respeito à conversão, “e elas foram construídas de acordo com o seguinte princípio: apresentar todas as variações visualmente significativas da posição de uma reta sobre um plano cartesiano e pedir para escolher a equação correspondente dentre várias possibilidades, mas cujos conteúdos variavam apenas pela mudança de um único símbolo (sinal, número oposto ou inverso, presença ou não de uma constante, etc.)” (p. 14).

Os resultados dos referidos questionários e o feedback recebido dos professores que recorreram espontaneamente a este método provaram a pertinência e a fecundidade desta abordagem, pois evidenciaram que realmente permitia explorar todos os fenômenos cognitivos de compreensão e de aprendizagem relacionados à atividade matemática. Em concreto, Duval (2013) conta ainda que os dados evidenciaram a existência dos fenômenos de não-congruência na passagem de um tipo de representação para outro, isto é, era frequente a ocorrência de sucesso de reconhecimento num sentido mas fracasso no outro, e também era evidente a diferença radical de procedimentos matemáticos de acordo com o tipo de representação utilizada. Estas evidências sugeriram que “do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática deveria ser analisada em termos de transformações de representações semióticas e não de conceitos puramente mentais, e, portanto, assemióticos” (p. 14).

Duval (2013) refere que nesta ocasião havia necessidade de sair da contradição implícita à teoria piagetiana e ao construtivismo neopiagetiano. De um lado, era valorizada a linguagem (natural) na atividade matemática e, do outro lado, defendia-se a primazia do uso de símbolos e de representações geométricas e gráficas na atividade matemática.

Os resultados e feedback dos inquéritos acima referidos, a existência dos fenômenos de não-congruência na passagem de um registo para outro, bem como decidir sobre o que privilegiar na atividade matemática entre a linguagem natural versus símbolos e representações, levou Duval a considerar uma questão ampla abrangendo as representações semióticas que não se limitava ao acesso aos objetos matemáticos, mas que se ocupava também dos processos cognitivos e epistemológicos dos tratamentos matemáticos.

O investigador francês inferiu que "as dificuldades de compreensão na aprendizagem da matemática não estavam relacionadas aos conceitos, mas à variedade de representações semióticas utilizadas e o uso 'confuso' que fazem delas" (Duval 2013, p. 15). Tendo em conta esta inferência, Duval passou a preocupar-se em propor uma teoria que permitiria modelar os dois tipos de transformações de representações semióticas que são cognitivamente e epistemologicamente específicas da atividade matemática. Para esta finalidade, o investigador francês contou com as propostas teóricas de Frege e de Saussure.

Frege sugeria uma teoria segundo a qual:

> era preciso partir da dupla {sinal, objeto}, pois a distinção entre sentido e referência (*Sinn* e *Bedeutung*) permitia explicar como uma representação semiótica poderia ser convertida em outra representação semiótica, embora seus respectivos conteúdos não tenham nada em comum… (Duval, 2013, p. 15).

A perspetiva teórica de Frege não satisfez cabalmente a preocupação de Duval pois não permitia explicar a causa da pluralidade dos procedimentos de cálculo e, de modo mais geral, o porquê da diversidade dos tratamentos matemáticos, dependendo do tipo de representação utilizada.

A proposta teórica de Saussure propunha que "era preciso considerar a língua natural como um sistema, no interior do qual os jogos de oposições entre os elementos constituíam signos tendo um sentido, independentemente de qualquer referência a um objeto" Duval (2013, p. 15). E isto suscitou a consideração de outros sistemas como sendo semióticos, munidos das suas possibilidades específicas de transformações internas. Nesta época foram reconhecidos essencialmente os numéricos, os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.

Posteriormente, Duval passou a preocupar-se com o perigo de confusão que podia ocorrer entre os sistemas semióticos, utilizados em matemática para representar os objetos matemáticos e para trabalhar com e sobre esses mesmos objetos, e os sistemas semióticos utilizados fora da matemática. Para obviar este perigo de ambiguidade, Duval adotou o termo "registo". Assim, Duval (2013) apresenta dois motivos que o levaram a escolher o termo registo:

> Em primeiro lugar, esta é a palavra que Descartes utiliza nas primeiras páginas de sua Geometria. Em segundo lugar, esta palavra também se refere à extensão dos recursos disponíveis em domínios como a voz, os

> instrumentos musicais, os modos de se expressar: falamos, por exemplo, de “registos” para designar o comando de cada um dos jogos de um órgão (p.16).

Com a publicação da sua obra *Sémiosis et pensée humaine*, em 1995, Duval fez a primeira apresentação sistemática da teoria de registos de representação semiótica, cujo princípio fundamental é o seguinte: “a distinção entre os diferentes registos permite separar os dois tipos de transformações que constituem a atividade matemática: as conversões e os tratamentos” (Duval, 2013, p. 16).

2.4.2 Aspetos principais da teoria dos registos de representação semiótica

Duval (2009) refere que a ideia de relacionar conhecimento com a mobilização de representações por parte do sujeito não é um aspeto novo; pelo contrário, nas reflexões de Descartes e Kant podemos encontrar este aspeto e é uma noção a ter em conta na psicologia para o estudo da aquisição de conhecimentos ou para o seu tratamento. O autor refere ainda que historicamente a noção de representação é referenciada em três momentos, com determinações totalmente diferentes do fenômeno a ser designado

Primeiramente foi referida como representação mental, no período de 1924-1926 fundamentada nos estudos de Piaget sobre a representação do mundo da criança. A segunda foi referida como representação interna ou computacional, no período d 1955-1960, no âmbito das teorias sobre processamento de informação, e da terceira vez foi referida como representação semiótica, sendo desenvolvida “no quadro dos trabalhos sobre aquisição de conhecimentos matemáticos e sobre os problemas consideráveis que sua aprendizagem origina” (Duval, 2009, p. 32).

Duval (2009) refere que alguns trabalhos de psicologia cognitiva consideraram alguns elementos das representações semióticas, mas voltados para questões essenciais da representação semiótica na atividade cognitiva. De facto, a noção de representação semiótica pressupõe “a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro” (p. 32). O autor esclarece ainda que as representações semióticas têm determinadas particularidades já que, por um lado, são relativas a um sistema particular de signos, como é o caso da linguagem, a simbologia algébrica ou os gráficos cartesianos e, por outro “podem ser convertidas em representações ‘equivalentes’ em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferente para os sujeitos que as utiliza” (p. 32). Duval (2009) alerta ainda que ao considerar a representação semiótica como parte da função de comunicação, deve-se ter em conta as funções primordiais de tratamento de informação e de objetivação, razão pela qual as representações semióticas são consideradas como um suporte para as representações mentais.

Duval (2009) destaca o papel da íntima relação existente entre a *semiósis* que é a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e a *noésis* que é a apreensão conceptual de um objeto. Para o autor, a compreensão do papel da *semiósis* no funcionamento do pensamento e na forma como se desenvolve o conhecimento está relacionada com a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados. Por isso, reconhece o precioso contributo de Peirce (1931) por ser o primeiro a reconhecer o facto de que a *semiósis* não pode ser separada da diversidade de tipos de signos. Ele distinguiu três tipos de signos: os ícones, os símbolos e os índices, cuja classificação contribuiu para fundar a sua semiótica. Mas Peirce não considerou "as relações possíveis entre sistemas semióticos e a possibilidade de converter uma representação formada dentro de um sistema em uma representação de outro sistema" (Duval, 2009, p. 35).

Outros estudos e demais investigações contribuíram para o esclarecimento da noção de 'sistema semiótico'. Todavia, segundo Duval (2009) essas investigações não enfatizaram o papel da diversidade dos sistemas semióticos no funcionamento do pensamento, nem a complexidade da conversão das representações de um sistema para outro (p. 36). Essas foram questões consideradas por Duval para desenvolver a sua teoria, enfatizando os registos de representação semiótica.

Registos de representação semiótica

Duval referiu-se a semiose como a criação e a transformação de signos, no entanto a TRRS pretendeu ser mais específica sobre as três atividades cognitivas que jogam um papel principal na atividade de representação. As atividades cognitivas fundamentais da semiose são:

a) *Formação* de representações num registo semiótico específico para exprimir representações mentais ou para recordar um objeto 'real';

b) *Tratamento* de um registo de representação de modo a transformá-lo num outro registo de representação do mesmo sistema semiótico em que foi formado;

c) *Conversão* de um registo de representação de modo a transformá-lo num registo de representação pertencente a um sistema semiótico diferente.

Duval (2009, 2011) diz ainda que um sistema de representação é designado como um registo de representação semiótica, quando:

1- Contém um conjunto de traços percetíveis que permitem identificá-lo com uma representação de algo num determinado sistema.

2- As representações podem ser transformadas dentro do sistema semiótico de tal maneira que a representação obtida constitui um ganho de conhecimento em comparação com a representação inicial.

3- As representações podem ser convertidas, de um sistema para outro, de tal modo que a representação resultante permite que se explicitem outros significados relacionados com o que é representado.

Duval (2009) refere que as atividades cognitivas acima referidas devem ser levadas a cabo de acordo com as regras inerentes aos sistemas semióticos implicados.

Na perspetiva da TRRS, advoga-se que a formação de uma representação identificável, enquanto operação cognitiva, pode ser estabelecida através de um enunciado compreensível numa determinada língua natural e deve respeitar regras internas do sistema semiótico de representação usado para garantir as condições de identificação e possibilidade de tratamento. Por exemplo, o sistema posicional e a base dez são duas regras básicas de conformidade a considerar na escrita da numeração decimal.

Duval (2009, p. 57) afirma que o "tratamento é uma transformação de uma representação interna a um registo de representação ou a um sistema"; porém é preciso obedecer às regras de tratamento próprias de cada registo, sendo que a sua natureza varia consideravelmente de um registo para outro. Partindo do princípio de que "o tratamento de uma representação semiótica corresponde à sua expansão informativa", Duval (2009, p. 57) afirma que: "as regras para expandir uma representação são definidas como regras que, uma vez aplicadas, resultam numa representação do mesmo registo que o de partida".

Duval (2006) enfatiza que a função dos signos e representações em matemática não se restringe a comunicar e a representar objetos mas abarca uma terceira função e que é ainda mais importante. Essa função prende-se com o tratamento da informação, ou seja, a transformação intrínseca das representações em outras representações para produzir novas informações ou novos conhecimentos. Existem procedimentos bem definidos para a realização de uma conversão de um registo de representação e devem-se estabelecer relações entre elementos das unidades significantes em cada registo. A operação cognitiva de conversão é responsável pela manifestação dos fenómenos de congruência e de não-congruência entre representações pertencentes a dois sistemas semióticos.

Classificação de representações

De uma forma breve, para Duval, podem ser considerados três tipos de representações: representações mentais, computacionais e semióticas. No entanto, com base nos seus estudos, interessa-nos sobretudo a análise das representações semióticas. Antes, porém, importa referir duas distinções consideradas imprescindíveis quando é feita uma caracterização das representações; estas são: consciente/não-consciente e externa/interna. As representações externas são as representações produzidas por um sujeito através da aplicação de um sistema semiótico; a produção de uma representação externa torna-se acessível a todos os indivíduos que conhecem o sistema semiótico utilizado, ao passo que as representações internas são as representações intrínsecas de um sujeito e não são comunicadas.

A oposição consciente/não-consciente é evidenciada quando um individuo se propõe percecionar representações. A esse respeito Duval (2009) refere que aquilo que um sujeito perceciona é consciente e aquilo que ele não perceciona nem pode percecionar é não consciente. Quando uma representação não consciente passa a ser consciente para um indivíduo diz-se que ocorreu uma tomada de consciência por parte do indivíduo e isso é fruto de alguma descoberta feita pelo próprio sujeito de algo que não percebia, mesmo que alguém lhe tivesse explicado. O autor acrescenta ainda que as representações conscientes têm um caráter intencional e que contemplam uma função de objetivação.

A Tabela 3 resume as caraterísticas das representações, de acordo, com as oposições anteriores:

Tabela 3: Tipos e funções das representações segundo Duval (2009, p. 43)

	Interna	Externa
Consciente (intencional)	**Mental** Função de Objetivação	**Semiótica** Funções de objetivação, expressão e tratamento intencional
Não-consciente (não intencional)	**Computacional** Função de tratamento automático ou quase-instantâneo	

Os sistemas que cumulativamente viabilizam as funções de comunicação, tratamento de informação e objetivação podem ser chamados de sistemas de representações semióticas. Em geral, as representações utilizadas nestes sistemas são conscientes e externas; ao mesmo tempo, os signos utilizados não apenas produzem estímulos mas também têm valor significante e a sua produção segue regras sintáticas de formação e de tratamento das unidades de significado.

Duval (2009) refere que a propriedade fundamental das representações semióticas é que elas podem ser transformadas em diferentes representações; e estas transformações podem ser completas, quando transformam todo o conteúdo da representação inicial, ou parciais, quando é transformada somente uma parte do conteúdo. Isto significa que existe um grau da liberdade em todo o tratamento de informações.

As representações mentais incluem conceitos, noções, ideias, crenças e idealizações e o seu desenvolvimento está ligado à aquisição e internalização dos sistemas semióticos de representação.

As representações computacionais têm uma natureza homogênea, não necessitam de evidenciar o objeto, permitem uma transformação algorítmica dos significantes e permitem expressar as informações externas (do sistema) de tal modo que ficam manejáveis, recuperáveis e combináveis dentro do sistema.

Transformação de representações: tratamentos e conversões

A conversão e o tratamento de representações são duas atividades semelhantes, apesar de muito diferentes na sua essência. Por isso, é importante notar as diferenças fundamentais e destrinçá-las.

Reiteramos que o tratamento se realiza dentro do mesmo registo, obedecendo obviamente às regras inerentes ao tipo de registo em que ocorre. É importante sublinhar que no tratamento das representações o sujeito mobiliza apenas um registo de representação. E tem-se sempre a transformação de uma representação inicial em uma representação final. Um tratamento é uma transformação interna de uma representação, já que ocorre dentro de um registo de representação.

Duval (2009) cataloga os tratamentos em duas categorias complementares: os tratamentos quase instantâneos e os tratamentos intencionais. Os tratamentos quase instantâneos são realizados de forma imediata; são fortes indicadores para se inferir ou pelo menos intuir que a informação representada é do domínio do sujeito e, como tal, estes tipos de tratamentos evidenciam a experiência/familiaridade que geralmente é resultante de uma longa prática ou desempenho adquirido num domínio (Duval 2009). Estes tipos de tratamentos podem ser feitos em simultâneo e podem integrar grande quantidade de elementos.

Os tratamentos intencionais são realizáveis apenas quando já se consegue fazer algum tratamento quase-instantâneo. Isso quer dizer que somente podem ser feitos um após o outro, ou seja, sequencialmente, e nem todos os indivíduos são capazes de compreendê-los imediatamente (Duval, 2009).

Como se pode constatar, existe uma forte relação entre os dois tipos de tratamentos; quando um aluno consegue realizar tratamentos quase-instantâneos envolvendo muitos objetos geralmente isto significa que avança para um nível mais elevado de conhecimento. A condição necessária e suficiente para que um aluno realize tratamentos intencionais é o domínio de tratamentos quase-instantâneos. Mas chega um momento em que o aluno não consegue progredir (instantaneamente), o que indica que ele necessita de fazer algum esforço para novas aquisições, portanto, essas novas aquisições passam necessariamente por uma fase de tratamentos intencional.

Tal como foi dito, o tratamento não é a única transformação de representação que ocorre ou que pode ocorrer. Pode ainda acontecer que uma representação de um objeto se transforme de um registo para outro; neste caso, considera-se que houve uma conversão, ou seja, tal como foi mencionado, a conversão é uma transformação que produz uma representação do objeto num registo diferente do registo da representação inicial. A conversão torna-se ainda interessante por ser uma transformação que necessariamente tem que coordenar os dois registos, um inicial e outro final, pelo que a conversão é uma transformação externa em relação ao registo inicial de representação (Duval, 2009). É importante realçar que uma conversão implica alteração do conteúdo, isto é, durante a conversão, é feita uma reorganização dos elementos de uma representação pelo que o conteúdo passa por uma seleção; desta forma o conteúdo da representação inicial não é necessariamente o mesmo conteúdo na representação final. Na análise de uma conversão também deve se ponderar a irreversibilidade ou difícil reversibilidade do conteúdo pois durante a conversão o conteúdo da representação muda sem garantia do processo inverso, ou seja, sem possibilidade de "recuperar" a representação original a partir da transformada, ou pelo menos o custo cognitivo de fazê-lo não é sempre o mesmo na conversão.

Na análise da atividade matemática é importante observar como é que os alunos são capazes de fazer e como fazem a distinção dos três polos constitutivos de cada representação, isto é: o objeto representado, o conteúdo da representação e a forma como é representado.

A conversão está frequentemente presente nas atividades matemáticas quando se faz a leitura de um problema ou trecho de um manual de matemática com o objetivo de perceber os conceitos neles dissecados. Necessariamente têm de se coordenar os diferentes registos em que os objetos matemáticos estiverem representados, portanto inevitavelmente enfrentam-se inúmeras e contínuas mudanças de registo: da linguagem natural para símbolos matemáticos, passando por figuras, gráficos, sistemas numéricos, etc., da mesma forma como um sujeito que pretende solucionar um problema terá de passar necessariamente o enunciado da linguagem natural para linguagem matemática o que implica que terá que recorrer a símbolos algébricos, símbolos relacionais e operacionais, figuras, gráficos, ou números.

No âmbito da TRRS, Duval (2009, 2011) explica que a mobilização simultânea de pelo menos dois registos de representação é uma propriedade característica da atividade matemática e que durante a atividade matemática um dos desafios é refletir sobre e demostrar a possibilidade de mudar de um registro para outro, a qualquer momento. É um atributo a constatar durante a apreciação do trabalho dos alunos pois a variedade de mudanças de registos que o aluno realiza ou é capaz de realizar, em simultâneo, demonstra algumas qualidades das funções cognitivas mobilizadas para tal sucesso.

A mudança de registo nem sempre é tão fácil como se pode pensar, no entanto, este pingue-pongue que um aluno faz entre diferentes registos enquanto realiza atividades matemáticas atribui algum cunho artístico à matemática em si e, ao mesmo tempo, requer um desempenho cognitivo do indivíduo a fim de coordenar todos os registos numa determinada atividade, o que pode em muitas ocasiões significar um grande desafio.

Para um perito matemático, as conversões são naturais e fruto de uma experiencia matemática acumulada, pelo que o matemático faz mudanças de registos com grande agilidade. Fazer tais mudanças pode, contudo, criar grandes dificuldades na aprendizagem e nos processos de compreensão de um aluno que estiver, por exemplo, a seguir a resolução de um problema. Já para um perito ou para os professores, uma conversão, na maioria das vezes, é algo descrito como 'uma operação simples', o que leva a que as atividades de conversão sejam tendencialmente esquecidas no processo de ensino-aprendizagem.

Em todo o processo de ensino-aprendizagem e em todos os níveis de conceção do currículo deverá ter-se em conta a necessidade e a presença da conversão na atividade matemática e não a considerar erroneamente como uma operação natural. É importante sublinhar, que de acordo com Duval (2009, 2011), a pouca ou lenta apropriação dos objetos matemáticos por parte dos alunos é, por um lado, devida à diversidade dos sistemas de representação e, por outro lado, a fenómenos de não congruência que resultam da conversão de representações.

Tal como foi referido anteriormente, a conversão implica a alteração do conteúdo da representação inicial e isto, por sua vez, implica a reorganização da informação. Então, depois de se mudar o registo, o objeto pode incluir informações diferentes que podem ou não complementar as informações da representação inicial. Assim, dá-se um fenômeno que está intimamente relacionado com as operações de conversão: a congruência e a não-congruência entre duas representações de dois registos diferentes.

Ao lidarmos com representações em diferentes registos, por vezes sentimos dificuldade em 'passar' de uma representação para outra mas noutras alturas essa passagem torna-se tão fácil que nem a notamos. Ora isto não nos deve deixar a impressão de que a conversão é uma operação simples e natural. Duval (2009) diz que para perceber como a conversão pode ser complicada e difícil, é necessário estabelecer uma correspondência entre duas representações (em diferentes registos) que associe as unidades de significação elementares que constituem cada registo. Duval (2009) alerta assim que o fenómeno da congruência e não-congruência entre representações pertencentes a dois sistemas semióticos tem por base as dificuldades na coordenação de registos de representação pertencentes a sistemas semióticos diferentes.

Segundo Duval (2009), para que haja congruência na mudança de um registo de representação para outro, têm de ser cumpridos três critérios:

- Correspondência semântica entre unidades significantes;
- Unicidade "semântica" terminal, que pressupõe a conversão de uma unidade significante do registo de representação de partida para uma só unidade significante do registro de chegada;
- Correspondência na mesma ordem de apreensão das unidades significantes, ou seja, a correspondência deve ocorrer de tal modo que, ao serem comparadas, as unidades semânticas em correspondência estejam segundo a mesma ordem nas duas representações.

2.4.3 Um olhar sobre a atividade matemática em função dos registos mobilizados

Depois do que foi especificado, a respeito dos registos de representações semióticas, importa fazer uma referência mais direta sobre como realmente examinar a atividade matemática de um aluno, tendo em atenção os registos de representação mobilizados. Para o efeito, irei apoiar-me nas ideias propostas por Duval (2011, pp. 116-119) e Duval (2012, pp. 22-27).

Do ponto de vista matemático, os tratamentos são as transformações de representações semióticas epistemologicamente importantes pois as justificações e provas apoiam-se largamente em tratamentos, apesar de nem sempre utilizarmos os mesmos registos com diferentes objetos matemáticos. Esta situação é um pouco controversa pois a análise do pensamento matemático mostra que é necessário que o aluno mobilize simultaneamente diversos registos e os coordene para poder avançar na sua atividade pois a atividade matemática real ultrapassa usualmente o registo em que se efetuamos os tratamentos. Assim, não se limita à utilização de um único registo; muitas vezes, mobilizamos um segundo registo para antecipar tratamentos ou para os controlar sendo que esta forma de pensar é intrínseca à atividade matemática, mesmo quando as produções tendem a privilegiar um único registo. Nesta conformidade, a atividade matemática requer uma ininterrupta sequência de conversões que por vezes ficam implícitas e que acabam por ser mais ou menos espontâneas.

Do ponto de vista didático, uma atividade matemática deve ser analisada, considerando todos os registos utilizados em matemática. Isto que dizer que para analisar a resolução de um problema, por exemplo, é erróneo privilegiar simplesmente o registo que viabiliza a tratamentos matemáticos que conduzem à solução do problema, pois é também importante ponderar outros registos mobilizados no decurso da análise do problema e a maneira como são representados.

A enumeração de todos registos utilizados em matemática poderia aparecer inútil e não seria possível explicitar como o funcionamento cognitivo se coaduna com cada registo. Deste modo, tendo em conta o interesse teórico e metodológico deste tema, apresentar-se-á uma classificação que abarca vários tipos de conversões e de tratamentos que fazem parte da atividade matemática.

Os registos podem ser discursivos ou não discursivos; a partir destas duas características fundamentais, que permitem distinguir os registos, Duval (2011) sugere uma classificação de registos que tende a ser evidente. Os registos discursivos dizem respeito a linguagem natural e formal, escrita e simbólica, da mesma forma que os registos não discursivos incluem figuras, gráficos cartesianos, ou esquemas. Cada um destes registos viabiliza um tipo de transformação das representações que os outros registos não permitem. Numa segunda abordagem, mas não antagónica, os registos são multifuncionais ou monofuncionais. Os registos multifuncionais são utilizados para as funções de comunicação fora da matemática e não são os mais indicados para a função de tratamento. Os registos monofuncionais são, pelo contrário, próprios da matemática.

Na análise da atividade matemática, é preciso diferenciar as conversões diretas e as inversas entre registos, até porque na atividade cognitiva de conversão de uma representação noutra, que embora esteja estreitamente ligada a uma interpretação ou a uma codificação, não existem regras de interpretação e de codificação que permitam decidir as conversões a efetuar.

Diremos que o aluno faz uma coordenação de vários registos quando faz a conversão nos dois sentidos ou, pelo menos, quando vislumbramos a possibilidade de tal ser feito. E, de uma forma geral, a atividade matemática de um aluno será considerada eficiente quanto mais eficientes forem as funções cognitivas que o aluno atribui a passar de um registo para outro. O controlo dos gestos intelectuais específicos da atividade matemática deve ser considerado como uma aquisição fundamental, pois, sem ele, é impossível aplicar conhecimentos matemáticos em situações totalmente diferentes daquelas que são encontradas em sala de aula. A aprendizagem do aluno tende a ser mais eficaz se ele conquistar, ao mesmo tempo, competências locais inerentes à aquisição de conceitos ou procedimentos matemáticos, e capacidades transversais que caracterizam a originalidade da atividade matemática. Até porque a consciência desses gestos intelectuais é prioritária em toda a atividade de resolução de problemas.

As atividades que permitem tomar consciência das conversões e tratamentos específicos, em cada registo de representação, não podem ser confundidas com as atividades que visam a introdução e a aquisição de um conceito particular. Elas são de natureza diferente. As variáveis didáticas não estão somente relacionadas com as propriedades dos objetos matemáticos representados, mas referem-se, antes de mais, às variações de conteúdo entre registos de representação.

Capítulo 3

Contexto e Metodologia de Investigação

Neste capítulo é descrito o contexto do estudo e são destacadas as principais características dos alunos que nele participaram. Finalmente, faz-se o enquadramento dos procedimentos de investigação, caracterizando as técnicas utilizadas em conformidade com a perspetiva da Engenharia Didática. É ainda apresentada a justificação das opções metodológicas do presente estudo, evidenciando-se as principais características e particularidades da Engenharia Didática enquanto metodologia de investigação de índole qualitativa.

3.1 O Contexto da Pesquisa

O presente estudo foi realizado em Angola, país situado em África, na zona subequatorial e tropical do hemisfério sul, no sudoeste do continente africano. Angola subdivide-se, do ponto de vista administrativo, em dezoito províncias, a saber: Cabinda, Zaíre, Uíge, Bengo, Luanda (capital do país), Kwanza-Norte, Kwanza-Sul, Malanje, Lunda Norte, Lunda Sul, Benguela, Huambo, Móxico, Cuando-Cubamgo, Huíla, Cunene e Namibe. A superfície do território é de 1.246.700 km^2 (Neto, 2012) e Angola tem atualmente uma população que se estima entre 28 e 29 milhões de habitantes, com base no último censo realizado em 2014 (a projeção do Instituto Nacional de Estatística de Angola é de 28.359.634[5]).

Segundo o que é relatado em estudos do Banco Mundial[6], Angola é um grande produtor de petróleo (correspondendo a mais de 90% das suas exportações), para além de muitos outros recursos naturais, como os diamantes. A economia tem vindo a revelar nos últimos anos um certo abrandamento que decorre, em grande parte, da elevada dependência da exportação de petróleo e da redução de entrada de moeda estrangeira no país. A inflação tem igualmente sofrido um crescimento acentuado, sendo hoje uma das mais elevadas dos países da África subequatorial. Angola tem vivido, por isso, uma diminuição na despesa do estado em políticas e empreendimentos sociais. Atualmente, o país enfrenta um conjunto de desafios importantes, entre os quais se inclui a diversificação da economia, a construção de infraestruturas e a melhoria das condições de vida da população e dos indicadores de desenvolvimento humano.

[5] Informação extraída aos 11/11/2017 no site oficial do INE de Angola: http://www.ine.gov.ao/xportal/xmain?xpid=ine

[6] Informação disponível em: http://www.worldbank.org/pt/country/angola/overview

3.1.1 O Sistema de Ensino em Angola

Angola herdou da colonização portuguesa um sistema de educação débil, caracterizado pelo acesso limitado à frequência do ensino secundário e pela falta de investimentos na qualidade de ensino; dados preocupantes mostravam que cerca de 33% da população adulta era analfabeta e 66% da população em idade escolar encontrava-se fora do sistema escolar, havia escassez e ausência de materiais didáticos básicos para o ensino e aprendizagem, e também havia inadequação dos conteúdos educativos estabelecidos nos currículos (Neto, 2012). Como medida adotada para inverter a situação, em 1977, Angola reformulou e restruturou o sistema de educação, cuja vigência se estendeu até 2001. Esse Sistema de Educação, implementado em 1978, e aprovado à luz do Decreto nº 40/80, de 14 de Maio, caracterizou-se por garantir uma maior oportunidade de acesso à educação, continuação de estudos, alargamento da gratuidade a todos os níveis de ensino e pelo aperfeiçoamento permanente do pessoal docente (Neto, 2012).

Zau (2009), ao descrever os trilhos de desenvolvimento de Angola, revela que várias dificuldades se manifestam no sector da educação, nomeadamente, a carência de recursos humanos e a baixa frequência escolar da população.

À luz de um estudo diagnóstico, realizado em 1986, sobre o sistema de educação e face ao fraco desempenho do sector da Educação, em termos qualitativos e quantitativos, provocado por vários fatores, em 2001, é aprovada a Lei de Base do Sistema de Educação. Assim, a Lei 13/01, de 31 de Dezembro, estabelece as bases legais para a Realização da 2ª Reforma Educativa em Angola, cujos objetivos gerais são: a expansão da Rede Escolar; a melhoria da Qualidade de Ensino; o reforço da eficácia do Sistema de Educação e a Equidade do Sistema de Educação, (MED-Angola, 2012).

Tal como se pode ver na figura 4, o sistema de educação abarca a educação pré-escolar, com a duração de cinco anos, o ensino primário organizados em seis classes, o ensino secundário que inicia com um primeiro ciclo de três classes e termina com um segundo ciclo que pode ser de três ou quatro anos, e o ensino superior, onde o aluno pode ingressar num curso de graduação e pode progredir posteriormente para cursos a nível de pós-graduação.

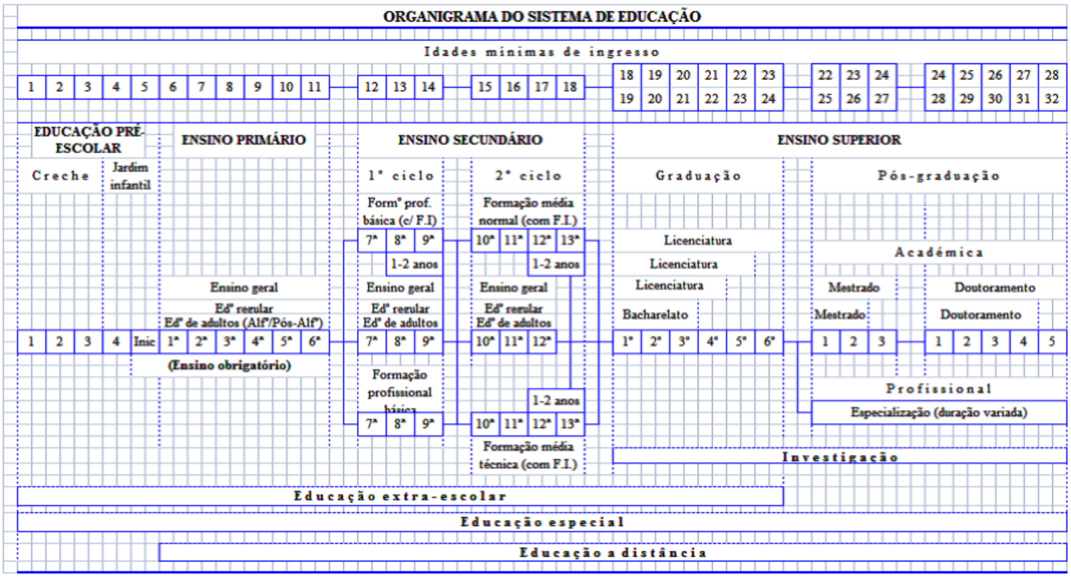


Figura 4: Organigrama do sistema de educação angolano

O ensino superior público foi implantado em Angola já no período colonial, concretamente no ano de 1962, com a criação dos Estudos Gerais Universitários de Angola. Neste mesmo ano, a Igreja Católica havia criado o Instituto Pio XII, destinado à formação de assistentes sociais; importa salientar que quatro anos antes, isto é, em 1958, a Igreja Católica criou com finalidades específicas os seus seminários, com estudos superiores em Luanda e no Huambo (antes Nova Lisboa). Importa salientar que no âmbito da criação dos Estudos Gerais Universitários de Angola foram criados cursos nas cidades de Luanda (medicina, ciências e engenharias), de Huambo (agronomia e veterinária) e de Lubango (antes Sá da Bandeira) que albergou os cursos de letras, geografia e pedagogia. Em 1968, os Estudos Gerais Universitários de Angola foram transformados na Universidade de Luanda.

Em 1976, foi criada a Universidade de Angola como única instituição de ensino superior de âmbito nacional, isto é, um ano depois da independência política. A partir do ano 1985, a Universidade de Angola passou a designar-se Universidade Agostinho Neto, que se manteve até 2009 como única instituição de ensino superior pública em Angola. Ao longo desse período foram criadas diversas unidades orgânicas.

Com o término da guerra civil, em 2002, verificou-se um crescimento vertiginoso da população universitária pois deu-se início a uma considerável expansão do ensino superior, pelas diferentes províncias de Angola, que contribuiu para o acesso de um número cada vez maior de jovens a diversos cursos.

Em 2009, a Universidade Agostinho Neto (UAN) sofreu um redimensionamento, dando lugar a outras sete universidades de âmbito regional, mantendo-se a UAN a funcionar em Luanda e na província do Bengo, enquanto as faculdades, institutos e escolas superiores localizados nas demais províncias passaram a ficar afetos às novas universidades estatais. Entre elas está a

Universidade Mandume ya Ndemufayo que herdou as unidades orgânicas localizadas nas províncias de Huíla e Namibe que hoje formam a VI região académica (Fig. 5).

Figura 5: Indicação da VI Região Académica no mapa de Angola

Sobre a qualidade do ensino superior em Angola, nada se pode afirmar perentoriamente, porque, tal como refere Carvalho (2012, p. 260), "não está feita qualquer avaliação a instituições de ensino superior em Angola". O mesmo autor refere que embora não haja elementos de avaliação das instituições de ensino superior, existem elementos que, isoladamente, refletem a qualidade de ensino e tudo sugere que a qualidade de ensino nas instituições de ensino superior em Angola é globalmente baixa. De entre os elementos que concorrem para a má qualidade do ensino superior em Angola, tendo em conta os intentos do presente estudo importa aludir aos seguintes: (1) Uma má qualidade de ensino desenvolvido em níveis anteriores, que conduzem ao acesso ao ensino superior por parte de estudantes que obtêm avaliações negativas no exame de admissão, conforme retrata Vera Cruz (2008); (2) Uma deficiente aposta na formação e atualização dos docentes, tal como Carvalho (2012) aponta.

3.1.2 O Contexto do Ensino Superior em Angola

A semelhança dos currículos vigentes em diversos países do mundo, em Angola, a Matemática aparece no ensino superior como disciplina complementar nos cursos de ciências sociais, artes, ciências biológicas e da saúde. Nos cursos de engenharia e ciências exatas, a Matemática está presente quer como disciplina geral quer como disciplina específica.

Tal como se afirmou anteriormente sobre o conhecimento da qualidade de ensino superior angolano, no cômputo geral, existem poucos estudos sobre a qualidade das práticas e estratégias de ensino da Matemática em Angola. Os poucos estudos neste sentido, tal como se sintetiza no inicio do capítulo quatro deste trabalho, revelam que ainda há muito a fazer para que haja um ensino qualitativamente equiparável ao praticado nos países de vanguarda.

A instituição em que decorreu o estudo

O presente estudo foi realizado na Escola Superior Politécnica do Namibe (ESPtN), unidade orgânica da Universidade Mandume ya Ndemufayo (UMN), criada pelo Decreto nº 7/09 de 12 de Maio (artigo 16º); esta é uma pessoa coletiva de direito público, dotada de personalidade jurídica, e de autonomia científica, pedagógica, administrativa, financeira, patrimonial e disciplinar tutelada pelo Governo Angolano através do Ministério do Ensino Superior, Ciência, Tecnologia e Inovação.

A UMN integra no seu seio instituições de ensino universitário e ensino politécnico, com organização unificada, destinada à formação de quadros superiores e de investigadores nos diversos ramos do saber científico. A UMN é a única universidade pública da 6ª região académica, abarcando as Províncias de Huíla e Namibe, com sede na cidade do Lubango, Província de Huíla (Fig. 5).

Na província do Namibe, a UMN conta com duas escolas superiores, nomeadamente a Escola Superior Pedagógica e a Escola Superior Politécnica do Namibe, anteriormente designada por Escola Superior de Ciências e Tecnologias do Namibe. Fazendo parte da Universidade Agostinho Neto (UAN), iniciou a sua atividade no ano letivo 2004/2005, tendo sido inaugurada no dia 11 de Novembro de 2004, por Sua Excelência Eng.º José Eduardo dos Santos, então Presidente da República de Angola. Com a entrada em vigor dos Decretos nº 5/09, de 7 de Abril (criação das Regiões Académicas) e nº 07/09, de 12 de Maio (redimensionamento da UAN), assumiu a identidade de Escola Superior Politécnica do Namibe (ESPtN), tendo ministrado cursos conducentes ao grau de bacharelato até 2011. No ano letivo de 2012 foram reestruturados os cursos existentes e expandidos para concederem o grau de licenciatura.

No seu catálogo geral lê-se, a respeito da sua missão, que a ESPtN é orientada para a prossecução dos objetivos do ensino superior politécnico no âmbito das tecnologias, das ciências económicas e empresariais, engenharias e áreas afins. A mesma fonte sublinha que a ESPtN busca o melhor na formação dos jovens de modo a proporcionar licenciados competentes e capazes de atender às demandas e às vertiginosas mudanças que ocorrem nos meios e processos produtivos, cada vez mais subordinados às novas tecnologias e aos saberes matemáticos.

A ESPtN conta com uma boa estrutura física: as salas de aulas podem albergar, em média, quarenta e cinco alunos e estão bem conservadas, conta com uma biblioteca com capacidade para oitenta alunos, vários laboratórios e oficinas com algum equipamento.

Por ser a única escola pública a oferecer cursos de licenciatura em engenharia na província do Namibe, recebe estudantes provenientes de diversos cursos e escolas do ensino pré-universitário, o que faz com que haja turmas bastante heterogéneas e isso ocorre, também, no curso de Engenharia do Ambiente, especificamente na turma em que a presente investigação foi realizada.

O curso de Licenciatura em Engenharia do Ambiente

O curso de Licenciatura em Engenharia do Ambiente, em funcionamento no seu currículo pleno, está organizado em 5 anos letivos, perfazendo 10 semestres. As unidades curriculares inerentes a estudos matemáticos são ministradas nos dois primeiros anos e têm suas cargas horárias conforme a tabela seguinte (Tabela 4).

Tabela 4: Disciplinas de Matemática do curso de Engenharia do Ambiente

Ano	Semestre	Unidade Curricular	Carga horária Semestral
1º Ano	1º Semestre	Análise Matemática	64 Aulas
	2º Semestre	Álgebra Linear	64 Aulas
2º Ano	1º Semestre	Probabilidades e Estatística	64 Aulas

O ano letivo está dividido em dois semestres, com a duração de 16 semanas cada; diariamente os alunos têm seis aulas com a duração de quarenta e cinco minutos, intercaladas com intervalos de 5 minutos, e o aluno pode optar pelo horário diurno ou noturno.

A unidade curricular de Análise Matemática

Os dados deste estudo foram recolhidos durante o trabalho desenvolvido na unidade curricular de Análise Matemática, durante o primeiro semestre letivo do ano académico de 2016. Nesta conformidade, sublinha-se que, quando foi realizada a coleta de dados, os alunos participantes contavam apenas com os conhecimentos adquiridos no ensino pré-universitário.

Por ser pertinente e para melhor esclarecer o currículo em vigor no contexto em que decorreu a coleta dos dados que foram obtidos e posteriormente selecionados e serão apresentados e analisados no capítulo cinco, enuncio, a seguir, os pontos principais do programa da unidade curricular de Análise Matemática, designadamente o tópico dedicado ao estudo de Sucessões Numéricas. Este tema do programa foi o foco do estudo, tendo por base a resolução de problemas e o recurso à folha de cálculo.

1- Sucessões Numéricas
    - 1.1 Definição
    - 1.2 Subsucessão
    - 1.3 Sucessões monótonas
    - 1.4 Sucessões limitadas
    - 1.5 Sucessões convergentes

2- Funções reais de variável real

3- Cálculo Diferencial em |R

4- Cálculo Integral em |R

A instituição onde esta investigação decorreu apresenta uma boa estrutura e também condições físicas e materiais, como já foi assinalado. As aulas foram realizadas numa das duas salas ou laboratórios destinados essencialmente às aulas de Informática. Estão por isso preparadas para a realização de aulas de informática básica, contando com trinta computadores. No decurso das aulas onde foram recolhidos os dados para este estudo, basicamente não houve factos negativos a ressaltar; a sala estava sempre em condições para a realização de cada aula, oferecendo lugares para até 60 alunos. No entanto, ao longo da experiência de ensino implementada, cada computador foi utilizado por um só aluno. A sala estava sempre preparada e arrumada para receber os alunos, havendo o material necessário para o trabalho em sala de aula. O projetor também já estava na sala e foi possível fotocopiar antecipadamente o material para as aulas, de modo a disponibilizar a todos os alunos da turma os enunciados dos problemas propostos em folhas impressas. Além do pacote *Office*, nos computadores estavam instalados outros *softwares*, entre eles, o *aTube Catcher 2.0*, que permitiu vídeo-gravar tudo quanto os alunos fizeram no Excel durante as aulas.

3.1.3 Os Participantes do Estudo

O professor-investigador

O professor-investigador leciona a disciplina de Análise Matemática há mais de treze anos. Iniciou a sua trajetória profissional, fazendo o curso médio de Formação de Professores para o primeiro ciclo do ensino secundário e trabalhou como professor do ensino primário durante três anos. Fez o curso superior de Ciências da Educação, na opção de Matemática, e desde então passou a lecionar Matemática e Metodologia de Ensino da Matemática no curso de formação de professores para o ensino primário.

Um ano após ter concluído a licenciatura, passou a trabalhar no ensino superior, lecionando várias disciplinas integradas em diversos cursos, numa instituição pública. Conhece bem o currículo de Matemática no ensino médio e pré-universitário e leciona no ensino superior há dez anos como professor.

Apesar de uma prática consideravelmente já consolidada em muitos aspetos, é aberto à introdução das novas tecnologias no ensino da Matemática, por influência de um mestrado em Novas Tecnologias Aplicadas à Educação. Nos últimos cinco anos trabalhou com turmas dos cursos de licenciaturas em Engenharia Mecânica e Elétrica, lecionando as unidades curriculares inerentes a Análise Matemática e Álgebra Linear. A vontade de efetuar um estudo baseado nas perspetivas teóricas e pedagógicas de *Modelos e Modelação* levaram o professor-investigador a trabalhar ainda com uma turma de Engenharia do Ambiente. Intermitentemente, experimentou alguns *softwares* para o ensino da matemática, com maior destaque para o *GrafMath*. Não cursou disciplinas específicas sobre a utilização do Excel na aula de Matemática, unicamente recorreu ao uso do Excel durante a resolução de alguns problemas durante o seu curso de Doutoramento. Não realizou, portanto, estudos sistemáticos, teóricos ou práticos, sobre a utilização de Excel no ensino antes da realização do presente estudo.

O trabalho com estudantes do curso de Engenharia do Ambiente constituiu um desafio considerável, pois no geral as turmas são constituídas por estudantes provenientes de cursos pré-universitários com pouca carga horária e currículos de matemática relativamente pobres. Tal facto, de alguma maneira, contribui para algum desinteresse pela Matemática por parte dos alunos que ingressam no curso.

Um ano antes de desenvolver a presente investigação, o professor-investigador adotou a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. A frequência do Doutoramento em Didática da Matemática garantiu um bom alicerce teórico sobre a resolução de problemas e sobre as atividades propulsoras de modelos enquanto tarefas ricas e interessantes como contexto de aprendizagem. Outro aspeto desafiador vivenciado pelo professor-investigador prende-se com a grande diferença entre as turmas de Engenharia Mecânica e Elétrica, geralmente compostas por estudantes com melhor domínio e gosto pela matemática, e os alunos da turma de Engenharia do Ambiente que chegam ao ensino superior sem muita preparação em termos de conteúdos matemáticos. Por isso, uma das preocupações, ao conceber as atividades propulsoras de modelos, foi a de que o nível exigido fosse compatível com o conhecimento matemático da média da turma, ou seja, com os conhecimentos matemáticos trazidos pelos alunos da sua formação pré-universitária.

Os alunos

Os alunos foram os principais sujeitos do presente estudo. A turma onde foi feita a coleta de dados era constituída de 45 alunos, dos quais 18 eram repetentes, pelo que no presente estudo foi considerado o grupo dos 27 novos alunos. Recorrendo a um questionário aplicado semanas antes do inicio da experiencia didática, foi possível delinear o perfil geral da turma. O questionário era constituído de questões estruturadas, relacionadas com a vida escolar dos alunos, a sua relação com a Matemática, as experiencias provavelmente vivenciadas com a utilização de computadores no ensino, bem como a sua opção de estudos académicos profissional (Anexo I).

Á data da aplicação do questionário, a maior parte dos alunos eram jovens, com idades compreendidas entre 19 e 29 anos; mais de metade dos quais além de estudarem já tinham tido ou estavam a desempenhar uma atividade laboral com uma jornada de pelo menos 3 horas diárias de trabalho. A maior parte dos elementos da turma são provenientes de escolas públicas, onde frequentaram cursos médios ou pré-universitários, predominantemente nas áreas de ciências humanas, línguas, geografia-história e biologia-química. Isto sugere uma categoria de alunos com um histórico relativamente desfavorável no que tange ao seu desempenho em matemática, visto que nos currículos desses cursos de ensino médio e pré-universitário a matemática aparece como uma disciplina complementar, com poucas horas semanais e apenas no primeiro ano, quanto muito até ao segundo ano, aliado a uma visão errada de que a matemática não será muito importante na vida académica e profissional destes jovens.

Para ingressar no curso superior, os alunos do curso de Engenharia Ambiental na ESPtN fazem um exame de acesso constituído pelas disciplinas de Língua Portuguesa, Matemática, Biologia e Química, em que a Matemática tem um peso de 11% na média ponderada para o acesso. Importa referir que, quando se pronunciaram relativamente às razões que estavam na base da sua escolha do curso, as afirmações mais frequentes dos alunos foram: "porque a instituição que administra o curso é perto de casa", "porque não fui admitido em outros cursos", "pareceu-me que tem pouca matemática", "em princípio, é um curso com poucos cálculos". Os poucos estudantes que realmente fazem o curso como primeira opção apresentam como justificação da sua escolha a pequena "carga matemática" do curso, ao passo que quase todos os que frequentam o curso como alternativa consideram que este curso é profissionalmente promissor.

Os estudantes assumiram saber que o curso teria alguma Matemática no seu plano curricular e consideraram-na relevante para sua formação profissional. Alegaram também que gostariam de ter um bom domínio dessa disciplina e confessaram ter tido um desempenho pouco satisfatório nas disciplinas de Matemática no ensino pré-universitário, algo que os levava a adivinhar algumas dificuldades associadas a uma fraca preparação em Matemática.

Grande parte destes alunos ficaram alguns anos sem estudar entre o final do ensino médio e o início do curso superior e neste período dedicaram-se a algumas atividades laborais. Importa salientar o fato de que a grande maioria dos alunos tinha alguma experiência de utilização do computador sobretudo no meio laboral e durante as aulas de Informática. O MS-Word destaca-se de entre os programas mais explorados, mas os estudantes assumem igualmente ter conhecimentos sobre as funcionalidades básicas do MS-Excel. De igual modo, os alunos mostraram muito entusiasmo com a ideia de utilizar computadores, como ferramenta auxiliar para a resolução de problemas, enquanto estudam Matemática.

3.2 A Engenharia Didática como Opção Metodológica

Logo de início, e durante a realização do presente estudo, tiveram-se em conta as preocupações inerentes às questões metodológicas. É uma das ideias basilares na condução de uma investigação o facto de que a definição e o desenho da metodologia confere segurança à realização do estudo e, ao mesmo tempo, a consistência da metodologia é uma condição de validade dos resultados alcançados e de legitimidade do próprio trabalho de pesquisa.

A opção metodológica de uma investigação depende geralmente dos objetivos estabelecidos no estudo, e por consequência está estreitamente relacionada com as questões a que o estudo procura responder. Tal como foi frisado no capítulo introdutório, o presente estudo pretende diagnosticar algumas das barreiras e dificuldades de aprendizagem no tema de sucessões numéricas, caracterizar a abordagem usual que é feita ao tema, elaborar e experimentar uma sequência didática baseada em atividades geradoras de modelos, analisar o trabalho feito pelos alunos com recurso à folha de cálculo, tendo como referência os registos de representações semióticas mobilizados pelos alunos durante as primeiras fases da sequência didática, bem como a construção de modelos decorrente das atividades propostas, considerando o protagonismo e a relevância da folha de cálculo na atividade dos alunos.

A construção de modelos por parte dos estudantes é um dos principais aspetos focados nas questões de investigação. Pela sua natureza, a participação em sala de aula é a fonte de dados mais natural e mais adequada para o estudo da questão. Isso levou o investigador a realizar uma 'investigação em ação' de modo a garantir a observação de detalhes indissociáveis do contexto em que se verificam. O investigador optou ainda pela Engenharia Didática enquanto modalidade de investigação num paradigma de índole interpretativa, uma vez que a preocupação do estudo se prende com a interpretação e explicação das atividades dos alunos, à luz dos referenciais teóricos considerados, tendo em conta o contexto sala de aula e a arquitetura didática definida para a implementação de uma experiência de ensino.

Bogdan e Biklen (1994) destacam cinco características principais de um estudo qualitativo, sendo que as duas primeiras se prendem com a natureza e proveniência dos dados. Estes autores sublinham que os dados recolhidos são essencialmente descritivos e ricos em termos de detalhes, relativamente a pessoas, lugares e diálogos e o seu tratamento estatístico é de certa forma consideravelmente difícil ou inexecutável; o ambiente natural é tido como a fonte direta dos dados, pelo que o investigador tem um papel ativo em todo processo investigativo, deste a recolha até a análise dos dados.

Os mesmos teóricos destacam ainda o papel central do investigador no âmbito de um estudo qualitativo, a natureza da análise de dados e as principais preocupações que movem o pesquisador em investigações desta natureza. Em linhas gerais, o investigador fica mais interessado nos processos (que são realizados pelos participantes) do que nos resultados;

usualmente, os investigadores recorrem a uma análise indutiva dos dados com vista a construir abstrações com base na análise de dados particulares. Não interessa geralmente confirmar hipóteses previamente colocadas, uma vez que o pesquisador se preocupa fundamentalmente com a compreensão das perspetivas dos participantes no fenómeno em investigação.

Embora com características comuns, as investigações qualitativas podem ser realizadas segundo diversas modalidades que obviamente requerem ou privilegiam métodos e procedimentos específicos. Em Educação Matemática, uma das modalidades de investigação qualitativa a ter em conta refere-se à Engenharia Didática que, tal como afirma Artigue (1996), emergiu em Didática da Matemática na década de 1980, nas discussões do IREM, tendo sido idealizada por Brousseau como suporte metodológico para as pesquisas em torno de questões e problemáticas de Didática da Matemática.

Artigue (1996) explica que a Engenharia Didática é uma forma de trabalho didático, em certa medida análoga ao trabalho do engenheiro que, para realizar um determinado projeto concreto, se apoia nos seus conhecimentos científicos, admitindo um controlo científico mas que, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência. Por isso, valendo-se de todos os meios ao seu alcance, debruça-se e estuda de forma prática problemas que pela sua natureza ultrapassam as fronteiras da ciência pura e teórica.

A Engenharia Didática difere de outros tipos de pesquisas baseadas na experimentação em sala de aula, pelo seu próprio enquadramento e pelas formas de validação a que está associada. Com efeito, as investigações que recorrem à experimentação em sala de aula enquadram-se, em muitos casos, numa abordagem comparativa associada à validação externa, tendo por base a comparação estatística do desempenho de grupos experimentais e de controlo.

Chevallard (2001) sublinha que entender melhor os processos didáticos e os fenômenos que estes originam na aula é um dos grandes focos da investigação em Didática da Matemática. Este autor parte do princípio que entender melhor o processo de investigação é condição necessária para poder dar respostas sólidas às dificuldades didáticas vivenciadas no dia-a-dia pelos alunos, educadores matemáticos e outros atores sociais.

A Engenharia Didática, vista como uma metodologia de investigação, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em intervenções didáticas na sala de aula, isto é, envolvendo a conceção, a realização, a observação e a análise de sequências didáticas. Tal esquema, como Artigue (1996) enfatiza, compõe-se de quatro fases, nomeadamente: (i) a análise preliminar, (ii) a conceção e análise *a priori*, (iii) a experimentação e (iv) a análise *a posteriori* e validação. Na prática, as quatro fases de uma Engenharia Didática ocorrem de uma forma dinâmica pelo que a elaboração e concretização da Engenharia Didática necessita, nalguns momentos, da articulação, da antecipação e até da sobreposição dos elementos caracterizadores destas quatro fases.

A fase central é a experimentação, pois tudo quanto é feito antes visa viabilizar da melhor forma possível a concretização de uma proposta didática e tudo quanto é feito depois tem em atenção o que ocorreu na experimentação. Durante a concretização desta fase, o investigador deve levar a cabo procedimentos de recolha de dados para sistematicamente implementar a transformação destes em informação relevante para a sua problemática de investigação. Recomenda-se que os dados recolhidos sejam pertinentes em relação os objetivos da investigação, de tal modo que permitam responder às questões centrais do estudo, Em última análise, os factos deverão aferir a pertinência dos sistemas teóricos nos quais se inserem as respostas às questões centrais que norteiam o estudo (De Bruyne, Herman & De Schoutheete, 1974; Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 2005).

Nessa fase, o investigador inicia o contacto direto com o mundo real através de procedimentos e técnicas de recolha de dados. Importa salientar que a recolha de dados tem de se guiar por critérios de fidelidade, validade, qualidade e eficiência, para desempenhar o papel que lhe cabe. Para esta importantíssima empreitada, a literatura sugere a aplicação de três técnicas diferentes: os inquéritos por entrevista (inquérito oral) ou os inquéritos por questionário (inquérito escrito); a observação direta (sistemática) e a observação participante; e, por fim, as análises documentais (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 2005; Terra, 2014).

Num determinado estudo, as técnicas de recolha de dados podem ser utilizadas de forma simultânea e complementar e não devem ser confundidas com os modos de investigação[7] que constituem meios de abordagem científica ao real (De Bruyne, Herman & De Schoutheete, 1974; Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 2005).

3.2.1 Procedimentos Metodológicos

Tal como foi referido anteriormente, existem vários procedimentos metodológicos que o investigador qualitativo pode utilizar. Tuckman (2000) e Terra (2014) referem que em função das fontes de obtenção de dados que se podem considerar, num estudo de caso, o investigador pode recorrer basicamente a três procedimentos que são a observação, o inquérito e a análise documental. Estes procedimentos não são necessariamente disjuntos, pelo que podem ser implementados simultaneamente, de forma paralela, ou interpoladamente.

[7] Nos modos de investigação estamos a considerar: o estudo de caso, as análises comparativas, a experimentação em laboratório ou no campo (De Bruyne, Herman & De Schoutheete, 1974; Terra, 2014).

A observação, segundo Terra (2014), é entendida como uma técnica de recolha de dados, de tipo sistemático, deliberadamente planeada e conscientemente organizada pelo investigador, podendo ser realizada direta ou indiretamente. Durante a realização de uma observação direta, o próprio investigador recolhe os dados sem a intervenção consciente dos sujeitos observados. O investigador utiliza apenas um guia de observação, identificando todos os indicadores pertinentes a considerar, tendo em conta os intentos enquanto investigador num dado contexto (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 2005).

A observação direta foi uma técnica utilizada neste estudo durante a fase de experimentação em sala de aula e ocorreu tal como Deshaies (1997), Lessard-Hébert, Goyette & Boutin (2005) e Terra (2014) descrevem, isto é, as notas foram tomadas a respeito dos factos, comportamentos e ações conforme se verificaram na sala de aula durante a realização das atividades propostas aos alunos.

Terra (2014) explicita que a observação indireta é realizada com intervenção direta do sujeito que em regra proporciona intencionalmente a informação pretendida. Geralmente, o sujeito responde a perguntas, intervindo, deste modo, na produção da informação. A informação recolhida por meio de uma observação indireta é menos objetiva, por haver dois mediadores entre a informação procurada e a informação obtida.

O inquérito por questionário é uma das vertentes de observação indireta, tal como Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (2005) e também Terra (2014) afirmam. Consiste em colocar a um grupo sujeitos, com um certo nível de conhecimento, um conjunto de perguntas de modo a obter informações sobre factos, comportamentos e tendências que podem ajudar o investigador na compreensão ou esclarecimento de aspetos da realidade em estudo. No âmbito do presente estudo, o inquérito por questionário foi a técnica usada para entender alguns aspetos característicos da turma participante no estudo e durante a fase de análise preliminar do fenómeno a investigar, esta técnica permitiu retratar as práticas de ensino da Matemática mais predominantes na escola Superior Politécnica do Namibe.

Nas circunstâncias concretas do presente estudo, o investigador conhece bem o contexto em que foi realizado o estudo, pelo que tem uma opinião formada a respeito dos seus principais elementos e do contexto social. Deste modo, os inquéritos permitiram recolher dados que serviram para legitimar a descrição feita sobre os sujeitos e sobre as práticas de ensino predominantes na instituição em que decorreu a experiência. Tal como Terra (2014) sublinha, os inquéritos destinam-se ao levantamento de dados para sustentar um conhecimento fundamentado bem como à verificação de suposições teóricas e à análise das conexões que essas conjeturas evidenciam. E, além disso, tal como a mesma autora aconselha, o questionário visou a caracterização dos inquiridos por forma a enquadrá-los no âmbito do seu contexto de vida e percurso escolar em Matemática. Foram ainda tidos em conta aspetos inerentes à disponibilidade, à honestidade e à consciência dos inquiridos pois reconhece-se que teriam uma certa influência nas respostas.

Como muitos outros investigadores, Dalfovo, Lana e Silveira (2008) referem que, para atender a aspetos e circunstâncias específicas de um estudo, um dos procedimentos apropriados para complementar a recolha e a apreciação de dados é a análise documental. Agostini e Terrazzan (2010), por exemplo, sublinham que a análise documental consiste em tratar dados "brutos" contidos em documentos relacionados com o problema em estudo, de tal modo que possam ser tratados, interpretados e referenciados ou reaproveitados, de acordo com os desígnios do estudo.

Em termos práticos, a análise documental consubstancia-se na recolha de informação e da posterior análise de aspetos documentados que foram gerados no âmbito ou a respeito das atividades relacionadas com o problema em estudo, tais como leis, regulamentos, registos de rotina e no caso da investigação educacional, os programas, orientações metodológicas, estatutos e até registos de planificações de atividades. Efetuar uma análise documental pode revelar-se um procedimento muito importante sobretudo nas ocasiões em que os documentos analisados proporcionam informação interessante sobre as atividades realizadas e os processos que aconteceram, podendo nestas conjunturas fornecer ideias frutíferas, isto é, propulsoras de indagações que sugerem novas observações ou entrevistas.

Em certas situações de pesquisa, a análise documental é o único procedimento que permite aceder a informações sobre o que aconteceu antes de se iniciar a investigação. Por exemplo, permite obter evidências de aspetos previstos nos regulamentos, programas e recomendações ou orientações metodológicas que nunca foram postos em prática. No âmbito do presente estudo a análise documental foi bastante pertinente durante a fase de análise preliminar e nela foram analisados os planos curriculares e os programas de matemática do ensino pré-universitário, registos de resultados de exames de acesso, bem como o programa da disciplina. A análise documental também foi muito importante na fase iv) de análise *a posteriori*, pois permitiu a análise dos relatórios e ficheiros resultantes do trabalho dos alunos nas tarefas implementadas na sala de aula.

Numa investigação qualitativa, a experiência de ensino é uma via pertinente para criar situações reais de ensino-aprendizagem em ambiente natural que possibilitam ao investigador a procura ou a busca de significados para os processos e acontecimentos que decorrem em resultado de uma intervenção preparada e intencionalmente realizada (Shulman, 1996; Domingos, 2003). Domingos (2003) sublinha que uma experiencia de ensino, no âmbito de uma investigação qualitativa, é uma opção muito poderosa pois permite ao investigador formular explicações sobre o comportamento dos alunos no tempo e no contexto reais. Tal como defendeu Kantowski (1978), a experiência de ensino permite ao investigador perceber o desenrolar dos processos e também compreender como o ensino pode influenciar, de maneira otimizada, esses processos. Essa foi uma das principais motivações para a realização de uma experiência de ensino neste estudo, pois ela visou produzir um contexto real que permitisse descrever e interpretar os processos de desenvolvimento dos modelos conceptuais dos alunos, no tópico de Sucessões Numéricas, induzidos por meio de tarefas propostas intencionalmente.

Domingos (2003) refere que historicamente as experiências de ensino, como forma de operacionalizar um cenário investigativo, remontam aos trabalhos realizados por psicólogos e pedagogos soviéticos, como Vygotsky, que sugeriu a criação de uma metodologia de investigação de índole qualitativa para estudar o pensamento e a aprendizagem. A visão Vygotskyana partia do princípio de que sob a influência de diferentes intervenções é possível reproduzir de forma sistemática os processos mentais tal como estes se desenvolvem nos sujeitos. Outros investigadores da linha construtivista, como Cobb e Steffe (1983), referem igualmente que as experiências que os alunos obtêm através da interação com os adultos influenciam grandemente a construção de conceitos formais. Assim, uma experiência de ensino representa uma oportunidade de criar, registar e sistematizar situações de aprendizagem em que o papel das tarefas ou a influência da utilização de recursos didáticos, por exemplo, podem ser o foco da análise e interpretação do investigador.

Nesta conformidade, os contextos didáticos que propulsionam a construção de modelos matemáticos relativos a situações concretas e reais tornam-se importantes e elucidativos dos processos de aprendizagem e dos modelos conceptuais desenvolvidos pelos alunos ao longo do tempo. Por isso, também se considera que a interação por períodos de tempo mais ou menos longos entre os alunos e o investigador é particularmente desejável pois permite a compreensão dos raciocínios desenvolvidos pelos alunos, quando estes os expressam enquanto resolvem as tarefas propostas. Domingos (2003) destaca que desta forma é possível ter acesso aos vários processos que os alunos utilizam quando trabalham nas tarefas propostas em sala de aula.

3.2.2 Análise Preliminar

Numa pesquisa de Engenharia Didática, a fase de conceção baseia-se, não apenas num quadro teórico didático produzido e desenvolvido no campo de estudo, mas também num número de análises preliminares que se relacionam com os propósitos específicos da investigação.

Segundo Artigue (1996), os aspetos a focar numa análise preliminar dependem dos objetivos do estudo, mas em geral envolvem os seguintes: (a) a análise epistemológica dos conteúdos tratados no ensino; (b) a análise das práticas de ensino tradicional e dos seus efeitos; (c) a análise das conceções dos alunos e das dificuldades e obstáculos que determinam o seu desenvolvimento e a sua aprendizagem; (d) o tipo de restrições existentes no campo em que se enquadrará a intervenção didática.

A autora refere que, geralmente, nem todos os aspetos mencionados aparecem explicitamente escalpelizados nos trabalhos realizados à luz da Engenharia Didática e acredita que para cada investigação particular as dimensões privilegiadas têm um determinado significado didático.

Pommer (2013) aclara esta questão, afirmando que na análise preliminar é feita uma revisão bibliográfica, envolvendo as condições e os elementos presentes nos vários níveis de intervenção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral dos aspetos histórico-epistemológicos dos tópicos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos a eles associados. Refere-se, neste caso, a efeitos relacionados com as conceções, dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro desse contexto de ensino.

No presente estudo, a análise preliminar cingiu-se aos aspetos inerentes à "análise das práticas de ensino tradicional e seus efeitos", por se considerar ser a dimensão mais crítica a equacionar face ao objetivo de realizar uma experiência com caraterísticas inovadoras, designadamente ao colocar os alunos em atividade de resolução de problemas apoiada pelo recurso à folha de cálculo. Concretamente, foi feita uma revisão bibliográfica, envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de intervenção didática. Para o efeito, foi elaborado e aplicado um inquérito que pretendeu obter um perfil geral da turma, conforme a breve descrição feita no presente capítulo dos alunos participantes. Na mesma senda, foi feita uma análise documental com o objetivo de constatar os aspetos mais salientes referentes a: (1) presença do tópico sucessões numéricos nos diversos programas de Análise Matemática e (2) recomendações metodológicas sobre o ensino deste tópico. Ainda no âmbito da análise preliminar, foi feita uma revisão de literatura inicial que permitiu, por um lado, o aprofundamento do referencial teórico adotado para o presente estudo e, por outro, uma introdução não menos importante sobre as práticas vigentes no ensino superior angolano, como se pode ver no capítulo quatro. Para possibilitar a documentação de dados mais circunvizinhos do contexto do estudo, foi aplicado um inquérito que permitiu retratar as práticas mais preponderantes de ensino da matemática na escola Superior Politécnica do Namibe.

3.2.3 Concepção e Análise *a priori*

Artigue (1996) explicita que na fase de conceção e análise *a priori*, o pesquisador delimita as variáveis micro-didáticas (ou locais) e as macro-didáticas (ou globais) respeitantes ao Sistema Didático (professor-aluno-saber) que têm de ser consideradas pelo professor/pesquisador para levar por diante o seu projeto de Engenharia Didática.

As variáveis didáticas são todos os elementos que ao serem alterados implicam mudanças nas estratégias de trabalho matemático dos alunos, e é em função delas que o seu desempenho evolui. Machado (2002) refere que é importante que o pesquisador as identifique para que possa fundamentar a construção das sequências didáticas que permitirão o surgimento do conhecimento pretendido e a realização das aprendizagens esperadas.

Artigue (1996) considera que na análise *a priori* o caráter descritivo e o caráter preditivo será igualmente importante quando se considera o papel do aluno. Porém, Machado (2002) enfatiza sobretudo a análise descritiva do papel do aluno, tendo em conta a centralidade das situações "a-didáticas" criadas pelo professor, tal como se defende na TSD. Nesta perspetiva, o aluno é o ator principal, sendo que o papel do professor como agente primordial é mais significativo nas situações de institucionalização, sem prejuízo do que for estabelecido no contrato didático.

Na fase de concepção e análise *a priori*, o investigador começa por fazer previsões e antecipações sobre as reações dos alunos às propostas de trabalho na sala de aula. Com efeito, tal como se propõe nas situações de ação descritas na TSD, os alunos refletem, simulam e fazem tentativas, de modo a estabelecer um procedimento de resolução, dentro de um esquema de adaptação, através de uma interação com o 'milieu'. O investigador deve, assim, aceitar e assumir que os alunos têm a seu cargo a tomada das decisões que lhes permitirão organizar a resolução do problema ou da tarefa matemática proposta.

No âmbito do presente estudo, foi planeada uma intervenção na sala de aula que consistiu na "idealização" de uma sequência didática, no âmbito do tópico Sucessões Numéricas, conforme se expõe no capítulo quatro do presente trabalho. Aí foram sugeridos os elementos que se prevê que irão propulsionar e impelir os alunos a implementarem mudanças nas suas estratégias de atividade matemática. Foi ainda fundamentado o modo como o 'milieu' concebido e, em particular, as tarefas propostas permitem o surgimento do conhecimento desejado e a consecução de aprendizagens.

3.2.4 Experimentação

Durante a fase de experimentação, são realizadas as sessões de ensino-aprendizagem, o que possibilita ao investigador efetuar observações e é nesta fase que emergem como altamente significativas as produções dos alunos. De acordo com Machado (2002), a experimentação consiste basicamente no desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática. O investigador procura proceder de modo que sejam verificadas as considerações e hipóteses levantadas na análise *a priori*, tendo em atenção o contrato didático, a aplicação dos instrumentos de pesquisa e as observações que faz conjuntamente com as produções dos participantes.

Tal como se advoga na TSD, é essencial a preocupação da não-interferência explícita de elementos adulteradores da atividade do aluno, evitando-se explicações diretas ou 'pistas' que facilitem deliberadamente ou dirijam as resoluções dos alunos, propiciando assim condições que permitam a mobilização do aluno para enfrentar o problema e para o resolver, pelo menos em parte, através da compreensão e raciocínio e dos seus conhecimentos anteriores (Brousseau, 1996).

Assim, a perfeita noção dos papéis de não-intervenção do investigador e de ação independente do aluno, bem como o respeito por tais condições, garantem o essencial para caracterizar o contrato didático no contexto de uma investigação baseada na Engenharia Didática.

Pommer (2013) acrescenta ainda que a principal intenção do investigador é a de propiciar condições para colocar o sujeito em confronto com a situação da forma mais independente possível, tal como se enfatiza no conceito de devolução, descrito na TSD, em que se propõe que é ao aluno que cabe enfrentar o desafio intelectual de resolver as situações propostas, como se o problema a resolver fosse dele (Brousseau, 1996).

Borasi (1992) esclarece também que a efetivação de uma experiência didática é muito conveniente quando se quer investigar, numa perspetiva naturalista, uma inovação que está longe das práticas de ensino vigentes.

Ora, sendo a Engenharia Didática uma modalidade de investigação qualitativa, é importante reconhecer que o investigador intervém diretamente na recolha de dados e que este facto levanta questões quanto à validade e fiabilidade do estudo. As questões inerentes à credibilidade de estudos qualitativos são aliás frequentemente abordadas na literatura sobre investigação científica em educação (Bogdan & Biklen,1994; Yin, 2003), nomeadamente porque numa investigação qualitativa os dados são, em certa medida, fruto da perceção e interpretação da situação por parte do investigador e esta pode ser afetada pelas suas "convicções" iniciais. Yin (2003) considera que para debelar a questão inerente à fiabilidade é fundamental que sejam empregues diversas fontes de evidência e que, ao mesmo tempo, sejam adotadas diversas estratégias para a recolha e análise de dados, de tal modo que se tenha a garantia de que dados correspondam, de modo verdadeiro e autêntico ao que realmente se deseja compreender e representar.

Como se pode verificar no capítulo quatro do presente estudo, a experimentação consistiu em proporcionar aos alunos um contexto que visou estimular a sua construção de modelos, a partir de situações realistas, no decurso de uma atividade de resolução de problemas em que estes mobilizam e transformam registos semióticos. Tal contexto teve como função permitir ao investigador compreender os modelos desenvolvidos pelos alunos enquanto resolviam as tarefas propostas, assim como tornar evidentes as formas como utilizaram registos de representações semióticas, analisando a forma como o recurso à folha de cálculo teve influência nesse processo.

3.2.5 Análise *a posteriori* e Validação

Na fase de análise *a posteriori* e validação, o investigador faz o seu trabalho de análise das evidências empíricas, considerando o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação através das suas observações, registos vídeo e áudio do trabalho dos alunos, incluindo as suas produções escritas e os ficheiros digitais construídos com o Excel. Artigue (1996) enfatiza que esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados recolhidos e pela sua confrontação com a análise *a priori*. A interpretação dos dados e a formulação dos resultados permitem perceber de que forma as questões levantadas foram respondidas pela investigação. Assim, podem ser apuradas as contribuições dadas pelo estudo acerca das questões de investigação levantadas, o que constitui uma forma de garantir a generalização local e permite a validação interna do objetivo da pesquisa.

Seguindo os preceitos da Engenharia Didática, enquanto opção metodológica para a realização de pesquisas de índole qualitativa, no presente estudo, para a concretização da fase de Análise *a posteriori* e Validação, foi privilegiada a avaliação da implementação da sequência didática concebida, conforme se pode encontrar no capítulo seis. Neste caso, a avaliação consistiu basicamente em aferir em que sentido a experimentação realizada permitiu lograr os objetivos apontados na fase de análise *a priori*.

Posteriormente, na análise dos dados do presente estudo, foi basicamente considerado o conteúdo das produções dos alunos recolhidas em sala de aula. Os dados abarcam as gravações das ações que os alunos selecionados para o estudo realizaram no computador e que foram devidamente gravadas em vídeo, bem como as respetivas explicações e narrações, produzidas oralmente, igualmente gravadas em áudio. Importa aludir que as gravações foram obtidas com o auxílio do *software aTube Catcher* (*Screen Recorder*) instalado para o efeito em todos os computadores que os alunos selecionados utilizaram para resolver as questões propostas no âmbito do presente estudo.

Para melhorar a compreensão dos dados proporcionadas pelas gravações, foram também considerados os registos escritos dos alunos, onde estão evidentes as suas respostas e resultados e algumas explicações, inerentes às questões resolvidas em cada atividade realizada. Como as atividades foram realizadas com recurso à folha de cálculo, os ficheiros produzidos pelos alunos durante as atividades foram considerados suplementos sinergicamente importantes para complementar a compreensão.

A análise dos dados será detalhada no capítulo 5, em três secções uniformemente padronizadas. Cada uma das secções corresponderá aos dados proporcionados por cada um dos três alunos que foram sujeitos do estudo. Deste modo, em cada secção, será apresentada, numa primeira fase, uma descrição da atividade desenvolvida em cada questão proposta, documentada e complementada com recortes de figuras e explicações retiradas dos seus relatórios escritos, imagens capturadas de ecrãs do computador e explicações orais.

Pretende-se com esta descrição proporcionar uma visão holística das resoluções do aluno, dos seus raciocínios e abordagens e do modo como usou a folha de cálculo para concretizar os seus objetivos. Numa segunda fase da análise, serão aflorados aspetos inerentes aos principais referenciais teóricos adotados no estudo, designadamente: a Teoria dos Registos de Representações Semióticas, concretizada através da identificação dos tipos de representações semióticas mobilizadas no âmbito de cada questão e respetivos tratamentos e conversões; e a Teoria de Modelos e Modelação, materializada mediante a enfatização das sucessivas formas que os modelos construídos e utilizados pelo aluno foram assumindo ao longo da resolução das questões.

Por último, é feita uma síntese dos elementos mais evidentes que se observaram, de acordo com cada uma das perspetivas teóricas, colocando-os em paralelo, de modo a permitir uma melhor análise e interpretação das possíveis relações entre os dois aspetos centrais da investigação: o uso de representações semióticas, envolvendo o recurso à folha de cálculo, e também a construção e o desenvolvimento de modelos conceptuais a partir das MEAs exploradas na sala de aula.

Capítulo 4

A Sequência Didática

Este capítulo diz respeito à concretização das duas fases iniciais da Engenharia Didática, que constitui a abordagem metodológica seguida no presente estudo. Mais concretamente, trata-se aqui de dar a conhecer em pormenor as fases de análise preliminar do fenómeno em estudo, e de conceção e análise *a priori* de situações didáticas que serão postas em prática na fase de experimentação. A primeira fase refere-se, neste estudo, a uma breve caraterização e problematização das práticas de ensino dominantes no âmbito do tópico de sucessões numéricas, tanto no ensino pré-universitário como no ensino superior, especialmente no contexto Angolano. A segunda fase consiste na idealização de uma sequência didática que pretende provocar mudanças na atividade dos alunos na disciplina de Análise Matemática e numa antecipação das respostas e ações dos alunos que levarão a aprendizagens, envolvendo a resolução de problemas e o recurso à folha de cálculo. Com esta sequência didática, pretende-se fomentar o desenvolvimento de modelos conceituais e promover o uso de diferentes registos de representação semiótica nos alunos. Os objetivos de cada situação didática serão assim descritos pormenorizadamente, em conjunto com as respostas e as aprendizagens dos alunos que se preveem obter.

4.1 Análise Preliminar do Tratamento Didático do Tópico Sucessões Numéricas

No segundo capítulo do presente trabalho, foi apresentado o quadro teórico utilizado como pano de fundo da investigação desenvolvida, mas tal como foi frisado no capítulo três, numa pesquisa de Engenharia Didática, a fase de conceção deve basear-se também num número de análises preliminares que se relacionam com os propósitos específicos da investigação.

Como foi mencionado no capítulo anterior, Artigue (1996) sugere que as análises preliminares podem privilegiar diversos aspetos dependendo dos objetivos do estudo. De entre as sugestões de Artigue (1996), no presente estudo, as análises preliminares consubstanciaram-se na análise das práticas de ensino vigentes na Escola Superior Politécnica do Namibe e dos principais efeitos dessas abordagens. Para a concretização desse propósito, foi elaborado e aplicado um inquérito que permitiu obter um perfil geral da turma, conforme a breve descrição feita no capítulo anterior. Para melhor entender os aspetos mais relevantes referentes ao tratamento do tópico sucessões numéricas foram analisados diversos programas e manuais, bem como as recomendações metodológicas consideradas a respeito do tópico. Foi feita também, no âmbito da análise preliminar, uma revisão não menos importante sobre as práticas vigentes no ensino superior angolano.

4.1.1 Nota sobre o ensino da Análise Matemática em Angola

Os estudos apontam uma quase total ausência de investigação científica no âmbito dos programas de ensino angolano e há uma despreocupação com a publicação dos poucos estudos que são feitos nas instituições de ensino superior (Carvalho, 2012; Silva, 2012). Perante esta situação, será feito um périplo pelo que se pode perceber de alguns estudos publicados a respeito do ensino de Matemática em Angola.

Quitembo (2010) constatou que nas aulas teóricas de Análise Matemática, a ação dos professores consiste em "ditar o conteúdo (definição, teorema e regra), explicar os procedimentos, exemplificar e exercitar" (p. 628). O mesmo autor constatou ainda que os professores privilegiam a abordagem dedutiva por considerarem que é a mais favorável, pois essa forma de trabalhar permite-lhes abordar uma maior quantidade de conteúdos programáticos. Nas aulas, a maior preocupação dos professores é a apropriação pelos alunos de axiomas, definições, teoremas e demonstrações e algoritmos. Nesta senda, o autor, apoiando-se em Garcia (1999), sublinha ainda que o "papel dos estudantes se limita a escutar ou responder às possíveis questões levantadas pelo professor e a observar os passos seguidos pelo professor na resolução do exemplo" (Quitembo, 2010, p. 628). A atividade matemática dos alunos resume-se a resolver exercícios, considerando como modelo os exemplos precedentemente resolvidos e explicados pelo professor e os alunos são chamados a aplicar as regras e os procedimentos que o professor expôs anteriormente.

Referindo-se ao papel dos professores de Análise Matemática, Quitembo (2010) nota que o papel do professor se cinge à resolução de muitos exercícios e os alunos são levados a resolver tais exercícios com o intuito de desenvolver hábitos e habilidades na aplicação dos procedimentos transmitidos nas aulas teóricas.

Bendrau (2015) realizou recentemente um estudo onde, entre outros aspetos, se debruçou sobre as práticas dos professores de uma instituição de ensino superior angolana, e constatou que continuam a prevalecer modelos que dão ênfase ao ensino de procedimentos rotineiros que fundamentalmente exigem dos alunos a reprodução da informação previamente transmitida. E as avaliações tendem a privilegiar a classificação, desvalorizando a análise do saber fazer dos alunos. A mesma autora sublinha que "a aprendizagem é feita de forma mecânica (…) numa situação didática ligada ao ensino expositivo" (p. 201), apesar de existirem professores que fomentam a participação dos alunos.

4.1.2 As práticas prevalecentes na ESPtN

Por não existirem estudos prévios que retratem as práticas dos professores na ESPtN, ao procurar documentar a situação real do ensino da Matemática, foi aplicado um inquérito a 6 dos 7 docentes de Matemática da ESPtN e os resultados revelam semelhanças com as constatações feitas por Quitembo (2010). As práticas dos professores tendem a criar um ambiente centrado no professor e as atividades matemáticas mais sugeridas são os exercícios, os professores não privilegiam as múltiplas representações e pouco recorrem à resolução de problemas para introduzir os conceitos, conforme se pode verificar nas tabelas seguintes.

O primeiro aspeto considerado no questionário aplicado aos docentes da escola prende-se com o tipo de atividade matemática privilegiado pelos professores. Na tabela abaixo apresentam-se os dados numéricos recolhidos neste sentido (Tabela 5).

Tabela 5: Frequência das principais atividades privilegiadas nas aulas de matemática

O que faz durante as aulas	**Nunca**		**Raramente**		**Às vezes**		**Quase sempre**		**Sempre**	
Exemplificar							**1**	17%	**5**	83%
Definir e explicar definições					1	17%	4	67%	1	17%
Explicar							5	83%	1	17%
Demonstrar					2	33%	4	67%		0%
Orientar resolução de problemas	1	17%	3	50%	2	33%				0%
Orientar resolução de exercícios							4	67%	2	33%

O inquérito permitiu confirmar que os professores habitualmente utilizam métodos expositivos pois, como se pode ver na Tabela 5, todos os professores explicam, exemplificam, apresentam definições e resolvem exercícios com muita frequência, às vezes fazem demostrações e poucas vezes ou raramente orientam a resolução de problemas.

O segundo aspeto considerado no questionário aplicado aos docentes da escola visava constatar em que momento da aula os professores propõem e orientam a resolução de problemas e os dados da Tabela 6 indicam que os professores quase nunca utilizaram a resolução de problemas como ponto de partida.

Tabela 6: Principais momentos da aula em que os professores recorrem à RP

Momento em que recorre à resolução de problemas	**nunca**		**raramente**		**às vezes**		**quase sempre**		**sempre**	
No início da aula	3	60%	1	20%	1	20%				
No fim da aula					1	20%	3	60%	1	20%

O questionário permitiu constatar que este tipo de atividade, que já é pouco privilegiado pelos professores, segundo o que se pode ler na Tabela 5, dificilmente é utilizado como estratégia para introduzir novos conceitos, pois tal como se pode ver na Tabela 6, a resolução de problemas quase nunca ocorre no início da aula e quase sempre ocorre no fim da aula, o que em parte revela que o tipo de problemas trabalhados se prende com a aplicação dos conceitos previamente explorados nas aulas.

O terceiro aspeto metodológico considerado no questionário refere-se à utilização de múltiplas representações semióticas e, como se pode ver na Tabela 7, os professores privilegiam a representação algébrica.

