



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Métodos numéricos para a dinâmica de gases e escoamentos magnetohidrodinâmicos a números de Mach arbitrários
Aplicações em tubeiras magnetoplasmadinâmicas

Carlos Manuel Cipriano Xisto

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Mecânica
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor José Carlos Páscoa Marques
Co-orientador: Prof. Doutor Paulo Jorge dos Santos Pimentel de Oliveira

Covilhã, Fevereiro de 2014

Para a Susete e Mariana

Agradecimentos

O trabalho de investigação presente nesta tese foi desenvolvido durante a minha estadia como aluno de doutoramento no laboratório de investigação ClusterDEM, parte integrante do CAST (Centre for Aerospace Science and Technology), da Universidade da Beira Interior. O projeto foi financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) através de uma bolsa de doutoramento com a referência SFRH/BD/60285/2009 e através do projeto FCT com a referência PTDC/CTE-SPA/114163/2009 "SpaceProp - MHD Numerical Modelling in nozzles of MPD Thrusters for Space Propulsion".

Não posso deixar de começar por agradecer ao meu orientador, Professor Doutor José Carlos Páscoa Marques, Professor Auxiliar da Universidade da Beira Interior. Pelo seu apoio, encorajamento e amizade. Agradeço-lhe não apenas o incentivo para a prossecução para o doutoramento, como também a prontidão com que sempre me recebeu, e por me ter ajudado a traçar o meu caminho durante os quase quatro anos desta investigação. Gostaria de agradecer também ao meu co-orientador, Professor Paulo Jorge dos Santos Pimentel de Oliveira, Professor Catedrático da Universidade da Beira Interior, pelo seu precioso contributo neste trabalho de doutoramento.

Não posso deixar de agradecer a todos os membros da minha família, amigos e colegas do Laboratório ClusterDEM, por proporcionarem momentos de boa disposição, essenciais para ultrapassar as dificuldades que teimavam em aparecer.

Por fim, gostaria de deixar estas últimas palavras à Susete e à pequena Mariana. Agradeço-te por seres a pessoa que és e por todos estes anos que temos partilhado juntos. Obrigado pelo apoio incondicional que me dás em todos os desafios da minha vida, sem ti este trabalho não era possível.

Todas estas pessoas com quem tive a oportunidade de privar e crescer foram essenciais na concretização desta meta, proporcionando sempre um ambiente acolhedor e propício ao crescimento pessoal e intelectual.

Gigantum humeris insidentes



Resumo

A magnetohidrodinâmica (MHD) é a área científica que se dedica ao estudo da interação de um fluido condutor em movimento com um ou vários campos magnéticos. Fenómenos desta natureza são extremamente comuns no campo da astrofísica, sabendo-se que grande parte dos efeitos observados na dinâmica dos plasmas resulta da interação do escoamento com campos elétricos e/ou magnéticos. Outro campo de aplicação da ciência da MHD diz respeito à análise de sistemas de propulsão elétrica, mais concretamente na modelação de tubeiras magnetoplasmadinâmicas (MPD). Os sistemas MPD utilizam a força de Lorentz como principal mecanismo de aceleração, o que lhes permite obter velocidades de escape extremamente elevadas para uma pequena massa de gás propelente. Uma forma de analisar este tipo de escoamentos é através de ferramentas numéricas baseadas nas equações que governam o escoamento MHD.

O trabalho que aqui vai ser exposto pode dividir-se em duas partes. Na primeira é elaborado um método numérico eficaz para resolver as equações de Euler, que apresenta algumas novidades relativamente aos métodos existentes sendo capaz de calcular escoamentos a número de Mach arbitrário. Este método é baseado no algoritmo PISO e utiliza o esquema $AUSM^+ - up$ para o cálculo dos fluxos convectivos. É apresentada uma explicação pormenorizada sobre as bases deste método, onde vai ser demonstrado que é possível adaptar o esquema AUSM de forma a este ser integrado num algoritmo baseado na equação da pressão. Vai também ser acrescentado e testado no código em uso o esquema de interpolação de alta resolução CUBISTA. Para validar o código proposto são apresentados resultados para uma tubeira axissimétrica a operar em vários regimes de número de Mach. O caso de teste seguinte compreende um túnel com um obstáculo de secção circular cujo escoamento será abordado nos três regimes de esc. subsónico, transónico e supersónico. Esta primeira parte do trabalho é encerrada com o cálculo de um escoamento supersónico e hipersónico mais complexo, no qual o fluido vai de encontro a um objeto de geometria circular gerando ondas de choque a montante do obstáculo.

A segunda parte do trabalho compreende a extensão do método, anteriormente proposto para análise das equações de Euler, agora aplicado ao cálculo de escoamento MHD compressível. Este novo método é igualmente baseado no algoritmo PISO mas utiliza uma versão modificada do esquema AUSM, devidamente adaptada para escoamento MHD. O método aqui proposto vai ser exposto de forma pormenorizada e as várias técnicas de correção do campo magnético são aqui apresentadas. No que concerne à sua validação, são utilizados vários casos de teste padrão do tipo uni-dimensional e bidimensional. Inicialmente vão ser abordados dois problemas de escoamento MHD resistivo em canais de secção quadrada. Seguidamente a ordem de precisão do método vai ser analisada através do cálculo de ondas de Alfvén num espaço bidimensional. A precisão no cálculo de discontinuidades vai ser posteriormente analisada com recurso ao problema de Riemann uni-dimensional e a vários problemas bidimensionais de escoamento MHD ideal. O método de simulação MHD aqui desenvolvido vai finalmente ser aplicado na análise paramétrica dos efeitos da geometria dos elétrodos sobre o desempenho de uma tubeira MPD de campo induzido.

Palavras-chave

MHD, PISO, escoamento compressível, número de Mach arbitrário, AUSM, MPD.

Abstract

Magnetohydrodynamic (MHD) is related to the study of the interaction between a moving fluid with one or more magnetic fields. This kind of flow physics is quite common in the field of astrophysics, and it is believed that most of the plasma dynamics taking place in the Universe is related to the interaction between plasma flow and electric or magnetic fields. The analysis of plasma flow in electric propulsion systems, namely in magnetoplasmadynamic (MPD) thrusters, is another field of application for the MHD model equations. This kind of aerospace propulsion device uses the Lorentz force as main acceleration mechanism, which produces high exhaust velocities for a small mass of propellant.

The work herein presented can be divided in two main components. First, a new method for solving the Euler equations at arbitrary Mach numbers is proposed. This method is based on the PISO algorithm and uses the AUSM⁺ – *up* scheme for convective flux calculation. A detailed description of the proposed model will be presented, where it will be demonstrated that is possible to adapt the AUSM scheme for inclusion in a pressure based method. For interpolation purposes, the high resolution CUBISTA scheme is also included in the numerical code. For validation we present results for the axi-symmetric nozzle flow at several Mach number regimes. The bump flow test case is also addressed and the supersonic flow over a cylinder is here analyzed.

The second component of the work is related to the extension of the, previously developed, gas dynamic method for solving the MHD equations. This new method is again based on the PISO algorithm but uses a modified version of the AUSM scheme, specially devised for solving MHD flow. The proposed method will be described in detail and several techniques that are normally used for the correction of the magnetic field are here presented. Regarding validation, several 1D and 2D standard test cases are addressed. We start with two problems of resistive MHD flow in square duct channels. Afterwards, the Alfvén wave test case is used for the analysis of the special convergence order of the method. The accuracy of the proposed method for capturing several MHD discontinuities is analyzed with the 1D Riemann problems and with several 2D ideal MHD test cases. Finally, the developed model will be used for the parametric study of a 2D self-field MPD nozzle, namely on the effect of electrode geometry on the efficiency.

Keywords

MHD, PISO, compressible flow, all-Mach, AUSM, MPD.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Campos de aplicação da magnetohidrodinâmica	2
1.1.1	Análise computacional de fenômenos astrofísicos	2
1.1.2	Modelação computacional de tubeiras magnetoplasmodinâmicas	3
1.2	O código OpenFOAM	6
1.3	Problema em estudo	7
1.4	Escoamento compressível a número de Mach arbitrário	8
1.4.1	Métodos baseados na equação para a pressão	10
1.4.2	Métodos baseados na equação para a massa volúmica	14
1.5	Revisão bibliográfica sobre métodos de cálculo de escoamento MHD compressível	17
1.5.1	Métodos para a resolução do sistema de equações MHD compressível	18
1.5.2	A condição de não divergência do campo magnético, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	21
1.6	Revisão sobre modelação de tubeiras magnetoplasmodinâmicas	24
1.7	Objetivos e contribuições do presente trabalho	26
1.8	Visão geral da organização da tese	27
2	Equações de governo	29
2.1	Equações de Euler para um fluido compressível	29
2.2	O modelo MHD e a sua aplicabilidade na descrição de plasmas	30
2.3	As equações de Maxwell	32
2.4	A forma ideal do sistema de equações MHD	34
2.4.1	As equações na sua forma conservativa	35
2.4.2	Características matemáticas do sistema de equações MHD ideal	36
2.4.3	Tensões de Maxwell	39
2.4.4	Lei de conservação do campo magnético	40

2.4.5	Ondas e descontinuidades em MHD	41
2.5	A formulação resistiva do sistema de equações MHD	45
2.5.1	Efeitos da resistividade elétrica e viscosidade em escoamento MHD	47
2.6	Forma adimensional das equações MHD	49
2.6.1	Parâmetros adimensionais	50
2.7	Modelação numérica de tuberias MPD	51
2.7.1	Equação da indução	52
2.7.2	Equações de energia para multi-espécies	53
2.7.3	Propriedades de transporte	54
2.7.4	Equação de estado	57
2.8	Resumo	60
3	Discretização das equações utilizando o método de volumes finitos	61
3.1	Discretização do domínio de solução	61
3.2	Discretização da equação de transporte	62
3.2.1	Discretização espacial	63
3.2.2	Discretização temporal	66
3.3	O sistema de equações algébricas	67
3.4	Esquemas de interpolação	69
3.4.1	Esquema de diferenças <i>upwind</i> (UDS)	69
3.4.2	Esquema de diferenças centrais (CDS)	70
3.4.3	Esquema de interpolação <i>Upwind-Quadrático</i> (QUICK)	71
3.4.4	Esquemas limitadores de fluxo TVD	71
3.5	Implementação de um esquema de alta resolução	75
3.5.1	Casos de teste	77
3.6	Nota conclusiva	82

4	Método numérico para as equações de Euler e MHD a número de Mach arbitrário	83
4.1	Cálculo do escoamento compressível para um número de Mach arbitrário	83
4.1.1	Método numérico para resolução das equações de governo	84
4.1.2	Implementação das condições de fronteira para cálculo de dinâmica de gases	92
4.2	Resolução do sistema de equações MHD compressível em 3D	95
4.2.1	Modelo numérico para cálculo de escoamento MHD multi-dimensional . . .	95
4.2.2	Implementação das condições de fronteira para o campo magnético . . .	105
4.2.3	Discretização temporal	106
4.3	Nota conclusiva	107
5	Aplicação e validação dos métodos propostos	109
5.1	Casos de teste para dinâmica dos gases	109
5.1.1	Escoamento axissimétrico numa tubeira	109
5.1.2	Escoamento sobre um ressalto	110
5.1.3	Escoamento supersónico sobre um cilindro	118
5.2	Casos de teste MHD	119
5.2.1	Escoamento incompressível em canais de secção quadrada	121
5.2.2	Ondas de Alfvén	125
5.2.3	Problema de Riemann 1D	130
5.2.4	Vórtice Orszag-Tang	136
5.2.5	Interação entre uma nuvem de gases densos e uma onda de choque . . .	140
5.2.6	Cálculo de um rotor MHD	142
5.2.7	Escoamento MHD supersónico sobre um cilindro	145
5.3	Nota conclusiva	149
6	Análise numérica de uma tubeira MPD de campo induzido	153
6.1	Problema em estudo	153
6.1.1	Parâmetros analisados	156
6.2	Resultados obtidos	157
6.3	Nota conclusiva	167

7 Conclusão	169
7.1 Análise de escoamento compressível a número de Mach arbitrário	169
7.2 Análise de escoamento MHD compressível	170
7.3 Modelação numéricas de tuberias MPD	171
7.4 Trabalhos futuros	172
Bibliografia	173
A Identidades vetoriais	187

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática de dois fenómenos físicos fundamentais que são descritos pelas equações da MHD. a) Um condutor em movimento deforma as linhas de campo magnético à medida que é introduzido no espaço entre polos. b) Se uma corrente elétrica estiver a fluir no condutor a sua interação com as linhas de campo magnético vai gerar uma força de Lorentz que tende a modificar o movimento do condutor. <i>Adaptado de Davidson (2001)</i>	2
1.2	Representação esquemática de uma tubeira MPD de campo induzido. As componentes na direção radial (j_r) e axial (j_z) da corrente de descarga vão interagir com o campo magnético induzido (B_θ), dando origem às componentes de direção radial ($-j_z B_\theta$) e axial ($j_r B_\theta$) da força de Lorentz.	5
1.3	Representação esquemática de uma tubeira de campo imposto. Este sistema está sujeito a todos os mecanismos de aceleração presentes nas tubeiras de campo induzido. Contudo, a imposição de um campo magnético externo vai dar origem a outros mecanismos que irão contribuir para estabilizar e acelerar o plasma. . .	5
2.1	Representação esquemática da lei de Ohm (Davidson, 2001).	33
2.2	Tensões de Maxwell aplicadas a um tubo de fluxo magnético (Goedbloed e Poedts, 2004).	40
2.3	Representação de uma onda de Alfvén no plano xz . Uma perturbação na velocidade paralela a ox vai gerar um campo magnético por indução, também este paralelo a ox . Essa perturbação do campo vai ser somada ao campo inicialmente imposto gerando um onda de Alfvén. <i>Adaptado de Goedbloed e Poedts (2004)</i> . .	42
2.4	Diagrama representativo das descontinuidades que são admitidas pelo sistema de equações MHD.	43
2.5	Propriedades das descontinuidades MHD. O vetor normal à superfície da descontinuidade é dado por \mathbf{n} . a) Descontinuidade de contacto; b) Descontinuidade tangencial; c) Descontinuidade rotacional; d) Onda de choque lenta; e) onda de choque rápida; f) onda de choque intermédia; g) onda de choque lenta do tipo <i>switch-off</i> ; h) onda de choque rápida do tipo <i>switch on</i> ; i) onda de choque hidrodinâmica. <i>Adaptado de Goedbloed et al. (2010) e Sterck et al. (1998)</i>	46
2.6	Escoamento de tipo camada limite de Hartmann. a) Configuração utilizada no cálculo do escoamento de Hartmann. b) Perfil de velocidade a um número de Hartmann reduzido; c) Perfil de velocidade a um número de Hartmann elevado. .	48
2.7	Comparação entre os comportamentos reais e ideais das variáveis termodinâmicas. a) Evolução da temperatura em função do valor inverso da compressibilidade (Sankaran, 2005). b) Comportamento da compressibilidade em função da temperatura como requerido pelo algoritmo de solução numérica desenvolvido nesta tese. c) Índice adiabático em função da temperatura.	59

3.1	Volume de controlo utilizado na discretização em volumes finitos, onde d é o vetor que representa a distância entre o centróide N e o centróide P , e S_f é o vetor normal à face f com magnitude igual à área da face e a apontar para fora do VC que possui o ponto P	62
3.2	Tratamento usado para a correção da não-ortogonalidade da malha. Onde Δ é o vetor paralelo a d que representa a contribuição ortogonal e k representa a contribuição não-ortogonal.	65
3.3	Representação de uma malha uni-dimensional de cálculo através de uma notação de compasso.	70
3.4	Convecção de uma propriedade ϕ na face f . Note-se que os índices U (<i>Upstream</i>) e D (<i>Downstream</i>) são dados pelo sentido do fluxo.	72
3.5	Diagrama de Sweby, onde se apresenta o limitador Ψ em função do rácio de gradientes r . A zona mais escura representa a região TVD de segunda ordem. . .	74
3.6	Convecção de uma propriedade ϕ na face f após a normalização das variáveis. Note-se que as variáveis a montante e a jusante do ponto P dão origem a $\tilde{\phi}_U = 0$ e $\tilde{\phi}_D = 1$	75
3.7	Alguns esquemas de interpolação presentes no diagrama NVD. Note-se que a zona CBC é a zona sombreada assim como a linha correspondente ao esquema <i>upwind</i>	76
3.8	Esquema CUBISTA reformulado no diagrama de Sweby.	77
3.9	Malha utilizada para o cálculo da convecção pura de um escalar. As isolinhas e as condições de fronteira aqui presentes são para o perfil em escada calculado com o CUBISTA.	78
3.10	Resultados obtidos para o perfil em degrau: a) Comparação entre o CUBISTA e os esquemas <i>upwind</i> e de diferenças centrais; b) Comparação com outros esquemas de alta resolução. c) Resultados obtidos para o perfil \sin^2 . Resultados obtidos para o perfil referente à semi-elipse: d) Comparação entre o CUBISTA e os esquemas de interpolação <i>upwind</i> e de diferenças centrais; e) Comparação com outros esquemas de alta resolução; f) Resultados obtidos para os esquemas de alta resolução que apresentaram os piores resultados.	80
3.11	a) Malha utilizada no cálculo do escoamento transónico sobre um ressalto. Através da distribuição do número de Mach podemos visualizar que o escoamento à entrada e à saída é subsónico, apresentando uma onda de choque numa zona ligeiramente a jusante do topo do ressalto. b) Resultados obtidos para a onda de choque. Como já era esperado o esquema <i>Upwind</i> anula completamente este fenómeno físico. O esquema TVD <i>Minmod</i> continua bastante dissipativo e o UMIST apresentou melhores resultados que o <i>Gamma</i> ($\beta = 0,5$).	82
4.1	Representação uni-dimensional da malha numérica utilizada no novo método. . .	85

4.2	Gráficos representativos das funções de interpolação baseadas no número de Mach. a) Função polinomial $\mathcal{M}_{(4)}^{\pm}$, repare-se que à medida que $ M > 1$, $\mathcal{M}_{(4)}^{\pm} = M $. b) Função polinomial $\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}$, a traço contínuo para $\alpha = 3/16$ e a traço interrompido para $\alpha = -3/4$	89
4.3	Fluxograma representativo do algoritmo implementado para a resolução do sistema de equações de Euler a um número de Mach arbitrário.	90
4.4	Posição das variáveis quando se opta pelo método da malha desfasada.	102
5.1	a) Malha utilizada no cálculo da tubeira. Distribuição das isolinhas da pressão estática para um número de Mach à entrada igual a $Ma = 3$ calculado numa malha com: b) 100×15 nós; c) 200×30 nós; d) 400×60 nós.	111
5.2	Comparação entre os resultados numéricos obtidos na malha 100×15 , e a solução analítica exata para uma tubeira do tipo convergente-divergente. Os resultados numéricos obtidos representam o valor médio do número de Mach em várias secções da tubeira.	112
5.3	Resultados obtidos para o escoamento subsónico sobre um ressalto, $Ma = 0, 1$. a) Isolinhas relativas à distribuição do número de Mach. b) Distribuição do número de Mach nas paredes de baixo e de cima.	113
5.4	Comparação entre os resultados numéricos obtidos (128×35) e os resultados obtidos por Moukalled e Darwish (2001), com uma malha mais refinada (252×54), para o caso de teste subsónico com um número de Mach à entrada igual a $Ma = 0, 5$	113
5.5	Erro espacial calculado com a norma \mathcal{L}_1 para o coeficiente de pressão na parede de baixo. Este resultado foi obtido para o escoamento subsónico sobre um ressalto com número de Mach à entrada igual a $0, 5$	114
5.6	a) Malha esparsa utilizada no cálculo do escoamento transónico sobre o ressalto. Resultados obtidos para o caso do escoamento transónico sobre um ressalto: b) comparação entre os resultados obtidos com outros da literatura (Moukalled e Darwish, 2001); c) distribuição das isolinhas do número de Mach calculadas numa malha mais densa (252×54).	116
5.7	Malha bidimensional (158×78) utilizada no cálculo do escoamento supersónico sobre um ressalto, e as correspondentes condições de fronteira.	117
5.8	Resultados obtidos para o escoamento supersónico sobre um ressalto, $Ma = 1, 4$. Distribuição das isolinhas relativas ao número de Mach obtidas com: a) o novo código (AUSM); b) o código anterior, baseado em Rhie-Chow (R-C). c) Distribuição do número de Mach ao longo da parede inferior.	117
5.9	Estudo de desempenho iterativo: a) escoamento subsónico sobre um ressalto com $Ma = 0, 5$; b) escoamento supersónico sobre um ressalto com $Ma = 1, 4$	118
5.10	Malha bidimensional utilizada no cálculo do escoamento supersónico sobre um cilindro (120×120).	119

5.11	Isolinhas para a massa volúmica (a, b, e) e para a pressão (c, d, f), obtidas com as definições AUSM ⁺ – up (a, c, e, f) e com a técnica de interpolação de Rhie e Chow (b, d). $Ma = 1,97$ (a-d), $Ma = 6$ (e,f).	120
5.12	a) Geometria utilizada para a solução de <i>Shercliff</i> e de <i>Hunt</i> . Vista global (b) e detalhe (c) da malha utilizada.	122
5.13	Resultados obtidos para o caso de <i>Shercliff</i> . a) Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica exata de <i>Shercliff</i> para a camada limite de <i>Hartmann</i> . b) Perfil de velocidade calculado no plano paralelo à direção do campo magnético imposto. c) Comparação entre os resultados numéricos e a solução exata para a camada limite de <i>Shercliff</i> . d) Perfil de velocidade calculado no plano perpendicular à direção do campo magnético imposto.	123
5.14	a) Gráfico tridimensional da distribuição de velocidade no canal. b) Isolinhas relativas ao campo de velocidade, onde se destaca a espessura das duas camadas limites. c) Representação das linhas de corrente elétrica. d) Distribuição do campo magnético induzido pela velocidade do escoamento, como esperado a sua intensidade é maior junto às paredes perpendiculares à direção do campo magnético imposto.	124
5.15	Distribuição tridimensional da velocidade axial calculada numa secção do canal.	125
5.16	Resultados obtidos para o problema de <i>Hunt</i> . a) Representação das linhas de corrente elétrica em comparação com o campo magnético imposto. b) Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica de <i>Hunt</i> para a camada limite lateral. c) Perfil de velocidade calculado no plano perpendicular à direção do campo magnético imposto ($z = 0$). d) Comparação entre os resultados numéricos e a solução exata para a camada limite de <i>Hartmann</i> . e) Perfil de velocidade calculado no plano paralelo à direção do campo magnético imposto ($y = 0$).	126
5.17	Ondas de Alfvén em 1D. Resultados obtidos para as componentes B_y e B_z do campo magnético, calculadas com quatro malhas de diferente resolução, ao fim de cinco períodos. Representado a linha cheia mostra-se a distribuição inicial do campo magnético calculada na malha mais refinada.	128
5.18	Ondas de Alfvén em 2D. Resultados obtidos para as componentes perpendiculares, B_{\perp} , e B_z do campo magnético ao fim de cinco períodos, e projetadas sobre um vetor paralelo à direção de propagação da onda. A linha cheia mostra a distribuição inicial calculada com recurso à malha mais refinada.	129
5.19	Estudo da ordem de convergência no problema de Alfvén para o caso uni-dimensional (a) e para o caso bidimensional (b). Como podemos observar os gráficos apresentam um decaimento de segunda ordem do erro. Na presença de descontinuidades, devido à atuação dos limitadores de fluxo, é esperado que a ordem de convergência seja reduzida.	129
5.20	Vista parcial da malha bidimensional utilizada no cálculo do problema de Riemann. As condições de fronteira periódicas foram deslocadas em cada uma das direções com uma distância dada por quatro volumes de controlo.	130

- 5.21 Resultados obtidos para o *Caso A* ao fim de $t = 0,08 \cos \alpha$. Os resultados bidimensionais são comparados com uma solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de elevada resolução ($N = 1024$). São apresentadas distribuições para: a massa volúmica (a); a pressão termodinâmica (b); a componente paralela da velocidade (c) e do campo magnético (d); a componente perpendicular da velocidade (e) e do campo magnético (f); e a divergência do campo magnético (g). 133
- 5.22 Resultados obtidos para o *Caso B* ao fim de $t = 0,2 \cos \alpha$. Os resultados bidimensionais são comparados com uma solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de elevada resolução ($N = 1024$). São apresentadas distribuições para: a componente paralela da velocidade (a); e do campo magnético (b); a componente perpendicular da velocidade (c); e do campo magnético (d); a componente segundo z da velocidade (e); e do campo magnético (f); da massa volúmica (g); da pressão (h); da divergência do campo magnético (i). 134
- 5.23 Resultados obtidos para o *Caso C* ao fim de $t = 0,15 \cos \alpha$. Os resultados bidimensionais são comparados com uma solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de alta resolução ($N = 1024$). São apresentadas distribuições para: a massa volúmica (a); a pressão termodinâmica (b); a componente paralela da velocidade (c) e do campo magnético (d); a componente perpendicular da velocidade (e) e do campo magnético (f); e divergência do campo magnético (g). 135
- 5.24 Resultados obtidos para o *Caso D* ao fim de $t = 0,1 \cos \alpha$. Os resultados bidimensionais são comparados com uma solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de elevada resolução ($N = 1024$). São apresentadas distribuições para: a massa volúmica (a); a pressão termodinâmica (b); a componente paralela (c) e perpendicular da velocidade (d); a componente paralela (e) e perpendicular do campo magnético (f); e divergência do campo magnético (g). 137
- 5.25 Resultados numéricos obtidos para o vórtice de Orszag-Tang no tempo $t = 0,5$.
a) Distribuição das linhas isobáricas. b) Distribuição das isolinhas referentes à massa volúmica. c) Vetores representativos do campo de velocidade. d) Vetores representativos do campo magnético. e) Distribuição de pressão calculada ao longo da linha $y = \pi$ 138
- 5.26 Resultados numéricos obtidos para o vórtice de Orszag-Tang no tempo $t = 2$.
a) Distribuição das linhas isobáricas. b) Distribuição das isolinhas referentes à massa volúmica. c) Vetores representativos do campo de velocidade. d) Vetores representativos do campo magnético. e) Distribuição de pressão calculada ao longo da linha $y = \pi$ 139
- 5.27 Resultados obtidos para o vórtice de Orszag-Tang. Nas Figs. a), b) e c) temos a distribuição das linhas isobáricas. d) Representação das isolinhas referentes a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ calculadas na malha com dimensão $N = 200$. e) Comparação entre os resultados obtidos e aqueles apresentados por Miyoshi e Kusano (2005). 141

5.28	Resultados obtidos para a interação entre uma onda de choque e uma nuvem de gases densos. a) Condição inicial; b) Distribuição logarítmica da massa volúmica calculada com recurso à malha de dimensão $N = 400$; c), d) e e) Linhas de campo magnético obtidas para as três resoluções de malha ($t = 0,06$).	143
5.29	Solução não-estacionária para a distribuição logarítmica da massa volúmica, calculada com recurso à malha de dimensão $N = 200$;	144
5.30	Resultados obtidos para o rotor com a malha de resolução $N = 200$ e $t = 0,15$: a) isolinhas de ρ ; b) isolinhas de p ; c) isolinhas de número de Mach; d) isolinhas relativas à pressão magnética $((\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})/2)$; e) isolinhas representativas da velocidade transversal U_y ; f) isolinhas relativas à componente normal do campo magnético, B_x	146
5.31	Resultados obtidos para o rotor com a malha de resolução $N = 400$ e $t = 0,15$: a) isolinhas de ρ ; b) isolinhas de p ; c) isolinhas de Mach; d) isolinhas relativas à pressão magnética $((\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})/2)$; e) linhas de campo magnético (a vermelho).	147
5.32	Resultados obtidos para o rotor com a malha de resolução $N = 800$ e $t = 0,15$: a) isolinhas de ρ ; b) isolinhas de p ; c) isolinhas de Mach; d) isolinhas relativas à pressão magnética $((\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})/2)$	148
5.33	Distribuição tridimensional dos erros relativos a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ na malha de resolução $N = 400$	148
5.34	Vista global para a distribuição do número de Mach para o caso de escoamento supersónico de plasma com $\beta = 0,4$ sobre um cilindro. Nas Figs. d), e) e f) está presente um detalhe do escoamento perto do cilindro, onde também são visíveis as linhas de campo magnético.	150
6.1	Tubeira MPD 2D de campo induzido (Sato et al., 2011) que irá ser analisada com o modelo MHD proposto nos capítulos anteriores.	154
6.2	Dimensões dos domínios de cálculo para as duas configurações analisadas. a) Geometria com ânodo divergente (AD). b) Geometria com ânodo convergente-divergente (ACD). Repare-se que para cada uma das configurações do ânodo apenas se modificou o comprimento do cátodo (CC - cátodo curto, CL - cátodo longo).	155
6.3	Representação tridimensional das configurações estudadas e respetivos domínios de cálculo. ADCC - Ânodo Divergente Cátodo Curto; ADCL - Ânodo Divergente Cátodo Longo; ACDCC - Ânodo Convergente Divergente Cátodo Curto; ACDCL - Ânodo Convergente Divergente Cátodo Longo.	155
6.4	Isolinhas representativas da magnitude do campo de velocidade e correspondentes vetores. Estes resultados foram obtidos para um caudal $\dot{m} = 2,5$ g/s e para uma corrente de descarga à entrada $I = 8000$ A.	157
6.5	Distribuição das isolinhas de B_z , referentes a uma corrente de descarga igual a 2500 A, para cada uma das configurações analisadas. Os valores vêm dados em termos de percentagem do campo imposto à entrada.	158

6.6	Comparação entre os resultados experimentais e numéricos para: a) Distribuição da velocidade axial ao longo da secção $y = 0,009$ [m] para $I = 8000$ [A] na tubeira ADCC. b) Força de propulsão em função da corrente de descarga obtida para a geometria ADCC.	160
6.7	a) Comparação entre as forças de propulsão calculadas nas várias configurações, em função da corrente de descarga. b) Distribuição da velocidade axial calculada ao longo da secção $y = 0,009$ [m] para uma corrente de descarga $I = 8000$ [A]. . .	161
6.8	Componentes ELM e térmicas da força de propulsão calculadas para a geometria ADCC (a) e ADCL (b). Comparação entre os resultados obtidos para as duas configurações: c) Componente térmica; d) Componente ELM; e) Impulso específico; f) Rendimento.	162
6.9	Propriedades do escoamento de plasma para um caudal $\dot{m} = 2,5$ [g/s]. a) Densidade de partículas n por m^3 de plasma para $I = 16000$ [A]. Resultados numéricos (b) e experimentais (c) obtidos por Funaki et al. (1997) para a densidade de partículas. d) Índice adiabático γ calculado em função da temperatura. Distribuição da temperatura estática ($I = 5000$ A) obtida com: e) o modelo de gás ideal; f) o modelo de gás real. Distribuição das isolinhas de B_z ($I = 5000$ [A]) calculadas com: g) o modelo de gás ideal; h) o modelo de gás real.	164
6.10	Distribuição das isolinhas do número de Mach para diferentes correntes de descarga.	165
6.11	Resultados numéricos obtidos para o estudo de variação de caudal. a) Força de propulsão obtida para as configurações ADCC e ADCL. b) Comparação entre as componentes ELM e térmica da força de propulsão para os casos analisados. c) Resultados obtidos para o aquecimento por efeito de Joule. d) Queda de potencial no plasma. e) Impulso específico. f) Rendimento das tubeiras.	166

Lista de Tabelas

2.1	Coeficientes para o cálculo da temperatura em função de p/ρ	58
2.2	Coeficientes para o cálculo do γ em função de T	58

Notação

Caracteres Latinos

a	Velocidade do som.
a^*	Velocidade do som crítica.
$\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{C}$	Matrizes Jacobianas dos vetores de fluxo, $\mathbf{A} = \partial\mathcal{F}/\partial\mathcal{H}$.
a_f	Velocidade do som calculada na face com o esquema AUSM.
a_p^ϕ	Coefficientes da diagonal principal da matriz construída para a propriedade ϕ .
$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{C}}$	Matrizes Jacobianas nas variáveis primitivas, $\mathbf{A} = \partial\mathcal{F}/\partial\mathcal{P}$.
\mathbf{B}	Vetor do campo magnético.
\mathbf{b}	Vetor unitário com a mesma direção do campo magnético.
B	Magnitude do vetor do campo magnético.
c	Velocidade da luz.
c_A	Velocidade da onda de Alfvén.
c_f	Velocidade da onda rápida.
c_p	Calor específico a pressão constante.
c_s	Velocidade da onda lenta.
c_v	Calor específico a volume constante.
\mathbf{d}	Distância entre dois centróides vizinhos.
D_p	Termo difusivo de pressão do esquema AUSM ⁺ – up
D_u	Termo difusivo de velocidade do esquema AUSM ⁺ – up
\mathbf{E}	Vetor do campo elétrico.
e_i	Energia interna.
e_t	Energia total.
\mathcal{F}	Tensor de fluxo convectivo.
\mathcal{H}	Vetor das variáveis conservativas.
H_a	Número de Hartmann.
H_t	Entalpia de estagnação.
\mathcal{I}	Matriz identidade.
\mathbf{j}	Vetor da corrente elétrica.
k	Condutividade térmica.

L_u	Número de Lundquist.
\mathbf{M}	Matriz de transformação das variáveis primitivas para as conservativas.
M	Número de Mach local.
\mathbf{M}^{-1}	Matriz de transformação das variáveis conservativas para as primitivas.
Ma	Número de Mach do escoamento de aproximação.
\dot{m}	Caudal mássico.
m_e	Massa de um eletrão.
M_f	Número de Mach calculado na face f com o esquema AUSM.
M_i	Massa do átomo.
$\mathcal{M}_{(4)}^{\pm}, \mathcal{P}_{(5)}^{\pm}$	Funções de interpolação baseadas no número de Mach.
\mathbf{n}	Vetor unitário de direção normal à superfície.
N_I	Parâmetro de interação.
n_n	Densidade de partículas n por m^3 de plasma.
\mathcal{P}	Vetor das variáveis primitivas.
p	Pressão estática.
p_G	Pressão global, $p_G = p + (B^2/2\mu_0)$.
q	Densidade de carga total.
R	Constante do gás.
r, θ, z	Coordenadas cilíndricas.
Re	Número de Reynolds.
R_m	Número de Reynolds magnético.
$\hat{\mathbf{S}}_f = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$	Vetor unitário normal à face f .
$\mathbf{S}_f = (S_x, S_y, S_z)$	Vetor normal à face f com magnitude igual à área da face.
S_ϕ	Termo fonte da equação de transporte para o campo escalar ϕ .
\mathbf{t}	Vetor unitário de direção tangencial à superfície.
T	Temperatura estática.
t	Variável tempo.
\mathbf{U}	Vetor do campo de velocidade.
U_f	Velocidade calculada na face com o esquema AUSM.
V_P	Volume da célula de cálculo que contém o ponto P.
x, y, z	Coordenadas cartesianas

Z Fração de ionização média local.

Abreviações

AUSM Advection Upwind Splitting Method

CBC Convective Boundedness Criterion.

CFL Courant-Friedrichs-Lewy.

CUBISTA Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection.

DBA Density Based Algorithm.

FOAM Field Operation and Manipulation.

MHD MagnetoHydroDynamics.

MPD MagnetoPlasmaDynamics.

NVD Normalised Variables Diagram.

PBA Pressure Based Algorithm.

TVD Total Variation Diminishing.

Simbolos Gregos

β Parâmetro adimensional que relaciona as forças de pressão com as forças magnéticas.

Δt Passo de tempo.

Δx Espaçamento da malha na direção x .

ϵ_0 Permissividade elétrica do vácuo.

η Resistividade elétrica.

Γ Coeficiente de difusão genérico.

γ Razão de calores específicos.

κ_B Constante de Boltzmann.

λ_H Comprimento de escala hidrodinâmico.

λ_H Comprimento de Debye.

μ Viscosidade dinâmica.

μ_0 Permeabilidade magnética do vácuo.

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ Operador Nabla.

ν_{sn} Frequência de colisão entre a espécie s e a espécie n .

Ω Parâmetro de Hall.

ω_{ce} Frequência ciclotrônica.

ϕ	Campo escalar genérico.
$\Psi(r)$	Função limitadora do esquema TVD.
ψ	Coefficiente de compressibilidade.
$\tilde{\phi}$	Variável normalizada através do método NVF.
ρ	Massa volúmica.
σ	Condutividade elétrica.
τ	Escala temporal
φ	Fração de ionização.

Índices inferiores

e	Elétrões.
f	Face da célula de cálculo.
i	lões ou valor da energia interna.
\parallel	Componente paralela.
\perp	Componente perpendicular.
r	Componente radial.
θ	Componente azimutal.
t	Valor total da energia.
x	Componente segundo x .
y	Componente segundo y .
z	Componente segundo z .

Índices superiores

$*, **, ***$	Previsão e consecutivas correções do algoritmo de solução.
A	Onda de Alfvén.
f	Onda rápida (fast).
n	Instante de tempo no algoritmo de solução.
s	Onda lenta (slow).

OBS: Esta tese encontra-se escrita segundo as normas da língua Portuguesa, como tal utiliza-se a vírgula como separador numérico decimal. No entanto, devido à utilização de programas de pós-processamento que seguem a norma inglesa, a numeração nas várias figuras apresentará o ponto como separador decimal.

Capítulo 1

Introdução

A Magnetohidrodinâmica (MHD) define-se como sendo o estudo da interação de um ou vários campos magnéticos com um fluido com propriedades elétricas condutoras em movimento. O escoamento em questão pode ser do tipo incompressível ou compressível, com propriedades elétricas ideais ou resistivas. Uma forma de descrever esta interação é através do sistema de equações MHD, que permitem acoplar o campo magnético, resultante das equações de Maxwell, com o escoamento de um fluido condutor, governado pelas leis de Newton.

Para uma melhor compreensão da magnetohidrodinâmica deve ser criada uma intuição natural em relação a dois aspetos físicos fundamentais. O primeiro fenómeno físico surge quando um determinado material, com propriedades elétricas, se desloca para o interior de uma região que se encontra sujeita a um campo magnético. A lei de Faraday impõe que o movimento relativo entre o campo magnético e o material condutor dê origem a uma corrente elétrica induzida. Essa corrente vai, de acordo com a lei de Ampère, gerar um segundo campo magnético induzido que vai ser somado ao campo magnético inicial. O resultado físico dessa soma é uma perturbação nas linhas de campo, que aparentam ser arrastadas pelo condutor à medida que este se desloca, veja-se a Fig. 1.1a. O segundo aspeto surge quando no condutor em questão está a ser imposta uma corrente elétrica. A interação entre a corrente e o campo magnético vai dar origem a uma força de natureza eletromagnética, conhecida como força de Lorentz ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$). Essa força vai atuar diretamente sobre o condutor e tende a modificar o seu movimento, veja-se a Fig. 1.1b. Podemos então afirmar que, em escoamentos desta natureza, o movimento de um fluido condutor tem um efeito deformador no campo magnético, e este por sua vez vai reagir e modificar o escoamento. O modelo MHD é uma das aproximações que podem ser utilizadas para descrever a física destes fenómenos.

A data exata do “nascimento” da MHD como ciência autónoma parece ser alvo de alguma discórdia no seio da comunidade científica. Alguns autores afirmam que surgiu com as primeiras experiências de Michael Faraday em 1832, quando este tentou medir a diferença de potencial no rio Tamisa que é induzida pelo campo magnético terrestre (Davidson, 2001). Outros afirmam que esta não pode ser considerada uma experiência de MHD, uma vez que os efeitos do campo magnético no movimento do rio foram negligenciados. Outros defendem ainda que o nascimento da MHD apenas se deu durante a segunda guerra mundial, quando Hannes Alfvén descobriu que a interação entre campos magnéticos e os fluidos em movimento provocava um fenómeno físico “inesperado”, que hoje é conhecido como onda de Alfvén (Molokov et al., 2007). A descoberta desta onda deu origem ao teorema que serve de base para a descrição do comportamento de um escoamento MHD ideal, assunto que será abordado no capítulo 2.

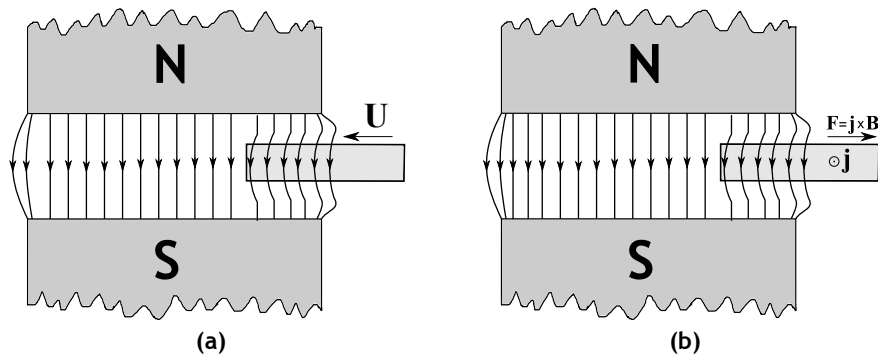


Figura 1.1: Representação esquemática de dois fenômenos físicos fundamentais que são descritos pelas equações da MHD. a) Um condutor em movimento deforma as linhas de campo magnético à medida que é introduzido no espaço entre polos. b) Se uma corrente elétrica estiver a fluir no condutor a sua interação com as linhas de campo magnético vai gerar uma força de Lorentz que tende a modificar o movimento do condutor. *Adaptado de Davidson (2001).*

1.1 Campos de aplicação da magnetohidrodinâmica

No dia-a-dia são várias as situações onde os escoamentos são influenciados pela presença de campos magnéticos, quer estes sejam criados pelo homem ou de origem natural. Os princípios físicos baseados na MHD são muitas vezes utilizados na indústria metalúrgica de forma a manusear metal líquido ou, como é apresentado nesta tese, em sistemas de propulsão espacial. Por outro lado sabemos que existe o campo magnético terrestre, que é gerado pelo movimento de rotação do núcleo da Terra. Nesta secção vamos apresentar alguns dos fenômenos que podem ser abordados com o recurso a ferramentas computacionais baseadas no sistema de equações MHD.

1.1.1 Análise computacional de fenômenos astrofísicos

Se ignorarmos as mais recentes conjecturas sobre a existência de matéria negra no espaço interstelar, podemos afirmar que o Universo é essencialmente constituído por plasma. Uma breve e muito simples definição de plasma diz-nos que é um gás que sofreu um qualquer processo de ionização. Esse estado de ionização garante que o plasma é essencialmente composto por partículas de carga negativa (eletrões) e partículas de carga positiva ou negativa (iões). Se assumirmos que o estado de ionização é total, podemos descartar a presença de partículas neutras e devemos assumir que o plasma é um excelente condutor de eletricidade. Uma vez que os campos elétricos e magnéticos existem com alguma abundância no espaço, somos levados a crer que muita da dinâmica de plasmas que ocorre no domínio da astrofísica se deve à sua interação com esses mesmos campos. A título de exemplo considere-se o campo magnético terrestre e a sua interação com os ventos solares formando a célebre cintura de Van Allen.

A teoria MHD afirma-se capaz de “*estudar a interação de campos magnéticos com fluidos condutores*”. O que à partida nos leva a crer que é uma excelente abordagem para o estudo da física do escoamento de plasmas. Contudo tal afirmação não é inteiramente correta, uma vez que de um ponto de vista microscópico o plasma não pode ser considerado como um meio contínuo. Ainda assim, existe um conjunto de hipóteses que garantem a aplicabilidade da aproximação

MHD na modelação de dinâmica de plasmas. Iremos verificar que a discrepância entre os comprimentos de escala macroscópicos e microscópicos permite que a aproximação MHD seja válida em certos regimes e em determinados tipos de aplicação, este tema vai ser abordado com mais pormenor no capítulo 2.

Como é facilmente perceptível, devido aos grandes comprimentos de escala envolvidos ou à elevada distância a que se encontram, muitos dos fenómenos que ocorrem no domínio da astrofísica são impossíveis de abordar de forma experimental. Como tal, a única forma de estudá-los é através da aplicação da MHD usando uma análise computacional. São vários os códigos numéricos MHD que foram desenvolvidos para o efeito. Gombosi et al. (2004) introduziram o *BATS-R-US* (*Block Adaptive Tree Solarwind Roe Upwind Scheme*), desenvolvido para a modelação da interação entre os ventos solares e o campo magnético terrestre. Outros modelos computacionais foram introduzidos para uma análise mais abrangente de escoamentos de plasmas no Universo, tais como: o estudo da formação de estrelas; a análise do meio interestelar; ou a análise de discos de acreção. A título de exemplo podem referir-se outros programas de simulação computacional recentemente introduzidos na área da MHD: o código *Pluto* desenvolvido por Mignone et al. (2007) na universidade de Torino em Itália; o código *Athena* que é mantido pelo professor James M. Stone da universidade de Princeton, E.U.A. (Stone et al., 2008).

1.1.2 Modelação computacional de tubeiras magnetoplasmadinâmicas

A modelação de sistemas de propulsão elétrica, nomeadamente a análise numérica de tubeiras magnetoplasmadinâmicas (MPD), é outra aplicação do campo da magnetohidrodinâmica. Nos sistemas clássicos de propulsão química a fonte de energia está dependente de um processo exotérmico de combustão. Por seu lado, nos sistemas de propulsão elétrica a fonte de energia é externa ao fluido de trabalho. Esta característica permite uma redução significativa do consumo de propelente, o que indica que este tipo de propulsão é bastante atraente para missões espaciais de longo curso. Além disso, os sistemas elétricos possuem a particularidade de desenvolverem velocidades de escape de valor bastante elevado (ex:50 [km/s]). Tais características levam-nos a crer que as tubeiras MPD poderão ser mais versáteis do que os tradicionais foguetes de combustão química. No entanto, existem certas aplicações onde a propulsão química ainda é uma necessidade. Isto porque, apesar das tubeiras MPD conseguirem atingir velocidades de escape bastante elevadas, fazem-no com uma força de propulsão de baixo valor. Como tal, parecem ser a solução ideal para viagens espaciais de longo curso, mas não são aplicáveis em missões terrestres ou do tipo terra-órbita. São vários os parâmetros que devem ser considerados no projeto de um sistema de propulsão elétrica: a velocidade de escape ótima; a potência específica do propulsor; a duração da missão; e o impulso total¹. Todos estes parâmetros devem ser relacionados de forma adequada. A escolha da velocidade de escape ótima depende da potência específica do propulsor elétrico, da duração da missão e do impulso total necessário para cumprir essa mesma missão. Quanto maior for a potência específica do propulsor, maior será o valor ótimo da velocidade de escape (Chanty, 1992). Nos próximos parágrafos vamos abordar o princípio de funcionamento de dois tipos de tubeiras MPD, nomeadamente as tubeiras de campo magnético induzido e as tubeiras de campo magnético imposto.

¹O impulso total vem dado pela força de propulsão média vezes o tempo de ação [N · s].

De uma forma bastante simplificada, uma tubeira MPD pode ser representada por um cátodo central, circundado por um ânodo concêntrico de geometria cilíndrica. As duas superfícies definem uma câmara que vai acomodar uma corrente elétrica de descarga de grande intensidade. O gás propelente é posteriormente injetado para o seu interior e a sua interação com a corrente de descarga vai levar a processos de ionização e aceleração. Existem dois tipos de tubeiras MPD, que são caracterizadas por possuírem regimes distintos de interação magnética. Estas são conhecidas como tubeiras de campo magnético imposto e tubeiras de campo magnético induzido. Nas tubeiras de campo imposto, como o próprio nome indica, é imposto um campo magnético que deve ser gerado a partir de um enrolamento externo à superfície do ânodo. As suas componentes radiais e axiais vão posteriormente interagir com a corrente de descarga de forma a estabilizar e acelerar o plasma. Nas tubeiras de campo induzido, um campo magnético com direção unicamente azimutal é criado por efeito de indução, e a sua interação com a corrente de descarga vai contribuir para aceleração do plasma através da força de Lorentz ($F = j \times B$).

O princípio de funcionamento das tubeiras MPD de campo induzido é relativamente simples e encontra-se esquematizado na Fig. 1.2. Neste tipo de sistema podemos assumir que a força de Lorentz pode ser unicamente representada por duas componentes. Uma componente de direção axial ($j_r B_\theta$), que contribui de forma direta para a aceleração do plasma, e uma segunda componente, de direção radial ($-j_z B_\theta$), que tende a comprimir o plasma ao longo da superfície do cátodo (Myers et al., 1991). Por seu lado a elevada temperatura que é desencadeada pelo aquecimento por efeito de Joule, e posterior expansão através da tubeira, vai resultar numa componente térmica de aceleração.

A interação entre as forças eletromagnéticas com o escoamento de plasma é bastante mais complexa no caso das tubeiras MPD de campo imposto, veja-se a Fig. 1.3. Um dos mecanismos de aceleração vem dado pela interação entre o campo imposto e a corrente de descarga que vai dar origem a uma força de direção azimutal que tende a colocar o plasma em rotação. Através do princípio de conservação da energia a componente de rotação da energia cinética pode ser parcialmente convertida em aceleração axial (Haag et al., 2007). O efeito de Hall é um segundo mecanismo aceleração. Este fenómeno ocorre em situações extremas de baixo caudal e sob campos magnéticos intensos, e leva à criação de uma nova corrente induzida (corrente de Hall). A interação entre a corrente de Hall e a componente axial e radial do campo magnético imposto pode levar, da mesma forma que nas tubeiras de campo induzido, à criação de uma componente axial ($j_\theta B_r$) e radial ($j_\theta B_z$) da força de Lorentz. Contudo, a contribuição destas componentes poderá ser positiva ou negativa (auxiliar ou contrariar) para o somatório da força de propulsão (Kodys e Choueiri, 2005). As tubeiras de campo imposto também se encontram sujeitas aos mesmos mecanismos de aceleração apresentados para o caso das tubeiras de campo induzido, todavia, dependendo da intensidade da corrente de descarga, a sua contribuição efetiva deverá ser pouco significativa.

Um dos problemas inerentes à utilização destes sistemas propulsores prende-se com a sua baixa eficiência nos regimes de operação que são relevantes para as missões espaciais. Segundo Kodys e Choueiri (2005) o nível de rendimento mais elevado, obtido para uma tubeira MPD, foi de 69% para um impulso específico de 5500 segundos e para uma potência de 20 kW. No entanto, sabe-se que o regime ótimo de operação deve situar-se entre os 200 kW e 500 kW. Para um valor mais próximo desta gama de potências, o rendimento mais elevado obtido até hoje foi registado no Instituto de Aviação de Moscovo por Tikhonov et al. (1997). Estes investigadores

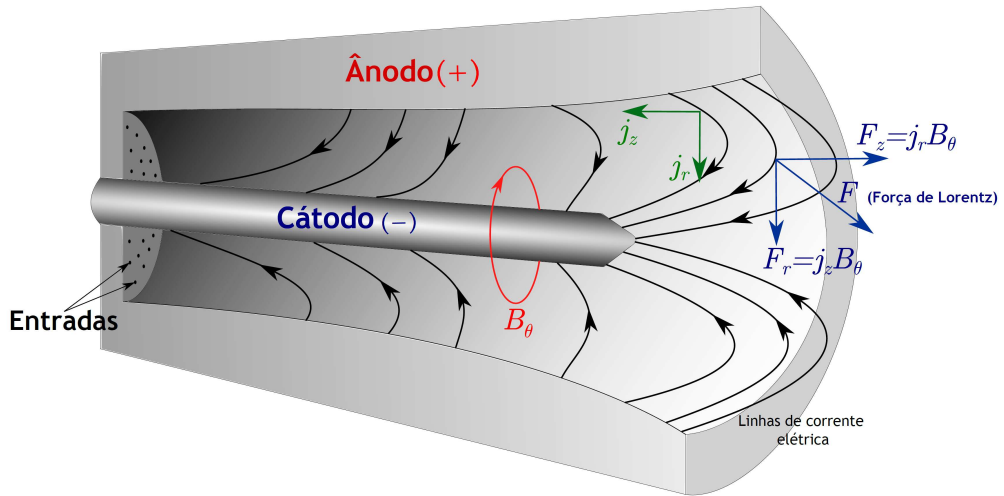


Figura 1.2: Representação esquemática de uma tubeira MPD de campo induzido. As componentes na direção radial (j_r) e axial (j_z) da corrente de descarga vão interagir com o campo magnético induzido (B_θ), dando origem às componentes de direção radial ($-j_z B_\theta$) e axial ($j_r B_\theta$) da força de Lorentz.

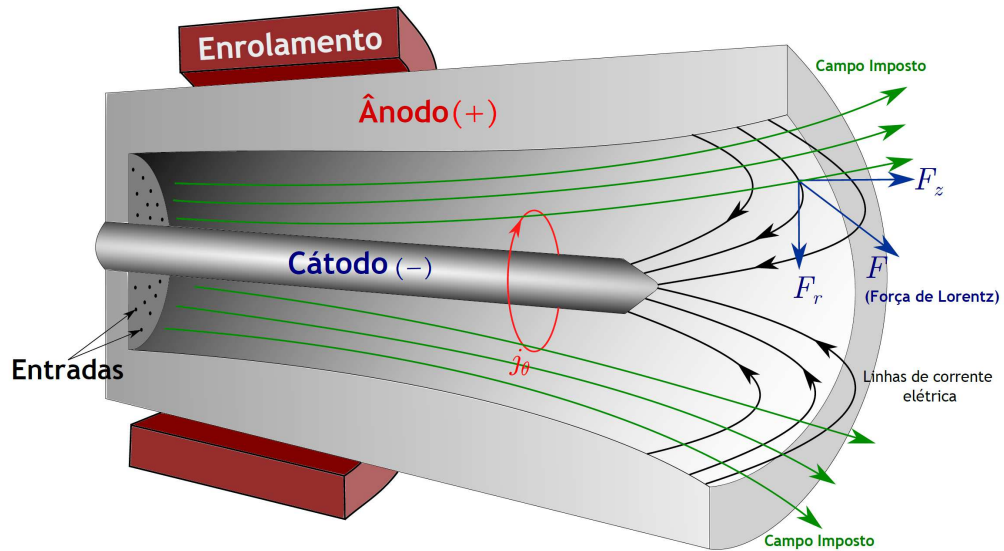


Figura 1.3: Representação esquemática de uma tubeira de campo imposto. Este sistema está sujeito a todos os mecanismos de aceleração presentes nas tuberias de campo induzido. Contudo, a imposição de um campo magnético externo vai dar origem a outros mecanismos que irão contribuir para estabilizar e acelerar o plasma.

conseguiram um rendimento que oscilou entre 45-50%, para um valor de potência a exceder os 100 kW, ainda assim inferior ao pretendido. Note-se que estes valores de desempenho foram obtidos através da utilização de lítio vaporizado como propelente. Contudo, sabe-se que devido a problemas de condensação a utilização de lítio vaporizado pode danificar a superfície da nave espacial e os seus instrumentos (LaPointe e Mikellides, 2001). De forma a mitigar este problema podemos substituir o lítio vaporizado por um gás (normalmente árgon ou hidrogénio), todavia os níveis de rendimento são nesse caso tipicamente inferiores aos citados. Ainda assim, têm sido realizados ao longo dos anos vários estudos que comprovam que o rendimento destes sistemas pode ser aumentado, não só através de uma escolha apropriada de propelente (Sato et al., 2011), mas também através de modificações na geometria dos elétrodos (LaPointe, 1992; Funaki et al., 1998) e na aplicação de campos magnéticos externos (Mikellides et al., 2000). Um segundo problema, que tem atrasado a implementação destes sistemas em missões espaciais, prende-se com a elevada taxa de erosão do cátodo em tubeiras MPD que operam em regime estacionário. Foi novamente nas tubeiras que utilizam lítio vaporizado que se encontrou uma solução para esta problemática e, como já vimos, são estas as configurações que permitem atingir um maior nível de rendimento. Assim sendo, esta tem sido a solução que tem despertado o maior interesse da comunidade científica e é, até este momento, uma prioridade no quadro de desenvolvimento de tubeiras MPD (Sankaran, 2005; Lev e Choueiri, 2011).

1.2 O código OpenFOAM

O código OpenFOAM (*Field Operation And Manipulation*) é um pacote de simulação numérica de mecânica dos meios contínuos. O código fonte encontra-se escrito em linguagem C++ e segue uma linha de programação orientada a objetos. É um pacote que segue uma filosofia *Open Source* e é mantido e disponibilizado pelo grupo ESI². A escolha desta ferramenta como pilar de suporte ao desenvolvimento dos códigos, que vão ser apresentados no capítulo 4, prendeu-se com o facto de esta ser completamente aberta ao público e relativamente fácil de adquirir. A facilidade de implementar novos modelos numéricos e ferramentas, foram outras razões que estiveram por detrás desta escolha.

Nesta secção não é minha intenção analisar este programa em detalhe, aqui apenas se pretende dar ao leitor uma certa noção das suas capacidades. Primeiro que tudo, este código utiliza uma discretização baseada no método de volumes finitos, no espaço tridimensional, bi-dimensional ou uni-dimensional. Os vários operadores das equações diferenciais podem ser tratados de forma explícita, através do método de *finite volume calculus* (fvc) ou de forma implícita através do *finite volume method*³ (fvm). O primeiro dos métodos calcula um campo através da resolução das derivadas explícitas, e o segundo método converte a expressão em coeficientes de matriz através das derivadas implícitas. A ideia proposta é a de olhar para cada uma das equações diferenciais como o somatório dos vários operadores diferenciais associados, que podem ser aproximados separadamente através dos diferentes esquemas de discretização, veja-se o capítulo 3.

²<http://www.openfoam.com>

³Esta é designação que se encontra no manual do OpenFOAM para a solução implícita das equações de governo. Não se deve confundir com a definição clássica do método de volumes finitos que vai ser abordada no capítulo 3.

Considere-se a equação da conservação da quantidade de movimento para um fluido viscoso escrita na sua forma vetorial:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) - \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p, \quad (1.1)$$

onde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ é um operador diferencial. Esta equação pode ser facilmente implementada dentro do código através de uma linguagem bastante intuitiva,

```
00001 solve
00002 (
00003 fvm::ddt(rho,U)
00004 + fvm::div(phi,U)
00005 - fvm::laplacian(mu,U)
00006 ==
00007 - fvc::grad(p)
00008 );
```

Para além da facilidade de programação, existem outras vantagens que resultam da utilização desta ferramenta, tais como: capacidade de processamento em paralelo; vários algoritmos de solução de sistemas de equações algébricas; vários esquemas de interpolação de alta resolução; várias ferramentas de pré- e pós-processamento; e também a possibilidade de utilizar malhas não-estruturadas. Estas particularidades, aliadas a muitas outras, fazem desta uma ferramenta ideal para o desenvolvimento de novos códigos numéricos. Assim, esta parece ser a escolha mais acertada para desenvolver e testar os algoritmos propostos nesta tese, uma vez que criar um programa de raiz não trará nada de novo à comunidade científica. Por seu lado, faz todo o sentido utilizar e modificar um programa já existente. Desta forma, o investigador pode debruçar-se sobre a física do seu problema, e pode direcionar o seu plano de trabalhos para objetivos de investigação mais aprofundados.

1.3 Problema em estudo

Após uma breve contextualização do trabalho vamos abordar o problema em estudo, onde vão ser enumeradas as hipóteses ou simplificações assumidas em relação ao problema real. Neste trabalho pretende-se desenvolver um método numérico capaz de modelar o escoamento MHD compressível para futura aplicação na análise de tubeiras MPD. O código deverá ser aplicável a uma vasta gama de números de Mach e deverá ser capaz de calcular escoamento viscoso e adiabático. Na versão desenvolvida para dinâmica dos gases o fluido de trabalho deverá ser um gás ideal. Para a análise de escoamento MHD vai ser incluído um modelo de gás real, que poderá ser ativado ou não dependendo do regime de escoamento.

As equações deverão incluir termos não-estacionários e o método em questão deverá ser capaz de calcular escoamento não-estacionário e estacionário com boa precisão. Deverá também ser capaz de calcular o sistema de equações MHD na sua forma ideal e resistiva. Na sua forma resistiva, poderá assumir propriedades de transporte constantes ou estas podem ser calculadas em função da temperatura e densidade de partículas do plasma.

O modelo MHD irá considerar o plasma como um meio contínuo, totalmente ionizado e num estado de equilíbrio térmico entre as espécies. Desta forma, apenas deverá ser resolvido um

sistema de leis de conservação global, e não deverão ser calculadas temperaturas distintas para cada uma das espécies envolvidas. Estas hipóteses vão levar a uma discrepância entre os valores calculados e os valores reais das propriedades de transporte, nomeadamente para os resultados que irão ser obtidos nas tubeiras MPD. Os efeitos de radiação, de escorregamento de iões, de Hall e de transporte anómalo também vão ser negligenciados no presente modelo. Ainda assim, o modelo que aqui vai ser apresentado permite analisar os principais mecanismos de aceleração das tubeiras MPD com relativa precisão. Vamos ver no capítulo 6 que, para os regimes de operação estudados, o modelo proposto é capaz de estimar a melhor configuração geométrica dos elétrodos que resulta numa maior força de propulsão e rendimento.

1.4 Revisão bibliográfica sobre métodos para o cálculo de escoamento compressível a número de Mach arbitrário

No domínio da engenharia aeronáutica e aeroespacial surge por vezes a necessidade de resolver escoamentos bastante complexos, que podem englobar uma gama alargada de números de Mach. Nesse tipo de problemas o regime quase-incompressível pode coexistir com um escoamento global em regime supersónico, ou até mesmo hipersónico. Desta forma, é extremamente importante desenvolver algoritmos que sejam capazes de lidar com o sistema de equações de governo (Euler; Navier-Stokes; MHD) para um número de Mach arbitrário. Atualmente existem dois grupos de algoritmos que foram desenvolvidos para o efeito. Estes dividem-se entre os que são baseados na resolução de uma equação para a massa volúmica (do tipo DBA⁴), e os que são baseados na resolução de uma equação para a pressão ou de uma equação para a correção da pressão (do tipo PBA⁵).

A utilização de algoritmos do tipo DBA é uma prática bastante comum no cálculo de escoamento compressível. Por seu lado, os algoritmos do tipo PBA foram inicialmente introduzidos para a resolução de escoamento incompressível. Nos algoritmos DBA, a massa volúmica é obtida através da resolução da equação da continuidade, e a pressão deve ser calculada através de uma equação de estado que é função do campo de temperatura e da massa volúmica. Nos métodos PBA, é deduzida uma equação para pressão, ou para a sua correção. Neste caso é a massa volúmica que deve ser corrigida através da respetiva equação de estado.

Na dedução de um algoritmo para número de Mach arbitrário é essencial compreender a relação entre a massa volúmica e a pressão nos vários regimes de escoamento. Em escoamento a número de Mach muito reduzido (quase-incompressível) existe um limite onde esta relação é muito fraca, ou praticamente inexistente. Nesta situação, a equação da continuidade encontra-se desacoplada da equação da quantidade de movimento e já não pode ser utilizada para a obtenção da massa volúmica. Contudo, podemos utilizar ambas as equações na dedução de uma equação para a pressão, e o algoritmo de solução deve garantir a satisfação da lei de conservação de massa. Em escoamento supersónico as variações na pressão afetam significativamente a massa volúmica. No caso de escoamento hipersónico podemos mesmo afirmar que, de forma a satisfazer a continuidade, basta relacionar a pressão com a massa volúmica através

⁴*Density based algorithms*

⁵*Pressure based algorithms*

de uma equação de estado. Nesta situação, a equação da continuidade pode ser vista como uma equação para massa volúmica.

Como já foi referido, nos algoritmos DBA o campo de pressão é obtido a partir de uma equação de estado, que por sua vez é função da massa volúmica. No entanto, já sabemos que para escoamentos a número de Mach reduzido a relação entre a massa volúmica e a pressão é bastante fraca. Desta forma, as variações no campo de pressão originam apenas pequenas perturbações na massa volúmica que, no limite incompressível, são praticamente inexistentes. Repare-se que esta situação vai afetar a precisão temporal do método e vai introduzir um problema de convergência para o estado estacionário. Pode dizer-se que esta é a grande questão que surge na dedução de algoritmos do tipo DBA para número de Mach arbitrário. Uma solução para esta problemática poderá ser a inclusão de técnicas de pré-condicionamento local (Tukel, 1987; Henriques e Gato, 2004), ou através da introdução de um certo tipo de difusão numérica que garanta o acoplamento entre a velocidade e a pressão a baixa velocidade (Edwards e Liou, 1998).

Portanto, no limite incompressível deve-se ter especial atenção com o acoplamento entre o campo de pressão e o campo de velocidade. Esta questão também é válida para os algoritmos PBA, e neste caso pode ser contornada através da utilização da técnica de malha desfasada (Oliveira e Issa, 2001), ou através da técnica de interpolação do tipo Rhie-Chow (R-C) (Rhie e Chow, 1983). A técnica de interpolação R-C é normalmente utilizada quando se opta por um arranjo centrado das variáveis dependentes. O que implica que todas as variáveis partilham a mesma malha e que se encontram colocadas no centro dos volumes de controlo. Este arranjo centrado das variáveis é bastante útil em termos de flexibilidade, uma vez que nos permite uma fácil extensão do método de discretização para aplicação em malhas não-estruturadas. No entanto, foi demonstrado por Nerinckx et al. (2006) que a utilização da interpolação R-C resulta numa redução da precisão no cálculo de gradientes de pressão elevados. Em escoamentos supersónicos estes gradientes aparecem sob a forma de ondas de choque e, se não forem abordados de uma forma apropriada, levam à ocorrência de graves instabilidades numéricas (Xisto et al., 2010). Uma solução para este problema poderá ser dada por uma reformulação dos fluxos convectivos que seja mais adequada para a resolução de escoamento supersónico. Xisto et al. (2012b) utilizaram o esquema AUSM (*Advection Upwind Splitting Method*) para o cálculo dos fluxos convectivos e de pressão, a serem introduzidos nas equações de governo. Desta forma, obtiveram um algoritmo do tipo “híbrido” que permite compatibilizar a eficiência dos algoritmos PBA, no cálculo de escoamentos a número de Mach reduzido, com as vantagens da utilização do método AUSM para escoamentos a número de Mach mais elevado. Este algoritmo vai ser descrito em detalhe na secção 4.1 e é aqui referido por uma questão de conveniência, uma vez que a revisão bibliográfica, sobre a qual nos vamos debruçar já de seguida, se encontra condicionada por este modelo numérico.

Nas duas subsecções seguintes vai ser apresentado o estado da arte relativo aos dois grupos de algoritmos já aqui descritos. Primeiramente vamos-nos focar em algoritmos baseados na equação para a pressão e na sua formulação para a análise de escoamento altamente compressível. Na secção 1.4.2 vamos apresentar algumas soluções baseadas em métodos do tipo DBA que foram adaptadas para a resolução de escoamento a baixa velocidade, onde vamos dar especial ênfase ao esquema AUSM e às suas variantes.

1.4.1 Métodos baseados na equação para a pressão

Uma breve revisão da literatura leva-nos rapidamente à conclusão que são inúmeros os métodos numéricos que foram propostos para a resolução das equações de Euler e Navier-Stokes. Nesta secção em particular vamos nos focar nos métodos do tipo PBA que foram deduzidos para a análise de escoamento compressível. Existem vários algoritmos deste tipo mas podemos identificar dois que claramente se destacam, nomeadamente o SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) e o PISO (*Pressure-Implicit with Splitting Operators*). O SIMPLE foi inicialmente proposto por Patankar e Spalding (1972) para a modelação de escoamento incompressível em estado estacionário. O PISO foi introduzido por Issa (1986) para o cálculo de escoamento não-estacionário, e para uma formulação incompressível, ou compressível, das equações de Navier-Stokes. Este último foi ao mesmo tempo validado por Issa et al. (1986) para estes dois regimes de escoamento.

O SIMPLE foi o primeiro algoritmo do grupo PBA a ser desenvolvido e, ao longo dos mais de quarenta anos da sua existência, foram introduzidas inúmeras modificações com o intuito de melhorar a sua robustez e taxa de convergência. A título de exemplo podemos referir: o SIMPLER (*SIMPLE Revised*) de Patankar (1980), mais tarde adaptado para escoamento compressível por Karki e Patankar (1989); o SIMPLEC (*SIMPLE Consistent*) de Van Doormaal e Raithby (1984); ou o SIMPLEM de Acharya e Moukalled (1989). Para o algoritmo PISO também surgiram algumas variantes em relação ao esquema original, como por exemplo a que foi introduzida por Oliveira e Issa (2001), de forma a calcular escoamentos dominados por convecção natural. Devido à existência de uma grande variedade de modificações em ambos os métodos, vamos criar duas categorias; uma para os algoritmos do tipo PISO, e outra categoria para os algoritmos do tipo SIMPLE. Em Moukalled e Darwish (2000) podemos encontrar as formulações de base para vários algoritmos do tipo SIMPLE e do tipo PISO no contexto da análise de escoamento compressível. O principal objetivo desta tese é o de modelar escoamento MHD compressível, mas a maior parte destes algoritmos que acabámos de citar foram desenvolvidos para o cálculo de escoamento incompressível. À primeira vista pode parecer que a sua reformulação para escoamento compressível é direta e trivial, uma vez que apenas deverá incluir a variação da massa volúmica no sistema de equações e garantir o seu acoplamento com a pressão no algoritmo de solução. No entanto, devem ter-se em conta algumas das particularidades do regime compressível, nomeadamente o tratamento das descontinuidades, que em escoamento compressível aparecem sob a forma de ondas de choque.

Uma característica dos escoamentos em regime supersónico ou transónico é a ocorrência de ondas de choque, que se caracterizam por uma variação abrupta das variáveis termodinâmicas. Os esquemas numéricos de interpolação de ordem superior a um (ex: esquema de diferenças centrais) tendem a produzir oscilações fisicamente irrealistas em soluções desta natureza. Através da introdução de uma certa quantidade de dissipação numérica na região de descontinuidade é possível eliminar ou suavizar tais oscilações. Demirdzic et al. (1993) propuseram uma modificação ao algoritmo SIMPLE que lhes permitiu resolver as descontinuidades com um nível aceitável de precisão e estabilidade. A sua abordagem consiste na introdução de um novo esquema de diferenciação que inclui um fator de correção que varia entre zero (*upwind*) e um (diferenças centrais). Desta forma é possível seleccionar a quantidade de dissipação numérica que é introduzida na solução. Contudo, este fator foi escolhido como uma constante global no domínio de solução o que não parece ser de todo a melhor abordagem. Repare-se que esta

opção vai estar a introduzir dissipação numérica onde ela não é necessária, o que vai resultar numa redução efetiva da ordem de precisão do método. Ainda assim, o algoritmo proposto por estes autores continua a ser uma referência para grande parte das novas implementações, neste caso as desenvolvidas para cálculo de escoamento a número de Mach arbitrário.

Um passo natural na evolução dos algoritmos PBA seria o de utilizar esquemas numéricos baseados nas direções características do sistema de equações de Euler. Em algoritmos do tipo DBA esta abordagem é uma prática bastante comum e estes métodos são reconhecidos no que toca à sua precisão para o cálculo das descontinuidades. Contudo, esta abordagem é apenas válida para escoamentos a número de Mach elevado ou moderado, e normalmente requer a utilização de técnicas de pré-condicionamento quando aplicada em escoamentos a baixa velocidade. Ainda assim, a versatilidade da equação da pressão no que toca ao cálculo de escoamentos a número de Mach arbitrário, em junção com um método bastante preciso para o tratamento dos fluxos convectivos, parece-nos ser à partida uma excelente possibilidade a considerar. Batten et al. (1997) e Issa e Javarehshkian (1998) aperceberam-se disso e implementaram nos seus algoritmos PBA um esquema TVD (*Total Variation Diminishing Schemes*) baseado nas características. O método TVD permite limitar o fluxo de uma determinada variável num volume de controlo. Desta forma, a evolução espacial dessa variável fica impossibilitada de produzir um mínimo ou um máximo local nesse mesmo volume de controlo. Este objetivo é garantido através da introdução de funções limitadoras que controlam a quantidade de dissipação numérica a ser introduzida na região próxima das zonas de descontinuidade. Na descontinuidade propriamente dita, de forma a garantir-se uma solução monótona, é utilizada uma aproximação de primeira ordem. Uma das formas de melhorar os esquemas TVD é através da modificação da sua função limitadora. Este melhoramento deve garantir um compromisso entre a estabilidade e a ordem de precisão do método, para que a função limitadora não atue cedo demais e suavize a solução em demasia, ou não atue tarde demais e cause problemas de estabilidade e convergência. Este objetivo é atingível através da escolha apropriada da função limitadora, ou através da utilização de um mecanismo que atue como comutador nessa mesma função. Esta última opção foi a abordagem seguida por Djavarehshkian e Abdollahi (2010), onde os autores utilizaram o método ACM (*Artificial Compression Method*) como controlador da quantidade da dissipação a ser introduzida pela função limitadora do esquema TVD. Este método foi implementado no SIMPLE para o caso estacionário, e no PISO para o caso não-estacionário.

A formulação NVF (*Normal Variable Formulation*) (Leonard, 1988) permite normalizar as variáveis que são utilizadas na construção da função limitadora dos esquemas TVD. Desta forma é possível reduzir o número de variáveis envolvidas o que é extremamente vantajoso, principalmente quando o domínio de cálculo é constituído por uma malha não-uniforme. Rincón e Elder (1997) estiveram entre os primeiros a utilizar um esquema do tipo NVF e o critério CBC (*Convection Boundedness Criterion*) para o tratamento dos termos convectivos de um algoritmo do tipo PBA. Este método foi modificado para malhas não-uniformes por Darwish e Moukalled (1994) (NVFS - *Normalized Variable and Space Formulation*) e foi implementado no algoritmo SIMPLE por Moukalled e Darwish (2001). Ficou demonstrado por estes autores que a utilização de esquemas de alta resolução na interpolação da massa volúmica permite melhorar consideravelmente a resolução e captação das ondas de choque. Ao mesmo tempo, verificaram que a utilização da formulação NVF/NVSF na construção do esquema SMART (*Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport*) permitiu aumentar a precisão e estabilidade do método de solução.

Um outro esquema baseado nas direções das características foi introduzido por Liou e Steffen (1993) e incluído pelos mesmos num algoritmo do tipo DBA. Este esquema, conhecido como AUSM, tem a particularidade de criar uma distinção entre os fluxos convectivos e o fluxo de pressão. Note-se que nos algoritmos do tipo PBA essa distinção também é feita, uma vez que o gradiente de pressão deve ser removido do vetor de fluxo e aproximado separadamente. Nerinckx et al. (2006) tiraram proveito desta semelhança entre métodos e incluíram uma versão modificada do método AUSM⁺ (Edwards e Liou, 1998) no seu algoritmo SIMPLE. Rapidamente verificaram que a utilização deste método, em substituição da interpolação do tipo Rhie-Chow, aumentava significativamente a precisão do algoritmo na captação de ondas de choque. Na secção 4.1 vai ser demonstrado que a interpolação Rhie-Chow não é uma abordagem apropriada para o cálculo de escoamentos de regime transónico ou supersónico. Vamos também verificar que a utilização de uma formulação mais evoluída do método AUSM (Liou, 2006), permite-nos obter excelentes resultados no cálculo de uma gama bastante alargada de números de Mach, desde o regime subsónico ao regime hipersónico (Xisto et al., 2012b).

Existem situações onde a redução da ordem de precisão do método não é de todo tolerada, mesmo nas regiões de descontinuidade. Podemos afirmar que um desses exemplos é o escoamento a número de Mach arbitrário, o que levou Kobayashi e Pereira (1996) a optarem pela implementação do esquema ENO (*Essentially Non-Oscillatory*) de Harten et al. (1986) para o cálculo dos fluxos convectivos. O método ENO, em contraste com os que já foram aqui apresentados, possui a particularidade de não necessitar de reduzir a ordem de precisão nas regiões de descontinuidade. Desta forma, garante-se que a ordem de interpolação é sempre superior a um e, ao mesmo tempo, não se permitem interpolações através das descontinuidades. Esta particularidade é especialmente útil em problemas onde as descontinuidades interagem com padrões complexos de escoamento, como é o caso da interação de uma onda de choque com um escoamento turbulento ou com um vórtice (Shu, 1998).

Uma abordagem, por vezes considerada como mais natural, para este problema seria a de encontrar uma formulação apropriada das equações de governo que permitisse o cálculo de escoamento compressível a número de Mach variável. Houve alguns investigadores que enveredaram por este caminho e reformularam as equações de Euler com base no número de Mach, veja-se por exemplo o trabalho de Bijl e Wesseling (1998) ou de van der Heul et al. (2003). Esta nova abordagem permite introduzir uma formulação adimensional das equações de governo, que se reduz à sua forma incompressível à medida que o número de Mach tende para zero. Foi também sugerida uma forma adimensional da equação de estado, a qual garante que a massa volúmica se torne independente da pressão à medida que o escoamento se aproxima do regime incompressível. Este esquema requer que sejam utilizadas diferentes variáveis para a pressão, onde o valor efetivo de cada uma seja dependente do regime em que o escoamento se encontra.

Na modelação de escoamento de plasmas surge por vezes a necessidade de construir um sistema de equações para cada uma das espécies envolvidas (iões, eletrões e espécies neutras). Tais sistemas são conhecidos como equações MHD multi-espécie ou multi-fluido. Apesar do algoritmo de base que vai ser proposto se basear na aproximação MHD para um único fluido, parece-nos óbvio que este deve possuir a capacidade de ser adaptado para regimes bem mais complexos de escoamento. Darwish et al. (2001) modificaram a formulação de vários algoritmos do tipo SIMPLE e PISO de forma a estes conseguirem calcular escoamento multi-fluido onde, dependendo da formulação adotada, surgiram dois novos conceitos. O primeiro conceito era baseado na conservação da massa (MCBA) e o segundo conceito era baseado na designada conservação

geométrica (GCBA). Seguindo o modelo MCBA, a equação da pressão deve ser construída com base na equação da conservação global de massa, que não é nada mais do que o somatório de todas as n equações da continuidade para os n fluidos. Por outro lado, na dedução da equação da pressão com a formulação GCBA, deve ser utilizada uma equação de conservação geométrica, que é dada pelo somatório de todas as frações de volume. Ambos os algoritmos foram posteriormente modificados e testados por Moukalled et al. (2003) e mais tarde por Moukalled e Darwish (2004a,b) para o cálculo de escoamento a número de Mach arbitrário.

