



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
Engenharia

**Uso de funções multiquádricas para representação  
multivariável dos coeficientes aerodinâmicos de  
perfis alares  
(Versão final após defesa)**

**Filipe Caetano Ribeiro**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Aeronáutica**  
(Ciclo de estudos integrado)

Orientador: Prof. Doutor Pedro Vieira Gamboa

Covilhã, novembro de 2019



# Agradecimentos

Quero começar por agradecer aos meus pais por todo o apoio que me deram ao longo dos anos. Por todo o esforço que aplicaram na minha formação e educação, este trabalho é dedicado a eles.

Um agradecimento especial ao Professor Pedro V. Gamboa, por toda a ajuda que me deu para realizar este trabalho, pelos conselhos, pelas palavras de motivação, pela paciência e pela atitude prestável, atenciosa e simpática como sempre me tratou. Agradeço também a todos os professores que contribuíram para a minha formação e que me deram bases para chegar até aqui.

Por fim, quero agradecer aos meus familiares e amigos por todos os momentos que passámos ao longo destes anos. Por terem sido o meu principal meio para relaxar, por todos os momentos de diversão que tivemos, por todas as palavras de motivação e por todos os conselhos, agradeço a cada um de vocês por serem quem são e por terem também contribuído para o meu crescimento enquanto pessoa e estudante. Um agradecimento especial à minha namorada Daniela Ribeiro por todo o apoio ao longo destes anos, por ter sido o meu principal alicerce, por todas as palavras de força e motivação, e por ter estado sempre presente em todos os momentos desta longa caminhada.



# Resumo

Dado um vetor (ou matriz) de valores de uma determinada função de uma ou mais variáveis, é por vezes desejável achar o valor da função entre dois quaisquer pontos conhecidos. A interpolação multivariável e a aproximação através de funções de base radial são métodos que visam aproximar um determinado conjunto de dados amostrais através de uma função contínua ao longo de todo o domínio, e com crescente taxa de utilização em variadas aplicações nas áreas da ciência e engenharia.

O foco principal do trabalho incide nos principais fatores que afetam a precisão e desempenho das funções multiquádricas, tais como a localização e quantidade de centros, e a escolha do fator de forma, aplicado à obtenção dos coeficientes aerodinâmicos de um dado perfil alar. O objetivo passa por comparar três diferentes abordagens: aproximação através de funções multiquádricas, interpolação multivariável e análise direta recorrendo ao programa xFoil, no que toca ao seu desempenho e eficiência, de modo a concluir os prós e contras de cada uma das abordagens no que diz respeito à capacidade de aproximação dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares. Comparam-se as três abordagens no que toca à sua precisão ao longo de um determinado domínio, e o tempo necessário para gerar soluções pertencentes a esse mesmo domínio (soluções estas associadas aos valores dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares).

Os métodos implementados de colocação dos centros e de cálculo do fator de forma foram validados e permitiram obter resultados satisfatórios de modo a gerar funções de aproximação multiquádrica, da forma mais automatizada possível. Estes permitiram aproximar os coeficientes aerodinâmicos de perfis alares como função do número de Reynolds, ângulo de ataque, corda do flap e deflexão do flap, tendo-se obtido precisões semelhantes quando comparando com o método de interpolação multivariável. No que toca ao tempo de processamento associado às funções multiquádricas, é necessário estabelecer um compromisso entre ter maior precisão e maior tempo de processamento (associado a uma maior quantidade de centros para gerar a função), ou menor precisão com um tempo de processamento inferior (associado a uma menor quantidade de centros). A escolha da quantidade de centros vai permitir aferir qual das abordagens apresenta maior rapidez de cálculo.

## Palavras-chave

Funções multiquádricas; Interpolação multivariável; Desempenho numérico; Perfil alar; Coeficientes aerodinâmicos



# Abstract

Given an array (or matrix) of values for a function of one or more variables, it is often desired to find a value between two given points. Multivariate interpolation and approximation by radial basis functions are nearly new subjects in approximation theory that have a lot of applications in many Science and Engineering fields. During the last decades, radial basis functions (RBFs) have found increasingly widespread use for functional approximation of scattered data. This research work aims at benchmarking three different approaches: an approximation by radial basis functions, a multivariate interpolation and a direct analysis using the xFoil program, in terms of their effectiveness and efficiency in order to conclude about the pros and cons of each method in approximating the aerodynamic coefficients of airfoils.

The main focus of this work will be to study the main factors that affect the accuracy of the multiquadric functions, including the location and quantity of central points and the choice of the form factor, in order to obtain the aerodynamic coefficients of airfoils. We will also compare both approaches regarding their precision throughout the selected domain and the time required to accomplish a several amount of solutions (associated with the aerodynamic coefficients).

The implemented methods of central point's placement and form factor calculation have been validated and have yielded satisfactory results in order to generate multiquadric approximation functions, as automatically as possible. These allowed the approximation of the aerodynamic coefficients of airfoils, as a function of Reynolds number, angle of attack, flap chord and flap deflection, obtaining similar precision when compared with the multivariable linear interpolation method. With regard to the processing time associated with multiquadric functions, a compromise needs to be struck between higher precision and longer processing time (associated with more centers to generate the function), or lower precision with shorter processing time ( associated with fewer centers). The choice of the number of central points, when stipulated by the user, will allow to determine which of the three approaches presents faster calculations.

## Keywords

Multiquadric functions; Multivariate linear interpolation; Numerical performance; Multidisciplinary Design Optimization; Morphing aircraft; Surrogate models; Aerodynamic coefficients



# Índice

Introdução .....	1
1.1 Estado da arte .....	1
1.2 Contextualização do problema .....	5
1.3 Motivação e objetivos.....	5
1.4 Estrutura do trabalho .....	6
Metodologia .....	7
2.1 Funções de base radial .....	7
2.1.1 Matriz invertível .....	9
2.1.2 Número de condicionamento .....	10
2.2 Interpolação multivariável .....	12
2.3 Erros e incertezas .....	15
2.4 Tempo de processamento .....	16
Funções multiquádricas.....	19
3.1 Conceitos teóricos.....	19
3.2 Colocação dos centros .....	23
3.3 Fator de forma .....	27
3.3.1 Métodos de cálculo direto.....	27
3.3.1.1 Método de Hardy .....	27
3.3.1.2 Método de Franke .....	28
3.3.1.3 Método de Fasshauer .....	29
3.3.2 Método do alcance .....	29
3.3.3 Método de otimização usando o FFSQP 3.7 .....	30
3.4 Normalização dos dados .....	31
Validação do método .....	33
4.1 Função axi-simétrica.....	33

4.1.1	Influência da localização dos centros .....	34
4.1.2	Influência da quantidade de centros .....	37
4.1.3	Aplicação da metodologia de Hardy .....	40
4.1.4	Obtenção do fator de forma .....	42
4.1.4.1	Cálculo direto .....	42
4.1.4.2	Método do alcance .....	44
4.1.4.3	Método de otimização usando o FFSQP .....	45
4.2	Função não axi-simétrica .....	48
4.2.1	Influência da localização dos centros .....	48
4.2.2	Influência da quantidade de centros .....	50
4.2.3	Solução alternativa: sem normalização do problema .....	51
4.2.4	Obtenção do fator de forma .....	52
4.2.4.1	Cálculo direto .....	52
4.2.4.2	Método do alcance .....	53
4.2.4.3	Método de otimização usando o FFSQP .....	54
4.3	Função com quatro variáveis independentes .....	57
4.3.1	Influência da quantidade de centros .....	58
4.3.2	Obtenção do fator de forma: método de otimização usando o FFSQP .....	60
	Representação dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares .....	63
5.1	Análise bidimensional .....	63
5.1.1	Identificação dos perfis alares e domínio aplicado no estudo .....	63
5.1.2	Influência da quantidade de centros .....	65
5.1.3	Obtenção do fator de forma .....	66
5.1.3.1	Cálculo direto .....	66
5.1.3.2	Método do alcance .....	67
5.1.3.3	Método de otimização usando o FFSQP .....	69
5.1.4	Qualidade da aproximação .....	73

5.1.4.1	Interpolação multivariável .....	74
5.1.4.2	Funções multiquádricas .....	75
5.1.4.3	Interpolação multivariável versus funções multiquádricas .....	78
5.1.4.4	Influência dos pontos amostrais geradores das funções .....	80
5.1.5	Comparação do tempo de processamento .....	82
5.2	Análise com quatro variáveis independentes .....	86
5.2.1	Identificação dos perfis alares e domínio aplicado no estudo .....	86
5.2.2	Influência da quantidade de centros e fator de forma.....	86
5.2.3	Obtenção do fator de forma: método de otimização usando o FFSQP .....	87
5.2.4	Comparação do tempo de processamento .....	88
	Conclusão.....	91
6.1	Breve resumo.....	91
6.2	Resultados importantes.....	91
6.3	Conclusão e trabalho futuro .....	93
	Referências.....	95
	Anexos .....	99
	Anexo A: Representação geométrica dos perfis alares .....	99
	Anexo B: Método do alcance (análise bidimensional) .....	101
	Anexo C: Método de otimização usando o FFSQP (análise bidimensional).....	107
	Anexo D: Método otimização usando o FFSQP (análise bidimensional) .....	109
	Anexo E: Método de otimização usando o FFSQP (4V).....	113



# Lista de figuras

Figura 1: Aplicação de interpolação linear usando um par de pontos .....	12
Figura 2: Aplicação de interpolação bilinear usando dois pares de pontos .....	13
Figura 3: Superfície quádrlica .....	20
Figura 4: Exemplo de colocação dos centros $C(5,4)$ .....	26
Figura 5: Distâncias associadas ao centro.....	28
Figura 6: Exemplo de aplicação da normalização dos centros .....	32
Figura 7: $f_1$ - Conjunto de dados amostrais .....	33
Figura 8: $f_1$ - Centro $(0; 0)$ - Representação da função e erro absoluto associado .....	34
Figura 9: $f_1$ - Centro $(0; 0,5)$ - Representação da função e erro absoluto associado .....	35
Figura 10: $f_1$ - REL.P versus fator de forma .....	35
Figura 11: $f_1$ - Centros $(0, -1)$ e $(0,1)$ - Representação da função e erro absoluto .....	36
Figura 12: $f_1$ - $C(5,3)$ - REL.P versus fator de forma.....	37
Figura 13: $f_1$ - REL.P versus combinação de centros $C(x, y)$ .....	38
Figura 14: $f_1$ - Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros $C(x, y)$ .....	38
Figura 15: $f_1$ - $C(11,21)$ - REL.P versus fator de forma.....	40
Figura 16: $f_1$ - Centro $(0,0)$ - REL.P versus fator de forma (Hardy).....	40
Figura 17: $f_1$ - $C(5,3)$ - REL.P versus fator de forma (Hardy) .....	41
Figura 18: $f_1$ - REL.P versus combinação de centros $C(x, y)$ (Hardy) .....	41
Figura 19: $f_1$ - Métodos de cálculo direto: REL.P versus combinação de centros $C(x, y)$ .....	43
Figura 20: $f_1$ - Método de otimização usando o FFSQP: REL.P versus fator de forma .....	47
Figura 21: $f_2$ - Conjunto de dados amostrais.....	48
Figura 22: $f_2$ - Centro $(0,0)$ - Representação da função e erro absoluto associado .....	49
Figura 23: $f_2$ - Centro $(0,0)$ - REL.P versus fator de forma .....	49
Figura 24: $f_2$ - REL.P versus combinação de centros $C(x, y)$ .....	50
Figura 25: $f_2$ - Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros $C(x, y)$ .....	51

Figura 26: $f_2$ - Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros $C(x, y)$ .....	51
Figura 27: $f_2$ - $C(5,5)$ - REL.P versus fator de forma .....	52
Figura 28: $f_2$ - Métodos de cálculo direto: REL.P versus combinação de centros $C(x, y)$ .....	53
Figura 29: $f_2$ - Método de otimização usando o FFSQP: REL.P versus fator de forma .....	56
Figura 30: Representação da função $f_3(x, y, z, t)$ com duas variáveis fixas.....	58
Figura 31: $f_3$ - REL.P versus combinação de centros $C(x, y, z, t)$ .....	59
Figura 32: $f_3$ - Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros $C(x, y, 3,3)$	59
Figura 33: $f_3$ - Método de otimização usando o FFSQP: REL.P versus fator de forma .....	62
Figura 34: Representação dos coeficientes aerodinâmicos do perfil alar IV.....	64
Figura 35: REL.P versus combinação de centros $C(Re, \alpha)$ .....	65
Figura 36: Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros $C(Re, \alpha)$ .....	66
Figura 37: Métodos de cálculo direto: REL.P versus combinação de centros $C(Re, \alpha)$ .....	67
Figura 38: $C(5,5)$ - REL.P versus fator de forma .....	72
Figura 39: $C(4,15)$ - REL.P versus fator de forma .....	72
Figura 40: Representação do conjunto de pontos conhecidos .....	74
Figura 41: Interpolação multivariável: evolução do erro absoluto (em módulo).....	75
Figura 42: Coeficiente de sustentação - REL.P.A versus combinação de centros $C(Re, \alpha)$ .....	76
Figura 43: Coeficiente de arrasto - REL.P.A versus combinação de centros $C(Re, \alpha)$ .....	76
Figura 44: Coeficiente de momento - REL.P.A versus combinação de centros $C(Re, \alpha)$ .....	76
Figura 45: $C(5,25)$ - Erro absoluto (em módulo) ao longo do domínio.....	78
Figura 46: CL: ABS (Função multiquádrica) – ABS (Interpolação multivariável) .....	79
Figura 47: CD: ABS (Função multiquádrica) – ABS (Interpolação multivariável) .....	79
Figura 48: CM: ABS (Função multiquádrica) – ABS (Interpolação multivariável) .....	79
Figura 49: Tempo de processamento versus número de cálculos efetuados (1) .....	83
Figura 50: Tempo de processamento versus número de cálculos efetuados (2) .....	85
Figura 51: REL.P versus combinação de centros $C(Re, \alpha, 5,5)$ .....	87
Figura 52: Tempo de processamento versus número de cálculos efetuados (1) .....	88

Figura 53: Tempo de processamento versus número de cálculos efetuados (2).....	90
Figura A-1: UBI_03_016 .....	99
Figura A-2: NACA 0010 HSTAB .....	99
Figura A-3: NACA 0009 .....	99
Figura A-4: DAE-21 .....	99
Figura A-5: Wortmann FX 63-137.....	100
Figura A-6: Selig 1223.....	100
Figura A-7: SG 6043 .....	100
Figura C-1: $C(5,5)$ - REL.P versus fator de forma .....	107
Figura C-2: $C(4,15)$ - REL.P versus fator de forma.....	107
Figura C-3: $C(5,15)$ - REL.P versus fator de forma.....	107
Figura C-4: $C(5,30)$ - REL.P versus fator de forma.....	108
Figura C-5: $C(5,45)$ - REL.P versus fator de forma.....	108
Figura C-6: $C(5,50)$ - REL.P versus fator de forma.....	108
Figura D-1: Perfil alar II - REL.P versus fator de forma .....	111
Figura D-2: Perfil alar IV - REL.P versus fator de forma .....	111
Figura D-3: Perfil alar VI - REL.P versus fator de forma .....	112
Figura D-4: Perfil alar VII - REL.P versus fator de forma.....	112
Figura E-1: Perfil alar I - REL.P versus fator de forma .....	113



# Lista de tabelas

Tabela 1: Parâmetros aplicados no método de otimização usando o FFSQP .....	31
Tabela 2: $f_1$ - Cálculo dos erros e incertezas associados às funções multiquádricas .....	36
Tabela 3: $f_1$ - Resultados derivados do método do alcance (1) .....	44
Tabela 4: $f_1$ - Resultados derivados do método do alcance (2) .....	45
Tabela 5: $f_1$ - Resultados derivados do método com FFSQP e cálculo direto .....	46
Tabela 6: $f_2$ - Resultados derivados do método do alcance (1) .....	54
Tabela 7: $f_2$ - Resultados derivados do método do alcance (2) .....	54
Tabela 8: $f_2$ - Resultados derivados do método com FFSQP e cálculo direto .....	55
Tabela 9: $f_3$ - Resultados derivados do método com FFSQP e cálculo direto .....	61
Tabela 10: Resultados derivados do método do alcance.....	68
Tabela 11 : Resultados derivados do método com FFSQP $C (Re, \alpha)$ .....	70
Tabela 12: Coeficiente de sustentação: alteração dos dados de entrada .....	81
Tabela 13: Coeficiente de arrasto: alteração dos dados de entrada.....	81
Tabela 14: Coeficiente de momento: alteração dos dados de entrada .....	81
Tabela 15: Resultados obtidos para as funções de aproximação .....	84
Tabela 16: Resultados derivados do método com FFSQP $C (Re, \alpha, cFlap, dFlap)$ .....	87
Tabela 17: Resultados obtidos para as funções de aproximação de quatro variáveis .....	89
Tabela B-1: Aplicação do método do alcance (1).....	101
Tabela B-2: Aplicação do método do alcance (2).....	102
Tabela B-3: Aplicação do método do alcance (3).....	103
Tabela B-4: Aplicação do método do alcance (4).....	104
Tabela B-5: Aplicação do método do alcance (5).....	105
Tabela B-6: Aplicação do método do alcance (6).....	106
Tabela D-1: $C (5,5)$ Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (1) .....	109
Tabela D-2: $C (4,15)$ Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (2).....	109

Tabela D-3: $C(5,15)$ Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (3) .....	109
Tabela D-4: $C(5,30)$ Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (4) .....	110
Tabela D-5: $C(5,45)$ Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (5) .....	110
Tabela D-6: $C(5,50)$ Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (6) .....	110

# Lista de acrónimos

FBR - Funções de base radial

MQ - Funções multiquádricas

MDO - *Multidisciplinary Design Optimization*

$cond(A)$  - Número de condicionamento da matriz A

RMS - *Root mean square error*

ABS - Erro absoluto médio

REL.E - Erro relativo médio

REL.P - Erro relativo médio percentual

REL.P.A - Erro relativo médio percentual aumentado

DP - Desvio padrão

ABS.MAX - Máximo erro absoluto

$R^2$  - Coeficiente de determinação

TR - Tempo de recolha dos dados

TL - Tempo de leitura dos dados

TG - Tempo de geração da função

TC - Tempo de cálculo

TT - Tempo de processamento

FFSQP - *FORTRAN Feasible Sequential Quadratic Programming*

$Re$  - Número de Reynolds

$cFlap$  - Percentagem de corda do flap

$dFlap$  - Deflexão do flap

$C_L$  - Coeficiente de sustentação

$C_D$  - Coeficiente de arrasto

$C_M$  - Coeficiente de momento



# Lista de símbolos

$x$  - Ponto genérico pertencente ao eixo  $x$

$x_j$  - Centro genérico pertencente ao eixo  $x$

$n$  - Número de centros aplicados à função multiquádrica

$m$  - Número de pontos amostrais conhecidos para definir a função de aproximação

$c_j$  - Vetor dos coeficientes desconhecidos das FBR

$M$  - Matriz de interpolação

$I_n$  - Matriz identidade ( $n \times n$ )

$p$  - Dimensão espacial do problema

$\tilde{f}(x)$  - Função de aproximação

$f(x)$  - Função real

$\bar{f}(x)$  - Média dos dados amostrais pertencentes à função real

$d_{c1}$  - Distância média entre os centros vizinhos para o centro genérico  $C_1$

$d$  - Distância média entre todos os centros vizinhos

$D$  - Diâmetro do menor círculo possível que contenha todos os pontos conhecidos

$N$  - Número de cálculos efetuados sucessivamente de modo a obter o valor dos três coeficientes aerodinâmicos em estudo

$\gamma$  - Função de base radial

$\sigma$  - Fator de forma

$\delta_x$  - Perturbação no valor de  $x$

$\alpha$  - Ângulo de ataque



# Capítulo 1

## Introdução

Para uma qualquer função de aproximação é desejável conseguir obter não só um baixo erro de interpolação, mas também uma solução realista entre dois quaisquer pontos discretos. É neste contexto que se introduzem as funções de base radial, cujo interesse tem vindo em crescendo nos últimos anos devido à sua capacidade de aproximação de dados amostrais. Este trabalho compara três diferentes métodos: aproximação através de funções multiquádricas, interpolação multivariável, e análise direta recorrendo ao programa xFoil, no que toca à sua capacidade de precisão e tempo de processamento de modo a representar os coeficientes aerodinâmicos de perfis alares. Ao longo do trabalho serão realizados diversos testes de modo a aferir os prós e contras de cada uma destas abordagens, estando o foco principal concentrado nas funções multiquádricas.

### 1.1 Estado da arte

O método em estudo de funções multiquádricas foi introduzido pela primeira vez em 1968 por Hardy. A inspiração para o seu trabalho surgiu das limitações das séries polinomiais e trigonométricas para representar superfícies topográficas a partir de um conjunto relativamente pequeno de pontos, que segundo o autor devem permitir uma boa precisão e simultaneamente uma evolução suave e realista da função entre dois quaisquer pontos conhecidos, critérios que não são satisfeitos simultaneamente pelos métodos anteriores. Este novo método analítico pretende representar superfícies irregulares, através da soma de equações de superfícies quádricas com coeficientes desconhecidos à priori, e que necessitam de ser calculados de forma a criar a função desejada. As superfícies quádricas têm origem em certos pontos de interesse no interior do domínio da função, os quais se chamam centros ou pontos centrais, que são radialmente simétricos em relação a esse mesmo ponto [1].

Já em 1982, Franke [2] voltou a dar um importante passo na evolução do método ao comparar as funções multiquádricas com outros métodos relevantes, mas agora de um ponto de vista totalmente matemático, e não com aplicação numa determinada área da ciência, pelo que utilizou uma série de modelos matemáticos como forma de teste. Ao comparar 29 algoritmos de interpolação distintos para um conjunto de 6 funções diferentes, concluiu que as funções multiquádricas apresentam inúmeras vantagens relativamente aos restantes métodos, no que toca à precisão e evolução da superfície entre dois quaisquer pontos conhecidos, obtendo-se uma superfície mais suave e visualmente mais apelativa. Este desempenho superior evidenciado pelas funções multiquádricas estimulou o interesse de muitos investigadores nestas e noutras funções de base radial (de acrónimo FBR). Micchelli investigou também os

coeficientes das matrizes das FBR, com diferentes quantidades de centros, e provou que estas mesmas matrizes são invertíveis e positivamente definidas [3].

Nos últimos anos, muitas foram as áreas da ciência que se interessaram neste método, tais como geofísica, topografia, hidrologia, aeronáutica, geodesia, entre outros, com o objetivo de reconstruir uma superfície de uma qualquer dimensão, tendo como origem um certo conjunto de dados discretos [4]. De um modo geral, o interesse pelos métodos sem malha tem vindo a crescer devido essencialmente à redução do tempo despendido na preparação e análise dos resultados. Uma outra aplicação de grande interesse com base nas FBR foi desenvolvida por Kansa e Sarra, já depois de 1990, de forma a obter soluções aproximadas para sistemas de equações diferenciais [5,6,7]. No entanto, neste trabalho, tem-se interesse na criação de uma solução aproximada de um conjunto discreto de dados sob a forma de funções multiquádricas.

Para obter uma boa aproximação de um qualquer conjunto de dados discretos, existem essencialmente dois fatores que afetam bastante a precisão do método, são eles: a localização e quantidade de centros, e a escolha de um parâmetro intitulado de fator de forma. Os coeficientes da função estão intrinsecamente associados aos centros escolhidos no interior do domínio, sendo que cada centro existente irá dar origem a mais um coeficiente que aparecerá na função multiquádrica, pelo que é expectável que quanto maior o número de centros, maior a precisão da aproximação. No que toca à sua localização no interior do domínio, segundo Hardy, a melhor alternativa é uma colocação dos centros apenas em pontos de dados existentes, uma vez que estes pontos são a origem, ou vértice, da superfície quádrlica, uma zona cuja inclinação está também dependente do valor do fator de forma, que afeta a suavidade da superfície. Desta forma, uma possível colocação dos centros em pontos que não pertençam ao conjunto de dados discretos disponíveis irá criar variações de inclinação das superfícies em zonas não desejadas e aleatórias, ao invés de uma colocação em zonas visualmente selecionáveis no interior do domínio conhecido. De notar que numa qualquer função multiquádrica definida por várias superfícies quádrlicas (por mais que um centro), a forma de uma quádrlica irá também afetar as quádrlicas vizinhas, sendo o seu efeito cada vez menos visível à medida que a distância aumenta [4].

No que toca ao fator de forma, a sua escolha tem um enorme impacto na convergência e precisão do método. Ao longo dos anos foram várias as tentativas por vários autores para conseguir calcular numericamente, ou experimentalmente, o fator de forma ótimo, mas até aos dias de hoje ainda não existe nenhum método que crie consenso. Os três métodos mais aceites e que maior simplicidade oferecem, foram introduzidos por Hardy [1], Franke [2] e Fasshauer [8], cujo valor depende essencialmente do número e localização dos centros. Existem, no entanto, outros métodos mais complexos para a sua determinação, e cujo objetivo é a minimização do erro de interpolação, sendo o mais conhecido e aceite introduzido por Rippa [9]. De uma forma geral, a alteração do fator de forma numa qualquer FBR provoca uma alteração na função de aproximação gerada, tendo sempre um enorme impacto na precisão da

aproximação, pelo que não se pode em nenhum momento ignorar a sua influência. Um fator de forma mais pequeno corresponde tipicamente a uma superfície mais plana e com contornos mais abruptos, enquanto que um fator de forma maior é caracterizado por uma evolução mais suave da superfície, sendo que são os pontos de dados conhecidos, a FBR utilizada, o domínio, o espaçamento entre os pontos discretos e inclusive a própria localização e quantidade de centros, que ditam se a função de aproximação necessita de um fator de forma maior ou menor [9,10].

Hardy foi o primeiro a estudar o efeito do aumento do fator de forma. Primeiramente em 1-D observou que para um fator de forma igual a zero, a função de base  $\varphi = \|x\|$  mudava de uma linha reta para uma hipérbole, enquanto que em 2-D, para uma superfície cônica, a função passava de um cone para uma hiperboloide. Para Hardy, era crucial manter em todo o instante um fator de forma pequeno comparativamente à distância entre dois pontos discretos do domínio, devido sobretudo à instabilidade que observou nos seus resultados para elevados fatores de forma, que conduziam por não raras vezes a más aproximações [11]. No entanto, contrariamente às afirmações de Hardy, foi Tarwater [12] o primeiro a mencionar que a precisão das funções multiquádricas melhorava com o aumento do fator de forma, tendo mais tarde Kansa suportado também estas afirmações, aplicado à solução das PDE (equações diferenciais parciais) [5,6]. À medida que o fator de forma aumenta, a matriz de interpolação utilizada no cálculo dos coeficientes da função, fica associada a um maior número de condicionamento, o que por outras palavras torna a matriz mal condicionada, o que é um mau indicativo da precisão que se poderá obter da aproximação que se pretende realizar, o que leva a que a solução seja instável, tal como descrito por Schaback [13].

É evidente nesta fase a grande influência e importância de uma boa manipulação do fator de forma, de modo a reduzir ao máximo o erro de interpolação associado, e a melhorar a precisão da aproximação, pelo que se têm desenvolvido inúmeros trabalhos de otimização deste parâmetro. Os estudos mais recentes têm vindo a tentar encontrar o valor ótimo do fator de forma para cada superfície quádrlica, dependendo das suas propriedades locais (como por exemplo a curvatura da função nessa zona) pelo que ter-se-ia um fator de forma distinto para cada centro aplicado na aproximação [14,15,16,17]. Uma outra via de estudo, mas com o mesmo objetivo, visa a utilizar um elevado fator de forma (contrariamente às ideias de Hardy), e constante para todas as quádrlicas utilizadas, e de seguida encontrar uma forma de corrigir o mau condicionamento da matriz de interpolação, fazendo esforços para baixar o seu número de condicionamento através de algoritmos computacionais [6,18,19,20]. Existem também estudos com recurso a métodos de otimização, que pretendem encontrar o melhor fator de forma constante para atingir um qualquer objetivo definido previamente [21,22,23,24]. Embora todos estes métodos ofereçam tipicamente melhores aproximações comparativamente aos métodos de cálculo direto do fator de forma implementados por Hardy, Franke ou Fasshauer,

têm também a desvantagem de requerer um maior esforço computacional e um maior tempo de processamento de forma a atingir a função de aproximação desejada.

A conclusão dos estudos recentes no que toca ao aumento do fator de forma nas funções multiquádricas, bem como em outras FBR como as funções multiquádricas inversas ou as gaussianas, é que à medida que a função de aproximação gera curvas mais planas e suaves, esta torna-se também mais insensível à distância euclidiana entre o centro em questão e qualquer ponto discreto conhecido, e os elementos da matriz de interpolação ficam quase iguais, o que torna a matriz mal condicionada ou até mesmo singular na situação limite. No entanto, com o aumento do fator de forma, o erro de interpolação diminui até que o cálculo seja dominado por erros de arredondamento, consequência das limitações de precisão das ferramentas computacionais utilizadas, o que gera uma enorme instabilidade na solução de aproximação obtida [11].

Uma outra forma de aplicação recente das funções multiquádricas está associada aos '*Surrogate models*'. Este é um método de engenharia usado para estimar o valor de um qualquer parâmetro de interesse que não possa ser diretamente medido. A grande maioria dos trabalhos de engenharia, antes de serem implementados a uma escala real, passam por uma fase de experimentação e/ou simulação de forma a avaliar se os objetivos a que se propõem são passíveis de serem aplicados, com a vantagem de permitir reduzir os custos associados caso seja detetada alguma falha. Estes recorrem a funções matemáticas que representam de forma simplificada o valor de um parâmetro num domínio alargado, e cujo a obtenção do valor nesse domínio tem um custo associado muito elevado. Do ponto de vista aeronáutico, de forma a encontrar o perfil alar ótimo para aplicar numa asa, e para otimizar uma dada condição de voo, um engenheiro deve realizar simulações computacionais e/ou experimentais (a uma escala reduzida em túnel de vento, por exemplo) de forma a compreender o efeito da variação de forma do perfil alar, seja através de alteração da corda, curvatura, material, entre outros. Por diversos motivos, tais simulações podem durar horas ou até mesmo dias até estarem completas, o que dificulta as abordagens de otimização, que requerem várias simulações com a alteração de um qualquer parâmetro variável. De modo a ultrapassar esta barreira apareceram os '*Surrogate models*', ou modelos de aproximação, que visam replicar (ou aproximar) da melhor maneira possível o comportamento da simulação, mas de uma forma menos dispendiosa do ponto de vista computacional. Este método visa gerar um modelo de uma superfície com base num número limitado de respostas do simulador, ao que se pode chamar de pontos discretos conhecidos. Existem inúmeros modelos para dar resposta a esta situação, sendo um deles através das FBR, que têm vindo a ganhar cada vez mais adeptos nas mais diferentes áreas da ciência e engenharia [25].

## 1.2 Contextualização do problema

Com o constante desenvolvimento de metodologias e códigos computacionais que visam a otimizar o projeto e design de uma aeronave (MDO - '*Multidisciplinary Design Optimization*'), um dos aspetos mais importantes prende-se em obter, em qualquer momento e em qualquer fase do voo de uma aeronave, os valores precisos dos coeficientes aerodinâmicos das superfícies sustentadoras, qualquer que seja a aeronave. A necessidade atual de aumentar a velocidade e capacidade de uma aeronave, diminuindo por sua vez o impacte ambiental resultante, demonstra a relevância e pertinência deste estudo. O conceito de '*morphing*' aplicado a uma aeronave visa solucionar este problema, permitindo obter uma configuração ótima da aeronave para uma qualquer fase de voo a que esta esteja sujeita, de forma a cumprir um determinado objetivo da forma mais eficiente e limpa possível. Desta forma, o presente trabalho pretende auxiliar o processo de otimização de uma aeronave, tendo como objetivo minimizar o tempo necessário para obter, em qualquer instante e fase do projeto, os valores dos coeficientes aerodinâmicos, com enorme importância durante a fase de projeto.

É crucial ter boas estimativas iniciais para os coeficientes de sustentação, de arrasto e de momento, do perfil alar em estudo, principalmente para baixos números de Reynolds, onde se torna absolutamente necessário ter uma vasta amostra de dados, uma vez que uma alteração da velocidade provoca por vezes um comportamento não linear e difícil de prever, o que resulta numa consequente perda de precisão e deterioramento na otimização que se pretende atingir.

## 1.3 Motivação e objetivos

Num perfil alar típico, é correto assumir que os coeficientes aerodinâmicos são uma função do número de Reynolds e do ângulo de ataque, estando disponível uma vasta gama de combinações para as quais os coeficientes aerodinâmicos são conhecidos, pelo que é exequível e pouco dispendioso implementar um método de interpolação multivariável que forneça bons resultados e com bom desempenho. No entanto, se o problema residir numa aeronave de configuração '*morphing*', a configuração do flap da asa estará sujeita a constantes alterações, o que influenciará, por sua vez, os coeficientes aerodinâmicos, aparecendo desta forma mais duas variáveis a juntar ao número de Reynolds e ângulo de ataque - a corda do flap e a sua deflexão - originando um problema com quatro variáveis independentes, o que prejudica o desempenho de uma simples interpolação multivariável. Desta forma, o desafio neste trabalho prende-se em encontrar e desenvolver um método de aproximação que seja rápido, passível de ser implementado e que forneça boas aproximações, e de seguida fazer uma comparação entre os dois métodos e verificar até que ponto é benéfico o uso de um em detrimento do outro.

## 1.4 Estrutura do trabalho

O presente trabalho divide-se em quatro diferentes secções, distribuídas ao longo dos seguintes cinco capítulos: O capítulo 2 e capítulo 3 apresentam os conceitos teóricos e técnicas implementadas no decorrer do trabalho, associados às aproximações através de funções multiquádricas e interpolação multivariável. No capítulo 4 efetuam-se testes que visam garantir a aplicabilidade e bom funcionamento dos métodos descritos, com recurso a aproximações de funções num domínio finito pré-definido, com duas e quatro variáveis independentes. No capítulo 5 inicia-se a representação dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares com recurso aos métodos de aproximação sob análise, comparando-se a precisão e tempo de processamento, de forma a averiguar os prós e contras de cada uma das abordagens aplicadas. Tal procedimento efetua-se para duas e para quatro variáveis independentes, em alusão aos parâmetros que ditam a variação dos coeficientes aerodinâmicos (ângulo de ataque, número de Reynolds, corda do flap e deflexão do flap). Por fim, no capítulo 6, efetua-se uma conclusão do trabalho e uma breve exposição dos principais resultados obtidos.

# Capítulo 2

## Metodologia

Neste capítulo abordam-se os conceitos teóricos associados às funções de base radial (das quais fazem parte as funções multiquádricas) e interpolação multivariável, métodos estes que serão aplicados no decorrer do estudo. Irá também definir-se uma série de parâmetros de interesse no que toca à precisão e tempo de processamento associado a cada uma das abordagens.

### 2.1 Funções de base radial

As funções de base radial foram inicialmente usadas em problemas de aproximação de dados discretos, trabalho este popularizado principalmente por Hardy [1] e Franke [2], e posteriormente aplicadas no cálculo de soluções aproximadas para sistemas de equações diferenciais às derivadas parciais, popularizado por Kansa [5,6] - que obteve por diversas vezes bastante sucesso e admiração da comunidade científica. Este método consegue ser tão preciso como um método espectral, sem a necessidade de definir uma malha, o que viabiliza a sua aplicação em geometrias mais complexas de uma qualquer dimensão no espaço.

Este tipo de funções apresenta simetria radial, estando dependentes da distância  $r = \|x - x_j\|$  entre o ponto genérico  $x$  e o centro da quádrlica respetiva  $x_j$ , podendo ser abreviado genericamente por  $\varphi(r)$ . Existem diversas variantes para estas funções, podendo ser classificadas como globais ou locais, dependendo se estão definidas em todo o domínio ou apenas em uma parte, respetivamente [1]. O conceito de método global qualifica-se por ter cada ponto interpolado dependente de todos os pontos de dados existentes, sendo que a adição ou eliminação de uma qualquer coordenada no interior do domínio provocará alterações que se vão propagar ao longo de todo o domínio da função interpolada. No que toca ao conceito de método local a sua definição torna-se menos clara, tendo sido definido por Franke como um método em que o ponto interpolado é apenas dependente de pontos de dados próximos deste, e de um ou mais parâmetros globais que caracterizam também a função [2].

As funções de base radial assumem a seguinte forma quando representadas no plano XZ:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi(\|x - x_j\|) \quad (2.1)$$

Nesta representação genérica das FBR,  $c_j$  representa os coeficientes desconhecidos *a priori* e que devem ser calculados consoante o conjunto de dados que se quer aproximar, o número e localização dos centros e o fator de forma  $\sigma$  selecionado para o efeito. Tais influências

são escrutinadas no trabalho de forma a atingir uma função que cumpra um determinado objetivo imposto pelo utilizador, sendo que normalmente diz respeito à minimização do erro de interpolação da função aproximada. Os pontos  $x_j$  dizem respeito aos centros, ou pontos centrais, dispostos no interior do domínio e pertencentes ao eixo  $x$ , colocados uniformemente ou não, sendo  $\| \cdot \|$  a norma euclidiana entre o centro respetivo e um ponto qualquer da função. A função de base que se pretende utilizar é representada nesta notação com o símbolo  $\varphi$ , consoante a FBR que se quer aplicar no estudo. As FBR mais populares são:

$$\text{Função Gaussiana:} \quad \varphi(r) = e^{-\sigma r^2} \quad (2.2)$$

$$\text{Distância Euclidiana:} \quad \varphi(r) = r \quad (2.3)$$

$$\text{Função Multiquádrica:} \quad \varphi(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2} \quad (2.4)$$

$$\text{Função Multiquádrica inversa:} \quad \varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \sigma^2}} \quad (2.5)$$

$$\text{Thin-Plate Spline:} \quad \varphi(r) = r^2 \log r \quad (2.6)$$

De seguida, independentemente de qual for a FBR utilizada, o método aplicado à resolução do problema de forma a obter os coeficientes  $c$  que caracterizam a função de aproximação, é o seguinte na sua forma matricial:

$$Mc = F \quad (2.7)$$

O vetor dos coeficientes  $c$  tem dimensão igual ao número de centros escolhidos para representar a função, sendo  $F$  a soma ponderada das  $n$  funções base que caracterizam a função de aproximação. A matriz de interpolação  $M$  é definida da seguinte forma:

$$M_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|) \quad (2.8)$$

A escolha da FBR vai determinar quais os métodos disponíveis para resolver a equação 2.7, e averiguar se tal sistema de equações tem solução possível e determinada [1,4]. Se a matriz de interpolação  $M$  é positivamente definida, então o sistema de equações lineares tem uma única solução, pelo que se tem a garantia de que a matriz é invertível, o que possibilita o cálculo dos coeficientes da função. Existem vários métodos de resolução deste tipo de problemas, entre os quais o método de factorização de Cholesky ou decomposição LU. Uma outra característica importante aplicada às FBR, é que quando existe um centro em cada ponto de dado existente, a matriz de interpolação  $M$  é simétrica, pois  $\|x_i - x_j\| = \|x_j - x_i\|$ , o que implica que  $M_{ij} = M_{ji}$  [10].

### 2.1.1 Matriz invertível

De forma a determinar os coeficientes da função de aproximação multiquádrica é necessário garantir que a matriz de interpolação é invertível, ou não singular. Uma matriz quadrada  $A \in M_{n \times n}(K)$  diz-se invertível se existir uma matriz  $B$ , de igual dimensão, tal que:

$$AB = BA = I_n \quad (2.9)$$

Neste caso, a matriz  $B$  chama-se a inversa da matriz  $A$  e  $I_n$  denota a matriz identidade com  $n$  linhas e  $n$  colunas. Uma matriz quadrada que não seja invertível é chamada de singular ou degenerada, sendo que nesta situação o determinante da matriz é igual a zero. Existem uma série de propriedades relevantes relativamente à inversa de uma matriz, tomando como exemplo a matriz quadrada  $A$  [26]:

- ✓ A inversa da matriz  $A$  é única, e representada por  $A^{-1}$ .
- ✓ A matriz identidade  $I_n$  é invertível e  $(I_n)^{-1} = I_n$ .
- ✓ Se a matriz  $A$  é invertível então  $A^{-1}$  é também invertível, logo  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ✓ Se  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis então  $AB$  é também invertível, sendo que  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- ✓ Se  $A$  é invertível então, para todo o  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k$  é invertível e da forma  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ .
- ✓ Se  $A$  é invertível então  $A^T$  é também invertível e da forma  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- ✓ Se  $A$  é invertível e  $\alpha \neq 0$ , então  $\alpha A$  é invertível e da forma  $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$ .

Se uma matriz  $F$  é não quadrada, da forma  $F \in M_{m \times n}(K)$ ,  $m \neq n$ , então esta não possui inversa. No entanto, em certos casos é possível que exista uma matriz inversa direita ou uma matriz inversa esquerda, levando desta forma a um caso particular denominado de pseudo-inversa da matriz  $F$ . Se as colunas da matriz  $F$  forem linearmente independentes então,  $F^T \cdot F$  é invertível ao que se obtém:

$$F^* = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \quad (2.10)$$

Neste caso  $F^*$  é a matriz inversa esquerda, o que significa dizer que  $F^* \cdot F = I_n$ . Se as linhas da matriz  $F$  forem linearmente independentes então,  $F \cdot F^T$  é invertível ao que se obtém:

$$F^* = F^T \cdot (F \cdot F^T)^{-1} \quad (2.11)$$

Neste caso  $F^*$  é a matriz inversa direita, o que significa dizer que  $F \cdot F^* = I_m$ . Se as linhas e as colunas da matriz forem simultaneamente linearmente independentes, então a matriz é invertível e a pseudo-inversa é igual à inversa da matriz [27].