Tabela 7: Formas privilegiadas para representar os objetos matemáticos

Formas de representar os elementos matemáticos	Nunca		Raramente		Às vezes		Quase sempre		Sempre	
Algebricamente (A)							4	67%		
Graficamente (G)					1	17%				
Combinadamente (A+G)			1	17%						
Graficamente e depois algebricamente	6	100%								
Algebricamente e depois graficamente	4	67%	1	16%	1	16%				

O inquérito permitiu constatar que os professores incentivam muito o uso de registos algébricos em detrimento dos outros tipos de registo e raramente ou nunca fazem as conversões que são postuladas no âmbito da teoria dos registos de representações semióticas. Duval (2011) refere que a aprendizagem ocorre quando o aluno consegue mobilizar adequadamente mais que um tipo de registo para o mesmo objeto ou conceito matemático; assim, embora a aprendizagem do aluno seja vista nos programas curriculares como a aquisição de competências locais, inerentes à construção de conceitos ou procedimentos matemáticos, é importante que os professores abordem os assuntos no sentido de apoiar os alunos no que se refere aos tratamentos inerentes à originalidade da própria atividade matemática.

4.1.3 As abordagens prevalecentes ao tema sucessões numéricas

Segundo os currículos do ensino pré-universitário vigentes em Angola, o tema sucessões numéricas é abordado na 11ª Classe. Uma análise minuciosa dos dois manuais leva a inferir que o tópico é abordado de uma forma bastante superficial e não cobre algumas noções fundamentais como a convergência que, como foi salientado no primeiro capítulo deste estudo, é um conceito que permite desenvolver outros conceitos, como os de limite e continuidade de funções que fazem parte da espinha dorsal da Análise Matemática.

As abordagens ao tema sucessões numéricas parecem portanto não privilegiar o alicerce que este tema poderia proporcionar para a posterior abordagem de outros grandes tópicos da Análise Matemática. Isso mostra que se desconsidera a importância das conexões no ensino e aprendizagem da matemática atual e, para agravar, a mesma abordagem não promove a compreensão das relações e transições entre a representação numérica e a analítica, ao não se recorrer a múltiplas representações. Isto pode levar a que os alunos não estabeleçam a inter-relação entre as representações numérica, analítica e geométrica de uma sucessão, o que pode impedir que os alunos concebam modelos a partir de outros.

Nos manuais, o tema é fundamentalmente abordado com recurso a exercícios e os pouquíssimos problemas sugeridos são descontextualizados e não realísticos, o que de certo modo contraria a visão, por exemplo defendida por Santos-Trigo (2007), que sugere que a aprendizagem de conceitos matemáticos deve estar diretamente relacionada com a atividade de resolução de problemas. Ao mesmo tempo, a abordagem patente nos manuais não proporciona verdadeiras situações didáticas segundo a visão de Brousseau (2014), que refere que as *autênticas situações didáticas* são acima de tudo representações de situações do mundo real.

4.1.4 As práticas com folha de cálculo e a diversificação de registos

Calder e outros, participando num programa de pesquisa concernente à exploração da folha de cálculo como ferramenta pedagógica, quando comparada com lápis e papel, inferiram que tal ferramenta pedagógica forneceu respostas distintivas na interação social e na contextualização de ideias matemáticas, designadamente, na construção de conjeturas matemáticas informais de forma particular (Calder, Brown, Hanley, & Darby, 2006).

A situação destacada reforça a ideia de que os alunos que usam a folha de cálculo elaboram tabelas com uma considerável rapidez e podem rapidamente fazer análises através de padrões visuais e o respetivo discurso evidencia esta abordagem nas interpretações que fazem (Borba & Villarreal, 2005).

Calder e outros (2006) revelam ainda que os dados do seu estudo sustentaram a suposição de que a folha de cálculo leva os alunos a familiarizarem-se com o âmago do problema através de visualização, observação de tabelas e ao mesmo tempo fomenta respostas imediatas de generalização.

A abordagem através de folha de cálculo, talvez devido à estrutura técnica real deste meio, leva mais diretamente para um processo algébrico. Isto é evidente nas interações de linguagem que incluem simultaneamente terminologia algébrica e específica da ferramenta (Calder, Brown, Hanley, & Darby, 2006).

Os mesmos investigadores constaram ainda que, fazendo uso de folha de cálculo, os alunos formulavam conjeturas informais com bastante cautela e evocavam respostas algébricas; os alunos evidenciaram isto através de linguagem ao tentarem argumentar acerca dos resultados. A linguagem dos alunos revela ainda que a formulação de conjeturas e generalizações foi baseado em abordagens operacionais, embora auxiliado pela interpretação visual.

Os mesmos investigadores identificaram ainda outros catalisadores do processo investigativo: velocidade de resposta, formato estruturado, facilidade de edição e reverificação de resultados para sua generalização, e a sua natureza interativa. Isto é consistente com as ideias de outros pesquisadores (por exemplo: Beare, 1993; Calder, 2004; Funnell, Marsh, & Thomas, 1995).

Weber (2012) realizou um estudo com o objetivo de desenvolver o pensamento recursivo dos alunos, onde propôs algumas tarefas que consistiam em encontrar o termo geral e a soma parcial de uma série. E reiterou que a folha de cálculo se adequa naturalmente para cálculos recursivos, já que uma fórmula pode ser definida como uma função de uma ou mais células.

O mesmo autor constatou ainda que um hipotético n-ésimo termo de uma sucessão recursiva pode ser testado facilmente usando uma folha de cálculo para calcular um grande número de termos. De igual modo, uma conjetura sobre o limite de uma série pode ser testada usando uma folha de cálculo para calcular recursivamente várias somas parciais e acrescenta que, recorrendo à folha de cálculo, os alunos ganham alguma segurança sobre os cálculos, e uma vez que os alunos ficam confiantes sobre uma determinada fórmula ou relação matemática eles podem prová-la mais prontamente por indução matemática (Webber, 2012).

As folhas de cálculo são inerentemente recursivas e podem ser muito úteis no desenvolvimento de provas de hipóteses sobre as formas algébricas de funções e a recursão é uma poderosa ferramenta na coleção de técnicas de prova matemática. Os termos gerais de algumas sucessões e a soma parcial de uma série são naturalmente recursivas. Ainda a este respeito, Webber (2012) salienta que aquilo que as folhas de cálculo proporcionam, nestas circunstâncias, é evidência numérica e não prova, pelo que devemos, a seguir, provar formalmente que a hipótese é correta, talvez usando indução matemática, que é propriamente uma técnica recursiva.

Monaghan (2001), investigando sobre as ideias dos jovens a respeito do infinito, constatou que em uma lista de possíveis ciladas para os investigadores, “o mundo real” é aparentemente finito e não há nenhuma referência real para o discurso sobre o “infinito”. Esta não é apenas uma verdadeira cilada para os pesquisadores; é também o cerne de um problema para os alunos.

Tsamir (2001), baseando se nas ideias de Fischbein (1987), projetou tarefas de comparação de conjuntos infinitos, com base nos resultados de pesquisas que mostram soluções incompatíveis dos alunos, usando várias representações, a fim de aumentar a conscientização dos alunos de tais inconsistências. Vários estudos revelam que mesmo quando um mesmo problema ou um problema isomorfo é construído em diferentes contextos, o contexto e as formas de representação têm-se mostrado crucialmente influentes nas respostas dos alunos e na sua compreensão (Sacristán 1991; Tsamir, 2001)

Waldegg (1987) durante a investigação realizado no âmbito da tese de doutoramento, utilizou com sucesso contextos numéricos e geométricos através do uso de linguagem algébrica, para ajudar os alunos em “obstáculos”, observados por este investigador em casos anteriores, (por exemplo, se um conjunto geométrico é limitado, este é um potencial obstáculo para sua quantificação de infinito).

Garbin e Azcarate (2002) realizaram um estudo focado em inconsistências dos alunos em relação ao conceito de infinito real e salientaram a importância das tarefas de conexão entre quatro diferentes registros de representação: verbal, geométrica, gráfica, algébrica e analítica para desenvolver o pensamento mais coerente nos alunos em relação ao infinito real.

Tall (1986) verificou que é importante proporcionar experiências ricas, através de abordagens não-formais para a construção de ‘raízes cognitivas’ (imagens de conceitos) sobre as quais as teorias formais de cálculo mais tarde poderão ser construídas. Em particular, é eficaz para evidenciar factos que nem sempre são evidentes para os alunos.

Vários estudos revelam que geralmente quando os alunos tendem a "justificar" uma conjetura matemática obtida a partir de uma única imagem, falham ao tentarem um argumento baseado nas propriedades (Sowder, 199; Alcock & Simpson, 2005). As conclusões tiradas de tais imagens podem estar em conflito com as definições formais dos conceitos (Davis e Vinner, 1986; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1992). Em particular, o uso de uma única imagem estática pode induzir um foco sobre propriedades irrelevantes (Harel & Sowder, 1998; Presmeg, 1986, 2006) ou levar a argumentos gerais insuficientes porque a imagem é “protótipo” para apenas um subconjunto dos objetos em questão (Tall, 1995).

Em suma, a conceção de uma situação didática baseada na resolução de problemas com recurso à folha de cálculo deve tomar em linha de conta o que a investigação já permite concluir, em especial, que a folha de cálculo constitui uma ferramenta com muitas potencialidades para a compreensão de conceitos que envolvem sucessões e recursividade. Além disso, como outras ferramentas tecnológicas poderosas atualmente disponíveis, traz consigo a possibilidade de diversificar e de encorajar o uso de múltiplos registos de representação. Por fim, ajuda à formulação de conjeturas e apoia ideias e abordagens informais que deverão ser complementadas com a busca da prova matemática.

4.2 Concepção e análise *a priori* da sequência didática

A sequência didática concebida no âmbito do presente estudo foi composta por cinco sessões, conforme ilustra a Figura 6.

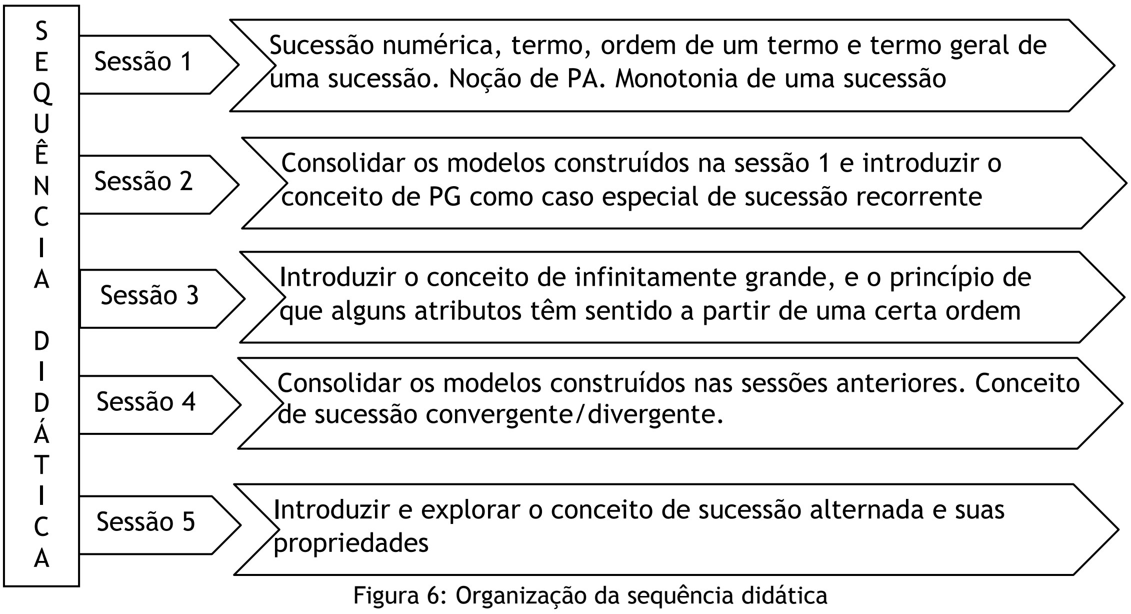


Figura 6: Organização da sequência didática

A seguir, é feita a descrição dos objetivos e dos principais aspetos que caracterizam cada situação didática, considerando a importância dessas situações para o aluno. A essência desta etapa prende-se com as hipóteses consideradas para lograr os objetivos visados; basicamente, nesta etapa, descreve-se o que se pretende experimentar e o que se pretende obter em cada sessão de ensino e aprendizagem.

Lesh e Caylor (2007) afirmam que é sempre necessário estabelecer diretrizes que podem ser tidas como o negativo fotográfico do sistema conceptual cujo desenvolvimento queremos estudar. Portanto, em certa medida, as diretrizes permitem avaliar até que ponto o esforço do aluno, no que se refere ao estabelecimento de relações, implementação de ações e análise de padrões, tende a favorecer a apropriação do conceito subjacente na atividade proposta. As especificações aqui referidas prendem-se com o contexto conjeturado no âmbito de uma engenharia didática onde se tentam antever possíveis alternativas de ações dos alunos. Neste sentido, deve-se ter em consideração a possibilidade de o aluno poder conceber vários níveis e/ou tipos de produtos alternativos (e formas de pensar subjacentes).

Brousseau (1996) sugere que a aprendizagem do aluno deve ocorrer mediante a sua adaptação num ambiente que envolve um elemento de contradição, de dificuldade ou desequilíbrio. Desta forma, no âmbito da engenharia didática é necessário que sejam idealizadas as possíveis respostas que esta adaptação proporciona, pois como refere o próprio autor (Brousseau, 1996), o problema colocado ao aluno é intencionalmente escolhido de tal modo que com a sua resolução ele adquira novos conhecimentos. Nesta perspetiva, o conhecimento do aluno assim adquirido é inteiramente justificado pela atividade do aluno, a qual, por seu turno, é totalmente sugerida pela situação, dai a necessidade de o professor conceber e fazer uma análise *a priori* no sentido de prever as metas almejadas com cada sessão de trabalho proposta numa engenharia didática.

Tal como sugere Artigue (1996), para a análise *a priori* podem ser consideradas variáveis de três naturezas, designadamente *variáveis globais, variáveis locais* e *variáveis de situação.*

Para o presente estudo, as *variáveis globais* consideradas consubstanciam-se na ponderação sobre o que, de forma geral, se pretende atingir com a implementação da sequência didática. Deste modo, o cerne da sequência didática foi sintetizado em três grandes eixos, a saber:

- Garantir uma abordagem metodológica centrada no aluno para o tratamento didático do tópico sucessões numéricas;

- Fomentar o uso das múltiplas representações dos objetos matemáticos, especificamente através da utilização da folha de cálculo na resolução de problemas;

- Estimular a exploração das múltiplas representações, de tal modo que os alunos conjeturem, testem, reformulem e reavaliem ideias até conceberem modelos conceptuais significativos, que possam ser comunicáveis e reutilizados.

As *variáveis locais,* aquelas concernentes à organização específica de cada uma das sessões da sequência didática, são nesta conformidade apresentadas adiante no plano de cada sessão. Por outro lado, as *variáveis de situação*, na sequência proposta no âmbito deste estudo, referem-se à escolha das atividades, à forma de trabalho e ao tempo necessário para trabalhá-las, sendo que também serão consideradas na planificação de cada sessão.

4.2.1 Análise *a priori* da primeira sessão: Problema do jardineiro

A primeira sessão foi subdividida em três secções[8] planificadas com a estrutura de verdadeiros ciclos que devem ser considerados sequencialmente, cada um terminando com a respetiva institucionalização do conhecimento matemático.

Em termos gerais, o objetivo didático dessa sessão foi o de explorar uma atividade propulsora de modelos, de modo a possibilitar que o estudante saiba:

- Compreenda o conceito e a definição de sucessão numérica, termo da sucessão, ordem de um termo e termo geral de uma sucessão;
- Identifique uma sucessão na forma recursiva e não recursiva;
- Reconheça uma progressão aritmética como caso especial de uma sucessão recursiva;

[8] Na ficha de atividade utilizada pelos alunos utilizei o vocábulo secção e não subsessão.

- Consiga identificar e comprovar algebricamente a monotonia de uma sucessão numérica;
- Tenha noção sobre possíveis factos subordinados à ordem numa sucessão.

A atividade proposta consiste em resolver um problema que pode presumivelmente suceder numa atividade quotidiana de jardinagem.

Tabela 8: O Problema do jardineiro

Problema proposto	Um jardineiro tem de regar roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea, cada uma distando 1m da outra. Ele enche o seu regador numa fonte situada na mesma vereda, a 15m da primeira roseira, e a cada viagem rega 3 roseiras. Supõe-se que começa e termina na fonte em cada viagem.
Secção I	A) Qual é a distância percorrida pelo jardineiro em cada uma das sucessivas viagens? A1) Procure um modelo ou fórmula que permita determinar a distância percorrida pelo jardineiro em cada viagem. B) Qual é o número total de roseiras que o jardineiro conseguirá regar à medida que for realizando as sucessivas viagens? B1) Procure uma expressão matemática a partir da qual seja possível obter o número total de roseiras que o jardineiro conseguirá regar em função das sucessivas viagens. C) Qual é o nome especial para o tipo de conjuntos obtidos nas alíneas A) e B)? D) Que designação se dá a cada elemento destes conjuntos?
Secção II	E) Nos conjuntos de valores obtidos nas alíneas A) e B), que relações observa entre valores consecutivos? E1) Será que através dos modelos obtidos nas alíneas A1) e B1) é possível comprovar a existência das relações referidas na alínea anterior? Se sim, demostre. Se não, justifique. G) Qual é a distância total que o jardineiro terá que percorrer até conseguir regar 60 roseiras? G1) Compare ou obtenha o resultado da alínea anterior, analiticamente.
Secção III	H) Sabendo que a capacidade do regador utilizado pelo jardineiro é de 10l, quantos litros de água gastará para conseguir regar 90 roseiras? H1) Procure um modelo ou fórmula para determinar a quantidade total de água que o jardineiro gastará no final das sucessivas viagens (considerando que a capacidade do regador é de 10 litros). a) O que há de característico neste modelo e nos anteriores?

Proposta de resolução

Secção I

Alínea A)

A distância da fonte até à 1ª roseira é 15m, mas terá que percorrer mais 2m para chegar à 3ª roseira, percorrendo assim 17m da fonte até a 3ª roseira e volta até à fonte, sendo a distância que terá que percorrer em toda viagem de 17+17 =34.

Na segunda viagem, a distância a percorrer pode ser calculada tendo como referência a distância percorrida na 1ª viagem. Nesta 2ª viagem, a ultima roseira a regar é a 6ª e a distância entre a 3ª e a 6ª roseira é 3m, faz este trajeto 2 vezes (ao ir e ao voltar) e isto implica que na 2ª viagem percorre 6m a mais em relação à 1ª viagem.

Na segunda viagem terá que percorrer 34+6=40m

Na terceira viagem, a distância a percorrer pode ser calculada tendo como referência a distancia prevista para a 2ª viagem. Nesta 3ª viagem a última roseira a regar é a 9ª e a distância entre a 6ª e a 9ª roseira é 3m, faz este trajeto 2 vezes (na ida e na volta), o que quer dizer que na 3ª viagem percorre 6m a mais em relação à 2ª viagem.

Na 3ª viagem terá que percorrer 40m+6m=46m

Nota-se pois que a distância a percorrer em cada viagem será a prevista para a viagem anterior acrescida de 6m.

Esta ideia pode ser implementada numa folha de cálculo e permitirá determinar vários termos da sucessão por recorrência e, de seguida, analisando os termos pode-se inferir um padrão (Figura 7).

G11 fx

	A	B	C	D	E
1	ordem da viagem	Distância		ordem da viagem	Distância
2	1	34		1	=6*D2+28
3	2	=+B2+6		2	=6*D3+28
4	3	=+B3+6		3	=6*D4+28
5	4	=+B4+6		4	=6*D5+28
6	5	=+B5+6		5	=6*D6+28
7	6	=+B6+6		6	=6*D7+28
8	7	=+B7+6		7	=6*D8+28
9	8	=+B8+6		8	=6*D9+28
10	9	=+B9+6		9	=6*D10+28
11	10	=+B10+6		10	=6*D11+28

H16 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ordem da viagem	Distância		ordem da viagem	Distância			
2	1	34		1	34			
3	2	40		2	40			
4	3	46		3	46			
5	4	52		4	52			
6	5	58		5	58			
7	6	64		6	64			
8	7	70		7	70			
9	8	76		8	76			
10	9	82		9	82			
11	10	88		10	88			
12	11	94		11	94			
13	12	100		12	100			

Figura 7: Excertos da folha de cálculo com fórmulas e resultados referentes ao cálculo das distâncias percorridas pelo jardineiro em cada viagem

Na alínea A1) espera-se que cada aluno considere a fórmula inserida no Excel para conceber a fórmula para exprimir o termo geral da sucessão obtida na alínea anterior.

Alínea B)

Conforme o enunciado do problema, em cada viagem o jardineiro rega 3 roseiras pelo que se pode considerar que:

Na 1ª viagem terá regado 3 roseiras;

Na 2ª viagem terá regado 3 roseiras, aumentando para 6 a quantidade de roseiras regadas já que na 1ª viagem terá regado 3;

Na 3ª viagem terá regado mais 3 roseiras, aumentando para 9 a quantidade de roseiras regadas.

Nota-se que a quantidade de roseiras que teria regado no final de cada viagem é igual as que já tinha regado até à viagem anterior adicionada de três unidades.

Esta ideia pode ser implementada numa folha de cálculo e podem-se assim determinar vários termos da sucessão por recorrência e depois encontrar um termo geral (Fig. 8).

H	I	J	K	L
ordem da viagem	Roseiras Regadas		ordem da viagem	Roseiras Regadas
1	3		1	=3*K2
2	=+I2+3		2	=3*K3
3	=+I3+3		3	=3*K4
4	=+I4+3		4	=3*K5
5	=+I5+3		5	=3*K6
6	=+I6+3		6	=3*K7
7	=+I7+3		7	=3*K8
8	=+I8+3		8	=3*K9

H	I	J	K	L
ordem da viagem	Roseiras Regadas		ordem da viagem	Roseiras Regadas
1	3		1	3
2	6		2	6
3	9		3	9
4	12		4	12
5	15		5	15
6	18		6	18
7	21		7	21
8	24		8	24
9	27		9	27

Figura 8: Excertos da folha de cálculo com fórmulas e resultados referentes ao cálculo das quantidades de roseiras regadas pelo jardineiro quando termina cada uma as sucessivas viagens

Na alínea B1), espera-se que o aluno encontre um termo geral equivalente à fórmula introduzida na folha de cálculo.

Nas alíneas C) e D) espera-se que o aluno apresenta uma proposta de como designar os tipos de conjunto e a designação dos seus elementos; as respostas dos alunos, provavelmente, não serão completas, ou seja, requererão melhoria visto que, tal como Lesh et al (2003) defendem, existem alguns conhecimentos importantes que não são apropriados sob a forma de construções autónomas do aluno é neste sentido que a construção é reconhecida como apenas um dos muitos processos relevantes na 'ampliação' do conhecimento ou do saber. Isto significa que o professor terá o dever de ajudar os alunos a aperfeiçoar a linguagem no sentido de utilizarem termos adequados.

Secção II

Na alínea E) espera-se que o aluno analise e descubra diversas relações entre os valores consecutivos e as relações podem ser inerentes a relações de ordem ou ainda inerentes a recursividade ou regularidade dos resultados quando os termos consecutivos são relacionados mediante alguma operação.

G) Para conseguir regar 60 roseiras, o jardineiro teria que efetuar 20 viagens, logo a distância total que teria que percorrer será a soma das distâncias, da 1ª à 20ª. Na folha de cálculo é possível obter este resultado com rapidez (Fig. 9). E esse é um bom momento para introduzir a fórmula da soma dos primeiros n termos de uma PA.

P	Q
ordem da viagem	Distância
1	34
2	40
3	46
4	52
5	58
6	64
7	70
8	76
9	82
10	88
11	94
12	100
13	106
14	112
15	118
16	124
17	130
18	136
19	142
20	148
TOTAL	1820

P	Q	R
ordem da viagem	Distância	
1	=6*P2+28	
2	=6*P3+28	
3	=6*P4+28	
4	=6*P5+28	
5	=6*P6+28	
6	=6*P7+28	
7	=6*P8+28	
8	=6*P9+28	
9	=6*P10+28	
10	=6*P11+28	
11	=6*P12+28	
12	=6*P13+28	
13	=6*P14+28	
14	=6*P15+28	
15	=6*P16+28	
16	=6*P17+28	
17	=6*P18+28	
18	=6*P19+28	
19	=6*P20+28	
20	=6*P21+28	
TOTAL	=SOMA(Q2:Q21)	

Figura 9: Excertos da folha de cálculo com fórmulas e resultados referentes ao cálculo da distância percorrida até regar 20 roseiras

Na alínea G1) pretende-se que o aluno apresente uma sugestão de resolução analítica, de modo a confirmar a solução obtida na alínea anterior ou a sugerir melhoria da mesma.

Na alínea H), através da folha de cálculo, pode-se observar que para regar 90 roseiras, o jardineiro teria que fazer 30 viagens e se cada viagem gasta 10 litros fica fácil calcular que para regar 90 roseiras o jardineiro teria que gastar 30X10l=300l.

Com a alínea H1) está previsto que o aluno apresente uma proposta de resolução analítica de modo a confirmar a solução obtida na alínea anterior ou a sugerir melhoria da mesma.

Por fim, na questão a), trata-se de levar o aluno a caracterizar a sucessão obtida na alínea anterior. O professor poderá complementar a resposta ou formular questões subsequentes que levem os alunos a rever as respostas no sentido de redirecionarem as suas ideias.

4.2.2 Análise *a priori* da segunda sessão: Problema de reprodução de vírus

A segunda sessão foi organizada num par de secções delineadas para gerarem verdadeiros ciclos sequenciais, cada uma terminando com a respetiva institucionalização do conhecimento.

Em termos didáticos, os objetivos fulcrais desta sessão é o de consolidar os modelos formados durante a primeira sessão e introduzir o conceito de progressão geométrica como caso especial de sucessão recursiva, assim como o conceito de subsucessão.

A atividade proposta consiste em resolver um problema que retrata uma situação que pode eventualmente ocorrer no âmbito de estudos de ciências biológicas ou durante um trabalho de laboratório de biologia.

Tabela 9: O Problema da reprodução de vírus

Problema proposto	Reprodução por Bipartição (ou divisão binária): Neste tipo de reprodução ocorre a divisão do organismo em dois, com semelhanças entre si. Apesar de se dividirem, estes fragmentos irão adquirir a mesma constituição do ser assexuado que sofreu o processo, pois continuam com as mesmas características. Neste processo poder-se-á dizer que a vida do ser que foi dividido cessou, pois este foi transformado em dois novos seres com características sensivelmente iguais. Tendo isto em conta, é o progenitor que perde a sua individualidade no processo de Bipartição, porque o núcleo é dividido numa primeira fase e só posteriormente é que o citoplasma irá dividir-se. E assim se formam dois indivíduos. Uma pessoa foi infetada por um único vírus, e sabe-se que a espécie de vírus se reproduz diariamente (em cada 24 h) por bipartição.

Secção I	A) Quantos vírus a pessoa infetada terá no seu organismo no 1.º, 2.º, 3.º e nos dias subsequentes? A1) Determine uma fórmula que permita calcular a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá em função do número de dias. A2) Determine uma expressão matemática que permita calcular o número total de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função da quantidade de vírus do dia anterior. B) Que relações nota entre elementos consecutivos da sucessão da alínea A)? B1) Comprove analiticamente as relações aludidas na alínea B).
Secção II	C) Quantos vírus a pessoa infetada terá no seu organismo ao completar a 1.ª semana, 2.ª semana, 3.ª semana,…? C1) Determine uma fórmula que permita calcular a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá em função do número de semanas. C2) Determine uma expressão matemática que permita calcular o número total de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função da quantidade de vírus da semana anterior. D) Compare os conjuntos obtidos nas alíneas A) e C). Comente a sua resposta.

Proposta de resolução

Secção I

Nas alíneas A), A1 e A2) prevê-se que o aluno determine, por recursividade ou por observação da ordem do termo, a quantidade de vírus que uma pessoa terá no dia seguinte.

Tabela 10: Ideia de resolução das alíneas A), A1 e A2.

Dia	Qt. viros	obs.: A verificação é feita no final do dia
1º	2	
2º	4	Qt. viros Anterior multiplicado por 2
3º	8	Qt. viros Anterior multiplicado por 2
4º	16	Qt. viros Anterior multiplicado por 2
	…	
(n-1) ésimo dia	a_{n-1}	
n ésimo dia	a_n	$a_n = 2 \times a_{n-1}$

Na questão B), espera-se que o aluno analise e descubra diversas relações entre os valores consecutivos, sendo que as relações podem ser inerentes a relações entre o termo e a ordem ou ainda inerentes a recursividade ou regularidade nos resultados quando os termos consecutivos são relacionados mediante alguma operação.

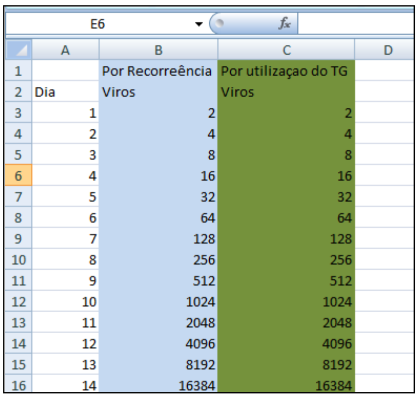
Em B1), espera-se que cada aluno proponha uma resolução analítica de modo a confirmar a solução obtida na alínea anterior ou apresente um melhoramento da mesma.

Nas questões C, C1 e C2) pretende-se que o aluno conjeture um procedimento para obter a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá no organismo no decorrer das semanas. Esta tarefa pode ser resolvida considerando a observação da ordem dos termos ou por recursividade. Através de um certo padrão o aluno poderá sugerir um termo geral para a sucessão.

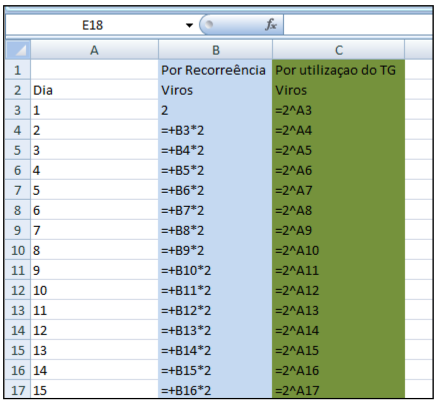
Tabela 11: Ideia de resolução das alíneas C, C1 e C2)

ordem	termo	Obs.: Os termos são potências de 2	
1	2	$2^1 = 2$	O expoente é igual ao nº que indica a ordem
2	4	$2^2 = 4$	O expoente é igual ao nº que indica a ordem
3	8	$2^3 = 8$	O expoente é igual ao nº que indica a ordem
4	16	$2^4 = 16$	O expoente é igual ao nº que indica a ordem
	…		O expoente é igual ao nº que indica a ordem
(n-1)	a_{n-1}	$a_{n-1} = 2^{n-1}$	O expoente é igual ao nº que indica a ordem
n	a_n	$a_n = 2^n$	O expoente é igual ao nº que indica a ordem

Neste problema, espera-se que os alunos recorram a ambas as formas de obter os termos da sucessão apresentadas na folha de cálculo MS-Excel (Fig. 10).



	A	B	C	D
1		Por Recorreência	Por utilizaçao do TG	
2	Dia	Viros	Viros	
3	1	2	2	
4	2	4	4	
5	3	8	8	
6	4	16	16	
7	5	32	32	
8	6	64	64	
9	7	128	128	
10	8	256	256	
11	9	512	512	
12	10	1024	1024	
13	11	2048	2048	
14	12	4096	4096	
15	13	8192	8192	
16	14	16384	16384	



	A	B	C
1		Por Recorreência	Por utilizaçao do TG
2	Dia	Viros	Viros
3	1	2	=2^A3
4	2	=+B3*2	=2^A4
5	3	=+B4*2	=2^A5
6	4	=+B5*2	=2^A6
7	5	=+B6*2	=2^A7
8	6	=+B7*2	=2^A8
9	7	=+B8*2	=2^A9
10	8	=+B9*2	=2^A10
11	9	=+B10*2	=2^A11
12	10	=+B11*2	=2^A12
13	11	=+B12*2	=2^A13
14	12	=+B13*2	=2^A14
15	13	=+B14*2	=2^A15
16	14	=+B15*2	=2^A16
17	15	=+B16*2	=2^A17

Figura 10:Fórmulas e resultados referentes ao cálculo de quantidades diárias de vírus

Para a situação das semanas subsequentes, observando os valores na folha de cálculo MS-Excel, foram extraídos os termos cuja ordem é um múltiplo de 7 e obteve-se a seguinte configuração:

Tabela 12: Quantidade de vírus ao completar as primeiras semanas

	Por Recorrência	Por utilização do TG
Dia	Viros	Viros
7	128	128
14	16384	16384
21	2097152	2097152
28	268435456	268435456
35	34359738368	34359738368

Utilizando os mesmos raciocínios considerados na alínea a), obtém-se o termo geral e a fórmula de recorrência.

Tabela 13: Obtenção recursiva da quantidades de vírus que a pessoa terá ao completar as primeiras semanas

	Por Recorrência	obs.: A verificação é feita no momento em que completa a semana
Semana	Viros	
1ª	128	
2ª	16384	Qt. viros Anterior multiplicado por 128 ou 2 expoente 7
3ª	2097152	Qt. viros Anterior multiplicado por 128 ou 2 expoente 7
4ª	268435456	Qt. viros Anterior multiplicado por 128 ou 2 expoente 7
5ª	34359738368	Qt. viros Anterior multiplicado por 128 ou 2 expoente 7
...	...	
(n-1) ésima semana	b_{n-1}	
n-ésima semana	b_n	$b_n = 128 \times b_{n-1}$

Tabela 14: Ideias conducentes à obtenção do termo geral

		Por utilizaçao do TG	
ordem	termo	Viros	
1	128	$128 = 2^7$	O expoente é igual ao produto do nº que indica a ordem por 7
2	16384	$16384 = 2^{14} = 2^{7\times2}$	O expoente é igual ao produto do nº que indica a ordem por 7
3	2097152	$2097152 = 2^{14} = 2^{7\times3}$	O expoente é igual ao produto do nº que indica a ordem por 7
4	268435456	$268435456 = 2^{14} = 2^{7\times4}$	O expoente é igual ao produto do nº que indica a ordem por 7
	...		
n	a_n	$a_n = 2^{7\times n}$	

Os conjuntos (sucessões) das alíneas a) e b) têm diversas relações e espera-se que os alunos concluam que os termos obtidos na alínea b) formam um subconjunto dos obtidos na alínea a), sendo essa uma forma e oportunidade para introduzir a noção de subsucessão.

4.2.3 Análise *a priori* da terceira sessão: Problema de cubos de gelos no copo

A terceira sessão foi configurada como uma situação onde os alunos têm que complementar os dados fornecidos, sugerindo dimensões para um copo. Desta forma, acredita-se que o aluno dará mais sentido ao problema, uma vez que a escolha das dimensões do copo fazem com que o aluno imagine um copo que exista na realidade.

Em termos didáticos, os objetivos fulcrais dessa sessão são os de consolidar indiretamente os modelos formados durante as primeiras sessões e introduzir o conceito de infinitamente grande como caso observável ou percetível para n-suficientemente grande, bem como o princípio de que alguns atributos de sucessão têm sentido a partir de uma certa ordem.

A atividade proposta consiste em resolver um problema que retrata uma situação que pode naturalmente ocorrer num restaurante onde um cliente pode solicitar ao *garçon* para introduzir cubos de gelos num copo que já contem alguma quantidade de refrigerante.

Tabela 15: Problema de cubos de gelos no copo

Problema proposto	Um copo cilíndrico contém água até meio da sua altura. Dentro do copo irão ser colocados sucessivamente cubos de gelo de dimensões aproximadamente iguais (2 x 2 x 2 cm). Como a densidade do gelo é aproximadamente 0,9, então a quantidade de água que um cubo desloca ao ser mergulhado no copo será 0,9 vezes o seu volume. Prova-se ainda que o nível da água no copo não depende de que o gelo esteja derretido ou não. (Escolha um valor para o raio da base e outro para a altura do copo).
Secção única	A1) Apresente os diversos níveis que a água atingirá à medida que vão sendo introduzidos sucessivos cubos de gelo. A2) Mostre analiticamente que o nível de água no copo depende do número de cubos de gelo que forem introduzidos. B1) Que relação observa entre cada nível atingido pela água e o nível anterior? B2) Defina essa relação analiticamente. C1) Como carateriza esta sucessão relativamente à sua monotonia? Recorrendo a um gráfico, explique como isto pode ser percebido. C2) Explique analiticamente a sua resposta. D) Quantos cubos de gelo serão necessários para que o copo transborde? Justifique a sua resposta.

Proposta de resolução

Secção única

Na questão A) espera-se que os alunos escolham as possíveis dimensões do copo cilíndrico e considerando a fórmula para o cálculo do volume do cilindro, cada aluno irá estabelecer a relação entre o nível da água e a altura do copo, fazendo as devidas suposições.

O volume de um cilindro é dado por:

$V = \pi r^2 \times h$

A água dentro do copo toma a forma de um cilindro pelo que o seu nível passa a ser visto como altura de um cilindro:

$h = \frac{V}{\pi r^2}$

onde V é o volume inicial da água e h é o nível inicial.

Na alínea B) espera-se que os alunos façam uma verdadeira aplicação da fórmula para o cálculo do volume do cilindro e a ajustem para explicar e prever a situação sugerida no problema.

O nível de água no copo depende do número de cubos de gelo que lá se encontram.

A relação matemática que se pretende é:

$h_n = \frac{V + (8 \times 0{,}9cm^3)n}{\pi r^2}$

O valor do raio do copo e o valor do volume inicial de água será escolhido pelo aluno. A ideia é a de verificar que no fim os alunos têm modelos equivalentes.

O nível de água no copo quando se coloca um cubo de gelo depende do nível existente antes desse cubo de gelo:

$$h_V = \frac{V}{\pi r^2} + \frac{7{,}2cm^3}{\pi r^2}$$

O valor do raio do copo será escolhido pelo aluno; mais uma vez, a ideia é verificar que no fim os alunos têm modelos equivalentes.

Assim, V é a única variável neste modelo.

Nas alíneas B1) e B2) os alunos poderão realçar as relações entre os termos consecutivos, com maior enfâse para as relações termo-ordem e também fazer uma análise algébrica sobre a validade destas relações.

Na alínea C1) espera-se que o aluno faça algumas considerações quanto à monotonia da sucessão (que é crescente) e isso permitirá introduzir a análise algébrica da monotonia e depois a respetiva interpretação com base no gráfico.

Na questão D) a intenção é saber a que registo de representação o aluno recorre para justificar a sua resposta. Os alunos podem responder, recorrendo à tabela do MS-Excel, observando os dados nas colunas, ou observando o gráfico.

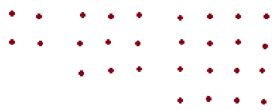
4.2.4 Análise *a priori* da quarta sessão: Problema das laranjeiras

A quarta sessão é constituída por duas subsecções planificadas como ciclos sequenciais, cada uma terminando com a respetiva institucionalização do conhecimento.

Em termos didáticos, os objetivos fulcrais desta sessão são: consolidar os modelos formados nas sessões anteriores e introduzir o conceito de sucessão convergente.

A atividade proposta consiste em resolver um problema que retrata uma situação que pode hipoteticamente ocorrer no âmbito de uma atividade agrícola onde o agricultor pode, por motivos estéticos, recorrer a uma configuração geométrica para enfileirar as árvores que planta e posteriormente recorrer a métodos quantitativos para caracterizar a plantação ao longo dos sucessivos dias.

Tabela 16: O Problema das laranjeiras

Problema **proposto**	Um fazendeiro deseja plantar um pomar de citrinos e para iniciar a plantação desenhou um quadrado no chão com 1m de lado e plantou uma laranjeira em cada um dos vértices. Diariamente plantava uma fila horizontal e uma vertical de tal modo que a forma quadrada da zona com plantação de laranjeiras fosse conservada, mantendo a disposição das árvores em quadrado (conforme a figura). 

Secção I	A1) Quantas laranjeiras o fazendeiro plantou em cada um dos primeiros 100 dias? A2) Explique como obter a resposta analiticamente. B1) Quantas laranjeiras estarão plantadas na fazenda em cada um dos primeiros 100 dias? B2) Explique como obter a resposta analiticamente. C1) Quantos metros quadrados terá a plantação em cada um dos primeiros 100 dias? C2) Explique como obter a resposta analiticamente.
Secção II	D1) A densidade populacional (quantidade de indivíduos por metro quadrado) varia de dia para dia. Mostre este facto considerando os primeiros 100 dias. D2) Proponha uma expressão analítica para a densidade populacional em função do numero de dias. E) De que valor se aproximam os termos da sucessão obtida na alínea anterior? A que conclusões podemos chegar sobre a convergência da sucessão?

Proposta de resolução

Secção I

Alíneas A1 e A2)

No 1º dia foram plantadas 4 laranjeiras.

No 2º dia, já que aumenta uma coluna e uma linha e se procura conservar a forma quadrada da zona plantada, considerando o esquema sugerido no enunciado do problema, é possível observar que há um aumento de 5 laranjeiras.

No terceiro dia o número aumenta em 7 laranjeiras. No quarto dia aumenta em 9 laranjeiras.

Nota-se que no 3º e 4º dia o fazendeiro plantou 2 laranjeiras a mais que no dia anterior; com esta ideia e utilizando a recursividade, podem-se obter vários termos da sucessão na folha de cálculo (Fig. 11).

$u_1 = 4$, $u_2 = 5$ e $u_n = u_{n-1} + 2$, com $n > 2$

Observando com atenção os termos obtidos por recursão, pode-se encontrar outros padrões e conseguir uma fórmula para o termo geral: $u_1 = 4$ e $u_n = 2n + 1$, com $n > 1$

A14

	A	B	C	D	E
1					
2	Ordem do dia	Laranjeiras plantadas		Ordem do dia	Laranjeiras plantadas
3	1	4		1	4
4	2	5		2	5
5	3	7		3	7
6	4	9		4	9
7	5	11		5	11
8	6	13		6	13

D19

	A	B	C	D	E
1					
2	Ordem do dia	Laranjeiras plantadas		Ordem do dia	Laranjeiras plantadas
3	1	4		1	4
4	2	5		2	=2*D4+1
5	3	=+B4+2		3	=2*D5+1
6	4	=+B5+2		4	=2*D6+1
7	5	=+B6+2		5	=2*D7+1
8	6	=+B7+2		6	=2*D8+1
9	7	=+B8+2		7	=2*D9+1

Figura 11: Fórmulas e resultados referentes a quantidades diárias de laranjeiras plantadas

Espera-se que os alunos consigam explicar a obtenção do termo geral, referenciando o que realmente foi feito durante a resolução.

Considerando as alíneas B1 e B2), no 1º dia foram plantadas 4 laranjeiras e no segundo dia foram acrescentadas 5 perfazendo 9, no terceiro dia foram plantadas 7 e com as 9 que já existiam, o pomar passou a ter 16 laranjeiras; então, já se pode notar que se trata do conjunto dos quadrados de números naturais maiores que 1.

$$u_n = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Na folha de cálculo, é possível obter vários termos desta sucessão (Fig. 12).

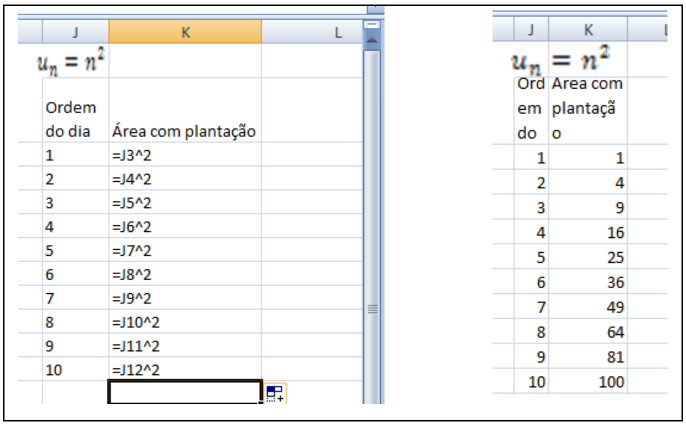
G	H
$u_n = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$	
Ordem do dia	Total de Laranjeiras plantadas
1	4
2	9
3	16
4	25
5	36
6	49
7	64
8	81
9	100
10	121

G	H
$u_n = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$	
Ordem do dia	Total de Laranjeiras plantadas
1	=(G3+1)^2
2	=(G4+1)^2
3	=(G5+1)^2
4	=(G6+1)^2
5	=(G7+1)^2
6	=(G8+1)^2
7	=(G9+1)^2
8	=(G10+1)^2
9	=(G11+1)^2
10	=(G12+1)^2

Figura 12: Fórmulas e resultados relativos à quantidade de laranjeiras plantadas em função dos dias

Espera-se que os alunos sejam capazes de observar o que foi construído durante a resolução e desse modo consigam formular uma explicação sobre como foi obtido o cálculo e como poderão chegar ao termo geral da sucessão representada.

Para as questões C1 e C2), observando o esquema sugerido no enunciado, nota-se que no 1° dia há um quadrado que, segundo os dados do problema, tem a área de 1 metro quadrado; no 2° dia há 4 desses quadrados (pelo que a área será de 4 metros quadrados) e no 3° dia a quantidade destes quadrados passa a ser 9 o que implica que a área da zona com plantação será de 9 metros quadrados. É possível notar que se trata do conjunto dos quadrados dos números naturais, ou seja, $u_n = n^2$. Na folha de cálculo é possível obter mais termos dessa sucessão (Fig.13).



$u_n = n^2$

Ordem do dia	Área com plantação
1	=J3^2
2	=J4^2
3	=J5^2
4	=J6^2
5	=J7^2
6	=J8^2
7	=J9^2
8	=J10^2
9	=J11^2
10	=J12^2

$u_n = n^2$

Ordem do	Area com plantaçã o
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Figura 13: Fórmulas de resultados para a área total com plantação como função dos dias

Espera-se ainda que os alunos consigam observar padrões numéricos e a partir daí conjeturar um termo geral para a sucessão. Com efeito, cada aluno poderá considerar tudo que foi feito durante a resolução e a partir daí é de admitir que consiga formular uma explicação sobre como foi obtido ou como poderá obter o termo geral da sucessão construída.

Secção II

Na Alínea D) refere-se que a densidade populacional de laranjeiras em cada dia é o quociente da quantidade de plantas por área com plantação.

Espera-se que os alunos reutilizem os resultados já obtidos nas alíneas anteriores e, através da folha de cálculo, calculem vários termos desta sucessão, calculando os quocientes (Fig. 14).

Q	R	S
	$u_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$	
Ordem do dia	densidade	
1	4	
2	2,25	
3	1,777777778	
4	1,5625	
5	1,44	
6	1,361111111	
7	1,306122449	
8	1,265625	
9	1,234567901	
10	1,21	
11	1,190082645	
12	1,173611111	
13	1,159763314	
14	1,147959184	
15	1,137777778	
16	1,12890625	

Q	R
	$u_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$
Ordem do dia	densidade
1	=(Q3^2+2*Q3+1)/Q3^2
2	=(Q4^2+2*Q4+1)/Q4^2
3	=(Q5^2+2*Q5+1)/Q5^2
4	=(Q6^2+2*Q6+1)/Q6^2
5	=(Q7^2+2*Q7+1)/Q7^2
6	=(Q8^2+2*Q8+1)/Q8^2
7	=(Q9^2+2*Q9+1)/Q9^2
8	=(Q10^2+2*Q10+1)/Q10^2
9	=(Q11^2+2*Q11+1)/Q11^2
10	=(Q12^2+2*Q12+1)/Q12^2
11	=(Q13^2+2*Q13+1)/Q13^2
12	=(Q14^2+2*Q14+1)/Q14^2
13	=(Q15^2+2*Q15+1)/Q15^2
14	=(Q16^2+2*Q16+1)/Q16^2
15	=(Q17^2+2*Q17+1)/Q17^2
16	=(Q18^2+2*Q18+1)/Q18^2

Figura 14: Fórmulas de resultados relativas à densidade em função dos dias

Antecipa-se que os alunos compreendam e manifestem a compreensão de que cada termo foi obtido mediante a combinação de termos pertencentes a duas sucessões anteriormente obtidas. E que se trata de calcular a razão dos TG das duas, sucessões:

$$u_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$$

Os quocientes obtidos nestes moldes levarão os alunos a concluírem que os termos da sucessão se aproximam significativamente a 1 e que portanto a sucessão é convergente.

4.2.5 Análise *a priori* da quinta sessão: Problema de batimento do coração

A quinta, e última sessão, foi composta por duas subsecções planificadas como ciclos sequenciais, cada uma terminando com a respetiva institucionalização dos tópicos tratados. O problema foi proposto de tal modo que os dados iniciais a utilizar serão sugeridos pelo solucionador.

Em termos didáticos, os objetivos fulcrais dessa sessão são os de introduzir e explorar o conceito de sucessão alternada e suas propriedades.

A atividade proposta consiste em resolver um problema que retrata uma situação que pode relacionar-se com o monitoramento do coração e posteriormente recorrer a métodos quantitativos para manipular os dados.

Tabela 17: O Problema do batimento do coração

Problema proposto	Ciclo cardíaco é um conceito referente aos eventos relacionados com o fluxo e pressão sanguínea que ocorrem desde o início de um batimento cardíaco até ao próximo batimento. Em resumo, o ciclo cardíaco é dividido em dois momentos: o de relaxamento, chamado diástole, quando o coração se distende ao receber o sangue, e o de contração, denominado sístole, quando ele ejeta o sangue.
Secção I	Atribua um valor numérico para diástole e outro para sístole. A) Construa analiticamente a sucessão Un que representa n ciclos cardíacos (diástole e sístole). B) Fale sobre a monotonia da sucessão Un e justifique com base numa representação gráfica ou por meio de uma tabela. C1) Obtenha a média de cada 2 termos consecutivos da sucessão Un e escreva o termo geral desta nova sucessão Vn. C2) Caracterize a sucessão Vn (convergência, monotonia, majorante, minorante, limitação).
Secção II	D1) Determine a diferença entre cada termo da sucessão Un e o termo correspondente da sucessão Vn e escreva o termo geral desta nova sucessão, Wn. D2) Caracterize a sucessão Wn (convergência, monotonia, majorante, minorante, limitação).

Proposta de resolução

Secção I

Os números propostos para diástole e sístole poderão ser: -1 e 1, respetivamente.

Na alínea A) a sucessão será a seguinte: -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1,…

Analiticamente a sucessão pode ser representada mediante o termo geral:

$$u_n = \begin{cases} -1 & \text{se n for} \quad \text{ímpar} \\ 1 & \text{se n for} \quad \text{par} \end{cases} \quad \text{ou} \quad u_n = (-1)^n$$

A resposta à alínea B) tem a ver com a definição de sucessão alternada. Espera-se que os alunos justifiquem ou expliquem esta ideia, recorrendo, por exemplo, a representações gráficas (Fig. 15).

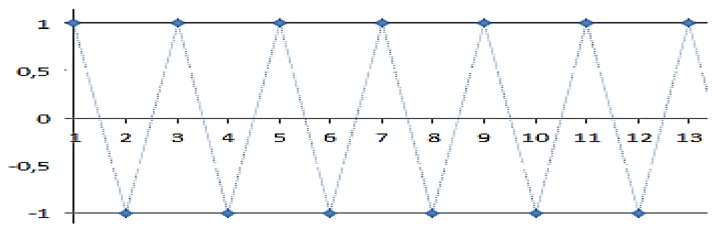


Figura 15: Gráfico da sucessão alternada que representa o ciclo cardíaco

Do 1º ao 2º termo, a sucessão decresce e ao passar do 2º ao 3º termo a sucessão cresce; e continua com esta alternância.

Na resposta à alínea C1), as médias de termos consecutivos são: 0, 0, 0, 0, 0, 0, …

O termo geral desta sucessão é Vn=0

A sucessão Vn é convergente, não é monótona e é constante, tem majorante e minorante 0 e portanto é limitada.

Secção II

As diferenças entre cada termo da sucessão Un e o termo correspondente da sucessão Vn são:

-1-0, 1-0, -1-0, 1-0, -1-0, 1-0, -1-0, 1-0, -1-0, 1-0, -1-0, 1-0, -1-0, 1-0, -1-0,…

-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1,…

$Wn = (-1)^n$ é a nova sucessão que, neste caso, é igual à sucessão inicial.

Espera-se que cada aluno encontre a típica sucessão alternada de termos -1 e 1.

Para a alínea D2), é de esperar que o aluno conclua que a sucessão Wn é divergente, é alternada, o majorante é 1 e o minorante é -1; portanto, é uma sucessão limitada.

Capítulo 5

Análise de Dados

Este capítulo apresenta a análise de dados empíricos, baseada essencialmente na análise de conteúdo de dados qualitativos recolhidos em sala de aula. Os dados incluem as gravações das ações realizadas no computador pelos alunos selecionados e respetivas explicações e narrações, produzidas oralmente, as quais foram igualmente gravadas em áudio. Estas gravações foram obtidas com o auxílio do *software aTube Catcher* (*Screen Recorder*).

Acrescem aos dados das gravações, os registos escritos dos alunos, contendo as suas respostas e resultados, relativamente às questões colocadas em cada atividade que foi realizada com recurso à folha de cálculo. Por fim, foram ainda utilizados os ficheiros produzidos pelos alunos na própria folha de cálculo no decurso de cada atividade.

A análise será conduzida, segundo um padrão uniforme, estando organizada em 3 secções, cada uma delas correspondendo a um dos alunos-caso. Para cada caso, será apresentada uma descrição da atividade desenvolvida, em cada questão proposta, documentada e complementada com recortes de explicações orais do aluno, bem como de figuras retiradas dos seus relatórios escritos e imagens capturadas de ecrãs do computador. Pretende-se com esta descrição dar uma visão global das resoluções do aluno, dos seus raciocínios e abordagens e do modo como usou a folha de cálculo para concretizar os seus objetivos. Numa segunda fase, a análise debruça-se sobre aspetos específicos do estudo, designadamente: i) identificação dos tipos de representações semióticas utilizados em cada questão e respetivos tratamentos e conversões, tendo por base a Teoria dos Registos de Representações Semióticas; e ii) os modelos construídos e/ou utilizados pelos alunos, incluindo as várias formas que tais modelos foram assumindo ao longo da resolução das questões, tendo por base o contexto do problema proposto e os conceitos matemáticos que deste emergiram, segundo a Teoria de Modelos e Modelação.

Por último, é feita uma síntese dos elementos mais evidentes que se observam, de acordo com cada uma das perspetivas teóricas, colocando-os em paralelo, de modo a permitir uma melhor compreensão das possíveis relações entre os dois aspetos centrais da análise: o uso de representações semióticas, envolvendo o recurso à folha de cálculo, e também a construção e o desenvolvimento de modelos conceptuais da situação explorada.

5.1 Caso do Aluno 1

Nesta secção é apresentado o caso do Aluno 1, centrado nas resoluções que este aluno desenvolveu para as cinco tarefas propostas. Para cada uma das tarefas, é feita uma descrição detalhada dos processos de resolução e dos raciocínios e produções do aluno, ao longo das várias questões da tarefa, sustentada nos dados provenientes da gravação do ecrã do computador, das suas afirmações verbais ao longo da atividade, dos ficheiros da folha de cálculo e do relatório escrito que realizou. Numa segunda fase, propõe-se, para cada tarefa, uma análise interpretativa da atividade do aluno, sob o ponto de vista da Teoria de Registos de Representações Semióticas e sob a ótica da Teoria de Modelos e Modelação. Por fim, sugere-se uma análise comparativa, baseada na síntese dos resultados fundamentais resultantes da análise elaborada no âmbito de cada uma das perspetivas teóricas adotadas.

5.1.1 Resolução da Tarefa 1 – Jardim de roseiras

Resolução da alínea A

Depois da leitura da tarefa (Anexo 4), o Aluno 1 começou por fazer um esquema, traçando uma semirreta, indicando a fonte na origem da mesma e a localização das roseiras ao longo dessa linha (Fig. 16).

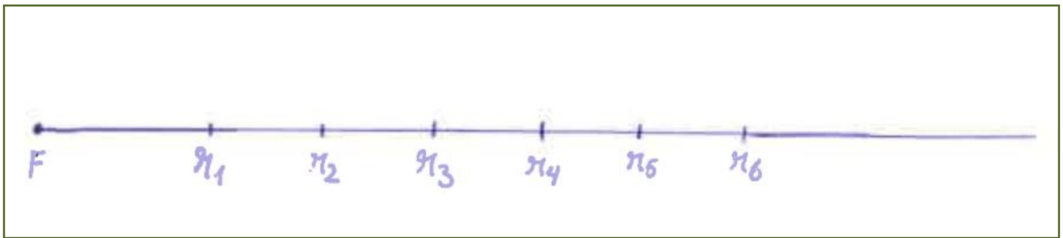


Figura 16: Representação esquemática da fonte e fila das roseiras

Baseando-se no esquema, considerou depois as distâncias entre a fonte e cada uma das roseiras e, tendo em conta os dados da tarefa, destacou a distância a que se encontra a última roseira regada em cada viagem. Para isso, introduziu várias notações, entre as quais, a designação das roseiras de forma sequencial, r_1, r_2, r_3, etc., assim como a distância da fonte

a cada uma delas por meio de uma simbologia coerente, em que *F* representa a localização da fonte (Fig. 16). Com esta primeira abordagem, aparentemente o Aluno 1 reconheceu que teria uma última roseira a ser regada em cada viagem, numa certa sequência, isto é, na 1ª viagem seria a 3ª roseira, na 2ª viagem seria a 6ª roseira, e assim por diante (Fig. 17).

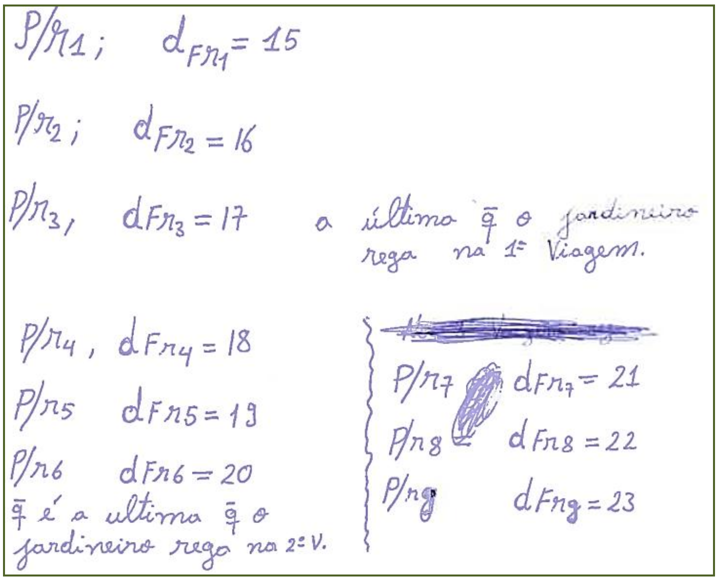


Figura 17: Distância entre a fonte e cada roseira regada em cada viagem

O aluno regista então na folha de cálculo as distâncias entre a fonte e a última roseira regada em cada uma das sucessivas viagens, utilizando as colunas A e B (Fig. 18). Na coluna A, introduz um símbolo que escolheu para representar as viagens, idêntico à designação dos termos de uma sucessão v_n, e na coluna B coloca as distâncias referidas, que tinha anteriormente calculado no papel.

	A	B
1		
2	V1	17
3	V2	20
4	V3	23
5	V4	26

Figura 18: Distâncias entre a fonte e a última roseira regada em cada uma das sucessivas viagens

Depois de considerar e registar na folha de cálculo as distancias entre a fonte e cada última roseira regada em cada viagem, o aluno teve em atenção que as distâncias então registadas correspondiam a um percurso de ida do jardineiro. Percebeu que havia necessidade de considerar o percurso de volta, em cada viagem, e concluiu que poderia recorrer à adição reflexiva ou a multiplicação por dois para obter o valor numérico das distâncias percorridas nas sucessivas viagens do jardineiro. De facto, o aluno parece ter considerado importante ensaiar os dois modelos para a obtenção da distância percorrida, razão pela qual obteve os mesmos resultados em duas colunas diferentes (colunas D e E) (Fig. 19).

	A	B	C	D	E
1					
2	V1	17		34	34
3	V2	20		40	40
4	V3	23		46	46
5	V4	26		52	52
6	V5	29		58	58
7	V6	32		64	64

	A	B	C	D	E
1					
2	V1	17		=17+17	=2*17
3	V2	20		=20+20	=2*20
4	V3	23		=23+23	=2*23
5	V4	26		=B5+B5	=B5*2
6	V5	29		=B6+B6	=B6*2
7	V6	32		=B7+B7	=B7*2

Figura 19: Construção da sucessão das distâncias percorridas pelo jardineiro

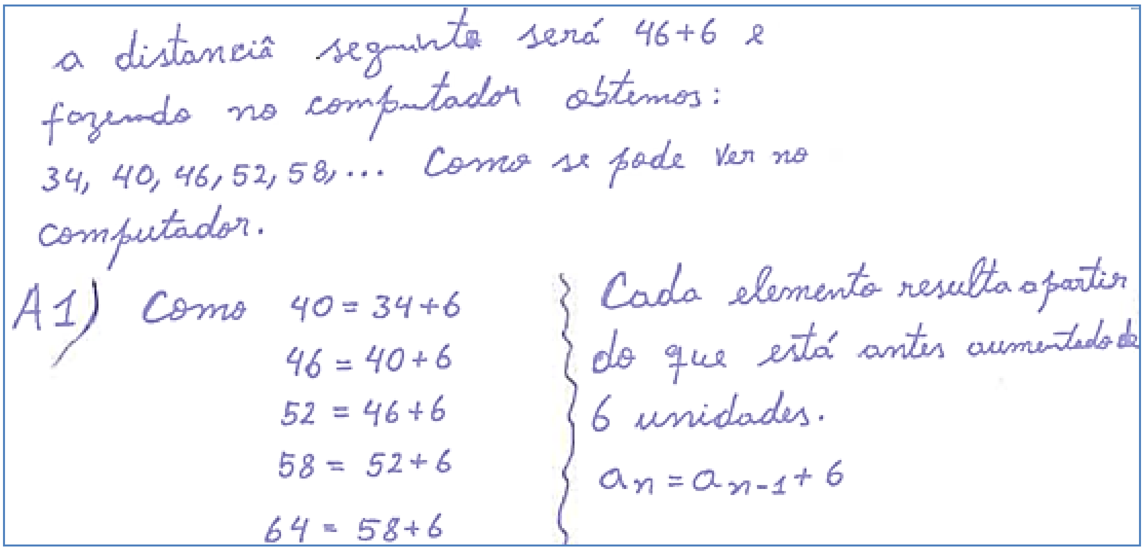
O Aluno 1 apresenta no seu relatório (Fig. 20) o modo como obteve algumas destas distâncias mas destaca que através do computador é possível obter (ou observar) um maior conjunto de distâncias percorridas, referindo-se naturalmente à reprodução automática da fórmula que aplicou na folha de cálculo.

No 1º Viagem o jardineiro percorre 17m ao ir e 17m ao Voltar, então ~~percorre~~ percorre no total
$17+17 = 2\times 17 = 34m$.
Na segunda Viagem $20m+20m = 2\times 20m = 40m$
Na 3ª " $23m+23m = 2\times 23m = 46m$
Atravez do computador dá para obter as outras distâncias percorridas nos Viagens.

Figura 20: Relatório do Aluno 1 de como obteve as primeiras distâncias que o jardineiro percorreu

Resolução da alínea A1

Para obter o modelo matemático que permitiria descrever a distância percorrida pelo jardineiro nas sucessivas viagens, o Aluno 1 procurou padrões numéricos na folha de cálculo e, depois de algumas tentativas, conseguiu estabelecer uma forma de cálculo por recorrência. O aluno considerou, como exemplo, a distância percorrida durante a 3ª viagem (a última registada pelo aluno no papel); percebeu então que a distância seguinte seria dada por 46+6 e que através da folha de cálculo, todas as sucessivas distâncias poderiam ser obtidas dessa forma. Desse modo, estabelece uma expressão algébrica para o cálculo dos termos da sucessão que designa por a_n (Fig. 21); contudo, não apresenta o primeiro termo, ainda que possa estar implícito na sua explicação que se trata do valor 34.


a distanciâ seguinte será 46+6 e
fazendo no computador obtemos:
34, 40, 46, 52, 58... Como se pode ver no
computador.

A1) Como $40 = 34+6$
$46 = 40+6$
$52 = 46+6$
$58 = 52+6$
$64 = 58+6$

Cada elemento resulta a partir do que está antes aumentado de 6 unidades.
$a_n = a_{n-1} + 6$

Figura 21: Excerto do relatório do Aluno 1 com a resposta à alínea A1 (Tarefa 1)

Resolução da alínea B

O aluno recorre imediatamente à folha de cálculo para responder à questão de determinar o número de roseiras que ficariam regadas após cada viagem do jardineiro. Neste caso, numa das colunas, escreveu novamente V1 (que significa 1ª viagem) e, a seguir, escreveu o número 3 na coluna ao lado. Na linha seguinte escreveu V2 (que significa 2ª viagem) e na coluna ao lado efetuou a operação “3+3”. Ao escrever V3 na linha seguinte, o aluno comentou que na 3ª viagem o jardineiro rega mais 3 roseiras e realizou o cálculo “6+3” na coluna ao lado (Fig. 22).

I	J	K	L
V1	3	3	
V2	6	6	
V3	9	9	
V4	=9+3	12	
		15	
		18	
		21	

Figura 22: Cálculo recursivo das quantidades de roseiras que ficariam regadas após cada viagem do jardineiro

Em seguida, o Aluno 1 registou estes valores no papel, onde procurou descrever o seu raciocínio e aí referiu que os valores foram obtidos no computador. Na sua descrição, mostra ter usado um raciocínio recursivo, em que considera um acréscimo constante de 3 roseiras (“rega mais 3”) em cada nova viagem do jardineiro (Fig. 23).

B) Dados
$V_1 = 3$ roseiras regadas
~~$V_2 = 3$ " " mais os 3 regadas no 1º Compl~~
Quando faz a 2ª V rega mais 3, completa 6. Tal como se pode ver no computador.
" faz a 3ª V. rega " 3, " 9
" faz a 4ªV " mais 3, " 12

Figura 23: Registo de quantidades de roseiras que ficariam regadas após cada viagem do jardineiro

Posteriormente, o aluno volta ao Excel e cria a coluna K, começando por escrever os números 3, 6, 9, 12. Depois, ao arrastar a alça da seleção de células, consegue obter os seguintes termos da sequência linear de incremento 3. Por fim, responde no papel à questão em causa, usando linguagem corrente (Fig. 24).

R: As quantidades que conseguirá regar são: 3, 6, 9, 12, 15, 18...

Figura 24: Resposta do Aluno 1 à alínea B (Tarefa 1)

Resolução da alínea B1

O Aluno 1, depois de observar e de comprovar na folha de cálculo que os números escritos na coluna K eram múltiplos de 3, decidiu criar uma relação ente a ordem dos termos e o valor dos termos. Na coluna O, escreveu os números que representam a ordem dos termos, encabeçados pelo título *n*. Depois, na coluna M, ensaiou a fórmula para obter os múltiplos de 3. Por fim, na coluna P e na célula P1, escreveu como cabeçalho a expressão algébrica para os múltiplos de 3 e logo a seguir introduziu uma fórmula para obter esses múltiplos de 3, como se pode ver na figura 25; assim, usou fórmula “=3*O2”, arrastou ao longo da coluna P, obtendo os mesmos valores que antes tinha encontrado na coluna K.

I	J	K	L	M	N	O	P
						n	3*n
V1	3	3		3		1	3
V2	6	6		6		2	6
V3	9	9		9		3	9
V4	12	12				4	12
		15				5	15
		18				6	18
		21				7	21
		24				8	24

I	J	K	L	M	N	O	P
						n	3*n
V1	3	3		=3*1		1	=3*O2
V2	6	6		=3*2		2	=3*O3
V3	9	9		=3*3		3	=3*O4
V4	=9+3	12				4	=3*O5
		15				5	=3*O6
		18				6	=3*O7
		21				7	=3*O8

Figura 25: Cálculo da quantidade total de roseiras regadas após cada viagem e em função da quantidade que já estava regada

Ao registar no papel o aluno generalizou destacando que os números ora obtidos (termos da sucessão) são múltiplos de 3 e nesta ocasião o aluno usou a expressão $Q_n = 3n$ (Fig. 26).

B1) As quantidades representam múltiplos de 3
matemáticamente podemos escrever $3*n$
ou $Q_n = 3n$.

Figura 26: Excerto da resposta da alínea B1 apresentada pelo Aluno 1 (Tarefa 1)

Resolução das alíneas C e D

Relativamente às questões C e D, que visavam aferir questões de nomenclatura para os conjuntos de valores encontrados nas respostas anteriores, o Aluno 1 transcreveu para o papel as suas respostas, sem mostrar dificuldades (Fig. 27).

C) Os tipos de conjuntos obtidos nas alíneas A e B
são chamados de sequências.

D) Cada elemento é termo da sequência.

Figura 27: Excerto das respostas das alíneas C) e D) apresentadas pelo Aluno 1 (Tarefa 1)

Resolução da alínea E

Na alínea E, era pedida uma análise das sucessões obtidas até ao momento (duas progressões aritméticas). O aluno começa por referir que, em cada sucessão, cada termo é diferente do outro. Explorando as ferramentas do MS-Excel, ele faz um gráfico de pontos da sucessão obtida na alínea B, isto é, o número de laranjeiras que estão regadas após cada viagem (Fig. 25). E apontando o cursor sobre o gráfico (Fig 28), sublinha que a partir da imagem produzida pelo computador, é possível observar o seguinte:

> "Cada termo é diferente do outro. A partir do computador, dá para ver que o gráfico sobe, ou seja, cada termo é menor que o seguinte".

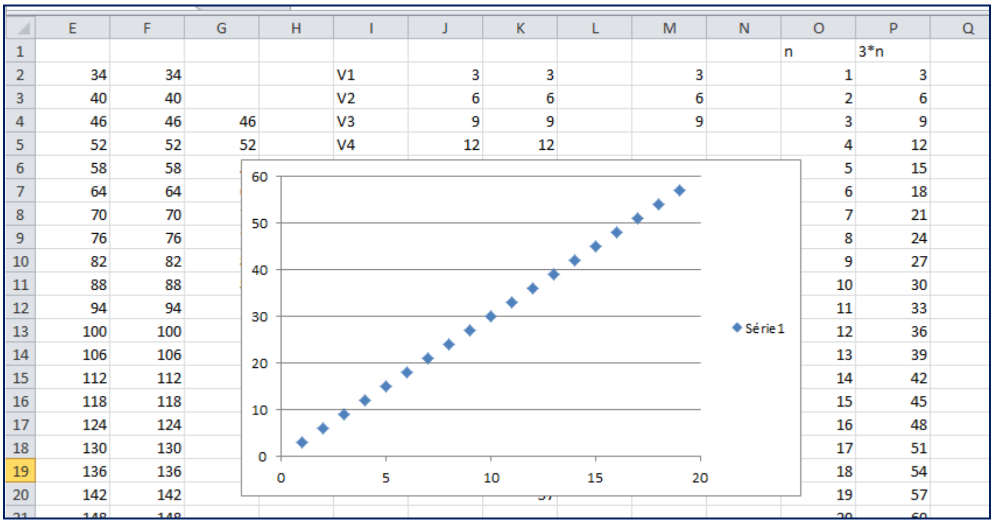
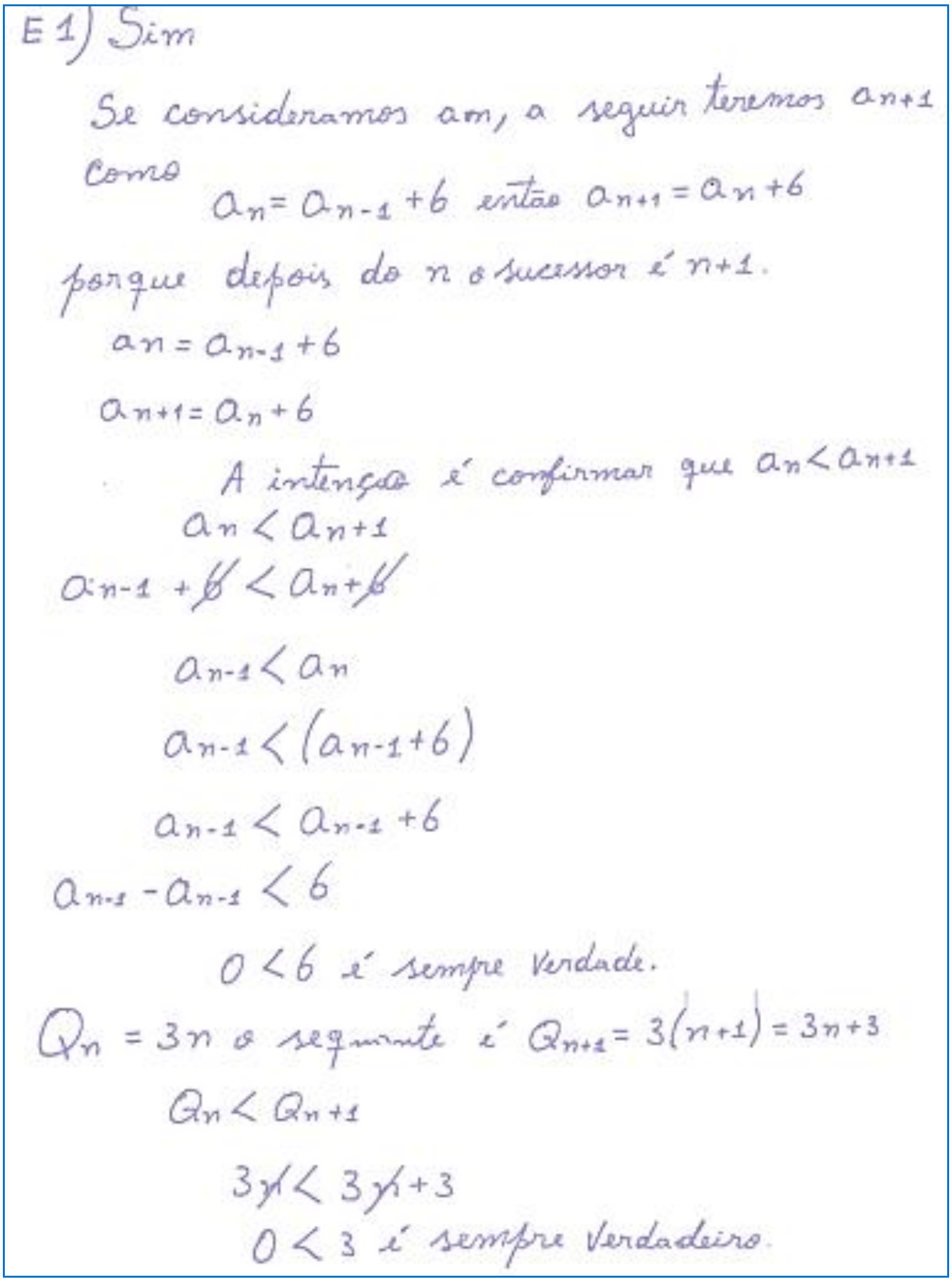


Figura 28: Representação gráfica da quantidade de roseiras que ficariam regadas após cada viagem

Em seguida, apontando o cursor para a tabela correspondente à sucessão obtida na alínea A) e reanalisando o padrão numérico, refere que a cada termo foi adicionado 6 para obter o termo subsequente. E acrescenta que na sucessão da alínea B) a cada termo foi adicionado 3 e que isso também é possível de observar no computador. Deste modo, o aluno refere, para cada uma das sucessões, o valor constante que é adicionado a cada termo mas parece realçar sobretudo o facto de que ambas as sucessões são monótonas crescentes.

Resolução da alínea E1

Para a resolução desta questão, o Aluno 1 recorre apenas ao trabalho com papel e lápis, mostrando considerar que se está a pedir uma justificação formal para o comportamento de cada uma das sucessões. Contudo, o que o aluno acaba por provar é que as duas sucessões são monótonas crescentes (pois vai demonstrar que $a_n < a_{n+1}$ e $Q_n < Q_{n+1}$), partindo do pressuposto de que as duas sucessões são progressões aritméticas. Note-se ainda que faz esta demonstração usando a definição dos termos por recorrência, para cada uma das sucessões (Fig. 29).


E 1) Sim

Se consideramos am, a seguir teremos a_{n+1}

Como $a_n = a_{n-1} + 6$ então $a_{n+1} = a_n + 6$

porque depois do n o sucessor é n+1.

$a_n = a_{n-1} + 6$

$a_{n+1} = a_n + 6$

A intenção é confirmar que $a_n < a_{n+1}$

$a_n < a_{n+1}$

$a_{n-1} + \cancel{6} < a_n + \cancel{6}$

$a_{n-1} < a_n$

$a_{n-1} < (a_{n-1} + 6)$

$a_{n-1} < a_{n-1} + 6$

$a_{n-1} - a_{n-1} < 6$

$0 < 6$ é sempre verdade.

$Q_n = 3n$ o seguinte é $Q_{n+1} = 3(n+1) = 3n+3$

$Q_n < Q_{n+1}$

$3\cancel{n} < 3\cancel{n} + 3$

$0 < 3$ é sempre verdadeiro.

Figura 29: Excerto de relatório com registo da resposta da alínea E1 apresentada pelo Aluno 1 (Tarefa 1)

Resolução das alíneas G e G1

O aluno explorou a sucessão da alínea B (número de roseiras regadas em função do número de viagens) e localizou o valor 60 na coluna P, exatamente na célula P21, e observou que na célula O21 (isto é, na coluna correspondente à ordem dos termos) estava o valor 20 e, assim sendo, afirmou:

> "A partir do computador, sabe-se que consegue regar 60 roseiras depois que faz a 20ª viagem".

Recorrendo novamente à folha de cálculo, o aluno selecionou os 20 primeiros termos da sucessão obtida na alínea A (distância percorrida em cada uma das sucessivas viagens), tendo efetuado a soma automática dos mesmos e respondeu que:

> "Consegue regar 60 roseiras quando faz a 20ª viagem. E podemos calcular a distância total das 20 viagens, no computador o resultado é 1820".

O Aluno 1 justificou ainda as respostas por escrito, no seu relatório. Apresentou a resolução analiticamente, incluindo o cálculo da soma dos primeiros termos de uma PA, com base na respetiva expressão geral (Fig. 30). Nas suas respostas assinalou que os resultados confirmavam o que tinha obtido na folha de cálculo.

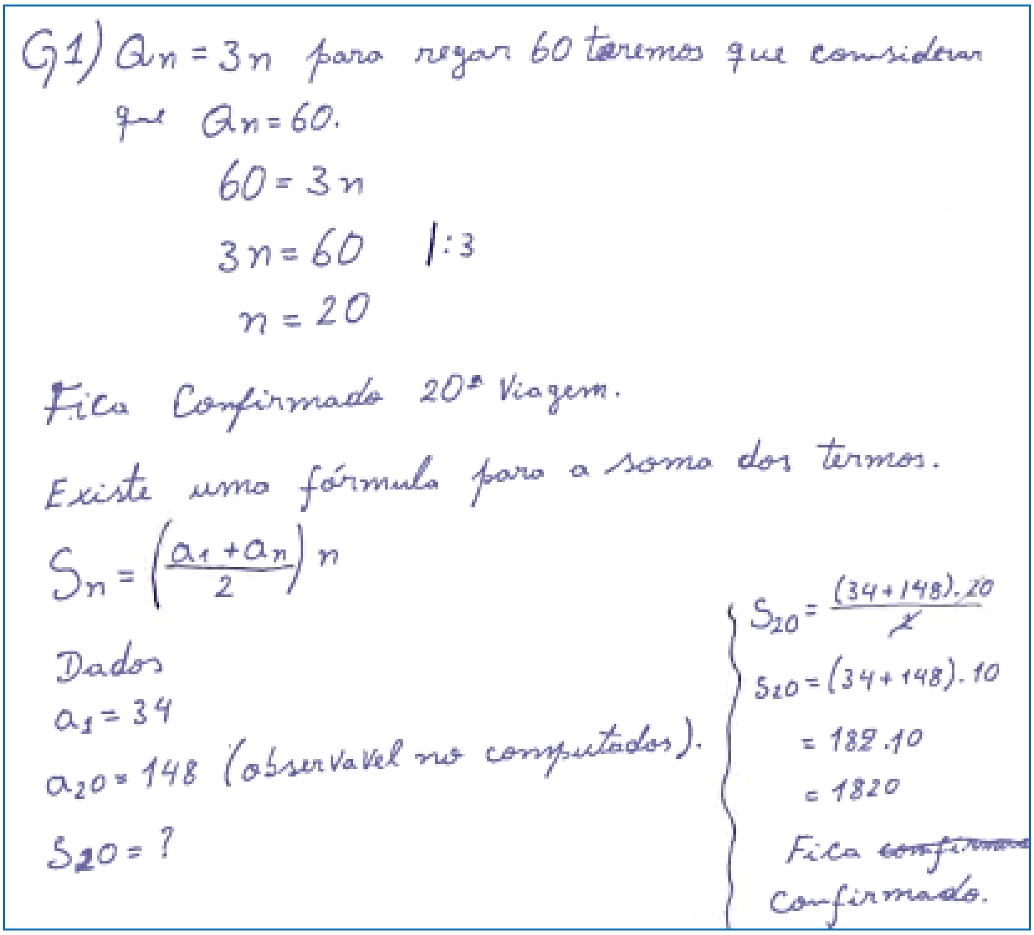


Figura 30: Excerto de relatório com registo da resposta da alínea G1 apresentada pelo Aluno 1 (Tarefa 1)

Resolução da alínea H

Ao interpretar o problema de saber a quantidade de água necessária para regar 90 roseiras, o aluno notou que em cada viagem são regadas 3 roseiras, o que significa que o jardineiro rega 3 roseiras com (cada) 10 litros. Assim, deduziu que gasta 10/3 litros para cada roseira, pelo que, recorrendo à folha de cálculo, escreveu na célula S7 a seguinte expressão: =90*10/3. O resultado foi obviamente o valor 300. Registou a sua resposta no papel (Fig.31).

