



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Pré-esforço Transversal em Vigas em Caixão Sujeitas à Torção

Tiago Filipe Coutinho dos Santos Martins

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade

Covilhã, Outubro de 2012

À minha família.

Agradecimentos

A realização deste trabalho não seria possível sem o precioso apoio e colaboração de muitas pessoas às quais não posso deixar de manifestar o meu sincero agradecimento:

- Ao meu orientador, Prof. Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade, pela disponibilidade e apoio sempre demonstrados, e sobretudo pelo ânimo transmitido que me ajudou a ultrapassar inúmeros obstáculos e me motivou a ambicionar sempre mais;

- A todos os professores e colegas do Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, que de alguma forma estiveram presentes e sempre me apoiaram quando precisei;

- Aos meus colegas e engenheiros Hugo Pinto, Carina Pinto e Joana Gomes, por todo o apoio e paciência que me demonstraram durante o meu percurso académico. O melhor grupo de amigos e colegas de trabalho que encontrei;

- A todos os meus amigos da minha terra natal, Guarda, e a todos os outros que partilharam comigo o meu percurso académico na Covilhã que me mostraram toda a dedicação e amizade que mantiveram comigo;

- À Diana Soares, com quem partilhei as minhas dúvidas e apreensões, por todo o apoio, tolerância e ajuda sempre prestados em qualquer circunstância. O seu carinho e compreensão foram essenciais ao meu sucesso;

- Em especial, à minha família por todos os sacrifícios e apoio incondicional que me ofereceram sempre sem hesitar, com a certeza de que fizeram o melhor que conseguiram para me educar e para me dar as condições necessárias de modo a conseguir atingir os meus objectivos.

Resumo

Neste trabalho é estudado um estudo paramétrico do comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção. São incluídas neste trabalho vigas com secção vazada, vigas de resistência normal e de alta resistência e vigas com pré-esforço longitudinal e/ou pré-esforço transversal. O estudo teórico teve por base um modelo baseado na analogia da treliça espacial com ângulo variável, tendo em conta o comportamento não linear dos materiais. O modelo utilizado no presente trabalho tem algumas modificações em relação ao original e foram introduzidas por Andrade em 2010 [4] com o objectivo de prever o comportamento global das vigas à torção em todas as suas fases comportamentais, desde o início do carregamento até à rotura.

Para apoiar as análises realizadas ao longo deste trabalho, foi utilizado o aplicativo computacional desenvolvido pelo autor referido anteriormente - TORQUE_MTEAVmod - que permite o estudo da previsão do comportamento global de vigas à torção tendo por base a proposta do modelo de treliça espacial com ângulo variável modificado.

Com este trabalho pretende-se fazer uma análise sobre a influência do pré-esforço nas vigas em caixão quando sujeitas à torção. Para tal, foi simulada a introdução de pré-esforço em 9 vigas com secção vazada e feito um estudo sobre a capacidade de rotação em torção das tais vigas referidas

Analisa-se e discute-se, de forma geral, a influência da resistência à compressão do betão, da taxa total de armadura de torção e do nível de pré-esforço.

É analisado o efeito do pré-esforço nas diferentes direcções, longitudinal e transversal e analisados e discutidos os resultados obtidos.

Palavras-chave

Torção, Pré-esforço Longitudinal, Pré-esforço Transversal, Vigas com Secção Vazada, Betão de alta resistência, Análise Paramétrica

Abstract

This thesis is a parametric study of the global behavior of reinforced concrete beams subjected to torsion. This study includes beams that have a cross hollow section, and made with normal and high strength concrete. Longitudinal and/or transversal prestress is also considered. The theoretical study is based on the space truss analogy with variable angle by considering nonlinear behavior of the materials. The model used in this study has some changes from the original and were introduced by Andrade in 2010 [4] in order to predict the overall behavior of the beams under torsion, from the beginning of loading up to failure.

To support the study carried out throughout this work, we used the computer application developed by the author mentioned above - TORQUE_MTEAVmod - that allow to study the global behavior of beams under torsion. This application was based on a modified space truss model with variable angle.

With this work we intend to do an analysis on the influence of prestress in hollow beams when subjected to torsion. We simulated the introduction of prestressing in 9 beams with hollow section and done a study on the rotation capacity of such beams in torsion.

Analyzes and discusses, in general, the influence of the compressive strength of concrete, the total rate armature torque and the level of prestressing.

It analyzed the effect of prestress in different directions, longitudinal and transversal analyzed and discussed the results.

Keywords

Torsion, Longitudinal Prestressing, Transversal Prestressing, High-Strength Concrete, Hollow Beams, Parametric Analysis