## 2.1.2 Número de condicionamento

Ao trabalhar-se com aritmética de precisão finita, podem por vezes surgir complicações no que toca a erros de arredondamento, que se podem propagar de forma descontrolada em certas situações. Um problema bem condicionado não apresenta propagações significativas dos erros de arredondamento e permitem soluções estáveis, enquanto que um problema mal condicionado apresenta drásticas e acentuadas propagações que não permitem atingir a solução pretendida. Desta forma aparece o número de condicionamento, uma medida que quando baixa denota um problema bem condicionado, e quando alta um problema mal condicionado [28].

O número de condicionamento associado a um sistema linear da forma  $Ax = y$  é um número que estabelece a precisão que é possível obter para uma solução aproximada dos coeficientes  $x$ , ainda antes de serem considerados possíveis erros de arredondamento associados. O condicionamento de uma matriz é uma propriedade da própria matriz e não do algoritmo ou da precisão em ponto flutuante do método computacional utilizado, pelo que a partir de um determinado limite se torna impossível manter uma solução estável para o problema.

$$A(x + \delta_x) = y + \delta_y \quad (2.12)$$

Um sistema é mal condicionado quando uma pequena variação na entrada (denotada por  $\delta_y$ ) origina uma grande variação na saída (denotada por  $\delta_x$ ). Tem-se assim que:

$$Ax + A\delta_x = y + \delta_y \quad (2.13)$$

O que implica dizer que:

$$A\delta_x = \delta_y \quad (2.14)$$

Assim, de forma a avaliar a magnitude do erro relativo em  $y$  em função da magnitude do erro relativo em  $x$ , pode-se deduzir o seguinte:

$$\frac{\|\delta_x\|/\|x\|}{\|\delta_y\|/\|y\|} = \frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|y\|}{\|\delta_y\|} \quad (2.15)$$

$$\frac{\|\delta_x\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|y\|}{\|\delta_y\|} = \frac{\|A^{-1}\delta_y\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|Ax\|}{\|\delta_y\|} \quad (2.16)$$

$$\frac{\|A^{-1}\delta_y\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|Ax\|}{\|\delta_y\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta_y\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|A\| \cdot \|x\|}{\|\delta_y\|} \quad (2.17)$$

$$\frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta_y\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|A\| \cdot \|x\|}{\|\delta_y\|} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (2.18)$$

Pode-se assim definir o número de condicionamento de uma matriz invertível  $A$  como o produto da norma da matriz  $A$  pela norma da sua matriz inversa  $A^{-1}$ .

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (2.19)$$

Este é o valor que quantifica o quão ampliada será a perturbação da entrada nos resultados finais, sendo que quanto maior o seu valor absoluto, pior condicionada está a matriz.

Uma vez que, de modo a achar os coeficientes da função multiquádrica, é necessário trabalhar com matrizes e realizar uma série de operações matemáticas, entre as quais a inversão da matriz de interpolação (ou aplicação da pseudo-inversa quando a matriz não é quadrada) este conceito ganha enorme importância e não pode ser ignorado. Foram já muitos os autores que evidenciaram que com o aumento do fator de forma da função de aproximação, e conseqüente aumento da magnitude dos elementos da matriz de interpolação, esta tende a ficar gradualmente com maior número de condicionamento, o que remete para um aumento da amplificação entre os erros numéricos da entrada e da saída, o que vai prejudicar a solução pretendida. Desta forma é expectável que não se possa ultrapassar um determinado fator de forma, de modo a não sofrer de tais conseqüências [29,30].

## 2.2 Interpolação multivariável

A interpolação multivariável é hoje em dia uma das abordagens mais utilizadas de modo a definir uma superfície contínua com recurso a apenas um conjunto finito de pontos pertencentes ao domínio em questão, o que permite obter soluções entre dois quaisquer pontos de dados conhecidos consecutivos. Do ponto de vista aeronáutico, é muitas vezes aplicada esta abordagem para aproximar os coeficientes aerodinâmicos em função de determinadas variáveis de entrada, tipicamente o número de Reynolds e o ângulo de ataque (num espaço bidimensional), pelo que é o intuito deste trabalho comparar este método com as funções multiquádricas, cuja formulação permite desempenhar o mesmo papel.

Se a função (ou conjunto de dados) não apresenta um comportamento linear então este método será apenas uma aproximação, sendo que oferece cada vez melhores resultados consoante maior seja a linearidade dos pontos. Se a matriz de dados possui mais de duas variáveis então a solução será um ponto no interior do polítopo correspondente à dimensão do espaço em questão, sendo que o número de operações matemáticas necessárias aumenta também consoante a sua grandeza. Assim, a qualidade da aproximação com recurso a uma interpolação multivariável está dependente não só da quantidade de pontos conhecidos como também do comportamento desses mesmos pontos no espaço.

Com o objetivo de manter a forma dos dados disponíveis que representam uma dada função, que normalmente é não linear, decidiu-se fazer uma interpolação linear entre um par de pontos. Estes dois pontos são os pontos cujas abcissas estão imediatamente antes e após o ponto em que se pretende obter o valor da função, tal como presente na Figura 1.

Antes de generalizar o método da interpolação multivariável a uma qualquer dimensão espacial, vai-se primeiramente analisar a situação mais simples, a interpolação linear usando um par de pontos [31]. Assuma-se que  $i$  denota a dimensão da variável e  $j$  a posição do ponto dessa mesma variável no seu eixo respetivo, segundo a forma genérica  $(x_j^i)$ .

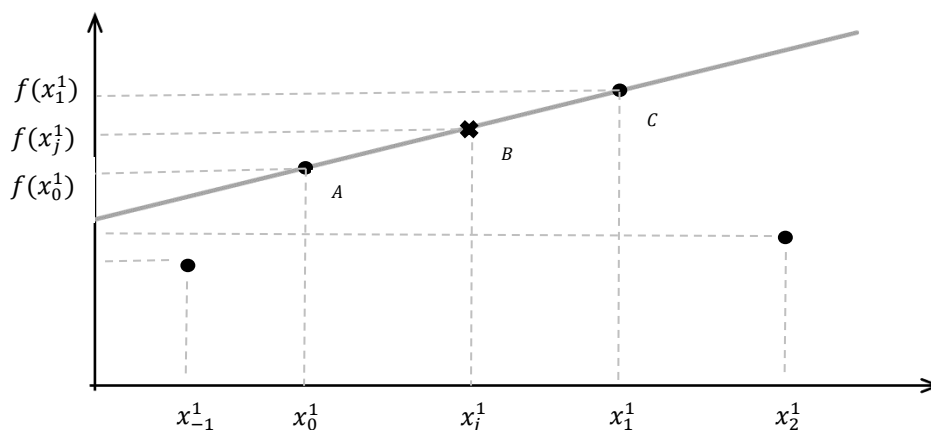


Figura 1: Aplicação de interpolação linear usando um par de pontos

A Figura 1 representa uma situação típica na abordagem da interpolação multivariável, onde existem dois pontos de dados conhecidos ( $f(x_0^1)$  e  $f(x_1^1)$ ) que servem de auxílio ao cálculo do ponto genérico que se encontra no meio de ambos ( $f(x_j^1)$ ). A equação 2.20 mostra a interpolação multivariável aplicada de modo a calcular  $f(x_j^1)$ :

$$f(x_j^1) = f(x_1^1) + [f(x_0^1) - f(x_1^1)] \frac{(x_j^1 - x_0^1)}{(x_1^1 - x_0^1)} \quad (2.20)$$

Se o objetivo for agora obter uma interpolação bilinear usando dois pares de pontos, a conceção do problema traduz-se agora na representação genérica presente na Figura 2. Os dados são conhecidos em quatro pontos diferentes,  $A, B, C$  e  $D$ , cujo valor é representado por ( $f(x_0^1, x_1^2)$ ,  $f(x_1^1, x_1^2)$ ,  $f(x_0^1, x_0^2)$ ,  $f(x_1^1, x_0^2)$ ) respetivamente, e com o objetivo de descobrir o valor aproximado da solução para o ponto  $E$  ( $f(x_j^1, x_j^2)$ ) que não pertence aos pontos de dados, através de uma interpolação multivariável.

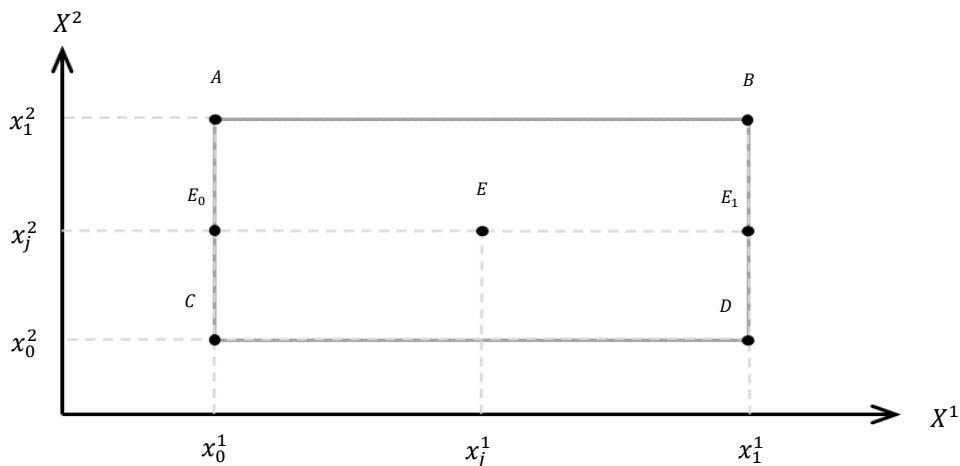


Figura 2: Aplicação de interpolação bilinear usando dois pares de pontos

Contrariamente à abordagem aplicada na interpolação linear usando um par de pontos, esta é composta por duas etapas que nada mais são do que aplicações sucessivas da própria interpolação multivariável. O primeiro passo consiste em aferir o valor da aproximação nos pontos  $E_0$  e  $E_1$  com recurso a uma simples interpolação multivariável, segundo as equações:

$$f(x_0^1, x_j^2) = f(x_0^1, x_0^2) + [f(x_0^1, x_1^2) - f(x_0^1, x_0^2)] \frac{(x_j^2 - x_0^2)}{(x_1^2 - x_0^2)} \quad (2.21)$$

$$f(x_1^1, x_j^2) = f(x_1^1, x_0^2) + [f(x_1^1, x_1^2) - f(x_1^1, x_0^2)] \frac{(x_j^2 - x_0^2)}{(x_1^2 - x_0^2)} \quad (2.22)$$

O segundo passo consiste em utilizar estes dois novos pontos calculados de modo a estimar o valor no ponto  $E$  com recurso a uma nova interpolação multivariável, segundo a equação:

$$f(x_j^1, x_j^2) = f(x_0^1, x_j^2) + [f(x_1^1, x_j^2) - f(x_0^1, x_j^2)] \frac{(x_j^1 - x_0^1)}{(x_1^1 - x_0^1)} \quad (2.23)$$

À medida que o número de variáveis aumenta, a representação gráfica de apoio à interpretação do problema aumenta a sua complexidade, pelo que é importante conseguir generalizar o problema de interpolação multivariável através da compreensão dos casos mais simples. Uma vez que se está interessado em generalizar o problema para uma qualquer dimensão do espaço, o objetivo passa agora por estimar o valor de  $f(x_j^1, x_j^2, x_j^3, \dots, x_j^n)$ . O primeiro passo consiste em determinar as coordenadas dos pontos conhecidos que estão mais próximos do ponto  $(x_j^1, x_j^2, x_j^3, \dots, x_j^n)$  que se pretende aproximar, pontos estes que definem os vértices de um polítopo que rodeia o ponto que se pretende interpolar:

$$\begin{aligned} &(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \\ &(x_0^1, x_0^2, \dots, x_1^1) \\ &\vdots \\ &(x_1^1, x_1^2, \dots, x_0^n) \\ &(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) \end{aligned}$$

Aplicando-se a mesma abordagem utilizada anteriormente, e começando-se por interpolar o ponto  $(x_j^1)$  obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$f(x_j^1, x_0^2, \dots, x_0^n) = f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) + [f(x_1^1, x_0^2, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)] \frac{(x_j^1 - x_0^1)}{(x_1^1 - x_0^1)} \quad (2.24)$$

$$f(x_j^1, x_0^2, \dots, x_1^n) = f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_1^n) + [f(x_1^1, x_0^2, \dots, x_1^n) - f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_1^n)] \frac{(x_j^1 - x_0^1)}{(x_1^1 - x_0^1)} \quad (2.25)$$

$$f(x_j^1, x_1^2, \dots, x_0^n) = f(x_0^1, x_1^2, \dots, x_0^n) + [f(x_1^1, x_1^2, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, x_1^2, \dots, x_0^n)] \frac{(x_j^1 - x_0^1)}{(x_1^1 - x_0^1)} \quad (2.26)$$

$$f(x_j^1, x_1^2, \dots, x_1^n) = f(x_0^1, x_1^2, \dots, x_1^n) + [f(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) - f(x_0^1, x_1^2, \dots, x_1^n)] \frac{(x_j^1 - x_0^1)}{(x_1^1 - x_0^1)} \quad (2.27)$$

De modo a interpolar o valor da variável  $(x_j^2)$  obtêm-se as seguintes equações:

$$f(x_j^1, x_j^2, \dots, x_0^n) = f(x_j^1, x_0^2, \dots, x_0^n) + [f(x_j^1, x_1^2, \dots, x_0^n) - f(x_j^1, x_0^2, \dots, x_0^n)] \frac{(x_j^2 - x_0^2)}{(x_1^2 - x_0^2)} \quad (2.28)$$

$$f(x_j^1, x_j^2, \dots, x_1^n) = f(x_j^1, x_0^2, \dots, x_1^n) + [f(x_j^1, x_1^2, \dots, x_1^n) - f(x_j^1, x_0^2, \dots, x_1^n)] \frac{(x_j^2 - x_0^2)}{(x_1^2 - x_0^2)} \quad (2.29)$$

De modo a interpolar o valor da variável  $(x_j^n)$  obtém-se que:

$$f(x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n) = f(x_j^1, x_j^2, \dots, x_1^n) + [f(x_j^1, x_j^2, \dots, x_1^n) - f(x_j^1, x_j^2, \dots, x_0^n)] \frac{(x_j^n - x_0^n)}{(x_1^n - x_0^n)} \quad (2.30)$$

O número de pontos que delimita este polítopo multidimensional é igual a  $2^p$ , em que  $p$  representa a dimensão espacial do problema, pelo que são realizadas  $(\sum_{i=1}^p 2^i)$  interpolações lineares até ser possível estimar a solução pretendida.

## 2.3 Erros e incertezas

Em qualquer problema que implique uma abordagem de resolução através de apoio computacional, devido sobretudo às dimensões associadas e à vantagem da automatização, é necessário estar-se consciente das limitações de cálculo e da sensibilidade da precisão relativamente à dimensão das amostras de dados. Neste caso em concreto, é necessário tomar-se especial cuidado com o número de condicionamento da matriz de interpolação, que aumenta à medida que a dimensão do conjunto de dados aumenta, e que poderá provocar resultados incongruentes.

Está-se interessado não apenas na precisão obtida para a aproximação, mas também em tomar em consideração o tempo de processamento necessário para criar a função de raiz, e de seguida operá-la consoante os interesses e necessidades específicos. De forma a avaliar o erro associado a cada aproximação, isto é, o erro entre os dados de aproximação e os dados reais conhecidos, ir-se-ão calcular os seguintes parâmetros de interesse:

$$\text{Root mean square error:} \quad RMS = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\tilde{f}(x_j) - f(x_j))^2} \quad (2.31)$$

$$\text{Erro absoluto médio:} \quad ABS = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\tilde{f}(x_j) - f(x_j)| \quad (2.32)$$

$$\text{Erro relativo médio:} \quad REL.E = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{\tilde{f}(x_j) - f(x_j)}{f(x_j)} \right| \quad (2.33)$$

$$\text{Erro relativo médio percentual:} \quad REL.P = \frac{100}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{\tilde{f}(x_j) - f(x_j)}{f(x_j)} \right| \quad (2.34)$$

$$\text{Desvio padrão amostral:} \quad DP = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (f(x_j) - \bar{f}(x_j))^2}{m-1}} \quad (2.35)$$

$$\text{Máximo erro absoluto:} \quad ABS.MAX = \text{máximo}\{ |\tilde{f}(x_j) - f(x_j)|, j \in [1, m] \} \quad (2.36)$$

$$\text{Coeficiente de determinação:} \quad R^2 = 1 - \frac{\left( \sum_{j=1}^m (f(x_j) - \tilde{f}(x_j))^2 \right)}{\left( \sum_{j=1}^m (f(x_j) - \bar{f}(x_j))^2 \right)} \quad (2.37)$$

De notar que nesta notação  $m$  representa o número de pontos usados para determinar o erro, sendo que neste caso serão sempre usados todos os pontos discretos conhecidos disponíveis, e que foram usados para gerar a função. A função de aproximação, a função real e a média dos dados amostrais conhecidos pertencentes à função real denotam-se por  $\tilde{f}(x_j)$ ,  $f(x_j)$  e  $\bar{f}(x_j)$ , respetivamente, em que  $x_j$  representa as coordenadas dos pontos avaliados [32].

## 2.4 Tempo de processamento

Num qualquer programa de otimização, o tempo de processamento e a precisão obtida são em conjunto os dois fatores de maior relevo e que devem ser ajuizados de forma a permitir um equilíbrio entre ambos, uma vez que tipicamente o beneficiar de um fator acarreta prejuízos no outro. Em certas situações, dependendo da aplicação a que se destina, pode ser preferível beneficiar um fator em detrimento do outro, mas sempre dentro de um limite aceitável para o utilizador.

No que toca a este caso de estudo, pretende-se a partir de um determinado conjunto de pontos gerar uma função de aproximação multiquádrica, e resolvê-la de modo a obter a qualquer momento uma aproximação para um qualquer conjunto de dados de entrada pertencente ao domínio utilizado. O tempo total de processamento inicia-se no momento em que se começa a calcular os pontos de dados que vão ser aplicados para definir a função em questão, que aplicado aos perfis alares advêm do programa xFoil que permite obter os valores dos coeficientes aerodinâmicos para um determinado conjunto de dados de entrada (tipicamente o número de Reynolds, ângulo de ataque, corda e deflexão do flap) e finaliza-se quando se obtém uma solução a partir da função gerada.

Uma vez gerada a função, o programa guarda automaticamente os dados da função obtida, e a partir desse momento o utilizador passará a poder obter soluções da função sem necessitar de a gerar novamente. Esta é a grande vantagem desta abordagem, uma vez que a grande maioria do tempo de processamento ocorre aquando da geração da função, mas que felizmente apenas tem de ser realizada uma única vez. Embora este método esteja associado a um elevado tempo necessário para gerar a função, é expectável que tal seja compensado devido ao baixo tempo necessário para encontrar uma solução da função uma vez estando a função de aproximação gerada e guardada. Assim, o pretendido é que a partir de um determinado número de repetições de cálculos da função, esta abordagem reduza o tempo despendido para obter soluções comparativamente a outros métodos existentes, o que trará benefícios em aplicações de otimização.

Para gerar uma função multiquádrica, independentemente do número de centros e do seu fator de forma, é necessário percorrer uma série de etapas, com recurso a apoio computacional, de modo a atingir a função final pretendida que a partir desse momento será utilizada consoante as necessidades. A primeira etapa passa por recolher (com recurso ao xFoil)

e ler todos os pontos de dados que se deseja aplicar na aproximação, e de seguida selecionar a quantidade e localização dos centros, bem como do fator de forma associado. Para tal, existem diversos métodos que podem ser aplicados, alguns dos quais que serão estudados ao longo da dissertação, cabendo ao utilizador ajuizar quais os métodos que pretende implementar consoante as suas necessidades. Na segunda etapa é gerada a matriz de interpolação  $M$  e a sua respetiva matriz transposta, de modo a aplicar a pseudo-inversa da matriz e assim obter os coeficientes desconhecidos da função de aproximação. Esta é tipicamente a etapa mais morosa de todo o processo devido à quantidade de multiplicações entre matrizes e devido ao próprio cálculo da matriz inversa, que dependendo da dimensão da matriz de interpolação (que por sua vez depende da quantidade de centros), vai definir o tempo necessário de processamento. Quando finalizado o cálculo de todos os coeficientes da função, o processo de geração da função é terminado, os dados são guardados e ficarão disponíveis para utilizar a qualquer momento.

Uma vez estando a função totalmente gerada com os coeficientes, localização dos centros e fator de forma guardados, o utilizador pode, a qualquer momento, utilizar a função de modo a obter uma qualquer solução inserindo um qualquer conjunto de dados de entrada pertencentes ao domínio em questão. Nesta fase, é realizado o somatório de todos os elementos que compõem a função, e por fim obtêm-se os dados de saída pretendidos, sendo esta etapa repetida cada vez que se quer obter uma nova solução. Esta etapa é chamada de tempo de cálculo da função. De notar que sempre que ocorra uma alteração, tanto da quantidade ou localização dos centros, tanto do fator de forma, é necessário voltar a gerar a função.

De modo a ser possível identificar o tempo de processamento necessário para uma determinada etapa do processo, define-se uma série de acrónimos:

- Tempo de recolha dos dados: TR
- Tempo de leitura dos dados: TL
- Tempo de geração da função: TG
- Tempo de cálculo da função: TC
- Tempo total de processamento: TT



# Capítulo 3

## Funções multiquádricas

Neste capítulo descreve-se o método aplicado na resolução do problema e faz-se ainda uma breve comparação com o método aplicado e popularizado por Hardy. Descreve-se a forma de localização dos centros no interior do domínio da função, e bem como a determinação do fator de forma, que desempenha também um papel muito importante para uma boa aproximação dos dados de entrada.

### 3.1 Conceitos teóricos

As funções multiquádricas foram provavelmente as FBR que maior interesse despertaram na comunidade científica, e serão elas o foco principal do presente trabalho. Nesta secção descreve-se a metodologia aplicada de forma a gerar uma função de aproximação multiquádrica que visa aproximar um determinado conjunto discreto de pontos amostrais, e procura-se perceber os principais conceitos associados à sua génese.

As superfícies multiquádricas podem ser representadas genericamente pela série:

$$\sum_{i=1}^n c_i [q(x_i, y_i, x, y)] = z \quad (3.1)$$

Nesta notação  $z$  é função das variáveis de entrada  $x$  e  $y$ , resultando do somatório de todas as superfícies quádricas  $q$  envolvidas. O eixo vertical de simetria de cada superfície quádrica está localizado num ponto discreto chamado centro ou ponto central, de coordenadas genéricas  $(x_i, y_i)$ , ao qual estará associado um coeficiente da função  $c_i$ , desconhecido *a priori*, e que deve ser calculado de forma a descrever o formato e o sinal algébrico da superfície em questão.

Existem certos exemplos particulares de superfícies multiquádricas, entre os quais o somatório de uma série de hiperboloides circulares de duas folhas, provavelmente a mais comum entre todas, e representada matematicamente por:

$$\sum_{i=1}^n c_i [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + \sigma^2]^{\frac{1}{2}} = z \quad (3.2)$$

Um outro exemplo típico consiste numa superfície multiquádrica definida pelo somatório de uma série de paraboloides circulares, representada matematicamente por:

$$\sum_{i=1}^n c_i [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + \sigma^2] = z \quad (3.3)$$

O parâmetro  $\sigma$  representa o fator de forma da função, uma constante definida pelo utilizador e com enorme impacto na precisão da aproximação.

Aplicando a equação 3.2, pode observar-se na Figura 3 uma representação de uma superfície quádrlica centrada no ponto  $(x, y) = (5, 5)$ , num domínio com  $x, y \in [0, 10]$  e com o fator de forma igual a zero e um, respetivamente. Quando o fator de forma é igual a zero gera-se uma superfície cónica, sendo que com um fator de forma maior que zero a superfície suaviza, provocando declives menos acentuados na região próxima do centro.

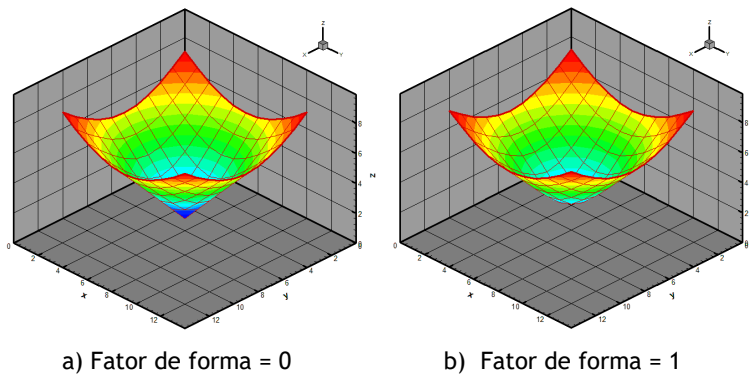


Figura 3: Superfície quádrlica

Optou-se por apresentar a função de aproximação multiquádrlica  $\tilde{h}$  como função de apenas um vetor  $x$ , no plano XZ, de forma a ilustrar de forma mais sucinta o método de resolução, que mais tarde será alargado a mais variáveis, pois tal não modifica a estratégia de resolução, mas apenas a dimensão do problema. Desta forma, a função de aproximação multiquádrlica é definida por:

$$\tilde{h}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \phi_i(x) + c_0 \quad (3.4)$$

O somatório da função é composto por  $(n + 1)$  elementos, associados aos  $n$  centros utilizados para gerar a função de aproximação, a que correspondem também  $(n + 1)$  coeficientes  $c_i$  que devem ser calculados consoante os dados amostrais que se pretende aproximar. Nesta notação,  $\phi_i(x)$  é dado por:

$$\phi_i(x) = \sqrt{\sigma^2 + \|x - x_i\|^2} \quad (3.5)$$

Após calcular este parâmetro, tendo em conta os centros utilizados e o fator de forma respetivo, têm de se obter por fim os coeficientes da função. Este é o verdadeiro desafio por

detrás da aproximação multiquádrica, e que tem como principal objetivo minimizar a diferença entre o valor da aproximação ( $\tilde{h}$ ) e o real valor ( $h$ ), segundo a equação:

$$f(c) = \sum_{i=1}^n (\tilde{h}^{(i)} - h^{(i)})^2 \quad (3.6)$$

Desta forma, e adotando uma forma matricial, pode escrever-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & \phi_1(x^{(1)}) & \dots & \phi_n(x^{(1)}) \\ 1 & \phi_1(x^{(2)}) & \dots & \phi_n(x^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \phi_1(x^{(m)}) & \dots & \phi_n(x^{(m)}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \\ \vdots \\ h^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ou, alternativamente, numa notação mais condensada:

$$[M]_{(m,n+1)} \times [c]_{(n+1,1)} = [h]_{(m,1)} \quad (3.8)$$

A matriz de interpolação  $M$  possui  $m$  linhas, associadas aos  $m$  pontos discretos conhecidos que se quer aproximar, pelo que  $m$  será o número total de pontos. Esta possui também  $(n + 1)$  colunas, sendo a primeira totalmente preenchida por uns, sendo que  $n$  representa o número total de centros utilizados para representar a função. O vetor  $c$  representa os  $(n + 1)$  coeficientes desconhecidos da função, e que serão calculados com recurso ao vetor dos termos absolutos, denotado pelo vetor  $h$ , de dimensão  $m$ . Desta forma,  $\tilde{h}(x)$  e  $h(x)$  dizem respeito à função de aproximação e à função real (ou conjunto de dados discretos) que se quer aproximar, respetivamente.

Se a matriz de interpolação  $M$  fosse quadrada (com igual número de linhas e de colunas), o cálculo dos coeficientes da função iria apenas requerer a inversão da própria matriz, no entanto para esta situação é necessário encontrar os valores de  $c_i$  que minimizam a seguinte função:

$$J(c) = \frac{1}{2} \|[M][c] - [h]\|^2 \quad (3.9)$$

A solução da equação anterior é obtida através da pseudo-inversa da matriz  $M$ , da seguinte forma:

$$[c] = ([M]^T[M])^{-1}[M]^T[h] \quad (3.10)$$

Demonstra-se desta forma que é possível calcular computacionalmente a função de aproximação  $\tilde{h}(x)$  presente na equação 3.4, uma vez calculada a matriz de interpolação  $M$  e os coeficientes da função associados aos centros selecionados. Se for pretendido acomodar duas variáveis independentes  $x$  e  $y$ , há que alterar ligeiramente a equação 3.4, convertendo as hipérbolas em hiperboloides circulares com a seguinte formulação matemática:

$$\tilde{h}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \sqrt{\sigma^2 + (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} + c_0 \quad (3.11)$$

No entanto, de forma a obter uma boa aproximação é necessário compreender a influência da colocação dos centros e do fator de forma que constitui a função. Dependendo do utilizador, o conceito de boa aproximação pode ter significados diferentes; há quem privilegie a rapidez de geração da função (e baixo tempo de processamento para obter a aproximação), e há também quem privilegie a precisão, de forma a obter um erro de interpolação abaixo de um determinado valor. Desta forma, é necessário compreender os efeitos por detrás dos parâmetros que constituem a função, de modo a ser possível ajustá-la consoante as necessidades e objetivos específicos. Existem diversos aspetos que necessitam de ser tomados em consideração para a escolha do fator de forma e da colocação e quantidade de centros a aplicar, entre os quais o número de pontos de dados amostrais, o domínio desses pontos numa qualquer dimensão do espaço e ainda analisar de que forma se comportam os dados discretos (se possui um comportamento oscilatório com vários máximos e mínimos locais, ou se apresenta uma variação estritamente crescente ou decrescente, por exemplo).

A metodologia aplicada por Hardy na resolução e obtenção das funções multiquádricas a partir de um determinado conjunto discreto de pontos amostrais (a que se chamará metodologia de Hardy), é ligeiramente diferente da descrita anteriormente e proposta neste trabalho (a que chamará metodologia proposta). A grande diferença ocorre na formulação da matriz de interpolação  $M$ , ou por outras palavras na formulação da função de aproximação. Nos seus primeiros trabalhos, Hardy apresentou a seguinte definição para as funções de aproximação multiquádrica definidas como função de apenas um vetor  $x$ :

$$\tilde{h}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \sqrt{\sigma^2 + (x - x_i)^2} \quad (3.12)$$

Nesta situação desaparece um dos parâmetros presentes na matriz dos coeficientes, uma vez que os  $n$  centros utilizados para definir a função correspondem a também  $n$  coeficientes que devem ser determinados. Aplicando novamente a notação anterior:

$$\phi_i(x) = \sqrt{\sigma^2 + \|x - x_i\|^2} \quad (3.13)$$

Desta forma pode descrever-se a matriz de interpolação  $M$  aplicada por Hardy:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x^{(1)}) & \dots & \phi_n(x^{(1)}) \\ \phi_1(x^{(2)}) & \dots & \phi_n(x^{(2)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x^{(m)}) & \dots & \phi_n(x^{(m)}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \\ \vdots \\ h^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ou, alternativamente, numa notação mais condensada:

$$[M]_{(m,n)} \times [c]_{(n,1)} = [h]_{(m,1)} \quad (3.15)$$

Mais uma vez, à semelhança da terminologia adotada anteriormente,  $m$  representa o número total de pontos conhecidos que se quer aproximar, enquanto que  $n$  corresponde ao número de centros adotados para definir a função. Nesta formulação desaparece a primeira coluna da matriz de interpolação, anteriormente preenchida apenas por uns, de modo a obter o coeficiente  $c_0$  da função que dava origem a um somatório de  $(n + 1)$  elementos para a função de aproximação.

Quando o número de pontos é também igual ao número de centros (*i.e.*, quando  $m = n$ ), obtém-se uma matriz de interpolação quadrada, o que garante a existência de uma matriz de interpolação inversa, o que por sua vez permite calcular os coeficientes da função com recurso a uma simples inversão da matriz, sem recorrer à pseudo-inversa. Nesta situação, e quando o fator de forma  $\sigma$  é igual a zero, obtém-se uma quase-interpolação dos dados amostrais [1,4].

## 3.2 Colocação dos centros

Não é prático nem realista efetuar manualmente a distribuição dos centros pelo domínio que se está a estudar, principalmente quando a quantidade de pontos discretos aumenta, ou quando aumenta o número de variáveis independentes, pelo que se teve que implementar um método que calculasse os centros automaticamente para qualquer que fosse o domínio e/ou número de variáveis. Sabe-se à partida que quanto maior a quantidade de centros usados, mais complexa será a função multiquádrica, e conseqüentemente maior será o esforço computacional requerido para gerar a função, pelo que o utilizador tem que estipular um compromisso entre ter maior precisão (e maior tempo de cálculo) ou mais rapidez de processamento (com menor esforço computacional, mas com erros previsivelmente mais acentuados).

Desta forma, optou-se por fazer a colocação dos centros de forma automática, implementando dois métodos distintos, com o intuito de os comparar, com a particularidade de ambos distribuírem os pontos simetricamente ao longo do domínio em questão. Existem outras formas de distribuição dos centros, e que também têm vindo a ser bastante utilizadas nos últimos anos, entre as quais uma com recurso ao método dos mínimos quadrados de forma a encontrar todas as depressões e elevações existentes no conjunto de dados, colocando os centros nessas mesmas posições. O método calcula as derivadas parciais de  $z$  em função de  $x$  e  $y$  (num espaço bidimensional) e iguala-as a zero de forma a encontrar os focos onde a inclinação da função tende para zero, tendo como objetivo minimizar o erro de interpolação nestes pontos. Esta prática implementada por Hardy teve sucesso nos seus estudos topográficos devido à típica evolução dos terrenos, onde existem várias depressões e elevações (principalmente em terrenos montanhosos), no entanto para o presente caso de estudo aplicado aos coeficientes

aerodinâmicos de perfis alares esta poderá não ser a melhor opção, uma vez que a evolução das superfícies é notoriamente diferente [1,4]. Tomando como exemplo uma curva típica do coeficiente de sustentação em função do ângulo de ataque para um qualquer número de Reynolds, à medida que o ângulo de ataque aumenta o valor do coeficiente de sustentação cresce até atingir uma condição de perda a partir do qual o perfil alar perde sustentação, pelo que o método não iria colocar qualquer centro até se atingir o ângulo de ataque de perda do perfil alar, ao que se descartou a implementação desta abordagem.

Se a função for definida num espaço bidimensional, ou numa outra dimensão superior, não é suficiente identificar o número de centros que constituem a função, uma vez que estes podem estar distribuídos de várias formas ao longo do domínio. Desta forma, sempre que seja necessário identificar o número de centros aplicados, tomando como exemplo um espaço bidimensional, vai-se explicitar o número de centros existentes numa linha paralela ao eixo  $x$  e ao eixo  $y$ , pelo que o número total de centros que compõem a função será sempre a multiplicação de ambos os valores, uma vez que é garantida a simetria na sua colocação.

No espaço bidimensional, as variáveis utilizadas respeitam a notação  $(x, y)$  para um qualquer conjunto de dados discretos, e  $(Re, \alpha)$  quando aplicado à análise de perfis alares, enquanto que num espaço de dimensão  $R^4$  a notação passará a  $(x, y, z, t)$ , ou  $(Re, \alpha, cFlap, dFlap)$  quando aplicado a perfis alares. As variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$  estão associadas ao número de Reynolds, ângulo de ataque (em graus), percentagem de corda do flap e deflexão do flap (em graus), respetivamente.

Para referir o número de centros que compõem a função usar-se-á a seguinte notação no espaço bidimensional: tome-se como exemplo  $C(5,4)$  quando são colocados 5 centros numa linha paralela ao eixo  $x$  e 4 centros numa linha paralela ao eixo  $y$ , tal como apresentado na Figura 4 b) e c). No que toca ao número de pontos amostrais utilizados para aproximar uma qualquer função bidimensional, ou de forma a aproximar os valores dos coeficientes aerodinâmicos dos perfis alares, usar-se-á a seguinte notação:  $P(21,21)$ , tal como apresentado na Figura 4 a). Desta forma consegue-se descrever exatamente a forma como os centros e pontos amostrais estão distribuídos ao longo do domínio. De notar que, nos casos em estudo, os pontos conhecidos estão distribuídos também simetricamente (o que permite utilizar a notação  $P(x, y)$ ) embora seja possível ter os pontos conhecidos numa qualquer distribuição no interior do domínio definido para o efeito.

A primeira estratégia de distribuição dos centros (que adiante será referido como método de colocação 1) visa colocar os centros igualmente espaçados e de forma simétrica no interior do domínio, embora se possa ter centros em locais que não sejam pontos amostrais conhecidos. Este método, embora seja mais simples de implementar, pois apenas depende dos limites do domínio em questão, é expectável que peque no que toca à precisão da aproximação, uma vez que se vai criar um foco de inclinação em pontos desconhecidos, o que vai requerer

baixos fatores de forma de modo a que a função rapidamente se ajuste quando encontrar um máximo ou mínimo local, o que poderá trazer penalizações na precisão na vizinhança dos extremos relativos que se quer aproximar.

Num dos seus artigos mais recentes, Hardy afirma que a solução melhor e mais simples passa por colocar os centros exatamente nas mesmas posições onde se encontram os pontos amostrais que se quer aproximar, uma vez que cada centro gera um foco de inclinação nessa posição, razão pela qual não é benéfico que ocorra em posições arbitrárias do domínio. No entanto, colocar um centro em cada ponto de dado conhecido aumenta o tempo de processamento necessário, uma vez que as matrizes de interpolação adquirem uma dimensão maior, pelo que se optou por adaptar esta alternativa e implementar um novo método de colocação dos centros. Este segundo método (que adiante será referido como método de colocação 2) coloca também os pontos simetricamente ao longo do domínio, mas não necessariamente igualmente espaçados entre si, e com a garantia de que cada centro é também um ponto conhecido da função, estratégia aconselhada por vários autores [1,4]. Deste modo, dependendo da forma como os pontos amostrais estejam distribuídos, a colocação dos centros irá adaptar-se de forma a gerar uma configuração simétrica, pelo que a distância entre centros está dependente da distância entre os pontos amostrais, ao contrário do que acontecia com o primeiro método que apenas tinha em consideração os extremos do domínio. Esta estratégia além de colocar os centros simetricamente distribuídos ao longo do domínio e em pontos de dados conhecidos, distribui os centros da forma mais uniforme possível, para evitar que grandes intervalos de dados não possuam qualquer centro, comparativamente a outras zonas do domínio. Em ambos os métodos, quando o número de centros é também igual ao número de pontos, o caso limite para a quantidade de centros usados, significa que cada ponto conhecido será também um centro da função.

Como forma de exemplo, defina-se um domínio arbitrário bidimensional, com os pontos amostrais  $x, y \in [-10,10]$  e com um passo unitário, o que perfaz um total de 441 pontos amostrais, ou na notação  $P(21,21)$ , tal como ilustrado na Figura 4 a), que apresenta todos os pontos disponíveis para gerar a função de aproximação. Tem-se também presente na Figura 4 b) e c) a distribuição automática dos centros aplicando o método 1 e o método 2, respetivamente, com 5 centros numa linha paralela ao eixo  $x$  e 4 centros numa linha paralela ao eixo  $y$ , o que perfaz um total de 20 centros, ou na notação  $C(5,4)$ . Da Figura 4 b) observa-se que os centros vizinhos se encontram todos igualmente espaçados entre si e que nem sempre coincidem com pontos amostrais, enquanto que na Figura 4 c) cada centro é também um ponto conhecido com uma distribuição simétrica em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .

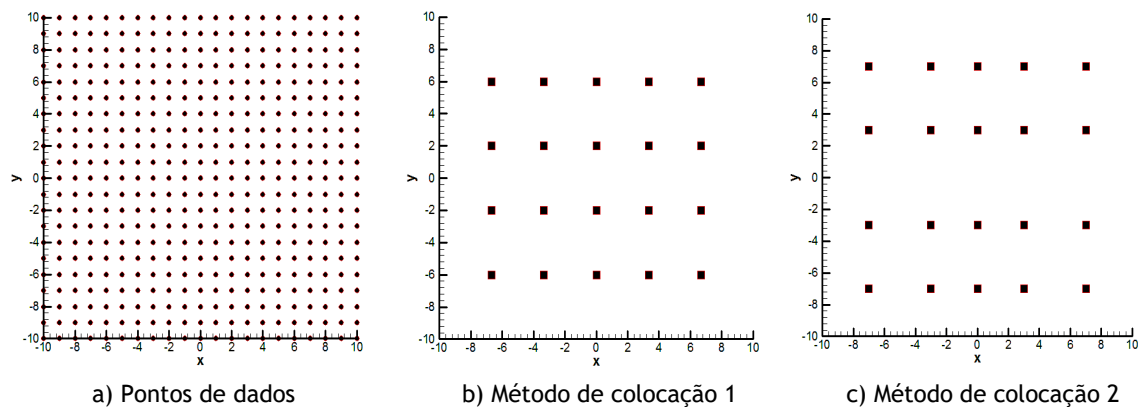


Figura 4: Exemplo de colocação dos centros  $C(5,4)$

Um aumento da quantidade de centros pode nem sempre beneficiar a função de aproximação, uma vez que ao aumentar a sua quantidade significa também alterar, na maioria dos casos, a localização de todos os restantes centros de forma a reajustá-los numa nova configuração, que respeite as condições definidas previamente. Deste modo, ao alterar a localização dos centros o método pode por vezes colocá-los em locais menos apropriados (dependendo do conjunto de dados amostrais), aumentando a sua quantidade, e desta forma piorar ligeiramente o erro de interpolação da função. É, no entanto, preferível adotar esta configuração, em detrimento de uma em que a adição de centros não altere a localização dos centros anteriores, pois desta forma consegue-se melhores resultados com baixas quantidades de centros, uma vez que estes estarão sempre quase que uniformemente distribuídos ao longo do domínio, sendo que cada reajuste do número de centros fará também reajustar toda a configuração adotada na sua colocação.