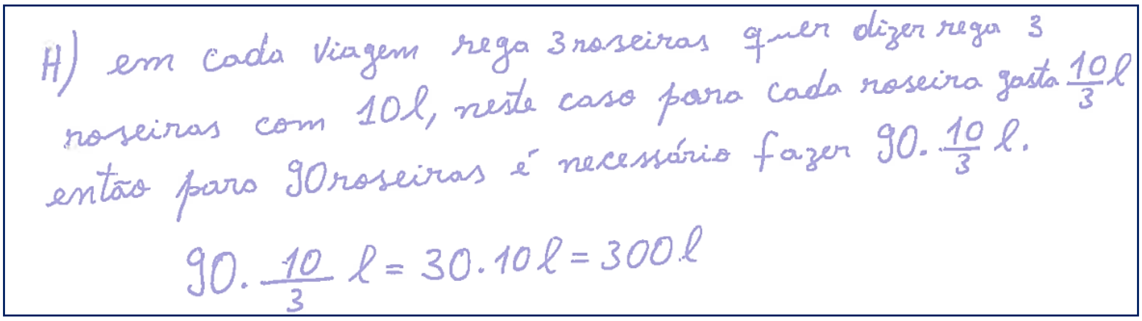


Figura 31: Excerto de relatório com registo da resposta da alínea H apresentada pelo Aluno 1 (Tarefa 1)

Resolução da alínea H1

O aluno começa por resolver a questão no papel, utilizando um procedimento muito semelhante ao que utilizou na resolução da alínea B. Considerou que se em cada viagem gasta 10 litros, então gasta 10 litros na 1ª viagem, mais 10 litros na 2ª viagem e, como tal, deve-se considerar 20, pois é 10+10. Na 3ª viagem gasta mais 10 litros e ao considerar os 20 litros já gastos nas viagens anteriores o aluno concluiu que ao final da 3ª viagem, o jardineiro gastou 30 litros. Utilizou ainda o mesmo raciocínio para a 4ª viagem (Fig. 32).

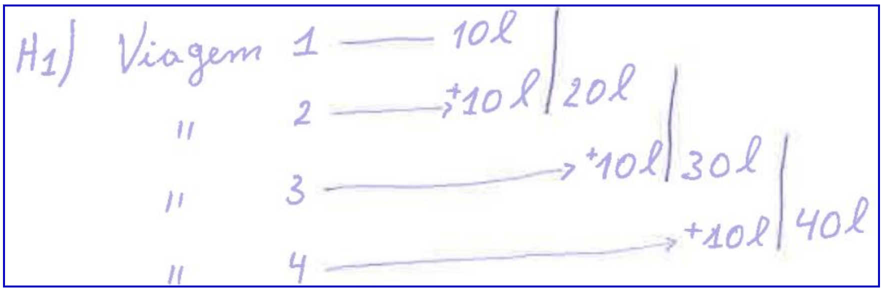


Figura 32: Esquema recursivo sugerido pelo Aluno 1 para responder à alínea H1 (Tarefa 1)

Depois de ter esquematizado o seu raciocínio, passou a implementar o seu modelo na folha de cálculo conforme se observa na figura 33. O aluno usou uma fórmula por recorrência para definir uma PA de razão 10 e estabeleceu a relação entre o número de viagens e a quantidade de água gasta.

T	U
v	litros
1	10
2	=U3+10
3	=U4+10
4	=U5+10
5	=U6+10
6	=U7+10

T	U
v	litros
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60

Figura 33: Fórmulas e resultados recursivos indicando a quantidade total de água gasta quando realiza as sucessivas viagens

Para obter a fórmula geral que define a sucessão, o aluno observou que os termos da sucessão então obtida (e registou no papel alguns destes termos) são os múltiplos de 10, pelo que considerou que a fórmula procurada era: $a_n = 10n$.

O aluno testou ainda esta fórmula na folha de cálculo como se pode ver na figura 34. Usou a relação direta entre a ordem do termo e o valor do termo, obtendo a mesma sucessão, ou seja, os múltiplos de 10.

T	U	V	W
v	litros		ou
1	10		=T3*10
2	=U3+10		=T4*10
3	=U4+10		=T5*10
4	=U5+10		=T6*10
5	=U6+10		=T7*10
6	=U7+10		=T8*10
7	=U8+10		=T9*10
8	=U9+10		=T10*10
9	=U10+10		=T11*10

T	U	V	W	X
v	litros		ou	
1	10		10	
2	20		20	
3	30		30	
4	40		40	
5	50		50	
6	60		60	
7	70		70	
8	80		80	
9	90		90	

Figura 34: Fórmulas e resultados relativos à quantidade total de água gasta em função do número de viagens

5.1.2 Análise e Interpretação da Tarefa 1

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da TRRS

O Aluno 1 iniciou a resolução da primeira tarefa, mobilizando registos verbais que lhe possibilitaram interpretar a situação proposta. Logo em seguida o aluno mobilizou um registo gráfico, sob a forma de um esquema, ao qual associou registos algébricos e representou parcialmente a situação sugerida, podendo dizer -se que fez uma conversão parcial, tendo em atenção o registo gráfico e a descrição da situação em si. O aluno mobilizou registos numéricos, também acompanhados por registos algébricos, para representar as distâncias entre a fonte e cada uma das primeiras 9 roseiras e simultaneamente mobilizou registos verbais para destacar cada última roseira regada no fim de cada viagem. Em seguida, fez a conversão dos registos algébricos que representam as distâncias entre a fonte e a última roseira regada em cada viagem e fez tratamentos destes registos numéricos já na folha de cálculo. Obteve assim os registos numéricos que representam as distâncias percorridas em cada uma das primeiras viagens. O aluno continuou a sua atividade matemática, mobilizando registos verbais e numéricos para explicitar o seu raciocínio e os tratamentos efetuados para obter a solução da questão proposta.

Mais tarde, e porque a situação assim sugere, o aluno procurou interpretar a configuração numérica na folha de cálculo e, depois de alguns ensaios, percebeu o padrão numérico a considerar para efetuar tratamentos que proporcionam como resultados os termos da sucessão, partindo do último termo conhecido. E considerando este padrão, o Aluno 1 inseriu na folha de cálculo uma fórmula que lhe permitiu efetuar tratamentos de forma automática, dos quais resultaram as distâncias percorridas pelo jardineiro durante as sucessivas viagens. Tendo em atenção os registos numéricos e, em especial, a fórmula que permitiu a obtenção de tais resultados, o aluno mobilizou registos verbais para sublinhar como cada elemento resultou e em seguida converteu estes registos verbais em registos algébricos. Fê-lo depois de ter efetuado no papel alguns tratamentos de registos numéricos, utilizando o mesmo critério.

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da M&M

O Aluno 1, depois de interpretar o enunciado do problema, iniciou a realização da atividade, esquematizando a situação proposta. A partir do seu esquema, o aluno iniciou a construção do seu modelo, ao destacar a distância entre a fonte e cada última roseira regada em cada viagem. Para melhor explorar o modelo e facilitar o desenvolvimento do mesmo, o aluno recorreu à folha de cálculo enquanto meio representacional e depois de analisar o modelo expresso numericamente, aperfeiçoou o modelo inicial ao ter em atenção o facto de que cada viagem consiste numa ida e numa volta. Com esse princípio, o aluno adicionou duas vezes cada distância e sugeriu que tal cálculo é equivalente à multiplicação de cada distância por 2. A matematização do modelo foi possível depois de perceber o padrão numérico e de estabelecer que a partir de cada termo conhecido se pode obter o termo seguinte. O aluno aplicou esse modelo e obteve os primeiros termos, conforme a situação pretendia e depois de explicar o critério utilizado para estabelecimento desse modelo, aplicou-o recorrendo à folha de cálculo. Assim, obteve diversos termos da sucessão por aplicação do modelo e ao registar os resultados no papel, explicou o modelo considerado e representou-o na forma algébrica.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e A1)

Adiante, pretende-se estabelecer uma síntese comparativa entre os resultados mais significativos que se retiram das interpretações construídas a partir das duas lentes teóricas consideradas (Tabela 18).

Tabela 18: Súmula dos resultados extraídos da análise da resolução das alíneas A) e A1) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza registos verbais para interpretar a atividade proposta	*Interpreta o enunciado do problema*
Para representar parcialmente a situação sugerida mobiliza um registo gráfico ao qual associa registos algébricos	*Inicia a modelação, esquematizando a situação proposta*
Mobiliza sincronizadamente registos numéricos e registos algébricos, para representar as distâncias entre a fonte e cada uma das roseiras	*Partindo do esquema, destaca particularidades da situação que considera pertinentes*
Mobiliza registos verbais para destacar a última roseira regada no fim de cada viagem	
Faz a conversão dos registos algébricos para registos numéricos	*Inicia a formulação seu modelo ao destacar a distância entre a fonte e a última roseira regada em cada viagem*
Faz tratamentos dos registos numéricos já na folha de cálculo e obtém as distâncias percorridas em cada uma das primeiras viagens	*Aplica experimentalmente o modelo e refina-o, considerando uma ida e uma volta; utiliza duas formas de cálculo equivalentes para determinar as distâncias percorridas*
Mobiliza registos verbais e numéricos para explicitar o raciocínio e os tratamentos efetuados	*Exprime os principais detalhes do modelo e explica o fundamento do estabelecimento desse modelo*
Faz tratamentos de forma automática através de uma fórmula que inseriu na folha de cálculo e obtém as distâncias percorridas pelo jardineiro após as sucessivas viagens.	*Estabelece um processo recursivo e aplica o modelo para obter os primeiros termos conforme a situação sugeria*
Faz alguns tratamentos de registos numéricos no papel	*Obtém diversos termos da sucessão por aplicação do modelo*
Mobiliza registos verbais para sublinhar como cada elemento surgiu	
Converte registos verbais em registos algébricos	*Representa o modelo considerado na forma algébrica*

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da TRRS

O Aluno 1 começou por mobilizar registos icónicos para representar as viagens e também registos numéricos para representar as quantidades de roseiras regadas. Considerando a situação proposta, o aluno fez tratamentos de registos numéricos; a observação dos resultados permitiu-lhe desvendar um padrão numérico e consequentemente um critério a considerar nos tratamentos de registos numéricos de modo a exprimir o padrão ora encontrado. Neste sentido, o aluno inseriu na folha de cálculo uma fórmula que lhe permitiu efetuar tratamentos de forma automática. Para finalizar a resolução, o aluno mobilizou registos verbais para explicitar o significado matemático dos resultados e seguidamente converteu estes registos verbais em registos algébricos, algo que de certo modo condiz com a fórmula que anteriormente introduziu na folha de cálculo.

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da M&M

Ao interpretar aa situação proposta, o aluno teve em atenção as viagens e as quantidades de roseiras regadas e efetuou os primeiros cálculos auxiliares; iniciou a modelação da situação diretamente na folha de cálculo, onde começou por considerar a necessidade de aumentar 3 unidades número das roseiras regadas, para cada viagem realizada pelo jardineiro. A aplicação do modelo assim concebido permitiu obter diversos resultados. Seguidamente, o aluno continuou o teste e a exploração do modelo, e mais concretamente os resultados proporcionados pela sua aplicação. Descobriu que os mesmos são múltiplos de 3 e com esta observação, o aluno aprimorou o modelo e exprimiu-o, inserindo na folha de cálculo uma fórmula que permitiu calcular os termos da sucessão. Deste modo, viu que o teste e a aplicação da versão final do modelo proporcionou os mesmos resultados que a versão inicial; porém, a versão final permitia determinar o número de roseiras regadas em função do número de viagens realizadas ao passo que o modelo inicial somente permitia determinar a quantidade de roseiras regadas em função de número de roseiras que já estavam regadas. Para expressar algebricamente o modelo, o aluno mencionou o principal atributo matemático da sucessão obtida e com isso estabeleceu a relação algébrica que representa o modelo.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B) e B1)

A seguir, propõe-se uma síntese das ideias principais emergentes segundo cada perspetiva teórica (Tabela 19).

Tabela 19: Súmula dos resultados extraídos da análise das alíneas B) e B1) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobiliza registos icónicos para representar as viagens e registos numéricos para representar as quantidades de roseiras</td><td rowspan="2">Interpreta a situação, tendo em atenção as viagens e as quantidades de roseiras regadas e efetua os primeiros cálculos auxiliares</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos de registos numéricos</td></tr>
<tr><td>Identifica um padrão numérico que considera nos tratamentos de registos numéricos</td><td>O modelo baseia-se em aumentar 3 unidades ao número das roseiras já regadas; a aplicação do modelo permite obter diversos resultados</td></tr>
<tr><td>Insere na folha de cálculo uma fórmula que permite efetuar tratamentos de forma automática</td><td>Explora o modelo e identifica que os termos são múltiplos de 3; matematiza a situação, inserindo na folha de cálculo uma fórmula que permite calcular os termos da sucessão</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para explicitar o significado matemático dos resultados</td><td rowspan="2">Dá significado matemático aos resultados e estabelece uma relação algébrica que representa o modelo</td></tr>
<tr><td>Converte os registos verbais em registos algébricos</td></tr>
</table>

Análise das alíneas E) e E1) na perspetiva da TRRS

Para melhor visualizar possíveis relações entre termos consecutivos, o aluno converteu os registos numéricos em registos gráficos, na folha de cálculo. Em seguida, mobilizou registos verbais para exprimir uma relação entre termos consecutivos gerados pelo modelo concebido na alínea B). Considerando também os registos numéricos, o aluno mencionou a ideia de que dado um termo conhecido seria possível obter o subsequente.

O aluno tentou ainda comprovar a existência das relações que pareceu identificar. Com efeito, mobilizou registos verbais e algébricos e fez tratamentos de registos algébricos que o levaram, entretanto, à prova da monotonia crescente para cada uma das duas sucessões.

Análise das alíneas E) e E1) na perspetiva da M&M

Para melhor compreender as características e relações existentes nos resultados dos seus modelos, o aluno representou graficamente o modelo matemático e detalhou a relação entre os termos consecutivos da sucessão construída na alínea B). Em seguida sublinhou a relação recursiva dos modelos, ao referir que cada termo pode ser obtido adicionando uma mesma quantidade ao termo anterior.

O aluno comprovou, então, analiticamente a relação de ordem entre os termos consecutivos de cada uma das sucessões, depois de estabelecer relações algébricas em que integrou conhecimentos prévios. Desse modo, obteve condições universais nos dois casos.

Um resumo da análise da resolução das alíneas E) e E1)

Em síntese, apresentam-se as conclusões essenciais das duas leituras (Tabela 20).

Tabela 20: Súmula dos resultados extraídos da análise da resolução das alíneas E) e E1) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa1/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Converte os registos numéricos em registos gráficos	*Representa graficamente o modelo matemático*
Mobiliza registos verbais para exprimir a relação entre os valores consecutivos proporcionados pelo modelo	*Analisa a relação entre valores consecutivos e em seguida sublinha a forma recursiva dos modelos*
Mobiliza registos verbais e algébricos para comprovar a existência das relações aludidas	*Comprova analiticamente as ilações relativamente à relação de ordem entre os termos consecutivos*
Faz alguns tratamentos de registos algébricos e obtém uma prova da monotonia de cada sucessão	*Usa conhecimentos anteriores e prova algebricamente propriedades dos modelos*

Análise das alíneas G) e G1) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos para interpretar a situação, considerando as sucessões que já estavam construídas na folha de cálculo; seguidamente, mobilizou registos verbais para exprimir a ordem do termo representado por 60 e para determinar o valor numérico da distância total percorrida para regar 60 roseiras, o aluno mobilizou novamente registos numéricos e fez o devido tratamento dos mesmos. Assim, conseguiu determinar a distância total percorrida pelo jardineiro até regar 60 roseiras.

Para comprovar o resultado analiticamente, o aluno mobilizou um registo algébrico que representa a sucessão das quantidades totais regadas, fez alguns tratamentos e obteve a ordem do termo cujo valor é 60. E ainda mobilizou o registo verbal para realçar ter assim confirmado que a resposta pretendida seria o final da vigésima viagem.

Seguidamente, mobilizou registos verbais para referir uma relação algébrica que permite calcular a soma dos primeiros termos e consequentemente mobilizou registos algébricos para representar tal relação. Partindo dessa relação, o aluno fez conversões de registos algébricos em registos numéricos e fez o tratamento dos registos numéricos, obtendo o mesmo valor numérico para a distância percorrida até conseguir regar 60 roseiras.

Análise das alíneas G) e G1) na perspetiva da M&M

Para responder à questão colocada, o Aluno 1 começou por explorar os modelos expressos numericamente e usando os seus conhecimentos sobre a relação termo-ordem, descobriu a ordem do termo 60 na tabela produzida na folha de cálculo. Depois, aproveitando as potencialidades da folha de cálculo, o aluno efetuou a soma dos primeiros 20 termos e obteve o total da distância percorrida até conseguir regar 60 roseiras.

Para obter o resultado analiticamente, o aluno foi verificar que a ordem do termo 60 é a 20ª, resolvendo uma equação. Com este procedimento, o aluno confirmou que era necessário somar os 20 primeiros termos da sucessão. Com base nos seus conhecimentos prévios, o aluno considerou a expressão que permite calcular a soma dos primeiros termos de uma PA e obteve o mesmo resultado obtido anteriormente no computador.

Um resumo da análise da resolução das alíneas G) e G1)

A seguir, faz-se uma síntese comparativa dos resultados provenientes de cada uma das interpretações realizadas (Tabela 21).

Tabela 21: Súmula dos resultados extraídos da análise das alíneas G) e G1) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos numéricos para interpretar a situação, considerando as sucessões que já estavam na folha de cálculo	*Começou por explorar os modelos expressos numericamente na folha de cálculo*
Mobilizou registos verbais para exprimir a ordem do termo representado por 60	*Conhecendo a relação termo-ordem, descobriu a ordem do termo 60*
Mobilizou novamente alguns registos numéricos	*Aproveitando as potencialidades da folha de cálculo, o aluno efetuou a soma dos primeiros 20 termos e obteve a distância percorrida até conseguir regar 60 roseiras.*
Fez o devido tratamento determinou a distância total percorrida pelo jardineiro até regar 60 roseiras	
Mobilizou o registo algébrico que representa a sucessão das quantidades totais regadas	*Matematizou a situação ao substituir o valor 60 no termo geral e depois explicitou a variável n*
Fez alguns tratamentos e obteve uma relação que explicita a ordem do termo cujo valor é 60	
Mobilizou um registo verbal para confirmar que a situação considerada no problema ocorre no final da vigésima viagem.	*Confirmou que era necessário somar os 20 primeiros termos da sucessão*
Mobilizou registos verbais para indicar uma forma de calcular a soma dos termos	*Considerou a relação algébrica que permite calcular a soma dos primeiros termos de uma PA*
Mobilizou registos algébricos para calcular a soma dos termos	
Fez conversões de registos algébricos em registos numéricos	*Usou a relação que permite calcular a soma dos primeiros termos de uma PA e obteve o mesmo resultado obtido anteriormente no computador*
Fez o tratamento dos registos numéricos e obteve o mesmo valor numérico para a distância percorrida até conseguir regar 60 roseiras	

Análise das alíneas H) e H1) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou sincronizadamente registos verbais e registos numéricos para reinterpretar o problema proposto e em seguida mobilizou especificamente um registo numérico para representar a quantidade de água que o jardineiro gasta para regar cada roseira. Seguidamente, combinou este registo numérico com a quantidade de roseiras sugerida pela situação e fez os devidos tratamentos; deste modo, obteve o registo numérico que representa a quantidade de água que o jardineiro gastou para regar 90 roseiras.

Para determinar uma fórmula que permite calcular a quantidade de água gasta nas sucessivas viagens, o aluno começou por mobilizar registos numéricos e fez sucessivos tratamentos. Simultaneamente, concebeu um esquema, predominantemente numérico, que ilustra o raciocínio recursivo. Partindo deste esquema, o aluno inseriu na folha de cálculo uma fórmula que lhe permitiu efetuar sucessivos tratamentos de registos numéricos de forma automática e com este procedimento obteve a resposta para a questão.

Para obter a fórmula geral, o aluno mobilizou registos verbais para salientar o principal atributo dos resultados então obtidos e mobilizou um registo algébrico para representar a sucessão através de um termo geral.

Seguidamente, inseriu na folha de cálculo uma fórmula com base no registo algébrico mobilizado e com esta fórmula fez novamente diversos tratamentos de registos numéricos e obteve os mesmos resultados obtidos com a fórmula recursiva.

Análise das alíneas H) e H1) na perspetiva da M&M

O aluno começou por fazer uma reinterpretação da situação que lhe permitiu iniciar a conceção de um modelo ao idealizar a quantidade de água necessária para regar cada roseira. A seguir, desenvolveu o modelo ao considerar que a quantidade identificada antes devia ser multiplicada por 90. Desta forma, a questão ficou resolvida.

Para obter um modelo genérico para a quantidade de água gasta nas sucessivas viagens, o aluno começou por esquematizar a situação e, a partir desse esquema, iniciou a formulação inicial de um modelo que consiste em considerar a soma das quantidades gastas durante as viagens realizadas. Utilizando este raciocínio, o aluno matematizou o modelo ao inserir na folha de cálculo uma fórmula recursiva que permitiu obter de forma automática a quantidade da água gasta em função das sucessivas viagens.

O aluno continuou a exploração dos resultados e o modelo foi reconstituído pois o aluno descobriu outro padrão numérico, e com base nos seus conhecimentos anteriores destacou a relação algébrica equivalente. Para testar o novo modelo, o aluno recorreu à folha de cálculo e inseriu uma fórmula baseada na nova relação algébrica que produziu os mesmos resultados proporcionados pelo seu modelo anterior.

Um resumo da análise da resolução das alíneas H) e H1)

Na tabela 22, faz-se uma vez mais a síntese das interpretações anteriores, de acordo com as perspetivas teóricas adotadas.

Tabela 22: Súmula dos resultados extraídos da análise da resolução das alíneas H) e H1) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa1/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos verbais e registos numéricos para reinterpretar o problema proposto	*Fez uma reinterpretação da situação*
Mobilizou especificamente um registo numérico para representar a quantidade de água que o jardineiro gasta para regar cada roseira	*Iniciou a conceção de um modelo, ao determinar a quantidade de água necessária para regar cada roseira*
Combinou registos numéricos e fez tratamentos, de tal modo que obteve a quantidade de água necessária para regar 90 roseiras	*Melhorou o modelo para ter em conta as 90 roseiras que seriam regadas*
Para calcular a quantidade de água gasta nas sucessivas viagens, começou por mobilizar registos numéricos	*Começou por esquematizar a situação e a partir do esquema, iniciou a formação inicial de um modelo para calcular a soma das quantidades gastas durante as viagens realizadas*
Fez sucessivos tratamentos e simultaneamente concebeu um esquema, predominantemente numérico, que ilustra o raciocínio recursivo	
Inseriu na folha de cálculo uma fórmula que permitiu efetuar sucessivos tratamentos de registos numéricos de forma automática	*Inseriu na folha de cálculo uma fórmula recursiva que permitiu obter de forma automática a quantidade da água gasta em função das sucessivas viagens*
Mobilizou registos verbais para analisar resultados e mobilizou um registo algébrico para representar a propriedade considerada	*Descobriu outro padrão numérico nos resultados e destacou a relação algébrica inerente ao mesmo*
Inseriu na folha de cálculo uma nova fórmula e fez novamente diversos tratamentos de registos numéricos, obtendo os mesmos resultados obtidos com a fórmula recursiva	*Inseriu na folha de cálculo uma fórmula baseada na nova relação algébrica e confirmou os resultados proporcionados pelo modelo inicial*

5.1.3 Resolução da Tarefa 2 – Reprodução de vírus por bipartição

Resolução da alínea A

Depois de ler o enunciado, o Aluno 1 começa por resolver esta tarefa (Anexo 5) na folha de cálculo, escrevendo na coluna A os símbolos d1, d2, d3, …, d17, que representavam os dias. Na coluna B escreveu os números 1, 2, 4 e 8 que representavam as quantidades de vírus. Na célula C4 inseriu a fórmula =B3+B2, numa tentativa de obter o valor 4, o que não resultou. O aluno continuou a sua exploração e fez uma outra tentativa, escrevendo na célula C5 a fórmula =B4*B3 que devolveu o valor 8. Assim, parecia que o aluno tinha feito uma descoberta ao obter o 4º termo através de um cálculo que envolvia o 3º e o 2º termo, ou seja, os dois termos anteriores (Fig. 35).

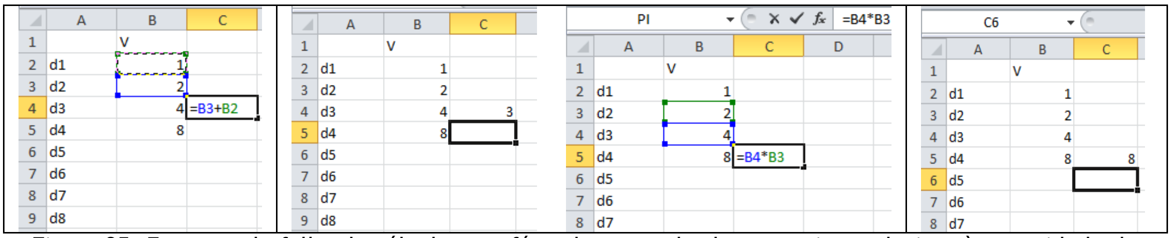


Figura 35: Excertos de folha de cálculo com fórmulas e resultados recursivos relativos à quantidade de vírus que a pessoa infetada terá nos primeiros dias

O aluno decidiu utilizar o mesmo processo para testar se a fórmula que considerou seria válida para obter o que seria o 5º termo e constatou que não resultou, percebendo assim que a fórmula falhava.

Depois de verificar a falha, o aluno apagou o conteúdo da coluna C e reiniciou as tentativas, tendo escrito a fórmula =B3*2 na célula C4, da qual resultou o valor 4. Então, arrastou esta fórmula e constatou que os resultados coincidiam com os números escritos na coluna B. Depois desta verificação, o aluno colocou a fórmula =B6*2 na célula B7, arrastou-a e obteve os primeiros termos da sucessão que registou no papel (Fig. 36 e Fig. 37).

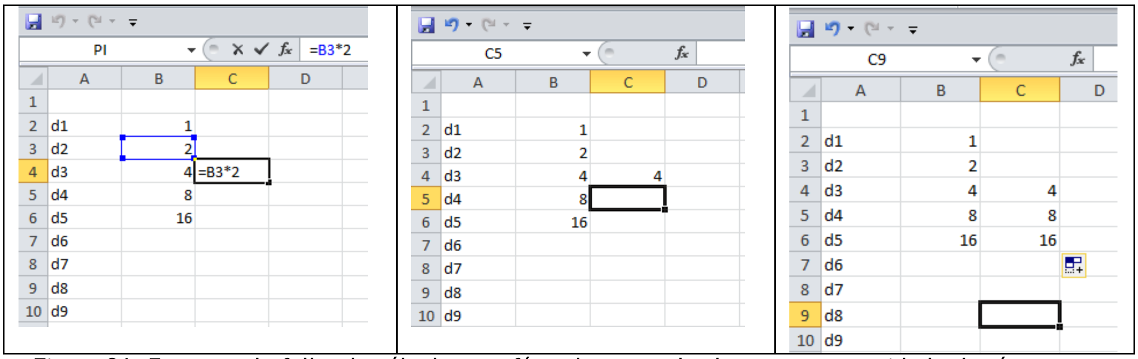


Figura 36: Excertos de folha de cálculo com fórmulas e resultados para a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá em função do número de dias

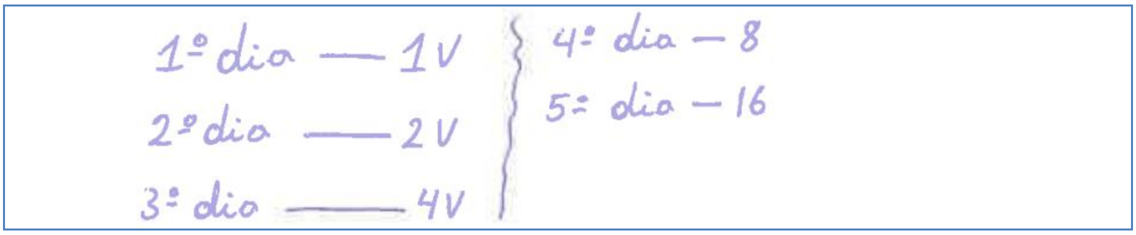


Figura 37: Registo do relatório do Aluno 1 sobre a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá nos primeiros dias

Resolução das alíneas A1 e A2

Para responder à alínea A1, em que se pedia a quantidade e vírus existente à custa do número de dias, o aluno recorreu às ideias que utilizou na folha de cálculo e apresentou alguns termos, já com outra representação simbólica. Porém, ao escrever a fórmula para o termo geral da sucessão, manteve o modelo recursivo, isto é, definiu a sucessão por recorrência, sem que o número de dias fosse uma variável explícita (Fig. 38). Desta forma, o aluno deu, na verdade, uma resposta à questão colocada na alínea A2. Até ao momento, não identificou uma forma de calcular os termos a partir do número *n* de dias.

A1) $d_1 = 1$; $d_2 = 2$, $d_3 = 4$, $d_5 = 16$, $d_6 = 32$, $d_7 = 64\ldots$

Como em cada 24h terá 2 vezes a quantidade do dia anterior. $V_n = 2V_{n-1}$

Figura 38: Registo da resposta à alínea A1 (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 1

Para responder a alínea A2, o aluno pareceu sentir necessidade de reformular o que tinha apresentado na alínea anterior. Assim, concretizou a expressão obtida para um caso específico, mostrando que a quantidade de vírus no dia atual é o dobro da quantidade no dia anterior (Fig. 39).

A2) Segundo o texto do problema e considerando que

d_0 = Quantidade no dia anterior

d_1 = " no dia actual.

$d_1 = 2d_0$

Figura 39: Registo da resposta à alínea A2 (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 1

Resolução das alíneas B e B1

Sem delongas, o Aluno 1 apresentou uma resposta sucinta, destacando a relação entre os termos da sucessão que era já evidente para ele (Fig. 40).

B) Cada elemento é o dobro do anterior

Figura 40: Registo da resposta à alínea B (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 1

O aluno comenta que, analisando a tabela que fez no Excel, a relação aludida era bastante evidente, mas enveredou por reexaminar a mesma tabela (Fig. 41). Primeiramente, decidiu multiplicar cada elemento da sucessão inicial por 2 e obteve uma outra sucessão (na coluna W). Na verdade, esta nova sucessão constitui uma subsucessão da primeira, composta por todos os termos a partir do 2º. Depois disso, o aluno fez novas constatações em que verificou que cada termo era o dobro do anterior, tal como a seta desenhada na tabela indica. Além disso, desenvolveu um conjunto de transformações algébricas com vista a gerar uma demonstração algébrica, concluindo, uma vez mais, que o termo de ordem *n+1* é 2 vezes o termo de ordem *n* (Fig. 42).

	A	B	C	D	E
1		v			w
2	d1	1			=B2*2
3	d2	2			=B3*2
4	d3	4	=B3*2		=B4*2
5	d4	8	=B4*2		=B5*2
6	d5	16	=B5*2		=B6*2
7	d6	=B6*2			=B7*2
8	d7	=B7*2			=B8*2
9	d8	=B8*2			=B9*2

	A	B	C	D	E	F
1		v			w	
2	d1	1			2	
3	d2	2			4	
4	d3	4	4		8	
5	d4	8	8		16	
6	d5	16	16		32	
7	d6	32			64	
8	d7	64			128	
9	d8	128			256	

Figura 41: Excertos de folha de cálculo com fórmulas e resultados da multiplicação cada elemento da sucessão inicial por 2.

B1) em bora sejo quase que evidente, vamos utilizar
o excel, se calcular-mos a sucessão dos dobros
da 1ª sucessão veremos que cada elemento da 2ª sucessão
é elemento da 2ª Sucessão é exactamente um elemento
da 1ª sucessão com ordem imediatamente superior.

$V_1 = 1, \quad V_2 = 2 \quad V_3 = 4 \quad V_4 = 8 \ldots \; V_n$

$\frac{\times 2}{2V_1 = W_1 = 2} \quad \frac{x \cdot 2}{2V_2 = 4 = W_2} \quad \frac{\times 2}{2V_3 = 8 = W_3}, \ldots \quad W_n = 2V_n = V_{n+1}$

$W_1 = 2V_1 = 2 = V_2 \qquad W_{n-1} = 2V_{n-1} = V_n$

$W_2 = 2V_2 = 2 \cdot 2 = 4 = V_3 \qquad W_n = 2V_n = V_n + 1$

$W_3 = 2 \cdot V_3 = 2 \cdot 4 = 8 = V_4 \qquad 2V_n = V_{n+1}$

$\vdots$

Figura 42: Dedução da relação recursiva entre as quantidades de vírus nos dias consecutivos

Resolução alterada da alínea A1

Pouco depois de resolver e de responder à questão da alínea B1, o aluno observou que os termos da sucessão construída no início da tarefa são potências de base 2 e expoente natural. Então, constatou que o número 1 não seria termo da sucessão assim obtida (Fig. 43), mas percebeu que de acordo com a situação descrita o termo deveria existir. Assim, para ultrapassar esta situação, o aluno optou por considerar a ideia de que a sucessão incluiria um termo inicial de ordem 0, considerando que seria $V_0 = 1$, supondo que haveria 1 vírus num momento inicial e que após o 1º dia dar-se-ia a duplicação, isto é, seria $V_1 = 2$ (Fig. 44).

Observan bem os dados no excel podemos ver q os termos da sucessão do alinea A são também potências do nº 2. então o outro termo geral é 2^n, (2; 4; 8; 16)

Figura 43: Termo geral da sucessão sugerida pelo Aluno 1 (Tarefa 2)

Neste caso há necessidade revek a alinea A porque inicialmente já existia 1V | então devemos
ao completar o 1º dia – 2V | considerar $V_0 = 1$
ao " o 2º dia – 4V
ao " o 3º " 8

A1: $V_0 = 1$ $\quad V_n = 2 \cdot V_{n-1}$ com $V_0 = 1$
$V_1 = 2$ $\quad$ ou
$V_2 = 4$ $\quad V_n = 2^n$ onde $(n = 0; 1, 2, 3, 4 \ldots)$

Figura 44: Termo geral da sucessão sugerida pelo Aluno 1 após rever a resposta (Tarefa 2)

Resolução da alínea C)

O Aluno 1 analisou atentamente a sucessão obtida durante a resolução da alínea A) e considerou o 7º, 14º, 21º, 28º dias, que, no seu entender, correspondiam às quantidades de vírus que a pessoa infetada teria ao completar cada uma das primeiras semanas, como se pode observar na figura 45.

	F	G	H	I	J	K
1	Dias completados	Virus				
2	1	=2^F2			128	
3	2	=2^F3			16384	=J3/J2
4	3	=2^F4			=G22	=J4/J3
5	4	=2^F5			=G29	=J5/J4
6	5	=2^F6				
7	6	=2^F7			=128^1	
8	7	=2^F8			=128^2	
9	8	=2^F9			=128^3	
10	9	=2^F10				
11	10	=2^F11				
12	11	=2^F12				
13	12	=2^F13				
14	13	=2^F14				
15	14	=2^F15				
16	15	=2^F16				
17	16	=2^F17				
18	17	=2^F18				
19	18	=2^F19				
20	19	=2^F20				
21	20	=2^F21				
22	21	=2^F22				
23	22	=2^F23				
24	23	=2^F24				
25	24	=2^F25				
26	25	=2^F26				
27	26	=2^F27				
28	27	=2^F28				
29	28	=2^F29				
30	29	=2^F30				

	F	G	H	I	J	K
1	Dias completados	Virus				
2	1	2			128	
3	2	4			16384	128
4	3	8			2097152	128
5	4	16			268435456	128
6	5	32				
7	6	64			128	
8	7	128			16384	
9	8	256			2097152	
10	9	512				
11	10	1024				
12	11	2048				
13	12	4096				
14	13	8192				
15	14	16384				
16	15	32768				
17	16	65536				
18	17	131072				
19	18	262144				
20	19	524288				
21	20	1048576				
22	21	2097152				
23	22	4194304				
24	23	8388608				
25	24	16777216				
26	25	33554432				
27	26	67108864				
28	27	1,34E+08				
29	28	2,68E+08				

Figura 45: Grupos de 7 termos com destaque das quantidades de vírus que a pessoa infetada terá no organismo nas primeiras semanas

Seguidamente, registou no papel os valores e o critério ou procedimento considerado para a escolha dos mesmos, conforme se pode ver na figura 46.

C) Observando no computador:

$s_1 = 128$ $\quad$ $s_4 = 268.435.456$ $\quad$ Recolhendo o Valor do 7º dia 14º dia, 21º dia 35º dia...

$s_2 = 16.384$ $\quad$ s_5

$s_3 = 2097152$ $\quad$ s_6

Figura 46: Registo da resposta à alínea C (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 1

Resolução das alíneas C1) e C2)

O aluno utiliza o raciocínio considerado na resolução das alíneas A) e A1) e destaca que, no caso da sucessão obtida na alínea C), a constante que resulta da divisão de cada termo pelo seu antecedente é 128. Na mesma linha, o aluno descobriu que os termos da sucessão são potências de 128, conforme se pode ver nas colunas J e K da figura 46. Depois desta hipótese formulada, o aluno registou o seu raciocínio, evidenciando que o seu ponto de partida era a resolução das alíneas A) e A1) e concluiu, apresentando o termo geral da sucessão (Fig. 47).

C1) Analisando os valores, a divisão de cada termo com o anterior é constante, tal como acontece nas alíneas A e A1, mas este caso a constante é 128.

~~$s_n = 128 . s_{n-1}$ com $s_1 = 128$~~. e os valores encontrados são potencias de 128. logo $s_n = 128^n$

Figura 47: Registo da resposta da alínea C1 (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 1

Na alínea C2), o aluno considerou novamente uma ideia utilizada nas alíneas anteriores, A1) e A2), e inferiu que cada termo pode ser obtido, multiplicando o respetivo precedente pela constante considerada na alínea C). E destacou previamente o primeiro termo como se pode ver na figura 48.

C2) Como a constante é 128

$s_n = 128 . s_{n-1}$ com $s_1 = 128$.

Figura 48: Registo da resposta da alínea C2 (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 1

Resolução da alínea D)

Como se pode ver na figura 49, de entre as possíveis considerações relevantes que podem fazer-se sobre as duas sucessões, o aluno destacou o facto de que os termos da sucessão obtida na alínea C) serem também termos da sucessão obtida na alínea A).

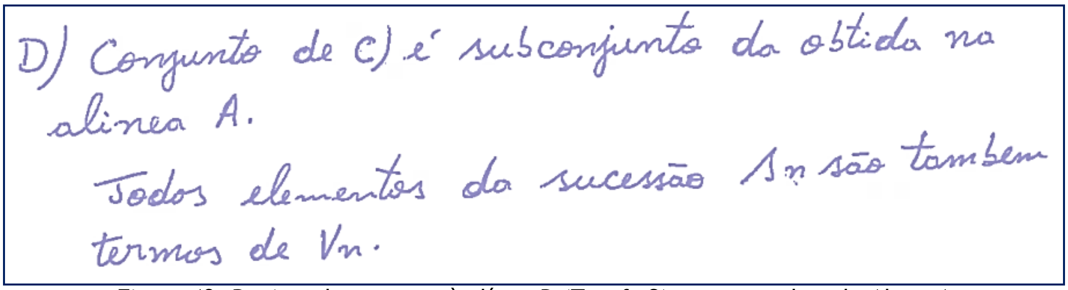

D) Conjunto de C) é subconjunto da obtida na alinea A.
Todos elementos da sucessão A_n são tambem termos de V_n.

Figura 49: Registo da resposta à alínea D (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 1

5.1.4 Análise e Interpretação da Tarefa 2

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da TRRS

O Aluno 1 iniciou a resolução da atividade, mobilizando registos verbais para interpretar a situação proposta e seguidamente mobilizou registos numéricos para representar os principais elementos a considerar na situação. Recorrendo à folha de cálculo e considerando a situação descrita, experimentou alguns tratamentos de registos numéricos e, depois de várias tentativas, descobriu um tratamento possível para obter a resposta para a questão. Nessa altura, inseriu uma fórmula que viabilizou tais tratamentos e obteve de forma automática diversos termos da sucessão que representa as quantidades de vírus que a pessoa infetada terá no organismo, ao longo dos sucessivos dias.

Para registar os resultados no papel, o aluno mobilizou representações verbais e numéricas e representou os primeiros dias e as respetivas quantidades de vírus, segundo a sua resolução.

Para determinar analiticamente uma expressão para o termo geral da sucessão, o aluno começou por mobilizar registos algébricos para representar os casos particulares correspondentes aos primeiros dias e em seguida mobilizou registos verbais para descrever a relação a considerar entre quantidades consecutivas. Por fim, mobilizou um registo algébrico genérico para representar a relação, indo de encontro à fórmula anteriormente inserida na folha de cálculo, razão pela qual apresentou uma definição da sucessão por recorrência.

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da M&M

O aluno depois da devida interpretação da questão, iniciou a resolução da tarefa, recorrendo à folha de cálculo onde rudimentarmente começou por expressar numericamente a situação proposta. O aluno experimentou diversos modelos até que, a dada altura, pensou num modelo que consiste em multiplicar por 2 quantidade de vírus que a pessoa tinha no dia anterior para obter a quantidade que tem num determinado dia. Matematizou esse modelo, concebendo uma fórmula que inseriu na folha de cálculo e com ela conseguiu aplicar o modelo, obtendo assim as diversas quantidades de vírus que a pessoa infetada terá no organismo, de acordo com a sua interpretação do problema.

Para expressar o modelo analiticamente, o aluno começou por referenciar os primeiros resultados da aplicação do modelo e sublinhou a relação entre termos consecutivos; então escreveu a relação algebricamente, definindo-a por recorrência, ficando apenas por indicar a termo inicial.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e A1)

Segue-se uma resenha geral dos resultados que emergem da análise, segundo cada uma das perspetivas teóricas adotadas (Tabela 23).

Tabela 23: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas A) e A1) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa2/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para interpretar a situação proposta</td><td rowspan="2">Inicia a resolução da tarefa, recorrendo à folha de cálculo onde começa a expressar numericamente a situação proposta</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos para representar os principais elementos da situação</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Recorre à folha de cálculo e experimenta alguns tratamentos de registos numéricos; depois de várias tentativas, descobre o tratamento a considerar e insere na folha de cálculo uma fórmula que permite obter, de forma automatizada, resultados numéricos</td><td>Ensaia diversos modelos até que opta por um modelo que consiste em multiplicar por 2 quantidade de vírus no dia anterior para obter a quantidade num determinado dia</td></tr>
<tr><td>Matematiza o modelo, concebendo uma fórmula que insere na folha de cálculo</td></tr>
<tr><td>Mobiliza representações verbais e numéricas e obtém a representação dos primeiros dias e das respetivas quantidades de vírus</td><td>Aplica o modelo e obtém diversas quantidades de vírus consecutivas</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos algébricos para representar os casos particulares a considerar para os primeiros dias</td><td rowspan="2">Utiliza os resultados da aplicação do modelo e sublinha a relação entre termos consecutivos</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para descrever a relação a considerar entre quantidades consecutivas</td></tr>
<tr><td>Mobiliza um registo algébrico genérico para representar a relação por recorrência</td><td>Representa a relação algebricamente, definindo-a por recorrência</td></tr>
</table>

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos verbais para interpretar a situação e seguidamente introduziu registos icónicos para representar os sucessivos dias. Depois, relacionou os registos icónicos com um registo algébrico que explicita a forma de calcular a quantidade de vírus que uma pessoa infetada terá num determinado dia em função da quantidade que tinha no dia anterior. Esta explicitação, contudo, permanece equivalente ao que o aluno já tinha efetuado na alínea anterior, isto é, mantém a ideia de duplicar o termo anterior para obter o seguinte.

Análise da alínea A2) na perspetiva da M&M

Para estabelecer o que seria um novo modelo, o aluno começou por retomar a interpretação do enunciado da questão. Em seguida, utilizando de forma local o modelo previamente concebido durante a resolução da alínea A1, o aluno replicou o modelo obtido para determinar a quantidade de vírus num determinado dia em função da quantidade no dia anterior. Portanto, o aluno acabou por criar apenas um modelo.

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

Segue-se uma resenha geral dos resultados que emergem da análise, segundo cada uma das perspetivas teóricas adotadas (Tabela 24).

Tabela 24: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza registos verbais para interpretar a situação	*Retoma a interpretação do problema e relaciona-a com o seu modelo anterior*
Mobiliza registos icónicos para representar uma sequência de dias	
Mobiliza registos algébricos que representam a quantidade de vírus que uma pessoa infetada terá num determinado dia em função da quantidade que tinha no dia anterior	*Utiliza de forma local o modelo previamente concebido durante a resolução da alínea A1, mantendo na essência o modelo recursivo anterior, que estabelece a quantidade de vírus que uma pessoa infetada terá num determinado dia em função da quantidade que tinha no dia anterior*

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos verbais para expressar a relação que encontrou entre os termos consecutivos da sucessão numérica obtida na alínea A).

Antes de comprovar analiticamente a relação aludida, o aluno mobilizou registos verbais para afirmar que a relação é quase evidente; seguidamente efetuou tratamentos, utilizando as funcionalidades da folha de cálculo e obteve uma outra sucessão que constitui uma subsucessão da primeira. Recorrendo a uma esquematização, assinalou que os termos da segunda sucessão são também termos da primeira sucessão e ilustrou a existência de uma relação entre os termos pertencentes às duas sucessões. Com este procedimento, o aluno quis comprovar analiticamente a relação encontrada entre termos consecutivos da sucessão (uma progressão geométrica de razão 2) resultante da resolução da alínea A).

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da M&M

O aluno observou que a relação matemática entre os termos consecutivos da sucessão da alínea A) tem a ver com um quociente constante e antes de comprovar analiticamente a sua afirmação, sublinhou que tal relação é quase evidente. Achou ainda que a folha de cálculo seria um meio facilitador para a aplicação de um modelo auxiliar que poderia facilitar a ilustração de tal relação.

O modelo auxiliar consistiu na determinação dos dobros dos termos da sucessão para depois os comparar com os termos da sucessão inicial. Usando uma forma de esquematização, conseguiu ilustrar a relação entre os resultados dos dois modelos e isso possibilitou ao aluno estabelecer uma relação algébrica explícita entre termos consecutivos da PG.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B) e B1)

Adiante, encontra-se a súmula das ideias centrais retiradas das duas análises (Tabela 25).

Tabela 25: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B) e B1) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para expressar a relação que considera entre os termos consecutivos da sucessão numérica obtida alínea A).</td><td>Considera que a relação existente entre os termos consecutivos obtidos na resolução da alínea A) consiste num fator multiplicativo constante</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para descrever a relação referida</td><td>Sublinha que a relação é quase evidente mas considera a folha de cálculo útil para facilitar a ilustração de tal relação</td></tr>
<tr><td>Efetua um tratamento, utilizando as funcionalidades da folha de cálculo e obtém uma outra sucessão (subsucessão da anterior)</td><td rowspan="2">O modelo auxiliar consiste na determinação dos dobros dos termos da sucessão anterior; por meio de uma esquematização ilustra a relação entre os resultados dos dois modelos</td></tr>
<tr><td>Recorrendo a uma esquematização, assinala que os termos da segunda sucessão são também termos da primeira sucessão</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos algébricos e faz tratamentos destes registos e obtém uma nova sucessão</td><td>A esquematização ajuda-o a estabelecer de forma algébrica a relação identificada</td></tr>
</table>

Análise da nova resolução da alínea A1) na perspetiva da TRRS

O aluno assumiu que fez uma reanálise dos resultados obtidos na alínea A) e anunciou a necessidade de rever a resolução. Assim, mobilizou registos numéricos para reinterpretar resultados e destacou uma nova propriedade nesses mesmos resultados. Mobilizou um registo algébrico para expressar o termo geral da sucessão, tendo em atenção esse atributo (o facto de se tratarem das potências de base 2).

O aluno mobilizou registos algébricos para reafirmar e completar a relação algébrica já obtida na primeira resolução da alínea A1 e, por fim, sugeriu uma segunda relação algébrica. Em ambos os casos, especifica a necessidade de considerar o termo inicial como sendo o termo de ordem 0.

Análise da nova resolução da alínea A1) na perspetiva da M&M

O aluno fez uma reexploração dos resultados da aplicação do modelo concebido na resolução das alíneas A) e A1) e descobriu um segundo padrão; este segundo padrão possibilitou a melhoria do modelo inicial e impulsionou a criação de um segundo modelo. O melhoramento do modelo anteriormente sugerido prende-se com o estabelecimento da condição inicial, que é associada a um termo de ordem 0. E o segundo modelo proposto pelo aluno tem a ver com a possibilidade de considerar os termos como potências de 2.

Importa dizer que o desajuste entre o modelo e a situação real levou o aluno a revisar e consequentemente a reformular o modelo, o que justificou a necessidade de introduzir um termo de ordem 0.

Um resumo da análise da nova resolução da alínea A1)

Segue-se, de forma breve, uma síntese das duas análises, baseadas nas respetivas perspetivas teóricas (Tabela 26).

Tabela 26: Súmula dos resultados extraídos da revisão da alínea A1) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza registos verbais para uma reanálise dos resultados obtidos na alínea A) e revisão da resolução da alínea A)	*Faz uma nova exploração dos resultados da aplicação do modelo concebido na resolução das alíneas A) e A1) e descobre um segundo padrão*
Mobiliza registos numéricos para reinterpretar os resultados e destaca outro padrão nos mesmos	
Mobiliza um registo algébrico para expressar a sucessão tendo em atenção o segundo padrão	*O segundo padrão impulsiona a criação de um segundo modelo que consiste em considerar os termos como potências de 2*
Mobiliza registos verbais e registos numéricos para detalhar a condição a considerar inicialmente na definição da sucessão	*Considera o termo inicial como sendo o termo de ordem 0, para que o modelo se ajuste à situação real*
Mobiliza registos algébricos para reafirmar e completar a primeira relação algébrica e sugere uma segunda relação algébrica onde também especifica o termo inicial	*Faz uma revisão e reformulação do primeiro modelo*

Análise das alíneas C), C1 e C2) na perspetiva da TRRS

O Aluno 1 mobilizou registos verbais para interpretar a questão e mobilizou registos numéricos para destacar os termos a considerar na sucessão da alínea A), de modo a responder à questão colocada. Mobilizou registos verbais e algébricos para registar resumidamente o procedimento e os resultados da sua atividade matemática.

O aluno mobilizou depois registos numéricos e fez os tratamentos combinados dos mesmos e inferiu que existe uma regularidade nos resultados obtidos. A seguir, mobilizou registos verbais para referir a regularidade encontrada e sublinhar que o facto verificado é semelhante ao que teve lugar na alínea A). Em seguida, o aluno mobilizou registos verbais para descrever uma das características dos resultados obtidos e concluiu o raciocínio mobilizando registos algébrico para estabelecer uma relação genérica que permite resolver a questão colocada. Aqui, importa referir que a relação foi antes testada na folha de cálculo.

Além disso, mobilizou registos algébricos para apresentar uma relação genérica entre termos consecutivos da sucessão, mas antes mobilizou registos verbais para indicar que a relação então encontrada decorre dos resultados dos tratamentos realizados na resolução da alínea C1).

Análise das alíneas C), C1 e C2) na perspetiva M&M

O aluno começou por interpretar o modelo matemático obtido na alínea A) e, com a exploração do mesmo, conseguiu destacar os elementos a reter, no sentido de formar um segundo modelo. Formou o segundo modelo que explicita a situação imposta pela questão.

Com vista a descortinar a relação entre os constituintes do modelo então produzido, o aluno iniciou a exploração do mesmo, relacionando, a partir da folha de cálculo, as quantidades de vírus em semanas consecutivas e com este procedimento o aluno descobriu que existe uma regularidade. O aluno começou a verdadeira matematização do modelo ao compreender que a regularidade que constatou é análoga à situação do modelo que resultou da resolução das alíneas A) e A1). E considerando os seus conhecimentos sobre potências, o aluno observou uma das características dos resultados obtidos e, baseando-se no modelo criado, na resolução das alíneas A) e A1), o aluno conseguiu estabelecer um modelo genérico que permite resolver a questão colocada e expressou-o algebricamente, depois o ter testado na folha de cálculo.

Devido à similaridade entre o modelo das alíneas A) e A1) e o modelo das alíneas C) e C2), o aluno inferiu que, tendo em conta os resultados da exploração do modelo das alíneas C) e C2), seria possível representar o modelo utilizando outros dados e, deste modo, o aluno formulou-o e conseguiu destacar uma relação recursiva que permite representar o modelo. Assim, respondeu à solicitação de saber a quantidade de vírus a partir da quantidade existente na semana anterior.

Tabela 27: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C), C1) e C2) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos verbais para interpretar a questão	Iniciou a resolução da tarefa, interpretando e explorando o modelo matemático obtido na alínea A).
Mobilizou registos numéricos para destacar os termos a considerar, com base na sucessão da alínea A)	Ao explorar o modelo da alínea A), obteve e destacou os elementos a considerar para formar um segundo modelo.
Mobilizou registos verbais e algébricos para registar o procedimento e os resultados	Formou o segundo modelo que explicita a situação imposta pela questão.
O aluno mobilizou registos numéricos e fez os tratamentos combinados dos mesmos na folha de cálculo	A partir da folha de cálculo, iniciou a exploração do modelo, relacionando termos consecutivos para descobrir a relação entre os elementos do modelo
Mobilizou registos verbais para destacar a regularidade e sublinhar a analogia com a situação da alínea A)	Descobriu a existência de uma regularidade
Mobilizou registos verbais para referir uma das características dos resultados obtidos	A matematização do modelo ocorreu, ao constatar uma analogia com o modelo que resultou das alíneas A) e A1)
Mobilizou registos algébricos para estabelecer uma relação genérica, depois de ter testado a relação na folha de cálculo onde fez alguns tratamentos de registos numéricos	Generalizou o modelo que permite resolver a questão colocada e expressou-o algebricamente, depois o ter testado na folha de cálculo.
Mobilizou registos algébricos para apresentar uma relação genérica entre termos consecutivos da sucessão	Considerando os aspetos comuns entre os modelos, representou o novo modelo e conseguiu expressa-lo recursivamente
Mobilizou registos verbais para mostrar que a relação obtida decorre dos resultados dos tratamentos realizados na resolução da alínea C1)	

Análise da alínea D) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos verbais para expressar as relações entre as sucessões das alíneas A1) e C).

Análise da alínea D) na perspetiva M&M

Depois ter analisado os modelos, o aluno destacou a origem dos elementos que constituem o modelo matemático da alínea C), depois de ter compreendido que o modelo da alínea C) é um submodelo do da alínea A1.

Tabela 28: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea D) segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos verbais para expressar as relações entre as sucessões das alíneas A1) e C)	Explicitou que o modelo da alínea C) é um submodelo do da alínea A1)
	Destacou a origem dos elementos do modelo obtido

5.1.5 Resolução da Tarefa 3 - Cubos de gelo no copo

Resolução da alínea A1

O Aluno 1 começou por extrair dados fornecidos no enunciado do problema (Anexo 6) e em seguida organizou esses dados juntamente com dados que ele escolheu, conforme sugerido. Apoiando-se na interpretação que fez do problema, o aluno atribuiu alguns significados a elementos matemáticos nos dados que extraiu; por exemplo, considerou metade da altura como o nível inicial da água no copo (Fig. 50). Nesta fase, fez ainda alguns cálculos com recurso a folha de cálculo mesmo não sendo aparentemente necessários. O aluno mostrou também ter noção de que se procurava uma forma de descrever o nível da água no copo, de acordo com o que era referido no problema.

A1) Dados

$V_{cubo} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8\ cm^3 \Longrightarrow$ Q. Água deslocada $= 8\ cm^3 \times 0{,}9 =$
$= 7{,}2\ cm^3$

$r = 2{,}5$ cm (escolhido)

$h_c = 6$ cm (escolhido)

$h_{A0} = 3$ cm (que é a metade da altura)
ou nível ~~inicial da~~ Água inicial.

$h_A = ?$ (nível de Água).

Figura 50: Dados registados pelo Aluno 1 decorrentes da sua interpretação da Tarefa 3

Depois, a partir da fórmula do volume do cilindro, o aluno deduziu algebricamente uma equação que explicita a relação entre a altura e as outras grandezas envolvidas no cálculo do volume. Essa equação permitiu-lhe obter a relação entre a altura e o volume. Em seguida, substituiu na expressão o valor do volume correspondente a um cubo de gelo e o raio do copo. Introduziu essa fórmula na folha de cálculo e obteve um valor numérico que considerou como sendo a variação do nível de água quando um cubo é introduzido no copo (Fig. 51).

$$h = \frac{7{,}2\ cm^3}{3{,}14 \cdot 6{,}25} = \frac{7{,}2\ cm^3}{19{,}625} = 0{,}366879$$

Figura 51: A variação do nível de água considerada pelo Aluno 1, quando um cubo é introduzido no copo

Recorrendo à folha de cálculo, realizou varias tentativas e acabou por inserir na célula B14 o símbolo “var”, como abreviatura de variação; na célula C14 introduziu o valor 0,366879 calculado previamente e correspondente à variação do nível de água quando cada cubo é introduzido no copo; na célula C15, colocou o número 3 que corresponde ao nível inicial da água (isto é, metade da altura escolhida para o copo). Na coluna B (a partir da célula B16) escreveu os símbolos N1, N2,…,N15, que representam os níveis; por fim, na célula C16, inseriu a fórmula =+C15+0,366879 e arrastou-a, obtendo assim os níveis de água atingidos quando cada cubo é introduzido no copo. No final, registou estes valores no papel (Fig. 52 e Fig. 53).

14		var	0,366879
15		N0	3
16		N1	3,36687
17		N2	3,73374
18		N3	4,10061
19		N4	4,46748
20		N5	4,83435
21		N6	5,20122
22		N7	5,56809

13		
14	var	=7,2/19,625
15	N0	3
16	N1	=+C15+0,36687
17	N2	=+C16+0,36687
18	N3	=+C17+0,36687
19	N4	=+C18+0,36687
20	N5	=+C19+0,36687
21	N6	=+C20+0,36687

Figura 52: Fórmulas e resultados para os diversos níveis atingidos pela água, segundo a resolução do Aluno 1

no computador podemos obter

$N_1 = 3,366879$ | $N_3 \approx 4,10$ | $N_5 = 4,83$

$N_2 \approx 3,73$ | $N_4 = 4,46$ | $N_6 = 5,20$

..

Figura 53: Registo de diversos níveis atingidos pela água segundo a resolução do Aluno 1

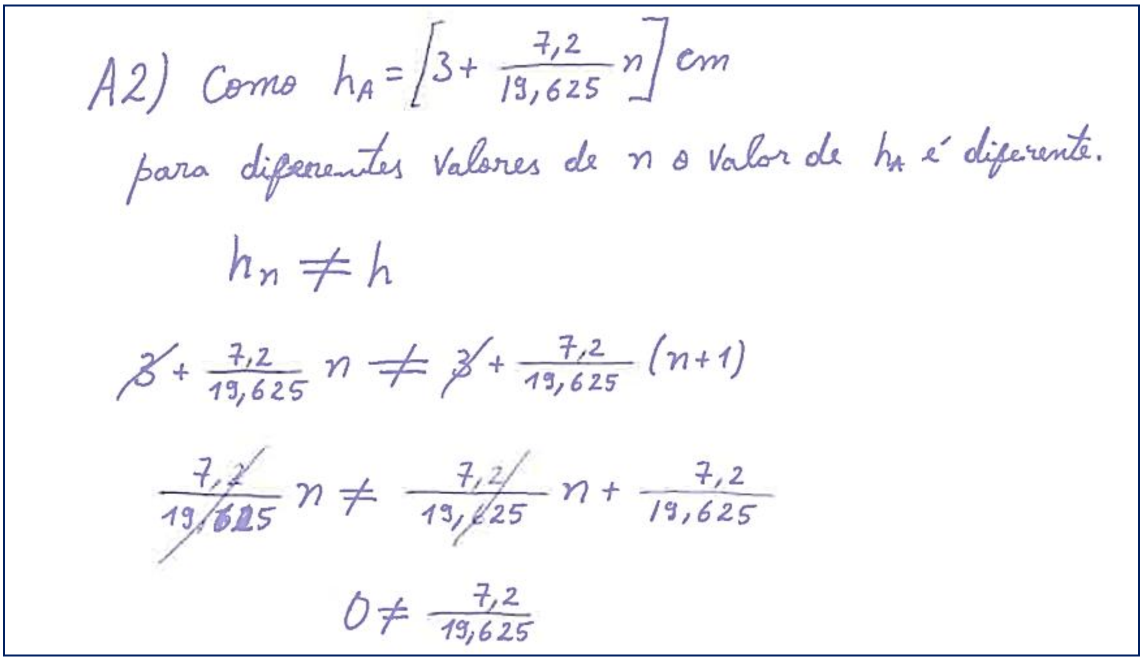
Resolução da alínea A1

Depois de uma breve exploração da tabela obtida na resolução da alínea A1), o aluno registou no papel uma fórmula que envolve o nível inicial da água, a variação do nível provocada por cada cubo de gelo e o número *n* de cubos introduzidos (Fig. 54). Chegou assim ao termo geral de uma sucessão.

$$h_A = h_{A0} + \frac{7,2}{19,625} n \qquad h = 3 + \frac{7,2}{19,625} n$$

Figura 54: Termo geral que permite determinar diversos níveis atingidos pela água em função do número de cubos de gelo introduzidos no copo

A expressão obtida, como função de n, é elucidativa de que o nível de água (h) depende do número de cubos de gelo. Contudo, o aluno parece entender que há necessidade de mostrar que diferentes quantidades de cubos resultam em níveis de água diferentes, levando a supor que estaria empenhado em provar, assim, a existência de uma relação de dependência entre *h* e *n*. Para explicitar que para distintos valores de *n*, o valor de h é diferente, optou por comparar o resultado para um número genérico n e para o sucessor deste número; após algumas simplificações, a desigualdade ficou provada (Fig. 55). Percebe-se, porém, uma imprecisão na primeira linha que deveria ser: $h_n \neq h_{n+1}$. Como se verá adiante, terá sido, provavelmente, um descuido.


A2) Como $h_A = \left[3 + \frac{7,2}{19,625} n\right]$ cm

para diferentes valores de n o valor de h_A é diferente.

$h_n \neq h$

$\cancel{3} + \frac{7,2}{19,625} n \neq \cancel{3} + \frac{7,2}{19,625} (n+1)$

$\cancel{\frac{7,2}{19,625} n} \neq \cancel{\frac{7,2}{19,625} n} + \frac{7,2}{19,625}$

$0 \neq \frac{7,2}{19,625}$

Figura 55: Registo da resposta da alínea A2 (Tarefa 3) apresentada pelo Aluno 1

Resolução das alíneas B1 e B2

Relativamente à questão da alínea B1, o aluno apresentou a resposta de forma muito simples e concisa (Fig. 56), mostrando ter muito clara a perceção da realidade de que o nível sobe com o aumento do número de cubos.

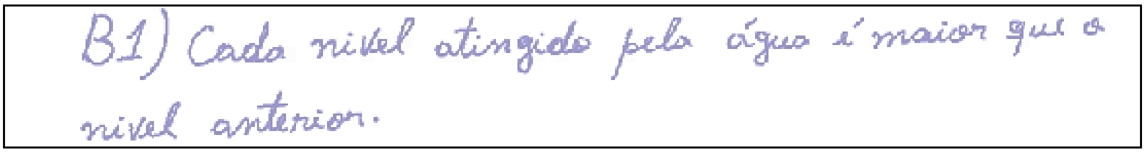
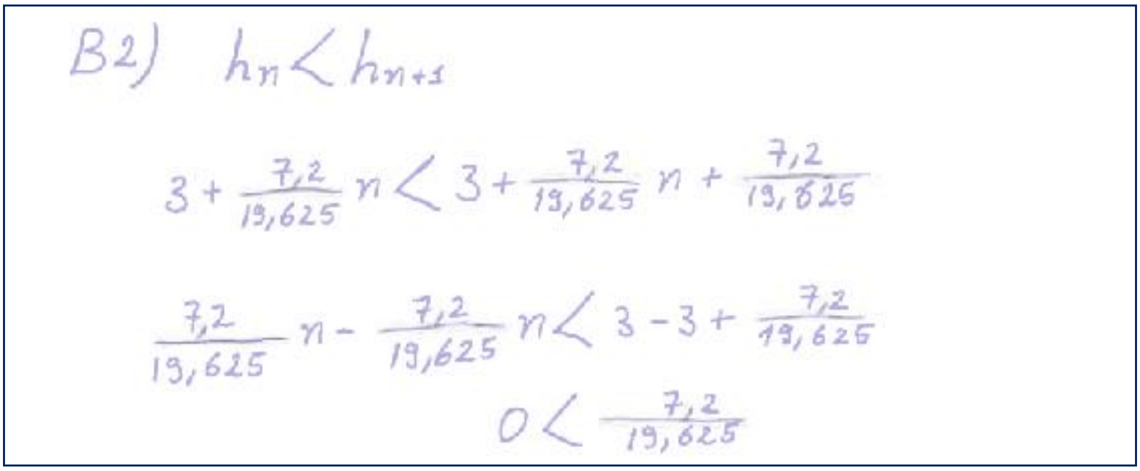

B1) Cada nivel atingido pela água é maior que o nivel anterior.

Figura 56: Registo da resposta da alínea B1 (Tarefa 3) apresentada pelo Aluno 1

Para responder à alínea B2, de modo a identificar uma relação entre termos consecutivos, o aluno considerou a monotonia, isto é, a ideia de que cada termo é menor do que o seguinte. Assim, seguiu a mesma estratégia que utilizou na alínea A2, mudando simplesmente o sinal relacional entre os dois membros da expressão que considerou (Fig. 57). Deste modo, chegou a uma proposição verdadeira, ainda que o aluno nunca tenha referido a monotonia crescente da sucessão. Note-se também que, desta vez, não houve lapso na simbologia usada para o termo de ordem n+1.



B2) $h_n < h_{n+1}$

$$3 + \frac{7,2}{19,625} n < 3 + \frac{7,2}{19,625} n + \frac{7,2}{19,625}$$

$$\frac{7,2}{19,625} n - \frac{7,2}{19,625} n < 3 - 3 + \frac{7,2}{19,625}$$

$$0 < \frac{7,2}{19,625}$$

Figura 57: Registo da resposta da alínea B2 (Tarefa 3) apresentada pelo Aluno 1

Resolução das alíneas C1 e C2

Para responder à alínea C1, o aluno elaborou um gráfico de barras na folha de cálculo que ilustra o crescimento dos sucessivos termos da sucessão (Fig. 58) e indicando com o cursor, disse:

> "No gráfico podemos observar que a sucessão é crescente. Se observarmos da esquerda para a direita, o gráfico sobe paulatinamente".

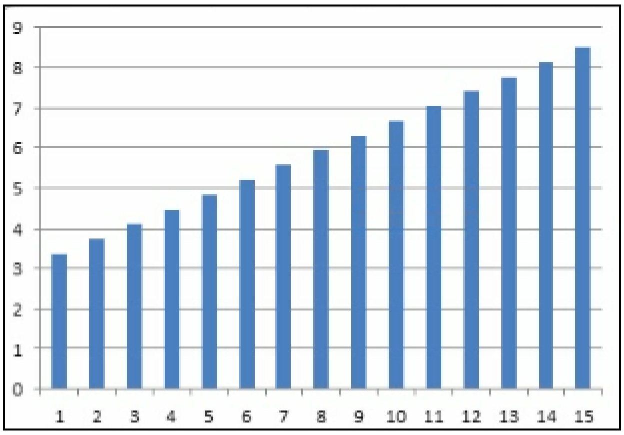


Figura 58:: Representação gráfica da sucessão dos níveis de água no copo

O aluno entendeu ainda que já tinha respondido à alínea C2, alegando que a resposta tinha sido dada na alínea B2. Com efeito, foi a propriedade da monotonia que o aluno antes considerou para descrever a relação existente entre termos consecutivos. Até aqui, o Aluno 1 nunca referiu o facto de ter obtido uma PA.

Resolução da alínea D

A alínea D, relativa ao número de cubos necessários para fazer o copo transbordar (altura do copo igual a 6) foi respondida com base na tabela que o aluno tinha já construído aquando da resolução da alínea A. Examinando essa tabela e indicando com o cursor, o aluno constatou que a altura do copo era ultrapassada pelo nível de água quando fosse introduzido o 9º cubo de gelo. Essa sua resposta pode ser lida na figura 59 e conclui a atividade do Aluno 1 na tarefa 3.

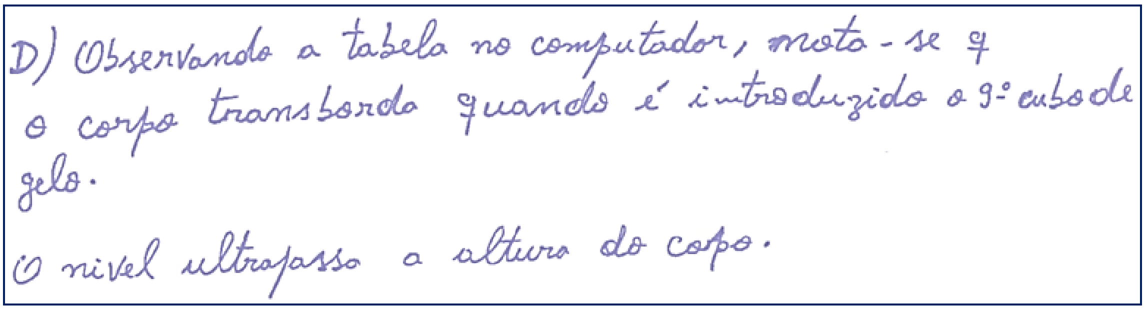

D) Observando a tabela no computador, nota-se q o corpo transbordo quando é introduzido o 9º cubo de gelo.
O nivel ultrapasso a altura do copo.

Figura 59: Registo da resposta da alínea D (Tarefa 3) apresentada pelo Aluno 1

5.1.6 Análise e Interpretação da Tarefa 3

Análise da alínea A1) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos verbais para interpretar o problema; seguidamente mobilizou registos verbais e numéricos, para destacar os dados sugeridos pelo contexto do problema e as dimensões do copo que adotou. Mobilizou registos verbais para exprimir o significado de alguns elementos matemáticos nos dados que extraiu, tendo ainda feito um tratamento simples que consistiu na determinação da metade da altura do copo.

Em seguida, mobilizou registos algébricos para representar a relação entre o volume de um cilindro e as demais dimensões e efetuou alguns tratamentos de modo a explicitar a altura do cilindro na relação então obtida. O aluno converteu alguns registos algébricos em registos numéricos e obteve a relação entre a altura e o volume no caso particular da introdução de um cubo de gelo, de acordo com o problema. Fez a conversão do registo algébrico em registo numérico e, deste modo, obteve um registo numérico que passou a representar a variação da altura quando um cubo de gelo fosse introduzido no copo.

Seguidamente, mobilizou um registo tabular para representar a situação e efetuou tratamentos de registos numéricos, obtendo uma sucessão de valores que representam os diversos níveis que a água no copo atinge à medida que cada cubo de gelo é introduzido.

Para finalizar, mobilizou registos numéricos para enunciar os primeiros seis resultados, no papel, salientando ainda que os mesmos foram calculados através do computador.

Análise da alínea A1) na perspetiva da M&M

O aluno iniciou a resolução do problema, considerando os dados propostos no enunciado e sugerindo as dimensões do copo. Destacou o significado de alguns elementos e em seguida recorreu a um modelo que relaciona o volume do cilindro com as demais dimensões. Depois, considerando a situação específica, o aluno transformou o modelo e passou a ter um modelo que determina a altura do cilindro em função das demais dimensões. Considerando os dados, fez as devidas substituições e obteve o valor numérico para a variação da altura quando um cubo de gelo é introduzido no copo.

A matematização do modelo ocorreu quando o aluno inseriu na folha de cálculo uma fórmula que permitiu calcular cada nível atingido pela água, através da adição do nível anterior com a variação constante já calculada. Com a aplicação deste modelo conseguiu resolver o problema e registou no papel os resultados decorrentes, destacando que a aplicação do modelo foi feita através da folha de cálculo.

Um resumo da análise da resolução da alínea A1)

Apresenta-se a seguir uma síntese das duas análises, baseadas nas respetivas perspetivas teóricas (Tabela 29).

Tabela 29: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobilizou registos verbais para interpretar o problema</td><td rowspan="2">Depois da interpretação da situação, iniciou a resolução, considerando os dados propostos e sugerindo as dimensões do copo</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos verbais e numéricos para destacar os dados e as dimensões do copo que escolheu</td></tr>
<tr><td>Fez um tratamento de registo numérico que consistiu na determinação da metade de altura</td><td>Iniciou a construção do modelo ao considerar a necessidade de determinar metade da altura do copo</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos verbais para exprimir o significado de alguns elementos matemáticos nos dados que extraiu</td><td rowspan="2">Destacou o significado de alguns elementos e em seguida recorreu a um modelo que relaciona o volume do cilindro com as demais dimensões de um cilindro</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos algébricos para representar a relação entre o volume de um cilindro e as demais dimensões</td></tr>
<tr><td>Efetuou tratamentos de modo a explicitar a relação entre a altura do cilindro e as demais dimensões</td><td rowspan="3">Transformou o modelo e fez as devidas substituições; obteve o valor numérico da variação da altura quando um cubo de gelo é introduzido no copo</td></tr>
<tr><td>Converteu registos algébricos em registos numéricos e obteve a relação entre a altura e o volume no caso particular do problema</td></tr>
<tr><td>Converteu o registo algébrico em registo numérico e deste modo obteve um registo</td></tr>
</table>

numérico que representa a variação da altura no copo	
Mobilizou um registo tabular para representar a situação	*Matematizou o modelo, inserindo na folha de cálculo uma fórmula que permitiu calcular cada nível atingido pela água, através da adição do nível anterior com a variação constante*
Partindo do registo tabular, efetuou tratamentos de registos numéricos, de forma automática, e obteve os valores que representam os sucessivos níveis que a água atinge no copo	
Mobilizou registos numéricos para indicar os primeiros seis resultados no papel, destacando que foram calculados através do computador	*Registou no papel os resultados decorrentes da aplicação do modelo e destacou que a aplicação do modelo foi feita através da folha de cálculo*

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

Para mostrar analiticamente que o nível da água no copo depende do número de cubos de gelo que forem introduzidos, o aluno mobilizou registos numéricos para explorar a tabela obtida na resolução da alínea A1). Seguidamente mobilizou registos algébricos para descrever o nível da água no copo à custa da quantidade de cubos introduzidos.

Para explicar que a variação do nível de água é dependente do número de cubos introduzidos, o aluno mobilizou novamente um registo algébrico; mobilizou também registos verbais para transmitir a sua ideia acerca da questão. Referiu que para diferentes valores da quantidade de cubos de gelo, o nível da água será diferente. Seguidamente, retomando o trabalho com registos algébricos comparou as relações para um termo genérico e o seu subsequente e depois de efetuar os devidos tratamentos obteve uma relação universal.

Análise da alínea A2) na perspetiva da M&M

Para representar o seu modelo, o aluno recorreu a exploração dos dados resultantes da aplicação da fórmula obtida e inferiu uma relação entre o nível inicial da água, a variação do nível da água no copo e a quantidade de cubos introduzidos. Para averiguar a relação de dependência entre o valor numérico do nível e quantidade de cubos de gelo, fez uma comparação entre a expressão algébrica na forma genérica e a mesma expressão para um subsequente hipotético. Isto permitiu a obtenção de uma proposição irrefutável.

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

Os resultados mais salientes, à luz das duas perspetivas teóricas, encontram-se sintetizados na tabela 30.

Tabela 30: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2, segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos numéricos ao explorar a tabela obtida na resolução da alínea A1)	*Fez a exploração dos dados resultantes da aplicação do modelo na folha de cálculo*
Mobilizou registos algébricos para representar uma relação que descreve o nível da água no copo à custa da quantidade de cubos introduzidos	*Inferiu uma relação entre o nível da água no copo e a quantidade de cubos introduzidos*
Mobilizou um registo algébrico para explicar que a variação do nível de água é dependente do número de cubos introduzidos	*Começou por assumir que para diferentes valores da quantidade de cubos de gelo o valor numérico do nível será diferente*
Mobilizou registos verbais para sublinhar que para diferentes valores da quantidade de cubos de gelo o valor numérico do nível será diferente	
Retomou o trabalho com registos algébricos e comparou as expressões para um caso genérico e o seu subsequente e depois de efetuar os devidos tratamentos obteve uma relação universal	*Fez uma comparação entre um termo de ordem genérica e o seu sucessor, o que permitiu a obtenção de uma proposição verdadeira*

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos verbais para expressar uma relação de ordem que observou entre cada nível atingido pela água e o nível anterior. Para definir analiticamente a relação aludida, o aluno optou por mobilizar registos algébricos e efetuar uma comparação de termos genericamente consecutivos e fez alguns tratamentos destes registos algébricos, tendo terminado com uma relação universal.

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da M&M

O aluno respondeu à questão, mostrando a sua convicção no que toca à relação a destacar entre resultados consecutivos (assumindo que seria a monotonia da sucessão). Para comprovar a sua convicção, o aluno sugeriu a comparação entre um termo geral e o seu subsequente e, usando os seus conhecimentos prévios, conseguiu provar a relação, ao chegar a uma desigualdade verdadeira.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B1) e B2)

A seguir, resumem-se as ideias principais na tabela 31.

Tabela 31: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B1 e B2, segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos verbais para expressar a relação que observa entre cada nível atingido pela água e o nível anterior	*Expressou a sua convicção no que se refere à relação a destacar entre termos consecutivos*
Mobilizou registos algébricos para fazer uma comparação entre termos genericamente consecutivos e fez alguns tratamentos de registos algébricos	*Algebricamente, fez a comparação entre o termo geral da sucessão e o seu subsequente e chegou a uma desigualdade universal*

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da TRRS

O Aluno 1 mobilizou registos verbais para tecer considerações sobre a monotonia da sucessão. Em seguida, obteve um registo gráfico para melhor visualizar a monotonia. Posteriormente, afirmou que a justificação analítica da monotonia já estava feita na resolução da alínea B2).

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da M&M

Para discutir a monotonia, o aluno recorreu às potencialidades da folha de cálculo, tal como a atividade sugere, e fez várias leituras, utilizando a linguagem natural. Reconsidera o modelo aplicado durante a resolução da alínea B2), pelo que afirma já ter analisado tal modelo do ponto de vista da monotonia.

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1) e C2)

De novo, segue-se a síntese dos resultados principais na tabela 32.

Tabela 32: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1 e C2, segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou um registo gráfico para melhor visualizar as propriedades da sucessão com respeito à monotonia	*Para discutir a monotonia, o aluno recorreu a folha de cálculo onde expressou graficamente o modelo matemático*
Mobilizou registos verbais para fazer a interpretação do gráfico, utilizando linguagem natural	*Considerando a representação gráfica do modelo, o aluno fez a sua interpretação, utilizando linguagem própria*
Considerou que a justificação analítica da monotonia já estava feita na resolução da alínea B2).	*Reutilizou o modelo explicativo aplicado durante a resolução da alínea B2), pelo que considerou a questão já resolvida*

Análise da alínea D) na perspetiva da TRRS

O Aluno 1 mobilizou registos numéricos de forma a reexaminar os resultados obtidos na resolução da alínea A); em seguida, mobilizou registos verbais para aludir ao "momento" em que se observa situação referida na questão proposta. O aluno explica ainda, de acordo com a situação real, o que acontece em termos de relações entre o nível de água e a altura do copo.

Análise da alínea D) na perspetiva da M&M

Para responder a questão proposta, o aluno recorreu aos resultados da aplicação do modelo que construiu na resolução da alínea A) e sublinhou o "momento" em que ocorre a situação descrita na questão. Destaca também o que realmente se observa, na situação prática, em termos da altura do copo e do nível da água.

Um resumo da análise da resolução da alínea D)

Na tabela 33 estão sumariadas as ideias fundamentais que se destacam de cada uma das leituras dos dados.

Tabela 33: Súmula dos resultados da resolução da alínea D segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos numéricos para reanalisar os resultados obtidos na resolução da alínea A)	*Recorreu aos resultados da aplicação do modelo construído na alínea A)*
Mobilizou registos verbais para indicar o "momento" em que se observa a situação referida na questão; descreveu o que ocorre relativamente ao nível de água e à altura do copo	*Destacou as condições a considerar no modelo; destacou também o que realmente se observa na realidade entre a altura do copo e o nível da água*

5.1.7 Resolução da Tarefa 4 - A Plantação de Laranjeiras

Resolução da alínea A1

O Aluno 1 iniciou a resolução do problema (Anexo 7), elaborando uma tabela na folha de cálculo, em que na coluna A colocou os dias, na coluna B a quantidade de árvores existentes e na coluna C a quantidade de árvores plantadas no mesmo dia. Importa referir que os primeiros quatro números da coluna B foram introduzidos manualmente e a partir do quinto número, o aluno identificou o padrão e inseriu uma fórmula que arrastou para obter os demais números. Essa fórmula mostra que reconheceu que os valores obtidos para o número de árvores existentes no final de cada dia correspondem a uma sucessão de quadrados perfeitos. Para preencher a coluna C, correspondente à quantidade de árevores novas plantadas em cada dia, o aluno subtraiu, na folha de cálculo, cada termo da coluna B com o seu antecedente. Estes cálculos aconteceram no intervalo C4:C6 e depois de descobrir o padrão, ao aluno fez a inserção da devida fórmula (Fig. 60).

	A	B	C	D
1				
2	Dias	Arvores existentes	plantadas no dia	
3	1	4	4	
4	2	9	=B4-C3	
5	3	16	=16-9	
6	4	25	=25-16	
7	5	=(A7+1)^2	=B7-B6	
8	6	=(A8+1)^2	=B8-B7	
9	7	=(A9+1)^2	=B9-B8	
10	8	=(A10+1)^2	=B10-B9	
11	9	=(A11+1)^2	=B11-B10	

	A	B	C	D
1				
2	Dias	Arvores existentes	plantadas no dia	
3	1	4	4	
4	2	9	5	
5	3	16	7	
6	4	25	9	
7	5	36	11	
8	6	49	13	
9	7	64	15	
10	8	81	17	
11	9	100	19	

Figura 60: Cálculo de quantidades de laranjeiras que estarão plantadas nos primeiros dias

Enquanto fazia a inserção de valores e fórmulas na folha de cálculo, o aluno anotava e registava os resultados no papel, como se pode ver na figura 61. Nas suas anotações, percebe-se que encontrou uma sucessão, que designou por d_n, para descrever o número de árvores plantadas em cada dia e que os respetivos termos foram automaticamente calculados na folha de cálculo.

A1) 1º dia plantou 4

No 2º dia passou a ter 9 o que significa que plantou 5

No 3º dia passou a ter 16 o que significa que plantou 7

No 4º dia passou a ter 25 o que " ~~7~~ plantou 9.