Uma característica fundamental, que deve ser considerada na dedução de um método numérico de solução, é o tempo de cálculo necessário para atingir a convergência. Este parâmetro é dependente do método de resolução das equações de governo, assim como da física do problema propriamente dita. Note-se que na solução de problemas onde o regime não-estacionário é importante, ou mesmo fundamental pois a solução estacionária pode não existir, a taxa de convergência é bastante limitada pelo passo de tempo global, geralmente de valor muito reduzido. O algoritmo PISO, sendo um método de solução não-estacionário, permite-nos obter soluções dependentes do tempo com relativa precisão. Por seu lado, o SIMPLE é uma escolha adequada quando se pretende acelerar a taxa de convergência para soluções em estado estacionário. Ainda assim, é possível utilizar o PISO na obtenção de soluções estacionárias com a desvantagem de este requerer um passo de tempo muito reduzido em malhas extremamente refinadas, como é o caso das malhas utilizadas no cálculo de escoamento supersônico, ou na modelação da camada limite em escoamento turbulento.

De forma a acelerar a obtenção da solução com um algoritmo PISO para escoamentos estacionários e supersônicos, Bressloff (2001) optou pela utilização de um método de solução multi-bloco. Este método resolve as equações de governo separadamente para cada um dos blocos, que depois partilham a informação com o bloco vizinho durante todo o processo iterativo. Os vários blocos podem ser repartidos pelos vários processadores, diminuindo assim o tempo de cálculo necessário. Em dinâmica dos fluidos computacional esta é uma abordagem bastante comum e é vulgarmente conhecida como processamento em paralelo. Para efeitos de validação Bressloff utilizou vários casos de teste que compreendiam escoamento incompressível estacionário e não-estacionário, mas também abordou problemas de escoamento compressível estacionário. O algoritmo proposto por este autor, juntamente com um esquema numérico de alta resolução, permitiu captar as ondas de choque com relativa precisão e nas suas posições corretas. No entanto, apenas se mostrou capaz de calcular escoamento compressível, estacionário e invíscido em geometrias relativamente simples. Além disso, mostrou-se incapaz de atingir a convergência em casos supersônicos quando estes eram calculados em malhas extremamente refinadas.

Darwish et al. (2004) desenvolveram um estudo comparativo de desempenho dos vários algoritmos no que toca à sua taxa de convergência, no qual implementaram a técnica de malha múltipla. Em algoritmos do tipo segregado, para soluções do tipo estacionário, espera-se que a técnica de malha múltipla aumente consideravelmente a taxa de convergência. Ainda assim, de caso para caso não se evidenciou qualquer tipo de superioridade de um qualquer algoritmo sobre o outro. Verificou-se sim, que os algoritmos PRIME e SIMPLEST foram os que resultaram num pior desempenho e o SIMPLC e SIMPLEX foram aqueles que apresentaram o melhor comportamento. Foi também possível verificar que os algoritmos de base, SIMPLE e PISO, apresentavam alguma instabilidade numérica em problemas que envolvessem ondas de choque. No entanto, estes problemas não deverão estar relacionados com o algoritmo de resolução em si, mas sim com o método matemático utilizado no cálculo dos fluxos convectivos.

Existem situações onde é a física do problema que impõe restrições ao passo de tempo. Normalmente esta questão pode ser resolvida através de mecanismos que garantam um maior acoplamento entre as variáveis dependentes. Nerinckx et al. (2005) propuseram um novo tipo de algoritmo que, em termos de formulação, se situa entre o método segregado e o método acoplado. O método segregado que foi proposto requer que a equação da pressão seja deduzida a partir da equação da continuidade e, como tal, segue as mesmas linhas dos métodos clássicos PBA. Na presença de escoamento compressível adiabático, o método é novamente segregado mas a equação da pressão é deduzida a partir da equação da energia. Nerinckx e colaboradores aperceberam-se que a formulação anterior não era estável em escoamentos com transferência de calor, uma vez que os termos difusivos da equação da energia impunham restrições proibitivas no passo de tempo. Como solução, desenvolveram um método semi-acoplado, onde as equações da pressão e temperatura devem ser resolvidas de uma forma acoplada e todos os termos são aproximados de forma implícita. Desta forma, a limitação de passo de tempo é removida e o método de solução torna-se mais estável e robusto.

Nerinckx et al. (2007) realizaram mais tarde um estudo comparativo de desempenho onde foram testadas três formas distintas de acoplamento entre as variáveis dependentes: o método totalmente acoplado; o método totalmente segregado; e o método semi-acoplado. Todos os algoritmos foram desenvolvidos para a resolução de escoamentos a número de Mach arbitrário e, como tal, devem garantir uma boa taxa de convergência para uma elevada gama de números de Mach. Como seria de esperar, o método totalmente acoplado foi o que demonstrou uma maior capacidade de convergência. Esta particularidade deve-se ao facto de todos os termos das equações de governo serem resolvidos de forma implícita, o que implica que este método não possui limitações em termos de passo de tempo. No entanto, foi demonstrado que os custos computacionais associados são normalmente demasiado elevados, principalmente quando pretendemos resolver um sistema de equações de grande dimensão. O método mais eficaz para resolver escoamento invíscido é o método totalmente segregado, onde a equação da pressão é deduzida a partir da equação da energia. Se estivermos perante um caso com condução de calor e se o limite do passo de tempo, que é dado pelos termos difusivos presentes na equação da energia, não for preocupante podemos utilizar novamente o método totalmente segregado. Mas, à medida que os termos de segunda ordem começarem a limitar o nosso método de solução, devemos optar pela resolução acoplada da equação da energia e da pressão. Finalmente, se a restrição do passo de tempo devido aos termos gravíticos for preocupante a única opção razoável é usar o método totalmente acoplado.

1.4.2 Métodos baseados na equação para a massa volúmica

No contexto histórico os algoritmos do tipo DBA foram inicialmente introduzidos para a análise de escoamento transónico. Estes métodos são baseados em técnicas de avanço no tempo, utilizando uma discretização explícita ou implícita das equações de governo. Contrariamente aos métodos PBA, a massa volúmica é considerada a variável principal e deve ser obtida a partir da equação da continuidade, e a pressão deve ser calculada a partir da respetiva equação de estado. Da mesma forma que os métodos do tipo PBA, também estes foram objeto de estudo de forma a permitirem calcular escoamento a número de Mach arbitrário. Nesta subsecção vamos apresentar uma breve revisão bibliográfica relativa a alguns desses métodos, onde vai ser dada especial ênfase ao esquema AUSM e às suas variantes.

O método de compressibilidade artificial (Chorin, 1967) foi uma das primeiras técnicas a ser introduzida de forma a garantir o acoplamento das equações em escoamentos a baixa velocidade. Esta abordagem consiste em adicionar uma derivada temporal à equação da continuidade que se deve anular quando é atingida a solução de estado estacionário. Ao mesmo tempo, deve ser incluído um fator de multiplicação que permite acelerar a taxa de convergência. Desta forma, é possível obter a solução estacionária mais rapidamente e, simultaneamente, garante-se que o passo de tempo, neste caso pseudo-acústico, possui a mesma ordem de grandeza do passo de tempo convectivo. Chorin (1967) aplicou este método para a resolução das equações de Euler na sua forma incompressível.

A técnica de compressibilidade artificial foi posteriormente adaptada para o cálculo de escoamento compressível e invíscido por Turkel (1987). Este autor verificou que o problema do acoplamento entre as variáveis resultava da disparidade que ocorria entre os valores próprios do sistema de equações. De forma a contornar esta situação deduziu matrizes de pré-condicionamento que deviam ser multiplicadas pelas derivadas temporais. O condicionamento que é introduzido permite reduzir a velocidade da onda acústica até esta se aproximar da velocidade do escoamento. Foram vários os autores que modificaram a técnica de Turkel para o cálculo de escoamentos a número de Mach arbitrário. Veja-se por exemplo o trabalho desenvolvido por van Leer et al. (1991), onde é deduzida uma matriz de pré-condicionamento que iguala a velocidade de propagação das diferentes ondas à medida que o número de Mach tende para zero. Ou ainda o trabalho desenvolvido por Darmofal e Schmid (1996), onde se verificou que, de forma a garantir a estabilidade do esquema numérico em regiões de estagnação, os vetores próprios também devem ser alterados. O pré-condicionamento no contexto do desenvolvimento de algoritmos para o cálculo de escoamento viscoso foi introduzido por Choi e Merkle (1993). As técnicas de pré-condicionamento modificam o comportamento temporal das equações e, como tal, destroem a precisão temporal do método. Merkle e Athavale (1987) contornaram esta problemática através da introdução de uma técnica de duplo passo de tempo. O método por eles sugerido volta a introduzir o passo de tempo real no sistema de equações mas mantém o passo de tempo pseudo-acústico. O passo de tempo artificial vai apenas servir para realizar o número de iterações necessárias para que o regime pseudo-estacionário seja atingido e se possa avançar no tempo real.

1.4.2.1 O método AUSM (*Advection Upwind Splitting Method*)

O método AUSM de Liou e Steffen (1993) reconhece que os fluxos podem dividir-se em duas partes fisicamente distintas, uma composta pelos termos convectivos e uma outra parte composta pelos termos de pressão. Com esta abordagem podemos tirar partido do facto de ambos os termos serem governados por velocidades distintas, nomeadamente os termos convectivos são governados pela velocidade do escoamento e os termos de pressão são governados pela velocidade da onda acústica. Assim é possível criar uma função polinomial distinta para cada um dos termos, onde ambas as funções devem ser baseadas na velocidade característica $M \pm 1$ (onde M é o número de Mach). Este esquema, apesar da sua simplicidade, demonstrou ser bastante eficiente no cálculo de ondas de choque para uma gama alargada de casos de teste.

A aplicabilidade de um método de resolução numérica é medida de acordo com a sua capacidade em abordar uma grande variedade de problemas. Liou (1996) verificou que o método AUSM

de base falhava em algumas situações cruciais, foram então desenvolvidas diferentes variantes do esquema original. Uma dessas novas variantes foi o esquema AUSM⁺ de Liou (1996), que é baseado em funções polinomiais que se consideram melhoradas, uma vez que estas permitem preservar a positividade das propriedades termodinâmicas em situações críticas, como é o caso do escoamento numa região em estado próximo do vácuo. Uma outra reformulação foi desenvolvida por Wada e Liou (1997) através da introdução do método AUSMDV. Este esquema pode ser visto como uma versão melhorada do esquema AUSM, uma vez que reduz as oscilações numéricas nas regiões a jusante das descontinuidades. Ainda assim, sofre de instabilidades numéricas devido ao fenómeno de *carbuncle*, o que implica a necessidade de introduzir algum tipo de difusão numérica adicional.

Kim et al. (1998) aperceberam-se que os esquemas AUSM⁺ e AUSMDV poderiam ser complementares, uma vez que o primeiro elimina o fenómeno de *carbuncle* e o segundo remove as oscilações numéricas da solução. Com base nessa complementaridade deduziram duas novas funções baseadas na pressão que devem ser adicionadas ao esquema AUSM⁺. A finalidade destas funções é, em determinadas regiões do escoamento, a de equilibrar as contribuições das velocidades características à esquerda e à direita das faces. Uma das funções (referida como *f*) deve atuar na remoção das oscilações junto da parede, enquanto que a outra (referida como *w*) deve remover as oscilações que ocorrem na presença de ondas de choque de grande intensidade. Este esquema, devido à introdução destas duas novas funções, é conhecido como AUSMPW. Três anos mais tarde, Kim et al. (2001a) aperceberam-se que a função de peso *f* introduzia custos computacionais desnecessários. Assim, reformularam-na de forma a esta ser mais eficiente e precisa no cálculo de descontinuidades multi-dimensionais, dando origem ao esquema AUSMPW⁺. Kim e Kim (2005) verificaram que os esquemas anteriores também introduziam dissipação numérica em zonas suaves do escoamento. Como tal, introduziram o esquema M-AUSMPW⁺ que, através de uma reformulação das variáveis convectivas, remove a dissipação numérica onde esta não é necessária, e reverte para o esquema AUSMPW⁺ de base nas regiões de descontinuidade.

Como em muitos dos métodos numéricos desenvolvidos para o cálculo de escoamento compressível, também aqui se verificou a necessidade de aumentar a precisão e robustez do AUSM para o cálculo de escoamento a baixo número de Mach. Edwards e Liou (1998) adicionaram um termo difusivo de pressão na definição do fluxo mássico. Este termo difusivo, da mesma forma que a técnica de interpolação de Rhie-Chow, pretende resolver o problema de acoplamento entre a velocidade e a pressão quando o número de Mach tende para zero. Assim, apenas deve ser introduzido de forma a atuar nas regiões onde o número de Mach é inferior a um, e a quantidade de dissipação numérica a ser introduzida deve ser função desse mesmo número de Mach.

Um fator fundamental na modificação do esquema AUSM para Mach arbitrário foi a introdução do conceito de velocidade do som numérica⁶ (Liou e Edwards, 1999). O conceito, como o próprio nome indica, tem a particularidade de apenas ser relevante em termos numéricos. Desta forma, uma das suas vantagens prende-se com o facto de ser facilmente adaptável para escoamentos com número de Mach arbitrário, nomeadamente através da sua multiplicação por um fator de pré-condicionamento que varie com a velocidade do escoamento. Utilizando este fator podemos pré-condicionar os números de Mach e a velocidade do som numérica, o que nos permite controlar a dissipação numérica que deve ser introduzida na solução. Este esquema

⁶Esta também é conhecida como velocidade do som comum, uma vez que o seu valor é comum aos dois lados da face do volume de controlo

ficou conhecido como o AUSM⁺ – a, devido ao papel importante que a velocidade do som numérica nele desempenha.

Mais recentemente Liou (2006) reconheceu que o pré-condicionamento dos números de Mach, e da velocidade do som, não era um fator indispensável para o cálculo de escoamento a baixa velocidade. Foram então sugeridas alternativas que se baseavam apenas na adição de termos dissipativos nas definições do fluxo mássico e de pressão. A utilização destes termos é controlada por uma função baseada no número de Mach, o que garante um nível de precisão adequado para Mach arbitrário. Esta abordagem permitiu obter um esquema mais simples e mais robusto, que ficou conhecido como AUSM⁺ – up, devido às contribuições dos termos dissipativos de velocidade e de pressão.

1.5 Revisão bibliográfica sobre métodos de cálculo de escoamento MHD compressível

Nesta secção vamos debruçar-nos sobre alguns dos métodos que foram desenvolvidos para a resolução do sistema de equações MHD compressível. Como vamos ver mais à frente, no capítulo 2, uma das particularidades do escoamento MHD ideal é que este pode desenvolver um conjunto de descontinuidades de enorme complexidade. Uma análise precisa destas características do escoamento requer a utilização de esquemas numéricos de alta resolução. Normalmente estes esquemas são baseados nas direções características das equações de governo. Para a resolução do sistema de equações de Euler ou Navier-Stokes estes esquemas já se encontram bem estabelecidos, pelo que a maior parte dos modelos numéricos utilizados para o cálculo de problemas MHD são baseados nesses mesmos esquemas. Contudo, devido a duas questões cruciais, a extensão de tais métodos para a resolução do sistema de equações MHD está associada a um ligeiro atraso. A primeira dessas duas razões está relacionada com a complexidade da estrutura matemática do sistema de equações MHD. De facto as equações MHD possuem famílias de ondas não convencionais e admitem uma grande variedade de descontinuidades, veja-se a subsecção 2.4.5. A segunda razão deve-se ao facto de nenhum dos métodos desenvolvidos para dinâmica dos gases possuir uma forma de garantir a não-divergência do campo magnético nessas regiões de descontinuidade.

A condição solenoidal $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ encontra-se estipulada nas equações de Maxwell através da lei de Gauss do magnetismo. Em termos numéricos, esta lei afirma que para um qualquer volume de controlo, o fluxo magnético *net* que atravessa a sua fronteira é zero, ou seja, o fluxo que entra é o mesmo que sai. Por outras palavras, os campos magnéticos não possuem termos fonte ou sumidouros. Esta questão deveria ser garantida pela lei de Faraday. Isto é, se inicialmente se impõe $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ então a divergência da lei de Faraday para o eletromagnetismo,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.2)$$

garante que $\partial \nabla \cdot \mathbf{B} / \partial t = 0$. O que analiticamente nos diz que a condição solenoidal é mantida durante todo o tempo de cálculo. No entanto, esta é uma condição inicial e de fronteira e, embora analiticamente esta condição seja garantida pela lei de Faraday, nas equações discretizadas isso já não se verifica. Brackbill e Barnes (1980) analisaram esta violação, afirmando que

pode criar uma força anômala e paralela às linhas de campo magnético, que vai por sua vez originar perdas na conservação da energia e quantidade de movimento.

1.5.1 Métodos para a resolução do sistema de equações MHD compressível

Alguns dos primeiros esquemas numéricos que foram desenvolvidos para o cálculo de escoamento MHD compressível utilizavam a técnica de viscosidade artificial, veja-se por exemplo o trabalho de Stone e Norman (1992). No entanto, Falle (2002) verificou que esta abordagem não é conservativa nem possui a mesma ordem de precisão que é conseguida com os métodos baseados nas características. Assim, é de esperar que a sua utilização para o cálculo de escoamento MHD tenha sido bastante limitada. Os métodos que começaram a ser introduzidos numa fase posterior eram bastante mais complexos, uma vez que necessitavam de explorar em detalhe a estrutura das equações MHD (Zachary et al., 1994; Ryu e Jones, 1995; Ryu et al., 1995).

Os métodos baseados nas velocidades características são de longe os esquemas mais precisos para o cálculo de descontinuidades. De facto, as descontinuidades estão diretamente relacionadas com a informação que é fornecida pelos valores próprios do sistema de equações hiperbólico. Parece-nos então correto afirmar que um modelo que introduza toda essa informação na dedução do seu esquema numérico seja bastante preciso na análise de cada uma das ondas MHD. Todavia a formulação destes métodos é bastante complexa e, de forma a aumentar a sua robustez, estes necessitam normalmente da introdução de um certo nível de dissipação artificial.

A incorporação da informação das velocidades características na dedução dos esquemas numéricos de resolução das equações MHD começou com o trabalho de Zachary et al. (1994), através da introdução de um esquema de *Riemann* linear. O modelo proposto era baseado no método de *Godunov*, e foi desenvolvido para lidar com as várias degenerescências que são características do sistema de equações multidimensional. No mesmo ano Dai e Woodward (1994) apresentaram um esquema de *Riemann* não-linear que utilizava relações de *Rankine-Hugoniot* na dedução de soluções descontínuas que são desencadeadas pelas várias famílias de ondas MHD. Um ano mais tarde, Ryu et al. (1995) apresentaram um método para o cálculo de escoamento MHD ideal que era baseado no esquema TVD de Harten (1983). Foi também utilizada uma versão modificada do método de *Roe* para a contabilização dos sete valores próprios resultantes do sistema de equações MHD hiperbólico. Este esquema era mais preciso do que o proposto por Dai e Woodward (1994) uma vez que, para além de possuir a capacidade de calcular ondas de choque de forma exata, possuía os mecanismos necessários para a resolução de rarefações rápidas e lentas. Muitos dos casos de teste ainda hoje utilizados para efeitos de validação de códigos MHD uni-dimensionais, e multi-dimensionais, encontram-se descritos em Ryu e Jones (1995).

Existem outros métodos que não necessitam de explorar em detalhe todas as características matemáticas do sistema MHD. Normalmente esses esquemas baseiam a sua formulação na velocidade máxima de propagação da informação que, no caso MHD ideal, é dada pela onda magneto-acústica rápida. Esta abordagem é mais dissipativa do que aquela que é baseada nas direções características, no entanto o que perde em termos precisão ganha em robustez. Um desses métodos é o TVD de *Lax-Friedrichs* (TVDLF) que foi adaptado por Tóth e Odstrcil (1996) e comparado com o esquema FCT (*Flux Corrected Transport*) para o cálculo de escoamento MHD

ideal. O esquema TVDLF mostrou-se mais dissipativo na captação de descontinuidades, contudo, apresentou melhores resultados em termos de oscilações numéricas, o que lhe garante um maior nível de robustez. Uma solução engenhosa seria a de compatibilizar as propriedades dos esquemas FCT e TVDLF num novo método, que garantisse a estabilidade do TVDLF e ao mesmo tempo o elevado grau de precisão do esquema FCT. Uma abordagem semelhante foi introduzida por Balsara (1998), que compatibilizou as propriedades de um esquema TVD baseado no problema de *Riemann*, com a técnica de viscosidade artificial. Esta junção mostrou-se benéfica em determinadas situações, em particular onde a introdução de um certo nível de dissipação numérica no esquema TVD melhorava a sua taxa de convergência. Como por exemplo na captação de ondas de choque magneto-sónicas rápidas, particularmente quando estas se deslocam com uma velocidade muito reduzida no domínio computacional.

No trabalho de revisão de Murawski e Tanaka (1997) podemos encontrar alguns dos métodos numéricos desenvolvidos para a resolução de sistemas de equações hiperbólicas, como é o caso do sistema MHD ideal ou do sistema de equações de Euler. Neste artigo de revisão foram apontadas as deficiências e as vantagens que advêm da utilização de cada um dos métodos. Foram também destacados os problemas mais comuns que podem ser encontrados no desenvolvimento de um código numérico para o cálculo de escoamentos MHD. Um desses problemas, já aqui referido, é a importância de garantir que a lei de Gauss para o magnetismo seja razoavelmente satisfeita ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), este problema vai ser novamente abordado na subsecção 1.5.2. Outra problemática refere-se ao facto de o sistema de equações MHD não ser puramente hiperbólico, podendo levar à ocorrência de singularidades nos vetores próprios. Em Mignone e Bodo (2008) podemos encontrar uma revisão sobre os esquemas de alta resolução mais recentes, do tipo dos que vamos abordar nos próximos parágrafos.

Uma das características mais interessantes do esquema HLL (*Harten-Lax-vanLeer*) (Harten et al., 1983) é a sua estabilidade, uma vez que garante a positividade das propriedades termodinâmicas. Ainda assim, mais uma vez essa estabilidade é conseguida através de um sacrifício do nível de precisão. Janhunen (2000) verificou que essa precisão podia ser novamente restabelecida se o esquema HLL fosse utilizado em junção com um método do tipo *Roe*. Este novo esquema alternava entre o HLL, que era utilizado nas regiões mais problemáticas, e o esquema de *Roe* que deveria ser aplicado no restante domínio de solução. Houve outros autores que se aperceberam que o esquema HLL é bastante estável e robusto mas também bastante dissipativo, particularmente no cálculo de descontinuidades de contacto. Esta característica está associada ao facto de este esquema não possuir nenhum mecanismo que reconheça este tipo de descontinuidade. De forma a resolver essa questão, Toro et al. (1994) desenvolveram o método HLLC (onde “C” se refere descontinuidade de *Contacto*). O mecanismo que está por detrás deste novo esquema assume que as variáveis de *Riemann*, respeitantes à velocidade e à pressão, possuem o mesmo valor à esquerda e à direita da face. Esta hipótese é fisicamente válida para uma descontinuidade de contacto e, como tal, é bem mais precisa do que aquela que foi sugerida no método HLL original. Linde (2002) também propôs uma forma corrigida do método HLL, que incluía a utilização da informação dessa mesma descontinuidade de contacto e aplicou o seu novo método à resolução das equações de Euler e MHD ideal.

Li (2005) verificou que o método HLLC de base, quando aplicado na resolução das equações MHD, violava as leis de conservação e produzia soluções fisicamente irrealistas. Para resolver esta problemática utilizou, na dedução das expressões para o cálculo das componentes transversais do campo magnético, a condição de consistência que foi previamente sugerida por Toro

et al. (1994). Esta nova abordagem revelou ser mais precisa do que aquela que foi sugerida por Linde (2002). Miyoshi e Kusano (2005) verificaram que as variantes anteriores do esquema HLL, apesar de serem satisfatórias em termos de estabilidade e robustez, ainda não o eram em termos de precisão. Isto porque, apesar de conseguirem resolver um número considerável de descontinuidades, falhavam na captação de descontinuidades rotacionais uma vez que apenas contabilizavam dois estados intermédios do *Riemann fan*. Pelo que, no entender de Miyoshi e Kusano, deviam ser adicionados mais dois estados intermédios. A variante proposta como resultado da sua análise foi denominada HLLD (onde “D” se refere a *Descontinuidade*) e mostrou ser mais robusta e precisa do que as anteriores para a generalidade dos casos abordados. Este método reverte para o esquema HLLC clássico (equações de Euler) no caso de campos magnéticos nulos. Dois anos mais tarde este método foi adaptado para escoamento MHD isotérmico por Mignone (2007).

Para além do método que vai ser proposto nesta tese na secção 4.2 (Xisto et al., 2012a, 2013), o único método do tipo PBA que se conhece para a resolução das equações MHD foi sugerido por van der Heul et al. (2002). Este último é baseado numa formulação adimensional das equações de governo que é função do número de Mach, e que permite o cálculo de escoamentos a número de Mach arbitrário. Pode-se considerar que este método numérico resulta de uma extensão de um método que foi proposto pelos mesmos autores (van der Heul et al., 2003) para as equações de Euler. No entanto, o modelo MHD apenas foi testado para um número muito limitado de problemas, e requer um grau de complexidade mais elevado no que toca à sua validação.

O esquema AUSM também foi adaptado para o cálculo de escoamento MHD por Han et al. (2009), neste caso através de uma reformulação do esquema AUSMPW⁺ (Kim et al., 2001b) e M-AUSMPW⁺ (Kim e Kim, 2005). Foi demonstrado por estes autores que a utilização do esquema de base falhava no cálculo de descontinuidades MHD. Contudo, aperceberam-se que a inclusão da pressão magnética na reformulação das funções de peso permitia uma redução significativa das instabilidades numéricas. Da mesma forma que o esquema HLL e suas variantes, este método não necessita de conhecer toda a estrutura das equações MHD e, como tal, o grau de complexidade associado à sua implementação não é muito elevado. Ao mesmo tempo, como é característico de todos os esquemas AUSM, demonstrou ser bastante robusto e preciso no cálculo de descontinuidades. Um método bastante similar ao AUSM é o E-CUSP (*Energy-Convective Upwind and Split Pressure*), uma vez que também este utiliza funções de interpolação baseadas no número de Mach para o cálculo dos fluxos convectivos e de pressão. Este esquema foi modificado para MHD em junção com o esquema de interpolação WENO por Shen et al. (2012). A grande diferença entre ambos os esquemas está relacionada com o facto do método AUSM utilizar a entalpia total na construção dos fluxos, e o método E-CUSP utilizar a energia total.

Já vimos que na modelação numérica de escoamento MHD são vários os problemas que lhe estão associados. Um destes prende-se com a positividade das propriedades termodinâmicas. Uma escolha adequada do método numérico de resolução é uma das possíveis soluções a esta problemática. Contudo, existe outra situação onde este problema é independente da escolha do esquema matemático para o tratamento do vetor de fluxo. Vamos ver mais à frente que o campo de temperatura pode ser calculado através uma equação de estado, que consiste em subtrair as componentes da energia cinética e magnética da energia total. Em determinadas situações estas componentes podem possuir um valor numérico muito elevado quando comparado com a energia interna. Esta situação é bastante frequente em plasmas de β^7 muito reduzido, e pode

⁷O parâmetro $\beta = 2p/B^2$ relaciona as forças de pressão com as forças magnéticas.

levar a erros de discretização que irão ter como consequência o surgimento de temperaturas ou pressões absolutas negativas. Tanaka (1994) encontrou uma forma muito prática de abordar esta questão, que consiste em dividir o campo magnético numa parte analítica (B_0) e numa parte numérica (B_1), sendo que somadas resultam no campo total $B = B_1 + B_0$. A parte analítica deve ser mantida constante, uma vez que garante $\nabla \cdot B_0 = 0$ e o sistema de equações deve ser apenas resolvido para B_1 . Um exemplo de cálculo usando este método é a modelação da interação entre os ventos solares e a magneto-esfera terrestre. Nesta situação devemos considerar o campo bipolar terrestre, de maior intensidade, como sendo estático e constante (B_0), e devemos apenas utilizar o sistema de equações para resolver a perturbação (B_1) a que esse campo está sujeito. Balsara e Spicer (1999a) também abordaram esta questão através da resolução de uma equação modificada para a entropia, em substituição da resolução da equação para a energia total. Esta nova equação só seria resolvida em substituição da energia total nas regiões onde a componente da pressão é muito reduzida, e onde não ocorressem ondas de choque magneto-sónicas. Nas restantes zonas do domínio seria resolvido o sistema de equações MHD na sua forma conservativa.

1.5.2 A condição de não divergência do campo magnético, $\nabla \cdot B = 0$

A lei de Gauss para o campo magnético é considerada uma lei fundamental do eletromagnetismo, como tal deve ser garantida nos métodos usados para resolver as equações MHD. Foram desenvolvidas várias técnicas para lidar com esta questão, sendo que cada uma delas acarreta um conjunto de vantagens e desvantagens. Uma excelente revisão sobre alguns dos métodos que vamos apresentar já de seguida foi publicada por Tóth (2000). Para já podemos afirmar que se classificarmos cada um dos métodos, em termos de facilidade de implementação, aparecem dois que claramente se destacam: o método introduzido por Powell (Powell (1994), Powell et al. (1999)) e o método sugerido por Dedner et al. (2002). O método da projeção de Brackbill e Barnes (1980) também é relativamente fácil de implementar, mas requer a resolução de uma equação de Poisson, o que acarreta os seus custos computacionais. Os métodos já aqui referidos têm a particularidade de se basearem num arranjo centrado das variáveis. Por outro lado, o método introduzido por Evans e Hawley (1988) necessita da utilização de malhas desfasadas, o que vai aumentar o nível de complexidade no que toca à sua implementação e vai dificultar a sua extensão para malhas não-estruturadas. Nesta secção vão ser apresentados alguns dos métodos mais utilizados para lidar com o problema $\nabla \cdot B = 0$ e as modificações a que foram sujeitos ao longo dos anos.

O método da projeção foi proposto por Brackbill e Barnes (1980) e consiste na aplicação de um passo de correção do campo magnético, após resolução do sistema de equações (sem correção). A correção é garantida através da resolução de uma equação de Poisson, que é deduzida de forma a eliminar ou reduzir significativamente os monopólos magnéticos. Devido à sua simplicidade e eficiência, pode dizer-se que esta técnica nunca foi sujeita a qualquer alteração. Ainda assim, este método requer a solução de uma equação elíptica em cada passo de projeção, tornando-se dispendioso a nível computacional. Todavia, a sua implementação em códigos MHD multi-dimensionais tem sido uma prática bastante frequente ao longo dos anos (Ramshaw (1983), Ryu et al. (1995), Sterck et al. (1998), Balsara (1998), Kim et al. (1999)). Um outro tipo de abordagem, conhecida como projeção do tipo MAC (*Marker-And-Cell*) foi reformulada para MHD por Crockett et al. (2005). A projeção do tipo MAC também requer a solução de uma

equação de Poisson, no entanto, esta equação deve ser aplicada na correção do fluxo magnético presente nas faces dos volumes de controlo. Foi também demonstrado por Crockett et al. (2005) que pode ser benéfico utilizar as várias técnicas de correção do campo magnético em simultâneo. Claro que tal abordagem acarreta os seus custos computacionais, porém, podemos tentar compatibilizar os benefícios que advêm da utilização de cada um dos esquemas de forma a aumentar a robustez e precisão do modelo de resolução numérica. Segundo Ledvina et al. (2008) a utilização do método da projeção garante inúmeras vantagens, tais como: precisão na redução dos erros; facilidade de implementação, devido à existência de uma vasta gama de códigos numéricos capazes de resolver equações elípticas. Outras vantagens são a possível extensão deste método para malhas não-estruturadas e a sua robustez numérica. No entanto, repare-se que a equação de Poisson não é conservativa nas regiões de descontinuidades e, como tal, poderá ser problemática quando é necessário resolver ondas de choque. Porém, Tóth (2000) demonstrou que uma implementação correta deste esquema permite obter transições corretas através das superfícies de descontinuidade.

O método introduzido por Evans e Hawley (1988), denominado *Constrained Transport* (transporte restringido, CT), é de todos o mais difícil de implementar. Este método aproxima a equação da indução aplicando a técnica de malha desfasada (ou deslocada) ao campo vetorial magnético e elétrico. Esta formulação é mais facilmente entendida, se a considerarmos como uma integração da lei de Faraday numa dada superfície S , com uma fronteira dada pela curva ∂S , utilizando o teorema de Stokes. Desta forma, o fluxo magnético através do volume de controlo é dado pelo integral de linha do campo elétrico situado à volta desse volume de controlo. A principal ideia da malha desfasada é a de colocar as componentes de \mathbf{B} nas faces dos volumes de controlo, e o campo elétrico nos seus vértices. Desta forma, se atualizarmos as componentes do campo magnético através do campo elétrico, a divergência $\nabla \cdot \mathbf{B}$ situada no centro do volume de controlo não se altera à medida que o cálculo avança no tempo. Ainda assim, a condição de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ deve ser garantida como condição inicial do problema e devem ser aplicadas condições de fronteira compatíveis com esta restrição. Dai e Woodward (1998b), Balsara e Spicer (1999b) e também Ryu et al. (1998) introduziram três formas ligeiramente modificadas do método original. Na formulação sugerida por Dai e Woodward o campo elétrico situado nos cantos do volume de controlo é obtido através da interpolação do campo de velocidade e do campo magnético. Ryu et al. (1998) propuseram uma modificação ligeiramente diferente, pois verificaram que era mais vantajoso utilizar os fluxos resultantes do esquema TVD do que interpolar diretamente a velocidade e o campo magnético. Balsara e Spicer (1999b) também utilizaram essa mesma estratégia e estabeleceram uma dualidade entre o campo elétrico e os fluxos obtidos através do esquema de Godunov.

Já aqui foi referido que a utilização da técnica de malha desfasada pode ser problemática, principalmente em geometrias complexas que requerem a utilização de malhas não-estruturadas. Tóth (2000) demonstrou que é possível reformular as várias versões do método CT no contexto do método de volumes finitos com um arranjo centrado das variáveis, o que levou à criação de dois novos algoritmos consideravelmente mais simples do que os esquemas de base sugeridos por Dai e Woodward (1998a), Balsara e Spicer (1999b) e Ryu et al. (1998). Esta nova formulação permitiu a incorporação desta técnica nos mais recentes esquemas de alta resolução (Gardiner e Stone (2005), Tóth e Arminjon (2006), Gardiner e Stone (2008)). Todas as formulações até agora apresentadas eram baseadas em malhas estruturas e curvilíneas e, à primeira vista, pode parecer que a extensão deste método para malhas não-estruturadas é proibitiva. Sterck (2001)

verificou que isso não é de todo verdade e formulou o método CT no contexto de malhas não-estruturadas de geometria triangular. As vantagens da utilização do esquema CT incluem: o facto de este ser estritamente conservativo; e a de que este mantém a restrição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ a um nível de precisão dado pela aritmética finita da máquina.

De todos os métodos que foram desenvolvidos para lidar com a não-divergência do campo magnético, o modelo de oito ondas (ou termos fonte) de Powell (Powell, 1994; Powell et al., 1999) é de longe o mais simples de implementar. Esta formulação apenas requer que os termos fonte, proporcionais a $\nabla \cdot \mathbf{B}$, sejam mantidos durante a dedução das equações MHD. De um ponto de vista analítico estes termos são nulos, uma vez que a lei de Gauss para o magnetismo assim o estabelece. No entanto, no sistema de equações discretizadas isso já não acontece. Com esta nova formulação Powell implementou um modelo de Riemann de oito ondas, com a oitava onda associada à propagação de $\nabla \cdot \mathbf{B}$, que permite utilizar a velocidade do escoamento de forma a convectar os erros para fora do domínio de solução. Para muitos problemas esta formulação funciona, os erros associados à divergência do campo magnético são pequenos e a conservação das quantidades envolvidas é satisfatória. As vantagens da utilização deste método prendem-se com o facto de este ser pouco exigente a um nível computacional, e de ser de fácil implementação num qualquer código MHD. Todavia, os termos fonte não-conservativos tendem a resultar em valores de descontinuidade incorretos. Esta questão foi abordada por Tóth (2000) que verificou que estes erros não diminuem com uma maior resolução da malha, embora a solução pareça convergir normalmente. Janhunen (2000) verificou que o modelo de oito ondas de Powell pode gerar pressões negativas, especialmente no cálculo de plasmas com um parâmetro adimensional β inferior a um. Este autor verificou que os termos fonte presentes nas equações da quantidade de movimento e energia eram responsáveis por esta situação. O que levou à sugestão que o termo proporcional a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ apenas deve ser mantido na equação da indução.

O último método sobre o qual nos vamos debruçar foi proposto por Dedner et al. (2002), e de todos os esquemas aqui referidos é o mais recente. Este método, denominado *Hyperbolic Divergence Cleaning*, garante que a condição solenoidal do campo magnético é satisfeita através de uma ligeira modificação do sistema de equações MHD e, dependendo do operador diferencial escolhido, permite aplicar três tipos distintos de correção: a correção do tipo elíptico; do tipo parabólico; e do tipo hiperbólico. A correção do tipo elíptico é em tudo idêntica à técnica da projeção, sugerida por Brackbill e Barnes (1980). No caso específico da correção parabólica, é adicionado à equação da indução um termo dissipativo de segunda ordem que tende a amortecer localmente os erros provenientes de $\nabla \cdot \mathbf{B}$. Na correção hiperbólica é adicionada uma nova equação do tipo hiperbólico ao sistema de equações, que tem como finalidade convectar os erros numéricos para a fronteira do domínio. A velocidade de convecção dos erros é do tipo artificial e deve apenas ser limitada pela condição de estabilidade. Finalmente, Dedner et al. (2002) sugeriram um outro método que se apresenta como uma junção entre a correção parabólica e hiperbólica. Com esta abordagem os erros são amortecidos localmente, e são simultaneamente convectados para fora do domínio de solução. Quando comparado com o esquema de oito ondas de Powell, este esquema apresenta inúmeras vantagens. Uma delas é o facto de o sistema de equações proposto por Dedner et al. (2002) ser totalmente conservativo, o que garante transições corretas nas regiões de descontinuidade. A outra vantagem está relacionada com a particularidade dos erros relativos a \mathbf{B} serem convectados com uma velocidade fictícia, que é independente da velocidade do escoamento. Desta forma não permite que estes se acumulem em regiões de estagnação ou re-circulação.

1.6 Revisão sobre modelação de tubeiras magnetoplasmadinâmicas

Já aqui foi referido, na secção 1.1.2, que um dos campos de aplicação em engenharia do modelo MHD é na análise de tubeiras magnetoplasmadinâmicas, sejam estas de campo imposto ou de campo induzido. Na secção introdutória já foram analisadas as principais diferenças que caracterizam estes dois regimes de funcionamento. Aqui, pretende-se apresentar um estado da arte referente ao conjunto de métodos numéricos que têm sido desenvolvidos para a sua modelação. Uma excelente revisão sobre algumas das ferramentas numéricas desenvolvidas até à década de 90 pode ser encontrada em Myers et al. (1991).

Hoje em dia o desenvolvimento destes sistemas encontra-se restringido a alguns grupos e centros de investigação. De todos, o instituto para os sistemas espaciais da universidade de Estugarda (IRS - *Institut für Raumfahrtssysteme*) é o que mais tem contribuído para a modelação numérica de tubeiras MPD. Este grupo possui mais de vinte anos de experiência no desenvolvimento de ferramentas numéricas que permitem analisar os vários fenómenos físicos que podem ocorrer nestes sistemas. Nos primeiros anos o trabalho desenvolvido pelo IRS restringiu-se à modelação de tubeiras de campo induzido em geometrias cilíndricas (Sleziona et al., 1988, 1993, 1992) e geometrias divergentes (Boie et al., 1995). Nestes estudos foram introduzidos vários modelos de fenómenos de transporte e de ionização. Foi também desenvolvido, por intermédio de Boie et al. (1997), um método de malha adaptativa que permite captar com precisão os fortes gradientes de temperatura que ocorrem nas espécies mais pesadas. Em Heiermann et al. (1999) implementaram um esquema de alta resolução, o WENO, de forma a aumentar a precisão no cálculo de ondas de choque. Mais recentemente, os modelos desenvolvidos para a modelação de tubeiras de campo induzido foram adaptados para o estudo de tubeiras de campo imposto (Haag et al., 2005, 2007).

O laboratório de propulsão elétrica e dinâmica de plasmas da universidade de Princeton é um dos mais antigos do mundo. Este foi fundado em 1961 e é, ainda hoje, um dos centros de investigação mais ativos e prestigiados no que toca ao desenvolvimento de sistemas de propulsão espacial elétrica. O trabalho experimental desenvolvido neste laboratório é reconhecido desde o ano da sua fundação. Contudo, o primeiro trabalho numérico que se conhece remonta ao início da década de 90. Este foi desenvolvido por Caldo et al. (1991) numa tentativa de estudar numericamente os efeitos de transporte anómalo, previamente analisados por Choueiri (1991) e publicados alguns anos mais tarde (Choueiri, 1999). Para o efeito, Caldo et al. (1991) utilizaram um modelo de dois fluidos que assumia um estado de ionização em não-equilíbrio, assim como condutividades térmicas distintas entre as espécies. Os resultados obtidos por estes autores demonstraram que o transporte anómalo é responsável por um aumento significativo da temperatura dos iões. Um dos trabalhos mais recentes foi desenvolvido por Sankaran, Jardin e Choueiri (Sankaran, 2001; Sankaran et al., 2002, 2005; Sankaran, 2005). O código por eles proposto inclui grande parte dos fenómenos de transporte deduzidos até à data, assim como uma equação de estado para gases reais. A implementação destes modelos num método de volumes finitos, baseado numa formulação conservativa das equações de governo, permitiu-lhes obter uma excelente comparação entre os resultados experimentais e numéricos obtidos para geometrias realistas. Este modelo foi posteriormente modificado por Norgaard e Choueiri (2005) de forma a ser aplicável para a modelação de tubeiras de campo imposto.

O desenvolvimento de modelos numéricos para o cálculo de tubeiras MPD também teve, no final da década de 80 e na década de 90, o contributo do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). Niewood (1989) e Niewood e Martinez-Sanchez (1992) estiveram entre os primeiros a desenvolver um modelo quase-uni-dimensional que contabilizava vários fenómenos de transporte e ionização, nomeadamente: os efeitos viscosos e difusivos; a transferência de calor através da colisão entre espécies; o fenómeno de escorregamento de iões; e um estado de ionização em não-equilíbrio baseado no modelo de *Hinnov-Hershberg*. Estas hipóteses foram incorporadas numa formulação baseada em dois fluidos, que assumia uma condutividade elétrica e térmica variável. O trabalho desenvolvido permitiu-lhes verificar que as hipóteses de equilíbrio térmico e de equilíbrio de ionização não são válidas no regime de funcionamento dos MPDs. Verificaram também que os efeitos viscosos podem afetar significativamente o desempenho de algumas geometrias específicas destes sistemas. Os efeitos bidimensionais foram posteriormente introduzidos por Chanty (1992) no seu trabalho de doutoramento, de forma a identificar e analisar os vários fenómenos que ocorrem na região à saída das tubeiras MPD. Niewood (1993) reformulou o seu método (Niewood e Martinez-Sanchez, 1992) para 2D axissimétrico de forma a investigar os mecanismos que estão por detrás das perdas elétricas. Este autor verificou que o comportamento da queda de tensão era diferente para diferentes valores de corrente de descarga, e que para valores de corrente iguais a 39 kA a queda de tensão era responsável por uma redução significativa do desempenho.

Como não podia deixar de ser, a *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) também patrocinou o desenvolvimento de ferramentas numéricas para a modelação computacional dos seus próprios sistemas de propulsão elétrica. Lapointe (1991) implementou um modelo baseado num único fluido e numa única temperatura para o cálculo de escoamento MHD em tubeiras MPD. Este modelo foi desenvolvido para o cálculo dos dois tipos de tubeiras MPD já referidos, mas apenas se apresentaram resultados para tubeiras de campo induzido. O seu modelo, apesar de assumir um equilíbrio térmico entre espécies, apresentou uma excelente comparação entre os resultados experimentais e numéricos. Um ano mais tarde, LaPointe (1992) introduziu uma formulação com temperaturas distintas para as espécies, onde os efeitos da viscosidade e condutividade térmica também foram incluídos. O principal objetivo do seu trabalho era o de analisar o efeito da geometria dos elétrodos no desempenho do propulsor. LaPointe conclui que para valores elevados de j^2/\dot{m} , de forma a atingir um regime de operação estável, é necessário reduzir o comprimento dos elétrodos. Enquanto que para valores reduzidos de j^2/\dot{m} é necessário aumentar o comprimento dos mesmos, de forma a aumentar o desempenho dos propulsores.

O código que é atualmente utilizado pela NASA é o MACH (*Multi-block Arbitrary Coordinate Hydromagnetic*). A versão 2D do código é denominada MACH2, e é baseada numa formulação 2D axissimétrica não-estacionária das equações de governo. Este código inclui vários modelos de transporte para o cálculo da resistividade elétrica, entre eles o modelo clássico de resistividade anisotrópica, mas também inclui modelos ligeiramente mais complexos como é o caso de transporte anómalo. A modelação do efeito de Hall também se encontra disponível na equação da indução, e são resolvidas duas equações para a energia interna de cada uma das espécies envolvidas (LaPointe e Mikellides, 2001). O modelo inclui ainda a teoria de gases reais aplicada a plasmas, assim como modelos de transporte para o cálculo da viscosidade e para o cálculo da condutividade térmica de cada uma das espécies envolvidas. O código tem sido aplicado com sucesso em sistemas de campo imposto (Mikellides et al., 2000) e de campo induzido (England e Mikellides, 2005; Mikellides et al., 2009). Todos os códigos desenvolvidos até ao momento

seguem uma formulação 2D axissimétrica das equações de governo, com a exceção do código MACH3 que vai permitir analisar os efeitos 3D em situações específicas (Parma, 2011).

A agência japonesa de exploração espacial (JAXA) em parceria com o instituto para o espaço e ciência aeroespacial (ISAS) promoveram o desenvolvimento de códigos numéricos para a modelação de tubeiras MPD de geometria bidimensional. Funaki et al. (1997) utilizaram um modelo simplificado MHD para a análise dos efeitos da geometria dos elérodos no desempenho das tubeiras MPD de campo induzido. Os efeitos da geometria dos elérodos em tubeiras bidimensionais de campo imposto foram analisados dez anos mais tarde por Kubota et al. (2007). Sato et al. (2011) analisaram os efeitos do escorregamento de iões no desempenho de uma tubeira MPD quando é utilizado o hidrogénio como gás propelente. Estes autores verificaram que, para determinados gases, os efeitos secundários resultantes do escorregamento de iões podem influenciar de uma forma significativa as propriedades do escoamento.

Através da revisão bibliográfica aqui apresentada, podemos constatar que a inclusão de modelos multi-espécies é uma necessidade quando se pretende analisar, de uma forma mais detalhada, o escoamento de plasma em tubeiras MPD. Porém, um estudo mais fundamental da magnetohidrodinâmica é sempre uma necessidade. Vamos verificar que o desenvolvimento de uma ferramenta de análise numérica de escoamento MHD não é uma tarefa trivial e engloba um conjunto de parâmetros que devem ser corretamente abordados. Por seu lado, O desenvolvimento de um algoritmo MHD capaz de calcular escoamento a número de Mach arbitrário é uma área que ainda não foi devidamente abordada no campo da magnetohidrodinâmica. Nesta tese o código que vai ser proposto para a análise de tubeiras MPD, é baseado num modelo de um único fluido, onde as espécies envolvidas se encontram em equilíbrio térmico, num estado de total ionização e quase-neutralidade. Com esta abordagem torna-se impossível analisar vários fenómenos físicos que normalmente ocorrem em tubeiras MPD. Contudo, permite-nos estudar os principais mecanismos de aceleração da tubeira com relativa precisão (Mahendhran e Kumar, 2011).

1.7 Objetivos e contribuições do presente trabalho

Durante a revisão bibliográfica ficou claro que existem inúmeros métodos de análise de escoamento de dinâmica dos gases a número de Mach arbitrário. Também verificámos que alguns destes métodos se enquadram no grupo de algoritmos do tipo PBA, enquanto outros enquadram-se no grupo de algoritmos do tipo DBA. Ficou estabelecido que, independentemente do método de solução escolhido, o acoplamento das variáveis dependentes deve ser garantido para uma elevada gama de números de Mach.

Apesar dos métodos de análise de escoamento a número de Mach arbitrário já se encontrarem bem estabelecidos para a análise de escoamento de gases, ainda não foram explorados para a análise de escoamento MHD compressível. Neste trabalho, pretendeu-se desenvolver um método multidimensional para a modelação de escoamento a número de Mach arbitrário, que fosse aplicável para o cálculo de dinâmica dos gases e de escoamento magnetohidrodinâmico. Este método deverá servir como base de suporte para futuras aplicações como é o caso da modelação de escoamentos de plasmas em tubeiras magnetoplasmadinâmicas.

O método de resolução deve ser capaz de calcular com relativa precisão as descontinuidades que são admitidas pelas equações de Euler e MHD. Como tal, no código proposto foi introduzido um esquema de alta resolução baseado numa formulação NVF, nomeadamente o CUBISTA de Alves et al. (2003). Em Xisto et al. (2010) demonstrou-se que a utilização do CUBISTA por si só não era suficiente para o cálculo de ondas de choque de grande intensidade. Era necessário introduzir um esquema mais conservativo e com propriedades *Upwind* para o tratamento dos fluxos convectivos. Em Xisto et al. (2012b), ficou claro que a utilização do método AUSM⁺ – *up* (Liou, 2006) em junção com o CUBISTA é uma excelente abordagem quando pretendemos calcular com precisão e robustez ondas de choque em escoamento de gases.

Grande parte dos escoamentos que pretendemos calcular com as equações MHD são do tipo não-estacionário. Desta forma, torna-se importante desenvolver um algoritmo que garanta um certo nível de precisão temporal. O método de solução adotado foi o PISO (Issa, 1986), que como já verificámos é um método do tipo PBA que requer a resolução de uma equação para a pressão termodinâmica. Vamos ver mais à frente que a equação da pressão possui a capacidade natural de se adaptar à natureza do escoamento, o que satisfaz a condição de Mach arbitrário requerida.

O método que vai ser proposto para o cálculo de escoamento MHD é uma evolução natural do método de dinâmica dos gases. Vai ser baseado no método AUSM-MHD (Han et al., 2009) e vai utilizar a técnica sugerida por Dedner et al. (2002) de forma a garantir a não-divergência do campo magnético. Ambos os métodos vão ser incorporados num algoritmo do tipo PBA (Xisto et al., 2012a, 2013), e vai ser demonstrado que o método proposto consegue calcular escoamento MHD para uma elevada gama de números de Mach. Para a modelação de tubeiras MPD vai ser incluído um modelo de gás real para o argón que é baseado em funções de partição (Sparks e Fischel, 1971; Sankaran, 2005). Este modelo vai ser adaptado de forma a ser incluído no método PBA aqui desenvolvido, e vamos verificar que permite obter uma solução mais realista para o campo de temperatura.

1.8 Visão geral da organização da tese

Após serem apresentados os objetivos e contribuições do presente trabalho, passa-se agora à descrição de como o trabalho se encontra estruturado na presente tese.

O primeiro capítulo é de carácter introdutório, onde se pretende dar ao leitor uma primeira impressão do que é a magnetohidrodinâmica e das suas aplicações. Posteriormente é feita uma revisão ao estado da arte acerca dos métodos numéricos desenvolvidos para o cálculo do escoamento de dinâmica dos gases a número de Mach arbitrário. De seguida apresenta-se uma descrição detalhada dos métodos numéricos de resolução do sistema de equações MHD compressível. A revisão é encerrada com uma análise aos modelos de cálculo de escoamento MHD em tubeiras magnetoplasmadinâmicas.

No segundo capítulo apresentam-se as equações que governam o escoamento nas várias vertentes estudadas, nomeadamente as equações de Euler e MHD na sua forma ideal e resistiva. O modelo MHD na sua componente teórica também vai ser apresentado, e a sua aplicabilidade para a modelação de plasmas vai aqui ser estudada. São apresentadas algumas particularidades

que caracterizam o escoamento MHD ideal, e os fenómenos resultantes da inclusão da resistividade elétrica e viscosidade no sistema de equações. Vão ainda ser apresentados alguns modelos numéricos que normalmente são utilizados na análise de escoamento de plasmas em tubeiras MPD.

No capítulo três pretende-se apresentar os métodos numéricos usados para a discretização das equações de governo no espaço computacional e no tempo. Serão abordados vários esquemas de diferenciação, onde será dada especial ênfase aos esquemas baseados em limitadores de fluxo. Vai ser ainda introduzido um novo esquema de diferenciação no código em uso, e este vai ser analisado e comparado com os restantes esquemas de alta resolução disponíveis.

No quarto capítulo serão apresentados em detalhe os dois modelos numéricos propostos para a modelação de escoamento de dinâmica dos gases e MHD a número de Mach arbitrário. Vão ser descritos os esquemas $AUSM^+ - up$ e $AUSM-MHD$, e apresentada a forma como ambos os esquemas podem ser implementados num método de solução do tipo PBA. As condições de fronteira utilizadas para o cálculo dos casos de teste da dinâmica dos gases e MHD também aqui são apresentadas. Serão ainda estudadas as várias técnicas de correção dos erros resultantes da discretização da equação da indução, onde vai ser dada especial atenção à técnica dos multiplicadores de Lagrange.

No capítulo cinco é feita a validação dos métodos de análise de escoamento compressível e MHD compressível, que foram propostos no quarto capítulo. A validação inclui casos de teste que são habitualmente utilizados para o efeito, e que devem comprovar que os códigos propostos são capazes de modelar escoamento para uma extensa gama de números de Mach. Vai também ser analisada a ordem de convergência dos métodos propostos, assim como a sua eficiência e robustez.

O capítulo seis diz respeito à utilização do código desenvolvido para aplicação à engenharia. Vamos apresentar os resultados numéricos obtidos para várias geometrias de tubeiras MPD de tipo bidimensional. Vai aqui ser demonstrado que para correntes de descarga semelhantes podemos obter forças de propulsão e rendimentos distintos, dependendo das características geométricas da tubeira.

No capítulo final vão ser apresentadas as conclusões do trabalho e as linhas de orientação para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Equações de governo

Neste capítulo vamos apresentar as equações que governam o escoamento nas várias vertentes que irão ser estudadas no decorrer desta tese. Vamos começar por apresentar as equações de Euler para o escoamento compressível, invíscido e adiabático. Posteriormente vamos debruçar sobre o modelo MHD e a sua aplicabilidade para a análise de escoamento de plasmas. De seguida as equações de Maxwell vão ser apresentadas, assim como as hipóteses assumidas na dedução das equações que regem o escoamento magnetohidrodinâmico. Na secção 2.4 vamos apresentar o sistema de equações MHD na sua forma ideal, e analisar as características matemáticas deste sistema hiperbólico. A lei de conservação do campo magnético, assim como as várias descontinuidades que se encontram associadas ao sistema MHD ideal também aqui vão ser apresentadas. Posteriormente, na secção 2.5, vai ser apresentada a formulação resistiva das equações MHD, onde analisaremos os efeitos resultantes da introdução da viscosidade e da resistividade elétrica nas equações de governo. Na secção 2.6 vai ser demonstrado que as equações da MHD são independentes de escala, e vão ser apresentados alguns parâmetros adimensionais que caracterizam o escoamento magnetohidrodinâmico. Finalmente, na secção 2.7 vamos apresentar alguns modelos numéricos que normalmente são implementados para a análise de tuberias MPD.

2.1 Equações de Euler para um fluido compressível

As equações de Euler são obtidas através da aplicação da segunda lei de Newton a um volume de controlo elementar quando este se encontra apenas sujeito a forças de pressão. Repare-se que estas podem ser apresentadas como um caso especial das equações MHD assumindo campo magnético nulo. A sua inclusão neste trabalho pode parecer à primeira vista pouco relevante, uma vez que o objetivo proposto é o de desenvolver um algoritmo para a modelação de escoamento MHD. Parece então bastante óbvio que considerar um campo magnético nulo nos desvia desse mesmo objetivo. No entanto, durante a fase inicial de desenvolvimento de um modelo numérico desta natureza devem ser contabilizadas todas as hipóteses e os problemas resultantes. Verificou-se que na presença de ondas de choque de grande intensidade o algoritmo de base apresentava graves instabilidades numéricas, veja-se Xisto et al. (2010). Após uma extensa análise, concluiu-se que as instabilidades eram desencadeadas por um tratamento inapropriado dos fluxos convectivos e que eram independentes da parte magnética do algoritmo. No capítulo 4 vamos abordar este assunto em mais detalhe. O sistema de equações de Euler na sua forma

vetorial vem dado por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = - \nabla p, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial (\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mathbf{U} p) = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho = \psi p = \frac{p}{RT}, \quad (2.4)$$

onde ψ é o coeficiente de compressibilidade e R é a constante do gás. Este sistema é composto pelas equações de conservação de massa, de conservação da quantidade de movimento e de conservação da energia total. De forma a fechar este sistema necessitamos de uma equação adicional. Optou-se por uma equação de estado para gases ideais que permite calcular a massa volúmica em função da pressão e temperatura. A energia total é dada pelo somatório da energia interna com a energia cinética:

$$e_t = c_v T + \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2}, \quad (2.5)$$

onde c_v é o calor específico a volume constante. Esta relação entre as variáveis de estado permite-nos obter o campo de temperatura,

$$T = \left(e_t - \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} \right) \frac{1}{c_v}. \quad (2.6)$$

Nas próximas secções vamos apresentar o modelo MHD e as equações que governam este tipo de escoamento. Vai ser demonstrado que para as hipóteses assumidas, é possível conciliar as propriedades das equações de Maxwell com o sistema de equações de Euler, quando este é aplicado na descrição do escoamento de um fluido com propriedades condutoras.

2.2 O modelo MHD e a sua aplicabilidade na descrição de plasmas

Antes de nos debruçarmos sobre o sistema de equações que governam o escoamento MHD temos de colocar uma questão fulcral: Porquê utilizar o modelo MHD na descrição do escoamento de plasmas? A resposta é bastante simples e encontra-se descrita num qualquer livro de teoria MHD (Goedbloed e Poedts, 2004) ou de física de plasmas (Bellan, 2006; Goldston e Rutherford, 1995). Podemos simplesmente afirmar que a formulação MHD apresenta um modelo macroscópico para o escoamento de plasma, o que permite um maior ganho em termos de eficiência relativamente aos modelos microscópicos. Mas, será que essa aproximação é válida? É nesta questão que nos vamos debruçar nos próximos parágrafos.

Um plasma é um gás altamente ionizado essencialmente constituído por partículas carregadas eletricamente, os eletrões e os iões. Algumas destas partículas possuem cargas elétricas opostas, os eletrões de carga negativa são atraídos pelos iões, de carga positiva e massa muito superior. O facto de possuírem uma polaridade oposta, também obriga a que estes se comportem de uma forma distinta na presença de campos elétricos e magnéticos. Assim, facilmente se compreende que o comportamento de um plasma é fundamentalmente caracterizado pelo

movimento relativo de cada uma das suas partículas e pelas suas constantes colisões (Goldston e Rutherford, 1995). Uma abordagem minuciosa, envolveria uma descrição detalhada da dinâmica de cada uma destas espécies. Nomeadamente, as forças a que estão sujeitas, assim como a sua influência nos campos elétricos e magnéticos. Tal descrição permitiria calcular a trajetória de todas as partículas no espaço tridimensional, sujeitas às leis físicas fundamentais, neste caso dadas pelas leis de Maxwell e de Newton. De facto, se não houvessem limitações computacionais este seria o modelo ideal. Contudo, devido à enorme quantidade de partículas que constituem um volume macroscópico de plasma, tal abordagem engloba uma complexidade de cálculo normalmente proibitiva. A utilização de distribuições estatísticas é outra das soluções que pode ser utilizada no estudo do escoamento de plasmas. A variação temporal destas funções de distribuição é obtida a partir da equação de Boltzmann para cada uma das espécies envolvidas. A solução das equações de Maxwell permite determinar os campos elétricos e magnéticos a que as partículas estão sujeitas. Todavia, esta é uma abordagem bastante complexa, mesmo quando aplicada com recurso a métodos de análise numérica (Goedbloed e Poedts, 2004).

Vamos então identificar a gama de parâmetros para a qual a utilização das equações MHD na descrição do escoamento de plasmas é uma boa aproximação. De um ponto de vista macroscópico, o modelo MHD assume que o plasma se comporta como um meio contínuo num estado de total ionização e equilíbrio. Esta hipótese é satisfatória quando a frequência de colisão entre as espécies é suficientemente grande, o que permite manter um equilíbrio termodinâmico local (pelo menos para cada uma das espécies consideradas). O plasma também se deve encontrar num estado de quase-neutralidade, o que significa que num volume bastante pequeno, normalmente do tamanho da esfera de Debye¹, as cargas positivas e negativas se anulam. Desta forma é garantido um balanço entre as forças atrativas e repulsivas, e nenhuma destas contribui para a evolução do escoamento global.

Em termos de comprimento de escala, é imperativo que o comprimento de referência do plasma, λ_H , seja muito superior ao comprimento de escala para o qual a condição de quase-neutralidade se impõe,

$$\lambda_H \gg \lambda_D, \quad (2.7)$$

onde λ_D é o raio da esfera de Debye. Goedbloed e Poedts (2004) demonstraram que esta propriedade é facilmente satisfeita para a maior parte de escoamentos de plasmas em dispositivos laboratoriais, da engenharia, ou no campo da astrofísica.

As escalas temporais macroscópicas do escoamento devem ser muito superiores ao inverso da frequência ciclotrónica dos iões,

$$\tau_i \ll \tau_H, \quad (2.8)$$

onde $\tau_i \sim (M_i/m_e)^{1/2} \tau_e$ é o tempo de colisão dos iões e τ_H é a escala temporal de interesse. No entanto, foi referido por Boyd e Sanderson (2003), que a hipótese de as equações MHD assumirem um equilíbrio térmico entre as espécies, $T \approx T_i \approx T_e$, vai levar a uma maior restrição da inequação (2.8). Sabe-se que o equilíbrio térmico depende essencialmente das trocas de energia que ocorrem entre cada uma das espécies envolvidas, e essas trocas de energia são proporcionais ao rácio m_e/M_i , onde m_e é a massa de um eletrão e M_i é a massa de um ião. Pode-se também estabelecer que este mesmo equilíbrio ocorre ao fim de um determinado

¹A esfera de Debye representa o volume de influência elétrica de uma dada partícula.

período de tempo, $(M_i/m_e)\tau_e$, onde τ_e é o tempo de colisão dos eletrões. Posto isto, este efeito deve ser incluído na inequação (2.8),

$$\tau_i \ll (m_e/M_i)^{1/2} \tau_H. \quad (2.9)$$

Estas hipóteses são válidas na maior parte dos regimes de funcionamento das tubeiras MPD (Chanty, 1992), e como a sua modelação será o objetivo final deste trabalho parece-nos conveniente seguir esta abordagem. Como vamos ver mais à frente, na secção 2.7, existe sempre a possibilidade de se assumirem diferentes temperaturas de equilíbrio para os eletrões e para as espécies pesadas, aumentando assim a precisão do modelo. Resumindo, um modelo macroscópico válido para o estudo de um plasma magnetizado deve garantir que as propriedades macroscópicas, nomeadamente: o comprimento de escala; as escalas temporais; a densidade de partículas; e o campo magnético, sejam suficientemente distintos para que os fenómenos físicos que ocorrem a um nível microscópico possam ser desprezados.

Dependo das hipóteses assumidas, o modelo MHD também pode assumir diferentes formulações. Existe o modelo MHD ideal, que é caracterizado por ser um modelo de uma só espécie e um só fluido, com condutividade elétrica infinita. Existe o modelo MHD multi-espécie, onde cada uma das espécies deve ser representada pela sua própria equação da continuidade, mas todas as espécies partilham a mesma velocidade e temperatura. As equações também podem ser formuladas com base no modelo multi-fluido MHD, onde cada espécie é tratada como um fluido independente. Temos também o modelo MHD de Hall que, como o próprio nome indica, retém o termo de Hall na lei de Ohm. Finalmente, podemos considerar o modelo MHD na sua forma resistiva, que adiciona os efeitos da resistividade na equação da indução e contabiliza o aquecimento por efeito de Joule na equação da energia. Neste capítulo apenas nos vamos focar no modelo MHD ideal e no modelo MHD resistivo, uma vez que serão estes os modelos adotados na resolução do problema em estudo. Uma descrição mais aprofundada dos restantes modelos, bem como a sua aplicabilidade ao campo da astrofísica pode ser encontrada em Ledvina et al. (2008).

2.3 As equações de Maxwell

As equações de Maxwell são as leis fundamentais do eletromagnetismo e, como tal, são parte integrante do sistema de equações MHD. A sua finalidade é descrever como são gerados os campos elétricos e magnéticos, como se propagam num meio condutor e como interagem entre si. Considerem-se então as equações de Maxwell que relacionam os campos vetoriais \mathbf{E} , \mathbf{B} e \mathbf{j} , independentemente das propriedades da matéria,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right], \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.13)$$

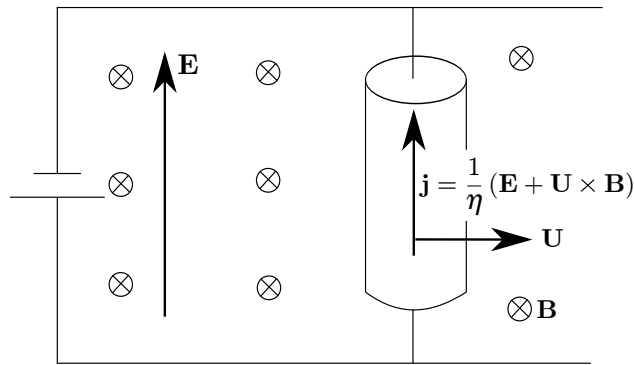


Figura 2.1: Representação esquemática da lei de Ohm (Davidson, 2001).

A equação (2.10) representa a indução do campo elétrico, \mathbf{E} , a partir de uma alteração no campo magnético, \mathbf{B} . Ao mesmo tempo, esta equação, permite-nos relacionar a corrente elétrica, \mathbf{j} , com o campo magnético se a variação temporal do campo elétrico for nula. A equação (2.11) faz exatamente o oposto, ou seja, demonstra que o campo elétrico pode gerar um campo magnético por efeitos de indução. A equação (2.12) impõe que o fluxo elétrico que atravessa uma determinada superfície é proporcional à carga elétrica inserida dentro dessa mesma superfície, onde q é a densidade de carga total e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Finalmente a equação (2.13) diz-nos que o campo magnético é solenoidal, o que em termos físicos significa que na natureza não existem monopólos.

A corrente gerada por um fluido condutor em movimento, sujeito a campos magnéticos e elétricos, vem dada pela lei de Ohm,

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}), \quad (2.14)$$

em que $\sigma = 1/\eta$ representa a condutividade elétrica do fluido, e η a respetiva resistividade elétrica. Facilmente nos apercebemos que a lei de Ohm, dada pela equação (2.14), pode assumir duas formas distintas. Dependendo se o condutor se encontra em movimento com uma velocidade \mathbf{U} num campo magnético (Fig. 2.1) ou se este se encontra estacionário, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

A equação (2.10) representa a forma diferencial da lei de Ampère. A lei de Ampère aplicada a circuitos elétricos é muitas vezes apresentada sem o último termo da equação (2.10). De facto, este termo não foi inicialmente sugerido por Ampère, mas sim mais tarde por Maxwell, como uma correção à formulação de Ampère; o termo $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ é conhecido como corrente de deslocamento. De forma a avaliar a sua importância vamos aplicar o produto interno entre o operador ∇ e a equação (2.10), note-se que $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0$ (equação (A.6)). Se utilizarmos a equação (2.12) obtemos uma equação para a conservação da carga elétrica,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Note-se que ao negligenciarmos a corrente de deslocamento esta condição é violada. Foi demonstrado por Davidson (2001) que, para velocidades de escoamento muito inferiores à velocidade da luz ($u \ll c$), o termo $\partial q / \partial t$ pode ser negligenciado. Assim, o último termo da equação (2.10), relativo à corrente de deslocamento, pode ser desprezado e podemos escrever a lei de Ampère na sua forma original,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.16)$$

A lei de Faraday na sua forma diferencial (equação (2.11)) representa a indução de um campo elétrico por um campo magnético a variar no tempo. Esta equação também deve garantir que o campo magnético seja solenoidal em todos os passos de tempo ($\nabla \cdot \nabla \times (\cdot) = 0$),

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.17)$$

Podemos finalmente escrever as equações de Maxwell na sua forma simplificada:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.20)$$

Apesar das aproximações que foram assumidas na dedução destas equações, elas juntamente com a lei de Ohm permitem descrever as leis fundamentais do eletromagnetismo. Como tal, fornecem-nos todas as informações necessárias para a construção do sistema de equações MHD.

2.4 A forma ideal do sistema de equações MHD

As equações MHD na sua forma ideal descrevem a interação entre um campo magnético e um fluido *perfeitamente condutor* em movimento, o que é equivalente a afirmar que a resistividade elétrica do fluido em questão é nula ($\eta = 0 \vee \sigma = \infty$). Considerem-se então as equações que governam o escoamento MHD ideal (Goedbloed e Poedts, 2004):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p \mathcal{I}) - \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \rho e_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} e_i) + p \nabla \cdot (\mathbf{U}) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.24)$$

Aqui estão representadas: a equação da continuidade (2.21); a equação da conservação de quantidade de movimento (2.22); a equação de conservação da energia interna ($e_i = c_v T$) (2.23); e por último a equação da indução do campo magnético (2.24).

Como podemos verificar, a estrutura das equações MHD na sua forma ideal é similar à do sistema de equações de Euler apresentado na secção 2.1. As únicas diferenças prendem-se com a adição da força de Lorentz ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$) na quantidade de movimento e a inclusão de uma nova equação para a conservação do campo magnético. A equação da indução é facilmente deduzida a partir da lei de Faraday (Eq. (2.11)) em junção com a lei de Ohm (Eq. (2.14)).

O sistema resultante é composto por oito equações de conservação com um total de oito incógnitas. A equação (2.20) deve ser considerada como condição inicial e de fronteira, e deve ser garantida em todos os instantes pela equação (2.24). De forma a simplificar a dedução das equações, vamos escolher dimensões para \mathbf{B} que assumam uma permeabilidade magnética no vácuo igual $\mu_0 = 1 \text{ [m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \text{A}^{-2}]$. Para se reverter ao sistema de equações em unidades SI devem

ser efetuadas as seguintes modificações às variáveis dependentes: $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}/\sqrt{\mu_0}$; $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}/\sqrt{\mu_0}$; $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}\sqrt{\mu_0}$.

2.4.1 As equações na sua forma conservativa

A partir da formulação ideal iremos escrever as equações na forma conservativa. Vamos ver mais à frente que esta é a abordagem mais adequada quando pretendemos calcular os vários tipos de descontinuidade que podem resultar do sistema MHD ideal. O sistema de equações (2.21)-(2.24) deverá pois ser reformulado da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = 0, \quad (2.25)$$

onde \mathcal{H} é o vetor de estado das variáveis conservativas e \mathcal{F} representa o tensor de fluxo. Como podemos observar, apenas a equação da continuidade (Eq. (2.21)) se encontra escrita na sua forma conservativa. A reformulação do restante sistema de equações requer a utilização de algumas identidades vetoriais, veja-se o apêndice A. Abaixo, acima do sinal de igualdade referem-se as identidades utilizadas.

O último termo da equação (2.22) representa uma força externa de origem eletromagnética conhecida como força de Lorentz. Contudo, este termo pode ser transformado num conjunto de tensões, denominadas tensões de Maxwell:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \stackrel{(A.1),(A.3)}{=} \nabla \cdot \left(\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \mathcal{I} \right), \quad (2.26)$$

Onde o termo $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}/2$ representa a pressão magnética e o termo $\mathbf{B}\mathbf{B}$ é uma tensão circunferencial. Na secção 2.4.3 vamos analisar como é que estas tensões atuam sobre cada elemento de fluido.

A forma conservativa da equação (2.24) pode ser obtida através da reformulação do seu segundo termo utilizando a respetiva identidade vetorial,

$$-\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \stackrel{(A.2)}{=} \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{U}). \quad (2.27)$$

Curiosamente, esta não é a formulação que garante a conservação do fluxo magnético. Vamos ver na secção 2.4.4 que essa conservação vem implicitamente escrita na equação (2.24). Todavia, esta formulação permite-nos utilizar o teorema de Gauss na aproximação dos termos convectivos, como tal é mais adequada para aplicação num método de volumes finitos. Outra particularidade da formulação dada pela equação (2.27) é que esta, quando explorada por esquemas numéricos de alta resolução, permite obter condições de descontinuidade mais corretas.

A equação da energia interna, uma vez que apenas representa uma parcela da energia total, não pode ser convertida na sua forma conservativa. Para o caso MHD, a conservação da energia total vem dada pela soma das energias térmica, cinética e magnética,

$$e_t = e_i + \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\rho}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} \rho + \rho e_i + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} \rho + \rho e_i + p + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} \right] = 0, \quad (2.29)$$

onde $e_i = c_v T$.

A forma conservativa do sistema de equações MHD ideal, que irá ser resolvido pelo modelo numérico, vem finalmente dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{U}\mathbf{U} + \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathcal{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \right] = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} \right] = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{U}) = 0. \quad (2.33)$$

Este sistema pode ser escrito na sua forma tensorial dada pela equação (2.25),

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{U} \\ \rho e_t \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{U} \\ \rho \mathbf{U}\mathbf{U} + \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathcal{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \\ \left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}\mathbf{B} \\ \mathbf{U}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{U} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.34)$$

Através de uma análise destas equações na sua forma integral, facilmente se compreende que esta é a formulação mais adequada a ser aplicada no método de volumes finitos. Vamos então integrar a equação (2.25) num volume de controlo V , de fronteira genérica \mathcal{L} , ao aplicarmos o teorema de Gauss obtemos a seguinte equação integro-diferencial (Páscoa, 2007),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \mathcal{H} dV + \int \int_{\mathcal{L}} \mathcal{F} \cdot \hat{\mathbf{S}} d\mathcal{L} = 0 \quad (2.35)$$

onde $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$ representa o vetor de valor unitário, normal à superfície. A equação (2.35) afirma simplesmente, que a taxa de variação de \mathcal{H} no tempo é igual ao somatório do fluxo convectivo que atravessa a fronteira \mathcal{L} do volume de controlo V .

2.4.2 Características matemáticas do sistema de equações MHD ideal

Nesta secção vamos analisar a estrutura matemática do sistema de equações MHD ideal. Esta análise vai-nos permitir deduzir as velocidades características responsáveis pela propagação da informação no escoamento MHD.

Um sistema não-linear de n equações pode escrever-se na forma quase-linear para quatro variáveis independentes (t, x, y e z) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0, \quad (2.36)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são as matrizes Jacobianas, obtidas a partir da derivada dos vetores de fluxo em ordem ao vetor das variáveis conservativas. Para uma análise das velocidades características do sistema de equações MHD ideal é conveniente escrever as equações de governo na sua forma quase-linear, baseada nas variáveis primitivas,

$$\mathcal{P} = [\rho, U_x, U_y, U_z, B_x, B_y, B_z, p]^T, \quad (2.37)$$

o vetor das variáveis primitivas pode ser relacionado com as variáveis conservativas,

$$\mathcal{H} = [\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho U_z, B_x, B_y, B_z, \rho e_T]^T, \quad (2.38)$$

através das matrizes de transformação \mathbf{M} e \mathbf{M}^{-1} dadas por (Powell et al., 1999):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}}, \\ \mathbf{M}^{-1} &= \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_y & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_z & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} & \rho U_x & \rho U_y & \rho U_z & B_x & B_y & B_z & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

e,

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{U_x}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{U_y}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{U_z}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} & \gamma^* U_x & \gamma^* U_y & \gamma^* U_z & \gamma^* B_x & \gamma^* B_y & \gamma^* B_z & (\gamma-1) \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

onde $\gamma^* = 1 - \gamma$.