No que toca ao método de colocação 2, quando se tem um número de centros ímpar numa linha paralela de um qualquer eixo, e dada a condição de distribuição simétrica dos pontos ao longo do domínio, vai-se colocar quando possível (quando o número de pontos amostrais numa linha paralela ao eixo da variável em questão for também ímpar) um centro no meio desse conjunto de pontos, de forma a ser possível adotar a mesma configuração implementada quando o número de centros é par, e possui apenas menos um centro, isto é, a configuração com 5 centros é igual à configuração com 4 centros, com a exceção de ter a adição de um centro no ponto localizado exatamente a meio da variável em questão. No entanto, se o número de pontos amostrais de uma qualquer variável for par, a distribuição dos centros será reajustada, e caso não seja possível realizar uma distribuição simétrica irá colocar-se um centro também no meio dessa linha paralela de pontos, embora este não seja um ponto de dados conhecidos. Tal estratégia permite obter melhores resultados comparativamente a uma distribuição assimétrica dos pontos.

### **3.3 Fator de forma**

O valor do fator de forma aplicado nas FBR, mais concretamente nas funções multiquádricas, acarreta um enorme grau de importância na precisão do método, à semelhança do que acontece também com a escolha dos centros usados para definir a função. É impossível otimizar de forma paralela a escolha do número de centros e do fator de forma pois ambos estão intrinsecamente relacionados, pelo que se torna necessário adotar uma metodologia que permita conciliar ambos os parâmetros simultaneamente.

Com o aumento do fator de forma, dependendo do comportamento do conjunto de dados amostrais e da combinação de centros aplicada para definir a função multiquádrica, o valor do erro relativo médio apresenta comportamentos distintos, podendo possuir mais que um máximo e/ou mínimo local até atingir um momento em que se verifica um comportamento oscilatório, a partir do qual se torna impossível o tratamento da função, ocorrendo enormes variações do erro numa curta gama de intervalo para o fator de forma. Com o aumento gradual do fator de forma, a matriz de interpolação torna-se mal condicionada prejudicando a aproximação pretendida, pelo que o objetivo será a todo o instante obter um fator de forma fora desta zona e que minimize, na medida do possível, o REL.E associado à função, podendo este ocorrer para um qualquer valor.

Nos últimos anos, têm sido várias as estratégias adotadas por diferentes autores de forma a otimizar o valor do fator de forma, de modo a atingir um determinado objetivo (tipicamente a minimização do erro de interpolação associado) [20,22]. Correntemente, estes métodos de otimização requerem um maior tempo de processamento de forma a permitir reajustar o valor do fator de forma consoante a otimização pretendida, pelo que existem várias estratégias alternativas que visam obter este parâmetro de uma forma mais simples e direta, sem necessitar de iterar a solução final. Como seria expectável, estes métodos embora ofereçam uma maior rapidez de processamento pecam no que toca à precisão obtida, quando comparados com outros métodos de otimização, pelo que cabe ao utilizador ajuizar qual o fator que tem maior preponderância para o seu estudo. Não existindo nos dias de hoje um método aceite universalmente, optou-se por testar os mais populares e que melhores resultados têm oferecido ao longo dos anos, sendo estes os métodos de Hardy, Franke e de Fasshauer.

#### **3.3.1 Métodos de cálculo direto**

##### **3.3.1.1 Método de Hardy**

Hardy foi o primeiro a introduzir um método de cálculo para o fator de forma aplicado às funções multiquádricas, baseado na colocação dos centros. Esta estratégia consiste em multiplicar a distância média entre dois quaisquer centros vizinhos por uma constante pré-definida. Na Figura 5 tem-se uma representação arbitrária de colocação dos centros, num

espaço bidimensional, como forma de explicação do cálculo das distâncias. Semelhante raciocínio pode ser aplicado em qualquer dimensão do espaço.

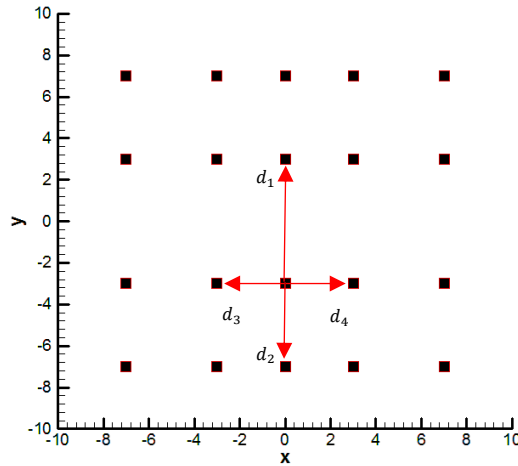


Figura 5: Distâncias associadas ao centro

O primeiro passo consiste em calcular a distância média entre os centros vizinhos para todos os centros pertencentes à aproximação da função. Tomando como exemplo o centro selecionado na Figura 5, obtém-se que:

$$d_{c1} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{4} \quad (3.16)$$

De seguida, somam-se todas as distâncias médias obtidas para todos os centros aplicados e divide-se pelo número de centros total:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n d_{cn}}{n} \quad (3.17)$$

Deste modo, multiplicando esta distância média por uma constante definida por Hardy como igual a 0,815 pode obter-se um fator de forma útil para a função de aproximação multiquádrica [1]:

$$\sigma_{Hardy} = 0.815 \times d \quad (3.18)$$

### 3.3.1.2 Método de Franke

Mais tarde, Franke propôs um valor para o fator de forma tendo em consideração não só a posição relativa de cada ponto conhecido da amostra, mas também a quantidade de centros utilizados, formulando-o da seguinte maneira:

$$\sigma_{Franke} = \frac{1.25 \times D}{\sqrt{n}} \quad (3.19)$$

Nesta notação  $D$  representa o diâmetro do menor círculo possível que contenha todos os pontos amostrais, enquanto que  $n$  representa novamente o número total de centros utilizados [2].

### 3.3.1.3 Método de Fasshauer

Um outro valor proposto popular para o fator de forma surgiu de Fasshauer, e que depende apenas da quantidade de centros utilizados na representação da função, sendo este o método mais simples de implementar:

$$\sigma_{Fasshauer} = \frac{2}{\sqrt{n}} \quad (3.20)$$

Todas estas metodologias de obtenção do fator de forma de um modo direto e rápido podem ser alargadas a uma qualquer dimensão do espaço e fornecer uma precisão aceitável à função de aproximação multiquádrica. No entanto, é possível obter melhores resultados alargando o tempo de processamento, o que dependendo da utilização de cada um poderá ou não ser benéfico, pelo que cabe ao utilizador ajuizar os prós e contras da situação. Nas duas seguintes secções descrevem-se dois métodos de otimização implementados que visam a dar resposta ao problema, com duas abordagens diferentes [8].

### 3.3.2 Método do alcance

Pode, à partida, ser complicado definir qual a melhor combinação de centros a aplicar de forma a obter um determinado objetivo na função gerada, pelo que se criou então um método cujo objetivo é encontrar a melhor solução possível (i.e., aquela que aplica a menor quantidade de centros possível) que cumpra um determinado objetivo estipulado pelo utilizador (por exemplo, a melhor solução que permita obter um REL.P inferior a 5%).

Ao aplicar o método com o intuito de encontrar a melhor solução possível com um REL.P inferior a 5%, o programa começa por testar todas as combinações possíveis de colocação com apenas 1 centro e averigua o erro para cada combinação com aumentos graduais do fator de forma (aumento este estipulado pelo utilizador, e que deve ser pequeno o suficiente para que teste a zona onde ainda não se verifica instabilidade na solução obtida devido ao mau condicionamento da matriz de interpolação), de modo a averiguar se é possível atingir o objetivo pré-definido. De realçar que quando o erro de interpolação aumenta bruscamente com o aumento do fator de forma, para uma qualquer combinação de centros, o método passa imediatamente para a combinação seguinte uma vez que é expectável que se tenha atingido a zona de solução instável que não tem interesse analisar. Ao atingir o número máximo de combinações para uma determinada quantidade de centros, o método aumenta a quantidade de centros aplicados na função, testa novamente todas as combinações de colocação de centros que respeitem a quantidade estipulada, e volta a aplicar igual procedimento a todas as

combinações possíveis. O método vai desta forma percorrer todas as combinações possíveis de colocação e quantidade de centros (dependendo obviamente do método de colocação em vigor) até encontrar uma solução que respeite as condições definidas pelo utilizador. Caso o método não encontre nenhuma solução possível até ao caso limite em que o número de centros é também igual ao número de pontos, é sugerido ao utilizador aliviar os requisitos pré-definidos.

A grande desvantagem deste método é o maior tempo de processamento necessário, uma vez que este necessita de averiguar o erro para cada combinação, e para cada aumento do fator de forma, até convergir a uma solução aceitável. No entanto, este método tem como grande vantagem permitir ao utilizador obter de forma automática a melhor solução possível para as suas condições, sem este ter de definir qualquer um dos parâmetros previamente, à exceção do REL.P máximo que deseja.

### **3.3.3 Método de otimização usando o FFSQP 3.7**

A ideia de implementar este método de otimização surgiu devido à evolução típica das curvas do REL.P versus fator de forma, de modo a encontrar de forma automatizada, sem intervenção do utilizador, o melhor fator de forma para a combinação de centros pré-definida, isto é, para o qual se obtém o menor REL.P. Este método de otimização baseado em gradientes visa ser aplicado em funções convexas, de forma a achar o valor da função para o qual a sua derivada é (aproximadamente) zero na vizinhança do ponto inicial em estudo, não sendo, no entanto, possível garantir que este ponto seja de facto um máximo ou mínimo absoluto da função, mas sim um máximo ou mínimo local na vizinhança em estudo. Tendo em conta o caso de estudo deste trabalho há interesse em aplicar uma minimização da função.

FFSQP 3.7 [*'FORTRAN Feasible Sequential Quadratic Programming - Version 3.7'*] é uma série de sub-rotinas que visam minimizar a solução de uma ou várias funções objetivo (com a possibilidade de nem existir nenhuma) dentro dos constrangimentos pré-definidos. Cabe ao utilizador providenciar uma estimativa inicial da solução, a partir da qual se inicia a aplicação do método, ao que será nesta vizinhança onde previsivelmente o método encontrará uma solução plausível às restrições impostas e que minimize o objetivo. Se esta estimativa inicial não respeitar os constrangimentos impostos, é gerada uma estimativa plausível a partir da qual se iniciará o processo iterativo. Cabe também ao utilizador definir as sub-rotinas englobando a(s) função(ões) objetivo e as restrições e constrangimentos aplicados ao problema. Este processo resolve equações diferenciais baseando-se na aproximação de derivadas através de diferenças finitas à frente, tendo a sua formulação por base a série de Taylor da função derivada. Este método de otimização aproxima os valores das derivadas de uma determinada função objetivo (que neste caso será o REL.P em função do fator de forma), e de forma autónoma determina o ponto para o qual a derivada é (aproximadamente) zero, ao que corresponde um mínimo local da função na vizinhança em estudo [33].

No decorrer do estudo foram aplicados os seguintes parâmetros de forma a garantir, na medida do possível, uma rápida e precisa aproximação, tendo estes sido sujeito a diversos testes de modo a compreender a sua influência:

Tabela 1: Parâmetros aplicados no método de otimização usando o FFSQP

FFSQP ['FORTRAN Feasible Sequential Quadratic Programming']	
Incremento	0,1E-6
Precisão requerida [%]	0,001
Valor inicial do fator de forma	0,00
Número máximo de iterações	100
Estimativa dos gradientes das funções	Diferenças finitas à frente

Existem sobretudo dois parâmetros que podem influenciar tremendamente o local de convergência do método: o incremento e o valor inicial onde se inicia o processo. No que toca ao incremento, afeta não só a rapidez de convergência como também tem impacto na solução obtida. Possuir um elevado incremento leva a que se tenha um passo de iteração maior, o que poderá permitir atingir a solução desejada mais rapidamente, no entanto pode também ser um fator que leve a solução para zonas de solução instável, ultrapassando o mínimo local desejado. No que toca agora ao valor inicial, este pode também ter impacto na solução uma vez que se pode já estar na vizinhança de um outro mínimo local da função que não o primeiro que aparece (quando a evolução da função é não monótona), o que pode ser benéfico ou prejudicial, dependendo da forma convexa adquirida pela função objetivo definida, uma vez que uma função pode ter vários mínimos locais, mas apenas um mínimo absoluto. Optou-se por definir o incremento igual a 0,1E-6 e como valor inicial um fator de forma igual a 0.

Um outro aspeto importante que afeta sobretudo o tempo de convergência do método diz respeito à precisão requerida da solução, uma vez que quanto maior a precisão requerida, maior o número de iterações necessárias de modo a que o método convirja, ao que se optou por definir uma precisão igual a 0,0001 para o erro relativo médio percentual. Reduzindo a precisão é possível obter soluções semelhantes (mas menos precisas) com inferior tempo de convergência, sendo que cabe ao utilizador aferir as suas necessidades.

### 3.4 Normalização dos dados

O algoritmo implementado computacionalmente está preparado para aproximar qualquer que seja o conjunto de dados, em qualquer dimensão do espaço, seja este com muitos ou poucos pontos, igualmente espaçados ou não, e sem qualquer limitação na dimensão das variáveis. Optou-se por normalizar todos os pontos pertencentes ao conjunto de dados num

intervalo de  $[-1,1]$  para todas as variáveis de entrada de forma a poder ter sempre uma percepção relativa da zona do domínio de interesse, sem averiguar quais os limites do domínio da variável em questão, tendo sempre a garantia que se encontra entre os limites definidos.

Esta abordagem visa uniformizar os conjuntos de dados com que se trabalha, independentemente da dimensão que estes possuem. Sabe-se à partida que o valor do fator de forma está intrinsecamente relacionado com o conjunto de pontos conhecidos e com a distância absoluta entre eles, pelo que esta abordagem tenta também uniformizar, na medida do possível, a gama de valores do fator de forma que possibilitam uma boa aproximação para a função. Uma vez que tipicamente os métodos computacionais têm dificuldade em operar com valores de grande magnitude, pretende-se também com este procedimento reduzir o valor absoluto das grandes escalas, de modo a não ter diferenças de magnitude das variáveis independentes aplicadas ao problema. Uma desvantagem desta abordagem é que torna impossível aplicar o método de Franke, uma vez que perdemos a diferença relativa (no que toca à dimensão) entre as variáveis de entrada, pelo que o diâmetro do menor círculo possível que englobe todos os pontos será sempre igual independentemente do conjunto de pontos utilizado. Como forma de contornar a situação, e de forma a testar também este método, ir-se-á testar uma função cujo conjunto de pontos conhecidos varie também entre -1 e 1, pelo que a normalização não provocará qualquer impacto na solução do problema.

Da mesma forma que os pontos de dados são normalizados, os centros selecionados ao longo do domínio também o terão de ser, de forma a manter a solução congruente. Na Figura 6 b) tem-se a representação dos centros colocados com o método de colocação 2 antes da normalização para um domínio com  $P(19,7)$  em que  $x \in [0,18]$  e  $y \in [0,6]$ , com um passo uniforme entre dois quaisquer pontos consecutivos igual a 1 para ambas as variáveis. Na Figura 6 c) encontra-se a distribuição dos centros após a sua normalização para  $C(11,5)$ . Na Figura 6 a) tem-se ainda uma representação do conjunto de dados utilizado antes da normalização, e que foi usado para este problema. Optou-se por aplicar a representação num espaço bidimensional uma vez que facilita a compreensão do problema, embora este método seja alargado a qualquer dimensão do espaço que se queira trabalhar.

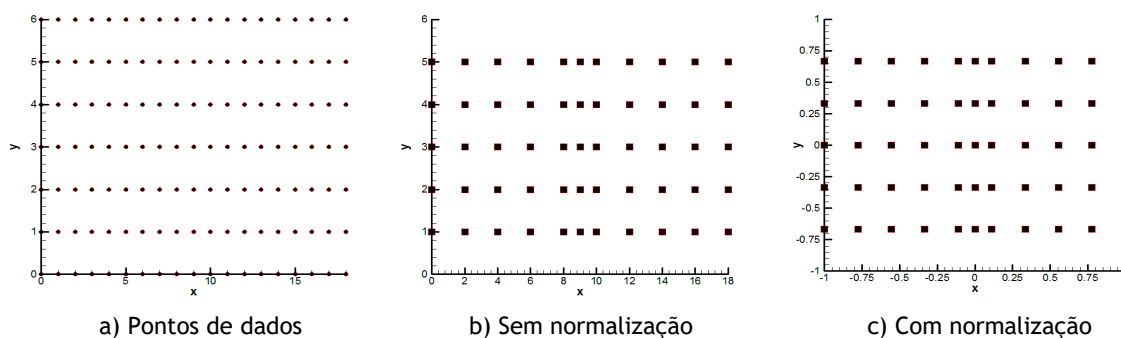


Figura 6: Exemplo de aplicação da normalização dos centros

# Capítulo 4

## Validação do método

Neste capítulo apresenta-se primeiramente uma análise a dois conjuntos de dados amostrais derivados de duas funções conhecidas num espaço bidimensional, com diferentes graus de complexidade, de forma a averiguar se o método está a ser corretamente aplicado e aferir os resultados obtidos, como forma de teste para mais tarde implementar na representação dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares. Posteriormente a análise é alargada a uma função com quatro variáveis independentes, em alusão às quatro variáveis definidas para se obterem os valores dos coeficientes aerodinâmicos.

### 4.1 Função axi-simétrica

Como forma de averiguar a boa implementação do programa e validar os métodos aplicados, optou-se por primeiramente fazer uma análise a um conjunto amostral de dados derivados de uma função axi-simétrica, de forma a também perceber o efeito da variação de alguns parâmetros de interesse, tais como o posicionamento dos centros ou a escolha do fator de forma. Optou-se por estudar a seguinte função:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 \quad (4.1)$$

De forma a dar início à representação da função através de aproximação multiquádrica, optou-se por definir o domínio da função com  $x, y \in [-1, 1]$ , e consequentemente com  $f_1 \equiv f_1(x, y) \in [0, 2]$ . Para discretizar a função adotaram-se 11 pontos numa linha paralela ao eixo  $x$  e 21 pontos numa linha paralela ao eixo  $y$ , ou  $P(11,21)$  segundo a notação previamente adotada, distribuídos uniformemente ao longo do domínio, o que perfaz um passo para as variáveis  $x$  e  $y$  igual a 0,2 e 0,1, respetivamente. Na Figura 7 tem-se uma representação esquemática da localização de todos os pontos de dados usados para discretizar a função, de forma a ser possível dar início à aproximação deste conjunto de dados através de funções multiquádricas.

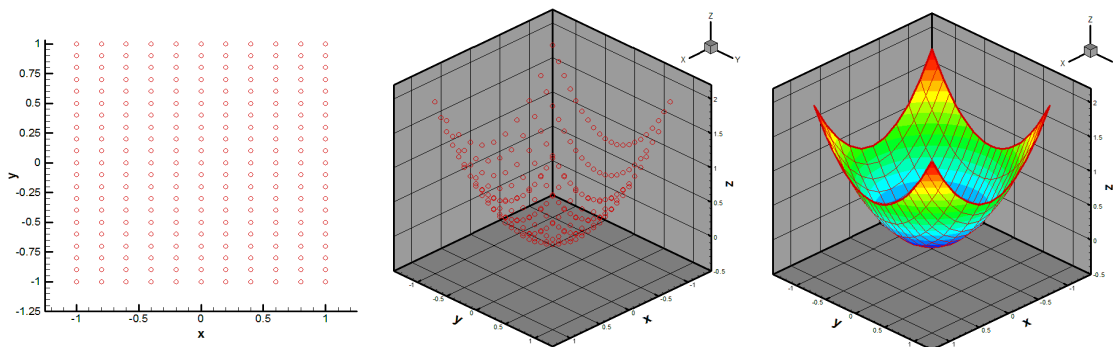


Figura 7:  $f_1$  - Conjunto de dados amostrais

### 4.1.1 Influência da localização dos centros

A forma de colocação dos centros no interior do domínio da função é sem dúvida um aspeto muito importante para perceber a forma como as superfícies quádricas emergem a partir desse ponto, e para visualizar a influência do fator de forma no aspeto das superfícies geradas. Numa primeira análise os centros são colocados manualmente no interior do domínio em pontos visualmente seleccionáveis e de interesse, e mais tarde, quando a quantidade aumentar, os métodos de colocação automática dos centros serão aplicados.

Na Figura 8 e Figura 9 encontram-se as representações 3D das funções multiquádricas geradas com recurso aos pontos de dados visíveis na Figura 7, com aumentos graduais do fator de forma. Foram usados 231 pontos discretos de forma a representar a função, e em ambas as aproximações multiquádricas foi apenas colocado um centro no plano XY nos pontos  $(0; 0)$  e  $(0; 0,5)$ , respetivamente. De notar que a representação real da função se encontra disponível na Figura 7, como forma de comparação geométrica entre esta e as funções multiquádricas geradas. Tal como esperado, a colocação de um centro no ponto mínimo da função, quando  $x = y = 0$ , é aquela que apresenta visualmente maiores semelhanças, pois a superfície quádrica existente (e única, pois tem-se apenas um centro) cria sempre uma superfície inclinada que converge para esse mesmo centro, que neste caso é de facto o ponto mínimo da função. No que toca à Figura 9, com um centro em  $(0; 0,5)$ , é visível que a função multiquádrica cria também uma zona inclinada que converge para o centro, mas que desta vez não representa o mínimo da função, o que prejudica a aproximação que se quer realizar. Nas Figura 8 e Figura 9, em baixo de cada representação da função obtida, tem-se também a representação gráfica do erro absoluto da função ao longo do domínio, para cada ponto de dado conhecido, de modo a se perceber quais os locais em que a função gerada tem mais dificuldade em se aproximar do real valor.

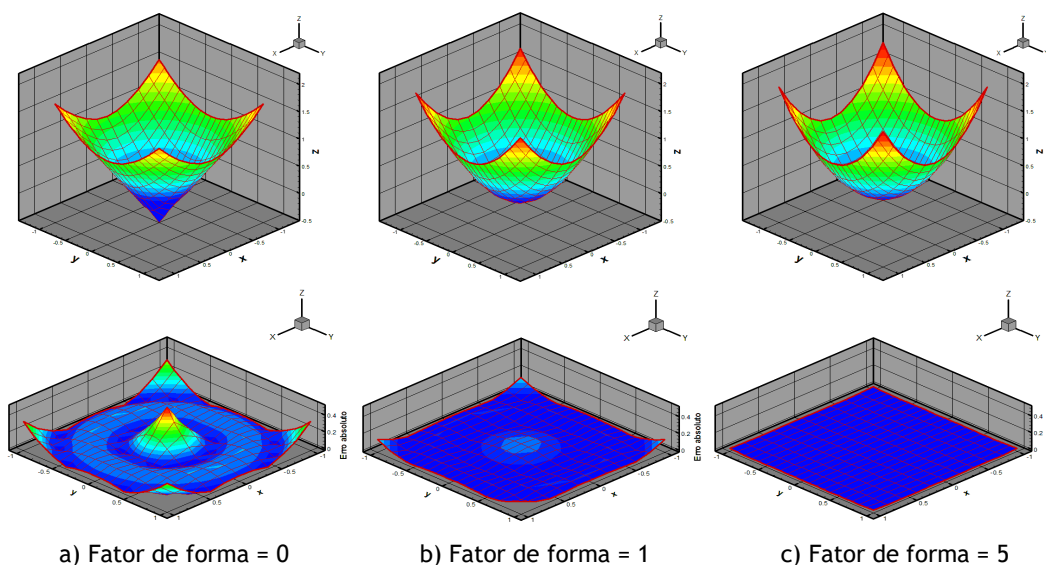


Figura 8:  $f_1$  - Centro  $(0; 0)$  - Representação da função e erro absoluto associado

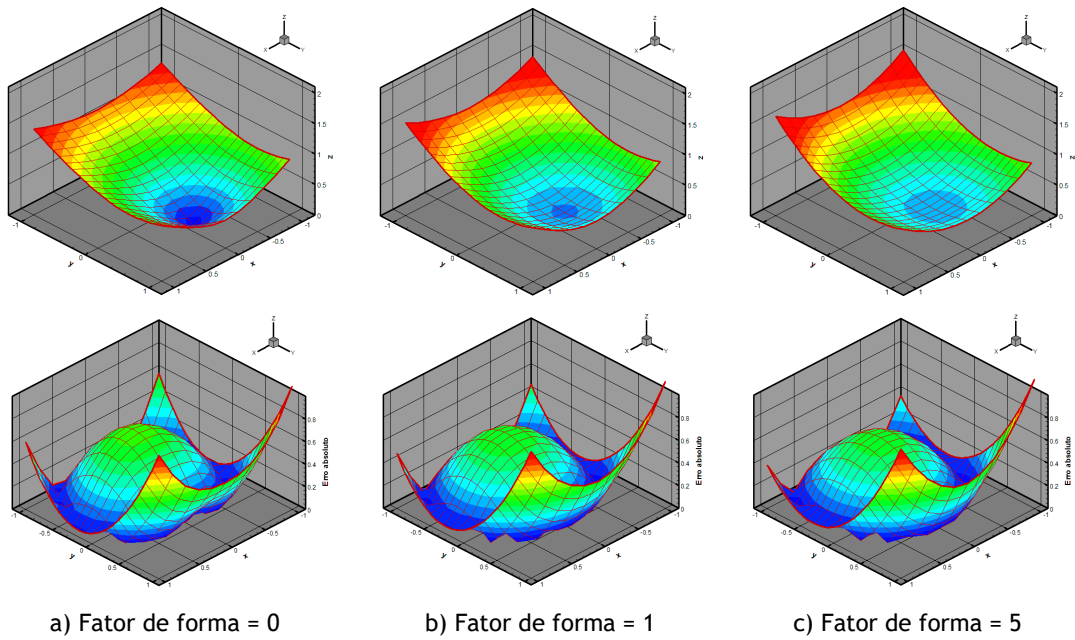


Figura 9:  $f_1$  - Centro (0; 0,5) - Representação da função e erro absoluto associado

Em ambas as figuras é possível analisar o efeito geométrico da variação do fator de forma, que afeta sobretudo a suavidade e abertura das funções, sendo que este parâmetro deve ser ajustado de forma a que a função gerada seja de facto uma boa aproximação com um baixo erro de interpolação, sempre que possível.

Na Figura 10 tem-se a evolução do REL.P com a variação do fator de forma entre 0 e 20. Mais uma vez se comprova que a colocação do centro no respetivo mínimo da função, no ponto (0; 0), fornece melhores resultados comparativamente a uma colocação aleatória num outro ponto qualquer do domínio. Na Tabela 2 é apresentado o valor exato dos parâmetros de análise do erro para os casos de estudo das Figura 8 e Figura 9, como forma de verificação do cálculo.

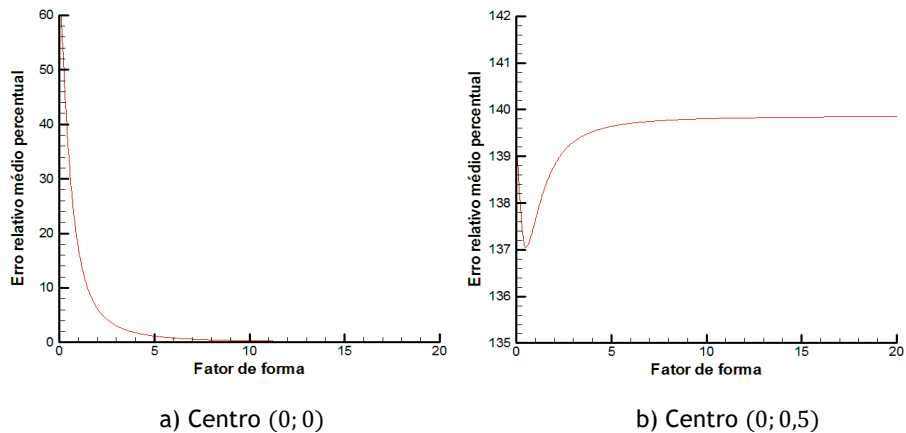


Figura 10:  $f_1$  - REL.P versus fator de forma

Tabela 2:  $f_1$  - Cálculo dos erros e incertezas associados às funções multiquádricas

	Centro (0;0)			Centro (0;0,5)		
	$\sigma = 0$	$\sigma = 1$	$\sigma = 5$	$\sigma = 0$	$\sigma = 1$	$\sigma = 5$
ABS	8,22E-2	2,85E-2	2,02E-3	0,32	0,31	0,31
REL.P	62,30%	17,20%	1,16%	139,19%	137,64%	139,64%
DP	6,10	6,10	6,10	6,10	6,10	6,10
RMS	0,11	3,57E-2	2,56E-3	0,38	0,38	0,38
R <sup>2</sup>	0,95	0,99	1,00	0,37	0,38	0,39
ABS.MAX	0,49	0,13	9,96E-3	1,09	1,12	1,14

De seguida colocou-se 2 centros nos extremos do domínio da variável  $x$ , nos pontos  $(-1,0)$  e  $(1,0)$ . Do ponto de vista geométrico, quando o fator de forma é igual a zero consegue-se identificar claramente a origem das duas superfícies quádricas que dão origem à função nos centros, não sendo por isso surpreendente que o erro absoluto máximo ocorra exatamente nesses pontos. Com o aumento do fator de forma a função aproxima-se gradualmente do caso real. A melhoria é mais rápida quando se tem apenas um centro no ponto mínimo, além de requerer também menor esforço computacional uma vez que a dimensão das matrizes auxiliares é menor, e a própria função é apenas definida com uma superfície quádrica, o que torna o cálculo da função mais rápido e com menores requisitos de memória.

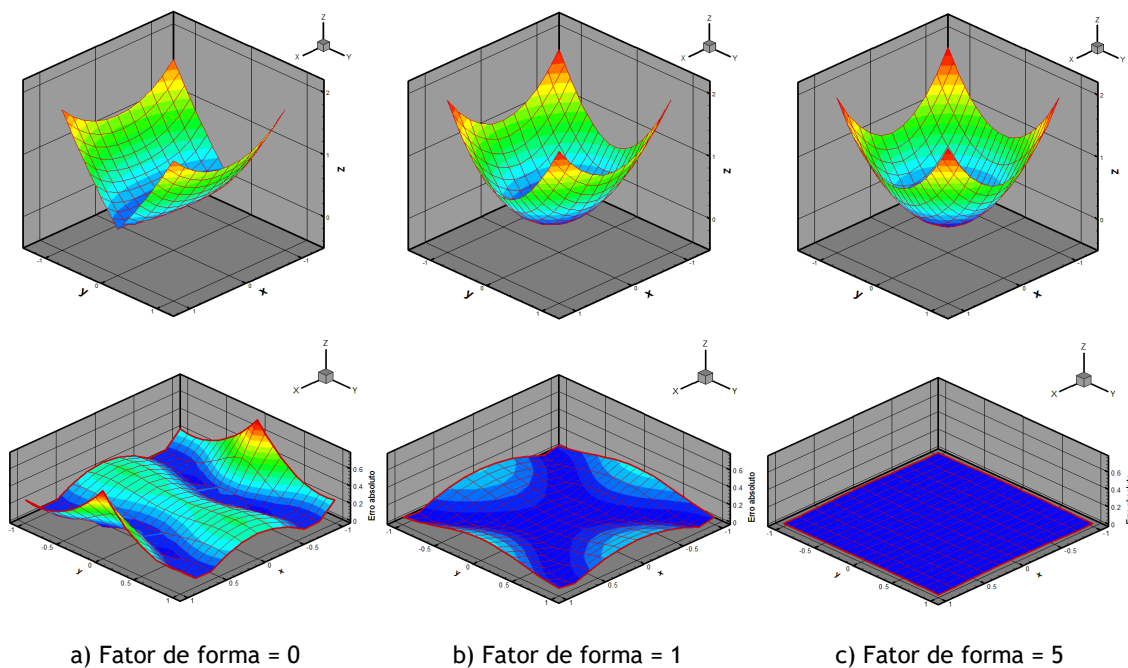


Figura 11:  $f_1$  - Centros  $(0, -1)$  e  $(0,1)$  - Representação da função e erro absoluto

### 4.1.2 Influência da quantidade de centros

Antes de analisar a influência da quantidade de centros na representação de funções multiquádricas com recurso aos métodos de colocação implementados, é necessário compreender a evolução do REL.P com a variação do fator de forma para uma qualquer combinação de centros particular. Como forma de exemplo, representa-se a evolução do REL.P com o fator de forma, para uma combinação arbitrária de centros colocados com o método de colocação 2. Optou-se por aplicar  $C(5,3)$  o que perfaz um total de 15 centros, ilustrado na Figura 12.

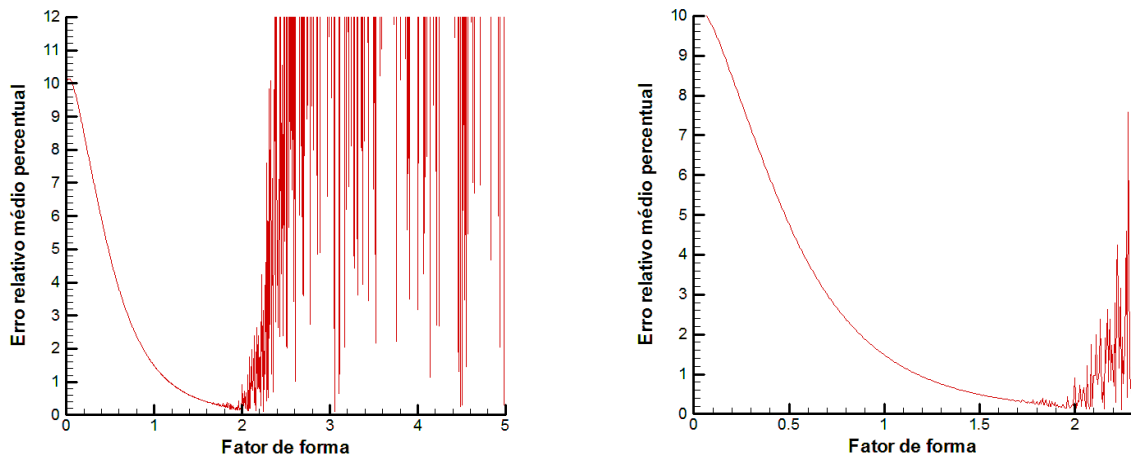


Figura 12:  $f_1 - C(5,3)$  - REL.P versus fator de forma

Para este caso particular, observou-se que o erro relativo médio associado às funções multiquádricas geradas tende a diminuir com o aumento gradual do fator de forma, até atingir uma situação limite em que o mau condicionamento das matrizes inviabiliza a obtenção de boas aproximações, sendo notória a enorme instabilidade da solução para fatores de forma superiores a aproximadamente 2. Quando o fator de forma está próximo de 2 obtém-se o mínimo local da função na vizinhança do ponto em que o fator de forma é igual a zero, ponto este que será intitulado como o mínimo útil da função, uma vez que é a solução que se pretende adotar para a combinação de centros selecionada, pois é a que oferece menor REL.P. Para este caso particular, o mínimo útil associado é também um mínimo absoluto da função (uma vez que para fatores de forma superiores a 2 se torna impossível contornar a instabilidade obtida).

Um aspeto interessante observado, para uma qualquer combinação de centros e para ambos os métodos de colocação, foi o valor do fator de forma para o qual se iniciava a instabilidade da solução (ou o mau condicionamento das matrizes). Aumentando a quantidade de centros utilizados para gerar a função, observou-se que o valor do fator de forma para o qual se começavam a verificar oscilações no valor do REL.P diminuía, embora o valor do REL.P útil nem sempre diminuísse comparativamente ao caso anterior que até possuía menos centros. À medida que se colocam mais centros em zonas em que a função real cresce, vão ser

necessários fatores de forma cada vez menores de forma a que os focos com origem nesses mesmos centros rapidamente se adaptem à real evolução da superfície, sem criar depressões nesses mesmos pontos. Desta forma, a melhor maneira de aproximar esta função é apenas com 1 centro no seu ponto mínimo em (0,0).

De seguida, e de forma a visualizar o efeito que a quantidade de centros tem na precisão da função multiquádrica, calculou-se o REL.P para todas as combinações de colocação de centros possíveis (aplicando os métodos de colocação descritos no capítulo 3), para diferentes fatores de forma. Tendo em conta a quantidade de pontos de dados utilizados para definir a função, tem-se um limite máximo de  $C(11,21)$ , estando estes distribuídos conforme o método aplicado. Tem-se assim presentes na Figura 13 a evolução do REL.P versus a quantidade de centros em cada uma das variáveis da função, para os dois métodos de colocação implementados, e para um fator de forma constante igual a zero. Na Figura 14 optou-se por utilizar o método de colocação 2 e aumentar o fator de forma para 0,5 e 1, respetivamente.

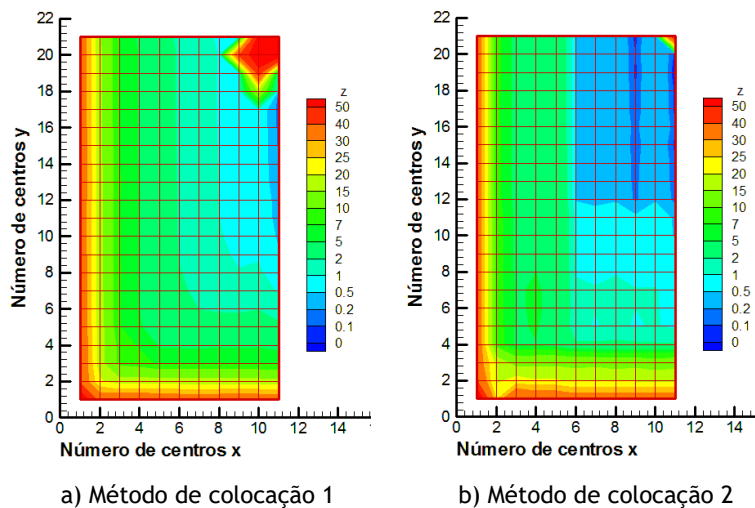


Figura 13:  $f_1$  - REL.P versus combinação de centros  $C(x,y)$

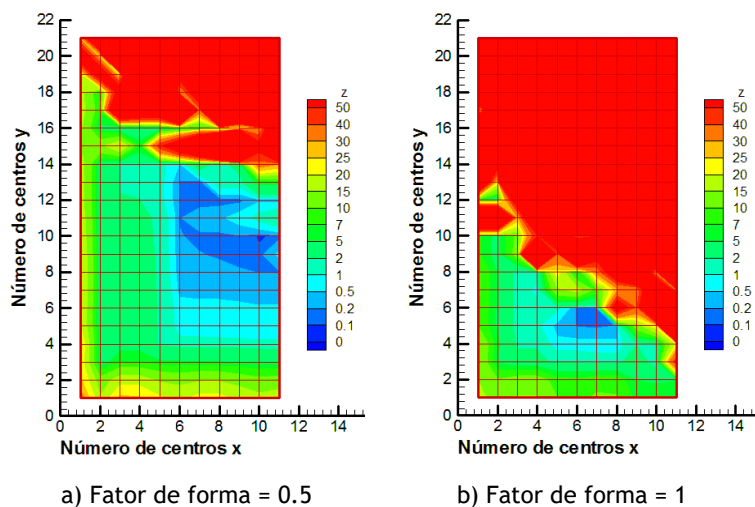


Figura 14:  $f_1$  - Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros  $C(x,y)$

É possível observar pela Figura 13 que à medida que a quantidade de centros aumenta, para um fator de forma constante igual a zero, o REL.P diminui para a grande maioria dos casos, exceto quando o número de centros é próximo ou igual ao número de pontos de dados. Comparando as duas representações (e olhando também aos valores obtidos) é possível verificar que para a grande maioria das combinações, o método de colocação 2 oferece uma melhor aproximação, com erros relativos médios inferiores, embora com uma diferença relativamente baixa entre eles, e que não é suficiente para excluir desde já a abordagem implementada com o método de colocação 1.

Como o objetivo final não será manter o fator de forma igual a zero, mas sim encontrar o seu valor para o qual se atinge o mínimo útil do erro, compararam-se os dois métodos para uma série de combinações de centros e analisou-se qual o que conseguia fornecer um menor REL.P para um qualquer fator de forma, tendo os resultados mostrado que o método de colocação 2 permitia novamente melhores aproximações, tal como Hardy já tinha mencionado nos seus trabalhos. O fator de forma correspondente a este ponto varia quando comparando os dois métodos, no entanto tal situação não aumenta a complexidade matemática nem o tempo de processamento da função, ao contrário do que acontece quando se aumenta a quantidade de centros, pelo que é preferível utilizar sempre a menor quantidade de centros possível, independentemente do fator de forma utilizado (tendo obviamente em atenção que o fator de forma não deve ultrapassar o limite para o qual se inicia a instabilidade da solução).

É possível comprovar pela Figura 14 que, à medida que a quantidade de centros aumenta, o valor do fator de forma para o qual se inicia a instabilidade da solução diminui. As zonas a vermelho correspondem a combinações de centros e de fator de forma cujo REL.P é alto e superior a 50%, ou por outras palavras as zonas onde ocorre instabilidade da solução, sendo que esta se alastra para combinações com menor quantidade de centros com o aumento gradual do fator de forma. Conclui-se, deste modo, que quanto mais centros se utilizar, maior será a matriz de interpolação, e mais cedo se inicia um comportamento oscilatório do erro com o aumento do fator de forma. No entanto, ao aumentar o fator de forma e para baixas quantidades de centros (i.e., na zona cuja solução é estável), é observável que é possível atingir menores erros relativos médios com o aumento do fator de forma, até se atingir o limite a partir do qual a solução fica instável.