Índice

Capítulo 1 - Enquadramento e Objectivos do Trabalho	1
1. Enquadramento e Objectivos do Trabalho	3
1.1. Introdução ao Problema da Torção em Estruturas de Betão	3
1.1.1. Notas Históricas	3
1.1.2. Classificação Fundamental dos Efeitos de Torção	9
1.1.3. Exemplos de Casos Práticos de Torção em Estruturas	14
1.1.4. Comportamento à Torção de Secções Cheias e Vazadas	21
1.2. Objectivos e Justificação do Trabalho	23
1.3. Organização do Trabalho	25
Capítulo 2 - Modelos Teóricos para a Torção em Vigas	27
2. Modelos Teóricos para a Torção em Vigas	29
2.1. Introdução	29
2.2. Torção em Vigas de Betão Armado	29
2.2.1. Comportamento de Vigas sem Armadura Transversal à Torção	29
2.2.2. Comportamento de Vigas com Armadura Longitudinal e Transversal à Torção	30
2.2.3. Modelos de Resistência à Torção	33
2.2.3.1. Nota Introdutória	33
2.2.3.2. A Analogia da Treliça Espacial de Rausch	33
2.2.3.3. O Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável	38
2.2.3.3.1. Considerações Gerais	38
2.2.3.3.2. Notas Históricas	39
2.2.3.3.3. Vantagens e Hipóteses do Modelo de Treliça com Ângulo Variável	41
2.2.3.3.4. Análise de uma Viga com Base no Modelo de Treliça Plana	42
2.2.3.3.5. Vigas com Secção Vazada Sujeitas à Torção Pura	44
2.2.3.3.6. Flexão das Escoras de Betão	47
2.2.3.3.7. Diagrama das Tensões de Compressão e Espessura Efectiva da Parede	49
2.3. Torção em Vigas de Betão Pré-esforçado	53
2.3.1. Comportamento de Vigas sem Armadura Transversal à Torção	54
2.3.1.1. Critério de Rotura do Betão Sujeito a um Estado de Tensão Biaxial	54
2.3.1.2. O Factor de Pré-esforço (Teoria Elástica, Teoria Plástica e	58

Teoria Enviesada	
2.3.2. Comportamento de Vigas com Armadura Longitudinal e Transversal à Torção	59
2.3.2.1.A Analogia da Treliça Espacial com Ângulo Variável	59
Capítulo 3 - Modelo da Treliça Espacial com Ângulo Variável Modificado	63
3. Modelo da Treliça Espacial com Ângulo Variável Modificado	65
3.1. Introdução	65
3.2. Descrição e Caracterização da Curva $T - \theta$	67
3.3. Zona Comportamental 1 (Estado I)	70
3.3.1. Vigas de Betão Armado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)	70
3.3.2. Vigas de Betão Pré-esforçado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)	88
3.4. Zona Comportamental 2.a (Estado II)	100
3.4.1. Vigas de Betão Armado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)	100
3.4.2. Vigas de Betão Pré-esforçado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)	110
3.5. Zona Comportamental 2.b e 3 (Estado II e Estado III)	112
3.5.1. Vigas de Betão Armado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)	112
3.5.2. Vigas de Betão Pré-esforçado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)	118
Capítulo 4 - Simulação de Vigas de Betão Armado com Pré-esforço Sujeitas à Torção	121
4. Simulação de Vigas de Betão Armado com Pré-esforço Sujeitas à Torção	123
4.1. Introdução	123
4.2. Conjunto de Vigas Escolhidas	124
4.3. TORQUE_MTEAVmod	127
4.4. Simulação das Vigas	128
4.5. Análise Paramétrica dos Resultados	131
Capítulo 5 - Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	135
5. Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	137
5.1. Introdução	137
5.2. Conclusões	137
5.3. Propostas para Estudos Futuros	139

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Processo de cravação de estacas parafuso (screw piles) [4]	4
Figura 1.2 – Vista e corte transversal do tabuleiro da Ponte Waterloo [22]	5
Figura 1.3 – Vista do balcão e do caixão triangular para suporte da laje em consola no Royal Festival [38]	5
Figura 1.4 – Rotura frágil por torção de uma viga num edifício [26]	6
Figura 1.5 – Exemplos de modelação por elementos finitos com o software para análise estrutural [9]	7
Figura 1.6 - Exemplos de estruturas com torção de compatibilidade e torção de equilíbrio [4]	10
Figura 1.7 – Evolução da rigidez de torção com o momento torsor [13]	11
Figura 1.8 – Simplificação de modelos de cálculo de lajes de pavimento para zona de apoio [4]	12
Figura 1.9 – Torção circulatoria e torção com empenamento [4]	12
Figura 1.10 – Lajes de cobertura em consola (isolada e com continuidade) [9]	14
Figura 1.11 – Edifício com varandas [9]	14
Figura 1.12 – Vigas curvas no plano horizontal [9]	15
Figura 1.13 – Vigas com carregamento excêntrico [4]	15
Figura 1.14 – Vigas com apoios indirectos [4]	16
Figura 1.15 – Apoio de uma laje de pavimento em vigas de extremidade e de continuidade [9]	16
Figura 1.16 – Apoio de uma laje inclinada numa viga de extremidade [4]	17
Figura 1.17 – Escada em curva [9]	17
Figura 1.18 – Laje de cobertura inclinada [21]	18
Figura 1.19 – Efeito de uma carga excêntrica numa secção em caixão de um tabuleiro [4]	18
Figura 1.20 – Ponte curva (Viaduto rodoviário de Linn Cove, E.U.A.) [9]	19
Figura 1.21 – Deslocamento do centro de gravidade da secção em pontes curvas [4]	19
Figura 1.22 – Momento torsor provocado pelo pré-esforço [4]	20
Figura 1.23 – Equilíbrio de uma fatia elementar de uma viga curva [9]	20
Figura 1.24 – Obras de arte com desenvolvimento curvo em planta [9]	21
Figura 1.25 – Influência da espessura da parede no comportamento à torção pura [25]	22
Figura 2.1 – Curva $T - \theta$ típica para vigas sem armadura transversal [26]	29
Figura 2.2 – Curva $T - \theta$ para vigas de betão armado [9]	31
Figura 2.3 – Curva $T - \theta$ para vigas de betão armado [27]	32