Calculando a diferencial do vetor \mathcal{H} em relação ao vetor \mathcal{P} a equação (2.36) pode ser reescrita em termos de variáveis primitivas,

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \mathbf{A} \mathbf{M} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \mathbf{B} \mathbf{M} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \mathbf{C} \mathbf{M} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = 0. \quad (2.42)$$

Ao multiplicar a equação (2.42) pela matriz de transformação \mathbf{M}^{-1} vem,

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \tilde{\mathbf{C}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = 0, \quad (2.43)$$

onde:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}; \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}; \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}.\end{aligned}\tag{2.44}$$

A forma mais prática de analisar as características do sistema de equações MHD ideal é considerando o caso uni-dimensional, neste caso na direção x . Nesta situação a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica que B_x seja apenas um parâmetro invariável no tempo. Esta propriedade será útil na implementação numérica uni-dimensional da subsecção 5.2.3. Para este caso em específico o vetor das variáveis primitivas dependentes vem definido como:

$$\mathcal{P}' = [\rho, U_x, U_y, U_z, B_y, B_z, p]^T,\tag{2.45}$$

o que implica que a matriz $\tilde{\mathbf{A}}'$ possua uma dimensão 7×7 e que nas matrizes \mathbf{M} e \mathbf{M}^{-1} se cancele a quinta coluna e linha. Desta forma a equação (2.43) pode ser escrita na sua forma uni-dimensional,

$$\frac{\partial \mathcal{P}'}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}' \frac{\partial \mathcal{P}'}{\partial x} = 0,\tag{2.46}$$

o que na sua forma matricial vem representado por,

$$\begin{bmatrix} \rho \\ U_x \\ U_y \\ U_z \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} U_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_x & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & U_x & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_x & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & U_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & U_x & 0 \\ 0 & a^2 \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & U_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ U_x \\ U_y \\ U_z \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix}_x = 0.\tag{2.47}$$

Uma condição suficiente para que o sistema seja hiperbólico no plano xt é que a matriz característica $\tilde{\mathbf{A}}'$ possua valores próprios reais e distintos, assim como um conjunto de sete vetores próprios linearmente independentes (Sterck, 2000). Os valores próprios podem ser obtidos através da seguinte equação:

$$\det |\tilde{\mathbf{A}}' - \lambda \mathcal{I}| = 0,\tag{2.48}$$

de onde se obtém:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= U_x \pm c_x^f; \\ \lambda_{3,4} &= U_x \pm c_x^A; \\ \lambda_{5,6} &= U_x \pm c_x^s; \\ \lambda_7 &= U_x;\end{aligned}\tag{2.49}$$

Onde c_x^f é a velocidade da onda magnetosónica rápida, c_x^A representa a velocidade de Alfvén e c_x^s é a velocidade da onda magnetosónica lenta,

$$c_x^f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} + \sqrt{\left(a^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \right)^2 - 4a^2 (c_x^A)^2} \right] \right\}^{1/2},\tag{2.50}$$

$$c_x^s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} - \sqrt{\left(a^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \right)^2 - 4a^2 (c_x^A)^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.51)$$

$$c_x^A = \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho}}, \quad (2.52)$$

estas velocidades têm de satisfazer a seguinte inequação,

$$c_x^f \geq c_x^A \geq c_x^s. \quad (2.53)$$

Repare-se que o sistema de equações de Euler possui apenas uma velocidade de onda isotrópica, dada pela velocidade do som a . No caso MHD ideal existem três modos distintos de onda que se comportam de uma forma altamente anisotrópica, que depende essencialmente da direção do campo magnético (Sterck, 2000). Facilmente se verifica que este sistema reverte para as equações de Euler quando $\mathbf{B} \rightarrow 0$, uma vez que a onda de Alfvén e a onda lenta desaparecem e a onda rápida reverte para a onda acústica $U_x \pm a_x$. Ainda assim, a estrutura do sistema MHD é bem mais complexa do que aquela que é dada pelas equações de dinâmica dos gases. Isto porque o aumento da complexidade não está apenas associado ao aumento do número de ondas, mas também ao facto do sistema MHD não ser puramente hiperbólico. Esta situação resulta da inequação (2.53), que afirma que as velocidades características podem coincidir entre si. Assim, estas não possuem sempre valores próprios distintos o que impossibilita a dedução de uma equação exata, baseada nos valores iniciais, para cada uma das características (Goedbloed et al., 2010). Em conclusão, esta particularidade do sistema MHD ideal não vai permitir obter uma solução exata do problema de Riemann, para além de que pode gerar ondas compostas, como vamos poder verificar na subsecção 5.2.3.

2.4.3 Tensões de Maxwell

Como já vimos a equação (2.31) representa a conservação de quantidade de movimento. O segundo termo desta equação representa o somatório de todas as tensões a que o elemento de fluido está sujeito. Este tensor é composto pela tensão de Reynolds ($\rho \mathbf{U} \mathbf{U}$), pela força de pressão ($p \mathcal{I}$), e pelas tensões de Maxwell ($\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \mathcal{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}$). A pressão termodinâmica tem a particularidade de atuar de igual forma em todas as direções do elemento de fluido, daí possuir um comportamento denominado isotrópico. Por outro lado, a existência de uma pressão e tensão magnéticas, leva-nos a crer que o comportamento da força magnética é altamente anisotrópico. Esta particularidade pode ser facilmente compreendida se assumirmos um equilíbrio estático ($\mathbf{U} = 0$), o que obriga a um equilíbrio entre as forças de pressão e as de origem magnética. O tensor resultante desse equilíbrio pode ser representado numa projeção baseada no campo magnético \mathbf{B} ,

$$\begin{pmatrix} p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & p - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \perp \\ \perp \\ \parallel \end{matrix}.$$

Como podemos observar, o campo magnético atua como uma força de pressão na direção perpendicular às linhas de campo magnético, e como uma tensão tangencial na direção paralela às linhas de força, veja-se a Fig. 2.2. Desta forma, a pressão magnética ($\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}$) atua sobre cada molécula de fluido da mesma forma que a pressão termodinâmica, o que lhe permite resistir à

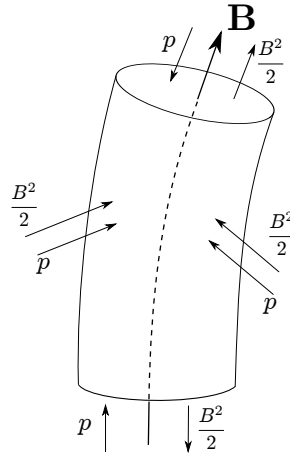


Figura 2.2: Tensões de Maxwell aplicadas a um tubo de fluxo magnético (Goedbloed e Poedts, 2004).

compressibilidade. A tensão tangencial $\mathbf{B}\mathbf{B}$ pode ainda ser comparada com as tensões viscosas, uma vez que atua de forma similar sobre a superfície de cada elemento de fluido (Davidson, 2001).

2.4.4 Lei de conservação do campo magnético

O teorema do fluxo congelado (*frozen flux*) proposto por Hannes Alfvén em 1943 afirma que: “As linhas do campo magnético encontram-se “congeladas” no fluido perfeitamente condutor, à medida que este se desloca”. Este é considerado por muitos o mais importante teorema da magnetohidrodinâmica ideal. De uma forma muito simples, afirma que o campo de velocidades “carrega” consigo as linhas de campo magnético que são transversais à direção de propagação do escoamento. Ou seja, as linhas de campo magnético movem-se com o escoamento do fluido. Claro que a existência de alguma resistividade vai permitir a ocorrência de um “escorregamento” entre as linhas de campo e o condutor, mas vamos deixar a discussão desses efeitos para a secção 2.5.

O teorema de Alfvén representa a lei de conservação do campo magnético para o escoamento MHD ideal. O que este pretende demonstrar é que o fluxo magnético que atravessa uma superfície fechada, que se move com o escoamento, não se altera com o tempo. Considere-se uma superfície S limitada por uma curva C que se desloca com o escoamento de velocidade \mathbf{U} . O teorema de Alfvén afirma que o fluxo magnético através dessa superfície deve ser constante,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint_C \mathbf{U} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.54)$$

O termo do lado esquerdo da equação (2.54) representa a derivada temporal do fluxo magnético, que pode variar no tempo de duas formas distintas. Através da variação de \mathbf{B} ao longo do tempo ($\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$) e através de alterações na fronteira definida pela curva C , ($\oint_C \mathbf{B} \times \mathbf{U} \cdot d\mathbf{l}$). Se utilizarmos o teorema de Stokes na transformação do integral de linha num integral de superfície e utilizando a equação 2.24, verificamos que:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \right) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.55)$$

Como tal o fluxo não varia com o tempo e as linhas de campo magnético são convectadas pela velocidade do fluido condutor. Esta propriedade de conservação foi denominada teorema de fluxo congelado. O que significa que as linhas de campo estão acopladas ao fluido e vice-versa. Este fator implica que uma velocidade perpendicular às linhas de campo vai induzir um campo elétrico \mathbf{E} , que por sua vez vai alterar o campo magnético através da lei de Faraday. Esta condição é tão forte na aproximação ideal das equações MHD, que o escoamento aparenta convectar as linhas de campo à medida que se move. Note-se que a condição $\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})$ dada pela lei de Ohm apenas permite que as componentes transversais da velocidade alterem o campo magnético, o que implica que o escoamento tangencial consegue “deslizar” pelas linhas de campo sem as alterar.

2.4.5 Ondas e descontinuidades em MHD

Nesta secção vamos descrever de forma bastante resumida os vários tipos de descontinuidade que podem surgir em escoamento MHD compressível. Esta pequena introdução, para além de ser útil numa posterior análise dos resultados de validação, vai definir a nomenclatura que vai ser utilizada no decurso deste trabalho de tese. Uma excelente revisão sobre esta matéria pode ser encontrada em Sterck et al. (1998).

Muitas vezes é referido que o sistema de equações MHD ideal é hiperbólico, uma vez que produz soluções do tipo onda que se propagam num meio sem sofrer efeitos de dissipação. Como já vimos estas propagam-se com três velocidades distintas, nomeadamente: a velocidade magnetosónica lenta, c^s ; a velocidade de Alfvén, c^A ; e a velocidade magnetosónica rápida c^f . Também já sabemos que estas têm de obrigatoriamente satisfazer a condição $c^f \geq c^A \geq c^s$.

2.4.5.1 A onda de Alfvén

Alfvén apresentou a sua teoria relativa às ondas eletromagnéticas-hidrodinâmicas pela primeira vez na revista *Nature* em 1942 (Alfvén, 1942), onde referiu; “*Se um fluido condutor estiver sujeito a um campo magnético constante, um qualquer movimento do fluido vai dar origem a uma força eletromotriz. (...) Estas forças vão alterar o estado de movimento do fluido. Desta forma, uma onda eletromagnética-hidrodinâmica vai ser gerada...*”. Este fenómeno é facilmente perceptível se assumirmos um fluido perfeitamente condutor sujeito a um campo magnético homogéneo de valor constante B_0 a atuar na direção paralela a oz . De forma a obter uma onda plana devemos assumir que todas as variáveis dependem apenas do tempo t e da direção z . Uma perturbação da velocidade U na direção paralela a ox vai originar uma corrente elétrica j paralela ao eixo oy . Esta corrente vai por sua vez gerar, por efeito de indução, um campo magnético B_i paralelo a ox . A soma entre a perturbação do campo magnético B_i e o campo imposto vai gerar uma onda do tipo incompressível, conhecida como onda de Alfvén, veja-se a Fig. 2.3.

Esta perturbação, na componente transversal da velocidade e do campo magnético, propaga-se com a seguinte componente normal da velocidade de Alfvén:

$$c_n^A = \frac{|B_n|}{\sqrt{\rho}} \quad (2.56)$$

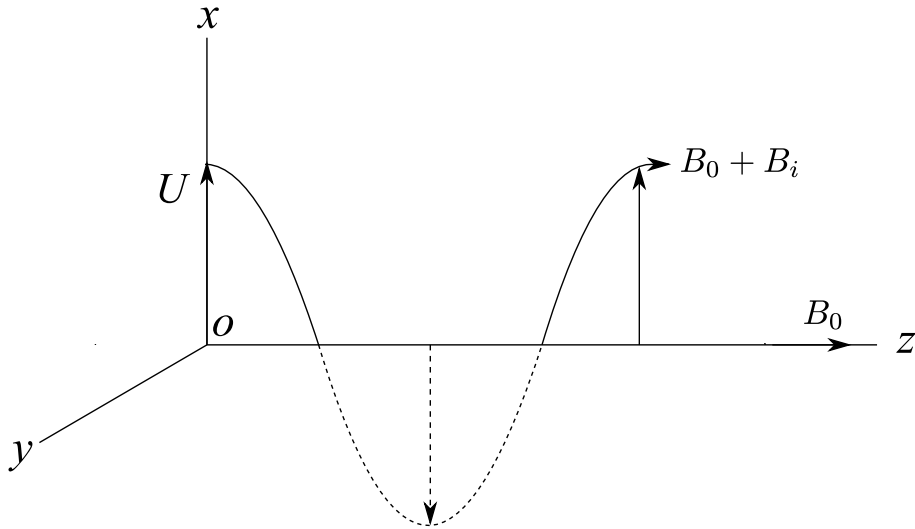


Figura 2.3: Representação de uma onda de Alfvén no plano xz . Uma perturbação na velocidade paralela a ox vai gerar um campo magnético por indução, também este paralelo a ox . Essa perturbação do campo vai ser somada ao campo inicialmente imposto gerando um onda de Alfvén. *Adaptado de Goedbloed e Poedts (2004).*

onde B_n representa a componente do campo magnético normal à direção de propagação.

2.4.5.2 Ondas do tipo compressível e discontinuidades MHD

As ondas rápidas e lentas são do tipo compressível, como tal, estão diretamente relacionadas com as ondas acústicas da dinâmica dos gases. Já aqui foi referido que a velocidade da onda rápida reverte para a velocidade da onda acústica, $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$, na ausência de campo magnético. As velocidades de ambas as ondas são dadas por expressões semelhantes, só se diferenciam por uma simples mudança de sinal:

$$c_n^f = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} + \sqrt{\left(a^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \right)^2 - 4a^2 (c_n^A)^2} \right] \right\}^{1/2}; \quad (2.57)$$

$$c_n^s = \left\{ \frac{1}{2} \left[a^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} - \sqrt{\left(a^2 + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \right)^2 - 4a^2 (c_n^A)^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (2.58)$$

A análise das características apresentada na secção 2.4.2 permite-nos definir a velocidade máxima de propagação da informação:

$$c_{\max} = |U_n| \pm c_n^f. \quad (2.59)$$

Muitos dos métodos numéricos utilizados para resolver as equações MHD baseiam-se nesta velocidade para deduzir os esquemas de alta resolução. A velocidade das ondas também nos permite definir três parâmetros adimensionais, que irão ser úteis na definição das regiões a montante e a jusante das superfícies de propriedades descontínuas que ocorrem na solução. Estes parâmetros são dados pelas três variantes do número de Mach, baseado na onda lenta, na

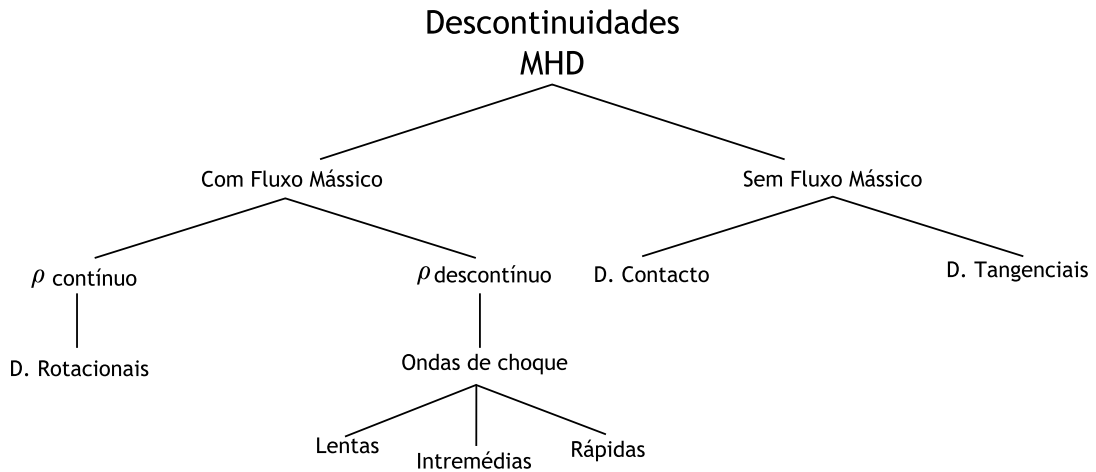


Figura 2.4: Diagrama representativo das descontinuidades que são admitidas pelo sistema de equações MHD.

onda de Alfvén ou na onda rápida,

$$M^{s,A,f} = \frac{U}{c^{s,A,f}}. \quad (2.60)$$

Após uma breve definição dos diferentes tipos de ondas MHD, e dos parâmetros dimensionais a estas associados, podemos passar à análise de possíveis descontinuidades que são admitidas pelo sistema MHD ideal. Na Fig. 2.4 está representado um diagrama onde estão agrupadas as várias descontinuidades que podem ocorrer em escoamento MHD.

Fundamentalmente as descontinuidades MHD podem ser divididas em duas classes. A primeira classe caracteriza-se por permitir a ocorrência de fluxo mássico através da superfície descontínua. A segunda classe assume que o fluxo mássico que atravessa a descontinuidade é nulo ($\rho U_n = 0$). As descontinuidades que não permitem fluxo mássico podem ainda ser divididas em dois tipos, dependendo se a componente do campo magnético normal ao plano da descontinuidade for nula ($B_n = 0$) ou não.

Vamos começar por nos debruçar na análise das descontinuidades que não admitem fluxo mássico através da sua superfície. Facilmente nos apercebemos que a razão pela qual o fluxo mássico é nulo está diretamente associada ao facto de a velocidade normal à superfície descontínua também o ser ($U_n = 0$). No entanto, a componente normal do campo magnético poderá não ser nula, e esta é a propriedade que distingue as descontinuidades de contacto (Fig. 2.5a) das descontinuidades tangenciais, veja-se a Fig. 2.5b. O facto de a descontinuidade de contacto assumir uma componente do campo magnético, normal ao plano da descontinuidade, diferente de zero ($B_n \neq 0$) não lhe permite obter um salto na velocidade tangencial (U_t). Desta forma, todas as quantidades, à exceção da massa volúmica, são contínuas através da descontinuidade. Por outro lado, se a componente normal do campo magnético for nula ($B_n = 0$), vai permitir obter soluções descontínuas para as componentes tangenciais da velocidade, U_t , e do campo magnético, B_t , assim como para as propriedades termodinâmicas. Contudo, a pressão global, que é dada pela soma entre a pressão termodinâmica e a pressão magnética ($p_G = p + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} / 2$), deve manter-se contínua. Estas descontinuidades denominadas de tangenciais (Fig. 2.5b), implicam não só uma variação na amplitude das componentes tangenciais mas também uma variação na sua direção. Contudo devem manter-se sempre tangenciais ao plano de descontinuidade.

Podemos também encontrar descontinuidades que se caracterizam pela ocorrência de fluxo mássico através da sua superfície. Novamente, estas podem ser agrupadas em dois grupos distintos, dependendo se admitem soluções descontínuas (ou não) para a massa volúmica. Se a massa volúmica for contínua estamos perante descontinuidades rotacionais ou de Alfvén. Por outro lado, se a massa volúmica for descontínua estamos a falar de um outro grupo, conhecido como ondas de choque magneto-acústicas.

As descontinuidades rotacionais, uma vez que assumem que a massa volúmica é contínua também assumem uma componente normal da velocidade contínua. Desta forma as variáveis termodinâmicas, assim como a magnitude do vetor \mathbf{B} , assumem um comportamento contínuo. No entanto, o que caracteriza este tipo de descontinuidade é o facto de a componente tangencial do campo magnético, B_t , girar em torno do vetor normal à descontinuidade, \mathbf{n} , com um determinado ângulo, veja-se a Fig. 2.5c. Neste caso a componente normal da velocidade é igual à velocidade de Alfvén, o que implica que o número de Mach Alfvénico seja igual a um em ambas as regiões definidas pela descontinuidade.

No grupo das ondas de choque magneto-acústicas, a componente normal da velocidade, U_n , assim como a massa volúmica são descontínuas, o que obriga a que todas as propriedades termodinâmicas sejam descontínuas. As ondas de choque magneto-acústicas podem ser vistas como uma generalização das ondas de choque de dinâmica dos gases para MHD. Estas podem ainda ser divididas em três categorias: ondas de choque lentas; ondas de choque intermédias e ondas de choque rápidas.

Numa onda de choque rápida o escoamento do plasma a montante é super-rápido ($M^f > 1$), enquanto que a jusante é sub-rápido ($M^f < 1$) e super-Alfvénico ($M^A > 1$). Este tipo de onda de choque gera uma refração que afasta as linhas do campo magnético do vetor normal \mathbf{n} ($\alpha_1 < \alpha_2$), veja-se a Fig. 2.5e.

Na Fig. 2.5d está representada uma onda de choque lenta. Esta caracteriza-se por assumir a montante um escoamento super-lento ($M^s > 1$) e sub-Alfvénico ($M^A < 1$). A jusante, o escoamento deve ser do tipo sub-lento ($M^s < 1$). Da mesma forma que na onda de choque rápida, este tipo de descontinuidade leva a uma refração do campo magnético. Contudo, a refração em causa possui a particularidade de aproximar as linhas de campo ao vetor normal à superfície descontínua ($\alpha_1 > \alpha_2$). Nas ondas de choque intermédias, o escoamento é super-Alfvénico a montante e sub-Alfvénico a jusante. Neste tipo de descontinuidade, o sinal da componente tangencial muda e, conseqüentemente, o campo magnético assume direções opostas nas duas regiões da descontinuidade, veja-se a Fig. 2.5f.

Como não podia deixar de ser, no quadro das descontinuidades MHD, existem alguns casos limite. As descontinuidades perpendiculares representam o caso limite das descontinuidades tangenciais quando estas assumem um ângulo de rotação nulo. As ondas de choque paralelas, também conhecidas como ondas de choque hidrodinâmicas, são aquelas que não provocam qualquer variação no campo magnético, veja-se a Fig. 2.5i. Na Fig. 2.5h está representado o caso limite da onda de choque rápida, a denominada onda de choque rápida do tipo *switch-on*. Esta denominação está ligada ao facto de estas descontinuidades gerarem por si só, a jusante da superfície descontínua, uma componente tangencial do campo magnético, $B_{t,2} \neq 0$. Isto apesar de se verificar que a componente tangencial do campo magnético a montante é nula ($B_{t,1} = 0$). Por seu lado as descontinuidades lentas do tipo *switch-off* fazem exatamente o

oposto. Repare-se na Fig. 2.5g que, a montante, estas desligam a componente tangencial do campo magnético ($B_{t,1} \neq 0 \rightarrow B_{t,2} = 0$).

2.5 A formulação resistiva do sistema de equações MHD

A conservação do fluxo magnético implica que o fluido de trabalho seja um condutor ideal de eletricidade. Todavia, sabemos que na maior parte das aplicações em engenharia, as equações na sua forma ideal não nos permitem descrever de uma forma precisa a física do problema. Estas equações devem ser complementadas com os termos dissipativos, que nos permitem obter a informação sobre a camada limite magnética e viscosa. Contudo, a maior alteração que a introdução da resistividade vai provocar ocorre a um nível fundamental. Isto porque vai permitir um desacoplamento entre as linhas de campo magnético e o escoamento (Boyd e Sanderson, 2003). Sabe-se que, mesmo que os coeficientes de dissipação sejam de valor reduzido, o seu valor em termos significativos poderá não o ser. Isto porque vai introduzir um fator multiplicativo no gradiente de uma grandeza física, o que na camada limite pode produzir um efeito importante capaz de influenciar a região de escoamento completamente desenvolvido.

O sistema de equações MHD na sua forma resistiva, com a inclusão dos termos viscosos e de condução de calor, vem dado por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{U} \mathbf{U} + \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathcal{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} - \tau_{visc} \right] = 0, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} - (k \nabla T) - (\tau_{visc} \cdot \mathbf{U}) \right] - \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \eta \mathbf{j}) = 0, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{U}) + \nabla \times (\eta \mathbf{j}) = 0, \quad (2.64)$$

onde k é a condutividade térmica e η representa o coeficiente de resistividade elétrica. O tensor representativo dos efeitos viscosos em escoamento compressível vem dado por:

$$\tau_{visc} = - \left(\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{U} \right) \mathcal{I} + \mu \left[\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right], \quad (2.65)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica ou absoluta do fluido condutor.

Vamos agora verificar que é possível transformar este sistema numa forma aproximadamente conservativa, com a exceção de alguns termos que normalmente possuem uma contribuição dissipativa muito reduzida. Após a introdução da resistividade elétrica nas equações de governo, podemos verificar que as equações da continuidade (2.61) e da quantidade de movimento (2.62) se mantêm inalteradas. No entanto, a equação da energia total recebe uma nova contribuição dada pelo aquecimento por efeito de Joule. A equação da indução também é modificada devido ao valor finito de resistividade que é introduzido pela lei de Ohm. Através da Lei de Ampère (Eq. 2.10), o último termo da equação (2.63) pode ser reformulado em termos de \mathbf{B} ,

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \eta \mathbf{j}) = \eta \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.66)$$

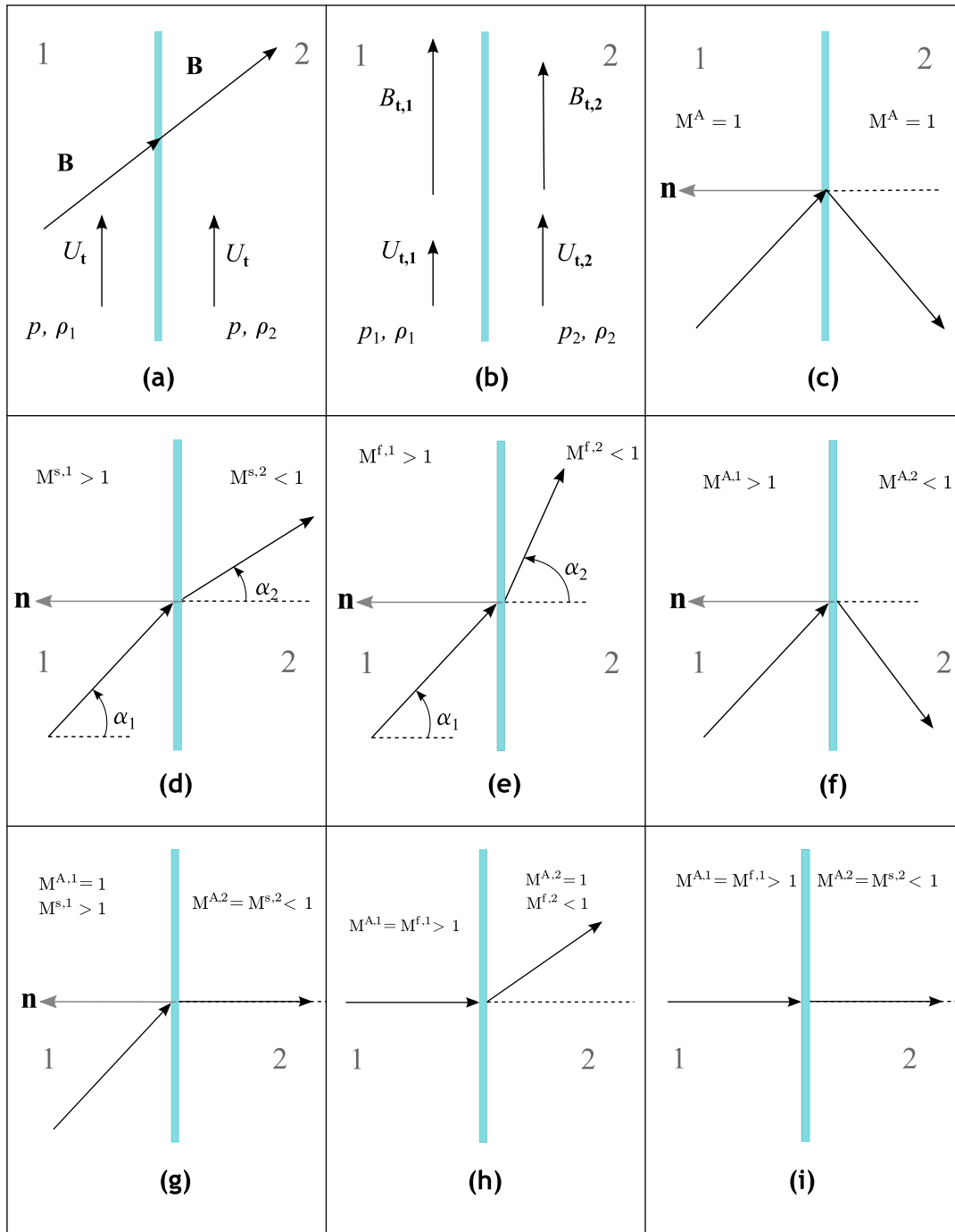


Figura 2.5: Propriedades das descontinuidades MHD. O vetor normal à superfície da descontinuidade é dado por \mathbf{n} . a) Descontinuidade de contacto; b) Descontinuidade tangencial; c) Descontinuidade rotacional; d) Onda de choque lenta; e) onda de choque rápida; f) onda de choque intermédia; g) onda de choque do tipo *switch-off*; h) onda de choque rápida do tipo *switch on*; i) onda de choque hidrodinâmica. Adaptado de Goedbloed et al. (2010) e Sterck et al. (1998).

Relembre-se que na dedução das equações foram escolhidas dimensões para \mathbf{B} de forma a que a permeabilidade magnética no vácuo fosse igual à unidade ($\mu_0 = 1$). Utilizando identidades vetoriais e novamente a lei de Ampère, o último termo da equação (2.64) vem dado por:

$$\nabla \times (\eta \mathbf{J}) = \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \stackrel{(A.4)}{=} -\eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.67)$$

Note-se que a introdução da resistividade nas equações poderá até de certa forma simplificar o modelo físico-matemático. Isto porque, o acoplamento entre as equações vai enfraquecendo à medida que o valor para a resistividade aumenta. Este desacoplamento vai permitir que o campo de velocidades se mova de forma separada do campo magnético. Facilmente nos apercebemos que no caso limite as linhas do campo magnético não sofrem qualquer alteração com o movimento do fluido. Nesta situação a equação da indução reduz-se a uma equação para a difusão de \mathbf{B} e as contribuições físicas do campo magnético para o sistema de equações podem ser adicionadas como termos fonte.

Como já nos apercebemos, o efeito da resistividade é o de introduzir um termo de difusão no campo magnético com um coeficiente dissipativo dado por $\Gamma_\eta = \eta/\mu_0 [\text{m}^2/\text{s}]^2$. A escala temporal, τ_η , associada a este termo de segunda ordem vem dada por:

$$\tau_\eta = \frac{L^2}{\Gamma_\eta}, \quad (2.68)$$

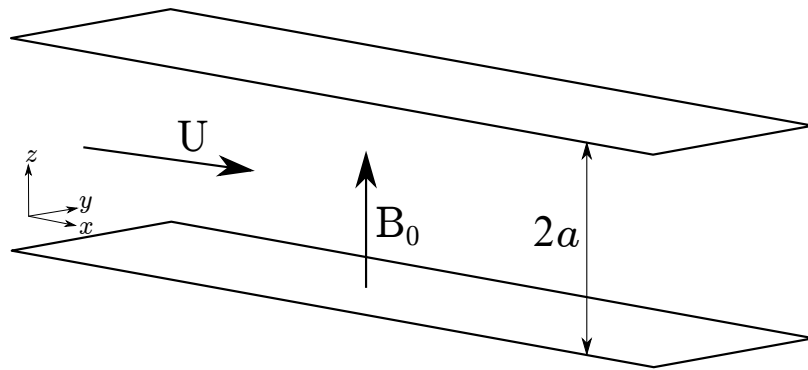
onde L representa o comprimento característico. Esta escala temporal representa um papel de extrema importância na escolha do método de solução das equações MHD. De tal forma que, se o seu valor for muito reduzido, os esquemas que normalmente são utilizados na resolução das equações ideais já não são aplicáveis para a resolução do sistema de equações resistivas. Na secção 4.2.3 vamos abordar algumas das possíveis soluções para este problema.

2.5.1 Efeitos da resistividade elétrica e viscosidade em escoamento MHD

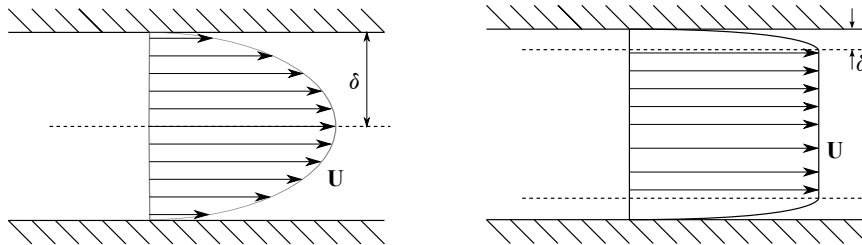
A viscosidade define-se a partir da resistência que um determinado fluido oferece à deformação quando sujeito a tensões de corte. Também sabemos que a condição de aderência de fluido viscoso obriga a que na parede a velocidade do fluido assuma a velocidade dessa mesma parede. Claro que no caso de a parede se encontrar estacionária, a velocidade do fluido nessa superfície deverá ser obrigatoriamente igual a zero. Esta condição de fronteira é conhecida no domínio da dinâmica dos fluidos como a condição de não-escorregamento. Resta então saber como é que o campo de velocidades vai reagir a esta condição, e como deve evoluir até sair da camada limite. O perfil de velocidade obtido é resultante das derivadas de segunda ordem que são introduzidas na equação de quantidade de movimento. Estes termos, juntamente com a condição de fronteira de não-escorregamento, vão dar origem a um perfil de velocidades que assume uma forma parabólica numa dada região. A região do escoamento que engloba este perfil característico da velocidade é denominada camada limite laminar, e a sua espessura pode ser calculada em função da viscosidade.

Em escoamento MHD resistivo e laminar ocorre uma situação em tudo semelhante à que foi apresentada no parágrafo anterior. Contudo, neste caso a resistividade também vai desempe-

²A permeabilidade magnética é aqui (re)-inserida por uma questão de conveniência. Relembre-se que as restantes equações estão deduzidas com unidades para \mathbf{B} de forma a que $\mu_0 = 1 [\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \text{A}^{-2}]$.



(a)



(b)

(c)

Figura 2.6: Escoamento de tipo camada limite de Hartmann. a) Configuração utilizada no cálculo do escoamento de Hartmann. b) Perfil de velocidade a um número de Hartmann reduzido; c) Perfil de velocidade a um número de Hartmann elevado.

nhar um papel importante na determinação da espessura da camada limite. Um dos trabalhos mais reconhecidos nesta matéria foi desenvolvido por Hartmann (1937), onde foram deduzidas expressões analíticas que permitem calcular a espessura da camada limite em função do campo magnético imposto e das propriedades de transporte. A camada limite de Hartmann, δ_{Ha} , ocorre quando um campo magnético é imposto na direção transversal ao escoamento. A interação entre a corrente elétrica induzida pelo escoamento e o campo imposto, vai resultar numa força de Lorentz que se deverá opor ao movimento do escoamento. Esta força tende a modificar o perfil de velocidades, e será junto à parede que este perfil vai sofrer uma maior alteração, esta situação encontra-se exemplificada na Fig. 2.6.

Vamos considerar um caso particular inicialmente sugerido por Hartmann (1937), que compreende um escoamento de um fluido condutor entre dois planos eletricamente isolados. Ambos os planos possuem um comprimento infinito e encontram-se localizados a uma distância $z = \pm a$. O escoamento vai então ser sujeito a um campo magnético imposto na direção normal a ambos os planos, veja-se a Fig. 2.6a. A direção do escoamento é unidirecional, uma vez que apenas possui uma componente do campo de velocidades diferente de zero (neste caso U_x) e perpendicular ao campo magnético imposto, B_0 . Como consequência, a única componente induzida do campo magnético, dada pela equação da indução, também será na direção paralela a ox . O gradiente de pressão é também unidirecional (paralelo a ox), e vai gerar uma força de sentido positivo por unidade de volume ($\nabla p = F$). Este caso é conhecido como escoamento de

Hartmann e possui uma solução analítica dada por (Davidson, 2001):

$$U = V_0 \left[1 - \frac{\cosh(z/\delta)}{\cosh(a/\delta)} \right] = V_0 \left[1 - \frac{\cosh(H_a z/a)}{\cosh(H_a)} \right], \quad (2.69)$$

onde H_a representa o número de Hartmann que vamos apresentar em mais pormenor na secção 2.6 e V_0 vem dado por (Dousset, 2009):

$$V_0 = \frac{1}{H_a^2} \left[1 + H_a \left(\frac{E_z}{aF} \sqrt{\frac{\mu}{\eta}} \right) \right], \quad (2.70)$$

onde E_z é a componente transversal do campo elétrico.

Vamos agora analisar os dois casos limite que ocorrem quando $H_a \rightarrow 0$ ou quando $H_a \rightarrow \infty$. O primeiro dos dois ($H_a \rightarrow 0$) dá origem a um escoamento com um perfil de velocidades parabólico conhecido pelo perfil de velocidades de Poiseuille, veja-se a Fig. 2.6b. O segundo caso limite segue um decaimento exponencial da velocidade nas camadas limites de Hartmann, veja-se a Fig. 2.6c.

Existem mais dois casos com solução analítica onde podem ser estudados os efeitos da resistividade na espessura da camada limite. O primeiro caso é conhecido como o problema de Shercliff (Shercliff, 1953). Este pode ser visto como a versão 3D do escoamento de Hartmann, uma vez que compreende um escoamento num canal retangular onde todas as paredes se encontram eletricamente isoladas. O segundo caso é conhecido como o escoamento de Hunt (Hunt, 1965), e diferencia-se dos dois primeiros problemas por possuir duas paredes perfeitamente condutoras e duas paredes eletricamente isoladas.

Como podemos verificar as expressões aqui utilizadas são baseadas no cosseno hiperbólico. Contudo, Ni et al. (2007a) verificaram que esta formulação falhava em casos onde o número de Hartmann fosse muito elevado. De forma a contornar esta situação, propuseram uma formulação baseada em funções exponenciais. Todavia, as funções por eles publicadas possuem alguns erros que foram posteriormente corrigidos por Planas et al. (2011). Ambos os casos de teste, de Shercliff e Hunt, foram utilizados no processo de validação do código e podem ser encontrados na secção 5.2.

2.6 Forma adimensional das equações MHD

Já foi referido no capítulo introdutório que as equações MHD podem ser aplicadas a uma extensa gama de fenómenos físicos. Estes vão desde escoamentos de plasmas com comprimentos de escala laboratoriais (ex: *tokamak*, onde $L_0 = 20$ [m]; $B_0 = 3$ [T]; $t_0 = 3 \times 10^{-6}$ [s]), até escoamentos onde os comprimentos de escala são de uma dimensão planetária (ex: magneto-esfera terrestre, onde $L_0 = 4 \times 10^7$ [m]; $B_0 = 3 \times 10^{-5}$ [T]; $t_0 = 6$ [s]) ou mesmo astronómica (ex: galáxia $L_0 = 10^{21}$ [m]; $B_0 = 10^{-8}$ [T]; $t_0 = 10^{15}$ [s]). Assim, convém demonstrar que as equações MHD são independentes da escala com respeito a três parâmetros fundamentais, nomeadamente: o comprimento de escala, L_0 ; a magnitude do campo magnético, B_0 ; e a escala temporal que pode ser obtida através da velocidade de Alfvén,

$$U_0 \equiv c_0^A \equiv \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (2.71)$$

que nos permite obter:

$$t_0 = \frac{L_0}{U_0}, \quad (2.72)$$

onde ρ_0 e U_0 são a massa volúmica e a velocidade de referência. Através deste conjunto de parâmetros podemos adimensionalizar as variáveis independentes e os operadores diferenciais a estas associados,

$$\bar{L} = \frac{L}{L_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0} \implies \bar{\nabla} = L_0 \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = t_0 \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.73)$$

as variáveis dependentes na sua forma adimensional vêm dadas por:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}}{U_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_0 U_0^2}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{B_0}. \quad (2.74)$$

Caso estejamos perante o sistema de equações na sua forma resistiva, também devemos adimensionalizar as propriedades de transporte,

$$\bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}. \quad (2.75)$$

Os sistemas de equações (2.30-2.33) e (2.61-2.64) podem ser reescritos numa forma adimensional se utilizarmos as transformações aqui apresentadas. Esta secção serviu apenas para demonstrar a independência de escala que caracteriza as equações MHD. As equações que foram implementadas no código numérico que vai ser proposto na secção 4.2 seguem uma formulação dimensional.

2.6.1 Parâmetros adimensionais

A formulação ideal das equações MHD, apresentada na secção 2.4, é obtida se desprezarmos os termos resistivos das equações (2.61-2.64). Os termos a eliminar representam o aquecimento por efeito de Joule presente na equação (2.63) e a difusão do campo magnético, presente na equação (2.64). Esta simplificação das equações é justificada para o caso em que o parâmetro adimensional, dado pelo número de *Reynolds* magnético, possui um valor bastante significativo,

$$R_m = \frac{\mu_0 L_0 U_0}{\eta_0} \gg 1. \quad (2.76)$$

Este parâmetro adimensional também pode ser visto como uma relação entre os termos convectivos e difusivos presentes na equação da indução. No caso de estarmos perante um $R_m \ll 1$, podemos desprezar o termo convectivo da equação da indução e tratar cada equação de governo de forma independente. Uma outra forma de interpretar fisicamente o valor de R_m , é através de uma comparação entre o valor significativo do campo magnético imposto quando comparado com o campo magnético induzido. Assim, no caso de se assumir um R_m reduzido, podemos desprezar o campo magnético associado às correntes induzidas quando comparado com o campo magnético imposto. O que implica que uma qualquer perturbação na velocidade não vai afetar o campo magnético inicial.

A relação entre as escalas temporais ideais e resistivas dá origem ao número de *Lundquist*:

$$L_u = \frac{\tau_A}{\tau_\eta} = \mu_0 \frac{L_0 c_0^A}{\eta_0}. \quad (2.77)$$

Como podemos verificar, este parâmetro adimensional também nos permite relacionar os termos difusivos com os termos convectivos, uma vez que $L_u \rightarrow \infty$ para $\eta \rightarrow 0$. Normalmente na definição de problemas de escoamento turbulento deve-se optar pelo número de Reynolds magnético, uma vez que este possui o valor mais significativo. Contudo, no estudo de instabilidades resistivas e na ausência de escoamento deve-se optar pelo número de *Lundquist* (Goedbloed e Poedts, 2004). A relação entre ambos dá origem ao número de Mach de Alfvén:

$$\frac{R_m}{L_u} = \frac{U_0}{c_0^A} = M^A. \quad (2.78)$$

Um outro grupo adimensional é dado pelo parâmetro de interação,

$$N_I = \frac{B_0^2 L_0}{\eta_0 \rho_0 U_0}. \quad (2.79)$$

Este parâmetro permite relacionar as forças de inércia com a força de Lorentz. Também é possível relacionar a força de Lorentz com as forças de origem viscosa através do número de Hartmann,

$$H_a = B_0 L_0 \left(\frac{1}{\eta_0 \mu_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.80)$$

Em escoamentos de plasmas é normal calcular um outro parâmetro adimensional dado por:

$$\beta = \frac{2p_0}{B_0^2}. \quad (2.81)$$

Aqui pretende-se relacionar as forças de pressão com as forças magnéticas. Como tal, para um $\beta \gg 1$ o escoamento é governado pelas forças de pressão, enquanto que para um $\beta \ll 1$ o escoamento é governado pelas forças de origem eletromagnética.

2.7 Modelação numérica de tubeiras MPD

Os plasmas são caracterizados por três parâmetros fundamentais (Bellan, 2006), nomeadamente: a densidade de partículas, dada pelo número de partículas em cada m^3 de plasma; a temperatura de cada uma das espécies (iões e eletrões), normalmente medida em eV (*electron-volt*)³; e pelo campo magnético em estado estacionário, medido em T. Nas próximas secções vamos analisar como é que estes parâmetros interagem entre si de forma a descrever a física do escoamento de plasmas. Note-se que a física de plasmas, devido à sua enorme complexidade, está longe de ser uma ciência exata. Em lugar de um formalismo temos um conjunto de “pontos de vista” desenvolvidos para analisar um determinado comportamento. Nesta secção vamos restringir ao ponto de vista dos sistemas de propulsão elétrica, e seremos ainda obrigados a restringir mais a nossa análise para o ponto de vista das tubeiras MPD. Na secção 2.7 vai ser

³1 eV é uma unidade de energia igual a $1,60217653(20) \times 10^{-19}$ J que pode ser convertida em K através da sua relação com a constante de Boltzmann, $k_B = 1,3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K: $\frac{1\text{eV}}{k_B} = 11604,505(20)$ K.

realizada uma análise aos vários modelos MPD disponíveis na literatura, onde vamos analisar as diferentes formulações da equação da indução que podem ser utilizadas na modelação de plasmas reais. Vão também ser apresentadas as equações que podem ser utilizadas para o cálculo da energia interna das espécies envolvidas. Os modelos que normalmente são utilizados para o cálculo das propriedades de transporte vão ser apresentados na secção 2.7.3. Na secção 2.7.4, vai ser demonstrado como é que uma equação de estado para gases reais pode ser implementada num algoritmo do tipo PBA. Nesta secção, de forma a restabelecer as dimensões SI, vamos voltar a introduzir a permeabilidade magnética nas equações de governo.

2.7.1 Equação da indução

Na modelação de plasmas em tubeiras MPD temos de ter em conta um parâmetro que deve ser adicionado à equação da indução. Este é conhecido como o parâmetro de Hall e é um resultado direto das colisões entre partículas. Note-se que o resultado das colisões faz com que as partículas se movam com uma velocidade diferente do escoamento. Esta nova velocidade obriga à introdução de um novo termo (a sublinhado) na lei de Ohm,

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\eta} (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) - \underline{\underline{\frac{\Omega}{B} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})}} + \underline{\underline{\mathbf{j}_{iões}}}, \quad (2.82)$$

onde Ω representa o parâmetro de Hall que é o resultado da relação entre a frequência ciclotrónica dos eletrões (ω_{ce}) e a frequência de colisão entre os eletrões e as espécies pesadas ($\sum \nu_{es}$) (Huba, 2011; Boyd e Sanderson, 2003; Bellan, 2006),

$$\Omega = \frac{\omega_{ce}}{\sum \nu_{es}} = 9,6 \times 10^{16} \left(\frac{T_e^{3/2} B}{n_e \ln \Lambda} \right), \quad (2.83)$$

onde n_e representa o número de partículas por metro cúbico, B é a magnitude local do campo magnético e $\ln \Lambda$ representa o logaritmo de Coulomb. Falta agora encontrar uma forma de estimar a quantidade Λ . De acordo com Goldston e Rutherford (1995) esta quantidade pode ser representada pelo número de partículas presentes na esfera de *Debye* que possui um diâmetro aproximadamente igual a $\lambda_D \approx (\epsilon_0 k_B T_e / n_e q^2)^{1/2}$:

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{12\sqrt{2}\pi n \lambda_D^3}{Z} \right), \quad (2.84)$$

se considerarmos uma fração de ionização média local $Z = n_e/n = 1$, a equação (2.84) vem:

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{12\sqrt{2}\pi (k_B \epsilon_0 T_e)^{3/2}}{q^3 n_e^{1/2}} \right), \quad (2.85)$$

onde ϵ_0 representa a permissividade elétrica do vácuo e q é a carga elétrica de um eletrão. O efeito de Hall vai levar à adição de um novo termo na equação da indução. Através da lei de Ampère este termo (a sublinhado) pode ser reescrito em termos de \mathbf{B} ,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{U}) - \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times \left[\underline{\underline{\frac{\eta \Omega}{\mu_0 B} (\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B})}} \right] - \nabla \times \eta \underline{\underline{\mathbf{j}_{iões}}} = 0. \quad (2.86)$$

Após uma análise da equação (2.83) facilmente se verifica que o termo de Hall pode ser negligenciado se a frequência de colisão entre as espécies ($\sum \nu_{es}$) for muito maior do que a frequência ciclotrónica dos eletrões (ω_{ce}) (Bellan, 2006). No entanto, Sankaran (2005) verificou que para inúmeros casos de interesse, e para o caso dos eletrões que são os principais transportadores de corrente, o parâmetro de Hall é de $\mathcal{O}(1)$ e como tal é normalmente adicionado à equação da indução.

Existe outro parâmetro que pode ser adicionado à equação da indução, este representa uma contribuição para a corrente dada por um fenómeno que é conhecido como escorregamento de iões,

$$\mathbf{j}_{iões} = (1 - \alpha^2) \frac{\Omega \Omega_i}{B^2} [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (2.87)$$

onde α representa a fração de ionização ($0 \leq \alpha \leq 1$). A variável Ω_i representa o parâmetro de Hall para os iões que deve ser calculado com uma expressão equivalente à equação (2.83), deduzida a partir da relação entre a frequência ciclotrónica dos iões e a frequência de colisão entre os iões e as partículas neutras.

O fenómeno de escorregamento de iões ocorre porque a quantidade de movimento das partículas neutras não pode ser afetada pelas forças eletromagnéticas, mas apenas através das sucessivas colisões com os iões. Em condições extremas, onde a densidade de partículas é muito reduzida e os campos magnéticos são muito intensos, as colisões entre as partículas neutras e os iões podem ser quase inexistentes, de tal forma que podem levar a um desacoplamento entre a dinâmica dos gases e o movimento dos iões (Myers et al., 1991; Sankaran, 2005). Assim, os iões podem seguir as suas próprias trajetórias sem imprimirem aceleração ao escoamento principal o que vai resultar numa redução drástica da eficiência da tubeira. Ainda assim, este é um fenómeno extremamente raro e como tal é normalmente negligenciado nos modelos desenvolvidos para a análise de tubeiras MPD.

2.7.2 Equações de energia para multi-espécies

Vários modelos consideram o plasma como um meio contínuo, onde se assume que uma única equação de energia é suficiente para descrever a física do problema (Sleziona et al., 1988; Funaki et al., 1997). Contudo, sabe-se que esta hipótese pode levar a resultados irrealistas devido a uma análise incorreta das propriedades de transporte, que são muito sensíveis às variações de temperatura dos iões e dos eletrões (Myers et al., 1991). A discrepância entre as temperaturas das espécies é um fenómeno muito frequente no regime de operação das tubeiras MPD, e sugere que o sistema não se encontra num estado de equilíbrio térmico. Desta forma, parece ser de uma extrema importância adicionar duas novas equações ao sistema MHD, de forma a calcular a energia interna dos eletrões e dos iões.

A equação global para a energia interna de um fluido condutor em movimento vem dada por:

$$\frac{\partial \rho e_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_i \mathbf{U}) + p \nabla \cdot \mathbf{U} - \eta j^2 - \nabla \cdot (k \nabla T) = 0. \quad (2.88)$$

Na modelação de plasmas a energia interna global pode ser calculada através da soma entre as energias internas de cada uma das espécies envolvidas (Sankaran, 2005),

$$e_i = e_{i,e} + e_{i,i}, \quad (2.89)$$

e que o termo relativo à condutividade térmica pode ser dado pela soma da contribuição dos eletrões e dos iões:

$$k\nabla T = k_e\nabla T_e + k_i\nabla T_i. \quad (2.90)$$

As equações de energia interna para os eletrões e para os iões vêm finalmente dadas por:

$$\frac{\partial \rho e_{i,e}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_{i,e} \mathbf{U}) + p_e \nabla \cdot \mathbf{U} - \eta j^2 - \nabla \cdot (k_e \nabla T_e) + \Delta \dot{e}_{ie} = 0, \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial \rho e_{i,i}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_{i,i} \mathbf{U}) + p_i \nabla \cdot \mathbf{U} - \nabla \cdot (k_i \nabla T_i) - \Delta \dot{e}_{ie} = 0. \quad (2.92)$$

Repare-se, que na dedução destas duas equações considerou-se que o aquecimento por efeito de Joule (ηj^2) apenas afeta aos eletrões. O último termo do lado esquerdo de ambas equações representa as trocas de energia resultantes das colisões entre espécies, e pode ser estimada da seguinte forma (Goldston e Rutherford, 1995):

$$\Delta \dot{e}_{ie} = \frac{3n_e m_e \nu_{ei}}{M_i} k_B (T_e - T_i). \quad (2.93)$$

2.7.3 Propriedades de transporte

Nesta secção vão ser apresentadas as propriedades de transporte mais importantes quando pretendemos modelar escoamento de plasmas em tubearias magnetoplasmadinâmicas. Como já foi referido na secção anterior, as propriedades de transporte são extremamente sensíveis às variações de temperatura. Vamos aqui demonstrar que, de facto, o campo de temperatura é um parâmetro crucial no cálculo da condutividade eléctrica, da condutividade térmica e da viscosidade.

2.7.3.1 Resistividade eléctrica

Quando um plasma se encontra sujeito a um campo eléctrico \mathbf{E} , os eletrões e os iões tendem a acelerar em direcções opostas (Bellan, 2006). Como é óbvio, esta trajetória oposta vai levar à criação de uma velocidade relativa, $\mathbf{U}_{rel} = (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i)$, entre as duas espécies. Na ausência de colisões, os eletrões, de massa muito inferior aos iões, iriam acelerar indefinidamente. A aceleração iria ser tão pronunciada que, mesmo que o plasma fosse sujeito a um campo de voltagem infinitesimal, este geraria uma corrente eléctrica de grande intensidade. Contudo, as colisões entre os iões e os eletrões tendem a dissipar esta quantidade de movimento relativa até se atingir um estado estacionário, e desta forma limitam a corrente que pode ser gerada pelo campo eléctrico imposto. Esta relação entre o campo eléctrico imposto e as colisões entre espécies vai levar à criação de um parâmetro extremamente importante na modelação de plasmas, nomeadamente a resistividade eléctrica η ou a sua inversa, também conhecida como condutividade eléctrica $\sigma = 1/\eta$.

Portanto já vimos que a condutividade eléctrica pode ser relacionada com as colisões entre espécies. Uma forma de medir essas colisões é através da frequência de colisões do tipo electrão-ião, ν_{ei} . Podemos então chegar à seguinte expressão, que relaciona as colisões entre espécies com o campo eléctrico imposto Goldston e Rutherford (1995),

$$\frac{q}{m_e} \mathbf{E} = -\nu_{ei} \mathbf{U}_{rel}. \quad (2.94)$$

A corrente elétrica vem dada por:

$$\mathbf{j} = -n_e q \mathbf{U}_{rel}, \quad (2.95)$$

assim a equação (2.94) pode ser reescrita,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad (2.96)$$

logo,

$$\sigma = \frac{q^2 n_e}{m_e \langle \nu_{ei} \rangle}. \quad (2.97)$$

A média $\langle \nu_{ei} \rangle$ aparece na equação (2.97) uma vez que a frequência de colisões entre elétrons e iões depende da velocidade de cada um dos elétrons. Como tal deve ser aplicada uma média sobre uma determinada distribuição de velocidades de elétrons. Esta é conhecida como a condutividade de *Spitzer* e o seu valor aproximado pode ser calculado da seguinte forma (Lapointe, 1991):

$$\sigma = 1,53 \times 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{\ln \Lambda}. \quad (2.98)$$

Note-se que o valor da condutividade é proporcional ao valor de $T_e^{3/2}$, o que significa que uma maior temperatura dos elétrons implica uma maior condutividade elétrica (menor resistividade).

Quando o escoamento de plasma se encontra sujeito a campos magnéticos ou elétricos externos, as propriedades de transporte são função da direção desses mesmos campos. Como tal, a condutividade elétrica deixa de se comportar como um campo escalar e assume a forma de um tensor, veja-se a lei de Ohm,

$$\mathbf{j} = \overleftrightarrow{\sigma} \mathbf{E}. \quad (2.99)$$

O tensor relativo à condutividade elétrica vem dado pela seguinte expressão (Udrea, 1999):

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \sigma_{\parallel} \mathbf{b}\mathbf{b} + \sigma_H \mathbf{b} \times \mathcal{I} + \sigma_{\perp} (\mathcal{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}), \quad (2.100)$$

onde \mathbf{b} representa o vetor unitário com a mesma direção do campo magnético e σ_{\parallel} é a resistividade paralela a esse mesmo campo magnético. σ_H é a resistividade de Hall e σ_{\perp} representa a resistividade transversal ao campo magnético. Se assumirmos um campo magnético na direção oz , podemos facilmente escrever a lei de Ohm na sua forma matricial (Miller, 1990),

$$\begin{bmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

que vai resultar nas seguintes componentes para a corrente elétrica:

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_{\perp} E_x - \sigma_H E_y \\ j_y &= \sigma_{\perp} E_y + \sigma_H E_x \\ j_z &= \sigma_{\parallel} E_z \end{aligned} \quad (2.102)$$

Repare-se que a condutividade transversal controla a corrente elétrica nas direções perpendicu-

lares ao campo magnético, e que o valor paralelo da condutividade apenas governa a corrente elétrica na direção paralela ao campo magnético. Por seu lado, a resistividade de Hall governa a corrente nas direções perpendiculares ao campo magnético e elétrico. Um valor aproximado para a condutividade elétrica pode ser obtido da seguinte forma (Miller, 1990),

$$\sigma_{\parallel} = \frac{q^2 n_e}{m_e \langle \nu_{ei} \rangle}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{\sigma_{\parallel}}{1 + \Omega^2}, \quad \sigma_H = \frac{\Omega \sigma_{\parallel}}{1 + \Omega^2}. \quad (2.103)$$

A resistividade pode ser calculada através da matriz inversa relativa ao tensor da condutividade elétrica,

$$\overleftrightarrow{\eta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2} & \frac{\sigma_H}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2} & 0 \\ -\frac{\sigma_H}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2} & \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{\parallel}} \end{bmatrix}, \quad (2.104)$$

de onde se obtém,

$$\eta_{\parallel} = \frac{1}{\sigma_{\parallel}}, \quad \eta_{\perp} = \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2}, \quad \eta_H = -\frac{\sigma_H}{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_H^2}. \quad (2.105)$$

2.7.3.2 Viscosidade

Apesar de ser uma questão já antiga em tubeiras MPD, a inclusão da viscosidade no modelo físico-matemático é ainda uma questão de investigação em aberto. Nos anos 80 a viscosidade era normalmente negligenciada, no entanto Heimerdinger (1988) demonstrou que quando um plasma se encontra num estado de equilíbrio a sua viscosidade varia drasticamente numa pequena escala de temperatura. Este autor demonstrou também que para temperaturas de plasma suficientemente elevadas, tal como acontece em MPDs com efeito de Hall, a viscosidade é negligenciável. No entanto, se a viscosidade for considerada na análise, o seu efeito mais importante ocorrerá junto do cátodo onde o escoamento de plasma é forçado na direção normal à parede pela componente radial da força de Lorentz.

Alguns anos mais tarde os efeitos viscosos começaram a ser incluídos nos vários modelos computacionais. Miller (1990) analisou numericamente os efeitos da viscosidade e verificou que esta propriedade pode influenciar drasticamente o desempenho em algumas geometrias. Lapointe (1991) também contabilizou a viscosidade no seu modelo e relacionou-a com a força de propulsão em função de j^2/\dot{m} . Verificou que as perdas viscosas aumentavam com o aumento de j^2/\dot{m} e redução do caudal. LaPointe analisou várias geometrias e concluiu que os efeitos viscosos só representavam 1% da força de propulsão, sendo que o valor máximo obtido foi de 6%. Niewood (1993) verificou que a viscosidade pode ser responsável pelo aumento da temperatura nos iões e nas partículas neutras. Mikellides et al. (2000) verificaram que, para as tubeiras MPD de campo imposto, os efeitos viscosos possuem alguma significância, uma vez que limitam a velocidade rotacional e aumentam de forma substancial a temperatura dos iões. Mais recentemente, Sankaran (2005) referiu que não existe nenhuma prova empírica que mostre que os efeitos da viscosidade influenciam o desempenho das tubeiras de campo induzido, e que as temperaturas elevadas produzidas por estes sistemas levam a um normal negligenciamento da viscosidade.

A viscosidade dinâmica de um plasma num estado de total ionização pode ser obtida a partir da

seguinte expressão (Sankaran, 2005):

$$\mu = 0,27 \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 \sqrt{M_i} (k_B T)^{5/2}}{Z^2 q^4 \ln \Lambda}, \quad (2.106)$$

onde M_i representa a massa de um átomo de árgon e Z representa a fração de ionização média local.

2.7.3.3 Condutividade térmica

Os coeficientes de condutividade térmica para os eletrões e iões podem ser estimados através das seguintes expressões (Miller, 1990; Sankaran et al., 2005):

$$k_e = 3,20 \frac{n_e k_B^2 T_e}{m_e \sum \nu_{es}}; \quad (2.107)$$

$$k_i = \sqrt{\frac{\pi k_B^3 T_i}{8M_i}} \left(\frac{n_i}{n_i Q_{ii} + n_n Q_{in}} \right); \quad (2.108)$$

onde n_i é a quantidade de iões por m^3 de plasma. Os parâmetros Q_{ii} e Q_{in} representam, respetivamente, a área da secção resultante da colisão entre iões (ii) e entre iões e neutros (in).

2.7.4 Equação de estado

Para a gama de temperaturas de interesse em modelação de tubeiras MPD a equação de estado para gases ideais deixa de ter qualquer significado físico. Na Fig. 2.7a está representado um gráfico que relaciona a evolução da temperatura, para o árgon, em função do inverso da compressibilidade $\psi^{-1} = p/\rho$. Como podemos verificar, a partir dos 10000K existe uma enorme discrepância entre o comportamento ideal e real. Para um gás ideal a temperatura relaciona-se de forma linear com o inverso da compressibilidade,

$$\psi^{-1} = RT, \quad (2.109)$$

onde R representa a constante do plasma, que pode ser obtida através do rácio entre a constante de Boltzmann e a massa do ião, $R = k_B/M_i$. Verificamos que esta relação linear resulta num declive da temperatura que não é de todo satisfatório. Também já foi referido que as propriedades de transporte são muito sensíveis às variações de temperatura. Repare-se que a equação (2.98) impõe que condutividade elétrica aumente com o valor de $T^{3/2}$. Este é um ponto crucial na modelação de plasmas, uma vez que uma estimativa incorreta da condutividade elétrica pode alterar por completo o carácter da equação da indução e o resultante sistema de equações. Posto isto, parece ser crucial introduzir um modelo de gás real no nosso sistema de equações.

O modelo de gás real a ser implementado baseia-se nos dados obtidos por Sparks e Fischel (1971). Este modelo foi implementado por Sankaran (2001) no quadro de algoritmos do tipo DBA e vai ser aqui adaptado para uma inclusão num método PBA. A função matemática na qual

Tabela 2.1: Coeficientes para o cálculo da temperatura em função de p/ρ .

Intervalo de p/ρ	K_0	K_1	K_2
$p/\rho \leq 2994000$	0	0,00599	$-7,18 \times 10^{-10}$
$2994000 < p/\rho \leq 5507000$	7935	0,00119	0
$5507000 < p/\rho \leq 9827000$	0	0,00317	$-9,79 \times 10^{-11}$
$9827000 < p/\rho \leq 18290000$	12460	0,00094	0
$p/\rho > 18290000$	14820	0,000811	0

Tabela 2.2: Coeficientes para o cálculo do γ em função de T .

Intervalo de T	K_3	K_4	K_5	K_6
$8000 < T < 13000$	1,112166458	0,529955607	8050,606514	1318,851134
$13000 < T < 40000$	1,105400732	0,025266593	15142,82094	2394,061632

este modelo se baseia encontra-se presente na Fig. 2.7a, como podemos ver para gases reais esta função possui diferentes ramos,

$$\begin{cases} T = \left(\frac{1}{R}\right) \frac{p}{\rho}, & \text{se } \frac{p}{\rho} < 1,0 \times 10^6 \\ T = K_2 \left(\frac{p}{\rho}\right)^2 + K_1 \left(\frac{p}{\rho}\right) + K_0, & \text{se } \frac{p}{\rho} \geq 1,0 \times 10^6 \end{cases}, \quad (2.110)$$

onde K_2 , K_1 e K_0 são os coeficientes da função calculados para replicar os resultados de Sparks e Fischel, veja-se a tabela 2.1.

O algoritmo que vai ser proposto nesta tese requer que a compressibilidade seja calculada em função da temperatura e, como tal, necessitamos de calcular a função inversa, veja-se a Fig. 2.7b,

$$\begin{cases} \psi = \left(\frac{1}{R}\right) \frac{1}{T}, & \text{se } T < 5000 \\ \psi = \frac{2K_2}{-K_1 + [K_1^2 - 4K_2(K_0 - T)]^{1/2}}, & \text{se } 5000 < T \leq 11497,88 \cup 14488,33 < T < 21687,73 \\ \psi = \frac{K_1}{T - K_0}, & \text{se } 11497,88 < T \leq 14488,33 \cup T > 21687,73 \end{cases} \quad (2.111)$$

Os coeficientes são os mesmos da tabela 2.1 mas o intervalo de p/ρ deve ser transformado em intervalo de temperatura.

O modelo de gás real implementado também obriga a que o índice adiabático γ seja calculado como um campo escalar, em função da temperatura,

$$\gamma(T) = K_3 + K_4 e^{-((T - K_5)/K_6)^2}. \quad (2.112)$$

Na tabela 2.2 estão representados os coeficientes da equação (2.112) em função da temperatura. Para valores superiores a $T = 40000\text{K}$ o índice adiabático é praticamente constante e igual a $\gamma = 1,10$, veja-se a Fig. 2.7c.

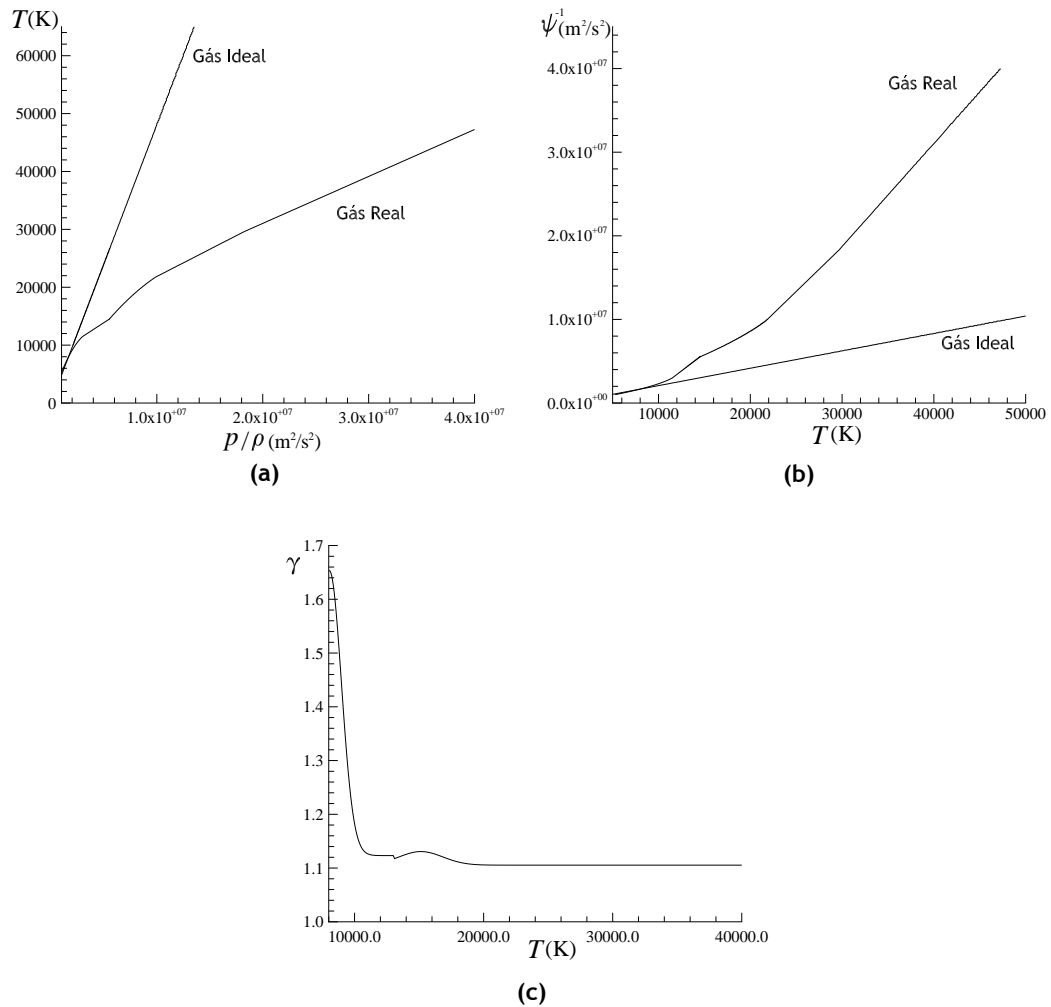


Figura 2.7: Comparação entre os comportamentos reais e ideais das variáveis termodinâmicas. a) Evolução da temperatura em função do valor inverso da compressibilidade (Sankaran, 2005). b) Comportamento da compressibilidade em função da temperatura como requerido pelo algoritmo de solução numérica desenvolvido nesta tese. c) Índice adiabático em função da temperatura.

2.8 Resumo

Fazemos de seguida um breve resumo do conjunto de equações que serão objeto de estudo nesta tese. Podemos considerar que o sistema de equações MHD na sua forma resistiva engloba as restantes formulações estudadas, uma vez que podemos reverter para o sistema ideal através da hipótese de resistividade nula ($\eta = 0$) e que podemos reverter para as equações de dinâmica dos gases no caso de campos magnéticos nulos ($\mathbf{B} = (0, 0, 0)$). O sistema MHD na sua forma resistiva e com a inclusão dos termos viscosos vem dado pelas equações de:

- conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0; \quad (2.113)$$

- conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{U} \mathbf{U} + \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} \right) \mathcal{I} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{\mu_0} \right] = \nabla \cdot \tau_{visc}; \quad (2.114)$$

- conservação da energia total:

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2\mu_0} \right) \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{\mu_0} \right] = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \times \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right); \quad (2.115)$$

- indução do campo magnético:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{U}) = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.116)$$

Capítulo 3

Discretização das equações utilizando o método de volumes finitos

O método de volumes finitos é baseado na forma integral das equações de governo que foram apresentadas no capítulo 2. Segundo Patankar (1980), a característica mais atraente da formulação em volumes finitos é que o princípio de conservação é satisfeito exatamente para um qualquer volume de controlo (VC). Facilmente se conclui que este princípio se mantém para todo o domínio de solução, que não é mais do que a soma de todos os volumes de controlo (VCs). Esta propriedade de conservação, seja ela de massa, quantidade de movimento ou energia, resulta do somatório das equações de transporte integradas nos vários VCs, que por sua vez origina uma equação de conservação global. Tal afirmação faz todo o sentido, uma vez que os integrais de superfície dos VCs interiores se anulam mutuamente. A notação utilizada neste capítulo baseia-se naquela que foi utilizada por Jasak (1996), de Villiers (2006) entre outros autores, que contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento do pacote OpenFOAM. Este capítulo é também baseado em manuais e livros de dinâmica dos fluidos computacional (Oliveira, 2001; Ferziger e Peric, 2002; Patankar, 1980), assim como na referência aos artigos relevantes.

Na secção 3.1 vai ser definido o domínio de solução e na secção 3.2 será apresentada a equação de transporte para uma propriedade escalar ϕ . Será posteriormente demonstrado como é realizada a discretização temporal e espacial da equação de transporte. Na secção 3.3 vai ser apresentado o sistema final de equações algébricas e vão ser descritos, de forma bastante resumida, alguns métodos existentes para a sua resolução. Na secção 3.4 vamos abordar alguns dos esquemas de interpolação mais utilizados, onde vamos dar especial atenção aos esquemas de alta resolução com limitadores de fluxo. Vai também ser demonstrado o processo de implementação de um novo esquema de diferenciação, nomeadamente o CUBISTA de Alves et al. (2003). Finalmente vão ser apresentados alguns casos de teste, que têm como finalidade testar o novo esquema implementado e compará-lo com outros esquemas de alta resolução existentes no código em uso.

3.1 Discretização do domínio de solução

A discretização do domínio de solução pode ser dividida em discretização espacial e temporal. Seguindo a metodologia de volumes finitos, a discretização espacial define o domínio como um conjunto de volumes de controlo que preenchem totalmente o espaço. Cada um desses VCs é constituído por um ponto P localizado no respetivo centróide, assim como um conjunto de faces f que o limitam. É de notar que as faces podem assumir uma qualquer forma geométrica baseada num polígono. Nesse sentido, o domínio de solução pode ser constituído por vários

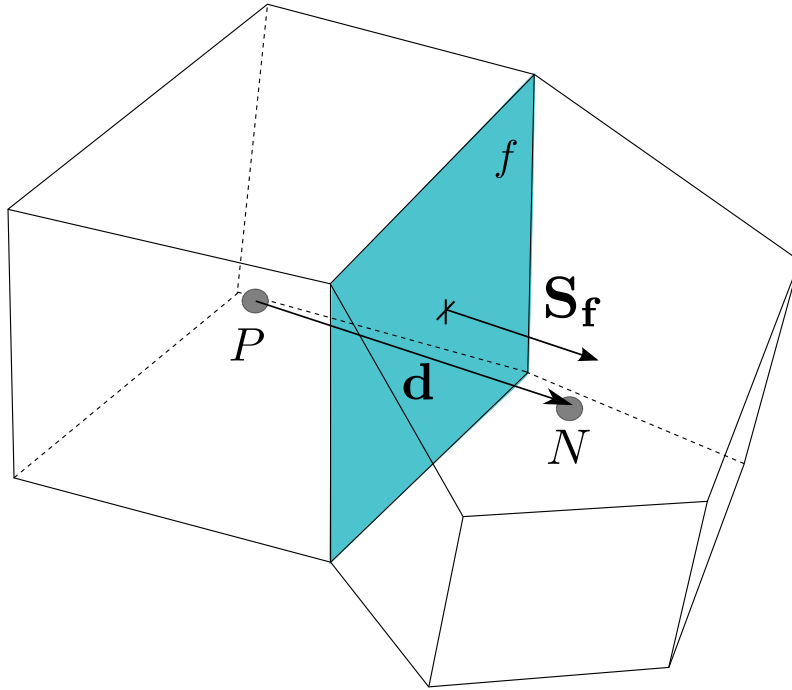


Figura 3.1: Volume de controle utilizado na discretização em volumes finitos, onde d é o vetor que representa a distância entre o centróide N e o centróide P , e S_f é o vetor normal à face f com magnitude igual à área da face e a apontar para fora do VC que possui o ponto P .

VCs poliédricos que constituem uma malha arbitrariamente não-estruturada. As faces também podem ser divididas em faces interiores, que interligam dois VCs (nunca mais do que dois), e em faces de fronteira que pertencem apenas a um VC, uma vez que coincidem com a fronteira do domínio. É também importante referir que na presente discretização todas as variáveis partilham os mesmos VCs, resultando num arranjo centrado (*collocated*) das variáveis.

Na Fig. 3.1 estão representados dois VCs utilizados no processo de discretização em volumes finitos, onde d é o vetor que representa a posição relativa entre o centróide N e o centróide P . O vetor S_f representa o vetor normal à face f , com magnitude igual à área da face e a apontar para fora do VC que possui o ponto P .

3.2 Discretização da equação de transporte

Após a definição do domínio de solução podemos agora passar à discretização da equação de transporte que deve ser aproximada para cada um dos volumes de controle. Para a propriedade escalar ϕ , a equação de transporte vem dada por:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}}_{\text{derivada temporal}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi)}_{\text{termo convectivo}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho \Gamma \nabla \phi)}_{\text{termo difusivo}} = \underbrace{S_\phi}_{\text{termo fonte}}, \quad (3.1)$$

onde Γ representa o coeficiente de difusão de ϕ , e S_ϕ representa um termo fonte. Vamos então interpretar fisicamente cada um dos termos. O termo não estacionário ($\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi)$) representa

a taxa de variação local de ϕ por unidade de volume, este pode ser interpretado como a acumulação de ϕ dentro do VC. O termo convectivo ($\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi)$) representa a variação de ϕ devido ao transporte por fluxos convectivos, neste caso representados pelo fluxo mássico ($\rho \mathbf{U}$). O termo difusivo ($\nabla \cdot (\rho \Gamma \nabla \phi)$) representa o fluxo difusivo *net* a entrar no VC através da sua fronteira. O termo fonte, S_ϕ , pode ser visto como a geração de ϕ dentro do VC. Facilmente se percebe que esta é uma equação diferencial de segunda ordem, uma vez que o termo difusivo introduz derivadas de segunda ordem no espaço. Como tal, de forma a resolvermos a equação com um nível de precisão aceitável, necessitamos de uma discretização espacial de ordem igual ou superior. Nesse sentido, assume-se que todas as variáveis dependentes variam linearmente em torno do ponto central P e do tempo t , da seguinte forma:

$$\phi(x) = \phi(x_P) + (x - x_P) \cdot (\nabla \phi)_P, \quad (3.2)$$

$$\phi(t + \Delta t) = \phi(t) + \Delta t \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_t \quad (3.3)$$

Vamos mostrar de seguida como se procede à discretização de todos os termos da equação de transporte. Uma vez que se pretende utilizar o método de volumes finitos, a equação (3.1) deve ser integrada no volume de controlo V_P , que possui o ponto P ,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_P} \rho \phi dV + \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) dV - \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma \nabla \phi) dV \right] dt &= \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{V_P} S_\phi dV \right] dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A transformação da equação diferencial na sua forma algébrica correspondente deve ser feita através da discretização individual de cada um dos seus termos. Nas próximas secções vamos explicar como é que cada um dos termos da equação (3.1) é aproximado, o que será válido para termos do tipo convectivo, difusivo, ou termos fonte. Também serão apresentadas algumas formas de discretização da derivada temporal.

3.2.1 Discretização espacial

Na discretização de cada um dos termos da equação (3.1) aparecem procedimentos comuns na aproximação dos integrais. Os termos de divergência e gradiente podem ser aproximados através do teorema de Gauss, que é utilizado para transformar um integral de volume num integral de superfície,

$$\int_V \nabla \cdot \phi dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \phi, \quad (3.5)$$

$$\int_V \nabla \phi dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \phi, \quad (3.6)$$

onde ∂V é a superfície limitadora do volume V e $d\mathbf{S}$ representa o vetor com direção normal à superfície ∂V . O volume de controlo é limitado por uma série de faces planas, desta forma a equação (3.5) pode ser transformada num somatório dos integrais sobre as faces,

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \phi dV &= \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \phi = \sum_{f=1}^n \left(\int_f d\mathbf{S} \cdot \phi \right), \\ &\approx \sum_{f=1}^n \mathbf{S}_f \cdot \phi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde o centro da face é dado por f . \mathbf{S}_f é o vetor normal de dimensão igual à área da face e n é o número de faces do VC. Nesta aproximação utilizou-se a regra do ponto médio, definida pela multiplicação do valor do integrando no centro da face do VC (que é por sua vez uma aproximação do valor médio na face) com a área da face. Note-se que esta é uma aproximação de segunda ordem, o que implica que a interpolação de ϕ nas faces deverá também garantir o mesmo nível de precisão. Na secção 3.4 serão apresentadas algumas formas de interpolação de segunda e terceira ordem.