Um outro aspeto importante, e que deriva do que foi visto anteriormente, ocorre quando se tem o número de centros igual ao número de pontos conhecidos, ou  $C(11,21)$ . Já se verificou que o valor do fator de forma para o qual se atinge a zona instável da solução diminui com o aumento do número de centros, pelo que quando cada ponto discreto é também um centro da função, é expectável que o valor do fator de forma respetivo seja muito pequeno. Através da observação gráfica da Figura 15, é notório que mesmo para uma escala muito reduzida do fator de forma, não se consegue encontrar uma zona de solução estável, sendo evidente um carácter altamente oscilatório e abrupto mesmo para um muito curto passo do fator de forma.

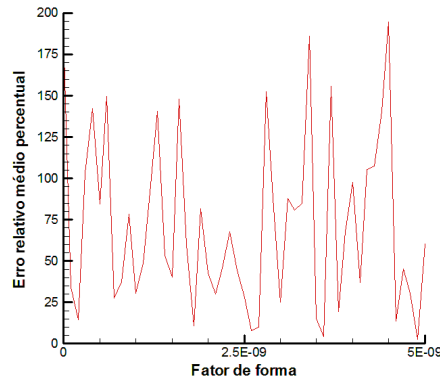


Figura 15:  $f_1 - C(11,21) - \text{REL.P}$  versus fator de forma

### 4.1.3 Aplicação da metodologia de Hardy

É também interessante comparar a metodologia proposta para gerar a função multiquádrica com a metodologia popularizada e descoberta por Hardy. Como forma de comparar os dois métodos repetem-se alguns dos casos de estudo apresentados acima, e analisam-se os resultados de ambos os métodos, de forma a averiguar se é ou não viável e benéfico utilizar a metodologia proposta. Em primeiro lugar analisa-se a situação em que se coloca apenas um centro no ponto mínimo da função, em  $x = y = 0$ , e traça-se o gráfico da evolução do erro relativo médio percentual versus o fator de forma para cada função gerada.

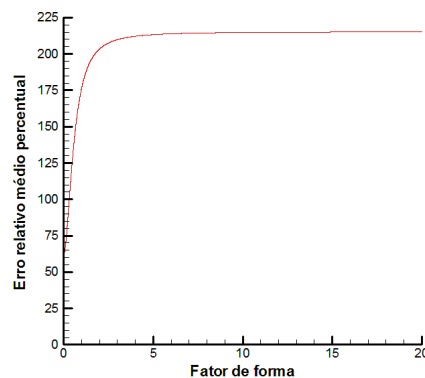


Figura 16:  $f_1 - \text{Centro } (0,0) - \text{REL.P}$  versus fator de forma (Hardy)

Consegue-se desde já identificar uma enorme diferença entre os dois métodos, com a metodologia de Hardy a apresentar resultados notoriamente piores para esta situação particular. Enquanto que com a metodologia de Hardy apenas se consegue um REL.P mínimo de cerca de 65%, com a metodologia proposta foi possível obter cerca de 0,1% para a mesma quantidade de centros (apenas um centro colocado no ponto  $(0,0)$ ).

Um outro aspeto relevante no que toca a esta metodologia, é que para esta combinação de centros o erro de interpolação aumenta gradualmente com o aumento do fator de forma, ao contrário do verificado anteriormente. Como forma de verificar se este padrão se mantinha para outras combinações, testou-se uma combinação de centros diferente com  $C(5,3)$

(colocados com recurso ao método de colocação 2), à semelhança do que foi feito anteriormente de forma a também comparar os dois resultados. Nesta situação, presente na Figura 17, o REL.P a partir do qual se iniciou um comportamento oscilatório (e também o mínimo útil da solução) é igual a aproximadamente 2%, enquanto que com a metodologia proposta foi possível obter um REL.P útil igual a aproximadamente 0,5%, tal como ilustrado na Figura 12, para aproximadamente o mesmo fator de forma igual a 2.

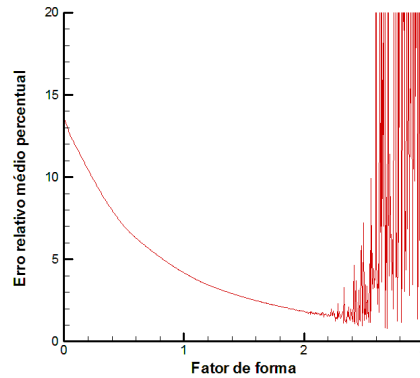


Figura 17:  $f_1 - C(5,3)$  - REL.P versus fator de forma (Hardy)

À semelhança do que se fez anteriormente, calculou-se o REL.P para todas as combinações possíveis de centros e para um fator de forma constante igual a 0, obtendo-se o gráfico apresentado na Figura 18, estando também presente o gráfico anteriormente obtido (com a metodologia proposta e para o mesmo fator de forma) na Figura 13 como forma de comparação. Uma vez que foi o método de colocação 2 aquele que forneceu melhores resultados, optou-se por apenas comparar estas duas abordagens.

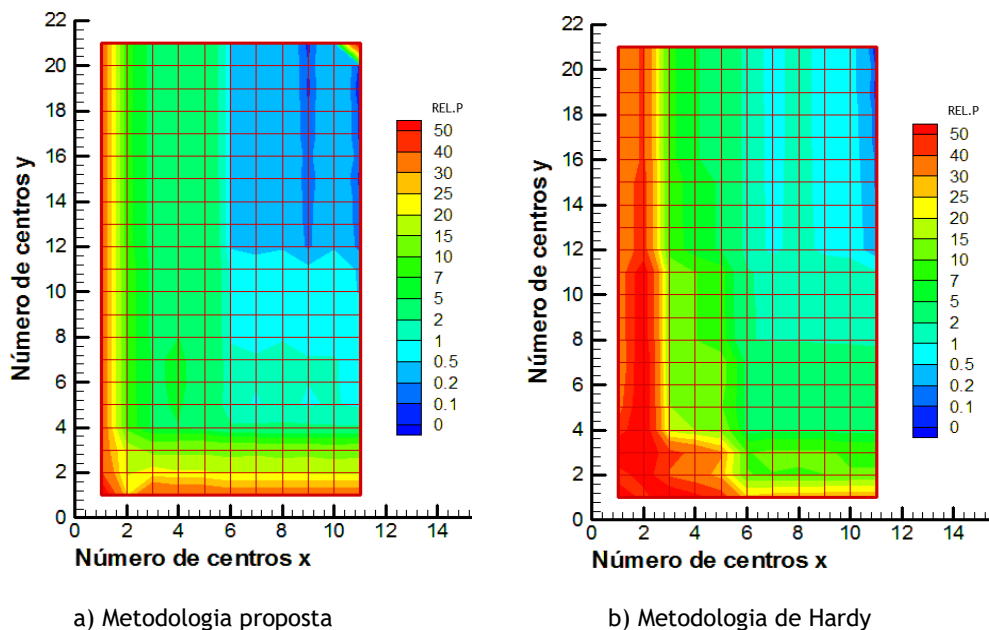


Figura 18:  $f_1$  - REL.P versus combinação de centros  $C(x, y)$  (Hardy)

É possível observar através da análise comparativa de ambas as representações que a metodologia proposta neste trabalho fornece melhores resultados para a grande maioria das combinações, sendo tal facto mais evidente principalmente para pequenas quantidades de centros. Uma vez que há interesse em utilizar a menor quantidade de centros possível, nota-se desde já uma clara vantagem em utilizar a metodologia proposta.

Uma das grandes vantagens de utilizar a metodologia de Hardy, e que é também perceptível pela visualização das figuras, ocorre quando temos um centro em cada um dos pontos de dados conhecidos, ou pela notação  $C(11,21)$ . Nesta situação, e quando o fator de forma é igual a zero, obtém-se uma interpolação quase perfeita dos dados conhecidos, com um REL.P igual a 6,48E-9%, particularidade descrita por inúmeros autores. Quando se aplica a metodologia proposta, torna-se, no entanto, impossível encontrar o fator de forma que minimize o erro de interpolação para esta combinação de centros, embora se consigam melhores resultados para as restantes combinações. Tal particularidade evidenciada pela metodologia de Hardy é também forma de validar o método.

#### 4.1.4 Obtenção do fator de forma

Ao longo dos últimos anos têm surgido várias abordagens, por diferentes autores, para calcular o fator de forma para uma qualquer FBR, de forma a otimizar um determinado parâmetro ou simplesmente de forma a obter uma solução relativamente razoável com o mínimo esforço computacional possível. Tal como abordado no capítulo 3, vão-se aplicar três métodos distintos como forma de validar a sua implementação: Primeiramente através de um simples cálculo direto (método de Franke, método de Fasshauer e método de Hardy) que requer um menor esforço computacional, de seguida através do método do alcance, e por fim aplicar o método de otimização usando o FFSQP.

##### 4.1.4.1 Cálculo direto

Quando se aplica um método de cálculo direto do fator de forma, ao invés de realizar diversos ajustes de forma a otimizar um determinado parâmetro, reduz-se o esforço computacional e o tempo de processamento necessário para gerar a função de aproximação final, pois é apenas necessário gerar a função uma única vez para o fator de forma obtido do cálculo efetuado *à priori*. A grande maioria dos métodos existentes relaciona este parâmetro com a quantidade e localização dos centros no interior do domínio, pelo que se optou por implementar uma normalização dos pontos de dados antes de se iniciar o cálculo da função, permitindo desta forma uniformizar, na medida do possível, os valores do fator de forma que não se encontram na zona instável da solução.

Optou-se por aplicar os três métodos implementados por Franke, Fasshauer e Hardy, por serem os mais populares na resolução de funções multiquádricas e devido aos bons resultados

que tipicamente fornecem, embora tal situação não seja generalizável uma vez que cada autor possui uma estratégia diferente de colocação dos centros (seja esta manual ou automatizada), que poderá fornecer bons resultados numa situação, mas piores noutras. Uma vez que se está também a implementar uma metodologia de resolução das funções multiquádricas diferente (metodologia proposta), e com aplicação de uma normalização aos dados, estas podem não ser as melhores soluções. Desta forma, apresenta-se a evolução do REL.P em função de cada combinação de centros possível, primeiro para o método de colocação 1 (Figura 19 a), b), c)) e de seguida para o método de colocação 2 (Figura 19 d), e), f)).

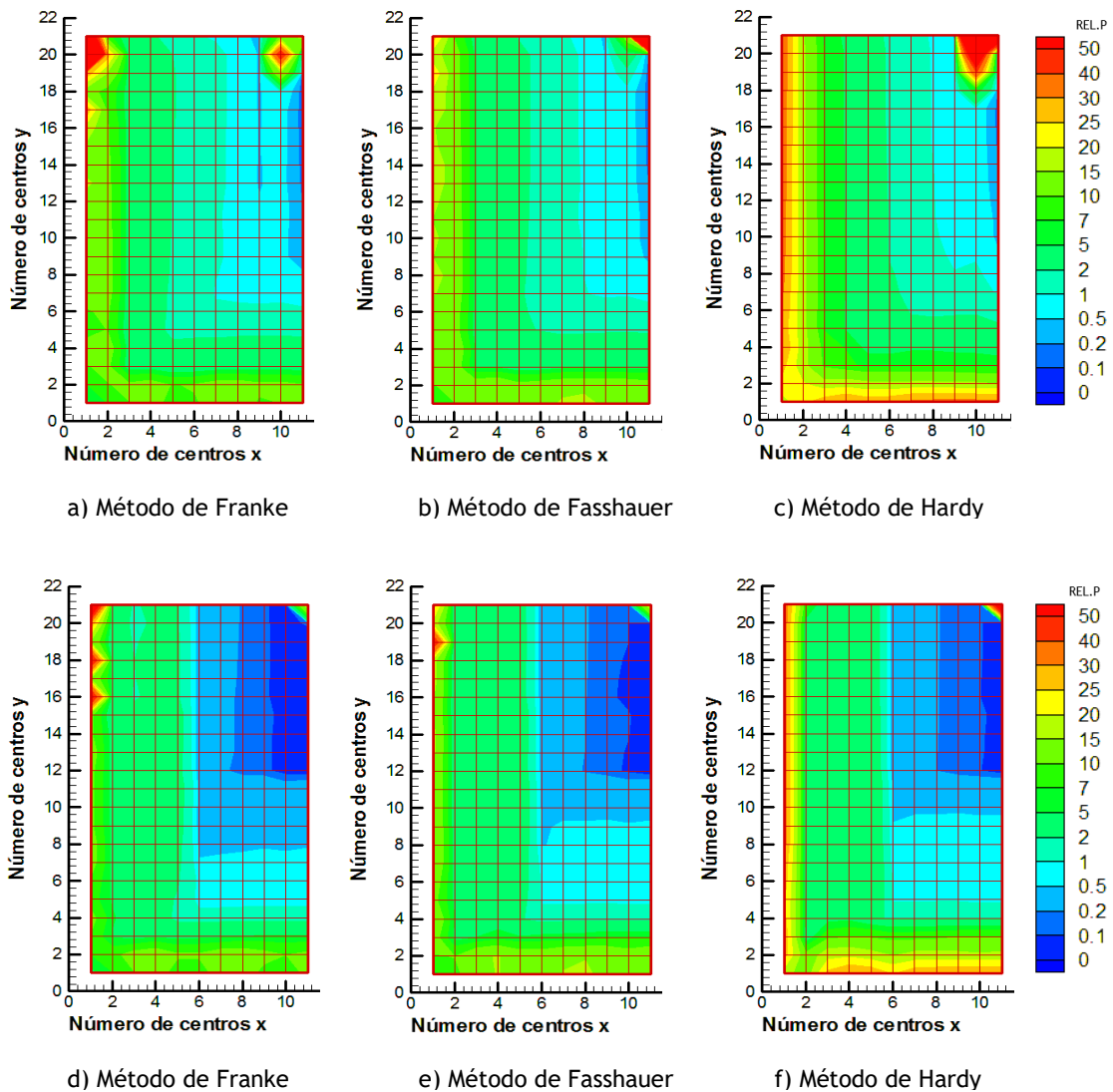


Figura 19:  $f_1$  - Métodos de cálculo direto: REL.P versus combinação de centros  $C(x, y)$

Através da análise da Figura 19, é possível observar que os três métodos implementados permitem que a grande maioria das combinações esteja na zona estável da solução, salvo raras exceções evidentes para o método de colocação 1, quando já existe uma quantidade considerável de centros (notório devido à coloração avermelhada dessas zonas, locais onde o REL.P é já bastante elevado comparativamente às restantes combinações). Um outro aspeto

relevante deriva da comparação entre os dois métodos de colocação dos centros, sendo notório à vista desarmada que o método de colocação 2 fornece na grande maioria das combinações erros relativos médios inferiores para a mesma quantidade de centros, e para o mesmo método de cálculo do fator de forma.

Comparando agora os três métodos de cálculo do fator de forma entre si, para o mesmo método de colocação dos centros, são notórias muitas semelhanças entre todos, existindo apenas pequenos detalhes que distinguem os seus resultados, pelo que se torna complicado privilegiar um deles em detrimento dos outros, pois não é clara, para esta função e para o domínio selecionado, uma diferença considerável nos resultados.

#### 4.1.4.2 Método do alcance

De seguida recorreu-se a um método de otimização alternativo intitulado de “método do alcance”, descrito no capítulo 3, com um passo de 0.01 para o fator de forma, de modo a obter uma solução que permitisse obter um REL.P inferior a 5, 1, 0,5 e 0,1%, respetivamente. Pretende-se aferir não só o bom funcionamento do método, mas também analisar até que ponto este método é razoável devido ao expectável elevado tempo de processamento que vai necessitar. Serão efetuadas apenas duas comparações como forma de validação: a) Metodologia proposta juntamente com o método de colocação 2, b) Metodologia de Hardy juntamente com o método de colocação 2. Optou-se por omitir o método de colocação 1 uma vez que das análises anteriores ficou assente que o método 2 fornecia melhores resultados para a grande maioria das situações. Na Tabela 3 mostram-se os resultados obtidos estipulando um REL.P máximo de 5 e 1%, enquanto que na Tabela 4 é definido um REL.P máximo de 0,5 e 0,1%. Em cada análise são testadas as situações a) e b) anteriormente descritas.

Tabela 3:  $f_1$  - Resultados derivados do método do alcance (1)

	REL.P < 5%		REL.P < 1%	
	a)	b)	a)	b)
Combinação de centros	$C(1, 1)$	$C(3, 3)$	$C(1, 1)$	$C(3, 3)$
Fator de forma otimizado	2,28	1,44	5,39	3,89
ABS	8,57E-3	1,89E-2	1,74E-3	3,26E-3
REL.P	4,97%	4,99%	0,99%	0,96%
Número de iterações	229	44711	540	44956
Tempo de geração [s]	0,375	78,762	0,766	86,172

Tabela 4:  $f_1$  - Resultados derivados do método do alcance (2)

	REL.P < 0,5%		REL.P < 0,1%	
	a)	b)	a)	b)
Combinação centros	$C(1, 1)$	$C(5, 5)$	$C(1, 1)$	$C(8, 9)$
Fator de forma otimizado	7,68	1,49	17,27	0,60
ABS	8,73E-4	1,85E-3	1,75E-4	5,09E-4
REL.P	0,50%	0,49%	0,10%	0,10%
Número de iterações	769	47756	1728	58182
Tempo de geração [s]	1,09	102,09	2,58	217,78

Mais uma vez, e à semelhança do que já se tinha verificado anteriormente, é notório que se consegue obter melhores resultados (principalmente para baixas quantidades de centros) com a metodologia proposta de resolução das funções multiquádricas, comparativamente à metodologia de Hardy. Consegue-se desta forma também garantir o bom funcionamento e validação deste método, que procura descobrir a menor quantidade de centros que respeite uma dada condição estipulada pelo utilizador, que neste caso foi atingir um determinado erro relativo médio percentual. Foi também notório, particularmente para a metodologia de Hardy, a sua enorme desvantagem no que toca ao elevado tempo de processamento necessário para encontrar uma combinação que cumpra os requisitos, característica que é cada vez mais acentuada à medida que a dimensão do problema aumenta.

#### 4.1.4.3 Método de otimização usando o FFSQP

Após analisar a evolução típica das curvas do REL.P versus fator de forma para uma qualquer combinação de centros, surgiu a ideia de implementar um método de otimização com recurso ao programa FFSQP que permitisse calcular automaticamente o fator de forma que corresponde ao mínimo útil da função sem necessitar de visualizar diretamente a curva do gráfico. Este procedimento visa também melhorar o desempenho comparativamente ao método do alcance, principalmente no que toca ao tempo de processamento necessário, com a particularidade de ser necessário inserir a combinação de centros que se quer testar à *priori*, de forma a também reduzir a complexidade e tempo de convergência necessários. Todos os parâmetros aplicados foram descritos no capítulo 3 aquando da definição desta abordagem.

Optou-se por estudar seis combinações de centros arbitrárias, e simultaneamente comparar os resultados obtidos com este método com os resultados provenientes dos métodos de cálculo direto, de modo a validar o método implementado com o FFSQP, e ao mesmo tempo

averiguar se existe uma diferença significativa nos resultados obtidos, aplicando em todas as situações o método de colocação 2. Tem-se ainda presente na Figura 20 a evolução do REL.P versus fator de forma para cada uma das combinações testadas, de modo a averiguar se o método do FFSQP está de facto a convergir para o valor pretendido, o mínimo útil da função (i.e., o mínimo local da função na vizinhança em estudo, que corresponde a um fator de forma igual a zero).

Tabela 5:  $f_1$  - Resultados derivados do método com FFSQP e cálculo direto

	FFSQP	Método de Franke	Método de Fasshauer	Método de Hardy
<b>Combinação de centros a)</b>	<b>C(1, 1)</b>	<b>C(1, 1)</b>	<b>C(1, 1)</b>	<b>C(1, 1)</b>
Fator de forma	63,9766	2,50	2,00	2,00
REL.P	7,358E-3%	4,224%	6,211%	6,211%
<b>Combinação de centros b)</b>	<b>C(3, 1)</b>	<b>C(3, 1)</b>	<b>C(3, 1)</b>	<b>C(3, 1)</b>
Fator de forma	18,965	1,44	1,155	0,489
REL.P	5,55E-2%	9,88%	13,10%	26,81%
<b>Combinação de centros c)</b>	<b>C(3, 3)</b>	<b>C(3, 3)</b>	<b>C(3, 3)</b>	<b>C(3, 3)</b>
Fator de forma	3,1248	0,833	0,666	0,407
REL.P	0,130%	3,398%	4,656%	7,387%
<b>Combinação de centros d)</b>	<b>C(5, 5)</b>	<b>C(5, 5)</b>	<b>C(5, 5)</b>	<b>C(5, 5)</b>
Fator de forma	1,2975	0,50	0,40	0,306
REL.P	0,100%	1,222%	1,556%	1,876%
<b>Combinação de centros e)</b>	<b>C(8, 6)</b>	<b>C(8, 6)</b>	<b>C(8, 6)</b>	<b>C(8, 6)</b>
Fator de forma	0,879	0,361	0,289	0,246
REL.P	0,1530%	0,534%	0,677%	0,842%
<b>Combinação de centros f)</b>	<b>C(11, 21)</b>	<b>C(11, 21)</b>	<b>C(11, 21)</b>	<b>C(11, 21)</b>
Fator de forma	0,306	0,164	0,132	0,121
REL.P	89,03%	18,82%	21,02%	84,07%

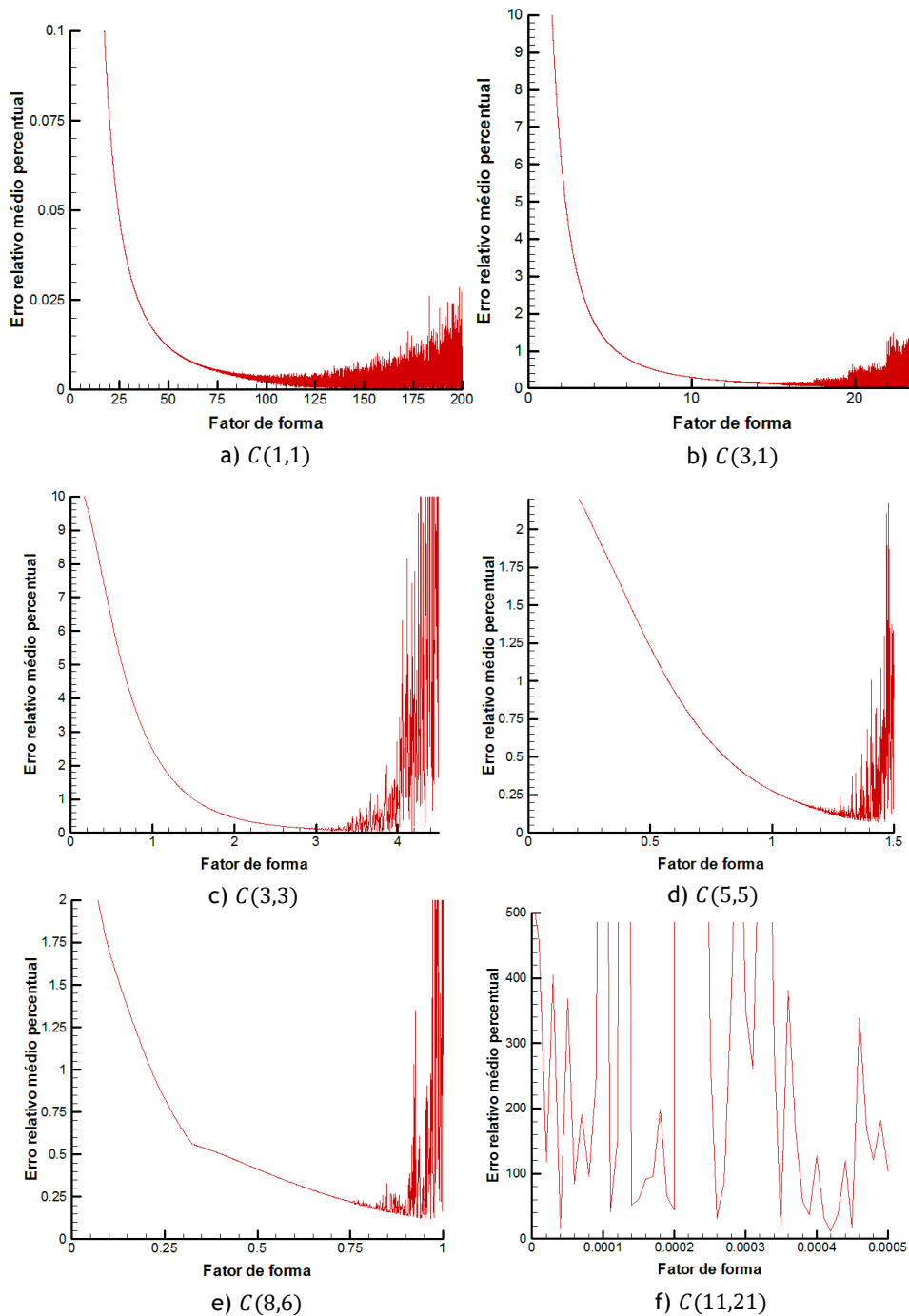


Figura 20:  $f_1$  - Método de otimização usando o FFSQP: REL.P versus fator de forma

Existem combinações onde não foi possível atingir um fator de forma pertencente à zona não instável da solução, como por exemplo na combinação  $C(5,5)$ , tornando-se evidente pela Figura 20 que com um fator de forma igual a aproximadamente 1,3 já se está numa zona mal condicionada. O método usando o FFSQP, de forma autónoma, por vezes gera incrementos excessivos no fator de forma que levam a solução para zonas já instáveis, no entanto, foi possível obter soluções relativamente boas, com erros relativos médios percentuais próximos do caso ideal, e bastante mais aceitáveis do que com os métodos de cálculo direto.

## 4.2 Função não axi-simétrica

A função axi-simétrica anterior foi útil para compreender alguns dos efeitos presentes na criação de uma função de aproximação multiquádrica, no entanto é necessário complicar um pouco mais a função que se quer aproximar como forma de verificar se o método implementado está de facto a gerar os resultados desejados, pelo que se optou por uma função não axi-simétrica, crescente em todo o domínio com foco no ponto  $(0,0)$ , à semelhança do que acontecia com a função anterior. Optou-se então pela seguinte função:

$$f_2(x,y) = 4x^2 + y^2 \quad (4.2)$$

De forma a ter-se um domínio mais abrangente, e de maneira a validar a implementação da normalização dos pontos de dados discretos (uma vez que no caso anterior os próprios pontos já estavam compreendidos entre -1 e 1) optou-se por seleccionar  $P(21,21)$ , o que perfaz um total de 441 pontos pertencentes à função num domínio com  $x,y \in [-10,10]$ , com uma distância unitária entre dois quaisquer pontos consecutivos, tal como representado graficamente na Figura 21.

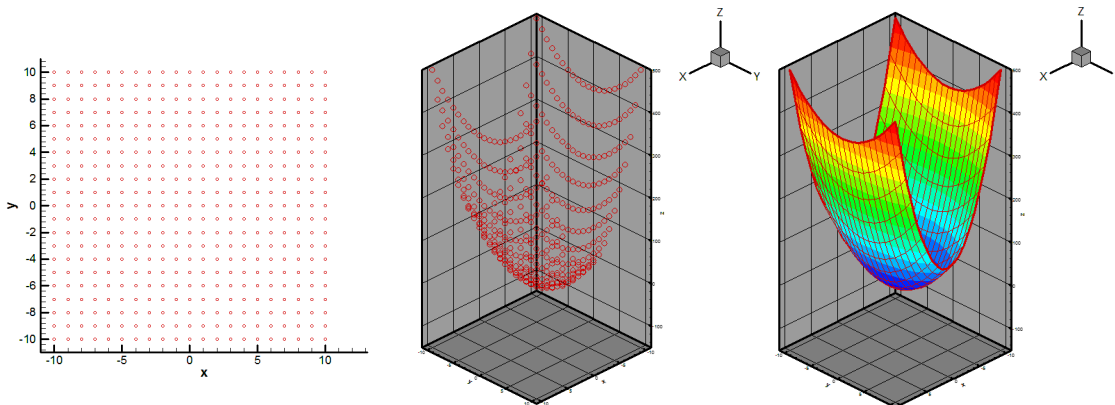


Figura 21:  $f_2$  - Conjunto de dados amostrais

### 4.2.1 Influência da localização dos centros

À semelhança do que foi feito no exemplo anterior, e que tinha fornecido resultados bastante positivos, optou-se por representar os pontos de dados seleccionados anteriormente com apenas um centro colocado no ponto mínimo da função, que corresponde também ao ponto  $(0,0)$ . No entanto, para esta situação, a colocação de apenas um centro não fornece uma boa aproximação, estando representado na Figura 22 a superfície da função de aproximação, juntamente com a variação do erro absoluto (em módulo) para cada ponto discreto conhecido.

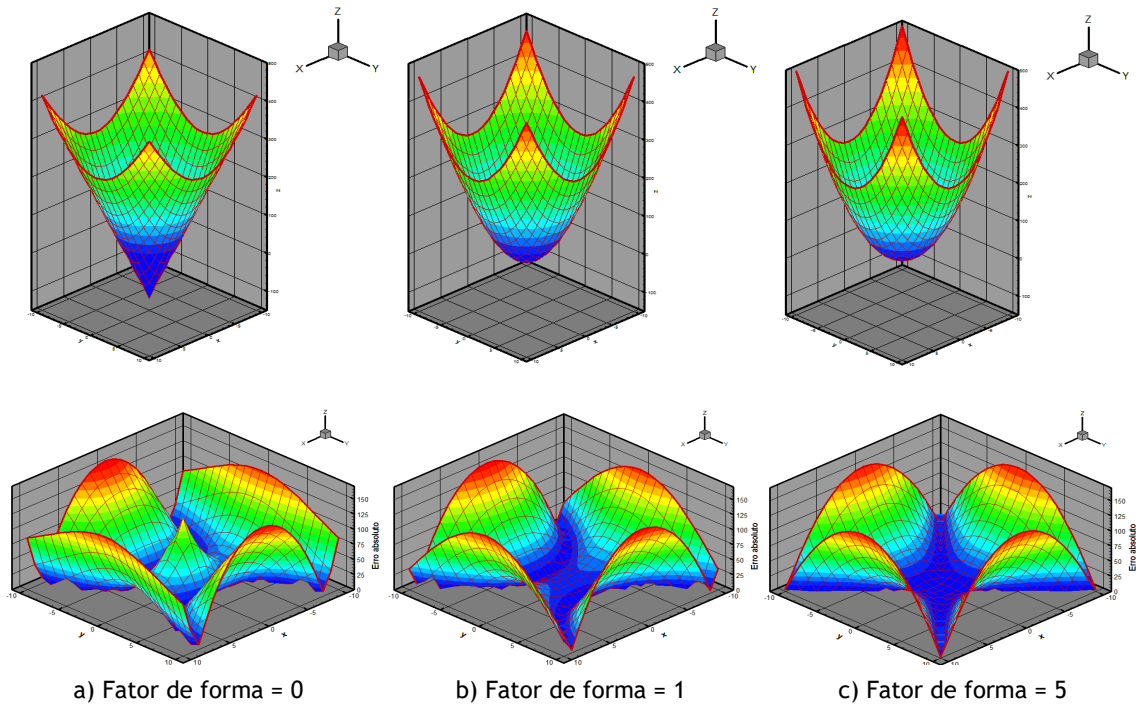


Figura 22:  $f_2$  - Centro (0,0) - Representação da função e erro absoluto associado

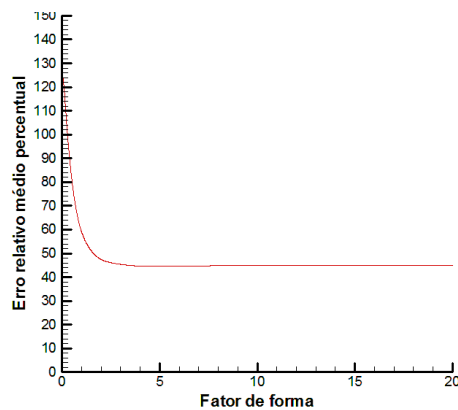


Figura 23:  $f_2$  - Centro (0,0) - REL.P versus fator de forma

Com a utilização de apenas um centro, colocado no meio do domínio dos pontos a aproximar e que coincide com o mínimo da função, o valor do REL.P diminui até um fator de forma de cerca de 1,5, a partir do qual se evidencia uma quase estagnação no seu valor. Com o aumento do fator de forma entre 0 e 1,5, o erro absoluto da aproximação no ponto (0,0) diminui, possibilitando uma melhor aproximação na vizinhança do centro e diminuindo o erro relativo médio. Nas restantes zonas do domínio, o aumento do fator de forma não altera significativamente o erro absoluto da função, obtendo-se um REL.P a rondar os 48% para qualquer fator de forma superior a 1,5.

Torna-se claro que, para esta função, a colocação de um centro no seu ponto mínimo não fornece bons resultados, sendo necessário aumentar a sua quantidade ao longo do domínio.

Uma das estratégias mais populares de colocação dos centros, recorre ao método dos mínimos quadrados, de forma a colocar os mesmos em locais onde existam depressões ou picos da função, método este que fornece muito bons resultados, principalmente em aproximações topográficas devido às características típicas dos terrenos [1]. Nesta situação, tal abordagem seria prejudicial, da mesma maneira que é expectável que também o seja na representação dos coeficientes aerodinâmicos, ao que se descartou esta abordagem.

#### 4.2.2 Influência da quantidade de centros

Muitos dos estudos realizados que envolvem funções de aproximação multiquádrica, por vezes não se preocupam em compreender os efeitos que o fator de forma provoca na aproximação, mantendo este parâmetro constante para todas as aplicações e tipicamente igual a 0. Embora haja interesse em otimizar o fator de forma, é útil e interessante visualizar os resultados quando este parâmetro é igual a zero. À semelhança do que se fez no caso de estudo anterior, apresenta-se na Figura 24 a representação do REL.P em função do número de centros, para todas as combinações possíveis de colocação com os métodos 1 e 2. Nas figuras a) e b) utilizou-se a metodologia proposta das funções multiquádricas, e em c) e d) a metodologia aplicada por Hardy.

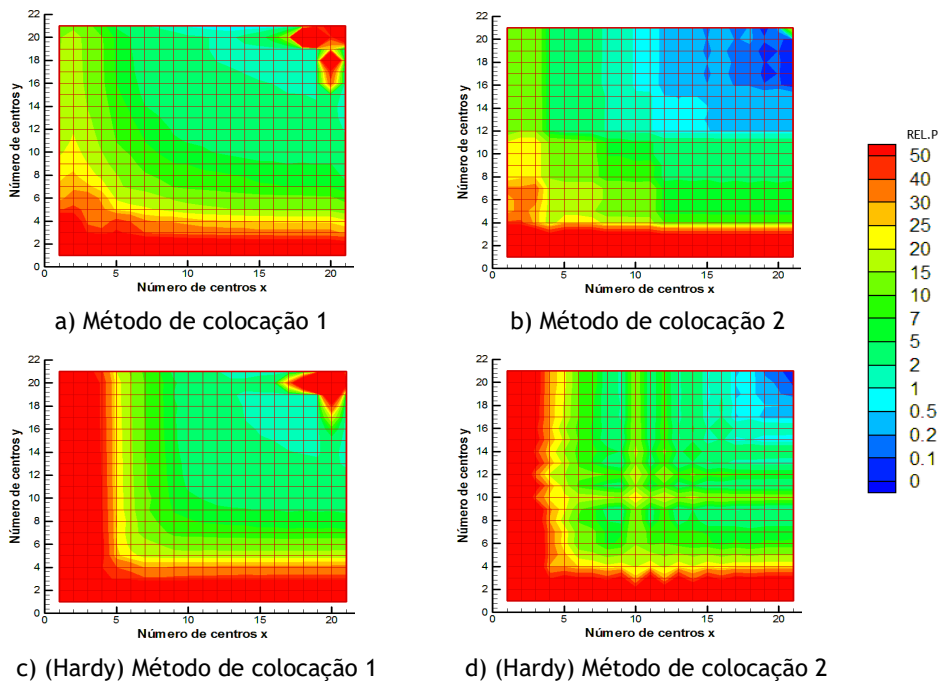
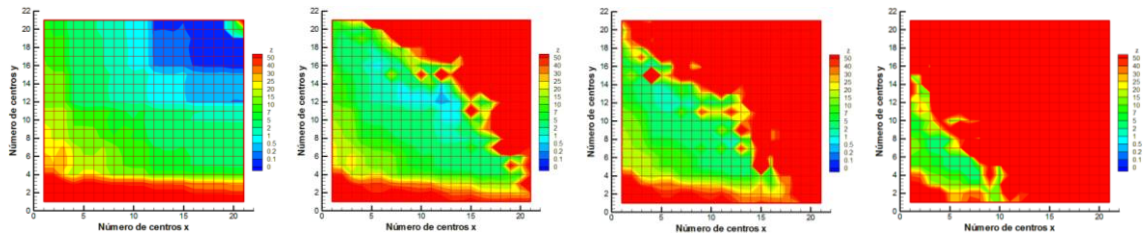


Figura 24:  $f_2$  - REL.P versus combinação de centros  $C(x, y)$

Mais uma vez pode concluir-se que a metodologia proposta permite melhores aproximações quando o fator de forma é igual a zero para a grande maioria das combinações, quando se aplica o mesmo método de colocação. Comparando os dois métodos de colocação entre si, e para a mesma metodologia, é novamente observável que o método de colocação 2 oferece melhores resultados para uma grande parte das combinações.



a) Fator de forma = 0.2    b) Fator de forma = 0.4    c) Fator de forma = 0.5    d) Fator de forma = 1

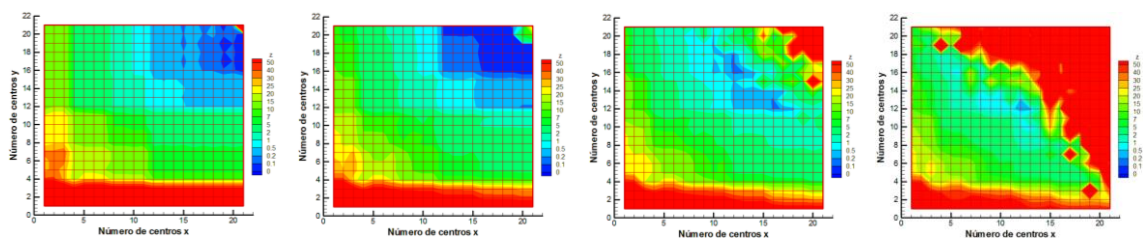
Figura 25:  $f_2$  - Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros  $C(x, y)$

Ao aumentar o fator de forma, e aplicando o método de colocação 2, observa-se na Figura 25 novamente o alastramento da zona de solução instável para cada vez menores quantidades de centros, e um gradual benefício para baixas quantidades de centros, até se atingir um limite em que a solução é instável para todas as combinações de centros possíveis.

### 4.2.3 Solução alternativa: sem normalização do problema

Tal como abordado no capítulo 3, optou-se por normalizar os dados do problema entre -1 e 1 como forma de facilitar a interpretação dos resultados e, ao mesmo tempo, aproximar na medida do possível a gama de valores aceitáveis para o fator de forma, uma vez que este parâmetro depende não só da quantidade de pontos e de centros, mas também da distância absoluta entre eles, pelo que com esta abordagem consegue-se limitar este fator.

Um das questões que rapidamente se levantou foi se esta abordagem poderia prejudicar a solução obtida, tendo em conta o comportamento típico dos gráficos do erro relativo médio versus fator de forma para uma qualquer combinação de centros. Assim, sem aplicar qualquer tipo de normalização aos pontos de dados (nem aos centros da função), obteve-se a seguinte evolução do REL.P versus combinação de centros presente na Figura 26, com o aumento gradual do fator de forma entre 0 e 4.



a) Fator de forma = 0    b) Fator de forma = 2    c) Fator de forma = 3    d) Fator de forma = 4

Figura 26:  $f_2$  - Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros  $C(x, y)$

À semelhança do que se verificou quando se aplica uma normalização (presente na Figura 25), com o aumento gradual do fator de forma e para altas quantidades de centros começa-se a alastrar a zona instável do problema. As representações do REL.P quando o fator de forma é igual a zero são exatamente iguais com e sem normalização, tal como a evolução da função

com o aumento gradual do fator de forma. A superfície obtida com normalização e com um fator de forma igual a 0,2 é quase igual à superfície obtida sem normalização e com fator de forma igual a 2, embora com ligeira diferença pontual, mas com igual tendência.

De modo a verificar se seria possível obter melhores aproximações sem aplicação de normalização (embora já se saiba que a tendência para gerar instabilidade se mantém em ambas as situações), optou-se por testar uma combinação arbitrária de centros  $C(5,5)$ , e analisar a evolução do REL.P versus fator de forma, de modo a aferir se a zona instável da solução ocorre mais cedo, mais tarde ou em semelhante altura comparando os dois casos. De realçar que, uma vez que o fator de forma tem magnitude diferente para ambas as situações, a maneira mais prática de averiguar se a instabilidade ocorre na mesma altura é através do valor obtido para o REL.P.