Figura 2.4 – Analogia da treliça espacial de Rausch [4]	34
Figura 2.5 – Viga de betão armado com secção rectangular [9]	36
Figura 2.6 – Distribuição qualitativa das tensões de St. Venant em secções rectangulares [4]	37
Figura 2.7 – Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana [9]	43
Figura 2.8 – Equilíbrio de um corpo livre rectangular [9]	44
Figura 2.9 – Viga com secção rectangular vazada/em caixão sujeita à torção pura [9]	45
Figura 2.10 – Flexão de uma escora de betão na parede de uma viga em caixão sujeita à torção [9]	48
Figura 2.11 – Distribuição das extensões e tensões na escora de betão [4]	49
Figura 2.12 – Curva $\sigma - \epsilon$ para betão tendo em conta o softening effect [4]	50
Figura 2.13 – Estado de tensão numa viga sujeita à torção e ao pré-esforço [9]	55
Figura 2.14 – Envolvente de rotura de Mohr [26]	56
Figura 2.15 – Envolvente de rotura de Cowan [18]	57
Figura 2.16 – Ilustração do conceito de descompressão [26]	60
Figura 2.17 – Localização da armadura de pré-esforço (pré-esforço uniforme) [9]	62
Figura 3.1 – Curva $T - \theta$ típica para uma viga de betão armado sujeita à torção pura [4]	67
Figura 3.2 – Evolução do momento torsor com a deformação angular média para o Estado I [9]	71
Figura 3.3 – Tensões principais numa viga sujeita à torção (Estado I) [9]	73
Figura 3.4 – Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico linear em regime não fissurado (Estado I) [9]	76
Figura 3.5 – Definição da secção vazada equivalente para o Estado I [4]	80
Figura 3.6 – Tensões principais numa viga sujeita à torção (Estado I) [9]	80
Figura 3.7 – Tubo de parede fina e fluxo de corte [2]	82
Figura 3.8 – Definição das dimensões exteriores no núcleo e do betão interior [4]	87
Figura 3.9 – Estudo de tensão numa viga sujeita à torção e pré-esforço transversal [4]	90
Figura 3.10 – Estado de tensão numa viga sujeita à torção e pré-esforço longitudinal e transversal [4]	91
Figura 3.11 – Encurtamento inicial na escora de betão devido ao pré-esforço [4]	96
Figura 3.12 – Treliça espacial para um tubo de betão armado com secção arbitrária (Estado II) [4]	102
Figura 3.13 – Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime fissurado (Estado II) [25]	105
Figura 3.14 – Influência do núcleo de betão na rigidez de torção pós-fissuração [9]	107
Figura 3.15 – Modelação teórica da subzona 2.a da Curva $T - \theta$ (vigas com secção cheia) [4]	109
Figura 3.16 – Desvios entre as Curvas $T - \theta$ experimental e teórica (Zona 2.b) [4]	113

Figura 3.17 – Correção das rotações (Zona 2.b) [4]	114
Figura 3.18 – Tubo de parede fina e fluxo de corte [2]	116
Figura 4.1 – Curvas $T - \theta$ para as vigas do Grupo A	130
Figura 4.2 – Curvas $T - \theta$ para as vigas do Grupo C	130
Figura 4.3 – Curvas $T - \theta$ para as vigas do Grupo A, B e C	131
Figura 4.4 – Curvas $T - \theta$ para as vigas do Grupo A, B e C	131

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Coeficiente k_1 em função de $1/\lambda$ e ε_{ds} ($\varepsilon_0 = 0,002$) [9]	52
Tabela 3.1 – Modelos Teóricos considerados para o comportamento dos materiais	65
Tabela 3.2 – Coeficientes de St. Venant para secções rectangulares [26]	72
Tabela 4.1 – Propriedades das vigas de betão armado de secção vazada de referência	124
Tabela 4.2 - Propriedades das vigas de betão armado de secção vazada de referência	125
Tabela 4.3 – Dados do pré-esforço na direcção longitudinal (LPC) e na direcção transversal (TPC)	126
Tabela 4.4 - Dados do pré-esforço na direcção longitudinal e transversal em simultâneo (LTPC)	127
Tabela 4.5 – Dados gerais assumidos para o pré-esforço	127