Vamos agora analisar a variação de ϕ no volume de controlo V_P dada pela equação (3.2),

$$\begin{aligned} \int_{V_P} \phi(x) dV &= \int_{V_P} [\phi_P + (x - x_P) \cdot (\nabla\phi)_P] dV, \\ &= \phi_P \int_{V_P} dV + \left[\int_{V_P} (x - x_P) dV \right] \cdot (\nabla\phi)_P, \\ &= \phi_P V_P, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde V_P representa o volume geométrico do VC. O segundo integral da equação (3.8) é igual a zero porque P é o centróide do VC. Mais uma vez utilizou-se a regra do ponto médio, que neste caso resulta da multiplicação do valor médio do integrando (que é por sua vez uma aproximação do valor médio no centro do VC) e o volume do VC. A variável ϕ_P é facilmente obtida, uma vez que todas as variáveis estão disponíveis no ponto P não havendo necessidade de interpolação. Segundo Ferziger e Peric (2002) esta aproximação é exata sempre que ϕ_P seja constante ou varie linearmente no VC, de outra forma possui uma precisão de segunda ordem.

3.2.1.1 Discretização do termo convectivo

Utilizando a equação (3.7) podemos obter a seguinte aproximação para os fluxos convectivos,

$$\begin{aligned} \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \phi) dV &= \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{U} \phi)_f, \\ &= \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{U})_f \phi_f, \\ &= \sum_f F_f \phi_f, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $F_f = \mathbf{S}_f \cdot (\rho \mathbf{U})_f$ representa o fluxo de massa que atravessa a face f do VC. Este fluxo é uma quantidade importante no método de volumes finitos, devendo ser calculado através de um algoritmo específico (Xisto et al., 2012b), e não através de uma interpolação direta dos valores de ρ e \mathbf{U} nas faces dos VCs. Como já foi referido, as aproximações assumidas na equação (3.7) requerem que os valores da propriedade ϕ sejam interpolados nas faces do VC. Este é um ponto crucial na discretização dos termos convectivos e vai ser abordado com mais pormenor na secção 3.4.

3.2.1.2 Discretização do termo difusivo

Assumindo que os gradientes nas faces se mantêm constantes devido à variação linear de ϕ , a aproximação do termo difusivo também pode ser obtida através da equação (3.7),

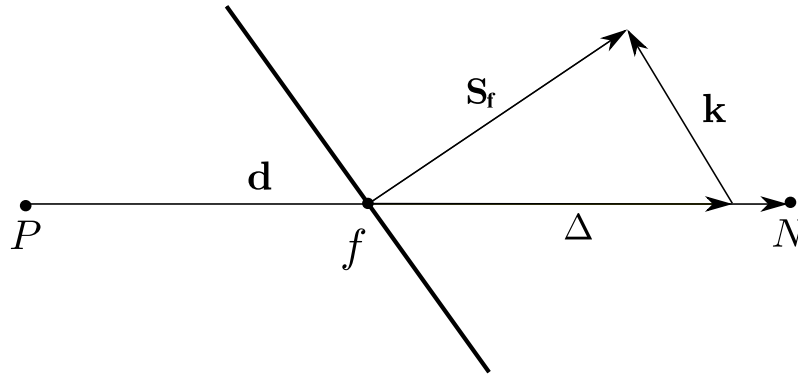


Figura 3.2: Tratamento usado para a correção da não-ortogonalidade da malha. Onde Δ é o vetor paralelo a d que representa a contribuição ortogonal e k representa a contribuição não-ortogonal.

$$\begin{aligned} \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma \nabla \phi) dV &= \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\rho \Gamma \nabla \phi)_f \\ &= \sum_f (\rho \Gamma)_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na aproximação do último termo da equação (3.10), e no caso de estarmos perante uma malha não-ortogonal, devemos utilizar a seguinte relação:

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\Delta| \frac{\phi_N - \phi_P}{|d|} + \mathbf{k} \cdot (\nabla \phi)_f, \quad (3.11)$$

onde Δ é o vetor paralelo a d que representa a contribuição ortogonal da malha, e k é o vetor resultante da sua contribuição não-ortogonal, veja-se a Fig. 3.2. Ambos os vetores têm que satisfazer a seguinte propriedade:

$$\mathbf{S}_f = \Delta + \mathbf{k}. \quad (3.12)$$

Existem várias formas de decompor os vetores Δ e k , veja-se Jasak (1996). O gradiente nas faces, $(\nabla \phi)_f$, pode ser obtido através de interpolação linear ou utilizando qualquer um dos métodos que irão ser apresentados na secção 3.4.

3.2.1.3 Discretização e linearização do termo fonte

Qualquer termo que não seja considerado como convectivo, difusivo ou temporal, será tratado como um termo fonte. Quando o termo fonte for dependente da própria variável ϕ , torna-se necessário proceder à sua linearização. Seguindo o procedimento sugerido por Patankar (1980) o termo fonte é linearizado da seguinte forma:

$$S_\phi(\phi) = S_C + S_P \phi, \quad (3.13)$$

onde S_C é a parte constante e S_P é o coeficiente em ϕ . Em situações onde é necessário proceder a iteração a parte dependente de ϕ deve respeitar $S_P \leq 0$. Utilizando a equação

(3.8), o termo fonte é aproximado como:

$$\int_{V_P} S_\phi(\phi) dV = S_C V_P + S_P V_P \phi. \quad (3.14)$$

3.2.2 Discretização temporal

A discretização temporal é realizada na equação semi-discretizada, ou seja, na equação resultante da discretização espacial tratada nas secções anteriores. As implicações da inclusão do termo não-estacionário na equação semi-discretizada vêm dadas por:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P V_P + \sum_f F_f \phi_f - \sum_f (\rho \Gamma)_f \mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f \right] dt \\ = \int_t^{t+\Delta t} (S_C V_P + S_P V_P \phi_P) dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Uma vez que o tempo é uma coordenada de um só sentido, o cálculo realiza-se por avanço no tempo (*time marching*). Parte-se de um valor inicial $\phi^n = \phi(t)$, baseado no passo de tempo anterior, e progride-se no tempo de forma a obter-se um novo valor para a variável dependente, $\phi^{n+1} = \phi(t + \Delta t)$.

O termo temporal e a integração no tempo podem ser calculados assumindo a variação linear que foi apresentada na equação (3.3),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P &= \frac{\rho_P^{n+1} \phi_P^{n+1} - \rho_P^n \phi_P^n}{\Delta t}, \\ \int_t^{t+\Delta t} \phi(t) &= (f_t \phi_P^{n+1} + (1 - f_t) \phi_P^n) \Delta t, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde f_t é um fator de interpolação temporal, que pode variar entre zero e um. Se $f_t = 0$ a discretização resulta num esquema totalmente explícito, uma vez que o valor de ϕ do passo de tempo anterior prevalece (ϕ^n). Se $f_t = 1$ o esquema reverte para o totalmente implícito, uma vez que é o novo valor de ϕ (ϕ^{n+1}) que se mantém na equação (3.16).

Utilizando um esquema totalmente explícito, e assumindo que a massa volúmica e o coeficiente de difusão não se alteram com o tempo, a equação discretizada vem dada por:

$$\left[\frac{\rho_P V_P}{\Delta t} \right] \phi_P^{n+1} = \sum_f (\rho \Gamma)_f \mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f^n - \sum_f F_f \phi_f^n + (S_C V_P + S_P V_P \phi_P^n) + \left[\frac{\rho_P V_P}{\Delta t} \right] \phi_P^n. \quad (3.17)$$

Assim, todos os termos da equação (3.17) apenas dependem dos valores obtidos no passo de tempo anterior, e não existe nenhuma relação com as outras variáveis do passo de tempo atual. Esta abordagem simplifica a resolução da equação de transporte, uma vez que o valor de ϕ^{n+1} pode ser calculado diretamente sem haver a necessidade de resolver um sistema de equações lineares. Claro que existe um senão, este é dado pelo critério de estabilidade ou número de Courant (Oliveira, 2001). Para um caso de escoamento uni-dimensional com variação ao longo da direção x , o critério de estabilidade vem dado por:

$$Co = \frac{U_x \Delta t}{\Delta x}. \quad (3.18)$$

A equação (3.18) representa a razão entre o passo no tempo, Δt , e o tempo característico de convecção, $\Delta x/U_x$. Note-se que o tempo característico de convecção, embora possa variar espacialmente, é um parâmetro fundamental e dependente da física do escoamento. No caso específico de escoamento MHD compressível, há interesse em que a formulação tome em consideração não só a velocidade do escoamento como também a velocidade da onda rápida, veja-se Pen et al. (2003). Na formulação explícita, quando o número de Courant é superior à unidade, ocorrem instabilidades numéricas que destroem por completo os resultados. Por outro lado, no esquema totalmente implícito a equação semi-discretizada é idêntica à equação (3.17), havendo apenas a necessidade de substituir os índices superiores n por $n+1$. O esquema é ainda de primeira ordem no tempo, no entanto, em contraste com o esquema explícito, existe a necessidade de resolver um sistema de equações, uma vez que o valor de ϕ_P^{n+1} depende dos novos valores dos VCs vizinhos. Como vantagem, este esquema permite um melhor acoplamento entre as variáveis e o sistema torna-se estável, mesmo que o critério de estabilidade do correspondente esquema explícito seja violado.

Existe ainda a possibilidade de se assumir um fator de interpolação igual a $f_t = 0,5$, que conduz ao esquema de *Crank-Nicolson*. Este utiliza no cálculo do novo valor de ϕ , os valores de ϕ conhecidos no passo de tempo anterior, e os valores desconhecidos do passo de tempo atual,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho_P V_P}{\Delta t} \right] \phi_P^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[\sum_f (\rho \Gamma)_f \mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f^n - \sum_f F_f \phi_f^n \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_f (\rho \Gamma)_f \mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f^{n+1} - \sum_f F_f \phi_f^{n+1} \right] \\ &+ \left(S_C V_P + \frac{1}{2} S_P V_P \phi_P^n + \frac{1}{2} S_P V_P \phi_P^{n+1} \right) + \left[\frac{\rho_P V_P}{\Delta t} \right] \phi_P^n. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ao contrário dos dois esquemas apresentados anteriormente, este é um esquema de segunda ordem no tempo. No entanto este esquema também pode levar a oscilações se o Δt não for suficientemente pequeno. O critério de estabilidade é novamente dado pelo número de Courant, contudo este critério não é tão restritivo como para o caso totalmente explícito.

3.3 O sistema de equações algébricas

Utilizando todas as técnicas de discretização apresentadas nas secções anteriores podemos construir uma equação algébrica para cada ponto P ,

$$a_P^\phi \phi_P = \sum_n a_N^\phi \phi_N + S_P, \quad (3.20)$$

onde o termo a_P^ϕ representa os coeficientes presentes na diagonal principal da matriz construída para a propriedade ϕ , e a_N^ϕ representa os coeficientes fora da diagonal principal. O termo S_P representa os termos fonte da equação de transporte. Quando este sistema é resolvido gera um novo conjunto de ϕ 's para o tempo atual. O coeficiente a_P^ϕ inclui todos os termos correspondentes ao passo de tempo atual, nomeadamente: a derivada temporal; o termo difusivo; o termo convectivo e a parte linear do termo fonte. Por seu lado o coeficiente a_N^ϕ contém os

termos correspondentes aos nós vizinhos do ponto P . O termo S_P possui todos os termos que podem ser calculados sem a necessidade de conhecer os valores de ϕ do passo de tempo atual. Nomeadamente, a parte constante do termo fonte e as partes dos termos difusivos, convectivos e temporais correspondentes ao passo de tempo anterior.

O sistema de equações que inclui uma equação (3.20) para cada nó da malha pode ser escrito na sua forma matricial,

$$[A] [\phi] = [S], \quad (3.21)$$

onde $[A]$ é a matriz quadrada que possui os coeficientes, e $[\phi]$ é o vetor coluna que possui as variáveis dependentes que pretendemos calcular nos vários VCs da malha. O vetor coluna $[S]$ contém os termos do lado direito da equação (3.20). Este sistema deve ser aplicado para cada equação de transporte e para a totalidade do domínio de solução.

Como para qualquer sistema de equações, o número de incógnitas deverá ser igual ao número de equações. Isto implica que, deverá existir uma equação para cada nó da malha, o que irá originar um número muito grande de equações algébricas. No entanto a matriz quadrada $[A]$, resultante deste sistema é bastante esparsa, o que significa que a maior parte dos seus elementos são iguais a zero. Como tal, e se estivermos perante uma malha estruturada, é possível utilizar métodos de pré-condicionamento de matrizes que permitem reduzir o tempo de cálculo e a memória utilizada (Ferziger e Peric, 2002).

O sistema de equações algébricas definido pela equação (3.21) pode ser resolvido de forma direta ou de forma iterativa. Enquanto os métodos diretos permitem, em princípio, resolver este sistema através de um conjunto finito de operações aritméticas, os métodos iterativos iniciam-se com uma solução estimada que é melhorada até que a tolerância pretendida seja atingida. Geralmente, os métodos diretos são preteridos em relação aos métodos iterativos devido ao esforço computacional exigido. Não faz parte do presente trabalho deduzir cada um destes algoritmos, são apenas ferramentas matemáticas que nos permitem obter a solução do sistema de equações algébricas. Para mais detalhes sobre estes e outros métodos de solução veja-se Ferziger e Peric (2002).

O forte acoplamento entre as variáveis dependentes resulta em não-linearidades que, em casos extremos, podem levar à ocorrência de instabilidades numéricas importantes. Estas instabilidades podem ser atenuadas através de uma significativa redução do passo de tempo. É também possível utilizar um método de relaxação explícita da solução, que permita uma transição suave entre os valores obtidos no passo de tempo anterior e a nova solução,

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \alpha_\phi (\phi^{novo} - \phi^n), \quad (3.22)$$

onde ϕ^{novo} é o valor obtido na equação (3.20) e α_ϕ é o fator de relaxação que deve variar entre 0 e 1.

Patankar (1980) explica como uma técnica de relaxação implícita pode ser incluída no algoritmo de solução das equações algébricas. Com esta abordagem a equação (3.20) é escrita da seguinte forma:

$$\underbrace{\frac{a_P^\phi}{\alpha_\phi}}_{a_P^*} \phi_P^{n+1} + \sum_n a_N^\phi \phi_N^{n+1} = S_P + \underbrace{\frac{1 - \alpha_\phi}{\alpha_\phi} a_P^\phi \phi_P^n}_{S_P^*}. \quad (3.23)$$

Note-se que a_P^* é maior que a_P^ϕ e, uma vez que os coeficientes a_N^ϕ se mantêm inalterados, a dominância da diagonal principal da matriz $[A]$ fica aumentada. O valor ótimo do fator de relaxação depende do caso em estudo. O ideal será impor um valor que permita uma convergência rápida e estável da solução. Normalmente é utilizado um valor baixo para as iterações iniciais, o qual deve ser aumentado à medida que a solução vai convergindo para o seu valor final.

3.4 Esquemas de interpolação

Como já referido, a aproximação dos integrais que resultam do teorema de Gauss requer que o valor de ϕ seja interpolado nas faces dos VCs. Este é um ponto crucial do método de volumes finitos porque a ordem de aproximação irá originar um erro de truncatura igual ou inferior a essa ordem.

Nas próximas secções vamos apresentar alguns dos esquemas de interpolação mais comuns. Vamos começar por explicar a base do esquema de diferenças *Upwind* (UDS) e do esquema de diferenças centrais (CDS). Normalmente são estes dois esquemas que servem de base para a criação dos esquemas de interpolação de alta resolução. Vai também ser apresentado um esquema de ordem superior ao esquema CDS, nomeadamente o esquema *Upwind-Quadrático* (QUICK). Na secção 3.4.4 vão ser abordadas as propriedades dos esquemas limitadores de fluxo, e como estes podem ainda ser reformulados no diagrama NVD. Na última secção vamos ainda mostrar como pode ser implementado um esquema de alta resolução, neste caso o CUBISTA de Alves et al. (2003) (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection*), no pacote OpenFOAM.

3.4.1 Esquema de diferenças *upwind* (UDS)

Neste esquema de interpolação assume-se que o valor de ϕ nas faces do VC é dado pelo valor do nó a montante. Utilizando uma notação de compasso, o valor de ϕ_f está dependente do sentido do escoamento na face de referência, veja-se a Fig. 3.3,

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_{f_e} = \phi_P & F_f \geq 0 \\ \phi_{f_e} = \phi_E & F_f < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

De facto, este é o único esquema que garante que a solução seja limitada pelos nós vizinhos. Todavia, esta satisfação acarreta um custo proibitivo que resulta numa diminuição drástica da precisão dos resultados. Considere-se a forma vetorial da expansão da série de Taylor em torno do ponto P ,

$$\phi_{f_e} = \phi_P + \underline{(x_{f_e} - x_P)} \cdot (\nabla\phi)_P + \frac{(x_{f_e} - x_P)^2}{2} : (\nabla\nabla\phi)_P + H, \quad (3.25)$$

onde H representa os termos de ordem superior e $:$ representa o produto interno entre dois tensores de ordem n . O esquema UDS despreza todos os termos da equação (3.25) à exceção do

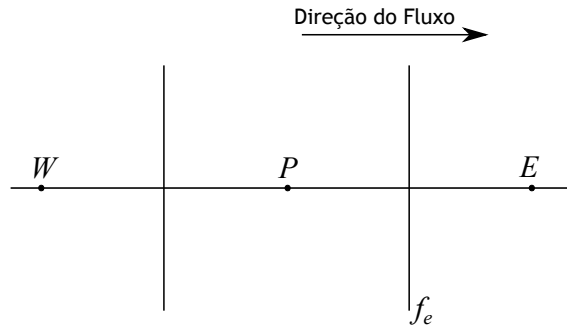


Figura 3.3: Representação de uma malha uni-dimensional de cálculo através de uma notação de compasso.

primeiro, $\phi_{f_e} = \phi_P$, como tal comporta-se como um esquema de primeira ordem. O primeiro termo negligenciado (a sublinhado) comporta-se como um fluxo difusivo,

$$J^{dn} = \Gamma^{num} (\nabla\phi)_{f_e}, \quad (3.26)$$

onde J^{dn} é o fluxo de difusão numérica resultante do termo negligenciado, e $\Gamma^{num} = (\rho U)_{f_e} \Delta x / 2$ representa o coeficiente de difusão numérica que é proporcional ao espaçamento da malha e à velocidade do escoamento.

3.4.2 Esquema de diferenças centrais (CDS)

Outra forma de obter o valor de ϕ nas faces é através de uma simples interpolação linear. Como tal, e assumindo uma variação linear de ϕ entre o centróide P e o centróide E , o valor de ϕ_{f_e} pode ser calculado da seguinte forma para a face f_e ,

$$\phi_{f_e} = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_E. \quad (3.27)$$

O fator de interpolação é dado pela relação entre as distâncias $\overline{f_e E}$ (da face do VC ao ponto vizinho) e \overline{PE} (de um centróide ao outro):

$$f_x = \frac{\overline{f_e E}}{\overline{PE}}. \quad (3.28)$$

Se assumirmos que a face se encontra a meia distância entre os dois pontos, o valor ϕ_f é simplesmente dado pela média aritmética da propriedade ϕ ,

$$\phi_{f_e} = \frac{\phi_P + \phi_E}{2}. \quad (3.29)$$

Foi demonstrado por Ferziger e Peric (2002) que este é um esquema de diferenciação de segunda ordem no espaço. Como tal, podemos afirmar que é um excelente candidato a ser introduzido na resolução da equação de transporte. Ainda assim, vários autores (Jasak (1996), Patankar (1980), Hirsch (2007) entre outros) demonstraram que a utilização deste esquema pode provocar oscilações irrealistas quando aplicado na solução de escoamentos dominados pela convecção. Para esse tipo de problemas, devemos optar por esquemas baseados em limitadores de fluxo como aqueles que vão ser apresentados na secção 3.4.4.

3.4.3 Esquema de interpolação *Upwind-Quadrático* (QUICK)

A próxima abordagem em termos de interpolação será a de aproximar os valores nas faces através de uma função quadrática (parábola). De forma a construir a parábola, o esquema QUICK utiliza os dois nós a montante da face e o nó a jusante que são dados pelo sentido do fluxo, veja-se novamente a Fig. 3.3. Por uma questão de simplificação vamos considerar o caso uni-dimensional e vamos utilizar a notação de compasso. Para a face f_e do nó P , se o fluxo $F_e > 0$, ϕ_{f_e} pode ser calculado através da seguinte função:

$$\phi_{f_e} = \phi_P + \left(\frac{\phi_E - \phi_W}{2} \right) f_x + \left(\frac{\phi_W + \phi_E - 2\phi_P}{2} \right) f_x^2, \quad (3.30)$$

novamente assumindo que o espaçamento da malha é uniforme,

$$\phi_{f_e} = \phi_P - \frac{1}{8} (\phi_W + 2\phi_P - 3\phi_E). \quad (3.31)$$

Este é um esquema de terceira ordem em malhas estruturadas. De uma forma geral este método apresenta uma precisão de ordem superior ao método de diferenças centrais.

3.4.4 Esquemas limitadores de fluxo TVD

Já aqui foi referido que a única forma de obter um nível aceitável de precisão, é através da utilização de esquemas de interpolação de ordem superior a um. No entanto, estes não garantem que a solução seja limitada pelos valores vizinhos. Esta situação é particularmente agravada na presença de descontinuidades, como aquelas que se pretendem calcular no decorrer deste trabalho. Claro que estas instabilidades podem ser eliminadas através da utilização de um esquema de primeira ordem. Repare-se que o esquema de diferenças *Upwind* apenas se baseia nos valores a montante da face, que é dada pelo sentido do escoamento.

Uma vez conhecida a causa das instabilidades podemos agora procurar soluções que as eliminem. Foi neste seguimento que surgiu o critério de limitação (*Boundedness*), que deu origem aos esquemas de alta resolução. Sweby (1984) introduziu um novo conceito que deu origem aos esquemas TVD (*Total Variation Diminishing*). Este conceito, como vamos ver já de seguida, é baseado em funções matemáticas que garantem que uma dada propriedade se mantém dentro dos limites impostos pelos valores vizinhos.

Os métodos TVD reduzem a ordem de aproximação na zona próxima da descontinuidade e utilizam esquemas de primeira ordem no cálculo da descontinuidade propriamente dita. Repare-se que esta é a única forma de garantir uma solução monótona e livre de oscilações. No entanto, a utilização de um esquema de primeira ordem introduz valores inaceitáveis de dissipação numérica, o que destrói a precisão da solução. Assim, torna-se importante conhecer a zona exata onde ocorre a onda de choque, de forma a não “ligar” o esquema de primeira ordem demasiado cedo. Este mecanismo dá pelo nome de “*clipping*” e é um dos parâmetros cruciais destes esquemas. Outra questão tem a ver com o facto de o esquema ser demasiado compressivo, como é o caso do esquema Superbee (Roe, 1986). Ou seja, capta as descontinuidades com bastante precisão mas distorce as zonas onde a solução é mais suave. A título de exemplo imagine-se uma onda sinusoidal que é calculada como uma onda quadrada.

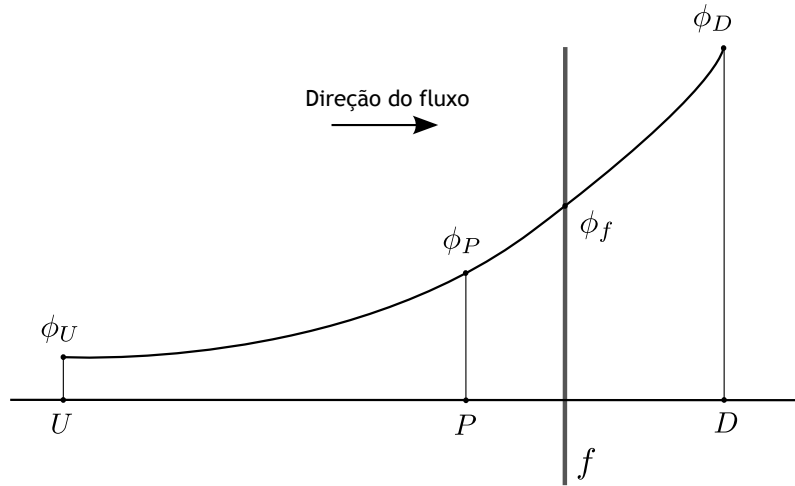


Figura 3.4: Convecção de uma propriedade ϕ na face f . Note-se que os índices U (*Upstream*) e D (*Downstream*) são dados pelo sentido do fluxo.

Vamos agora passar à descrição dos esquemas que se enquadram nos denominados limitadores de fluxo. O conceito por detrás destes esquemas, como o próprio nome indica, é o de limitar o fluxo de uma dada quantidade num VC, para que este não produza um máximo ou um mínimo nesse mesmo VC. Em esquemas TVD, o objetivo é o de reduzir a variação total da quantidade ϕ (Sweby, 1984),

$$TV(\phi^n) = \sum_f |\phi_N^n - \phi_P^n|, \quad (3.32)$$

onde P e N são os pontos à volta da face f . Os esquemas TVD satisfazem a seguinte condição para cada passo de tempo:

$$TV(\phi^{n+1}) \leq TV(\phi^n). \quad (3.33)$$

Esta condição deve ser aplicada aos esquemas limitadores de fluxo seguindo a seguinte metodologia (Hirsch, 2007). Inicialmente seleciona-se a discretização espacial de primeira ordem que garanta que a solução se encontre dentro dos limites impostos, normalmente adota-se o esquema de diferenças *upwind*. Posteriormente define-se o esquema principal, que é dado pela soma entre o esquema de primeira ordem (*upwind*) com a correção de ordem superior (*OS*),

$$\phi_f = (\phi)_{UDS} + \Psi [(\phi)_{OS} - (\phi)_{UDS}], \quad (3.34)$$

onde $(\phi)_{OS}$ representa o valor da propriedade ϕ na face interpolado através do esquema de ordem superior. Seguidamente, multiplica-se a correção de ordem superior pelo respetivo limitador, Ψ . Este limitador é calculado através da respetiva função limitadora $\Psi(r)$, que por sua vez é expressa em função dos gradientes sucessivos de ϕ ,

$$r = \frac{\phi_P - \phi_U}{\phi_D - \phi_P}, \quad (3.35)$$

e

$$\Psi = \Psi(r). \quad (3.36)$$

Os pontos P , U e D são dados pela direção do fluxo na face f , veja-se a Fig. 3.4.

A equação (3.34) pode ser formulada para uma grande variedade de limitadores. No entanto, devem ser satisfeitas algumas condições importantes. Sweby (1984) demonstrou que para satis-

fação da condição TVD deve-se obedecer à seguinte restrição:

$$0 \leq \left(\frac{\Psi(r)}{r}, \Psi(r) \right) \leq 2. \quad (3.37)$$

O que implica que a função limitadora deve ser positiva,

$$\Psi(r) \geq 0, \text{ para } r \geq 0. \quad (3.38)$$

Quando $r < 0$, ou seja quando é encontrado um extremo na variação da solução, deve-se optar por $\Psi = 0$, o que vai corresponder a um declive nulo no intervalo considerado. Se considerarmos a equação (3.34) verifica-se que para $\Psi = 0$ é utilizado o esquema de primeira ordem, o que nos garante que a solução se mantém dentro dos valores limites. Desta forma, devemos definir:

$$\Psi(r) = 0, \text{ para } r < 0. \quad (3.39)$$

Com estas hipóteses chegamos à condição suficiente dos esquemas TVD,

$$0 \leq \Psi(r) \leq 2r. \quad (3.40)$$

O limitador também deve obedecer à condição de simetria, o que implica que os gradientes a montante e jusante são tratados da mesma forma,

$$\frac{\Psi(r)}{r} = \Psi\left(\frac{1}{r}\right), \quad (3.41)$$

o que resulta na seguinte função:

$$\Psi(r) = \min(2r, 2), \text{ } r > 0. \quad (3.42)$$

A equação (3.42) representa a fronteira superior do diagrama de Sweby (1984), veja-se a Fig. 3.5. Para finalizar, falta impor uma última condição que garanta que o esquema seja de segunda ordem sempre que possível, esta é dada pela zona mais escura do diagrama de Sweby. Podemos verificar que os esquemas, para serem de segunda ordem, devem passar pelo ponto (1, 1), e que para serem de terceira ordem devem passar pelo mesmo ponto mas com um declive igual a 3/4 (Leonard, 1988). Devem também estar limitados pelo esquema *Upwind* linear de *Warming* e *Beam* ($\Psi(r) = r$) e pelo esquema de *Lax-Wendroff* ($\Psi(r) = 1$) (Hirsch, 2007; Sweby, 1984).

A grande desvantagem da utilização de limitadores recai no facto de estes reduzirem a ordem de precisão localmente quando $r = 0$. Esta redução na precisão é justificada quando pretendemos eliminar as oscilações na solução. Contudo, quando a solução exata possui extremos (ex: onda sinusoidal), estes vão ser deformados localmente devido à ação dos limitadores. Existem várias funções limitadoras na literatura, algumas das mais utilizadas podem ser encontradas em Hirsch (2007).

3.4.4.1 A formulação em NVD e o critério CBC

A formulação baseada no diagrama NVD (*Normalized Variable Diagram*) e o critério CBC (*Convection Boundedness Criterion*) foram introduzidos por Gaskell e Lau (1988) e por Leonard (1988). Note-se que os métodos presentes no diagrama TVD podem ser reformulados no diagrama NVD.

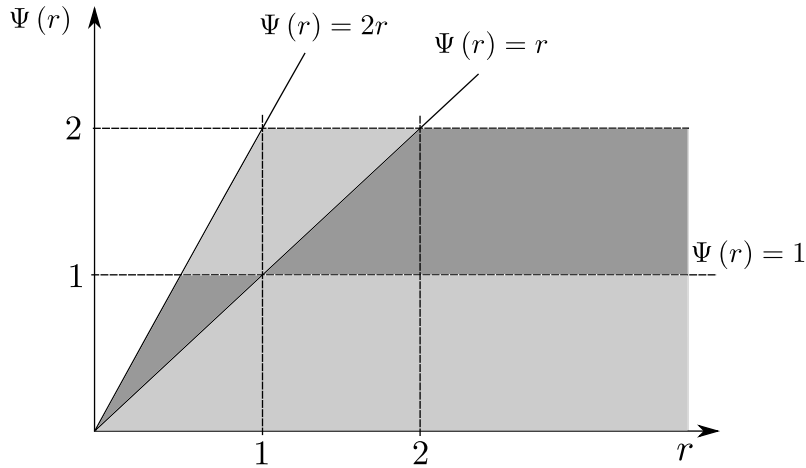


Figura 3.5: Diagrama de Sweby, onde se apresenta o limitador Ψ em função do rácio de gradientes r . A zona mais escura representa a região TVD de segunda ordem.

Esta formulação normalizada permite reduzir o número de variáveis de cálculo, o que é uma vantagem na sua implementação em malhas não-uniformes.

Considere-se a Fig. 3.4 onde está representada a variação de um escalar, ϕ , convectado através da face, f . A variável normalizada vem dada por:

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}. \quad (3.43)$$

Repare-se que em termos de variáveis normalizadas, $\tilde{\phi}_U = 0$ e $\tilde{\phi}_D = 1$, desta forma a Fig. 3.4 reduz-se à Fig. 3.6. A título de exemplo vamos olhar para o esquema de interpolação QUICK. Utilizando o diagrama presente na Fig. 3.4, a variável ϕ na face vem dada por:

$$\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_D + \phi_P) - \frac{1}{8}(\phi_D - 2\phi_P + \phi_U). \quad (3.44)$$

Esta equação pode ser reformulada em termos de variáveis normalizadas,

$$\tilde{\phi}_f = \frac{1}{2}(1 + \tilde{\phi}_P) - \frac{1}{8}(1 - 2\tilde{\phi}_P + 0) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\tilde{\phi}_P. \quad (3.45)$$

Como podemos observar, a variável normalizada nas faces $\tilde{\phi}_f$ é apenas função da variável normalizada $\tilde{\phi}_P$.

Como já sabemos, é necessário que ϕ_P esteja limitado pelos valores dos nós vizinhos:

$$\phi_U \leq \phi_P \leq \phi_D, \quad (3.46)$$

ou, dependendo da direção do fluxo,

$$\phi_U \geq \phi_P \geq \phi_D, \quad (3.47)$$

o que em termos de variáveis normalizadas se reduz a:

$$0 \leq \tilde{\phi}_P \leq 1. \quad (3.48)$$

Se $\tilde{\phi}_f < 0$ ou $\tilde{\phi}_f > 1$ então $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_P$ e o esquema reduz-se a primeira ordem. Seguindo estas restrições podemos construir o diagrama NVD como uma forma de representar o critério

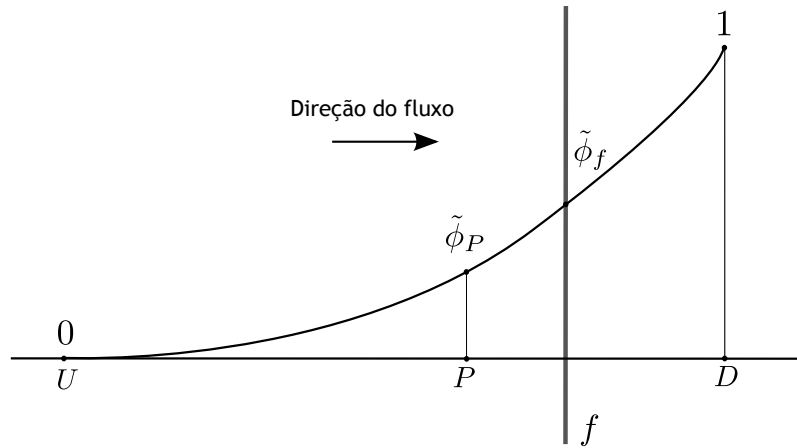


Figura 3.6: Convecção de uma propriedade ϕ na face f após a normalização das variáveis. Note-se que as variáveis a montante e a jusante do ponto P dão origem a $\tilde{\phi}_U = 0$ e $\tilde{\phi}_D = 1$.

CBC, veja-se a Fig. 3.7. Neste diagrama estão representados alguns dos esquemas básicos: LUDS (*Upwind linear*); UDS (diferenças *Upwind*); CDS (Diferenças Centrais); QUICK (*Upwind Quadrático*). O Critério CBC é dado pela região sombreada e pela linha correspondente ao esquema UDS ($\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_P$). Note-se que, para malhas uniformes, qualquer relação não-linear entre $\tilde{\phi}_f$ e $\tilde{\phi}_P$ que passe pelo ponto Q pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{\phi}_f = \frac{3}{4} + D \left(\tilde{\phi}_P - \frac{1}{2} \right) \quad (3.49)$$

onde D representa o declive. Desta forma, e seguindo as conclusões de Leonard (1988), podemos afirmar que os esquemas para serem de segunda ordem têm de passar pelo ponto Q , e que para serem de terceira ordem têm de passar pelo ponto Q com um declive igual $3/4$.

Por uma questão de simplificação, a formulação aqui apresentada foi sempre para o caso específico de malhas uniformes. No caso de malhas não-uniformes, podemos encontrar a formulação NVSF (*Normal Variable and Space Formulation*) em Alves et al. (2003). Para malhas não-uniformes e não-estruturadas podemos optar pela abordagem sugerida por Jasak et al. (1999). Seguidamente vamos apresentar a implementação de uma nova função limitadora no código em uso, nomeadamente o esquema CUBISTA de Alves et al. (2003). Posteriormente serão apresentados alguns casos de teste, onde o CUBISTA vai ser comparado com outros esquemas de alta resolução.

3.5 Implementação de um esquema de alta resolução

O esquema CUBISTA (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for Treatment of Advection*) de Alves et al. (2003) é um esquema bastante recente, que tem como base o esquema de interpolação QUICK. Este é composto por dois limitadores TVD, um à esquerda do esquema de base, $\Psi(r) = 3r/2$, e um à sua direita, $\Psi(r) = 3/2$. Em Alves et al. (2003) o

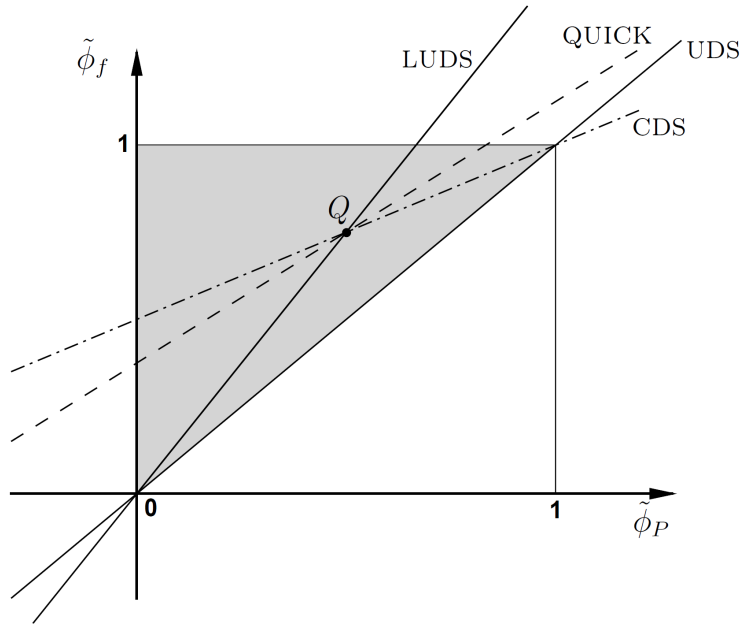


Figura 3.7: Alguns esquemas de interpolação presentes no diagrama NVD. Note-se que a zona CBC é a zona sombreada assim como a linha correspondente ao esquema *upwind*.

esquema CUBISTA foi implementado utilizando uma formulação baseada no diagrama NVD,

$$\tilde{\phi}_f = \begin{cases} \frac{7}{4}\tilde{\phi}_P & 0 < \tilde{\phi}_P < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\tilde{\phi}_P + \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \leq \tilde{\phi}_P \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\tilde{\phi}_P + \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \leq \tilde{\phi}_P \leq 1 \\ \tilde{\phi}_P & \text{restante.} \end{cases} \quad (3.50)$$

No entanto, através de algumas relações matemáticas, vejamos as equações (3.54) e (3.56), podemos converter o esquema para o diagrama TVD (Fig. 3.8) de Sweby (1984). Neste caso a função limitadora para malhas uniformes vem dada por:

$$\Psi(r) = \max \left\{ 0, \min \left[\frac{3}{2}r, \frac{3}{4} + \frac{r}{4}, \frac{3}{2} \right] \right\}. \quad (3.51)$$

Existem várias formas de calcular r , para o caso especial de malhas não-estruturadas pode ser utilizada a abordagem sugerida por Darwish e Moukalled (2003):

$$r = \frac{2(\nabla\phi)_P \cdot \mathbf{d}}{\phi_D - \phi_P} - 1, \quad (3.52)$$

onde \mathbf{d} é o vetor que representa a distância entre os nós P e D .

O pacote OpenFOAM encontra-se orientado para a utilização de funções limitadoras TVD. No entanto, desde que o valor de $\tilde{\phi}_P$ se encontre disponível, também é possível implementar um qualquer esquema utilizando a formulação NVD. Seguindo a abordagem sugerida por Hirsch (2007), a função limitadora $\Psi(r)$ relaciona-se com a variável normalizada $\tilde{\phi}_f$ da seguinte forma:

$$\tilde{\phi}_f = \left[1 + \frac{1}{2r}\Psi(r) \right] \tilde{\phi}_P, \quad (3.53)$$

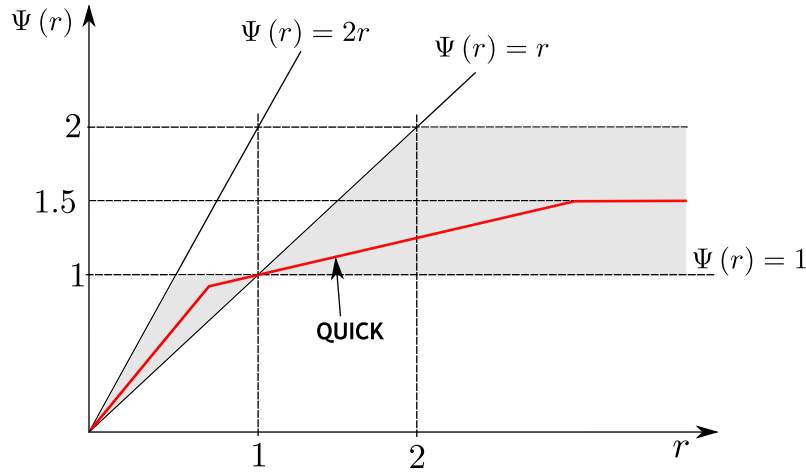


Figura 3.8: Esquema CUBISTA reformulado no diagrama de Sweby.

onde o r também pode ser deduzido com base nas variáveis normalizadas,

$$r = \frac{\tilde{\phi}_P}{1 - \tilde{\phi}_P}. \quad (3.54)$$

Uma vez que $\tilde{\phi}_P$ se encontra relacionado com r , podemos utilizar a seguinte equação no seu cálculo (Jasak et al., 1999):

$$\tilde{\phi}_P = 1 - \frac{\phi_D - \phi_P}{2(\nabla\phi)_P \cdot \mathbf{d}}. \quad (3.55)$$

Utilizando as equações (3.53 e 3.54) podemos reformular a função limitadora $\Psi(r)$ em termos de variáveis normalizadas,

$$\Psi(r) = \frac{2(\tilde{\phi}_f - \tilde{\phi}_P)}{1 - \tilde{\phi}_P}, \quad (3.56)$$

onde a variável $\tilde{\phi}_f$ pode ser substituída por qualquer um dos ramos da função (3.50). O CUBISTA é um esquema que tem sido bastante utilizado na simulação de escoamentos newtonianos e não-newtonianos, apresentando bons resultados ao nível de robustez e precisão (Alves et al., 2004; Santos et al., 2004; Delgado, 2006; Ng et al., 2007). Desta forma, este será um dos esquemas de interpolação mais utilizados no decurso deste trabalho.

3.5.1 Casos de teste

Nas próximas secções vão ser apresentados alguns casos de teste onde se pretende comparar os resultados obtidos com o CUBISTA e com outros esquemas de diferenciação. Vamos começar com um caso de teste padrão, que compreende a convecção pura de um escalar com vários perfis à entrada. Estas soluções possuem solução analítica e, como tal, permitem-nos avaliar a precisão do esquema implementado. Para terminar, vamo-nos debruçar sobre um caso de teste mais realista, que permitirá avaliar o esquema de diferenciação no que toca à sua robustez.

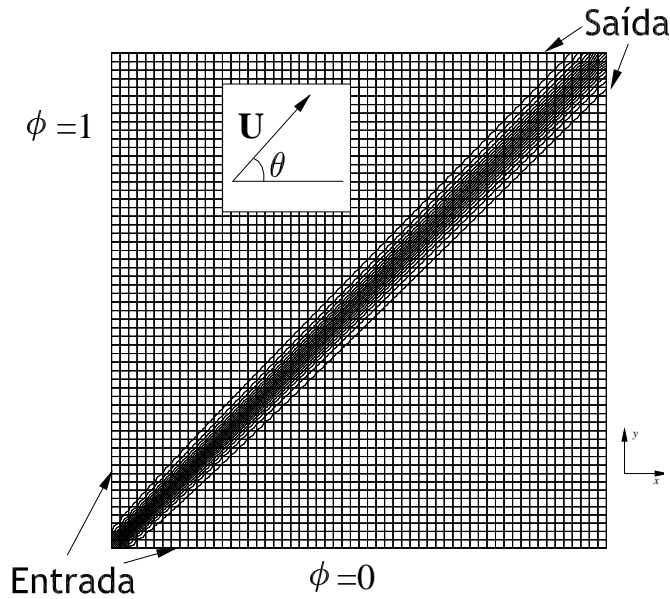


Figura 3.9: Malha utilizada para o cálculo da convecção pura de um escalar. As isolinhas e as condições de fronteira aqui presentes são para o perfil em escada calculado com o CUBISTA.

3.5.1.1 Resultados para a convecção pura de um escalar

A convecção pura de um escalar é um caso de teste padrão, que é frequentemente utilizado para a validação de esquemas de diferenciação. Neste tipo de problema a propriedade escalar ϕ deve ser convectada por um campo de velocidades uniforme, que possui um ângulo oblíquo em relação à malha (no caso em estudo $\theta = 45^\circ$). Considere-se a seguinte equação de transporte na sua forma vetorial, que se pretende resolver num domínio bidimensional de geometria quadrada utilizando coordenadas cartesianas,

$$\nabla \cdot (\mathbf{U}\phi) = 0. \quad (3.57)$$

O campo de velocidades \mathbf{U} (para $\theta = 45^\circ$) vem dado pela componente $U_x = \sqrt{2}/2$ e pela componente $U_y = \sqrt{2}/2$, veja-se a Fig. 3.9.

Foram analisadas três condições de fronteira à entrada, que correspondem a três perfis distintos:

- Em degrau, veja-se a Fig. 3.9:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= 1 \quad \text{para } 0 \leq y \leq 1; \\ \phi(x, 0) &= 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.58)$$

- Onda sinusoidal quadrada:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= \begin{cases} \sin^2\left(\frac{10}{3}\pi y\right) & \text{para } 0 \leq y \leq \frac{3}{20}; \\ 1 & \text{para } \frac{3}{20} \leq y \leq 1; \end{cases} \\ \phi(x, 0) &= 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.59)$$

- Semi-elipse:

$$\begin{aligned}\phi(0, y) &= \sqrt{1 - [y/(1/6)]^2} && \text{para } |y| < 1/6; \\ \phi(0, y) &= 0 && \text{restante;} \end{aligned} \quad (3.60)$$

e

$$\begin{aligned}\phi(x, 0) &= \sqrt{1 - [x/(1/6)]^2} && \text{para } |x| < 1/6; \\ \phi(x, 0) &= 0 && \text{restante.} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Como não podia deixar de ser cada um destes casos de teste tem a sua finalidade. O perfil em degrau permite avaliar a capacidade do esquema em captar variações abruptas de gradiente e, desta forma, avaliar a sua capacidade na resolução de descontinuidades com o mínimo de difusão numérica possível. O perfil sinusoidal quadrado, sendo um perfil relativamente suave, permite avaliar a ordem de precisão aparente do esquema. O caso da semi-elipse permite avaliar a capacidade do esquema conseguir captar simultaneamente uma forte variação de gradiente, presente na base da semi-elipse, assim como a região de variação suave na sua curvatura. Este último problema também permite identificar problemas de simetria.

Os resultados que irão ser apresentados foram obtidos numa malha uniforme com 59×59 nós, e são referentes aos perfis de ϕ calculados ao longo da linha $x = 0,5$. Em todos os casos de teste, para uma melhor visualização das descontinuidades, o eixo das abcissas foi aumentado.

A Fig. 3.10a mostra os resultados obtidos para o perfil em degrau com o esquema CDS e com o esquema UDS. Como era esperado, o esquema UDS resulta num elevado grau de difusão numérica. Por seu lado, o esquema CDS aproxima-se bastante da solução analítica, mas origina algumas oscilações que atingem o seu valor mais elevado na zona a jusante da descontinuidade. Na Fig. 3.10b estão representados os resultados obtidos com alguns dos esquemas de alta resolução disponíveis no pacote OpenFOAM. Note-se que o esquema *Superbee* (Roe, 1986) é o que apresenta melhores resultados quando aplicado na solução de descontinuidades. De facto, este esquema apresenta resultados muito próximos do esquema CDS mas encontra-se livre de oscilações. O esquema de diferenciação *Gamma* (Jasak et al., 1999) com um parâmetro TVD igual a $\beta_{TVD} = 0,1$, ou seja na sua forma mais compressiva, apresenta resultados similares ao *Superbee*. O *Minmod* (Roe, 1986) apresenta alguns sinais de difusão numérica e o UMIST (Lien e Leschziner, 1994) apresenta piores resultados do que o CUBISTA, apesar de também este ser um esquema de terceira ordem baseado no QUICK.

Na Fig. 3.10c estão presentes os resultados para o perfil sinusoidal quadrado. O esquema *Superbee* é novamente o que apresenta o comportamento mais compressivo seguido do *Gamma* ($\beta = 0,1$). Mais uma vez o CUBISTA, apesar de apresentar resultados muito próximos do *Gamma* e do *Superbee*, aciona mais cedo o esquema de primeira ordem.

Na Fig. 3.10d apresentam-se os resultados para a semi-elipse obtidos com o esquema CDS, com o *Upwind* e com o CUBISTA. Da mesma forma que no caso do perfil em degrau, o esquema de diferenças centrais apresenta instabilidades numéricas, assim como um excesso de compressibilidade no topo da elipse. Na Fig. 3.10e, apresenta-se uma comparação entre o CUBISTA e os esquemas que apresentaram melhores resultados. O *Gamma*, novamente na sua forma mais compressiva ($\beta_{TVD} = 0,1$), apresenta resultados similares ao CUBISTA na zona da suavização.

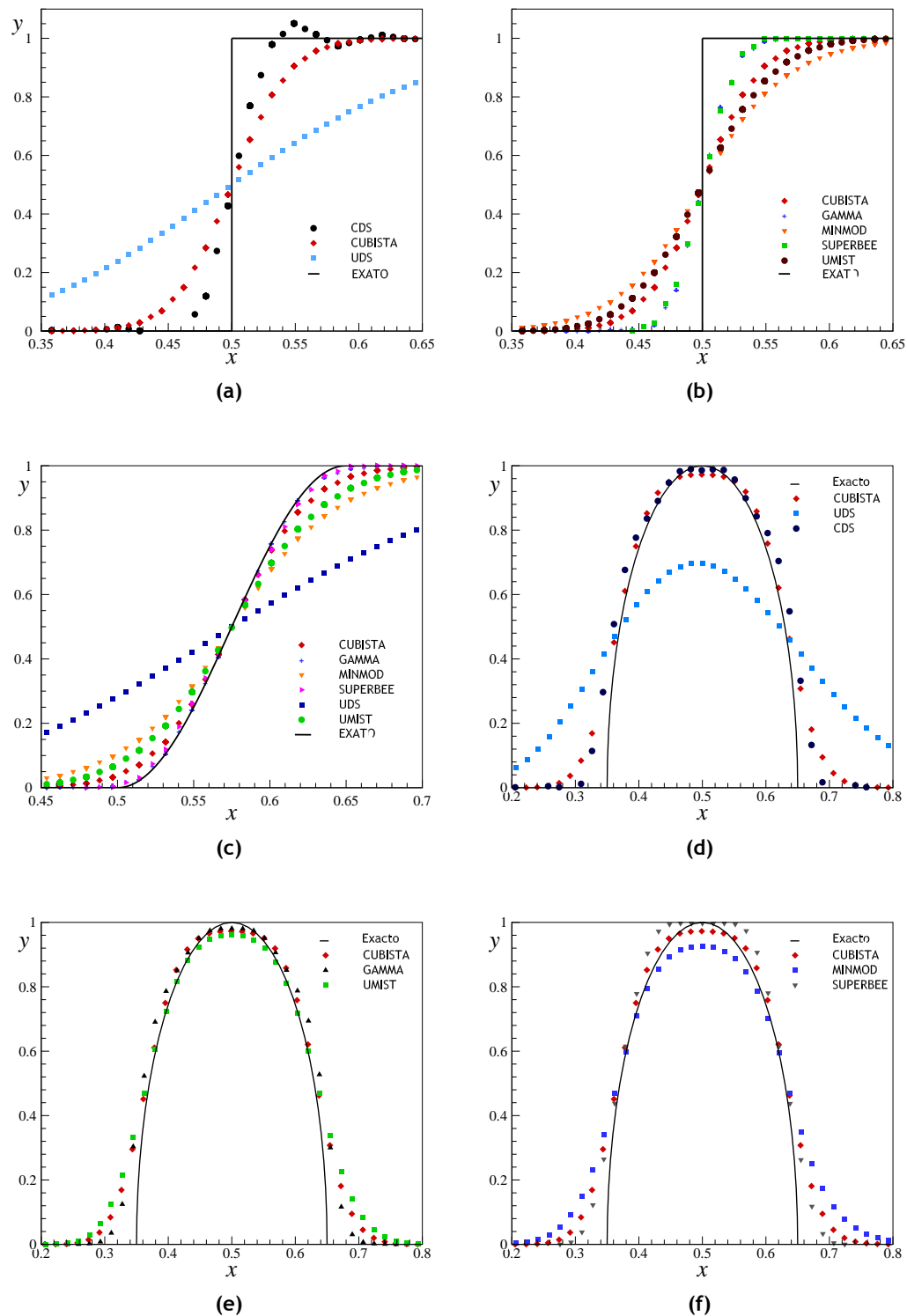


Figura 3.10: Resultados obtidos para o perfil em degrau: a) Comparação entre o CUBISTA e os esquemas *upwind* e de diferenças centrais; b) Comparação com outros esquemas de alta resolução. c) Resultados obtidos para o perfil \sin^2 . Resultados obtidos para o perfil referente à semi-elipse: d) Comparação entre o CUBISTA e os esquemas de interpolação *upwind* e de diferenças centrais; e) Comparação com outros esquemas de alta resolução; f) Resultados obtidos para os esquemas de alta resolução que apresentaram os piores resultados.

No entanto, na zona de “*clipping*”, ou seja na base da semi-elipse, é o esquema que apresenta melhores resultados. A Fig. 3.10f mostra os dois esquemas que geraram os piores resultados, nomeadamente: o *Superbee* que introduz demasiada compressividade, transformando uma onda que devia ser curva numa onda quase quadrada; e o *Minmod* que apresenta algum excesso de difusão numérica.

3.5.1.2 Resultados para o escoamento transónico sobre um ressalto

Nesta secção vamos aplicar o CUBISTA a um caso bem mais complexo do que o anterior. Este requer a resolução do sistema de equações de Euler através da utilização de um algoritmo de resolução (Xisto et al., 2010). Note-se que, na secção 4.1, o algoritmo proposto é ligeiramente diferente e bem mais preciso do que aquele que foi utilizado neste caso de teste. Contudo e nesta fase, a precisão do algoritmo não é de todo importante, uma vez que apenas se pretende comparar o esquema de diferenciação implementado com os outros esquemas disponíveis.

Na Fig. 3.11a está representada a malha do tipo estruturado, com um total de 128×35 nós, que foi utilizada. O comprimento do ressalto é igual à altura do canal, e a sua espessura é igual a dez por cento dessa mesma altura. Foram consideradas as seguintes condições de fronteira: à entrada foi imposta uma temperatura e pressão total; à saída foi imposta a pressão estática e todas as outras variáveis foram extrapoladas para fora do domínio de solução. Apesar do escoamento à entrada e à saída ser subsónico, este apresenta uma onda de choque que se encontra situada numa zona a jusante do topo do ressalto. Esta onda de choque origina uma descontinuidade que se pretende resolver com a maior exatidão possível.

A Fig. 3.11b mostra os resultados obtidos para a distribuição do número de Mach na parede inferior. Estes foram calculados com o recurso a alguns dos esquemas de interpolação analisados na secção anterior. Note-se que o eixo das abcissas foi aumentado de forma a visualizar-se a região da descontinuidade. Como podemos observar os resultados aqui apresentados seguem a mesma linha dos resultados obtidos anteriormente. Ou seja, o esquema mais difusivo é o *Upwind*, apresentando resultados completamente irrealistas, seguido do esquema *Minmod*. Neste caso de teste, e de forma a garantir o nível de convergência do CUBISTA, foi necessário impor ao *Gamma* um parâmetro TVD mais elevado ($\beta = 0,5$). Desta forma, este esquema de diferenciação torna-se bastante mais difusivo. Verificou-se que os resultados obtidos com o *Gamma* pioravam em relação aos calculados com CUBISTA, e mesmo em relação aos que foram obtidos pelo UMIST. Esta situação não se verificava nos casos de teste anteriores. Foi realizado um teste com esquema *Superbee*, mas este mostrou-se incapaz de atingir uma solução convergida.

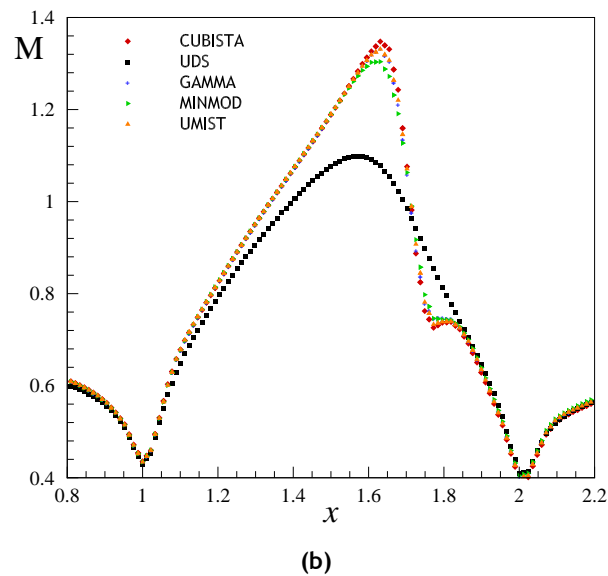
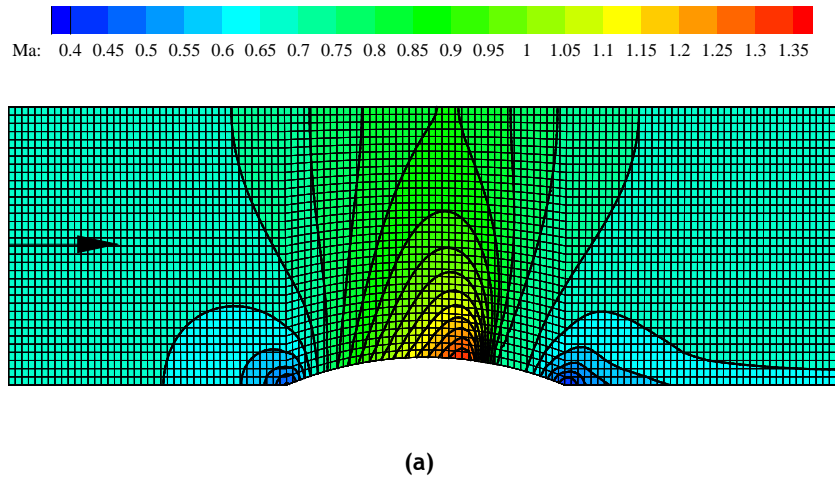


Figura 3.11: a) Malha utilizada no cálculo do escoamento transônico sobre um ressalto. Através da distribuição do número de Mach podemos visualizar que o escoamento à entrada e à saída é subsônico, apresentando uma onda de choque numa zona ligeiramente a jusante do topo do ressalto. b) Resultados obtidos para a onda de choque. Como já era esperado o esquema *Upwind* anula completamente este fenómeno físico. O esquema TVD *Minmod* continua bastante dissipativo e o UMIST apresentou melhores resultados que o *Gamma* ($\beta = 0,5$).

3.6 Nota conclusiva

Neste capítulo foi apresentado o método de discretização das equações de governo. Foram deduzidas as formulações utilizadas nas aproximações de todos os termos da equação de transporte genérica, e apresentaram-se algumas técnicas de discretização temporal. Foram abordadas algumas técnicas de interpolação e deu-se especial atenção aos esquemas limitadores de fluxo. O capítulo foi encerrado com a implementação de um novo esquema de diferenciação no código em uso.

Capítulo 4

Método numérico para as equações de Euler e MHD a número de Mach arbitrário

Uma análise da literatura revela que existem inúmeros métodos de análise de escoamento compressível a número de Mach arbitrário. Todavia, o desenvolvimento de métodos similares para a análise de escoamento magnetohidrodinâmico é praticamente inexistente. Neste capítulo vai ser descrito um novo método de análise de escoamento compressível MHD, o qual deverá ser aplicável a uma vasta gama de números de Mach. Inicialmente o método será desenvolvido para a resolução das equações de Euler, que podem ser consideradas como um caso especial das equações MHD quando os campos magnéticos são nulos. Posteriormente o método será adaptado para abranger e tomar em conta as propriedades matemáticas inerentes às equações MHD.

4.1 Cálculo do escoamento compressível para um número de Mach arbitrário

Nesta secção vamos apresentar o modelo numérico desenvolvido para resolver as equações de Euler a um número de Mach arbitrário. O algoritmo adotado para acoplar as variáveis dependentes é uma versão do PISO para escoamento compressível. A escolha por um algoritmo desta natureza recaiu na flexibilidade que nos é dada pela equação da pressão (Eq. 4.24), no que toca à resolução de escoamentos a um número de Mach variável. Foi mostrado por Demirdzic et al. (1993) que esta equação tem a particularidade de se ajustar à natureza local do escoamento, o que vai permitir que o mesmo método possa ser aplicado a todo o domínio de cálculo. Repare-se que a dominância de cada um dos termos presentes na equação da pressão está diretamente relacionada com o quadrado do número de Mach. O termo laplaciano na equação (4.24) relaciona-se com o termo convectivo através de $1/M^2$. Esta relação pressupõe que, para escoamentos a número de Mach elevado, o termo convectivo é o termo dominante, o que vai refletir a natureza hiperbólica do escoamento. Por outro lado, se estivermos perante um número de Mach reduzido, o termo dominante será o termo laplaciano. Neste último caso, a equação a resolver será uma equação de Poisson, que normalmente é resolvida em casos de escoamento incompressível.

A forma integral das equações de governo garante que as propriedades de conservação sejam localmente satisfeitas para cada VC, e globalmente satisfeitas para o restante domínio de solução. Como tal, esta parece ser a melhor abordagem quando se pretende calcular as soluções descontínuas que podem surgir no escoamento. Posto isto, o método que vai ser utilizado na discretização do sistema de equações é o método de volumes finitos apresentado no capítulo

3. O sistema de equações de governo sobre o qual nos vamos debruçar é o de Euler. Claro que poderíamos optar pelas equações de Navier-Stokes, uma vez que também estas admitem soluções descontínuas. No entanto, como se pretende desenvolver um método o mais robusto possível, vamos negligenciar os termos de segunda ordem proporcionais à viscosidade do fluido. Considera-se que a exclusão destes termos não afeta em nada o processo de desenvolvimento de um algoritmo desta natureza.

Uma das dificuldades que podemos encontrar no desenvolvimento de um método para Mach arbitrário, é a de como conciliar as propriedades do escoamento com as propriedades matemáticas do sistema de equações. Já aqui foi referido que a equação da pressão permite refletir a natureza hiperbólica e parabólica do escoamento. Isso é garantido através de uma relação direta entre os seus termos convectivos e “difusivos” com o número de Mach. Existem várias formas de formular uma equação deste tipo. Neste trabalho, esta equação vai ser deduzida a partir da equação da quantidade de movimento, introduzida na equação para a conservação de massa de forma a satisfazer a continuidade.

Na secção 4.1.1 vamos analisar o método numérico de resolução, onde vamos dar especial ênfase ao esquema utilizado no cálculo do fluxo mássico, e da pressão nas faces dos volumes de controlo. Posteriormente, vamos apresentar em detalhe o algoritmo de resolução utilizado no acoplamento das variáveis dependentes, neste caso compostas pelas três componentes da velocidade, pela energia total e pela pressão. Uma vez que este é um algoritmo baseado na pressão, a massa volúmica será uma variável derivada e o seu valor final será calculado através de uma equação de estado. Finalmente, na secção 4.1.2 serão apresentadas as condições de fronteira que foram utilizadas na análise de escoamento compressível.

4.1.1 Método numérico para resolução das equações de governo

Nesta secção vai ser explicado em pormenor o método numérico desenvolvido como parte desta tese de doutoramento. De forma a obter os fluxos convectivos e de pressão, vamos utilizar um esquema numérico inicialmente dirigido a algoritmos do tipo DBA. Este esquema, denominado AUSM (*Advection Upwind Splitting Method*), utiliza funções de interpolação baseadas no número de Mach para o cálculo da velocidade e da pressão nas faces dos volumes de controlo. Como já foi referido na revisão bibliográfica, este método apresenta algumas variantes que foram sendo introduzidas com o intuito de melhorar a sua robustez e precisão. A variante que aqui vai ser adaptada, e que vamos abordar de seguida, é denominada $AUSM^+ - up$ (Liou, 2006). O acrónimo $-up$ refere-se aos termos dissipativos que são introduzidos nas funções de interpolação, de forma a garantir o acoplamento entre a pressão e a velocidade para escoamentos a número de Mach reduzido. Vai ser demonstrado que o efeito associado a estes termos é semelhante ao que nos é dado pelo termo de pressão de quarta ordem implícito ao esquema de Rhie e Chow (1983). Todavia, vamos verificar que para o cálculo de escoamento transónico e supersónico, quando comparado com a interpolação de Rhie-Chow, as vantagens da utilização do esquema $AUSM^+ - up$ são claramente evidentes.

A técnica de interpolação de Rhie e Chow é normalmente adotada quando estamos perante um arranjo centrado das variáveis. Já aqui foi referido que a utilização desta técnica de distribuição das variáveis é bastante útil, uma vez que simplifica a extensão do código numérico para

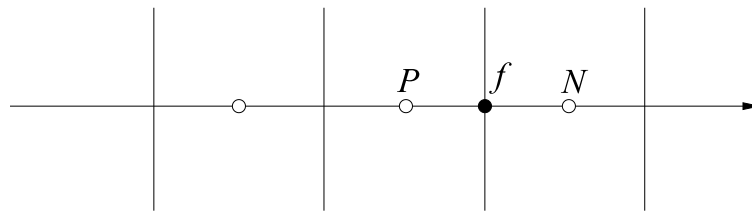


Figura 4.1: Representação uni-dimensional da malha numérica utilizada no novo método.

malhas arbitrariamente não-estruturadas. Contudo, foi demonstrado por vários autores (Zhao et al., 2005; Nerinckx et al., 2006) que a interpolação Rhie-Chow apresenta maus resultados na presença de gradientes adversos de pressão. Por isso, esta técnica deve ser abandonada ou melhorada, de forma a garantir níveis adequados de estabilidade e precisão no cálculo de escoamentos com descontinuidades. No algoritmo que aqui vai ser proposto esta técnica de interpolação é completamente descartada e vai-se optar pela utilização do esquema $AUSM^+ - up$. Vai ser demonstrado que a utilização da técnica $AUSM^+ - up$ permite calcular escoamentos transónicos e supersónicos com um grau de precisão bastante mais elevado. Isto porque este método tem a capacidade de “desligar” os termos dissipativos de quarta ordem em escoamentos onde o número de Mach é superior a um. Esta característica está ausente na técnica de interpolação de Rhie-Chow, na qual os termos de quarta ordem de pressão são constantemente introduzidos em todo o domínio de cálculo. Sabe-se que a introdução destes termos resulta num excesso de dissipação numérica onde esta é desnecessária, uma vez que em escoamentos a Mach elevado o acoplamento entre a velocidade e a pressão não é tão restritivo. Ao mesmo tempo, a técnica $AUSM^+ - up$ possui a capacidade de apenas “ligar” estes termos em escoamentos a baixa velocidade, garantido assim que o maior acoplamento entre a velocidade e pressão é satisfeito. Como vamos mostrar na secção 4.2, a utilização deste esquema vai permitir uma fácil extensão do modelo numérico para a resolução do sistema de equações MHD.

Seguidamente vai explicar-se a técnica desenvolvida para calcular o fluxo mássico, a velocidade e a pressão nas faces dos volumes de controlo utilizando o esquema $AUSM^+ - up$. Posteriormente, a forma de incorporar as definições $AUSM^+ - up$ num algoritmo do tipo PBA, nomeadamente o PISO, será tratada em pormenor.

4.1.1.1 Cálculo dos fluxos conservativos com o esquema $AUSM^+ - up$

Começa-se por expor como é que os fluxos podem ser calculados com a técnica $AUSM^+ - up$ de Liou (2006). Por uma questão de simplificação vamos apenas estudar o caso uni-dimensional, tendo em mente que a extensão para o caso bidimensional ou tridimensional se faz sem complexidades adicionais. Vamos considerar que o índice inferior f representa a face do VC entre as células P e N , veja-se a Fig. 4.1.

Utilizando o método $AUSM^+ - up$ a velocidade nas faces é calculada através de uma interpolação dependente do número de Mach,

$$U_f = a_f M_f, \quad (4.1)$$

onde a_f é designada como velocidade do som comum, e M_f é o número de Mach calculado na face do VC. O conceito de velocidade do som comum é bastante útil, uma vez que permite obter uma solução exata de descontinuidades de contacto quando estas se deslocam no domínio computacional. Repare-se que esta variável é apenas relevante em termos numéricos. Como tal, é de fácil adaptação para a resolução de escoamentos a Mach arbitrário (Liou e Edwards, 1999). A velocidade do som comum, a_f , é definida pelo valor mínimo da velocidade do som à esquerda e à direita da face,

$$a_f = \min(\hat{a}_L, \hat{a}_R), \quad (4.2)$$

onde os estados à esquerda e direita vêm dados por:

$$\hat{a}_L = \frac{(a^*)^2}{\max(a^*, U_L)}, \quad \hat{a}_R = \frac{(a^*)^2}{\max(a^*, -U_R)}. \quad (4.3)$$

As variáveis U_L e U_R são as contribuições da velocidade à esquerda e direita da face. Em escoamentos multi-dimensionais, a magnitude da velocidade deve ser obtida através do produto interno entre o vetor da velocidade, \mathbf{U} , e o vetor de valor unitário normal à face e a apontar para fora do volume de controlo,

$$U_{L,R} = \mathbf{U}_{L,R} \cdot \hat{\mathbf{S}}_f. \quad (4.4)$$

A velocidade do som crítica, a^* , para um gás ideal pode ser calculada da seguinte forma:

$$a^* = \sqrt{\frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} H_t}, \quad (4.5)$$

onde $H_t = e_t + p/\rho$ representa o valor local da entalpia total e γ é o índice adiabático. As contribuições do número de Mach à esquerda e direita da face vêm finalmente dadas por:

$$M_L = \frac{U_L}{a_f}; \quad M_R = \frac{U_R}{a_f}. \quad (4.6)$$

De forma a equilibrar a quantidade de dissipação introduzida pelo esquema AUSM com a velocidade do escoamento, é necessário introduzir um fator de pré-condicionamento, f_a . Foi demonstrado por Edwards e Liou (1998) que este parâmetro pode ser utilizado para pré-condicionar o número de Mach e a velocidade do som. No entanto, Liou (2006) verificou que esta abordagem resultava em algumas instabilidades à medida que o número de Mach se aproximava de zero. Como tal, foi sugerida uma abordagem mais simples e robusta, onde o fator de pré-condicionamento deve apenas ser aplicado nos termos dissipativos que são adicionados aos fluxos convectivos e de pressão. O fator de pré-condicionamento é uma função do número de Mach local de referência,

$$f_a(M_o) = M_o(2 - M_o) \geq 0 \approx 2M_o, \text{ se } M_o \rightarrow 0, \quad (4.7)$$

onde o número de Mach de referência, M_o , vem dado por:

$$M_o^2 = \min[1, \max(\bar{M}^2, Ma^2)], \quad (4.8)$$

$\bar{M}^2 = \frac{1}{2}(M_L^2 + M_R^2)$ é o valor médio do número de Mach, e Ma é o número de Mach de escoamento livre à entrada. Utilizando M_L e M_R , o número de Mach na face é calculado da seguinte forma:

$$M_f = \mathcal{M}_{(4)}^+(M_L) + \mathcal{M}_{(4)}^-(M_R) + D_p, \quad (4.9)$$

onde $\mathcal{M}_{(4)}^{\pm}(M)$ são funções polinomiais de quarta ordem (Liou, 1996),

$$\mathcal{M}_{(4)}^{\pm}(M) = \begin{cases} \mathcal{M}_{(2)}^{\pm} \left(1 \mp 16\beta \mathcal{M}_{(2)}^{\mp} \right) & |M| < 1 \\ \mathcal{M}_{(1)}^{\pm} & |M| \geq 1 \end{cases}, \quad (4.10)$$

com

$$\mathcal{M}_{(1)}^{\pm}(M) = \frac{1}{2} (M \pm |M|) \quad (4.11)$$

$$\mathcal{M}_{(2)}^{\pm}(M) = \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2. \quad (4.12)$$

O termo difusivo de pressão, D_p , deve ser incluído no cálculo do número de Mach na face (Eq. (4.9)) de forma a garantir o acoplamento entre a velocidade e a pressão em escoamentos a baixa velocidade,

$$D_p = -\frac{K_p}{f_a} \max(1 - \bar{M}^2, 0) \frac{p_R - p_L}{\rho_f a_f^2}, \quad (4.13)$$

onde $0 < K_p < 1$ é um coeficiente de dissipação. O fator $\max(1 - \bar{M}^2, 0)$ atua como um comutador, que deve seguir uma função monótona crescente de zero até um, sendo apenas ativado em regiões onde $M < 1$. O valor médio da massa volúmica local é obtido através da média aritmética entre os valores à direita e à esquerda da face, $\rho_f = (\rho_L + \rho_R)/2$. Em escoamentos a baixa velocidade a diferença de pressões, $\Delta p = p_R - p_L$, pode resultar num valor muito reduzido. Esta situação é contornada através da introdução do parâmetro f_a , que vai garantir um melhor equilíbrio entre o termo difusivo de pressão e a velocidade do escoamento.

A pressão nas faces é calculada da seguinte forma:

$$p_f = \mathcal{P}_{(5)}^+(M_L) p_L + \mathcal{P}_{(5)}^-(M_R) p_R + D_u, \quad (4.14)$$

onde $\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}(M)$ é uma função polinomial de quinta ordem dada por:

$$\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}(M) = \begin{cases} \mathcal{M}_{(2)}^{\pm} \left((\pm 2 - M) \mp 16\alpha M \mathcal{M}_{(2)}^{\mp} \right) & |M| < 1 \\ \frac{1}{M} \mathcal{M}_{(1)}^{\pm} & |M| \geq 1 \end{cases}. \quad (4.15)$$

O termo D_u é um termo difusivo de velocidade, introduzido com o mesmo propósito do termo difusivo de pressão da equação (4.9),

$$D_u = -K_u \mathcal{P}_{(5)}^+(M_L) \mathcal{P}_{(5)}^-(M_R) (\rho_L + \rho_R) f_a a_f (U_R - U_L). \quad (4.16)$$

Na equação (4.16) K_u é novamente um coeficiente de dissipação que deve obedecer a: $0 < K_u < 1$. Repare-se que o fator de pré-condicionamento, f_a , é novamente introduzido de forma a equilibrar a contribuição difusiva do esquema AUSM com a velocidade do escoamento.

Os parâmetros α e β presentes nas funções polinomiais são dados por:

$$\beta = 1/8, \quad \alpha = \frac{3}{16} (-4 + 5f_a^2) \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{16} \right]. \quad (4.17)$$

Repare-se que o parâmetro α é função de f_a . A Fig. 4.2b mostra o gráfico referente à função $\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}$ obtida para diferentes valores de α . Note-se que f_a é função do número de Mach, de tal forma que: $f_a \rightarrow 0$ quando $M \rightarrow 0$; e $f_a = 1$ para valores de $M \geq 1$. Assim, à medida que o

número de Mach se aproxima de zero, $\alpha \rightarrow -3/4$ e a curva aproxima-se mais rapidamente de $\mathcal{P}_{(5)}^{\pm} = 0,5$. Ao inspecionarmos a equação (4.14) verificamos que, para este valor de $\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}$, a pressão é obtida nas faces através do método de diferenças centrais. Este é um dos requisitos do escoamento a baixa velocidade, de forma a ser garantido um nível de precisão de segunda ordem. O fator de pré-condicionamento, quando incluído no cálculo do parâmetro α , tende a suavizar a transição da função $\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}$ entre o regime supersônico e subsônico. Para os restantes coeficientes de dissipação assumiram-se os valores sugeridos por Liou (2006), $K_p = 0,25$ e $K_u = 0,75$.

Vamos agora analisar graficamente as funções polinomiais (4.10) e (4.15). Na Fig. 4.2 estão presentes as distribuições gráficas das funções polinomiais $\mathcal{M}_{(4)}^{\pm}(M)$, para um valor de $\beta = \frac{1}{8}$, e $\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}(M)$ para os dois valores de α correspondentes aos limites da equação (4.17). A função presente na Fig. 4.2a é construída de forma a satisfazer as seguintes propriedades (Liou, 1996):

- Por uma questão de consistência, $\mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^-(M) = M$;
- $\mathcal{M}^+(M) \geq 0$ e $\mathcal{M}^-(M) \leq 0$;
- \mathcal{M}^{\pm} são funções monótonas crescentes de M ;
- $\mathcal{M}^+(M) = -\mathcal{M}^-(M)$, ou seja são funções simétricas em relação à origem;
- $\mathcal{M}^+(M) = M$ para $M \geq 1$ e $\mathcal{M}^-(M) = M$ para $M \leq -1$;
- A derivada de $\mathcal{M}^{\pm}(M)$ deve ser uma função contínua.

A função polinomial presente na Fig. 4.2b também é construída de forma a satisfazer um conjunto de propriedades, nomeadamente:

- Por uma questão de consistência, $\mathcal{P}^+(M) + \mathcal{P}^-(M) = 1$;
- $\mathcal{P}^{\pm}(M) \geq 0$, uma vez que as pressões não podem ser negativas;
- $\mathcal{P}^+(M) = \mathcal{P}^-(M)$, ou seja as funções são simétricas em relação ao eixo vertical;
- $\mathcal{P}^+(M) = 1$ para $M > 1$ e $\mathcal{P}^-(M) = 1$ para $M < -1$;
- A derivada de $\mathcal{P}^{\pm}(M)$ deve ser uma função contínua.