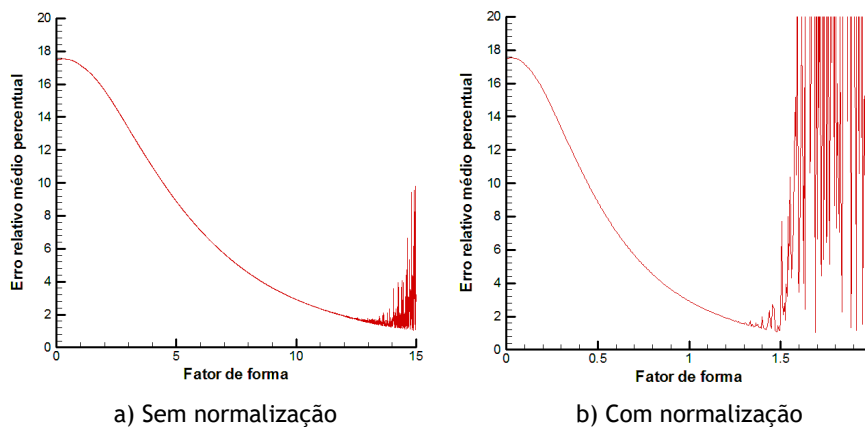


Figura 27:  $f_2 - C(5,5)$  - REL.P versus fator de forma

Tal como era expectável e visível na Figura 27, em a) inicia-se um carácter instável para um fator de forma próximo de 12 e com um REL.P de cerca de 1,9%, enquanto que em b) ocorre para um fator de forma próximo de 1,3 e com um REL.P de aproximadamente também 1,9%, dando a ideia que a razão aplicada na normalização é muito semelhante à razão do fator de forma, de modo a obter igual REL.P em ambas as abordagens, uma vez que as curvas presentes na Figura 27 são muito semelhantes. Deste modo comprova-se que a aplicação de normalização não afeta negativamente a aproximação realizada.

#### 4.2.4 Obtenção do fator de forma

##### 4.2.4.1 Cálculo direto

À semelhança do que se fez para a função anterior, vai-se calcular o fator de forma para a função multiquádrica com recurso a modelos matemáticos, para obter um valor aceitável, mas não ótimo para este parâmetro. No que toca ao método de Franke, e dada a sua formulação, não é possível aplicar uma normalização no problema uma vez que perder-se-ia a

diferença relativa na dimensão de ambas as variáveis de entrada, e o método necessita que esta se mantenha. Uma vez que já foi verificado que a evolução do erro relativo médio é igual com e sem normalização, ao aplicar o método de Franke sem normalização este vai originar fatores de forma maiores, mas com igual evolução do erro relativo médio em função da quantidade de centros. À semelhança do que foi feito anteriormente, vão aplicar-se os métodos de Franke, Fasshauer e de Hardy, primeiro com o método de colocação 1 (Figura 28 a), b) e c)) e depois com o método de colocação 2 (Figura 28 d), e) e f)).

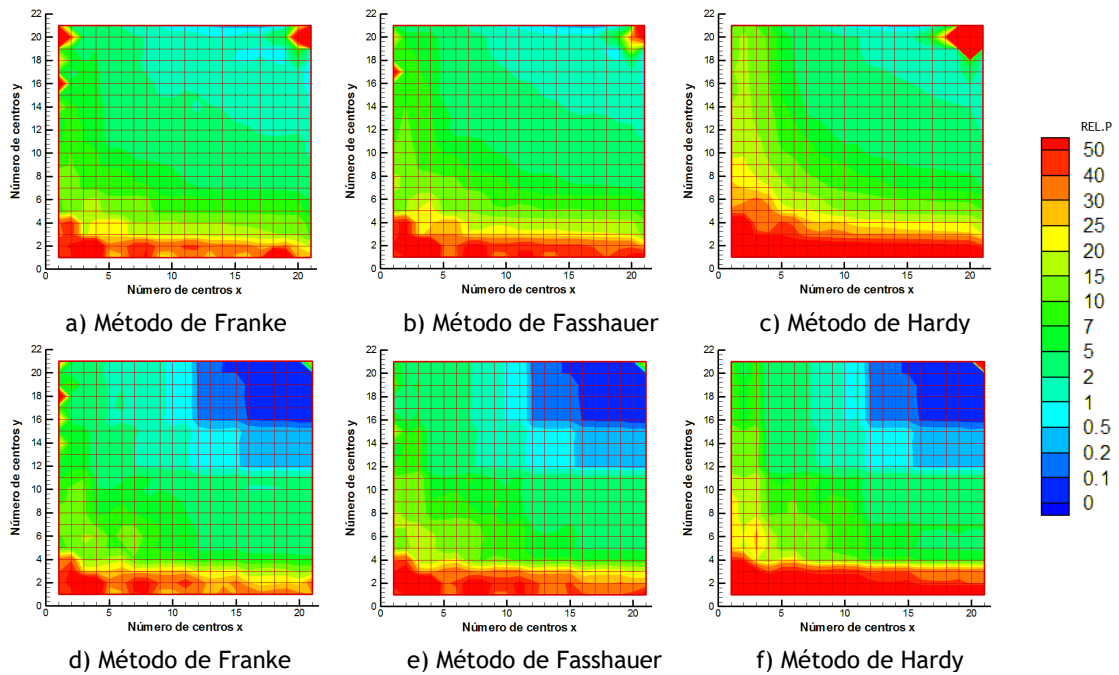


Figura 28:  $f_2$  - Métodos de cálculo direto: REL.P versus combinação de centros  $C(x, y)$

Mais uma vez é evidente que o método de colocação 2 fornece melhores resultados comparativamente ao método 1, tendência esta já verificada no caso anterior. Voltam também a ser visíveis as más aproximações quando o número de centros é igual ao número de pontos, estando a solução para qualquer fator de forma numa zona instável, uma vez que mesmo para um fator de forma igual a zero a solução se degrada comparativamente a soluções com menor quantidade de centros.

#### 4.2.4.2 Método do alcance

De seguida recorreu-se ao método do alcance, descrito no capítulo 3, com um passo de 0,01 para o fator de forma, para se obter uma solução que permitisse obter um REL.P inferior a 5, 1, 0,5 e 0,1%, respetivamente. Sendo esta função mais complexa do que a estudada anteriormente, é expectável que o tempo de processamento aumente, uma vez que é esperado que sejam necessárias mais iterações até que o método consiga convergir para a solução pretendida, com a menor quantidade de centros possível. Serão efetuadas apenas duas comparações como forma de validação: a) Metodologia proposta juntamente com o método de

colocação 2, b) Metodologia de Hardy juntamente com o método de colocação 2. Optou-se por omitir o método de colocação 1 uma vez que das análises anteriores ficou assente que o método 2 fornecia melhores resultados para a grande maioria das situações.

Tabela 6:  $f_2$  - Resultados derivados do método do alcance (1)

	REL.P < 5%		REL.P < 1%	
	a)	b)	a)	b)
Combinação de centros	$C(1, 3)$	$C(3, 3)$	$C(1, 3)$	$C(8, 8)$
Fator de forma otimizado	5,07	2,78	11,56	0,69
ABS	1,68	3,15	0,35	0,66
REL.P	4,99%	4,98%	0,99%	0,99%
Número de iterações	20510	33354	21159	45697
Tempo de geração [s]	45,28	102,17	48,78	400,00

Tabela 7:  $f_2$  - Resultados derivados do método do alcance (2)

	REL.P < 0,5%		REL.P < 0,1%	
	a)	b)	a)	b)
Combinação de centros	$C(1, 3)$	$C(11, 11)$	$C(15, 11)$	$C(15, 15)$
Fator de forma otimizado	15,08	0,22	0,24	0,19
ABS	0,24	0,31	7,19E-2	0,07
REL.P	0,47%	0,48%	0,08%	0,09%
Número de iterações	21511	49547	62667	53732
Tempo de geração [s]	49,73	581,67	921,73	654,64

#### 4.2.4.3 Método de otimização usando o FFSQP

De seguida aplica-se o método de otimização do fator de forma, que recorre ao programa FFSQP, tal como aplicado anteriormente, de forma a testar algumas combinações de centros e averiguar se é garantida a convergência do método para o mínimo útil da função objetivo definida. De forma a ter uma ideia se a convergência do fator de forma é aceitável, representa-

se graficamente a evolução do REL.P versus fator de forma para as funções multiquádricas geradas associadas às combinações de centros testadas. Como forma de comparação, também se apresentam os valores do erro obtidos para as mesmas combinações de centros, mas aplicando os métodos de Franke, Fasshauer e de Hardy.

Tabela 8:  $f_2$  - Resultados derivados do método com FFSQP e cálculo direto

	FFSQP	Método de Franke	Método de Fasshauer	Método de Hardy
<b>Combinação de centros a)</b>	$C(1, 1)$	$C(1, 1)$	$C(1, 1)$	$C(1, 1)$
Fator de forma	4,21	25,00	2,00	1,00
REL.P	44,54%	46,11%	47,48%	58,96%
<b>Combinação de centros b)</b>	$C(1, 3)$	$C(1, 3)$	$C(1, 3)$	$C(1, 3)$
Fator de forma	13,10	14,43	1,16	0,24
REL.P	0,76%	38,44%	49,56%	116%
<b>Combinação de centros c)</b>	$C(3, 3)$	$C(3, 3)$	$C(3, 3)$	$C(3, 3)$
Fator de forma	3,07	8,33	0,67	0,24
REL.P	2,17%	22,95%	29,84%	58,15%
<b>Combinação de centros d)</b>	$C(9, 11)$	$C(9, 11)$	$C(9, 11)$	$C(9, 11)$
Fator de forma	0,37	2,51	0,20	0,15
REL.P	0,21%	4,26%	5,09%	5,86%
<b>Combinação de centros e)</b>	$C(14, 14)$	$C(14, 14)$	$C(14, 14)$	$C(14, 14)$
Fator de forma	0,21	1,79	0,14	0,13
REL.P	0,62%	0,64%	0,66%	0,66%
<b>Combinação de centros f)</b>	$C(15, 11)$	$C(15, 11)$	$C(15, 11)$	$C(15, 11)$
Fator de forma	0,23	1,95	0,16	0,12
REL.P	0,10%	2,59%	2,90%	3,08%

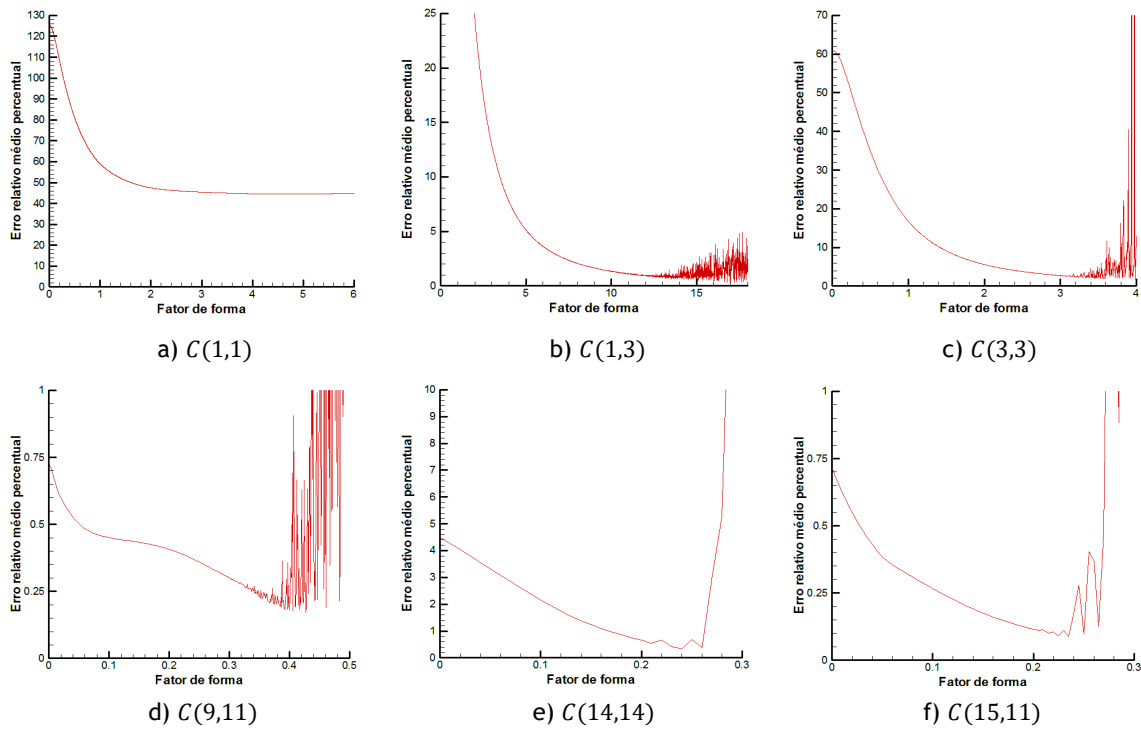


Figura 29:  $f_2$  - Método de otimização usando o FFSQP: REL.P versus fator de forma

Para todas as combinações de centros testadas ficou evidente que o aumento do fator de forma providenciava melhores aproximações, até ao ponto em que se atinge um mau condicionamento da matriz de interpolação, derivado do conjunto de pontos e da função utilizada no problema. No entanto, este comportamento das curvas presente na Figura 29 não é padrão para todas as funções, sendo possível que por vezes o aumento do fator de forma prejudique a aproximação realizada, ao que nessa situação há interesse que o método consiga convergir para um fator de forma igual a zero. Mais à frente, na Figura 33, serão exibidos exemplos que demonstram este tipo de comportamento.

O método conseguiu convergir para o valor pretendido em todas as situações, fornecendo sempre a melhor solução possível para o fator de forma a aplicar na função. Mais uma vez, mesmo já na zona de solução instável, é notório que existe uma zona inicial na qual existem oscilações mas de pequena magnitude e que não acarretam prejuízos de maior na solução proposta.

### 4.3 Função com quatro variáveis independentes

Após concluída e verificada a validade do método num espaço bidimensional, torna-se agora necessário alargar a dimensão do problema em estudo, não só a nível do número de pontos utilizados, mas também a nível do espaço de dados aplicado. Nesta fase, parte-se de uma função no espaço  $R^4$ , com variáveis de entrada  $x, y, z, t$ , e seleciona-se um determinado conjunto de pontos discretos de modo a representar a função num domínio finito, para que esta possa ser aproximada com recurso às funções multiquádricas. A metodologia aplicada para encontrar a função de aproximação é semelhante à aplicada num espaço bidimensional, com a particularidade de agora se obterem matrizes de dimensão  $R^4$ , e centros distribuídos ao longo do domínio com igual dimensão espacial.

O interesse de aplicar uma função de aproximação a um determinado conjunto de dados visa aproximar esse mesmo conjunto através de uma função, neste caso multiquádrica. Obviamente que, se for conhecida a função que deu origem a esse conjunto, o método não terá qualquer tipo de interesse uma vez que requer tempo para gerar a função, no entanto se esse conjunto de pontos não possuir uma função que os aproxime, ou se esta não for conhecida (i.e. se forem pontos discretos aleatoriamente distribuídos ao longo de um dado domínio do espaço), as funções multiquádricas desempenham um papel importante e que pode ser aplicado em diversas áreas de engenharia. O intuito desta análise surge em alusão às quatro variáveis que estão presentes tipicamente na definição de uma asa de configuração *morphing* que se pretende representar, sendo estas o número de Reynolds, ângulo de ataque, percentagem de corda do flap e deflexão do flap, que quando impostas permitem a obtenção dos coeficientes aerodinâmicos pretendidos.

Como forma de iniciar o estudo de implementação de uma função de aproximação multiquádrica num espaço de dimensão  $R^4$ , adotou-se uma função com o objetivo de selecionar um conjunto finito de pontos inseridos num dado domínio e distribuídos uniformemente. A função é a seguinte:

$$f_3(x, y, z, t) = 0.1 + \frac{1 + \sin(2x + 3y)}{3.5 + \sin(x - y)} + \frac{15.4(xz + yt)}{1 + x^2} \quad (4.3)$$

O próximo passo consiste em selecionar um domínio finito e um conjunto qualquer de pontos discretos pertencentes a este mesmo domínio, como forma de representar a função. De modo a ser possível verificar visualmente a evolução da função ao longo do domínio, fixam-se duas das quatro variáveis em questão, e analisa-se a sua evolução, tal como apresentado na Figura 30. Ao fixar uma dada variável esta será igualada a zero, enquanto que as restantes duas estarão compreendidas entre  $[-10,10]$ . De notar que os ângulos utilizados para descrever a função estão definidos em radianos.

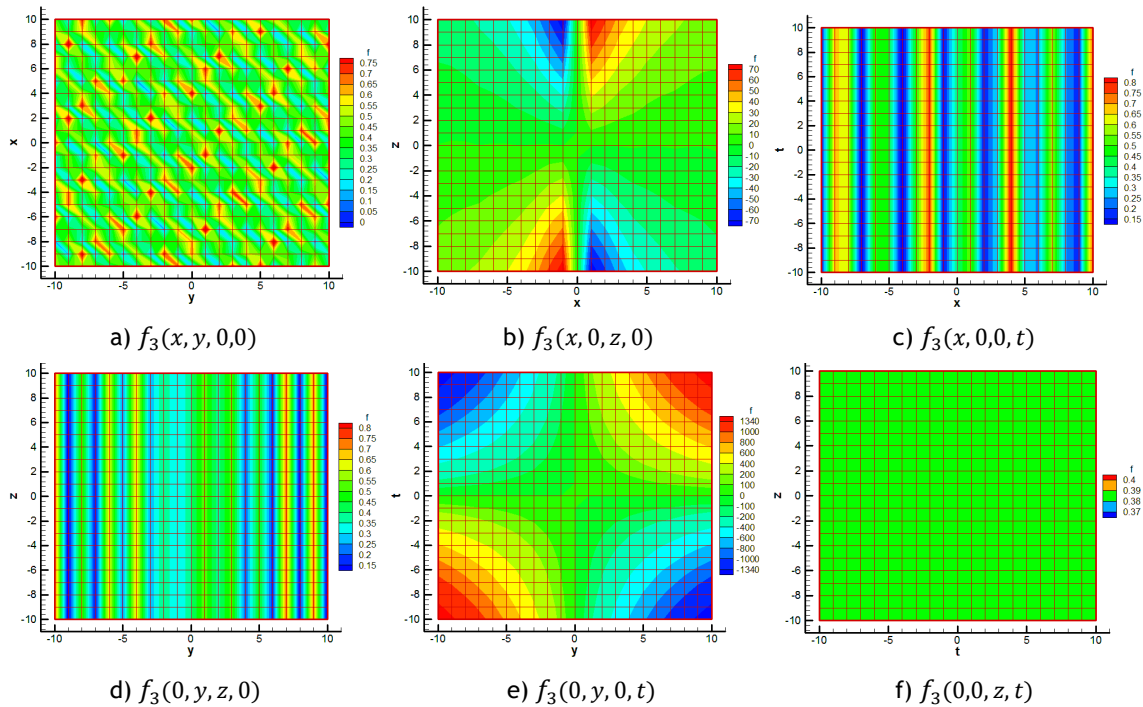


Figura 30: Representação da função  $f_3(x, y, z, t)$  com duas variáveis fixas

Tendo em conta as representações, e de forma a também aumentar a complexidade da função a aproximar, optou-se por definir um domínio com  $x, y \in [-10, 10]$  e com  $z, t \in [-1, 1]$ , com um passo unitário entre dois quaisquer pontos consecutivos, o que perfaz um total de 3969 pontos, com  $P(21, 21, 3, 3)$ . São as variáveis  $x, y$  que possuem maior relevo na evolução da função, com carácter periódico, ao que se optou por aumentar a sua dimensão comparativamente às variáveis  $z, t$ .

#### 4.3.1 Influência da quantidade de centros

Tendo uma função com quatro variáveis independentes, e de modo a ser possível visualizar a influência que o número de centros e que o fator de forma desempenham na precisão da função obtida, optou-se por fixar o número de centros pertencentes às variáveis  $z$  e  $t$ , e de seguida testar todas as combinações possíveis para um dado fator de forma. Uma vez que existem apenas três pontos amostrais numa qualquer linha paralela ao eixo  $z$  e eixo  $t$ , optou-se por apresentar apenas as combinações que possuíssem igual número de centros em  $z$  e em  $t$ . De notar que, dada a tendência observada pela análise das funções bidimensionais anteriores, apenas se irá testar o método de colocação 2, com a metodologia proposta das funções multiquádricas (em detrimento do método de colocação 1 e da metodologia adotada por Hardy), uma vez que estas abordagens fornecem tendencialmente melhores resultados. Na Figura 31 tem-se a representação da evolução do REL.P em função das combinações possíveis de centros mantendo duas variáveis constantes e com fator de forma constante e igual a zero. Na figura a) tem-se  $C(x, y, 1, 1)$ , em b)  $C(x, y, 2, 2)$  e por fim em c)  $C(x, y, 3, 3)$  em que  $x, y \in [1, 21]$  com um passo unitário.

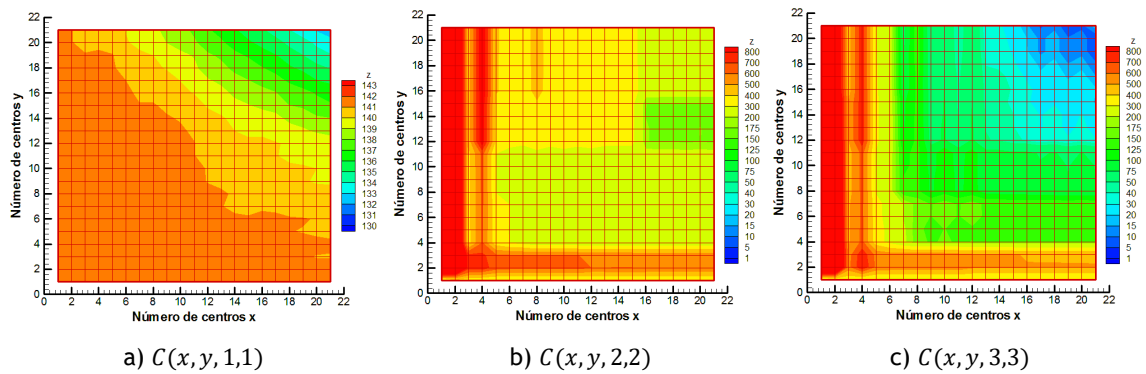


Figura 31:  $f_3$  - REL.P versus combinação de centros  $C(x, y, z, t)$

É evidente, olhando à evolução da Figura 31, que apenas se conseguem aproximações aceitáveis quando o número de centros das variáveis  $z$  e  $t$  é igual ao número de pontos das variáveis, isto é, quando  $C(x, y, 3,3)$ . O facto de se terem muito menos pontos nestas variáveis comparativamente às restantes faz com que se tenha de utilizar todos os seus centros disponíveis, sobretudo devido à forma real da função em questão. Foram também testadas combinações em que o número de centros em  $z$  e  $t$  não era igual (foram testadas as nove combinações possíveis) e a única que forneceu resultados com REL.P inferiores a 100% foi de facto  $C(x, y, 3,3)$ , ao que este será daqui em diante o formato a utilizar na análise. Na Figura 32 tem-se novamente a evolução do REL.P em função das combinações de centros  $C(x, y, 3,3)$  mas agora para fatores de forma de 0,02, 0,05 e 0,075, respetivamente.

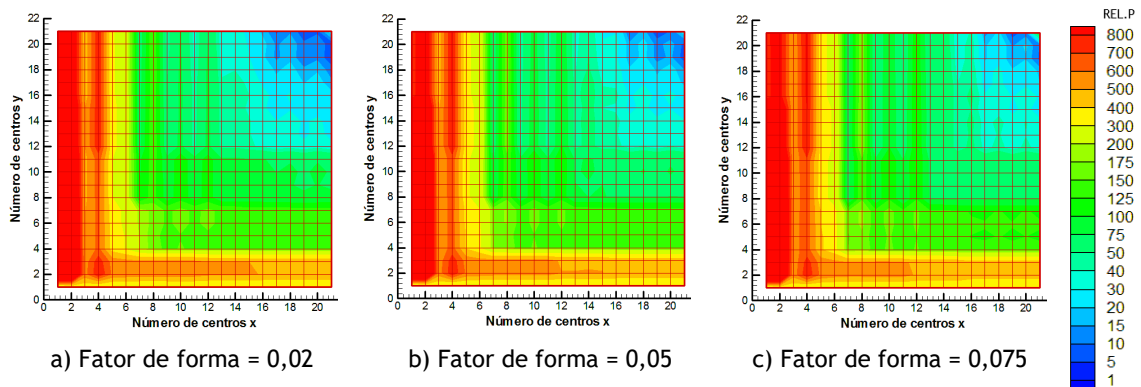


Figura 32:  $f_3$  - Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros  $C(x, y, 3,3)$

Realizar esta análise para  $C(x, y, 3,3)$ , para um qualquer fator de forma, envolveu gerar 441 funções diferentes (até ao limite em que se tem 3969 centros, igual ao número de pontos disponíveis) e calcular o erro respetivo de cada uma delas, o que implicou um tempo total de cálculo superior a 8 horas para cada representação.

### 4.3.2 Obtenção do fator de forma: método de otimização usando o FFSQP

Já foi observado através das análises anteriores, mantendo o fator de forma constante, que esta é uma função complexa e difícil de representar, uma vez que é necessário colocar muitos centros ao longo do domínio de modo a atingir resultados minimamente satisfatórios, com baixos erros relativos médios. De seguida selecionaram-se arbitrariamente um conjunto de combinações de centros que pertencem ao conjunto  $C(x, y, 3, 3)$  com  $x, y \in [1, 21]$ , de modo a averiguar de que forma as combinações evoluem com o aumento do fator de forma, e se os métodos de cálculo do fator de forma se mantêm válidos, agora numa dimensão espacial  $R^4$ . Estão presentes na Tabela 9 os resultados derivados do método para as combinações selecionadas e testadas, e posteriormente na Figura 33 a evolução do REL.P versus fator de forma, de modo a averiguar o bom funcionamento do método, agora para uma dimensão espacial superior.

Tabela 9:  $f_3$  - Resultados derivados do método com FFSQP e cálculo direto

	FFSQP	Método Fasshauer	Método de Hardy
Combinação de centros	$C(5, 3, 3, 3)$	$C(5, 3, 3, 3)$	$C(5, 3, 3, 3)$
Fator de forma	0,15096	0,1721	0,59
REL.P	550,19%	550,66%	>500%
Tempo de geração [s]	178,90	4,66	5,02
Combinação de centros	$C(6, 4, 3, 3)$	$C(6, 4, 3, 3)$	$C(6, 4, 3, 3)$
Fator de forma	0,00	0,136	0,56
REL.P	275,76%	388,90%	>500%
Tempo de geração [s]	41,67	5,81	6,23
Combinação de centros	$C(9, 5, 3, 3)$	$C(9, 5, 3, 3)$	$C(9, 5, 3, 3)$
Fator de forma	0,0659	0,0994	0,49
REL.P	132,3%	132,6%	200%
Tempo de geração [s]	402,8	10,02	11,34
Combinação de centros	$C(15, 15, 3, 3)$	$C(15, 15, 3, 3)$	$C(15, 15, 3, 3)$
Fator de forma	0,00	0,0444	0,41
REL.P	37,26%	39,67%	>500%
Tempo de geração [s]	2019,09	149,81	150,1
Combinação de centros	$C(17, 20, 3, 3)$	$C(17, 20, 3, 3)$	$C(17, 20, 3, 3)$
Fator de forma	0,00	0,036	0,39
REL.P	13,75%	14,93%	>500%
Tempo de geração [s]	4724,40	380,4	400,3
Combinação de centros	$C(19, 19, 3, 3)$	$C(19, 19, 3, 3)$	$C(19, 19, 3, 3)$
Fator de forma	0,00	0,035	0,39
REL.P	10,02%	11,68%	>500%
Tempo de geração [s]	4747,45	518,86	520,64

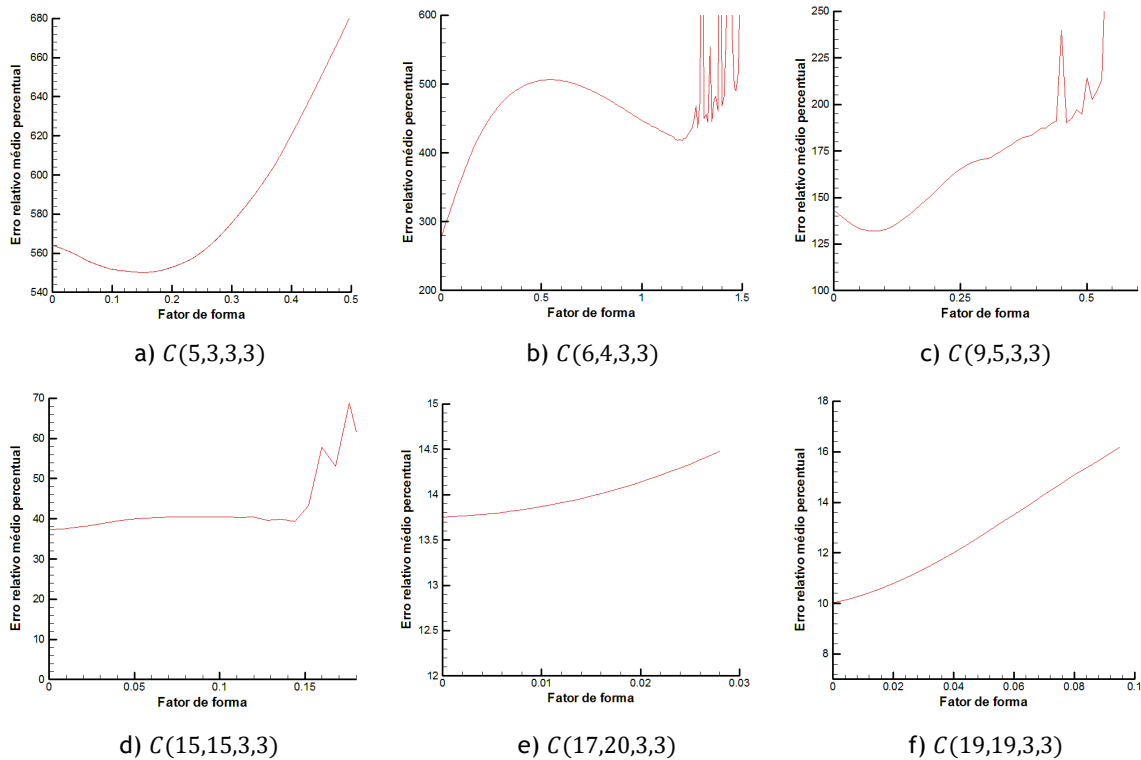


Figura 33:  $f_3$  - Método de otimização usando o FFSQP: REL.P versus fator de forma

É possível observar que, para este problema e para as combinações de centros seleccionadas, o aumento do fator de forma por não raras vezes acarreta prejuízos na aproximação desejada, levando a um aumento do REL.P até se alcançar a zona instável das soluções. O método de otimização usando o FFSQP permite sempre atingir o mínimo útil da solução ou, por outras palavras, o mínimo local da função objetivo seleccionada na vizinhança do valor inicial pré-definido (fator de forma igual a zero), embora com a despesa de aumentar significativamente o tempo de processamento associado ao tempo de geração da função, uma vez que são necessárias diversas iterações até ser possível convergir na solução final desejada.

Tal como era expectável, obtêm-se sempre melhores soluções quando aplicado o FFSQP comparativamente aos métodos de cálculo direto, embora estes últimos sejam notoriamente mais rápidos, sem necessidade de iterar a solução mais do que uma vez. Não foi aplicado o método de Franke, uma vez que foi aplicada normalização aos dados do problema, o que inviabiliza a sua utilização. No entanto, é previsível que o tempo de processamento seja semelhante ao obtido para os dois restantes métodos.

Deste modo, dá-se por finalizada a validação das metodologias aplicadas neste estudo, e que no capítulo seguinte serão aplicadas na aproximação dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares. Ficou evidente que o método está de facto bem implementado e a fornecer os resultados esperados, tendo sido possível ainda comprovar algumas tendências no que toca à qualidade de certas abordagens. Foram notórias as vantagens de aplicar tanto o método de colocação dos centros 2 como a metodologia proposta de resolução das funções multiquádricas.

# Capítulo 5

## Representação dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares

Findada a validação do método implementado, o próximo passo consiste em aplicar todos os conhecimentos e informação recolhidos, de modo a gerar funções multiquádricas que sejam capazes de aproximar com sucesso os coeficientes aerodinâmicos de diversos perfis alares. Vão ser realizadas duas análises distintas, com duas e quatro variáveis independentes, de modo a comparar a aproximação multiquádrica com os métodos de interpolação multivariável e análise direta do programa xFoil no que toca à precisão e rapidez obtidas.

### 5.1 Análise bidimensional

Nesta secção dá-se início à aproximação dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares, como função do número de Reynolds e do ângulo de ataque, através das funções multiquádricas. Esta estará repartida em três diferentes abordagens de modo a analisar o comportamento e a aplicabilidade das funções de aproximação disponíveis. Inicialmente o foco centra-se nas funções multiquádricas, analisando a influência da colocação dos centros e do respetivo fator de forma, de modo a obter uma boa aproximação. De seguida, aplicam-se os métodos de cálculo do fator de forma e averigua-se a relação precisão versus tempo de processamento para diferentes abordagens. Por fim, faz-se uma comparação entre as funções multiquádricas e os diferentes métodos de obtenção dos coeficientes aerodinâmicos, entre os quais a interpolação multivariável e a análise direta através do xFoil, de modo a averiguar as vantagens de aplicar este método no que toca à rapidez e à precisão. Uma vez que é importante conhecer o comportamento da função entre dois quaisquer pontos de dados, posteriormente a gama de dados conhecidos para um dado perfil alar será alargada, e averiguar-se-á de que modo cada aproximação representa com exatidão estes pontos que não pertencem aos pontos de dados usados, mas que pertencem ao domínio considerado, uma vez que estarão dentro da gama de números de Reynolds e de ângulos de ataque utilizados para descrever as funções.

#### 5.1.1 Identificação dos perfis alares e domínio aplicado no estudo

O primeiro passo consiste em selecionar o conjunto de pontos de dados a utilizar na aproximação, ao que se optou por colocar para todas as situações  $P(5,51)$ , lembrando a notação  $(x, y) \equiv (\text{Número de Reynolds}, \text{Ângulo de ataque})$ , o que equivale a um total de 255 pontos discretos ao longo do domínio em questão.

Optou-se também por seleccionar sete perfis alares, que servirão como base no estudo e que visam representar, na medida do possível, a evolução típica das curvas dos coeficientes de sustentação, de arrasto e de momento, como função do número de Reynolds e do ângulo de ataque. Embora cada perfil alar possua características peculiares que fazem alterar a magnitude dos valores obtidos, a evolução dos coeficientes aerodinâmicos como função dos parâmetros anteriores é genericamente semelhante para a maioria dos perfis alares. Seleccionaram-se os seguintes perfis alares, cuja representação geométrica está presente no anexo A, e que serão usados ao longo do estudo:

- I. UBI\_03\_016
- II. NACA 0010 HSTAB
- III. NACA 0009
- IV. DAE-21
- V. Wortmann FX 63-137
- VI. Selig 1223
- VII. SG 6043

No que toca ao conjunto de pontos aplicado em cada um destes perfis alares, utilizou-se  $P(5,51)$  em cada um deles, pontos estes compreendidos nos seguintes limites para os perfis alares I, IV, V, VI e VII:

$$\text{Número de Reynolds} \in [75000,675000] \text{ e } \text{Ângulo de ataque (}^\circ\text{)} \in [-5,20]$$

Para os perfis alares II e III optou-se por aplicar os seguintes limites, com igual quantidade de pontos discretos no seu interior, e sempre uniformemente distribuídos:

$$\text{Número de Reynolds} \in [75000,695000] \text{ e } \text{Ângulo de ataque (}^\circ\text{)} \in [-5,20]$$

De modo a ter uma ideia do aspeto típico da variação dos coeficientes aerodinâmicos como função do número de Reynolds e do ângulo de ataque (em graus), mostra-se na Figura 34, para o perfil alar IV, uma representação dos valores reais obtidos com recurso ao programa xFoil, e que foram usados no decorrer do estudo.

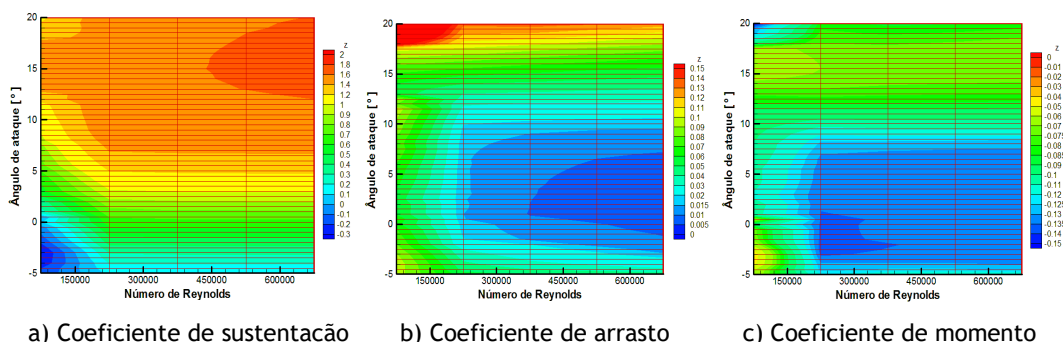


Figura 34: Representação dos coeficientes aerodinâmicos do perfil alar IV

## 5.1.2 Influência da quantidade de centros

De modo a compreender de que forma se comportam as aproximações com o aumento do número de centros, representa-se a variação do REL.P em função da quantidade de centros para um fator de forma constante e igual a zero. Dada a tendência observada para as funções aplicadas anteriormente, no capítulo de validação do método, optou-se por omitir o método de colocação 1 e a metodologia de Hardy, uma vez que foram notórios os benefícios de aplicar a metodologia proposta, juntamente com o método de colocação 2. De modo a verificar a tendência para a maioria dos perfis alares, aplica-se esta abordagem para o perfil alar I (Figura 35 a), b) e c)) e para o perfil alar IV (Figura 35 d), e) e f)), novamente para os três coeficientes aerodinâmicos em estudo.

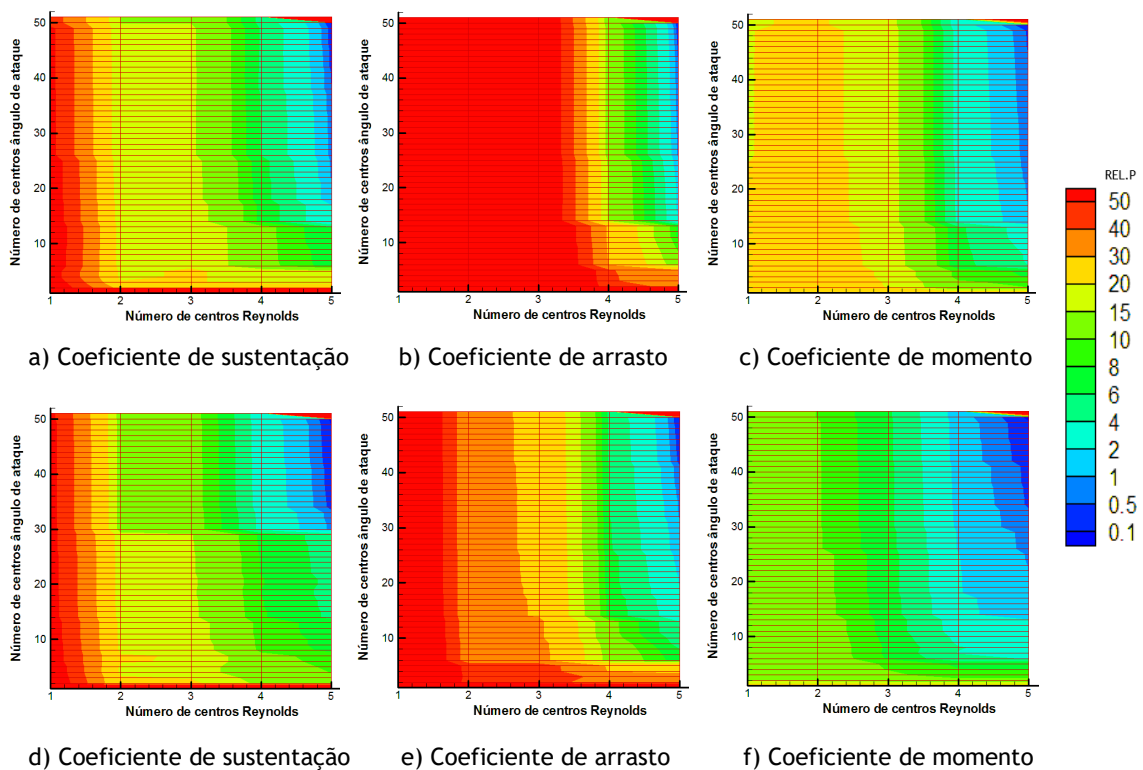


Figura 35: REL.P versus combinação de centros  $C(Re, \alpha)$

O primeiro aspeto importante a realçar consiste na maior dificuldade em aproximar os dados correspondentes ao coeficiente de arrasto, tendência esta verificada não apenas para estes dois perfis alares. A irregularidade e o comportamento não padronizado levam a que seja necessário uma maior quantidade de centros para permitir aproximações razoáveis com recurso às funções multiquádricas. Tendo em consideração os dois restantes coeficientes aerodinâmicos é possível notar algumas semelhanças no comportamento da aproximação com a variação do número de centros aplicados, quando comparando os dois perfis alares. De notar que o objetivo será, no entanto, otimizar na medida do possível o valor do fator de forma, de modo a minimizar ao máximo os erros associados.

De modo a ter uma percepção do valor do fator de forma a partir do qual se dá início um comportamento instável na solução, derivado do mau condicionamento associado às matrizes de interpolação, representa-se na Figura 36 a evolução do REL.P com o aumento gradual do fator de forma, para todas as combinações de centros possíveis e para a função correspondente ao coeficiente de sustentação, recorrendo ao método de colocação 2, e para o perfil alar I.