Simbologia

Alfabeto Latino

A	- Área da secção transversal / Área limitada pela linha média da parede de um tubo / Área limitada pela linha média da armadura transversal / Área limitada pela linha média do fluxo de corte / Tensão média do diagrama de tensões na escora de betão
A_c	- Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão
$A_{cl,eq}$	- Área equivalente de betão para o equilíbrio da treliça na direcção longitudinal
$A_{ct,eq}$	- Área equivalente de betão para o equilíbrio da treliça na direcção transversal
A_{cp}	- Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão
A_h	- Área limitada pelo perímetro interno de uma secção vazada
A_k	- Área limitada pela linha média das paredes de uma secção vazada
A_l	- Área da secção transversal de uma barra da armadura longitudinal / Área total da armadura longitudinal
\hat{A}_l	- Área total da armadura longitudinal
A_{li}	- Área da armadura longitudinal na parede i
$A_{l,ef}$	- Área efectiva de armadura longitudinal
$A_{l,min}$	- Área total mínima da armadura longitudinal
A_o	- Área limitada pela linha média do fluxo de corte
A_{oh}	- Área limitada pela linha média da armadura transversal
A_p	- Área total da armadura de pré-esforço
A_{pi}	- Área de armadura longitudinal de pré-esforço na parede i
A_{pl}	- Área de armadura longitudinal de pré-esforço
A_{ps}	- Área total da armadura de pré-esforço
A_{pt}	- Área de uma unidade da armadura transversal de pré-esforço
A_{si}	- Área da armadura longitudinal ordinária na parede i
A_{sl}	- Área total da armadura longitudinal ordinária
A_{st}	- Área da secção transversal de uma unidade da armadura transversal
A_{sti}	- Área da secção transversal de uma unidade da armadura transversal na parede i
A_{sw}	- Área da secção transversal de uma unidade da armadura transversal
A_{swi}	- Área da secção transversal de uma unidade da armadura transversal na parede i

- $A_{swi,max}$ - Área máxima da secção transversal de uma unidade da armadura transversal na parede i
- A_t - Área da secção transversal de uma unidade da armadura transversal
- $A_{t,ef}$ - Área efectiva da armadura transversal
- A_{th} - Área de aço homogeneizado para a armadura transversal
- $A_{t,max}$ - Área máxima da secção transversal de uma unidade da armadura transversal
- $A_{t,min}$ - Área mínima da secção transversal de uma unidade da armadura transversal
- A_v - Área de armadura transversal
- B - Tensão média do diagrama de tensões na escora de betão
- C - Constante de torção de St. Venant / Parâmetro ou factor de rigidez de torção / Resultante do diagrama de tensões na escora de betão
- C_{cr} - Constante de torção pós-fissuração (Estado II)
- CG - Centro de Gravidade
- D - Força de compressão absorvida pela escora de betão
- D_i - Força interna na escora diagonal i da treliça espacial
- E - Módulo de elasticidade
- E_c - Módulo de elasticidade do betão
- E_{cm} - Valor médio do módulo de elasticidade do betão
- E_o - Módulo de elasticidade na origem
- E_p - Módulo de elasticidade da armadura de pré-esforço / Módulo de elasticidade da armadura ordinária na região plástica
- E_{pl} - Módulo de elasticidade da armadura longitudinal de pré-esforço
- E_{pt} - Módulo de elasticidade da armadura transversal de pré-esforço
- E_s - Módulo de elasticidade da armadura ordinária
- F_c - Força na escora de betão
- F_i - Força do fluxo de corte no nó i da treliça espacial
- $F_{l,tot}$ - Força longitudinal total
- $F_{t,tot}$ - Força transversal total distribuída
- F_v - Força de desvio
- G - Módulo de distorção
- G_{cr} - Módulo de distorção pós-fissuração (Estado II)
- GC - Rigidez de torção
- $(GC)^I$ - Rigidez de torção em Estado I
- $(GC)^{II}$ - Rigidez de torção em Estado II

K	- Factor de redução
K_{exp}^{II}	- Valor experimental da rigidez de torção (Estado II)
K_t^I	- Rigidez de torção efectiva (Estado I)
K_{th}^{II}	- Valor teórico da rigidez de torção (Estado II)
$K_{ii,eq}^I$	- Valor equivalente da rigidez de torção (Estado I) para a iteração i
$K_{ii,eq,tot}^I$	- Valor total da rigidez de torção em Estado I (incluindo o núcleo de betão) para a iteração i
$K_{ii,exp}^I$	- Valor experimental da rigidez de torção (Estado I) para a iteração i
$K_{ii,th}^I$	- Valor teórico da rigidez de torção (Estado I) para a iteração i
$K_{ii,n}^I$	- Valor teórico da rigidez de torção do núcleo de betão (Estado I) para a iteração i
K^{II}	- Rigidez de torção (Estado II)
M	- Momento flector
\bar{N}	- Força de tracção absorvida pela armadura longitudinal
N_b	- Força na corda inferior da treliça plana
N_t	- Força na corda superior da treliça plana
P	- Força de pré-esforço
Q	- Carga concentrada
T	- Momento torsor
T_b	- Componente de flexão do vector momento torsor
T_c	- Momento torsor resistente conferido pelo betão em vigas sem pré-esforço
T_{cr}	- Momento torsor de fissuração
$T_{cr,ef}$	- Momento torsor de fissuração efectivo
$T_{cr,exp}$	- Valor experimental do momento torsor de fissuração
$T_{cr,th}$	- Valor teórico do momento torsor de fissuração
T_{cr}^P	- Momento torsor de fissuração de uma viga pré-esforçada
$T_{cr,ef}^P$	- Momento torsor de fissuração efectivo de uma viga pré-esforçada
T_{Ed}	- Momento torsor actuante
T_e	- Momento torsor resistente elástico
T_i	- Momento torsor para a iteração i
T_{ly}	- Momento torsor de cedência da armadura longitudinal
$T_{ly,th}$	- Valor teórico do momento torsor de cedência da armadura longitudinal