As quantidades plantadas diariamente são respectivamente:

$d_1 = 4,\ d_2 = 5,\ d_3 = 7,\ d_4 = 9$

No Pc é possivel observar os arastando $d_2, d_3, d_4 \ldots$

Figura 61: Registo da resposta da alínea A1 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 1

Resolução da alínea A2

Para resolver a alínea A2, o Aluno 1 continuou a exploração na folha de cálculo; procurou encontrar uma nova formulação para a sucessão representada na coluna C, que representava as quantidades plantadas em cada dia. Assim, criou uma nova coluna (coluna E), depois de ter percebido que os termos da sucessão, a partir do 2º termo, têm um acréscimo constante de 2 unidades. Deste modo, na coluna E, obteve os termos da sucessão por recorrência (Fig. 62).

	A	B	C	D	E
1					
2	Dias	Arvores existentes	plantadas no dia		
3	1	4	4		4
4	2	9	=B4-C3		5
5	3	16	=16-9		=E4+2
6	4	25	=25-16		=E5+2
7	5	=(A7+1)^2	=B7-B6		=E6+2
8	6	=(A8+1)^2	=B8-B7		=E7+2
9	7	=(A9+1)^2	=B9-B8		=E8+2
10	8	=(A10+1)^2	=B10-B9		=E9+2
11	9	=(A11+1)^2	=B11-B10		=E10+2
12	10	=(A12+1)^2	=B12-B11		=E11+2
13	11	=(A13+1)^2	=B13-B12		=E12+2

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Dias	Arvores existentes	plantadas no dia			
3	1	4	4		4	
4	2	9	5		5	
5	3	16	7		7	
6	4	25	9		9	
7	5	36	11		11	
8	6	49	13		13	
9	7	64	15		15	
10	8	81	17		17	
11	9	100	19		19	
12	10	121	21		21	
13	11	144	23		23	

Figura 62: Obtenção recursiva dos termos da sucessão das quantidades de laranjeiras plantadas em cada dia

Registou no papel a relação algébrica e explicitou que o cálculo por recorrência acontece somente a partir do terceiro termo (Fig. 63). Desse modo, indicou os dois primeiros termos.

A2) A partir do 3º dia, ele passou a plantar a quantidade do dia anterior + 2.

$d_1 = 4$

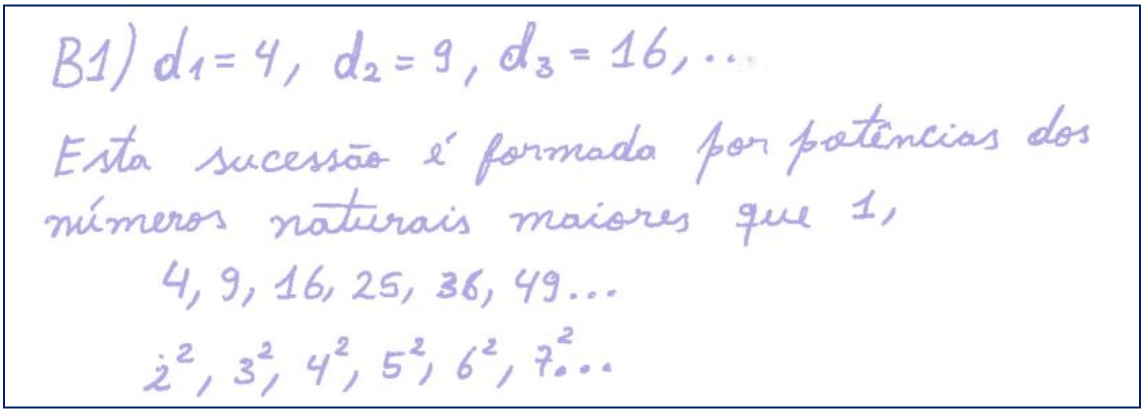
$d_2 = 5$

$d_n = d_{n-1} + 2$

Figura 63: Registo da resposta da alínea A2 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 1

Resolução das alíneas B1 e B2

Para responder à alínea B1, o aluno recorreu aos números que tinha obtido na coluna B e registou alguns destes no papel, explicitando o padrão numérico observado que consiste nas potências de expoente 2. Note-se ainda que o aluno usou a mesma designação d_n, para esta outra sucessão (Fig. 64).



B1) $d_1 = 4$, $d_2 = 9$, $d_3 = 16$, ...

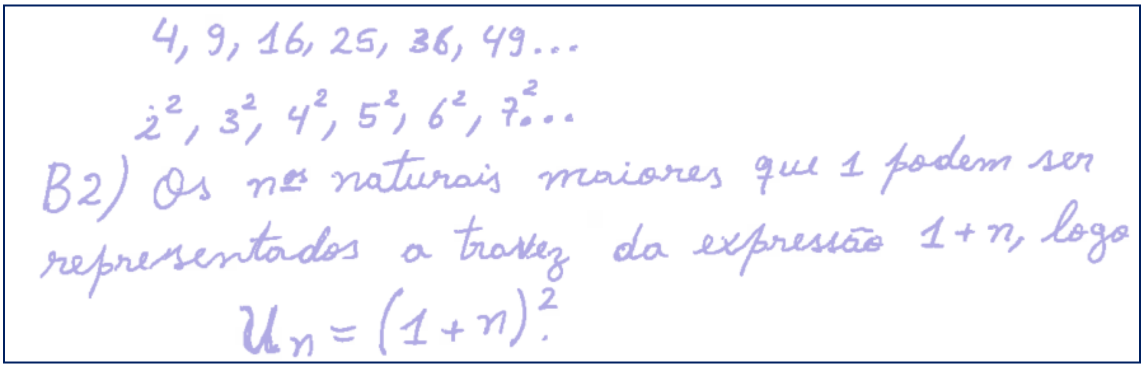
Esta sucessão é formada por potências dos números naturais maiores que 1,

4, 9, 16, 25, 36, 49...

$2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2$...

Figura 64: Registo da resposta da alínea B1 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 1

O aluno respondeu, em seguida, à alínea B2, generalizando e algebrizando as ideias que começou a explicitar quando respondeu à alínea B1 (Fig. 65). Curiosamente, nesta formalização da sucessão, utilizou uma outra designação: u_n.



4, 9, 16, 25, 36, 49...

$2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2$...

B2) Os nºs naturais maiores que 1 podem ser representados a travez da expressão $1+n$, logo

$U_n = (1+n)^2$.

Figura 65: Registo da resposta da alínea B2 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 1

Resolução das alíneas C1 e C2

Relativamente à determinação das áreas plantadas, durante uma breve exploração da folha de cálculo, o aluno utilizou a coluna G e fez a multiplicação reflexiva dos primeiros três números inteiros positivos. Logo que reconheceu o padrão numérico, começou por reiniciar a construção da sucessão inserindo na coluna G os números naturais e na coluna I os quadrados dos mesmos (Fig. 66).

F	G	H	I	J
	Dia	Áres		
	1	1	=G3^2	
	2	4	=G4^2	
	3	9	=G5^2	
	4	16	=G6^2	
	5		=G7^2	
	6		=G8^2	
	7		=G9^2	
	8		=G10^2	
	9		=G11^2	
	10		=G12^2	

G	H	I	J
Dia	Áres		
1	1	1	
2	4	4	
3	9	9	
4	16	16	
5		25	
6		36	
7		49	
8		64	
9		81	
10		100	

Figura 66: Obtenção da sucessão que representa a área total com plantação como função dos dias

Depois de obter a sucessão na folha de cálculo, o aluno registou vários termos consecutivos no papel e sublinhou que no computador era possível obter os outros valores, tendo já antecipado o termo geral da sucessão (Fig. 67), percebendo-se ainda alguma hesitação na sua expressão que levou o aluno a rasurar a sua primeira resposta, talvez pela semelhança que encontrou com a questão B2.

C1) em cada um dos 1ºs 100 dias terá plantado respecti-
vamente 1, 4, 9, 16, 25, 49, 64, 81, 100, ..., $(n+[illegible])^2$
no computador podemos obter os outros valores.

Figura 67: Registo da resposta da alínea C1 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 1

Para responder à alínea C2 (Fig. 68), e tendo já antecipado o termo geral, o aluno escreveu o termo geral da sucessão e referiu que o procedimento é análogo ao sugerido durante a resolução da alínea B2.

C2) Procedendo ~~de forma semelhante~~ como na alínea B2
é obtido o termo geral que é $u_n = (n+[illegible])^2$;

Figura 68: Registo da resposta da alínea C2 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 1

Resolução da alínea D1

O aluno calculou o quociente entre os termos da sucessão obtida na alínea B1 (árvores existentes ao fim de cada dia), situados na coluna B e os termos da sucessão obtida na alínea C1 (área ocupada pelas laranjeiras em cada dia), situados na coluna I, conforme pode ser visto na figura 69. Obteve assim uma nova sucessão que corresponde à densidade da plantação de árvores em cada dia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Dias	Arvores existentes	plantadas no dia				Dia	Áres			Densidade
3	1	4	4		4		1	1	=G3^2		=B3/I3
4	2	9	=B4-C3		5		2	4	=G4^2		=B4/I4
5	3	16	=16-9		=E4+2		3	9	=G5^2		=B5/I5
6	4	25	=25-16		=E5+2		4	16	=G6^2		=B6/I6
7	5	=(A7+1)^2	=B7-B6		=E6+2		5		=G7^2		=B7/I7
8	6	=(A8+1)^2	=B8-B7		=E7+2		6		=G8^2		=B8/I8
9	7	=(A9+1)^2	=B9-B8		=E8+2		7		=G9^2		=B9/I9
10	8	=(A10+1)^2	=B10-B9		=E9+2		8		=G10^2		=B10/I10
11	9	=(A11+1)^2	=B11-B10		=E10+		9		=G11^2		=B11/I11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Dias	Arvores existentes	plantadas no dia				Dia	Áres			Densidade
3	1	4	4		4		1	1	1		4
4	2	9	5		5		2	4	4		2,25
5	3	16	7		7		3	9	9		1,777777778
6	4	25	9		9		4	16	16		1,5625
7	5	36	11		11		5		25		1,44
8	6	49	13		13		6		36		1,361111111
9	7	64	15		15		7		49		1,306122449
10	8	81	17		17		8		64		1,265625
11	9	100	19		19		9		81		1,234567901

Figura 69: Obtenção dos termos da sucessão que representa a densidade da população de laranjeiras em função dos dias

Depois ter feito estes cálculos, na folha de cálculo, registou-os no papel em forma tabular, mantendo as frações e explicitou o termo geral da sucessão (Fig. 70).

D1)

ind.	4,	9	16	25	49	...	$(n+1)^2$
Área	1	4	9	16	25	...	n^2
Densidade	4	$\frac{9}{4}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{49}{25}$	...	$\frac{(n+1)^2}{n^2}$

no Computador podemos observar os outros termos

Figura 70: Registo da resposta da alínea D1 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 1

Resolução da alínea D2

A alínea D2 foi respondida de uma forma algo incompreensível, pois muitos dos elementos considerados já estavam antecipados (Fig. 71). Porém, o aluno parece ter perdido de vista os seus registos anteriores e também o modo como definiu a sucessão da densidade na folha de cálculo. Também parece estranha a forma como refere a existência de um primeiro termo da sucessão com o valor ¼ que considera à parte do termo geral (Fig. 71). A única justificação aparente para a resolução do aluno (considerar o inverso da densidade) parece estar em alguma confusão na forma de definir o quociente para determinar a densidade de árvores.

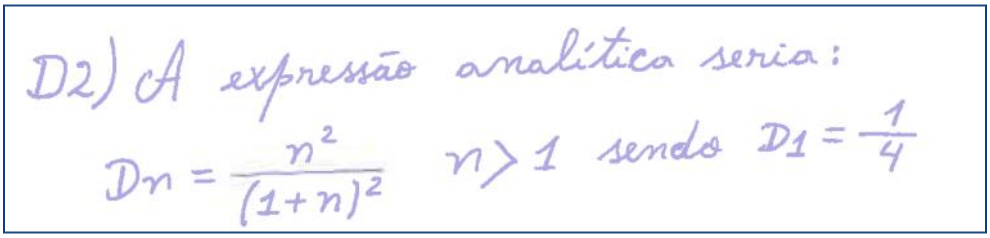


Figura 71: Registo da resposta da alínea D2 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 1

Resolução da alínea E

Para responder à alínea E, o aluno construiu um gráfico de pontos (Fig. 72), usando a sucessão que tinha corretamente definido na folha de cálculo e depois de explorá-lo, concluiu que a sucessão converge para 1:

> "Os termos da sucessão da alínea anterior se aproximam a 1, a sucessão é convergente".

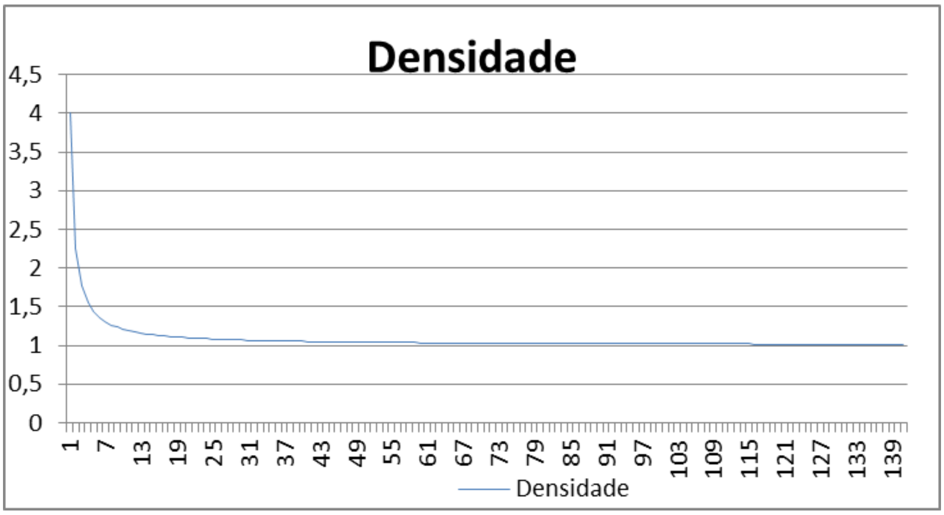


Figura 72: Representação gráfica da sucessão que representa a densidade da população das laranjeiras

5.1.8 Análise e Interpretação da Tarefa 4

Análise da alínea A1) na perspetiva da TRRS

Depois ter mobilizado registos verbais e esquemáticos para interpretar a situação proposta, o aluno iniciou a resolução, convertendo os registos esquemáticos em registos numéricos, utilizando a folha de cálculo. E simultaneamente foi fazendo tratamentos de registos numéricos, registando os resultados no papel. Importa salientar que enquanto registava os resultados no papel, mobilizou registos verbais para expressar o significado que atribuiu aos resultados.

Na folha de cálculo, conseguiu observar uma regularidade nos resultados. Isso levou-o a produzir fórmulas que lhe permitiram efetuar tratamentos de forma automática e, dessa forma, conseguiu obter as quantidades de laranjeiras plantadas em cada um dos primeiros dias.

Análise da alínea A1) na perspetiva da M&M

Depois analisar a situação, o aluno iniciou o seu modelo, interpretando o esquema proposto e através dessa interpretação determinou a quantidade de laranjeiras existentes na fazenda; o modelo foi então aperfeiçoado, ao considerar que a diferença entre a quantidade de laranjeiras existentes num determinado dia e a quantidade de laranjeiras existentes no dia anterior representa a quantidade de laranjeiras plantadas no dia considerado. A matematização do modelo iniciou-se com a implementação de fórmulas que permitiram obter os resultados de forma automática na folha de cálculo.

Um resumo da análise da resolução da alínea A1)

Segue-se um resumo dos resultados, à luz de cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 34).

Tabela 34: Súmula dos resultados da resolução da alínea A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais e esquemáticos para interpretar a situação proposta</td><td>Inicia a criação do modelo, interpretando o esquema sugerido</td></tr>
<tr><td>Converte os registos esquemáticos em registos numéricos, recorrendo à folha de cálculo</td><td>Através da interpretação do esquema começa a construção do modelo ao determinar a quantidade de laranjeiras existentes em cada dia</td></tr>
<tr><td>Simultaneamente, faz tratamentos de registos numéricos, registando os resultados no papel</td><td rowspan="2">Estabelece que a diferença entre a quantidade de laranjeiras existentes num determinado dia e a quantidade existente no dia anterior representa a quantidade de laranjeiras plantadas no dia considerado</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para expressar o significado que atribui aos resultados que foi registando no papel</td></tr>
<tr><td>Insere fórmulas que permitem efetuar tratamentos de forma automática, considerando a regularidade que observou</td><td>Para a matematização do modelo insere fórmulas que permitem obter os resultados de forma automática na folha de cálculo</td></tr>
<tr><td>Efetua tratamentos de forma automática e obtém as quantidades plantadas em cada um dos primeiros dias</td><td>A aplicação do modelo permite obter de forma automática as quantidades de laranjeiras plantadas em cada dia</td></tr>
</table>

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos que lhe permitiram continuar a exploração dos resultados obtidos durante a resolução da alínea A1). Experimentou tratamentos de registos numéricos e constatou outro padrão nos resultados. Tendo em atenção essa regularidade, o aluno inseriu na folha de cálculo uma fórmula que possibilitou efetuar tratamentos de forma automatizada de modo a obter a quantidade de laranjeiras plantadas em cada dia, dependendo da quantidade plantada no dia anterior.

Mobilizou registos verbais para registar no papel o critério então considerado e naturalmente mobilizou registos algébricos para representar as primeiras duas quantidades e a relação recursiva que permite determinar a quantidade de laranjeiras plantadas em cada dia dependendo da quantidade plantada no dia anterior.

Análise da alínea A2) na perspetiva da M&M

O aluno iniciou a resolução da questão proposta, explorando os resultados obtidos através da aplicação do modelo que propôs durante a resolução da alínea A1). Ao longo dessa exploração, o aluno percebeu um novo padrão numérico, segundo o qual a diferença entre quantidades plantadas em dias consecutivos é constante. Perante essa constatação, o aluno iniciou a elaboração do seu modelo, ao considerar que cada quantidade poderia ser calculada a partir da última quantidade conhecida (definindo portanto uma PA).

O aluno matematizou o modelo, ao inserir uma fórmula que permite a aplicação do modelo na folha de cálculo. E, de facto, obteve as primeiras quantidades de laranjeiras plantadas em cada um dos primeiros dias, dependendo da quantidade plantada em cada dia anterior.

Para certificar a aplicabilidade do modelo, o aluno recorrendo a simbologia algébrica, destacou as quantidades a considerar nos primeiros 2 dias e posteriormente aludiu a uma relação algébrica genérica que permite obter a quantidade de laranjeiras plantadas em cada dia dependendo da quantidade plantada no dia anterior.

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

Apresenta-se na tabela seguinte uma síntese das ideias emergentes da análise, de acordo com cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 35).

Tabela 35: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza registos numéricos que permitem continuar a exploração dos resultados obtidos durante a resolução da alínea A1)	*Explora os resultados obtidos através da aplicação do modelo que propôs durante a resolução da alínea A1)*
Ensaia tratamentos de registos numéricos e constata outra regularidade nos resultados	*O modelo explorado sugere que a diferença entre quantidades plantadas em dias consecutivos é constante*
Insere na folha de cálculo uma fórmula que leva a tratamentos e a obter cada uma das quantidades de laranjeiras, dependendo da quantidade plantada no dia anterior.	*Tendo em atenção o padrão dos resultados obtidos, o aluno iniciou a elaboração de seu modelo ao considerar que cada quantidade poderia ser calculada a partir da última quantidade conhecida.*
	Matematiza o modelo, inserindo uma fórmula para aplicação do modelo na folha de cálculo
Mobiliza registos verbais para registar no papel o padrão considerado	*Recorre a simbologia algébrica para determinar a quantidade de laranjeiras plantadas diariamente em função da quantidade plantada no dia anterior.*
Mobiliza registos algébricos para representar a relação recursiva que permite determinar a quantidade de laranjeiras plantadas em cada dia	

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos para interpretar os resultados das conversões dos registos esquemáticos realizadas durante a resolução da alínea A1), pois segundo a situação sugerida, estes registos numéricos representam as quantidades de laranjeiras existentes na fazenda em cada um dos primeiros dias. Com base nos seus conhecimentos prévios, o aluno mobilizou registos algébricos para representar tais quantidades; em seguida, converteu os registos algébricos em registos verbais e mas tarde converteu os registos verbais em numéricos, fez alguns tratamentos dos registos numéricos de modo a aclarar a coerência entre as representações verbais e numéricas que considerou.

Para continuar a sua atividade matemática, o aluno mobilizou novamente registos verbais e em simultâneo mobilizou um registo algébrico para representar genericamente a natureza do padrão numérico identificado. E considerando os tratamentos anteriormente feitos, o aluno converteu os registos numéricos num registo algébrico.

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da M&M

Para criar o seu modelo, o aluno fez uma interpretação dos resultados obtidos durante a resolução da alínea A1) e percebeu um padrão numérico. Desta feita, destacou alguns destes resultados e sublinhou o significado do padrão. Tendo em conta os seus conhecimentos gerais, procurou a expressão algébrica adequada para representar o conjunto dos números, tendo em conta a propriedade sublinhada.

E continuou a sua atividade matemática, propondo uma expressão algébrica para expressar o modelo que permite o cálculo da quantidade de laranjeiras em função do número de dias transcorridos.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B1) e B2)

Segue-se a síntese das ideias emergentes da análise, de acordo com cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 36).

Tabela 36: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B1 e B2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza registos numéricos para interpretar os resultados das conversões dos registos esquemáticos realizadas durante a resolução da alínea A1)	*Para criar o seu modelo, faz uma interpretação dos resultados obtidos durante a resolução da alínea A1)*
Mobiliza registos algébricos para representar as quantidades de laranjeiras existentes na fazenda em cada um dos primeiros dias	*Reconhece um padrão numérico nos resultados obtidos durante a resolução da alínea A1) e destaca alguns desses resultados*
Converte os registos algébricos em registos verbais	*Sublinha o significado do padrão considerado, bem como a propriedade a considerar, tendo em conta os seus conhecimentos*
Converte os registos verbais em numéricos	*Usa notação algébrica adequada para representar os resultados, tendo em conta a propriedade sublinhada*
Faz tratamentos dos registos numéricos	
Mobiliza registos verbais para exprimir a natureza dos números considerados	
Mobiliza um registo algébrico para representar genericamente a natureza dos números considerados	*Propõe uma expressão algébrica para expressar o modelo que descreve a quantidade de laranjeiras em função do número de dias transcorridos*
Considerando os tratamentos anteriormente efetuados, converte os registos numéricos num registo algébrico	

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos e experimentou alguns tratamentos de registos numéricos até que notou uma regularidade nos resultados. A partir daí, inseriu na folha de cálculo uma fórmula que lhe permitiu efetuar tratamentos de registos numéricos de forma automática e o obter as quantidades de laranjeiras plantadas dependendo do número de dias transcorridos.

Considerando os resultados e a fórmula inserida na folha de cálculo, o aluno formulou a resposta, mobilizando essencialmente registos numéricos e um registo algébrico genérico para representar os resultados. Além disso, mobilizou registos verbais para salientar que outros resultados foram obtidos, recorrendo ao computador.

E para concluir a resolução da alínea C2, o aluno mobilizou registos verbais para sublinhar que a estratégia de resolução a adotar foi a que seguiu na resolução da alínea B2. Feitas essas considerações, o aluno mobilizou registos algébrico para representar a sucessão.

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da M&M

O aluno cria o seu modelo, observando e experimentando operações matemáticas com os primeiros números inteiros positivos; esta exploração permitiu-lhe descobrir um padrão nos resultados. Considerando esse padrão, o aluno matematizou o modelo ao inserir uma fórmula que lhe permitiu obter os resultados da aplicação do modelo de forma automática. O padrão descoberto e consequentemente a fórmula inserida, levou o aluno a sugerir c uma relação algébrica que permite obter as quantidades de laranjeiras que existirão na fazenda durante os primeiros dias.

Tendo já sugerido um termo geral, ao responder a alínea C2), o aluno aludiu que o modelo a adotar deve ser o que foi proposto durante a resolução da alínea B2) e desta feita, apresentou o modelo matemático embora com algumas imprecisões.

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1) e C2)

Apresenta-se, a seguir, uma resenha das interpretações produzidas, de acordo com cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 37).

Tabela 37: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1 e C2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Começa por mobilizar registos numéricos</td><td rowspan="2">Cria o seu modelo observando e experimentando operações matemáticas</td></tr>
<tr><td>Efetua experimentalmente alguns tratamentos de registos numéricos</td></tr>
<tr><td>Considera e insere na folha de cálculo uma fórmula que lhe permite efetuar tratamentos de registos numéricos de forma automática</td><td>Depois de identificar um padrão, matematiza o modelo, ao inserir uma fórmula que permite obter resultados</td></tr>
<tr><td>Mobiliza essencialmente registos numéricos e um registo algébrico genérico para representar os resultados</td><td rowspan="2">Sugere uma relação algébrica que permite obter as quantidades de laranjeiras que existirão na fazenda nos primeiros dias</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para salientar que outros resultados seriam obtidos, recorrendo ao computador.</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para expressar a intenção de reutilizar a estratégia usada na alínea B2)</td><td rowspan="2">Adota o modelo proposto durante a resolução da alínea B2) e, apresenta o modelo matemático embora com algumas imprecisões</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos algébricos para representar a sucessão, considerando a estratégia aplicada na resolução da alínea B2)</td></tr>
</table>

Análise das alíneas D1), D2) e E) na perspetiva da TRRS

Tendo em conta a questão de determinar a densidade populacional nos primeiros dias, o aluno mobilizou registos numéricos obtidos durante a resolução de alíneas anteriores e efetuou transformações para assim obter os registos numéricos que representam a densidade.

Ao registar no papel, o aluno mobilizou registos numéricos e organizou-os em tabela e seguidamente considerando os registos algébricos sugeridos em alíneas anteriores, o aluno sugeriu um tratamento sincronizado de tal modo que obteve uma expressão algébrica que representa de forma genérica os termos da sucessão que representa a densidade da população de laranjeiras.

De seguida, o Aluno 1 mobilizou novos registos algébricos para representar o termo geral da sucessão mas aparentemente confundiu-se na forma de escrever o quociente que define a densidade (número de árvores por metro quadrado). Também cometeu o mesmo erro, ao considerar que a densidade no 1º dia seria ¼ (em vez de 4).

Para analisar o comportamento da sucessão que representa a densidade, o aluno converteu os registos numéricos num registo gráfico e teceu as devidas considerações sobre a tendência dos termos da sucessão, bem como a convergência da mesma.

Análise das alíneas D1), D2) e E) na perspetiva da M&M

Depois ter interpretado a questão proposta, o aluno formulou o seu modelo, combinando os resultados da aplicação dos modelos anteriormente concebidos e aplicados durante a resolução das alíneas B1) e C1). Da mesma forma, reutilizou combinadamente os modelos aplicados nas respostas às alíneas B2) e C2) e obteve assim a representação algébrica da situação proposta.

Ao responder à solicitação de um termo geral para a sucessão que representava a densidade como função do número de dias, o aluno equivocou-se aplicação do modelo anterior. O seu erro consistiu em trocar a ordem dos termos da fração que dá a densidade populacional por metro quadrado. O seu erro esteve igualmente presente ao indicar que no 1º dia a densidade seria ¼ (em vez de 4).

Utilizando as potencialidades do MS-Excel, o aluno, partindo do modelo expresso numericamente, representou-o graficamente e a partir do gráfico descreveu a tendência dos termos da sucessão e sublinhou as suas conclusões a respeito da convergência da sucessão que traduz a densidade populacional ao longo dos dias.

Um resumo da análise da resolução das alíneas D1), D2) e E)

Apresenta-se, a seguir, uma resenha das interpretações produzidas, de acordo com cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 38).

Tabela 38: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas D1, D2 e E, segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobilizou registos numéricos obtidos durante a resolução de alíneas anteriores</td><td rowspan="3">Formulou o seu modelo, combinando os resultados da aplicação dos modelos anteriormente concebidos e aplicados na resolução das alíneas B1) e C1)</td></tr>
<tr><td>Efetuou transformações e obteve os registos numéricos que representam a densidade populacional</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos numéricos e organizou-os em tabela</td></tr>
<tr><td>Sugeriu o tratamento sincronizado dos registos algébricos e obteve uma expressão algébrica que representa a densidade populacional</td><td rowspan="2">Reutilizou combinadamente os modelos aplicados durante a resposta das alíneas B2) e C2) e obteve assim a representação algébrica da densidade; posteriormente, cometeu um lapso ao inverter os termos da fração no termo geral da sucessão</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos algébricos para representar a sucessão mas cometeu um lapso na escrita desse registo</td></tr>
<tr><td>Converteu os registos numéricos num registo gráfico que representa a sucessão das densidades</td><td rowspan="2">Representou graficamente o modelo e com base na leitura do gráfico descreveu a tendência e sublinhou as suas conclusões a respeito da convergência da sucessão</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos verbais para tecer considerações sobre a tendência dos termos da sucessão e a convergência da mesma</td></tr>
</table>

5.1.9 Resolução da Tarefa 5 - O coração: “Diástole e Sístole”

Depois de uma leitura cuidadosa da tarefa (Anexo 8), o Aluno 1 iniciou a resolução da questão, atribuindo o valor numérico 1 à diástole e -1 à sístole; segundo ele, o sinal positivo significa receber e o negativo significa ejetar o sangue. Logo depois, utilizou a folha de cálculo onde começou por representar a diástole por D e a sístole por S, na linha 1, no intervalo B1:M1. Repetiu alternadamente as letras D e S e na linha abaixo escreveu 1 sob a letra D e -1 sob a letra S. Assim, obteve no intervalo B2:M2 uma sucessão alternada com os termos 1 e -1 (Fig. 73). Depois copiou estes valores para o papel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		D	S	D	S	D	S	D	S	D	S	D	S	
2		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	…

Figura 73: Sucessão de diástoles e sístoles sugerida pelo Aluno 1

Resolução da alínea A

Para resolver a alínea A, o aluno voltou a escrever a sucessão numérica obtida no intervalo B4:M4 (linha 4) e no intervalo B3:M3 (linha 3) introduziu os números naturais para indicar a ordem dos termos (Fig. 74). Além disso contornou as células das linhas 3 e 4 que continham a ordem e o respetivo termo da sucessão alternada que descreve os ciclos cardíacos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		D	S	D	S	D	S	D	S	D	S	D	S	
2		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...
3		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...

Figura 74: Sucessão de diástoles e sístoles sugerida pelo Aluno 1 com indicação da ordem de cada termo

Depois de várias conjeturas e experiências na folha de cálculo, o aluno conseguiu determinar o termo geral da sucessão alternada como potências consecutivas de base (-1). As suas tentativas centraram-se sobretudo em obter a expressão do expoente dada à custa dos elementos da linha 3, ou seja, a ordem dos termos. Por fim, a sucessão através de uma fórmula que escreveu na célula B7 e que arrastou ao longo da linha 7 (Fig. 75).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		D	S	D	S	D	S	D	S
2		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3		1	2	3	4	5	6	7	8
4		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5									
6									
7	un	=(-1)^(B3+1)	=(-1)^(C3+1)	=(-1)^(D3+1)	=(-1)^(E3+1)	=(-1)^(F3+1)	=(-1)^(G3+1)	=(-1)^(H3+1)	=(-1)^(I3+1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		D	S	D	S	D	S	D	S	D	S	D	S
2		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
3		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5													
6													
7	un	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Figura 75: Obtenção dos termos da sucessão de diástoles e sístoles com aplicação de fórmulas

Despois de ter conseguido obter uma expressão para gerar a sucessão, o Aluno 1 registou no papel o termo geral que considerou (Fig. 76).

A) $u_n = (-1)^{n+1}$

Figura 76: Registo da resposta da alínea A (Tarefa 5) apresentada pelo Aluno 1
(Termo geral da sucessão alternada)

Resolução da alínea B

Para responder à alínea B, o Aluno 1 recorreu a um gráfico de linhas que construiu na folha de cálculo (Fig. 77) e apontando o cursor sobre o gráfico, concluiu acerca da monotonia da sucessão:

> "A sucessão decresce e cresce alternadamente".

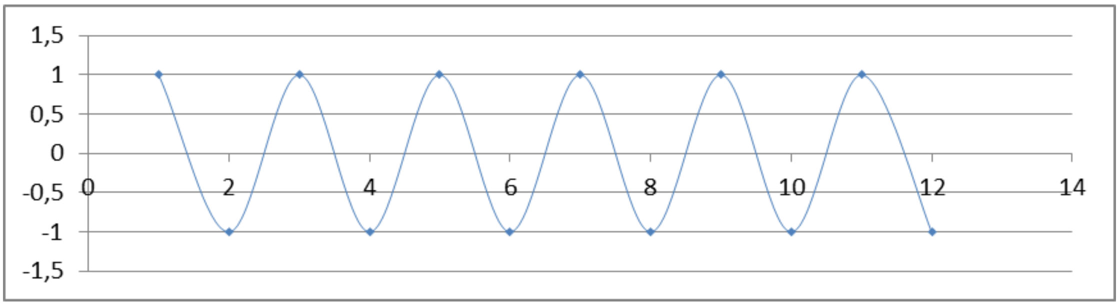


Figura 77: Representação gráfica da sucessão de diástoles e sístoles

Resolução das alíneas C1 e C2

Começando por explorar tabelas na folha de cálculo, o aluno calculou a média dos termos consecutivos que obviamente resultou no valor zero em todos os casos. E registou no papel alguns desses cálculos, tendo estabelecido o termo geral da sucessão pedida, isto é, uma sucessão constante igual a 0 (Fig. 78).

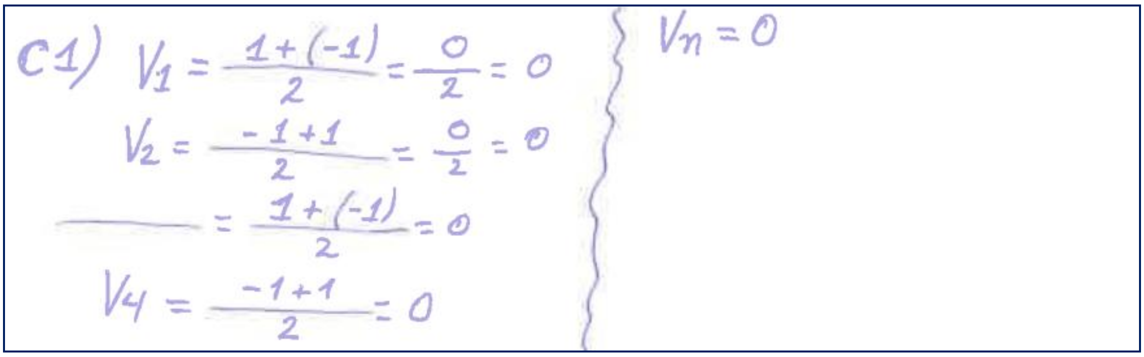
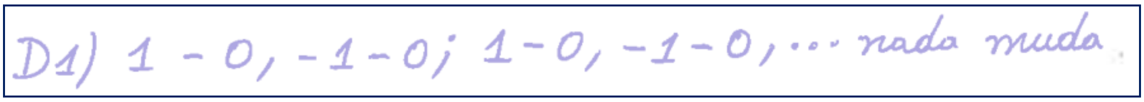


Figura 78: Registo da resposta da alínea C1 (Tarefa 5) apresentada pelo Aluno 1

Na resposta à alínea C2, o aluno não demostrou qualquer dificuldade, expressando a sucessão através do termo geral, respondendo que a sucessão é convergente e que não é monótona mas que tem majorante e minorante e por isso é limitada.

Resolução das alíneas D1 e D2

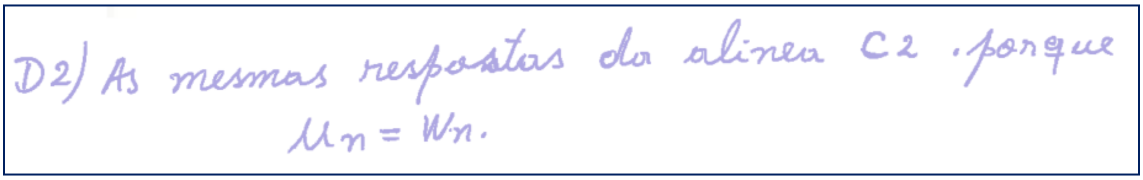
Na alínea D1, o aluno efetuou os cálculos e porque o subtrativo era zero para todos os casos, obteve a mesma sucessão alternada que escreveu na alínea A, portanto, registou estas operações no papel e esclareceu que nada muda (Fig. 79).



D1) $1-0, -1-0; 1-0, -1-0, \ldots$ nada muda

Figura 79: Registo da resposta da alínea D1 (Tarefa 5) apresentada pelo Aluno 1

Na alínea D2, o aluno, com justa razão, limitou-se a dizer que as respostas seriam idênticas com às dadas na alínea C2, por se tratar de duas sucessões iguais (Fig. 80). Ficou assim concluída a atividade do Aluno 1 na tarefa 5.



D2) As mesmas respostas da alínea C2 . porque $u_n = w_n$.

Figura 80: Registo da resposta da alínea D2 (Tarefa 5) apresentada pelo Aluno 1

5.1.10 Análise e Interpretação da Tarefa 5

Análise das alíneas A) e B) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos verbais para interpretar a questão proposta, e tendo em conta a situação, mobilizou registos numéricos para representar cada um dos dois momentos do ciclo cardíaco. Seguidamente, mobilizou registos simbólicos para representar também a diástole e a sístole. E mobilizando alternadamente tanto os registos simbólicos quanto os numéricos, obteve a sucessão que representa o fenómeno sugerido.

Depois, o aluno mobilizou novamente registos numéricos para representar os termos da sucessão e as suas respetivas ordens. Passou algum tempo a fazer experimentalmente diversos tratamentos de registos numéricos até que notou uma regularidade nos resultados, inseriu na folha de cálculo a fórmula que reproduziu o padrão descoberto nos tratamentos anteriores. Na folha de cálculo fez então, de forma automática, tratamentos de registos numéricos que resultaram na obtenção dos termos da sucessão que representa o fenómeno.

Considerando e aproveitando a estrutura da fórmula inserida na folha de cálculo, o aluno mobilizou registos algébricos para representar a sucessão analiticamente.

Para melhor analisar as propriedades da sucessão sugeridas na questão, o aluno mobilizou os registos numéricos que representam a sucessão e converteu-os em registos gráficos. Assim, com base na leitura do gráfico, o aluno mobilizou registos verbais para enfatizar as particularidades da monotonia da sucessão.

Análise das alíneas A) e B) na perspetiva da M&M

Depois da leitura das questões, o Aluno 1 iniciou a construção do seu modelo, optando por atribuir os valores -1 e 1 para as duas fases do ciclo cardíaco e comentou que o sinal positivo significa receber e o negativo significa ejetar o sangue. Depois, aproveitando as iniciais D e S, para simbolizar diástole e sístole, formou a sucessão alternada ao repetir de forma intercalada os números -1 e 1 acompanhados das letras D e S. Tendo em conta a situação proposta, o aluno procurou matematizar o seu modelo e, para tal, fez várias combinações de operações com números, de forma experimental, até conseguir obter a sucessão através de uma fórmula na folha de cálculo. Tendo por base essa fórmula, representou algebricamente o seu modelo.

Para analisar a monotonia da sucessão, o aluno aproveitou as potencialidades da folha de cálculos e visualizou graficamente a sucessão e interpretou os atributos do modelo. Concluiu que a sucessão decresce e cresce alternadamente.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e B)

Segue-se uma síntese comparativa que traduz a análise desenvolvida, segundo as duas perspetivas teóricas (Tabela 39).

Tabela 39: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas A e B segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 5/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobilizou registos numéricos para representar cada um dos dois momentos do ciclo cardíaco</td><td rowspan="2">Iniciou a construção do modelo, atribuindo os valores -1 e 1, dando significados aos sinais positivo e negativo e usando letras para simbolizar diástole e sístole</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos simbólicos para representar a diástole e a sístole</td></tr>
<tr><td>Mobilizando alternadamente registos simbólicos e numéricos, obteve a sucessão que representa o fenómeno sugerido</td><td rowspan="2">Criou a sucessão alternada, organizando os dados numa tabela de duas linhas</td></tr>
<tr><td>Mobilizou novamente registos numéricos para representar os termos da sucessão e as respetivas ordens</td></tr>
<tr><td>Efetuou experimentalmente diversos tratamentos de registos numéricos até que notou uma regularidade nos resultados</td><td>Para matematizar o seu, fez várias combinações de operações com números de forma experimental até conseguir obter a sucessão através de uma fórmula que inseriu</td></tr>
</table>

Inseriu uma fórmula na folha de cálculo a fórmula que permitiu alguns tratamentos de registos numéricos e a obtenção da sucessão que representa o fenómeno	*e arrastou numa das colunas da folha de cálculo*
Mobilizou registos algébricos para representar a sucessão analiticamente	*Representou algebricamente o modelo*
Mobilizou os registos numéricos que representam a sucessão e converteu-os em registos gráficos	*Aproveitou as potencialidades da folha de cálculos e visualizou graficamente a sucessão e, interpretando os atributos do modelo, caraterizou a monotonia da sucessão*
Mobilizou registos verbais para enfatizar as particularidades da monotonia da sucessão	

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da TRRS

Para realizar a tarefa proposta, o aluno mobilizou registos numéricos que lhe permitiram explorar as tabelas que já estavam na folha de cálculo e fez as transformações destes registos tal como sugere a situação. Assim, pelo facto de ter usado os valores -1 e 1 na sucessão inicial, obteve a seguir uma sucessão constante correspondente às médias de dois termos consecutivos.

Para finalizar a tarefa sugerida, o aluno mobilizou registos algébricos para representar a sucessão e registos verbais para apontar de forma geral os principais atributos da sucessão.

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da M&M

O aluno praticamente aplicou o modelo sugerido (a média de dois termos consecutivos) e conseguiu obter os resultados pretendidos. Usando conhecimentos prévios, expressou algebricamente a sucessão resultante e caracterizou-a sem demostrar qualquer dificuldade.

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1) e C2)

Faz-se, a seguir, uma breve resenha das principais interpretações segundo cada uma das perspetivas (Tabela 40).

Tabela 40: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1 e C2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 5/Aluno 1)

Na perspetiva de TRRS	***Na perspetiva de M&M***
Mobilizou registos numéricos que lhe permitiram explorar as tabelas já criadas na folha de cálculo	*Aplicou o modelo sugerido e conseguiu obter os resultados pretendidos*
Fez as transformações dos registos tal como sugerido e obteve uma sucessão constante	
Mobilizou registos algébricos para representar a sucessão	*A partir dos conhecimentos prévios, expressou algebricamente a sucessão resultante e caracterizou-a*
Mobilizou registos verbais para apontar os principais atributos da sucessão	

Análise das alíneas D1) e D2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos para explorar os resultados obtidos durante a resolução das alíneas anteriores e fez os tratamentos combinados destes registos, Tendo em conta a natureza dos registos numéricos envolvidos, o aluno mobilizou registos verbais para concluir que nada muda na sucessão inicial, querendo com isto dizer que o resultado será a mesma sucessão que foi obtida aquando da resolução da alínea A). Da mesma forma, mobilizou registos verbais para sublinhar que os atributos a considerar são os já referenciados para a sucessão obtida na alínea C2 e, por fim, mobilizou registos algébricos para representar a relação de igualdade entre as sucessões.

Análise das alíneas D1) e D2) na perspetiva da M&M

Considerando os resultados das alíneas anteriores, o aluno aplicou o modelo sugerido e conseguiu obter os resultados preconizados. Usando os seus conhecimentos prévios, que “nada muda”, ou seja, o resultado é o mesmo que foi obtido aquando da resolução da alínea A). Consequentemente, o aluno sugeriu a reutilização da resposta apontada na alínea B) considerando que as sucessões tratadas são iguais.

Um resumo da análise da resolução das alíneas´D1) e D2)

A seguir, resumem-se as ideias centrais, à luz de cada uma das perspetivas (Tabela 41).

Tabela 41: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas D1 e D2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 5/Aluno 1)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobilizou registos numéricos para explorar os resultados obtidos durante a resolução das alíneas anteriores</td><td rowspan="2">Considerando os resultados das alíneas anteriores, aplicou o modelo sugerido e obteve os resultados</td></tr>
<tr><td>Fez tratamentos combinados de registos numéricos</td></tr>
<tr><td>Tendo em conta os registos numéricos envolvidos o aluno mobilizou registos verbais para notar que estava perante uma sucessão igual</td><td>Usando os seus conhecimentos prévios, concluiu que o resultado era o mesmo da alínea A)</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos verbais para sublinhar que os atributos a considerar foram referidos na alínea C2</td><td rowspan="2">Sugeriu a reutilização da resposta da alínea C2), considerando que as sucessões tratadas são iguais</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos algébricos para representar a relação de igualdade entre as duas sucessões</td></tr>
</table>

5.2 Caso do Aluno 2

Esta secção é dedicada à apresentação e análise do caso do Aluno 2. A secção subdivide-se em duas partes, sendo que a primeira contém uma descrição detalhada das resoluções produzidas pelo aluno nas 5 tarefas propostas, considerando detalhadamente as diversas questões colocadas, e a segunda contém uma análise interpretativa dos resultados, segundo as duas linhas tóricas adotadas, isto é, a Teoria dos Registos de Representações Semióticas e a Teoria de Modelos e Modelação. Faz-se ainda uma leitura comparativa entre os resultados obtidos à luz de cada uma das perspetivas teóricas.

5.2.1 Resolução da Tarefa 1 – Jardim de roseiras

Resolução da alínea A

O Aluno 2 iniciou a resolução da primeira tarefa (Anexo 4), recorrendo a um esquema em que mostra uma numa linha horizontal onde representou as roseiras, tendo em conta as respetivas distâncias em relação à fonte. Para facilitar a compreensão dos dados, associou a esta linha alguns diagramas onde indicou as trajetórias de ida e volta para cada viagem; nas trajetórias da 1ª e da 2ª viagem indicou as distâncias percorridas, que deduziu a partir da linha que inicialmente traçou e dos valores representados (Fig. 81).

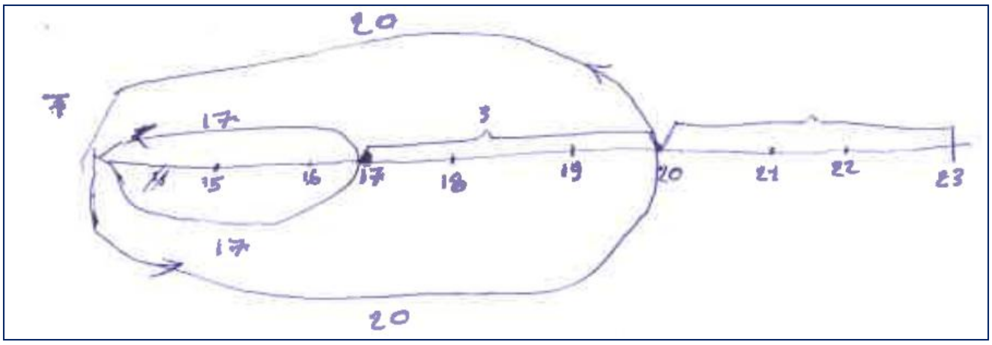


Figura 81: Representação esquemática da fonte e as roseiras com indicação das distâncias

A partir deste esquema, extraiu os primeiros dados que inseriu na folha de cálculo para efetuar os primeiros cálculos, tendo colocado no intervalo B35:B37, as três distancias que correspondem às idas; depois, introduzido a fórmula =2*B35 na célula D35, obteve as primeiras três distancias que considerou, conforme se pode ver na figura 82, e referiu ainda que:

> "Na primeira viagem é 17×2=34; na segunda viagem é 20×2=40 e na terceira é 23×2=46".

	A	B	C	D	E
34					
35		17		=2*B35	
36		20			
37		23			
38					
39					

	A	B	C	D	E
34					
35		17		34	
36		20		40	
37		23		46	
38					
39					

Figura 82: Obtenção da sucessão das distâncias percorridas pelo jardineiro em função do número de viagens

Depois desta conclusão, o aluno tentou encontrar algum padrão numérico no conjunto de distâncias e descobriu que a diferença entre termos consecutivos era constante. Fez algumas experiências, inserindo fórmulas simples nas células F36 e F37, que o levaram a constatar que o valor 6 se repetia ao fazer a diferença entre vários termos consecutivos. A partir daí, o aluno percebeu que o valor 40 seria obtido a partir do 34 somado com 6 e que o mesmo acontecia para o valor 46 como resultado da soma de 40 com 6. Então, decidiu escrever numa nova coluna o número 34, que corresponde à primeira distância percorrida. Assim, esse valor inicial foi colocado na célula H35, e na célula H36 o aluno inseriu a fórmula =H35+6. Por fim, arrastou esta fórmula e obteve as distâncias sucessivas na coluna H (Fig. 83).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
34									
35		17		=2*B35				34	
36		20		=2*B36		=D36-D35		=H35+6	
37		23		=2*B37		=D37-D36		=H36+6	
38								=H37+6	
39								=H38+6	
40								=H39+6	
41								=H40+6	
42								=H41+6	
43								=H42+6	
44								=H43+6	
45								=H44+6	
46								=H45+6	
47								=H46+6	
48								=H47+6	
49								=H48+6	
50								=H49+6	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
34									
35		17		34				34	
36		20		40		6		40	
37		23		46		6		46	
38								52	
39								58	
40								64	
41								70	
42								76	
43								82	
44								88	
45								94	
46								100	
47								106	
48								112	
49								118	
50								124	

Figura 83: Obtenção recursiva da sucessão das distâncias percorridas pelo jardineiro em cada uma das sucessivas viagens

Resolução da alínea A1

Para resolver a alínea A1, o aluno decidiu representar as distâncias (termos da sucessão) por K_n e, considerando a fórmula que utilizou na alínea anterior, definiu a sucessão tendo em conta que cada termo podia ser calculado adicionando 6 ao termo anterior. Desta forma obteve o modelo $K_n = K_{n-1} + 6$, conforme se pode ver na figura 84.

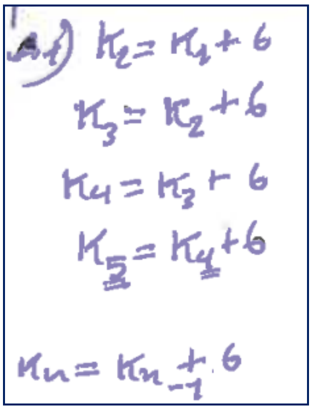


Figura 84: Registo da resposta da alínea A1 (Tarefa 1) apresentada pelo Aluno 2

Resolução da alínea B

Para resolver a alínea B, o aluno considerou que as quantidades de roseiras regadas ao final de sucessivas viagens se acumulam, ou seja, partiu do principio que:

> "Na 1ª viagem rega 3 roseiras e vai regando 3 roseiras em cada viagem; quando rega 3 roseiras na 2ª viagem temos 3+3 roseiras regadas; quando rega 3 na 3ª viagem temos 3+3+3 roseiras regadas. Então temos 3, 6, 9, …".

Para materializar ou ilustrar esta ideia, o aluno recorreu à folha de cálculo, tendo colocado no intervalo L35:L38 os símbolos v1, v2, v3 e v4, que significam as quatro primeiras viagens, respetivamente. Depois, na mesma linha foi colocando o valor 3, em sucessivas colunas, correspondendo às roseiras regadas nas viagens já efetuadas. Assim, por exemplo, na linha da viagem v4 surgem 4 células com o valor 3, cada uma colorida com uma cor diferente. O uso da cor mostra que o aluno está a associar cada cor ao número de roseiras regadas em cada viagem (amarelo para a viagem v1, verde para a viagem v2, azul para a viagem v3, e cor-de-rosa para a viagem v4). Posteriormente, no intervalo Q35:Q38, calculou as somas acumuladas (Fig. 85).

	L	M	N	O	P	Q	R
34							
35	V1	3				=SOMA(M35:P35)	
36	V2	3	3			=SOMA(M36:P36)	
37	V3	3	3	3		=SOMA(M37:P37)	
38	V4	3	3	3	3	=SOMA(M38:P38)	
39							
40							

	L	M	N	O	P	Q	R
34							
35	V1	3				3	
36	V2	3	3			6	
37	V3	3	3	3		9	
38	V4	3	3	3	3	12	
39							
40							

Figura 85: Obtenção dos primeiros termos da sucessão que representa a quantidade total de roseiras regadas em função do número de viagens

A partir da obtenção destes primeiros termos, o aluno constatou que cada termo pode ser obtido, adicionando 3 ao anterior. Utilizando esta ideia, formou a sucessão por recorrência, escrevendo os primeiros três termos e, por intermédio de uma fórmula, fez o cálculo dos termos subsequentes na coluna M (Fig. 86).

	L	M	N	O	P	Q
34						
35	V1	3				=SOMA(M35:P35)
36	V2	3	3			=SOMA(M36:P36)
37	V3	3	3	3		=SOMA(M37:P37)
38	V4	3	3	3	3	=SOMA(M38:P38)
39						
40						
41	Viagens	Roseiras Regadas				
42	1	3				
43	2	6				
44	3	9				
45	4	=M44+3				
46	5	=M45+3				
47	6	=M46+3				
48	7	=M47+3				
49	8	=M48+3				
50	9	=M49+3				
51	10	=M50+3				

	L	M	N	O	P	Q	R
34							
35	V1	3				3	
36	V2	3	3			6	
37	V3	3	3	3		9	
38	V4	3	3	3	3	12	
39							
40							
41	Viagens	Roseiras Regadas					
42	1	3					
43	2	6					
44	3	9					
45	4	12					
46	5	15					
47	6	18					
48	7	21					
49	8	24					
50	9	27					
51	10	30					

Figura 86: Obtenção recursiva dos termos da sucessão que representa a quantidade total de roseiras regadas em função do número de viagens

Resolução da Alínea B1

Para resolver a alínea B1, basicamente o aluno fez uma adaptação da fórmula que aplicou na finalização da alínea anterior. Desta forma, conseguiu estabelecer a relação que permite calcular o número de total de roseiras regadas no fim de cada viagem em função do número das que já estão previamente regadas (Fig. 87). Portanto, o aluno representou a sucessão definindo-a por recorrência.

B1 A expressão Matemática será:

$a_n = a_{n-1} + 3$ nesta expressão $n \in \mathbb{N}$.

Figura 87:: Registo da resposta da alínea B1 (Tarefa 1) apresentada pelo Aluno 2

Resolução da alínea C

O Aluno 2 respondeu à alínea C, dizendo o seguinte:

> "O tipo de conjunto formado, em A e B, chama-se sucessão".

Resolução da alínea D

Tal como se pode observar na figura 88, o aluno respondeu à alínea D, afirmando que cada elemento dos conjuntos formados nas alíneas A e B poderia ser chamado de "sequência", parecendo assim estar a referir-se ao conjunto de valores e não a cada um dos seus elementos.

Figura 88: Registo da resposta da alínea D (Tarefa 1) apresentada pelo Aluno 2

Resolução da alínea E

O aluno referiu que nos conjuntos obtidos nas alíneas A) e B) observou as seguintes relações entre elementos consecutivos:

> "Cada um é obtido através do anterior adicionado a uma constante, então $K_n = K_{n-1} + 6$. E se isolar a constante, então $K_n - K_{n-1} = 6$, ou seja, a diferença é constante".
>
> "No caso da sucessão da alínea B, a constante é 3, ou seja, $a_n - a_{n-1} = 3$".

Resolução da alínea E1

O aluno não comprovou algebricamente as relações aludidas na alínea anterior, mas expressou a sua segurança ao referir que:

> "Esta relação é evidente na folha de cálculo e pode-se fazer essa verificação, criando outra coluna, que é a coluna das diferenças, e notaremos que é constante nos dois casos".

Feita esta afirmação, o aluno inseriu fórmulas na folha de cálculo e obteve as diferenças entre termos consecutivos para cada uma das sucessões, usando a coluna J e a coluna O, como se pode ver na figura 89.

Figura 89: Obtenção das diferenças entre os termos consecutivos das sucessões

Resolução da alínea G

Para resolução da alínea G, o aluno fez a leitura das tabelas que tinha na folha de cálculo e destacou alguns dados nas sucessões que já tinha representado aí. Para tal, numa primeira fase, constatou que 60 é o 20º termo da sucessão obtida na alínea A. Assim, anotou no papel a seguinte conclusão:

> "Para regar 60 roseiras é necessário 20 viagens, o que se pode ver através do Excel e, somando as 20 distâncias no Excel, o resultado é 1820".

Resolução da alínea G1

Para mostrar o cálculo analiticamente, o aluno recorreu a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, onde substituiu os dados que extraiu da tabela que tinha na folha de cálculo. Assim, registou no papel o seguinte:

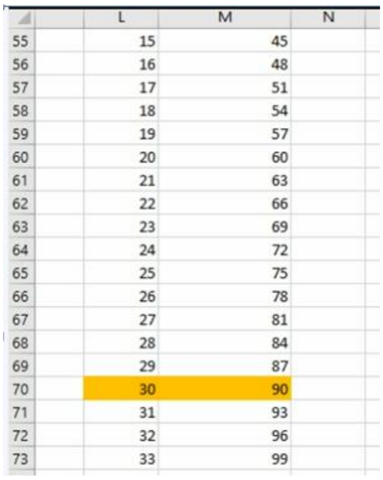
> "Fórmula da soma dos n termos $S_n = \frac{k_1+k_n}{2} \cdot n$,
> $S_{20} = \frac{k_1+k_{20}}{2} \cdot 20$, com base no Excel podemos extrair $k_1 = 34$ e $k_{20} = 148$.
> $S_{20} = \frac{34+148}{2} \cdot 20 = 1820$".

Resolução da alínea H

Depois de ter explorado os dados numéricos na folha de cálculo e assinalado o valor 90, conforme mostra a figura 90, o aluno observou:

"Como em cada viagem rega 3 roseiras, para regar 90 ele faz 30 viagens, pois $90 \div 3 = 30$. Se em cada viagem leva um regador, logo são 30 regadores,

então $30 \times 10\ litros\ = 300\ litros$".

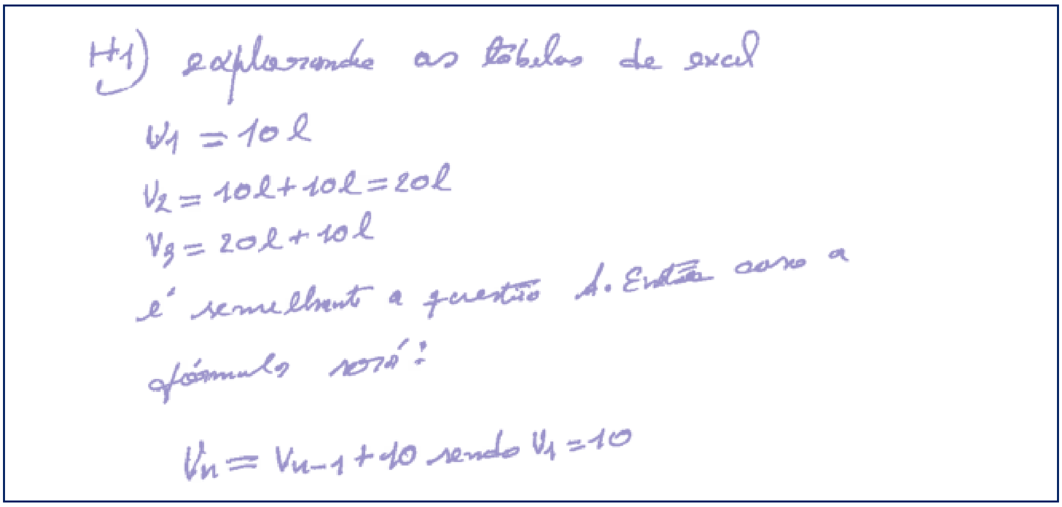


	L	M	N
55	15	45	
56	16	48	
57	17	51	
58	18	54	
59	19	57	
60	20	60	
61	21	63	
62	22	66	
63	23	69	
64	24	72	
65	25	75	
66	26	78	
67	27	81	
68	28	84	
69	29	87	
70	30	90	
71	31	93	
72	32	96	
73	33	99	

Figura 90: Destaque de numero de viagens que deverá ser feito para totalizar 90 roseiras regadas

Resolução da alínea H1

O aluno começou por assumir que a resolução desta alínea implica a exploração de tabelas do Excel e o uso de procedimentos análogos aos utilizados na alínea A. Esta ideia do aluno pode ser percebida com base na figura 91, que mostra o seu registo escrito da resposta, incluindo um modelo por recorrência para a quantidade de litros de água utilizados ao fim de *n* viagens.



H1) explorando as tabelas de excel

$V_1 = 10l$

$V_2 = 10l + 10l = 20l$

$V_3 = 20l + 10l$

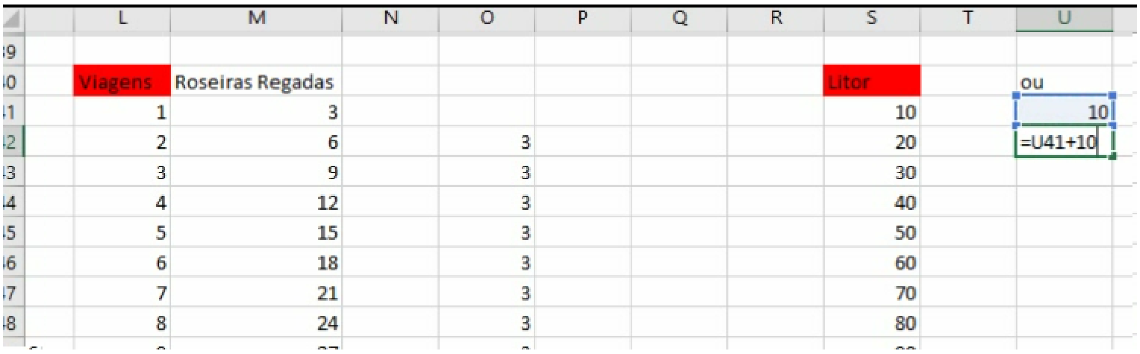
é semelhante à questão A. Então como a fórmula será:

$V_n = V_{n-1} + 10$ sendo $V_1 = 10$

Figura 91: Registo da resposta da alínea H1 (Tarefa 1) apresentada pelo Aluno 2

Na folha de cálculo, o aluno obteve a sucessão definida por recorrência, seguindo dois processos diferentes que são implementados nas colunas S e U, como se pode ver na figura

92, sendo que no caso da coluna S usou, aparentemente, o preenchimento automático com incremento constante que o Excel permite efetuar.



	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
39										
40	Viagens	Roseiras Regadas						Litor		ou
41	1	3						10		10
42	2	6	3					20		=U41+10
43	3	9	3					30		
44	4	12	3					40		
45	5	15	3					50		
46	6	18	3					60		
47	7	21	3					70		
48	8	24	3					80		

Figura 92: Obtenção da sucessão recursiva da quantidade total da água utilizada

Resolução da alínea H1-a)

As características referidas pelo Aluno 2 acerca dos modelos obtidos anteriormente prendem-se com a recursividade e a monotonia das sucessões encontradas. Nas suas próprias palavras, o aluno alegou que:

> "Cada termo pode ser calculado a partir do anterior; todos são crescentes".

5.2.2 Análise e Interpretação da Tarefa 1

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da TRRS

O Aluno 2 iniciou a primeira atividade, mobilizando um registo icónico (esquema formado por linhas e números) produzido à mão, no papel, onde evidenciou as relações entre os elementos e aspetos principais da situação proposta. Tendo em atenção o registo icónico, o aluno reinterpretou a situação a partir do seu esquema e mobilizou especificamente registos numéricos que inseriu oportunamente na folha de cálculo. No computador, fez depois alguns tratamentos dos registos numéricos, obtendo os primeiros termos da sucessão que representam as primeiras distâncias percorridas pelo jardineiro, de acordo com a situação real apresentada.

O aluno fez uma exploração dos primeiros termos da sucessão e notou regularidades que lhe permitiram estabelecer relações entre termos consecutivos e, consequentemente, isso levou-o a efetuar tratamentos, em particular, fazendo experiências iniciais para obter o 2º e o 3º termo, cada um a partir do respetivo termo anterior. Desta forma, fez seguidamente vários tratamentos de forma automatizada e obteve, então, as diversas distâncias percorridas, ficando assim resolvida a questão colocada.

O aluno decidiu ainda representar as distâncias (termos da sucessão) por K_n e, considerando a o tipo de fórmula que utilizou anteriormente para efetuar os tratamentos, designadamente um cálculo por recorrência, ele mobilizou registos algébricos para representar uma relação que permite obter o termo subsequente a partir de cada termo conhecido da sucessão.

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva de M&M

O Aluno 2 iniciou a realização da tarefa, fazendo uma esquematização da situação, destacando as distâncias entre cada roseira e a fonte, as trajetórias e também as distâncias percorridas durante as primeiras viagens. Logo em seguida, utilizando a folha de cálculo como suporte representacional, evidenciou o seu primeiro modelo que consistiu em deduzir a distância percorrida em cada viagem como sendo o dobro da distância entre a fonte e a última roseira regada na viagem considerada. Utilizando este modelo, o aluno conseguiu obter, através da folha de cálculo, as distâncias percorridas pelo jardineiro nas primeiras viagens.

O aluno fez a exploração do conjunto das distâncias assim obtidas e formulou o seu segundo modelo ao descobrir que a diferença entre as distâncias consecutivas era constante. Para melhor explorar e testar esse modelo, recorreu novamente à folha de cálculo onde evidenciou a sua matematização da situação e obteve várias distâncias, ficando assim estabelecido um modelo que descreve e permite dar informação sobre a situação proposta.

Para expressar o modelo algebricamente, o aluno considerou a fórmula que utilizou na folha de cálculo, adequou a simbologia a uma escrita algébrica formal e, tendo em atenção a noção de antecessor do n-ésimo termo, escreveu a relação algébrica que evidencia o modelo formado, sob a forma de uma sucessão definida por recorrência.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e A1)

Segue-se uma síntese comparativa que traduz a análise desenvolvida, segundo as duas perspetivas teóricas, organizada na Tabela 42.

Tabela 42: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas A e A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza um registo icónico, isto é, efetua um esquema formado por linhas e valores numéricos, no papel	*Faz uma esquematização da situação, destacando as distâncias entre cada roseira e a fonte, as trajetórias e as distâncias percorridas durante as primeiras viagens*
Mobiliza registos numéricos que inseriu na folha de cálculo	*Utiliza a folha de cálculo como suporte representacional e constrói o seu primeiro modelo para a distância percorrida em cada viagem como sendo o dobro da distância entre a fonte e a última roseira regada na*
Faz os primeiros tratamentos dos registos numéricos, obtendo os primeiros termos da sucessão das distâncias percorridas nas	

sucessivas viagens	*viagem considerada*
Faz a exploração dos primeiros termos da sucessão e observa regularidades, estabelecendo relações entre termos consecutivos	*Formula um segundo modelo, salientando que a diferença entre as distâncias consecutivas é constante*
Efetua tratamentos, tendo em conta essas regularidades e experimenta obter os primeiros termos	*Para explorar e testar o modelo recorre novamente à folha de cálculo, evidenciando a matematização da situação; obtém assim várias distâncias, ficando assim estabelecido o modelo que resolve a situação proposta*
Faz seguidamente vários tratamentos de forma automatizada, através da fórmula que inseriu na folha de cálculo, tendo em conta a relações entre termos consecutivos	
Mobiliza registos algébricos para representar a relação que permite obter, a partir de cada termo da sucessão, o seu termo subsequente	*Considera a fórmula que utilizou na folha de cálculo, adequando a simbologia para gerar a relação algébrica que evidencia a versão algébrica do modelo produzido*

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da TRRS

O Aluno 2 mobilizou registos verbais para interpretar a situação proposta e imediatamente lançou mão de registos numéricos que inseriu na folha de cálculo juntamente com alguns registos algébricos improvisados para representar simbolicamente os termos da sucessão. Na folha de cálculo, o aluno recorreu a uma esquematização cromática que lhe permitiu destacar os registos numéricos que representam as quantidades de roseiras regadas em cada viagem (escrevendo o valor 3 de forma sistemática ao longo de células consecutivas, linha após linha).

Fez então um tratamento dos registos numéricos introduzidos e obteve as três primeiras quantidades de roseiras que estariam regadas no final das três primeiras viagens. Explorando os registos numéricos, o aluno identificou um padrão numérico e, utilizando este padrão, inseriu na folha de cálculo uma fórmula que lhe permitiu efetuar vários tratamentos de registos numéricos. Assim, conseguiu encontrar de forma automatizada as sucessivas quantidades de roseiras regadas (os termos da sucessão) a partir de cada quantidade precedente.

Tendo em atenção a representação da fórmula que utilizou anteriormente para efetuar os tratamentos na folha de cálculo, mobilizou depois registos algébricos para representar uma relação que permite obter, a partir de cada termo, o termo imediatamente seguinte da sucessão que traduz a quantidade de roseiras regadas no fim de cada viagem.

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva de M&M

Para resolver as questões propostas, o aluno começou por conceber um modelo, ao presumir que não se tratava de considerar simplesmente as quantidades de roseiras regadas em cada viagem mas sim de adicionar a quantidade que era regada numa viagem ao total de roseiras já regadas durante todas as viagens anteriores. Para evidenciar o seu modelo, o aluno optou por esquematizar a situação na folha de cálculo, onde criteriosamente associou um modelo que recorre a cores para sinalizar a quantidade regada em cada viagem e depois efetuou a soma das sucessivas quantidades, a partir da folha de cálculo.

A partir da exploração das primeiras quantidades obtidas através das somas, o Aluno 2 aprimorou o seu modelo inicial ao constatar que cada quantidade considerada poderia ser obtida adicionando a constante 3 à quantidade anterior, ou seja, para obter a próxima quantidade a considerar bastaria adicionar 3 à quantidade anterior.

Para melhor explorar e testar a validade do modelo, inseriu-o na folha de cálculo, onde obteve de forma automatizada as quantidades totais que eram regadas, ficando assim resolvida a situação. Para expressar o modelo algebricamente, o aluno fez uma adaptação da fórmula que inseriu na folha de cálculo e escreveu no papel a relação algébrica que traduz o modelo formulado.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B) e B1)

A análise anterior é, em seguida, esquematizada, confrontando as ideias emergentes segundo cada uma das perspetivas adotadas (Tabela 43).

Tabela 43: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B e B1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 2)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para interpretar a situação proposta</td><td>Começa por conceber um modelo, assumindo que se deve adicionar o número de roseiras regadas em cada viagem com o total de roseiras regadas durante as viagens anteriores</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos que insere na folha de cálculo, juntamente com alguns registos algébricos improvisados para representar simbolicamente os termos da sucessão</td><td rowspan="2">Esquematiza a situação na folha de cálculo, onde criteriosamente associa cores para sinalizar a quantidade regada em cada viagem e depois efetua a soma das quantidades</td></tr>
<tr><td>Recorre a uma esquematização cromática que permite destacar os registos numéricos</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos dos registos numéricos introduzidos na folha de cálculo e obtém as quantidades que estavam regadas no final das primeiras três viagens</td><td>A partir da exploração das primeiras quantidades obtidas através de somas, aperfeiçoa o modelo inicial, constatando que cada quantidade pode ser obtida a partir da anterior</td></tr>
<tr><td>Utiliza o padrão numérico identificado para gerar uma fórmula na folha de cálculo que permite vários tratamentos de registos numéricos e obtém sucessivos termos da sucessão</td><td>Para explorar e testar o modelo, recorre à folha de cálculo onde obtém as distâncias de forma automatizada</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos algébricos para representar uma relação que permite obter cada termo da sucessão por recorrência.</td><td>Faz uma adaptação da fórmula que inseriu na folha de cálculo e escreve no papel a relação algébrica que traduz o modelo</td></tr>
</table>

Análise das alíneas E) e E1) na perspetiva da TRRS

O aluno inicialmente mobilizou registos verbais para representar as relações que considerou entre elementos consecutivos das sucessões obtidas nas alíneas A) e B). Para suportar a explicitação do seu raciocínio, mobilizou registos algébricos e obteve o termo geral da primeira sucessão definida por recorrência. Fez ainda um tratamento da representação algébrica para explicitar a constante aditiva e mobilizou novamente registos verbais para representar e esclarecer o significado do registo algébrico. Continuou a tarefa, mobilizando, de forma combinada, registos verbais e algébricos para destacar a relação entre os termos consecutivos da segunda sucessão.

Para justificar as suas afirmações, o aluno mobilizou representações verbais com vista a explicar os procedimentos adotados para fazer tratamentos, na folha de cálculo, que confirmaram os resultados ou relações estipulados.

Para terminar, mobilizou registos numéricos e inseriu na folha de cálculo fórmulas que lhe permitiram fazer tratamentos, de forma automática, de tal modo que os resultados confirmaram as relações que havia estipulado.

Análise das alíneas E) e E1) na perspetiva de M&M

Considerando o seu desenvolvimento e exploração de modelos, o aluno começou por mencionar a ideia básica que considerou para a formulação dos modelos durante a resolução das alíneas A) e B) e mostrou que, em cada caso, existe a possibilidade de refinar o modelo expresso algebricamente de modo a evidenciar a relação entre os elementos consecutivos. Deste modo, criou modelos explicativos que esclarecem a relação entre os termos consecutivos de cada uma das sucessões concebidas e aludiu aos procedimentos a considerar para testar o modelo explicativo.

Para comprovar a coerência do modelo explicativo, o aluno recorreu à folha de cálculo onde fez a respetiva aplicação, através da inserção das fórmulas correspondentes, testou os resultados e ficou evidente que a aplicação do modelo garantia a obtenção dos resultados esperados.

Um resumo da análise da resolução das alíneas E) e E1)

Veja-se, assim, na Tabela 44, uma síntese da análise comparativa das interpretações produzidas em cada uma das perspetivas.

Tabela 44: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas E e E1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 2)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para explicitar as relações que considerou entre elementos consecutivos das sucessões obtidas nas alíneas A) e B)</td><td>Começa por realçar a ideia básica que considerou para chegar aos modelos obtidos na resolução das alíneas A) e B)</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos algébricos para representar o termo geral da primeira sucessão</td><td rowspan="2">Refina o modelo expresso algebricamente de modo a evidenciar o acréscimo constante em cada sucessão</td></tr>
<tr><td>Faz um tratamento para explicitar o acréscimo constante</td></tr>
<tr><td>Mobiliza novamente registos verbais para dar sentido ao registo algébrico</td><td rowspan="3">Constrói modelos explicativos que esclarecem a relação entre os termos consecutivos de cada uma das sucessões e considera procedimentos para testar o modelo explicativo</td></tr>
<tr><td>Mobiliza de forma combinado registos verbais e algébricos para destacar a relação entre termos consecutivos da segunda sucessão</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para explicar os tratamentos a realizar</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos</td><td rowspan="2">Para validar o modelo explicativo, recorre à folha de cálculo onde aplica o modelo, através de fórmulas, tornando evidente a obtenção de resultados consistentes</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos dos registos numéricos através da inserção de fórmulas que permitem confirmar as relações sugeridas</td></tr>
</table>

Análise das alíneas G) e G1) na perspetiva da TRRS

O aluno iniciou a resolução das questões, mobilizando, de forma combinada, registos verbais e numéricos para analisar e interpretar as tabelas que tinha gerado na folha de cálculo e destacou alguns dados nas sucessões numéricas representadas que eram relevantes para a resolução. Aproveitando as potencialidades da folha de cálculo, o aluno fez tratamentos quase instantâneos de registos numéricos e, em seguida, mobilizou registos verbais para representar o resultado e torna-lo compreensível.

Seguidamente, mobilizou um registo algébrico para representar uma relação algébrica que permite calcular a soma dos primeiros termos de uma PA; esta relação serviu de base para mostrar o cálculo anterior, agora efetuado por meio de expressões algébricas. Assim, considerando os registos algébricos envolvidos na relação, converteu-os os em registos numéricos, fez os necessários tratamentos de registos numéricos e confirmou o resultado obtido anteriormente na folha de cálculo.

Análise das alíneas G) e G1) na perspetiva de M&M

Para a resolução da situação proposta, o aluno explorou os modelos que já estavam expressos numericamente na folha de cálculo e destacou alguns dados. O modelo inicial do aluno começou evidenciar-se quando este aplicou a relação termo-ordem. Tendo destacado a ordem do termo referenciada no enunciado da questão, o Aluno 2 identificou os termos e usando conhecimentos prévios fez as devidas operações e obteve o resultado, obtendo a resposta pretendida.

Novamente, recorrendo aos seus conhecimentos anteriores, o aluno evocou a relação matemática conhecida como a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PA, onde substituiu alguns dados e efetuou os cálculos devidos. Assim, obteve novamente o resultado da soma dos primeiros 20 termos. O aluno recorreu a um modelo previamente conhecido para resolver a situação, possivelmente porque o contexto sugeriu tal procedimento ou porque o modelo criado durante a resolução da atividade da alínea anterior não tem uma aplicação muito fácil. O aluno não recorreu imediatamente ao modelo que previamente conhecia, provavelmente porque a folha de cálculo facilitou a situação até determinado ponto. Muitas vezes, em situações práticas reais, algumas tarefas são mais fáceis de resolver sem um formalismo matemático rígido, porque tal formalismo tornaria a empreitada mais morosa e mais enredada ou porque os meios disponíveis, como será o caso da folha de cálculo com as suas diversas potencialidades, viabilizam uma solução empiricamente mais simples.

Um resumo da análise da resolução das alíneas G) e G1)

Feitas as interpretações que visam explicar os dados obtidos neste caso, sugere-se a respetiva síntese e a explicitação das ideias principais na tabela seguinte (Tabela 45).

Tabela 45: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas G e G1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 2)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Mobiliza de forma combinada registos verbais e numéricos na análise das tabelas construídas folha de cálculo e destaca alguns dados nas sucessões numéricas representadas</td><td>Explora os modelos expressos numericamente na folha de cálculo e destaca alguns dados</td></tr>
<tr><td>Formula o modelo inicial quando estabelece a relação termo-ordem e identifica a ordem referenciada na questão</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos de registos numéricos, aproveitando as potencialidades da folha de cálculo</td><td>A partir do seu conhecimento prévio e do trabalho na folha de cálculo faz a soma dos termos e obtém o resultado</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para representar o resultado e justificar a operação considerada</td><td>Apresenta os resultados obtidos pela aplicação do modelo.</td></tr>
<tr><td>Mobiliza um registo algébrico para representar uma fórmula que permite calcular a soma dos primeiros termos de uma PA</td><td>Evoca uma relação matemática conhecida para determinar a soma dos n primeiros termos de uma PA</td></tr>
<tr><td>Converte alguns registos algébricos em registos numéricos</td><td rowspan="2">Relacionando o modelo matemático geral com a situação proposta, particulariza a sua utilização para os dados concretos e obtém novamente o resultado da soma dos primeiros 20 termos</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos de registos numéricos, obtendo o mesmo resultado obtido anteriormente na folha de cálculo</td></tr>
</table>

Análise das alíneas H) e H1) na perspetiva da TRRS

Para resolver a questão proposta, o aluno mobilizou registos numéricos e, recorrendo às funcionalidades proporcionadas pela folha de cálculo, introduziu um registo icónico que consiste na diferenciação da cor do fundo de determinadas células. Desta forma, o Aluno 2 destacou os elementos pertinentes da questão. Para reafirmar e evidenciar o seu modelo, mobilizou registos verbais e fez uma reinterpretação da situação. A partir dessa reinterpretação, mobilizou registos numéricos e fez tratamentos quase instantâneos destes registos numéricos que levaram aos resultados.

Para procurar o modelo sugerido pela situação, o aluno mobilizou registos verbais e algébricos para revelar inicialmente a necessidade de exploração dos dados na folha de cálculo e posteriormente fazer tratamentos rápidos, garantindo que as transformações a ter em conta eram análogas às efetuadas anteriormente para a resolução da alínea A). Deste modo, obteve uma relação algébrica que permitiu determinar a quantidade da água que o jardineiro terá gastado no fim das sucessivas viagens.

Seguidamente mobilizou registos numéricos e fez tratamentos destes registos na folha de cálculo, utilizando a fórmula que o levou a determinar a quantidade total da água que o jardineiro terá gastado após a realização de n viagens.

Análise das alíneas H) e H1) na perspetiva de M&M

O Aluno 2 começou por explorar os modelos que já estavam expressos numericamente na folha de cálculo e sinalizou os elementos a considerar na resolução da situação (reutilizando a relação termo-ordem). Por meio de cálculos, comprovou a conformidade dos dados que assinalou e combinando estes dados com as informações do enunciado, o aluno resolveu a questão colocada.

Para elaborar um modelo matemático, conforme era solicitado na situação proposta, o aluno optou por estabelecer analogias entre a situação descrita e a tarefa realizada na alínea A). Assim, reutilizou o modelo, depois dos devidos ajustes necessários.

Para provar a coerência do modelo então reajustado, o aluno matematizou o modelo na folha de cálculo e aplicou-o. Deste modo, obteve identicamente os mesmos resultados a que tinha chegado quando fez os primeiros cálculos.

Na perspetiva de Modelos e Modelação, a reutilização de um modelo é um dos importantes critérios para avaliar a qualidade dos resultados produzidos, sendo a adaptabilidade um outro atributo importante. Se uma ferramenta conceitual é adaptável, compartilhável e reutilizável, essas características representam o que os alunos consideram essencialmente significativo e isso é fundamental no desenvolvimento de conhecimento transferível ou generalizável.

Um resumo da análise da resolução das alíneas H) e H1)

O que se segue é uma resenha das ideias mais salientes retiradas das análises realizadas, de acordo com cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 46).

Tabela 46: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas H e H1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 2)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos e recorrendo à folha de cálculo mobiliza ainda um registo icónico para destacar elementos pertinentes</td><td>Começa por explorar os modelos que já estavam expressos numericamente na folha de cálculo e sinaliza os elementos a considerar na resolução da situação</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para representar uma reinterpretação da situação</td><td rowspan="3">Comprova os resultados por meio de cálculos, combinando estes dados com as informações fornecidas</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos rápidos de registos numéricos e apresenta os resultados</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais e algébricos e posteriormente, fazendo tratamentos, obtém uma relação algébrica que permite determinar a quantidade da água gasta após cada uma das sucessivas viagens</td><td>Estabelece analogias entre a situação proposta e a tarefa realizada na alínea A); reutiliza o modelo, ajustando-o à situação proposta.</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos</td><td rowspan="2">Para provar a validade do modelo reajustado, usa a folha de cálculo e aplica-o, obtendo os mesmos resultados que adquiriu quando fez os primeiros cálculos</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos desses registos na folha de cálculo, utilizando a fórmula que permite determinar a quantidade da água gasta após sucessivas viagens</td></tr>
</table>

5.2.3 Resolução da Tarefa 2 – Reprodução de vírus por bipartição

Resolução da alínea A

O Aluno 2 a começou a resolução da tarefa (Anexo 5) com a interpretação da situação apresentada e desenvolveu as suas primeiras ideias, em que considerou o seguinte:

> "No início a pessoa infetada tem 1 vírus e ao completar 1 dia terá 2, que é o dobro; ao completar 2 dias fica com 4, que é o dobro de 2…"

Seguidamente, recorrendo à folha de cálculo, elaborou uma tabela, tendo colocado na coluna A os dias e na coluna B a quantidade de vírus. Na célula B2 inseriu o valor 1, que indica a quantidade inicial de vírus, e na célula B3 inseriu a fórmula que permite calcular a quantidade de vírus ao completar o 1º dia (=B2*2), fórmula esta que depois de ser arrastada ao longo da coluna, levou à obtenção das sucessivas quantidades de vírus que a pessoa terá nos dias subsequentes, tal como mostra a figura 93.