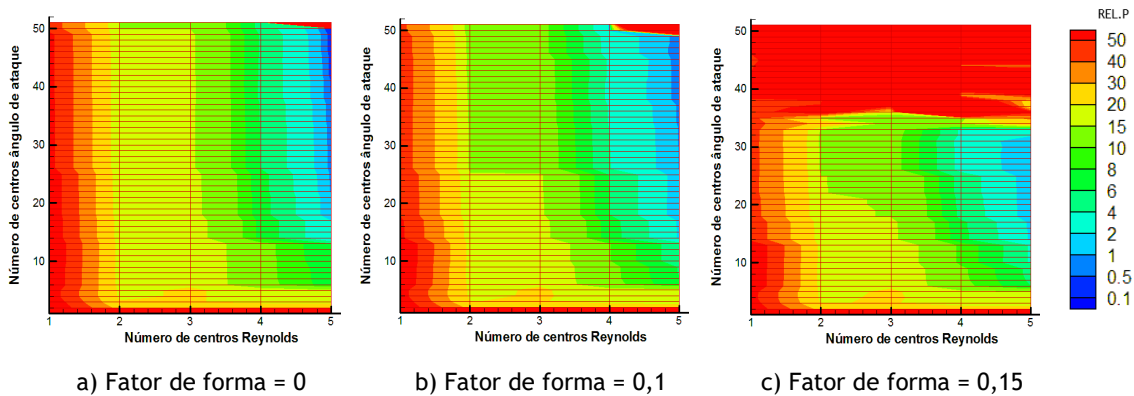


Figura 36: Aumento do fator de forma: REL.P versus combinação de centros  $C(Re, \alpha)$

### 5.1.3 Obtenção do fator de forma

#### 5.1.3.1 Cálculo direto

Os métodos de cálculo direto do fator de forma permitem obter de forma mais rápida este parâmetro, uma vez que não requerem qualquer tipo de iteração na sua solução, sendo apenas dependentes tipicamente do número de centros e da sua posição no domínio. Uma vez que se optou por efetuar uma normalização (entre -1 e 1) a todos os pontos de dados e centros constituintes da função, perde-se a capacidade de aplicar o método de Franke, dado que já não se dispõe de meios para identificar qual a variável da função que possui um maior intervalo (em valor absoluto) no seu domínio, no conjunto de pontos de dados conhecidos. No que toca ao método de Fasshauer, já que apenas depende da quantidade de centros aplicados na aproximação, e tendo em conta que a aplicação da normalização dos dados para um intervalo menor resulta numa diminuição relativa da gama de fatores de forma úteis (e não altera deste modo a quantidade de centros, nem o valor do fator de forma resultante do método), é expectável que possa não dar bons resultados no contexto do presente problema. Relativamente ao método de Hardy, este já considera a distância, em valor absoluto, entre dois quaisquer centros vizinhos, sendo feita uma média de todos os valores possíveis. No entanto, à semelhança do que acontece para o método de Franke, ao aplicar uma normalização para cada variável, perde-se a diferença relativa de magnitude entre as variáveis do problema, pelo que variáveis que até possam conter centros (e pontos de dados) muitos próximos entre si (em valor absoluto) comparativamente a uma outra qualquer variável, após a aplicação da normalização, e caso o número de centros de ambas seja igual, a distância entre centros vizinhos será também

igual (o que não aconteceria antes de aplicar normalização). Esta particularidade afetará os resultados do método, e poderá também torná-lo inaplicável.

Tendo em conta o que foi dito, é expectável que tanto o método de Fasshauer como o método de Hardy possam gerar fatores de forma em zonas instáveis da solução para certas combinações de centros, uma vez que é previsível que o fator de forma possa em certas ocasiões ultrapassar o mínimo útil admissível, devido sobretudo à normalização aplicada no problema. Deste modo, apresenta-se na Figura 37, à semelhança do que foi feito para um fator de forma constante, a variação do REL.P versus as combinações possíveis de centros colocados com o método de colocação 2, para fatores de forma obtidos recorrendo ao método de Fasshauer e de Hardy, para o perfil alar I e para os três coeficientes aerodinâmicos disponíveis.

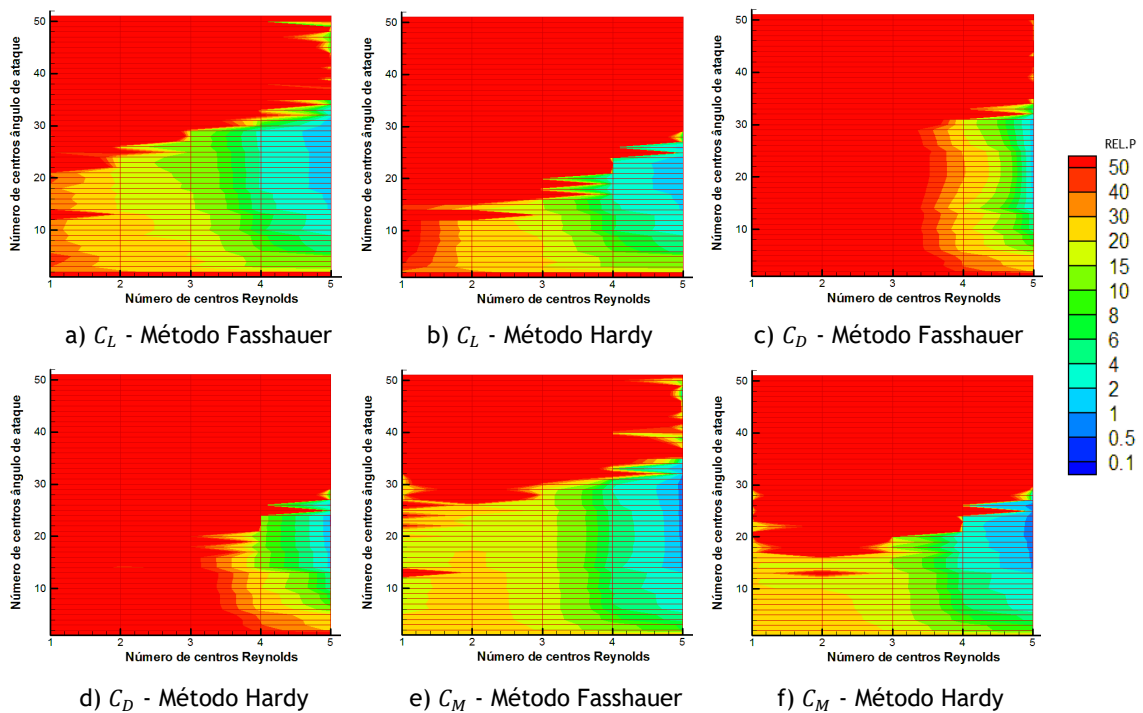


Figura 37: Métodos de cálculo direto: REL.P versus combinação de centros  $C(Re, \alpha)$

Semelhantes resultados foram obtidos para os restantes perfis alares sob análise, obtendo-se fatores de forma cuja magnitude impossibilita a sua aplicação uma vez que tornam a matriz de interpolação mal condicionada para a grande maioria das combinações de centros testadas.

### 5.1.3.2 Método do alcance

De seguida aplicou-se o método do alcance aos perfis alares apresentados, de modo a encontrar a menor quantidade de centros e respetivo fator de forma, que possibilitam um REL.P inferior a 5, 1, 0,5 e 0,1%. Foi aplicado um passo para o fator de forma igual a 0,01, uma vez que para este conjunto de pontos permite percorrer toda a zona estável da solução sem oscilações abruptas no valor do erro. Aumentar o passo poderá permitir uma mais rápida

convergência do método, mas há que garantir que este parâmetro é pequeno o suficiente para que não atinja instantaneamente a zona instável da solução. À medida que a quantidade de centros aumenta, a gama de fatores de forma úteis diminui, o que requer um menor passo de modo a encontrar soluções que convirjam para altas quantidades de centros.

Optou-se por apresentar apenas nesta secção os resultados obtidos para os perfis alares I, III, V, e para o coeficiente de sustentação, estando os restantes resultados, associados ao coeficiente de arrasto e de momento e para todos os restantes perfis alares, disponíveis no anexo B.

Tabela 10: Resultados derivados do método do alcance

Coeficiente de sustentação			
Perfil alar	I	III	V
<b>REL.P &lt; 5%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 5)	<i>C</i> (5, 10)	<i>C</i> (4, 2)
Fator de forma	0,99	0,08	0,41
Tempo de geração [s]	82,94	105,31	61,23
Nº de iterações	52327	55012	48214
<b>REL.P &lt; 1%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 22)	<i>C</i> (5, 26)	<i>C</i> (5, 18)
Fator de forma	0,00	0,07	0,23
Tempo de geração [s]	145,23	150,24	139,32
Nº de iterações	57213	57356	57123
<b>REL.P &lt; 0,5%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 38)	<i>C</i> (5, 34)	<i>C</i> (5, 42)
Fator de forma	0,00	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	220,24	208,35	227,35
Nº de iterações	58311	58187	58342
<b>REL.P &lt; 0,1%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 50)	<i>C</i> (5, 42)	<i>C</i> (5, 46)
Fator de forma	0,00	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	232,12	223,53	233,32
Nº de iterações	58724	58435	58632

### 5.1.3.3 Método de otimização usando o FFSQP

Após aplicar o método do alcance, verificou-se que uma grande porção das combinações obtidas possuía um fator de forma igual a zero (mais de 46% das combinações testadas), o que demonstra que esta é sem dúvida uma opção a ter em conta. Uma vez que os métodos de cálculo direto aplicados têm dificuldade em fornecer boas aproximações, torna-se necessário encontrar um modo de obter este parâmetro sem necessitar de iterações, privilegiando a rapidez, mas mantendo uma precisão aceitável para todas as combinações de centros possíveis. Deste modo, e tendo em conta a tendência verificada para os sete perfis alares analisados, aplica-se o método de otimização usando o FFSQP a um conjunto arbitrário de combinações de centros, e compara-se os seus resultados com a solução obtida mantendo um fator de forma igual a zero, no que toca a tempo de processamento e precisão obtida. O expectável será que o método de otimização usando o FFSQP forneça aproximações melhores ou iguais, mas com maior tempo de geração da função comparativamente à situação em que definimos à *priori* o fator de forma, onde é apenas necessário iterar a função uma única vez.

À semelhança do que se fez no método do alcance, apenas se apresenta a aplicação do método para os três perfis alares anteriores e para o coeficiente de sustentação (uma vez que a tendência verificada é igual), ficando disponíveis no anexo D os resultados obtidos para os restantes perfis alares sob análise. De modo a ter uma perceção das vantagens associadas a este método, apresentam-se também os gráficos relativos ao REL.P versus fator de forma para cada combinação testada (disponíveis no anexo C), e apresentam-se ainda, para comparação, os resultados obtidos mantendo um fator de forma constante e igual a zero.

Tabela 11 : Resultados derivados do método com FFSQP  $C (Re, \alpha)$

Combinação de centros: $C(5, 5)$				
Perfil alar		I	III	V
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	1,55	0,00	1,51
	REL.P	4,40	517,86	3,06
	TG [s]	4,125	0,27	1,19
Fator de forma = 0	REL.P	16,51	517,86	4,95
	TG [s]	0,0156	0,0156	0,0156

Combinação de centros: $C(4, 15)$				
Perfil alar		I	III	V
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,409	0,00	0,394
	REL.P	4,18	51,01	2,11
	TG [s]	4,14	0,24	4,20
Fator de forma = 0	REL.P	7,42	51,01	2,37
	TG [s]	0,031	0,031	0,031

Combinação de centros: $C(5, 15)$				
Perfil alar		I	III	V
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,185	0,0254	0,308
	REL.P	1,823	3,14	1,395
	TG [s]	4,63	4,03	4,28
Fator de forma = 0	REL.P	2,04	4,20	1,57
	TG [s]	0,047	0,047	0,047

Combinação de centros: $C(5, 30)$				
Perfil alar		I	III	V
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,00	0,126	0,011
	REL.P	0,73	6,33	0,624
	TG [s]	4,86	11,125	11,61
Fator de forma = 0	REL.P	0,73	19,35	0,65
	TG [s]	0,094	0,094	0,094

Combinação de centros: $C(5, 45)$				
Perfil alar		I	III	V
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,00	0,00	0,00
	REL.P	0,32	0,037	0,45
	TG [s]	2,03	1,98	2,11
Fator de forma = 0	REL.P	0,32	0,037	0,45
	TG [s]	0,22	0,22	0,22

Combinação de centros: $C(5, 50)$				
Perfil alar		I	III	V
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,00013	0,00016	0,00042
	REL.P	0,0043	0,015	0,0105
	TG [s]	11,05	9,06	13,11
Fator de forma = 0	REL.P	0,0049	0,030	0,011
	TG [s]	0,25	0,25	0,25

Uma das grandes desvantagens da aplicação deste método pode ser observada para  $C(5,5)$  e para o perfil alar III. Observando o gráfico respectivo do REL.P versus fator de forma, presente na Figura 38, é possível visualizar que inicialmente o REL.P aumenta com o aumento do fator de forma até este atingir um valor de cerca de 0,07, a partir do qual se verifica uma acentuada diminuição do REL.P até um fator de forma de cerca de 1,2, ponto a partir do qual se evidencia a instabilidade da solução. Uma vez que o valor inicial é zero, o método tende a

convergir para um fator de forma igual a zero com um REL.P superior a 500%, embora seja possível obter aproximadamente 50% para fatores de forma superiores. A forma de solucionar este caso particular seria aumentar o incremento para um valor que permitisse ultrapassar o máximo local perto do fator de forma igual a 0,07, ou alterar o valor inicial do método para um fator de forma superior a 0,07, de modo a que o método convergisse para um fator de forma superior, perto da zona instável da solução. No entanto, embora tais abordagens possam ser benéficas nesta situação, podem prejudicar outras, pelo que se mantiveram os dados definidos previamente, uma vez que foram aqueles que permitiram obter melhores resultados para a grande maioria dos casos testados.

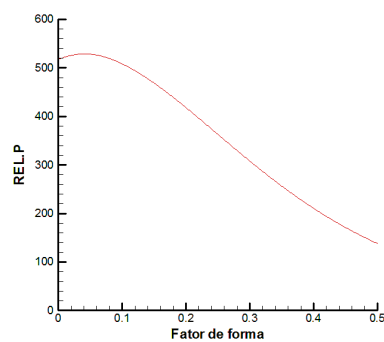


Figura 38:  $C(5,5)$  - REL.P versus fator de forma

Um outro aspeto que é necessário realçar ocorre para  $C(4,15)$  e para o perfil alar I. O método convergiu para um fator de forma igual a 0,409 o que, visualizando o gráfico presente na Figura 39, permite concluir que a solução já se encontra numa zona instável. No entanto, uma vez que a zona instável está no seu início, ainda é possível obter soluções relativamente aceitáveis e muito próximas dos valores obtidos imediatamente antes da zona oscilatória. Semelhante caso ocorre para todas as situações da combinação  $C(5,50)$ , onde mesmo para muito baixos fatores de forma são visíveis as oscilações da solução, resultado do possível mau condicionamento da matriz de interpolação. No entanto, existe ainda um curto intervalo de fatores de forma que permite obter boas aproximações, embora já pertencente à zona instável.

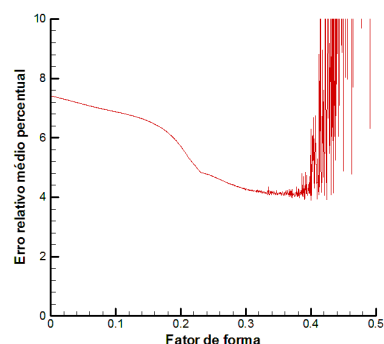


Figura 39:  $C(4,15)$  - REL.P versus fator de forma

Para a grande maioria das restantes combinações testadas é possível concluir, comparando os gráficos em anexo e os resultados obtidos, que o método de otimização usando

o FFSQP permite convergir para o mínimo útil da função, que não raras vezes é também o mínimo absoluto da mesma. Não sendo possível, no entanto, garantir convergência para o mínimo absoluto, pode-se garantir a convergência para o mínimo local na vizinhança do ponto inicial, definido como fator de forma igual a zero.

Comparando agora as duas abordagens de obtenção do fator de forma aplicadas (o método de otimização usando o FFSQP e igualando o fator de forma a zero) é possível constatar que embora o método de otimização usando o FFSQP ofereça sempre melhor (ou igual) solução, i.e., com menor (ou igual) REL.P, este está também associado a um maior tempo de geração da função, uma vez que necessita de iterar a solução várias vezes de modo a convergir para a solução final. Uma vez que foi definida uma precisão relativamente alta e igual a 1E-4% associada ao método do FFSQP, o tempo de geração acabou por também aumentar, sendo possível aliviar este critério de modo a reduzir substancialmente o tempo necessário. No que toca ao tempo de geração necessário quando se iguala o fator de forma a zero, este é exatamente o tempo necessário para gerar a função uma única vez. De notar que, uma vez aplicado o método de otimização usando o FFSQP e encontrado o fator de forma para uma dada combinação de centros estipulada, este não voltará a necessitar de ser aplicado, podendo a função ser resolvida inúmeras vezes (e oferecer inúmeras soluções aproximadas do conjunto de dados iniciais), sendo que todos os parâmetros são guardados automaticamente até que ocorra uma alteração de alguma variável.

#### 5.1.4 Qualidade da aproximação

Uma vez que se dispõe de um conjunto finito de dados pontuais dispersos ao longo de um domínio pré-definido, não existe uma continuidade entre dois quaisquer pontos vizinhos, pelo que cabe à função de aproximação aplicada estimar a sua variação. Não é suficiente, na maioria das situações, obter um baixo erro de interpolação, i.e., um baixo erro nos pontos de dados conhecidos, sendo também necessário existir uma evolução realista entre dois quaisquer pontos, pelo que será esta a situação a estudar neste subcapítulo. De modo a aferir a qualidade da aproximação entre dois quaisquer pontos de dados, optou-se por seleccionar arbitrariamente um perfil alar e aumentar o conjunto de dados conhecidos, mantendo os limites do domínio definidos previamente e utilizados para gerar a função. Seleccionou-se testar o perfil alar IV, que utiliza  $P(5,51)$ , ou 255 pontos discretos de modo a gerar a sua função de aproximação, inseridos nos limites previamente definidos.

De modo a aferir a qualidade da aproximação resultante deste conjunto de dados, aumentou-se a concentração dos pontos de dados no interior do domínio em questão, com recurso novamente ao programa xFoil, e obteve-se  $P(13,251)$ , ou 3263 pontos discretos, com um passo uniforme de 50000 e 0,1 para o número de Reynolds e ângulo de ataque, respetivamente.

Sabendo agora o real valor (em alguns locais) entre os pontos de dados vizinhos utilizados para gerar as funções, comparam-se os valores obtidos com recurso às abordagens de aproximação com o real valor agora conhecido, e averigua-se se os métodos fornecem, ou não, uma boa aproximação ao longo de todo o domínio em estudo. Na Figura 40 tem-se representado a amarelo a localização dos 3263 pontos de dados pertencentes ao perfil alar IV e inseridos no interior do domínio em estudo, enquanto que a preto está representada a localização dos pontos de dados utilizados para definir as funções multiquádricas e a interpolação multivariável. De notar novamente que não está a ser feita nenhuma extrapolação, mas sim apenas uma averiguação da qualidade da aproximação entre pontos de dados vizinhos, sempre no interior do domínio em questão, e com os pontos sempre uniformemente distribuídos uma vez que derivam diretamente do programa xFoil.

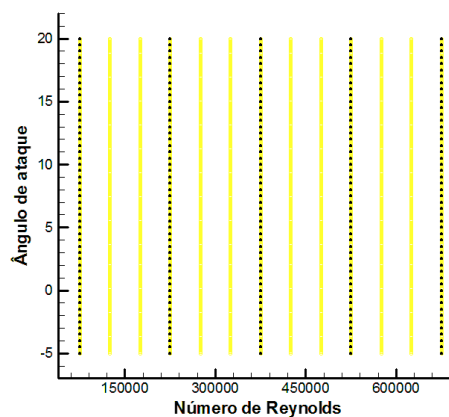


Figura 40: Representação do conjunto de pontos conhecidos

Uma vez que o conjunto de pontos conhecidos aumentou, mas não os pontos para gerar as funções, calcula-se também o erro relativo médio de todos estes pontos (que consiste agora num conjunto mais alargado), pelo que se torna necessário alterar a nomenclatura adotada nesta nova situação. Ao analisar o erro relativo médio percentual para todos os pontos representados a amarelo na Figura 40, usa-se o parâmetro REL.P.A (erro relativo médio percentual aumentado), uma vez que a notação REL.P consistirá apenas nos pontos de dados usados para gerar os métodos de aproximação.

#### 5.1.4.1 Interpolação multivariável

Foi usada uma interpolação multivariável de modo a aproximar os coeficientes aerodinâmicos do perfil alar IV nos pontos de dados representados a preto na Figura 40, com  $P(5,51)$  com o intuito de averiguar a qualidade da aproximação entre pontos de dados vizinhos, mais propriamente nos pontos de dados representados a amarelo também na Figura 40. Pretende-se assim aferir se a interpolação multivariável fornece, ou não, aproximações aceitáveis nos restantes pontos do domínio, sabendo que nos pontos a preto o erro de interpolação é praticamente nulo.

Deste modo obteve-se para os coeficientes de sustentação, de arrasto e de momento um REL.P.A igual a 4,89%, 16,07% e 1,88% respetivamente. Na Figura 41 tem-se a evolução do erro absoluto da interpolação multivariável, ao longo do domínio e para os pontos representados a amarelo na Figura 40.

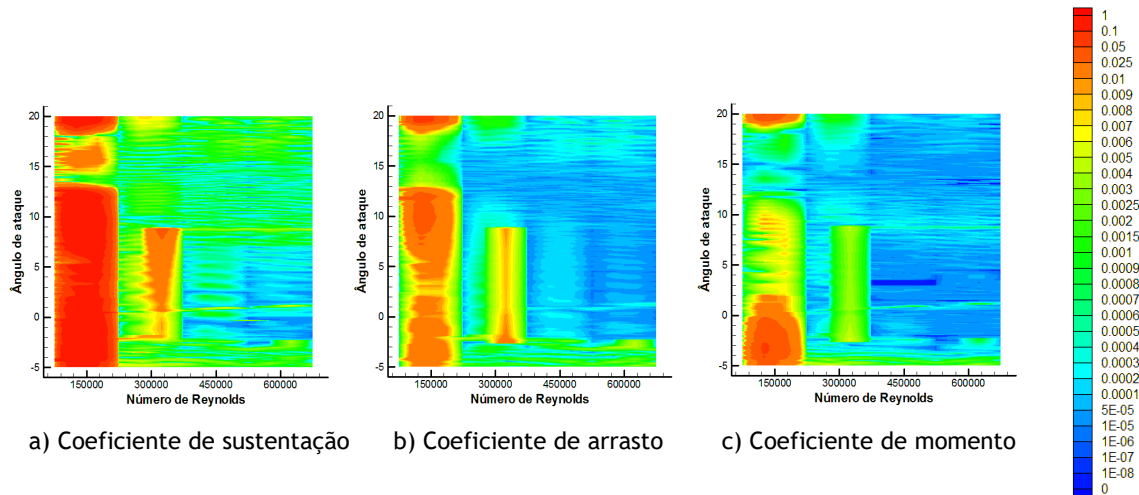


Figura 41: Interpolação multivariável: evolução do erro absoluto (em módulo)

Salta imediatamente à vista que é para baixos números de Reynolds, compreendidos entre [75000,225000], que se verificam de forma mais acentuada os maiores erros de aproximação da função, pelo que é necessário aumentar a concentração de pontos de dados nessa zona, de modo a que a função gerada consiga representá-los com maior rigor. Para números de Reynolds superiores a 225000, a interpolação multivariável consegue aproximar com qualidade os pontos no interior do seu domínio, uma vez que as curvas dos coeficientes aerodinâmicos se apresentam mais padronizadas e com oscilações mais suaves.

#### 5.1.4.2 Funções multiquádricas

No que toca às funções multiquádricas volta-se a ter uma dependência das combinações de centros aplicados e do fator de forma para definir a função, e que mais uma vez terão influência na qualidade da aproximação. De modo a ser possível visualizar a influência destes parâmetros na qualidade da aproximação, representa-se a evolução do REL.P.A em função do número de centros em cada uma das variáveis de entrada para um fator de forma igual a 0, 0,1 e 0,15, e para as três funções de saída que representam os três coeficientes aerodinâmicos do perfil alar IV, presentes nas Figura 42, Figura 43 e Figura 44.

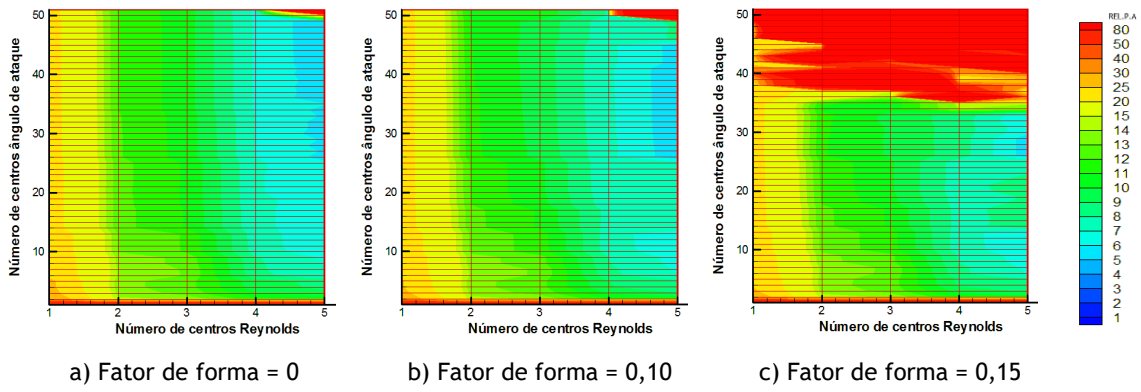


Figura 42: Coeficiente de sustentação - REL.P.A versus combinação de centros  $C(Re, \alpha)$

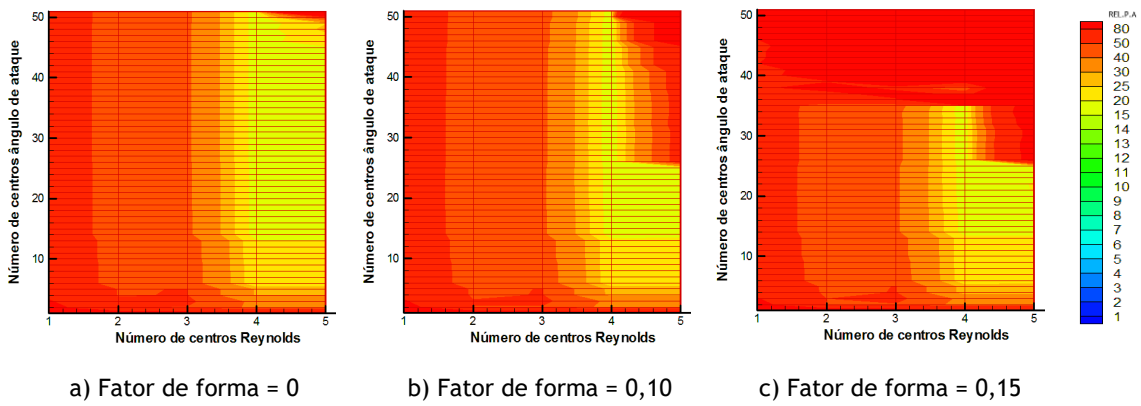


Figura 43: Coeficiente de arrasto - REL.P.A versus combinação de centros  $C(Re, \alpha)$

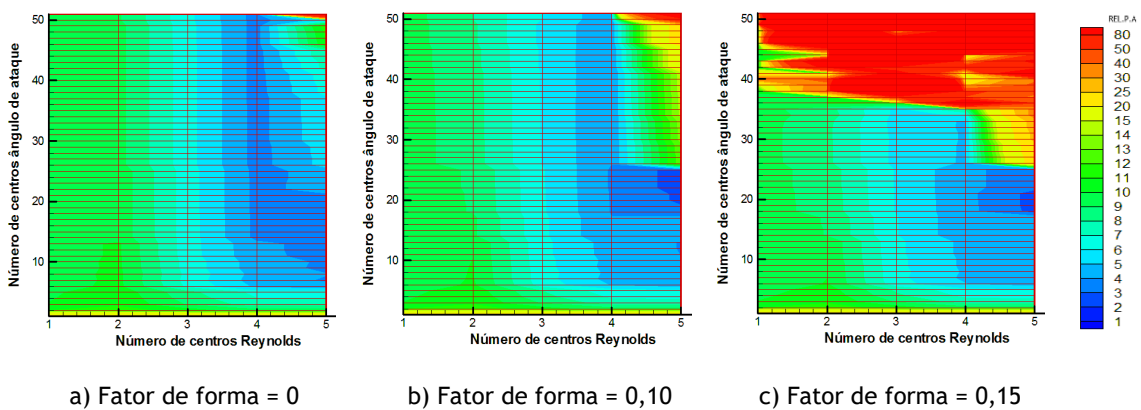


Figura 44: Coeficiente de momento - REL.P.A versus combinação de centros  $C(Re, \alpha)$

Salta imediatamente à vista para as três funções em estudo que, com o aumento do fator de forma, a zona de solução instável começa a surgir gradualmente para quantidades menores de centros, à semelhança do que ocorria para o REL.P devido ao cada vez pior condicionamento da matriz de interpolação. No que toca à Figura 42, que representa o coeficiente de sustentação, à medida que a quantidade de centros aumenta (salvo raras exceções) consegue-se uma aproximação com menor REL.P.A, sendo possível atingir um valor mínimo de 5,27% para a combinação  $C(5,47)$  e com um fator de forma igual a 0. De notar que foram apenas testados os três fatores de forma ilustrados anteriormente. Em relação ao coeficiente de arrasto ilustrado na Figura 43, torna-se complicado descrever com uma precisão aceitável a evolução deste parâmetro não sendo possível atingir REL.P.A inferiores a 15%, tal como ilustrado. Deste modo, torna-se necessário aumentar a concentração de pontos de dados para descrever esta função associada ao coeficiente de arrasto, nos limites do domínio considerado, uma vez que ocorrem variações acentuadas com a variação do número de Reynolds. Para finalizar, e no que toca ao coeficiente de momento ilustrado na Figura 44, consegue-se atingir boas aproximações para certas combinações de centros e fatores de forma, com o mínimo REL.P.A a rondar os 3,5% para diversas combinações de centros com um fator de forma igual a zero.

De seguida seleciona-se uma combinação de centros arbitrária  $C(5,25)$  e, à semelhança do que foi feito para a interpolação multivariável, identificam-se as zonas do domínio que possuem maior erro absoluto, presente na Figura 45. De notar que a escala, mais uma vez, não se altera para as diferentes funções de saída (i.e., para a representação dos coeficientes de sustentação, de arrasto e de momento) pelo que, uma vez que a magnitude (em módulo) do coeficiente de sustentação é tipicamente superior aos restantes, é normal que seja esta função que origine maiores erros absolutos, o que não equivale a dizer que tenha maiores REL.P.A. O objetivo principal da representação é identificar as zonas do domínio em que a função apresenta mais dificuldade em se aproximar do seu valor real, e não tanto uma comparação entre a magnitude dos valores entre as diferentes funções. Cada função tem assim que ser analisada separadamente. Aplicou-se primeiramente um fator de forma igual a 0 (Figura 45 a), b) e c)) e de seguida um fator de forma igual a 0,2 (Figura 45 d), e) e f)), de modo a visualizar também a sua influência.

Mais uma vez, e à semelhança do que ocorreu para a interpolação multivariável, é para baixos números de Reynolds (compreendidos entre 75000 e 225000) que as funções mais sentem dificuldades em aproximar-se do real valor, o que permite comprovar a necessidade de aumentar a concentração de pontos nessa zona de modo a uniformizar o erro ao longo do domínio. Não é claro que o aumento do fator de forma, e mesmo o próprio aumento dos centros, aumente a precisão da aproximação nos pontos que não foram usados para definir a própria função, embora melhore a aproximação nos pontos de interpolação da função.

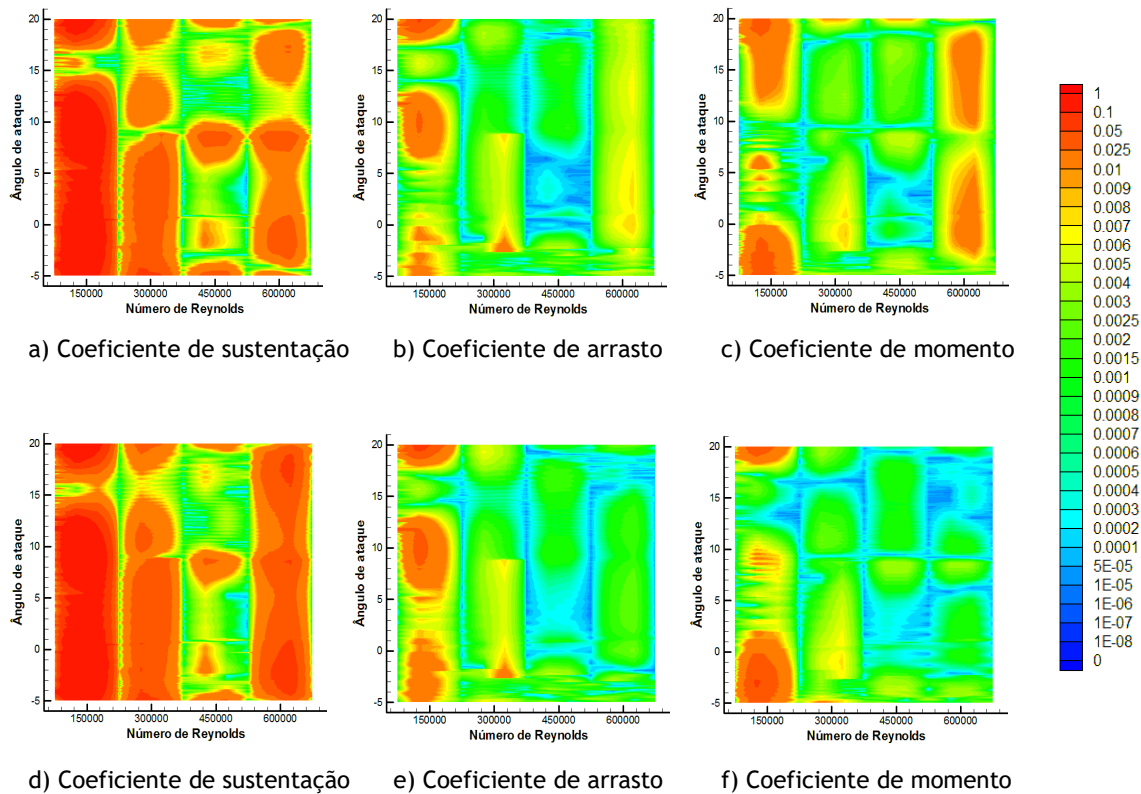


Figura 45:  $C(5,25)$  - Erro absoluto (em módulo) ao longo do domínio

### 5.1.4.3 Interpolação multivariável versus funções multiquádricas

Olhando para os resultados obtidos, e considerando apenas as funções multiquádricas obtidas com fatores de forma igual a 0, 0,1 e 0,15, observou-se que os métodos de interpolação multivariável e funções multiquádricas forneceram aproximações muito próximas. Enquanto que a abordagem recorrendo à interpolação multivariável permitiu obter um REL.P.A de 4,89%, 16,07% e 1,88%, as funções multiquádricas geraram valores mínimos a rondar os 5,7%, 15,5% e 3,5% para os coeficientes de sustentação, de arrasto e de momento, respetivamente.

No entanto, uma vez que as funções de interpolação multivariável conseguem de facto interpolar os valores utilizados para criar a sua função, é expectável que o REL.P.A diminua (comparativamente às funções multiquádricas) aquando da análise num domínio com maior concentração de pontos conhecidos. Deste modo optou-se, para certas funções multiquádricas e para certas combinações de centros (mantendo um fator de forma constante e igual a zero), comparar o erro absoluto ao longo do domínio em questão entre a função multiquádrica e o método de interpolação multivariável. De forma a ser possível identificar as zonas do domínio onde um dos erros prevalecia comparativamente ao outro, calculou-se a diferença entre o módulo do erro absoluto da função multiquádrica e o módulo do erro absoluto do método de interpolação multivariável, e representou-se a sua evolução ao longo do domínio em questão. Quando o valor é positivo (com uma cor tendencialmente mais vermelha) implica dizer que o

erro absoluto da função multiquádrica é superior, enquanto que quando o valor é negativo (com uma cor tendencialmente mais azul) implica dizer que o erro absoluto da interpolação multivariável é agora superior.

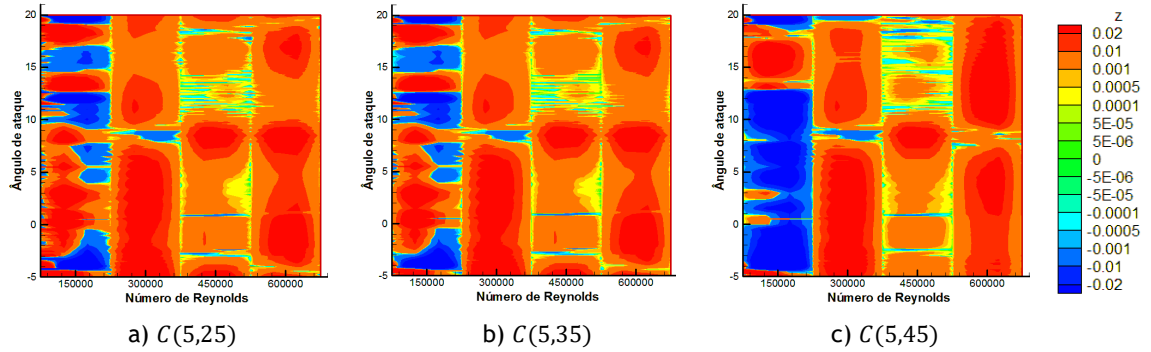


Figura 46:  $C_L$ :  $ABS$  (Função multiquádrica) –  $ABS$  (Interpolação multivariável)

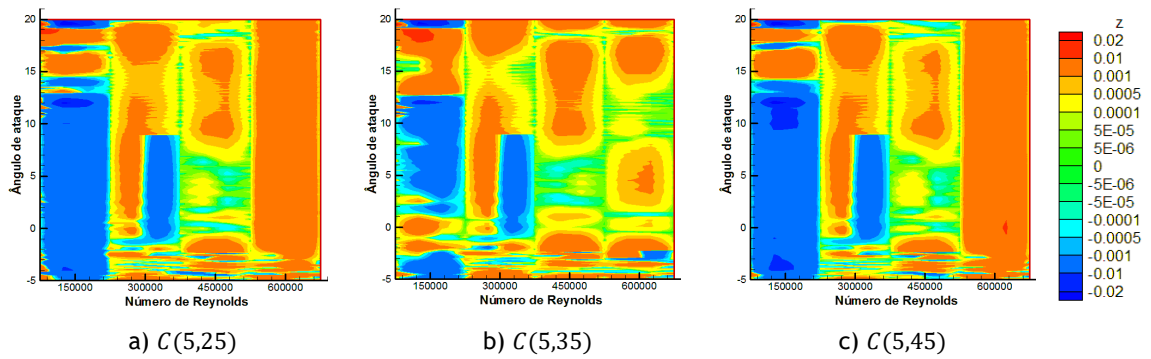


Figura 47:  $C_D$ :  $ABS$  (Função multiquádrica) –  $ABS$  (Interpolação multivariável)

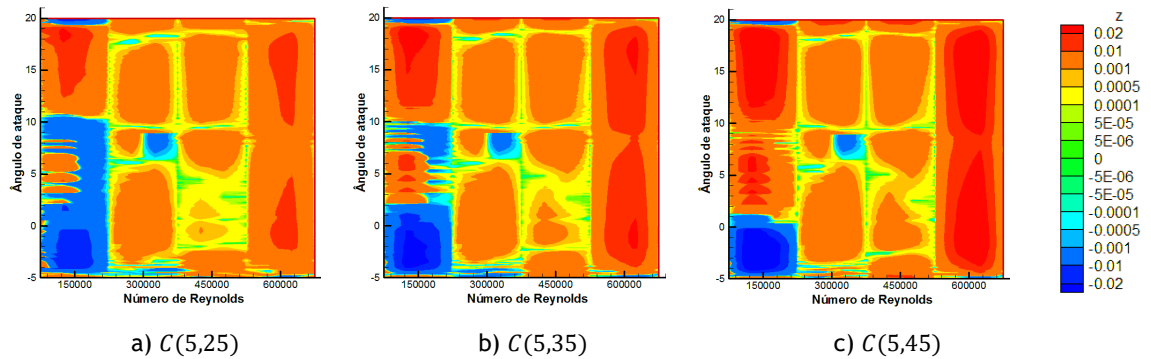


Figura 48:  $C_M$ :  $ABS$  (Função multiquádrica) –  $ABS$  (Interpolação multivariável)

É notória uma clara vantagem das funções de interpolação multivariável comparativamente às funções multiquádricas geradas, uma vez que existe maior abrangência de cores avermelhadas - que refletem um maior erro de aproximação por parte das funções multiquádricas. A única zona do domínio em estudo onde as funções multiquádricas apresentam alguma melhoria relativa, corresponde ao intervalo de baixos números de Reynolds compreendido entre [75000,225000], zona esta onde já foi identificada a necessidade de aumentar a concentração de pontos para definir a função, uma vez que é a zona que provoca maiores erros absolutos em ambas as funções. É notória uma vantagem das funções multiquádricas (no que toca à precisão obtida) comparativamente à interpolação multivariável quando existem poucos pontos amostrais em zonas que, tipicamente, requerem uma maior concentração dos mesmos. Não é claro que o aumento da quantidade de centros utilizados para definir a função multiquádrica melhore a aproximação ao longo do domínio, embora tipicamente melhorem a aproximação nos pontos de interpolação utilizados para definir a função.