$T_{ly,exp}$	- Valor experimental do momento torsor de cedência da armadura longitudinal
T_{max}	- Valor máximo do momento torsor
T_n	- Valor nominal do momento torsor resistente
$T_{n,exp}$	- Valor experimental do momento torsor resistente
T_{np}	- Valor nominal do momento torsor resistente de uma viga de betão simples
$T_{n,th}$	- Valor teórico do momento torsor resistente
T_o^{II}	- Ordenada na origem da Curva $T - \theta$ (Estado II)
$T_{o,exp}^{\text{II}}$	- Valor experimental da ordenada na origem da Curva $T - \theta$ (Estado II)
$T_{o,th}^{\text{II}}$	- Valor teórico da ordenada na origem da Curva $T - \theta$ (Estado II)
T_p	- Momento torsor resistente plástico
T_{Rd}	- Valor de dimensionamento do momento torsor resistente
$T_{Rd,max}$	- Momento torsor resistente limitado pela resistência da escora de betão
T_{Sd}	- Momento torsor actuante
T_{ty}	- Momento torsor de cedência da armadura transversal
$T_{ty,exp}$	- Valor experimental do momento torsor de cedência da armadura transversal
$T_{ty,th}$	- Valor teórico do momento torsor de cedência da armadura transversal
T_y	- Momento torsor de cedência
V	- Esforço transversal
$V_{Ed,i}$	- Força de corte (valor de dimensionamento) actuante na parede i
V_i	- Força de corte actuante na parede i
$V_{Sdi,t}$	- Força de corte actuante na parede i
W_T	- Módulo elástico de torção
X	- Força de tracção dos varões longitudinais
X_i	- Força interna na barra longitudinal i da treliça espacial
Y	- Força de tracção nos varões transversais
Y_i	- Força interna na barra transversal i da treliça espacial
a	- Metade da dimensão menor de uma secção rectangular / Lado menor de uma secção rectangular / Quantidade de água na composição do betão
b	- Largura da secção transversal / Braço da força / Metade da dimensão maior de uma secção rectangular / Lado maior de uma secção transversal rectangular
b_x	- Menor dimensão de uma secção rectangular
b_y	- Maior dimensão de uma secção rectangular
b_w	- Largura da alma de uma secção transversal

c	- Espessura do betão de recobrimento das armaduras / Quantidade de cimento na composição do betão
cv	- Coeficiente de variação
d	- Altura útil da secção
d_v	- Distância entre a corda superior e inferior do modelo de treliça plana
e	- Excentricidade da carga
f'_c	- Resistência à compressão uniaxial do betão
f_{cd}	- Valor de dimensionamento da resistência à compressão do betão
f_{cd1}	- Limite para o valor de dimensionamento da resistência à compressão do betão
f_{cd2}	- Limite para o valor de dimensionamento da resistência à compressão do betão
f_{ck}	- Valor característico da resistência à compressão do betão
f_{cm}	- Valor médio da resistência à compressão do betão
f_{cp}	- Tensão de compressão no betão induzida pelo pré-esforço
f_{cr}	- Resistência à tracção do betão
f_{ct}	- Resistência à tracção do betão
f_{ctd}	- Valor de dimensionamento da resistência à tracção do betão
f_{ctkmin}	- Valor característico mínimo da resistência à tracção do betão
f_{ctm}	- Resistência média à tracção do betão
f_{c2}	- Tensão de compressão no betão tendo em conta o <i>softening effect</i>
f_{ly}	- Tensão de cedência da armadura longitudinal
f_{lym}	- Valor médio da tensão de cedência da armadura longitudinal
f_o	- Tensão de referência
f_p	- Tensão na armadura de pré-esforço / Tensão máxima no betão tendo em conta o <i>softening effect</i>
f_{pc}	- Tensão de compressão no betão devido ao pré-esforço
f_{pi}	- Tensão inicial na armadura de pré-esforço
$f_{pi,l}$	- Tensão inicial na armadura longitudinal de pré-esforço
$f_{pi,t}$	- Tensão inicial na armadura transversal de pré-esforço
f_{ps}	- Tensão na armadura de pré-esforço
f_{pt}	- Tensão de rotura da armadura de pré-esforço
f_{pu}	- Tensão de rotura da armadura de pré-esforço
$f_{pyd,net}$	- Valor de dimensionamento da tensão de cedência da armadura de pré-esforço
$f_{p0,1\%}$	- Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% da armadura de pré-esforço

- $f_{p10,1\%}$ - Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% da armadura longitudinal de pré-esforço
- $f_{pt0,1\%}$ - Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% da armadura transversal de pré-esforço
- f_r - Módulo de rotura do betão
- f_{sy} - Tensão de cedência da armadura ordinária
- f_{sly} - Tensão de cedência da armadura longitudinal ordinária
- f_{sty} - Tensão de cedência da armadura transversal ordinária
- f'_t - Resistência à tracção do betão
- f_{st} - Tensão de rotura da armadura ordinária
- $f_{sy,h}$ - Tensão de cedência da armadura na direcção horizontal de um placa
- $f_{sy,v}$ - Tensão de cedência da armadura na direcção vertical de um placa
- f_{ty} - Tensão de cedência da armadura transversal
- f_{tym} - Valor médio da tensão de cedência da armadura transversal
- f_v - Tensão na armadura transversal
- f_y - Tensão de cedência da armadura ordinária
- f_{yd} - Valor de dimensionamento da tensão de cedência da armadura ordinária
- $f_{y,ef}$ - Valor efectivo da tensão de cedência da armadura ordinária
- f_{yk} - Valor característico da tensão de cedência da armadura ordinária
- $f_{y,max}$ - Valor máximo da tensão de cedência da armadura ordinária
- f_{yv} - Tensão de cedência da armadura transversal
- f_{ywd} - Valor de dimensionamento da tensão de cedência da armadura transversal
- h - Altura da secção transversal / Espessura da parede da secção
- h_e - Espessura efectiva da parede para a análise em Estado II
- h_{ef} - Espessura efectiva da parede da secção equivalente
- h_{eq} - Espessura equivalente da parede da secção
- k - Constante de cedência / Coeficiente de St. Venant
- k_1 - Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão
- k_2 - Quociente entre a distância da resultante C à fibra extrema de compressão e o pico de tensão na escora de betão
- l - Vão / Comprimento de uma barra ou de uma viga
- l_{ef} - Vão efectivo
- l_q - Comprimento da porção recta da linha média do fluxo de corte