Os valores aqui sugeridos para o parâmetro $\beta = 1/8$ e para o parâmetro $\alpha = 3/16$, são recomendados por Liou (1996) para o cálculo de escoamento compressível. No entanto, já referimos que o valor de α utilizado no nosso modelo é uma variável dependente do número de Mach. Assim, o valor efetivamente utilizado vai estar no intervalo $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{16}]$, pois à medida que M se aproxima de 1 o valor de α tende para $3/16$, e o contrário acontece quando $M \rightarrow 0$.

A massa volúmica no caudal mássico, tratando-se de uma propriedade convectada pelo campo de velocidades, deve ser calculada de forma *upwind*, ficando,

$$\dot{m}_f = \frac{1}{2} [U_f (\rho_L + \rho_R) - |U_f| (\rho_R - \rho_L)]. \quad (4.18)$$

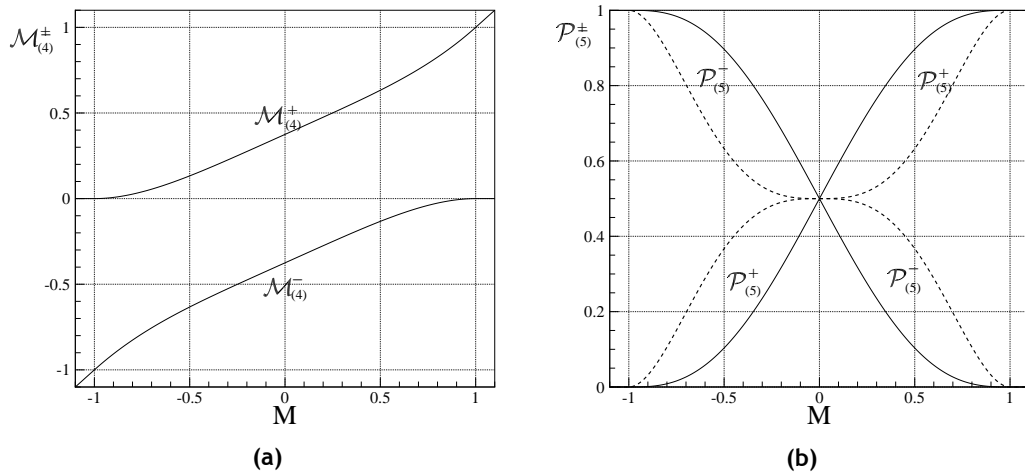


Figura 4.2: Gráficos representativos das funções de interpolação baseadas no número de Mach. a) Função polinomial $\mathcal{M}_{(4)}^{\pm}$, repare-se que à medida que $|M| > 1$, $\mathcal{M}_{(4)}^{\pm} = |M|$. b) Função polinomial $\mathcal{P}_{(5)}^{\pm}$, a traço contínuo para $\alpha = 3/16$ e a traço interrompido para $\alpha = -3/4$.

O termo de fluxo sónico, F_s , que aparece na equação da pressão é também calculado pelo esquema *upwind* da seguinte forma:

$$F_s^* = \frac{1}{2} \left[\hat{U}_f^* (\psi_L^n + \psi_R^n) - \left| \hat{U}_f^* \right| (\psi_R^n - \psi_L^n) \right], \quad (4.19)$$

onde \hat{U}_f representa a velocidade na face calculada a partir da equação da quantidade de movimento sem incluir o termo relativo ao gradiente de pressão, veja-se a equação 4.23. Os índices superiores n e $*$ são referentes aos valores obtidos no passo de tempo anterior (n) e aos valores estimados ($*$) do campo de velocidade. Estes índices são aqui introduzidos de forma a simplificar a dedução do algoritmo que vai ser apresentado na próxima secção.

4.1.1.2 Algoritmo de resolução

Vamos agora explicar a implementação do método descrito na secção anterior num algoritmo do tipo PISO. O método segue uma abordagem segregada, o que implica que o conjunto das equações de governo seja resolvido de forma sequencial. Ou seja, cada equação é resolvida para a variável de referência assumindo que as outras variáveis não variam. O método segregado é iterativo por natureza e, no caso do PISO, envolve passos de previsão e correção. No passo de previsão, o campo de velocidade é calculado através da resolução da equação da quantidade de movimento na sua forma implícita. Esta é baseada nos valores da pressão obtidos no passo de tempo anterior, ou estimados se estivermos no passo de tempo inicial. No passo de correção é deduzida e resolvida uma equação implícita para a pressão e, posteriormente, o campo de velocidade e a massa volúmica são corrigidos através de expressões algébricas. Como já foi referido, o índice superior n é relativo aos valores obtidos no passo de tempo anterior, e os índices superiores $*,**,***$ representam as consecutivas previsões e correções do algoritmo PISO. Na Fig. 4.3 apresenta-se o fluxograma do algoritmo proposto.

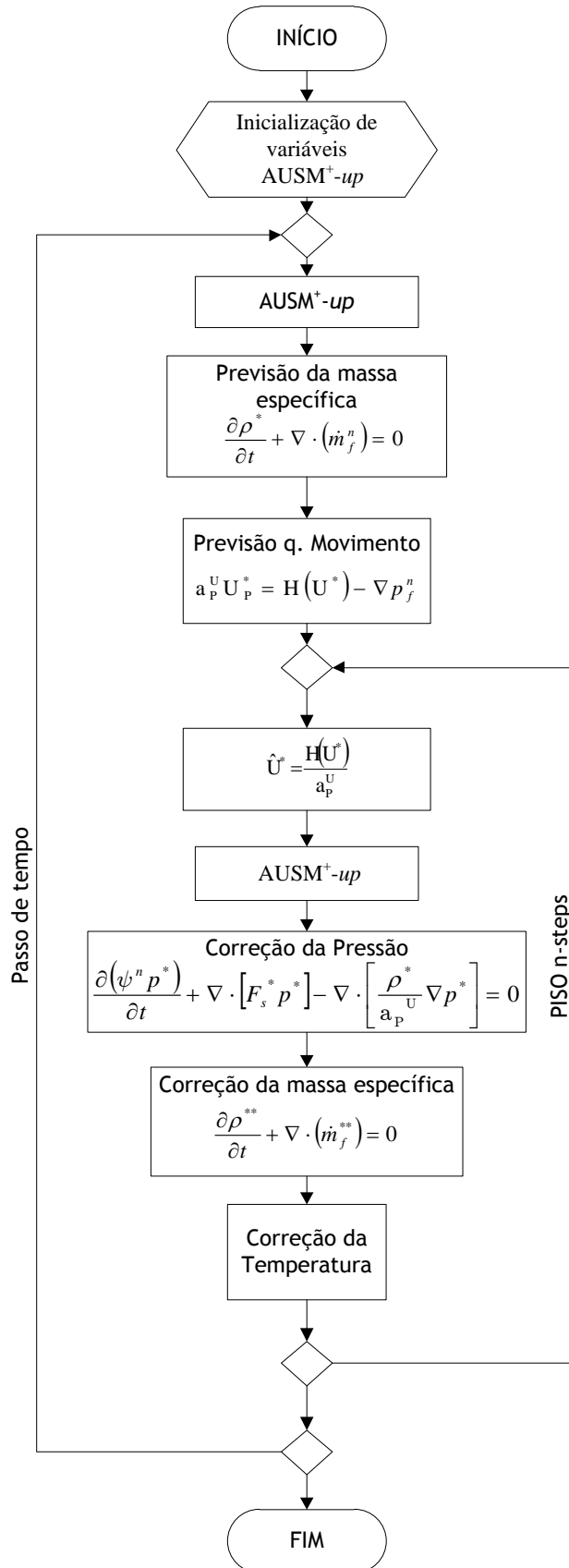


Figura 4.3: Fluxograma representativo do algoritmo implementado para a resolução do sistema de equações de Euler a um número de Mach arbitrário.

Passo de previsão

Durante o passo de previsão, assume-se que o valor de todas as variáveis dependentes é conhecido ou foi calculado no passo de tempo anterior. No início de cada passo de tempo é utilizado o método AUSM⁺ – *up* de forma a calcular o fluxo mássico (\dot{m}_f^n), a velocidade na face (U_f^n) e a pressão na face (p_f^n). De forma a aumentar a robustez do algoritmo é resolvida uma equação explícita para a continuidade,

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\dot{m}_f^n) = 0. \quad (4.20)$$

A equação (4.20) permite-nos calcular uma primeira estimativa para a massa volúmica. A primeira estimativa do campo de velocidade, \mathbf{U}^* , é obtida através da resolução da equação da quantidade de movimento na sua forma implícita. O gradiente de pressão é tratado de uma forma explícita, utilizando o valor da pressão calculado nas faces com o método AUSM⁺ – *up*. Este é o passo que antecede o ciclo PISO. A equação discretizada da quantidade de movimento vem dada por:

$$a_P^U \mathbf{U}_P^* = \mathbf{H}(\mathbf{U}^*) - \nabla p_f^n, \quad (4.21)$$

onde a_P^U representa o coeficiente central da matriz \mathbf{U} . O operador $\mathbf{H}(\mathbf{U})$ é construído utilizando a parte explícita do termo temporal, e os termos convectivos dos volumes de controlo vizinhos à célula de cálculo P ,

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}^*) = \frac{\mathbf{U}^n}{\Delta t} + \sum a_N^U \mathbf{U}_N^*. \quad (4.22)$$

Passo de correção

No passo de correção, o operador $\mathbf{H}(\mathbf{U}^*)$ é construído com base nos valores da primeira estimativa da velocidade. Utilizando este termo podemos calcular o campo de velocidade sem incluir os efeitos da força de pressão,

$$\hat{\mathbf{U}}^* = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U}^*)}{a_P^U}. \quad (4.23)$$

Os fluxos AUSM⁺ – *up* são novamente calculados dentro do ciclo PISO. O fluxo mássico e a velocidade na face são calculados a partir dos valores resultantes da primeira estimativa da velocidade. Isto resulta na seguinte atualização das variáveis: \dot{m}_f^* ; F_s^* ; U_f^* . Nesta fase o fluxo mássico \dot{m}_f^* não satisfaz ainda a equação da continuidade.

A equação da pressão é deduzida, e resolvida, utilizando a compressibilidade do passo de tempo anterior, ψ^n , e a primeira estimativa da massa volúmica, ρ^* . A dedução desta equação é feita através da combinação das equações (4.21) e (4.23) e forçando a satisfação da continuidade através da equação (4.20),

$$\frac{\partial (\psi^n p^*)}{\partial t} + \nabla \cdot [F_s^* p^*] - \nabla \cdot \left[\frac{\rho^*}{a_P^U} \nabla p^* \right] = 0. \quad (4.24)$$

A solução desta equação permite obter uma primeira estimativa para o campo de pressão, p^* . Em malhas não-ortogonais devem ser realizados vários passos de correção da não-ortogonalidade. Utilizando os valores da primeira estimativa da pressão, o fluxo mássico pode ser agora corrigido,

$$\dot{m}_f^{**} = |\mathbf{S}_f| \cdot \left[F_s^* (p)_f^* \right] - \frac{\rho^*}{a_P^U} (\mathbf{S}_f \cdot \nabla p^*)_f. \quad (4.25)$$

A correção da velocidade, \mathbf{U}^{**} , é obtida de uma forma explícita, utilizando o novo gradiente de pressão, ∇p^* , e a primeira estimativa da velocidade,

$$\mathbf{U}^{**} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U}^*)}{a_p^U} - \frac{\nabla p^*}{a_p^U} = \hat{\mathbf{U}}^* - \frac{\nabla p^*}{a_p^U}. \quad (4.26)$$

Para a correção da massa volúmica, ρ^{**} , devemos resolver uma equação explícita para a continuidade (Eq. (4.20)), que deve ser baseada no fluxo mássico corrigido com a equação (4.25).

Podemos agora passar à resolução da equação (2.3) para a conservação da energia total. O campo de temperatura, T , pode finalmente ser atualizado através de uma equação de estado,

$$T^* = \frac{1}{c_v} \left[e_t^* - \frac{1}{2} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})^{**} \right]. \quad (4.27)$$

Utilizando o novo campo de temperatura, podemos calcular uma primeira estimativa para a compressibilidade, $\psi^* = 1/RT^*$, e uma nova correção para a massa volúmica $\rho^{***} = \psi^* p^*$.

Quando o último dos passos que foram pré-definidos para o PISO estiver concluído, podemos realizar uma última correção na massa volúmica através da respetiva equação de estado. Estes passos devem ser os suficientes de forma a garantir a satisfação da continuidade. Para isso, deve ser realizada uma comparação entre a massa volúmica obtida através da equação da continuidade e a massa volúmica obtida através da equação de estado, $\rho = \psi p$. Para todos os cálculos presentes na secção 5.1 utilizaram-se sempre dois passos de correção.

4.1.2 Implementação das condições de fronteira para cálculo de dinâmica de gases

A imposição das condições de fronteira é um dos aspetos mais importantes a ter em conta no desenvolvimento de métodos de análise numérica. Em cada parte da fronteira do domínio de solução, de forma a tornar possível a solução do sistema de equações, devem ser especificadas ou calculadas as variáveis dependentes. A natureza matemática das equações diferenciais de governo desempenha um papel de extrema importância, uma vez que permite estabelecer o número de variáveis dependentes que devem ser determinadas pelas condições de fronteira físicas e externas ao escoamento, e quantas devem ser extrapoladas do domínio interior. No caso de escoamento subsónico, sabemos que à entrada são impostas quatro condições de fronteira físicas e que a restante deve ser extrapolada a partir do interior do domínio de solução, enquanto à saída deve ser imposta uma única condição de fronteira física e as restantes são extrapoladas do domínio interior. Para o caso de escoamento supersónico devem ser impostas todas as variáveis à entrada, na saída essas mesmas variáveis devem ser extrapoladas a partir do domínio interior de solução.

Neste trabalho existem essencialmente cinco tipos de condições de fronteira: de entrada; de saída; do tipo periódico; de simetria; e de parede sólida. Nesta secção vão ser apresentadas as condições de fronteira para escoamento compressível, invíscido ou viscoso. Estas variam consoante o regime de escoamento, seja de tipo subsónico ou de tipo supersónico, veja-se Ferziger e Peric (2002).

Para o caso subsónico as condições de fronteira definidas pela física do problema devem ser consideradas:

- Pressão total e temperatura total dadas na entrada;
- Pressão estática dada na saída;
- Condição de não-eskorregamento (viscoso) ou skorregamento (invíscido) definidas nas paredes sólidas.

Condição de pressão e temperatura total à entrada

Esta condição é imposta através da relação isentrópica válida para um gás ideal,

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{\gamma RT} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (4.28)$$

onde p_0 é a pressão total na entrada e p é a pressão estática extrapolada do interior do domínio. Quando estas pressões são conhecidas, esta equação permite calcular a magnitude da velocidade à entrada. A temperatura estática pode ser imposta à entrada, ou também pode ser obtida através da respetiva relação isentrópica,

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{\gamma RT} \right). \quad (4.29)$$

Condição de pressão estática à saída

Esta condição complementa a condição de pressão imposta na entrada e, como qualquer condição de fronteira à saída, deve garantir a satisfação das propriedades de conservação. Desta forma, a pressão estática deve ser imposta à saída e as restantes variáveis devem ser extrapoladas para fora do domínio de solução. A extrapolação das variáveis a partir do interior do domínio de solução é equivalente à imposição de uma condição de fronteira do tipo *Neumann*, que estabelece o valor do gradiente de uma determinada variável na fronteira do domínio,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi|_{fronteira} = Const., \quad (4.30)$$

onde \mathbf{n} representa o vetor unitário com direção normal à fronteira. O valor de ϕ na fronteira é calculado com base no valor na célula P , no interior do domínio, e no valor prescrito para o gradiente,

$$\phi_{fronteira} = \phi_p + \mathbf{d} \cdot \nabla \phi|_{fronteira}. \quad (4.31)$$

Se for estipulado um valor nulo para o gradiente,

$$\phi_{fronteira} = \phi_p, \quad (4.32)$$

como tal na fronteira o valor de ϕ calcula-se por uma extrapolação simples da variável.

Condição de parede sólida

Na parede as condições de fronteira são distintas para o vetor de velocidade e para as restantes variáveis dependentes. Para o caso da velocidade, quando se trata de paredes sólidas estacionárias, considera-se que não existe escoamento segundo a normal à superfície,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.33)$$

onde \mathbf{n} representa o vetor unitário com direção normal à parede. Adicionalmente, para o caso viscoso, deve ser imposta uma condição de não-escorregamento, o que implica que fluido deve assumir a velocidade da parede,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{parede}. \quad (4.34)$$

No caso de a parede se encontrar estacionária a velocidade do fluido deve ser igual a zero. Em escoamento invíscido, a condição de escorregamento assume que na parede a componente tangencial da velocidade, U_t , é contínua,

$$\frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (4.35)$$

Condições de fronteira do tipo periódico e simétricas

As condições de fronteira periódicas, permitem reduzir significativamente o domínio de cálculo em escoamentos que não variam numa dada direção, como é o caso de escoamentos axissimétricos. Estas condições de fronteira também podem ser aplicadas em casos onde a própria geometria é periódica, veja-se por exemplo um canal de passagem de uma turbina axial. Cada par de fronteiras periódicas deve partilhar a informação como se estivesse fisicamente conectada. Assim, os pares periódicos devem assumir o mesmo número de volumes de controlo e a área de cada uma das suas faces deve possuir uma dimensão semelhante. As faces não necessitam de possuir exatamente a mesma orientação, como é o caso das turbomáquinas de geometria anular. No entanto, na situação mencionada, deve-se ter em conta o ângulo de rotação da malha.

A condição de simetria garante que a reflexão das propriedades seja satisfeita, o que permite resolver casos que possuem geometrias ou escoamentos simétricos sem simular a geometria completa. A lei da reflexão divide o problema em duas regiões, uma região relativa ao domínio de solução que possui os volumes de controlo com centróide em P , e a sua respetiva imagem de espelho que é constituída por volumes de controlo fictícios com centróide em P' , veja-se Oliveira (1992). Esta condição obriga a que os campos vetoriais possuam componentes tangenciais com sinais idênticos em ambas as regiões, e que as suas componentes normais assumam sinais opostos,

$$(U_t)_P = (U_t)_{P'}, \quad (4.36)$$

$$(U_n)_P = -(U_n)_{P'}. \quad (4.37)$$

Se um escoamento possui propriedades simétricas a sua componente normal à fronteira deve ser nula,

$$U_n |_{fronteira} = 0. \quad (4.38)$$

As restantes propriedades escalares devem ser contínuas através do plano de simetria.

4.2 Resolução do sistema de equações MHD compressível em 3D

Para o cálculo numérico do escoamento MHD foram desenvolvidos dois grupos de algoritmos. O primeiro grupo foi criado para a resolução de escoamento MHD incompressível (Ni et al., 2007a; de les Valls et al., 2011) e o segundo grupo foi desenvolvido para o cálculo de escoamento MHD altamente compressivo (Ryu e Jones, 1995; Powell et al., 1999; Miyoshi e Kusano, 2005). Todavia, já aqui foi mencionado que existe um grande número de métodos capazes de resolver as equações de Euler para um número de Mach arbitrário. Foi também aqui referido que estas ferramentas numéricas são extremamente importantes no processo de análise de sistemas aeronáuticos e aeroespaciais, uma vez que escoamentos desta natureza são bastante frequentes em vários sistemas de propulsão como é o caso das tubeiras magnetoplasmadinâmicas. Sabe-se que estes sistemas propulsores são capazes de produzir no mesmo domínio de solução escoamentos que vão do limite quase incompressível ao limite hipersónico (Takeda e Yamamoto, 2002). Ainda assim, verifica-se uma inexistência de métodos de solução capazes de resolver as equações MHD para um número de Mach arbitrário.

Nesta secção vai ser descrito em pormenor o algoritmo desenvolvido no decurso desta tese para a resolução das equações MHD a número de Mach arbitrário. Este algoritmo é baseado na versão do PISO já tratada na secção 4.1, mas que necessita de ser adaptada para uma formulação resistiva e compressível das equações MHD. Na próxima subsecção vai ser deduzido o esquema numérico utilizado no cálculo dos fluxos conservativos que constituem o sistema MHD ideal. Posteriormente, vão ser apresentadas algumas das técnicas existentes para a correção da não-divergência do campo magnético. O algoritmo de resolução, desenvolvido para acoplar todas as variáveis dependentes, vai ser apresentado na subsecção 4.2.1.3.

4.2.1 Modelo numérico para cálculo de escoamento MHD multi-dimensional

No decurso desta secção vai ser apresentado o modelo numérico desenvolvido para o cálculo do escoamento MHD multi-dimensional. Inicialmente vai ser demonstrado como é que o conjunto de fluxos conservativos podem ser calculados utilizando uma variante do método AUSM, especialmente desenvolvida para o cálculo de escoamento MHD. Posteriormente, vamos apresentar alguns dos métodos numéricos que podem ser utilizados para garantir que a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ seja aproximadamente satisfeita. Finalmente vamos deduzir, e discutir, todos os passos do algoritmo de resolução que acopla as variáveis dependentes.

4.2.1.1 Cálculo dos fluxos conservativos

Para o cálculo dos fluxos conservativos adaptou-se a formulação sugerida por Han et al. (2009), que utiliza uma variante do método AUSMPW⁺ especialmente desenvolvida para o cálculo de escoamento MHD (AUSM-MHD). Para o caso de um escoamento MHD tridimensional, com variações ao longo das direcções x , y e z , o sistema de equações pode ser escrito na sua forma conservativa,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}_z}{\partial z}, \quad (4.39)$$

onde \mathcal{H} representa o vetor de estado para as variáveis conservativas e $\mathcal{F}_{x,y,z}$ representa os vetores de fluxo nas respetivas direções,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_x \\ \rho U_y \\ \rho U_z \\ \rho e_t \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_x = \begin{pmatrix} \rho U_x \\ \rho U_x^2 + p_G - B_x^2 \\ \rho U_x U_y - B_x B_y \\ \rho U_x U_z - B_x B_z \\ (\rho e_t + p_G) U_x - B_x (B_x U_x + B_y U_y + B_z U_z) \\ 0 \\ B_y U_x - B_x U_y \\ B_z U_x - B_x U_z \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_y = \begin{pmatrix} \rho U_y \\ \rho U_y U_x - B_y B_x \\ \rho U_y^2 + p_G - B_y^2 \\ \rho U_y U_z - B_y B_z \\ (\rho e_t + p_G) U_y - B_y (B_x U_x + B_y U_y + B_z U_z) \\ B_x U_y - B_y U_x \\ 0 \\ B_z U_y - B_y U_z \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\mathcal{F}_z = \begin{pmatrix} \rho U_z \\ \rho U_z U_x - B_z B_x \\ \rho U_z U_y - B_z B_y \\ \rho U_z^2 + p_G - B_z^2 \\ (\rho e_t + p_G) U_z - B_z (B_x U_x + B_y U_y + B_z U_z) \\ B_x U_z - B_z U_x \\ B_y U_z - B_z U_y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note-se que, novamente, foram escolhidas dimensões para \mathbf{B} de forma a que a permeabilidade magnética do vácuo, μ_0 , seja igual à unidade. A pressão global e a energia total contêm as respetivas contribuições do campo magnético,

$$p_G = p + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2), \quad (4.41)$$

$$e_t = \frac{1}{2} (U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) + c_v T + \frac{1}{2\rho} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2). \quad (4.42)$$

Na secção 4.1 foi mostrado como calcular o fluxo mássico e a pressão na face de um volume de controlo com o método AUSM⁺ – up . Para as equações de Euler, o vetor de fluxo na face f é escrito da forma:

$$\mathcal{F}_f = a_f (\mathcal{M}_4^+ \Phi_L + \mathcal{M}_4^- \Phi_R) + (\mathcal{P}_5^+ \mathbf{P}_L + \mathcal{P}_5^- \mathbf{P}_R), \quad (4.43)$$

onde a_f é novamente a velocidade do som comum na face. O vetor das variáveis conservativas é dado por $\Phi_{R,L} = (\rho, \rho \mathbf{U}, \rho H_t)_{R,L}^T$ e o vetor de pressão por $\mathbf{P}_{R,L} = (0, p, 0)_{R,L}^T$. Os índices inferiores L e R representam as contribuições das variáveis à esquerda e à direita da face f . Estes estados intermédios devem ser obtidos através de um esquema de interpolação que reflita

os fenómenos físicos envolvidos no problema em causa.

O método AUSM foi originalmente desenvolvido para a dinâmica dos gases, como tal a sua formulação é baseada nas velocidades características dadas pelo sistema de equações de Euler. Assim, este método não pode ser diretamente aplicado para a obtenção dos fluxos que resultam das equações MHD. Note-se que o sistema de equações MHD ideal possui sete velocidades características e não somente três, como no caso do sistema de equações de Euler. Ainda assim, o esquema AUSM não necessita de analisar toda a estrutura do sistema de equações MHD, que compreende as tais sete velocidades características, porque a formulação deste esquema é baseada na velocidade máxima de propagação da informação. Desta forma, poderíamos pensar que seria suficiente substituir a velocidade da onda acústica, dada por $(U \pm a)$, pela velocidade da onda magnetosónica rápida, $(U \pm c^f)$. No entanto, Han et al. (2009) verificaram que esta formulação resultava em instabilidades numéricas sob a forma de oscilações na solução. Estes autores verificaram que a inclusão da pressão magnética no cálculo das funções de peso f e w , desenvolvidas anteriormente para o esquema AUSMPW⁺, eliminava essas instabilidades e permitia obter soluções mais precisas e estáveis em escoamentos MHD. Seguindo estes autores, as funções de interpolação propostas na secção 4.1 são corrigidas com as novas funções peso,

$$M_f = \mathcal{M}_4^+ + \mathcal{M}_4^- \geq 0 :$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_4^- &= \mathcal{M}_4^- \cdot w \cdot (1 + f_R), \\ \bar{\mathcal{M}}_4^+ &= \mathcal{M}_4^+ + \mathcal{M}_4^- \cdot [(1 - w) \cdot (1 + f_R) - f_L]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$M_f = \mathcal{M}_4^+ + \mathcal{M}_4^- < 0 :$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_4^+ &= \mathcal{M}_4^+ \cdot w \cdot (1 + f_L), \\ \bar{\mathcal{M}}_4^- &= \mathcal{M}_4^- + \mathcal{M}_4^+ \cdot [(1 - w) \cdot (1 + f_L) - f_R]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

com funções de peso baseadas na pressão global,

$$f_{L,R} = \begin{cases} \left(\frac{p_{G,L} \cdot p_{G,R}}{p_{G,s}} - 1 \right), & p_{G,s} \neq 0 \\ 0, & p_{G,s} = 0 \end{cases}, \quad p_{G,s} = \mathcal{P}_5^+ p_{G,L} + \mathcal{P}_5^- p_{G,R}, \quad (4.46)$$

$$w = 1 - \min \left(\frac{p_{G,L}}{p_{G,R}}, \frac{p_{G,R}}{p_{G,L}} \right)^3, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} p_{G,L} &= p_L + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)_L, \\ p_{G,R} &= p_R + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)_R. \end{aligned} \quad (4.48)$$

O número de Mach calculado nas faces deve ser baseado na velocidade magnetosónica rápida, e não na velocidade do som, normalmente utilizada no método AUSM⁺ tradicional, ou seja:

$$M_{L,R}^f = \frac{U_{L,R}}{c^f}. \quad (4.49)$$

A velocidade magnetosónica rápida comum a ambos os lados da face f vem dada por:

$$c^f = \min (c_L^f, c_R^f), \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
 c_L^f &= \left\{ \frac{1}{2} \left[a_L^2 + \frac{B_L^2}{\rho_L} + \sqrt{\left(a_L^2 + \frac{B_L^2}{\rho_L} \right)^2 - 4a_L^2 \frac{B_{n,L}^2}{\rho_L}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
 c_R^f &= \left\{ \frac{1}{2} \left[a_R^2 + \frac{B_R^2}{\rho_R} + \sqrt{\left(a_R^2 + \frac{B_R^2}{\rho_R} \right)^2 - 4a_R^2 \frac{B_{n,R}^2}{\rho_R}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

onde $a_{L,R}$ representa a velocidade do som calculada a partir da equação (4.3). A componente normal do campo magnético vem dada por $B_n = \hat{S}_f \cdot \mathbf{B}$.

4.2.1.2 Técnicas desenvolvidas para garantir a condição solenoidal $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

O cálculo de escoamento MHD multidimensional requer um cuidado especial com a lei de Gauss do magnetismo, que implica a condição solenoidal dada por $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Já vimos que esta condição está inserida de forma implícita na equação da indução. Contudo, foi demonstrado por Brackbill e Barnes (1980) que mesmo que esta condição seja satisfeita no instante inicial ($t = 0$) os erros numéricos, resultantes da discretização das equações diferenciais, resultam na seguinte equação para a evolução de $\nabla \cdot \mathbf{B}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 + \mathcal{O}(\Delta x^m, \Delta t^n), \quad (4.52)$$

onde $m, n \geq 1$. De forma a resolver esta questão foram desenvolvidos vários métodos, que vamos passar a descrever nas próximas secções. Uma excelente revisão sobre esta matéria pode ser encontrada em Tóth (2000).

Método da projeção do campo magnético

O teorema de *Helmholtz* permite-nos decompor um campo vetorial numa soma de um rotacional com um gradiente,

$$\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi, \quad (4.53)$$

onde o rotacional do vetor \mathbf{A} contém a parte real de \mathbf{B}^* . Aplicando o operador divergente a ambos os lados da equação (4.53) obtemos uma equação de Poisson para ϕ ,

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{B}^*. \quad (4.54)$$

Finalmente, o campo magnético é corrigido removendo a parte não-solenoidal dada pelo termo gradiente de ϕ ,

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* - \nabla \phi. \quad (4.55)$$

A divergência de \mathbf{B}^{n+1} calculada numericamente vai ser zero se o termo Laplaciano na equação (4.54) for aproximado em dois passos, como a divergência do gradiente ($\nabla \cdot (\nabla \phi)$). Utiliza-se para esse efeito os mesmos operadores que foram utilizados no cálculo de $\nabla \cdot \mathbf{B}^*$ e $\nabla \phi$ (Eqs. (4.54) e (4.55)). Através da equação (4.55) podemos verificar que esta correção não altera a densidade de corrente $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}^{n+1} = \nabla \times \mathbf{B}^*$, ($\nabla \times \nabla \phi = 0$). Este método não necessita de ser aplicado em todos os passos de tempo, mas somente para eliminar os erros quando estes atingem um valor pré-determinado. A sua utilização torna-se útil quando o campo \mathbf{B} inicial não é conhecido, pois esta técnica permite eliminar os erros de divergência do campo inicial \mathbf{B} .

Método de multiplicadores de Lagrange

Dedner et al. (2002) encontraram uma forma de acoplar a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ao restante sistema de equações através da adição de uma nova equação para a propriedade escalar Ψ . Se as condições iniciais e de fronteira garantirem uma divergência nula do campo magnético, e se o valor inicial, Ψ_0 , for igual a zero então garante-se que Ψ é sempre zero. Como tal, o novo sistema de equações que contém a equação Ψ é equivalente ao sistema de equações MHD original. Este procedimento requer que o campo escalar seja acoplado à equação da indução através da utilização de um termo gradiente,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{U}) + \nabla \Psi = 0. \quad (4.56)$$

A condição solenoidal vem dada por,

$$\mathcal{D}(\Psi) + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.57)$$

onde \mathcal{D} é um operador diferencial linear. Dedner (2003) demonstrou que para qualquer escolha de \mathcal{D} podemos demonstrar que $\nabla \cdot \mathbf{B}$ e a função escalar Ψ satisfazem a mesma equação. Aplicando o operador divergente à equação (4.56) e a derivada temporal à equação (4.57),

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla^2 \Psi = 0, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\Psi)}{\partial t} + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0. \quad (4.59)$$

Aplicando o operador \mathcal{D} à equação (4.58) e o laplaciano à equação (4.57),

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} + \nabla^2 \mathcal{D}(\Psi) = 0, \quad (4.60)$$

$$\nabla^2 \mathcal{D}(\Psi) + \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (4.61)$$

O que leva às seguintes equações para a evolução de $\nabla \cdot \mathbf{B}$ e Ψ :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{D}(\nabla \cdot \mathbf{B})] - \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}(\Psi) - \nabla^2 \Psi = 0. \quad (4.63)$$

O tipo de correção a aplicar ao campo magnético estará pois dependente da escolha do operador diferencial. Desta forma, se optarmos por $\mathcal{D}(\Psi) = 0$ a correção será do tipo elíptico e requer a solução de uma equação de Poisson. Note-se que para esta escolha de operador vamos reverter para o método da projeção apresentado na secção anterior. Por outro lado, se optarmos por $\mathcal{D}(\Psi) = \Psi/c_d^2$ estamos perante uma correção do tipo parabólico, uma vez que a equação (4.57) leva a que $\Psi = -c_d^2 \nabla \cdot \mathbf{B}$. Nesta situação a equação para Ψ pode ser descartada e a equação da indução assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{U}) = c_d^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}). \quad (4.64)$$

Esta formulação vai corrigir o campo magnético através da dissipação local dos erros associados

a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ com um coeficiente de dissipação dado por $c_d > 0$. À primeira vista, esta opção parece ser bastante promissora uma vez que não necessita da introdução de uma nova equação para Ψ . Note-se que esta variável escalar pode mesmo ser eliminada do modelo, e os problemas relacionados com as condições iniciais e de fronteira de Ψ deixam de existir. No entanto, a introdução de uma derivada de segunda ordem na equação da indução conduz a graves restrições no passo de tempo. Assim, esta abordagem é proibitiva em certos casos, nomeadamente quando o passo de tempo dado pelas equações ideais é muito superior ao passo de tempo dado pelos termos dissipativos.

A terceira escolha para o operador diferencial é definida por: $\mathcal{D}(\psi) = \frac{1}{c_h^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}$. Repare-se que este operador resulta numa correção do tipo hiperbólico, onde $c_h > 0$ representa uma velocidade que permite convectar os erros associados a $\nabla \cdot \mathbf{B}$. Esta abordagem requer a resolução de uma nova equação do tipo hiperbólico para a propriedade escalar Ψ ,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.65)$$

A opção que permitiu obter melhores resultados foi conseguida por uma junção entre a correção parabólica e a hiperbólica. Uma formulação deste género permite convectar os erros numéricos e, ao mesmo tempo, dissipá-los localmente. Esta abordagem é bastante mais eficaz do que as duas opções anteriores a atuarem de forma independente. O operador diferencial é agora definido por $\mathcal{D}(\psi) = \frac{1}{c_h^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\psi}{c_d^2}$, e a equação para Ψ fica:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_d^2} \Psi. \quad (4.66)$$

Resta-nos estabelecer o valor máximo admissível para a velocidade fictícia c_h e para o coeficiente de dissipação c_d . Para a velocidade c_h , como se pretende utilizar o valor máximo permitido pelo método de solução, vamos calcular o seu valor com base na condição de estabilidade,

$$c_h = \frac{\text{CFL}}{\Delta t \times \max\left(\frac{1}{d}\right)}, \quad (4.67)$$

$$\text{CFL} = \max \left[\frac{(|U_f| + c_f) \Delta t}{d} \right]. \quad (4.68)$$

Existem duas formas de calcular o valor do c_d em função de c_h . A primeira abordagem implica a introdução de uma constante $c_r \in (0, 1)$ onde $c_r = e^{-\Delta t(c_h^2/c_d^2)}$, neste caso o coeficiente de dissipação vem:

$$c_d = \sqrt{-\Delta t \frac{c_h^2}{\ln(c_r)}}, \text{ com } 0 < c_r < 1. \quad (4.69)$$

A segunda abordagem implica que $c_r = \frac{c_d^2}{c_h^2} \in (0, \infty)$, e o termo do lado direito da equação (4.66) pode ser substituído por $-\frac{c_h}{c_r}$. Na presente tese optou-se pela implementação da primeira abordagem.

Como já foi referido anteriormente deve-se ter um especial cuidado com as condições de fronteira da propriedade escalar Ψ . Normalmente a imposição da condição de fronteira de *Dirichlet* para Ψ é suficiente e leva a uma redução significativa dos erros. No entanto, existem alguns casos onde esta condição não pode ser aplicada, nomeadamente quando é imposta uma condição de fronteira periódica para as variáveis dependentes principais. Se o mesmo não for adotado para a variável Ψ vamos destruir a repetição periódica que é exigida no domínio de solução.

Dedner (2003) concluiu que os melhores resultados eram obtidos quando se utilizavam para Ψ as mesmas condições de fronteira que eram impostas para as restantes propriedades escalares.

O esquema apresentado nesta secção, na sua variante híbrida (parabólica/hiperbólica), é aquele que vai ser utilizado no decurso deste trabalho. Este modelo, devido à sua simplicidade e eficiência foi aquele que, com base em experiências numéricas, conduziu à melhor abordagem quando se pretende reduzir os erros introduzidos por $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$. Uma extensa gama de problemas que comprovam esta afirmação pode ser encontrada em Dedner et al. (2002) e Price e Monaghan (2005).

Método de oito ondas de Powell

Powell et al. (1999) sugeriu uma formulação alternativa e não-conservativa do sistema de equações MHD, que compreende a adição de termos fonte inversamente proporcionais a $\nabla \cdot \mathbf{B}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0; \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{U} \mathbf{U} + \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathcal{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right] = \underline{- (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}; \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\rho e_t + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathbf{U} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right] = \underline{- (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}}; \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{U}) = \underline{- (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{U}}. \quad (4.73)$$

Os termos fonte a sublinhado aparecem de forma natural na dedução das equações MHD. Do ponto de vista analítico estas equações são equivalentes ao sistema MHD ideal, uma vez que os termos $\nabla \cdot \mathbf{B}$ são iguais a zero como é exigido pela física do problema. No entanto, já vimos que numericamente isso não acontece e Powell et al. (1999) verificaram que a remoção destes termos vai modificar por completo o carácter das equações. A inclusão destes termos fonte vai implicar o aparecimento de uma oitava onda relacionada com o sistema de equações MHD. Esta onda está implícita na seguinte equação para a evolução de $\nabla \cdot \mathbf{B}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (4.74)$$

Isto significa que os erros são convectados com a velocidade do escoamento para fora do domínio de solução. Note-se que este método pode falhar quando existem regiões de estagnação e recirculação, onde $U \approx 0$ e os erros se podem acumular.

Como podemos verificar esta técnica é bastante simples de implementar. No entanto, como qualquer outro método que não obedeça à forma conservativa das equações de governo, pode introduzir falsos resultados na presença de descontinuidades. Ainda assim, podemos restaurar as propriedades conservativas da equação da energia e da quantidade de movimento através da remoção dos termos fonte destas duas equações e da manutenção do termo fonte apenas na equação da indução (Janhunen, 2000).

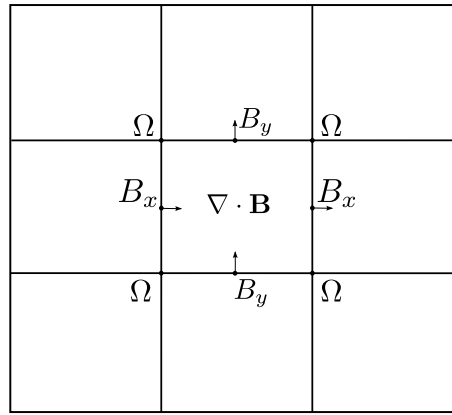


Figura 4.4: Posição das variáveis quando se opta pelo método da malha desfasada.

Técnica de transporte restringido

A técnica de transporte restringido (*constrained transport*) na sua versão original (Evans e Hawley, 1988) é baseada no método de malha desfasada, que garante que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ utilizando uma discretização em diferenças finitas. Repare-se que esta abordagem obriga a um arranjo mais complexo das variáveis dependentes, que implica que as variáveis termodinâmicas sejam colocadas no centro dos VCs, enquanto o campo magnético é colocado no centro das faces. Por seu lado, o vetor do campo elétrico ($\mathbf{E} = -\mathbf{U} \times \mathbf{B}$) é posicionado nos vértices dos VCs. Com este arranjo das variáveis, uma posterior discretização da equação da indução através da lei de Stokes irá garantir que a divergência do campo magnético não se altera com o tempo.

Na Fig. 4.4 apresenta-se uma distribuição bidimensional das variáveis, onde $\Omega = E_z$ representa a componente em z do campo elétrico. Utilizando a lei de Stokes a equação da indução pode ser discretizada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{B_{j+\frac{1}{2},k}^{x,n+1} - B_{j+\frac{1}{2},k}^{x,n}}{\Delta t} &= - \frac{\Omega_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Omega_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \\ \frac{B_{j,k+\frac{1}{2}}^{y,n+1} - B_{j,k+\frac{1}{2}}^{y,n}}{\Delta t} &= \frac{\Omega_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \Omega_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Note-se que na equação (4.75) utilizou-se a mesma notação que Tóth (2000), onde a componente B_x está localizada em $(x_{j+1/2}, y_k)$ e a componente B_y está localizada em $(x_j, y_{k+1/2})$. Podemos verificar que a divergência do campo magnético,

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})_{j,k} = \frac{B_{j+\frac{1}{2},k}^x - B_{j-\frac{1}{2},k}^x}{\Delta x} + \frac{B_{j,k+\frac{1}{2}}^y - B_{j,k-\frac{1}{2}}^y}{\Delta y}, \quad (4.76)$$

não se altera com o decorrer da solução, $\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{B}^n$. Ou seja, devido a um cancelamento dos termos da equação (4.76), a não-divergência do campo magnético que é dada como condição inicial e de fronteira vai ser mantida com uma precisão dada pelos erros de truncatura. Facilmente concluímos, que este método garante uma redução significativa dos erros. No entanto, a sua implementação em malhas arbitrariamente não-estruturadas é extremamente complexa pelo que não será aqui adotado.

4.2.1.3 Algoritmo de resolução

O algoritmo de resolução utilizado para o acoplamento do sistema de equações MHD é novamente baseado no método PISO de Issa (1986). Na secção 4.1 foi mostrado como é que este algoritmo deve ser modificado para a análise de escoamentos em dinâmica dos gases a um número de Mach arbitrário. Nesta secção vamos aplicar o mesmo tipo de algoritmo, após receber as modificações apropriadas, para a resolução das equações MHD. O método que vai ser proposto é portanto baseado numa abordagem segregada, que envolve passos sucessivos de previsão e correção. Para identificar estes passos, o índice superior n é relativo aos valores obtidos no passo de tempo anterior, e os índices superiores *** são relativos às consecutivas previsões e correções do algoritmo PISO.

Passo de previsão

Neste primeiro passo assume-se que todas as variáveis são inicialmente conhecidas, tendo sido obtidas no passo de tempo anterior ou estimadas se estivermos no passo de tempo inicial. De seguida, são calculadas as funções de interpolação baseadas no número de Mach que nos permitem definir o tensor de fluxo,

$$\mathcal{F}_f = c^f (\bar{\mathcal{M}}_4^+ \Phi_L^n + \bar{\mathcal{M}}_4^- \Phi_R^n) + (\mathcal{P}_5^+ \mathbf{P}_L^n + \mathcal{P}_5^- \mathbf{P}_R^n) + \frac{1}{2} (\Phi_{\mathbf{B},L}^n + \Phi_{\mathbf{B},R}^n), \quad (4.77)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_x \\ \rho U_y \\ \rho U_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \rho e_t + p_G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_x p_G \\ S_y p_G \\ S_z p_G \\ -\bar{B}_f U_x \\ -\bar{B}_f U_y \\ -\bar{B}_f U_z \\ -\bar{B}_f (\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_x \bar{B}_f \\ -B_y \bar{B}_f \\ -B_z \bar{B}_f \\ S_x \Psi \\ S_y \Psi \\ S_z \Psi \\ 0 \\ c_h^2 \bar{B}_f \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Onde $B_f = S_x B_x + S_y B_y + S_z B_z$, em que S_x, S_y e S_z são as componentes do vetor normal à face, com magnitude igual à área da face f , $\mathbf{S}_f = (S_x, S_y, S_z)$. O fluxo magnético médio vem dado por $\bar{B}_f = (B_{f,L} + B_{f,R})/2$.

Uma vez que o método de resolução proposto é do tipo PBA temos de subtrair a pressão magnética da pressão global p_G , por forma a calcular a pressão termodinâmica nas faces. Esta é utilizada no cálculo do termo de gradiente de pressão na equação de quantidade de movimento,

$$p_f^n = \mathcal{P}_5^+ p_L^n + \mathcal{P}_5^- p_R^n. \quad (4.79)$$

Dentro deste passo, a primeira equação a ser resolvida é uma equação explícita para a previsão da massa volúmica. Esta equação vai utilizar o fluxo mássico calculado com o método AUSM-MHD, descrito na secção 4.2.1.1,

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot (m_f^n) = 0, \quad (4.80)$$

$$m_f^n = c^{f,n} (\bar{\mathcal{M}}_4^+ \rho_L^n + \bar{\mathcal{M}}_4^- \rho_R^n). \quad (4.81)$$

Posteriormente, é resolvida uma equação explícita para cada componente do campo magnético,

$$\frac{\partial B_i^*}{\partial t} + \nabla \cdot (B_f^n) = 0, \quad (4.82)$$

$$B_f^n = c^{f,n} (\bar{\mathcal{M}}_4^+ B_{i,L}^n + \bar{\mathcal{M}}_4^- B_{i,R}^n) - \{ \mathcal{P}_5^+ [(\bar{B}_f)^n U_i^n]_L + \mathcal{P}_5^- [(\bar{B}_f)^n U_i^n]_R \} \quad (4.83)$$

$$+ \frac{1}{2} ([S_i \Psi^n]_L + [S_i \Psi^n]_R), \quad (4.84)$$

onde o índice i indica cada componente do vetor \mathbf{B} ($i = x, y, z$). Para escoamentos uni-dimensionais na direção x , de forma a satisfazer a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, temos de garantir que B_x é invariável no tempo. Desta forma, podemos negligenciar a equação para B_x e apenas resolver as equações para as componentes B_y e B_z . Mais uma vez, estas equações são baseadas nos fluxos calculados com o esquema AUSM-MHD e permitem obter os valores intermédios para B_x^* , B_y^* e B_z^* .

A primeira estimativa do campo de velocidade \mathbf{U}^* é obtida através de uma equação explícita para cada uma das componentes da velocidade,

$$\frac{\partial (\rho^* U_i^*)}{\partial t} + \nabla \cdot (U_f^n) = -\nabla p_f^n, \quad (4.85)$$

em que o fluxo é:

$$U_f^n = c^{f,n} (\bar{\mathcal{M}}_4^+ [\rho^* U_i^n]_L + \bar{\mathcal{M}}_4^- [\rho^* U_i^n]_R) + \left\{ \mathcal{P}_5^+ \left[S_i \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})^*}{2} \right]_L + \mathcal{P}_5^- \left[S_i \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})^*}{2} \right]_R \right\} \\ - \frac{1}{2} \{ [(\bar{B}_f)^n B_i^*]_L + [(\bar{B}_f)^n B_i^*]_R \}. \quad (4.86)$$

O gradiente de pressão e os termos relativos ao campo magnético são calculados de uma forma explícita. Para este efeito devem ser utilizados os valores das componentes do campo magnético calculadas com a equação (4.82), e o valor da pressão calculada nas faces com a equação (4.79). A forma discretizada da equação da conservação de quantidade de movimento vem dada por:

$$a_P^U \mathbf{U}^* = \mathbf{H}(\mathbf{U}^n) - \nabla p_f^n, \quad (4.87)$$

onde a_P^U representa o coeficiente central da matriz relativa ao vetor \mathbf{U} . O operador $\mathbf{H}(\mathbf{U}^n)$ é construído a partir dos termos convectivos dos volumes de controlo vizinhos a P , dos termos magnéticos e da componente explícita da derivada temporal,

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}^n) = \sum a_N^U \mathbf{U}_N^n + S_B^* + \frac{\mathbf{U}^n}{\Delta t}. \quad (4.88)$$

A última equação a ser resolvida antes de entrarmos no ciclo PISO é uma equação para a conservação da energia total,

$$\frac{\partial (\rho^* e_t^*)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{E}_f^n) = 0, \quad (4.89)$$

com fluxo:

$$\mathcal{E}_f^n = c^{f,n} \left\{ \bar{\mathcal{M}}_4^+ \left[\rho^* e_t^n + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})^*}{2} + p^n \right]_L + \bar{\mathcal{M}}_4^- \left[\rho^* e_t^n + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})^*}{2} + p^n \right]_R \right\} \\ - \{ \mathcal{P}_5^+ [(\bar{B}_f)^n (\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{B}^*)]_L + \mathcal{P}_5^- [(\bar{B}_f)^n (\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{B}^*)]_R \}. \quad (4.90)$$

Esta equação é seguida de uma equação de estado que permite atualizar o campo de temperatura,

$$T^* = \frac{1}{c_v} \left\{ e_t^* - \frac{1}{2} \left[(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})^* + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})^*}{\rho^*} \right] \right\}. \quad (4.91)$$

Utilizando a nova temperatura, podemos calcular um novo valor para o coeficiente de compressibilidade, $\psi^* = 1/RT^*$, e atualizar a massa volúmica, $\rho^{**} = \psi^* p^n$.

Passo de correção

Como já vimos na secção 4.1.1.2, podemos utilizar o operador $\mathbf{H}(\mathbf{U}^n)$ como forma de calcular o campo de velocidade sem incluir os efeitos do gradiente de pressão. Dentro do ciclo PISO o método AUSM-MHD é novamente utilizado de forma a obter as funções de interpolação baseadas no número de Mach. Com esta atualização das funções podemos calcular o fluxo sónico que vai ser utilizado na resolução da equação da pressão,

$$F_s^* = c^{f,*} (\bar{\mathcal{M}}_4^+ \psi_L^* + \bar{\mathcal{M}}_4^- \psi_R^*). \quad (4.92)$$

A equação implícita para o campo de pressão é posteriormente construída, utilizando os valores previamente obtidos para o coeficiente de compressibilidade, ψ^* , e para a massa volúmica ρ^{**} ,

$$\frac{\partial(\psi^* p^*)}{\partial t} + \nabla \cdot (F_s^* p^*) - \nabla \cdot \left(\frac{\rho^{**}}{a_P^U} \nabla p^* \right) = 0. \quad (4.93)$$

A resolução desta equação permite-nos obter uma primeira estimativa para o campo de pressão, p^* . O campo de velocidade é posteriormente corrigido de uma forma explícita, utilizado o novo gradiente de pressão e a primeira estimativa da velocidade. O gradiente de pressão deve ser novamente calculado com o valor da pressão interpolada nas faces (Eq.(4.79)),

$$\mathbf{U}^{**} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U}^n) - \nabla p_f^*}{a_P^U}. \quad (4.94)$$

Finalmente a massa volúmica pode ser corrigida a partir da respetiva equação de estado, $\rho^{***} = \psi^* p^*$. Este ciclo deve ser repetido até que a equação da continuidade seja satisfeita. Em todos os cálculos numéricos, que vão ser apresentados na secção 5.2, utilizaram-se sempre dois passos de correção.

4.2.2 Implementação das condições de fronteira para o campo magnético

Na parede podemos considerar duas condições de fronteira limites para o campo magnético. A primeira é dada pela condição de parede perfeitamente condutora ($\eta_{parede} = 0$), e a segunda implica que a parede se encontra eletricamente isolada ($\eta_{parede} = \infty$). A condição de parede perfeitamente condutora pressupõe uma absorção total da corrente elétrica a que está sujeita, como tal também deverá absorver todo o fluxo magnético. Esta situação pode ser representada por uma condição de fronteira do tipo *Neumann*, que neste caso vai impor um valor nulo para o gradiente de \mathbf{B} normal à parede,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{parede} = 0, \quad (4.95)$$

onde \mathbf{n} é o vetor de dimensão unitária normal à parede. O segundo caso limite é dado pela condição de parede eletricamente isolada, desta forma a corrente elétrica não consegue atravessar a fronteira. Esta condição pode ser obtida se durante a simulação numérica for fixado um valor para o campo magnético na parede,

$$\mathbf{B}|_{parede} = \mathbf{B}_0, \quad (4.96)$$

onde \mathbf{B}_0 é o campo magnético imposto.

As condições de fronteira previamente descritas representam duas situações ideais. Existe ainda a possibilidade de se assumir que a parede possui uma condutividade elétrica finita, o que implica que deverá absorver apenas uma parcela da corrente elétrica a que está sujeita. Esta pode ser vista como uma condição de fronteira genérica,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}}|_{parede} + \frac{\eta_{parede}}{\eta} (\mathbf{B}|_{parede} - \mathbf{B}_0) = 0. \quad (4.97)$$

4.2.3 Discretização temporal

O esquema numérico que foi implementado para o tratamento dos fluxos convectivos obriga a uma discretização temporal explícita do sistema de equações. Foi já referido na secção 3.2.2, que uma discretização desta natureza implica uma restrição do passo de tempo. Sabemos ainda que as equações MHD permitem a ocorrência de vários tipos de ondas com escalas temporais distintas. Desta forma, na condição de *Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL) deve-se utilizar a velocidade máxima de propagação da informação, tendo em consideração todas as ondas envolvidas, que neste caso é dada pela velocidade da onda rápida,

$$CFL = \max \left[\frac{(|U_f| + c_f) \Delta t}{\mathbf{d}} \right]. \quad (4.98)$$

A introdução dos termos dissipativos no sistema de equações vai resultar numa restrição ainda mais severa do passo de tempo. Note-se que normalmente as escalas temporais associadas a estes termos possuem um valor muito reduzido. No caso do sistema de equações MHD resistivo esta restrição ainda poderá ser mais severa devido à grande disparidade entre as escalas temporais dissipativas e convectivas. No caso limite, a utilização de uma discretização do tipo explícito pode mesmo ser proibitiva. De forma a contornar esta questão, Udrea (1999) calculou de forma separada os passos de tempo de natureza parabólica e hiperbólica, e utilizou o valor mínimo global como o passo de tempo efetivo. Por outro lado Sankaran (2001) utilizou a técnica de passo de tempo fracionado. Com esta abordagem é possível calcular os fluxos difusivos com um passo de tempo distinto daquele que é utilizado no cálculo dos fluxos convectivos. Desta forma, os fluxos convectivos são apenas calculados após um número pré-definido de passos de tempo, onde os fluxos difusivos são sempre calculados.

Em todos os cálculos que irão ser apresentados na secção 5.2 a condição de estabilidade foi calculada a partir da equação (4.98). Na discretização temporal do sistema de equações MHD ideal utilizou-se uma formulação explícita em todas as equações, à exceção da equação da pressão. Esta abordagem permitiu calcular todos os problemas com maior ou menor restrição no passo de tempo. Os casos que resultavam numa maior restrição temporal foram aqueles que

apresentavam um maior grau de complexidade no que toca à presença de descontinuidades. Nesses casos, a condição de estabilidade variava entre $CFL = 0,1$ e $0,3$. Na solução das equações resistivas, de forma a remover a restrição de passo de tempo, os termos de segunda ordem foram sempre discretizados de forma implícita.

4.3 Nota conclusiva

Neste capítulo foram descritos os dois métodos de análise de escoamento a número de Mach arbitrário desenvolvidos como parte deste trabalho de investigação. O primeiro método foi pensado para a análise de escoamento de dinâmica dos gases e o segundo para o cálculo de escoamento compressível MHD. Demonstrou-se que é viável adaptar o esquema $AUSM^+ - up$ de forma a este ser introduzido num algoritmo do tipo PISO. Desta forma é possível tirar partido do nível de precisão do esquema AUSM no cálculo de ondas de choque, e da flexibilidade da equação da pressão no cálculo de escoamentos a número de Mach variável.

O estudo do método de resolução das equações de Euler feito numa primeira fase permitiu depois desenvolver um novo método aplicável às equações MHD. O novo método foi baseado numa adaptação do esquema AUSM-MHD de forma a este ser incluído num algoritmo do tipo PBA.

Capítulo 5

Aplicação e validação dos métodos propostos

Neste capítulo são apresentados e discutidos vários casos de teste que permitirão efetuar a validação dos métodos numéricos propostos no capítulo 4. Inicialmente vão ser analisados os testes que compreendem escoamento da dinâmica dos gases, e que devem ser resolvidos com o método proposto na secção 4.1. Posteriormente vão ser analisados vários casos de teste frequentemente utilizados na validação de modelos MHD, e cuja solução requer o método da secção 4.2.

5.1 Casos de teste para dinâmica dos gases

Nas próximas secções vamos proceder à validação do método que foi proposto no capítulo anterior, mais concretamente na secção 4.1. Vão ser apresentadas algumas comparações entre os resultados presentes na literatura e os resultados numéricos obtidos. Em alguns dos problemas apresentados vai também ser feita uma comparação entre a nova abordagem aqui proposta, e o método previamente utilizado por Xisto et al. (2010), baseado na interpolação do tipo Rhie e Chow.

Vamos considerar três casos de teste, inicialmente vai ser analisado um problema axissimétrico referente a um escoamento numa tubeira em condições subsónicas, transónicas e supersónicas. Posteriormente vamos abordar um outro caso de teste padrão que compreende um escoamento subsónico, transónico e supersónico sobre um ressalto. Finalmente iremos calcular um problema bastante mais complexo, que se refere a um escoamento supersónico quando este vai de encontro a um objeto de geometria circular.

5.1.1 Escoamento axissimétrico numa tubeira

O primeiro caso de teste que vamos analisar tem sido abordado por vários investigadores de forma a validarem os seus códigos numéricos (Demirdzic et al., 1993; Moukalled e Darwish, 2001). Este problema compreende um escoamento uni-dimensional numa tubeira de geometria convergente-divergente, e permite obter soluções analíticas exatas com as quais podemos comparar os resultados numéricos obtidos. Desta forma é um candidato ideal para a validação de um algoritmo desta natureza. A área de secção da tubeira é função do seu comprimento e é calculada a partir da seguinte função quadrática:

$$S_{(x)} = S_{th} + (S_i - S_{th}) \left(1 - \frac{x}{5}\right)^2, \quad (5.1)$$

onde $S_i = 2,035 \text{ [m}^2\text{]}$ representa a área da secção à entrada e $S_{th} = 1 \text{ [m}^2\text{]}$ é a área da secção na garganta da tubeira. O comprimento da tubeira é igual a 10 [m] . Para os cálculos numéricos foram geradas três malhas axissimétricas (Fig. 5.1a) com um total de: 100×15 ; 200×30 ; e 400×60 nós.

Foi testada uma gama bastante alargada de números de Mach, abrangendo escoamentos totalmente subsónicos (quase incompressíveis, $Ma = 0,1$); escoamentos transónicos (com número de Mach à entrada igual a $Ma = 0,3$); e em alguns casos escoamentos totalmente supersónicos ($2,5 \leq Ma \leq 5$). Para o caso subsónico e transónico foram impostas as seguintes condições de fronteira: à entrada foi imposta uma temperatura e pressão de estagnação, assim como o ângulo do escoamento (normal ao plano de entrada); à saída foi definida uma pressão estática e todas as outras variáveis foram extrapoladas para fora do domínio de solução. Para o caso supersónico todas as variáveis foram especificadas à entrada e extrapoladas à saída. Relativamente aos esquemas de interpolação, optou-se pelo esquema QUICK para o cálculo do escoamento subsónico e optou-se pelo esquema CUBISTA para o cálculo do escoamento transónico e supersónico.

Nas Figs. 5.1b, c e d, estão representadas as distribuições das linhas isobáricas, calculadas para as diferentes resoluções de malha e para um número de Mach à entrada igual a $Ma = 3$. Como podemos verificar, à medida que a malha é refinada o cálculo das discontinuidades é bastante mais preciso. Em todos os casos não parece ocorrer nenhum comportamento fisicamente irrealista. Na Fig. 5.2 está representada uma comparação entre os resultados numéricos, obtidos para vários Ma impostos à entrada, e a solução analítica exata. Como podemos observar, as previsões bidimensionais na malha 100×15 encontram-se em bom acordo com as soluções analíticas. Quando comparados com outros resultados (1D) presentes na literatura (Demirdzic et al., 1993; Moukalled e Darwish, 2001) verifica-se que os resultados aqui obtidos são bastante satisfatórios.

5.1.2 Escoamento sobre um ressalto

Vamos agora passar à apresentação dos resultados obtidos para o escoamento subsónico, transónico e supersónico sobre um ressalto. Em contraste com o caso de teste anterior, para este problema não existe nenhuma solução analítica. No entanto, uma solução de referência pode ser obtida através de uma malha mais refinada (Hirsch, 2007). Relativamente à geometria, esta consiste num canal de altura L e comprimento $3L$. Na parede de baixo encontra-se um ressalto de geometria circular, com um comprimento L e com uma espessura correspondente a 10% da altura do canal ($0,1L$). Para o caso supersónico a espessura do ressalto é igual a $0,04L$. Em todos os casos de teste, a solução foi obtida numa malha 2D estruturada. Para o caso subsónico a malha possui um total de 128×35 nós e para o caso transónico, de forma a obter-se uma boa base de comparação com outros resultados presentes na literatura, a malha possui um total de 63×16 nós, veja-se a Fig. 5.6a. A malha utilizada no caso supersónico possui um total de 158×78 nós (Fig. 5.7).

5.1.2.1 Escoamento subsónico

Vamos começar pelo problema que compreende um número de Mach à entrada igual a $Ma = 0,1$. Note-se que para um número de Mach desta ordem de grandeza estamos perante um regime

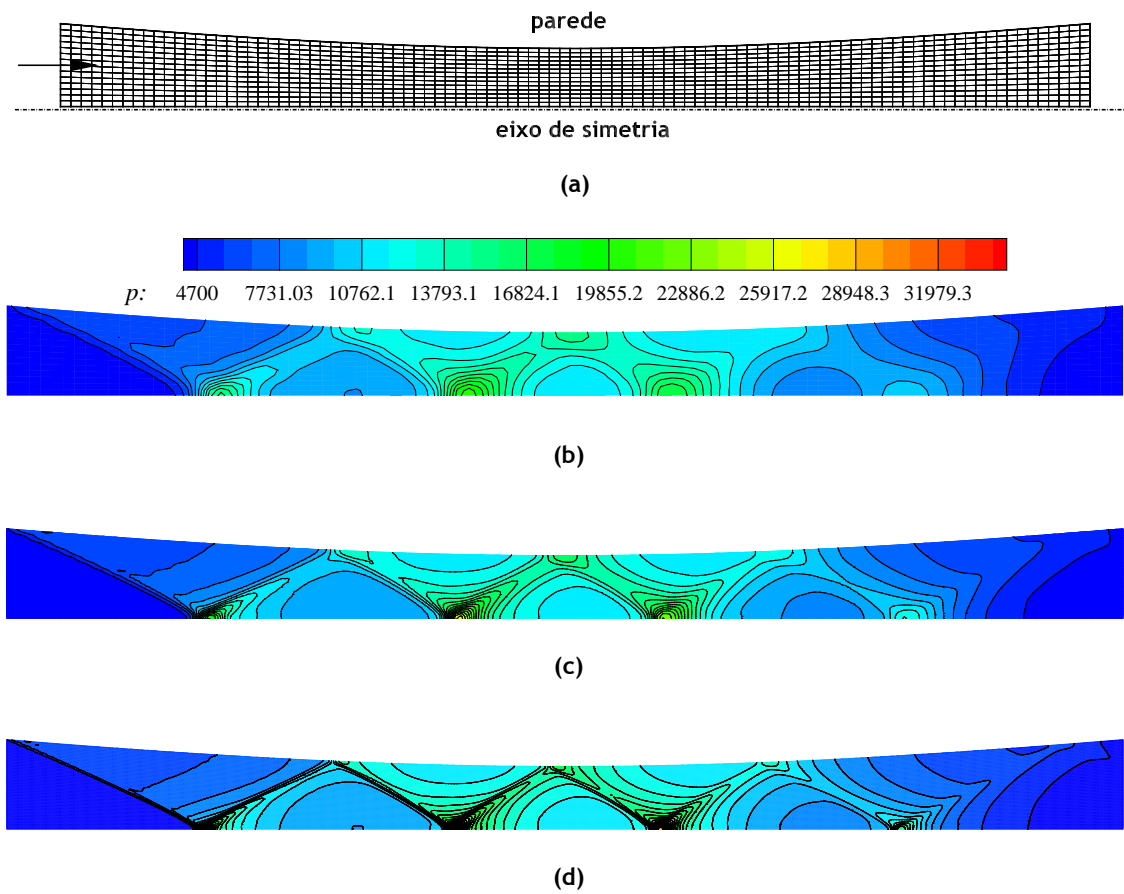


Figura 5.1: a) Malha utilizada no cálculo da tubeira. Distribuição das isolinhas da pressão estática para um número de Mach à entrada igual a $Ma = 3$ calculado numa malha com: b) 100×15 nós; c) 200×30 nós; d) 400×60 nós.

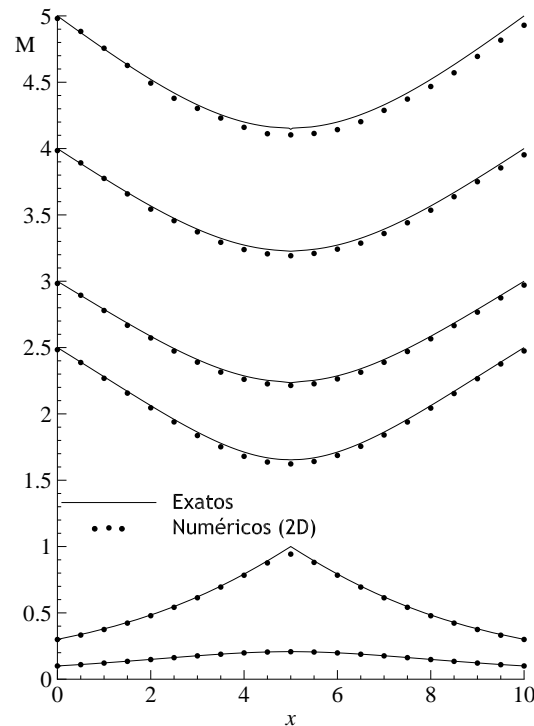


Figura 5.2: Comparação entre os resultados numéricos obtidos na malha 100×15 , e a solução analítica exata para uma tubeira do tipo convergente-divergente. Os resultados numéricos obtidos representam o valor médio do número de Mach em várias secções da tubeira.

quase incompressível. Este escoamento é caracterizado por ser totalmente subsônico, sendo esperada uma distribuição simétrica do número de Mach nas paredes superior e inferior do canal. As condições de fronteira são as condições típicas para um caso subsônico: à entrada são impostas uma temperatura e pressão de estagnação, assim como o ângulo do escoamento; à saída é imposta a pressão estática e as outras variáveis são extrapoladas para fora do domínio de solução. A interpolação dos valores à esquerda e à direita das faces dos VCs é feita com o esquema de diferenciação QUICK.

Na Fig. 5.3 estão representados os resultados obtidos para o escoamento subsônico na malha 128×35 . Estes são apresentados em termos da distribuição das isolinhas do número de Mach (Fig. 5.3a) e da sua distribuição ao longo das paredes (Fig. 5.3b). Como era esperado, o escoamento é praticamente simétrico e o valor mais elevado da velocidade é obtido no ponto mais elevado do ressalto.

Foi também calculado um caso de teste para um número de Mach à entrada igual a $Ma = 0,5$. Para este caso os resultados foram comparados com outros existentes na literatura, nomeadamente os que foram obtidos por Moukalled e Darwish (2001). Estes autores desenvolveram um código de alta resolução baseado numa interpolação do tipo Rhie-Chow. Os resultados utilizados para comparação referem-se à distribuição do número de Mach na parede sólida superior e inferior, veja-se a Fig. 5.4. Como podemos observar os resultados obtidos são praticamente similares, havendo apenas uma pequena disparidade nas zonas de menor velocidade. Contudo, a malha utilizada por Moukalled e Darwish (2001) é consideravelmente mais refinada (252×54) quando comparada com a malha aqui utilizada (128×35), o que justifica o cálculo mais preciso nessas regiões.

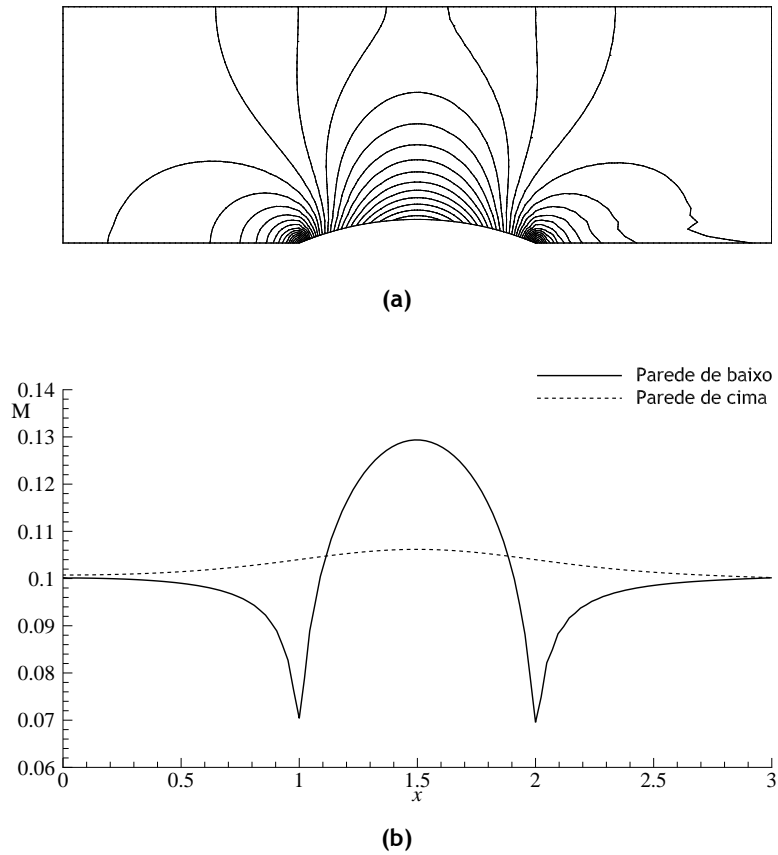


Figura 5.3: Resultados obtidos para o escoamento subsônico sobre um ressalto, $Ma = 0,1$. a) Isolinas relativas à distribuição do número de Mach. b) Distribuição do número de Mach nas paredes de baixo e de cima.

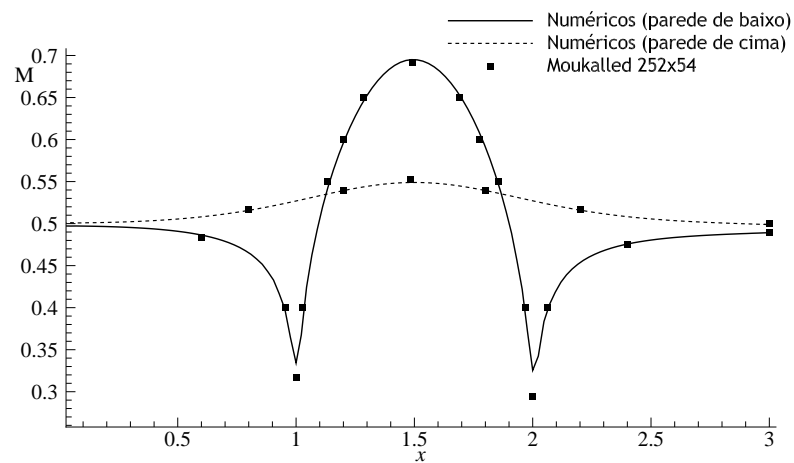


Figura 5.4: Comparação entre os resultados numéricos obtidos (128×35) e os resultados obtidos por Moukalled e Darwish (2001), com uma malha mais refinada (252×54), para o caso de teste subsônico com um número de Mach à entrada igual a $Ma = 0,5$.

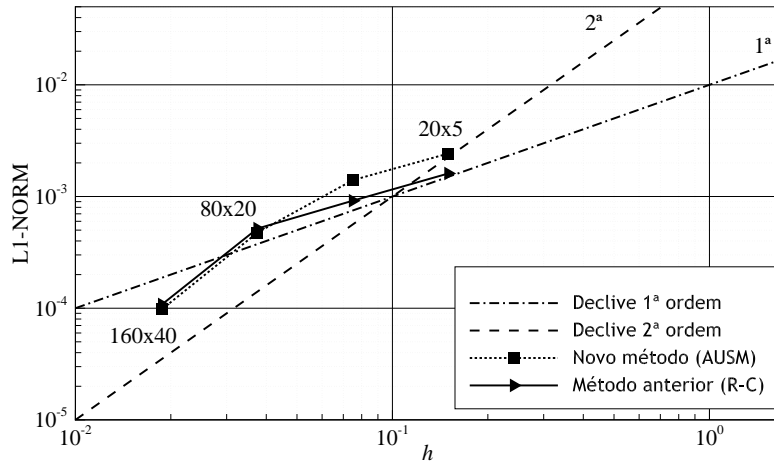


Figura 5.5: Erro espacial calculado com a norma \mathcal{L}_1 para o coeficiente de pressão na parede de baixo. Este resultado foi obtido para o escoamento subsônico sobre um ressalto com número de Mach à entrada igual a 0,5.

É relevante verificar nesta altura se o código proposto apresenta uma ordem de convergência de segunda ordem no espaço. Como tal, realizou-se um estudo de convergência da malha para o caso subsônico com um número de Mach à entrada igual a $Ma = 0,5$. Foram então obtidos resultados para quatro malhas com dimensões distintas: 20×5 ; 40×10 ; 80×20 ; 160×40 . A ordem de precisão do método foi estimada através do comportamento do erro relativo para o coeficiente de pressão, calculado com a norma \mathcal{L}_1 :

$$\|e_h\|_{\mathcal{L}_1} = \frac{|Cp_{(numérico)} - Cp_{(ref)}|}{Cp_{(ref)}}, \quad (5.2)$$

onde $Cp_{(ref)}$ é o coeficiente de pressão calculado na parede de baixo com recurso a uma malha de referência, neste caso com 320×80 nós.

Na Fig. 5.5 está presente o gráfico da norma \mathcal{L}_1 em função do espaçamento da malha h numa escala logarítmica. Se compararmos os resultados obtidos com os declives de primeira e segunda ordem, podemos afirmar que o novo código (AUSM) apresenta um decaimento de segunda ordem à medida que a malha é refinada. Como esperado o código anterior (Rhie-Chow) apresenta um comportamento semelhante. No entanto, para malhas mais esparsas (40×10) a ordem de convergência do novo método é superior, embora os erros sejam também algo maiores.

5.1.2.2 Escoamento transônico

O próximo caso em estudo refere-se a um escoamento transônico com um número de Mach à entrada igual $Ma = 0,675$. Este tipo de escoamento é caracterizado por ser subsônico nas regiões de entrada e de saída. No entanto, o aumento de velocidade vai criar uma onda de choque na região a jusante do topo do ressalto. As condições de fronteira são idênticas às do caso subsônico. Devido à presença de uma descontinuidade foi utilizado o esquema de interpolação de alta resolução CUBISTA.

Na Fig. 5.6 está representada uma distribuição das isolinhas referentes ao número de Mach, assim como uma comparação entre os resultados calculados com o novo código e os que foram

obtidos por Moukalled e Darwish (2001). Como podemos observar, a resolução da onda de choque é superior quando utilizamos o esquema AUSM. Uma conclusão similar foi apresentada por Nerinckx et al. (2006). Estes autores referem que o termo difusivo de quarta ordem que é introduzido pela interpolação de Rhie-Chow aumenta significativamente o seu valor absoluto quando ocorrem gradientes de pressão elevados. Desta forma, é introduzido um excesso de dissipação numérica de quarta ordem onde ela não é necessária. A nova abordagem que aqui foi apresentada tem a particularidade de poder “desligar” este termo dissipativo nas regiões onde o número de Mach é elevado.

5.1.2.3 Escoamento supersónico

Este caso de teste apresenta um número de Mach à entrada igual a $Ma = 1,4$ e é caracterizado por ser totalmente supersónico. A malha utilizada é mostrada na Fig. 5.7 e relembra-se que agora o ressalto tem uma altura igual a 4% da altura do canal. A interação entre o escoamento e o ressalto deve produzir duas ondas de choque que irão colidir antes de abandonarem o domínio de solução. A onda de choque que é formada a montante do ressalto deve ainda ser refletida na parede inferior, numa fase posterior à intersecção com a segunda onda de choque. Como já foi referido, para o caso do escoamento supersónico temos de aplicar condições de fronteira diferentes. Na entrada devem ser especificadas todas as variáveis, e à saída estas são extrapoladas a partir do interior do domínio de solução.

Na Fig. 5.8a apresentam-se os resultados que foram obtidos com o novo método para a distribuição das isolinhas do número de Mach. A intersecção e reflexão das ondas de choque encontram-se extremamente bem definidas sem a ocorrência de oscilações irrealistas. Por outro lado, os resultados obtidos com o método baseado na interpolação do tipo Rhie-Chow (código anterior, Fig. 5.8b), embora na mesma malha, apresentam sinais bastante perceptíveis de dissipação numérica e alguns padrões de escoamento um tanto irrealistas. A Fig. 5.8c mostra uma comparação mais quantitativa entre a distribuição do número de Mach na parede inferior obtida com os dois métodos. Esta comparação vem comprovar os comentários anteriores, principalmente no que toca à definição da segunda reflexão da primeira onda de choque. A figura apresenta ainda uma comparação entre os resultados numéricos da literatura (Moukalled e Darwish, 2001) e os resultados aqui obtidos. De facto, esta comparação sugere que o método aqui apresentado resolve o escoamento com uma precisão ligeiramente superior. Esta conclusão seria esperada uma vez que a dissipação numérica deve diminuir à medida que a malha é refinada. De forma a tornar esta diferença mais perceptível é necessário obter resultados para uma malha mais esparsa. Esta análise já foi realizada em detalhe para o caso transónico e não irá aqui ser repetida devido à falta de dados comparativos.