	A	B	C
1			
2	inicio	1	
3	1 dia	=B2*2	
4			
5			
6			
7			
8			

	A	B	C
1			
2	inicio	1	
3	1 dia	2	
4	2 dia	4	
5	3 dia	8	
6	4 dia	16	
7	5 dia	32	
8	6 dia	64	

Figura 93: Obtenção da sucessão de quantidades de vírus que uma pessoa infetada terá nos primeiros dias

Finalmente, registou no papel alguns dos resultados, referenciando que os valores foram calculados na folha de cálculo (Fig. 94).

Como se pode ver no computador a pessoa terá:

Dias	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
Virus	2	4	8	16	32	64	128

Figura 94: Registo da sucessão da quantidade de vírus que uma pessoa infetada terá nos primeiros dias

Resolução da alínea A

Depois de algumas tentativas de busca de padrões no conjunto dos termos obtidos, o aluno percebeu que os termos são as potências de base 2. O aluno abandonou momentaneamente a noção recursiva do cálculo dos termos e partiu em busca do termo geral, como função do número de dias. Recorrendo à folha de cálculo, introduziu na coluna E os números que representam os dias e na coluna F, concretamente na célula F3, inseriu a fórmula (=2^E3) que ao ser arrastada ao longo da coluna permitiu obter uma secessão numérica equivalente àquela já obtida na coluna B (Fig. 95).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	inicio	1		ou	dias	Virus	
3	1 dia	2			0	=2^E3	
4	2 dia	4			1		
5	3 dia	8			2		
6	4 dia	16			3		

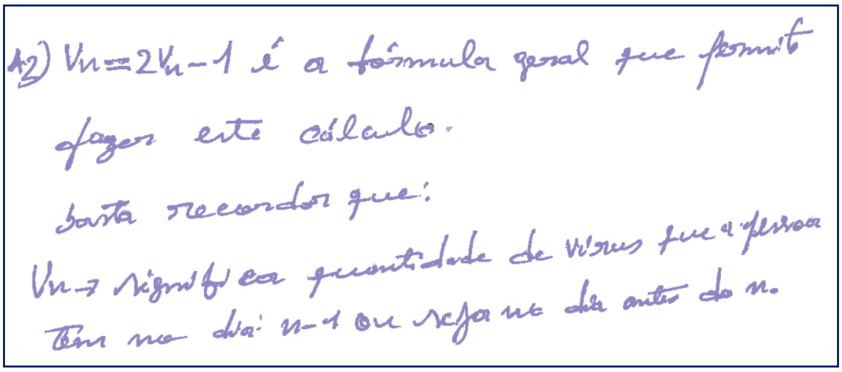
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	inicio	1		ou	dias	Virus		
3	1 dia	2			0	1		
4	2 dia	4			1	2		
5	3 dia	8			2	4		
6	4 dia	16			3	8		
7	5 dia	32			4	16		
8	6 dia	64			5	32		
9	7 dia	128			6	64		
10	8 dia	256			7	128		
11	9 dia	512			8	256		

Figura 95: Obtenção de quantidades de vírus que uma pessoa infetada terá em função dos dias

Depois de ter revisto os resultados, registou o termo geral da sucessão ($v_n = 2^n$), considerado nesta última resolução, mas sem apagar a relação recursiva ($v_n = 2 \cdot v_{n-1}$) que considerou inicialmente.

Resolução das Alínea A1 e A2

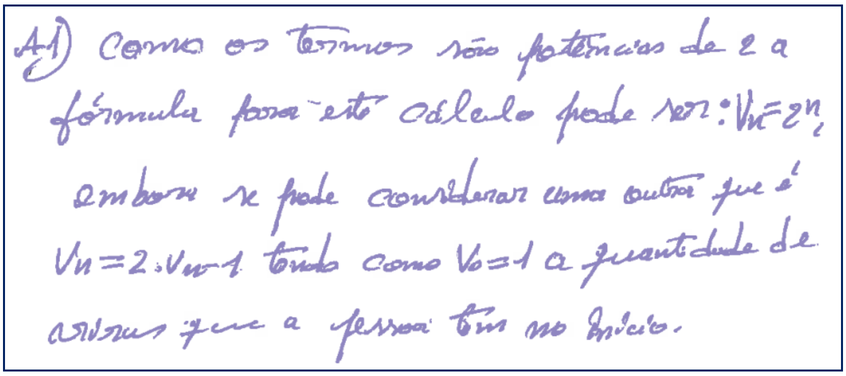
Na resolução da alínea A2, o aluno recorreu à relação recursiva $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$, e esclareceu o significado do termo v_n e das ordens dos termos, $n - 1$ e n, como se pode ver na figura 96. Apesar de não ser completamente clara a sua explicação, dado que considera v_n como a quantidade de vírus no indivíduo no dia anterior ao dia n, o Aluno 2 parece ter compreendido que o modelo é o de duplicação da quantidade existente no dia anterior, como se verifica na figura 96.



A2) Vn=2Vn-1 é a fórmula geral que permite fazer este cálculo.
basta recordar que:
Vn → significa quantidade de vírus que a pessoa tem no dia n-1 ou seja no dia antes do n.

Figura 96: Resposta da alínea A2 (Tarefa 2), apresentada pelo Aluno 2

Como se pode ler na figura 97, o aluno fez uma interpretação dos resultados obtidos na folha de cálculo (Fig. 95) e apresentou o termo geral da sucessão com toda facilidade e segurança certamente porque já estava testado na folha de cálculo.



A1) Como os termos são potências de 2 a fórmula para este cálculo pode ser: Vn=2n, embora se pode considerar uma outra que é Vn=2.Vn-1 tendo como V0=1 a quantidade de vírus que a pessoa tem no início.

Figura 97: Resposta da alínea A1 (Tarefa 2), apresentada pelo Aluno 2

Resolução da Alínea B

Ao responder à alínea B, a principal relação evocada pelo aluno prende-se com a ideia recursiva referida nas alíneas anteriores, reforçando que tal relação pode ser vista nas tabelas produzidas na folha de cálculo como se pode ler na figura 98..

B) cada elemento, como se pode observar no computador, é o dobro do anterior, isto é cada elemento é obtido multiplicando o seu antecedente por 2.

Figura 98: Resposta da alínea B (Tarefa 2), apresentada pelo Aluno 2

Resolução da Alínea B1

Para comprovar a relação estabelecida na questão anterior, o aluno recorreu a uma concatenação das duas relações previamente referidas ($v_n = 2^n$ e $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$) e no fim da manipulação algébrica que efetuou, chegou a uma proposição universalmente verdadeira, como se pode ler na figura 99.

B1) Retomando a ideia de A e já fica

$V_n = 2V_{n-1}$ ou se $V_n = 2^n$

ollo $V_{n-1} = 2^{n-1}$

$V_n = 2 . V_{n-1}$

$2^n = 2 . 2^{n-1}$

$2^n = 2^{1+(n-1)}$

$2^n = 2^n \quad /: 2^n$

$\frac{2^n}{2^n} = \frac{2^n}{2^n}$

$1 = 1$

$EM = MD$

Figura 99: Resposta / Resolução da alínea B1 (Tarefa 2), apresentada pelo Aluno 2

Resolução da Alínea C

Para resolver a questão. o aluno considerou os termos da sucessão obtida na alínea A) e, trabalhando na folha de cálculo, destacou os referidos termos em grupos de 7 termos a partir do 2º termo que corresponde ao 1º dia (Fig. 94 e 95). Considerou o último elemento de cada grupo de termos como sendo a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá no organismo no final de cada uma das primeiras semanas (fig.100). Seguidamente registou no papel esses resultados, como se pode ver na figura 101, considerando ser esse o último valor de cada semana.

	A	B
2	Início	1
3	1 dia	2
4	2 dia	4
5	3 dia	8
6	4 dia	16
7	5 dia	32
8	6 dia	64
9	7 dia	128
10	8 dia	256

8	6 dia	64
9	7 dia	128
10	8 dia	256
11	9 dia	512
12	10 dia	1024
13	11 dia	2048
14	12 dia	4096
15	13 dia	8192
16	14 dia	16384
17	15 dia	32768

15	13 dia	8192
16	14 dia	16384
17	15 dia	32768
18	16 dia	65536
19	17 dia	131072
20	18 dia	262144
21	19 dia	524288
22	20 dia	1048576
23	21 dia	2097152
24	22 dia	4194304

Figura 100: Destaque das quantidades de vírus durante as primeiras semanas

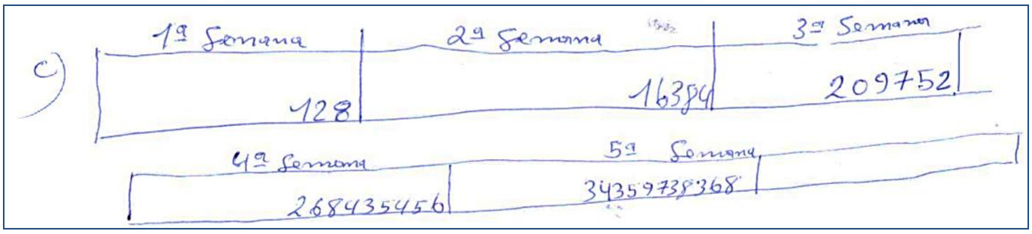


Figura 101: Resposta da alínea C (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 2, indicando as quantidades de vírus que a pessoa infetada terá no fim de cada uma das primeiras semanas

Resolução das Alíneas C1 e C2

Para determinar a fórmula solicitada, o aluno começou por analisar as relações numéricas entre termos consecutivos da sucessão então elaborada. Para o efeito, recolheu o último termo de cada grupo de 7 (ver figura 100) e construiu explicitamente na folha de cálculo (Fig. 102) a sucessão das quantidades de vírus que a pessoa terá no final de cada uma das primeiras semanas. Partindo desta sucessão, o aluno inseriu uma fórmula que permitiu dividir cada termo pelo subsequente, conforme se pode ver na figura 102.

E	F	G	H
Início	1		
1 Semana	128		=F3/F4
2 Semana	16384		=F4/F5
3 Semana	2097152		=F5/F6
4 Semana	268435456		=F6/F7
5 Semana	34359738368		=F7/F8
6 Semana	4398046511104		=F8/F9
7 Semana	562949953421312		=F9/F10
8 Semana	72057594037927900		=F10/F11
9 Semana	9223372036854780000		=F11/F12
10 Semana	1,18059162071741E+21		=F12/F13
11 Semana	1,51115727451829E+23		=F13/F14

E	F	G	H
Início	1		
1 Semana	128		0,0078125
2 Semana	16384		0,0078125
3 Semana	2097152		0,0078125
4 Semana	268435456		0,0078125
5 Semana	34359738368		0,0078125
6 Semana	4,39805E+12		0,0078125
7 Semana	5,6295E+14		0,0078125
8 Semana	7,20576E+16		0,0078125
9 Semana	9,22337E+18		0,0078125
10 Semana	1,18059E+21		0,0078125
11 Semana	1,51116E+23		#DIV/0!

Figura 102: Sucessão das quantidades de vírus que a pessoa terá no final das primeiras semanas e obtenção da constante que relaciona termos consecutivos

Em seguida, registou no papel as frações consideradas e os quocientes resultantes, e converteu a dízima numa fracção que depois simplificou sucessivamente como se pode ver na figura 103.

$$\frac{128}{16384} = 0,0078125$$

$$\frac{16384}{2097152} = 0,0078125$$

$$\frac{2097152}{268435456} = 0,0078125$$

$$\frac{78125}{10000000} = \frac{78125:5}{10000000:5} = \frac{15625:5}{2000000:5} = \frac{3125:5}{400000:5} = \frac{625:5}{80000:5} = \frac{125:5}{16000:5} = \frac{25:5}{3200:5} = \frac{5:5}{640:5} = \frac{1}{128}$$

Figura 103: Registo da obtenção da constante que relaciona termos consecutivos (Tarefa 3)

Posteriormente, o aluno representou analiticamente, e de forma generalizada, a relação entre termos consecutivos (Fig. 104). Deste modo obteve uma relação recursiva e considerou a condição inicial.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{128}$$

$$a_n \cdot 128 = a_n + 1$$

$a_{n+1} = 128 \cdot a_n$

$a_0 = 1$ antes de completar 1 dia

$a_1 = 128 \cdot a_0$ ao completar uma semana.

$a_2 = 128 a_1$ ao completar 2 semanas.

$a_n = a_{n-1}$ 128 ao completar n semanas.

$a_n = a_{n-1} \cdot 128$

$a_0 = 1$ antes de completar a 1ª semana.

Figura 104: Obtenção e representação da relação entre termos consecutivos

Com esta resolução, o aluno respondeu a alínea C2), pois determinou uma relação matemática que possibilita calcular o número total de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função da quantidade de vírus da semana anterior. Talvez por ter feito muitos cálculos no papel, o aluno desviou a sua atenção e por isso não respondeu com a precisão necessária.

Resolução da Alínea *D)*

Como se pode ver na figura 105, ao responder à questão, o aluno iniciou por destacar a proveniência dos termos da sucessão da alínea C) e destacou duas das características comuns entre as sucessões em análise.

Os termos da sucessão da alínea A são menores que os termos da ~~sucessão~~ da sucessão da alínea C.

Todos os termos da sucessão obtida na alínea C saíram da sucessão da alínea A.

As 2 ~~fo~~ sucessões são crescentes. São infinitas

Figura 105: Resposta da alínea C (Tarefa 2) apresentada pelo Aluno 2

Note-se que esta resposta do aluno inclui um aporte importante para introduzir e explicar a relação entre uma sucessão e a respetiva sub-sucessão.

5.2.4 Análise e Interpretação da Tarefa 2

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da TRRS

O Aluno 2 iniciou a resolução da tarefa 2, mobilizando registos verbais para tecer algumas considerações sobre as condições iniciais, no decurso da sua interpretação do enunciado da tarefa. Seguidamente, mobilizou registos numéricos, que inseriu na folha de cálculo, onde fez tratamentos de forma automatizada, através da inserção de uma fórmula que permitiu calcular as sucessivas quantidades de vírus que a pessoa terá nos dias subsequentes.

O aluno efetuou experimentalmente outros tratamentos de registos numéricos alternativos e percebeu que os registos numéricos resultantes eram traduzidos por potências de 2. Procurou estabelecer a relação algébrica que representa de forma genérica as potências de base 2 e expoente natural. Inseriu experimentalmente uma fórmula que permitiu realizar tratamentos, na folha de cálculo, cujos resultados foram efetivamente os valores das potências de 2.

Depois de ter ganho segurança nos resultados, e tendo como referência a fórmula inserida na folha de cálculo, o aluno mobilizou registos algébricos para representar o termo geral ($v_n = 2^n$) e, na mesma senda, mobilizou registos algébricos para representar a relação recursiva ($v_n = 2 \cdot v_{n-1}$) que tinha considerado inicialmente.

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da M&M

Depois da interpretação da tarefa, o aluno iniciou a realização da atividade, formulando o primeiro modelo, que consiste em considerar a condição inicial e a relação entre cada quantidade e a quantidade antecedente. Para explorar este modelo inicial, recorreu à folha de cálculo onde ensaiou a matematização do modelo e inseriu a fórmula equivalente à "relação entre cada termo e o seu antecedente". Com este procedimento, o aluno calculou as sucessivas quantidades de vírus que a pessoa terá nos dias subsequentes, tendo deste modo resolvido a questão.

Explorando os resultados obtidos com a aplicação do primeiro modelo, o aluno concebeu um padrão numérico, sendo que desta feita abandonou momentaneamente o modelo inicial e partiu em busca da matematização de um novo modelo que emergiu da interpretação de um padrão numérico. Depois de algumas tentativas, descobriu que os resultados então explorados correspondiam às potências de base 2 e conseguiu concretizar a matematização do novo modelo ao inserir uma fórmula que permitiu calcular as potências de base 2 (uma sucessão numérica equivalente a já obtida com a aplicação do 1º modelo).

Bambeando-se nas fórmulas introduzidas na folha de cálculo, o aluno escreveu algebricamente os modelos concebidos anteriormente, considerando o segundo modelo como o principal e o primeiro modelo como o alternativo.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e A1)

Na tabela 47, estão sumarizadas as ideias principais que decorrem da análise das resoluções produzidas pelo aluno nas duas questões da tarefa.

Tabela 47: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas A e A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	***Na perspetiva de M&M***
Mobilizou registos verbais para interpretar as condições iniciais apresentadas na tarefa	*Formulou um primeiro modelo que consiste em considerar a condição inicial e a relação entre cada quantidade de vírus e a antecedente.*
Mobilizou registos numéricos que inseriu na folha de cálculo	*Para explorar o modelo inicial, recorreu à folha de cálculo onde inseriu a fórmula equivalente à "relação entre cada termo e o seu antecedente" e calculou as sucessivas quantidades de vírus que a pessoa terá nos dias subsequentes*
Fez tratamentos na folha de cálculo através da inserção de uma fórmula que permitiu calcular as sucessivas quantidades de vírus que a pessoa terá nos dias subsequentes	
Efetuou outros tratamentos de registos numéricos alternativos e percebeu que os registos numéricos resultantes são potências de 2	*Explorou os resultados da aplicação do primeiro modelo e identificou um padrão numérico; abandonou momentaneamente o modelo inicial e partiu em busca de um novo modelo baseado no padrão encontrado*
Inseriu experimentalmente uma fórmula que permitiu realizar tratamentos, na folha de cálculo, obtendo como resultados potências de 2.	*Depois de algumas tentativas, descobriu que os resultados são potências de base 2 e conseguiu concretizar um novo modelo ao inserir uma fórmula que permitiu calcular as potências de base 2 (uma secessão numérica equivalente a já obtida com a aplicação do 1º modelo)*
Tendo como referência a fórmula inserida na folha de cálculo, o aluno mobilizou registos algébricos para representar o termo geral ($v_n = 2^n$) e mobilizou registos algébricos para representar a relação recursiva ($v_n = 2 \cdot v_{n-1}$) considerada inicialmente	*Com base nas fórmulas introduzidas na folha de cálculo, escreveu algebricamente os modelos concebidos anteriormente, considerando o segundo modelo como o principal e o primeiro modelo como o alternativo*

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

Para a resolução da alínea A2), o aluno mobilizou registos algébricos para representar a relação que considerada de modo a resolver a situação proposta. E mobilizou registos verbais para representar o significado de alguns registos algébricos e ainda dos elementos essenciais da relação representada através de registo algébrico.

Análise da alínea A2) na perspetiva da M&M

Na resolução da alínea A2), o aluno reutilizou o modelo recursivo concebido na alínea A) e esclareceu o significado que atribuiu aos símbolos inerente ao referido modelo.

Importa referir que na perspetiva M&M a reutilização de modelos é um importante indicador de que estes são modelos significativos para os alunos, desde logo pela consciência da sua aplicabilidade mais generalizada (Lesh & Caylor, 2007).

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

Apresenta-se a seguir uma breve resenha dos resultados relativos a esta questão, segundo cada uma das perspetivas (Tabela 48).

Tabela 48: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos algébricos para representar a relação considerada e assim resolver a situação proposta	*Reutilizou o modelo recursivo concebido na alínea A) e esclareceu o significado que atribuiu aos símbolos inerentes ao referido modelo*
Mobilizou registos verbais para representar o significado de alguns registos algébricos e da relação representada algebricamente	

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos para reinterpretar os resultados obtidos nas alíneas anteriores e mobilizou registos verbais para comunicar as ilações que estabeleceu a partir da observação dos resultados previamente obtidos.

Mobilizou registos algébricos para representar, mais uma vez, as relações estabelecidas na alínea A2. Fez o tratamento combinado dos registos algébricos e obteve uma proposição universalmente verdadeira.

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da M&M

Mais uma vez, o aluno explorou os modelos expressos numericamente na folha de cálculo, elaborados no âmbito da resolução das alíneas anteriores. Em especial, reutilizando o modelo recursivo anteriormente concebido, referiu de forma genérica que "cada elemento é obtido multiplicando o seu anterior por 2". Esta tendência de utilizar o modelo de forma geral é uma demostração de segurança e confiança nas suas resoluções.

Para comprovar o modelo apresentado na alínea B), o aluno fez ma combinação dos modelos concebidos durante a resolução da alínea A2 ($v_n = 2^n$ e $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$) e, no fim da sua

abordagem algébrica à questão, chegou a uma proposição universalmente verdadeira, ficando assim demostrada a relação pretendida.

O trabalho do aluno permitiu comprovar a congruência entre os dois modelos combinados, ou seja, resultou numa verdadeira demonstração; este episódio demonstra que trabalhando com atividades geradoras de modelos, mesmo aqueles alunos cujo histórico escolar não é brilhante, muitas vezes produzem resultados de alta qualidade que são muito mais impressionantes do que poderia imaginar-se a partir dos resultados da sua prestação anterior em provas de avaliação (Carlson, Larsen, & Lesh, 2002; Doerr & Lesh, 2002; Lehrer & Schauble, 2002; Lesh, 2001).

Um resumo da análise da resolução das alíneas B) e B1)

Adiante, apresenta-se a súmula das ideias centrais que se destacam, do ponto de vista de cada uma das análises realizadas (Tabela 49).

Tabela 49: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B e B1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 2)

TRRS	*M&M*
Mobilizou registos numéricos para reinterpretar os resultados obtidos nas alíneas anteriores	*Explorou as tabelas elaboradas nas alíneas anteriores, reutilizando o modelo recursivo anteriormente concebido*
Mobilizou registos verbais para representar os resultados previamente obtidos no âmbito das alíneas anteriores	*Aludiu de forma genérica à essência do modelo*
Mobilizou registos algébricos para representar mais uma vez as relações obtidas na alínea A2	*Para comprovar o modelo formulado na alínea B), o aluno fez uma combinação dos modelos concebidos durante a resolução da alínea A2 ($v_n = 2^n$ e $v_n = 2 \cdot v_{n-1}$) e demostrou a sua equivalência*
Fez o tratamento combinado dos registos algébricos e obteve uma proposição universalmente verdadeira	

Análise das alíneas C), C1 e C2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos na folha de cálculo para interpretar a questão. Aproveitando as potencialidades de folha de cálculo começou por destacar grupos de termos da sucessão da alínea A) e mobilizou sincronizadamente registos algébricos e verbais para representar no papel, através de uma tabela, os registos numéricos que considerou para responder a questão colocada, depois de ter feito uma representação semelhante na folha de cálculo.

Para descobrir a relação numérica entre os termos, o aluno começou por mobilizar registos numéricos para representar o último termo de cada grupo de 7 termos consecutivos, fez os tratamentos na folha de cálculo e registou no papel. Aí, o aluno fez os devidos tratamentos para obter, no final, uma fração irredutível. O aluno mobilizou registos algébricos para "deduzir" a relação recursiva que permite determinar a quantidade de vírus que o infetado terá no organismo ao completar a 1ª semana. De igual modo, mobilizou registos algébricos para representar a condição inicial.

Análise das alíneas C), C1 e C2) na perspetiva M&M

O aluno começou por rever a resolução da questão proposta na alínea A), fazendo um ajustamento ao modelo. Depois, elaborou o novo modelo, ao destacar e realinhar alguns objetos matemáticos provenientes da aplicação do modelo da alínea A). A matematização do modelo agora formado teve lugar quando o aluno descobriu uma relação entre resultados consecutivos na nova sequência. A relação encontrada permitiu ao aluno fazer uma generalização do modelo na forma recursiva.

Tabela 50: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C, C1 e C2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos numéricos na folha de cálculo para interpretar a questão e aproveitando as potencialidades de folha de cálculo começou por destacar os termos da sucessão da alínea A)	*Iniciou a resolução da alínea C) fazendo um ajustamento do modelo da alínea A)*
Mobilizou sincronizadamente registos algébricos e verbais para representar uma tabela de registos numéricos que considerou para responder a questão	*Iniciou a formulação do modelo ao destacar e realinhar alguns objetos matemáticos provenientes da aplicação do modelo da alínea A)*
Fez tratamentos na folha de cálculo. Seguidamente fez devidos tratamentos numéricos até que obteve uma fração irredutível.	*A matematização do modelo conduziu a uma relação entre termos consecutivos da nova sucessão*
Mobilizou registos algébricos para "deduzir" a relação recursiva que permite responder à situação colocada	*A relação obtida permitiu ao aluno fazer uma generalização do modelo na forma recursiva*

Análise da alínea D) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos verbais para tecer considerações sobre a proveniência dos termos da sucessão da alínea C) e, de igual modo, destacou características comuns entre as sucessões em análise.

Análise da alínea D) na perspetiva M&M

Depois ter analisado modelos anteriores, o aluno destacou que o modelo considerado na alínea C) resulta de um reajustamento do modelo obtido na resolução da alínea A) e para finalizar o aluno fez uma síntese das características comuns aos dois modelos.

Tabela 51: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea D segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos verbais para tecer considerações sobre a proveniência dos termos e as características comuns às sucessões em análise.	*Notou que o modelo considerado na alínea C) representa um reajustamento do modelo obtido na alínea A)*
	Fez uma síntese das características comuns aos dois modelos.

5.2.5 Resolução da Tarefa 3 - Cubos de gelo no copo

Resolução da alínea A1

Ao iniciar a resolução da tarefa (Anexo 6), o Aluno 2 considerou os seguintes dados, atribuindo à altura do copo o valor de 7 cm e ao raio do copo o valor de 3 cm:

$$V = 2 \times 2 \times 2 = 8 \Rightarrow Vc = 8 \cdot 0{,}9 = 7{,}2\ cm^3$$

$$r = 3\ cm \quad \text{e} \quad h_{cop} = 7\ \text{cm}$$

O aluno continuou a resolução da tarefa, considerando a existência de um nível inicial, em virtude de já existir água no copo. Este pressuposto é percetível quando ele afirma que:

> "Como o copo já continha água, então existe um nível zero"

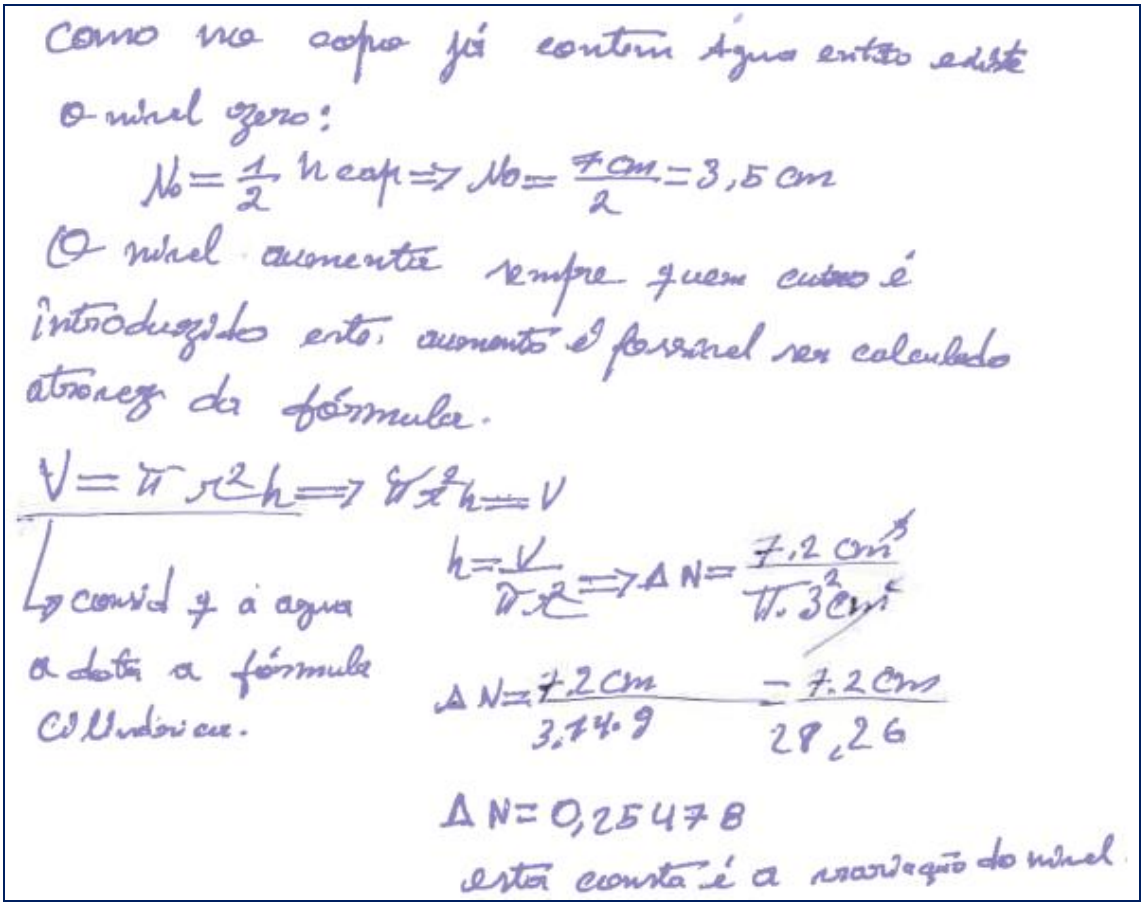
Deste modo, agregou aos dados a seguinte relação:

$$N_0 = \frac{1}{2} h_{cop} \qquad N_0 = \frac{7cm}{2} = 3{,}5\ cm$$

E assumiu ainda que:

> "O nível aumenta sempre que um cubo é introduzido e este aumento é possível ser calculado, usando uma fórmula"

Em seguida, o aluno escreveu no papel a fórmula do volume de cilindro e realçou que tal fórmula é válida se for tido em conta o facto de que a água num copo cilíndrico toma a forma cilíndrica. A partir da fórmula do volume do cilindro, o aluno explicitou a variável h, e tendo substituído esta variável h por ΔN, concretizou as demais variáveis com os respetivos valores numéricos, tendo em conta os dados que inicialmente considerou. Então, recorrendo à folha de cálculo, obteve o valor numérico de ΔN, que o aluno considerou ser a variação de nível, como se pode ler na figura 106. Este valor corresponde, conforme o aluno transmite, à variação de nível da água no copo quando se introduz um cubo de gelo.


Como no copo já contem água então existe o nível zero:

$$N_0 = \frac{1}{2} h \text{ cop} \Rightarrow N_0 = \frac{7 \text{ cm}}{2} = 3,5 \text{ cm}$$

O nível aumenta sempre quem cubo é introduzido então aumento é possível ser calculado atravez da fórmula.

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \pi r^2 h = V$$

↳ considerar a água adota a fórmula cilíndrica.

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow \Delta N = \frac{7,2 \text{ cm}^3}{\pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2}$$

$$\Delta N = \frac{7,2 \text{ cm}}{3,14 \cdot 9} = \frac{7,2 \text{ cm}}{28,26}$$

$$\Delta N = 0,25478$$

esta conta é a variação do nível

Figura 106: Determinação do nível inicial e variação do nível sugerida pelo Aluno 2.

Depois de obter este resultado, o aluno empenhou-se em determinar os diferentes níveis resultantes da introdução de sucessivos cubos, adicionando esta variação de nível, numa primeira instância com o nível inicial para obter o nível 1. Depois adicionou o mesmo valor com o nível 1 para obter o nível subsequente, sendo que optou por efetuar as adições na folha de cálculo. Depois de o ter feito de forma não generalizável, isto é, somando valores fixos em vez de usar os conteúdos de células (ver célula G11 na figura 107), conseguiu inserir uma fórmula generalizável na coluna J visível na figura 108.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		8		7,2			
3							
4	Vc	7,2					
5	r	3					
6	hcop	7		3,5			
7	N0	3,5				h	v/3,14*r2
8							
9						h	0,25477707
10							
11						N1	=3,5+0,2477707

Figura 107: Obtenção intuitiva da variação do nível, o nível inicial e o nível que a água atinge quando o primeiro cubo é introduzido

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		8		=B2*0,9						
3									N0	3,5
4	Vc	7,2							N1	=J3+0,25478
5	r	3							N2	=J4+0,25478
6	hcop	7							N3	=J5+0,25478
7	N0	3,5				h	v/3,14*r2		N4	=J6+0,25478
8									N5	=J7+0,25478
9						h	=7,2/(3,14*9)		N6	=J8+0,25478
10									N7	=J9+0,25478

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		8		7,2						
3									N0	3,5
4	Vc	7,2							N1	3,75478
5	r	3							N2	4,00956
6	hcop	7							N3	4,26434
7	N0	3,5				h	v/3,14*r2		N4	4,51912
8									N5	4,7739
9						h	0,25478		N6	5,02868
10									N7	5,28346

Figura 108: Obtenção recursiva dos níveis que a água atinge quando os cubos de gelo são introduzidos

Resolução da alínea A2

Partindo da relação recursiva que considerou na alínea A1), fez sucessivas substituições até encontrar um n-ésimo termo através de uma inferência em que interveio a ordem do termo, o coeficiente da variação de nível e o nível inicial (Fig. 109). Desta forma, o aluno deduziu o termo geral de uma PA.

$N_1 = N_0 + \Delta N \quad (1) \Rightarrow$

$N_2 = N_1 + \Delta N \quad (2)$

$N_2 = (N_0 + \Delta N) + \Delta N$

$\boxed{N_2 = N_0 + 2\Delta N} \quad (3)$

A relação (1) foi substituída na equação (2) e resultou (3)

$N_3 = N_2 + \Delta N$

$N_3 = (N_0 + 2\Delta) + \Delta N$

$\boxed{N_3 = N_0 + 3\Delta N}$

A partir da relação $N3 = N2 + \Delta N$, N2 foi substituído pelo 2º membro da equação (3), pelo que resultou $N3 = N0 + 3 \Delta N$.

$N_4 = N_3 + \Delta N$

$N_4 = (N_0 + 3\Delta N) + \Delta N$

$\boxed{N_4 = N_0 + 4\Delta N}$

A partir da relação $N4 = N3 + \Delta N$, N3 foi substituído pelo 2º membro da equação $N3 = N0 + 3 \Delta N$, pelo que resultou a igualdade $N4 = N0 + 4 \Delta N$.

Nota-se que o índice no 1º membro é igual ao coeficiente de ΔN no 2º membro logo pode-se concluir que $N_n = N_0 + n\Delta N$ como $N_0 = 3.5$ cm e $\Delta N = 0{,}25478$, $\boxed{N_n = 3{,}5 + 0{,}25478n}$

Conclusão do aluno depois de notar o padrão que permite determinar o termo geral em função da ordem *n*

Figura 109: Obtenção do termo geral da sucessão dos níveis de água em função da quantidade de cubos de gelo introduzidos no copo

Resolução das alíneas B1 e B2

Depois de explorar a tabela que representa a sucessão que obteve na folha de cálculo, o aluno mencionou as seguintes relações entre níveis:

> "Cada nível atingido pela água é maior que o nível anterior e a diferença é constante".

A seguir, partindo do n-ésimo termo que deduziu na alínea A2, o aluno comprovou analiticamente as relações que referiu na alínea B1, conforme se pode ver nas figuras 110 e 111. Ao provar que a diferença entre termos consecutivos é constante, o aluno efetuou alguns cálculos redundantes mas não retirou uma conclusão clara.

B2) $N_n > N_{n-1}$

$3{,}5 + 0{,}25478n > 3{,}5 + 0{,}25478(n-1)$

$3{,}5 + 0{,}25478n > 3{,}5 + 0{,}25478n - 0{,}25478$

$0 > -0{,}25478$

Figura 110: Resposta do Aluno 2 demonstrando que cada nível é maior que o anterior

$$N_n - N_{n-1} = \text{constante}$$

$$3.5 + 0{,}25478n - [3.5 + 0{,}25478(n-1)] = \text{const}$$

$$3{,}5 + 0{,}25478n - 3{,}5 - 0{,}25478n + 0{,}25478 = \text{constan}$$

Figura 111: Resposta em que o Aluno 2 verifica que a diferença entre termos consecutivos é constante

Resolução das alíneas C1 e C2

Recorrendo à folha de cálculo, o aluno construiu um gráfico, com base no qual concluiu que a sucessão é crescente (Fig. 112).

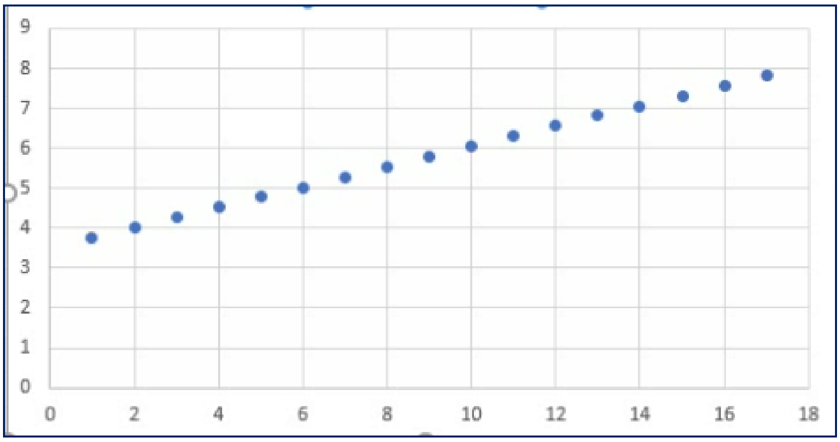


Figura 112: Gráfico da sucessão dos níveis que a água alcança em função do número de cubos de gelo introduzidos no copo

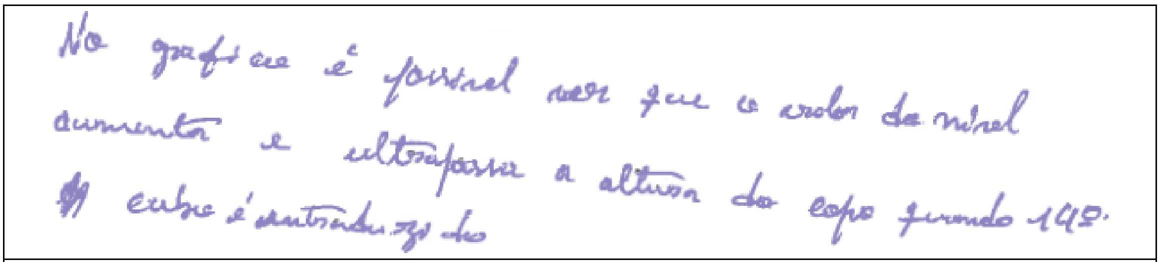
O aluno não fez um tratamento analítico para a resposta à alínea C1; unicamente reforçou que a partir do gráfico era possível ver os “pontos a subirem”. Com efeito, a verificação por meios algébricos da monotonia crescente da sucessão estava já apresentada na sua resposta à alínea A2.

Resolução da alínea D

Para responder a esta alínea, o Aluno 2 recorreu novamente à folha de cálculo onde, depois de reler o gráfico que obteve anteriormente, passando o cursor ao longo do gráfico, fez a seguinte afirmação:

> “São necessários 14 cubos de gelo para que o copo transborde”

Quanto a uma justificação da conclusão retirada, o aluno optou por se basear na leitura do gráfico (Fig. 112), enfatizando a ideia de monotonia da sucessão e apontando a ordem a partir da qual o copo transborda, como se pode ler na figura 113, sendo essa ordem a que corresponde a um nível igual a 7 cm.


No grafico é possivel ver que o valor do nivel aumenta e ultrapassa a altura do copo quando 14º cubo é introduzido

"No gráfico é possível ver que o valor do nível aumenta e ultrapassa a altura do copo quando 14º cubo é introduzido"

Figura 113: Leitura do gráfico da sucessão dos níveis que a água alcança em função do número de cubos de gelo introduzidos no copo, sugerida pelo Aluno 2

5.2.6 Análise e Interpretação da Tarefa 3

Análise da alínea A1) na perspetiva da TRRS

O Aluno 2 mobilizou registos numéricos para representar as dimensões que escolheu para o copo e as dimensões dos cubos de gelo sugeridas no enunciado da tarefa. E fez um tratamento de registos numéricos para determinar o volume real da quantidade da água que um cubo de gelo desloca ao ser introduzido no copo.

Seguidamente, mobilizou registos verbais para exprimir a condição inicial que considerou e fez a conversão dos registos verbais para registos algébricos de modo a representar a condição inicial considerada. Depois, mobilizou registos verbais para tecer algumas considerações pertinentes e simultaneamente anunciou a possibilidade de recorrer a uma relação algébrica para determinar o aumento do nível no copo resultante da colocação de um cubo de gelo.

Então, mobilizou registos algébricos para representar a relação entre o volume e as demais dimensões do cilindro, fez um tratamento dos registos algébricos e conseguiu explicitar a relação entre a altura do cilindro e as demais dimensões do cilindro. Considerando as dimensões do copo cilíndrico escolhidas inicialmente, fez algumas conversões de registos algébricos e obteve o valor numérico da variação da altura que, segundo o problema e os dados considerados, corresponde ao aumento do nível quando um cubo é introduzido no copo. Depois de fazer os devidos tratamentos de registos numéricos, inseriu uma fórmula na folha de cálculo que lhe permitiu efetuar de forma automática diversos tratamentos de registos numéricos, chegando assim à determinação de diversos níveis sucessivos através da adição do aumento constante com o último nível conhecido, isto é, por recorrência.

Análise da alínea A1) na perspetiva da M&M

Depois da leitura do enunciado da atividade, o aluno extraiu os dados apresentados na situação e a estes agregou os dados referentes às dimensões do copo que escolheu. Tendo em conta as condições sugeridas pela atividade, o aluno considerou a existência de um nível inicial da água no copo. Para determinar o valor numérico do referido nível, recorreu a conhecimentos prévios e tendo feito algumas operações de cálculo, deduziu que a metade da altura corresponderia ao nível inicial da água no copo.

O modelo inicial começou a ser concebido quando o aluno, depois de ter estabelecido o nível inicial da água no copo, sugeriu que “o nível aumenta sempre que um cubo é introduzido”. Seguidamente, tendo em atenção que a água no copo toma a forma cilíndrica, o aluno considerou a fórmula do volume de um cilindro e a partir desta deduziu uma fórmula para explicitar a altura do cilindro. Então, considerando os dados de que já dispunha, o refinamento do modelo inicial evidenciou-se quando considerou que a altura obtida, considerando o volume de um cubo de gelo, poderia corresponder à variação de nível.

Para testar e explorar o modelo, o aluno recorreu à folha de cálculo onde determinou os diferentes níveis de água no copo, adicionando a variação de nível, numa primeira instância com o nível inicial para obter o nível subsequente, e assim por diante. Conseguiu a matematização do modelo ao inserir uma fórmula generalizável, que permitiu determinar cada um dos níveis que a água atinge quando cada cubo de gelo é introduzido.

Um resumo da análise da resolução da alínea A1)

Na tabela 52, apresentam-se as ideias fundamentais que decorrem da análise das resoluções produzidas pelo aluno, na ótica de cada perspetiva teórica.

Tabela 52: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	***Na perspetiva de M&M***
Mobiliza registos numéricos para representar as dimensões do copo e do cubo de gelo	*Retira dados e supôs dados que não eram fornecidos na tarefa*
Faz um tratamento de registos numéricos para determinar o volume real que um cubo de gelo desloca ao ser introduzido no copo	*Usa conhecimentos prévios para obter o volume de um cubo*
Mobiliza registos verbais para exprimir a condição inicial da situação e faz a respetiva conversão para registos algébricos de modo a representar a condição inicial	*Considera a existência de um nível inicial da água no copo*
O registo algébrico é convertido para um registo numérico e é feito o tratamento de registos numéricos	*Para determinar o valor numérico do aumento de nível, considera que a metade da altura corresponde ao nível inicial da água no copo*
Usa registos verbais e percebe a necessidade	*O modelo inicial começa a ser concebido com*

de recorrer a uma relação algébrica para determinar o aumento do nível	*base na ideia de que o nível de água aumenta com a colocação de cada cubo de gelo*
Mobiliza registos algébricos para representar a relação entre o volume e as demais dimensões do cilindro	*Usa a fórmula do volume de um cilindro e a partir desta deduz uma fórmula para altura de cilindro; considerando os dados de que já dispunha, calcula o valor numérico da variação da altura*
Faz tratamento dos registos algébricos e explicita a relação entre a altura do cilindro e as demais dimensões do cilindro	
Faz algumas conversões de registos algébricos e obtém o valor numérico da altura	
Faz tratamentos de registos numéricos e obtém o valor numérico que representa o aumento do nível inicial da água no copo quando um cubo é introduzido	*O refinamento do modelo inicial corresponde à ideia de que o volume do cubo de gelo corresponde à variação de nível*
	Para testar e explorar o modelo, recorre à folha de cálculo onde determina os sucessivos níveis de água no copo
Na folha de cálculo, efetua de forma automática diversos tratamentos dos registos numéricos para a determinação de diversos níveis sucessivos	*Formaliza o modelo ao inserir uma fórmula generalizável, que permite determinar o nível que a água atinge quando cada cubo de gelo introduzido*

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

O Aluno 2 mobilizou registos algébricos para representar as relações consideradas na elaboração da fórmula que inseriu na folha de cálculo para determinar os diversos níveis que a água atingiria quando fossem introduzidos sucessivamente os cubos de gelo.

Fez um tratamento combinado de diversos registos algébricos e notou um padrão entre os resultados. Considerando esse padrão, obteve rapidamente uma relação algébrica genérica. Usando alguns dos resultados obtidos ao longo da atividade fez algumas conversões, alcançando um registo algébrico adequado para representar a solução da situação proposta.

Análise da alínea A2) na perspetiva da M&M

O aluno considerou os diversos casos particulares a partir do modelo concebido na alínea anterior e, recorrendo a conhecimentos prévios, conseguiu combinar estes casos e estabelecer um padrão que lhe permitiu generalizar e representar o modelo algebricamente: Assim, chegou a uma relação para obter o n-ésimo termo da sucessão, em que intervém o nível inicial de água no copo.

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

De forma breve, salientam-se na tabela seguinte (Tabela 53) as principais ideias retiradas da análise realizada.

Tabela 53: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza registos algébricos para representar as relações na elaboração da fórmula que insere na folha de cálculo	*Representa algebricamente casos particulares do modelo considerado para resolver a tarefa*
Faz tratamento combinado de diversos registos algébricos e deteta um padrão entre os resultados	*Usando conhecimentos anteriores, combina esses casos*
Faz um tratamento rápido e obtém uma relação algébrica genérica	*Generaliza o modelo algebricamente ao descobrir um padrão que lhe permite inferir o n-ésimo termo da sucessão*
Faz algumas conversões e obtém assim o registo algébrico adequado para representar a solução da situação proposta	*Refina o modelo e apresenta-o algebricamente.*

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos e para a respetiva interpretação introduziu registos verbais. Desta forma, conseguiu representar as relações entre os elementos do conceito matemático envolvido na questão.

Mobilizou registos algébricos e fez os devidos tratamentos de onde resultaram proposições verdadeiras que consolidam as considerações tecidas pelo aluno, de um ponto de vista matemático.

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da M&M

O Aluno 2 fez referência à invariância da diferença entre os níveis de água consecutivos. Para ilustrar ou definir analiticamente a monotonia da sucessão, o aluno utilizou o conceito genérico de termos consecutivos e recorrendo a relação algébrica construída na alínea A2 fez a comparação, efetuando as devidas operações e simplificações e encontrando uma relação universal. E na mesma linha, para comprovar a relação relativa à invariância da diferença entre níveis consecutivos, expressou a diferença genérica entre o n-ésimo termo e o seu antecessor e depois das devidas transformações algébricas, conseguiu provar que a diferença entre os níveis consecutivos era constante.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B1 e B2)

Na tabela seguinte (Tabela 54) encontram-se resumidas os aspetos centrais da análise realizada.

Tabela 54: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B1 e B2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	Na perspetiva de M&M
Mobiliza registos numéricos	*Sugere o aumento dos níveis e a invariância da diferença entre os níveis*
Mobiliza registos verbais para interpretar os registos numéricos	
Mobiliza registos algébricos	*Para explorar as propriedades do modelo, recorre à relação algébrica considerada na alínea A2*
Faz tratamentos dos registos algébricos e obtém proposições universalmente verdadeiras	*Usando conhecimentos prévios, efetua as devidas operações e simplificações e encontra uma relação universal que confirma as propriedades do modelo*

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da TRRS

Para desenvolver o seu conhecimento da sucessão obtida, o aluno converteu os registos numéricos em registos gráficos e tirou conclusões sobre a monotonia da sucessão em análise. Para justificar ou comprovar as suas considerações sobre a monotonia da sucessão, o aluno mobilizou o registo gráfico e interpretou-o com base em registos verbais. Deste modo, o aluno reforçou as suas convicções referentes à monotonia da sucessão analisada.

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da M&M

Para responder à questão proposta, o aluno recorreu às potencialidades da folha de cálculo, enquanto meio representacional, onde representou graficamente o modelo concebido. A visualização e a respetiva interpretação da representação gráfica do modelo levou-o a retirar conclusões adequadas sobre a monotonia da sucessão.

Para justificar as suas afirmações, o aluno mencionou o recurso ao gráfico e à sua leitura pertinentes para a devida interpretação do modelo expresso graficamente.

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1) e C2)

A seguir estão resumidas as interpretações que se referem a cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 55).

Tabela 55: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1 e C2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	Na perspetiva de M&M
Converte os registos numéricos em registo gráfico	*Recorre às potencialidades da folha de cálculo, enquanto meio representacional, e representa graficamente o modelo*
Mobiliza registos verbais para analisar a monotonia	*Interpreta as propriedades do modelo, referindo-se à monotonia da sucessão*
Para justificar as suas interpretações, mobiliza o registo gráfico e interpreta-o com base em registos verbais	*Para justificar as suas afirmações, faz a devida interpretação do modelo expresso graficamente*

Análise da alínea D) na perspetiva da TRRS

Para encontrar o número de cubos de gelo que levariam o copo a transbordar, o aluno apoia-se no registo gráfico e identifica os elementos a ter em conta para obter a solução para o problema proposto.

Análise da alínea D) na perspetiva da M&M

Para responder ao problema sugerido, o aluno recorreu novamente ao modelo já representado graficamente e a partir da sua leitura e análise, voltando a ter em conta o conhecimento da monotonia, especifica a ordem a partir da qual o copo transborda.

Um resumo da análise da resolução da alínea D)

Segue-se a esquematização das ideias principais retiradas da análise anterior (Tabela 56).

Tabela 56: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea D segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza registos verbais para identificar a resposta à situação proposta, a partir do registo gráfico previamente mobilizado	*Recorre novamente ao modelo já representado graficamente e, tendo em conta propriedades do modelo já analisadas, obtém a ordem a partir da qual o copo transborda*

5.2.7 Resolução da Tarefa 4 - A Plantação de Laranjeiras

Resolução da alínea A1

O Aluno 2 a começou a sua resolução da tarefa 4 (Anexo 7) com a interpretação da situação e organização das primeiras ideias para a sua abordagem, designadamente a determinação da diferença entre a quantidade de laranjeiras existentes num dado dia e a quantidade que existia no dia anterior, considerando que esta diferença equivale à quantidade que o fazendeiro plantou nesse dia.

Para a realização das primeiras explorações da situação, o aluno recorreu à folha de cálculo, onde numa coluna, a partir da célula B3, escreveu os números que significam os dias. Depois, a partir da célula C3 foi introduzindo nessa coluna as quantidades de laranjeiras conforme o enunciado do problema indicava. Na coluna D, iniciou a introdução das quantidades plantadas de novo, em cada dia. Foi começando de forma direta e depois estabeleceu um critério que lhe permitiu inserir uma fórmula como se pode ver na figura 114.

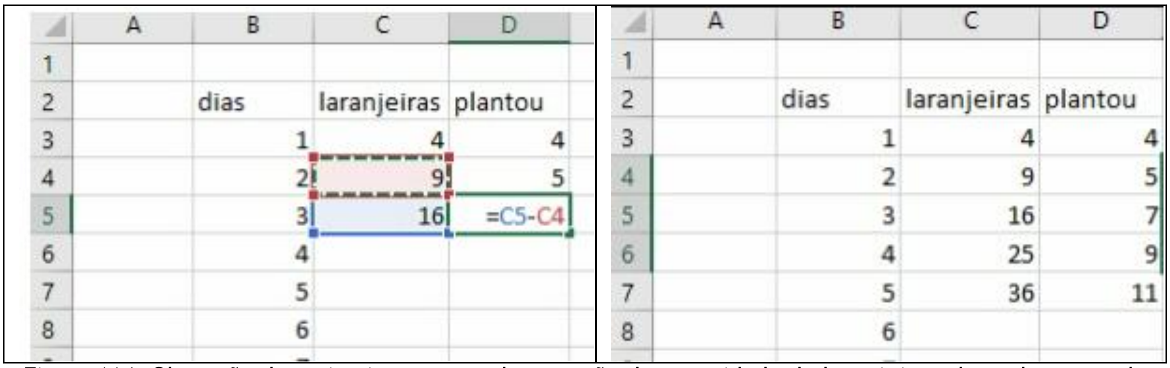


Figura 114: Obtenção dos primeiros termos da sucessão de quantidade de laranjeiras plantadas em cada dia

Depois de ter obtido alguns termos da sucessão que foi gerando na coluna D, o aluno explorou o padrão numérico aí presente e conseguiu notar que a partir do 3º termo a diferença entre cada termo e o seu antecedente é 2, como se pode ver na figura 115.

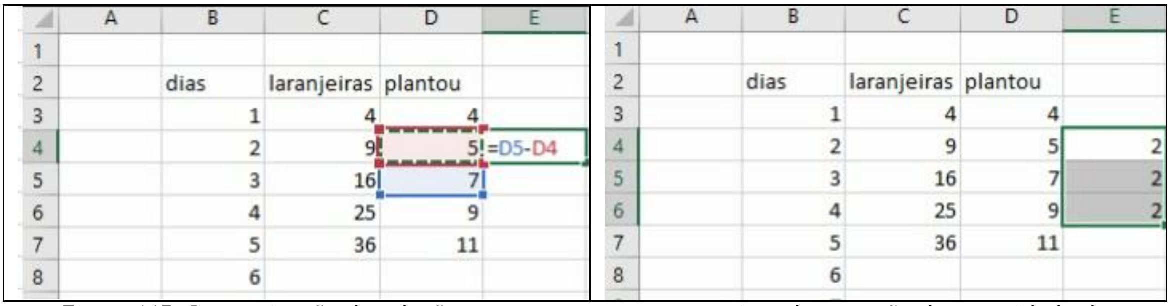


Figura 115: Determinação da relação entre os termos consecutivos da sucessão de quantidade de laranjeiras plantadas em cada dia

Partindo deste novo facto, o aluno inseriu outra fórmula na coluna D, a partir da célula D8, e arrastando essa fórmula para baixo obteve novos termos da sucessão (Fig. 116). Desta forma, a atenção do Aluno 2 parece ter-se centrado principalmente sobre a sucessão que representa o número de novas árvores plantadas em cada dia.

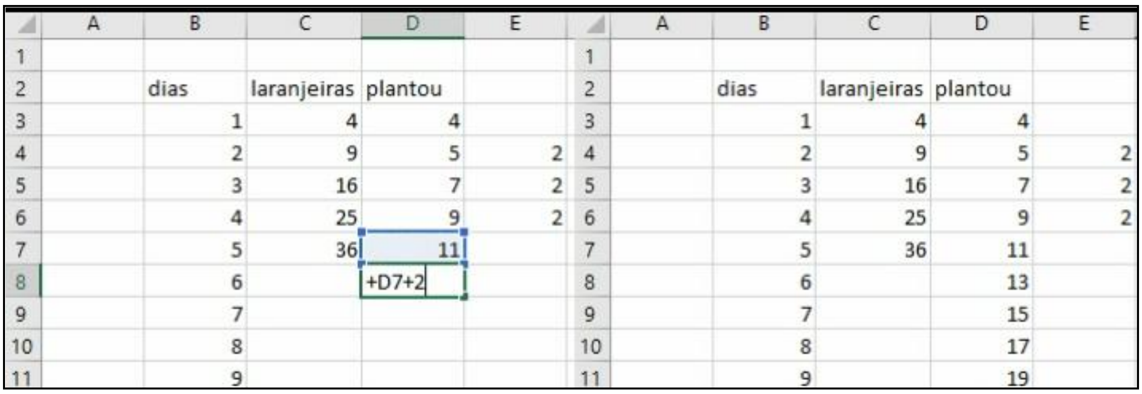
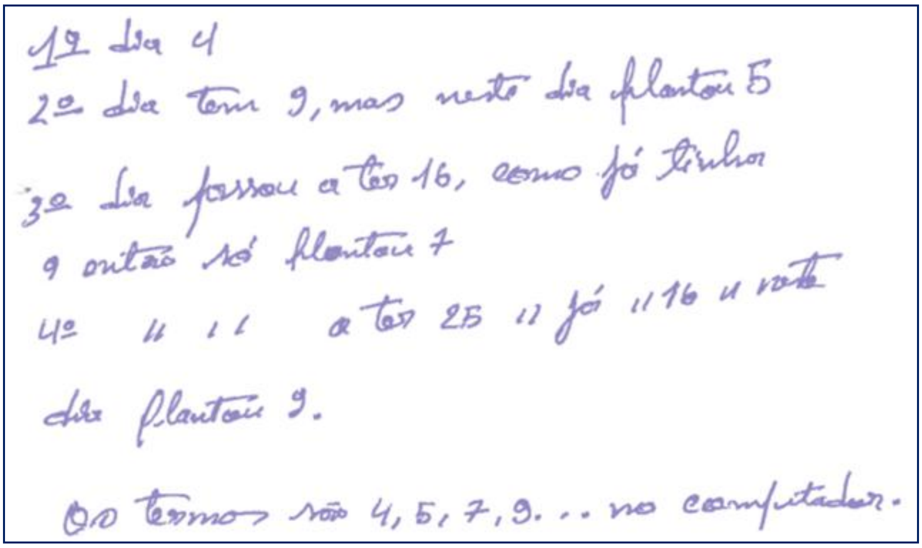


Figura 116: Obtenção recursiva de sucessão de quantidade de laranjeiras plantadas em cada dia

Depois deste trabalho, o aluno registou no papel as principais ideias que estão na base do seu raciocínio; posteriormente registou alguns termos da sucessão, tendo indicado que no computador estão calculados os outros termos (Fig. 117), denotando a aparente inviabilidade de enunciar, um a um, os resultados que correspondem aos primeiros dias da plantação.



1º dia 4
2º dia tem 9, mas neste dia plantou 5
3º dia passou a ter 16, como já tinha
9 então só plantou 7
4º " " a ter 25 " já " 16 " neste
dia plantou 9.
Os termos são 4, 5, 7, 9. .. no computador.

Figura 117: Registo das quantidades de novas laranjeiras plantadas nos primeiros dias

Resolução da alínea A2

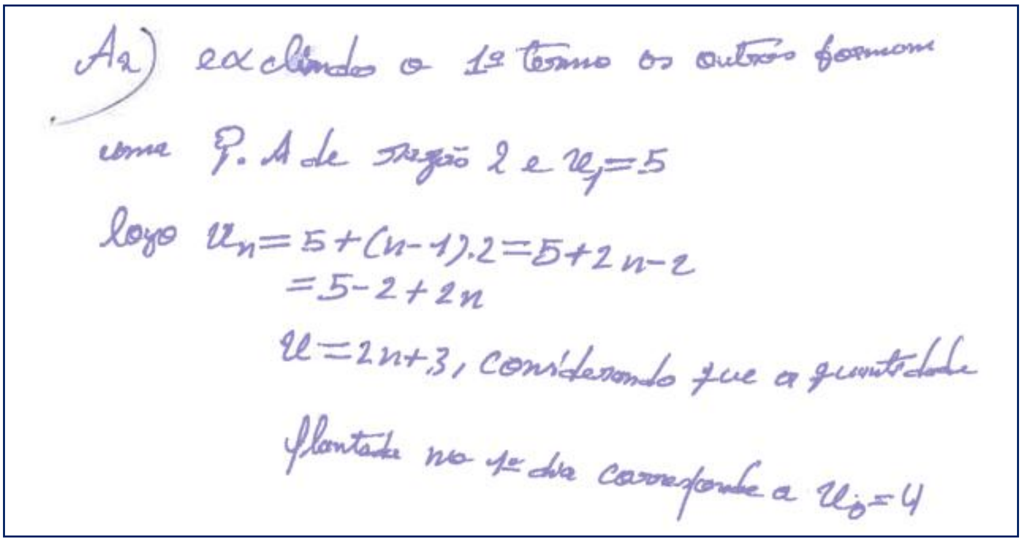
Para resolver a alínea A2, o aluno voltou a recorrer à folha de cálculo de modo a explorar os aspetos matemáticos do seu modelo. Durante a exploração, o aluno conjeturou que a sucessão em estudo seria uma PA e então decidiu utilizar o termo geral de uma PA, de razão 2 e primeiro termo igual a 5 (Fig.108).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		dias	laranjeiras	plantou				ou	dias	plantou
3		1	4	4					1	5
4		2	9	5	2				2	7
5		3	16	7	2				3	9
6		4	25	9	2	25			4	11
7		5	36	11					5	13
8		6		13					6	15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		dias	laranjeiras	plantou				ou	dias	plantou
3		1	4	4					1	=2*I3+3
4		2	9	5	2				2	
5		3	16	7	2				3	
6		4	25	9	2	25			4	
7		5	36	11					5	
8		6		13					6	

Figura 118: Obtenção da sucessão de quantidade de laranjeiras plantadas em cada dia em função do número de dias

Ao introduzir esta fórmula na coluna J, constatou que o 1º termo não coincidia, mas mesmo assim considerou a fórmula e ressalvou esta primeira condição conforme se pode ler na figura 118. É de notar a forma como o aluno resolveu a questão do 1º termo, ao admitir um termo de ordem 0 que corresponderia às primeiras 4 árvores plantadas, como mostra o enunciado da tarefa (Fig. 119)


A2) excluindo o 1º termo os outros formam uma P. A de razão 2 e $u_1=5$

logo $u_n=5+(n-1).2=5+2n-2$

$=5-2+2n$

$u=2n+3$, considerando que a quantidade plantada no 1º dia corresponde a $u_0=4$

Figura 119: Resposta da alínea A2 (Tarefa 4), apresentada pelo Aluno 2

Importa referir brevemente que a versão algébrica apresentada integra uma representação matematicamente não habitual, embora logicamente correta. Na verdade, não é natural que se utilize a ordem 0 para designar o 1º dia (ou seja, o 1º termo). Percebe-se que esta incoerência na notação utilizada resulta de o aluno ter utilizado as 4 primeiras árvores simultaneamente como primeiro termo de duas sucessões: da sucessão de árvores existentes no dia *n*, e da sucessão de árvores adicionais plantadas no dia *n*.

Resolução da alínea B1

A semelhança das alíneas anteriores, o aluno continuou a exploração na folha de cálculo para procurar a resposta à alínea B1. Neste âmbito, descobriu que cada um dos termos da sucessão obtida na coluna C (sucessão das árvores existentes em cada dia) podia ser escrito em forma de uma soma constituída por um quadrado perfeito seguido de um número impar maior que 1 e que estes números ímpares formavam uma PA de razão 2 e primeiro termo igual a 3, conforme se pode ver nos excertos de vídeo representados na figura 120. Assim, na coluna P o aluno reproduz este padrão, verificando que ele permite definir os termos da sucessão e, além disso, volta à ideia de utilização de progressões aritméticas, ainda que combinada com o uso de quadrados perfeitos.

	M	N	O	P
1				
2	dias	laranjeiras		
3	1	4		1+3
4	2	9		4+5
5	3	16		
6	4	25		
7				

	M	N	O	P	Q	R	S
1							
2	dias	laranjeiras					
3	1	4		1	3		2
4	2	9		4	5		2
5	3	16		9	7		2
6	4	25		16	9		
7				n*n			r=2
8							
9							U1=3
10							

Figura 120: Obtenção das quantidades totais de laranjeiras que estarão plantadas nos primeiros dias

Depois desta constatação, introduziu na célula N11 uma fórmula mais completa que lhe permitiu obter as quantidades de laranjeiras que existiriam na fazenda em função ao número de dias (Fig. 121). Trata-se pois de uma expressão equivalente a $n^2 + 2n + 1$.

	M	N	O	P	Q	R	S
1							
2	dias	laranjeiras					
3	1	4		1	3		2
4	2	9		4	5		2
5	3	16		9	7		2
6	4	25		16	9		
7				n*n			r=2
8							
9							U1=3
10	dias						
11	1	=M11^2+2*M11+1					
12	2						
13	3						
14	4						

Figura 121: Inserção da fórmula que permite obter as quantidades totais de laranjeiras que estarão plantadas nos primeiros dias

Ao replicar a fórmula introduzida na célula N11, o Aluno 2 obteve a sequência de valores: 4; 9; 16; 25; ….

Resolução da alínea B2

Ao registar no papel a explicação para a obtenção dos termos da sucessão anterior, o aluno incorporou o facto de que, a partir do momento em que considerou os termos como somas, a segunda parcela podia ser considerada como sendo semelhante aos termos da sucessão obtida na alínea A1) mas subtraída de duas unidades e de facto esta ideia funciona corretamente, como se pode ver na figura 122.

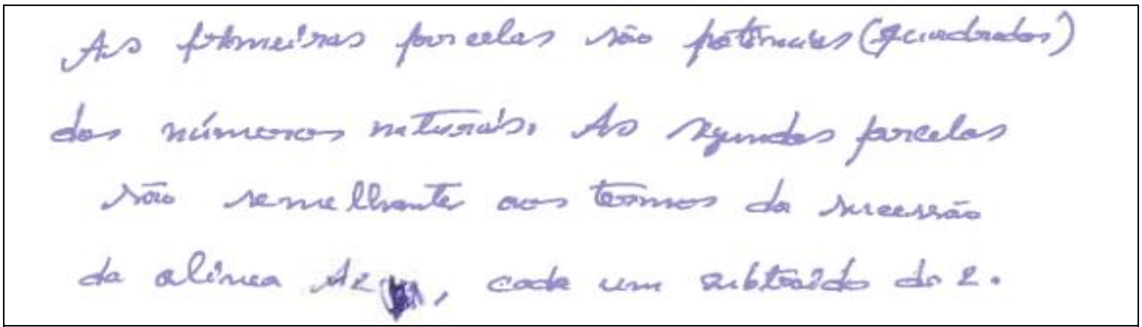
$4;\ 4+\underline{5};\ 9+\underline{7};\ 16+\underline{9} \ldots$

$4;\ 2^2+5;\ 3^2+7;\ 4^2+9;\ \ldots$

$1+3,\ 2^2+5;\ 3^2+7;\ 4^2+9 \ldots$

Figura 122: Registo da obtenção das quantidades totais de laranjeiras que estarão plantadas nos primeiros dias

O aluno apresenta com mais detalhe este seu raciocínio, tornando claro o modo como chegou à expressão para obter o termo geral da sucessão como função de *n* (Fig. 123), isto é, $u_n = n^2 + 2n + 1$.



"As primeiras parcelas são potências (quadrados) dos números naturais. As segundas parcelas são semelhantes aos termos da sucessão da alínea A2, cada um subtraído de 2".

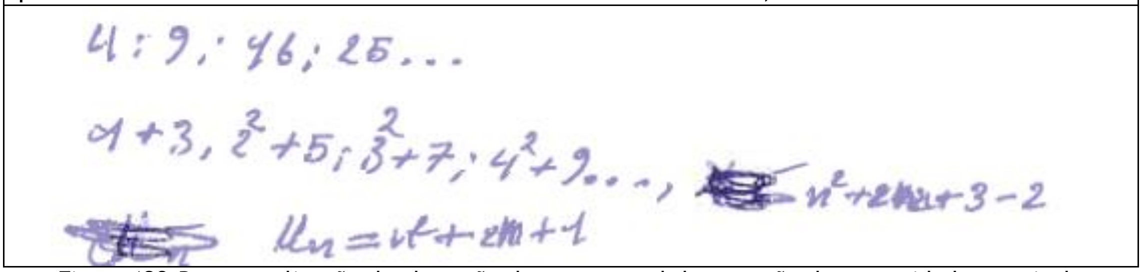


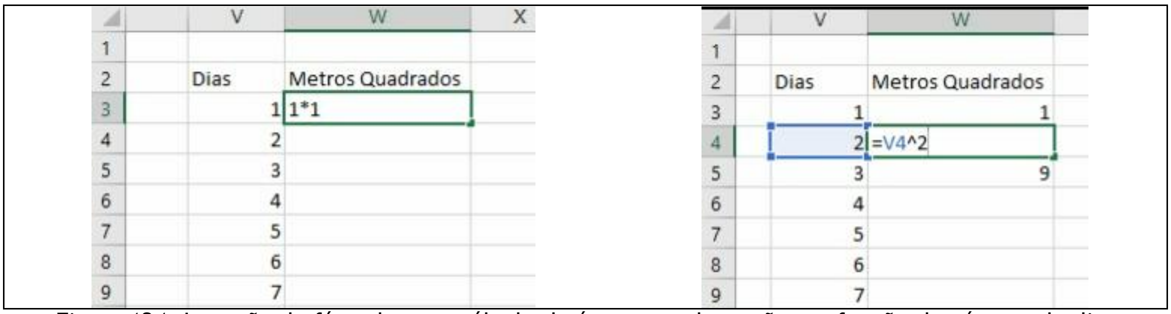
Figura 123:Breve explicação da obtenção do termo geral da sucessão das quantidades totais de laranjeiras que estarão plantadas em função do número de dias

Resolução das alíneas C1 e C2

Tendo em conta a disposição das laranjeiras e as distâncias (entre elas) descritas no problema, o aluno resolveu a alínea C1, recorrendo a relação existente entre o lado e a área do quadrado; para expressar esta ideia referiu que:

> "O lado do primeiro quadrado é 1, a área é 1^2; o lado do segundo quadrado é 2, a área é 2^2; o terceiro quadrado tem lado 3, a área é 3^2".

O aluno referiu ainda que no computador podemos calcular os quadrados dos números naturais. De facto, na folha de cálculo, o aluno considerou os dias na coluna V e as áreas na coluna W. Começou por introduzir os dados, calculando os quadrados sem automatizar uma fórmula mas logo depois introduziu uma fórmula para o termo geral que permitiu calcular os sucessivos quadrados perfeitos automaticamente (Fig. 124). Assim, arrastando a fórmula inserida na célula W4, ao longo da coluna, o aluno conseguiu obter a área total da plantação em cada um dos primeiros dias.



	V	W	X
1			
2	Dias	Metros Quadrados	
3	1	1*1	
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		

	V	W
1		
2	Dias	Metros Quadrados
3	1	1
4	2	=V4^2
5	3	9
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

Figura 124: Inserção da fórmula para cálculo da área com plantação em função do número de dias

Tendo já utilizado uma fórmula na folha de cálculo para a determinação das áreas, ao responder à questão C2, o aluno apenas referiu que analiticamente se tratava de usar uma expressão para obter os quadrados de números naturais (Fig. 125).

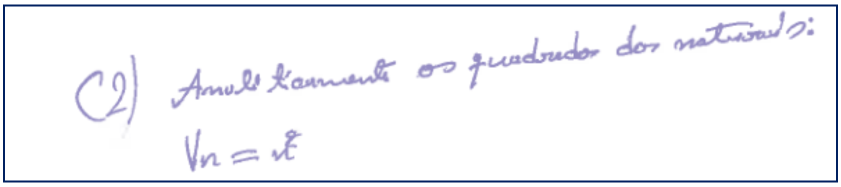
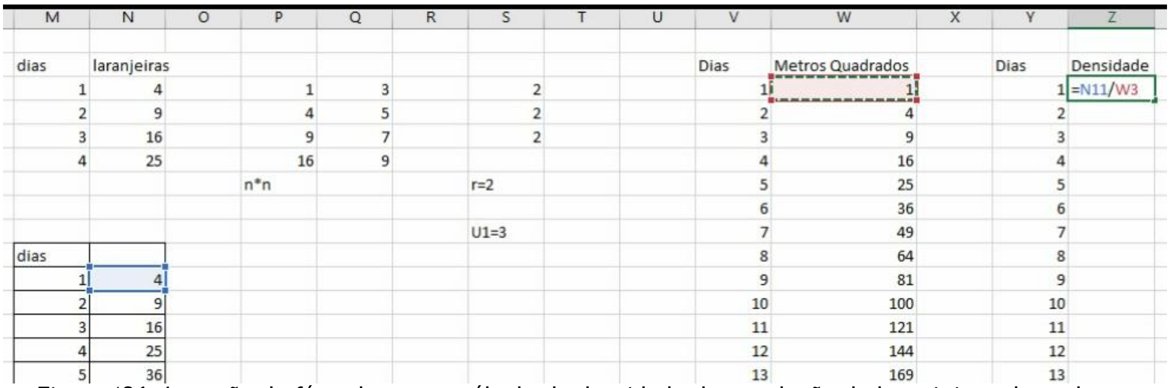


Figura 125: Resposta da alínea C2 (Tarefa 4) apresentada pelo aluno 2

Resolução das alíneas D1 e D2

Para o cálculo da densidade populacional, o aluno notou que era necessário considerar os resultados das alíneas B1 e C1, ou seja, a quantidade de laranjeiras existentes e a área de terreno usado. Feita esta referência, o aluno apresentou alguns resultados na forma fraccionária e depois afirmou que os seguintes seriam obtidos no computador, onde efetivamente inseriu uma fórmula na célula Z3, conforme mostra a figura 126. Essa fórmula calcula o quociente entre a quantidade de laranjeiras plantadas e a área que ocupam.



M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
dias	laranjeiras								Dias	Metros Quadrados		Dias	Densidade
1	4		1	3		2			1	1		1	=N11/W3
2	9		4	5		2			2	4		2	
3	16		9	7		2			3	9		3	
4	25		16	9					4	16		4	
			n*n			r=2			5	25		5	
									6	36		6	
						U1=3			7	49		7	
dias									8	64		8	
1	4								9	81		9	
2	9								10	100		10	
3	16								11	121		11	
4	25								12	144		12	
5	36								13	169		13	

Figura 126: Inserção da fórmula para o cálculo da densidade da população de laranjeiras plantadas

Mais uma vez o aluno referenciou as alíneas anteriores para responder à questão de obter uma expressão analítica para a densidade de árvores em cada dia (Fig. 127).

D2) Considerando o C1 e B2 $d_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2}$	Nota: Em rigor, as alíneas consideradas seriam: C2) e B2)

Figura 127: Resposta da alínea D2 (Tarefa 4) apresentada pelo Aluno 2

Resolução da alínea E

O aluno respondeu que os termos se aproximam de 1 e utilizou como fonte de referência a tabela feita na folha de cálculo, apesar de incluir um gráfico que mostra os termos da sucessão, conforme se pode ver nas figuras seguintes (Fig. 128 e Fig. 129). Com efeito, o gráfico revela claramente o comportamento convergente da sucessão e a sua convergência para o valor 1.

U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
	Dias	Metros Quadrados		Dias	Densidade					
	1	1		1	4		Dias	Densidade		
	2	4		2	2,25		1	=(AB4^2+2*AB4+1)/(AB4^2)		
	3	9		3	1,7777778		2	2,25		
	4	16		4	1,5625		3			
	5	25		5	1,44		4			
	6	36		6	1,3611111		5			
	7	49		7	1,3061224		6			
	8	64		8	1,265625		7			
	9	81		9	1,2345679		8			
	10	100		10	1,21		9			
	11	121		11	1,1900826		10			

Figura 128: Sucessão das densidades e inserção da fórmula geral para obtenção das densidades em função dos dias

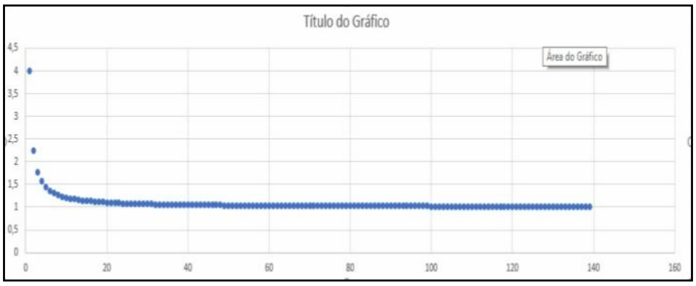


Figura 129: Representação gráfica da sucessão das densidades feita pelo Aluno 2

A concluir a questão, o Aluno 2, depois de passar o cursor do rato no gráfico e na tabela declarou:

> "Os termos aproximam-se a 1. Está visível na tabela. É convergente."

5.2.8 Análise e Interpretação da Tarefa 4

Análise da alínea A1) na perspetiva da TRRS

Para iniciar a resolução da tarefa, o Aluno 2 inicialmente mobilizou registos verbais e icónicos para interpretar a questão proposta na tarefa; seguidamente, converteu os registos icónicos em numéricos de modo a representar as quantidades de laranjeiras existentes nos primeiros três dias, tendo em atenção os dados da situação proposta.

Fez tratamentos dos registos numéricos e passou a obter registos numéricos que representam as quantidades de laranjeiras que o fazendeiro plantou em cada dia. A partir dos registos numéricos, o aluno observou um padrão e, considerando esse padrão, o aluno inseriu na folha de cálculo uma fórmula que permitiu efetuar tratamentos de forma automática. Além disso, mobilizou combinadamente registos verbais e numéricos para representar os resultados e referir o significado dos mesmos.

Análise da alínea A1) na perspetiva da M&M

O Aluno 2 iniciou a formação do seu modelo ao criar o esboço de uma sucessão numérica formada pelas quantidades de laranjeiras existentes nos primeiros três dias, tendo em atenção os dados da situação proposta. Para tornar o modelo inteligível, o primeiro procedimento adotado foi o de considerar a diferença entre a quantidade de laranjeiras existentes num determinado dia e a quantidade que existia no dia anterior. Assim, o aluno partiu do princípio de que essa diferença equivale à quantidade que o fazendeiro plantou no dia considerado.

Para melhor explorar o modelo, o aluno recorreu à folha de cálculo onde, a partir da visualização numérica dos resultados, observou os primeiros atributos do modelo. A partir dessa descoberta, fez um melhoramento do modelo e a devida matematização, ao conceber um critério de obtenção dos termos subsequentes da sucessão a partir de cada último termo conhecido. Socorrendo-se outra vez da folha de cálculo, o aluno fez a aplicação do modelo com a nova formulação, obtendo assim mais termos da sucessão das quantidades plantadas em cada dia e, deste modo, resolveu a questão.

Um resumo da análise da resolução da alínea A1)

Veja-se a seguir uma resenha dos resultados da análise produzida, à luz de cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 57).

Tabela 57: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4 /Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Inicialmente mobiliza registos verbais e icónicos; seguidamente converte os registos icónicos em numéricos, tendo em atenção os dados da situação proposta.	*Inicia a construção do seu modelo ao criar uma sucessão numérica formada pelas quantidades de laranjeiras existentes nos primeiros três dias, tendo em atenção os dados da situação proposta*
Faz tratamentos dos registos numéricos e passa a obter registos numéricos que representam as quantidades de laranjeiras que o fazendeiro plantou em cada dia	*Considera a diferença entre a quantidade de laranjeiras existentes e a quantidade que existia no dia anterior, reconhecendo que a diferença representa a quantidade que o fazendeiro plantou em cada dia*
A partir dos registos numéricos, identifica um padrão numérico	*Recorre à folha de cálculo para explorar os primeiros atributos do modelo*
Faz alguns tratamentos de registos numéricos, considerando o padrão que descobriu	*Faz um aprimoramento do modelo, ao conceber um critério de obtenção dos termos subsequentes da sucessão a partir de cada último termo conhecido*
Insere na folha de cálculo uma fórmula que permitiu efetuar tratamentos de forma automática; mobiliza combinadamente registos verbais e numéricos para representar os resultados e referir o significado dos mesmos	*Recorrendo de novo à folha de cálculo o aluno, faz a aplicação do modelo reformulado, obtendo mais termos da sucessão das quantidades plantadas e resolve a questão*

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos para reinterpretar a situação e, valendo-se de conhecimentos prévios, decidiu experimentar tratamentos tendo em conta a relação conhecida como termo geral de uma PA; desta feita, introduziu uma fórmula que de facto lhe permitiu efetuar tratamentos de forma automática e constatou que à exceção do primeiro resultado, os demais resultados obtidos são termos da sucessão obtida na resolução da alínea A1). Considerando a fórmula que permitiu efetuar os tratamentos, o aluno mobilizou registos algébricos para representar a sucessão e estabeleceu uma condição inicial específica. Para finalizar a atividade, o aluno mobilizou, de forma combinada, registos verbais e algébricos para exprimir o raciocínio desenvolvido ao longo da sua atividade e registou no papel o registo algébrico e a condição inicial que considerou.

Análise da alínea A2) na perspetiva da M&M

Tendo em atenção que a tarefa proposta na alínea A2) é logicamente a continuação da tarefa proposta na alínea A1), o Aluno 2 continuou a exploração dos dados numéricos obtidos na folha de cálculo através da aplicação do modelo que resultou da resolução da alínea A1). Esta exploração permitiu-lhe conjeturar que a sucessão em estudo era uma PA, recorrendo a seus conhecimentos prévios, depois de experimentar a inserção da fórmula de uma PA na folha de cálculo, constatou que havia algumas inconformidades e teceu algumas considerações para que o modelo se ajustasse aos dados e apresentou uma versão algébrica do modelo.

A versão algébrica apresentada consiste numa simbologia matematicamente não habitual embora logicamente correta. A respeito de episódios como este, na perspetiva de M&M, tal como se pode interpretar em Lesh et al (2003). é importante que os alunos tenham oportunidade de desenvolver modelos próprios para a representação da situação problemática e que estes modelos vão sendo progressivamente mais ajustados à linguagem matemática formal e aos processos de representação institucionalizados na sala de aula.

Importa referir que o aluno, mesmo conhecendo previamente o conceito de PA, em primeira instância não o aplicou na sua conceção do modelo. Provavelmente este facto decorre da influência da utilização da folha de cálculo.