m	- Momento flector distribuído / Relação entre o "volume" de armadura longitudinal e transversal / Parâmetro de forma
m_b	- Relação entre o "volume" de armadura longitudinal e transversal
$m_{b,tot}$	- Relação entre o "volume" de armadura longitudinal total (tendo em conta a armadura de pré-esforço) e transversal
n	- Número de varões longitudinais / Coeficiente de homogeneização / Número de valores da amostragem
n_c	- Coeficiente de homogeneização betão - aço
n_p	- Coeficiente de homogeneização aço de pré-esforço - aço de armadura ordinária
p_h	- Perímetro da linha média da armadura transversal
p_o	- Perímetro da linha média do fluxo de corte
q	- Carga uniformemente distribuída / Fluxo de corte
s	- Espaçamento das barras longitudinais / Espaçamento longitudinal da armadura transversal (cintas ou estribos) / Desvio padrão amostral
s_l	- Espaçamento das barras longitudinais
$s_{l,ef}$	- Espaçamento efectivo das barras longitudinais
$s_{l,max}$	- Espaçamento máximo das barras longitudinais
s_p	- Espaçamento da armadura transversal de pré-esforço
s_t	- Espaçamento longitudinal da armadura transversal (cintas ou estribos)
$s_{t,ef}$	- Espaçamento longitudinal efectivo da armadura transversal
$s_{t,max}$	- Espaçamento longitudinal máximo da armadura transversal
t	- Momento torsor distribuído / Espessura da escora de betão / Espessura da parede
t_i	- Espessura da parede i
t_d	- Profundidade efectiva da escora de betão
t_{ef}	- Espessura efectiva da parede
t_{efi}	- Espessura efectiva da parede i
u	- Perímetro da linha média da parede de um tubo / Perímetro da linha média de uma cinta / Perímetro exterior da secção transversal
u_{ef}	- Perímetro externo da área A_{ef} / Perímetro da linha média da cinta
u_s	- Perímetro da linha média da armadura transversal
v	- Deslocamento
w	- Massa volúmica do betão
x	- Profundidade da linha neutra / dimensão menor de uma secção transversal rectangular
\bar{x}	- Valor médio

- x_1 - Dimensão menor de um estribo fechado (cinta) referido à linha média
- y - Dimensão maior de uma secção transversal rectangular
- y_1 - Dimensão maior de um estribo fechado (cinta) referido à linha média
- z - Comprimento da parede referida à linha média / Distância entre duas secções ao longo do eixo de uma viga
- z_i - Comprimento da parede i referida à linha média

Alfabeto Grego

$\Delta\theta$	- Extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
$\Delta\theta_{cor}$	- Correção da rotação de torção
$\Delta\theta_{cr,exp}$	- Valor experimental da extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
$\Delta\theta_{cr,th}$	- Valor teórico da extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
Φ	- Função de tensão
α	- Ângulo de rotação por torção / Ângulo de inclinação das escoras / Coeficiente de St. Venant
α_{cw}	- Coeficiente de correção para ter em conta o esforço axial
α_p	- Coeficiente Plástico de Nadai
α_2	- Coeficiente de St. Venant / Ângulo entre a direcção principal 2 e a direcção da armadura longitudinal
β	- Coeficiente de St. Venant / Factor de redução
β_σ	- Factor de redução para as tensões
β_ε	- Factor de redução para as extensões
δ	- Coeficiente de correção
ε	- Extensão
ε_c	- Extensão no betão
ε_{cu}	- Extensão última do betão
ε_{cu1}	- Extensão última do betão (análise não linear)
ε_{cu2}	- Extensão última do betão (para dimensionamento)
ε_{c1}	- Extensão correspondente ao pico de tensão (análise não linear) / Extensão principal de tracção
ε_{c2}	- Extensão correspondente ao pico de tensão (para dimensionamento) / Extensão principal de compressão
ε_d	- Extensão na escora diagonal de betão
ε_{dec}	- Extensão na armadura de pré-esforço correspondente à descompressão do betão
$\varepsilon_{dec,l}$	- Extensão na armadura longitudinal de pré-esforço correspondente à descompressão do betão