#### 5.1.4.4 Influência dos pontos amostrais geradores das funções

De modo a aferir se os resultados obtidos na análise anterior são de facto um padrão característico da representação dos coeficientes aerodinâmicos de perfis alares, vai-se de seguida alterar (na medida do possível) o conjunto de pontos utilizados para definir as funções multiquádricas e interpolação multivariável, mantendo no entanto os limites definidos anteriormente, tanto para o número de Reynolds como para o ângulo de ataque. Esta análise permitirá averiguar a influência da quantidade de pontos utilizados para definir as funções, e aferir o seu impacto nas aproximações geradas. De notar que volta-se a aplicar o mesmo método de colocação dos centros com um fator de forma constante e igual a zero para definir as funções multiquádricas.

De modo a aliviar a quantidade de informação, apresenta-se apenas o conjunto de pontos utilizado para definir as funções, o que permite obter todas as informações necessárias. Tomando como exemplo a situação em que  $P(9,21)$ , e sabendo que o *Número de Reynolds*  $\in [75000,675000]$  e *ângulo de ataque*  $\in [-5,20]$ , então obtém-se um passo para o número de Reynolds e para o ângulo de ataque igual a 75000 e 1, respetivamente. O conjunto de dados alargados e representados a amarelo na Figura 40 manter-se-á inalterado, uma vez que esses pontos serão utilizados para averiguar a qualidade da aproximação das funções fora dos pontos de dados amostrais aplicados nas funções. Vai-se apresentar os resultados apenas para as combinações de centros que evidenciarem melhores resultados, embora todas elas sejam testadas e comparadas com o método de interpolação multivariável. A análise será aplicada para os três coeficientes aerodinâmicos e para o perfil alar IV, à semelhança da análise anterior.

Tabela 12: Coeficiente de sustentação: alteração dos dados de entrada

Perfil alar IV - Coeficiente de sustentação				
		Funções multiquádricas		Interpolação multivariável
Conjunto de dados amostrais	Número total de dados amostrais	Combinação de centros	REL.P.A	REL.P.A
$P(9, 26)$	234	$C(9, 15)$	2,60%	2,62%
$P(5, 51)$	255	$C(5, 44)$	5,28%	4,89%
$P(13, 26)$	338	$C(13, 16)$	1,75%	1,76%
$P(9, 51)$	459	$C(9, 33)$	2,59%	2,61%

Tabela 13: Coeficiente de arrasto: alteração dos dados de entrada

Perfil alar IV - Coeficiente de arrasto				
		Funções multiquádricas		Interpolação multivariável
Conjunto de dados amostrais	Número total de dados amostrais	Combinação de centros	REL.P.A	REL.P.A
$P(9, 26)$	234	$C(9, 17)$	11,88%	11,72%
$P(5, 51)$	255	$C(5, 30)$	15,71%	16,07%
$P(13, 26)$	338	$C(13, 25)$	10,19%	10,10%
$P(9, 51)$	459	$C(9, 32)$	11,09%	11,19%

Tabela 14: Coeficiente de momento: alteração dos dados de entrada

Perfil alar IV - Coeficiente de momento				
		Funções multiquádricas		Interpolação multivariável
Conjunto de dados amostrais	Número total de dados amostrais	Combinação de centros	REL.P.A	REL.P.A
$P(9, 26)$	234	$C(9, 25)$	1,76%	1,59%
$P(5, 51)$	255	$C(5, 13)$	3,58%	1,88%
$P(13, 26)$	338	$C(13, 25)$	1,19%	1,19%
$P(9, 51)$	459	$C(9, 42)$	3,45%	3,23%

Com a alteração do conjunto de pontos utilizados para definir as funções multiquádricas e de interpolação multivariável, é notória uma variação do REL.P.A associado, com os valores de ambas as funções sempre relativamente próximos entre si e com diferenças inferiores a 1% (salvo uma exceção quando  $P(5,51)$  e para o coeficiente de momento), pelo que não é possível conceder vantagem a nenhuma das funções estudadas relativamente a este critério.

### 5.1.5 Comparação do tempo de processamento

Uma vez analisada a influência que a combinação de centros e o fator de forma apresentam na precisão das funções multiquádricas, vão testar-se algumas combinações no que toca ao tempo de processamento necessário e compará-las com os métodos de interpolação multivariável e através de uma recolha de dados diretamente do programa xFoil.

Tal como foi já explicado no capítulo 2, o tempo de processamento total (TT) associado às funções multiquádricas inicia-se aquando da recolha dos pontos de dados e finaliza-se quando se obtém uma qualquer solução derivado da função gerada. Independentemente do método aplicado para gerar a função multiquádrica, seja ele através do método de otimização usando o FFSQP, do método do alcance ou através dos métodos de cálculo direto, tal abordagem apenas terá reflexo durante a geração da função, uma vez que após descobertos todos os parâmetros associados à mesma estes são guardados e estarão disponíveis para ser aplicados inúmeras vezes consecutivas. Deste modo, a abordagem aplicada terá apenas influência no tempo necessário até as funções multiquádricas começarem de facto a gerar soluções ou, por outras palavras, no tempo de geração das funções (TG). O tempo associado à recolha e leitura dos pontos de dados (TR e TL) e o tempo de cálculo da função (TC) não são influenciados pela abordagem aplicada para calcular o fator de forma e, conseqüentemente, gerar a função. De notar que na fase do TC das funções multiquádricas é apenas realizada a normalização dos dados de entrada inseridos e o respetivo somatório das funções, de modo a obter a solução pretendida consoante os parâmetros guardados ou obtidos previamente durante o TG.

No que toca à função de interpolação multivariável, o tempo de processamento necessário implica inicialmente a recolha e leitura dos dados amostrais (uma única vez), e de seguida inicia-se a fase de cálculos de acordo com os dados de entrada inseridos, à semelhança do que é feito para as funções multiquádricas. Relativamente ao programa xFoil, uma vez que este não necessita de efetuar qualquer tipo de recolha e leitura dos pontos de dados, é expectável que para baixas quantidades de soluções este método seja o mais benéfico do ponto de vista de minimização do tempo despendido, embora seja também previsível que peque na rapidez quando forem necessárias várias soluções consecutivas, para diferentes dados de entrada inseridos.

De modo a comparar o tempo de cálculo associado às três abordagens em análise, optou-se por realizar um estudo no perfil alar IV, com o domínio e com o conjunto de pontos utilizados anteriormente ( $P(5,51)$ ) para definir as funções, selecionando três combinações de centros arbitrárias e complementadas com um fator de forma constante e igual a zero, de modo a definir as funções multiquádricas. Vai-se calcular o tempo necessário para as funções multiquádricas, função de interpolação multivariável e xFoil efetuarem  $N$  cálculos de modo a obter  $N$  soluções pertencentes ao domínio em questão, e averiguar qual a abordagem que permite otimizar o tempo despendido com o aumento gradual do número de cálculos efetuados. Cada cálculo corresponde a obter os valores dos três coeficientes aerodinâmicos (obviamente de acordo com os dados de entrada aleatórios inseridos, correspondentes ao número de Reynolds e ângulo de ataque), pelo que serão geradas três funções multiquádricas, cada uma delas associada a um coeficiente aerodinâmico específico, e efetuadas também três interpolações bilineares. Uma vez que o programa xFoil calcula sempre todos os coeficientes aerodinâmicos para uma dada combinação de dados de entrada, optou-se por efetuar este estudo nestes modos, pelo que cada cálculo efetuado estará associado a três funções geradas e a três cálculos efetuados. O tempo de recolha e de leitura dos dados (TR e TL) é efetuado apenas uma única vez no início do processo para os dois métodos de aproximação, enquanto o TG associado às funções multiquádricas é efetuado também apenas três vezes na fase inicial (uma vez que o método de interpolação multivariável não possui tempo de geração na sua génese). De modo a ser possível comparar estas duas abordagens, serão sempre efetuados o mesmo número de cálculos e sempre com os mesmos dados de entrada aleatórios. No que toca ao xFoil calcula-se o tempo necessário para gerar também  $N$  polares diferentes (com  $N$  números de Reynolds diferentes e sempre para o mesmo ângulo de ataque pré-definido), de modo a comparar o seu tempo de cálculo com o das funções de aproximação anteriores para obter os valores dos três coeficientes aerodinâmicos pretendidos.

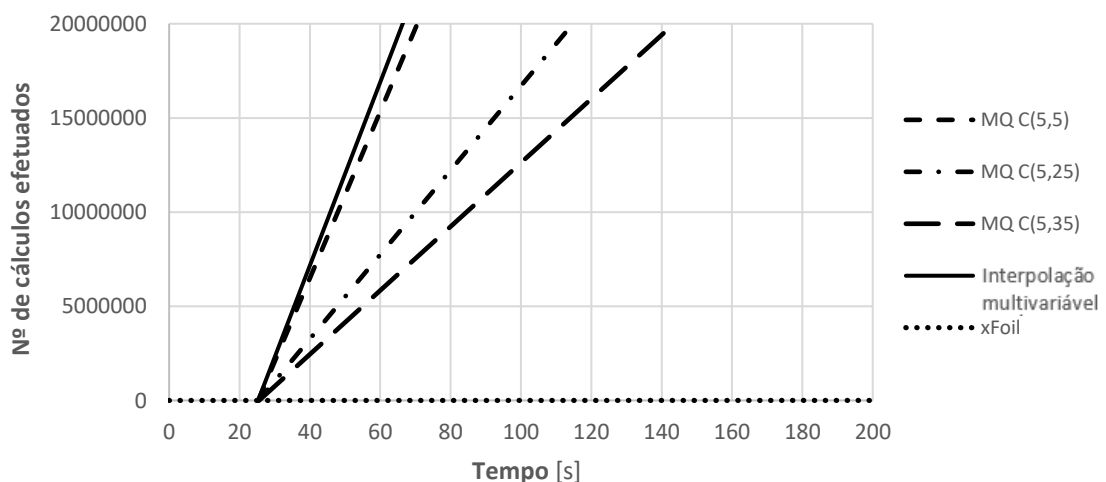


Figura 49: Tempo de processamento versus número de cálculos efetuados (1)

Ao analisar os resultados presentes na Figura 49 é notório que a interpolação multivariável oferece maior rapidez de cálculo quando comparada com as funções multiquádricas geradas e com recurso ao programa xFoil. Quanto maior a quantidade de centros aplicada, maior será a quantidade de coeficientes necessários calcular durante o TG e maiores serão as próprias funções, o que por sua vez aumenta também o TC das funções, tal como evidenciado no gráfico. A utilização do programa xFoil além de não garantir a convergência para certas situações, evidencia um elevadíssimo tempo de cálculo quando comparado com as alternativas propostas. Embora este método não requeira tempo inicial de recolha e leitura de dados (derivados exatamente deste programa), tal vantagem não é compensatória do ponto de vista de otimização, uma vez que a tendência é que este venha a deteriorar cada vez mais este aspeto.

Na Tabela 15 mostra-se o REL.P associado a cada uma das funções multiquádricas geradas (primeiro para a função multiquádrica associada ao coeficiente de sustentação, seguida das funções associadas ao coeficiente de arrasto e de momento, respetivamente), bem como o tempo de recolha dos dados (TR) e o tempo de geração das funções multiquádricas (TG). De notar que o tempo de leitura é omitido por ser muito próximo de zero e insignificante quando comparado com TR, enquanto que o tempo de cálculo (TC) aparece no gráfico ilustrado na Figura 49, para um conjunto consecutivo de cálculos com pontos de entrada aleatórios. O TG corresponde ao tempo necessário para gerar as três funções multiquádricas associadas aos três coeficientes aerodinâmicos (passo que não é realizado pela interpolação multivariável), enquanto que o TR e TL correspondem ao tempo necessário para obter e ler todos os dados amostrais que vão compor a função, i.e., todos os  $P(5,51)$  pontos para cada função, o que perfaz um total de 765 dados amostrais, 255 para cada função particular.

Tabela 15: Resultados obtidos para as funções de aproximação

Perfil alar IV - $C_L / C_D / C_M$ - Fator de forma = 0			
Função	REL.P	TR [s]	TG [s]
Função MQ $C(5, 5)$	8,9% / 24,2% / 7,7%	25,28	0,047
Função MQ $C(5, 25)$	1,9% / 1,1% / 0,9%	25,28	0,141
Função MQ $C(5, 35)$	0,4% / 0,7% / 0,4%	25,28	0,281
Interpolação multivariável	~ 0%	25,28	Não aplicável

A aplicação de um outro qualquer método de cálculo do fator de forma (método usando o FFSQP ou método do alcance) influenciaria apenas o TG associado às funções multiquádricas, o que iria equivaler a uma translação das regressões lineares presentes na Figura 49 para a

direita, uma vez que o tempo inicial (antes de se dar início o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos das funções geradas) aumenta, sem no entanto afetar o TC.

De seguida, de modo a perceber a partir de que ponto é compensatório utilizar uma das funções de aproximação em detrimento do programa xFoil, aplica-se um zoom à Figura 49 apresentada anteriormente e obtém-se uma interseção entre a linha referente ao xFoil e as linhas referentes às funções de aproximação, presente na Figura 50. De notar que cada cálculo recorrendo ao xFoil gera sempre obrigatoriamente uma polar diferente, associada a um número de Reynolds diferente, e sempre para o mesmo ângulo de ataque pré-definido, uma vez que, por limitações do programa, é impossível adotar os mesmos dados de entrada aleatórios utilizados nas funções de aproximação. É possível constatar que é para aproximadamente 240 cálculos diferentes o momento a partir do qual começa a ser benéfico a utilização tanto do método de interpolação multivariável como das funções multiquádricas definidas. O motivo principal que dá origem a esta situação corresponde ao tempo necessário de recolha dos dados amostrais com recurso ao xFoil e que servirão de base à geração das funções de aproximação. É importante salientar que as linhas correspondentes à interpolação multivariável e funções multiquádricas se encontram sobrepostas, uma vez que não existe uma diferença de tempo considerável entre todas para esta gama de número de cálculos efetuados.

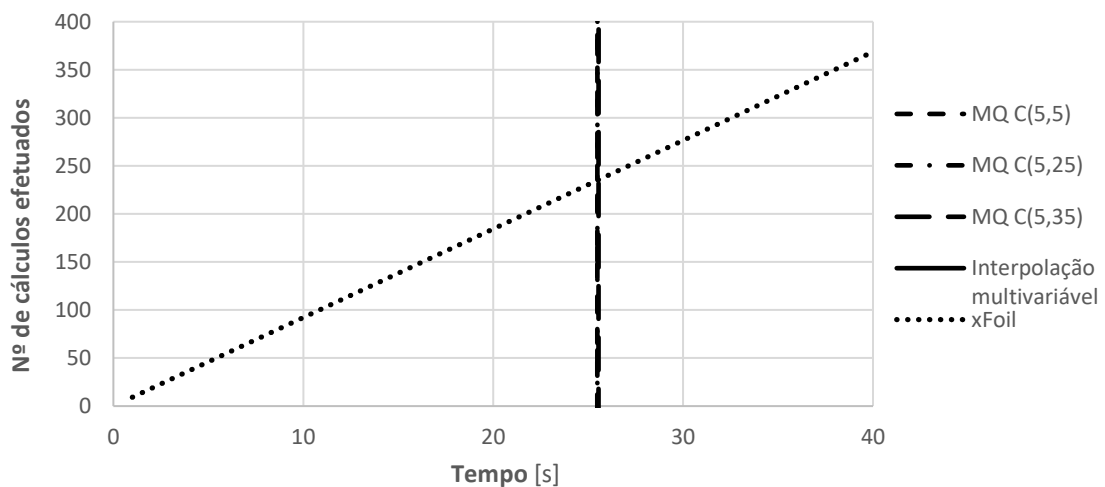


Figura 50: Tempo de processamento versus número de cálculos efetuados (2)

É também importante referir que foi sempre aplicada a mesma quantidade de centros ao definir as três funções multiquádricas que dizem respeito aos três coeficientes aerodinâmicos respetivos, i.e., para gerar a curva associada à combinação  $MQ C(5,5)$ , todas as funções possuíam 25 centros, de modo a ser possível estabelecer um padrão coerente, embora seja possível adotar diferentes quantidades de centros para diferentes funções, o que seria útil principalmente para a representação do coeficiente de arrasto que notoriamente evidencia a necessidade de adotar maiores quantidades de centros relativamente os restantes coeficientes.

## 5.2 Análise com quatro variáveis independentes

### 5.2.1 Identificação dos perfis alares e domínio aplicado no estudo

Os coeficientes aerodinâmicos dos perfis alares dependem de uma série de fatores e parâmetros de modo a serem estimados. Em estudos de otimização de perfis alares é usual a recorrente alteração das dimensões do flap e consequente análise da sua deflexão em pleno voo, pelo que se torna moroso ter de ajustar tais parâmetros no xFoil cada vez que seja solicitada uma alteração. A alternativa que se pretende implementar é a criação de funções contínuas cuja solução (valor dos coeficientes aerodinâmicos) seja dependente das variáveis de entrada  $(x, y, z, t) \equiv (\text{Número de Reynolds}, \hat{\text{Ângulo de ataque}}, \text{Percentagem de Corda do flap}, \text{Deflexão do flap})$ , para todo o domínio em questão. Uma vez que esta é uma análise muito morosa, que requer um elevado tempo de processamento devido à dimensão do problema, aplica-se este estudo apenas ao perfil alar I cujo comportamento servirá como padrão para os restantes. Optou-se por seleccionar o seguinte conjunto de dados:  $P(5,51,5,5)$ , que servirá para definir as funções multiquádricas e de interpolação multivariável, enquadrados nos seguintes limites:

$$\text{Número de Reynolds} \equiv Re \in [75000, 675000]$$

$$\hat{\text{Ângulo de ataque}} [^\circ] \equiv \alpha \in [-5, 20]$$

$$\text{Corda do flap} [\%] \equiv cFlap \in [20, 40]$$

$$\text{Deflexão do flap} [^\circ] \equiv dFlap \in [0, 10]$$

Deste modo, obtém-se um passo de 150000, 0,5, 5 e 2,5 entre pontos de dados conhecidos para o número de Reynolds, ângulo de ataque, percentagem de corda do flap e deflexão do flap, respetivamente.

### 5.2.2 Influência da quantidade de centros e fator de forma

De modo a ser possível gerar uma representação gráfica da influência da quantidade de centros no REL.P da função multiquádrica correspondente, e tendo em conta os dados obtidos e analisados, optou-se por representar apenas a situação em que  $C(Re, \alpha, 5, 5)$  e com um fator de forma constante e igual a 0, colocados novamente com recurso ao método de colocação 2, pelos mesmos motivos abordados anteriormente na análise bidimensional, presente na Figura 51. Escolheu-se variar o número de centros correspondentes ao número de Reynolds e ângulo de ataque, fixando por sua vez a corda e deflexão do flap (à semelhança do que foi feito na análise bidimensional), uma vez que se obteve REL.Ps muito elevados sempre que não se utilizavam o número máximo de centros nas variáveis correspondentes ao cFlap e dFlap.

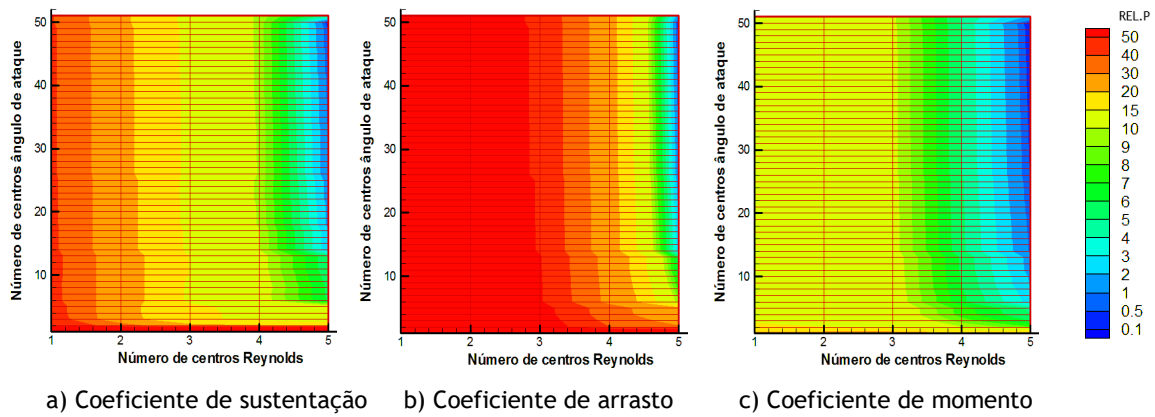


Figura 51: REL.P versus combinação de centros  $C(Re, \alpha, 5,5)$

Mais uma vez, e à semelhança do evidenciado para os restantes casos de estudo na análise bidimensional, o aumento da quantidade de centros está associado a uma diminuição do REL.P da função multiquádrica, sendo também notória a maior dificuldade em representar o coeficiente de arrasto comparativamente aos dois restantes coeficientes aerodinâmicos. O cálculo do REL.P da função para as 255 combinações testadas foi efetuado sempre com um fator de forma constante e igual a zero uma vez que se verificou a tendência na análise bidimensional que o ligeiro aumento deste parâmetro não trás melhoramentos significativos, e devido também ao facto de serem necessárias aproximadamente 25 horas para efetuar o cálculo do erro das 255 combinações possíveis em cada função.

### 5.2.3 Obtenção do fator de forma: método de otimização usando o FFSQP

À semelhança do que se fez na análise bidimensional, selecionou-se um conjunto arbitrário de centros de modo a testar o método usando o FFSQP aplicado e garantir a sua convergência para este caso de estudo, comparando os seus resultados com a situação em que o fator de forma é constante e igual a zero.

Tabela 16: Resultados derivados do método com FFSQP  $C(Re, \alpha, cFlap, dFlap)$

Coeficiente de sustentação - Perfil alar I					
Combinação de centros		$C(3, 3, 5, 5)$	$C(5, 5, 5, 5)$	$C(5, 10, 5, 5)$	$C(5, 20, 5, 5)$
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma otimizado	0,043	0,86	0,52	0,02
	REL.P	16,02%	6,33%	3,79%	1,64%
	Nº iterações	34	93	74	29
	TG [s]	132,71	1928,8	6389,8	5953,6
Fator de forma = 0	REL.P	16,06%	11,26%	5,40%	1,69%
	TG [s]	3,92	20,63	80,97	347,64

Mais uma vez, e tal como seria expectável, a aplicação deste método requer um maior tempo de geração (TG) uma vez que realiza diversas iterações na sua solução, de modo a convergir para o mínimo local na vizinhança em estudo seleccionada, ao que cabe ao utilizador aferir se vale a pena a adição deste tempo em benefício da qualidade da aproximação obtida (menor REL.P associado).

Está disponível no anexo E a evolução do REL.P em função do aumento do fator de forma para as quatro combinações testadas. Mais uma vez se vê que o método permite convergir para o mínimo local na vizinhança do ponto em que o fator de forma é igual a zero, sendo que por vezes esse mínimo coincide também com o mínimo absoluto da função.

#### 5.2.4 Comparação do tempo de processamento

Calculou-se, também, o tempo necessário para efetuar  $N$  cálculos com recurso às funções multiquádricas, interpolação multivariável e ao programa xFoil de modo a obter, por cada cálculo efetuado, o valor dos três coeficientes aerodinâmicos pretendidos. Uma vez mais, os dados de entrada correspondentes ao número de Reynolds, ângulo de ataque, cFlap e dFlap foram selecionados aleatoriamente para cada cálculo efetuado com recurso às funções de aproximação, enquanto que no recurso ao xFoil foi sempre gerada uma nova polar, associada a um número de Reynolds diferente e sempre para o mesmo ângulo de ataque pré-definido, por limitações da interface do programa, sempre no interior do domínio em estudo. À semelhança do que se fez na análise bidimensional, recolheram-se todos os tempos associados ao tempo de processamento total das funções, e de seguida realizaram-se  $N$  cálculos que permitiram traçar as regressões lineares presentes na Figura 52.

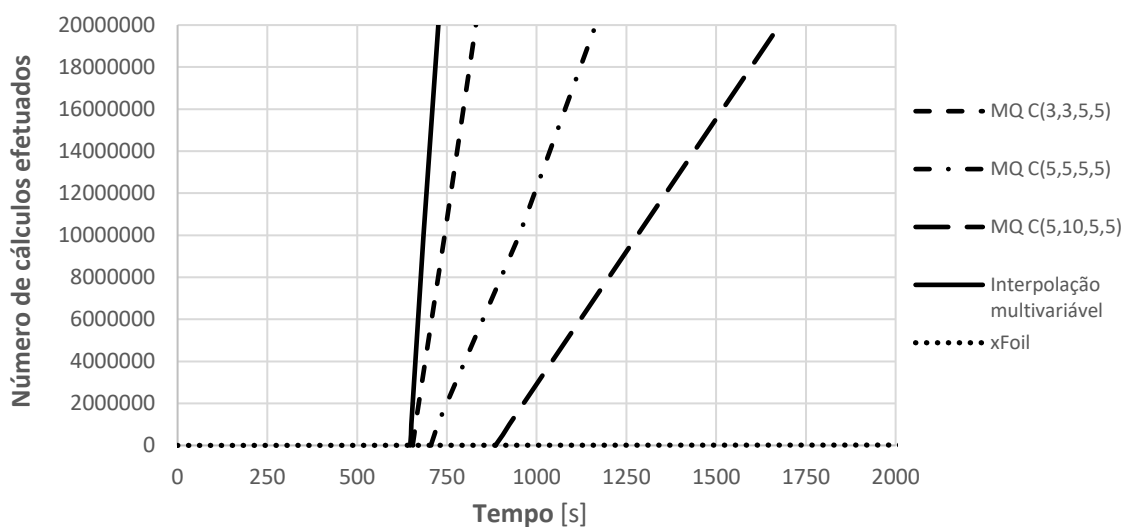


Figura 52: Tempo de processamento versus número de cálculos efetuados (1)

Uma vez que o conjunto de pontos discretos utilizados para definir cada uma das funções aumentou para 6375 pontos, o que perfaz um total de 19125 pontos amostrais relativos às três funções de aproximação associadas aos três diferentes coeficientes aerodinâmicos, aumenta também o tempo necessário para recolher todos os pontos com recurso ao programa xFoil e, conseqüentemente, o tempo de leitura dos dados. Uma vez que se tem agora uma dimensão espacial superior e com mais pontos de dados, a dimensão das matrizes de apoio à criação das funções multiquádricas aumenta, o que requer mais tempo de forma a efetuar todas as operações necessárias à obtenção dos coeficientes das funções e que, por sua vez, implica um aumento do TG. Mais uma vez, tanto o TR como o TL são realizados uma única vez de modo a obter e ler os 19125 pontos amostrais (com recurso ao programa xFoil), tanto na interpolação multivariável como nas funções multiquádricas, ao que se junta nestas últimas o TG, que diz respeito ao tempo necessário para gerar as três funções de aproximação necessárias, procedimento este realizado também apenas uma única vez antes de se dar início ao TC. Os resultados estão apresentados na Tabela 17.

Tabela 17: Resultados obtidos para as funções de aproximação de quatro variáveis

Perfil alar I - $C_L / C_D / C_M$				
Função	REL.P	TR [s]	TL [s]	TG [s]
Função MQ $C(3, 3, 5, 5)$	16,1% / 55,9% / 12,2%	646,4	1,797	7,359
Função MQ $C(5, 5, 5, 5)$	11,3% / 21,2% / 4,8%	646,4	1,797	57,93
Função MQ $C(5, 10, 5, 5)$	5,4% / 6,6% / 1,9%	646,4	1,797	237,93
Interpolação multivariável	~ 0%	646,4	1,797	Não aplicável

À semelhança do que se obteve para o caso bidimensional, a interpolação multivariável oferece um mais rápido tempo de cálculo mesmo quando comparado com funções multiquádricas com apenas 225 dos 6375 centros possíveis (MQ  $C(3,3,5,5)$ ). Mais uma vez, foi aplicada sempre a mesma quantidade de centros para definir as três funções multiquádricas associadas aos três coeficientes aerodinâmicos, embora nesta situação seja também evidente a maior dificuldade em representar viavelmente a evolução do coeficiente de arrasto, função esta que necessita de uma maior quantidade de centros comparativamente aos restantes dois coeficientes aerodinâmicos existentes.

Nesta situação, e como o TR é superior, uma vez que existem mais dados de entrada apenas se torna compensatória a utilização dos métodos de aproximação após

aproximadamente 6000 cálculos efetuados, tal como é possível constatar pela análise da Figura 53. Para esta dimensão espacial já é possível diferenciar as linhas associadas a diferentes funções multiquádricas, uma vez que o tempo de geração das funções é bastante diferente devido ao aumento considerável da sua dimensão, quando comparadas entre si.

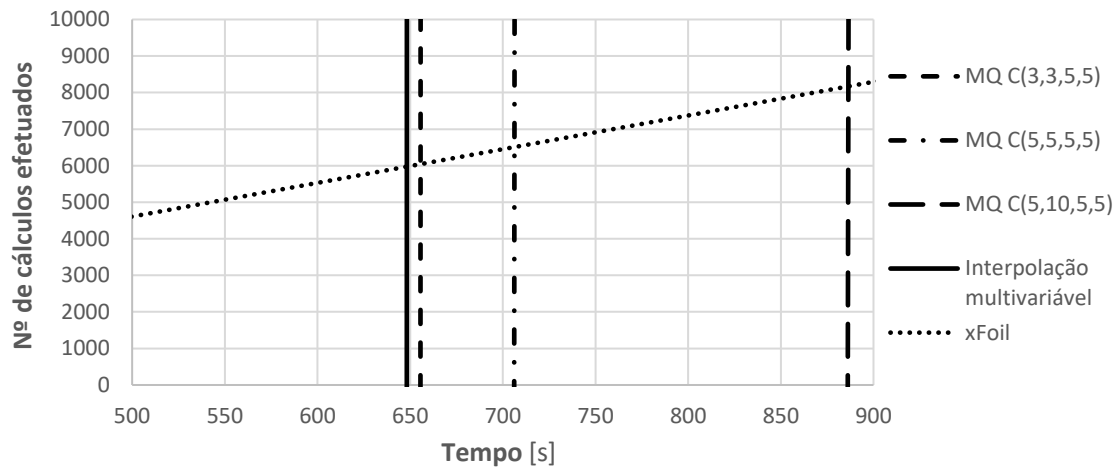


Figura 53: Tempo de processamento versus número de cálculos efetuados (2)

Se o utilizador estiver interessado apenas em calcular um coeficiente aerodinâmico particular, mais precocemente se torna compensatória a aplicação das funções de aproximação, uma vez que serão apenas lidos os pontos amostrais associados a essa mesma função e é gerada apenas a função multiquádrica respetiva. Já com recurso ao xFoil são sempre calculados todos os coeficientes aerodinâmicos para um dado conjunto de dados de entrada, independentemente da vontade do utilizador, o que aumenta o tempo despendido em cálculos desnecessários. Um outro fator que privilegia a utilização das funções de aproximação em detrimento do xFoil é que este último, por vezes, não garante a convergência para determinados dados de entrada, ao contrário daquilo que acontece para as funções de aproximação que estão definidas ao longo de todo o seu domínio.

# Capítulo 6

## Conclusão

Esta dissertação tinha como objetivo aplicar funções multiquádricas como forma de representar os coeficientes aerodinâmicos de perfis alares, de modo a otimizar o tempo despendido no seu cálculo. O método elaborado consegue aproximar um qualquer conjunto de dados inserido, de uma qualquer dimensão espacial, calculando de forma automática a localização dos centros (tantos quanto o utilizador pretenda), e calculando também o fator de forma consoante o método disponível escolhido.

### 6.1 Breve resumo

Esta abordagem foi inicialmente aplicada a funções bidimensionais simples como forma de validação do método e de modo a compreender a influência de certos parâmetros na precisão da função. Posteriormente, alargou-se a análise a uma dimensão superior com quatro variáveis independentes, por semelhança às quatro variáveis definidas para a obtenção dos valores dos coeficientes aerodinâmicos dos perfis alares. Visualizou-se a influência de uma série de fatores na aproximação multiquádrica, entre os quais a quantidade e localização dos centros, a quantidade de pontos amostrais aplicados para definir a função, a escolha do fator de forma, a adição de uma coluna de uns na matriz de interpolação (e consequente adição de um coeficiente para definir a função), aplicação de uma normalização dos dados do problema, aplicação de métodos de otimização do fator de forma (FFSQP e método do alcance), e por fim aplicou-se toda esta informação com o intuito de aproximar a evolução dos coeficientes aerodinâmicos de um dado perfil alar com uma só função para cada coeficiente. De modo a ser possível generalizar os resultados obtidos à maioria dos perfis alares típicos existentes, selecionaram-se sete perfis alares diferentes, tendo-se obtido resultados bastante similares entre eles e sempre com a mesma tendência no que toca aos parâmetros acima mencionados.

### 6.2 Resultados importantes

Concluiu-se que com o aumento da quantidade de centros era possível obter melhores aproximações, salvo raras exceções, sem, no entanto, esquecer a grande influência do fator de forma na qualidade da aproximação, uma vez que este é diretamente responsável pelo deterioramento do número de condicionamento da matriz de interpolação usada na geração da função multiquádrica.

Inicialmente aplicaram-se os métodos de cálculo direto do fator de forma, especificamente os métodos de Fasshauer e de Hardy, tendo estes, no entanto, apresentado pouca precisão nas aproximações obtidas. A aplicação de uma normalização dos dados do

problema fez com que o intervalo de fatores de forma úteis diminuísse (antes de gerar mau condicionamento da matriz de interpolação), comprovando-se que os métodos não estavam preparados para as circunstâncias aplicadas ao presente problema. É necessário diminuir a magnitude do fator de forma obtido por estes métodos para que estes possam, de facto, vir a ser fidedignos. Uma vez que se comprovou que a aplicação da normalização não afetava a precisão da função que se poderia obter com possíveis aumentos do fator de forma, afetando apenas a magnitude do mesmo para o qual se atingia esta melhor precisão, é expectável que se consiga obter um parâmetro multiplicativo que ajuste o fator de forma consoante a normalização aplicada. Por outro lado, a aplicação de normalização é vantajosa uma vez que permite uniformizar os dados de entrada, o que do ponto de vista computacional é benéfico pois permite reduzir a magnitude dos valores obtidos e que, por sua vez, melhora a precisão e aplicabilidade do método.

A aplicação do método do alcance embora permitisse obter sempre uma solução dentro dos requisitos estipulados pelo utilizador, requeria também um elevado tempo de processamento, já que necessitava de iterar a solução diversas vezes. Esta abordagem foi útil numa situação bidimensional, uma vez que o tempo de geração da função acabava por ser relativamente baixo, embora possa vir a ser aplicada a uma qualquer dimensão se assim o utilizador o pretender. O método de otimização usando o FFSQP conseguiu, na maioria das situações, convergir para o melhor valor do fator de forma possível (com menor REL.P associado), embora este necessite que o utilizador estipule previamente a quantidade de centros, e sem a garantia de se obter, de facto, a melhor solução para essa combinação, uma vez que o comportamento convexo das funções do REL.P versus fator de forma não respeita sempre a mesma tendência.

No que toca à precisão obtida, optou-se por comparar este método com a interpolação multivariável, uma vez que este é um método amplamente aplicado na representação aproximada dos coeficientes aerodinâmicos. Concluiu-se que, variando o conjunto de pontos aplicados para definir as funções, não existia uma vantagem clara de nenhuma das abordagens comparativamente à outra, olhando à qualidade da aproximação em pontos fora do conjunto de dados aplicados, mas no interior do domínio selecionado para o efeito. Esta análise foi efetuada num espaço bidimensional, mas é expectável que semelhantes resultados sejam obtidos para dimensões superiores.

No que toca ao tempo de processamento necessário para efetuar um determinado número consecutivo de cálculos (de modo a obter o valor dos três coeficientes aerodinâmicos), com base num conjunto aleatório de dados de entrada, observou-se que para a situação bidimensional se torna benéfica a aplicação das funções de aproximação (em detrimento do uso do programa xFoil) após cerca de 240 cálculos efetuados, enquanto que para uma dimensão com quatro variáveis independentes apenas se verificou ser compensatório após sensivelmente 6000 cálculos.

A interpolação multivariável mostrou-se mais rápida comparativamente às funções multiquádricas. O aumento da dimensão espacial do problema fez com que a diferença no TC entre as funções multiquádricas e a abordagem de interpolação multivariável aumentasse. Para o caso bidimensional, obteve-se um declive de aproximadamente 486618 *cálculos/s* e de 442234 *cálculos/s* para as regressões lineares (presentes na Figura 49) do método de interpolação multivariável e da função multiquádrica  $C(5,5)$ , respetivamente, enquanto que para a dimensão  $R^4$  obteve-se 247537 *cálculos/s* e 116439 *cálculos/s* para a interpolação multivariável e para a função multiquádrica  $C(3,3,5,5)$ , respetivamente. Na situação bidimensional usaram-se apenas 25 dos 255 centros disponíveis (o que corresponde a cerca de 9,8% dos centros disponíveis), enquanto que para a dimensão  $R^4$  usaram-se 225 dos 6375 centros disponíveis (o que corresponde a aproximadamente 3,53% dos centros disponíveis). Efetuando o quociente entre o declive da regressão linear do método de interpolação multivariável e o da função multiquádrica, obtém-se para o caso bidimensional 1,1 e para a dimensão  $R^4$  2,13, o que significa que mesmo reduzindo a percentagem de centros aplicados para definir a função multiquádrica (o que piora a qualidade da aproximação gerada), a diferença entre o declive associado ao tempo de cálculo de ambas as abordagens aumenta em benefício da interpolação multivariável.

### 6.3 Conclusão e trabalho futuro

A utilização de funções multiquádricas como forma de representação de um determinado conjunto de pontos mostrou-se ser um método preciso quando se ajuíza corretamente a escolha de determinados parâmetros. Uma vez que não é intuitivo à partida definir alguns destes valores, foram criadas e estudadas algumas técnicas que visam auxiliar a aplicação do método. Tais abordagens aumentam o tempo necessário para gerar a função multiquádrica desejada, mas uma vez obtida, esta torna-se rápida a fornecer aproximações da solução pretendida, consoante os dados de entrada inseridos. O método de otimização usando o FFSQP mostrou ser uma mais valia para este método, embora possua também limitações.

As aplicações utilizando funções multiquádricas estão ainda em crescimento, e existem muitas vias que poderão permitir a sua evolução e aplicabilidade no ramo científico. O estudo de novas técnicas de colocação dos centros, a aplicação de um fator de forma variável consoante o centro a que é aplicado, o desenvolvimento de métodos de cálculo direto do fator de forma e de métodos que visem baixar o número de condicionamento das matrizes de interpolação com o aumento gradual do fator de forma, e a compreensão de melhores técnicas de definição do domínio e conjunto de pontos a aplicar no problema são ainda temas em aberto e que merecem ser abordados no futuro como forma de melhorar o processo. Um outro possível trabalho que pode facilitar a escolha mais objetiva do método mais adequado ao caso de estudo apresentado seria aplicar uma metodologia multicritério tendo em conta o tempo de processamento, o erro médio, a distribuição do erro e a complexidade da implementação numérica do método.



## Referências

- [1] Hardy, R.L., Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces, *Journal of Geophysical Research*, 76(8), pp. 1905-1915, 1971.
- [2] Franke, R., Scattered data interpolation: Tests of some methods, *Mathematics of Computation*, 38(157), pp. 181-200, 1982.
- [3] Micchelli, C.A., Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions, *Constructive Approximation*, 2(1), pp. 11-22, 1986.
- [4] Hardy, R.L., Theory and Applications of the Multiquadric Biharmonic Method: 20 Years of Discovery, *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8-9), pp. 163-208, 1990.
- [5] Kansa, E.J., Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics, *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8-9), pp. 127-145, 1990.
- [6] Kansa, E.J., Hon, Y.C., Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: applications to elliptic partial differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 39(7-8), pp. 123-137, 2000.
- [7] Sarra, S.A., Integrated Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods, *Computers and Mathematics with Applications*, 51, pp. 1283-1296, 2006.
- [8] Fasshauer, G.E., Meshfree Approximation Methods with MATLAB, *World Scientific Co, Pte. Ltd.*, 6, 2007.
- [9] Rippa, S., An algorithm for selecting a good value for the parameter  $c$  in radial basis function interpolation, *Advances in Computational Mathematics*, 11, pp. 193-210, 1999.
- [10] Mongillo, M., Choosing Basis Functions and Shape Parameters for Radial Basis Function Methods, 2011, disponível Online: [http://evoq\\_eval.siam.org/Portals/0/Publications/SIURO/Vol4/Choosing\\_Basis\\_Functions\\_and\\_Shape\\_Parameters.pdf?ver=2018-04-06-103239-587](http://evoq_eval.siam.org/Portals/0/Publications/SIURO/Vol4/Choosing_Basis_Functions_and_Shape_Parameters.pdf?ver=2018-04-06-103239-587) (acesso em 20 de Junho 2019)
- [11] Cheng, A.H.D., Multiquadric and its shape parameter: A numerical investigation of error estimate, condition number, and round-off error by arbitrary precision computation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36, pp. 220-239, 2012.