5.1.2.4 Estudo de desempenho

No desenvolvimento de um código numérico é sempre importante analisar o desempenho no que toca à taxa de convergência iterativa. A taxa de convergência do processo iterativo deverá ser diferente para um caso subsónico e supersónico. Desta forma torna-se imperativo que o estudo seja realizado para ambas as situações. Relativamente ao problema subsónico ($Ma = 0,5$), foi utilizada a mesma malha da secção 5.1.2.1 (80×20), e para o caso supersónico ($Ma = 1,4$) foi

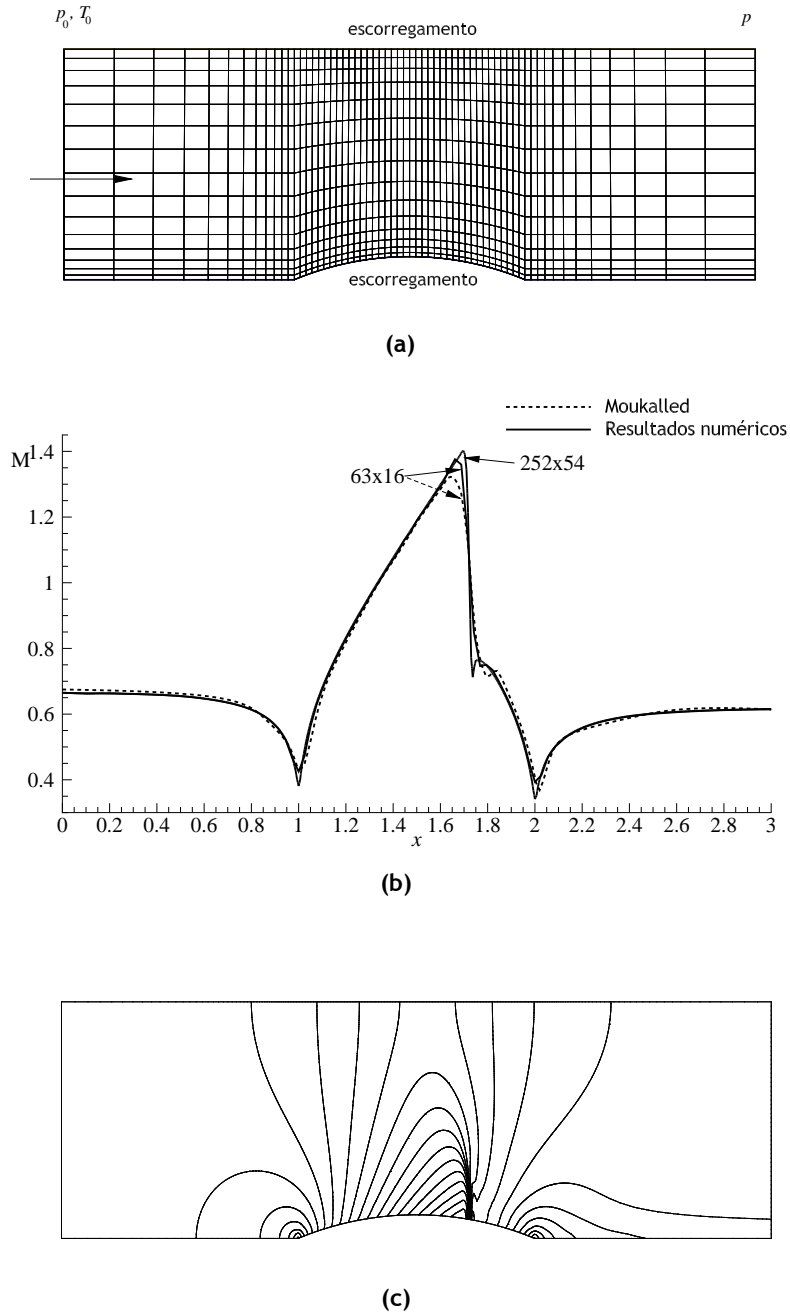


Figura 5.6: a) Malha esparsa utilizada no cálculo do escoamento transônico sobre o ressalto. Resultados obtidos para o caso do escoamento transônico sobre um ressalto: b) comparação entre os resultados obtidos com outros da literatura (Moukalled e Darwish, 2001); c) distribuição das isolinhas do número de Mach calculadas numa malha mais densa (252×54).

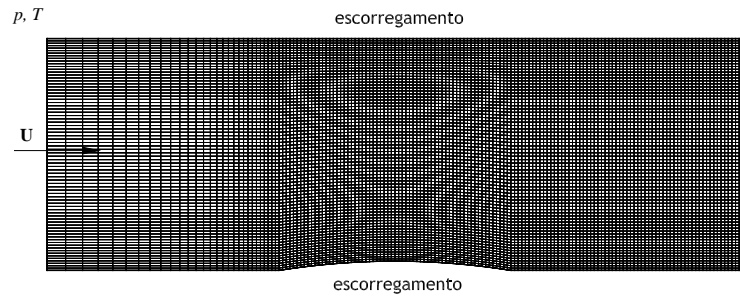
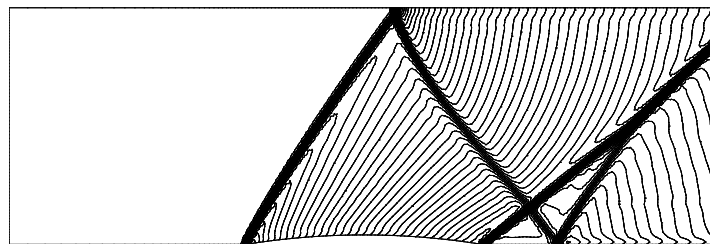
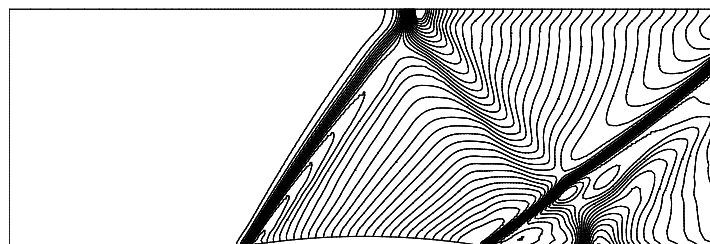


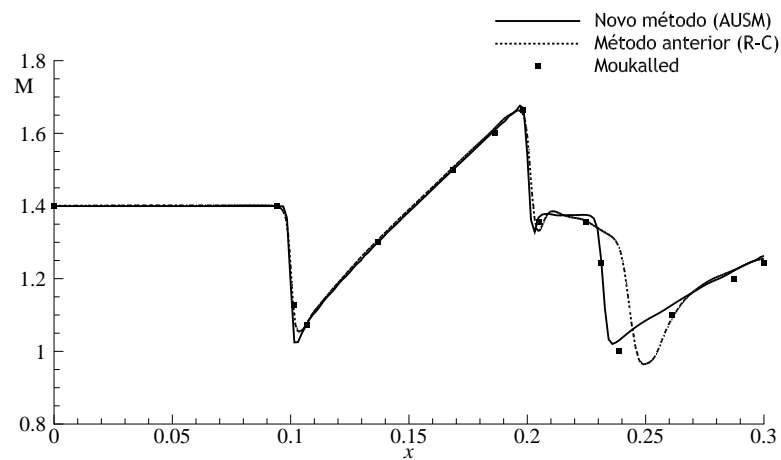
Figura 5.7: Malha bidimensional (158×78) utilizada no cálculo do escoamento supersônico sobre um ressalto, e as correspondentes condições de fronteira.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.8: Resultados obtidos para o escoamento supersônico sobre um ressalto, $Ma = 1,4$. Distribuição das isolinhas relativas ao número de Mach obtidas com: a) o novo código (AUSM); b) o código anterior, baseado em Rhie-Chow (R-C). c) Distribuição do número de Mach ao longo da parede inferior.

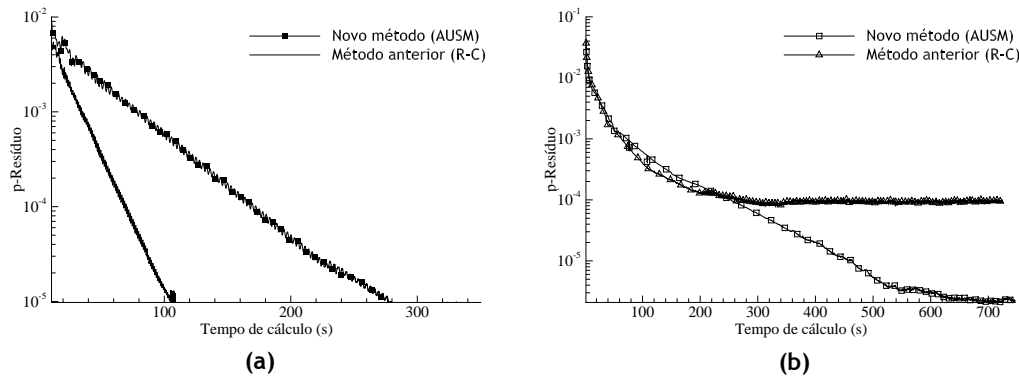


Figura 5.9: Estudo de desempenho iterativo: a) escoamento subsônico sobre um ressalto com $Ma = 0,5$; b) escoamento supersônico sobre um ressalto com $Ma = 1,4$.

utilizada a malha com 158×78 nós. O número de Courant utilizado em ambos os casos foi de 0,8, e o processo iterativo foi interrompido assim que os resíduos atingissem o valor de 10^{-5} .

A Fig. 5.9a apresenta o andamento dos resíduos para o caso do escoamento subsônico. Como se constata, o método baseado na interpolação do tipo Rhie-Chow atinge a solução convergida num tempo de execução bastante mais reduzido. Este resultado era o esperado, uma vez que o método anterior não necessita de realizar o mesmo número de operações aritméticas que o método baseado no AUSM. Contudo, se observarmos a Fig 5.9b, podemos concluir que o novo método possui um comportamento bastante mais eficiente no que toca à taxa de convergência em escoamentos supersônicos.

5.1.3 Escoamento supersônico sobre um cilindro

O último problema aqui considerado envolve um escoamento mais complexo sendo por isso mais difícil de calcular eficazmente. Este problema é utilizado frequentemente pela comunidade científica representando um desafio para muitos códigos numéricos, mesmo que estes sejam do tipo DBA. Em contraste com o escoamento analisado na secção 5.1.2.3, este caso de teste não é totalmente supersônico, apresentando uma região subsônica, com uma zona de baixa velocidade que se prolonga até atingir um ponto de estagnação. Este tipo de fenómeno é esperado quando um escoamento supersônico vai de encontro a um obstáculo circular, o que implica que seja criada uma onda de choque em forma de arco a montante desse obstáculo. A jusante dessa onda de choque o escoamento é totalmente subsônico e, como já foi referido, possui um ponto de estagnação. Desta forma, o modelo numérico desenvolvido deve possuir a capacidade de resolver uma descontinuidade com o maior grau de precisão possível e, ao mesmo tempo, calcular o escoamento subsônico que se desenvolve numa região onde as velocidades devem convergir para zero.

Por razões de simetria apenas se calculou o quadrante superior esquerdo do cilindro. Utilizou-se uma malha estruturada com um total de 120×120 nós, que se estende de $x = 0$ até $x = -0,35$ segundo o eixo ox , e de $y = 0$ até $y = 1,4$ no eixo oy . Um pormenor da malha junto ao cilindro, assim como as condições de fronteira utilizadas, são indicadas na Fig. 5.10. As condições de fronteira são similares às do caso supersônico anteriormente apresentado, ou seja, as variáveis

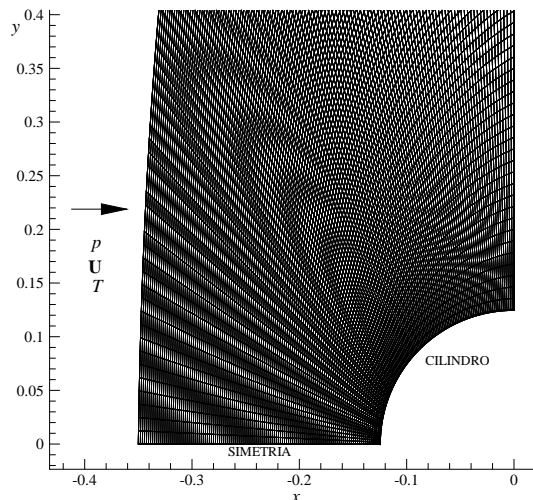


Figura 5.10: Malha bidimensional utilizada no cálculo do escoamento supersônico sobre um cilindro (120×120).

foram impostas na entrada e foram extrapoladas na saída. Foram calculadas duas situações que correspondem a dois números de Mach impostos na entrada, nomeadamente $Ma = 1,97$ e $Ma = 6$. O índice adiabático para o gás ideal assume um valor constante, igual a $\gamma = 1,4$, e para efeitos de interpolação optou-se novamente pelo esquema de diferenciação CUBISTA.

Nas Figs. 5.11a-d estão presentes os resultados obtidos para o caso de teste em que o número de Mach à entrada é $Ma = 1,97$, estando representadas as linhas isobáricas e a distribuição das isolinhas referentes à massa volúmica. As soluções foram obtidas com o novo código, aqui denominado AUSM (Figs.5.11a e c), e com a técnica de interpolação de Rhie e Chow (Figs.5.11b e d). Como se pode observar, a técnica de interpolação de Rhie-Chow é capaz de calcular a posição e dimensão corretas da onda de choque. No entanto, como se vê pelas isolinhas, este método mostra tendência para produzir um elevado número de oscilações na região a jusante da onda de choque. Note-se que estas oscilações não possuem qualquer significado físico e são similares àquelas que ocorrem nas situações de desacoplamento entre a velocidade e a pressão em escoamentos a baixa velocidade. Por outro lado, o novo método desenvolvido no decurso do presente trabalho, encontra-se livre desse tipo de problemas, mesmo para um número de Mach muito superior à entrada ($Ma = 6$), como é ilustrado pelo último par de figuras (Fig. 5.11e-f).

5.2 Casos de teste MHD

Nas próximas secções vamos discutir os resultados para os casos de teste utilizados na validação do método MHD descrito na secção 4.2. Inicialmente, vão ser analisados dois casos de teste com escoamento do tipo quase-incompressível, que correspondem à evolução de um escoamento MHD viscoso e resistivo num canal de secção retangular. O segundo grupo de casos de teste compreende o cálculo de ondas de Alfvén, utilizando formulações uni- e bidimensionais do sistema MHD ideal. Posteriormente são apresentados vários casos de regime altamente compreensível, que contêm inúmeras descontinuidades características de escoamentos MHD. Na secção 5.2.3 é analisada uma versão bidimensional do problema de Riemann 1D e posteriormente, na secção 5.2.4, é calculado um caso de teste 2D padrão conhecido como vórtice de

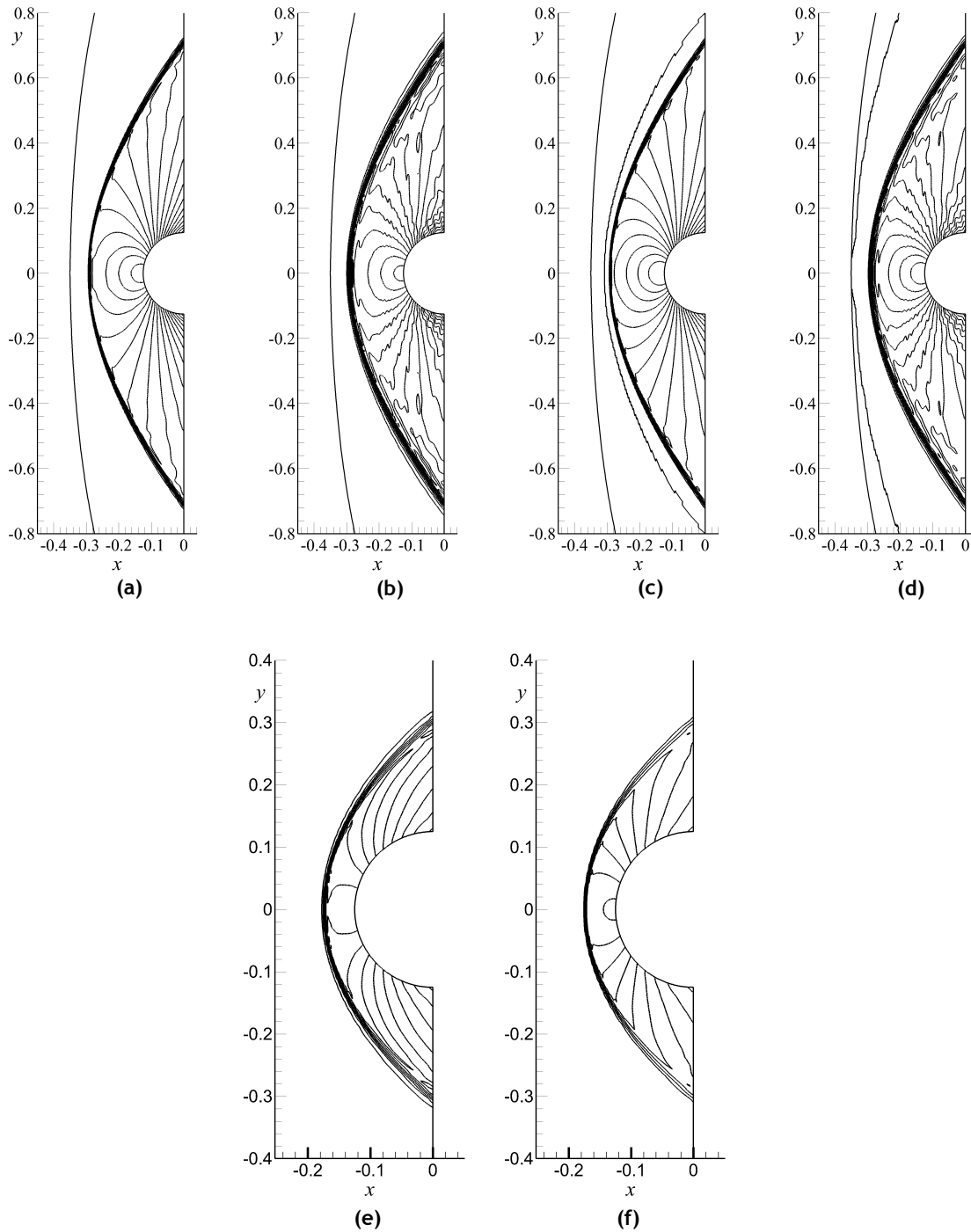


Figura 5.11: Isolinhas para a massa volúmica (a, b, e) e para a pressão (c, d, f), obtidas com as definições AUSM⁺ - up (a, c, e, f) e com a técnica de interpolação de Rhie e Chow (b, d). $Ma = 1,97$ (a-d), $Ma = 6$ (e,f).

Orszag-Tang. A secção 5.2.5 lida com um problema do domínio da astrofísica, que envolve a interação de uma nuvem de gases densos com uma onda de choque. Um terceiro caso de teste padrão 2D, conhecido como o rotor MHD, é discutido na secção 5.2.6. Finalmente, a secção 5.2.7 trata os resultados obtidos com a versão MHD para o problema do escoamento supersónico sobre um cilindro.

5.2.1 Escoamento incompressível em canais de secção quadrada

Nesta secção são apresentados dois casos de teste típicos que compreendem a evolução do escoamento MHD resistivo, viscoso e incompressível em canais retangulares. Estes problemas possuem soluções analíticas, obtidas por Shercliff (1953) e por Hunt (1965), e como tal são frequentemente utilizados para efeitos de validação de algoritmos MHD a operar no regime incompressível.

5.2.1.1 Solução de Shercliff

O primeiro caso de teste que vai ser analisado é conhecido como o problema de *Shercliff*. Este problema consiste no escoamento de um fluido com resistividade elétrica finita, movido por um gradiente de pressão constante, dentro de um canal de secção quadrada. O escoamento é depois sujeito a um campo magnético de valor uniforme e invariável no tempo, que é imposto na direção perpendicular ao sentido do movimento. Todas as paredes sólidas do canal encontram-se eletricamente isoladas e aí a velocidade assume uma condição de fronteira de não-eskorregamento. Esta configuração vai gerar um escoamento uni-direcional na direção perpendicular ao campo magnético imposto. Como tal, a única componente do campo magnético induzida pela velocidade será a componente paralela à direção do escoamento, no nosso caso a componente B_x .

A secção do canal é quadrada com largura igual a $2b$ e altura igual a $2a$, em que se assume $a = b = 1$. O campo magnético é imposto na direção paralela à parede $2a$ (segundo oz) e, como já foi referido, o escoamento desenvolve-se na direção paralela ao eixo ox , veja-se a Fig. 5.12a.

Apesar de as paredes sólidas possuírem condições de fronteira idênticas vamos classificá-las de maneira diferente. Esta distinção vai ser útil, uma vez que a espessura da camada limite em cada uma das paredes vai ser diferente. As diferentes espessuras da camada limite são um resultado direto da imposição do campo magnético na direção transversal ao escoamento, o qual irá gerar uma força de Lorentz ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}$) que se opõe ao sentido do movimento e faz diminuir a espessura da camada limite. Este fenómeno foi descrito na secção 2.5.1 e é tratado em qualquer livro de introdução à teoria MHD, por exemplo o capítulo 5 de Davidson (2001). Assim, a parede localizada em $z = \pm 1$ vai ser denominada parede de *Hartmann* e a parede localizada em $y = \pm 1$ vai ser denominada parede de *Shercliff*.

Este problema pode ser facilmente convertido num caso bidimensional restringido à secção transversal do canal, se impusermos condições de fronteira periódicas na direção do escoamento. Seguindo a mesma abordagem de Ni et al. (2007b), optou-se por um número de Hartmann igual a $H_a = 1000$ e por um número de Reynolds igual a $Re = 10$. O caudal mássico deverá

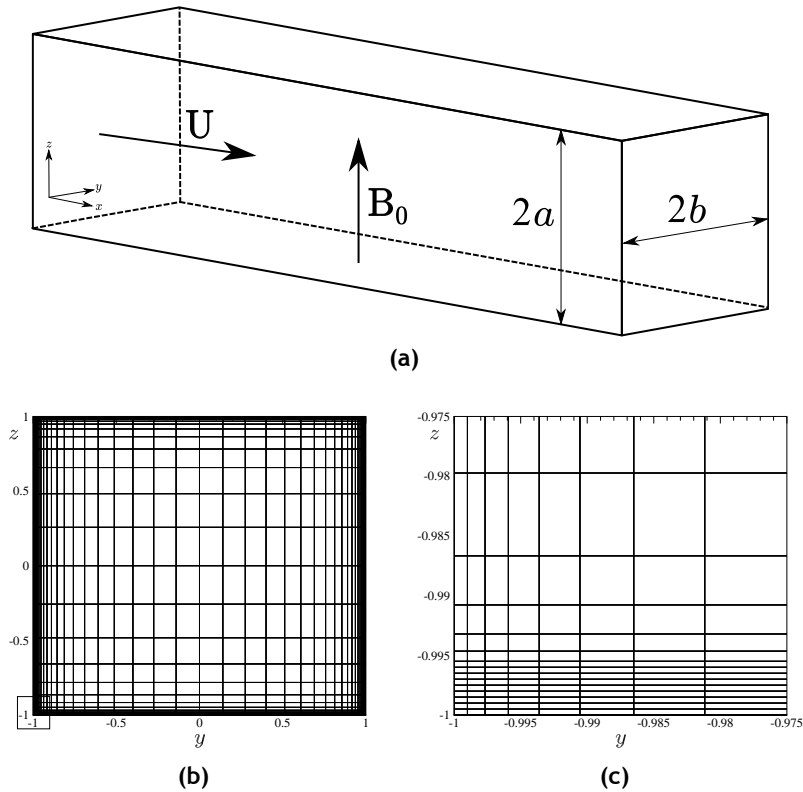


Figura 5.12: a) Geometria utilizada para a solução de *Shercliff* e de *Hunt*. Vista global (b) e detalhe (c) da malha utilizada.

ser igual a 4, desta forma deverá ser imposto um gradiente de pressão de valor constante (obtido através da solução analítica de *Shercliff*) igual a $-102,88$. Para o cálculo numérico da solução de *Shercliff* utilizou-se uma malha $N \times N$, com $N = 46$, mostrada na Fig. 5.12b. A Fig. 5.12c mostra um pormenor relativo ao canto inferior esquerdo da malha. Note-se que a malha não possui um espaçamento uniforme devido às diferentes espessuras das camadas limites. A camada limite de *Hartmann* necessita de mais pontos pois a sua espessura é proporcional a H_a^{-1} , comparativamente à camada limite de *Shercliff*, que possui uma espessura proporcional a $H_a^{-1/2}$.

Na Fig. 5.13 apresenta-se uma comparação entre os resultados numéricos obtidos e a solução analítica exata, obtida a partir das equações dadas por Ni et al. (2007a). Como podemos observar, o novo algoritmo, apesar de se basear numa formulação compressível das equações MHD, consegue calcular com precisão a espessura das duas camadas limites. Na Fig. 5.14 está representada a distribuição do campo de velocidade na respetiva secção transversal do canal, a) mostra a distribuição 3D da velocidade e b) as respetivas isolinhas em 2D. Note-se como a espessura da camada limite de *Hartmann* é consideravelmente inferior à espessura da camada limite de *Shercliff*. Podemos observar, através da Fig. 5.14c, que as linhas de corrente elétrica são perpendiculares ao campo magnético imposto na camada limite de *Hartmann*, mas são paralelas ao mesmo campo imposto na camada limite de *Shercliff*. Esta é a principal razão da diferença entre as duas espessuras de camada limite. Na Fig 5.14d apresentamos uma distribuição do campo magnético B_x induzido pelo campo de velocidade. Verificar-se que esta componente do campo magnético atinge o seu valor máximo na região junto às paredes perpendiculares ao campo magnético imposto, B_z . Nestas paredes a espessura da camada limite é mais reduzida, uma vez que é nesta região que a componente axial da força de Lorentz,

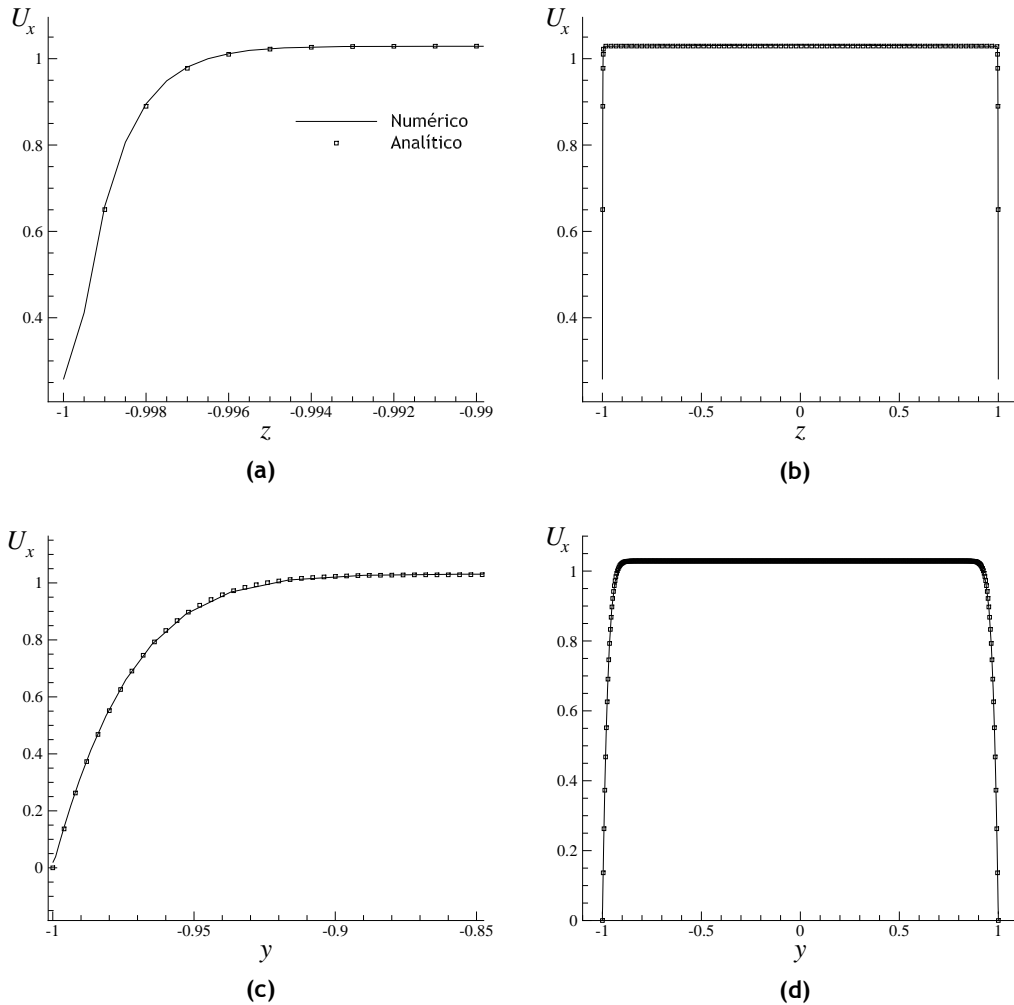
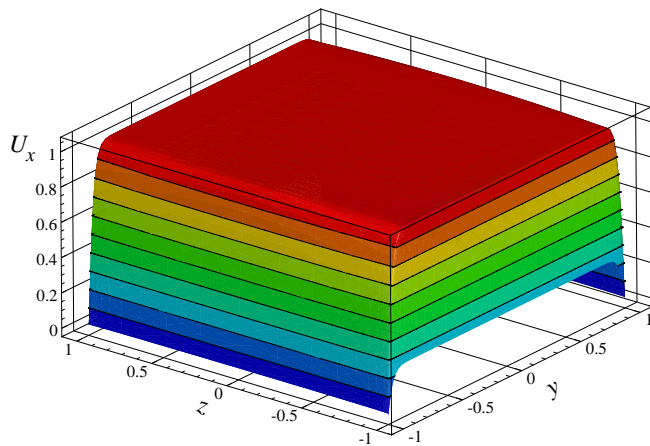


Figura 5.13: Resultados obtidos para o caso de *Shercliff*. a) Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica exata de *Shercliff* para a camada limite de *Hartmann*. b) Perfil de velocidade calculado no plano paralelo à direção do campo magnético imposto. c) Comparação entre os resultados numéricos e a solução exata para a camada limite de *Shercliff*. d) Perfil de velocidade calculado no plano perpendicular à direção do campo magnético imposto.

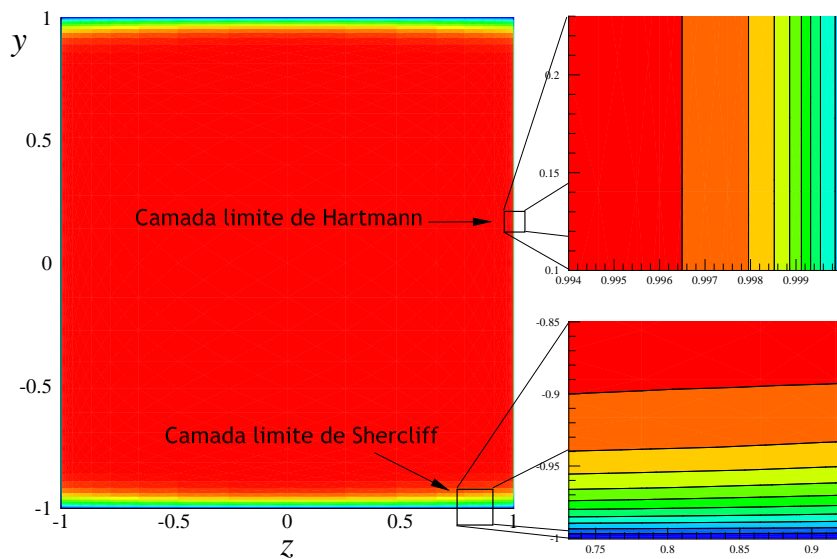
$-B_z j_y$, atinge o seu valor mais elevado.

5.2.1.2 Solução de Hunt

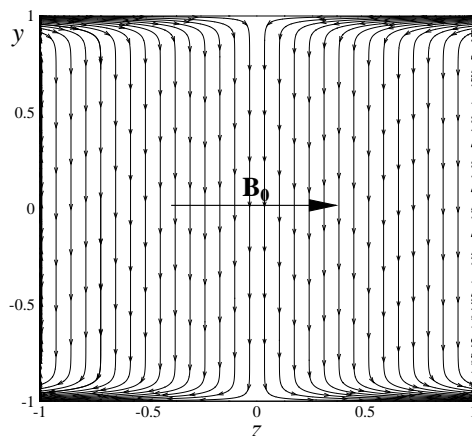
O segundo caso de teste sobre o qual nos vamos debruçar é também, como o problema de *Shercliff* da secção anterior, um escoamento sujeito a um campo magnético imposto que se desenvolve num canal de secção retangular. A única diferença entre o problema de *Hunt* e de *Shercliff* resulta de uma modificação nas condições de fronteira das paredes sólidas perpendiculares ao campo magnético imposto. No problema de *Hunt* agora considerado (Fig. 5.15) assume-se que essas paredes são condutoras de eletricidade absorvendo por isso uma parte da corrente elétrica a que estão sujeitas. Esta modificação vai resultar em alguns fenómenos físicos diferentes dos relativos ao problema de *Shercliff*. Na região central do canal a corrente elétrica é induzida na direção transversal ao campo magnético imposto, desta forma a força eletromagnética resultante tende a contrabalançar com o gradiente de pressão que move o es-



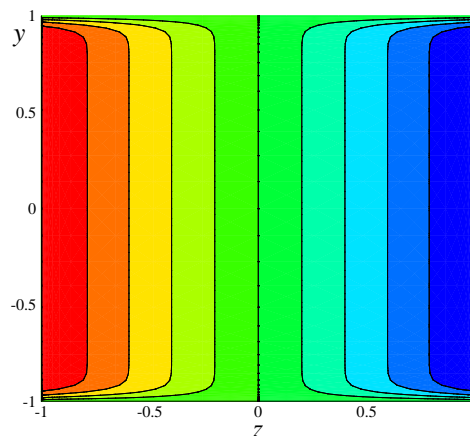
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.14: a) Gráfico tridimensional da distribuição de velocidade no canal. b) Isolinhas relativas ao campo de velocidade, onde se destaca a espessura das duas camadas limites. c) Representação das linhas de corrente elétrica. d) Distribuição do campo magnético induzido pela velocidade do escoamento, como esperado a sua intensidade é maior junto às paredes perpendiculares à direção do campo magnético imposto.

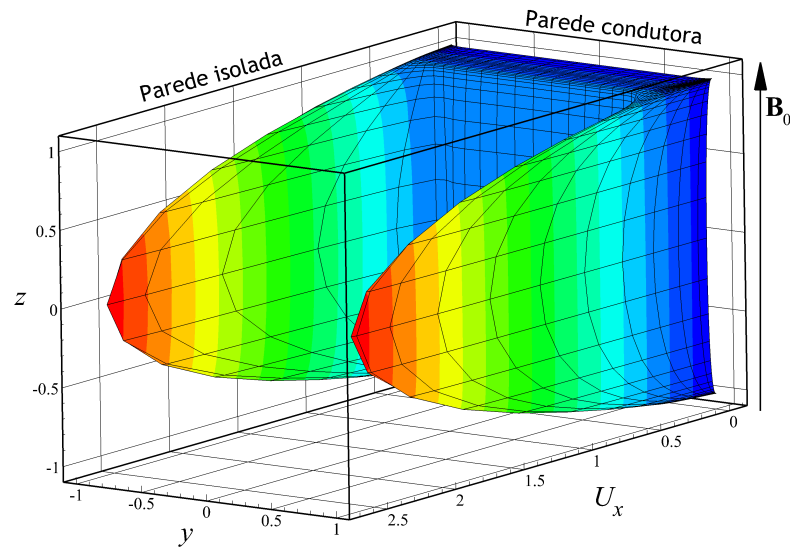


Figura 5.15: Distribuição tridimensional da velocidade axial calculada numa secção do canal.

coamento, veja-se a Fig. 5.16a. Por seu lado, nas paredes isoladas a corrente induzida assume uma direção paralela ao campo imposto, o que vai reduzir a força de Lorentz nesta região. Assim, nesta região do escoamento a única oposição ao gradiente de pressão vem dada pelas forças de origem viscosa, o que vai resultar na criação de dois jatos de fluido, como mostrado na Fig. 5.15.

Neste caso de teste optou-se por um número de Reynolds idêntico ao problema de *Shercliff* ($Re = 10$) e por um número de Hartmann inferior ($Ha = 300$). Foi imposto um gradiente de pressão uniforme de valor igual a -300 e utilizou-se novamente a malha representada na Fig. 5.12. Nas paredes condutoras foi assumida uma condutância igual a $0,1$.

Nas Figs. 5.16b e 5.16c estão representados os resultados analíticos e numéricos calculados para o perfil de velocidades na secção transversal do canal ao longo de $z = 0$. Como podemos verificar, existe um bom acordo entre os resultados analíticos e numéricos. A única exceção é na transição entre a camada limite e o escoamento desenvolvido. No entanto, repare-se que nessa zona de transição o número de pontos da malha é consideravelmente reduzido. Isto porque a malha aqui utilizada foi desenvolvida para o problema de *Shercliff* com um número de Ha três vezes superior. Na Fig. 5.16d está presente uma comparação entre os resultados numéricos e analíticos calculados para a camada limite de *Hartmann* isto é, o perfil de velocidade na direção perpendicular à anterior, com $y = 0$. Mais uma vez, a camada limite consegue ser calculada com relativa precisão. Curiosamente, é na região central da secção do canal que encontramos alguns problemas de convergência, veja-se a Fig. 5.16e.

5.2.2 Ondas de Alfvén

Este caso de teste permite validar o método proposto em problemas referentes a escoamento sem descontinuidades e com números de Mach reduzidos ($Ma \approx 0,2$). Trata-se de um caso de teste padrão para MHD ideal (veja-se Dai e Woodward (1998a) e Tóth (2000)) uma vez que permite obter soluções analíticas das equações MHD para diferentes amplitudes de onda. Na sua

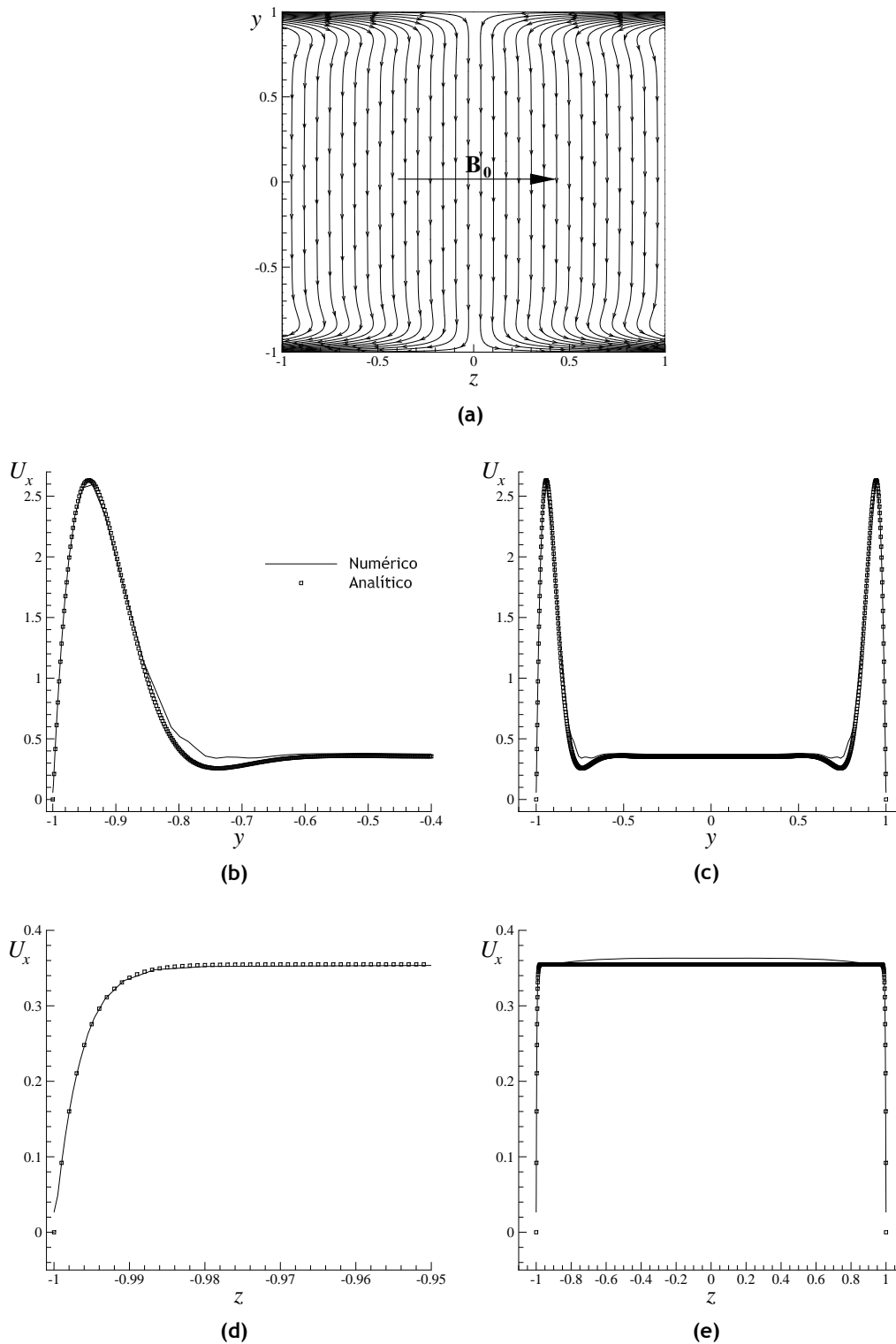


Figura 5.16: Resultados obtidos para o problema de Hunt. a) Representação das linhas de corrente elétrica em comparação com o campo magnético imposto. b) Comparação entre os resultados numéricos e a solução analítica de Hunt para a camada limite lateral. c) Perfil de velocidade calculado no plano perpendicular à direção do campo magnético imposto ($z = 0$). d) Comparação entre os resultados numéricos e a solução exata para a camada limite de Hartmann. e) Perfil de velocidade calculado no plano paralelo à direção do campo magnético imposto ($y = 0$).

resolução podemos utilizar uma formulação uni-dimensional das equações MHD numa malha 1D. Por outro lado, também é possível rodar a geometria com um ângulo α em relação ao eixo x e, neste caso, o problema converte-se num caso de teste que requer uma solução bidimensional. Ambas as vertentes para este problema são consideradas de seguida. Para o caso de teste 1D a solução foi calculada numa malha periódica que se estende desde $x = 0$ até $x = 1$; o caso 2D foi calculado numa malha com condições de fronteira periódicas num domínio limitado por $(x, y) = [0; 1/\cos \alpha] \times [0; 1/\sin \alpha]$.

Como indicado acima, o caso bidimensional é obtido ao se rodar a geometria em relação ao eixo x com um ângulo α . Desta forma, as componentes cartesianas dos vetores do campo magnético e do campo de velocidades, após rotação de ângulo α , são relacionadas com as componentes paralelas e perpendiculares à direção de propagação da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} U_x \\ B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\parallel} \\ B_{\parallel} \end{pmatrix} \cos \alpha - \begin{pmatrix} U_{\perp} \\ B_{\perp} \end{pmatrix} \sin \alpha, \\ \begin{pmatrix} U_y \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\parallel} \\ B_{\parallel} \end{pmatrix} \sin \alpha + \begin{pmatrix} U_{\perp} \\ B_{\perp} \end{pmatrix} \cos \alpha. \quad (5.3)$$

Note-se que, para $\alpha = 0$, as componentes paralelas e perpendiculares assumem o valor das componentes x e y , nomeadamente $U_x = U_{\parallel}$ e $U_y = U_{\perp}$ (a mesma situação ocorre para o campo magnético). Os valores iniciais para os campos escalares e vectoriais são:

$$\eta = 0; \mu_0 = 1; \rho = 1; p = 0, 1; \gamma = 5/3;$$

$$U_{\parallel} = 0; B_{\parallel} = 1;$$

$$U_{\perp} = B_{\perp} = 0, 1 \sin [2\pi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)];$$

$$U_z = B_z = 0, 1 \cos [2\pi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)].$$

Para estes valores a velocidade de Alfvén vem dada por $|U_A| = B_{\parallel}/\sqrt{\rho} = 1$, o que implica que o período da onda é $t = 1$. Como tal, é esperado que ao fim de um intervalo de tempo unitário o escoamento retorne ao estado inicial.

Os resultados aqui obtidos para a solução uni-dimensional ($\alpha = 0^\circ$), relativos à evolução de B_y e B_z após cinco períodos encontram-se representados na Fig. 5.17. Estes foram calculados em quatro malhas com um número crescente de nós, nomeadamente: $N = 16$; $N = 32$; $N = 64$; e $N = 128$. Para efeitos de comparação é também apresentada a condição inicial calculada na malha mais refinada. Podemos observar que a amplitude da onda se mantém praticamente inalterada, mesmo quando esta é calculada na malha mais esparsa.

Comparando os resultados numéricos aqui calculados e os apresentados na literatura, nomeadamente os que foram obtidos através de métodos do tipo DBA (por exemplo, os resultados de Tóth (2000)), verificamos que, em malhas esparsas, esses resultados tendem a revelar maior dissipação com atenuação bastante significativa da magnitude da onda magnética. O método numérico aqui proposto encontra-se livre desse tipo de problemas; no entanto apresenta um erro de fase visível na Fig. 5.17, que vai diminuindo à medida que a malha é refinada.

O segundo caso de teste refere-se ao problema bidimensional correspondente, calculado numa malha de dimensão $N \times N$. A distribuição das componentes vectoriais foi rodada em relação ao

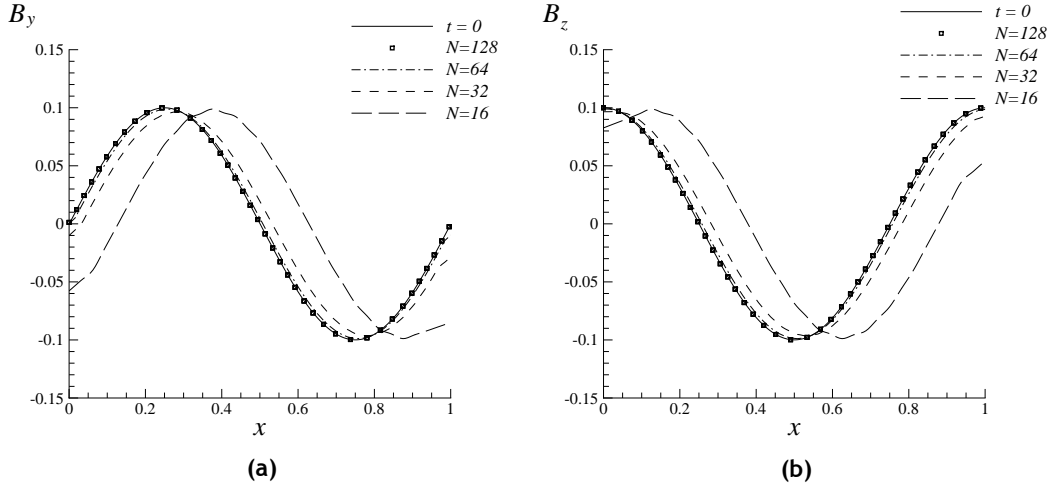


Figura 5.17: Ondas de Alfvén em 1D. Resultados obtidos para as componentes B_y e B_z do campo magnético, calculadas com quatro malhas de diferente resolução, ao fim de cinco períodos. Representado a linha cheia mostra-se a distribuição inicial do campo magnético calculada na malha mais refinada.

eixo x com um ângulo $\alpha = 30^\circ$. Este problema foi calculado em três malhas com dimensões: $N = 16$, $N = 32$ e $N = 64$. Na Fig. 5.18 estão representados os resultados para a componente perpendicular e para a componente B_z do campo magnético. As componentes foram projetadas sobre um vetor paralelo à direção de propagação da onda dado por $r = x \cos \alpha + y \sin \alpha$. As soluções aqui apresentadas são, novamente, para um tempo final correspondente a cinco períodos de onda. Para efeitos de comparação usamos o valor inicial de B calculado na malha mais refinada, o qual deverá ser repetido após cada período. Como podemos observar, a amplitude da onda é adequadamente mantida em todas as malhas incluindo as mais esparsas. Embora este não seja um fator conclusivo, os resultados aqui apresentados parecem ser um bom indicador de que o algoritmo desenvolvido para a resolução das equações MHD bidimensionais a um número de Mach arbitrário está a cumprir os seus objetivos.

De forma a verificar a ordem de convergência do método foi realizado um estudo de convergência da malha para os casos uni-dimensional e bidimensional. Em ambos os casos foram obtidos resultados para as quatro malhas já referidas: $N = 16$, $N = 32$, $N = 64$ e $N = 128$. A ordem de precisão do método foi estimada através do comportamento do erro relativo para a componente perpendicular do campo magnético, obtida ao fim de cinco períodos, calculada a partir da norma \mathcal{L}_2 ,

$$\|e_h\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (B_i - B_{i,0})^2}{\sum_{i=1}^n B_{i,0}^2}}, \quad (5.4)$$

onde $B_{i,0}$ é o valor inicial calculado na malha mais refinada e n representa o número de pontos utilizados no cálculo do erro. Na Fig. 5.19 estão presentes os gráficos correspondentes aos erros relativos, calculados com a norma \mathcal{L}_2 em função do espaçamento da malha ($h = 1/N$) numa escala logarítmica. Podemos verificar que ambos os gráficos apresentam um decaimento que tende para segunda ordem à medida que a malha é refinada. Na presença de descontinuidades, devido à atuação dos limitadores de fluxo, é esperado que a ordem de convergência piore, variando entre convergência de primeira e segunda ordem.

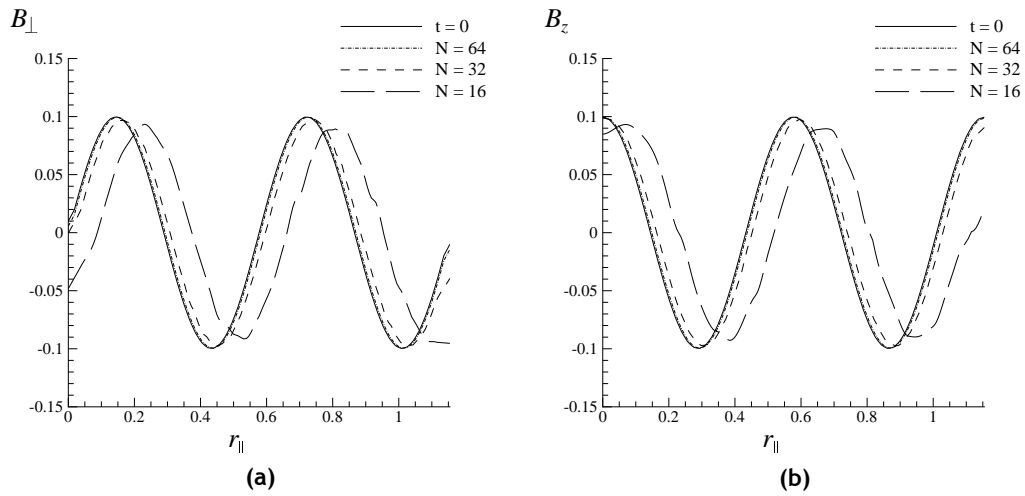


Figura 5.18: Ondas de Alfvén em 2D. Resultados obtidos para as componentes perpendiculares, B_{\perp} , e B_z do campo magnético ao fim de cinco períodos, e projetadas sobre um vetor paralelo à direção de propagação da onda. A linha cheia mostra a distribuição inicial calculada com recurso à malha mais refinada.

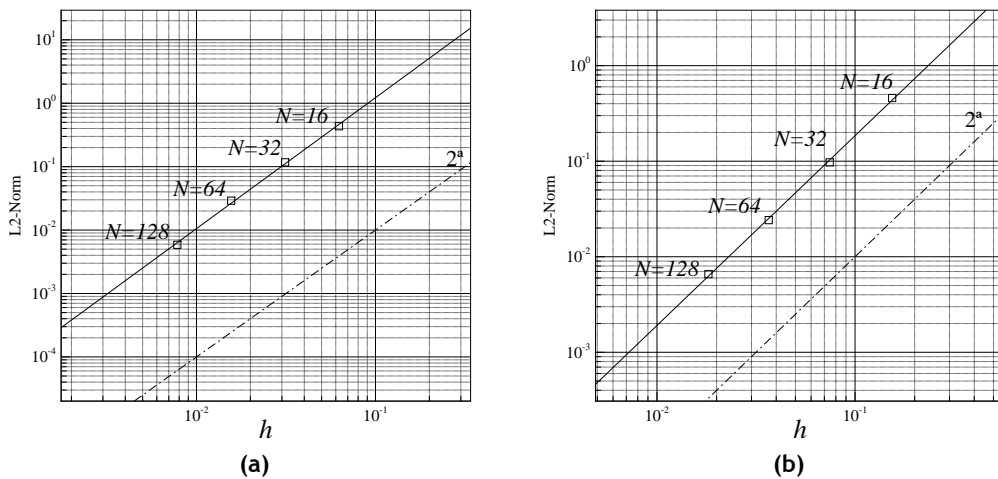


Figura 5.19: Estudo da ordem de convergência no problema de Alfvén para o caso uni-dimensional (a) e para o caso bidimensional (b). Como podemos observar os gráficos apresentam um decaimento de segunda ordem do erro. Na presença de descontinuidades, devido à atuação dos limitadores de fluxo, é esperado que a ordem de convergência seja reduzida.

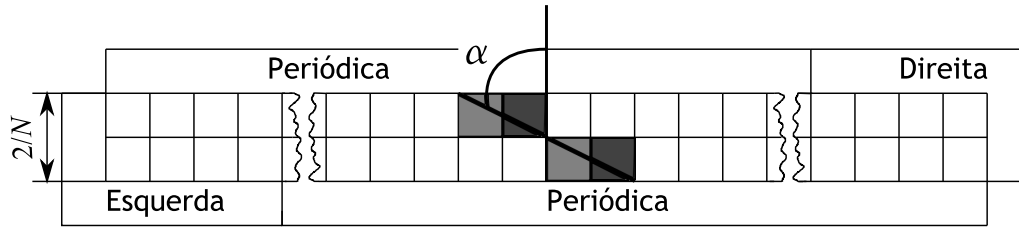


Figura 5.20: Vista parcial da malha bidimensional utilizada no cálculo do problema de Riemann. As condições de fronteira periódicas foram deslocadas em cada uma das direções com uma distância dada por quatro volumes de controlo.

5.2.3 Problema de Riemann 1D

Nesta secção vamos abordar o problema de Riemann 1D seguindo uma formulação uni-dimensional e bidimensional do sistema de equações MHD ideal. As várias vertentes do problema de Riemann têm sido utilizadas por diversos autores de forma a validarem os seus esquemas numéricos de alta resolução MHD (Ryu e Jones, 1995; Ryu et al., 1998; Tóth, 2000; Ziegler, 2004). Este caso de teste, da mesma forma que o anterior, tem a particularidade de poder ser convertido num caso bidimensional se a descontinuidade fizer um ângulo α com o eixo oy , veja-se a Fig. 5.20. As componentes x e y , dos vetores de velocidade e do campo magnético, podem ser novamente deduzidas a partir das suas respetivas componentes paralelas e perpendiculares, veja-se a equação (5.3).

O problema 2D pode ser resolvido num domínio computacional “estrito” com uma malha $N \times 2$, onde $(x, y) = [0, 1] \times [0, 2/N]$. O ângulo de rotação que vai ser adotado é igual a $\alpha \approx 63,4^\circ$, e o tempo máximo de simulação vem dado por: $t_{2D, \max} = t_{1D, \max} \cos \alpha$, onde $t_{1D, \max}$ representa o tempo de avanço da solução em 1D. Nas fronteiras superiores e inferiores são aplicadas condições de fronteira periódicas deslocadas, e nas restantes fronteiras (esquerda e direitas) são impostos os respetivos valores iniciais, que se irão manter constantes durante todo o processo de cálculo, veja-se a Fig. 5.20. A condição de fronteira periódica deslocada é facilmente compreendida se analisarmos a equação $2/N \tan \alpha = m \delta x$, onde m representa um número inteiro e $\delta x = \delta y = 1/N$ é o espaçamento da malha. Uma vez que se optou por um ângulo de rotação $\alpha \approx 63,4^\circ$ vamos obter um $m = 4$. Se analisarmos a Fig. 5.20 podemos verificar que $m = 4$ foi o número de volumes de controlo que deslocámos na fronteira periódica superior e inferior. Facilmente nos apercebemos que esta forma de cálculo é bastante mais económica do que utilizar uma malha $N \times N$. Ainda assim, foi referido por Tóth (2000) que a resolução efetiva de uma malha $N \times 2$ é três vezes inferior para o mesmo valor de N , como tal essa particularidade tem de ser levada em conta na análise dos resultados.

Para todos os casos de teste assumiu-se um índice adiabático $\gamma = 5/3$ e uma resistividade nula ($\eta = 0$). Para a obtenção das variáveis à esquerda e à direita da face optou-se pela utilização de um esquema TVD com uma função limitadora Minmod. Os resultados bidimensionais, obtidos para cada um dos casos, vão ser comparados com a solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de elevada resolução ($N = 1024$). Os valores iniciais impostos para os

quatro problemas analisados vêm dados por:

$$\begin{aligned}
 \text{Caso A} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_{\parallel} \\ U_{\perp} \\ U_z \\ p \\ B_{\parallel} \\ B_{\perp} \\ B_z \end{pmatrix}_L &= \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 5/\sqrt{4\pi} \\ 5/\sqrt{4\pi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_{\parallel} \\ U_{\perp} \\ U_z \\ p \\ B_{\parallel} \\ B_{\perp} \\ B_z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5/\sqrt{4\pi} \\ 5/\sqrt{4\pi} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Caso B} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_{\parallel} \\ U_{\perp} \\ U_z \\ p \\ B_{\parallel} \\ B_{\perp} \\ B_z \end{pmatrix}_L &= \begin{pmatrix} 1,08 \\ 1,2 \\ 0,01 \\ 0,5 \\ 0,95 \\ 2/\sqrt{4\pi} \\ 3,6/\sqrt{4\pi} \\ 2/\sqrt{4\pi} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_{\parallel} \\ U_{\perp} \\ U_z \\ p \\ B_{\parallel} \\ B_{\perp} \\ B_z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2/\sqrt{4\pi} \\ 4/\sqrt{4\pi} \\ 2/\sqrt{4\pi} \end{pmatrix}; \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Caso C} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_{\parallel} \\ U_{\perp} \\ U_z \\ p \\ B_{\parallel} \\ B_{\perp} \\ B_z \end{pmatrix}_L &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_{\parallel} \\ U_{\perp} \\ U_z \\ p \\ B_{\parallel} \\ B_{\perp} \\ B_z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Caso D} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_{\parallel} \\ U_{\perp} \\ U_z \\ p \\ B_{\parallel} \\ B_{\perp} \\ B_z \end{pmatrix}_L &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0,75 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_{\parallel} \\ U_{\perp} \\ U_z \\ p \\ B_{\parallel} \\ B_{\perp} \\ B_z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \\ 0,75 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Na Fig. 5.21 estão presentes os resultados numéricos obtidos para o *Caso A* ao fim de $t = 0,08 \cos \alpha$. São apresentados resultados para a distribuição: da massa volúmica (a); da pressão termodinâmica (b); das componentes paralelas da velocidade (c) e do campo magnético (d); das componentes perpendiculares da velocidade (e) e do campo magnético (f); e da divergência do campo magnético (h). Como podemos observar os resultados 2D são demasiado dissipativos. No entanto, foi referido atrás que a resolução efetiva resultante dum malha $N \times 2$ é cerca de três vezes inferior do que aquela obtida com uma malha de dimensão $N \times N$. Todavia, é possível observar que o método proposto consegue captar a física do problema e, ao mesmo tempo, podemos ampliar os erros que advêm da não divergência do campo magnético. Em cada um dos gráficos, da esquerda para a direita, podemos observar os diferentes tipos de descontinuidade

que foram apresentados na secção 2.4.5, nomeadamente: onda de choque rápida; rarefação lenta; descontinuidade de contacto (apenas visível na massa volúmica); onda de choque lenta; e onda de choque rápida. Repare-se que a distribuição das componentes perpendiculares da velocidade e do campo magnético apresentam uma elevada discrepância em relação aos resultados uni-dimensionais. Todavia, de todos os problemas calculados, este é o que apresenta uma maior quantidade de erros introduzidos pela não satisfação da divergência de \mathbf{B} . Como podemos observar na Fig. 5.21g, estes erros são resultado direto das duas ondas de choque rápidas de grande amplitude em U_{\parallel} , que conseqüentemente provocam grandes variações na amplitude de B_{\perp} . Esta amplificação dos erros é resultado direto da resolução da malha. Como tal, é de esperar que um maior refinamento da malha resulte numa maior dissipação local dos erros acumulados nessas descontinuidades.

Na Fig. 5.22 apresentam-se os resultados do *Caso B* para $t = 0,2 \cos \alpha$. Em contraste com o caso de teste anterior, o problema agora analisado envolve as três componentes do campo magnético e da velocidade. Um problema de Riemann 1D depende diretamente dos estados iniciais impostos à esquerda e à direita das descontinuidades. Como tal, será esperado que para diferentes valores iniciais das variáveis resultem comportamentos diversos da solução final. Para o *Caso B*, a solução apresenta, da esquerda para a direita: onda de choque rápida; descontinuidade rotacional; onda de choque lenta; descontinuidade de contacto; onda de choque lenta; descontinuidade rotacional; e onda de choque rápida. Como se pode observar na Fig. 5.22, os erros de maior dimensão introduzidos em \mathbf{B} são novamente resultado direto das duas ondas de choque rápidas. No entanto, neste caso e em comparação com o *Caso A* a amplitude das ondas de choque é muito inferior, vejam-se as Figs. 5.22a e d. Assim, os erros resultantes dessas ondas de choque também são relativamente inferiores, como se vê pelos valores de $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ na Fig. 5.22i.

Os resultados referentes ao *Caso C* obtidos no tempo $t = 0,15 \cos \alpha$ encontram-se na Fig. 5.23. Este problema permite-nos testar o método proposto para o cálculo de ondas de choque *switch-on* rápidas. Os gráficos mostram, da esquerda para a direita: rarefação rápida; rarefação lenta ($x \sim 0,45$); descontinuidade de contacto ($x \sim 0,65$, visível na massa volúmica); onda de choque lenta ($x \sim 0,75$); e onda de choque *switch-on* rápida. Na secção 2.4.5 o caso limite *switch-on* foi analisado e referiu-se que o seu efeito no campo magnético era o de “ligar” a sua componente tangencial na região a jusante da descontinuidade. Contudo, pode parecer que na Fig. 5.23f a componente tangencial está a ser desligada e que a análise do problema estaria incorreta. Para clarificar este ponto, é importante definir quais são as regiões a montante e a jusante da descontinuidade. Neste problema específico a região a montante deve ser considerada como a região à direita e a região a jusante da onda de choque é a sua região à esquerda. Portanto, se analisarmos o problema da direita para a esquerda, podemos verificar que antes da descontinuidade $B_{\perp} = 0$ e depois da descontinuidade $B_{\perp} \neq 0$, o que justifica a designação *switch-on*.

O último problema de Riemann aqui utilizado para efeitos de validação é a versão MHD do problema de *Sod*, introduzida por Brio e Wu (1988). Os resultados obtidos para este caso de teste, aqui denominado *Caso D*, no instante $t = 0,1 \cos \alpha$ encontram-se representados na Fig. 5.24. Estes gráficos mostram, da esquerda para a direita: rarefação rápida; onda lenta composta ($x \sim 0,47$); descontinuidade de contacto ($x \sim 0,56$); onda de choque lenta ($x \sim 0,63$); e rarefação rápida. A onda lenta composta consiste numa rarefação lenta e onda de choque que

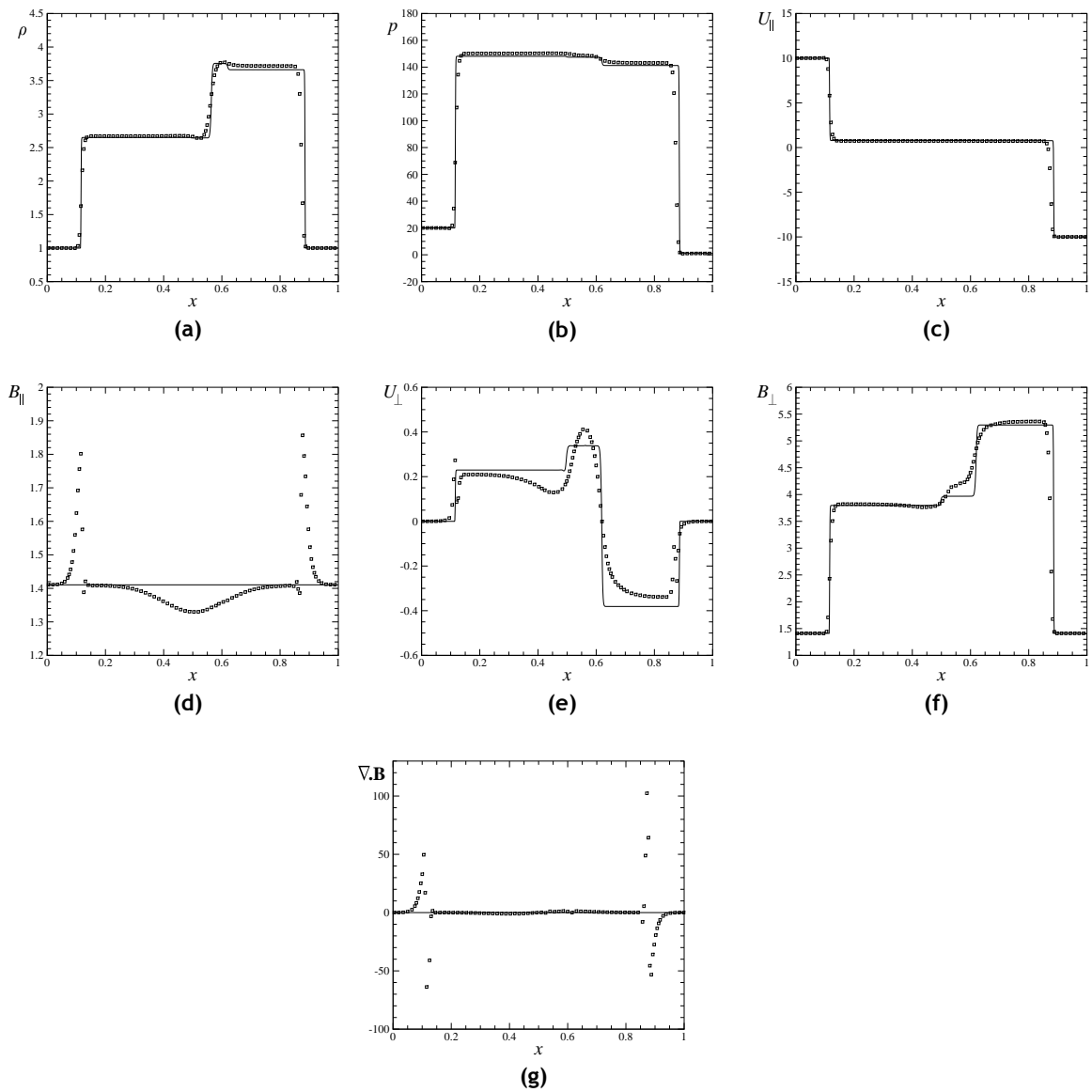


Figura 5.21: Resultados obtidos para o *Caso A* ao fim de $t = 0,08 \cos \alpha$. Os resultados bidimensionais são comparados com uma solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de elevada resolução ($N = 1024$). São apresentadas distribuições para: a massa volúmica (a); a pressão termodinâmica (b); a componente paralela da velocidade (c) e do campo magnético (d); a componente perpendicular da velocidade (e) e do campo magnético (f); e a divergência do campo magnético (g).

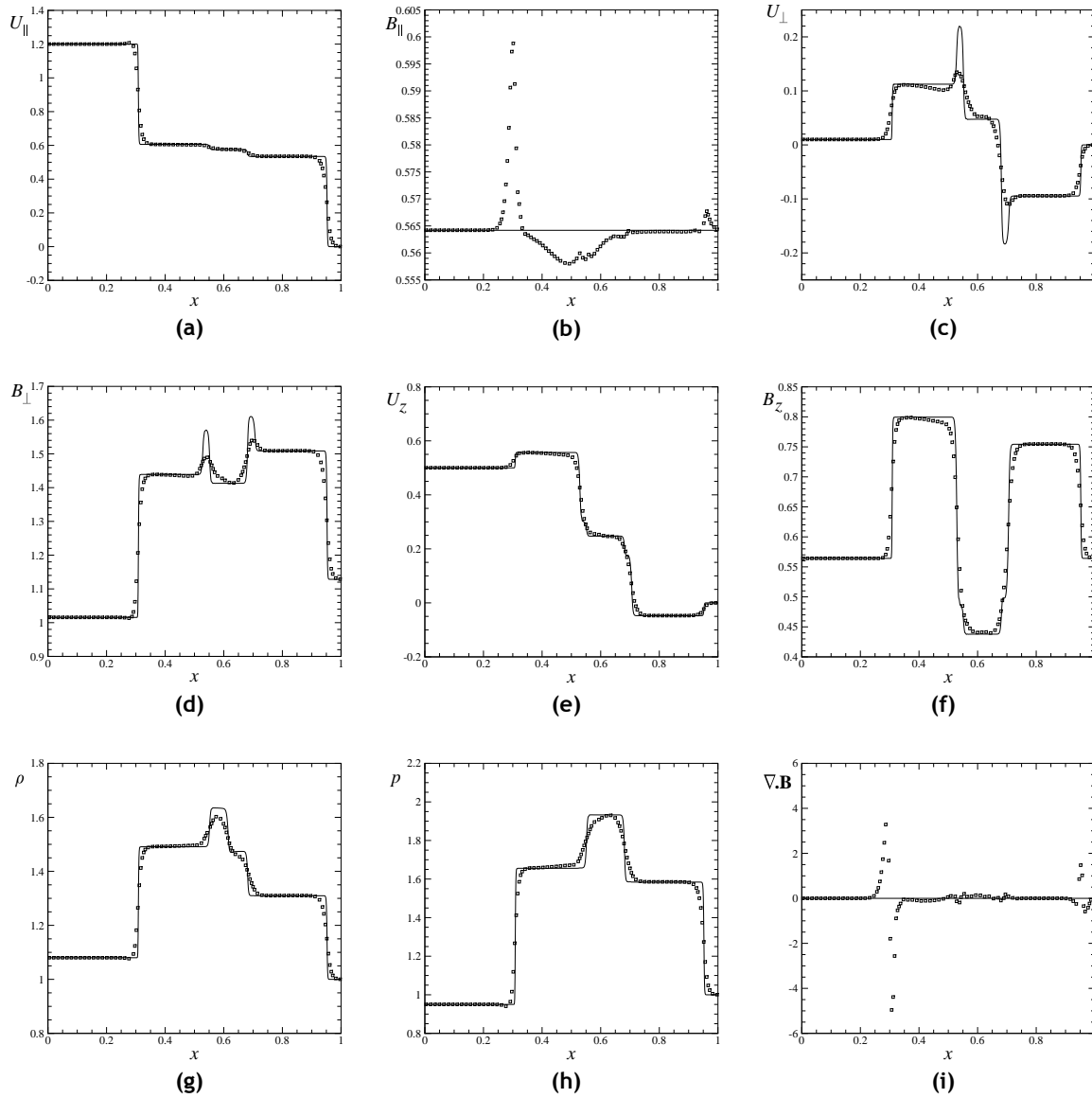


Figura 5.22: Resultados obtidos para o *Caso B* ao fim de $t = 0,2 \cos \alpha$. Os resultados bidimensionais são comparados com uma solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de elevada resolução ($N = 1024$). São apresentadas distribuições para: a componente paralela da velocidade (a); e do campo magnético (b); a componente perpendicular da velocidade (c); e do campo magnético (d); a componente segundo z da velocidade (e); e do campo magnético (f); da massa volúmica (g); da pressão (h); da divergência do campo magnético (i).

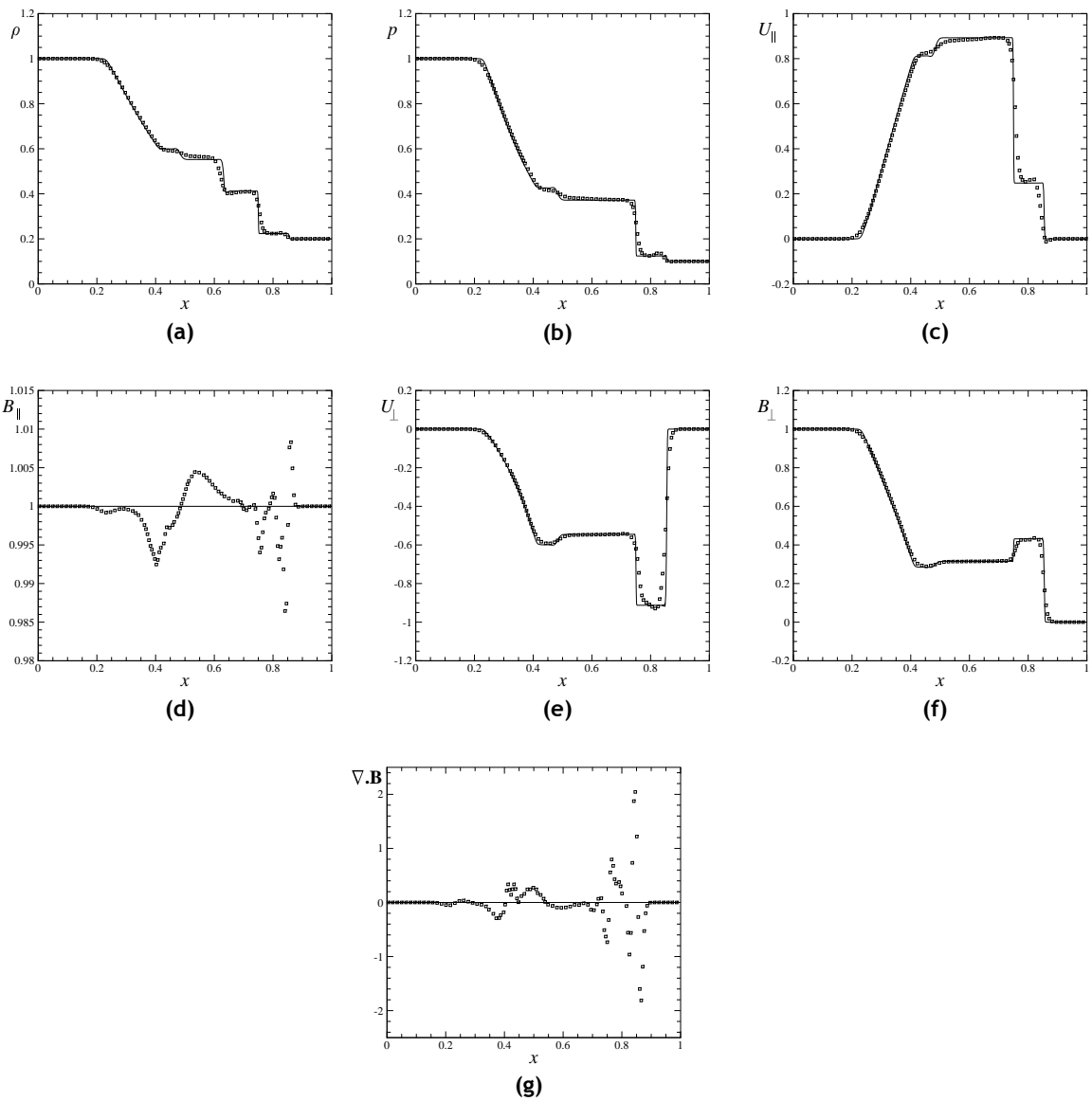


Figura 5.23: Resultados obtidos para o *Caso C* ao fim de $t = 0,15 \cos \alpha$. Os resultados bidimensionais são comparados com uma solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de alta resolução ($N = 1024$). São apresentadas distribuições para: a massa volúmica (a); a pressão termodinâmica (b); a componente paralela da velocidade (c) e do campo magnético (d); a componente perpendicular da velocidade (e) e do campo magnético (f); e divergência do campo magnético (g).

se movem à mesma velocidade (Ryu e Jones, 1995). Esta particularidade é visível em $x \sim 0,47$ na Fig. 5.24f, onde a descontinuidade em B_{\perp} parece ser suavizada na parte final.

5.2.4 Vórtice Orszag-Tang

O vórtice de *Orszag-Tang* é um caso de teste bidimensional padrão que é frequentemente utilizado na validação de esquemas numéricos de elevada resolução para escoamento MHD. Este problema é caracterizado por desenvolver uma interação bastante complexa entre as várias descontinuidades MHD geradas pela evolução do vórtice. Esta característica faz com que este caso de teste seja apropriado para avaliar o método proposto em termos de precisão e de robustez. O domínio computacional utilizado é de geometria quadrangular com $(x, y) = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, e as quatro fronteiras que o limitam são do tipo periódico. As condições iniciais não possuem nenhum tipo de descontinuidade, sendo definidas como:

$$\rho = \gamma^2; U_x = -\sin(y); U_y = \sin(x); p = \gamma;$$

$$U_z = 0; B_x = -\sin(y); B_y = \sin(2x); B_z = 0,$$

onde $\gamma = 5/3$. Este problema foi calculado numa malha $N \times N$ gerada com três dimensões de valor crescente: $N = 200$; $N = 400$; e $N = 800$.