- $\varepsilon_{dec,t}$ - Extensão na armadura transversal de pré-esforço correspondente à descompressão do betão
- ε_{ds} - Extensão máxima de compressão à superfície da escora de betão
- ε'_{ds} - Extensão efectiva de compressão à superfície da escora de betão
- ε_{dsi} - Extensão inicial de compressão à superfície da escora de betão devido ao pré-esforço
- ε_l - Extensão na armadura longitudinal / Extensão na direcção longitudinal
- ε'_l - Extensão efectiva na armadura longitudinal
- ε_{li} - Extensão inicial de compressão na armadura longitudinal ordinária induzida pelo pré-esforço
- ε_t - Extensão na armadura transversal / Extensão na direcção transversal
- ε'_t - Extensão efectiva na armadura transversal
- ε_{ti} - Extensão inicial de compressão na armadura transversal ordinária induzida pelo pré-esforço
- ε_{lu} - Extensão última da armadura longitudinal ordinária
- ε_{tu} - Extensão última da armadura transversal ordinária
- ε_{ly} - Extensão de cedência na armadura longitudinal ordinária
- ε_o - Extensão correspondente ao pico de tensão
- ε_p - Extensão correspondente ao pico de tensão σ_p
- ε_{pi} - Extensão inicial de tracção da armadura de pré-esforço
- $\varepsilon_{pi,l}$ - Extensão inicial de tracção da armadura longitudinal de pré-esforço
- ε_{lu} - Extensão última da armadura longitudinal ordinária
- ε_{pl} - Extensão na armadura longitudinal de pré-esforço
- ε_{ps} - Extensão na armadura de pré-esforço
- ε_{pt} - Extensão na armadura transversal de pré-esforço
- ε_{pu} - Extensão última convencional da armadura de pré-esforço
- ε_{py} - Extensão na armadura de pré-esforço correspondente à cedência da armadura longitudinal ordinária
- $\varepsilon_{p0,1\%}$ - Extensão correspondente a $f_{p0,1\%}$
- ε_{so} - Extensão de retracção autogénea
- ε_{sd} - Extensão de retracção de secagem
- ε_{su} - Extensão última convencional da armadura ordinária

ε_{sy}	- Primeira extensão de cedência da armadura ordinária
ε_t	- Extensão na armadura transversal / Extensão na direcção transversal
ε_{ty}	- Extensão de cedência da armadura transversal
ε_y	- Primeira extensão de cedência da armadura ordinária
ε_1	- Extensão axial num provete de betão
ε_{1L}	- Extensão limite de tracção no betão
ε_2	- Extensão lateral num provete de betão
ε_3	- Extensão lateral num provete de betão
ε_{45°	- Extensão diagonal a 45°
ϕ	- Ângulo total de torção / Ângulo da fissura de torção com o eixo da viga / Factor reductor de resistência
ϕ_l	- Diâmetro de um varão da armadura longitudinal
$\phi_{l,min}$	- Diâmetro mínimo do varão da armadura longitudinal
γ	- Distorção / Factor de pré-esforço
γ_c	- Distorção devido ao encurtamento da escora de betão
γ_l	- Distorção devido ao alongamento dos varões longitudinais
γ_t	- Distorção devido ao alongamento dos varões transversais
γ_m	- Distorção máxima num elemento de uma placa ao corte
γ_1	- Factor de pré-esforço
η	- Relação ente as forças resistentes nas armaduras na direcção longitudinal e transversal / Factor de redução
λ	- Coeficiente de eficiência de Cowan / Coeficiente de redução para ter em conta o <i>softening effect</i>
θ	- Ângulo entre a escora de betão e a direcção longitudinal / Ângulo de torção por unidade de comprimento
θ_i	- Ângulo entre a escora de betão e a direcção longitudinal para a parede i / Rotação de torção para a iteração i
θ_{cr}	- Rotação de torção correspondente a T_{cr}
θ_{cr}^I	- Rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado I
$\theta_{cr,exp}^I$	- Valor experimental da rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado I
$\theta_{cr,th}^I$	- Valor experimental da rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado I
θ_{cr}^{II}	- Rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado II

- $\theta_{cr,exp}^{II}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado II
- $\theta_{cr,th}^{II}$ - Valor teórico da rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado I
- $\theta_{i,cor}$ - Rotação de torção corrigida para a iteração i
- θ_{ly} - Rotação de torção correspondente a T_{ly}
- $\theta_{ly,th}$ - Valor teórico da rotação de torção correspondente a $T_{ly,th}$
- $\theta_{ly,exp}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{ly,exp}$
- θ_{max} - Rotação de torção última
- θ_n - Rotação de torção correspondente a T_n
- $\theta_{n,th}$ - Valor teórico da rotação de torção correspondente a $T_{n,th}$
- $\theta_{n,exp}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{n,exp}$
- θ_{ty} - Rotação de torção correspondente a T_{ty}
- $\theta_{ty,th}$ - Valor de cálculo da rotação de torção correspondente a $T_{ty,th}$
- $\theta_{ty,exp}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{ty,exp}$
- θ_y - Rotação de torção de cedência
- $\theta_{y,cor}$ - Valor corrigido da rotação de torção de cedência
- ρ_h - Taxa de armadura na direcção horizontal
- ρ_l - Taxa de armadura longitudinal
- $\rho_{l,tot}$ - Taxa total de armadura longitudinal (incluindo a armadura de pré-esforço)
- ρ_{sw} - Taxa de armadura transversal
- ρ_{Tot} - Taxa total de armadura (incluindo a armadura de pré-esforço)
- ρ_t - Taxa de armadura transversal
- ρ_{tot} - Taxa total de armadura de torção
- ρ_v - Taxa de armadura na direcção vertical
- $\rho_{w,min}$ - Taxa mínima da armadura transversal de esforço transversal
- σ - Tensão normal / Desvio padrão
- σ_c - Tensão de compressão / Tensão na escora de betão
- σ_{cd} - Tensão de compressão no betão (valor de dimensionamento)
- σ_{cp} - Tensão de compressão média devido ao esforço axial
- $\sigma_{ct,max}$ - Tensão principal máxima de tracção
- σ_d - Tensão na escora diagonal de betão
- σ_{dec} - Tensão na armadura de pré-esforço correspondente à descompressão do betão