- [12] Tarwater, A.E., Parameter study of Hardy's multiquadric method for scattered data interpolation, *National Technical Information Service and Lawrence Livermore National Laboratory*, pp. 69, 1985.
- [13] Schaback, R., Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation, *Advances in Computational Mathematics*, 3, pp. 251-264, 1995.
- [14] Ranjbar, M., A new variable shape parameter strategy for Gaussian radial basis function approximation methods, *Mathematics and Computer Science Series*, 42(2), pp. 260-272, 2015.
- [15] Carlson, R.E., Foley, T.A., The parameter  $R_2$  in multiquadric interpolation, *Computers and Mathematics with Applications*, 21(9), pp. 29-42, 1991.
- [16] Foley, T.A., Near optimal parameter selection for multiquadric interpolation, *Journal of Applied Science and Computations*, 1, pp. 54-69, 1994.
- [17] Kansa, E.J., Carlson, R.E., Improved accuracy of multiquadric interpolation using variable shape-parameters, *Computers and Mathematics with Applications*, 24(12), pp. 99-120, 1992.
- [18] Beatson, R.K., Cherrie, J.B., Mouat, C.T., Fast fitting of radial basis functions: methods based on preconditioned GMRES iteration, *Advances in Computational Mathematics*, 11(2-3), pp. 253-270, 1999.
- [19] Fornberg, B., Zuev, J., The Runge phenomenon and spatially variable shape parameters in RBF interpolation, *Computers and Mathematics with Applications*, 54(3), pp. 379-398, 2007.
- [20] Bayona, V., Moscoso, M., Kindelan, M., Optimal constant shape parameter for multiquadric based RBF-FD method, *Journal of Computational Physics*, 230, pp. 7384-7399, 2011.
- [21] Machado, L., de Oliveira, R.M.S., Souza, W.C.B., Araújo, R.C.F., Tostes, M.E.L., An Automatic Methodology for Obtaining Optimum Shape Factors for the Radial Point Interpolation Method, *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, 10(2), 2011.
- [22] Biazar, J., Hosami, M., An Algorithm for the shape parameter in radial basis functions interpolation, *International conference on advances in applied mathematics and mathematical physics*, Yildiz Technical University Istanbul, Turkey, August 2014.
- [23] Hon, Y.C., Schaback, R., Zhou, X., An adaptive greedy algorithm for solving large RBF collocation problems, *Numerical Algorithms*, 32(1), pp. 13-25, 2003.

- [24] Luh, L.T., The choice of the shape parameter: A friendly approach, *Engineering Analysis with Elements*, 98, pp. 103-109, 2019.
- [25] Amouzgar, K., Stromberg, N., Radial basis functions as surrogate models with a priori bias in comparison with a posteriori bias, *Struct. Multidisc. Optim.*, 55, pp. 1453-1469, 2017.
- [26] “Inverse matrix”: Online: [https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible\\_matrix](https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix) (acesso em 20 de Junho de 2019)
- [27] “Pseudo inverse matrix”: Online: <https://help.matheass.eu/en/Pseudoinverse.html> (acesso 20 de Junho 2019)
- [28] “Número de condicionamento de uma matriz”: Online: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Número\\_de\\_condicionamento](https://pt.wikipedia.org/wiki/Número_de_condicionamento) (acesso 20 de Junho 2019)
- [29] “Número de condicionamento de uma matriz”: Online: [https://www.ufrgs.br/reatmat/CalculoNumerico/livro-sci/sdsl-condicionamento\\_de\\_sistemas\\_lineares.html](https://www.ufrgs.br/reatmat/CalculoNumerico/livro-sci/sdsl-condicionamento_de_sistemas_lineares.html) (acesso 20 de Junho 2019)
- [30] “Número de condicionamento de uma matriz”: Online: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~calves/cursos/NormCond.htm> (acesso 20 de Junho 2019)
- [31] “Interpolação linear”: Online: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Interpolação\\_linear](https://pt.wikipedia.org/wiki/Interpolação_linear) (acesso 20 de Junho 2019)
- [32] “Erros e incertezas”: Online: <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312266791/MEFT-LFEB-ERROS%20E%20INCERTEZAS%20EXPERIMENTAIS%202015.pdf> (acesso 20 de Junho 2019)
- [33] Zhou, J.L., Tits, A.L., Laurence, C.T., User’s Guide for FFSQP Version 3.7: A FORTRAN Code for Solving Constrained Nonlinear (Minimax) Optimization Problems, Generating Iterates Satisfying All Inequality and Linear Constraints, *Electrical Engineering Department and Institute for Systems Research*, 1997.



# Anexos

## Anexo A: Representação geométrica dos perfis alares



Figura A-1: UBI\_03\_016

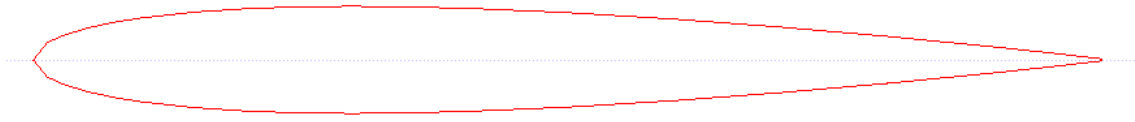


Figura A-2: NACA 0010 HSTAB



Figura A-3: NACA 0009

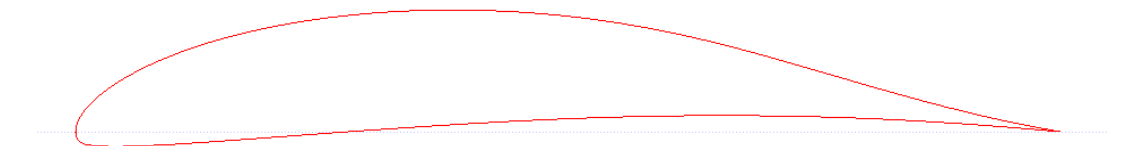


Figura A-4: DAE-21

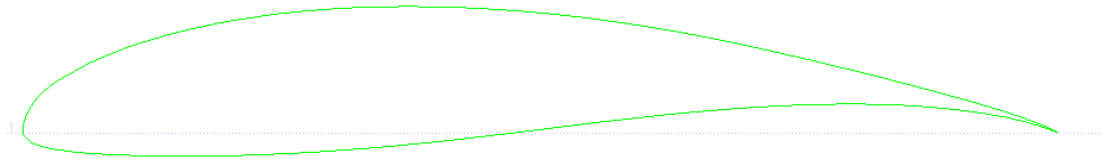


Figura A-5: Wortmann FX 63-137

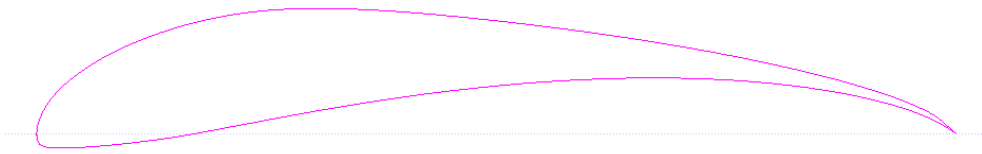


Figura A-6: Selig 1223



Figura A-7: SG 6043

## Anexo B: Método do alcance (análise bidimensional)

Tabela B-1: Aplicação do método do alcance (1)

Coeficiente de sustentação				
Perfil alar	I	II	III	IV
<b>REL.P &lt; 5%</b>				
Combinação de centros	$C(5, 5)$	$C(5, 10)$	$C(5, 10)$	$C(4, 7)$
Fator de forma	0,99	0,01	0,08	0,63
Tempo de geração [s]	82,94	103,48	105,31	85,23
Nº de iterações	52327	54987	55012	52753
<b>REL.P &lt; 1%</b>				
Combinação de centros	$C(5, 22)$	$C(5, 34)$	$C(5, 26)$	$C(5, 34)$
Fator de forma	0,00	0,00	0,07	0,00
Tempo de geração [s]	145,23	191,32	150,24	197,31
Nº de iterações	57213	57737	57356	57798
<b>REL.P &lt; 0,5%</b>				
Combinação de centros	$C(5, 38)$	$C(5, 36)$	$C(5, 34)$	$C(5, 34)$
Fator de forma	0,00	0,12	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	220,24	209,35	208,35	208,12
Nº de iterações	58311	58267	58187	58249
<b>REL.P &lt; 0,1%</b>				
Combinação de centros	$C(5, 50)$	$C(5, 40)$	$C(5, 42)$	$C(5, 50)$
Fator de forma	0,00	0,07	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	232,12	220,31	223,53	239,34
Nº de iterações	58724	58374	58435	58901

Tabela B-2: Aplicação do método do alcance (2)

Coeficiente de sustentação			
Perfil alar	V	VI	VII
<b>REL.P &lt; 5%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (4, 2)	<i>C</i> (5, 6)	<i>C</i> (4, 3)
Fator de forma	0,41	1,41	1,34
Tempo de geração [s]	61,23	86,98	63,98
Nº de iterações	48214	53110	49035
<b>REL.P &lt; 1%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 18)	<i>C</i> (5, 39)	<i>C</i> (4, 29)
Fator de forma	0,23	0,02	0,21
Tempo de geração [s]	139,32	218,72	141,46
Nº de iterações	57123	58235	57182
<b>REL.P &lt; 0,5%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 42)	<i>C</i> (5, 46)	<i>C</i> (4, 46)
Fator de forma	0,00	0,07	0,05
Tempo de geração [s]	227,35	229,50	210,67
Nº de iterações	58342	58551	58233
<b>REL.P &lt; 0,1%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 46)	<i>C</i> (5, 50)	<i>C</i> (5, 50)
Fator de forma	0,00	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	233,32	237,24	241,74
Nº de iterações	58632	58824	58911

Tabela B-3: Aplicação do método do alcance (3)

Coeficiente de arrasto				
Perfil alar	I	II	III	IV
<b>REL.P &lt; 5%</b>				
Combinação de centros	$C(5, 7)$	$C(4, 6)$	$C(5, 6)$	$C(5, 6)$
Fator de forma	0,83	0,21	0,05	1,27
Tempo de geração [s]	87,63	86,10	86,53	86,59
Nº de iterações	53862	52898	52992	53113
<b>REL.P &lt; 1%</b>				
Combinação de centros	$C(5, 22)$	$C(5, 15)$	$C(5, 19)$	$C(5, 25)$
Fator de forma	0,16	0,08	0,07	0,00
Tempo de geração [s]	146,57	135,45	140,23	151,23
Nº de iterações	57158	56742	56902	57102
<b>REL.P &lt; 0,5%</b>				
Combinação de centros	$C(5, 44)$	$C(5, 26)$	$C(5, 33)$	$C(5, 42)$
Fator de forma	0,00	0,01	0,01	0,00
Tempo de geração [s]	221,35	155,13	190,35	214,45
Nº de iterações	58212	57262	57782	58082
<b>REL.P &lt; 0,1%</b>				
Combinação de centros	$C(5, 50)$	$C(5, 48)$	$C(5, 48)$	$C(5, 50)$
Fator de forma	0,00	0,00	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	239,11	231,41	233,10	238,21
Nº de iterações	58739	58692	58693	58735

Tabela B-4: Aplicação do método do alcance (4)

Coeficiente de arrasto			
Perfil alar	V	VI	VII
<b>REL.P &lt; 5%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 7)	<i>C</i> (5, 11)	<i>C</i> (4, 10)
Fator de forma	0,63	0,00	0,24
Tempo de geração [s]	89,24	101,82	93,46
Nº de iterações	54134	55123	54432
<b>REL.P &lt; 1%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 21)	<i>C</i> (5, 39)	<i>C</i> (5, 24)
Fator de forma	0,00	0,00	0,02
Tempo de geração [s]	145,80	217,78	147,92
Nº de iterações	57013	57862	57289
<b>REL.P &lt; 0,5%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 37)	<i>C</i> (5, 42)	<i>C</i> (5, 40)
Fator de forma	0,00	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	210,52	219,33	215,95
Nº de iterações	57862	58192	58013
<b>REL.P &lt; 0,1%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 47)	<i>C</i> (5, 47)	<i>C</i> (5, 50)
Fator de forma	0,00	0,01	0,00
Tempo de geração [s]	226,45	230,11	237,51
Nº de iterações	58582	58612	58897

Tabela B-5: Aplicação do método do alcance (5)

Coeficiente de momento				
Perfil alar	I	II	III	IV
<b>REL.P &lt; 5%</b>				
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 3)	<i>C</i> (5, 21)	<i>C</i> (5, 26)	<i>C</i> (5, 4)
Fator de forma	2,26	0,17	0,03	0,85
Tempo de geração [s]	65,89	142,71	149,82	83,42
Nº de iterações	49521	57114	57286	50621
<b>REL.P &lt; 1%</b>				
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 14)	<i>C</i> (5, 46)	<i>C</i> (5, 42)	<i>C</i> (5, 14)
Fator de forma	0,03	0,03	0,01	0,29
Tempo de geração [s]	131,46	230,45	221,86	134,21
Nº de iterações	56982	58382	57988	56811
<b>REL.P &lt; 0,5%</b>				
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 45)	<i>C</i> (5, 49)	<i>C</i> (5, 45)	<i>C</i> (5, 24)
Fator de forma	0,00	0,00	0,03	0,23
Tempo de geração [s]	230,97	238,23	227,12	149,09
Nº de iterações	58399	58815	58295	57346
<b>REL.P &lt; 0,1%</b>				
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 50)	<i>C</i> (5, 50)	<i>C</i> (5, 50)	<i>C</i> (5, 50)
Fator de forma	0,00	0,00	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	238,31	239,12	240,12	237,51
Nº de iterações	58682	58835	58881	58621

Tabela B-6: Aplicação do método do alcance (6)

Coeficiente de momento			
Perfil alar	V	VI	VII
<b>REL.P &lt; 5%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (4, 4)	<i>C</i> (4, 6)	<i>C</i> (3, 4)
Fator de forma	1,49	0,13	2,17
Tempo de geração [s]	70,51	88,52	59,82
Nº de iterações	50018	53762	47972
<b>REL.P &lt; 1%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 18)	<i>C</i> (5, 34)	<i>C</i> (5, 14)
Fator de forma	0,12	0,00	0,00
Tempo de geração [s]	141,11	199,31	136,46
Nº de iterações	57041	57523	56988
<b>REL.P &lt; 0,5%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 46)	<i>C</i> (5, 42)	<i>C</i> (5, 26)
Fator de forma	0,00	0,00	0,04
Tempo de geração [s]	228,21	219,08	152,81
Nº de iterações	58532	58093	57308
<b>REL.P &lt; 0,1%</b>			
Combinação de centros	<i>C</i> (5, 46)	<i>C</i> (5, 50)	<i>C</i> (5, 46)
Fator de forma	0,03	0,00	0,02
Tempo de geração [s]	238,12	239,83	235,23
Nº de iterações	58535	58892	58363

## Anexo C: Método de otimização usando o FFSQP (análise bidimensional)

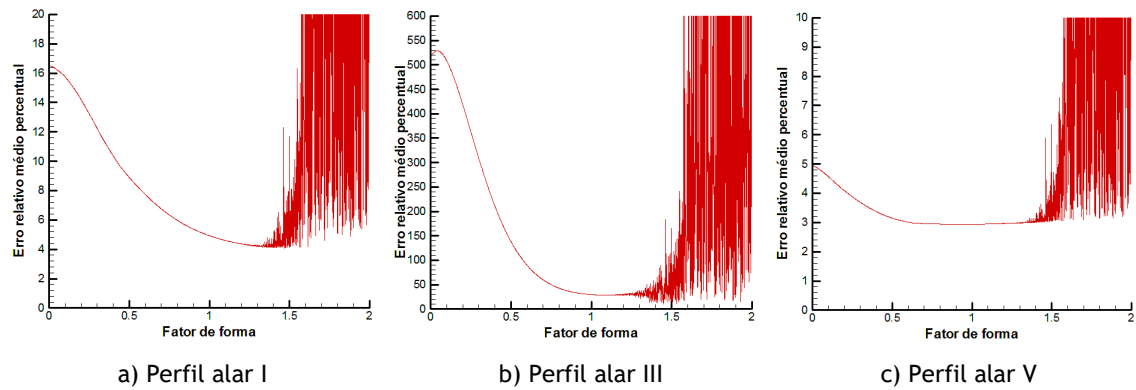


Figura C-1:  $C(5,5)$  - REL.P versus fator de forma

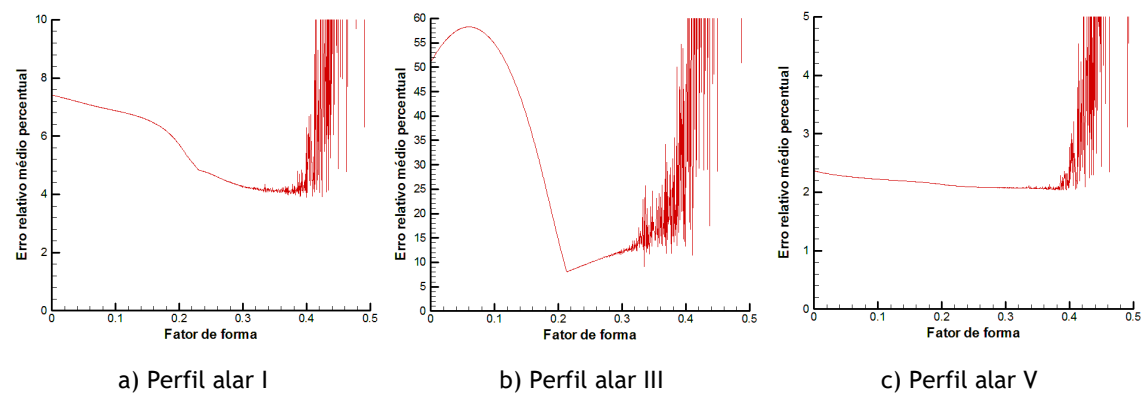


Figura C-2:  $C(4,15)$  - REL.P versus fator de forma

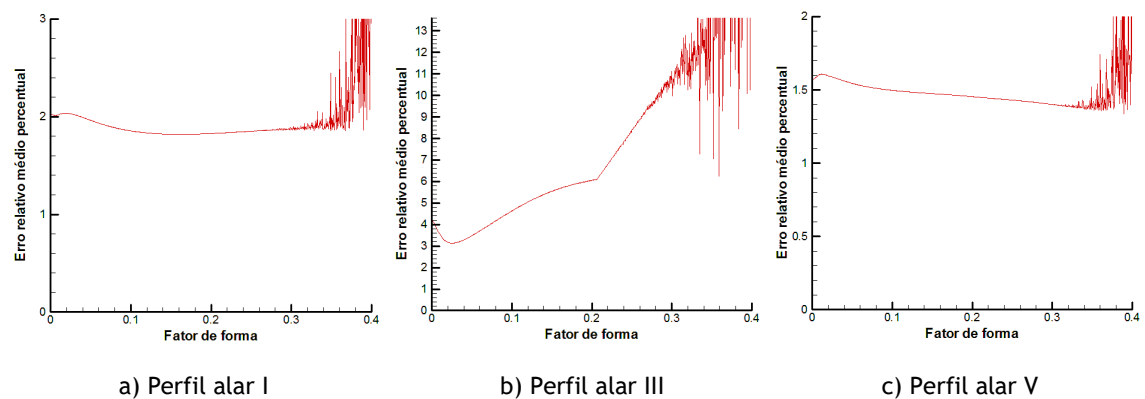
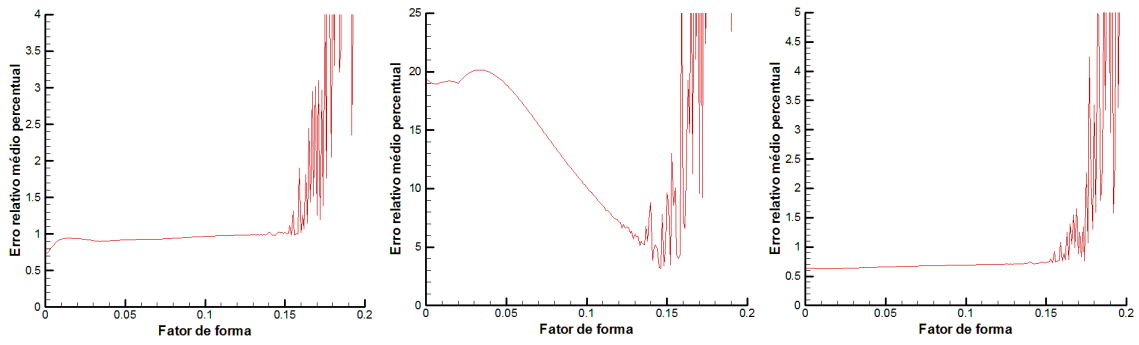


Figura C-3:  $C(5,15)$  - REL.P versus fator de forma

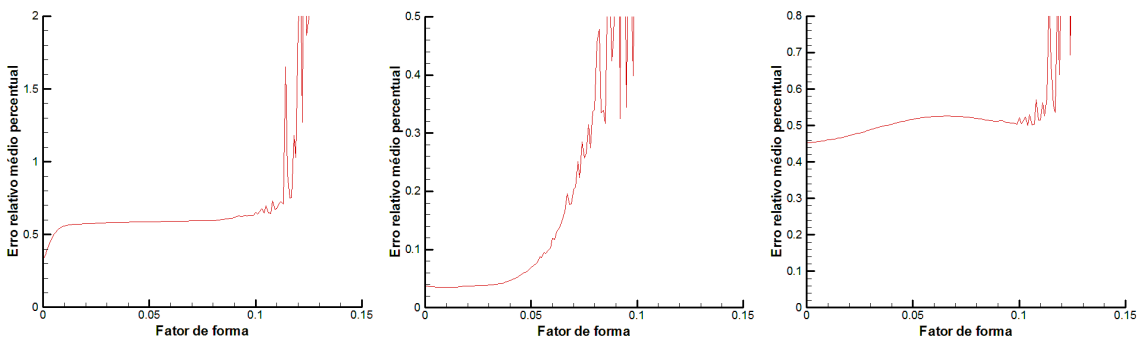


a) Perfil alar I

b) Perfil alar III

c) Perfil alar V

Figura C-4:  $C(5,30)$  - REL.P versus fator de forma

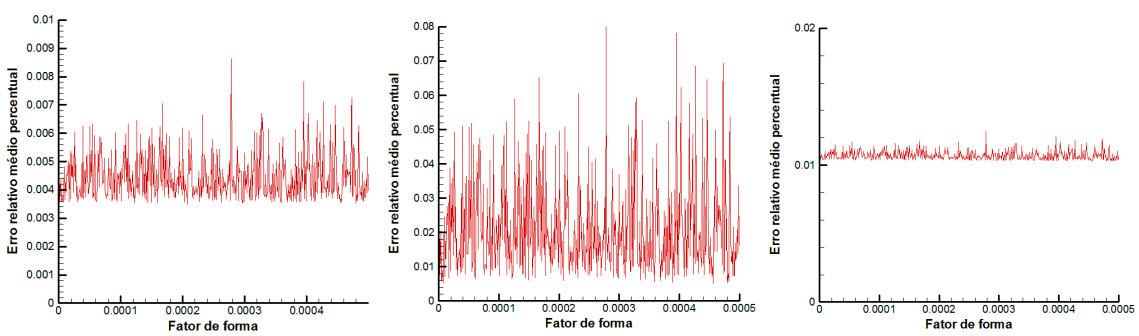


a) Perfil alar I

b) Perfil alar III

c) Perfil alar V

Figura C-5:  $C(5,45)$  - REL.P versus fator de forma



a) Perfil alar I

b) Perfil alar III

c) Perfil alar V

Figura C-6:  $C(5,50)$  - REL.P versus fator de forma

## Anexo D: Método otimização usando o FFSQP (análise bidimensional)

Tabela D-1:  $C(5,5)$  Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (1)

Combinação de centros: $C(5, 5)$					
Perfil alar		II	IV	VI	VII
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,47	0,28	0,31	0,07
	REL.P	41,75	6,36	8,72	6,97
	TG [s]	3,61	1,09	3,00	4,69
Fator de forma = 0	REL.P	46,89	8,91	20,91	8,88
	TG [s]	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156

Tabela D-2:  $C(4,15)$  Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (2)

Combinação de centros: $C(4, 15)$					
Perfil alar		II	IV	VI	VII
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,11	0,00	0,00	0,00
	REL.P	4,07	4,85	4,69	1,75
	TG [s]	4,92	0,34	0,25	0,27
Fator de forma = 0	REL.P	5,04	4,85	4,69	1,75
	TG [s]	0,031	0,031	0,031	0,031

Tabela D-3:  $C(5,15)$  Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (3)

Combinação de centros: $C(5, 15)$					
Perfil alar		II	IV	VI	VII
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,014	0,00	0,017	0,00
	REL.P	1,56	2,22	2,96	1,47
	TG [s]	5,89	0,375	1,83	0,39
Fator de forma = 0	REL.P	3,52	2,22	3,22	1,47
	TG [s]	0,047	0,047	0,047	0,047

Tabela D-4:  $C(5,30)$  Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (4)

Combinação de centros: $C(5, 30)$					
Perfil alar		II	IV	VI	VII
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,00	0,084	0,007	0,13
	REL.P	1,35	1,09	1,28	0,838
	TG [s]	0,92	8,67	23,19	9,52
Fator de forma = 0	REL.P	1,35	1,52	2,03	2,52
	TG [s]	0,094	0,094	0,094	0,094

Tabela D-5:  $C(5,45)$  Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (5)

Combinação de centros: $C(5, 45)$					
Perfil alar		II	IV	VI	VII
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	0,04	0,004	0,02	0,001
	REL.P	0,03	0,33	0,75	0,24
	TG [s]	56,58	21,55	27,33	13,95
Fator de forma = 0	REL.P	0,043	0,33	1,15	0,25
	TG [s]	0,22	0,22	0,22	0,22

Tabela D-6:  $C(5,50)$  Aplicação do método de otimização usando o FFSQP (6)

Combinação de centros: $C(5, 50)$					
Perfil alar		II	IV	VI	VII
Método de otimização usando o FFSQP	Fator de forma	1,6E-4	2E-4	7,8E-5	1,6E-4
	REL.P	0,007	0,023	0,038	0,0061
	TG [s]	8,61	11,84	7,86	12,95
Fator de forma = 0	REL.P	0,0086	0,024	0,040	0,0074
	TG [s]	0,25	0,25	0,25	0,25

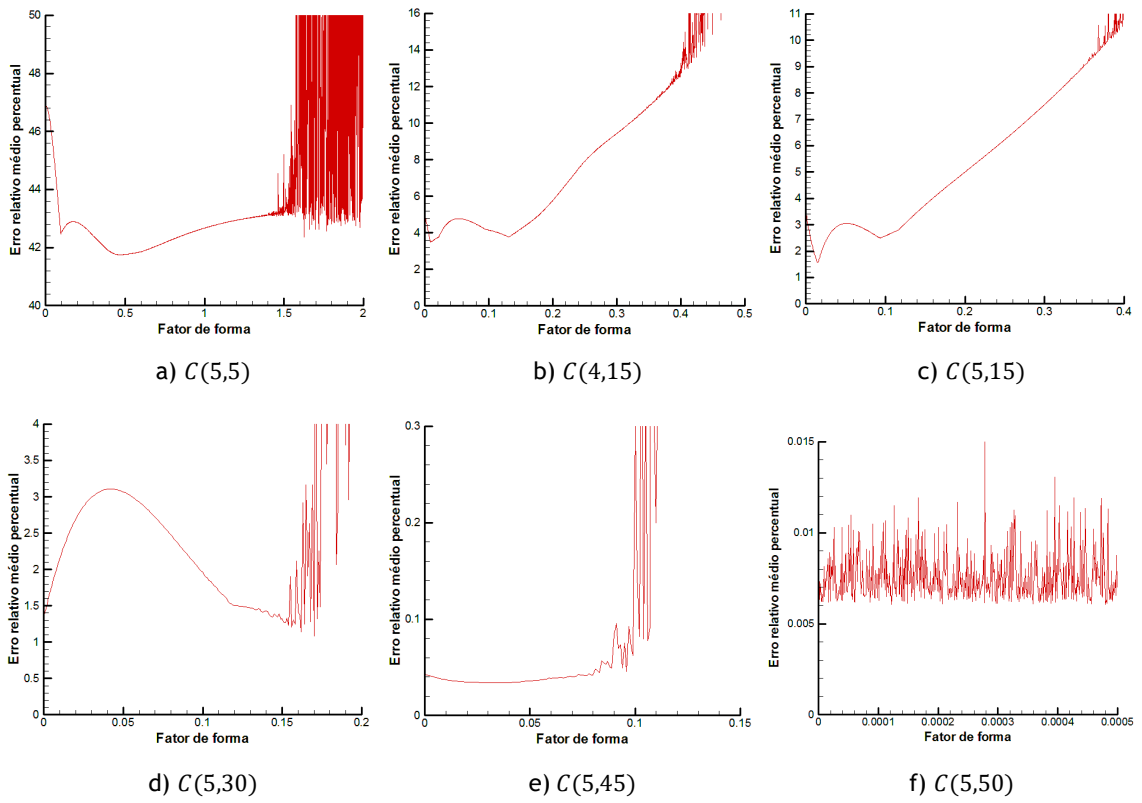


Figura D-1: Perfil alar II - REL.P versus fator de forma

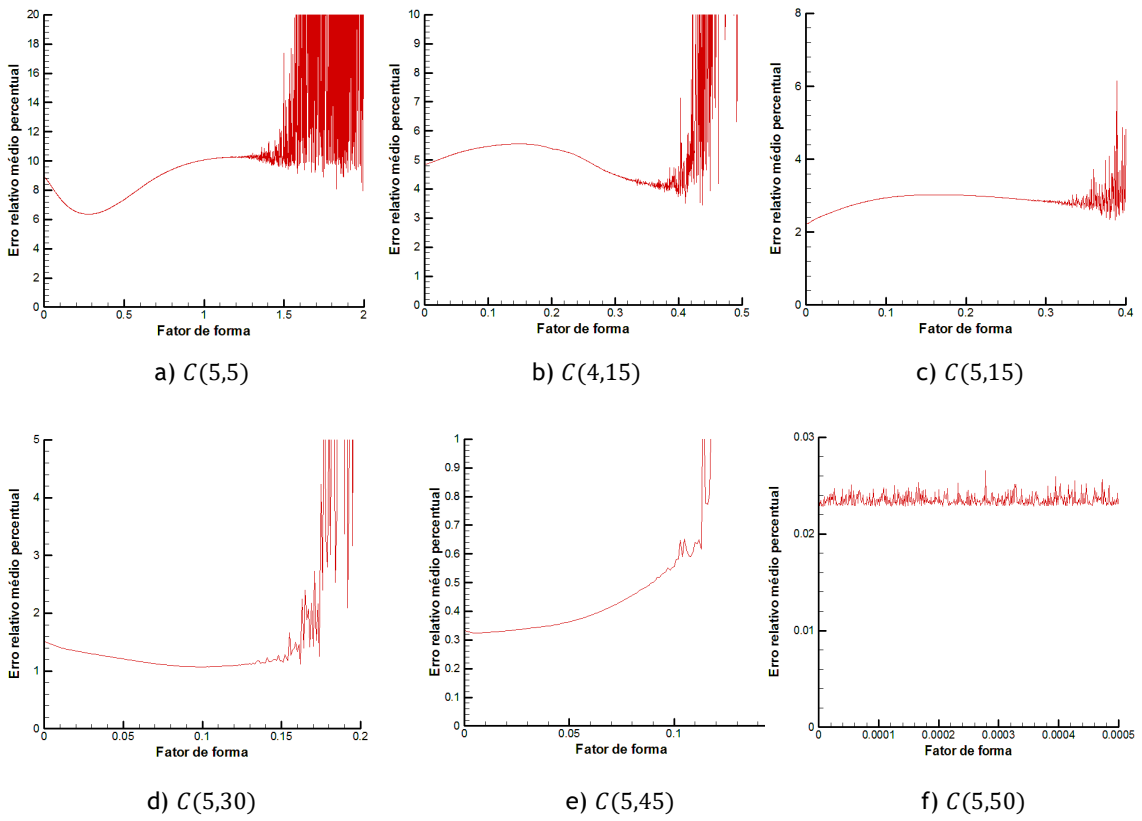


Figura D-2: Perfil alar IV - REL.P versus fator de forma

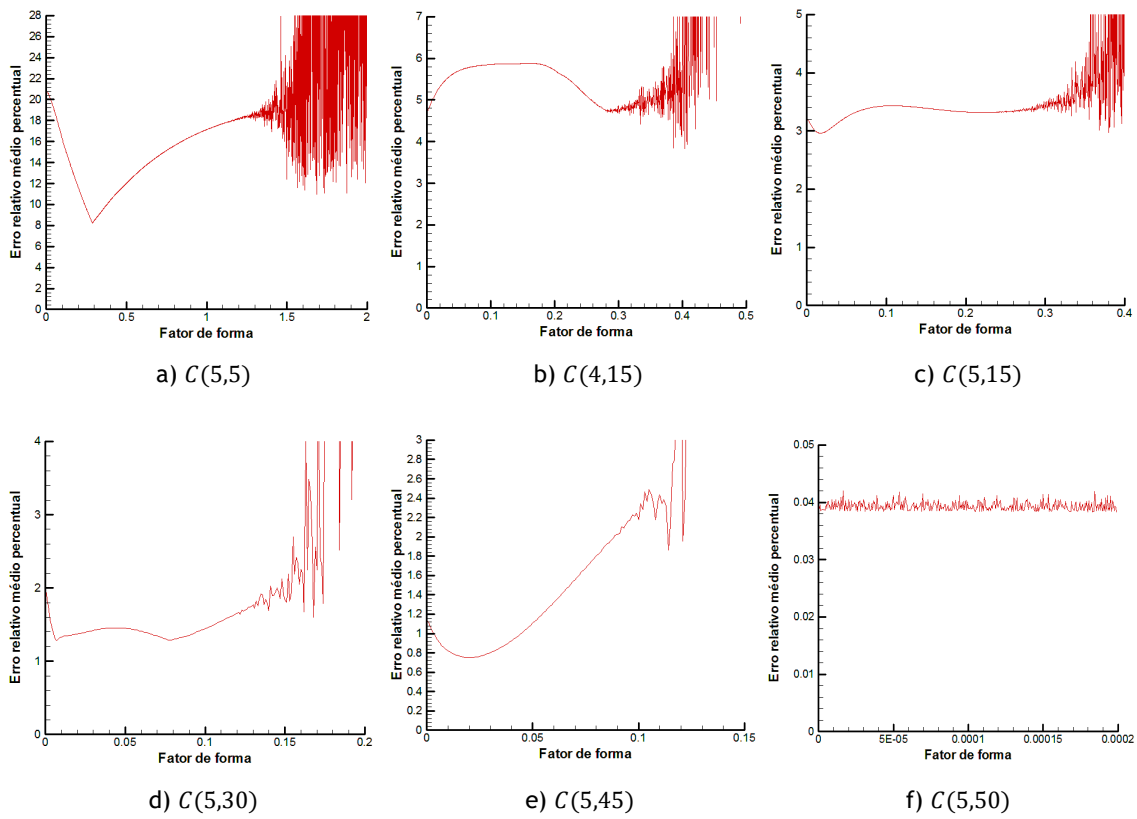


Figura D-3: Perfil alar VI - REL.P versus fator de forma

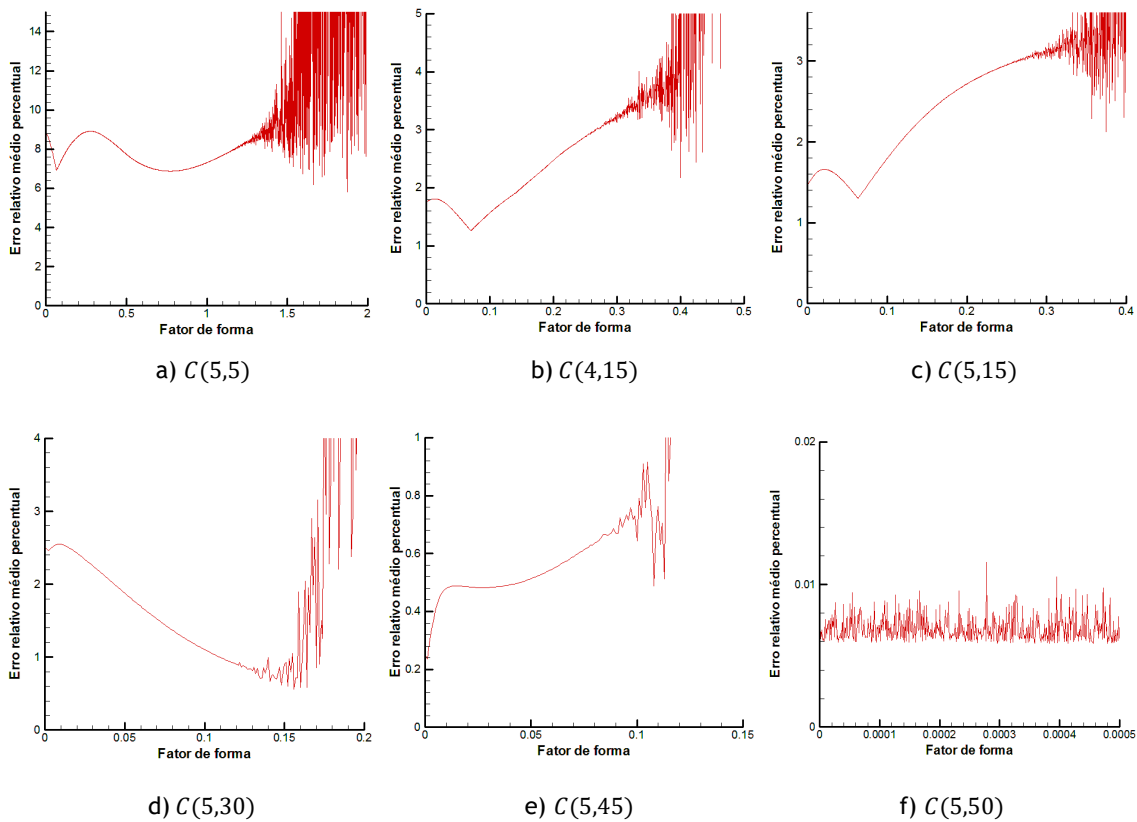
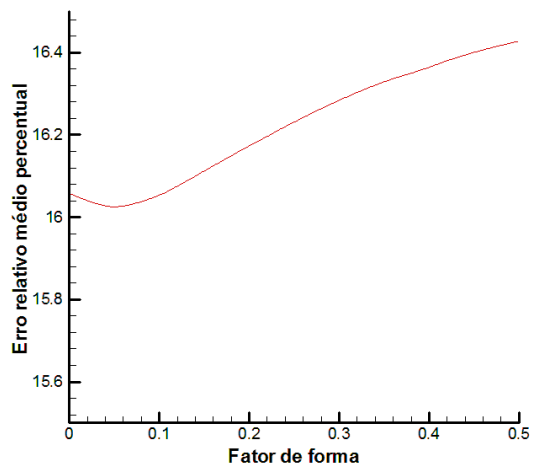
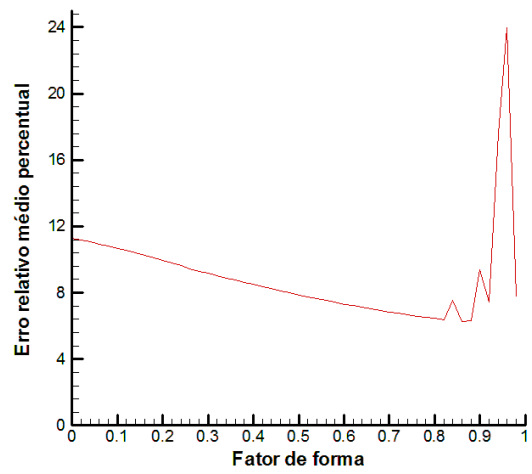


Figura D-4: Perfil alar VII - REL.P versus fator de forma

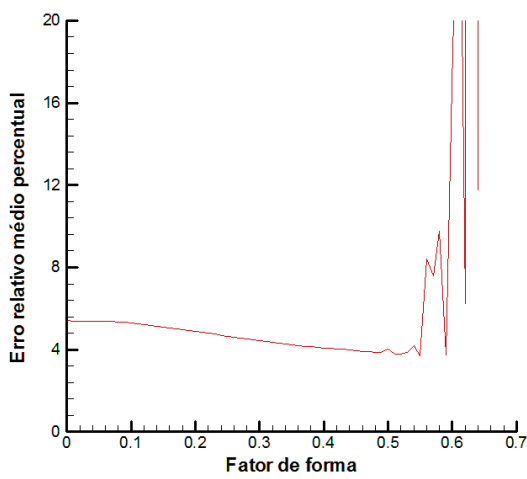
## Anexo E: Método de otimização usando o FFSQP (4V)



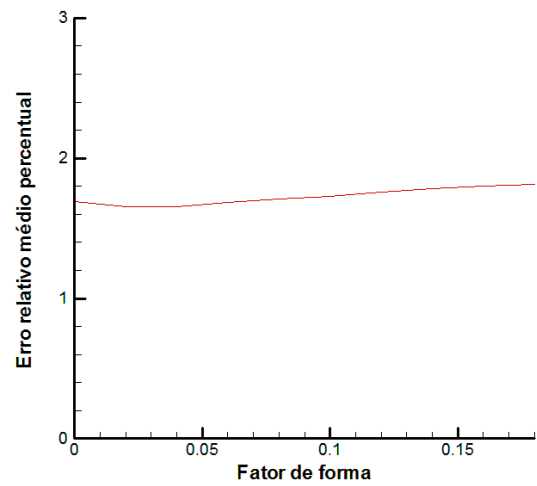
a)  $C(3,3,5,5)$



b)  $C(5,5,5,5)$



c)  $C(5,10,5,5)$



d)  $C(5,20,5,5)$

Figura E-1: Perfil alar I - REL.P versus fator de forma