Neste caso em particular, utilizou-se para efeitos de interpolação o esquema de alta resolução CUBISTA (Alves et al., 2003). Como já pudemos observar, este esquema de interpolação é bastante robusto e preciso no cálculo de descontinuidades. No entanto alguns esquemas, quando utilizados em junção com o método AUSM e na presença de fortes ondas de choque, tornam-se demasiado compressivos, veja-se Kim et al. (2001b). Nessas situações optou-se pela utilização da função limitadora Minmod, que resulta num esquema mais dissipativo. O vórtice de Orszag-Tang, apesar de desenvolver um elevado número de descontinuidades, apresentou um bom comportamento com o CUBISTA. Como tal, na análise deste problema optou-se pela utilização deste esquema de diferenciação, que como foi demonstrado na secção 3.4 apresenta uma precisão superior à do Minmod.

Na Fig. 5.25 são mostrados os resultados numéricos obtidos na malha com 200×200 nós ao fim de $t = 0,5$. Como podemos observar, através das linhas isobáricas (Fig. 5.25a) e das isolinhas relativas à massa volúmica (Fig. 5.25b), os resultados obtidos encontram-se livres da presença de descontinuidades. Na Fig. 5.25e apresenta-se a distribuição da pressão calculada ao longo da linha $y = \pi$ para o mesmo instante de cálculo. A distribuição é simétrica, e mais uma vez verifica-se que se encontra livre da presença de descontinuidades. Para um instante temporal posterior, de $t = 2$, a solução apresenta já fortes ondas de choque que começam a interagir entre si à medida que o vórtice evolui, como se vê na Fig. 5.26. Contudo, a distribuição da pressão ao longo da linha $y = \pi$ (Fig. 5.26e) ainda não revela as variações abruptas de p vs. x , uma vez que as descontinuidades ainda não atingiram o centro do domínio de cálculo.

Nas Figs. 5.27a-c são apresentadas as isolinhas referentes ao campo de pressão, obtidas ao fim de $t = \pi$ nas três malhas acima referidas. Podemos verificar que a interação entre as várias descontinuidades é calculada com precisão para todos os valores de N , e mesmo a malha

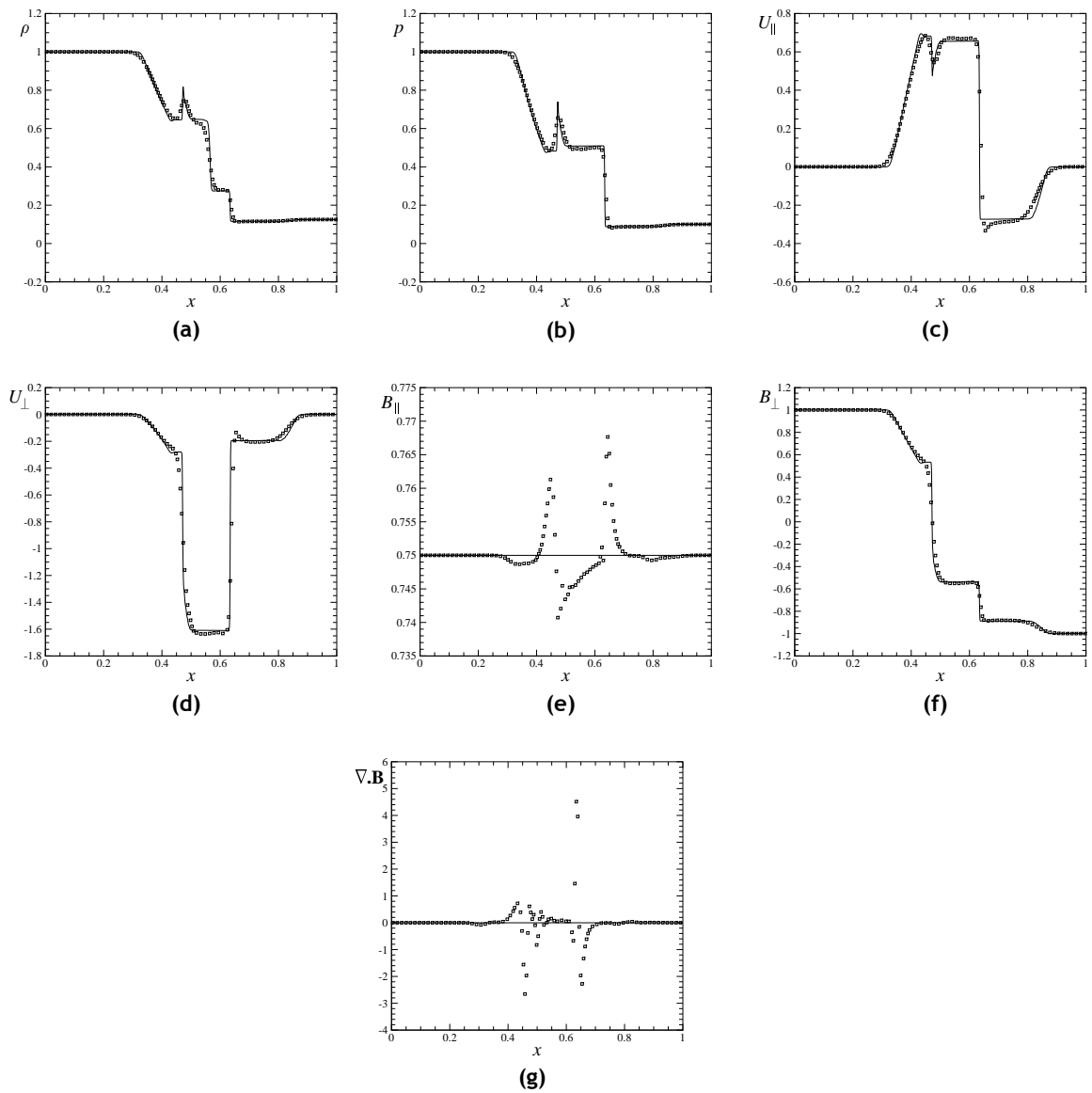


Figura 5.24: Resultados obtidos para o *Caso D* ao fim de $t = 0, 1 \cos \alpha$. Os resultados bidimensionais são comparados com uma solução uni-dimensional de referência calculada numa malha de elevada resolução ($N = 1024$). São apresentadas distribuições para: a massa volúmica (a); a pressão termodinâmica (b); a componente paralela (c) e perpendicular da velocidade (d); a componente paralela (e) e perpendicular do campo magnético (f); e divergência do campo magnético (g).

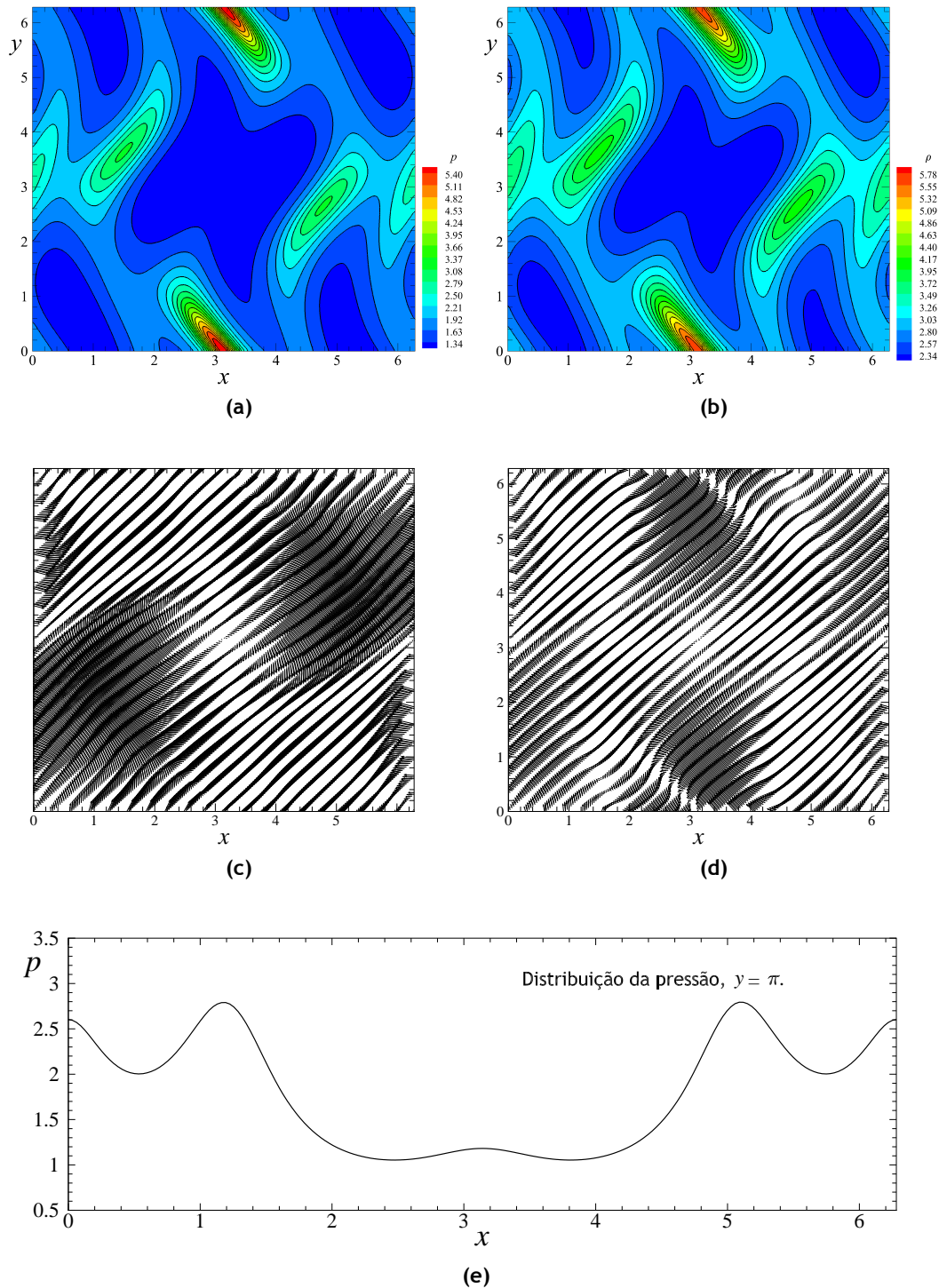


Figura 5.25: Resultados numéricos obtidos para o vórtice de Orszag-Tang no tempo $t = 0, 5$. a) Distribuição das linhas isobáricas. b) Distribuição das isolinhas referentes à massa volúmica. c) Vetores representativos do campo de velocidade. d) Vetores representativos do campo magnético. e) Distribuição de pressão calculada ao longo da linha $y = \pi$.

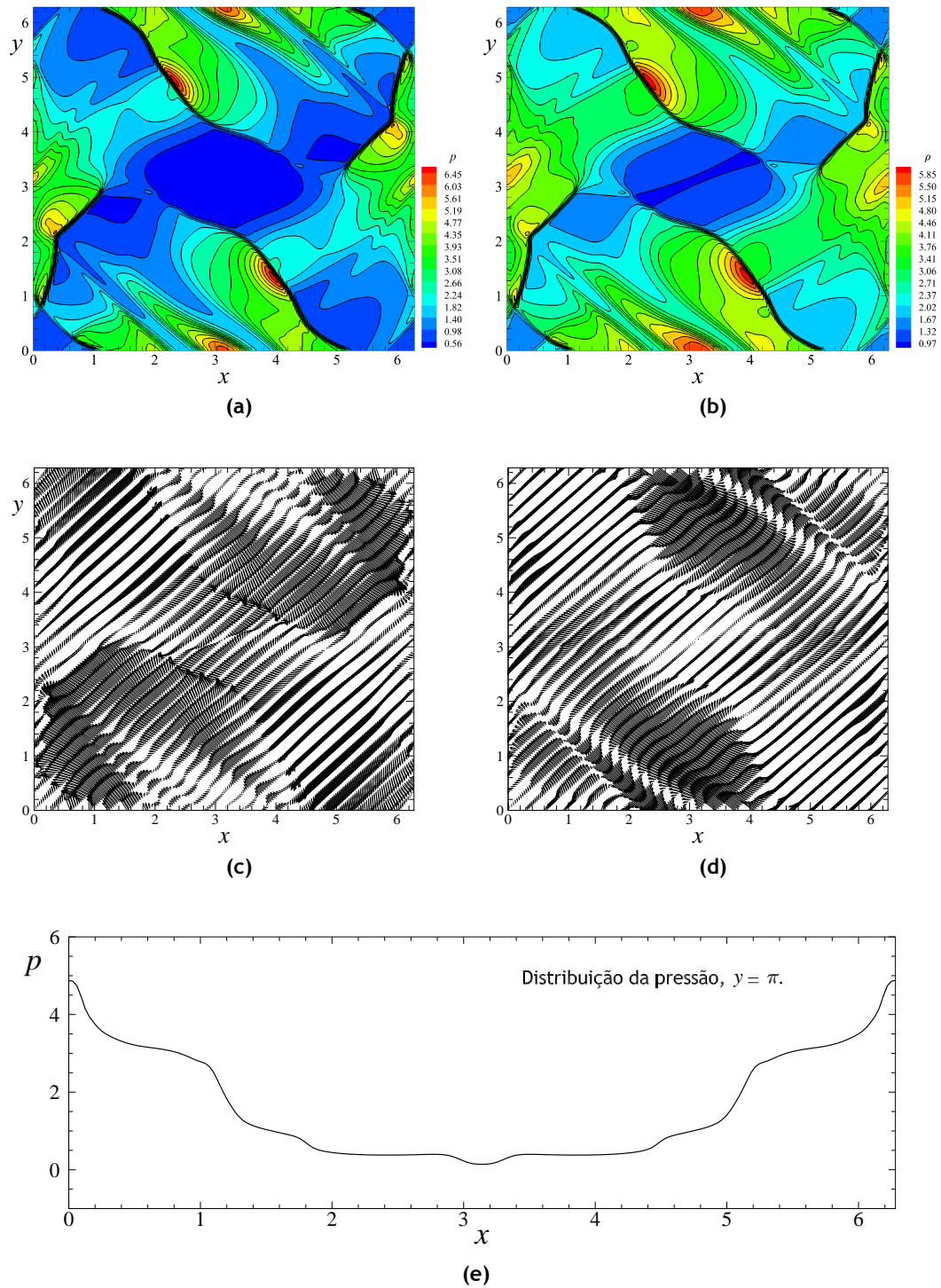


Figura 5.26: Resultados numéricos obtidos para o vórtice de Orszag-Tang no tempo $t = 2$. a) Distribuição das linhas isobáricas. b) Distribuição das isolinhas referentes à massa volumica. c) Vetores representativos do campo de velocidade. d) Vetores representativos do campo magnético. e) Distribuição de pressão calculada ao longo da linha $y = \pi$.

mais esparsa de dimensão 200×200 prevê um campo de pressão que não se afasta muito, qualitativamente, daquele previsto pela malha fina. Na Fig. 5.27d estão presentes as isolinhas referentes a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ calculadas na malha de dimensão $N = 200$. Mais uma vez podemos observar que os erros mais significativos na discretização de \mathbf{B} são gerados nas zonas de descontinuidade, coincidentes com o padrão das descontinuidades visto nas figuras anteriores.

Uma análise mais quantitativa do método proposto requer uma comparação direta entre os resultados numéricos obtidos e os que foram publicados por outros autores. Neste caso optou-se pela utilização dos resultados disponibilizados por Miyoshi e Kusano (2005), que foram calculados através do esquema de Roe. Note-se que o método de Roe é baseado nas velocidades características das equações MHD, e desta forma é bastante preciso no cálculo de descontinuidades. Os resultados obtidos por estes autores também apresentam as mesmas dimensões em termos de comprimento de escala e de tempo, como tal permitem uma comparação direta com os resultados aqui obtidos. Esta comparação encontra-se representada na Fig. 5.27e através da distribuição da pressão ao longo da linha $y = 0,64\pi$ (mostrada na figura (a)), calculada na malha de menor resolução. Como podemos observar o método aqui proposto apresenta um bom nível de precisão e apenas são visíveis discrepâncias na parte inicial do gráfico. Os próprios autores, Miyoshi e Kusano (2005), referem que tais discrepâncias são normais em esquemas mais dissipativos.

5.2.5 Interação entre uma nuvem de gases densos e uma onda de choque

O próximo caso de teste que foi utilizado para efeitos de validação é um problema bastante conhecido na área da astrofísica (Dai e Woodward, 1998b), que envolve a interação de uma onda de choque com uma nuvem de gases densos, os quais se encontram sujeitos a um campo magnético inicial. O domínio computacional aqui utilizado é de geometria quadrangular com $x, y \in [0; 1]$ e foi resolvido com recurso a três malhas $N \times N$ de espaçamento uniforme ($N = 200$, $N = 400$ e $N = 800$).

As condições iniciais presentes na Fig. 5.28a compreendem uma descontinuidade paralela ao eixo y localizada em $x = 0,6$, com os seguintes estados para as variáveis dependentes:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ U_x \\ U_y \\ U_z \\ p \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 3,86859 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 167,345 \\ 0 \\ 2,1826182 \\ -2,1826182 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ U_x \\ U_y \\ U_z \\ p \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ -11,2536 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0,56418958 \\ 0,56418958 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Optou-se por um índice adiabático igual a $\gamma = 5/3$ e resistividade elétrica nula, $\eta = 0$. A nuvem de gases densos ($\rho = 10$) possui uma forma geométrica circular com centro em $(x, y) \in (0,8; 0,5)$ e com raio igual a $0,15$. A pressão assume o mesmo valor no interior e no exterior da nuvem ($p = 1$), por isso esta encontra-se em equilíbrio hidrostático, não se deformando sem sofrer a ação de uma força externa. O escoamento processa-se em regime supersónico da direita para a esquerda, o que implica que, na fronteira à direita foram impostas todas as variáveis, e nas

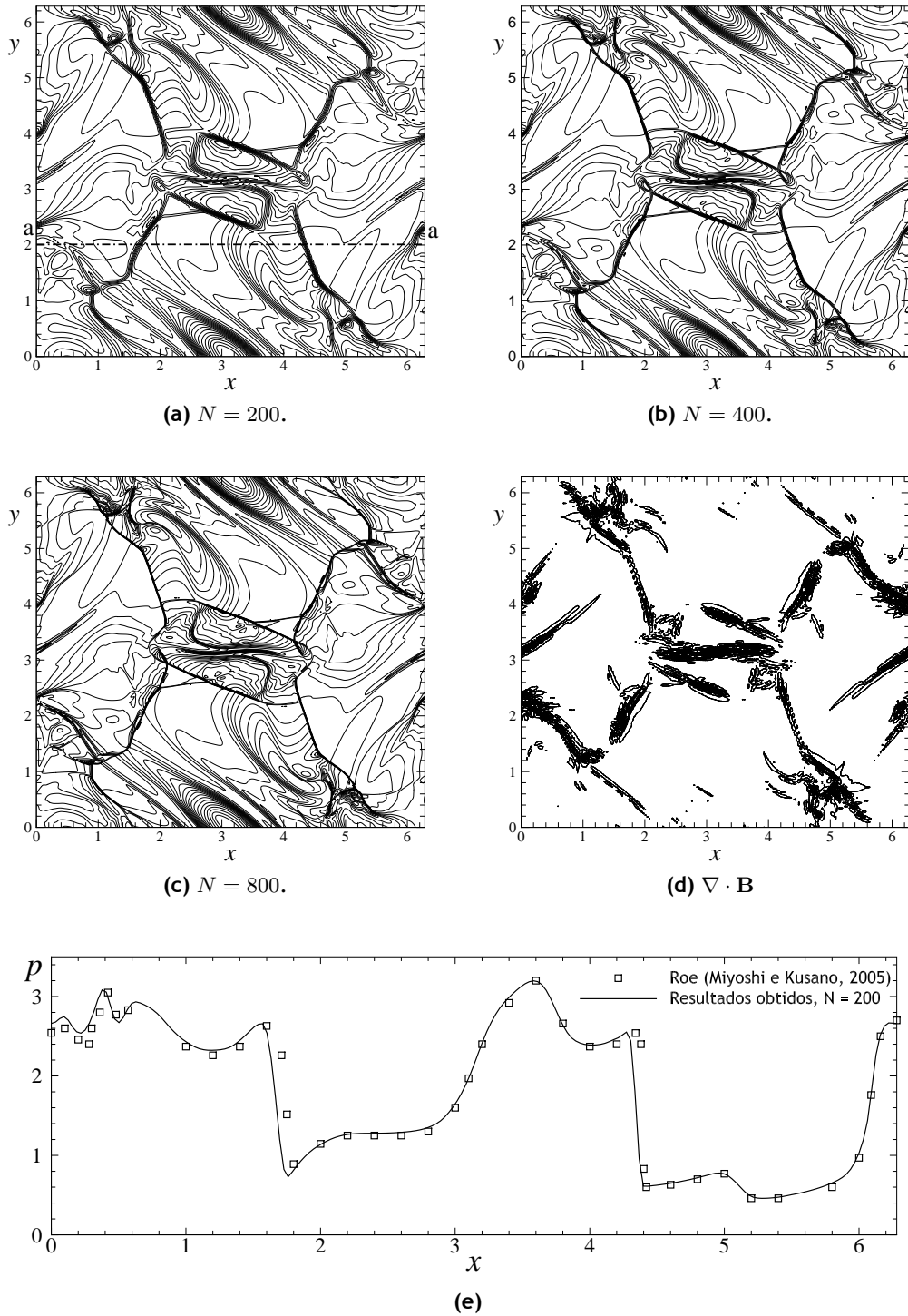


Figura 5.27: Resultados obtidos para o vórtice de Orszag-Tang. Nas Figs. a), b) e c) temos a distribuição das linhas isobáricas. d) Representação das isolinhas referentes a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ calculadas na malha com dimensão $N = 200$. e) Comparação entre os resultados obtidos e aqueles apresentados por Miyoshi e Kusano (2005).

restantes fronteiras as variáveis foram extrapoladas para fora do domínio de solução. Note-se que este problema inclui a presença de uma forte onda de choque em $x = 0,6$, e como tal para efeitos de interpolação foi utilizado o esquema de diferenciação Minmod.

Na Fig. 5.28b apresenta-se o resultado obtido para a distribuição da massa volúmica, numa escala de cores logarítmica, e que foi calculado na malha de dimensão $N = 400$. Nas Figs. 5.28c, 5.28d e 5.28e estão representadas as linhas de campo magnético calculadas nas diferentes malhas. Todos os resultados foram obtidos para um $t_{final} = 0,06$, quando a nuvem se encontrava sensivelmente a meio do domínio de solução. Como podemos observar as descontinuidades são captadas com precisão para todas as dimensões de N . Este problema não possui solução analítica e serve como um caso de validação qualitativa, quando comparado com as soluções de outros autores; veja-se por exemplo os resultados de Dai e Woodward (1998b) ou Tóth (2000). Trata-se também de um excelente caso de teste no que concerne a análise de robustez do método proposto. De facto, verifica-se que a forte colisão entre a onda de choque e a nuvem de gases densos potencia a tendência para o aparecimento de problemas de positividade no cálculo das propriedades termodinâmicas.

Na Fig. 5.29 estão representadas algumas soluções não-estacionárias para a distribuição da massa volúmica, calculada na malha com dimensão $N = 200$ numa escala logarítmica. Como podemos observar, a interação com a onda de choque leva a uma deformação progressiva e acentuada da nuvem de gases densos. Como este caso de teste não possui solução de estado estacionário, o método de resolução deve possuir um nível adequado de precisão temporal de forma a capturar a física do problema.

5.2.6 Cálculo de um rotor MHD

O próximo caso de teste compreende um cilindro, com uma massa volúmica dez vezes superior à massa volúmica ambiente, que se encontra num estado de rotação. Este problema pode ser encontrado em Balsara e Spicer (1999b) e permite-nos testar o modelo proposto para o cálculo de ondas de Alfvén de torção. A velocidade de rotação é uma condição inicial do problema e não são aplicadas quaisquer forças externas ao cilindro. No instante inicial, o fluido ambiente e o cilindro encontram-se sujeitos a um campo magnético de valor uniforme e uni-direcional. O movimento de rotação do cilindro vai originar ondas de Alfvén de torção que, à medida que são emitidas para o fluido ambiente em repouso, provocam um decaimento da quantidade de movimento angular do cilindro. A pressão magnética à volta do rotor provoca um efeito de compressão no cilindro que lhe vai conferir uma forma alongada. Este problema é novamente resolvido numa malha $N \times N$ com três resoluções distintas: $N = 200$; $N = 400$; e $N = 800$. As condições iniciais, para o campo magnético e para a pressão são uniformes,

$$B_y = 0; B_x = 5/\sqrt{4\pi}; p = 1; \gamma = 1,4.$$

Assume-se uma resistividade nula, $\eta = 0$, uma vez que este é um caso característico de escoamento MHD ideal. As condições iniciais para o cilindro, de raio $r_0 = 0,1$, vêm dadas por:

$$\rho = 10; U_x = -U_0 \frac{(y - 0,5)}{r_0}; U_y = U_0 \frac{(x - 0,5)}{r_0}.$$

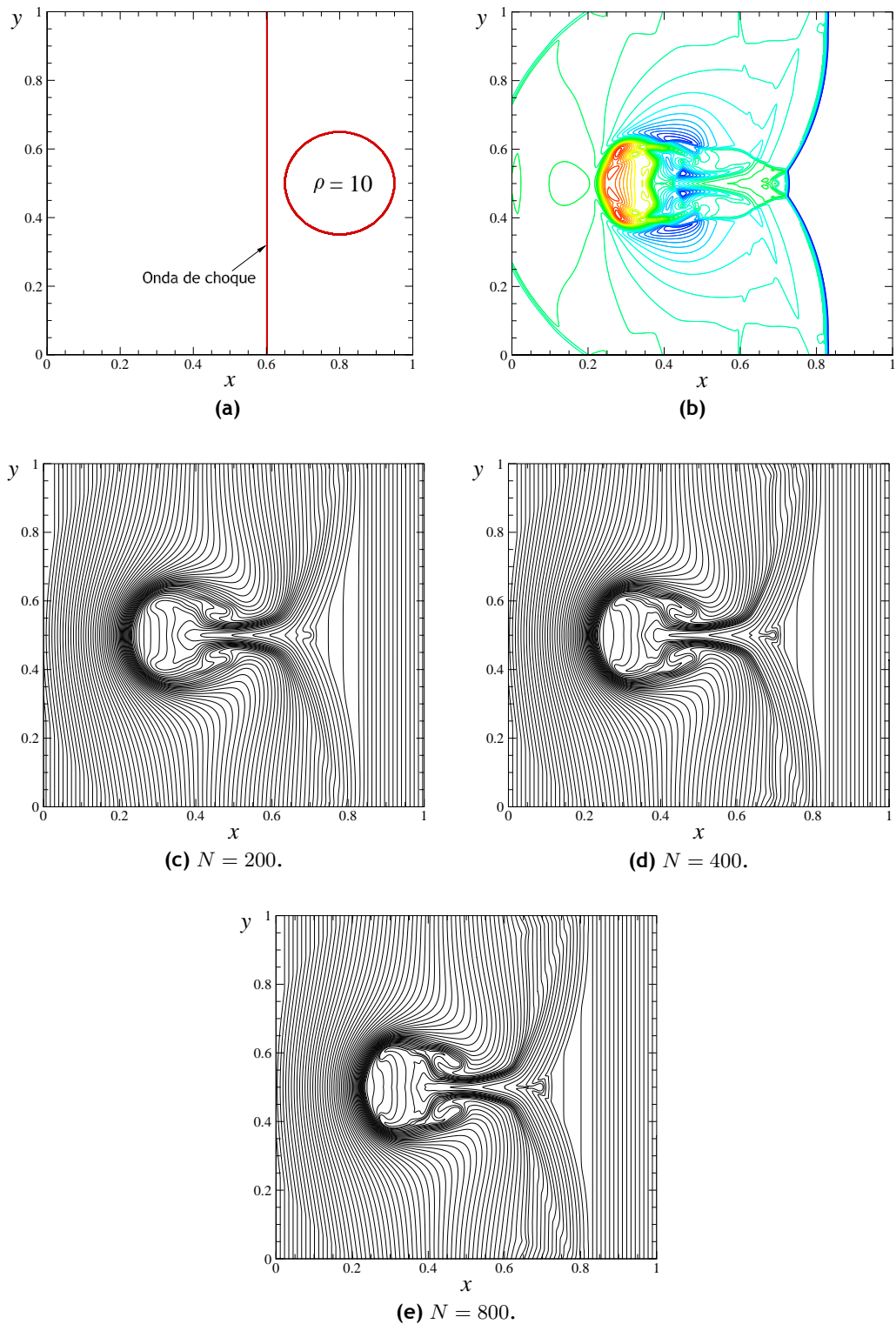


Figura 5.28: Resultados obtidos para a interação entre uma onda de choque e uma nuvem de gases densos. a) Condição inicial; b) Distribuição logarítmica da massa volúmica calculada com recurso à malha de dimensão $N = 400$; c), d) e e) Linhas de campo magnético obtidas para as três resoluções de malha ($t = 0,06$).

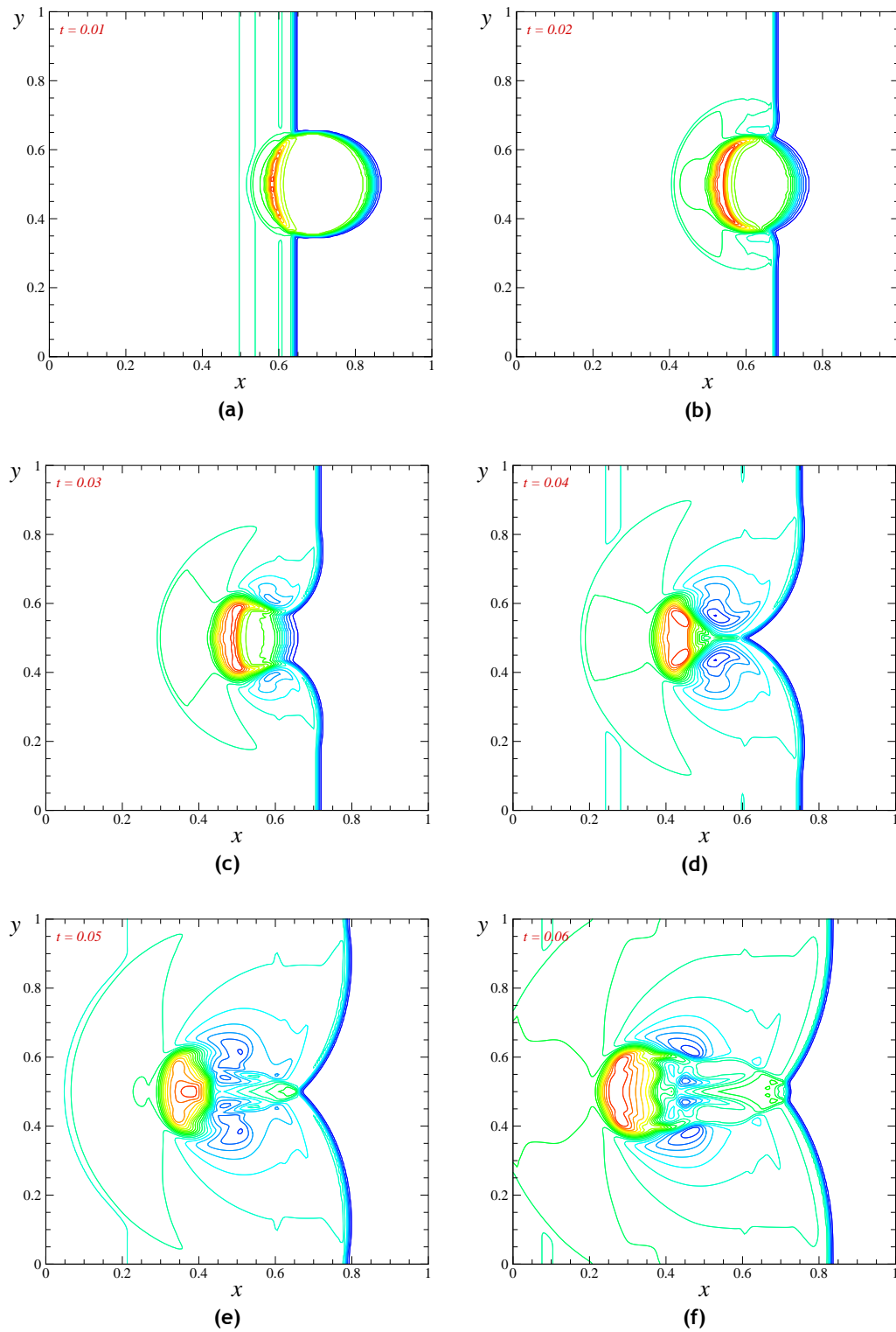


Figura 5.29: Solução não-estacionária para a distribuição logarítmica da massa volúmica, calculada com recurso à malha de dimensão $N = 200$;

Como se constata U_x e U_y são funções de $r < r_0$, com $r = [(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2]^{1/2}$ e velocidade $U_0 = 2$. O fluido ambiente, que se situa numa região definida por $r > r_1$ ($r_1 = 0,115$), encontra-se em repouso ($U_x = U_y = 0$) e possui uma massa volúmica unitária, logo dez vezes inferior à do cilindro ($\rho = 1$). De forma a criar uma transição suave entre o cilindro em movimento e o fluido ambiente, criou-se uma região de transição que se situa entre $r_0 < r < r_1$ e que apresenta um perfil linear para a massa volúmica e para a velocidade,

$$\rho = 1 + 9f; U_x = -fU_0 \frac{(y - 0,5)}{r}; U_y = fU_0 \frac{(x - 0,5)}{r};$$

onde $f = (r_1 - r) / (r_1 - r_0)$. Para as malhas de resolução inferior ($N = 200$ e $N = 400$) o esquema de interpolação utilizado foi o CUBISTA. No entanto, devido a problemas de convergência, na malha de maior dimensão ($N = 800$) optou-se pelo esquema mais dissipativo Minmod.

Nas Figs. 5.30, 5.31 e 5.32 encontram-se os resultados obtidos: para a massa volúmica (a); para a pressão (b); para o número de Mach (c); e para a pressão magnética (d). Na Fig. 5.30 ainda são apresentadas as isolinhas para a componente transversal da velocidade (e); e para a componente normal do campo magnético (f). Todos estes resultados foram obtidos para um tempo final igual a $t_{final} = 0,15$, antes de as ondas de Alfvén atingirem as fronteiras do domínio de solução. De facto, o método proposto consegue calcular as ondas de Alfvén de torção que são particularmente visíveis no gráfico da pressão magnética ($\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} / 2$), Fig. 5.30d. A distribuição do número de Mach permite-nos observar que o rotor ainda se encontra em movimento com uma velocidade angular uniforme. No entanto, à medida que o raio do rotor aumenta e este entra em contacto com o fluido ambiente perde alguma quantidade de movimento e desacelera. As isolinhas relativas à massa volúmica mostram-nos a região onde a pressão magnética se acumula e vai deformar a geometria circular do cilindro.

Na Fig. 5.31e apresentam-se as linhas do campo magnético em junção com as isolinhas para a pressão. Como podemos observar, fora da região de influência das ondas de Alfvén, o campo magnético assume um valor uniforme dado pelo seu estado inicial. No entanto, na região de influência, este é constantemente refratado por cada uma das descontinuidades, e a componente B_y , de valor inicial nulo, assume o seu valor máximo no interior do rotor onde a velocidade de rotação é mais elevada. A Fig. 5.33 mostra uma distribuição tridimensional dos erros relativos a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ calculados na malha $N = 400$. Como era esperado, e já referido nas secções anteriores, os erros apenas se acumulam e possuem um valor significativo nas regiões de descontinuidade.

5.2.7 Escoamento MHD supersónico sobre um cilindro

Este caso de teste já foi abordado na secção 5.1.3 na sua versão de dinâmica dos gases. Aqui pretende-se estudar o comportamento MHD de um fluido perfeitamente condutor, quando este vai de encontro a um cilindro, também este com resistividade eléctrica nula. Este problema possui um significado físico ao nível da astrofísica, uma vez que pode ser visto como uma simulação da interação entre os ventos solares e uma magneto-esfera numa perspetiva puramente bidimensional.

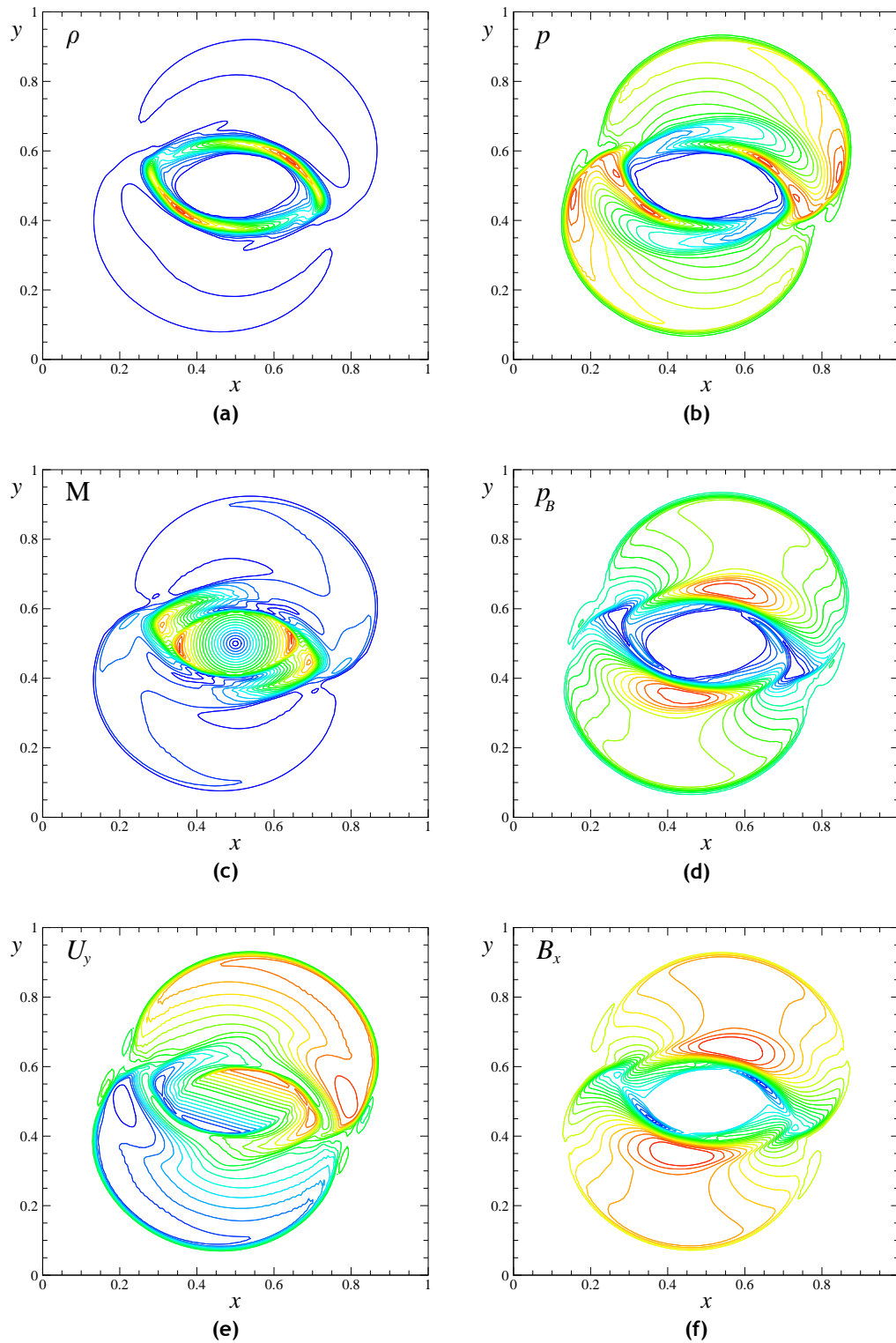


Figura 5.30: Resultados obtidos para o rotor com a malha de resolução $N = 200$ e $t = 0, 15$: a) isolinhas de ρ ; b) isolinhas de p ; c) isolinhas de número de Mach; d) isolinhas relativas à pressão magnética $((\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})/2)$; e) isolinhas representativas da velocidade transversal U_y ; f) isolinhas relativas à componente normal do campo magnético, B_x .

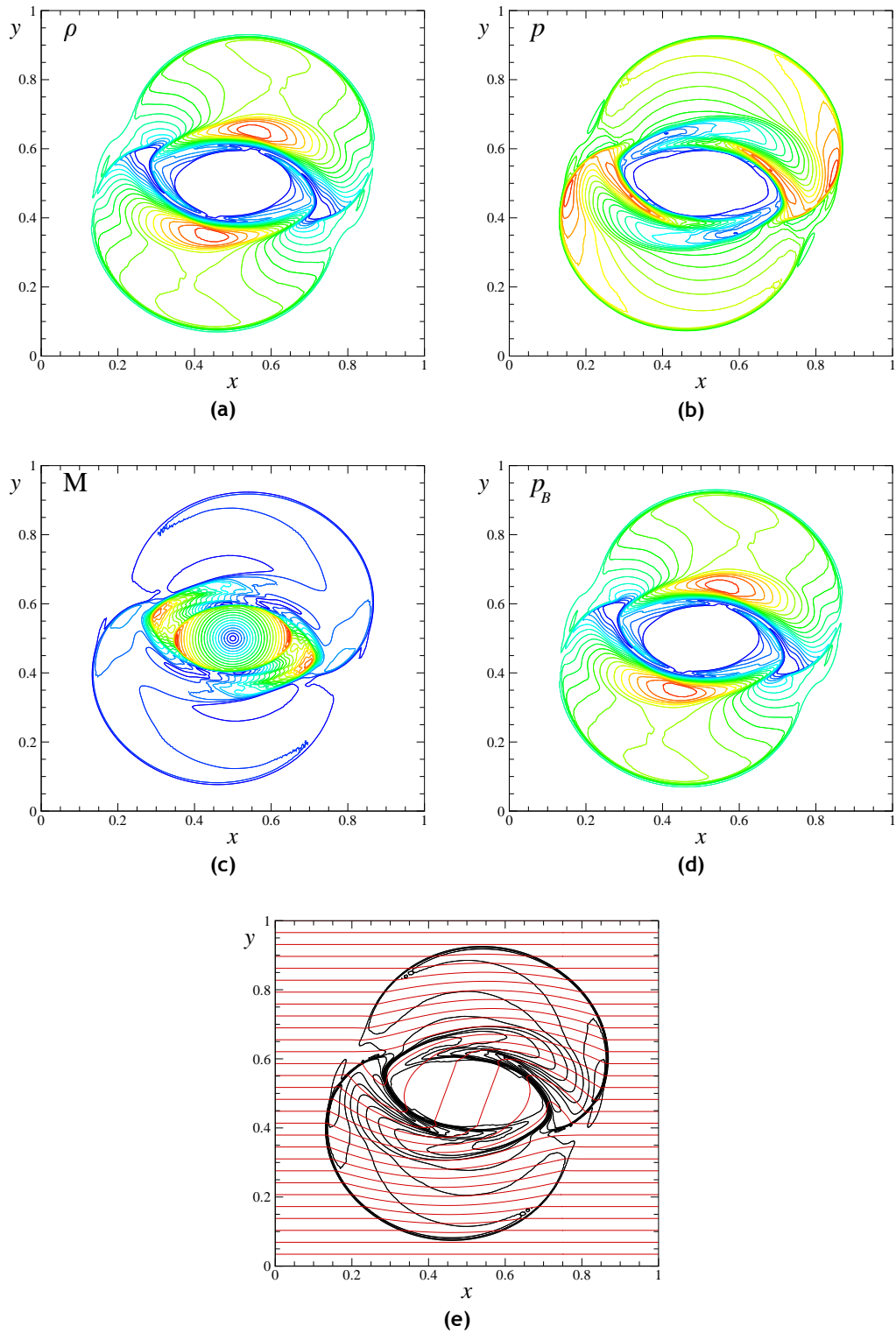


Figura 5.31: Resultados obtidos para o rotor com a malha de resolução $N = 400$ e $t = 0,15$: a) isolinhas de ρ ; b) isolinhas de p ; c) isolinhas de Mach; d) isolinhas relativas à pressão magnética $((\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})/2)$; e) linhas de campo magnético (a vermelho).

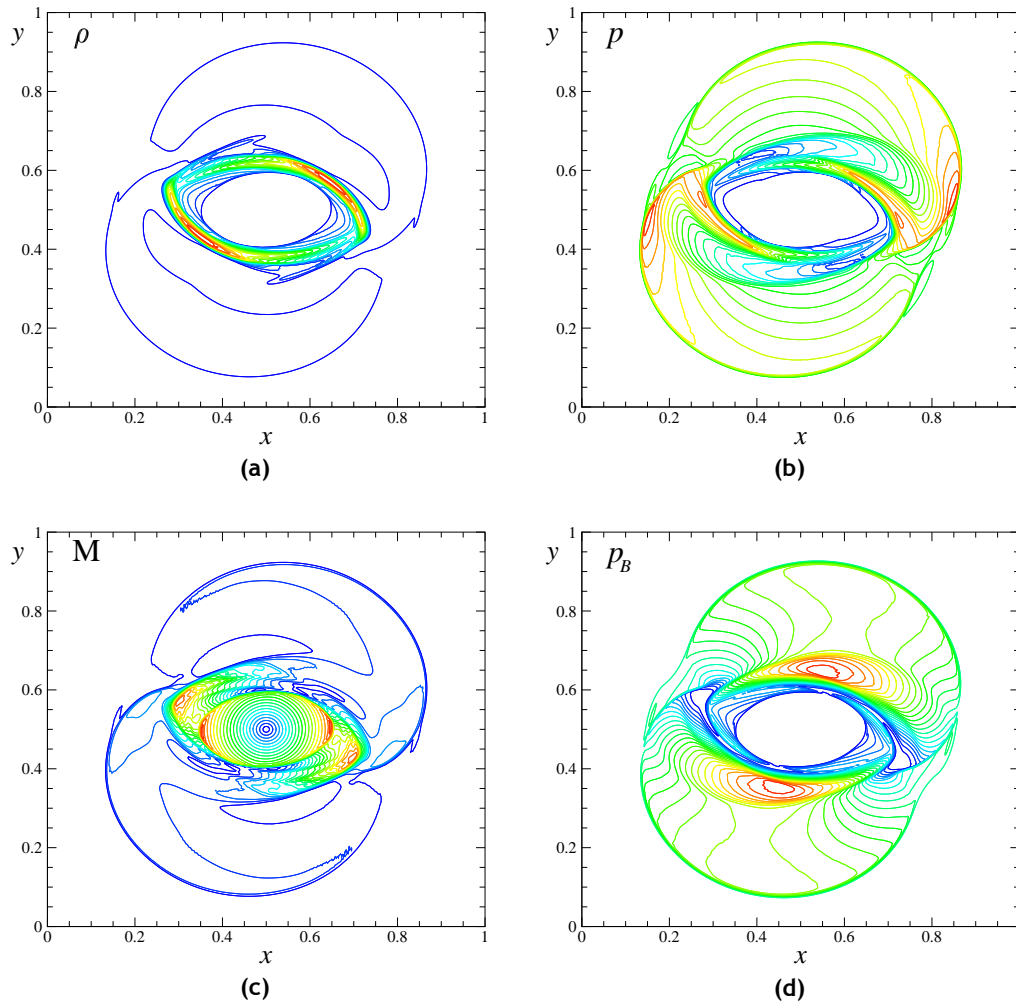


Figura 5.32: Resultados obtidos para o rotor com a malha de resolução $N = 800$ e $t = 0,15$: a) isolinhas de ρ ; b) isolinhas de p ; c) isolinhas de Mach; d) isolinhas relativas à pressão magnética $((\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) / 2)$.

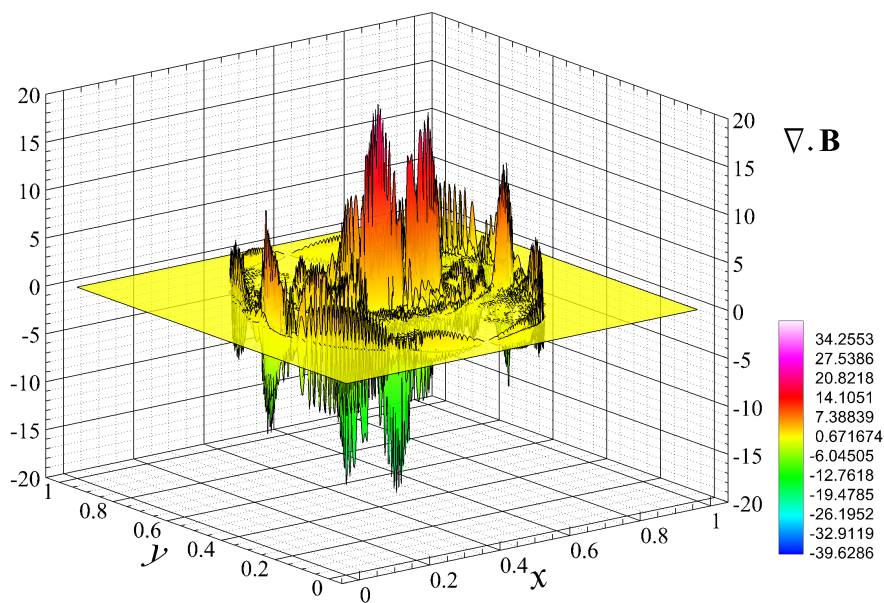


Figura 5.33: Distribuição tridimensional dos erros relativos a $\nabla \cdot \mathbf{B}$ na malha de resolução $N = 400$.

Este caso de teste foi introduzido por Sterck et al. (1998) com o intuito de analisar a ocorrência de descontinuidades intermédias em escoamentos MHD ideais. Estes autores verificaram que este tipo de solução descontínua era dependente do parâmetro adimensional β , que foi apresentado na secção 2.6. De tal forma que quando $\beta < 2/\gamma$ e, ao longo das linhas de campo magnético, a velocidade de aproximação do escoamento é super-Alfvénica e obedece à seguinte inequação,

$$1 \leq M^A \leq \sqrt{\frac{\gamma(1-\beta)+1}{\gamma-1}}, \quad (5.10)$$

leva à ocorrência de ondas de choque *switch-on* rápidas. Nesta situação, o quadro de descontinuidades que se acumula na vizinhança do cilindro torna-se bastante complexo. Optou-se por um índice adiabático igual a $\gamma = 5/3$, por um parâmetro $\beta = 0,4$ e por um $M^A = 1,5$, abaixo do valor crítico dado pela equação (5.10) ($M_A \approx 1,732$). As restantes variáveis podem ser posteriormente deduzidas,

$$\rho = 1; B_x = 1; p = 0,2; U_x = 1,5.$$

Relativamente ao domínio de solução optou-se pela utilização da mesma malha da secção 5.1.3 com três resoluções distintas: 120×120 ; 240×240 ; e 480×480 . As condições de fronteira são mais uma vez do tipo supersónico e, como tal, todas as variáveis são especificadas à entrada e extrapoladas à saída do domínio de cálculo. Neste teste, utilizou-se o esquema Minmod para efeitos de interpolação.

Nas Figs. 5.34a, b e c estão representados os resultados numéricos, obtidos nas três malhas, relativos às isolinhas do número de Mach. As Figs. 5.34d-f mostram uma vista detalhada da mesma distribuição junto do cilindro, assim como as linhas de campo magnético. Utilizando as descontinuidades e as linhas de campo como guia, podemos efetivamente identificar cada uma das descontinuidades que resultam deste problema em específico. Podemos visualizar ondas de choque intermédias, que são caracterizadas por uma mudança na direção de B_y na região a jusante da descontinuidade. Podemos também visualizar ondas de choque do tipo *switch-on* rápidas, que “ligam” a componente B_y na região a jusante da descontinuidade, assim como ondas de choque do tipo *switch-off* lentas que “desligam” a componente B_y nessa mesma região.

5.3 Nota conclusiva

Neste capítulo foram apresentados os casos de teste utilizados na validação e demonstração de aplicação dos métodos propostos no capítulo 4.

O primeiro grupo de problemas compreendia os casos de teste de dinâmica dos gases, e permitiu validar o método de análise de escoamento compressível a número de Mach arbitrário. Foi analisado o caso de uma tubeira axissimétrica para uma elevada gama de números de Mach, onde se pretendeu evidenciar o nível de precisão do método. Seguidamente, foi considerado o escoamento subsónico, transónico e supersónico sobre um ressalto, onde se pretendeu comparar os resultados calculados com os que foram obtidos por outros autores. Terminou-se com o escoamento supersónico sobre um obstáculo circular, onde se comprovou que o método proposto é capaz de calcular escoamentos na presença de fortes ondas de choque.

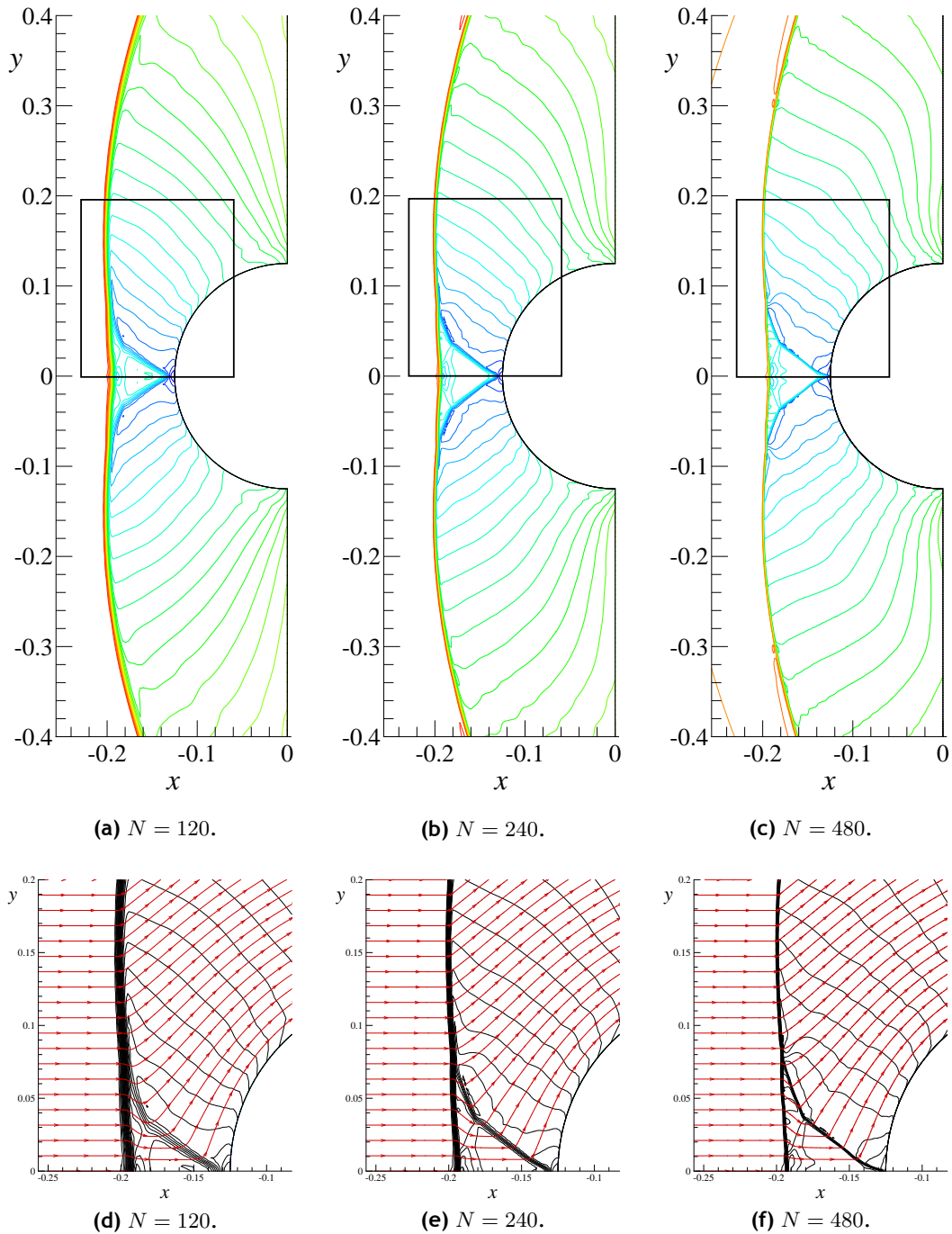


Figura 5.34: Vista global para a distribuição do número de Mach para o caso de escoamento supersônico de plasma com $\beta = 0,4$ sobre um cilindro. Nas Figs. d), e) e f) está presente um detalhe do escoamento perto do cilindro, onde também são visíveis as linhas de campo magnético.

O segundo grupo de problemas permitiu validar o novo método proposto para análise de escoamento compressível MHD. Foram apresentados casos de teste padrão para a validação dos modelos ideal e resistivo das equações MHD. Através do problema de Riemann 1D, pretendeu-se validar o método de solução na resolução das várias descontinuidades MHD. Foram também resolvidos casos de teste bidimensionais, cuja solução exibe um grau de complexidade maior e que, por isso, são frequentemente utilizados para demonstração e validação dos modelos MHD, nomeadamente: o vórtice de Orszag-Tang; a interação entre uma nuvem de gases densos e uma onda de choque; e o rotor MHD. O capítulo foi encerrado com a versão MHD do escoamento supersónico sobre um obstáculo circular.

Capítulo 6

Análise numérica de uma tubeira MPD de campo induzido

Neste capítulo o método que foi proposto na secção 4.2 vai ser implementado para a análise de uma tubeira MPD de campo induzido. Foi referido durante a introdução que as tubeiras MPD são compostas por dois elétrodos coaxiais, esta característica geométrica faz com que, a um nível experimental, seja extremamente difícil utilizar técnicas de visualização na análise das propriedades do escoamento. De forma a contornar esta situação, Toki et al. (1992) desenvolveram um dispositivo experimental que consiste numa tubeira MPD de geometria puramente bidimensional. Na Fig. 6.1 encontra-se esquematizada a tubeira MPD-2D que foi analisada empiricamente por Toki e seus colaboradores, e que vai aqui ser analisada numa vertente puramente numérica. A tubeira 2D é composta por vários injetores de propelente, espaçados de forma uniforme, e garante uma distribuição quase-uniforme da corrente de descarga, que permite uma observação direta do escoamento através de uma janela lateral. Claro que uma configuração puramente 2D não nos garante uma replicação dos efeitos de uma tubeira de geometria cilíndrica. No entanto, a melhor acessibilidade em termos de observação do escoamento, permite a utilização de técnicas de visualização avançadas, que garantem uma melhor compreensão dos mecanismos de aceleração. Um dispositivo experimental 2D também nos pode fornecer toda a informação necessária para o desenvolvimento e validação de códigos numéricos para futuras aplicações, sejam elas 2D ou cilíndricas.

O objetivo do caso de estudo aqui apresentado é o de analisar o efeito da geometria dos elétrodos no desempenho da tubeira. Uma análise semelhante do desempenho das tubeiras MPD de campo induzido tem sido realizada a um nível experimental (Funaki et al., 1998; Nakata et al., 2005) e computacional (LaPointe, 1992; Funaki et al., 1997; Kubota et al., 2007; Mahendhran e Kumar, 2011) por diversos grupos de investigação. Nesta tese, vamos verificar que as características geométricas do cátodo podem influenciar o padrão da corrente de descarga, que vai resultar numa maior componente eletrotérmica de propulsão.

6.1 Problema em estudo

Na análise da tubeira MPD foram feitas várias simplificações em relação ao problema real. O fluido de trabalho adotado é o argon e assume-se que este entra na tubeira num estado de total ionização. Desta forma, podemos analisar o plasma como sendo um único fluido num estado de quase-neutralidade. É assumido que o plasma se encontra em equilíbrio térmico ($T = T_e = T_i$)

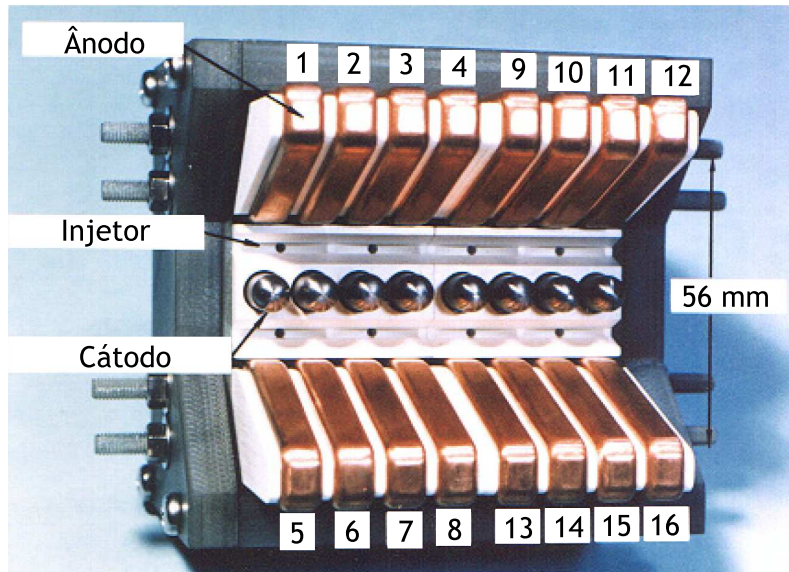


Figura 6.1: TUBEIRA MPD 2D DE CAMPO INDUZIDO (Sato et al., 2011) que irá ser analisada com o modelo MHD proposto nos capítulos anteriores.

e é desprezada a condutividade térmica do fluido. O plasma vai ser considerado como um gás ideal e invíscido, mas também vão ser analisados os resultados obtidos com o modelo de gás real que foi apresentado na secção 2.7.4. São desprezados alguns efeitos secundários, como o escorregamento de iões e o efeito de Hall. A condutividade elétrica vai ser calculada como um campo escalar em função da temperatura e densidade de partículas,

$$\sigma = 1,53 \times 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda}, \quad (6.1)$$

esta equação já foi apresentada na secção 2.7.3 e é aqui repetida por uma questão de conveniência. É assumido que o escoamento do plasma é puramente bidimensional no plano xy , e que a única componente do campo magnético atua na direcção z .

Na Fig. 6.3 estão representadas as várias geometrias que foram analisadas e os respetivos domínios de cálculo. Foram calculadas duas configurações distintas para o ânodo, uma com ânodo divergente (AD, Figs. 6.3a-6.3b) e outra com ânodo convergente-divergente (ACD, Figs. 6.3c-6.3d). Repare-se que para cada uma das configurações do ânodo apenas se modificou o comprimento do cátodo (CC - cátodo curto, CL - cátodo longo). Para ambos os casos de cátodo curto, ADCC e ACDCC, foi analisado um comprimento de cátodo igual a 13 [mm], para as configurações de cátodo longo, ADCL e ACDCL, assumiu-se um comprimento de cátodo igual a 40 [mm]. As dimensões dos respetivos domínios de cálculo são mostradas na Fig. 6.2.

Relativamente às condições de fronteira, para efeitos de validação, foram utilizados os valores sugeridos por Funaki et al. (1997). Nomeadamente, à entrada assume-se um escoamento subsónico com um caudal mássico igual a 2,5 g/s e $T = 5000$ K. À saída, o escoamento é de regime supersónico, como tal todas as variáveis são extrapoladas do domínio interior. Nas paredes sólidas assume-se uma condição de escorregamento para a velocidade e de parede perfeitamente ($\eta_{parede} = 0$) condutora para o campo magnético. O campo magnético à entrada relaciona-se com a corrente de descarga através da expressão,

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2W}, \quad (6.2)$$

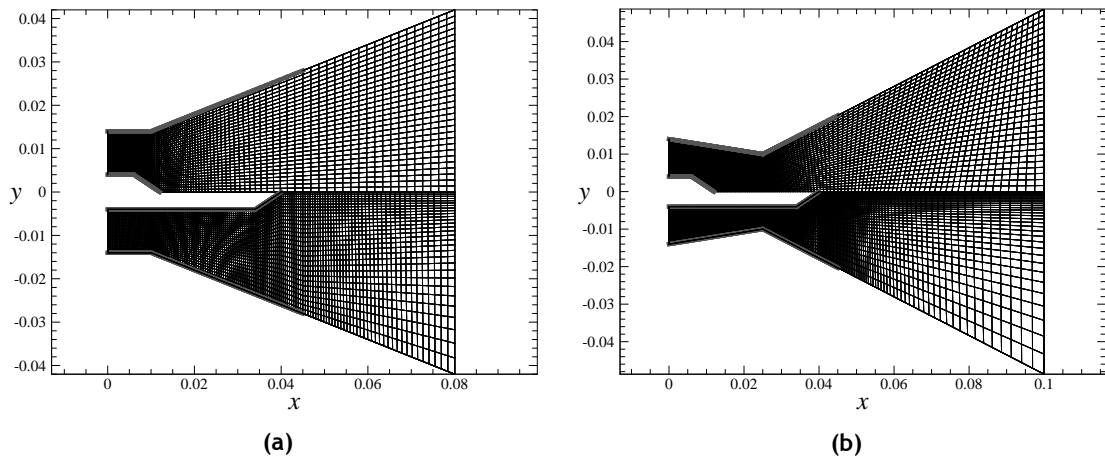


Figura 6.2: Dimensões dos domínios de cálculo para as duas configurações analisadas. a) Geometria com ânodo divergente (AD). b) Geometria com ânodo convergente-divergente (ACD). Repare-se que para cada uma das configurações do ânodo apenas se modificou o comprimento do cátodo (CC - cátodo curto, CL - cátodo longo).

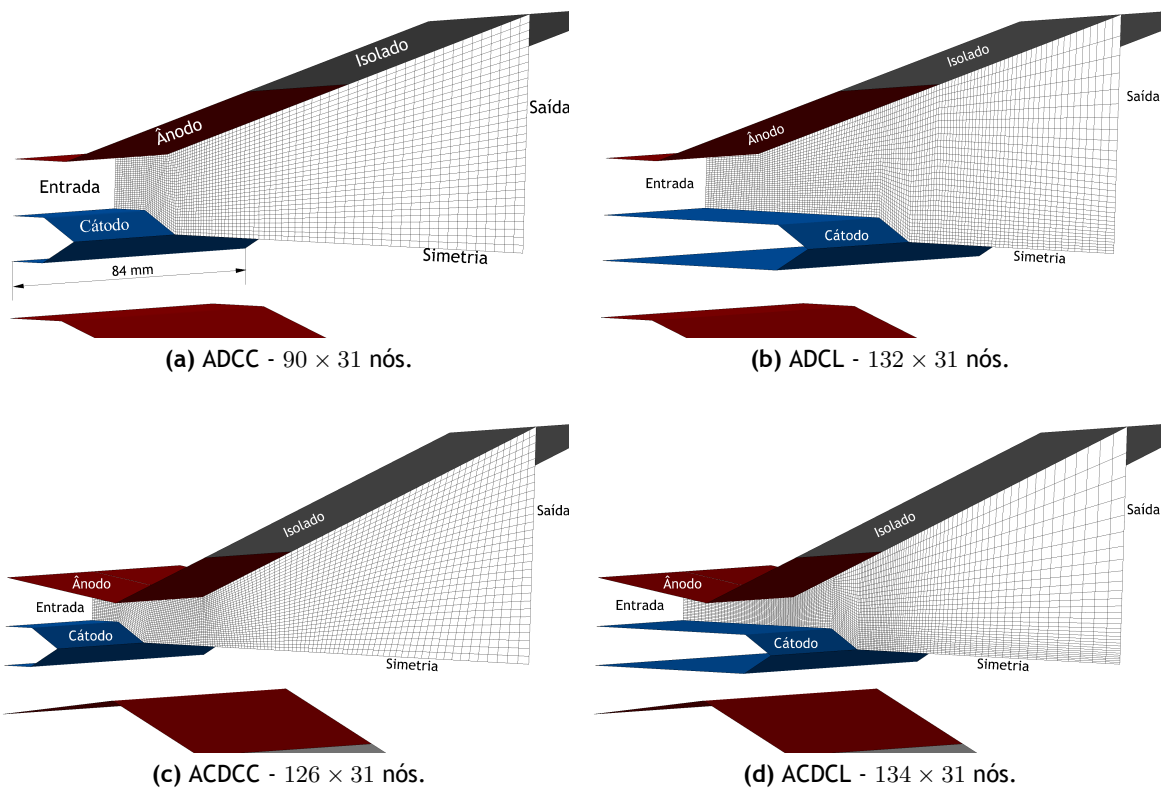


Figura 6.3: Representação tridimensional das configurações estudadas e respectivos domínios de cálculo. ADCC - Ânodo Divergente Cátodo Curto; ADCL - Ânodo Divergente Cátodo Longo; ACDCC - Ânodo Convergente Divergente Cátodo Curto; ACDCL - Ânodo Convergente Divergente Cátodo Longo.

onde I é a corrente de descarga e W representa a largura da tubeira, neste caso 84 mm (Fig. 6.3a). Na região de simetria e na parede isolada é imposto um valor nulo para o campo magnético.

6.1.1 Parâmetros analisados

Na análise do desempenho de uma tubeira MPD podem ser utilizados vários parâmetros. Um desses parâmetros é a força de propulsão, que numa tubeira MPD pode ser calculada da seguinte forma:

$$F = \int_{saída} (\rho U^2 + p) dS. \quad (6.3)$$

A força obtida a partir da equação (6.3) inclui o contributo das forças de origem térmica e de origem eletromagnética (ELM). A componente eletromagnética pode ser calculada, de forma separada, através do integral de volume da componente axial da força de Lorentz,

$$F_{ELM} = \int_V (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x dV. \quad (6.4)$$

A contribuição térmica pode ser facilmente obtida se a componente ELM for subtraída da força total,

$$F_{Term} = F - F_{ELM}. \quad (6.5)$$

Uma forma de medir a eficiência de um sistema de propulsão é através do seu impulso específico,

$$I_{esp} = \frac{F}{\dot{m}g_0}, \quad (6.6)$$

onde $g_0 = 9,8 \text{ [m/s}^2\text{]}$ representa a aceleração da gravidade. Através da relação que nos é dada pela equação (6.6), facilmente se conclui que um sistema que seja capaz de produzir um maior impulso específico é mais eficiente, uma vez que para a mesma massa de combustível consegue gerar mais força de propulsão. O rendimento da tubeira bidimensional pode ser calculado através da relação entre a força de propulsão e os parâmetros de entrada (Kubota et al., 2009b),

$$\vartheta_{eff} = \frac{(F)^2}{2\dot{m}I(V + V_{elet})}, \quad (6.7)$$

onde V é a queda de potencial no plasma, que pode ser obtida através do integral de linha da lei de Ohm na região entre os eléctrodos,

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\eta \mathbf{j} - \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (6.8)$$

O método de solução não possui nenhum modelo que permita calcular a queda de potencial nos eléctrodos, V_{elet} . Para as correntes de descarga analisadas, estima-se que $V_{elet} = 20 \text{ V}$ seja um valor adequado (Kubota et al., 2007, 2009a). O aquecimento por efeito de Joule pode ser calculado a partir do respetivo integral de volume,

$$J = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (6.9)$$

Estes parâmetros devem-nos permitir estimar as diferenças que ocorrem no desempenho da tubeira com a variação da geometria dos eléctrodos. Contudo, o modelo implementado não possui

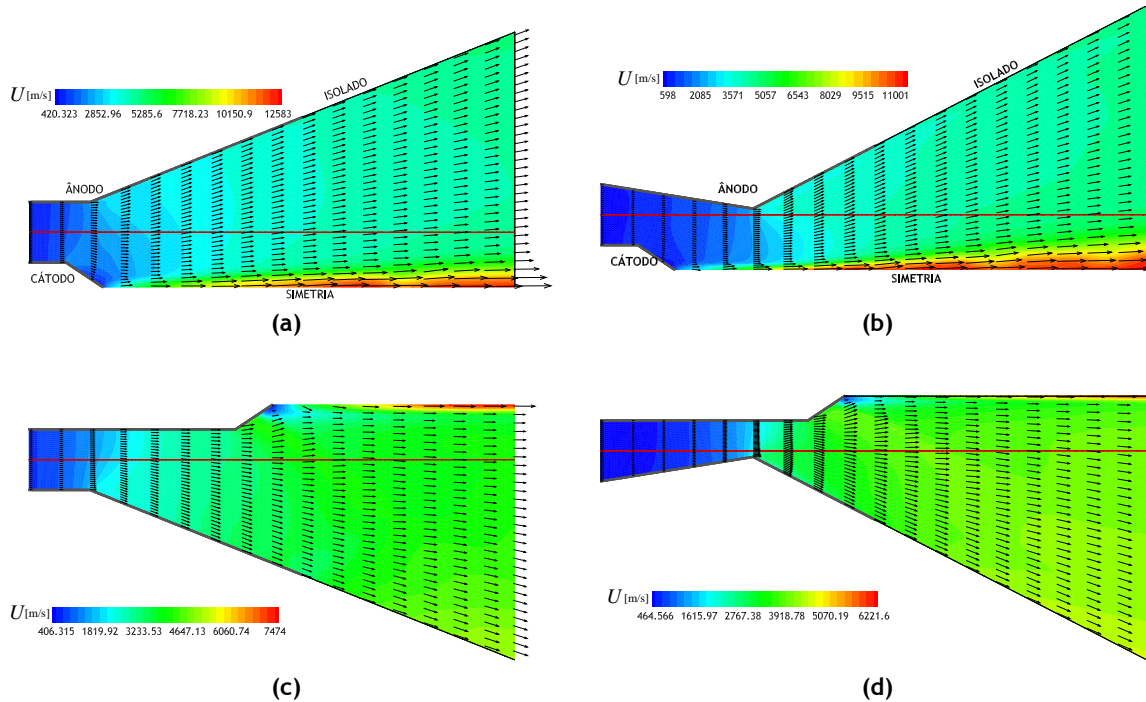


Figura 6.4: Isolinas representativas da magnitude do campo de velocidade e correspondentes vetores. Estes resultados foram obtidos para um caudal $\dot{m} = 2,5 \text{ g/s}$ e para uma corrente de descarga à entrada $I = 8000 \text{ A}$.

a capacidade de modelar a queda de potencial que ocorre nos eléctrodos. Esta característica é relativamente importante na modelação de tubearias MPD e tem sido alvo de estudo por parte da comunidade científica (Niewood, 1993; Kubota et al., 2011). Sabe-se que, em valores absolutos e quando comparada com a queda de potencial no plasma, a queda de potencial junto dos eléctrodos pode assumir um valor significativo que tende a reduzir o rendimento. De tal forma, que a hipótese de valor constante para V_{elet} pode levar a um erro no cálculo do desempenho. Ainda assim, a modelação deste fenómeno é frequentemente descartada nos modelos MPD (Funaki et al., 1997; Kubota et al., 2009a; Mahendhran e Kumar, 2011) e assume-se para V_{elet} um valor constante, o mesmo vai ser feito nesta tese. Este fator deve ser levado em conta na análise dos resultados, uma vez que apenas nos vai permitir uma comparação qualitativa dos desempenhos das várias geometrias.

6.2 Resultados obtidos

Na Fig. 6.4 apresentam-se os resultados obtidos para a magnitude da velocidade, quando à entrada é imposta uma corrente de descarga igual a $I = 8000 \text{ A}$. Como podemos verificar as duas configurações de menor dimensão de cátodo resultam em velocidades de escape semelhantes e de valor superior às respetivas configurações de cátodo longo. Estes resultados estão em acordo com os resultados experimentais de Funaki et al. (1998) e com os que foram obtidos numericamente por diversos autores (Funaki et al., 1997; Kubota et al., 2007; Mahendhran e Kumar, 2011).

A distribuição do campo magnético, obtida para uma corrente de descarga igual a $I = 2500 \text{ A}$,

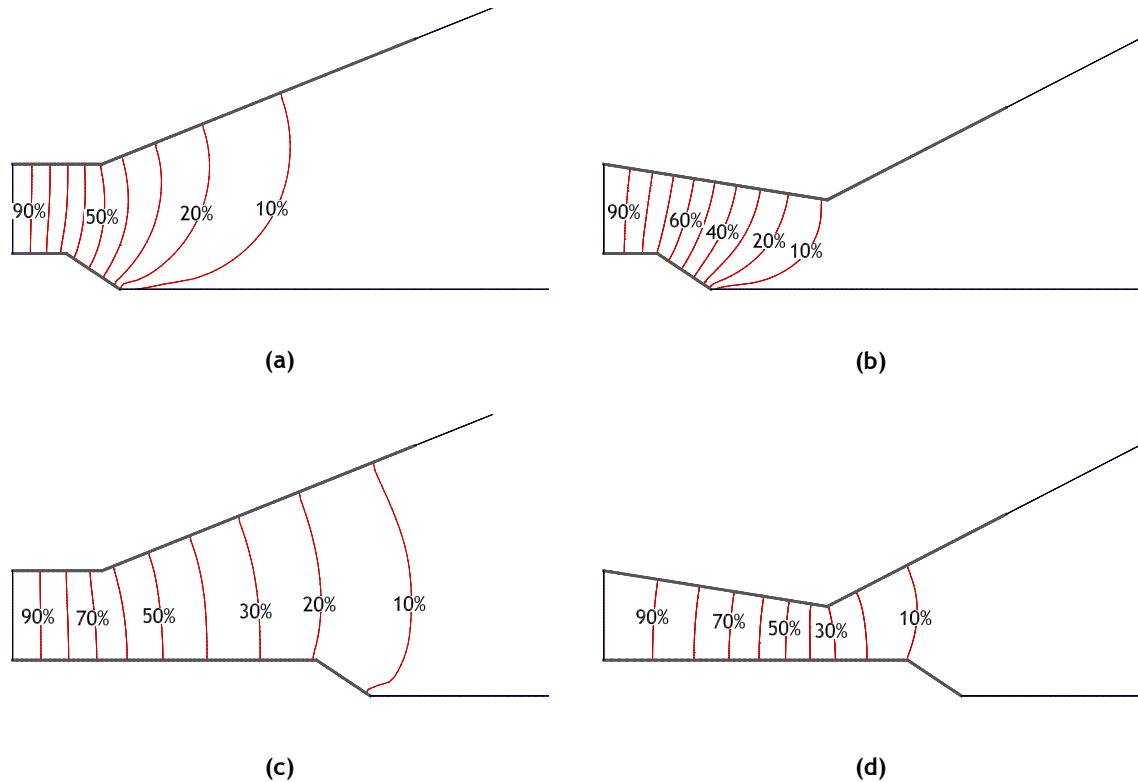


Figura 6.5: Distribuição das isolinhas de B_z , referentes a uma corrente de descarga igual a 2500 A, para cada uma das configurações analisadas. Os valores vêm dados em termos de percentagem do campo imposto à entrada.

encontra-se representada na Fig. 6.5 em termos de percentagem do campo magnético calculado à entrada. Os resultados obtidos para as diferentes configurações mostram que as linhas de campo se acumulam na ponta do cátodo devido à sua orientação geométrica. Esta concentração vai gerar um incremento da aceleração do escoamento devido ao aumento do aquecimento por efeito de Joule nesta região. Como podemos observar, são as configurações que possuem os cátodos de menor comprimento que resultam numa maior acumulação das linhas de campo magnético. De facto, já verificámos na Fig. 6.4, que são estas as configurações que resultam em velocidades de escape de valor superior.