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

Uma súmula das interpretações produzidas atrás, em função de cada uma das perspetivas teóricas, é proposta na tabela 58.

Tabela 58: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4 /Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobiliza registos numéricos para reinterpretar a situação	*Continua a exploração dos dados numéricos obtidos na folha de cálculo através da aplicação do modelo que resultou da resolução da alínea A1)*
Faz experimentalmente alguns tratamentos, tendo em conta a relação conhecida como termo geral de uma PA	*A exploração do modelo leva à conjetura de que a sucessão em estudo é uma PA; aplica experimentalmente este modelo matemático e testa a sua aplicabilidade na situação proposta*
Introduz uma fórmula na folha de cálculo que lhe permite efetuar tratamentos de forma automática	*Aplica o modelo, recorrendo à folha de cálculo enquanto meio representacional*
Mobiliza, de forma combinada, registos verbais e algébricos para exprimir as suas conclusões e faz um registo algébrico em que destaca a condição inicial considerada	*Tece algumas considerações sobre o ajuste do modelo e apresenta a versão algébrica do modelo*

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos para reinterpretar a situação, tendo em conta os aspetos específicos sugeridos na alínea B1). Tendo notado um padrão nos registos numéricos, efetuou tratamentos alternativos inicialmente de forma experimental e tendo em atenção o padrão que observou. Depois inseriu uma fórmula na folha de cálculo lhe que permitiu efetuar tratamentos de forma automática.

Para explicar a obtenção da resposta, analiticamente, o aluno começou por mobilizar registos numéricos e evidenciou os tratamentos de registos numéricos que efetuou. Posteriormente, mobilizou registos verbais para exprimir as premissas consideradas e as analogias tidas em conta para efetuar as conversões de registos numéricos para algébricos.

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da M&M

O Aluno 2, à semelhança dos processos que utilizou nas alíneas anteriores, prosseguiu com a exploração dos modelos na folha de cálculo para procurar a resposta à alínea B1). Deste modo, o aluno concebeu um modelo ao descobrir um novo padrão e ao destacar que cada um dos termos de uma das sucessões obtidas na alínea A1) pode ser escrito sob a forma de uma soma constituída por um quadrado perfeito seguido de um número impar maior que 1. Usando os seus conhecimentos prévios sobre números ímpares e quadrados perfeitos, refinou a matematização do modelo, ao elaborar e inserir na folha de cálculo uma fórmula mais completa que lhe permitiu obter as quantidades das laranjeiras que existirão na fazenda em função do número de dias.

Referenciando algumas possibilidades de reutilização combinada de modelos criados anteriormente, para explicar a sua resolução, o aluno enfatizou os aspetos a melhorar no modelo e conseguiu obter a versão algébrica do modelo que inseriu na folha de cálculo.

Para apresentar algebricamente o seu modelo, não fez a simples adaptação da versão inserida na folha de cálculo, mas optou por ajustar e reutilizar um modelo que criou de forma consistente com a situação proposta.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B1) e B2)

Propõe-se adiante uma síntese dos principais resultados extraídos dos dados, de acordo com as perspetivas teóricas adotadas (Tabela 59).

Tabela 59: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B1 e B2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4/Aluno 2)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Mobiliza registos numéricos para reinterpretar a situação e identifica um padrão</td><td>Faz a exploração dos modelos expressos numericamente na folha de cálculo</td></tr>
<tr><td>Concebe um modelo, ao descobrir outro padrão relacionado com a sucessão obtida na alínea A1)</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos numéricos, de forma experimental, tendo em atenção o padrão que observou</td><td rowspan="2">Refina o modelo, ao elaborar e inserir na folha de cálculo uma fórmula mais completa que representa as quantidades das laranjeiras que existirão na fazenda em função do número de dias transcorridos</td></tr>
<tr><td>Insere uma fórmula na folha de cálculo que permite efetuar tratamentos de forma automática, tendo em conta o padrão observado</td></tr>
<tr><td>Para explicar a obtenção da resposta analiticamente, o aluno começa por mobilizar registos numéricos</td><td rowspan="2">Considera os aspetos a aprimorar no modelo a reutilizar</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos de registos numéricos</td></tr>
</table>

Mobiliza registos verbais para exprimir as premissas consideradas e as analogias tidas em conta para efetuar conversões de registos numéricos para algébricos	*Sugere a possibilidade de reutilização combinada de modelos criados anteriormente*
Faz as conversões de registos numéricos para algébricos.	*Combina os modelos e consegue obter a versão algébrica do modelo*

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos icónicos sugeridos pela situação, fez a devida interpretação e descortinou elementos matemáticos subjacentes, além de que mobilizou registos numéricos para representar os elementos relevantes para tratar a questão. No seu processo de pensamento, mobilizou registos verbais e combinou-os com registos numéricos para efetuar tratamentos de registos numéricos. Considerando o critério adotado para efetuar os tratamentos realizados, o aluno inseriu na folha de cálculo uma fórmula que possibilitou cálculos automáticos e, em seguida, mobilizou um registo algébrico para representar a sucessão das áreas que estarão plantadas em função do número de dias transcorridos.

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da M&M

Tendo em conta os dados sugeridos pela situação, o aluno fez a reutilização dos modelos inerentes a relação existente entre o lado e a área do quadrado. E recorrendo à folha de cálculo iniciou a realização dos cálculos de forma não automática; de seguida, matematizou o modelo introduzindo uma fórmula para o termo geral que permitiu calcular os quadrados perfeitos, que segundo a situação sugerida corresponderiam à área plantada em função de número de dias. Assim deu por resolvida a situação proposta. Seguidamente, para expressar o modelo algebricamente, recorreu a uma expressão geral para o cálculo dos quadrados de números naturais.

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1) e C2)

Relativamente às interpretações da atividade desenvolvida nestas duas questões, a tabela 60 apresenta uma análise paralela entre as duas perspetivas adotadas.

Tabela 60: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1 e C2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4/Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	***Na perspetiva de M&M***
Mobiliza os registos icónicos sugeridos pela situação e faz a devida interpretação dos elementos matemáticos subjacentes	*Faz a reutilização de modelos para considerar a relação entre o lado e a área do quadrado*
Mobiliza registos numéricos para representar elementos da situação	
Mobiliza registos verbais e combina-os com registos numéricos para representar tratamentos de registos numéricos	*Recorre à folha de cálculo e generaliza o modelo, introduzindo uma fórmula de termo geral que permite calcular a área com laranjeiras em função do número de dias*
Considera o critério adotado para efetuar os tratamentos usa a folha de cálculo para	

realizar tratamentos de forma automática	
Mobiliza um registo algébrico para representar a sucessão das áreas plantadas em função do número de dias transcorridos	*Utiliza uma expressão geral para o cálculo dos quadrados de números naturais*

Análise das alíneas D1), D2) e E) na perspetiva da TRRS

O aluno fez a mobilização de registos numéricos que representam objetos matemáticos resultantes das resoluções das alíneas B1) e C1); fez ainda o tratamento dos registos numéricos. E para a resolução analítica, o aluno mobilizou os registos algébricos que representam os objetos matemáticos restantes da resolução das alíneas B2) e C2). Fez o devido tratamento e obteve uma relação que representa a sucessão resultante da combinação dos resultados obtidos nas alíneas B1) e C2).

Converteu os registos numéricos, que descrevem a sucessão da densidade de laranjeiras como função dos dias, num registo gráfico e mobilizou registos verbais para descrever as características de convergência da sucessão da densidade, conforme a questão proposta.

Análise das alíneas D1), D2) e E) na perspetiva da M&M

Fazendo a interpretação da situação, o aluno fez a devida combinação dos modelos obtidos nas alíneas B1) e C1) (ou seja, número de laranjeiras e área de plantação, ao longo dos dias) e combinando cada termo da primeira sucessão com o seu equivalente da segunda sucessão, obteve o modelo desejado expresso numericamente (isto é, obteve os valores numéricos da densidade). Para obter o modelo analiticamente, reutilizou de forma combinada os modelos apresentados nas alíneas B2) e C2). Ao apresentar a resposta o aluno assumiu ter reutilizado o modelo criado nas alíneas B2 e C1), talvez por ter considerado que o modelo apresentado em C1) é o mesmo que o apresentado em C2) embora com outro registo de representação.

Para inferir sobre a tendência dos termos da sucessão, o aluno representou graficamente os termos da sucessão obtida na alínea D1). Seguidamente fez a leitura do gráfico e da tabela, enfatizando a tendência dos termos e as devidas considerações sobre a convergência.

Um resumo da análise da resolução das alíneas D1), D2) e E)

A resenha das ideias extraídas sob cada um dos pontos de vista teóricos é apresentada na tabela 61.

Tabela 61: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas D1, D2 e E segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4 /Aluno 2)

Na perspetiva de TRRS	**Na perspetiva de M&M**
Mobiliza registos numéricos que representam objetos matemáticos resultantes das resoluções das alíneas B1) e C1) e faz tratamento dos registos numéricos	*Faz a devida combinação dos modelos obtidos nas alíneas B1) e C1) e obtém o modelo pretendido expresso numericamente*
Mobiliza os registos algébricos que representam os objetos matemáticos restantes da resolução das alíneas B2) e C2)	*Para representar o modelo analiticamente, reutiliza de forma combinada os modelos algébricos apresentados nas alíneas B2) e C2)*
Faz o devido tratamento e obtém a sucessão resultante a partir dos resultados obtidos nas alíneas B1) e C2).	
Converte os registos numéricos em registo gráfico	*Representa graficamente os termos da sucessão; seguidamente faz a leitura do gráfico, enfatizando a tendência dos termos e a sua interpretação relacionada com a convergência*
Mobiliza registos verbais para analisar as características da sucessão da densidade quanto à convergência	

5.2.9 Resolução da Tarefa 5 - O coração: "Diástole e Sístole"

O Aluno 2 iniciou a tarefa (Anexo 8), escolhendo os valores 1 e 2 para diástole e sístole respetivamente e comentou que escolheu o valor 1 diástole para por ser o primeiro momento e escolheu o valor 2 para sístole por ser o segundo momento do ciclo cardíaco. O aluno introduziu estes registos numéricos na folha de cálculo, colocando alternadamente as palavras Diástole e Sístole na coluna B e os números ora escolhidos, 1 e 2, na coluna C, conforme mostra a figura 130.

	A	B	C	D
1				
2		Diastoloe	1	
3		Sistole	2	
4		Diastoloe	1	
5		Sistole	2	
6		Diastoloe	1	
7		Sistole	2	
8		Diastoloe	1	
9		Sistole		
10		Diastoloe		

Figura 130: Construção da sucessão alternada sugerida pelo Aluno 3, para representar diástole e sístole

Resolução da alínea A

Depois ter registado os termos na folha de cálculo, o aluno procurou algum critério para obter alternadamente os números 1 e 2, no âmbito da busca de um padrão. Experimentou assim escrever os números 1 e 2 como quocientes da divisão de 4 por 4 e de 4 por 2, este trabalho foi feito na folha de cálculo, tal como mostra a figura 131.

	A	B	C	D	E
1					
2		Diastoloe	1		=4/4
3		Sistole	2		
4		Diastoloe	1		
5		Sistole	2		
6		Diastoloe	1		
7		Sistole	2		
8		Diastoloe	1		
9		Sistole	2		

	A	B	C	D	E
1					
2		Diastoloe	1		
3		Sistole	2		=4/2
4		Diastoloe	1		
5		Sistole	2		
6		Diastoloe	1		
7		Sistole	2		
8		Diastoloe	1		
9		Sistole	2		

Figura 131: Obtenção intuitiva da sucessão alternada através de divisão

Prosseguindo esta ideia, considerou que em todos os casos o dividendo 4 será sempre o mesmo, pelo que pensou obter alternadamente o 4 e o 2 como divisor. Foi então que lhe ocorreu a ideia de buscar um critério para escrever alternadamente 4 e 2, considerando que 4=3+1 e 2=3-1. Constatou que estas igualdades podem ser escritas com facilidade pois uma característica que as distingue prende-se com os sinais + e – (mais e menos) que devem ser utilizados alternadamente. Decidiu introduzir estas ideias na folha de cálculo, utilizando diversas colunas. Na coluna G escreveu repetidamente o número 4, na coluna H escreveu reiteradamente o número 3 e ao longo da coluna I, a partir da célula I2, escreveu alternadamente os números 1 e -1, Na coluna K, inseriu uma fórmula para somar as células das colunas H e I, tendo daí resultado os números 4 e 2, alternadamente (Fig. 132).

	G	H	I	J	K
1					
2	4	3	1		=H2+I2
3	4	3	-1		
4	4	3	1		
5	4	3	-1		
6	4	3	1		
7	4	3	-1		
8	4	3	1		
9	4	3	-1		
10	4	3	1		
11	4	3	-1		

	G	H	I	J	K
1					
2	4	3	1		4
3	4	3	-1		2
4	4	3	1		4
5	4	3	-1		2
6	4	3	1		4
7	4	3	-1		2
8	4	3	1		4
9	4	3	-1		2
10	4	3	1		4
11	4	3	-1		2

Figura 132: Obtenção intuitiva da sucessão alternada através de soma

A seguir, inseriu a fórmula “=G2/K2” na célula M2 e ao arrastar esta fórmula ao longo da coluna, obteve efetivamente os termos da sucessão alternada que escreveu no início da atividade (Fig. 133). Reconhece-se, ao longo desta etapa, uma certa dificuldade do Aluno 2 em encontrar uma forma automática de gerar termos alternados ao longo de uma coluna da folha de cálculo.

	G	H	I	J	K	L	M
1							
2	4	3	1		4		=G2/K2
3	4	3	-1		2		
4	4	3	1		4		
5	4	3	-1		2		
6	4	3	1		4		
7	4	3	-1		2		

	G	H	I	J	K	L	M
1							
2	4	3	1		4		1
3	4	3	-1		2		2
4	4	3	1		4		1
5	4	3	-1		2		2
6	4	3	1		4		1
7	4	3	-1		2		2

Figura 133: Obtenção intuitiva da sucessão alternada através da divisão (automatizada)

Depois desta etapa, o aluno procurou resumir todas as fórmulas até então utilizadas nesta tarefa. Foi então que fez muitas experiências na folha de cálculo e, como era de esperar, nem todas foram bem-sucedidas (Fig. 134). Por exemplo, uma dessas experiências teve como resultado o quociente entre 4 e 3, devido ao modo como foi definido o expoente de uma potência de base -1.

O	P	Q	R
	Cic	Diast e Sist	
ou	n	un=4/(3+(-1)^n+1)	
	1	=4/(3+(-1)^p3+1)	
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		

O	P	Q	R
	Cic	Diast e Sist	
ou	n	un=4/(3+(-1)^n+1)	
	1	1,333333333	
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		

Figura 134:Tentativas de inserção de uma fórmula geral para a obtenção da sucessão inicialmente proposta

No final das várias tentativas, o aluno conseguiu escrever uma única fórmula que permitiu obter cada termo em função da ordem, tal como mostra a figura 135. Neste caso, o termo geral da sucessão geradora dos valores alternados 1 e 2 foi definido pela expressão $u_n = \frac{4}{3+(-1)^{n+1}}$, isto é, o aluno optou por obter estes valores como resultados de uma divisão, ainda que esta implique o uso de uma soma com a potência $(-1)^{n+1}$.

	A	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1											Cic	Diast e Sist
2		4	3	1		4		1		ou	n	un=4/(3+(-1)^n+1)
3		4	3	-1		2		2			1	=4/(3+(-1)^(P3+1)
4		4	3	1		4		1			2	
5		4	3	-1		2		2			3	
6		4	3	1		4		1			4	
7		4	3	-1		2		2			5	

	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1										Cic	Diast e Sist
2	4	3	1		4		1		ou	n	un=4/(3+(-1)^n+1)
3	4	3	-1		2		2			1	1
4	4	3	1		4		1			2	2
5	4	3	-1		2		2			3	1
6	4	3	1		4		1			4	2
7	4	3	-1		2		2			5	1

Figura 135: Inserção de uma fórmula geral para a obtenção da sucessão inicialmente proposta

Depois destas tentativas, o aluno registou no papel os termos da sucessão conforme se pode ver na figura 136. Como se nota, na resposta do aluno, há uma intenção de obter os termos da sucessão alternada a partir de quocientes.

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots$$

$$\frac{4}{4} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{4}{4}, \frac{4}{2} \ldots$$

$$\frac{4}{3+1}; \frac{4}{3+(-1)}; \frac{4}{3+1}; \frac{4}{3+(-1)}; \ldots \frac{4}{3+(-1)^{n+1}}$$

$$A) \; u_n = \frac{4}{3+(-1)^{n+1}}$$

Figura 136: Registo dos principais procedimentos para a obtenção do termo geral da sucessão proposta pelo Aluno 2

Resolução da alínea B

Para se pronunciar acerca da monotonia da sucessão o aluno decidiu recorrer a gráficos que a propósito inseriu na folha de cálculo. O primeiro gráfico que inseriu, apenas de pontos, parece não ter ajudado a clarificar a questão para o aluno (Fig. 137). Os pontos surgiram dispostos sobre duas linhas horizontais.

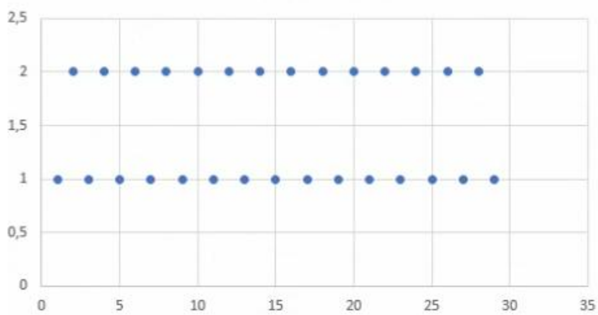


Figura 137: Gráfico da sucessão alternada proposta pelo Aluno 2

O aluno tentou apontar o cursor ao longo do gráfico mas não concluiu nada e foi então que inseriu um segundo gráfico, de um tipo diferente, ou seja, um gráfico de linhas. Com este novo gráfico, o aluno parece ter reconhecido a forma como a sucessão ora crescia ora decrescia (Fig. 138).

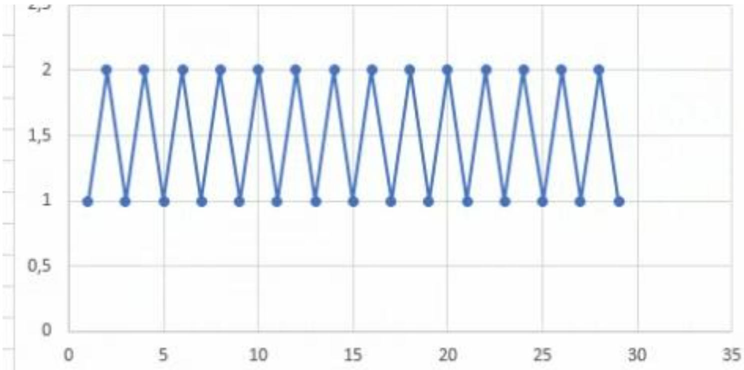


Figura 138: Gráfico melhorado da sucessão alternada proposta pelo Aluno 2

Desta vez, passando o cursor ao longo do gráfico, o aluno teceu as seguintes considerações:

> "A sucessão varia, cresce e decresce. No gráfico são visíveis as subidas e descidas".

Resolução da alínea C1

O aluno calculou as médias dos termos consecutivos, depois de ter registado a ideia no papel. Recorrendo à folha de cálculo, inseriu a devida fórmula na coluna S3 e arrastou para obter as médias pretendidas (Fig. 139).

	P	Q	R	S
1		Diast e Sist		
2		un=4/(3+(-1)^n+1)		
3	1	1		=(Q3+Q4)/2
4	2	2		
5	3	1		
6	4	2		
7	5	1		
8	6	2		
9	7	1		
10	8	2		
11	9	1		
12	10	2		

	P	Q	R	S
1		Diast e Sist		
2		un=4/(3+(-1)^n+1)		vn
3	1	1		1,5
4	2	2		1,5
5	3	1		1,5
6	4	2		1,5
7	5	1		1,5
8	6	2		1,5
9	7	1		1,5
10	8	2		1,5
11	9	1		1,5
12	10	2		1,5

Figura 139: Cálculo das médias dos termos consecutivos da sucessão alternada proposta pelo Aluno 2

Em seguida, registou no papel os resultados, conforme se pode ver na figura 140, em que usa vários termos consecutivos para chegar à conclusão de que a sucessão pretendida era constante, com os termos todos iguais a 1,5.

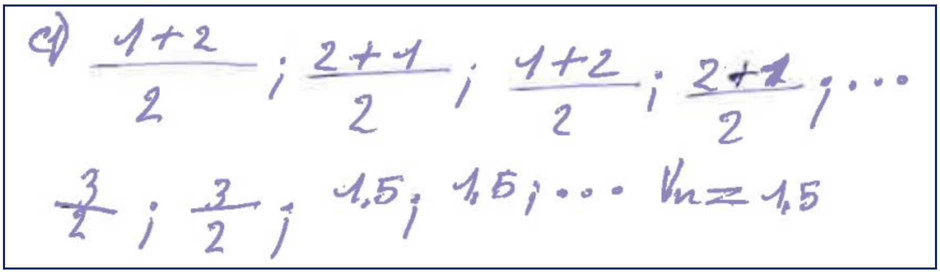


Figura 140: Registo da obtenção de uma sucessão constante

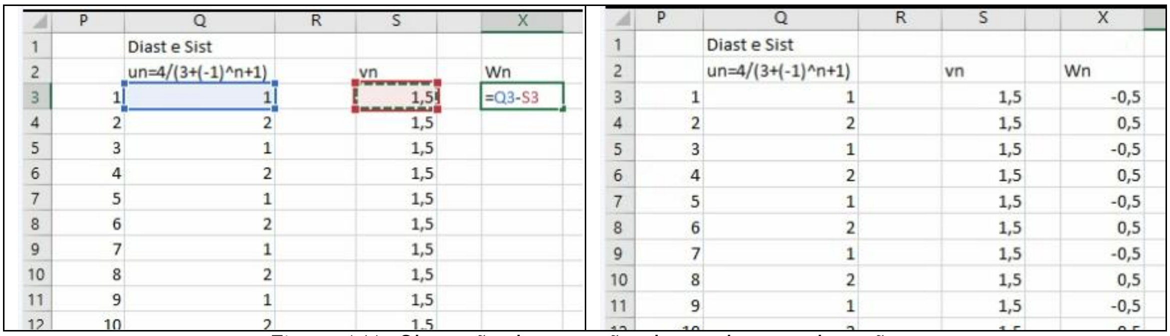
Resolução da alínea C2

Ao caracterizar a sucessão, o aluno referiu que:

> “A sucessão é convergente, quanto a monotonia é constante, o majorante e o minorante é 1,5 e é uma sucessão limitada”.

Resolução da alínea D1

Para calcular a sucessão da diferença entre as sucessões U_n e V_n, o aluno recorreu à folha de cálculo, inserindo a necessária fórmula na célula X3 e arrastando ao longo da coluna (Fig. 141). Obteve assim uma sucessão alternada, de termos -0,5 e +0,5, alternadamente positivos e negativos.



	P	Q	R	S	X
1		Diast e Sist			
2		un=4/(3+(-1)^n+1)		vn	Wn
3	1	1		1,5	=Q3-S3
4	2	2		1,5	
5	3	1		1,5	
6	4	2		1,5	
7	5	1		1,5	
8	6	2		1,5	
9	7	1		1,5	
10	8	2		1,5	
11	9	1		1,5	
12	10	2		1,5	

	P	Q	R	S	X
1		Diast e Sist			
2		un=4/(3+(-1)^n+1)		vn	Wn
3	1	1		1,5	-0,5
4	2	2		1,5	0,5
5	3	1		1,5	-0,5
6	4	2		1,5	0,5
7	5	1		1,5	-0,5
8	6	2		1,5	0,5
9	7	1		1,5	-0,5
10	8	2		1,5	0,5
11	9	1		1,5	-0,5

Figura 141: Obtenção de sucessão alternada por subtração

Registou os resultados e constatou que seria possível considerar as potências de (-1) para obter uma forma de escrever o termo geral dessa sucessão (Fig. 142).

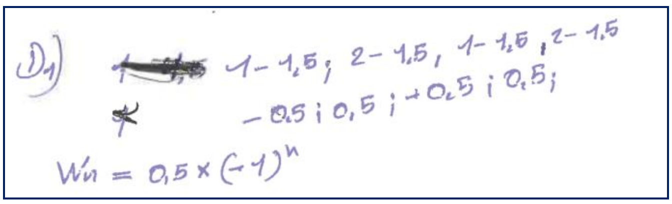


Figura 142: Registo da obtenção de sucessão alternada por subtração e do termo geral desta

Importa ainda referir que antes de registar o termo geral no papel, o aluno testou-o na folha de cálculo conforme mostra a figura seguinte (Fig. 143).

	X	Y	Z	AA
1				
2	Wn		n	Wn
3	-0,5		1	=0,5*(-1)^Z3
4	0,5		2	
5	-0,5		3	
6	0,5		4	
7	-0,5		5	
8	0,5		6	
9	-0,5		7	

	X	Y	Z	AA
1				
2	Wn		n	Wn
3	-0,5		1	-0,5
4	0,5		2	0,5
5	-0,5		3	-0,5
6	0,5		4	0,5
7	-0,5		5	-0,5
8	0,5		6	0,5
9	-0,5		7	-0,5

Figura 143: Teste do termo do termo geral da sucessão alternada obtida

Resolução da alínea D2

Por último, para caracterizar a sucessão W_n, o Aluno 2 recorreu novamente a um gráfico conforme mostra a figura 144. Desta vez, optou logo por um gráfico de linhas e isso evidenciou bem o facto de se tratar de uma sucessão não monótona.

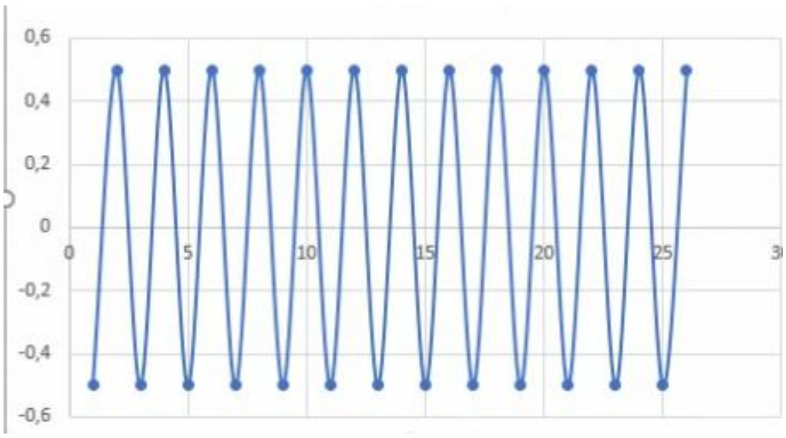


Figura 144: Gráfico da sucessão da sucessão alternada obtida

O aluno, enquanto passava o cursor em diversos pontos e linhas do gráfico, proferiu as seguintes conclusões que encerraram a sua atividade na tarefa:

> "A sucessão é divergente, o majorante é 0,5, o minorante é -0,5, a sucessão é limitada".

5.2.10 Análise e Interpretação da Tarefa 5

Análise das alíneas A) e B) na perspetiva da TRRS

O Aluno 2 mobilizou registos numéricos para representar as duas fases ciclo cardíaco sugerido na situação. Mobilizou também registos verbais para justificar a escolha dos registos numéricos que utilizou para representar a sístole e a diástole. E continuou a mobilização de registos numéricos para construir o objeto matemático que traduzia a situação.

Posteriormente, mobilizou novos registos numéricos para reinterpretar a situação e procurou descobrir um padrão numérico que pudesse ser aplicado para descrever a sucessão alternada; para tal, experimentou alguns tratamentos na folha de cálculo.

Depois de alguns tratamentos de registos numéricos feitos criteriosamente, o aluno encontrou um padrão numérico e, considerando esse padrão, inseriu fórmulas na folha de cálculo que lhe permitiram obter de forma automática os termos da sucessão alternada. Além disso, combinando e aproveitando a estrutura das fórmulas que introduziu na folha de cálculo, o aluno mobilizou registos algébricos para representar a sucessão construída no início da atividade.

Para caraterizar a monotonia da sucessão, o aluno fez a conversão de registos numéricos num registo gráfico mas pareceu não aproveitar este registo para visualizar a monotonia da sucessão. De novo, usando as potencialidade da folha de calculo efetuou um tratamento do registo gráfico e depois de alterar a sua apresentação, o aluno conseguiu interpretar os atributos da sucessão, pelo que mobilizou registos verbais para descrever as características da sucessão no que respeita à monotonia.

Análise das alíneas A) e B) na perspetiva da M&M

Ao iniciar a modelação da situação apresentada na tarefa, o aluno começou por atribuir valores numéricos aos dois estados do ciclo cardíaco; escolheu o número 1 para diástole e 2 para sístole, diretamente na folha de cálculo, onde formou uma sucessão alternada, ao repetir de forma intercalada, os números 1 e 2. A exploração desta sucessão numérica levou-o a criar um modelo para obter alternadamente os números 1 e 2. A formulação do seu modelo iniciou-se com a hipótese de escrever os números 1 e 2 como resultados da divisão de 4 por 4 e de 4 por 2. Para mostrar a consistência do modelo, tendo em atenção que o dividendo 4 é invariante, o aluno concebeu um modelo auxiliar que consiste em usar um processo para escrever alternadamente 4 e 2. Para o efeito, considerou as operações aritméticas: 4=3+1 e 2=3-1. Constatou que nas duas igualdades os sinais + e – (mais e menos) terão de ser utilizados alternadamente.

Para concretizar os modelos auxiliares na folha de cálculo, o aluno experimentou várias fórmulas e conseguiu ter sucesso depois que reutilizou o modelo da sucessão alternada de potências de base -1, como segunda parcela. Este professo levou-o a um dos modelos auxiliares para considerar as alternativas 4=3+1 e 2=3-1. A concatenação destes modelos auxiliares permitiu-lhe refinar o modelo principal e, assim, o aluno escreveu matematicamente o termo geral da sucessão alternada.

Para melhor explicitar e interpretar as principais características da sucessão numérica, recorreu a uma representação gráfica. Porém, o primeiro gráfico inserido teve que ser modificado para ajudar o aluno a tecer considerações pertinentes sobre a monotonia da sucessão.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e B)

Na tabela que se segue, indicam-se as ideias centrais resultantes das análises anteriores (Tabela 62).

Tabela 62: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas A e B segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 5/Aluno 2)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos para representar as duas fases do processo sugerido na situação</td><td rowspan="3">Para modelar a situação começa por atribuir valores para a diástole e para a sístole, trabalhando diretamente na folha de cálculo, onde criou uma sucessão alternada de termos 1 e 2</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para justificar a escolha dos registos numéricos que mobilizou</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos para produzir o objeto matemático sugerido pela situação</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos numéricos para reinterpretar a situação e procura um padrão numérico, realizando alguns tratamentos numéricos na folha de cálculo</td><td>Constrói um modelo para obter alternadamente os números 1 e 2; concebe um modelo auxiliar em que os sinais + e - (mais e menos) são utilizados alternadamente</td></tr>
<tr><td>Faz tratamentos de registos numéricos e descobre um padrão numérico</td><td>Para concretizar os modelos auxiliares na folha de cálculo, experimenta várias fórmulas, chegando à sucessão alternada de potências de base -1</td></tr>
<tr><td>Considerando o padrão numérico, efetua tratamentos de registos numéricos através da fórmula que inseriu na folha de cálculo</td><td>A concatenação de modelos auxiliares permite-lhe refinar o modelo principal</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos algébricos para representar a relação que representa a sucessão criada no início da tarefa.</td><td>Representa matematicamente o termo geral da sucessão alternada</td></tr>
<tr><td>Faz a conversão de registos numéricos num registo gráfico</td><td rowspan="3">Recorre a uma representação gráfica, fazendo modificações na sua apresentação que sustentam considerações pertinentes sobre a monotonia da sucessão</td></tr>
<tr><td>Faz o tratamento do registo gráfico</td></tr>
<tr><td>Mobiliza registos verbais para identificar atributos da sucessão construída</td></tr>
</table>

Análise das alíneas C1), C2), D1) e D2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos que representam os termos da sucessão inicialmente formulada e, considerando os termos consecutivos, efetuou a transformação dos registos numéricos. Este procedimento permitiu-lhe conceber uma fórmula que inseriu na folha de cálculo e que levou, de forma automática, a diversos tratamentos que resultaram numa nova sucessão constante.

Para caracterizar o objeto matemático resultante, o aluno mobilizou registos verbais para sublinhar os principais atributos da sucessão constante obtida.

No seguimento da tarefa, o aluno mobilizou registos numéricos, recorrendo diretamente à folha de cálculo, onde inseriu uma fórmula que lhe permitiu efetuar os devidos tratamentos de registos numéricos. Assim, obteve um conjunto de valores, que registou no papel, evidenciando o tratamento levado a cabo para a obtenção de cada elemento. Depois, o aluno mobilizou registos algébricos para representar um tratamento que levaria à mesma sucessão. Considerando os registos algébricos mobilizados, o aluno inseriu uma fórmula na folha de cálculo e através desta obteve o mesmo conjunto de registos numéricos encontrados anteriormente.

Para terminar a resolução da tarefa, o aluno converteu o conjunto de registos numéricos num registo gráfico que lhe permitiu visualizar e descrever as propriedades da sucessão.

Análise das alíneas C1), C2), D1) e D2) na perspetiva da M&M

O aluno iniciou a construção do modelo utilizando sincronizadamente os elementos consecutivos resultantes da aplicação do modelo obtido na alínea A), e obteve um modelo que seguidamente inseriu na folha de cálculo. Aproveitando os resultados provenientes da implementação do modelo, o aluno representou o modelo analiticamente.

Depois de uma observação dos resultados da aplicação do modelo, o aluno descreveu o modelo, tecendo as devidas considerações sobre os principais atributos do mesmo.

O aluno continuou a resolução, combinando elementos dos dois modelos obtidos nas alíneas anteriores e para o efeito recorreu diretamente a folha de cálculo, obtendo uma resposta parcial da questão. O aluno prosseguiu com a atividade e constatou um padrão numérico nos resultados; reutilizando um pormenor que explorou aquando da resolução da alínea A), refinou o modelo tendo obtido uma versão mais explícita do modelo, pelo que passou a contar com uma nova versão algébrica. Para comprovar a conformidade matemática do modelo, o aluno inseriu na folha de cálculo uma fórmula e conseguiu obter os mesmos resultados obtidos com a aplicação da primeira versão, ficando assim validada a forma algébrica do modelo.

Recorrendo às funcionalidades da folha de cálculo como meio representacional, o aluno fez a visualização do modelo e, interpretando o resultado desta visualização, fez a descrição do modelo ao destacar as suas principais propriedades.

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1), C2), D1) e D2)

Apresentam-se, na tabela seguinte, os aspetos essenciais da análise efetuada, de acordo com cada uma das perspetivas teóricas (Tabela 63).

Tabela 63: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1, C2, D1 e D2, segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 5 /Aluno 2)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Mobilizou registos numéricos que representam os termos da sucessão inicial</td><td rowspan="2">Iniciou a construção do modelo utilizando sincronizadamente os elementos consecutivos resultantes da aplicação do modelo obtido na alínea A)</td></tr>
<tr><td>Efetuou transformações de registos numéricos,</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Concebeu uma fórmula que inseriu na folha de cálculo e que permitiu efetuar, de forma automática, diversos tratamentos e obteve consequentemente uma sucessão constante</td><td>Obteve um modelo que seguidamente inseriu na folha de cálculo</td></tr>
<tr><td>Aproveitando os resultados provenientes da implementação do modelo, o aluno representou o modelo analiticamente</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos verbais para caracterizar a sucessão resultante</td><td>Fez uma descrição do modelo, referindo os principais atributos do mesmo, com base nos resultados de aplicação do mesmo</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos numéricos, recorrendo à folha de cálculo, onde inseriu uma fórmula que permitiu efetuar tratamentos de registos numéricos e obteve um conjunto de valores</td><td rowspan="2">Combinou elementos dos dois modelos obtidos nas alíneas anteriores e recorreu diretamente à folha de cálculo, obtendo uma resposta parcial para a questão.</td></tr>
<tr><td>Registou o conjunto de valores em papel, evidenciando o tratamento levado a cabo para a sua obtenção</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos algébricos para obter a mesma sucessão</td><td>Constatou um padrão numérico nos resultados e reutilizando um pormenor que explorou a alínea A), refinou o modelo tendo obtido uma nova versão algébrica</td></tr>
<tr><td>Considerando os registos algébricos mobilizados, inseriu uma fórmula na folha de cálculo e através desta efetuou tratamentos de registos numéricos, obtendo o mesmo conjunto de registos numéricos anteriores</td><td>Inseriu na folha de cálculo uma fórmula que gerou os mesmos resultados obtidos com a aplicação da primeira versão, ficando assim validada a forma algébrica do modelo</td></tr>
<tr><td>Converteu registos numéricos num registo gráfico</td><td>Recorrendo às funcionalidades da folha de cálculo como meio representacional, fez a representação gráfica do modelo</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos verbais para indicar as características da sucessão representada graficamente</td><td>Interpretando o modelo visualizado, fez a descrição do mesmo, destacando as suas principais propriedades</td></tr>
</table>

5.3 Caso do Aluno 3

Nesta secção será apresentada inicialmente uma descrição global do trabalho realizado pelo Aluno 3 nas 5 tarefas propostas. Para cada uma das tarefas, serão identificadas as sucessivas alíneas e as resoluções produzidas pelo aluno. Seguidamente, é feita uma análise interpretativa do trabalho do aluno, em torno das questões colocadas, à luz da Teoria de Registos de Representações Semióticas e da Teoria de Modelos e Modelação, culminando num quadro que mostra o paralelismo entre os principais resultados extraídos segundo cada uma das perspetivas.

5.3.1 Resolução da Tarefa 1 – Jardim de roseiras

Resolução da alínea A

O Aluno 3, depois de ler e interpretar o problema (Anexo 4), começou por determinar a distância percorrida em cada percurso de ida; para tal, o aluno deduziu primeiramente a distância percorrida na primeira ida, determinando exatamente a distancia entre a fonte e a 3ª roseira, a mais distante das que foram regadas durante a primeira viagem (Fig. 145).

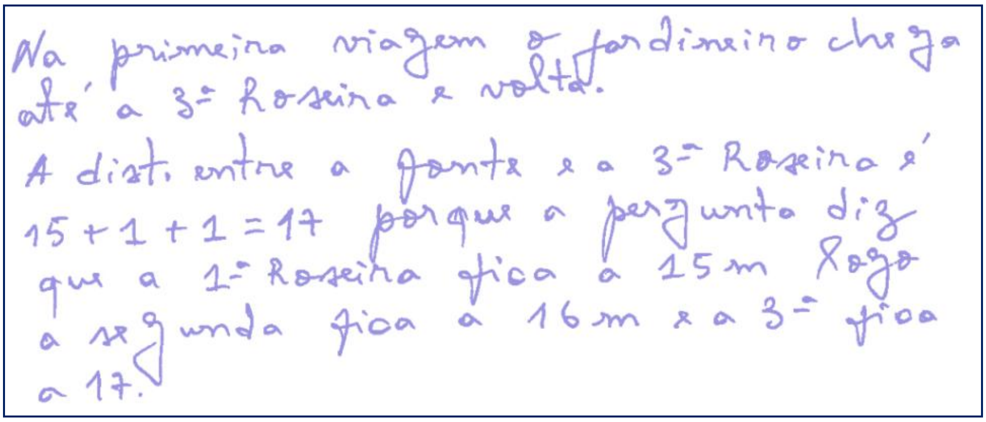

Na primeira viagem o jardineiro chega até a 3ª Roseira e volta.
A dist. entre a fonte e a 3ª Roseira é 15 + 1 + 1 = 17 porque a pergunta diz que a 1ª Roseira fica a 15 m logo a segunda fica a 16 m e a 3ª fica a 17.

Figura 145: Registo feito pelo Aluno 3 sobre a interpretação do problema do jardineiro

Depois desta dedução, o aluno recorreu a uma esquematização para facilitar a determinação das demais distâncias percorridas nas idas subsequentes; para tal, traçou uma semirreta onde, recorrendo a simbologia própria, representou as roseiras e utilizando segmentos paralelos à semirreta representou as distancias percorridas em cada ida; simultaneamente fez a respetiva determinação numérica das distâncias percorridas (Fig. 146).

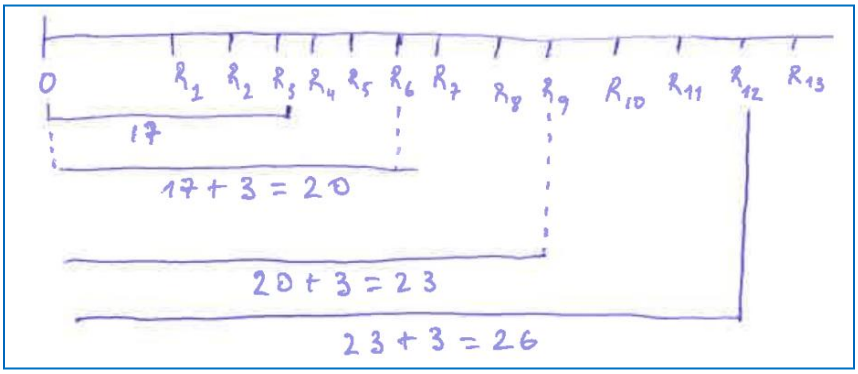


Figura 146: Esquema elaborado pelo Aluno 3 sobre a interpretação do problema do jardineiro

Depois da obtenção das distâncias percorridas nas idas, o aluno considerou as distâncias retornadas, pelo que adicionou cada distância percorrida na ida a si mesma. Para o efeito, recorreu à folha de cálculo, sendo que o aluno representou a sequência do número de idas no intervalo A2:A4 e as distancias percorridas nas idas no intervalo B2:B5, em que já se observa uma fórmula que relaciona cada distância com a distância anterior (=B3+3). Assim, as distâncias percorridas na 3ª e 4ª ida foram calculadas através de uma fórmula inserida pelo aluno. Depois, no intervalo C2:C5, o aluno inseriu outra fórmula que lhe permitiu calcular as distâncias percorridas nas primeiras viagens de ida e volta (Fig. 147).

	A	B	C	D
1			distancias	
2	1 ida	17	=B2+B2	
3	2 ida	20	=B3+B3	
4	3 ida	=B3+3	=B4+B4	
5		=B4+3	=B5+B5	

	A	B	C	D
1			distancias	
2	1 ida	17	34	
3	2 ida	20	40	
4	3 ida	23	46	
5		26	52	

Figura 147: Obtenção das distâncias percorridas pelo jardineiro nas sucessivas viagens

Depois deste trabalho na folha de cálculo, o aluno registou os resultados no papel, de uma de forma esclarecedora, revelando ainda a sua justificação para o cálculo da soma de cada distância percorrida na ida com ela mesma (Fig. 148).

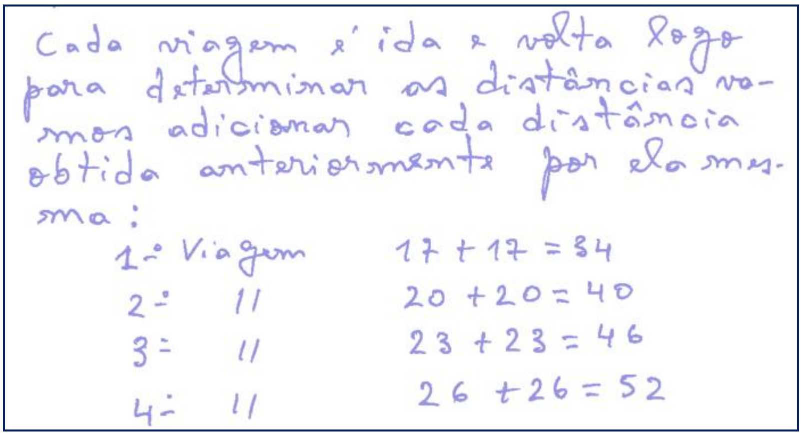


Figura 148: Registo da obtenção da sucessão das distâncias percorridas pelo jardineiro nas sucessivas viagens

Depois desta análise, o aluno fez novas explorações na folha de cálculo, observando que adicionando seis unidades a cada termo da sucessão, resultava outro termo da sucessão; fez este ensaio no intervalo E2:E4 e depois decidiu representar a sucessão nas colunas G e H; posteriormente, verificou as diferenças entre termos consecutivos na coluna I, obtendo um valor constante, igual a 6 (Fig. 149).

E	F	G	H	I
=34+6		b1=34	34	
=40+6		b2	=H2+6	=H3-H2
=E3+6		b3	=H3+6	=H4-H3
		b4	=H4+6	=H5-H4
		b5	=H5+6	=H6-H5
		b6	=H6+6	=H7-H6
		b7	=H7+6	=H8-H7

E	F	G	H	I
40		b1=34	34	
46		b2	40	6
52		b3	46	6
		b4	52	6
		b5	58	6
		b6	64	6
		b7	70	6

Figura 149: Obtenção recursiva da sucessão das distâncias percorridas pelo jardineiro nas sucessivas viagens

Resolução da alínea A1

O Aluno 3 respondeu parcialmente à alínea A1 ao resolver a alínea A, pois para essa questão praticamente lhe bastou indicar o critério utilizado para obter os termos da sucessão e assim escreveu algebricamente a fórmula que utilizou (Fig. 150).

A1 para obter cada termo subsequente basta adicionar 6 ao último termo conhecido $b_2 = b_1 + 6$, $b_3 = b_2 + 6$,
$b_4 = b_3 + 6$, $b_5 = b_4 + 6$
os índices são nº consecutivos
$b_n = b_{n-1} + 6$

Figura 150: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea A1 (Tarefa 1)

Resolução da alínea B

O Aluno 3 resolveu a alínea B, começando por reler o enunciado do problema e, recorrendo à folha de cálculo, usou o intervalo K2:L5 como ensaio para a obtenção da sucessão das quantidades de roseiras regadas, multiplicando por três a quantidade de viagens efetuadas. Aparentemente, depois de ter adquirido alguma segurança, o aluno reiniciou a elaboração da sucessão, de forma mais automatizada e calculou então mais termos no intervalo K8:L36 como se pode ver na figura 151.

J	K	L	M
	v1	3	
	v2	=2*3	
	V3	=3*3	
	V4	=4*3	
	Viagens	R Regadas	
	1	=3*K8	
	2	=3*K9	
	3	=3*K10	
	4	=3*K11	
	5	=3*K12	
	6	=3*K13	

K	L	M
v1	3	
v2	6	
V3	9	
V4	12	
Viage	R Regadas	
1	3	
2	6	
3	9	
4	12	
5	15	
6	18	

Figura 151: Obtenção da sucessão das quantidades totais de roseiras regadas em função das sucessivas viagens

Depois destes cálculos, o aluno registou no papel a ideia que norteou a obtenção de alguns termos da sucessão (Fig. 152).

B) em cada viagem o jardineiro rega 3 então é só multiplicar o número de viagens por 3.
$V_1 = 3$, $V_2 = 2.3 = 6$, $V_3 = 3.3 = 9$,
$V_4 = 4.3 = 12$

Figura 152: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea B (Tarefa 1)

Resolução da alínea B1

O aluno considerou que a questão já estava resolvida e, mais uma vez, aproveitou a oportunidade para aprofundar a explicação do pensamento que norteou a obtenção dos termos calculados, tendo depois explicitado, em linguagem formal, o termo geral da sucessão (Fig. 153).

B1) Tal como disse o nº de viagem é que se multiplica por 3. Se fez x viagens teremos $x.3 = 3x$ ou seja $V_x = 3x$ isto é $V_n = 3n$.

Figura 153: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea B1 (Tarefa 1)

Resolução da alínea C

O aluno respondeu acertadamente à questão, afirmando:

> “Os tipos de conjuntos obtidos nas alíneas A) e B) recebem o nome especial de sucessões numéricas ”.

Resolução da alínea D

O aluno respondeu corretamente à questão, dizendo:

> “Cada elemento destes conjuntos é designado como termo ”.

Resolução da alínea E

Para responder a esta alínea, o aluno optou por elaborar os gráficos das sucessões obtidas nas alíneas A e B (Fig. 154 e 1555); indicando com o cursor, referiu que as sucessões são crescentes e que as diferença entre os termos consecutivos de cada uma destas sucessões é uma constante, tendo explicitado a constante para cada caso (Fig. 156), depois de as calcular, recorrendo à folha de cálculo.

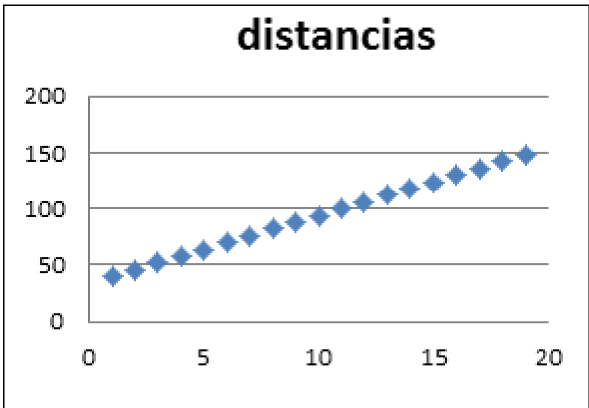


Figura 154: Gráfico da sucessão de distâncias percorridas durante as sucessivas viagens

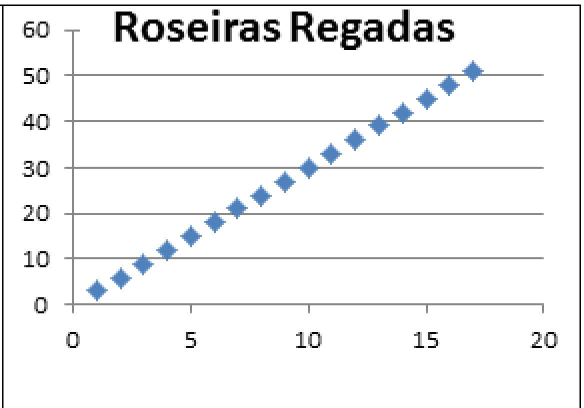


Figura 155: Gráfico da sucessão da quantidade total de roseiras regadas em função das viagens

E 1º pelo gráfico e tabela do excel é óbvio que as sucessões são crescentes e que a diferença de cada termo com o anterior (a partir do 2º).
Para a sucessão da alínea A a diferença é 6.
Para a sucessão da alínea B a diferença é 3.

Figura 156: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea E (Tarefa 1)

Resolução da alínea G

Para responder a esta alínea o aluno explorou as tabelas na folha de cálculo. A partir da tabela que elaborou enquanto resolvia as alíneas B e B1, destacou o termo igual a 60 e constatou que a ordem deste termo é 20. Então na tabela que elaborou quando resolveu as alíneas A e A1, selecionou os primeiros 20 termos, apagou os subsequentes e efetuou a soma desses termos através de uma fórmula que introduziu (Fig. 157).

	K	L	M
7	Viagens	R Regadas	
8	1	3	
9	2	6	
10	3	9	
11	4	12	
12	5	15	
13	6	18	
14	7	21	
15	8	24	
16	9	27	
17	10	30	
18	11	33	
19	12	36	
20	13	39	
21	14	42	
22	15	45	
23	16	48	
24	17	51	
25	18	54	
26	19	57	
27	20	60	
28	21	63	

	G	H
2	b1=34	34
3	b2	=H2+6
4	b3	=H3+6
5	b4	=H4+6
6	b5	=H5+6
7	b6	=H6+6
8	b7	=H7+6
9	b8	=H8+6
10	b9	=H9+6
11	b10	=H10+6
12	b11	=H11+6
13	b12	=H12+6
14	b13	=H13+6
15	b14	=H14+6
16	b15	=H15+6
17	b16	=H16+6
18	b17	=H17+6
19	b18	=H18+6
20	b19	=H19+6
21	b20	=H20+6
22		=SOMA(H2:H21)

	G	H
1		
2	b1=34	34
3	b2	40
4	b3	46
5	b4	52
6	b5	58
7	b6	64
8	b7	70
9	b8	76
10	b9	82
11	b10	88
12	b11	94
13	b12	100
14	b13	106
15	b14	112
16	b15	118
17	b16	124
18	b17	130
19	b18	136
20	b19	142
21	b20	148
22		1820

Figura 157: Sinalização da viagem em que o jardineiro rega a 60ª roseira e cálculo da distância total percorrida até então

Depois ter efeituado o cálculo, registou a resposta no papel, evidenciando a sua reflexão em para levar avante a resolução e referenciando que tal valor poderia ser visto na folha de cálculo (Fig. 158).

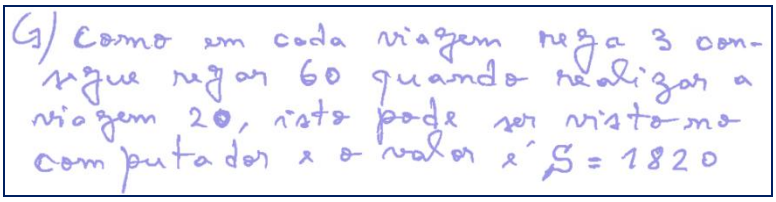

G) Como em cada viagem rega 3 con-
segue regar 60 quando realizar a
viagem 20, isto pode ser visto no
computador e o valor é $S = 1820$

Figura 158: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea G (Tarefa 1)

Resolução da alínea G1

O aluno recorreu à fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética, mas não apresentou a sua forma genérica, considerando-a para o caso particular da soma dos primeiros 20 termos, tendo feito as devidas substituições e cálculos convenientes. Assim, determinou o resultado que logicamente coincide como o já determinado na alínea anterior, por meio da folha de cálculo, tal como o próprio aluno refere (Fig. 159).

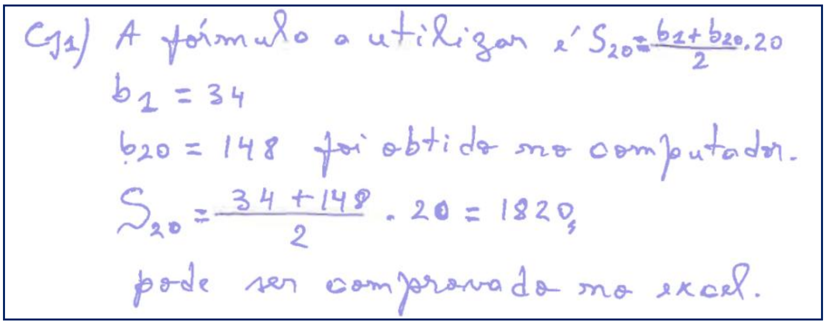

G1) A fórmula a utilizar é $S_{20}=\frac{b_1+b_{20}}{2}.20$
$b_1 = 34$
$b_{20} = 148$ foi obtido no computador.
$S_{20} = \frac{34+148}{2} . 20 = 1820$,
pode ser comprovado no excel.

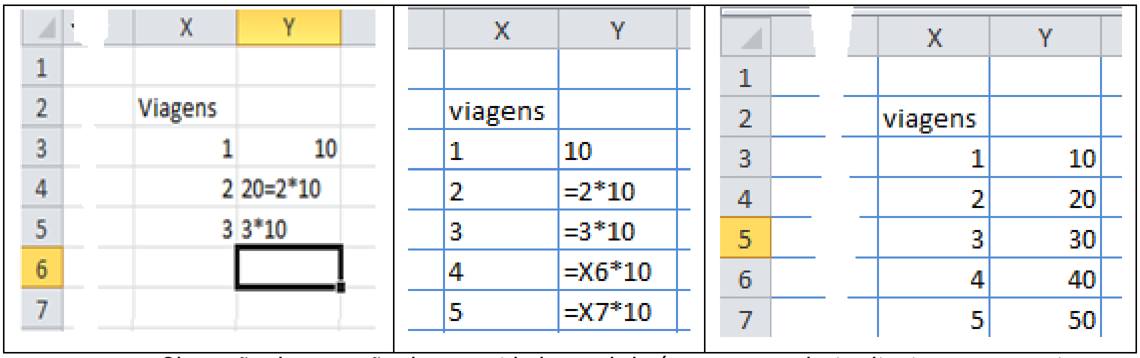
Figura 159: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea G1 (Tarefa 1)

Resolução da alínea H

O aluno não deu uma resposta para a alínea H, pois apresentou uma resolução que condiz com a da alínea H1, conforme se pode ver na figura 161.

Resolução da alínea H1

O aluno partiu do princípio de que em cada viagem gasta 10 litros de água e procedendo de forma análoga ao que fez na alíneas B e B1, estabeleceu um critério para o cálculo dos termos da sucessão (Fig. 160), inseriu tal fórmula na folha de cálculo e registou a sua ideia no papel. (Fig. 161)



	X	Y
1		
2	Viagens	
3	1	10
4	2	20=2*10
5	3	3*10
6		
7		

X	Y
viagens	
1	10
2	=2*10
3	=3*10
4	=X6*10
5	=X7*10

	X	Y
1		
2	viagens	
3	1	10
4	2	20
5	3	30
6	4	40
7	5	50

Figura 160: Obtenção da sucessão de quantidade total de água gasta pelo jardineiro nas sucessivas viagens (À esquerda excerto de vídeo, no meio e à direita recortes da folha de cálculo)

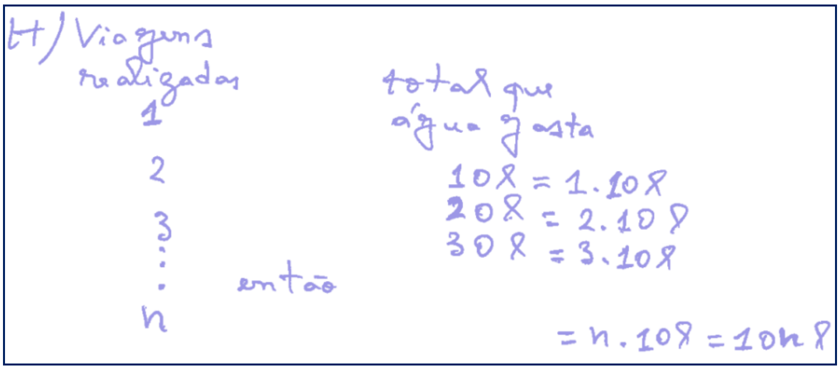


Figura 161: Excerto da produção escrita que apresenta a resolução da alínea H (Tarefa 1)

Resolução da alínea H1-a)

O aluno respondeu a alínea H1-a) valorizando somente a possível recursividade das sucessões, deixando de parte as outras características que poderia explorar (Fig. 162).

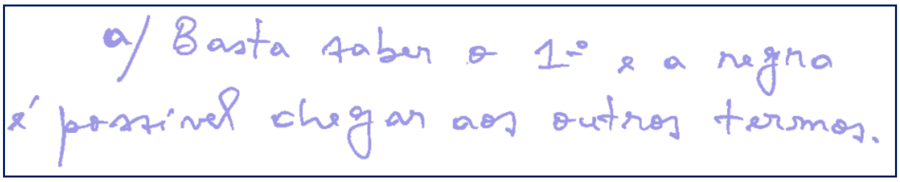


Figura 162: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea H1-a) (Tarefa 1)

5.3.2 Análise e Interpretação da Tarefa 1

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da TRRS

O Aluno 3 iniciou a sua atividade matemática, recorrendo a um registo de representação semiótica na forma de discursivo verbal. Isto é visível quando o aluno concebe o seu primeiro modelo, ao referir que “na primeira viagem, o jardineiro chega até à 3ª roseira e volta”, verbalizando um discurso diferente do texto original da tarefa; por outras palavras, pode dizer-se que o aluno fez uma primeira transformação que consiste num tratamento de registos verbais.

Logo em seguida, fez as primeiras conversões dos registos verbais para registos numéricos e, ao mesmo tempo, um tratamento destes registos numéricos. Nota-se que o primeiro modelo do aluno foi enriquecido com a justificação que apresenta para fundamentar a conversão.

Para aclarar as suas ideias, o aluno recorreu à conversão da situação que inicialmente lhe foi apresentada em registo de representação verbal para um registo de representação gráfico, apesar de conseguir aqui uma conversão parcial (isto é, não incluindo todos os elementos de análise), o que é normal, pois como Duval (2011) refere, quando as conversões são feitas, a sobreposição exata entre os dois diferentes registos nem sempre é verificada. Importa salientar que há aqui uma melhoria do seu modelo pois o aluno conseguiu fazer diversos tratamentos dos registos produzidos, ao deduzir as distâncias das diversas roseiras entre si e em relação à fonte. Assim, tal como Duval (2011) defende, quando o aluno consegue fazer conversões com a devida coordenação entre diversos registos de representação semiótica demostra ter capacidade para usar os conceitos envolvidos com a devida flexibilidade.

Para facilitar os tratamentos, a aluno converteu o registo gráfico em registo numérico e fez as devidas conversões dos registos numéricos. O trabalho com estes registos numéricos levou ao aprimoramento do modelo que o aluno vinha construindo. Esse aperfeiçoamento é completamente exteriorizado pelo facto de o aluno ter descoberto uma regularidade nos resultados numéricos que lhe permitiu inferir que adicionando 6 unidades a cada elemento, obtém-se o elemento subsequente.

Para testar o modelo até então criado, o aluno fez alguns ensaios, recorrendo à folha de cálculo, isto é, introduziu as fórmulas que ocorrem do modelo ora criado e foi constatando que resultava efetivamente a sucessão preconizada. Importa salientar que durante a testagem de modelo, não só foram feitas transformações de registos mas também foram confrontados o registo algébrico e o registo numérico e ainda o enunciado do problema que em si mesmo é um registo verbal.

Para concluir a obtenção, exploração e explicitação do modelo, o aluno evidenciou a criação de alguns modelos secundários que conduziram à obtenção do modelo principal criado; para este objetivo, o aluno começou por mobilizar um registo algébrico que lhe permitiu expressa-lo. Deste modo, pode-se resumir assim a sequência de registos de representação utilizados:

Verbal → Gráfico/Numérico → Numérico → Algébrico

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva de M&M

Depois das primeiras leituras, a situação realística retratada no problema levou o aluno a conceber o seu primeiro modelo, ao referir que "na primeira viagem o jardineiro chega até a 3ª roseira e volta", o que expressa uma primeira interpretação da situação. Pouco depois, vê-se que o primeiro modelo concebido pelo aluno é enriquecido com um primeiro ajustamento; este facto é evidente se tivermos em atenção a explicação que ele apresenta para fundamentar a conversão seguida do primeiro tratamento.

Para melhorar ainda o seu modelo, o aluno considerou que recorrendo a um meio de representação gráfica o modelo seria melhor explorado e consequentemente explicaria melhor a situação retratada; de facto, assim aconteceu pois o aluno conseguiu deduzir as distâncias entre as roseiras, o que se pode descrever como a primeira matematização da situação ou modelo explorado. Esta matematização foi ainda mais desenvolvida, podendo dizer-se que o modelo que construiu ficou consolidado quando o aluno descobriu e anunciou o padrão que lhe permitiu inferir que adicionando 6 unidades a cada termo obteria o termo subsequente.

Como seria de antever, depois de ter consolidado a sua interpretação da situação, o aluno passou a testar o seu modelo, recorrendo à folha de cálculo, e através desta testagem o aluno verificou até que ponto o modelo conseguia antecipar os resultados matemáticos envolvidos na realidade descrita no problema. Importa sublinhar que, trabalhando na folha de cálculo, esta desempenhou a função de um meio representacional e sistema de concretização do modelo. Para evidenciar o modelo e garantir a sua capacidade de reutilização (formalização genérica), o aluno registou a sua conclusão no papel recorrendo à forma algébrica.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e A1)

Em seguida, apresenta-se uma súmula dos principais resultados da análise realizada, de acordo com as duas perspetivas teóricas adotadas (Tabela 64).

Tabela 64: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas A e A1, segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Interpreta a situação mobilizando um registo verbal	*Concebe o seu primeiro modelo que é um modelo embrionário da situação real*
Converte o registo verbal num registo numérico	*Explora o modelo inicial utilizando uma matematização elementar*
O registo numérico é convertido em registo gráfico	*Esquematiza a situação*
O registo gráfico é convertido em registo numérico na forma tabular (Excel)	*Identifica e começa a trabalhar as variáveis de ponto de vista numérico*
Do registo numérico extrai alguma forma de generalização	*Encontra uma regularidade pelo que cria um modelo relativamente mais elaborado*

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da TRRS

O aluno começa a atividade com a leitura do registo verbal (enunciado da questão) e converte este registo para registos numéricos, recorrendo logo à folha de cálculo, onde faz alguns tratamentos; depois de ter consolidado a sua convicção acerca da forma de resolução, mobilizou um registo verbal para comunicar o seu pensamento acerca do seu modelo, dizendo que: “em cada viagem o jardineiro rega 3 roseiras, então é só <u>multiplicar o número de viagens por 3</u>”.

Para efetuar a explicação das suas conclusões, o aluno começa por mobilizar registos verbais para enfatizar o modelo que assume ter criado ao longo da realização da tarefa e logo em seguida mobiliza registos algébricos para expressar os modelos preliminares de onde irá emergir o modelo principal, o que por um lado denota segurança por parte do aluno e por outro retrata a espontaneidade do aluno no que concerne à mobilização e transformação de registos.

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva de M&M

A partir da leitura, o aluno criou uma primeira interpretação que se pode entender como o seu primeiro modelo e para explorar e testar esse modelo, recorreu à folha de cálculo não como simples meio representacional mas sobretudo para facilitar o desenvolvimento do modelo a fim de averiguar e garantir de que está conforme com a situação realística proposta no problema. Com esta exploração na folha de cálculo o aluno não só desenvolveu o seu modelo como também consolidou-o. Finalmente, expressou o modelo final que consiste em multiplicar o número de viagens por 3 para resolver a situação proposta no problema.

Para aclarar que o modelo criado traduz a situação real, o aluno expressou os modelos preliminares de onde surgiu o modelo final, o que por um lado denota segurança por parte do aluno e por outro revela a trajetória de evolução que conduziu ao modelo principal que no fim apresentou algebricamente. Este retrato da trajetória, indica que o aluno seria capaz de reutilizar o modelo em situações mais ou menos semelhantes quer seja no âmbito escolar quer fora da sua experiência académica.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B) e B1)

Em seguida, apresenta-se um quadro de síntese dos resultados das duas análises (Tabela 65).

Tabela 65: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B e B1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Interpretou a situação mobilizando um registo verbal	*A partir da leitura o aluno criou o seu primeiro modelo*
Converteu o registo verbal num registo numérico	*Recorreu à folha de cálculo onde explorou e testou o modelo*
Mobilizou um registo verbal para comunicar o seu pensamento	*Desenvolveu o seu modelo e também consolidou-o*
Mobilizou registos verbais para explicar conclusões	*O aluno exprimiu os modelos preliminares de onde surgiu o seu modelo final*
Mobilizou registos algébricos para expressar os modelos preliminares	*Apresentou algebricamente o modelo final*

Análise da alínea E) na perspetiva da TRRS

Na resposta da alínea E), o aluno mobilizou registos gráficos para explicitar os modelos que já havia criado e converteu as representações gráficas em verbais; o aluno sentiu esta necessidade provavelmente porque a interpretação do registo gráfico lhe permitiu retirar as informações sobre o modelo criado.

Análise da alínea E) na perspetiva de M&M

O aluno começou por expressar os seus modelos utilizando o MS-Excel, um meio representacional que considerou conveniente, tendo em conta as particularidades de cada modelo. O aluno soube evidenciar a matematização inerente a cada modelo, ou seja, apresentou os modelos simultaneamente mas além disso ilustrou as especificações de cada modelo ao notar que: “Para a sucessão da alínea A) a diferença é 6” ao passo que “Para a sucessão da alínea B) a diferença é 3”.

Por outro lado, para a sucessão da alínea B), o aluno concebeu dois modelos, um relacionado com a multiplicação pelo número de viagens e outro usando somas sucessivas, mas apresentou apenas um deles, talvez porque o considerou mais explícito.

Um resumo da análise da resolução da alínea E)

Na tabela abaixo (Tabela 66), apresenta-se uma síntese das análises.

Tabela 66: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea E segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1/Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos gráficos para explicitar os modelos	*Começou por expressar os seus modelos com o meio representacional que considerou conveniente*
Converteu as representações gráficas em verbais	*Evidenciou a matematização inerente a cada modelo verbalmente*
	Dos dois modelos que concebeu para a sucessão da alínea B) apresentou um deles, talvez porque o considerou mais explícito

Análise das alíneas G) e G1) na perspetiva da TRRS

A partir dos registos numéricos, o aluno utiliza os modelos que já havia concebido sobre a ordem de um termo. Começou por recorrer a uma simbologia pessoal que consistiu em mudar a cor da célula, associou um registo icónico ao registo numérico, e posteriormente, recorrendo ao tratamento dos registos numéricos, obteve o resultado pretendido e de uma forma espontânea apresentou a resposta. Mobilizando registos verbais, apresentou alguns trechos de explicação do raciocínio que legitima os procedimentos aplicados para a obtenção da solução.

Mais tarde, o aluno apresentou uma relação algébrica e através desta relação fez as devidas conversões que consistiram em substituir os registos algébricos da fórmula em correspondentes registos numéricos e com os devidos tratamentos obteve um resultado igual ao que colheu anteriormente.

Importa salientar que o aluno conhecia esta resolução através da fórmula mas não a aplicou inicialmente. Este facto leva a inferir que as transformações podem ser adotadas, tendo em conta a situação.

Análise das alíneas G) e G1) na perspetiva de M&M

Percebe-se que o aluno recorre a um modelo que já era do seu domínio de conhecimentos (estabelece a relação entre termo e ordem). Esta reutilização corretamente feita indica que o modelo foi bem explorado, pelo que o aluno não teve dificuldade em aplicá-lo. Depois de obter o resultado, o aluno apresentou-o espontaneamente e fez o esclarecimento dos modelos e procedimentos tidos em conta para chegar ao resultado. Os esclarecimentos, que o aluno faz, são fortes indicadores de que o aluno é capaz de reutilizar os modelos concebidos em situações novas e mais ou menos equivalentes.

O aluno recorreu aos seus conhecimentos prévios para resolver a situação talvez porque, de certa forma, esta passou a ser uma exigência do contexto ou porque o modelo criado durante a primeira parte da atividade não será tão fácil de ser matematizado, apesar de servir para explicar a situação imposta.

Importa referir que apesar de o aluno conhecer previamente este modelo, não recorreu ao mesmo de imediato, provavelmente porque a situação não impôs ou porque a situação apresentou outras possibilidades que indicaram que valeria a pena utilizar a folha de cálculo e não o seu conhecimento formal prévio. Episódios semelhantes a este acontecem muitas vezes fora do âmbito da sala de aula, pois a realidade propõe ações que são mais fáceis de resolver sem evocar o puro formalismo matemático, admitindo-se que esse formalismo tornaria a tarefa menos célere e mais complicada do que recorrendo a outros meios disponíveis.

Importa sublinhar que o aluno obteve o resultado mas não apresentou explicitamente a resposta à questão. Este facto ocorre, provavelmente, devido a hábitos que os alunos acabam por interiorizar, designadamente, o de que não faz falta a resposta logo que se obtém uma solução e que, portanto, o resultado é suficiente.

Um resumo da análise da resolução das alíneas G) e G1)

O quadro seguinte (Tabela 67) resume os principais resultados de acordo com as duas perspetivas de análise.

Tabela 67: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas G e G1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	***Na perspetiva de M&M***
Mobilizou registos numéricos a que associou um registo icónico	*Aplicou um modelo ao estabelecer a relação entre termo e ordem e assinalou o termo igual a 60*
Fez tratamento de registos numéricos	*Evidenciou a aplicabilidade do modelo, através da obtenção espontânea de resultados*
Mobilizou registos verbais para explicar os procedimentos	*Fez a explicação dos modelos e procedimentos tidos em conta para obter resultado*
Mobilizou registos algébricos para apresentar uma relação	*Recorreu a um modelo que já era do seu domínio de conhecimentos (fórmula da soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética)*
Na relação apresentada, converteu alguns registos algébricos em numéricos	*Evidenciou a aplicabilidade do modelo, através da substituição dos dados e execução dos cálculos até à obtenção espontânea de resultados*
Fez tratamento dos registos numéricos e obteve um resultado igual ao alcançado anteriormente.	

Análise das alíneas H) e H1) n*a perspetiva da TRRS*

O aluno iniciou a resolução da situação colocada, convertendo os registos verbais em registos numéricos e, recorrendo à folha de cálculo, fez alguns tratamentos dos registos numéricos e depois descobriu um padrão que lhe permitiu realizar um gesto intelectual importante, que consistiu em converter os registos numéricos num registo algébrico (ainda na folha de cálculo); depois registou no papel todas as premissas que concorrem para a realização da tarefa.

A primeira parte não foi resolvida embora o aluno tenha obtido uma relação que, de certa forma, pode permitir a obtenção da solução. No fim da atividade, o aluno mobilizou registos verbais a fim de evidenciar que existem objetos matemáticos a ter em conta para que, com algumas transformações, seja possível obter os elementos que podem dar resposta à situação.

Uma análise da resposta leva a inferir que a recursividade típica da folha de cálculo influenciou o aluno, pois o modelo matemático encontrado, embora não sendo recursivo tem patente a ideia de recursividade. Apesar de ter dado uma resposta curta, o aluno extrai esse aspeto que é a recursividade do modelo.

Análise das alíneas H) e H1) n*a perspetiva de M&M*

O aluno começa a modelar a situação, traduzindo a percepção da situação com base na folha de cálculo. A situação implica o recurso a mais do que um modelo mas o aluno consegue uma modelação do segundo aspeto ao estabelecer um critério de obtenção dos termos. Para testar esse modelo, o aluno recorre à folha de cálculo e depois que refina o modelo (consegue descobrir a fórmula a utilizar), consegue matematizar a situação, obtendo um modelo reutilizável e geral.

O aluno não retomou o enunciado quando se propôs a elaborar a resposta final à primeira parte desta alínea, este demérito leva-o não perceber o desvio ou a omissão num modelo. Por outras palavras, o aluno não presta a devida atenção ao objetivo visado, apesar de evidenciar a consolidação do modelo que conseguiu criar e depois contenta-se com a matematização.

Um resumo da análise da resolução das alíneas H) e H1)

A seguir, apresenta-se uma síntese dos resultados extraídos da análise, à luz das duas perspetivas teóricas (Tabela 68).

Tabela 68: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas H e H1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 1 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos verbais	*Começa a modelar a situação na folha de cálculo,*
Converteu os registos verbais em numéricos	*Consegue uma modelação do segundo aspeto ao estabelecer um critério de obtenção dos termos*
Fez o tratamento dos registos numéricos	*Testou o modelo recorrendo à folha de cálculo*
Encontrou a fórmula que permitiu automatizar o tratamento	*Refinou o modelo e matematizou a situação*
No fim da atividade o aluno mobilizou registos verbais para representar objetos matemáticos que podem ser transformados para obter os elementos que podem dar resposta à situação	*Explicou verbalmente as possibilidades de exploração, aplicação e reutilização do modelo*

5.3.3 Resolução da Tarefa 2 – Reprodução de vírus por bipartição

Resolução da alínea A

Para a resolução da primeira alínea desta tarefa (Anexo 5), o aluno começa por considerar o instante inicial e, depois de alguma reflexão, introduz manualmente os primeiros termos da sucessão, no intervalo A2:B5. Em seguida, testa uma fórmula no intervalo D2:D5, que acabou utilizando para obter vários termos por recorrência, tendo continuado a sucessão nas colunas A e B (Fig. 163).

	A	B	C	D	E
1					
2	u0	1		1	
3	u1	2		=D2*2	
4	u2	4		=D3*2	
5	u3	8		=D4*2	
6	u4	=B5*2			
7	u5	=B6*2			
8	u6	=B7*2			
9	u7	=B8*2			
10	u8	=B9*2			

	A	B	C	D	E	F
1						
2	u0	1		1		
3	u1	2		2		
4	u2	4		4		
5	u3	8		8		
6	u4	16				
7	u5	32				
8	u6	64				
9	u7	128				
10	u8	256				

Figura 163: Obtenção recursiva sucessão de quantidade de vírus em função dos dias

Depois, registou no papel alguns destes resultados, tendo notado que é possível observar mais elementos na folha de cálculo (Fig. 164).

$U_0 = 1$ no instante em que fica infectada.

$U_1 = 2$ no 1.º dia

$U_2 = 4$ no 2.º dia

$U_3 = 8$ no 3.º dia

A quantidade de vírus se multiplica por 2 a cada dia que passa, o computador permite obter mais elementos 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024;

Figura 164: Obtenção e registo dos primeiros termos da sucessão das quantidades de vírus

Resolução da alínea A1

Depois de uma exploração do padrão numérico, evidenciada no intervalo F2:F4 (Fig. 165), o aluno descobriu que os termos da sucessão são potências de base 2, conclusão que registou em papel (Fig. 166). Assim, utilizou as colunas H e I para introduzir a fórmula que corresponde ao termo geral da sucessão em função do número de dias (Fig.165).

	F	G	H	I
1				
2	=2^0		n	2^n
3	=2^1		0	=2^H3
4	=2^3		1	=2^H4
5			2	=2^H5
6			3	=2^H6
7			4	=2^H7
8			5	=2^H8
9			6	=2^H9
10			7	=2^H10
11			8	=2^H11

	F	G	H	I
1				
2	1		n	2^n
3	2		0	1
4	8		1	2
5			2	4
6			3	8
7			4	16
8			5	32
9			6	64
10			7	128
11			8	256

Figura 165: Obtenção da sucessão de quantidades de vírus em função dos dias

A1 – Observando no computador é notável que os termos obtidos são potências de 2, logo o termo geral pode ser: $U_n = 2^n$ e é a fórmula que permite calcular a quantidade de vírus que a pessoa infectada terá em função do número de dias.

Figura 166: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea A1 (Tarefa 2)

Resolução da alínea A2

O Aluno 3 resolveu a alínea A2 recorrendo ao termo geral considerado na alínea anterior e inferiu a expressão que serviria para designar de forma genérica os termos precedentes; desta feita conseguiu deduzir uma fórmula que corresponde a uma escrita informal da fórmula de recorrência (Fig. 167).

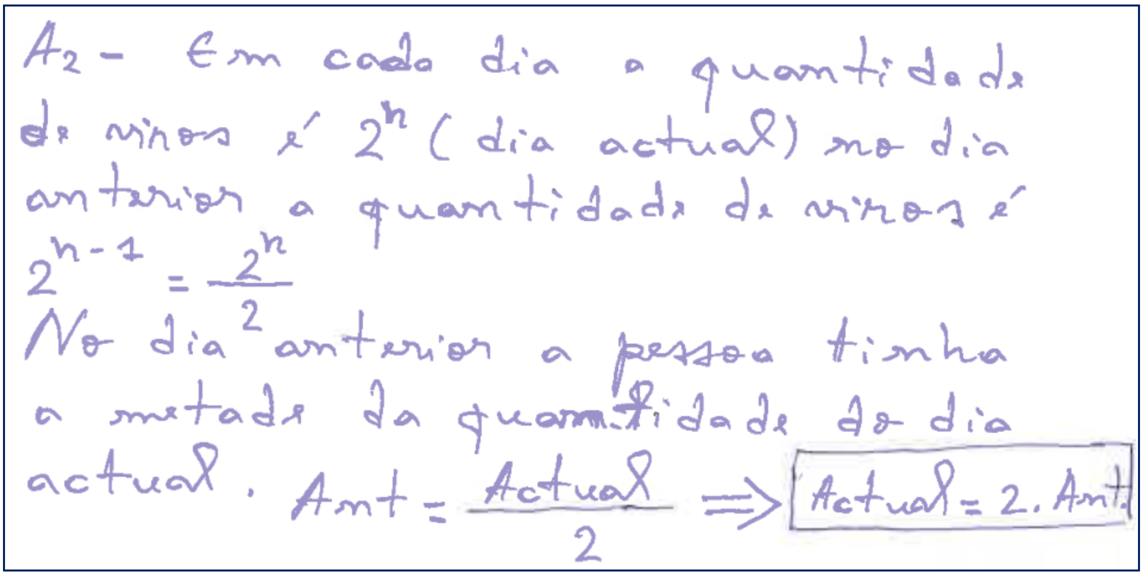

A2 - Em cada dia a quantidade de virus é 2^n (dia actual) no dia anterior a quantidade de virus é
$2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$
No dia anterior a pessoa tinha a metade da quantidade do dia actual. $Ant = \frac{Actual}{2} \Rightarrow \boxed{Actual = 2 . Ant}$

Figura 167: Registo da resposta / Resolução do Aluno 3 para a alínea A2 (Tarefa 2)

Resolução da alínea B

Tendo já resolvido as alíneas anteriores, nesta alínea apresentou uma resposta concisa, destacando a relação entre cada termo e o seu antecessor (Fig. 168).

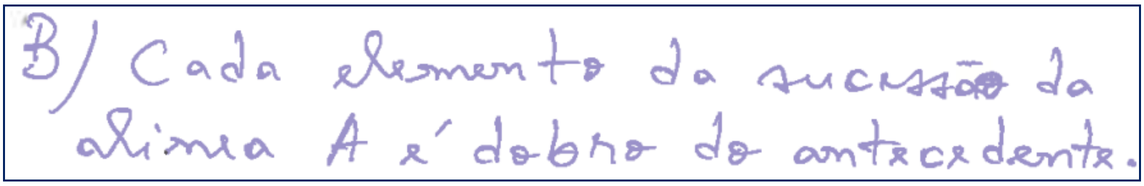

B) Cada elemento da sucessão da alínea A é dobro do antecedente.

Figura 168: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea B (Tarefa 2)

Resolução da alínea B1

O aluno apresentou uma resolução formalmente aceitável para a questão, representando de forma genérica expressões distintas do termo geral que previamente considerou nas alíneas anteriores (Fig. 169).

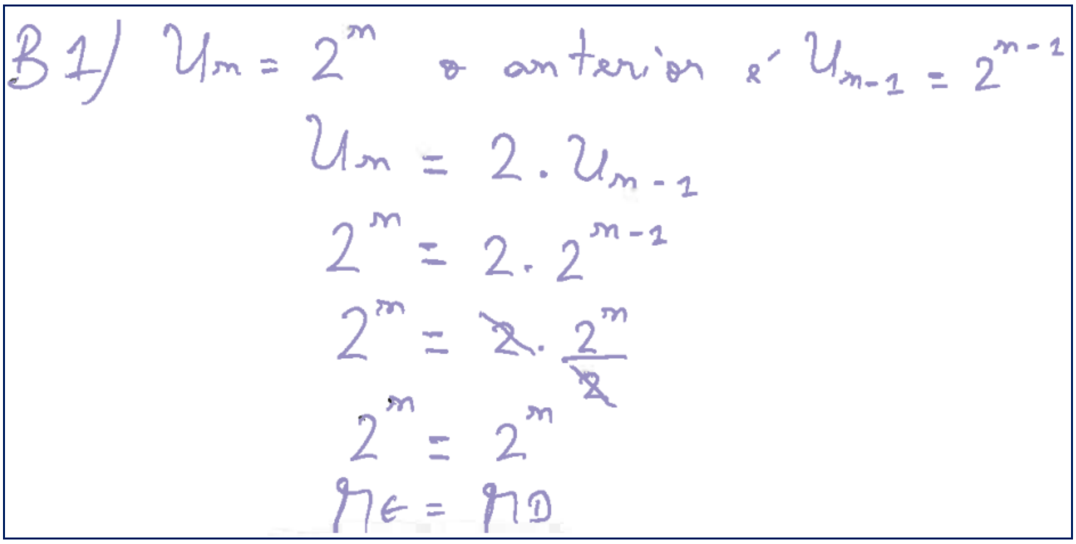
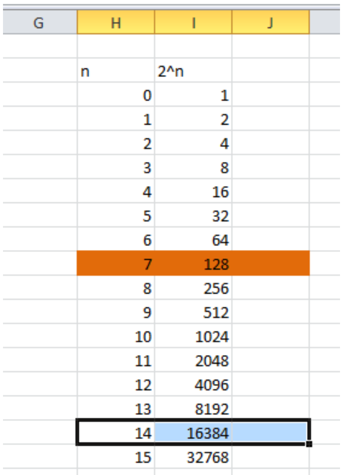


Figura 169: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea B1 (Tarefa 2)

Resolução das alíneas C, C1 e C2

Para determinar a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá no seu organismo ao completar as primeiras semanas, o Aluno 3 apoiou-se na visualização da representação numérica proporcionada pela folha de cálculo e observou criteriosamente os termos da sucessão obtida na alínea A), começou por destacar os termos cuja ordem corresponde a um múltiplo de 7 (Fig. 170).



G	H	I	J
	n	2^n	
	0	1	
	1	2	
	2	4	
	3	8	
	4	16	
	5	32	
	6	64	
	7	128	
	8	256	
	9	512	
	10	1024	
	11	2048	
	12	4096	
	13	8192	
	14	16384	
	15	32768	

Figura 170: Excerto de vídeo que mostra o destaque dos termos que indicam as quantidades de vírus no momento em que se completam semanas

Então, formou uma segunda sucessão composta pelos termos que destacou a partir do critério que estabeleceu. Deste modo, passou a considerar a sucessão “128; 16384; 20971592;…”, conforme se pode ver na figura 171.

c) Observando os termos da sucessão obtida na alínea A, considerando o 7º; 14º; 21º; 28º; 35º,... obtemos respectivamente 128; 16384; 2097152,...

Figura 171: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea C (Tarefa 2)

Na alínea C1), para determinar uma fórmula que permita calcular a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá em função do número de semanas, o aluno considerou a possibilidade de relacionar termos consecutivos tal como foi feito durante a resolução da alínea A), onde já tinha que verificado a existência de regularidades nos resultados. Valendo-se das potencialidades da folha de cálculo, o aluno fez a divisão de cada termo pelo seu precedente e obteve, em todos casos, o resultado 128, conforme se pode ver na figura 172.

L	M	N	O	P
Inicio		1	subtração	Divisão
7	Semana 1	128	16256	128
14	Semana 2	16384	2080768	128
21	Semana 3	2097152	266338304	128
28	Semana 4	268435456	34091302912	128
35	Semana 5	34359738368	4,36369E+12	128
42	Semana 6	4,39805E+12	5,58552E+14	128
49	Semana 7	5,6295E+14	7,14946E+16	128
56	Semana 8	7,20576E+16		

Figura 172: Formação da sucessão de quantidade de vírus que a pessoa infetada terá em função do número de semanas e a relação entre termos consecutivos

Esta forma de proceder foi motivada pelo que o aluno observou na resolução da alínea A) e da alínea A1), pois como se pode ver na figura 173, o aluno indicou o seu raciocínio, fazendo alusão ao que sucedeu durante a resolução da alínea A), antes mesmo de registar alguns resultados das operações que efetuou na folha de cálculo.

C1) Na alínea A cada termo dividido com o anterior o resultado é o mesmo em todos os casos experimentando este critério na sucessão da alínea C.

Observa-se que:

$$\frac{16384}{128} = 128$$

$$\frac{2097152}{16384} = 128$$

No computador é observável de que em todos casos o resultado é 128.

Figura 173: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea C1 (Tarefa 2)

Partindo do principio de que os termos da sucessão obtida na alínea A) são potências do quociente entre cada termo e o seu antecedente, o Aluno 3 enveredou por verificar esta particularidade para a sucessão obtida na alínea C) e com base nos seus conhecimentos prévios sobre propriedades de potências, conjeturou um termo geral que permite calcular a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função do número total de semanas completadas, partindo da data em que ficou infetado (Fig. 174).

Na alínea A os termos são potências de 2, Verificando esta sucessão da alínea C, nota-se que são potências de 128. Logo:

$$S_n = 128^n = (2^7)^n = 2^{7n}$$

Figura 174: Conjetura e representação do termo geral da sucessão de quantidades de vírus em função do número total de semanas completadas

Para deduzir uma expressão matemática que permite calcular o número total de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função da quantidade de vírus da semana anterior, o aluno considerou a resposta da alínea anterior e utilizando simbologia matemática, reapresentou-a de forma concisa e sucinta, o que lhe permitiu estabelecer e representar genericamente a relação recursiva entre cada termo e o respetivo precedente (fig. 175).

$$\frac{16384}{128} = 128 \qquad \frac{2097152}{16384} = 128$$

$$\frac{S_2}{S_1} = 128, \quad \frac{S_3}{S_2} = 128, \quad \frac{S_4}{S_3} = 128.., \quad \frac{S_n}{S_{n-1}} = 128$$

$$S_n = (S_{n-1}).128$$

Figura 175: Conjetura e representação da relação recursiva entre termos consecutivos da sucessão de quantidades de vírus ao completar sucessivas semanas

Resolução da alínea D

Como se pode ver na figura 176, ao responder à questão D, o aluno, depois de observar que as sucessões são diferentes, considerou a relação de inclusão que se pode estabelecer entre as sucessões e destacou uma das características comuns entre as sucessões em análise.

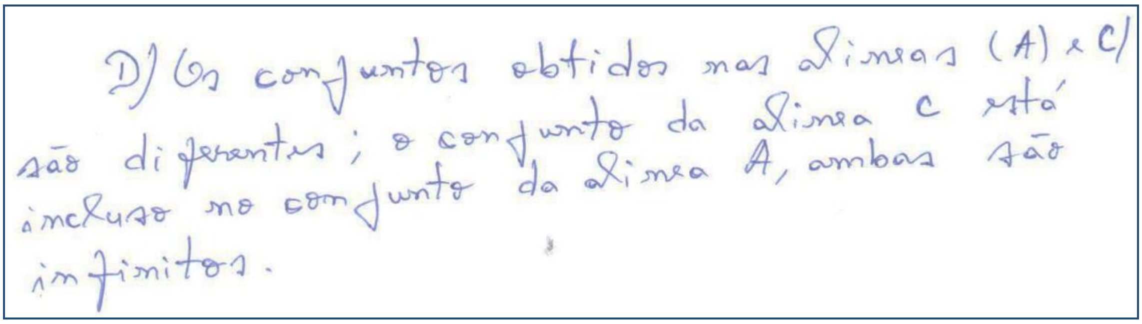

D) Os conjuntos obtidos nas alíneas (A) e C/
são diferentes; o conjunto da alínea C está
incluso no conjunto da alínea A, ambas são
infinitos.

Figura 176:Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea D (Tarefa 2)

5.3.4 Análise e Interpretação da Tarefa 2

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva da TRRS

Depois da interpretação da tarefa o Aluno 3 fez uma conversão de um registo verbal para um registo tabular e depois de concretizar alguns tratamentos de registos numéricos, descobriu um padrão e mobilizou registos verbais para expressar os resultados. Continuou com a realização de tratamentos dos registos numéricos e encontrou um segundo padrão que facilmente matematizou, primeiro na folha de cálculo, onde voltou a efetuar alguns tratamentos de registos numéricos para comprovar a validade da relação descoberta, e depois fez uma conversão dos registos numéricos para registo algébricos.

Análise das alíneas A) e A1) na perspetiva de M&M

O primeiro passo para modelação da situação consistiu em introduzir os números na folha de cálculo e depois descobriu um padrão segundo o qual cada número é o dobro do anterior, ou seja, multiplicando por 2 o último termo conhecido seria possível obter o subsequente.

Depois de suficientemente testado este primeiro modelo, escreveu-o de uma forma aperfeiçoada e com a ajuda da folha de cálculo fez a primeira matematização da situação. O aluno continuou então a exploração do modelo até descobrir um segundo modelo ao considerar que os números obtidos são potências sucessivas de base 2.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e A1)

Na tabela seguinte, sumarizam-se os principais resultados da resolução efetuada (Tabela 69).

Tabela 69: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas A e A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Fez uma conversão de registo verbal para tabular	*O primeiro passo para modelação da situação foi a descoberta do padrão depois da introdução de valores numéricos na folha de cálculo*
Realizou alguns tratamentos de registos numéricos contidos na tabela	*Testou o modelo e refinou o modelo*
Mobilizou registos verbais para expressar os resultados	*Expressou os resultados do seu teste*
Continuou com a realização de tratamentos dos registos numéricos	*Continuou a exploração do modelo até descobrir um segundo modelo*
Matematizou primeiro na folha de cálculo, onde voltou a efetuar alguns tratamentos de registos numéricos	*Refinou e testou o modelo*
Fez uma conversão dos registos numéricos em registo algébricos	*Apresentou o modelo algebricamente*

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

O aluno iniciou a resolução, mobilizando registos algébricos e depois de estabelecer a relação entre estes registos, conforme o problema, fez uma série de transformações que concretamente consistiram em tratamentos e obteve uma relação genérica que depois escreveu de forma particularizada. Utilizou ainda uma simbologia personalizada.

Análise da alínea A2) na perspetiva de M&M

Para resolver a situação, o aluno considerou um dos modelos obtidos na alínea anterior e combinando este modelo com outros modelos baseados nos seus conhecimentos prévios sobre sucessor de um termo e propriedade de potências, explicitou que os dois modelos concebidos no âmbito da tarefa são compatíveis, ou seja, fez uma aceitável demonstração que não era efetivamente solicitada. Este facto ilustra muito bem como um modelo é munido de função explicativa tal como é referido por Lesh & Lehrer (2003).

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

Na tabela abaixo (Tabela 70), podem observar-se os resultados principais obtidos na análise desta resolução.

Tabela 70: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Iniciou a resolução, mobilizando registos algébricos para expressar uma relação	*Reutilizou dois modelos anteriormente concebidos*
Fez tratamentos dos registos algébricos até obter uma relação genérica	*Através dos conhecimentos prévios fez o refinamento desta combinação*
Utilizou uma simbologia personalizada, representou algebricamente a relação genérica que obteve	*Obteve um terceiro modelo que apresentou algebricamente*

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva da TRRS

Em primeira instância, o aluno mobilizou representações verbais para explicitar a relação que observou entre dois elementos consecutivos, depois fez uma conversão do referido registo verbal em registo algébrico. A partir deste registo algébrico efetuou tratamentos até encontrar uma proposição universalmente verdadeira.

Análise das alíneas B) e B1) na perspetiva de M&M

Durante a resolução das primeiras alíneas, o aluno concebeu o modelo que aplica para esclarecer a situação proposta e aproveitou a oportunidade não só para explicitar o modelo com outra aparência mas para consolidá-lo, recorrendo a outro meio representacional.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B) e B1)

O seguinte quadro faz uma esquematização das principais observações, tendo em conta as duas perspetivas (Tabela 71).

Tabela 71: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B e B1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou representações verbais para explicitar a relação que observou entre dois elementos consecutivos	*Explicitou verbalmente e explicou o modelo que concebeu*
Fez uma conversão do registo verbal em algébrico	*Apresentou o modelo algebricamente*

Análise das alíneas C), C1 e C2) na perspetiva da TRRS

Para resolver a situação apresentada, o Aluno 3 mobilizou os registos numéricos referentes a resultados da resolução da alínea A) e aproveitando o facto de tê-los na folha de cálculo, o aluno observou e representou esquematicamente os termos cuja ordem corresponde a um múltiplo de 7. Em seguida, mobilizou registos verbais para exprimir o procedimento e dar a resposta que terminou com a mobilização de registos numéricos para representar a sucessão resultante de organizar os termos que anteriormente destacou.

Para determinar uma fórmula que permita calcular a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá em função do número de semanas, o aluno começou por mobilizar registos verbais para explicar que o procedimento a ter em conta na resolução da situação imposta pelo problema é substancialmente decorrente da resolução da alínea A) onde teve que efetuar tratamentos de registos numéricos e considerar uma regularidade nos resultados. Em seguida, o aluno mobilizou registos numéricos, que representam a sucessão então obtida, recorrendo a folha de cálculo onde fez os tratamentos combinados de termos consecutivos e observou que o resultado era constante. E mobilizando novamente alguns registos verbais o aluno destacou a constante.

Para concluir, o aluno mobilizou registos verbais para enfatizar a analogia que encontrou entre as alíneas A) e C), e na mesma linha mobilizou registos algébricos para representar uma relação genérica que permite responder à questão, depois de ter efetuado alguns tratamentos de registos algébricos.

Para deduzir uma expressão matemática que permite calcular o número total de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função da quantidade de vírus da semana anterior, o aluno mobilizou novamente registos numéricos e converteu-os em registos algébricos de tal modo que conseguiu representar genericamente a relação pretendida.

Análise das alíneas C), C1 e C2) na perspetiva M&M

O aluno iniciou a resolução da atividade, explorando o modelo formado no âmbito da resolução das alíneas A) e A1). A partir desse modelo, destacou criteriosamente alguns resultados obtidos na folha de cálculo e, deste modo, formou o modelo que explicita a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá no seu organismo ao completar as primeiras semanas.

O aluno considerou a possibilidade de relacionar resultados consecutivos, tal como procedeu na resolução da alínea A). Para tal, o aluno inseriu fórmulas de modo a verificar a existência de regularidades nos resultados. Fez a divisão de cada termo pelo seu precedente e obteve, em todos casos, o mesmo valor. Praticamente, o aluno fez a reutilização do modelo previamente formado, ao partir do princípio que para o modelo da alínea A) e A1) a base das potências considerados é o quociente entre termos consecutivos e, reutilizando este princípio, o aluno criou claramente o seu modelo preditivo que permite saber a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função do número de semanas decorridas desde a data em que a pessoa foi infetada.

Para formar um modelo matemático que possibilita calcular o número total de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função da quantidade de vírus da semana anterior, o aluno reutilizou a resposta da alínea anterior e simplesmente estabeleceu e representou genericamente a relação recursiva entre cada termo e o respetivo precedente.

Tabela 72: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C, C1 e C2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou os registos numéricos resultantes da atividade realizada na alínea A), e aproveitou o facto de tê-los na folha de cálculo. Mobilizou registos icónicos para representar os termos cuja ordem corresponde a um múltiplo de 7	*Iniciou a resolução da atividade, explorando o modelo formado no âmbito da resolução das alíneas A) e A1); a partir deste modelo, destacou criteriosamente alguns resultados a partir da folha de cálculo*
Mobilizou registos verbais para exprimir o procedimento	*Documentou o procedimento considerado na formação do seu modelo*
Mobilizou registos verbais e numéricos para representar a sucessão resultante ao organizar os termos que anteriormente destacou iconicamente	*Explicitou o modelo que permite prever a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá no seu organismo ao completar as primeiras semanas*
Para deduzir o termo geral, o aluno mobilizou registos verbais, tendo em conta a resolução da alínea A)	*Reutilizou um modelo anterior ao considerar a possibilidade de relacionar termos consecutivos tal como procedeu na resolução da alínea A)*
Mobilizou registos numéricos, recorrendo à folha de cálculo onde fez os tratamentos combinados de termos consecutivos	*Inseriu fórmulas para dividir cada termo pelo seu precedente e constatou uma regularidade nos resultados*
Mobilizou novamente alguns registos verbais para destacar a constante e depois para enfatizar a analogia entre resultados das alíneas A) e C)	*Fez a reutilização do modelo previamente formado, considerando a base das potências como o quociente entre termos consecutivos*
Mobilizou registos algébricos e fez alguns tratamentos de registos algébricos de onde resultou uma relação genérica	*Criou o modelo que permite prever a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função do número de semanas*
Para deduzir uma relação recursiva, o aluno mobilizou novamente registos numéricos	*Reutilizou a resposta da alínea anterior e representou genericamente a relação recursiva entre cada termo e o respetivo precedente*
Converteu registos numéricos em algébricos de tal modo que conseguiu representar genericamente a relação pretendida	

Análise da alínea D) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos verbais para destacar as principais relações que encontrou entre as sucessões das alíneas A) e C).

Análise da alínea D) na perspetiva M&M

O aluno teceu algumas considerações, notando que os dois modelos são diferentes mas destaca o facto de o modelo da alínea C) estar constituído especificamente por objetos matemáticos que também são componentes do modelo da alínea A). E termina o seu raciocínio destacando que nos dois modelos há um número infinito de termos, enquanto aspeto comum entre ambos.

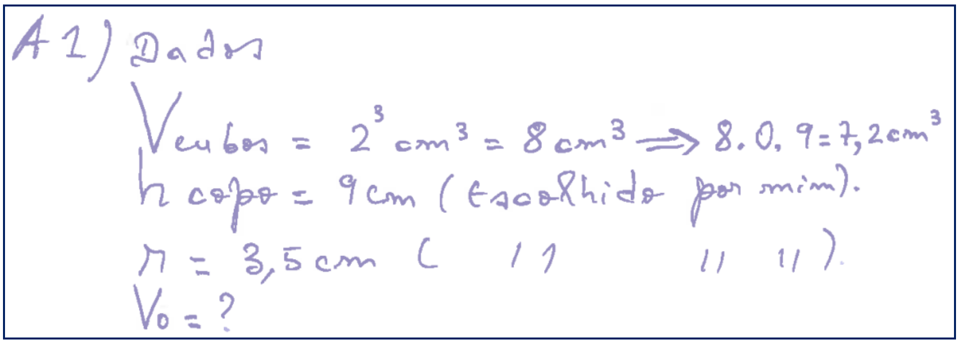
Tabela 73: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea D segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 2 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos verbais para destacar as principais relações que considerou entre as sucessões das alíneas A) e C).	*Reconheceu que o modelo da alínea C) é formado a partir de resultados do modelo da alínea A)*
	O aluno identificou que aspetos comuns aos dois modelos.

5.3.5 Resolução da Tarefa 3 - Cubos de gelo no copo

Resolução da alínea A1

O Aluno 3, depois de ler e interpretar o enunciado da tarefa (Anexo 6), registou no papel e na folha de cálculo os dados que considerou pertinentes, sendo que a primeira preocupação do aluno foi determinar o volume de um cubo de gelo (7,2 cm^3) e a segunda foi a determinação do volume inicial de água no copo (Fig. 177).



A1) Dados

$V_{cubos} = 2^3 cm^3 = 8 cm^3 \Rightarrow 8 . 0,9 = 7,2 cm^3$

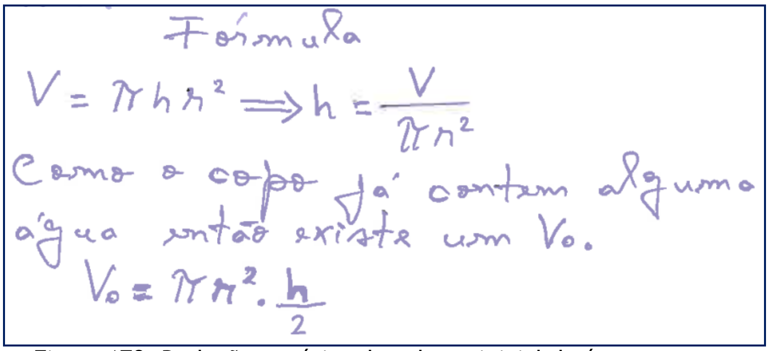
h copo = 9cm (escolhido por mim).

r = 3,5 cm (" " ").

$V_0 = ?$

Figura 177: Dados extraídos e sugeridos pelo Aluno 3 a partir da interpretação do problema de cubos de gelos no copo

Depois de extrair os dados e escolher as dimensões do copo, o aluno recorreu à fórmula do volume do cilindro e explicitou a variável altura, tendo revelado a ideia de que o volume tem a ver com a existência de alguma quantidade de água no copo; assim, concluiu que o volume deveria ser calculado considerando a metade da altura do copo e não a altura total (Fig. 178).



Formula

$V = \pi h r^2 \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$

Como o copo já contem alguma água então existe um V_0.

$V_0 = \pi r^2 . \frac{h}{2}$

Figura 178: Dedução genérica do volume inicial de água no copo, a partir da interpretação do problema

Recorrendo à folha de cálculo, determinou o volume inicial que depois registou no papel e esclareceu que este volume é o que vai sofrendo alterações quando cada cubo é introduzido (Fig.179) e registou o valor no papel, especificando o significado do mesmo (Fig. 180).

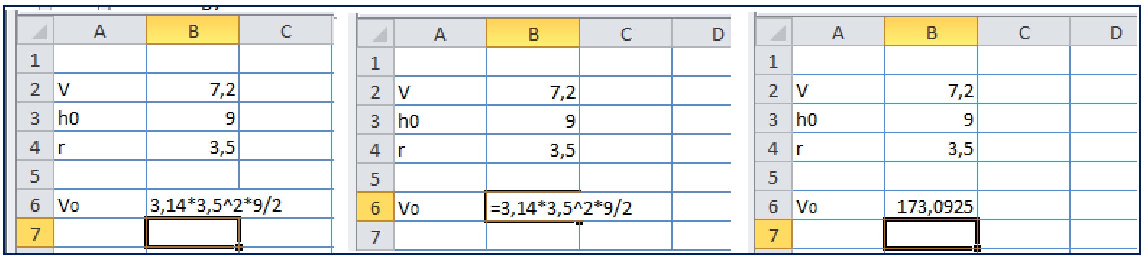


Figura 179: Excertos de vídeo, mostrando o cálculo do volume inicial de água no copo, a partir dos dados do problema

$$V_0 = 3{,}14 \cdot 3{,}5^2 \cdot \frac{9}{2} = 173{,}0925\ cm^3$$

este volume é que vai aumentando quando cada cubo é colocado.

Figura 180: Registo do volume inicial de água no copo, calculado a partir dos dados do problema

Depois deste cálculo, o aluno retomou a fórmula da altura que deduziu anteriormente e substituiu o volume do cilindro por uma soma de volumes. Além disso, a partir da altura do copo que escolheu, determinou o valor numérico da altura inicial (Fig. 181).

$$h = \frac{V_0 + V_{cubos}}{\pi r^2}$$

$$\boxed{h_0 = \frac{h}{2} \Rightarrow h_0 = \frac{9}{2} = 4{,}5\ cm}$$

Figura 181: Cálculo e registo do nível inicial da água no copo, segundo os dados considerados

Utilizando esta fórmula para a altura, substituindo o volume inicial e o raio pelos respetivos valores numéricos, determinou diversos valores para a altura dependendo do número de cubos; para isso multiplicou o volume de um cubo por sucessivos números inteiros (1, 2, 3,…) (Fig. 182). Registou os resultados no papel e explicitou que estas alturas correspondem aos níveis da água no copo quando cada cubo é introduzido (Fig. 183).

	A	B	C
1			
2	V	=8*0,9	
3	h	9	
4	r	3,5	
5			
6	Vo	=3,14*3,5^2*9/2	
7			
8			
9	h1	=(B6+7,2)/(3,14*3,5^2)	
10	h2	=(B6+2*7,2)/(3,14*3,5^2)	
11	h3	=(B6+3*7,2)/(3,14*3,5^2)	
12			

	A	B	C
1			
2	V	7,2	
3	h	9	
4	r	3,5	
5			
6	Vo	173,0925	
7			
8			
9	h1	4,68718315	
10	h2	4,87436631	
11	h3	5,06154946	
12			

Figura 182: Cálculo dos níveis que água atinge em função do número de cubos de gelo introduzidos

$h_1 = \frac{173,0925+7,2}{3,14 \cdot 3,5^2} = 4,687183$

$h_2 = 4,874$

$h_3 = 5,061$ São os níveis

$h_4 = 5,248$

$h_5 = 5,4$

Figura 183: Registo dos primeiros níveis que água atinge em função do número de cubos de gelo introduzidos

Resolução da alínea A2

Para mostrar que o nível de água no copo depende do número de cubos de gelo que forem introduzidos, o aluno optou por inserir na folha de cálculo uma fórmula geral que deduziu por "indução", desta feita calculou vários elementos para validar a fórmula e assumindo que a ideia advém da resolução que fez na alínea anterior, registou detalhadamente no papel (Fig. 184 e 185).

	G	H
1	Cubos	Nivel
2	n	hn=(v0+nvcub)/3,14*r2
3	1	=(173,0925+G3*7,2)/(3,14*3,5^2)
4	2	=(173,0925+G4*7,2)/(3,14*3,5^2)
5	3	=(173,0925+G5*7,2)/(3,14*3,5^2)
6	4	=(173,0925+G6*7,2)/(3,14*3,5^2)
7	5	=(173,0925+G7*7,2)/(3,14*3,5^2)
8	6	=(173,0925+G8*7,2)/(3,14*3,5^2)
9	7	=(173,0925+G9*7,2)/(3,14*3,5^2)
10	8	=(173,0925+G10*7,2)/(3,14*3,5^2)
11	9	=(173,0925+G11*7,2)/(3,14*3,5^2)

	G	H	I
1	Cubos	Nivel	
2	n	hn=(v0+nvcub)/3,14*r2	
3	1	4,687183154	
4	2	4,874366307	
5	3	5,061549461	
6	4	5,248732614	
7	5	5,435915768	
8	6	5,623098921	
9	7	5,810282075	
10	8	5,997465228	
11	9	6,184648382	

Figura 184: Fórmulas e resultados de cálculo dos níveis que água atinge em função do número de cubos de gelo introduzidos

A2) Tal como escrevi na alínea A1 o nível será expresso como

$$h = \frac{V_0 + V_{cub}}{\pi r^2} \text{ então:}$$

$$h_1 = \frac{V_0 + 1V_c}{\pi r^2} \text{ quando é introduzido um cubo}$$

$$h_2 = \frac{V_0 + 2V_c}{\pi r^2} \text{ quando são introduzidos 2 cubos}$$

$$h_3 = \frac{V_0 + 3V_c}{\pi r^2} \quad // \text{ são } // \text{ 3 cubos}$$

$$h_n = \frac{V_0 + n.V_{cub}}{\pi r^2} \text{ quando são introduzidos n cubos.}$$

Figura 185: Fórmula geral para o cálculo dos níveis que água atinge em função do número de cubos de gelo introduzidos

Resolução da alínea B1

Depois de uma breve exploração da sucessão na folha de cálculo, de entre as diversas relações observáveis entre os termos da sucessão o aluno destaca a diferença entre termos consecutivos, conforme se pode ver na figura 186.

B1) Subtraindo cada termo pelo seu antecedente a diferença é constante e é igual a: 0,18718

Figura 186: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea B1 (Tarefa 3)

Resolução da alínea B2

Para provar analiticamente a sua conjetura, o aluno recorreu ao termo geral, deduziu o antecedente e fez as devidas operações e substituições até encontrar uma proposição verdadeira, ficando assim comprovada a conjetura aludida na alínea anterior (Fig. 187).

$$B2)\ h_n - h_{n-1} = 1,18718$$

$$\frac{V_0 + nV_c}{\pi r^2} - \frac{V_0 + (n-1)V_c}{\pi r^2} = 1,18718$$

$$\frac{\cancel{V_0} + \cancel{nV_c} - \cancel{V_0} - \cancel{nV_c} + V_c}{\pi r^2} = 1,18718$$

$$\frac{V_c}{\pi r^2} = 1,18718$$

$$\frac{7,2}{3,14 \cdot 3,5^2} = 1,18718$$

Figura 187: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea B2 (Tarefa 3)

Resolução da alínea C1

Para responder esta questão, o aluno recorreu à folha de cálculo onde inseriu o gráfico da sucessão (Fig. 188) e observou a monotonia da sucessão, conforme explica na sua resposta (Fig. 189).

Figura 188: Gráfico elaborado pelo Aluno 3 da sucessão de níveis água em função do numero de cubos introduzidos

C1) A sucessão é crescente
é possível ~~esta~~ ver no gráfico
que os valores de h aumentam
progressivamente:

Figura 189: Registo da resposta do Aluno 3 para a alínea C1 (Tarefa 3)

Resolução da alínea C2

Na resolução desta alínea, o aluno aplicou um procedimento semelhante ao aplicado na alínea B2, mas desta vez fez uma comparação entre termos consecutivos genéricos e no fim deste processo obteve uma proposição verdadeira, o que mostra que comprovou analiticamente a situação que o aluno pressupôs (Fig. 190).

C2) $h_n < h_{n+1}$

$$\frac{V_0 + nV_c}{\pi r^2} < \frac{V_0 + (n+1)V_c}{\pi r^2}$$

$$\cancel{\frac{V_0}{\pi r^2}} + \frac{nV_c}{\pi r^2} < \cancel{\frac{V_0}{\pi r^2}} + \frac{nV_c}{\pi r^2} + \frac{V_c}{\pi r^2}$$

$$\cancel{\frac{nV_c}{\pi r^2}} < \cancel{\frac{nV_c}{\pi r^2}} + \frac{V_c}{\pi r^2}$$

$$0 < \frac{V_c}{\pi r^2}$$

Figura 190: Registo da resposta/ Resolução do Aluno 3 para a alínea B1 (Tarefa 3)

Resolução da alínea D

Para responder a esta alínea, o aluno acrescentou uma linha vertical para facilitar a leitura do gráfico no ponto em que o copo transborda (Fig. 191). E passando o cursor ao longo do gráfico, disse o seguinte:

"No gráfico, é possível observar que o valor do nível ultrapassa a altura do copo quando é introduzido o 25° cubo".

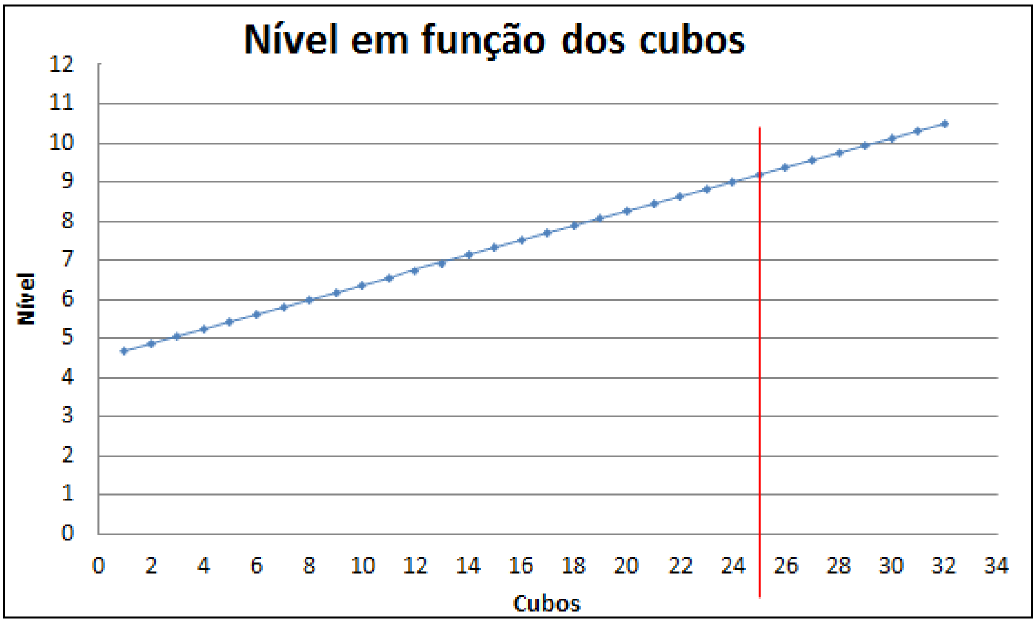


Figura 191: Gráfico elaborado pelo Aluno 3 da sucessão de níveis água em função do número de cubos introduzidos, evidenciado a introdução do 25° cubo

5.3.6 Análise e Interpretação da Tarefa 3

Análise da alínea A1) na perspetiva da TRRS

Depois das primeiras leituras, o Aluno 3 converteu os registos verbais em algébricos, fazendo alguns tratamentos dos registos numéricos envolvidos; nesta etapa, o aluno, em certo sentido, mobilizou diretamente alguns registos numéricos pois a tarefa exigia que o aluno fizesse a escolha das dimensões do copo. Em seguida, mobilizou registos algébricos para expressar a relação existente entre o volume do cubo e as suas dimensões. A partir desta relação fez o tratamento até encontrar explicitamente a relação entre a altura de um cilindro e o seu volume, conhecidas as demais dimensões.

Em seguida, o aluno considerou as condições inicias expressas com registos verbais e converteu-as em registos algébricos. Depois desta ação, o aluno, recorrendo à folha de cálculo, converteu os registos algébricos em numéricos e, fazendo os devidos tratamentos, determinou o volume inicial.

Retomando a relação algébrica em que explicitou a altura, inferiu através de um tratamento que o volume pode ser considerado com o sendo resultante da soma do volume inicial no copo com o volume dos cubos. A partir desta relação algébrica, converteu os registos algébricos (utilizados para representar o volume inicial) em registos numéricos. Recorrendo novamente à folha de cálculo, o aluno fez o tratamento dos registos numéricos e determinou diversos valores para a altura dependendo do número de cubos.

Análise da alínea A1) na perspetiva de M&M

Para iniciar a modelação da situação, o aluno tendo em conta a situação real começou por escolher as dimensões do copo; depois desta escolha e valendo-se dos seus conhecimentos prévios, evidenciou as relações entre as grandezas envolvidas no conceito de volume do cilindro.

A partir da interpretação da situação o aluno iniciou uma matematização que consistiu em determinar primeiramente o volume inicial, a altura ou nível inicial e depois, combinando estes dados, concebeu um modelo que ao ser aplicado permitiu a determinação de diversos valores para a altura dependendo do número de cubos, e para aclarar a ideia explicitou que estas alturas correspondem os níveis da água no copo quando cada cubo é introduzido.

Um resumo da análise da resolução da alínea A1)

Apresenta-se na tabela 74 uma síntese dos resultados da análise da resolução da questão A1.

Tabela 74: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3 /Aluno 3)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Converteu os registos verbais em algébricos</td><td>A partir da situação extraiu os dados</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mobilizou diretamente alguns registos numéricos</td><td>A partir da situação real começou por escolher as dimensões do copo</td></tr>
<tr><td>Aplicou conhecimentos prévios para efetuar cálculos básicos</td></tr>
<tr><td>Fez tratamentos dos registos numéricos envolvidos</td><td>usou as dimensões do copo que considerou</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos algébricos para expressar a relação entre o volume do cilindro e outras dimensões</td><td rowspan="2">Valendo-se dos seus conhecimentos prévios, evidenciou as relações entre as grandezas envolvidas no conceito de volume de um cilindro</td></tr>
<tr><td>Fez o tratamento até encontrar explicitamente a relação entre a altura de um cilindro e as demais dimensões</td></tr>
<tr><td>Converteu os registos verbais que representam as condições iniciais em registos algébricos</td><td>Fez uma reconsideração das condições iniciais do problema</td></tr>
<tr><td>Recorrendo à folha de cálculo, converteu os registos algébricos em numéricos</td><td rowspan="2">Iniciou uma matematização que consistiu em primeiramente determinar o volume inicial e a altura ou nível inicial</td></tr>
<tr><td>Fez tratamento de registos numéricos, obteve o valor numérico do volume inicial.</td></tr>
<tr><td>Retomando a relação algébrica em que explicitou a altura, através de um tratamento, inferiu que o volume no copo pode ser considerado com uma soma</td><td>Concebeu um modelo através da combinação de dados</td></tr>
<tr><td>Converteu os registos algébricos em numéricos</td><td>Iniciou o teste do modelo</td></tr>
<tr><td>Recorrendo à folha de cálculo fez tratamentos de registos numéricos</td><td>Continuou o teste do modelo e aplicou-o para resolver a situação</td></tr>
</table>

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

Considerando uma das relações expressas algebricamente na alínea anterior, o aluno converteu em registos numéricos alguns registos algébricos contidos na relação considerada e foi experimentando diversos registos numéricos, aproveitando as potencialidades da folha de cálculo; assim, testou a validade de um padrão numérico e inferiu uma relação algébrica geral.

Análise da alínea A2) na perspetiva de M&M

O aluno considerou o modelo criado na alínea anterior, e recorrendo a folha de cálculo e so papel e lápis, foi testando o modelo e fez um refinamento que consiste na obtenção da expressão para o n-ésimo termo, ou seja, uma relação que permite determinar diversos valores para o nível de água dependendo do número de cubos. Para clarificar a ideia, explicitou que essas alturas correspondem os níveis da água no copo quando cada cubo é introduzido. A aplicação do modelo encontrado permite então explicar a situação proposta.

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

Na tabela 75 estão resumidos os principais resultados, segundo as duas perspetivas consideradas.

Tabela 75: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3 /Aluno 3)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Considerou uma das relações expressas algebricamente na alínea anterior</td><td>Iniciou a tarefa explorando o modelo criado na alínea anterior</td></tr>
<tr><td>Converteu em registos numéricos alguns registos algébricos contidos na relação considerada</td><td rowspan="2">Foi testando o modelo, recorrendo a dois meios representacionais, papel e folha de cálculo</td></tr>
<tr><td>Repetiu a conversão para diferentes números até encontrar um padrão (no papel)</td></tr>
<tr><td>Aproveitando as potencialidades da folha de cálculo, comprovou um padrão numérico</td><td>Matematizou a situação para obter o modelo</td></tr>
<tr><td>Mobilizou registos algébricos para representar a relação descoberta através do padrão numérico</td><td>Expressou algebricamente o modelo matematizado</td></tr>
</table>

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou os registos numéricos e depois de tratamentos distinguiu a regularidade dos resultados e, logo em seguida, mobilizou um registo verbal para representar o pensamento matemático subjacente.

Retomando o registo algébrico da alínea A2) o aluno fez a interpretação algébrica da situação e fazendo alguns tratamentos obteve uma segunda relação algébrica; para comprovar a validade dessa relação algébrica, converteu os registos algébricos envolvidos na relação e obteve uma relação numérica. O tratamento dos registos numéricos envolvidos na relação proporcionou uma proposição válida, pelo que ficou provada por transitividade a relação aludida pelo aluno.

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva de M&M

Depois de explorar os modelos anteriormente concebidos, através da folha de cálculo, o aluno notou o padrão de que a diferença entre termos consecutivos é constante. Pode-se afirmar que a exploração de modelos anteriores proporcionou um outro modelo adequado para a situação proposta.

O modelo ora criado foi testado algebricamente, partindo do modelo criado na alínea A2); este facto demostra que um modelo pode explicar o outro e segundo a perspetiva de M&M admite-se que os modelos que um aluno concebe podem ser usados mais tarde na construção, na reorganização, no teste e na refinação de construções ou sistemas conceituais (Lesh & Caylor, 2007).

Um resumo da análise da resolução das alíneas B1) e B2)

Evidenciam-se a seguir os resultados extraídos da análise realizada (Tabela 76).

Tabela 76: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B1 e B2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3 /Aluno 3)

<table>
<tr><th>Na perspetiva de TRRS</th><th>Na perspetiva de M&M</th></tr>
<tr><td>Iniciou a tarefa, mobilizando registos numéricos</td><td>Através da folha de cálculo, começou por explorar os modelos anteriormente concebidos,</td></tr>
<tr><td>Realizou diversos tratamentos até distinguir uma regularidade nos resultados</td><td>Notou o padrão de que a diferença entre termos consecutivos é constante</td></tr>
<tr><td>Mobilizou um registo verbal para representar o pensamento matemático subjacente</td><td>Explicitou quão o modelo anteriormente concebido proporciona ideias para resolver a situação proposta</td></tr>
<tr><td>Retomou o registo algébrico da alínea A2) e fez a interpretação algébrica da situação</td><td rowspan="2">Desencadeou um teste algébrico do modelo criado</td></tr>
<tr><td>Fez tratamentos algébricos até obter uma relação equivalente</td></tr>
<tr><td>Converteu os registos algébricos envolvidos na relação e obteve uma relação numérica</td><td>Considerou os dados da situação para comprovar a universalidade do modelo</td></tr>
</table>

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da TRRS

O aluno mobilizou registos numéricos, fez a conversão destes registos para um registo gráfico e a partir do registo gráfico respondeu à questão convertendo a informação obtida com base no registo gráfico numa representação verbal. Para comprovar algebricamente a resposta, o aluno retomou o registo algébrico da alínea A2) e fez a interpretação algébrica da situação;

fazendo alguns tratamentos, obteve uma sentença válida, pelo que, por transitividade, ficou provada a relação aludida pelo aluno.

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva de M&M

Para explicitar e explicar a situação proposta, o aluno recorreu à folha de cálculo enquanto meio representacional e em poucas palavras mostrou uma consolidação dos modelos anteriormente criados. Para explicar algebricamente a situação, o aluno partiu novamente do modelo criado na alínea A2) e adotando procedimentos semelhantes aos aplicados na alínea B2), conseguiu provar a validade do modelo concebido.

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1) e C2)

De seguida, são compilados os principais resultados obtidos na resolução das duas questões (Tabela 77).

Tabela 77: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1 e C2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos numéricos	*Recorreu à folha de cálculo onde inseriu o gráfico que representa a situação em análise*
Fez a conversão destes registos num registo gráfico	
Convertendo o registo gráfico em verbal, respondeu à questão	*Verbalmente mostrou uma consolidação dos modelos anteriormente criados*
Para comprovar algebricamente a resposta, retomou o registo algébrico da alínea A2)	*Para explicar algebricamente a situação, partiu novamente do modelo criado na alínea A2)*
Fazendo alguns tratamentos, obteve uma sentença válida	*Considerando as condições da situação, conseguiu provar a validade do modelo concebido*

Análise da alínea D) na perspetiva da TRRS

A resolução foi feita mediante a mobilização do registo gráfico; o aluno interpretou este primeiro registo e conseguiu representar verbalmente o que o registo gráfico permitia concluir.

Na perspetiva de M&M

Ainda que possa não ser imediatamente evidente, esta situação proporciona a criação de um modelo explicativo que pode ser reutilizado para explicar as ocorrências que sucedem a partir de uma certa ordem da sucessão.

Um resumo da análise da resolução da alínea D)

Na tabela que se segue, ilustra-se o essencial que decorre da análise efetuada (Tabela 78).

Tabela 78: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea D segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 3 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
O aluno inicialmente fez a mobilização de um registo gráfico;	*o aluno aproveitou as potencialidades da folha de cálculo, expressando graficamente o modelo de descreve a situação sugerida*
Seguidamente mobilizou registos verbais para expressar a interpretação do registo gráfico destacando o que registo gráfico permitia concluir	*O aluno evidenciou que o modelo ora expresso graficamente detém a função explicativa e que pode ser explorada ou reutilizado para explicar as ocorrências que sucedem a partir de uma certa ordem da sucessão*

5.3.7 Resolução da Tarefa 4 - A Plantação de Laranjeiras

Resolução da alínea A1

O Aluno 3 iniciou a resolução desta tarefa (Anexo 7) formando uma sucessão das quantidades de laranjeiras existentes nos primeiros 4 dias e ao mesmo tempo foi deduzindo as diferenças entre cada termo e o seu antecedente; interpretou estas diferenças como sendo as quantidades plantadas em cada dia e desta forma conseguiu obter os primeiros 3 termos da sucessão formada por estas quantidades (Fig. 192).

	A	B	C
1	dia		laran. Plantadas no dia
2	d1	4	4
3	d2	9	=B3-B2
4	d3	16	=B4-B3
5	d4	25	=B5-B4
6	d5		=C5+2
7	d6		=C6+2

	A	B	C	D	E
1	dia				
2	d1	4	4		
3	d2	9	5		
4	d3	16	7		
5	d4	25	9		
6					
7					

Figura 192: Excerto de Folha de Cálculo e de vídeo que mostram a obtenção dos primeiros termos da sucessão de quantidades de laranjeiras plantadas em cada dia

Em seguida, constatou que nesta nova sucessão a diferença entre cada termo e o seu antecedente é constante; deste modo, recorrendo à folha de cálculo, introduziu uma fórmula que lhe permitiu obter mais termos da sucessão por recorrência (Fig. 193).

	A	B	C	D
1	dia			
2	d1	4	4	
3	d2	9	=B3-B2	
4	d3	16	=B4-B3	
5	d4	25	=B5-B4	
6	d5		=C5+2	
7	d6		=C6+2	
8	d7		=C7+2	
9	d8		=C8+2	
10	d9		=C9+2	

	A	B	C	D
1	dia			
2	d1	4	4	
3	d2	9	5	
4	d3	16	7	
5	d4	25	9	
6	d5		11	
7	d6		13	
8	d7		15	
9	d8		17	
10	d9		19	

Figura 193: Excerto de Folha de Cálculo e de vídeo que mostram aplicação recursiva de uma fórmula para obtenção dos primeiros termos da sucessão de quantidades de laranjeiras plantadas em cada dia

O aluno registou este procedimento no papel e escreveu uma relação matemática que permite obter os termos da sucessão por recorrência (Fig. 194).

A1) $d_1 = 4$

$d_2 = 9 - 4 = 5$

$d_3 = 16 - 9 = 7$

$d_4 = 25 - 16 = 9$

para saber a quantidade plantada em cada dia basta contar e subtrair a quantidade do dia anterior.
Para continuar vamos adicionar 2 na quantidade do dia anterior.

$d_n = d_{n-1} + 2$

Figura 194: Registo dos primeiros termos da sucessão de quantidades de laranjeiras plantadas em cada dia e a relação recursiva entre os mesmos

Resolução da alínea A2

O aluno explorou a sucessão na folha de cálculo e constatou que a sucessão é uma PA, mas notou que esta condição é verificada se o primeiro termo for excluído; assim, deduziu o termo geral de uma progressão aritmética, estabelecendo antes o primeiro termo e a condição inicial (Fig. 195).

A2) A partir do 2º termo a sucessão é uma P.A de razão 2. e 1º termo 5

$\cancel{d_n = d_2 + (n+}$

$d_n = d_2 + (n-2)\,r$

$d_n = 5 + (n-2) \cdot 2$

$d_n = 5 + 2n - 4$

$d_n = 2n + 1$ com $n \geq 2$ sendo $d_1 = 4$

Figura 195: Registo do termo geral da sucessão de quantidades de laranjeiras plantadas em função dos dias

Resolução da Alínea B1

Na resolução da alínea B1, que consiste em saber a quantidade total de laranjeiras que estariam plantadas, o aluno indicou os primeiros quatro termos da sucessão que assim se foi construindo e no final colocou reticências, mas na folha de cálculo o aluno conseguiu obter mais termos ao aplicar o critério que estabeleceu na resolução da alínea B2), como veremos adiante.

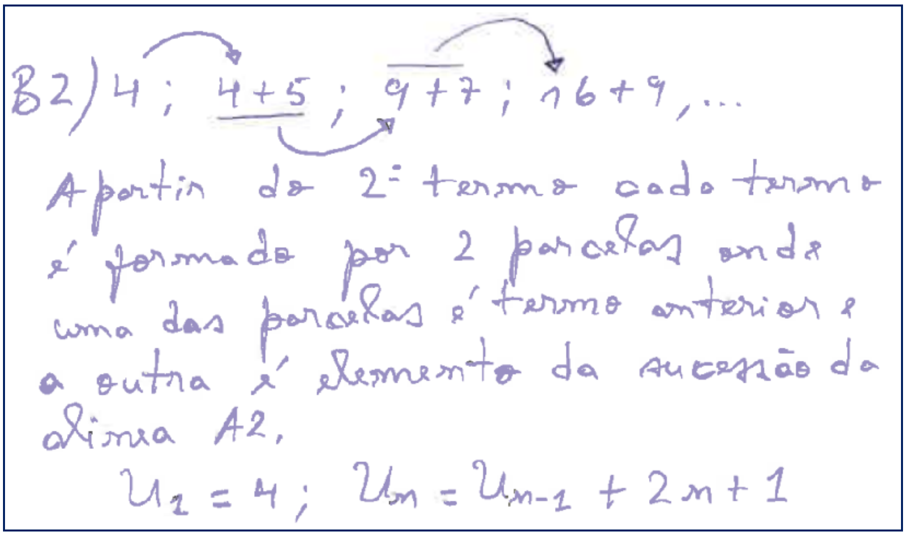
Resolução da Alínea B2

Para descobrir um critério que permitisse calcular a quantidade de laranjeiras que estarão plantadas nos primeiros 100 dias, o aluno enveredou por expressar cada termo como sendo a some do anterior com alguma quantidade; desta forma, observou que a segunda parcela é um elemento da sucessão da alínea A2 e seguindo este critério ensaiou na folha de cálculo e registou no papel as suas ideias (Figuras 196 e 197).

	I	J	K	L	M
1					
2	dias	total das plantadas			
3	1	4			4
4	2	9		9=4+5	=4+2*I4+1
5	3	16		16=9+7	=J4+2*I5+1
6	4	25		25=16+9	=M5+2*I6+1
7	5				=M6+2*I7+1
8	6				=M7+2*I8+1
9	7				=M8+2*I9+1
10	8				=M9+2*I10+1
11	9				=M10+2*I11+
12	10				=M11+2*I12+
13	11				=M12+2*I13+

	I	J	K	L	M
1					
2	dias	total das plantadas			
3	1	4			4
4	2	9		9=4+5	9
5	3	16		16=9+7	16
6	4	25		25=16+9	25
7	5				36
8	6				49
9	7				64
10	8				81
11	9				100
12	10				121
13	11				144

Figura 196: Obtenção dos primeiros termos da sucessão de quantidades de laranjeiras que estarão plantadas


B2) 4; 4+5; 9+7; 16+9, ...

A partir do 2.º termo cada termo é formado por 2 parcelas onde uma das parcelas é termo anterior e a outra é elemento da sucessão da alínea A2,

$u_1 = 4$; $u_n = u_{n-1} + 2n + 1$

Figura 197: Registo dos primeiros termos da sucessão de quantidades de laranjeiras que estarão plantadas e explicação da concepção do termo geral

Resolução da alínea C1

Depois de voltar a ler o enunciado da tarefa, fez uma observação atenta, concluiu que nas figuras os pontos externos formam quadrados de lados respetivamente iguais a 1, 2, 3, etc. e por isso a área destes quadrados é efetivamente 1, 4, 9, … Então, recorrendo à folha de cálculo obteve os quadrados dos números naturais.

Resolução da alínea C2

Tal como observado na descrição da resolução da alínea anterior, o aluno considerou:

> "1, 4, 9, … são os quadrados dos números naturais, logo $u_n = n^2$".

Resolução da alínea D1

Para resolver a alínea D1, o aluno considerou as duas sucessões, pelo que optou por dividir as duas sucessões, termo a termo, e recorreu ao computador, utilizando a coluna V onde inseriu uma fórmula para dividir os termos correspondentes situados nas colunas M e S (Fig. 198)).

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
						m2			
			Lados	metros quad		ou			
4			1	1		1			4
9			2	4		4			=M4/S4
16			3	9		9			
25			4	16		16			
36			5	25		25			
49			6	36		36			
64			7	49		49			

M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
						m2			
			Lados	metros quad		ou			Densid
4			1	1		1			4
9			2	4		4			2,25
16			3	9		9			1,777778
25			4	16		16			1,5625
36			5	25		25			1,44
49			6	36		36			1,361111
64			7	49		49			1,306122

Figura 198. Obtenção dos primeiros termos da sucessão da densidade da população de árvores em função dos dias

Resolução da alínea D2

O aluno propôs um termo geral formado pelo quociente dos termos gerais já referenciados nas resoluções das alíneas B2) e C2) e indicou o valor inicial do numerador (Fig. 199).

D2) A expressão teríamos: $d_n = \frac{u_n}{n^2}$ onde
$u_n = u_{n-1} + 2n + 1$ com $u_1 = 4$.

Figura 199: Registo do termo geral da sucessão da densidade da população de árvores em função dos dias

Resolução da alínea E

Para resolver a alínea E, o aluno elaborou um gráfico tendo em conta os termos da sucessão (densidade) já calculados durante a resolução da alínea D1), fez a devida leitura deste gráfico (Fig. 200) e concluiu, dizendo o seguinte:

> "Observando a tabela e o gráfico no computador, nota-se que os termos se aproximam a 1. A sucessão é convergente".

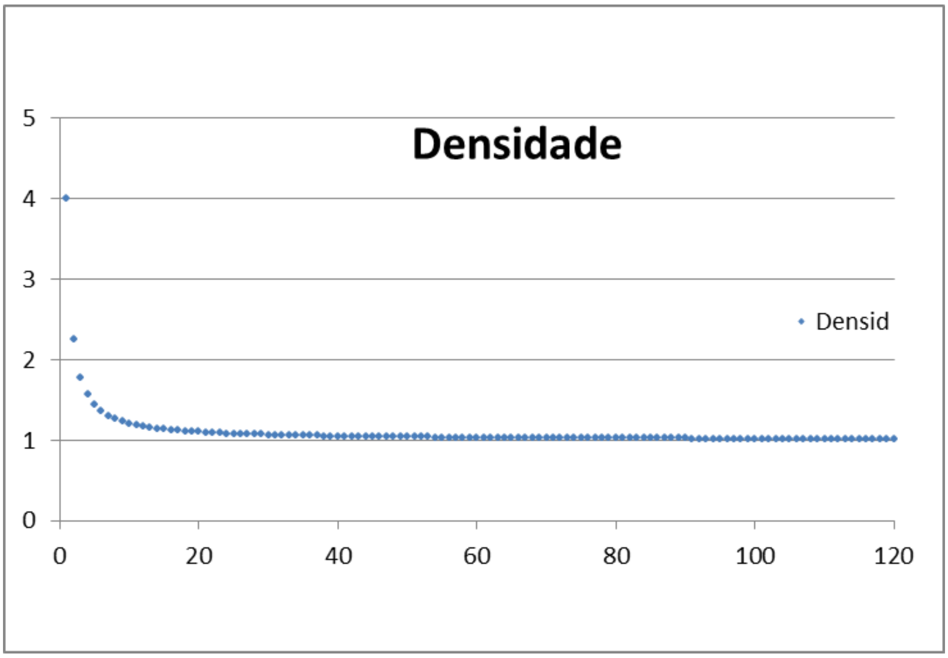


Figura 200: Gráfico da sucessão da densidade da população de árvores em função dos dias

5.3.8 Análise e Interpretação da Tarefa 4

Análise da alínea A1) na perspetiva da TRRS

O aluno iniciou a atividade, convertendo as representações esquemáticas em numéricas; logo depois, realizou tratamentos destes registos numéricos na folha de cálculo e, depois de descobrir um padrão, o aluno tirou partido das potencialidades da folha de cálculo e fez a conversão de registos numéricos em algébricos (na folha de cálculo), o que lhe permitiu de imediato obter mais termos da sucessão.

Para registar alguns resultados e as suas ideias, o aluno mobilizou registos algébricos e a respetiva conversão em registos verbais.

Análise da alínea A1) na perspetiva de M&M

Partindo dos dados da situação real proposta, o aluno para iniciar a formação do seu modelo, começou por criar uma sequência com as quantidades de laranjeiras existentes nos primeiros 4 dias e ao mesmo tempo foi deduzindo as diferenças entre cada termo e o seu antecedente; o primeiro modelo ficou evidente quando o aluno conseguiu obter os primeiros termos da sucessão das quantidades plantadas em cada dia.

O aluno recorreu à folha de cálculo para explorar o modelo ora construído e descobriu as primeiras características do modelo. A partir desta descoberta, o modelo melhorou pois o aluno fez a matematização do mesmo ao conceber um critério de obtenção dos termos subsequentes da sucessão a partir dos precedentes.

Recorrendo novamente à folha de cálculo, o aluno aplicou o modelo de tal modo que obteve por recorrência mais termos da sucessão das quantidades de laranjeiras plantadas em cada dia, e a questão ficou assim resolvida. Para que o modelo se torne facilmente generalizável e para garantir a reutilização do mesmo, o aluno registou no papel os seus resultados, evidenciando alguns passos e procedimentos envolvidos na execução da tarefa.

Um resumo da análise da resolução da alínea A1)

Apresenta-se a seguir a síntese dos resultados da análise produzida (Tabela 79).

Tabela 79: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A1 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Iniciou a atividade convertendo as representações esquemáticas em numéricas	*A partir da interpretação da situação, extraiu dados numéricos inserindo-os na folha de cálculo*
Realizou tratamentos destes registos numéricos na folha de cálculo até descobrir uma regularidade nos resultados	*Através da observação dos dados numéricos descobriu padrões, começando a matematização da situação.*
Inseriu uma fórmula na folha de cálculo e fez mais tratamentos de forma automatizada	*Aplicou o modelo na folha de cálculo e obteve mais termos da sucessão das quantidades plantadas em cada dia*
Mobilizou registos algébricos para registar alguns resultados e ideias	*Registou os resultados e os procedimentos utilizados na criação do modelo*

Análise da alínea A2) na perspetiva da TRRS

Ao explorar a sucessão na folha de cálculo, o aluno constatou um padrão a partir dos registos numéricos e converteu-os em registos algébricos e fez tratamento destes registos algébricos até obter uma relação que considerou como termo geral.

Análise da alínea A2) na perspetiva de M&M

O aluno, focando a sua análise nos termos da sucessão, depois de uma profunda exploração dos padrões numéricos, considerou que, para resolver a situação que lhe foi proposta, seria possível fazer uma reutilização de um modelo previamente conhecido por ele, mas que o mesmo precisaria de ser reajustado, desta feita.

Considerou que a sucessão ora explorada é uma Progressão Aritmética, mas que esta condição é verificada se o primeiro termo for ignorado nessa análise; com esta visão, deduziu o termo geral de uma "PA", estabelecendo antes o primeiro termo e a condição inicial de formação dos termos.

Mais uma vez se manifesta a influência da folha de cálculo pois o aluno de imediato não invoca a noção de Progressão Aritmética e realiza a tarefa, considerando a recursividade para obter a lei de formação dos termos.

Um resumo da análise da resolução da alínea A2)

Segue-se uma síntese dos resultados da análise, de acordo com as perspetivas teóricas (Tabela 80).

Tabela 80: Súmula dos resultados extraídos da resolução da alínea A2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Fez a interpretação e conversão de registos numéricos em algébricos	*Depois da análise da situação proposta, considerou que seria possível fazer uma reutilização de um modelo previamente conhecido*
Efetuou tratamento destes registos algébricos até obter uma relação que considerou como termo geral	*Reajustou o modelo e estabeleceu as condições em que seria aplicável*

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva da TRRS

O aluno inicialmente converteu a representação esquemática em numérica e recorrendo à folha de cálculo fez tratamentos; depois de constatar um padrão, automatizou este tratamento. As ideias utilizadas para automatizar o tratamento dos registos numéricos permitiram ao aluno converter estes registos numéricos em algébricos.

Ao registar no papel, o Aluno 3 começou por fazer uma combinação de registos numéricos com registos esquemáticos para ilustrar a obtenção dos termos. Para terminar a tarefa, o aluno mobilizou registos verbais e algébricos, tendo em vista apresentar o termo geral e a ideia fundamental que impulsionou a realização da atividade.

Análise das alíneas B1) e B2) na perspetiva de M&M

Partindo dos dados da situação proposta, o aluno para iniciar a formação do seu modelo, formou inicialmente uma sequência das quantidades de laranjeiras existentes nos primeiros 4 dias e constatou que cada termo pode ser obtido se for adicionado uma certa quantidade ao anterior. Explorando este modelo inicial, escreveu os primeiros termos da sucessão. Assim, o aluno conseguiu matematizar o problema, ao considerar que as quantidades então adicionadas correspondem a elementos da sucessão obtida na alínea A2). Combinando o modelo inicialmente obtido através da sua combinação com o modelo obtido na resolução da alínea A2), formou um modelo que permite obter os termos da sucessão por recorrência.

Recorrendo novamente à folha de cálculo, o aluno aplicou o modelo de tal modo que obteve por recorrência mais termos da sucessão das quantidades de laranjeiras que estariam a ser plantadas em cada dia.

Para que o modelo se tornasse facilmente generalizável e para garantir a reutilização do mesmo, o aluno registou no papel os seus resultados, evidenciando esquematicamente o critério considerado para obter os termos.

Um resumo da análise da resolução das alíneas B1) e B2)

Considerando a análise anterior, apresentam-se sumariamente os respetivos resultados (Tabela 81).

Tabela 81: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas B1 e B2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Converteu a representação esquemática em numérica	*Para iniciar a formação do seu modelo, avançou com uma interpretação da situação e extração de dados*
Recorrendo à folha de cálculo fez tratamentos até encontrar regularidades	*Explorando os dados na folha de cálculo, concebeu um primeiro modelo ao constatar que existe uma regularidade*
Depois de constatar um padrão automatizou este tratamento	*Conseguiu matematizar a situação ao combinar este modelo com um modelo concebido na alínea A2, pelo que obteve um novo modelo que ao ser aplicado resolve o problema*
Converter estes registos numéricos em algébricos	
Ao registar no papel, mobilizou simultaneamente registos numéricos e esquemáticos	*Registou no papel os seus resultados evidenciando esquematicamente o critério considerado para obter o modelo*

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva da TRRS

Para resolver a situação colocada, o aluno começou por interpretar os registos verbais e esquemáticos e converteu-os em registos numéricos. Consolidando o seu domínio da situação o aluno fez tratamento dos registos numéricos e verificou uma regularidade nos resultados; em seguida, recorreu à folha de cálculo para fazer mais conversões, fez referência ao padrão encontrado e converteu os registos numéricos em algébricos, inferindo a versão final do registo algébrico a partir dos registos numéricos, numa espécie de conversão direta.

Análise das alíneas C1) e C2) na perspetiva de M&M

Para resolver a situação, o aluno basicamente socorreu-se dos seus conhecimentos prévios; isto é percebível porque depois de uma atenta observação constatou que nas figuras os pontos externos formam quadrados de lados respetivamente iguais a termos da sucessão dos números naturais e tendo em atenção a fórmula de cálculo de área de um quadrado, esclareceu que os termos da sucessão são os quadrados perfeitos.

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1) e C2)

A seguir é oferecida uma súmula dos resultados obtidos (Tabela 82).

Tabela 82: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1 e C2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Interpretou os registos verbais e esquemáticos	*Valendo-se dos seus conhecimentos prévios, observou a situação e detetou objetos matemáticos conhecidos*
Converteu os registos verbais e esquemáticos em registos numéricos	*Tendo em conta os objetos matemáticos envolvidos na situação e o domínio do modelo que se propôs utilizar, extraiu dados numéricos.*
Fez tratamento dos registos numéricos na folha de cálculo e observou uma regularidade nos resultados	*Utilizou espontaneamente o modelo que encontrou, obteve alguns resultados e descobriu um padrão*
Recorreu à folha de cálculo para fazer mais conversões	*Para matematizar o modelo inseriu-o na folha de cálculo onde de forma automatizada obteve mais resultados*
Converteu o registo numérico em algébrico	*Expressou o modelo algebricamente*

Análise das alíneas D1), D2) e E) na perspetiva da TRRS

Em primeira instância, o aluno mobilizou registos numéricos e, utilizando a folha de cálculo, fez o tratamento dos registos numéricos que resultaram das resoluções das alíneas B) e C); como este tratamento foi diretamente automatizado, o aluno considerou a possibilidade de utilizar de forma combinada o registos algébricos das alíneas B2 e C2), conseguindo assim um registo algébrico para representar a densidade como sucessão.

Converteu os registos numéricos num registo gráfico e através da leitura do gráfico, mobilizou registos verbais para expressar as propriedades da sucessão observadas no gráfico.

Análise das alíneas D1), D2) e E) na perspetiva de M&M

Tendo em atenção o enunciado da situação proposta, para formar o modelo que pudesse explicitar a solução da questão em análise, o aluno fez uma reutilização combinada dos modelos obtidos nas alíneas B2) e C2) e conseguiu matematizar o modelo ao representar analiticamente a sucessão que indica a variação da densidade populacional em função dos dias. Recorrendo à folha de cálculo, o aluno explorou o modelo ora considerado e conseguiu esclarecer os aspetos inerentes a convergência da sucessão, utilizando um gráfico que construiu para o efeito.

Um resumo da análise da resolução das alíneas D1), D2) e E)

A seguir, estão sintetizadas as principais ideias que emergiram da análise realizada (Tabela 83).

Tabela 83: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas D1, D2 e E segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 4 /Aluno 3)

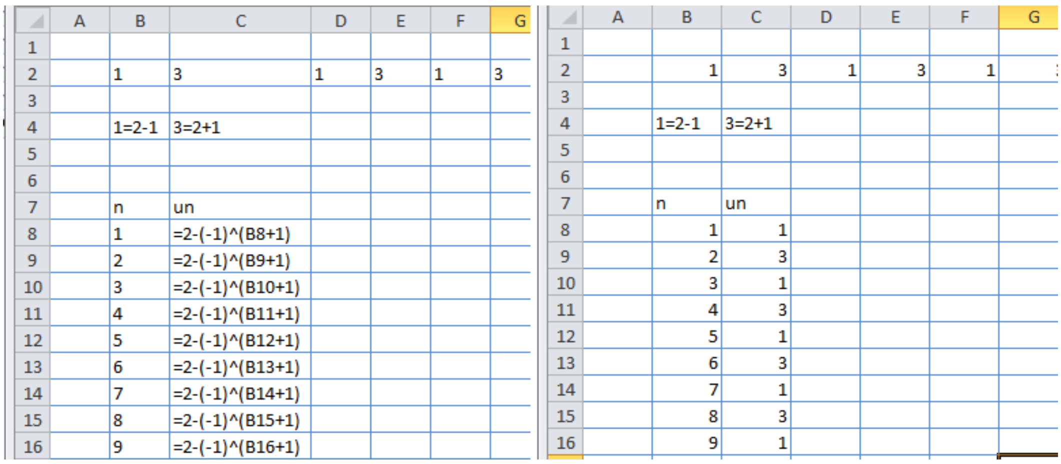
Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos numéricos	*Fez uma reutilização combinada dos modelos obtidos nas alíneas B2) e C2) e concebeu um terceiro modelo*
Fez o tratamento dos registos numéricos na folha de cálculo	*Matematizou o modelo que resultou da combinação dos modelos obtidos nas alíneas B2) e C2)*
Mobilizou registos algébricos	*Expressou algebricamente o modelo concebido*
Fez o tratamento dos registos algébricos e obteve uma relação geral	
Mobilizou registos algébricos para representar as condições a considerar na relação	*Destacou as condições iniciais a ter em conta na utilização do modelo*
Converteu os registos numéricos num registo gráfico	*Para uma melhor interpretação do modelo, representou graficamente o modelo matemático*
Mobilizou registos verbais para representar as propriedades observadas no gráfico	*Interpretou a situação recorrendo ao modelo criado*

5.3.9 Resolução da Tarefa 5 - O coração: “Diástole e Sístole”

O Aluno 3 iniciou a resolução da tarefa (Anexo 8), atribuindo o valor 1 para diástole e o valor 3 para sístole; repetiu a sequência destes valores numéricos, formando uma sucessão alternada no intervalo B2:G2 e copiou a sucessão para o papel.

Resolução da alínea A

O aluno iniciou uma exploração na folha de cálculo e, depois de várias tentativas, conjeturou um padrão que consistia em escrever cada termo como uma soma onde uma das parcelas é o 2 e a outra parcela é um termo da sucessão alternada formada por 1 e -1. Depois de adquirir alguma certeza, utilizou o intervalo B7:C16 e criou uma sucessão conforme se pode ver na figura 201.



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1	3	1	3	1	3
3							
4		1=2-1	3=2+1				
5							
6							
7		n	un				
8		1	=2-(-1)^(B8+1)				
9		2	=2-(-1)^(B9+1)				
10		3	=2-(-1)^(B10+1)				
11		4	=2-(-1)^(B11+1)				
12		5	=2-(-1)^(B12+1)				
13		6	=2-(-1)^(B13+1)				
14		7	=2-(-1)^(B14+1)				
15		8	=2-(-1)^(B15+1)				
16		9	=2-(-1)^(B16+1)				

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1	3	1	3	1	
3							
4		1=2-1	3=2+1				
5							
6							
7		n	un				
8		1	1				
9		2	3				
10		3	1				
11		4	3				
12		5	1				
13		6	3				
14		7	1				
15		8	3				
16		9	1				

Figura 201: Formação da sucessão alternada proposta pelo Aluno 3 e inserção de uma fórmula para obtenção da mesma

Desta feita, o aluno confirmou que se teria a sucessão definida por: $u_n = 2 + (-1)^n$.

Resolução da alínea B

O aluno recorreu a um gráfico (Fig. 202) para examinar a monotonia da sucessão e depois de observar cuidadosamente o gráfico que inseriu na folha de cálculo, passando o cursor em diversos pontos, concluiu que:

> "A sucessão não é crescente nem decrescente mas também não é constante, ela é somente crescente quando passa do termo de ordem impar para termo de ordem par e é decrescente quando passa do termo de ordem par para o termo de ordem impar".

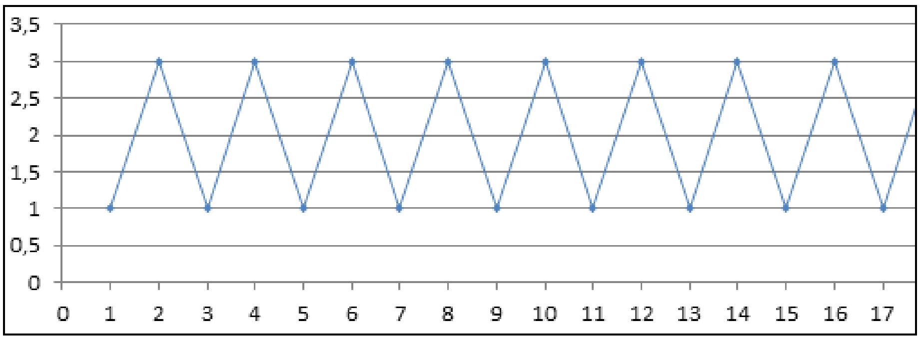


Figura 202: Gráfico da sucessão alternada proposta pelo Aluno 3

Resolução da alínea C1

Para obter a média entre cada 2 termos consecutivos, copiou a sucessão e colou-a no intervalo I2:J16 e seguidamente inseriu uma fórmula na célula L3 onde calculou a média das células J3 e J4. Depois, arrastou esta fórmula para baixo e obteve a sucessão Vn que é uma sucessão constante com valor numérico 2, tendo assim registado o termo geral Vn=2 (Fig. 203).

	I	J	K	L
1				
2	n	un		Vn
3	1	=2-(-1)^(I3+1)		=(J3+J4)/2
4	2	=2-(-1)^(I4+1)		=(J4+J5)/2
5	3	=2-(-1)^(I5+1)		=(J5+J6)/2
6	4	=2-(-1)^(I6+1)		=(J6+J7)/2
7	5	=2-(-1)^(I7+1)		=(J7+J8)/2
8	6	=2-(-1)^(I8+1)		=(J8+J9)/2

	I	J	K	L	J
1					
2	n	un		Vn	
3	1	1		2	
4	2	3		2	
5	3	1		2	
6	4	3		2	
7	5	1		2	
8	6	3		2	

Figura 203: Obtenção de uma sucessão constante através de cálculo das médias de termos consecutivos da sucessão alternada proposta pelo Aluno 3

Resolução da alínea C2

O aluno concluiu que a sucessão do termo geral V_n=2, obtida na alínea anterior é:

> “Convergente, não monótona, constante, limitada, com minorante igual a 2 e majorante igual a 2”.

Estas conclusões foram proferidas depois de o aluno ter lido o gráfico que elaborou a esse propósito (Fig. 204).

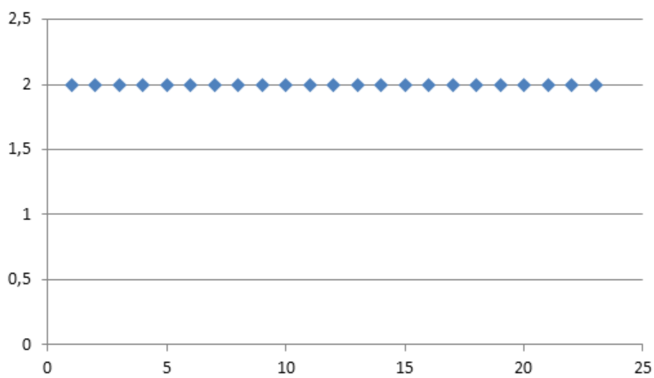


Figura 204: Gráfico da sucessão constante das médias entre termos consecutivos da sucessão alternada proposta pelo Aluno 3

Resolução da alínea D1

Depois de ter subtraído os termos correspondentes das sucessões Un e Vn, o aluno obteve a sucessão Wn, uma sucessão alternada formada por -1 e 1. Para atingir este objetivo, recorreu à folha de cálculo (Fig. 205).

	I	J	K	L	M	S
1						
2	n	un		Vn		Wn=un-vn
3	1	=2-(-1)^(I3+1)		=(J3+J4)/2		=J3-L3
4	2	=2-(-1)^(I4+1)		=(J4+J5)/2		=J4-L4
5	3	=2-(-1)^(I5+1)		=(J5+J6)/2		=J5-L5
6	4	=2-(-1)^(I6+1)		=(J6+J7)/2		=J6-L6
7	5	=2-(-1)^(I7+1)		=(J7+J8)/2		=J7-L7
8	6	=2-(-1)^(I8+1)		=(J8+J9)/2		=J8-L8
9	7	=2-(-1)^(I9+1)		=(J9+J10)/2		=J9-L9
10	8	=2-(-1)^(I10+1)		=(J10+J11)/2		=J10-L10

	I	J	K	L	S
1					
2	n	un		Vn	Wn=un-vn
3	1	1		2	-1
4	2	3		2	1
5	3	1		2	-1
6	4	3		2	1
7	5	1		2	-1
8	6	3		2	1
9	7	1		2	-1
10	8	3		2	1

Figura 205: Obtenção da sucessão alternada obtida pela subtração da sucessão alternada pela sucessão das médias dos termos consecutivos

Resolução da alínea D2

O aluno recorreu novamente a um gráfico (Fig. 206) para avaliar e caracterizar a sucessão e depois de observar cuidadosamente o gráfico que inseriu na folha de cálculo, concluiu que:

> "A sucessão não é crescente nem decrescente mas também não é constante, ela é crescente quando passa do termo de ordem ímpar para termo de ordem par e é decrescente quando passa do termo de ordem par para termo de ordem impar, não é convergente, o majorante é o 1 ao passo que o minorante é -1, e é limitada".

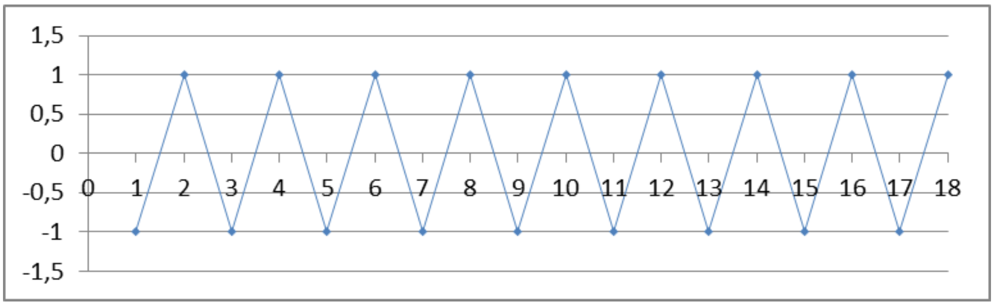


Figura 206: Gráfico da sucessão alternada típica

5.3.10 Análise e Interpretação da Tarefa 5

Análise das alíneas A) e B) na perspetiva da TRRS

Tal como sugere a própria tarefa, a primeira preocupação do aluno foi a de mobilizar registos numéricos para representar a diástole e a sístole. Fez então o tratamento destes registos numéricos, e obteve o objeto matemático pretendido, obviamente representado com registos numéricos.

O aluno fez experimentalmente alguns tratamentos até distinguir uma regularidade, recorrendo à folha de cálculo. Depois, converteu o registo numérico num registo algébrico e de forma automática fez novos tratamentos. Converteu o registo numérico num registo gráfico e mobilizou registos verbais para representar as propriedades do objeto matemático agora representado através de um registo gráfico.

Análise das alíneas A) e B) na perspetiva de M&M

O aluno começou a modelação da situação, escolhendo os números 1 e 3 para representar as fases do ciclo cardíaco e depois formou a sucessão alternada com estes dois números (termos da sucessão), utilizando a folha de cálculo.

Desencadeou uma análise minuciosa da sucessão até que conseguiu criar encontrar uma via para matematizar o primeiro modelo ao conjeturar um padrão que consiste em escrever cada termo como uma soma onde uma das parcelas é o 2 e a outra parcela é um termo da sucessão alternada formada por 1 e -1. A exploração deste modelo permitiu ao aluno fazer a formalização do mesmo e portanto ele conseguiu escrever a expressão do termo geral da sucessão.

Utilizando este termo geral e as potencialidades da folha de cálculo, o aluno obteve vários termos da sucessão. Para melhor explorar as características da sucessão, o aluno recorreu a um gráfico que lhe permitiu enxergar as prosperidades da sucessão no que concerne a monotonia, extremos e convergência da sucessão.

Um resumo da análise da resolução das alíneas A) e B)

A seguinte tabela condensa as principais ideias resultantes da análise anterior (Tabela 84).

Tabela 84: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas A e B segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 5 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	*Na perspetiva de M&M*
Mobilizou registos numéricos	*Começou a modelação da situação escolhendo os números 1 e 3 para representar as fases do ciclo cardíaco*
Fez tratamento dos registos numéricos	*Combinando os elementos escolhidos concebeu um modelo*
Experimentalmente fez alguns tratamentos até distinguir uma regularidade	*Explorou o modelo e descobriu um padrão que possibilitou o início da matematização*
Recorrendo à folha de cálculo, converteu o registo numérico num registo algébrico	*Prosseguindo a matematização recorreu à folha de cálculo onde aplicou o modelo*
Fez tratamentos na folha de cálculo de forma automática	*A aplicação do modelo permitiu obter resultados satisfatórios conforme a situação*
Representou algebricamente o termo geral	*Expressou algebricamente modelo concebido*

da sucessão	*matemático*
Converteu o registo numérico num registo gráfico	*Recorreu à folha de cálculo onde expressou graficamente o modelo concebido*
Mobilizou registos verbais para representar as propriedades do objeto matemático representado através do registo gráfico	*O gráfico permitiu fazer a leitura das prosperidades do modelo, pelo que conseguiu explicar o modelo e a situação ficou tratada*

Análise das alíneas C1), C2), D1) e D2) na perspetiva da TRRS

A resolução das alíneas C1), C2), D1) e D2) foi realizada, utilizando o objeto matemático (sucessão numérica) concebido na resolução das alíneas A) e B). Para iniciar a resolução, o aluno mobilizou registos numéricos, fez tratamentos na folha de cálculo e observou as regularidades, confirmando assim a validade das transformações consideradas.

Mobilizou os registos algébricos e efetuou os devidos tratamento conforme os enunciados, ou seja, realizou os tratamentos dos registos algébricos, tendo em conta a informação dada em registos verbais.

Análise das alíneas C1), C2), D1) e D2) na perspetiva de M&M

Para resolver as alíneas C1), C2), D1) e D2) o aluno combinou os modelos conforme a situação proposta para cada caso. Conseguiu construir e explorar o modelo de sucessão constante e o modelo de sucessão alternada. Em termos essenciais, apresentou as propriedades destes tipos de sucessões. A exploração da sucessão alternada foi basicamente uma reutilização das ideias produzidas nas alíneas A) e B).

Um resumo da análise da resolução das alíneas C1), C2), D1) e D2)

Na tabela abaixo estão indicados os resultados mais importantes da análise feita (Tabela 85).

Tabela 85: Súmula dos resultados extraídos da resolução das alíneas C1, C2, D1 e D2 segundo cada uma das perspetivas teóricas (Tarefa 5 /Aluno 3)

Na perspetiva de TRRS	***Na perspetiva de M&M***
Considerando o objeto matemático concebido na resolução das alíneas A) e B), mobilizou registos numéricos e fez tratamentos na folha de cálculo	*Combinou os modelos das alíneas A) e B) conforme a situação proposta para cada caso.*
A regularidade dos resultados dos tratamentos efetuados na folha de cálculo permitiram confirmar a validade das transformações consideradas.	*A combinação dos modelos permitiu o aluno construir e explorar o modelo de sucessão constante e o modelo de sucessão alternada.*
Mobilizou registos algébricos e efetuou tratamentos, tendo em conta a informação dada	*Fez uma reutilização das ideias produzidas nas alíneas A) e B) na exploração de modelos de sucessões alternadas, destacando propriedades destes tipos de sucessões*

Capítulo 6

Resultados e Conclusões

Neste capítulo, apresentam-se os mais importantes resultados do presente estudo, alinhados com as questões de investigação definidas inicialmente e apresentadas no Capítulo 1.

Dando prossecução à perspetiva metodológica da Engenharia Didática, o primeiro ponto aqui tratado refere-se a uma análise *a posteriori* e validação da sequência didática implementada em sala de aula, para o ensino e aprendizagem do tópico Sucessões Numéricas, no âmbito da disciplina de Análise Matemática num curso de Engenharia do Ambiente. A sequência didática foi planificada de acordo com os conteúdos curriculares a serem tratados no referido tópico e foi centrada em duas opções didáticas: a resolução de problemas contextualizados, também designados como atividades propulsoras de modelos (MEAs), e o recurso à folha de cálculo na exploração e resolução das questões propostas. Procura-se, neste ponto, salientar os benefícios e contribuições desta proposta pedagógica para as aprendizagens dos alunos e para a compreensão de conceitos matemáticos basilares no domínio da Análise Matemática.

No segundo ponto, são discutidos os resultados mais significativos que emergiram da análise dos dados acerca das formas como os alunos utilizaram diversos registos de representações semióticas (tendo em conta a perspetiva da TRRS) e de como estes modos de representação se podem relacionar com a construção de modelos conceituais (na perspetiva M&M) aliados a um processo de modelação matemática (sob a forma numérica, gráfica ou algébrica).