Vamos agora passar à validação do modelo numérico implementado, através de uma comparação direta, entre os resultados aqui obtidos, com os dados numéricos e experimentais que foram fornecidos por outros autores. A Fig. 6.6a mostra a distribuição da velocidade axial calculada na secção $y = 0,009$ [m] (linha a vermelho na Fig. 6.4a) da tubeira ADCC para uma corrente de descarga $I = 8000$ [A]. Os resultados numéricos calculados são aqui comparados com os que foram obtidos, também através de ferramentas numéricas, por Funaki et al. (1997) e Mahendhran e Kumar (2011). Como podemos observar a velocidade axial apresenta a mesma tendência de crescimento, embora o seu valor absoluto seja mais reduzido.

Uma validação mais realista requer uma comparação direta com os resultados experimentais. Para este efeito foram utilizados os dados experimentais, medidos por Funaki et al. (1998), da força de propulsão em função da corrente de descarga, veja-se a Fig. 6.6b. Podemos verificar que o modelo computacional aqui utilizado prevê valores mais elevados da força de propulsão. No entanto o declive do gráfico é semelhante, e quando os resultados numéricos são comparados

com os que foram obtidos por Mahendhran e Kumar (2011) (também numericamente), podemos verificar que são bastante similares.

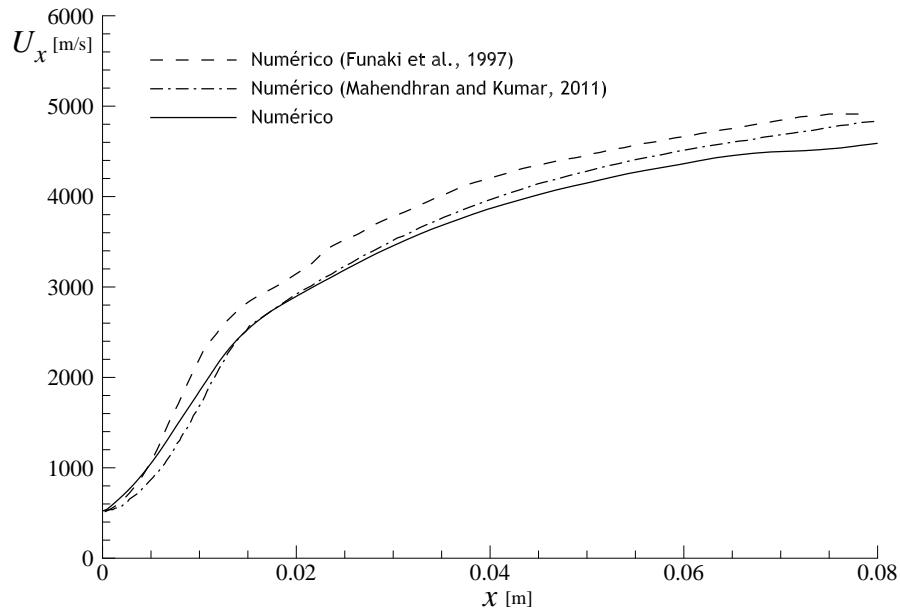
Na Fig. 6.7a apresenta-se uma comparação entre as forças de propulsão calculadas em cada uma das configurações aqui analisadas, em função da corrente de descarga. Como podemos verificar, as configurações que possuem o cátodo de menor comprimento permitem obter uma maior força de propulsão para todos os valores de I . Note-se que as tubeiras de ânodo convergente-divergente, para correntes de descarga superiores a $I = 8000$ [A], apresentam valores inferiores da força de propulsão, o mesmo comportamento foi observado por Funaki et al. (1997). A distribuição da velocidade axial calculada para as mesmas configurações, ao longo da secção $y = 0,009$ [m] e para uma corrente de descarga igual a 8000 [A], é mostrada na Fig. 6.7b. Como esperado, são novamente as configurações que compreendem o cátodo de comprimento inferior que resultam numa maior velocidade de escape.

Vamos agora analisar a configuração de ânodo divergente no que toca à decomposição da força nas suas componentes eletromagnéticas (F_{ELM}) e térmicas (F_{Term}). A Fig. 6.8a mostra a evolução destes dois mecanismos de aceleração em função da corrente de descarga na tubeira ADCC. Como podemos observar, para a maior parte da gama de corrente de descarga analisada, a contribuição térmica é superior à contribuição eletromagnética, esta situação inverte-se para $I \approx 13$ [kA]. A Fig. 6.8b mostra que a configuração ADCL resulta num comportamento semelhante, mas neste caso as forças eletromagnéticas sobrepõem-se às forças de origem térmica em $I \approx 12$ [kA]. Vamos então comparar os mecanismos de aceleração das duas configurações de ânodo divergente. Uma análise das Figs. 6.8c-6.8d permite-nos concluir que o valor superior da força de propulsão para o caso ADCC (Fig. 6.7a) resulta apenas de uma maior contribuição térmica. Já aqui foi referido, que devido à maior concentração das linhas de campo na ponta do cátodo (Fig. 6.5), o aquecimento por efeito de Joule dado pela configuração ADCC é superior ao da tubeira ADCL, como tal é esperado que a contribuição térmica seja superior.

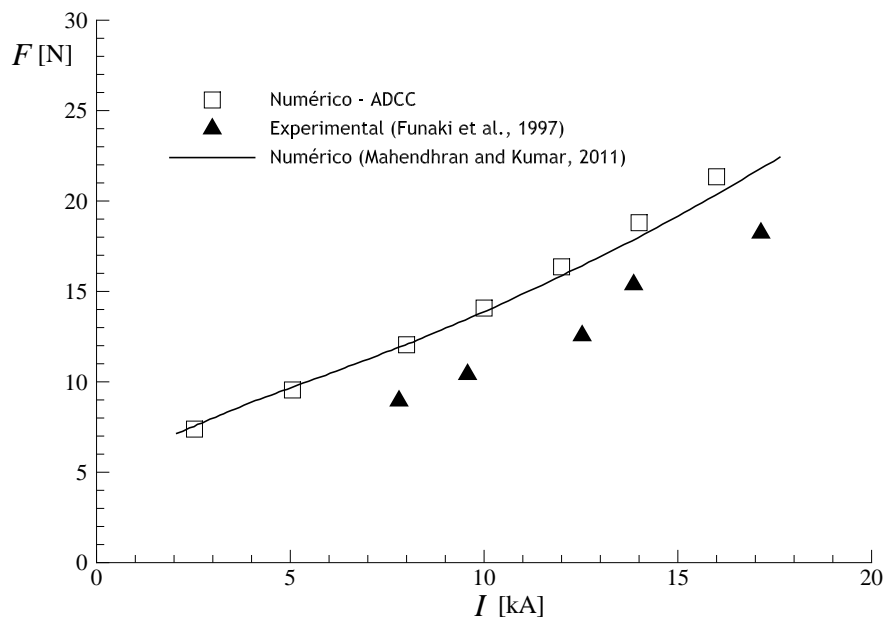
De forma a analisar a tubeira de ânodo divergente no que toca à sua eficiência, apresentam-se nas Figs. 6.8e-6.8f os gráficos de impulso específico e de rendimento em função da corrente de descarga. Como esperado a configuração ADCC é a que apresenta um melhor desempenho uma vez que, para o mesmo caudal e corrente de descarga, resulta num nível superior de eficiência.

Vamos agora analisar outras propriedades do escoamento MHD. A Fig. 6.9a mostra a distribuição da densidade de partículas, n , por m^3 calculada na geometria ADCC para uma corrente de descarga igual a 16000 [A]. Esta distribuição pode ser comparada com os resultados numéricos obtidos por Funaki et al. (1997), onde podemos observar valores semelhantes para n , veja-se a Fig. 6.9b. Contudo, uma comparação com os resultados experimentais (Fig. 6.9c) mostra-nos que o método numérico calcula valores superiores de n em todas as regiões da tubeira. Esta disparidade é esperada uma vez que o nosso modelo assume um estado de total ionização, enquanto que na realidade o plasma não é apenas composto por partículas carregadas eletricamente.

Na Fig. 6.9e apresenta-se a distribuição das isolinhas relativas à temperatura estática, calculadas com o modelo de gás ideal para uma corrente de descarga $I = 5000$ [A]. O resultado obtido com o modelo de gás real para a distribuição de T , e para a mesma corrente de descarga, é mostrado na Fig. 6.9e. Como se pode observar, ambos os modelos resultam em valores semelhantes de temperatura no interior da tubeira. No entanto, à medida que nos aproximamos da

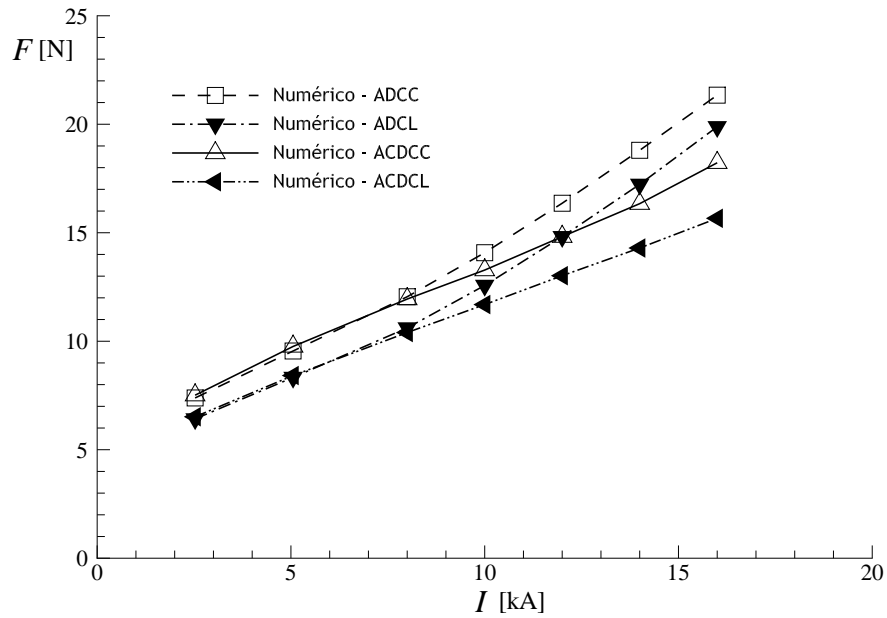


(a)

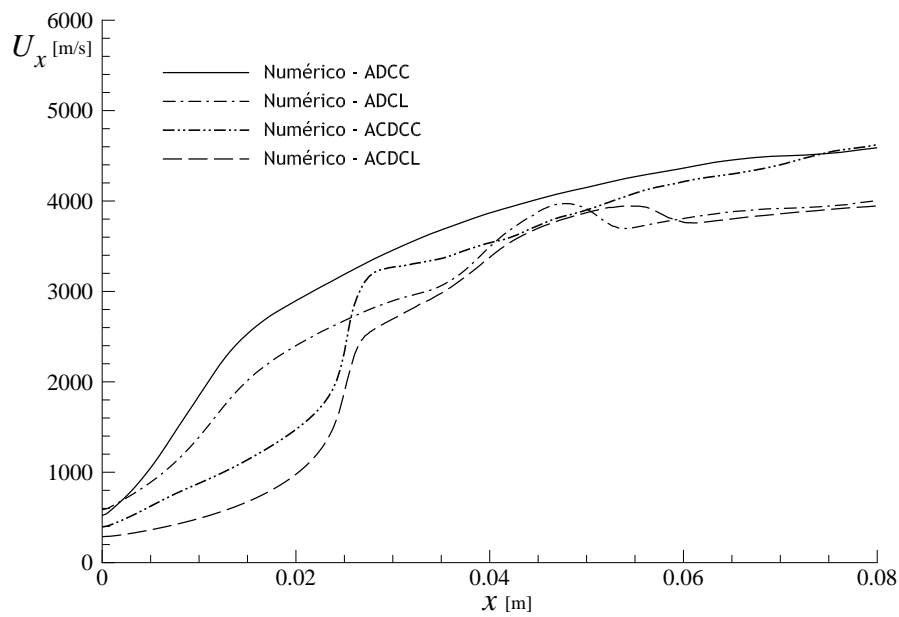


(b)

Figura 6.6: Comparação entre os resultados experimentais e numéricos para: a) Distribuição da velocidade axial ao longo da secção $y = 0,009$ [m] para $I = 8000$ [A] na tubeira ADCC. b) Força de propulsão em função da corrente de descarga obtida para a geometria ADCC.



(a)



(b)

Figura 6.7: a) Comparação entre as forças de propulsão calculadas nas várias configurações, em função da corrente de descarga. b) Distribuição da velocidade axial calculada ao longo da secção $y = 0,009$ [m] para uma corrente de descarga $I = 8000$ [A].

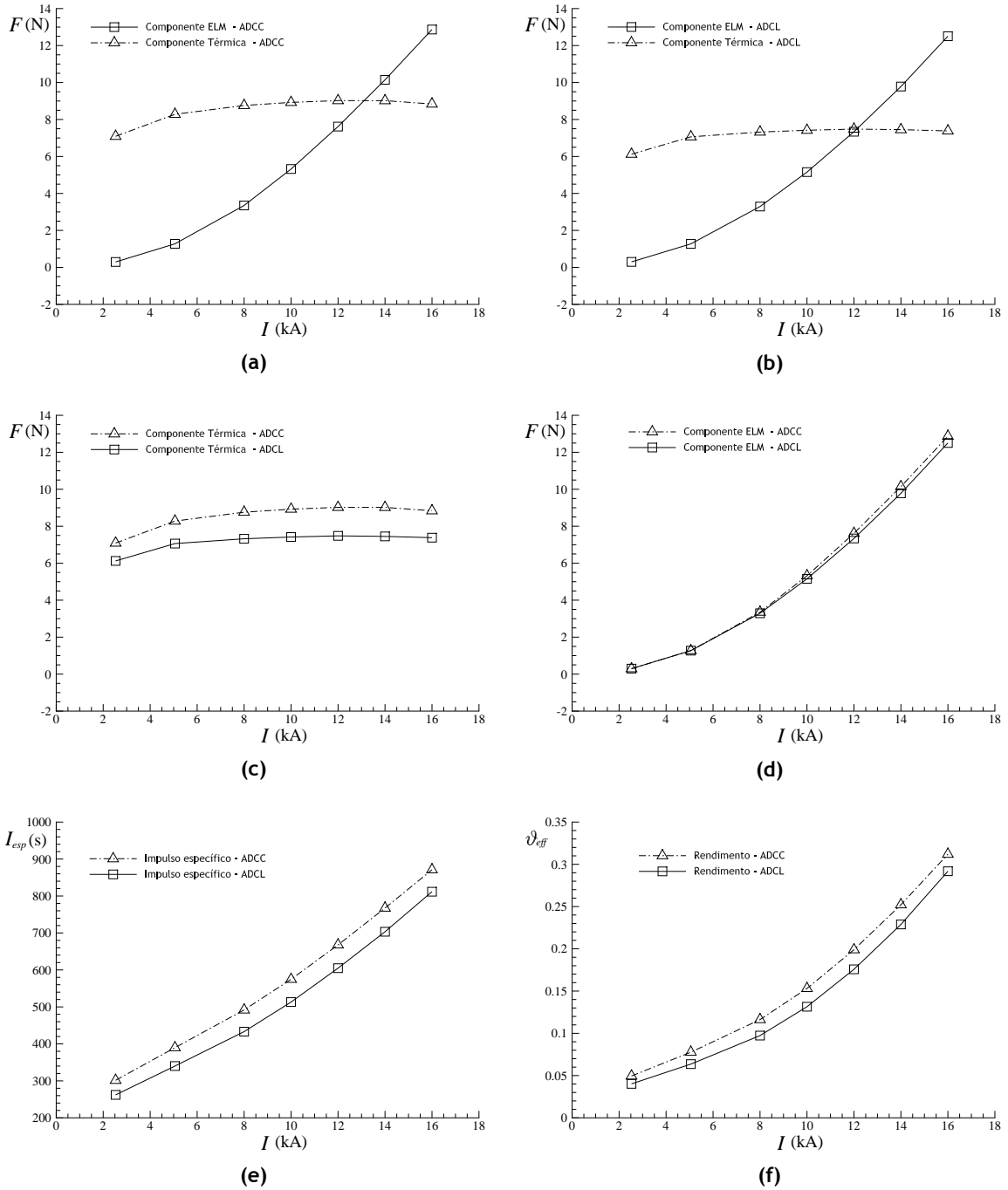


Figura 6.8: Componentes ELM e térmicas da força de propulsão calculadas para a geometria ADCC (a) e ADCL (b). Comparação entre os resultados obtidos para as duas configurações: c) Componente térmica; d) Componente ELM; e) Impulso específico; f) Rendimento.

ponta do cátodo, o modelo real apresenta valores bastante inferiores. De facto, Funaki et al. (1997) verificaram que é na região do cátodo que o modelo ideal falha na previsão do campo de temperatura. A Fig. 6.9d mostra a distribuição do índice adiabático, calculado a partir da função (2.112). Como podemos verificar, o índice γ segue o comportamento apresentado no gráfico 2.7c. Ou seja, diminui progressivamente à medida que a temperatura aumenta até este atingir o valor mínimo de $\gamma \approx 1,1$.

Já aqui foi referido que o aumento da condutividade elétrica está diretamente relacionado com o aumento da temperatura. Na Fig. 6.9 está representada uma distribuição do campo magnético calculada com o modelo de gás ideal (Fig. 6.9g) e com o modelo de gás real (Fig. 6.9h). Repare-se que no interior da tubeira, onde as temperaturas obtidas são semelhantes, a distribuição do campo magnético segue exatamente o mesmo padrão. Contudo, à medida que nos aproximamos da ponta do cátodo, o declive das isolinhas de B_z é inferior. Esta característica não possui qualquer significado físico, e encontra-se associada a um valor incorreto e mais elevado da condutividade elétrica, que resulta numa maior deflexão das linhas de campo pela velocidade do escoamento.

Na Fig. 6.10 apresentam-se as isolinhas calculadas para o número de Mach na configuração ADCC. A distribuição de M , para uma corrente $I = 0$ [kA], ou seja na ausência de campo magnético (Fig. 6.10a), mostra-nos que as características geométricas da tubeira levam à ocorrência de uma onda de choque oblíqua com origem na ponta do cátodo. À medida que a corrente de descarga aumenta, e no intervalo $2,5$ [kA] $< I < 12$ [kA], a onda de choque é suprimida devido ao aquecimento por efeito de Joule. Para valores mais elevados de I , ou seja quando a componente eletromagnética da propulsão possui um valor mais significativo, a onda de choque volta a surgir mas numa região ligeiramente a montante.

Vamos agora analisar o desempenho das duas configurações de ânodo divergente, onde a única variante vem dada pelo caudal à entrada. Todos os resultados que aqui vão ser apresentados foram obtidos para uma corrente de descarga igual 8000 [A], e para uma temperatura imposta à entrada igual a $T = 5000$ K. Para a gama de caudal analisada ($0,5 - 2,5$ [g/s]) o escoamento é de regime subsónico à entrada e de regime supersónico à saída. Como tal, foram impostas as mesmas condições de fronteira que foram utilizadas nos casos de teste anteriores.

A Fig. 6.11a mostra o resultado obtido para a força de propulsão em função do caudal mássico. Mais uma vez, é a configuração de cátodo com menor comprimento que resulta numa maior propulsão. No entanto, repare-se que a diferença entre ambas as forças aumenta com o aumento de caudal. Vamos então tentar analisar o mecanismo que se encontra por detrás deste fenómeno. Com recurso à Fig. 6.11b podemos analisar as duas componentes da força de propulsão de forma separada. Verifica-se que a componente eletromagnética se mantém praticamente constante para a variação de caudal analisada. Por seu lado, a componente térmica resulta numa função linear, que aumenta à medida que uma maior quantidade de caudal é injetada para o interior da tubeira. Este aumento na componente térmica deverá estar relacionado com o aumento do aquecimento por efeito de Joule, veja-se a Fig. 6.11c. Repare-se que uma maior quantidade de massa permite absorver uma maior quantidade de energia eletrotérmica.

Na Fig. 6.11d apresenta-se a queda de potencial no plasma na região entre-elérodos. Como podemos observar a configuração ADCC, devido à sua configuração geométrica de cátodo, resulta numa queda de potencial superior. Na Fig. 6.11e podemos analisar a evolução do impulso

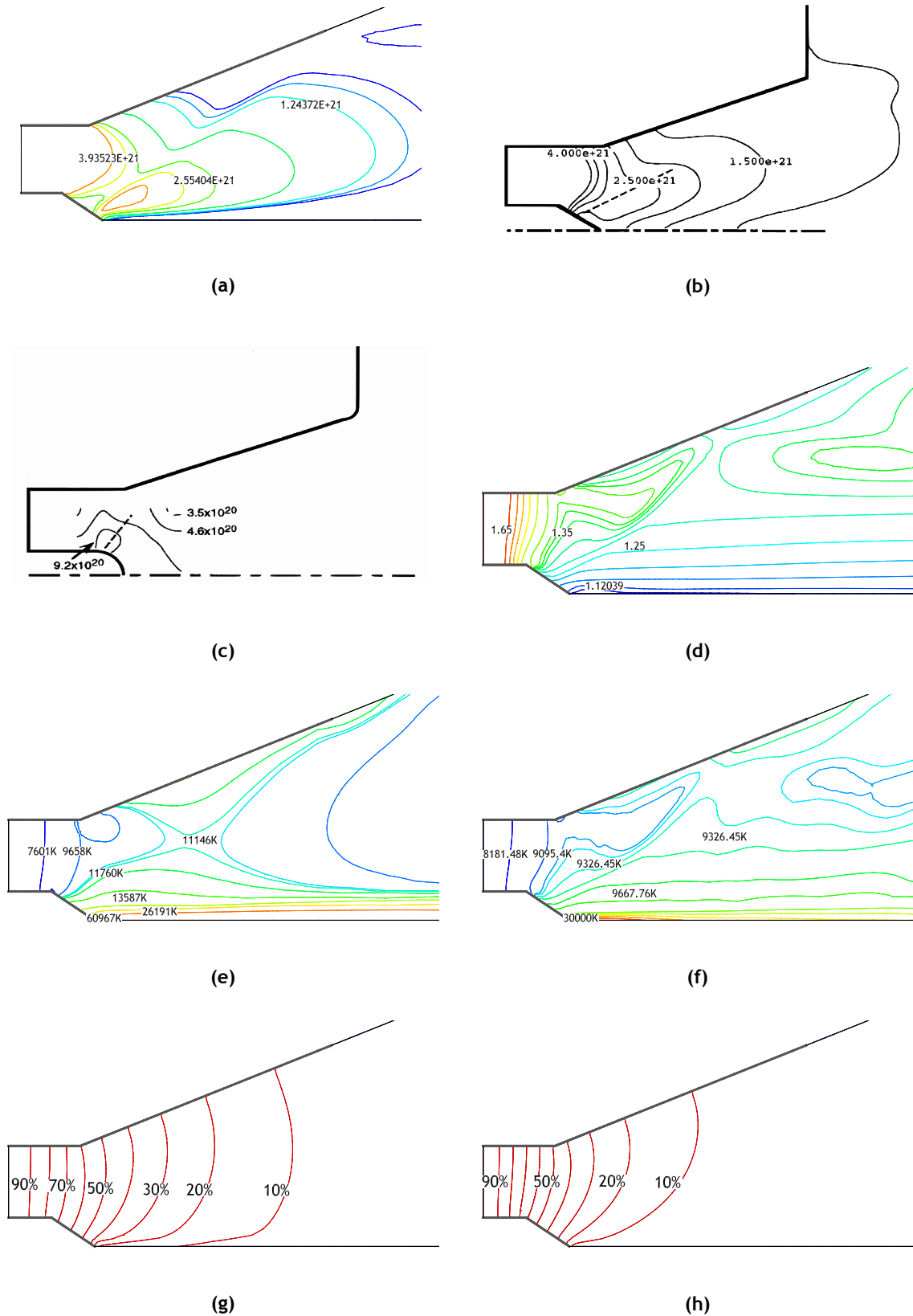


Figura 6.9: Propriedades do escoamento de plasma para um caudal $\dot{m} = 2,5$ [g/s]. a) Densidade de partículas n por m^3 de plasma para $I = 16000$ [A]. Resultados numéricos (b) e experimentais (c) obtidos por Funaki et al. (1997) para a densidade de partículas. d) Índice adiabático γ calculado em função da temperatura. Distribuição da temperatura estática ($I = 5000$ A) obtida com: e) o modelo de gás ideal; f) o modelo de gás real. Distribuição das isolinhas de B_z ($I = 5000$ [A]) calculadas com: g) o modelo de gás ideal; h) o modelo de gás real.

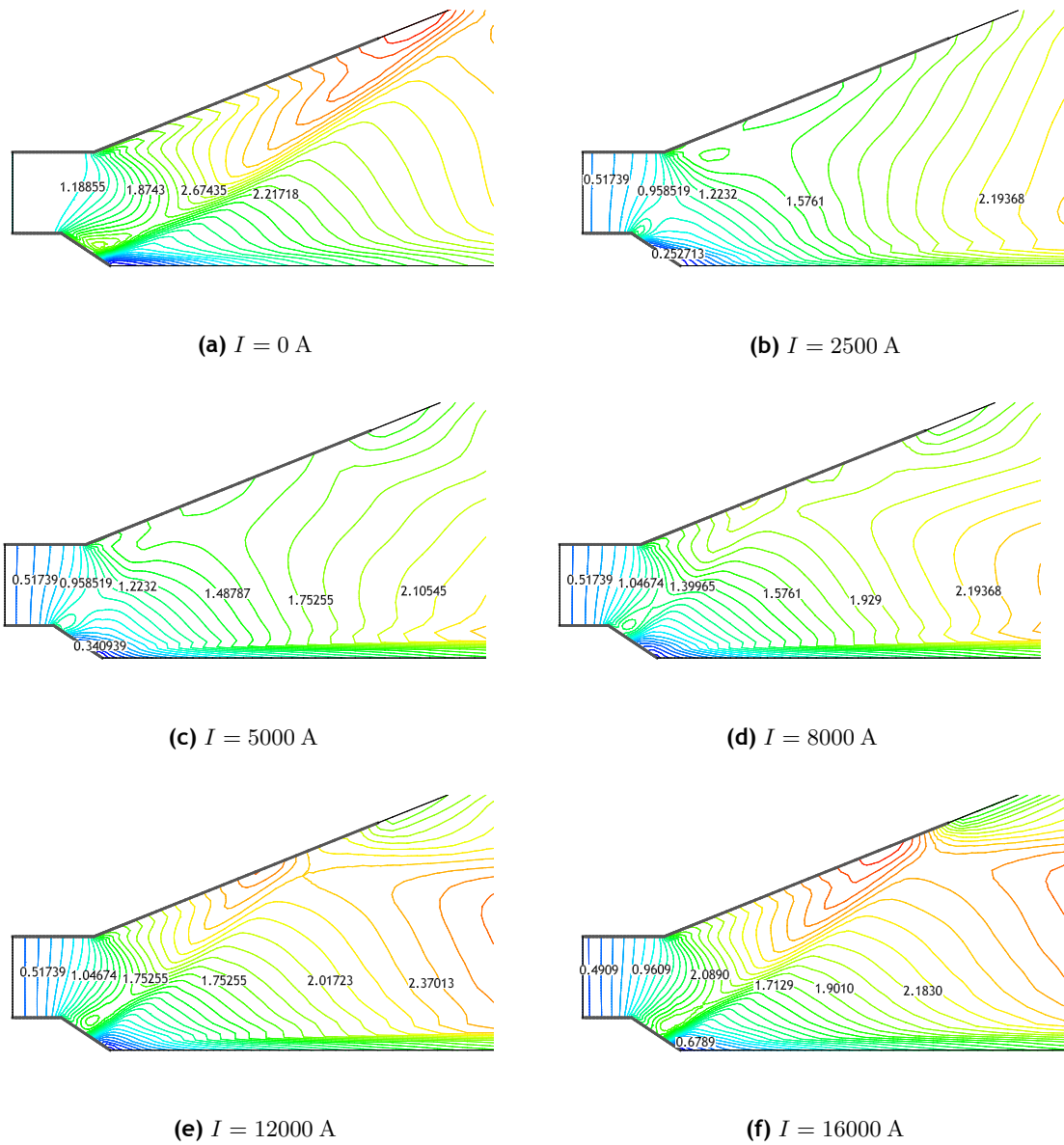


Figura 6.10: Distribuição das isolinhas do número de Mach para diferentes correntes de descarga.

específico à medida que o caudal à entrada aumenta. Repare-se que para uma gama de caudal inferior a tubeira consegue gerar um maior valor de impulso específico. Em relação ao rendimento da tubeira, que se encontra representado na Fig. 6.11, é novamente a configuração ADCC que resulta num maior grau de eficiência.

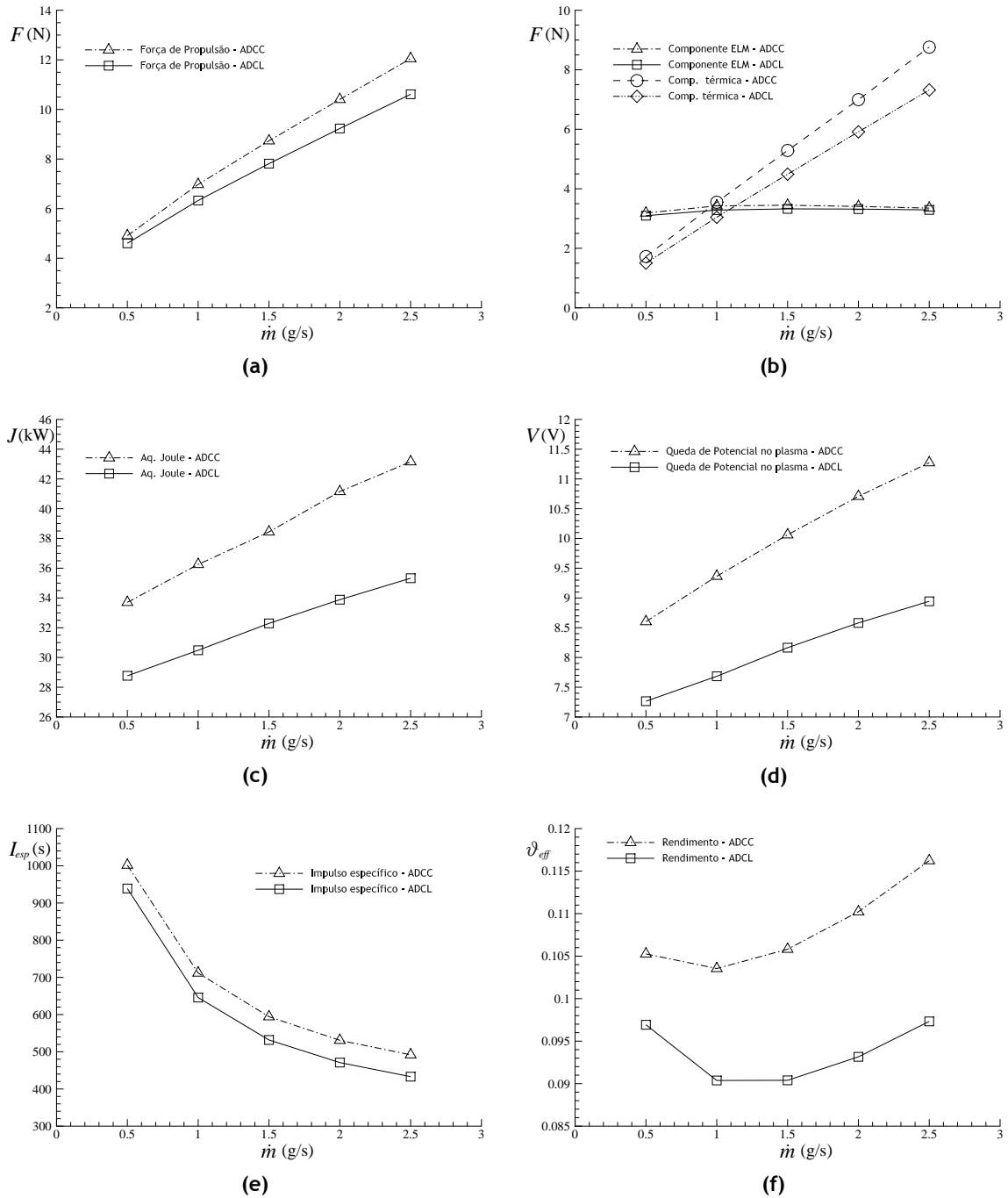


Figura 6.11: Resultados numéricos obtidos para o estudo de variação de caudal. a) Força de propulsão obtida para as configurações ADCC e ADCL. b) Comparação entre as componentes ELM e térmica da força de propulsão para os casos analisados. c) Resultados obtidos para o aquecimento por efeito de Joule. d) Queda de potencial no plasma. e) Impulso específico. f) Rendimento das tubeiras.

6.3 Nota conclusiva

Neste capítulo o modelo MHD, que foi proposto na secção 4.2 e validado na secção 5.2, foi utilizado na análise do escoamento de plasma numa tubeira MPD bidimensional de campo induzido.

O estudo aqui apresentado focou-se na análise da geometria dos eléctrodos no desempenho das tubeiras magnetoplasmadinâmicas. Na generalidade dos casos estudados, verificou-se que uma redução do comprimento do cátodo tende a ser benéfica, uma vez que produz uma maior força de propulsão para a mesma quantidade de caudal.

O modelo de gás real foi aqui introduzido e os resultados obtidos foram comparados com as distribuições de temperatura e de campo magnético, calculadas com o modelo de gás ideal. Verificou-se que o modelo real resulta numa distribuição mais realista do campo de temperatura estática o que vai influenciar a condutividade elétrica e consequentemente a distribuição do campo magnético.

O capítulo foi encerrado com um estudo de variação de caudal onde se verificou que, para as gamas de caudal estudadas, a configuração ADCC se sobrepunha à configuração ADCL. Demonstrou-se também que, para um valor de caudal mais reduzido, o impulso específico é significativamente superior.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho foram apresentados dois novos métodos numéricos para a resolução dos sistemas de equações de Euler e MHD. Ambos os métodos aqui propostos são baseados no algoritmo PISO e foram implementados de forma a permitir o tratamento de escoamento a número de Mach arbitrário.

A tese iniciou-se com uma análise bibliográfica dos vários métodos numéricos para a simulação de escoamentos compressíveis. Verificou-se que estes podiam ser catalogados em duas categorias, nomeadamente os métodos do tipo DBA (*Density Based Algorithms*) e os métodos do tipo PBA (*Pressure Based Algorithms*). Vimos que os métodos DBA são baseados na resolução de uma equação para a massa volúmica e que os algoritmos PBA são baseados numa equação para a pressão ou para a sua correção. Foi também referido que o método de acoplamento das variáveis dependentes era diferente para cada um dos métodos de solução.

Seguiu-se uma revisão do estado da arte sobre os vários modelos desenvolvidos para o cálculo de escoamento compressível MHD, dando-se especial ênfase aos esquemas desenvolvidos para a análise de escoamento MHD ideal. Verificámos que os esquemas de alta resolução, desenvolvidos para a análise de dinâmica dos gases, podem ser adaptados com êxito ao cálculo de escoamentos MHD, embora o grau de complexidade associado a esses esquemas MHD seja consideravelmente superior, uma vez que a família de ondas MHD é mais alargada. Referiu-se também que a extensão das equações de Euler/Navier-Stokes para MHD não se restringia apenas a uma reformulação dos esquemas numéricos, uma vez que a condição $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ também necessitava de ser (aproximadamente) satisfeita.

O trabalho apresentado dividiu-se em três componentes distintas mas inter-relacionadas. A primeira componente prende-se com o desenvolvimento de um método de solução para a análise de escoamento compressível a número de Mach arbitrário. Numa segunda fase, o método foi adaptado à análise de escoamento magnetohidrodinâmico e foi depois extensamente validado. A terceira componente focou-se numa aplicação ao campo da engenharia mecânica do modelo MHD proposto, em concreto tendo sido feito um estudo numérico de tubeiras magnetoplasma-dinâmicas de campo induzido.

7.1 Análise de escoamento compressível a número de Mach arbitrário

No decorrer deste trabalho entendeu-se que a utilização de um método PBA poderia ser vantajosa para a análise de escoamento a número de Mach arbitrário. Verificou-se que a equação

para a pressão possui a particularidade de adaptar o seu carácter ao regime de escoamento em que se encontrava, o que é uma vantagem em termos de versatilidade. Ainda assim, uma análise mais detalhada do algoritmo PBA de base, implementado por Xisto et al. (2010), revelou que este sofria de alguns problemas de estabilidade e precisão no cálculo de escoamentos de regime supersónico e transónico. Uma análise cuidada revelou que essas instabilidades eram independentes do algoritmo de resolução, e eram desencadeadas pela utilização da técnica de interpolação de Rhie e Chow (1983).

O passo seguinte foi o de procurar uma alternativa à técnica de interpolação de Rhie e Chow, curiosamente esta alternativa residiu num método originalmente proposto para os algoritmos do tipo DBA. A técnica adotada, conhecida como AUSM, foi originalmente proposta por Liou e Steffen (1993) e posteriormente modificada e melhorada por vários autores ao longo dos anos. A versão do esquema que aqui foi utilizada foi proposta por Liou (2006) no quadro dos métodos DBA desenvolvidos para número de Mach arbitrário, esta é denominada $AUSM^+ - up$ devido aos termos difusivos de pressão e velocidade que são adicionados aos vetores de fluxo. Vimos nesta tese que o esquema AUSM baseia-se em funções de interpolação distintas para o cálculo da velocidade e da pressão nas faces dos volumes de controlo. Esta característica faz deste esquema ideal a ser implementado no algoritmo PISO, uma vez que o seu processo iterativo requer que a pressão e velocidade sejam também tratadas de forma separada.

O esquema $AUSM^+ - up$ requer que as variáveis à esquerda da face e à sua direita estejam disponíveis para posterior avaliação. No capítulo 3 apresentámos alguns esquemas de diferenciação que podem ser utilizados na interpolação das variáveis. Vimos também que, na presença de descontinuidades, alguns desses esquemas resultam em oscilações irrealistas que podem levar à divergência do método de solução. Desta forma, foi incluído no modelo numérico um esquema de interpolação de alta resolução do tipo NVF, nomeadamente o CUBISTA de Alves et al. (2003).

O esquema $AUSM^+ - up$ aliado ao CUBISTA e inserido num algoritmo do tipo PBA mostrou ser um excelente candidato para a análise de escoamento a número de Mach arbitrário. Os casos de teste revelaram que o método proposto é capaz de calcular uma vasta gama de números de Mach com relativa precisão. Ao mesmo tempo as propriedades *upwind* do algoritmo revelaram uma elevada precisão no cálculo de ondas de choque sem levar à ocorrência de oscilações.

7.2 Análise de escoamento MHD compressível

O desenvolvimento do modelo numérico de análise de escoamento magnetohidrodinâmico iniciou-se com a reformulação do método que tinha sido previamente sugerido para a análise de dinâmica dos gases. O primeiro passo desta adaptação foi a substituição da onda acústica pela onda magnetosónica rápida nas funções de interpolação do esquema AUSM. Contudo, verificou-se que esta abordagem não era suficiente, uma vez que na proximidade de fortes descontinuidades MHD a solução apresentava um resultado oscilatório. Para contornar esta situação adaptou-se o esquema AUSM-MHD de Han et al. (2009) de forma a este ser incorporado num método do tipo PBA. Este novo esquema utiliza, da mesma forma que o esquema de base AUSM, funções de interpolação baseadas no número de Mach para o cálculo da velocidade e pressão nas faces dos VCs. No entanto, numa fase posterior, utiliza funções de peso baseadas

na pressão global das equações MHD (pressão termodinâmica + pressão magnética), como forma de controlar a quantidade de dissipação a ser introduzida nas regiões de descontinuidade.

Para garantir que os erros da não divergência de \mathbf{B} fossem de valor reduzido implementou-se o método sugerido por Dedner et al. (2002). Esta técnica mostrou ser compatível com o método de solução segregado do tipo PBA, e garantiu que os erros resultantes da discretização da equação da indução fossem de valor reduzido e não influenciassem o padrão de escoamento. Verificou-se que os erros de valor mais significativo ocorriam nas zonas de descontinuidade, principalmente na presença de ondas de choque magnetosónicas rápidas. Note-se, que é nestas regiões que ocorrerem descontinuidades nas componentes paralelas da velocidade, que por sua vez provocam uma grande variação na componente transversal do campo magnético.

O esquema de interpolação CUBISTA foi novamente utilizado numa parte dos casos de validação MHD. No entanto, na presença de ondas de choque de relativa intensidade, a sua utilização com o esquema AUSM-MHD resultava em instabilidades de origem numérica. Nessas situações optou-se sempre pela utilização de um esquema bastante mais dissipativo, que incorporava uma função limitadora Minmod. Uma análise importante será a de encontrar uma forma de otimizar a quantidade de dissipação numérica que é introduzida pelo esquema de interpolação com as propriedades do escoamento. Isto poderá ser feito através de uma escolha apropriada do próprio esquema de diferenciação, ou através de um parâmetro que permita relacionar a quantidade de dissipação numérica que é introduzida pelos dois esquemas.

A adaptação e inclusão do esquema AUSM-MHD num método do tipo PISO revelou-se bastante vantajosa na posterior análise de escoamento MHD ideal e resistivo. Verificámos que o nível de precisão que se obteve no cálculo de descontinuidades é semelhante, embora ligeiramente inferior, a um esquema do tipo Roe. Ao mesmo tempo demonstrou-se que esta abordagem, quando comparada com os métodos do tipo DBA, é mais precisa no cálculo de escoamento a número de Mach reduzido, nomeadamente no que toca à captação de ondas de Alfvén. Relativamente ao escoamento MHD resistivo verificou-se, através de uma comparação direta com resultados analíticos, que o método proposto consegue calcular com precisão as camadas limites de origem viscosa e magnética.

7.3 Modelação numéricas de tubeiras MPD

O modelo numérico desenvolvido para o cálculo de escoamento MHD foi posteriormente aplicado para a análise do efeito da geometria dos eléctrodos no desempenho de tubeiras MPD de campo induzido. Referimos no decorrer deste trabalho que as tubeiras MPD possuem uma configuração geométrica do tipo coaxial. Sabe-se que esta é uma das formas mais eficientes de acomodar a corrente de descarga. Normalmente, na análise do escoamento de plasmas neste tipo de geometrias, utilizam-se modelos numéricos baseados numa formulação axissimétrica (coordenadas cilíndricas) das equações de governo. Nesta componente do trabalho optou-se por abordar numericamente um dispositivo experimental de geometria bidimensional. A escolha recaiu sobre esta geometria uma vez que o código MHD proposto segue uma implementação cartesiana das equações de governo. Ainda assim, uma geometria 2D possui os mesmos mecanismos principais de aceleração numa geometria coaxial e, desta forma, é possível avaliar se

o método proposto consegue captar os aspectos fundamentais do escoamento de plasma neste tipo de sistemas.

Para efeitos de validação, os resultados numéricos aqui obtidos foram comparados com dados experimentais disponíveis na literatura, o que revelou que o método proposto resulta em valores mais elevados para a força de propulsão. Esta discrepância era esperada uma vez que as hipóteses assumidas no modelo MHD não contabilizam vários aspectos da física de plasmas. No entanto, os resultados obtidos seguiam a mesma tendência de crescimento à medida que a corrente de descarga aumentava, o que era um bom indicador de que o modelo estava a cumprir os seus objetivos.

Em relação aos resultados obtidos, verificou-se que a geometria dos eletrodos é relativamente importante em tubeiras MPD. O estudo que aqui foi levado a cabo permitiu analisar o efeito da geometria do ânodo e o efeito do comprimento do cátodo no desempenho deste tipo de sistemas. Verificou-se que a força propulsiva resultante diminuía à medida que o comprimento do cátodo aumentava. Após uma decomposição da força resultante nas suas componentes eletromagnéticas e térmicas, verificou-se que a principal discrepância ocorria na componente térmica da força de propulsão. Este efeito está relacionado com a forma geométrica do cátodo que, na configuração de comprimento mais reduzido, permite uma maior acumulação das linhas de corrente na sua extremidade, o que vai levar a um aumento do aquecimento por efeito de Joule.

Relativamente ao estudo de variação de caudal, mostrou-se que a diferença entre as forças de propulsão obtidas com as várias geometrias analisadas, aumentava à medida que uma maior quantidade de fluxo mássico era injetada para o interior da tubeira. Verificou-se que essa discrepância estava relacionada com o aumento do aquecimento por efeito de Joule, uma vez que uma maior quantidade de massa consegue absorver uma maior quantidade de energia eletrotérmica.

7.4 Trabalhos futuros

No desenvolvimento dos métodos numéricos aqui propostos teve-se um especial cuidado com a precisão e robustez do algoritmo de solução. Todavia, a componente relativa à taxa de convergência não foi extensamente abordada. Uma possível forma de aumentar a taxa de convergência para regime estacionário é implementando a técnica de passo de tempo local. Podemos também utilizar esquemas mais estáveis de avanço no tempo, como o método de Runge-Kutta, que nos permite violar a condição de estabilidade e atingir a solução estacionária mais rapidamente. Poderia também ser desenvolvido um método que alternasse entre a técnica de Rhie-Chow, na presença de escoamento subsónico, e o método AUSM no cálculo de regiões supersónicas. Uma abordagem ideal seria a de implementar um esquema totalmente implícito que resolvesse o sistema de equações de governo como um bloco. Desta forma garantia-se um bom acoplamento entre as variáveis dependentes e o algoritmo de solução poderia progredir no tempo de forma mais rápida e estável.

Referiu-se no decorrer deste trabalho que alguns esquemas de diferenciação eram problemáticos quando utilizados em junção com o método AUSM. Uma solução para esta problemática

poderá ser dada através de uma forma de relacionar a quantidade de dissipação que é introduzida pelos dois esquemas. Vamos restringir a nossa análise ao CUBISTA, mais concretamente à escolha do parâmetro C (veja-se a pág. 56 em Alves et al. (2003)). Normalmente este parâmetro é uma constante do esquema e deve garantir um bom acordo entre a convergência e a precisão do método. Este acordo estabelece-se através de um conjunto específico de casos de teste e em Alves et al. (2003) verificou-se que $C = 0,25$ era um valor adequado para este parâmetro. Seria interessante desenvolver uma metodologia que permitisse calcular este parâmetro de uma forma local em função das propriedades do escoamento. Assim, e voltando ao caso MHD ideal, mais concretamente a escoamentos onde ocorrem ondas de choque magnetosónicas de grande intensidade, o valor de C poderia ser aumentado. Por outro lado, nas situações menos problemáticas, C deveria assumir o mínimo valor possível.

O modelo utilizado na análise de escoamento de plasma em tubeiras MPD era baseado nas equações fundamentais da magnetohidrodinâmica em junção com o modelo de Spitzer-Härm para o cálculo da resistividade elétrica. A inclusão de modelos de ionização será um aspeto interessante a considerar em trabalhos futuros. Será também interessante incluir outros fenómenos de transporte, como a viscosidade e condutividade térmica. Por seu lado a inclusão de modelos multi-espécie, particularmente para o cálculo da energia interna dos eletrões e das espécies pesadas, é particularmente importante no que toca à análise destas novas propriedades de transporte.

Sabe-se que em tubeiras MPD de geometria coaxial, a operar fora das condições de projeto, o escoamento de plasma possui propriedades assimétricas. Desta forma, seria particularmente interessante desenvolver um modelo tridimensional que incluí-se grande parte dos modelos já aqui descritos. Utilizando uma abordagem 3D poderiam também ser analisados os efeitos tridimensionais da geometria da tubeira, como o posicionamento dos injetores de gás propelente.

Bibliografia

- Acharya, S. e Moukalled, F. H. (1989). Improvements to incompressible flow calculation on a nonstaggered curvilinear grid. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 15(2):131-152.
- Alfvén, H. (1942). Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, 150(3805):405-406.
- Alves, M. A., Oliveira, P. J., e Pinho, F. T. (2003). A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41(1):47-75.
- Alves, M. A., Oliveira, P. J., e Pinho, F. T. (2004). On the effect of contraction ratio in viscoelastic flow through abrupt contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 122(1-3):117 - 130.
- Balsara, D. S. (1998). Total variation diminishing scheme for adiabatic and isothermal magnetohydrodynamics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 116(1):133-153.
- Balsara, D. S. e Spicer, D. (1999a). Maintaining pressure positivity in magnetohydrodynamic simulations. *Journal of Computational Physics*, 148(1):133 - 148.
- Balsara, D. S. e Spicer, D. S. (1999b). A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations. *Journal of Computational Physics*, 149(2):270-292.
- Batten, P., Lien, F.-S., e Leschziner, M. (1997). A positivity-preserving pressure-correction method. *Lecture Notes in Physics*, 490:147-152.
- Bellan, P. M. (2006). *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press.
- Bijl, H. e Wesseling, P. (1998). A unified method for computing incompressible and compressible flows in boundary-fitted coordinates. *Journal of Computational Physics*, 141(2):153 - 173.
- Boie, C., Auweter-Kurtz, M., Kaeppler, H. J., e Sleziona, P. C. (1995). Numerical investigation of MPD thrusters with unstructured mesh methods. In *Proceedings 24 International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-95-168, Moscovo.
- Boie, C., Kaeppler, H. J., Sleziona, P. C., e Auweter-Kurtz, M. (1997). Application of adaptive numerical schemes for MPD thruster simulation. In *Proceedings 25th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-97-115, Ohio, USA.
- Boyd, T. e Sanderson, J. (2003). *The Physics of Plasmas*. Cambridge University Press.
- Brackbill, J. U. e Barnes, D. C. (1980). The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, 35(3):426-430.
- Bressloff, N. W. (2001). A parallel pressure implicit splitting of operators algorithm applied to flows at all speeds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 36(5):497-518.
- Brio, M. e Wu, C. (1988). An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 75(2):400 - 422.

- Caldo, G., Choueiri, E., Kelly, A., e Jahn, R. (1991). An MPD code with anomalous transport. In *22nd International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-91-101.
- Chanty, J.-M. G. (1992). *Analysis of two-dimensional flows in magneto-dynamic plasma accelerators*. Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology.
- Choi, Y.-H. e Merkle, C. (1993). The application of preconditioning in viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 105(2):207 - 223.
- Chorin, A. J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 2(1):12 - 26.
- Choueiri, E. (1991). *Electron-Ion Streaming Instabilities of an Electromagnetically Accelerated Plasma*. Tese de Doutorado, Princeton University.
- Choueiri, E. Y. (1999). Anomalous resistivity and heating in current-driven plasma thrusters. *Physics of Plasmas*, 6(5):2290-2306.
- Crockett, R. K., Colella, P., Fisher, R. T., Klein, R. I., e McKee, C. F. (2005). An unsplit, cell-centered Godunov method for ideal MHD. *Journal of Computational Physics*, 203(2):422 - 448.
- Dai, W. e Woodward, P. (1998a). On the divergence-free condition and conservation laws in numerical simulations for supersonic magnetohydrodynamic flows. *Astrophysical Journal*, 494:317-335.
- Dai, W. e Woodward, P. R. (1994). An approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 111(2):354 - 372.
- Dai, W. e Woodward, P. R. (1998b). A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations. *Journal of Computational Physics*, 142(2):331 - 369.
- Darmofal, D. e Schmid, P. (1996). The importance of eigenvectors for local preconditioners of the Euler equations. *Journal of Computational Physics*, 127(2):346 - 362.
- Darwish, M., Asmar, D., e Moukalled, F. (2004). A comparative assessment within a multigrid environment of segregated pressure-based algorithms for fluid flow at all speeds. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 45(1):49-74.
- Darwish, M. e Moukalled, F. (2003). TVD schemes for unstructured grids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(4):599 - 611.
- Darwish, M., Moukalled, F., e Sekar, B. (2001). A unified formulation of the segregated class of algorithms for multifluid flow at all speeds. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 40(2):99-137.
- Darwish, M. S. e Moukalled, F. H. (1994). Normalized variable and space formulation methodology for high-resolution schemes. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 26(1):79-96.
- Davidson, P. A. (2001). *An introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press.

- de les Valls, E., Batet, L., de Medina, V., Fradera, J., e Sedano, L. (2011). Modelling of integrated effect of volumetric heating and magnetic field on tritium transport in a U-bend flow as applied to HCLL blanket concept. *Fusion Engineering and Design*, 86:341 - 356.
- de Villiers, E. (2006). *The Potential of Large Eddy Simulation for the Modeling of Wall Bounded Flows*. Tese de Doutorado, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine.
- Dedner, A. (2003). *Solving the System of Radiation Magnetohydrodynamics for solar physical simulations in 3D*. Tese de Doutorado, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br. Fakultät für Mathematik und Physik.
- Dedner, A., Kemm, F., Kröner, D., Munz, C.-D., Schnitzer, T., e Wesenberg, M. (2002). Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations. *Journal of Computational Physics*, 175(2):645-673.
- Delgado, J. (2006). Mass transfer and dispersion around an active cylinder in cross flow and buried in a packed bed. *Heat and Mass Transfer*, 42(12):1119-1128.
- Demirdzic, I., Lilek, Z., e Peric, M. (1993). A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 16(12):1029-1050.
- Djavarehshkian, M. e Abdollahi, J. M. (2010). Shock-capturing method using characteristic-based dissipation filters in pressure-based algorithm. *Acta Mechanica*, 209(1):99-113.
- Dousset, V. (2009). *Numerical simulations of MHD flows past obstacles in a duct under externally applied magnetic field*. Tese de Doutorado, Coventry University.
- Edwards, J. R. e Liou, M. S. (1998). Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds. *AIAA Journal*, 36(9):1610-1617.
- England, B. L. e Mikellides, P. G. (2005). Numerical simulation of a MW-class self-field magnetoplasmadynamic thruster using MACH2 code. In *Proc. 29th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-2005-206, Princeton.
- Evans, C. R. e Hawley, J. F. (1988). Simulation of magnetohydrodynamic flows - a constrained transport method. *Astrophysical Journal*, 332:659-677.
- Falle, S. A. E. G. (2002). Rarefaction shocks, shock errors, and low order of accuracy in ZEUS. *The Astrophysical Journal Letters*, 577(2):L123.
- Ferziger, J. H. e Peric, M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer.
- Funaki, I., Kuriki, K., e Toki, K. (1998). Electrode configuration effect on the performance of a two-dimensional magnetoplasmadynamic arcjet. *Journal of Propulsion and Power*, 14(6):1043-1048.
- Funaki, I., Toki, K., e Kuriki, K. (1997). Numerical analysis of a two-dimensional magnetoplasmadynamic arcjet. *Journal of propulsion and power*, 13(6):789-795.
- Gardiner, T. A. e Stone, J. M. (2005). An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. *Journal of Computational Physics*, 205(2):509 - 539.
- Gardiner, T. A. e Stone, J. M. (2008). An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions. *Journal of Computational Physics*, 227(8):4123 - 4141.

- Gaskell, P. H. e Lau, A. K. C. (1988). Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8(6):617-641.
- Goedbloed, H. e Poedts, . (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Goedbloed, J. P., Keppens, R., e Poedts, S. (2010). *Advanced Magnetohydrodynamics with applications to laboratory and astrophysical plasmas*. Cambridge University Press.
- Goldston, R. e Rutherford, P. (1995). *Introduction to Plasma Physics*. Taylor & Francis.
- Gombosi, T., Powell, K., De Zeeuw, D., Clauer, C., Hansen, K., Manchester, W., Ridley, A., Rousev, I., Sokolov, I., Stout, Q., e Toth, G. (2004). Solution-adaptive magnetohydrodynamics for space plasmas: Sun-to-earth simulations. *Computing in Science & Engineering*, 6(2):14-35.
- Haag, D., Auweter-Kurtz, M., e Fertig, M. (2007). Numerical simulations of magnetoplasmadynamic thrusters with coaxial applied magnetic field. In *Proc. 30th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-2007-138, Florence, Italy.
- Haag, D., Auweter-Kurtz, M., Fertig, M., e H., K. (2005). Development of an applied field magnetoplasmadynamic thruster design supported by numerical simulations at irs. In *Proc. 29th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-2005-059, Princeton.
- Han, S., Lee, J., e Kim, K. (2009). Accurate and Robust Pressure Weight Advection Upstream Splitting Method for magnetohydrodynamics equations. *AIAA Journal*, 47(4):970-981.
- Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49(3):357-393.
- Harten, A., Lax, P., e Leer, B. (1983). On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1):35-61.
- Harten, A., Osher, S., Engquist, B., e Chakravarthy, S. R. (1986). Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. *Applied Numerical Mathematics*, 2(3):347- 377.
- Hartmann, J. (1937). *Theory of Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field*. Hg-Dynamics. Munksgaard.
- Heiermann, J., Auweter-Kurtz, M., Kaeppler, H. J., Eberle, A., Iben, U., e Sleziona, P. C. (1999). Recent improvements of numerical methods for the simulation of MPD thrusters flow on adaptive meshes. In *Procd. 26th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-99-169, Kitakyushu, Japan.
- Heimerdinger, D. J. (1988). *Fluid Mechanics in Magneticplasmadynamic thruster*. Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology.
- Henriques, J. C. e Gato, L. M. (2004). A multi-dimensional upwind matrix distribution scheme for conservative laws. *Computers & Fluids*, 33(5):755-769.
- Hirsch, C. (2007). *Numerical Computation of Internal and External Flows - The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, volume Vol.1. Elsevier.
- Huba, J. (2011). *NRL PLASMA FORMULARY*. Naval Research Laboratory.

- Hunt, J. C. R. (1965). Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 21(4):577-590.
- Issa, R. I. (1986). Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62(1):40-65.
- Issa, R. I., Gosman, A. D., e Watkins, A. P. (1986). The computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme. *J. Comput. Phys.*, 62(1):66-82.
- Issa, R. I. e Javareshkian, M. H. (1998). Pressure-based compressible calculation method utilizing total variation diminishing schemes. *AIAA Journal*, 36:1652-1657.
- Janhunen, P. (2000). A positive conservative method for magnetohydrodynamics based on HLL and Roe methods. *Journal of Computational Physics*, 160(2):649 - 661.
- Jasak, H. (1996). *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. Tese de Doutorado, University of London, Imperial College.
- Jasak, H., Weller, H., e Gosman, A. (1999). High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31(2):431-449.
- Karki, K. C. e Patankar, S. V. (1989). Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations. *AIAA Journal*, 27(9):1167-1174.
- Kim, J., Ryu, D., Jones, T. W., , e Hong, S. S. (1999). A multidimensional code for isothermal magnetohydrodynamic flows in astrophysics. *The Astrophysical Journal*, 514(1):506-519.
- Kim, K. H. e Kim, C. (2005). Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows: Part I: Spatial discretization. *Journal of Computational Physics*, 208(2):527 - 569.
- Kim, K. H., Kim, C., e Rho, O.-H. (2001a). Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ scheme. *Journal of Computational Physics*, 174(1):38 - 80.
- Kim, K. H., Kim, C., e Rho, O.-H. (2001b). Methods for the accurate computations of hypersonic flows: II. shock-aligned grid technique. *Journal of Computational Physics*, 174(1):81 - 119.
- Kim, K. H., Lee, J. H., e Rho, O. H. (1998). An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions. *Computers & Fluids*, 27(3):311 - 346.
- Kobayashi, M. H. e Pereira, J. C. F. (1996). Characteristic-based pressure correction at all speeds. *AIAA Journal*, 34(2):272-280.
- Kodys, A. e Choueiri, E. (2005). A critical review of the state-of-the-art in the performance of applied-field magnetoplasma dynamic thrusters. In *AIAA 41st Joint Propulsion Conference*, nr. AIAA-2005-4247.
- Kubota, K., Funaki, I., e Okuno, Y. (2007). Numerical study of electrode geometry effects on flowfield in two-dimensional MPD thrusters. In *30th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-07-87, Florence, Italy.

- Kubota, K., Funaki, I., e Okuno, Y. (2009a). Comparison of simulated plasma flow field in a two-dimensional magnetoplasmadynamic thruster with experimental data. *Plasma Science, IEEE Transactions on*, 37(12):2390-2398.
- Kubota, K., Funaki, I., e Okuno, Y. (2009b). Numerical analyses on plasma acceleration processes in applied-field magnetoplasmadynamic thruster. In *31st International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-2009-227.
- Kubota, K., Funaki, I., e Okuno, Y. (2011). Numerical study on electrode model for plasma simulation of MPD thruster. In *32nd International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-2011-252, Wiesbaden, Germany.
- Lapointe, M. R. (1991). Numerical simulation of self-field MPD thrusters. In *Joint Propulsion Conference*, nr. AIAA-91-2341, Sacramento.
- LaPointe, M. R. (1992). Numerical simulation of geometric scale effects in cylindrical self-field MPD thrusters. Technical Report CR-189224, NASA Lewis Research Centre.
- LaPointe, M. R. e Mikellides, P. G. (2001). High power MPD thruster development at the nasa glenn research center. In *37th Joint Propulsion Conference and Exhibit*, nr. AIAA-2001-3499.
- Ledvina, S., Ma, Y.-J., e Kallio, E. (2008). Modeling and simulating flowing plasmas and related phenomena. *Space Science Reviews*, 139(1):143-189.
- Leonard, B. P. (1988). Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8(10):1291-1318.
- Lev, D. e Choueiri, E. (2011). Scaling of anode sheath voltage fall with the operational parameters in applied-field MPD thrusters. In *32nd International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-2011-222, Wiesbaden, Germany.
- Li, S. (2005). An HLLC Riemann solver for magneto-hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 203(1):344 - 357.
- Lien, F. S. e Leschziner, M. A. (1994). Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 19(6):527-548.
- Linde, T. (2002). A practical, general-purpose, two-state HLL Riemann solver for hyperbolic conservation laws. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40(3-4):391-402.
- Liou, M. e Edwards, J. (1999). Numerical speed of sound and its applications to schemes for all speeds. Technical Report 1999-209286, NASA.
- Liou, M. S. (1996). A sequel to AUSM: AUSM(+). *Journal of Computational Physics*, 129(2):364-382.
- Liou, M. S. (2006). A sequel to AUSM, part li: AUSM(+)-up for all speeds. *Journal of Computational Physics*, 214(1):137-170.
- Liou, M. S. e Steffen, C. J. (1993). A new flux splitting scheme. *Journal of Computational Physics*, 107(1):23-39.

- Mahendhran, M. e Kumar, A. (2011). Numerical study on the effect of electrode geometry in MPD thrusters. In *32nd International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-2011-228, Wiesbaden, Germany.
- Merkle, C. e Athavale, M. (1987). Time-accurate unsteady incompressible flow algorithm based on artificial compressibility. AIAA Paper-87-1137.
- Mignone, A. (2007). A simple and accurate Riemann solver for isothermal MHD. *Journal of Computational Physics*, 225(2):1427 - 1441.
- Mignone, A. e Bodo, G. (2008). *Jets from young stars III, Shock-Capturing Schemes in Computational MHD*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Mignone, A., Bodo, G., Massaglia, S., Matsakos, T., Tesileanu, O., Zanni, C., e Ferrari, A. (2007). Pluto: A numerical code for computational astrophysics. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(1):228.
- Mikellides, P. G., England, B., e Gilland, J. H. (2009). Energy deposition via magnetoplasmadynamic acceleration: II. modeling and performance predictions. *Plasma Sources Science and Technology*, 18(1):015002.
- Mikellides, P. G., Turchi, P. J., e Roderick, N. F. (2000). Applied-field magnetoplasmadynamic thrusters, part 1: Numerical simulations using the MACH2 code. *Journal of Propulsion and Power*, 16-5:887-893.
- Miller, S. A. (1990). Viscous and diffusive effects in magnetoplasmadynamic flows. Tese de Mestrado, Massachusetts Institute of Technology.
- Miyoshi, T. e Kusano, K. (2005). A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 208(1):315 - 344.
- Molokov, S., Moreau, R., Moffatt, K., e Roberts, P. (2007). How MHD transformed the theory of geomagnetism. In *Magnetohydrodynamics*, volume 80 of *Fluid Mechanics and Its Applications*, pages 3-26. Springer Netherlands.
- Moukalled, F. e Darwish, M. (2000). A unified formulation of the segregated class of algorithms for fluid flow at all speeds. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 37(1):103-139.
- Moukalled, F. e Darwish, M. (2001). A high-resolution pressure-based algorithm for fluid flow at all speeds. *Journal of Computational Physics*, 168(1):101 - 133.
- Moukalled, F. e Darwish, M. (2004a). Pressure-based algorithms for multifluid flow at all speeds, part I: Mass conservation formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 45(6):495-522.
- Moukalled, F. e Darwish, M. (2004b). Pressure-based algorithms for multifluid flow at all speeds, part II: Geometric conservation formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 45(6):523-540.
- Moukalled, F., Darwish, M., e Sekar, B. (2003). A pressure-based algorithm for multi-phase flow at all speeds. *Journal of Computational Physics*, 190(2):550 - 571.
- Murawski, K. e Tanaka, T. (1997). Modern numerical schemes for solving magnetohydrodynamic equations. *Astrophysics and Space Science*, 254(2):187-210.

- Myers, R. M., Manteniaks, M. A., e Lapointe, M. R. (1991). MPD thruster technology. Technical Report NASA-TM-105242, NASA Glenn Research Center.
- Nakata, D., Toki, K., Funaki, I., Shimizu, Y., Kuninaka, H., e Arakawa, Y. (2005). Experimental verification for the nozzle shape optimization of the self-field MPD thruster. In *29th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-05-163.
- Nerinckx, K., Vierendeels, J., e Dick, E. (2005). Mach-uniformity through the coupled pressure and temperature correction algorithm. *Journal of Computational Physics*, 206(2):597 - 623.
- Nerinckx, K., Vierendeels, J., e Dick, E. (2006). A mach-uniform pressure-correction algorithm with AUSM(+) flux definitions. *International Journal of Numerical Methods For Heat & Fluid Flow*, 16(6):718-739.
- Nerinckx, K., Vierendeels, J., e Dick, E. (2007). A mach-uniform algorithm: Coupled versus segregated approach. *Journal of Computational Physics*, 224(1):314 - 331.
- Ng, K. C., Yusoff, M. Z., e Ng, E. Y. K. (2007). Higher-order bounded differencing schemes for compressible and incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(1):57-80.
- Ni, M.-J., Munipalli, R., Huang, P., Morley, N. B., e Abdou, M. A. (2007a). A current density conservative scheme for incompressible MHD flows at a low magnetic Reynolds number. part II: On an arbitrary collocated mesh. *Journal of Computational Physics*, 227(1):205 - 228.
- Ni, M.-J., Munipalli, R., Morley, N. B., Huang, P., e Abdou, M. A. (2007b). A current density conservative scheme for incompressible MHD flows at a low magnetic Reynolds number. part I: On a rectangular collocated grid system. *J. Comput. Phys.*, 227(1):174-204.
- Niewood, E. (1989). Transient one dimensional numerical simulation of magnetoplasdynamic thrusters. Tese de Mestrado, Massachusetts Institute of Technology.
- Niewood, E. e Martinez-Sanchez, M. (1992). Quasi one dimensional numerical simulation of magnetoplasdynamic thrusters. *Journal of Propulsion and Power*, 8(5):1031-1039.
- Niewood, E. H. (1993). *An Explanation for Anode Voltage Drops in an MPD Thruster*. Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology.
- Norgaard, P. e Choueiri, E. (2005). Implementation of externally-applied magnetic fields to a non-ideal MHD solver for MPD thruster simulation. In *29th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-2005-006, Princeton University.
- Oliveira, P. J. (1992). *Computer Modeling of Multidimensional Multiphase Flow and Application to T-Junctions*. Tese de Doutorado, Imperial College of Science, Technology and Medicine.
- Oliveira, P. J. (2001). *Mecânica Computacional*. Departamento de Eng. Electromecânica, Universidade da Beira Interior.
- Oliveira, P. J. e Issa, R. I. (2001). An improved PISO algorithm for the computation of buoyancy-driven flows. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology*, 40(6):473-493.
- Parma, B. J. (2011). Three-dimensional modeling and analysis of magnetoplasdynamic acceleration. Tese de Mestrado, Arizona State University.

- Patankar, S. e Spalding, D. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10):1787 - 1806.
- Patankar, S. V. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis.
- Pen, U.-L., Arras, P., e Wong, S. (2003). A free, fast, simple, and efficient total variation diminishing magnetohydrodynamic code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 149(2):447.
- Planas, R., Badia, S., e Codina, R. (2011). Approximation of the inductionless MHD problem using a stabilized finite element method. *Journal of Computational Physics*, 230(8):2977 - 2996.
- Powell, K. G. (1994). A Riemann solver for ideal MHD that works in more than one dimension. Technical Report ICASE Report 94-24, NASA.
- Powell, K. G., Roe, P. L., Linde, T. J., Gombosi, T. I., e Zeeuw, D. L. D. (1999). A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 154(2):284-309.
- Price, D. J. e Monaghan, J. J. (2005). Smoothed particle magnetohydrodynamics - III. multi-dimensional tests and the $\text{div } \mathbf{b}=0$ constraint. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364(2):384-406.
- Páscoa, J. (2007). *Desenvolvimento de metodologias 3D para análise e projecto inverso de cascatas de pás de turbomáquinas em escoamento compressível*. Tese de Doutoramento, Universidade da Beira Interior.
- Ramshaw, J. D. (1983). A method for enforcing the solenoidal condition on magnetic field in numerical calculations. *Journal of Computational Physics*, 52(3):592 - 596.
- Rhie, C. e Chow, W. (1983). Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21(11):1525-1532.
- Rincón, J. e Elder, R. (1997). A high-resolution pressure-based method for compressible flows. *Computers & Fluids*, 26(3):217 - 231.
- Roe, P. L. (1986). Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18(1):337-365.
- Ryu, D., Jones, T., e Frank, A. (1995). Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics: Algorithm and tests for multidimensional flow. *Astrophysical Journal*, 452:785-797.
- Ryu, D. e Jones, T. W. (1995). Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics: Algorithm and tests for one-dimensional flow. *Astronomy and Astrophysics*, 442:228-258.
- Ryu, D., Miniati, F., Jones, T. W., e Frank, A. (1998). A divergence-free upwind code for multidimensional magnetohydrodynamic flows. *The Astrophysical Journal*, 509:244-255.
- Sankaran, K. (2001). Simulation of MPD flows using a flux-limited numerical method for the MHD equations. Tese de Mestrado, Princeton University.
- Sankaran, K. (2005). *Simulation of Plasma Flows in Self-Field Lorentz Force Accelerators*. Tese de Doutoramento, Princeton University.

- Sankaran, K., Choueiri, E. Y., e Jardin, S. C. (2005). Comparison of simulated magnetoplasmadynamic thruster flowfields to experimental measurements. *Journal of Propulsion and Power*, 21(1):129-138.
- Sankaran, K., Martinelli, L., Jardin, S. C., e Choueiri, E. Y. (2002). A flux-limited numerical method for solving the MHD equations to simulate propulsive plasma flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(6):1415-1432.
- Santos, J. C., Cruz, P., Alves, M. A., Oliveira, P. J., Magalhães, F. D., e Mendes, A. (2004). Adaptive multiresolution approach for two-dimensional PDEs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(3-5):405 - 425.
- Sato, H., Kubota, K., e Funaki, I. (2011). Modeling and numerical simulation of a two-dimensional MPD thruster using hydrogen propellant. In *32nd International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-11-258, Wiesbaden, Germany.
- Shen, Y., Zha, G., e Huerta, M. A. (2012). E-CUSP scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics with high order WENO scheme. *Journal of Computational Physics*, 231(19):6233 - 6247.
- Shercliff, J. A. (1953). Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 49(1):136-144.
- Shu, C.-W. (1998). Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In Quarteroni, A., editor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, volume 1697 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 325-432. Springer Berlin Heidelberg.
- Sleziona, P., Auweter-Kurtz, M., e Schrade, H. (1988). Numerical codes for cylindrical MPD thrusters. In *Proc. 20th International Electric Propulsion Physics Conference*, nr. IEPS-88-043, Garmisch-Partenkirchen.
- Sleziona, P. C., Auweter-Kurtz, M., e Schrade, H. O. (1992). Computation of MPD flows and comparison with experimental results. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34(3):759-771.
- Sleziona, P. C., Auweter-Kurtz, M., e Schrade, H. O. (1993). Numerical calculation of a cylindrical MPD thruster. In *Proceedings 23 International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-93-066, Seattle.
- Sparks, W. M. e Fischel, D. (1971). *Partition Functions and Equations of State in Plasmas*. NASA, Goddard Space Flight Center.
- Sterck, H. D. (2000). *Numerical simulation and analysis of magnetically dominated MHD bow shock flows with applications in space physics*. Tese de Doutorado, Katholieke Universiteit Leuven.
- Sterck, H. D. (2001). Multi-dimensional upwind constrained transport on unstructured grids for shallow water magnetohydrodynamics. In *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*.
- Sterck, H. D., Low, B. C., e Poedts, S. (1998). Complex magnetohydrodynamic bow shock topology in field-aligned low-beta flow around a perfectly conducting cylinder. *Physics of Plasmas*, 5(11):4015-4027.

- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., e Simon, J. B. (2008). Athena: A new code for astrophysical MHD. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 178(1):137.
- Stone, J. M. e Norman, M. L. (1992). ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. II. the magnetohydrodynamic algorithms and tests. *Astrophysical Journal Supplement*, 80:791-818.
- Sweby, P. K. (1984). High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(5):995-1011.
- Takeda, H. e Yamamoto, S. (2002). Numerical investigation of supersonic MPD viscous flows with ionization. *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, 45(1):97-101.
- Tanaka, T. (1994). Finite volume TVD scheme on an unstructured grid system including strong background potential fields. *Journal of Computational Physics*, 111:381-389.
- Tikhonov, R., Semenikhin, S., Brophy, J., e Polk, J. (1997). Performance of 130 kW MPD thruster with an external applied field and lithium as propellant. In *25th International Electric Propulsion Conference*, nr. IEPC-97-120.
- Toki, K., Sumida, M., e Kuriki, K. (1992). Multichannel two-dimensional magnetoplasmadynamic arcjet. *Journal of Propulsion and Power*, 8:93-97.
- Toro, E. F., Spruce, M., e Speares, W. (1994). Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4:25-34. 10.1007/BF01414629.
- Touma, R. e Arminjon, P. (2006). Central finite volume schemes with constrained transport divergence treatment for three-dimensional ideal MHD. *Journal of Computational Physics*, 212(2):617 - 636.
- Tóth, G. (2000). The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. *Journal of Computational Physics*, 161:605-652.
- Tóth, G. e Odstrčil, D. (1996). Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems. *Journal of Computational Physics*, 128(1):82 - 100.
- Turkel, E. (1987). Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of Computational Physics*, 72(2):277-298.
- Udrea, B. (1999). *An advanced implicit solver for MHD*. Tese de Doutorado, University of Washington.
- van der Heul, D. R., Vuik, C., e Wesseling, P. (2002). A conservative pressure-correction method for the Euler and ideal MHD equations at all speeds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40(3-4):521-529.
- van der Heul, D. R., Vuik, C., e Wesseling, P. (2003). A conservative pressure-correction method for flow at all speeds. *Computers & Fluids*, 32(8):1113 - 1132.
- Van Doormaal, J. P. e Raithby, G. D. (1984). Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7(2):147-163.

- van Leer, B., Lee, W.-T., e Roe, P. L. (1991). Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations. In *10th Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 260-282.
- Wada, Y. e Liou, M. (1997). An accurate and robust flux splitting scheme for shock and contact discontinuities. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(3):633-657.
- Xisto, C. M., Páscoa, J. C., e Oliveira, P. J. (2012a). Preliminary assessment of a new algorithm for the MHD equations at all Mach number regimes. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2012*, nr. 3212.
- Xisto, C. M., Páscoa, J. C., e Oliveira, P. J. (2013). A pressure-based method with AUSM-type fluxes for MHD flows at arbitrary Mach numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72:11:1165-1182.
- Xisto, C. M., Páscoa, J. C., Oliveira, P. J., e Nicolini, D. (2010). Implementation of a 3D compressible MHD solver able to model transonic flows. In *Proc. ECCOMAS CFD 2010 - V European Conference on Computational Fluid Dynamics*.
- Xisto, C. M., Páscoa, J. C., Oliveira, P. J., e Nicolini, D. A. (2012b). A hybrid pressure density-based algorithm for the Euler equations at all Mach number regimes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70:8:961-976.
- Zachary, A. L., Malagoli, A., e Colella, P. (1994). A higher-order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(2):263-284.
- Zhao, X., Richards, P., Zhang, S., e Liu, J. (2005). High-resolution schemes for bubbling flow computations. *Applied Mathematical Modelling*, 29(12):1232 - 1251.
- Ziegler, U. (2004). A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 196(2):393-416.

Apêndice A

Identidades vetoriais

$$\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{b} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{b}) \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \times (\Phi \mathbf{a}) = \nabla \Phi \times \mathbf{a} + \Phi \nabla \times \mathbf{a} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0 \quad (\text{A.6})$$