Na terceira secção, é revisitada a importância do recurso à folha de cálculo na realização das cinco tarefas propostas, procurando descrever e compreender o papel que este recurso tecnológico revelou ter na aprendizagem dos conceitos matemáticos visados e como se coadunou com a preocupação de representação escrita e de formalização matemática.

Por fim, são tecidas considerações finais, que buscam fazer uma síntese das conclusões do estudo, nomeadamente, considerando as virtualidades da opção didática implementada por contraste com abordagens de ensino tradicionais.

6.1 Validação da Sequência Didática sobre o Tópico Sucessões Numéricas

A sequência didática implementada no presente estudo foi concebida com o propósito de colocar os alunos perante situações contextualizadas que envolvessem conceitos matemáticos fundamentais do tópico sucessões numéricas. Assim, os vários problemas ou atividades geradoras de modelos visaram a construção de modelos concetuais de sucessão (incluindo o significado de termo e ordem do termo); modos de definir uma sucessão (por uma relação de recorrência e por uma expressão do termo geral); tipos especiais de sucessões, designadamente progressões aritméticas e geométricas e suas propriedades; subsucessão; monotonia; e convergência (limite real).

Simultaneamente, a sequência envolvia a exploração de diversos modos de representação de sucessões e do respetivo comportamento. Também pretendia que os alunos, ao trabalharem com atividades geradoras de modelos, desenvolvessem o sentido e a compreensão dos conceitos matemáticos, criando modelos conceptuais enriquecidos e suportados por situações reais ou realistas que contribuíssem para uma fácil interpretação dos resultados. A título de exemplo, na tarefa dos cubos de gelo é fácil de antever que o nível de água no copo aumente com a quantidade de cubos introduzidos e que esse nível suba com acréscimos constantes; de igual modo, é fácil entender que o batimento cardíaco possa ser modelado por uma sucessão alternada.

Tendo em conta os resultados espelhados no capítulo anterior, é agora possível concluir que a sequência didática se revelou adequada ao tratamento dos vários conceitos, definições e métodos matemáticos relativos ao tópico em estudo. Os alunos revelaram, de uma forma geral, uma clara adesão às tarefas propostas e conseguiram responder de forma correta e empenhada às diversas questões propostas.

Tal como foi enfatizado nos capítulos 2 e 4, de acordo com a Teoria das Situações Didáticas, o aluno é considerado um pesquisador “potencial” pois durante a realização da sua atividade matemática, concebe e experimenta conjeturas, formula hipóteses, formula e constrói modelos e procura validá-los, obtendo resultados em forma de conceitos e teorias que, de uma forma geral, deverão ser aceites no seio da turma. Todo este trabalho ocorre sob supervisão, apoio e incentivo do professor, que tem o dever de providenciar o *milieu*, basicamente entendido como um conjunto situações favoráveis para que cada aluno aja e reaja sobre o saber, transformando-o em conhecimento.

O *milieu*, termo francês que significa meio, é aqui interpretado como o conjunto de todos os elementos sobre e com os quais o aluno constantemente interage, ou seja, o combinado de todos elementos e aspetos que concorrem para tornar a atividade do aluno o mais desafiadora possível.

A sequência didática concebida e experimentada no âmbito do presente estudo foi elaborada com base nas contribuições das perspetivas M&M. Entre outros, os principais desafios que conformam o *milieu* em que a sequência didática se desenrolou, prendem-se com a necessidade de, numa primeira instância, interpretar cada situação sugerida por cada um dos cinco problemas e descrevê-la mediante a combinação inicial de objetos matemáticos. Depois de uma análise e reanálise de tais combinações, o objetivo é sempre melhorá-las, de modo a explicitar ou explicar melhor a situação retratada. A realização da reanálise aqui referida foi possível mediante o recurso às transformações (tratamentos e conversões) de registos de representações semióticas, gestos intelectuais inerentes à atividade matemática e que no âmbito do presente estudo se revelou uma aquisição fundamental, pois permitiu aos alunos aplicarem e mobilizarem os seus conhecimentos matemáticos durante a resolução dos problemas propostos. A resolução destes problemas, de certa forma, evoluiu para situações absolutamente novas e diferentes, se comparadas com as que os alunos até então estavam habituados a viver em sala.

Em linhas gerias, a proficiência dos já referidos gestos intelectuais foi também outro dos desafios que os alunos tiveram que superar, a par da necessidade de justificar ou explicar os seus resultados, ideias e procedimentos, de modo a validá-los perante a turma e ou perante qualquer interlocutor. Nesta conformidade, a demonstração de proficiência consciente dos gestos intelectuais caracteriza a originalidade da atividade matemática. O desafio inerente aos gestos intelectuais (tratamentos e conversões), como era de se esperar, ocorreu de diversas formas e em diversos sentidos, desde a construção de relações matemáticas a partir da observação de padrões numéricos ou da regularidade de resultados, passando pela elaboração e inserção de fórmulas na folha de cálculo e pelo registo destas fórmulas com base em simbologia algébrica, universalmente conhecida e aceite, sem descurar o sentido inverso, que consistiu em implementar relações algébricas na folha de cálculo de modo a testar a coerência matemática das mesmas.

As principais dificuldades sentidas pelos alunos prendem-se com as conversões que tiveram lugar ao longo das suas resoluções. Em termos mais precisos, importa sublinhar que os alunos mostraram algumas dificuldades em reinterpretar as situações depois que faziam as conversões de registos, sobretudo de numéricos para gráficos, talvez por não se tratar de uma transformação a que estavam suficientemente habituados. Este obstáculo foi-se gradualmente desvanecendo, na medida que os alunos se iam familiarizando com a metodologia de trabalho sugerida no decurso da sequência didática.

Em alguns casos, como por exemplo na resolução da alínea A) do problema do jardineiro, os alunos necessitaram de conceber modelos preliminares e provisórios para depois os combinar ou reformular e então chegar a modelos que, de certa maneira, esclareciam a situação. Aqui, os alunos mostraram ter alguma dificuldade mas quando tiveram que proceder de forma semelhante no âmbito da resolução das duas primeiras alíneas do problema das laranjeiras, esta dificuldade já não se fez sentir e conforme se pode ler no capítulo 5 cada aluno concebeu um termo geral diferente para representar a sucessão das quantidades totais de laranjeiras em função dos dias, embora estas sejam algebricamente equivalentes.

Esta evolução mostra que ocorreu uma aprendizagem, não no sentido de simples apropriação de conceitos matemático mas fundamentalmente no que concerne ao reajuste e reutilização de modelos em situações explicitamente diferentes daquelas em que tais modelos foram inicialmente concebidos ou aprendidos. Nesta ótica, as variáveis didáticas a considerar não estão relacionadas com as propriedades dos objetos matemáticos em si, mas referem-se sobretudo a variações que têm a ver com a estabilidade no que concerne à reutilização dos modelos. Todavia, não se trata aqui de uma reprodução rigorosa de situações anteriores, dado que tal repetição não é apoiada nem encorajada pelo ponto de vista defendido no âmbito deste estudo.

As reações dos alunos e a forma como responderam à sugestão de uso da folha de cálculo foi, em geral, muito positiva. Como era de esperar, a folha de cálculo foi tida como uma ferramenta muito útil para os alunos devido à sua capacidade no que tange à enorme e acessível possibilidade de processar recursivamente dados numéricos e de efetuar conversões para registos numéricos. Nesta conformidade, tal como foi frisado anteriormente, os alunos recorreram à folha de cálculo para conceber, verificar, reverificar ou confirmar e reconfirmar as suas suposições, de modo a certificarem a validade das relações matemáticas conjeturadas. Em diversos momentos, foi notório um aproveitamento e reaproveitamento da configuração das formulas inseridas na folha de cálculo para a concepção ou elaboração analítica dos termos gerais de sucessões definidas por recorrência e não só.

Os alunos revelaram aprendizagens específicas inerentes a vários conceitos matemáticos mas também aprendizagens de caráter mais abrangente, como seja, a sua capacidade de interpretar uma situação e de a matematizar, mobilizando os seus conhecimentos anteriores ou prosseguindo para novos conhecimentos. A aquisição desta aprendizagem de carácter holístico é um importante indício de que houve cumprimento dos pressupostos inerentes às perspetivas M&M. Tal como foi sublinhado no capítulo 2, à luz destas perspetivas, o aluno deve realizar atividades que propulsionem a criação de modelos. Os modelos criados pelos alunos durante a implementação da sequência didática são, por um lado, descrições representacionais que serviram para evidenciar a compreensão das situações que lhes foram apresentadas e permitiram-lhes desenvolver atividade matemática em situações específicas. Por outro lado, os mesmos modelos revelaram ser compartilháveis, reutilizáveis em outras situações, evidenciando as formas significativas de generalização e transferibilidade dos mesmos, tal como Lesh & Lehrer (2003) referem.

As atividades propulsoras de modelos revelaram um elevado potencial pela possibilidade de fazerem apelo a situações do dia-a-dia, em certa medida, familiares e acessíveis aos alunos, dando aos conteúdos matemáticos uma clara relevância e aplicabilidade. Este tipo de atividades permitiu os alunos exprimirem e avaliarem as suas convicções sobre a realidade e, de forma nítida, permitiu valorizar as experiencias prévias dos alunos, consideradas como ponto de partida e como base para o desenvolvimento da sua consciência crítica. Assim, pode dizer-se que houve uma valorização dos conhecimentos prévios dos alunos e relativos às experiências individuais ou vivências de cada um deles que permitiu explorar as potencialidades destes alunos que, de outra maneira, seriam possivelmente relegadas à marginalização. Consequentemente, esta abertura de deixar os alunos procederem basicamente através da expressão das suas experiências e dos saberes ligados às suas vivências gerou um sentimento de pertença à turma e sobretudo deu-lhes noção da validade que as suas opiniões matemáticas podem ter no contexto da sala de aula.

Os modelos criados pelos alunos durante a resolução dos dois primeiros problemas têm um cunho relativamente mais empírico e mais informal se comparados com os modelos que os alunos criaram no âmbito da resolução dos três últimos problemas onde conceberam modelos relativamente mais estáveis e abstratos. Entretanto, de uma forma geral, os modelos concebidos pelos alunos no âmbito do presente estudo tendem a funcionar como objetos de pensamento e ao mesmo tempo revelaram-se profícuos e aplicáveis na descrição, explicação e manipulação ou mesmo predição ou controlo de sistemas que ocorrem no mundo, fora do âmbito escolar, tal como se é amplamente referido por Lesh et al. (2003). Tais indícios são visíveis se atentarmos na maneira com os modelos foram sucessivamente reajustados e reutilizados ao longo da sequência didática.

Os relatórios elaborados pelos alunos foram um elemento importante da abordagem didática, porque uma das singularidades da engenharia didática, enquanto metodologia de pesquisa, prende-se com o facto de recorrer a validação interna, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. Nesta conformidade, tudo quanto são registos captados durante a concretização da fase da experimentação tornam-se bastante valiosos para a compreensão de todo processo pois fornecem a informação em que o investigador se apoia para concretizar e sustentar análise *a posteriori* e validação de todo um trabalho realizado.

No âmbito do presente estudo, em particular, os alunos foram previamente orientados a registarem tudo o que fosse importante registar relativamente aos procedimentos, intenções e suposições de base que norteiam os seus pensamentos. Esta orientação foi propositadamente dada, em parte para garantir a observância do princípio da documentação do modelo que pressupõe que os alunos revelem explicitamente como ocorrem os seus pensamentos sobre a situação. Este facto ou recomendação exigiu dos alunos a explicitação das suas maneiras de pensar, de tal modo que isso facilitou a compreensão dos resultados matemáticos e sobretudo a interpretação do processo de resolução, visto que gerou automaticamente elementos de documentação que permitiram constatar e perceber diversos aspetos da evolução dos modelos dos alunos.

Tal como foi referido no capítulo 2, Brousseau (2008) advoga que o meio deve ser moldado com vista a motivar os alunos a agirem e reagirem em função das situações propostas. Deste modo, no âmbito da Teoria das Situações Didáticas defende-se que terá de haver equilíbrio entre o que se propõe e a capacidade do aluno progredir ao longo da atividade, ou seja, a atividade deve ser desafiadora mas não deve ser tão difícil a ponto de o aluno não conseguir avançar. Partindo deste ponto de vista, os cinco problemas utilizados na sequência didática foram estruturados de modo a garantir este equilíbrio sem correr o risco de expurgar o cunho desafiador das tarefas propostas.

Por ser uma experiencia na sala de aula, obviamente além dos objetivos inerentes às questões de investigação houve uma preocupação com a aquisição de aprendizagens específicas inerentes a conceitos matemáticos relacionados ao tópico sucessões numéricas e esta dupla preocupação fez com que as atividades propostas na sequência didática abarcassem algumas perguntas que de certo modo redirecionam as tarefas de modo a evidenciar o sentido matemático das atividades. Neste sentido, as duas ou três primeiras alíneas de cada secção foram concebidas para serem mais desafiadoras pois "disfarçam" os conceitos matemáticos inerentes e isto é percebido no tipo de procedimento e diversidade de respostas formuladas pelos alunos ao responder estas alíneas.

No capítulo 4, pode ler-se que alguns dos problemas da sequência didática foram estruturados para introduzir conceitos, ao passo que outros foram estruturados para, de certo modo, permitir o aprofundamento de conceitos. Neste sentido, os problemas propositadamente concebidos para introduzir conceitos mostraram-se mais desafiadores, talvez porque nestas circunstâncias o carácter desafiador tende a permanecer em todas alíneas.

No capítulo introdutório do presente trabalho foi apresentado um retrato do ambiente vivido na ESPtN onde a realidade mostra que os alunos revelam sentir dificuldades na interpretação e descrição matemática de esquemas, gráficos, leis, princípios e teorias científicas. Perante tal situação, o presente estudo concentrou-se em analisar como pode ser estruturada uma sequência didática para o ensino-aprendizagem de Sucessões Numéricas, através da resolução de problemas (MEAs) com recurso à folha de cálculo. Por tudo que foi evidenciado no âmbito do presente estudo, é legítimo assumir que para debelar as dificuldades com que os alunos da ESPtN se deparam, é necessário uma sequência didática com as caraterísticas seguintes:

- Os conceitos devem ser introduzidos no âmbito de atividades propulsoras de modelos com considerável referência a situações do dia-a-dia;
- O objetivo central das tarefas deve ser estimular os alunos a desenvolverem formas úteis de interpretar dados, a fim de engendrarem caminhos de solução;
- O processo de interpretação deve incluir filtragem e classificação da informação, testes e revisão de resultados possíveis;
- Os alunos devem revelar os seus raciocínios no processo de desenvolvimento de interpretações, através de explicações, previsões e descrições relacionadas com a situação do problema que estiverem a resolver;

- Os alunos devem recorrer a múltiplas representações, valendo-se, em particular, das potencialidades da folha de cálculo ou de outras ferramentas tecnológicas adequadas às circunstâncias;
- A preocupação dos professores não deve ser simplesmente a aquisição de competências específicas mas deve também contemplar a proficiência e conscientização dos alunos sobre os gestos intelectuais (conversões e tratamentos) inerentes à atividade matemática, de modo a permitir que os alunos sejam capazes de aplicar os seus **conhecimentos** na resolução de problemas matemáticos dentro e fora do âmbito escolar.
- A validação ou valoração da atividade matemática dos alunos deve ser feita, tendo em atenção as potencialidades da utilização, reutilização e generalização dos modelos concebidos.

6.2 Registos de Representações Semióticas e Ciclos de Modelação

Na análise de dados empíricos, foi produzida uma interpretação dos dados, para as várias questões propostas nas tarefas, em que se colocaram em paralelo dois referenciais teóricos: a Teoria dos Sistemas de Representações Semióticas e a Teoria de Modelos e Modelação. As duas teorias têm a sua génese e o seu desenvolvimento de formas completamente autónomas e mesmo independentes; contudo, foi nosso objetivo encontrar pontos de ligação e de fortalecimento mútuo entre estas duas perspetivas, no nosso exame dos dados.

Assim, procuramos agora colocar várias ideias em destaque acerca sobre: i) a natureza das transformações de registos de representação semiótica que ocorrem durante a criação de modelos; ii) os significados que têm as conversões e tratamentos de representações semióticas feitas pelos alunos; e iii) a ocorrência de diversos ciclos de desenvolvimento de modelos construídos pelos alunos.

Começaremos por nos referir às transformações de representações semióticas para destacar algumas conclusões gerais da observação e interpretação dos dados. Uma dessas ideias relaciona-se com os modelos preliminares ou iniciais dos alunos que se revelaram predominantemente associados às situações contextualizadas. Por outras palavras, o processo de representação inicia-se tendencialmente com ideias expressas por palavras ou registos verbais, em que os alunos começam por dar sentido ao problema e à situação apresentada. Muitas vezes, verifica-se também o recurso a esquemas e registos icónicos que mostram uma simplificação da situação ou a sua compreensão inicial e uma organização dos dados numa fase de pré-matematização.

À guisa de exemplo, podemos constatar que na resolução do problema da rega das roseiras os alunos recorreram a esquemas para simplificar a situação; estes esquemas permitiram, numa primeira fase, determinar as distâncias percorridas em cada ida e depois associaram registos numéricos que depois de serem tratados permitiram os alunos conceber modelos que viabilizaram a determinação das distâncias percorridas nas primeiras viagens. Este episódio é muito semelhante ao que ocorreu na resolução do problema da plantação das laranjeiras onde apesar de existir uma sugestão esquemática no enunciado, para responder à primeira alínea do referido problema, cada aluno recorreu a um cálculo auxiliar ou seja decidiu evidenciar os arranjos numéricos de modo a deduzir a quantidades de laranjeiras plantadas em cada dia a partir das quantidades existentes em dias consecutivos.

No problema de reprodução de vírus esta tendência fez-se também sentir; durante a obtenção da subsucessão, nos três casos do estudo, verificamos que os alunos iniciaram por destacar os termos de ordem equivalente a um múltiplo de 7 e depois cada aluno buscou a relação entre os termos consecutivos desta nova sucessão e chegou ao termo geral da sucessão das quantidades de vírus que a pessoa infetada teria nas primeiras semanas

Tal como enfatizamos nos exemplos ilustrativos anteriores, posteriormente, os alunos deixam de ter um procedimento mono-representacional e as representações semióticas vão-se diversificando, à medida que o processo de matematização se vai desenrolando. Os alunos vão integrando representações numéricas, com representações verbais, com apontamentos e afirmações orais e escritas, com representações algébricas e mesmo com demonstrações de propriedades. As resoluções sugeridas pelos alunos para o problema dos cubos de gelo espelham esta tendência, pois nota-se que cada aluno iniciou por sugerir as dimensões do copo, e depois, partindo das suas suposições determinou a variação do nível de água; no fim, cada aluno demostrou a relação entre os termos consecutivos e mostrou matematicamente que o nível da água no copo depende do número de cubos introduzidos. Para explicar matematicamente a condição do transbordo da água no copo, os alunos recorreram quer a uma representação gráfica quer a uma representação "tabular" dos registos numéricos.

Com a mobilização de registos e realização de diversos gestos intelectuais, os modelos matemáticos formais vão sendo construídos e a formalização matemática foi-se consolidando, sempre com uma forte conexão ao problema em resolução. No problema da plantação de laranjeiras, tal como aludimos, para a obtenção da sucessão das quantidades totais de laranjeiras que existiam em função dos dias, os alunos começaram por conceber modelos iniciais e para ajustar tais modelos, houve a necessidade de recorrer a gestos intelectuais da atividade matemática, fazendo concretamente tratamentos de registos primeiramente numéricos e depois algébricos. Deste modo, cada aluno obteve o seu modelo que lhe permitiu resolver a situação e no final da tarefa cada aluno fez a reutilização combinada de dois modelos para obter o modelo inerente à densidade da população de laranjeiras. Nesta ocasião, os alunos mobilizaram registos numéricos e depois algébricos e posteriormente retomaram os registos numéricos para depois os converterem em registos gráficos de tal modo que estabeleceram modelos que permitiram a explicação da convergência da sucessão das densidades de árvores plantadas.

No que se refere aos múltiplos tratamentos e conversões de registos de representação semiótica que se observaram, pode-se concluir que estes foram essenciais para uma adequada resposta às questões colocadas e que acompanharam, de forma sistemática, o modo como os alunos foram refinando, explorando, aplicando e revendo os seus modelos matemáticos para cada uma das situações (Harel & Lesh, 2002; Lesh & Lehrer, 2003; Duval, 2009, 2011, 2013).

Observaram-se variadas situações em que os alunos se envolveram em tratamentos de registos numéricos, no decurso das suas resoluções. Isto é um indicador de que muitas das sucessões numéricas formuladas foram extensamente analisadas do ponto de vista numérico. Este facto é de grande importância pois contribui para que os alunos ganhem consciência de que vários dos conceitos abstratos e formais associados ao estudo de sucessões têm uma estrutura concreta e tangível. E essa atividade exploratória tem influência sobre uma maior apreensão do significado matemático dos objetos e métodos matemáticos. Os processos de obtenção de termos gerais das sucessões alternadas, utilizados pelos Alunos 2 e 3 durante a resolução do problema dos ciclos cardíacos ilustram muito bem este facto.

Contudo, importa realçar que os tratamentos numéricos, ainda que fundamentais e muito frequentes, não impediram diversas conversões essenciais: do registo numérico para o registo algébrico; do registo numérico para o registo gráfico; do registo gráfico para o registo verbal, etc. As variadas conversões de registos de representação semiótica são indicadores de que os alunos tiveram a possibilidade de mobilizar os seus conhecimentos e recursos disponíveis para lidar, de forma eficiente, com as solicitações e questões colocadas. Por outras palavras, os alunos trabalharam intensamente com uma multiplicidade de registos, o que significou o recurso a diferentes representações matemáticas essenciais para o estudo de sucessões numéricas.

Os dados parecem suportar a conclusão de que essa atividade de integração de registos de representação foi fortemente estimulada tanto pelas situações de caráter real como pelo recurso a uma ferramenta tecnológica com caraterísticas numéricas e pré-algébricas. Assim, as várias instâncias de conversão de registos aparecem muitas vezes em paralelo com situações em que os alunos exploram os seus modelos, consolidam os seus modelos, refinam os seus modelos e aplicam os seus modelos. Os dados mostram que os alunos efetuaram transformações de registos durante a exploração de modelos e, em particular, mobilizaram registos verbais para expressar as principais propriedades dos modelos e descreverem as situações de análise da monotonia, em especial. Os alunos recorreram ainda à conversão de registos numéricos em registos gráficos para melhor explorar as questões inerentes à análise de monotonia nos problemas 1, 2 e 5 e durante a resolução dos problemas 3 e 4. Portanto, parece ser possível estabelecer uma relação entre a ocorrência de conversões e o avanço do processo de modelação, de tal modo que estes processos parecem gerar sucessivos ciclos de modelação ao longo de cada atividade geradora de modelos: construção de um modelo, exploração de um modelo, revisão/refinamento do modelo, aplicação do modelo (Harel & Lesh, 2002; Lesh & Lehrer, 2003).

Além do mais, há que referir a forma como a construção de modelos de sucessões e de outros objetos matemáticos relacionados foi fortemente conduzida pela obtenção e identificação de padrões numéricos, os quais tendencialmente foram construídos a partir da própria interpretação inicial da situação descrita no problema. O Aluno 3 por exemplo, durante a resolução das alíneas B1) e B2) da Tarefa 4, recorreu à folha de cálculo para efetuar tratamentos até encontrar um padrão e deste modo consumou a sua exploração dos dados na folha de cálculo, o que lhe permitiu conceber um primeiro modelo, ao constatar que existe uma regularidade nos resultados encontrados.

Existem outras evidências sobre a constatação de regularidades de resultados ou padrões numéricos como prelúdio de formação de modelos e isto é claramente visto quando os alunos durante a resolução dos problemas 1, 2 e 3, por exemplo, utilizam como elemento de estabelecimento de conjeturas os resultados constantes obtidos através de tratamentos de registos numéricos que representam operações entre termos consecutivos das sucessões obtidas nos problemas. Isto ficou evidente nos diversos quadros comparativos que foram elaborados, em jeito de súmulas, dos resultados extraídos da análise das resoluções dos problemas, segundo cada uma das perspetivas teóricas.

Contudo, apesar de todas as tarefas iniciarem com a mobilização de registos verbais, durante a realização da atividade matemática os alunos mobilizaram outros registos e fizeram diversas transformações. Em geral, os alunos efetuaram conversões dos registos verbais em numéricos, dos numéricos em algébricos e vice-versa e dos numéricos em gráficos. Para interpretarem os registos gráficos, apesar de recorrerem à folha de cálculo, uma ferramenta predominantemente utilizada para tratamentos numéricos, os alunos evidenciaram competência para algebrizar os modelos das situações pelo que apresentaram modelos válidos expressos analiticamente.

Os dados do estudo levam-nos a concluir que não houve dificuldade em institucionalizar os modelos conceptuais desenvolvidos na resolução das tarefas, uma vez que as respostas obtidas pelos alunos durante a resolução dos problemas propostos, estavam de certo modo bem estruturadas e com uma linguagem matematicamente aceitável. Isto pode ser constatado, por exemplo, quando os alunos analisaram a monotonia da sucessão obtida na resolução do problema dos cubos de gelo (Problema 3, alíneas B1) e B2), mas importa aqui sublinhar que, tal como as perspetivas M&M sugerem, interpretando Lesh et al (2003) e Lesh & Doerr (2000), há muitas formas e *nuances* com que os sistemas conceptuais significativos são aprendidos, implicando a classificação e seleção de ideias concorrentes, e ainda rever ideias que entram em conflito com outras. No presente estudo isto foi aproveitado e trabalhado mediante a institucionalização das conclusões dos alunos.

A análise dos dados permite concluir que os alunos compreenderam os conceitos matemáticos e os modelos que produziram e que foram capazes de utilizá-los ou reutilizá-los em situações realistas. Esta apreciação é facilmente justificada dado que em diversas ocasiões os alunos não só apresentaram os seus resultados mas também descreveram as suposições e estratégias consideradas para a obtenção dos mesmos e isto indica que os alunos são capazes de generalizar os referidos modelos e sobretudo transferir as formas de proceder.

6.3 A Folha de Cálculo na Construção e Consolidação de Modelos Matemáticos

A terceira questão do presente estudo focava-se na importância e utilidade do recurso à folha de cálculo na aprendizagem dos conceitos envolvidos no tópico de sucessões numéricas. Com base nos dados, é possível concluir que se tratou de um recurso apropriado e de grande relevância para a abordagem aos problemas propostos.

Assim, a folha de cálculo tornou possível vários momentos de experimentação e de teste de ideias iniciais. Em muitos casos, as primeiras ações dos alunos foram efetuadas no computador, geralmente ensaiando a construção de sequências numéricas relacionadas com os dados da situação descrita. Em particular, foi evidente que os alunos usaram a folha de cálculo para representar os primeiros termos de uma sucessão, quer usando fórmulas que envolviam a obtenção de termos por recorrência, quer chegando a fórmulas que permitiam a definição de uma expressão para o termo geral. Esta versatilidade da ferramenta foi de clara importância para a compreensão de que algumas sucessões, como é o caso das PAs e das PGs, podem ter diferentes modos de definição.

Por exemplo, para a determinação do termo geral da sucessão das quantidades de vírus existentes, em função das semanas, o Aluno 2 encontrou a relação entre termos consecutivos dividindo cada termo pelo seu subsequente ao invés de dividir cada termo pelo seu antecedente como habitualmente é descrito em livros didáticos. Mesmo em casos em que a ordem das questões sugeria que fosse primeiro determinado o termo geral da sucessão em função da ordem, os alunos recorreram inicialmente ao cálculo de termos por recursão e depois consideraram os padrões que permitiram o estabelecimento de termo geral. Esse modelo, por sua vez, os alunos vieram a testar, inserindo fórmulas na folha de cálculo.

Outro aspeto a destacar tem a ver com o facto de a folha de cálculo ter sido um instrumento muito utilizado pelos alunos para a realização de diversos tratamentos de registos de representação numérica. No entanto, foi ao mesmo tempo, uma importante alavanca para a construção de modelos algébricos, dado que a folha de cálculo tem na sua própria estrutura a introdução e replicação de fórmulas que têm uma natureza algébrica, na medida em que relacionam variáveis através de relações de co-variação.

Muitas das conclusões dos alunos, como se verificou pelos seus relatórios, foram corroboradas, apoiadas ou verificadas através do trabalho que efetuaram na folha de cálculo. No fundo, a folha de cálculo funcionou como um registo semiótico híbrido, tanto numérico como algébrico, no apoio às conclusões dos alunos. Em muitos casos, referiram que a sua resposta podia ser comprovada no Excel, ou que poderiam obter mais termos na folha de cálculo, por exemplo.

Uma outra importante vantagem do uso da folha de cálculo foi a de reforçar e tornar fácil de visualizar a relação de dependência entre as ordens dos termos e os termos de uma sucessão numérica. Assim, a produção de tabelas com duas ou múltiplas colunas foi uma constante na construção dos modelos matemáticos das situações apresentadas. Este pormenor ficou bastante evidente durante a resolução do problema do jardineiro quando os alunos tiveram que sinalizar o 20º termo para depois efetuarem a soma dos termos e o mesmo pormenor é ainda evidente nas resoluções que os alunos apresentaram para o problema da reprodução de vírus, onde a partir da sucessão inicial que foi obtida na primeira alínea, aproveitaram a estrutura tabular proporcionada pela folha de cálculo e destacaram os termos que lhes permitiram obter a subsucessão.

A folha de cálculo é uma ferramenta tecnológica de grande utilidade, como se verificou no âmbito do presente estudo. Esta feramente viabilizou significativamente o trabalho dos alunos pois proporcionou diversas representações, desde verbais, numéricas e gráficas, que realmente ajudaram os alunos visualizarem de diversas formas os modelos concebidos com nítido realce para as representações gráficas que em diversas ocasiões possibilitaram aos alunos compreender a monotonia, a convergência e divergência das sucessões estudadas.

A grande capacidade de cálculo proporcionada por esta ferramenta tecnológica ajudou grandemente o trabalho dos alunos, pois permitiu-lhes conceberem combinações numéricas mais ou menos complexas e concretizaram-nas experimentalmente na folha de cálculo, economizando tempo para se concentrarem na interpretação e análise dos valores e dos resultados. Esta capacidade numérica, aliada à sua caraterística pré-algébrica (ou semi-algébrica), permitiu aos alunos extrapolarem as fórmulas inseridas na folha de cálculo e ajustá-las de modo a conseguirem conceber as relações algébricas com recurso a linguagem matemática formal.

Os alunos mostraram um bom domínio no trabalho com a folha de cálculo e esta ferramenta contribuiu para a diversidade das resoluções e processos considerados por cada aluno, o que consequentemente mostra que os alunos trabalharam com uma considerável independência e espontaneidade na tomada de decisões durante a realização das atividades, aproveitando claramente as potencialidades da folha de cálculo.

6.4 Considerações Finais

Tendo em conta o que foi exposto nas secções anteriores, são agora sintetizadas algumas das conclusões principais do presente estudo.

Parece ser evidente nos dados recolhidos que os alunos compreenderam o conceito e a definição de sucessão numérica, termo da sucessão, ordem de um termo, termo geral de uma sucessão, recursividade; progressão aritmética e geométrica, convergência, divergência, existência de extremos, monotonia e comportamento notável dos termos, a partir de uma certa ordem ou para n-suficientemente grande, respeitando o princípio de que alguns atributos de uma sucessão têm sentido a partir de uma certa ordem. Mas também foram realizadas aprendizagens de caráter mais abrangente, como a interpretação das situações propostas, o domínio dos gestos intelectuais inerentes à atividade matemática e a construção e refinamento de modelos. E este ganho garante que os alunos são capazes de generalizar os modelos criados e de os reutilizar em novas situações.

As situações problemáticas experimentadas no âmbito do presente estudos foram concebidas com um certo grau de realismo, de modo a permitir aos alunos matematizar e consequentemente construir modelos conceituais robustos. Isto tornou evidente o facto de que a resolução de situações problemas desenvolve compreensão conceptual, fluência processual, competência estratégica, raciocínio adaptativo e disposição produtiva e torna o aluno capaz de formular, representar e resolver problemas matemáticos, mobilizando, para o efeito, pensamento lógico, reflexão, explanação e justificação dos seus resultados e ações, desenvolvendo e mostrando assim o sentido utilitário da matemática e a sua eficácia (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Os resultados do presente estudo sugerem um paralelismo entre os ciclos de modelação efetuados pelos alunos e as sucessivas conversões de registos semióticos e isto reflete a aprendizagem dos alunos, na ótica das duas perspetivas teóricas. Com efeito, segundo a Teoria de Registos de Representações Semióticas, a aprendizagem dos alunos pressupõe o domínio de tratamentos e conversões de registos (Duval, 2009, 2011) e nas perspetivas de Modelos e Modelação, a aprendizagem e a prática matemática ocorrem sob a realização de ciclos de modelação, isto é, um processo de desenvolvimento de descrições representacionais para compreender e desenvolver atividade matemática específica em situações específicas (Lesh & Lehrer, 2003).

A folha de cálculo subsidiou a concretização de tratamentos de registos numéricos, bem como as conversões de registos numéricos em registos gráficos que depois foram convertidos em registos verbais, através de interpretações, e a características pré-algébrica das fórmulas da folha de cálculo permitiu aos alunos efetuarem extrapolações e ajustes que desembocaram na concepção de relações algébricas com linguagem matemática formal.

As tarefas realizadas pelos alunos são simulações de situações da 'vida real' e são de facto autênticas MEAs pois contribuíram para uma aprendizagem com compreensão dos conceitos matemáticos, por parte dos alunos que se propuseram a resolver tais desafios. O carácter de tais tarefas fez com que, durante a realização das mesmas, os alunos encarassem a Matemática como um meio de interpretação e não como uma execução de procedimentos. Assim sendo, este tipo de tarefas exige que cada aluno faça adaptações significativas das suas próprias interpretações da situação problemática, o que implica a mobilização de um pensamento dinâmico, por parte do aluno, uma vez que os processos de resolução destas tarefas envolvem ciclos de desenvolvimento iterativo em que os modos de pensar são repetidamente expressos, testados e revistos, tal como Lesh e Caylor (2007) referem.

Durante a resolução das tarefas os alunos também recorreram a representações simbólicas, essencialmente para evidenciar interpretações e, como tal, as representações simbólicas, aliadas a outras representações, inclusive as viabilizadas pela folha de cálculo, revelam-se ferramentas de suma importância para a criação de modelos representacionais das situações problemáticas que resolveram durante a fase experimental da sequência didática. Os alunos, quando iniciaram a resolução dos problemas mostraram, em muitos casos, mais segurança com a elaboração de diagramas antes da mobilização e transformações de outros registos. Isto mostra que os registos icónicos são um verdadeiro apoio para lançar as bases de formação dos modelos. Do mesmo modo, os registos numéricos jogaram um papel essencial no que diz respeito aos tratamentos que por sua vez permitiram aos alunos testarem e ajustarem os modelos criados. Os registos de representações verbais permitiram aos alunos expressarem os seus modelos e comunicarem os processos de formação desses modelos. Foi também evidenciado neste estudo que as respostas formuladas com apoio dos gráficos se revelaram mais seguras e, ao mesmo tempo, permitiram aos alunos fazerem algumas inferências que depois comprovaram algebricamente.

Concordando com Duval (2011, 2013), o cerne da formação de modelos implica não o simples domínio de um tipo específico de registo mas sim a capacidade de mobilizar e aproveitar as sinergias dos diversos registos. É, por isso, muito significativo que os alunos tenham recorrido adequada e oportunamente aos tratamentos e conversões, a fim de empregarem os tipos de registos de representações semióticas mais viáveis para a conceção, teste, ajuste e reajuste de modelos explicativos ou descritivos.

Para concluir, e tendo em mente os resultados do presente trabalho de investigação, julgamos oportuno recomendar a realização de estudos posteriores que possam aprofundar a articulação, que nos parece fecunda, entre as duas perspetivas teóricas adotadas, nomeadamente no ensino de outros tópicos da Análise Matemática, como no caso das funções reais de variável real, séries numéricas e séries de funções.

Referências bibliográficas

Abramovich, S. (1995). Technology for deciding the convergence of series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 26(3), 347-366

Abramovich, S. & Levin, I. (1994). Spreadsheets in teaching and learning topics in calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(2), 263-275,

Agostini, S., & Terrazzan, E. A. (2010). A Configuração do Estágio Curricular em Cursos de Licenciatura e as Atuais Normativas Legais. *Revista Teias*, 11(23), 185-198.

Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of Sequences and Series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 1-32.

Alcock, L., & Simpson, A. (2005). Convergence of Sequences and Series 2: Interactions Between Nonvisual Reasoning and the Learner's Beliefs About their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 77–100.

Allevato, N. S. G. (2005). *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

Angola (2009). Decreto-lei nº 5/09. (2009). Criação das regiões académicas. Diário da República N.º 64. Série I. Angola.

Artigue, M. (1996). Engenharia Didática. In J. Brun, (Ed.), *Didática das Matemáticas* (Trad. M. J. Figueiredo), (pp. 193-217). Lisboa: Instituto Piaget.

Artigue, M. (2003). ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 117-134.

Barco, L. (1998). *2+2 – A Aventura de um Matemático no Mundo da Comunicação*. Lisboa: Humanus - Associação Humanidades.

Bass, H. (1998). Research on university-level mathematics education: (Some of) what is needed, and why?. *On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level (Pre-proceedings)* (pp. 7-8). Singapura: ICMI.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto.

Beare, R. (1993). How spreadsheets can aid a variety of mathematical learning activities from primary to tertiary level. In B. Jaworski (Ed.), *Technology in mathematics teaching: A bridge between teaching and learning* (pp. 117–124). Birmingham: University of Birmingham.

Bendrau, C. M. C. É. (2015). *Políticas, processos e práticas de decisão curricular na avaliação das aprendizagens no Instituto Superior de Ciências da Educação de Benguela da*

Universidade Katyavala Bwila de Angola (Tese de Doutoramento em Ciências da Educação, área de especialização em Desenvolvimento Curricular). Universidade do Minho, Braga. (Disponível em http://hdl.handle.net/1822/36557).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics Through Inquiry*. London: Heinemann Educational Books.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualisation*. New York: Springer.

Braunfeld, P. (1973). Mathematics Education: A Humanist Viewpoint. *Educational Technology*, 13(11) 43-49.

Brito, M. R. F. de. (2006). Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In M. R. F. de Brito (Org.), *Solução de problemas e a matemática escolar*, (pp. 13- 53). Campinas, Brasil: Alínea Editora.

Brousseau, G. (1996). Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In J. Brun, (Ed.) *Didática das Matemáticas* (Trad. Maria José Figueiredo), (pp. 35-113). Lisboa: Instituto Piaget.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo da Teoria das Situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino* (Trad. Camila Bogéa). São Paulo: Ática.

Brousseau, G. (2014). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York: Springer.

Bruner. J. (1963). *The Process of Education*. New York: Vantage Books.

Burns, M. (1982). How to teach problem s*olving*. *Arithmetic Teacher*, 29(6), 46-49.

Calder, N. (2004). Shaping Understanding: How does investigating in a spreadsheet environment affect the conversations of initial training students doing mathematics. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Group of Australasia (Vol. 1, pp. 143–150). Sydney: MERGA.

Calder, N., Brown, T., Hanley, U., & Darby, S. (2006). Forming Conjectures Within a Spreadsheet Environment. *Mathematics Education Research Journal, 18*, 100-116.

Camacho, M., Perdomo, J. & Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. *PNA*, 3(3), 123-133.

Carlini, A. L. (2004). Procedimentos de ensino: escolher e decidir. In M. Scarpato, (Org.). *Os procedimentos de ensino fazem a aula acontecer*, (pp. 25-81). São Paulo: Avercamp.

Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp.465–478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T., Franke, M., Jacobs, V., Fennema, E., & Empson, S. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 3–20.

Carvalho, P. (2012). Evolução e crescimento do ensino superior em Angola. *Revista Angolana de Sociologia*, 9, (Pobreza e desigualdades sociais – ensino superior), 51-58. (Disponível em http://ras.revues.org/422)

Charles, R. I. (1985). The role of problem solving. *Arithmetic Teacher*, 32, 48-50.

Charles, R. I. (1990). Teacher education and mathematical problem solving: some issues and directions. In R. I. Charles, & E. A. Silver, (Eds.). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, (pp. 259-272). Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Charles, R. I. & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Pub.

Chevalllard, Y. (2001). *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Chi, M. T. H. & Glaser, R. (1992). A capacidade para a solução de problemas. In R. Sternberg (Ed.), *As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações* (Trad. Dayse Batista), (pp. 250-280). Porto Alegre: Artes Médicas.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23(7), 13–20.

Cobb, P., & McClain, K. (2001). An approach for supporting teachers' learning in social context. In F.-L. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 207–232). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model-builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 83-94.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3-4), 175–190.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A Constructivist Perspective on the Culture of the Mathematics Classroom. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86.

Contreras, L. C. & Carrillo, J. (1998). Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula. *Educación Matemática*, 10(1), 26-37.

DAAC-ESPtN. (2014). *Relatório Estatístico do Departamento dos Assuntos Académicos da Escola Superior Politécnica do Namibe para o Ano Lectivo 2014*. Moçâmedes: DAAc-ESPtN.

DAAC-ESPtN. (2015). *Relatório Estatístico do Departamento dos Assuntos Académicos da Escola Superior Politécnica do Namibe para o Ano Lectivo 2015*. Moçâmedes: DAAc-ESPtN.

DAAC-ESPtN. (2016). *Relatório Estatístico do Departamento dos Assuntos Académicos da Escola Superior Politécnica do Namibe para o Ano Lectivo 2016*. Moçâmedes: DAAc-ESPtN.

Dalfovo, M. S., Lana, R. A., & Silveira, A. (2008). Métodos quantitativos e qualitativos: um resgate teórico. *Revista Interdisciplinar Científica Aplicada,* 2(4), 1- 13.

D'Ambrósio, U. (1996). *Educação matemática: Da teoria á prática*. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática). Campinas, SP: Papirus.

D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Dante, R. L. (1989). *Didática da resolução de problemas de matemática: 1ª a 5ª série*. (1ª ed.). São Paulo: Editora Ática.

Dante, R. L. (2000). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. (12ª ed.) São Paulo. Editora Ática.

Dark, M. (2003). A models and modeling perspective on skills for the high performance workplace. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 279–293). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

De Bruyne, P., Herman, J., & De Schoutheete, M. (1974). *Dynamique de la recherche en sciences sociales: les pôles de la pratique méthodologique*. Paris: PUF.

Deshaies, B. (1997). *Metodologia da investigação em Ciências Humanas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Dewey, J. (1982). *Pragmatism: The classic writings*. In H. S. Thayer, C. S. Peirce, W. James, C. I. Lewis, J. Dewey, & G. H. Mead (Eds.), (pp. 253–334). Indianapolis, IN: Hackett.

Doerr, H. M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking, *Educational Studies in Mathematics, 62*(1), 3-24.

Doerr, H. M. & Lesh, R. (2002). A modeling perspective on teacher development. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving* (pp. 125-140.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Domingos, A. M. D. (2003). *Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados – A Matemática no Início do Superior*. (Tese de Doutoramento). Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa.

Duval, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?. *Relime*, 9 (special number), 45-81.

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registos semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM.

Duval, R. (2012). Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(1), 97-117.

Duval, R. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica (J. L. Freitas, & V. Rezende, Entrevistadores). *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 2(3), 10-34.

Echeverría, M. P. P. A. (1998). Solução de problemas em matemática. In J. I. Pozo, (Org.). *Solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 43-65). Porto Alegre: ArtMed.

Echeverría, M. P. P. A., & Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In J. I. Pozo, (Org.). *Solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*, (pp. 13-42). Porto Alegre: ArtMed.

Fennema, E., & Carpenter, T. P. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 403–434.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dodrecht: Reidel.

Franke, M. L. & Kazemi, E. (2001). Learning to teach mathematics: Focus on student thinking. *Theory Into Practice*, 40(2), 102–109.

Funnell, L., Marsh, T. & Thomas, M. O. J. (1995). Strategies for Integrating Computers into Mathematics Lessons - Emphasising Spreadsheets. *SAME papers* (pp. 223-238). Waikato University, New Zealand.

Fuson, K. (1986). Teaching children to subtract by counting up. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(3), 172–189.

Fuson, K. (1990). A forum for researchers. Issues in place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 273–280.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). *Infinito actual e inconsistncias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años*. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(1), 87-113.

García, C. M. (1999). *Formação de professores: para uma mudança educativa*. Porto: Porto Editora.

Gazire, E. S. (1988). *Perspectivas da Resolução de Problemas em Educação Matemática*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Goldin, G. A. (2001). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *International handbook of research design in mathematics education* (pp. 517–545). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

González, F. E. (1998). Metacognición y tareas intelectualmente exigentes: El caso de La resolución de problemas matemáticos, *Zetetiké*, 6(9), 59 – 87.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 170–218.

Harel, G., & Lesh, R. (2002). Local conceptual development of proof schemes in a cooperative learning setting. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 359–382). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education*, (Vol. III., pp. 234-283). Washington, DC: AMS.

Henriques, A. C. B. (2006). *Actividades investigativas na aprendizagem da Análise Numérica: Uma experiência no ensino superior* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Lisboa.

Henriques, A. C. B. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação* (Tese de Doutoramento em Didática da Matemática). Universidade de Lisboa.

James, W. (1982). *Pragmatism: The classic writings*. In H. S. Thayer, C. S. Peirce, W. James, C. I. Lewis, J. Dewey, & G. H. Mead (Eds.), (pp. 123-250). Indianapolis, IN: Hackett.

Jonassen, D. H. (1999). Designing constructivist learning environments. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory* (Vol. II, pp. 215-239). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving* (pp. 43-52). Columbus, Ohio: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kaput, J. (1993). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Bieler, R. W. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelman (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to Calculus: New routes using old routes. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77–156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kelly, E., & Lesh, R. (Eds.). (2000). *The handbook of research design in mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra: A Broadening of Sources of Meaning. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam, Netherlands: Sense.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Klausmeier, H. J. & Goodwin, W. (1977). *Manual de psicologia educacional: aprendizagem e capacidades humanas* (Trad. M. Abreu). São Paulo: Harper & Row.

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). A modelling approach to describe teacher knowledge. In R. Lesh and H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modelling* *perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 159–173). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krulik, S. & Reys, R. E. (Eds.). (1980). *Problem solving in school mathematics* (NCTM Year Book). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1989). *Problem solving: A Handbook for Senior High School Teachers*. Boston, MA: Allyn and Bacon.

Krulik, S. & Rudnick, J. A. (2005). *Problem-Driven Math: Applying the Mathematics Beyond Solutions*. Chicago: McGraw-Hill.

Lagdem, V. G. (2011). *Cônicas: uma proposta de estudo através de planilhas do Excel*. (Dissertação de Mestrado), Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca. Rio de Janeiro.

Latour, B. (1990). Drawing things together. In M. Lynch & S. Woolgor (Eds.), *Representation in scientific practice* (pp. 19–68). Cambridge, MA: MIT Press.

Latour, B. (1999). *Pandora's hope: Essays on the reality of science studies*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Lehrer, R. & Schauble, L. (2000). Developing Model-Based Reasoning in Mathematics and Science. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21(1), 39–48.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2002). Symbolic communication in mathematics and science: Co-constituting inscription and thought. In E. Amsel & J. Byrnes (Eds.), *Language, literacy, and cognitive development: The development and consequences of symbolic communication* (pp. 167–192). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. (2000). Beyond Constructivism: Identifying Mathematical Abilities Needed for Success Beyond School. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3), 177-195.

Lesh, R. (2001). Beyond constructivism: A new paradigm for identifying mathematical abilities that are most needed for success beyond school in technology based age of information. In M. Mitchelmore (Ed.), *Technology in mathematics learning and teaching: Cognitive considerations*. (A special issue of the Mathematics Education Research Journal). Melbourne, Australia: Australia Mathematics Education Research Group.

Lesh, R. (*2002*). *Research design in mathematics* education: Focusing on design experiments. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 27–50). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Carmona, G. (2003). Piagetian conceptual systems and models for mathematizing: Everyday experiences. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 71–96). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Caylor, B. (2007). Introduction to the Special Issue: Modeling as Application versus Modeling as a Way to Create Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(3), 173-94. DOI:http://dx.doi.org/10.1007/ s10758-007-9121-3.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In H. M. Doerr & R. Lesh (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 35-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 361-383). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). In what ways does a models and modeling perspective move beyond constructivism?. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 383–403). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Doerr, H. M., Carmona, G., & Hjalmarson, M. (2003). Beyond Constructivism. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2-3), 211-233, DOI: 10.1080/ 10986065.2003.9680000.

Lesh, R., & English, L. (2005). Trends in the Evolution of Models and Modeling Perspectives on Mathematical Learning and Problem Solving. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Gropu for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 192-196). University of Melbourne: PME.

Lesh, R., Hamilton, E., & Kaput, J. (Eds.) (2007). *Models & modeling as foundations for the future in mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-645). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. & Lehrer, R. (2003). Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2-3), 109-129, DOI: 10.1080/10986065.2003.9679996.

Lesh, R., Lester, F., & Hjalmarson, M. (2002). A models and modeling perspective on metacognitive functioning in everyday situations where mathematical constructs need to be developed. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 383-404). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1989). Representations & translations among representations in mathematics learning & problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Yoon, C. (2004). Evolving Communities of Mind in Which Development Involves Several Interacting and Simultaneously Developing Strands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 205-226, DOI: 10.1207/s15327833mtl0602_7.

Lesh, R., Zawojewski, J. S., & Carmona, G. (2003). What mathematical abilities are needed for success beyond school in a technology-based age of information?. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism*: *Models and modeling perspectives* on *mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 205–222). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lester, F. K. (1993).What has happened to mathematical problem-solving research. In L. Nasser (Ed.), *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*, (pp. 57-68). Rio de Janeiro: IM – UFRJ.

Lester, F. K. (1994). Musings about research on mathematical problem solving. J*ournal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660-675.

Levin, I. (1994). Behavioral Simulation of an Arithmetic Unit using the Spreadsheet. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 31, 334-341.

Lima, E. L. (1999). Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, 41(3), 1-6.

Lins, M., Lima, A., Menezes, M. (2010). Emergência de Fenômenos Didáticos em Sala de Aula: Negociações de uma Sequência Didática em Álgebra Inicial. In A. Lima, I. Lima, L. Araújo, & V. Andrade (Orgs.). *Pesquisa em Fenômenos Didáticos: Alguns Cenários*. Recife: EDU-UFRPE.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & K. Margaret (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 45-70). London: Kluwer.

Machado, S. D. A. (2002). Engenharia Didática. In S. D. A. Machado (Org.). *Educação Matemática: Uma introdução*, (pp. 197-208). São Paulo: EDUC.

McClain, K. (2002). Teacher's and students' understanding: The role of tools and inscriptions in supporting effective communication. *Journal of the Learning Sciences*, 11(2-3), 217-249.

McClain, K. (2003). Task-analysis cycles as tools for supporting students' mathematical development. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 175-189). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mendes, I. A. (2009). *Matemática e Investigação em Sala de Aula – Tecendo Redes Cognitivas na Aprendizagem*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Mendonça, M. C. D. (1999). Resolução de Problemas Pede (Re)Formulação. In P. Abrantes, et al (Orgs.). *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo*, (pp. 15-33). Lisboa: APM.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. São Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (2012). *Currículo nacional para o ensino básico. Competências essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

Minsky, M. (1987). *The society of mind*. London: William Heinemann.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 239–257.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

Neto, T. J. A. S. (2012). *História da Educação e Cultura de Angola: Grupos Nativos, Colonização e Independência*. (2ª ed.). Luanda: Garrido Artes Gráficas.

Neves, M. A. (2013). *Matemática A - 11.º Ano*. Porto: Porto Editora.

Noddings, N. P. (1989). Teachers to Teach Mathematical Problem Solving. In R. Charles, & E. Silver (Eds.). *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (pp. 244-258). Virginia: Laurence Erlbaum Associates.

Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas* (pp.199-220). São Paulo: Editora UNESP.

Onuchic, L. R. (2003). Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. In *Anais da 11.ª Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-11). Blumenau: Universidade Regional de Blumenau.

Onuchic, L. R. & Allevato, N. S. G. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In M. A. V. Bicudo, & M. C. Borba (Orgs.), *Educação Matemática - pesquisa em movimento* (pp. 213-231). São Paulo: Cortez.

Onuchic, L. R. & Allevato, N. S. G. (2009). Formação de professores: mudanças urgentes na licenciatura em matemática. In M. C. R Frota, & L. Nasser (Org.), *Educação matemática no ensino superior: pesquisas e debates* (pp. 169-187). Recife: SBEM.

Peirce, C. S. (1931). *Collected papers II, Elements of logic*. Cambridge: Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1982). *Pragmatism: The classic writings*. In H. S. Thayer, C. S. Peirce, W. James, C. I. Lewis, J. Dewey, & G. H. Mead (Eds.), (pp. 43–120). Indianapolis, IN: Hackett.

Piaget, J. (1976). *A equilibração das estruturas cognitivas: o problema central do desenvolvimento* (Trad. de M. Santos Penna). Rio de Janeiro: Zahar.

Piaget, J. (1990). *Epistemologia genética*. São Paulo: Martins Fontes.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Pommer, W. M. (2013): *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares*. (e-book). São Paulo. (Disponível em: http://stoa.usp.br)

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Orgs.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. I, pp. 195-210). Lisbon, Portugal: PME.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, 39(5-6), 419-430.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1999). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41-70.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.

Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutierrez, A & P. Boero, P (Eds). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp. 205-235). Dordrecht, The Netherlands: Sense Publishers.

Quitembo, A. D. (2010). *A formação de professores de Matemática no Instituto Superior de Ciências de Educação em Benguela - Angola. Um estudo sobre o seu desenvolvimento.* (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Portugal.

Sacristán, A. I. (1991). Los Obstáculos de la intuición en el aprendizaje de procesos infinitos. *Educación Matematica*, 3(1), 5–18.

Sad, L. A. (1998) *Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista-UNESP, Rio Claro.

Santos, M. C. (2002). Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática. *Educação Matemática em Revista*, 9(12), 11-15.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM Mathematics Education*, 39, 523–536.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1990). Problem solving in context(s). In R. I. Charles, & E. A. Silver (Eds.). *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 82-92) (3.ª ed.) Virginia: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-366). New York: Macmillan e NCTM.

Schorr, R. Y. & Lesh, R. (2003). A modelling approach for providing teacher development. In R. Lesh and H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, (pp. 141–158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schroeder, T. L. & Lester JR, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.). *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 31-42). Reston: NCTM.

Shternberg, B., & Yerushalmy, M. (2003). Models of functions and models of situations: On the design of modeling-based learning environments. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 479–498). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Shulman, L. S. (1996). Paradigms and research programs for the study of teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed.), (pp. 3-36). New York: Macmillan.

Silva, E. A. da. (2012). *Universidade Agostinho Neto. Quo vadis?*. Luanda: Kilombelombe.

Singh, S. (1999). *O Último Teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Editora Record.

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In R. I. Charles, & E. A. Silver (Eds.). *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston: NCTM.

Steen, L. A. (2001). Revolution by Stealth: Redefining University Mathematics. In D. Holton, M. Artigue. U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study*, (pp. 303-312). New York: Kluwer Academic Publishers.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meaning and strategies*. New York: Springer-Verlag.

Steffe, L. P. & Kieren T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 711–733.

Steffe, L. P., & Wood, T. (Eds.). (1990). *Transforming children's mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sternberg, R. J. (2000). *Psicologia Cognitiva* (Trad. M. R. Osório). Porto Alegre: Artes Médicas.

Tall, D. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. (Tese de Doutoramento em Educação Matemática). University of Warwick, England.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brasil: PME.

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 111-118). Haifa, Israel: PME.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Terra, A. L. (2014). A metodologia quadripolar de investigação científica aplicada em Ciência da Informação: relato de experiência. *PRISMA.COM*, 26, 45-66.

Tsamir, P. (2001). When 'The Same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 289–307.

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de Investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and Middle School Mathematics*. (4ª Ed.) New York: Logman.

Van Reeuwijk, *M. & Wijers, M. (2003). Explanations why? The role of explanations in* answers to (assessment) problems. In R. Lesh & H. *M.* Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (191-202). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vera, D. A. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. (Tese de doutoramento). Valencia: Universidade de València, Serviço de Publicações.

Vera Cruz, E. C. (2008). Os desafios do ensino superior em Angola. O lugar e o papel das ciências sociais na construção do país e do futuro dos angolanos. *Revista Angolana de Sociologia*, 1, 85-92.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematical learning. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-213). Washington, DC: MAA.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.

Von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.), *The invented reality* (pp. 17–40). New York: Norton.

Von Glasersfeld, E. (Ed.). (1991). *Radical constructivism in mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wagner, D. R. (2003). We have a problem here: 5+20=45. *Mathematics Teacher*, 96, 612-616.

Waldegg, G. (1987). *Esquemas de Respuesta ante el Infinito Matemático. Transferencia de la Operatividad de lo Finito a lo Infinito*. (Tese de Doutoramento). Centre for Research and Advanced Studies, Mexico.

Webber, R. P. (2012). Using Spreadsheets to Help Students Think Recursively, *PRIMUS*, 22(5), 365-372.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.

Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (3ª ed.). London: Sage.

Zau, F. (2009). *Educação em Angola. Novos Trilhos para o Desenvolvimento*. Porto: Movilivros.

Zawojewski, J., Lesh, R., & English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & teaching* (pp. 337–358). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zuchi, I. (2005). *A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional*. (Tese de Doutorado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Anexos

Anexo 1:
Questionário diagnóstico aplicado aos alunos

Universidade da Beira Interior

3º Ciclo em Didática da Matemática

QUESTIONÁRIO DIAGNOSTICO
Pretendo, com este questionário, obter indicações úteis para o professor/investigador de forma a poder intervir, de forma consciente, no sentido de melhorar os resultados obtidos pelos alunos. Responda às questões colocadas de forma tão completa quanto possível e apresentando todos os argumentos que considerar necessários. Este questionário é anonimo e será mantida a confidencialidade.

Objetivo: Obter dados para uma investigação a respeito do perfil dos alunos da disciplina A. Matemática, do curso de Administração de Empresas.
Investigador: Óscar M. Cumbo
Orientadora: Prof.ª Dra. Susana G. Carreira
Instituição: UBI-Covilhã/Portugal

1. DADOS PESSOAIS

a) Género (marque com um X)

Masculino	Feminino

b) Idade (marque com um X)

<18	18-20	21-23	24-26	27-29	30-32	33-35	36-38	39-41	>41

c) Naturalidade

Localidade	Município	Província

d) Residência habitual

Localidade	Município	Província

e) Ocupações principais

Só estuda	Estuda e Trabalha	Se trabalha indique o ramo de actividade	Quantas horas trabalha por semana

2. DADOS ACADÊMICOS

a) Tipo de instituição de ensino onde frequentou o Ensino Secundário ou Médio

Pública	Privada	Mista

b) Tipo de curso de proveniência

Secundário (PUNIV)	Formação Técnico-Profissional	Formação de professores	Outro (qual?)

c) Em que ano lectivo terminou o ensino médio ou secundário? ________/__________

d) Que curso e especialidade fez no ensino médio ou secundário?

____

e) Se Você não ingressou no Ensino Superior imediatamente após ter terminado o Ensino Médio ou Secundário, que actividades exerceu neste intervalo de tempo?

____

____

f) Este é o curso que realmente gostaria de fazer no Ensino Superior?

Sim	Não

g) Se respondeu não, que curso realmente gostaria de fazer no Ensino Superior?

____

h) Por que escolheu esse curso?

____

____

____

i) Por que escolheu a Escola Superior Politécnica do Namibe?

____

____

____

3. SOBRE A MATEMÁTICA

a) O que dizer sobre a sua relação com a matemática?

Gosto muito	Gosto	Indiferente	Não gosto	Detesto

b) Como considera a matemática?

Muito fácil	Fácil	Médio	Difícil	Muito difícil

c) Como foi seu desempenho em matemática no Ensino Médio ou no Ensino Secundário?

Muito Bom	Bom	Suficiente	Medíocre	Mau

d) Como considera o estudo da matemática para a sua formação profissional?

Muito relevante	Relevante	Mais ou menos relevante	Pouco relevante	Irrelevante

e) Que temas matemáticos prefere? (Dê até 3 exemplos)

____

____

____

f) Que temas matemáticos considera menos interessantes? (Dê até 3 exemplos)

____

____

____

g) De que tipo de actividade menos gosta na matemática? (Dê até 3 exemplos)

____

____

____

4- SOBRE A INFORMÁTICA

a) Você já estudou matemática usando o computador?

Sim	Não

Em caso afirmativo, de que modo? Se puder, especifique o(s) programa(s) informático(s) que utilizou.

____

____

____

b) Você tem computador em casa?

Sim	Não

Em caso negativo, tem acesso fácil a um computador em outro local?

Sim	Não

Onde? ____

c) Indique a frequência com que utiliza cada um dos seguintes programas informáticos.

Programa	Muitas Vezes	Algumas Vezes	Poucas Vezes	Nunca utilizei
Word				
Excel				
PowerPoint				
Access				
Paint				

Indique as funcionalidades que sabe utilizar nos seguintes programas

Word	Não sei	Sei pouco	Sei razoavelmente	Sei bastante
Escrever e formatar texto				
Inserir simbologia matemática				
Usar as ferramentas de desenho				
Inserir imagens				
Construir tabelas				
Construir gráficos				

Excel	Não sei	Sei pouco	Sei razoavelmente	Sei bastante
Escrever e formatar texto				
Fazer cálculos				
Construir tabelas				
Fazer gráficos				
Usar fórmulas				
Construir gráficos				

Obrigado pela sua prestimosa colaboração!
Março de 2016

Anexo 2:
Resultados do questionário diagnóstico aplicado aos alunos

Resultado do questionário diagnóstico aplicado aos alunos

Dados Pessoais dos alunos da turma considerados no estudo

a) Distribuição dos alunos por género

	Masculino	Feminino	Total
Composição da Turma	16	11	27

b) Distribuição dos Alunos por faixa etária

Facha etária	<18	18-20	21-23	24-26	27-29	30-32	33-35	36-38	39-41	>41	Total
Alunos	3	5	7	4	3	2	1	1	1	0	27

c) Distribuição dos Alunos por região de origem

Norte	Sul	**Centro**	Este	Oeste	Total
5	14	4	2	2	27

d) Distribuição dos Alunos por região de residência habitual

Região	Norte	Sul	**Centro**	Este	Oeste	Total
Alunos	1	24	2	0	0	27

e) Distribuição dos alunos por critério de situação laboral

	Estuda somente	Estuda e Trabalha	Total
Quantidade de alunos	12	15	27
Média semanal de horas de trabalho		7,8	

2 Dados Académicos

a) Distribuição dos alunos por tipo de escola de proveniência

Pública	Privada	Mista	Total
19	3	5	27

b) Tipo de curso de proveniência

Secundário (PUNIV)	Formação Técnico-Profissional	Formação de professores	Outro	Total
16	4	7	0	27

c) Distribuição dos alunos por ano de conclusão do ensino médio

2012	2013	2014	2015	Total
2	6	5	14	27

d) Distribuição dos alunos por curso médio de proveniência

C. F. Biológica	Ciências Humanas	C. Econ. Jurídicas	Geograf/ Hist.	Biol/Química	Ambiente	Total
6	7	3	4	3	4	27

e) Distribuição dos alunos segundo o tempo decorrido entre a conclusão do ensino médio e o ingresso no curso de licenciatura

3 Anos	2 Anos	1 Ano	Ingresso imediato	Total
2	6	5	14	27

Principais atividades exercidas pelos alunos antes de ingressar no curso de licenciatura

- Comércio informal
- Auxiliar em empresas de prestação de serviços
- Vendedor em pequenas lojas ou cantinas

f) Estudantes que realmente gostariam (ou não) de fazer o curso de licenciatura em Engenharia do Ambiente

Sim	Não	Total
13	14	27

g) Cursos que alguns estudantes realmente gostariam de fazer

- Biologia (ensino de)
- Geografia (ensino de)
- Biologia Marinha
- Química (Ensino de)
- Direito
- Gestão
- Economia

h) Razões de escolha do curso de Licenciatura em Engenharia do Ambiente

- Vontade de saber como proteger o ecossistema
- Necessidade de entender as leis da natureza
- Equilíbrio entre disciplinas teóricas e as prática (que envolvem cálculos)
- Potencial empregabilidade
- Por estudar a natureza
- Na província não existe o verdadeiro curso dos sonhos

i) Razão da escolha da Escola

- É a instituição com o curso dos meus sonhos
- Na província não existe a instituição com o verdadeiro curso dos sonhos

3 Sobre a Matemática

a) Relação dos alunos com a Matemática

Gosto muito	Gosto	Indiferente	Não gosto	Detesto	Total
0	1	18	5	3	27

b) Consideração dos alunos sobre facilidade ou não da matemática

Muito fácil	Fácil	Médio	Difícil	Muito difícil	Total
0	0	10	8	9	27

c) distribuição dos alunos segundo o relato de como foi seu desempenho em matemática no Ensino Médio ou no Ensino Secundário

Muito Bom	Bom	Suficiente	Medíocre	Mau	Total
0	0	21	6	0	27

d) Distribuição dos alunos segundo a relevância que consideram ter o estudo da Matemática para a sua formação profissional

Muito relevante	Relevante	Mais ou menos relevante	Pouco relevante	Irrelevante	Total
0	3	6	14	4	27

e) Principais temas matemáticos preferidos pelos alunos

- Equação do 2º grau
- Sistema de equações
- Logaritmos
- Propriedade de potências

f) Temas matemáticos considerados menos interessantes

- Trigonometria
- Inequações exponenciais
- Progressão geométrica

g) Tipos de atividade que os alunos menos gostam:

- Simplificação de expressões trigonométricas
- Problemas com logaritmos

4 SOBRE A INFORMÁTICA

a) Os alunos estudaram ou não matemática usando PC.

Sim	Não	Total
0	27	27

b) Distribuição de alunos com e sem computador em casa

Tem	Não tem	Total
11	16	27

c) Frequência com que os alunos utilizam programas informáticos

Programa	**Muitas Vezes**	**Algumas Vezes**	**Poucas Vezes**	**Nunca utilizei**	**Total**
Word	4	10	13	0	27
Excel	1	4	9	13	27
PowerPoint	0	0	7	20	27
Access	0	0	0	27	27
Paint	0	0	0	27	27

d) O quão os alunos sabem utilizar as principais funcionalidades do MS-Word

Word	Não sei	Sei pouco	Sei razoavel-mente	Sei bas-tante	Total
Escrever e formatar texto	0	10	14	3	27
Inserir simbologia matemática	27	0	0	0	27
Usar as ferramentas de desenho	15	9	3	0	27
Inserir imagens	15	8	4	0	27
Construir tabelas	18	0	8	0	26
Construir gráficos	25	1	1	0	27

e) O quão os alunos sabem utilizar as principais funcionalidades do MS-Excel

Excel	Não sei	Sei pouco	Sei razoavelmente	Sei bastante	Total
Escrever e formatar texto	0	10	14	3	27
Fazer cálculos	3	18	6	0	27
Construir tabelas	0	17	10	0	27
Fazer gráficos	15	12	0	0	27
Usar fórmulas	20	6	1	0	27
Construir gráficos	25	2	0	0	27

Anexo 3:
Termo de Consentimento Livre para participação em investigação

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE PARA PARTICIPAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO

O presente documento é uma Declaração que confirma que o(a) estudante concorda em participar numa investigação que será realizada no âmbito de uma tese de doutoramento em Didática da Matemática, sob orientação da Profª Dra. Susana P. G. Carreira, *e será posteriormente apresentada na Universidade Beira Interior (UBI).*
Por favor, leia com atenção a seguinte informação. Se achar que algo está incorrecto ou que não está claro, não hesite em solicitar mais informações. Se concorda com a proposta que lhe foi feita, queira assinar este documento.

***Título do estudo**:*
Ensino baseado em resolução de problemas com recurso à folha de cálculo:
Uma proposta didática para abordagem ao tópico Sucessões Numéricas

***Breve Enquadramento**:*

O estudo visa obter indicações úteis para o professor/investigador perceber, intervir e propor metodologias de forma consciente, no sentido de melhorar os resultados obtidos pelos alunos.
Participarão nesta investigação estudantes do 1º Ano do curso de Engenharia do Ambiente, e professores que lecionam a disciplina de matemática nos diversos cursos oferecidos pela escola superior politécnica do Namibe.
Tendo em conta os objectivos da investigação, o investigador fará gravação em áudio e vídeo de modo a registar tudo o que cada aluno participante fizer, explicar e registar durante a resolução das tarefas que serão propostas. No final de cada aula, cada estudante participante receberá uma cópia dos dados recolhidos a seu respeito.
O(A) estudante terá de responder às questões de forma tão completa quanto possível e apresentando todos os argumentos que considerar necessários. Toda a informação recolhida no âmbito do estudo será mantida no anonimato e será de uso exclusivo, pelo que não serão registados dados de identificação dos participantes.
O tempo previsto para o levantamento de dados é de três semanas consecutivas
A assinatura do presente documento não garante a participação no estudo, o investigador fará uma escolha aleatória de um número limitado, de entre os que aceitarem participar no estudo.
Desde já o investigador agradece a colaboração de todos voluntários

Assinatura ……………………………………………………………………………………………………

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Eu____, Estudante do 1º Ano do Curso de Engenharia do Ambiente, Declaro ter lido e compreendido este documento, bem como as informações verbais que me foram fornecidas pela pessoa que acima assina. Foi-me garantida a possibilidade de, em qualquer altura, recusar participar neste estudo sem qualquer tipo de consequências. Desta forma, aceito participar neste estudo e permito a utilização dos dados que de forma voluntária forneço, confiando em que apenas serão utilizados para esta investigação e nas garantias de confidencialidade e anonimato que me são dadas pelo investigador

Assinatura legível:____

Data: ___ /___ /2016

Anexo 4:
1ª Tarefa (Problema do Jardineiro)

Escola superior Politécnica do Namibe
Curso de Engenharia Ambiental
Ano lectivo 2016 1º Ano /Diurno
Disciplina Análise Matemática

Ficha de trabalho nº ____/Data__/__/2016
Nome:____
Caro aluno, resolva estas questões com a devida responsabilidade e clareza pois as suas respostas servirão de indicadores para a melhoria do ensino de matemática.

1-PROBLEMA DO JARDINEIRO

Um jardineiro tem que regar roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea, cada uma distando 1m da outra. Ele enche seu regador numa fonte situada na mesma vereda, a 15m da primeira roseira, e a cada viagem rega 3 roseiras. Suponha que começa e termina na fonte em cada viagem.

Secção I

A) Qual é a distância percorrida pelo jardineiro em cada uma das sucessivas viagens?

A1) Procure um modelo ou fórmula que permita determinar a distância percorrida pelo jardineiro em cada viagem.

B) Qual é o número total de roseiras que o jardineiro conseguirá regar à medida que for realizando as sucessivas viagens?

B1) Procure uma expressão matemática a partir do qual seja possível obter o numero total de roseiras que o jardineiro conseguirá regar em função das sucessivas viagens.

C) Qual é o nome especial para o tipo de conjuntos obtidos nas alíneas A) e B)?

D) Que designação se dá a cada elemento destes conjuntos?

Secção II

E) Nos conjuntos de valores obtidos nas alíneas A) e B), que relações observa entre valores consecutivos?

E1) Será que através dos modelos obtidos nas alíneas A1) e B1) é possível comprovar a existência das relações referidas na alínea anterior? Se sim, demostre. Se não, justifique.

G) Qual é a distância total que o jardineiro terá que percorrer até conseguir regar 60 roseiras?

G1) Compare ou obtenha o resultado da alínea anterior analiticamente.

SECÇÃO III

H) Sabendo que a capacidade do regador utilizado pelo jardineiro é de 10l, quantos litros de água gastará para conseguir regar 90 roseiras?

H1) Procure um modelo ou fórmula para determinar a quantidade total de água que o jardineiro gastará no final das sucessivas viagens (considerando que a capacidade do regador é de 10 litros).

O que há de característico neste modelo e nos anteriores?

Anexo 5:
2ª Tarefa (Problema de Reprodução de vírus)

Escola superior Politécnica do Namibe
Curso de Engenharia Ambiental
Ano lectivo 2016 1º Ano /Diurno
Disciplina Análise Matemática

Ficha de trabalho nº ____/Data__/__/2016
Nome:____
Caro aluno, resolva estas questões com a devida responsabilidade e clareza pois as suas respostas servirão de indicadores para a melhoria do ensino de matemática.

2-PROBLEMA DE REPRODUÇÃO DE VÍRUS

Reprodução por Bipartição (ou divisão binária): Neste tipo de reprodução ocorre a divisão do organismo em dois, com semelhanças entre si. Apesar de se dividirem, estes fragmentos irão adquirir a mesma constituição do ser assexuado que sofreu o processo, pois continuam com as mesmas características.
Neste processo poder-se-á dizer que a vida do ser que foi dividido cessou, pois este foi transformado em dois novos seres com características sensivelmente iguais. Tendo isto em conta, é o progenitor que perde a sua individualidade no processo de Bipartição, porque o núcleo é dividido numa primeira fase e só posteriormente é que o citoplasma irá dividir-se. E assim se formam dois indivíduos.
Uma pessoa foi infetada por um único vírus, e sabe-se que a espécie de vírus se reproduz diariamente (em cada 24 h) por bipartição.
Secção I

A) Quantos vírus a pessoa infetada terá no seu organismo no 1.º, 2.º, 3.º e nos dias subsequentes?

A1) Determine uma fórmula que permita calcular a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá em função do número de dias.

A2) Determine uma expressão matemática que permita calcular o número total de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função da quantidade de vírus do dia anterior.

B) Que relações nota entre elementos consecutivos da sucessão da alínea A)?

B1) Comprove analiticamente as relações aludidas na alínea B).

Secção II

C) Quantos vírus a pessoa infetada terá no seu organismo ao completar a 1.ª semana, 2.ª semana, 3.ª semana,…?

C1) Determine uma fórmula que permita calcular a quantidade de vírus que a pessoa infetada terá em função do número de semanas.

C2) Determine uma expressão matemática que permita calcular o número total de vírus que a pessoa infetada terá no organismo em função da quantidade de vírus da semana anterior.

D) Compare os conjuntos obtidos nas alíneas A) e C). Comente a sua resposta.

Anexo 6:
3ª Tarefa (Problema de cubos de gelo no copo)

Escola superior Politécnica do Namibe
Curso de Engenharia Ambiental

Ano lectivo 2016 1º Ano /Diurno

Disciplina Análise Matemática

Ficha de trabalho nº ____/Data__/__/2016 Nome:____________________________

Caro aluno, resolva estas questões com a devida responsabilidade e clareza pois as suas respostas servirão de indicadores para a melhoria do ensino de matemática.

3- PROBLEMA DE CUBOS DE GELOS NO COPO

Um copo cilíndrico contém água até meio da sua altura. Dentro do copo irão ser colocados sucessivamente cubos de gelo de dimensões aproximadamente iguais (2 x 2 x 2 cm). Como a densidade do gelo é aproximadamente 0,9, então a quantidade de água que um cubo desloca ao ser mergulhado no copo será 0,9 vezes o seu volume. Prova-se ainda que o nível da água no copo não depende de que o gelo esteja derretido ou não. (Escolha um valor para o raio da base e outro para a altura do copo).

A1) Apresente os diversos níveis que água atingirá à medida que vão sendo introduzidos sucessivos cubos de gelo.

A2) Mostre analiticamente que o nível de água no copo depende do número de cubos de gelo que forem introduzidos.

B1) Que relação observa entre cada nível atingido pela água e o nível anterior?

B2) Defina essa relação analiticamente.

C1) Como carateriza esta sucessão relativamente à sua monotonia? Recorrendo a um gráfico, explique como isto pode ser percebido.

C2) Explique analiticamente a sua resposta.

D) Quantos cubos de gelo serão necessários para que o copo transborde? Justifique a sua resposta.

Anexo 7:
4ª Tarefa (Problema de plantação de laranjeiras)

Escola superior Politécnica do Namibe

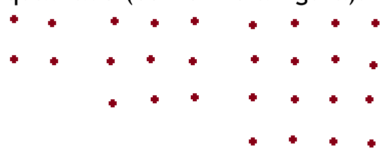
Curso de Engenharia Ambiental

Ano lectivo 2016 | Disciplina Análise Matemática | 1º Ano /Diurno

Ficha de trabalho nº ____/Data__/__/2016
Nome:____
Caro aluno, resolva estas questões com a devida responsabilidade e clareza pois as suas respostas servirão de indicadores para a melhoria do ensino de matemática.

4- PROBLEMA DAS LARANJEIRAS

Um fazendeiro deseja plantar um pomar de citrinos e para iniciar a plantação desenhou um quadrado no chão com 1m de lado e plantou uma laranjeira em cada um dos vértices.
Diariamente plantava uma fila horizontal e uma vertical de tal modo que a forma quadrada da zona com plantação de laranjeiras fosse conservada, mantendo a disposição das árvores em quadrado (conforme a figura).



Secção I

A1) Quantas laranjeiras o fazendeiro plantou em cada um dos primeiros 100 dias?

A2) Explique como obter a resposta analiticamente.

B1) Quantas laranjeiras estarão plantadas na fazenda em cada um dos primeiros 100 dias?

B2) Explique como obter a resposta analiticamente.

C1) Quantos metros quadrados terá a plantação em cada um dos primeiros 100 dias?

C2) Explique como obter a resposta analiticamente.

Secção II

D1) A densidade populacional (quantidade de indivíduos por metro quadrado) varia de dia para dia. Mostre este facto considerando os primeiros 100 dias.

D2) Proponha uma expressão analítica para a densidade populacional em função do numero de dias.

E) De que valor se aproximam os termos da sucessão obtida na alínea anterior? A que conclusões podemos chegar sobre a convergência da sucessão?

Anexo 8:
5ª Tarefa (Problema de ciclos cardíacos)

Escola superior Politécnica do Namibe
Curso de Engenharia Ambiental

Ano lectivo 2016 | 1º Ano /Diurno

Disciplina Análise Matemática

Ficha de trabalho nº ____/Data__/__/2016
Nome:____

Caro aluno, resolva estas questões com a devida responsabilidade e clareza pois as suas respostas servirão de indicadores para a melhoria do ensino de matemática.

5-PROBLEMA DE BATIMENTO DO CORAÇÃO

Ciclo cardíaco é um conceito referente aos eventos relacionados com o fluxo e pressão sanguínea que ocorrem desde o início de um batimento cardíaco até ao próximo batimento. Em resumo, o ciclo cardíaco é dividido em dois momentos: o de relaxamento, chamado diástole, quando o coração se distende ao receber o sangue, e o de contração, denominado sístole, quando ele ejeta o sangue.

Secção I
Atribua um valor numérico para diástole e outro para sístole.

A) Construa analiticamente a sucessão Un que representa n ciclos cardíacos (diástole e sístole)

B) Fale sobre a monotonia da sucessão Un e justifique com base numa representação gráfica ou por meio de uma tabela.

C1) Obtenha as médias de cada 2 termos consecutivos da sucessão Un e escreva o termo geral desta nova sucessão Vn.

C2) Caracterize a sucessão Vn (convergência, monotonia, majorante, minorante, limitação).

Secção II

D1) Determine a diferença entre cada termo da sucessão Un e o termo correspondente da sucessão Vn e escreva o termo geral desta nova sucessão Wn.

D2) Caracterize a sucessão Wn (convergência, monotonia, majorante, minorante, limitação).

Anexo 9:
Inquérito para Professores

Universidade da Beira Interior

3º Ciclo em Didática da Matemática

INQUÉRITO EXPLORATÓRIO

Pretendo, com este questionário, obter indicações úteis para caracterizar as práticas matemáticas predominantes na ESPtN. Por favor, responda às questões colocadas de forma tão completa quanto possível e apresentando todos os argumentos que considerar necessários. Este questionário é anónimo e será mantida a confidencialidade.

Objetivo: Obter dados que sustentam ou contrariam a necessidade de implementação de uma inovação didática.
Disciplina: Análise Matemática, do curso de Engenharia do Ambiente
Investigador: Óscar M. Cumbo
Orientadora: Prof.ª Dra. Susana P. G. Carreira
Instituição: UBI-Covilhã/Portugal

1. DADOS PESSOAIS

a) Género (marque com um X)

Sim	Não

b) Idade (marque com um X)

<18	18-20	21-23	24-26	27-29	30-32	33-35	36-38	39-41	>41

c) Tempo de experiência como docente do ensino superior (marque com um X).

1 Ano	2 Anos	3 Anos	4 Anos	5 Anos	6 Anos	7 Anos	8 Anos	9 Anos	10 Ano ou +

d) Há quanto tempo é docente na ESPtN (marque com um X).

1 Ano	2 Anos	3 Anos	4 Anos	5 Anos	6 Anos	7 Anos	8 Anos	9 Anos	10 Anos ou +

2- DADOS PROFISSIONAIS

a) Que disciplina(s) leciona?

____

____

____

b) Há quanto tempo é docente responsável da(s) disciplina(s) (Marque com um X).

1 Ano	2 Ano	3 Ano	4 Ano	5 Ano	6 Ano	7 Ano	8 Ano	9 Ano	10 Ano ou +

c) Tem formação inicial de professor de Matemática (Marque com um X)

Sim	Não

3- ASPETOS METODOLÓGICOS

a) Com que frequência realiza as seguintes atividades com os alunos (Marque com um X)

O que faz durante as aulas	**Nunca**	**Raramente**	**Às vezes**	**Quase sempre**	**Sempre**
Exemplificar					
Definir e explicar definições					
Explicar					
Demonstrar					
Orientar resolução de problemas					
Orientar resolução de exercícios					

b) Com que frequência recorre à resolução de problemas, considerando o momento inicial e final (Marque com um X)

Momento em que recorre à resolução de problemas	**Nunca**	**Raramente**	**Às vezes**	**Quase sempre**	**Sempre**
No início da aula					
No fim da aula					

C) Indique as principais formas de representar os elementos matemáticos e com que frequência (Marque com um X)

Formas de representar os elementos matemáticos	**Nunca**	**Raramente**	**Às vezes**	**Quase sempre**	**Sempre**
Algebricamente (A)					
Graficamente (G)					
Combinadamente (A+G)					
Graficamente e depois algebricamente					
Algebricamente e depois graficamente					

Moçâmedes, Data______/_____/2015