σ_{do}	- Tensão na armadura de pré-esforço
σ_h	- Tensão normal aplicada na direcção horizontal
σ_l	- Tensão nos varões longitudinais
σ_{pl}	- Tensão na armadura longitudinal de pré-esforço
σ_{pt}	- Tensão na armadura transversal de pré-esforço
σ_t	- Tensão de tracção / Tensão nos varões transversais
σ_v	- Tensão normal aplicada na direcção vertical
σ_1	- Tensão axial num provete de betão
σ_I	- Tensão principal de tracção
σ_{II}	- Tensão principal de compressão
τ	- Tensão tangencial
τ_{max}	- Tensão tangencial máxima
τ_{ti}	- Tensão tangencial na parede i
ν	- Coeficiente de Poisson / Coeficiente de redução para a resistência do betão
υ	- Tensão tangencial induzida pelo esforço transversal
ψ	- Função de empenamento / Curvatura da escora de betão

Lista de Acrónimos

ACI	- American Concrete Institute
CEB	- Comité Européen du Béton
EC 2	- Eurocódigo 2
REBAP	- Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado
SI	- Sistema Internacional

Capítulo 1

Enquadramento e Objectivos do Trabalho

1. Enquadramento e Objectivos do Trabalho

1.1. Introdução ao Problema da Torção em Estruturas de Betão

1.1.1. Notas Históricas

No século XX, o betão armado tinha um papel muito importante para o projecto e construção de estruturas. Até à década de 60 desse mesmo século, os projectistas de estruturas desprezavam, habitualmente para efeitos de dimensionamento, os esforços de torção. Era assumido que estes esforços seriam de algum modo absorvidos por redistribuições internas de esforços e também pela reserva de resistência aplicável que os coeficientes de segurança à flexão proporcionavam. Os critérios de verificação de segurança baseavam-se no método das tensões admissíveis para os materiais. Este procedimento conferia um maior grau de segurança comparativamente ao conferido pelos actuais modelos de verificação, mais económicos, que se baseavam nos conceitos de estados limites e no comportamento plástico dos materiais.

Recorde-se que até à década de 60 do século passado, os documentos normativos, em geral, não incorporavam disposições específicas para o dimensionamento de secções de betão armado à torção, ou seja, os próprios documentos então existentes é que regiam o projecto de estruturas de betão armado não considerando que o esforço de torção constituísse um esforço primordial para as estruturas.

Refere-se no entanto que, já nessa altura, existiam casos considerados excepcionais e relativos a elementos estruturais para os quais era reconhecida a importância em se considerar explicitamente os efeitos torsionais. Um desses casos que figurava bastante na literatura da época era o das estacas de betão armado pré-fabricadas e que, devido ao processo de cravação utilizado, eram designadas de estacas parafuso (screw piles) (Figura 1.1). Durante o processo de cravação, estes elementos eram simultaneamente comprimidos e torcidos por meios mecânicos [26]. Uma vez que a direcção de aplicação e a magnitude do momento torsor eram conhecidos (a magnitude era pré-determinada pelo método de cravação), era adaptada uma armadura transversal helicoidal para garantir a resistência à torção. Esta armadura de torção era calculada de acordo com a bibliografia especializada e a avaliação da capacidade resistente de tais elementos à torção era feita recorrendo muitas vezes a ensaios experimentais.



Figura 1.1 - Processo de cravação de estacas parafuso (srew piles) [4]

Armstrong em 1956 [6] relata dois casos reais de estruturas onde os esforços de torção foram também explicitamente considerados no processo de dimensionamento: a Ponte de Waterloo (Figura 1.2 (a)) e o Royal Festival Hall (Figura 1.3 (a)), ambos construídos em Londres.

Na Ponte de Waterloo, o autor do projecto, Cuerel em 1948 [20], concebeu um tabuleiro com duas vigas em caixão (com três células cada) (Figura 1.2 (b)). No projecto foram consideradas cargas excêntricas que geravam momentos torsores elevados nas vigas em caixão. Para avaliar a capacidade resistente à torção em vigas em caixão do tipo das concebidas para a ponte em questão foram realizados alguns ensaios. O objectivo era confirmar se o factor de rigidez de torção de uma secção rectangular vazada e com núcleo excêntrico era o mesmo do que o previsto pela teoria de St. Venant para uma secção rectangular cheia e com proporções similares. Deste modo, foram executados ensaios experimentais em vigas com secção rectangular cheia e vazada na proporção média de viga da ponte. Tais ensaios confirmaram a referida relação, bem como o facto da tensão tangencial máxima ocorrer na parede mais fina, como previsto pela teoria.

Em 1951, Measor e New [38] descreveram a concepção e dimensionamento, para o Royal Festival Hall, de uma viga em caixão triangular sujeita a elevados momentos torsores para suporte de uma laje em consola (Figura 1.3 (b)).

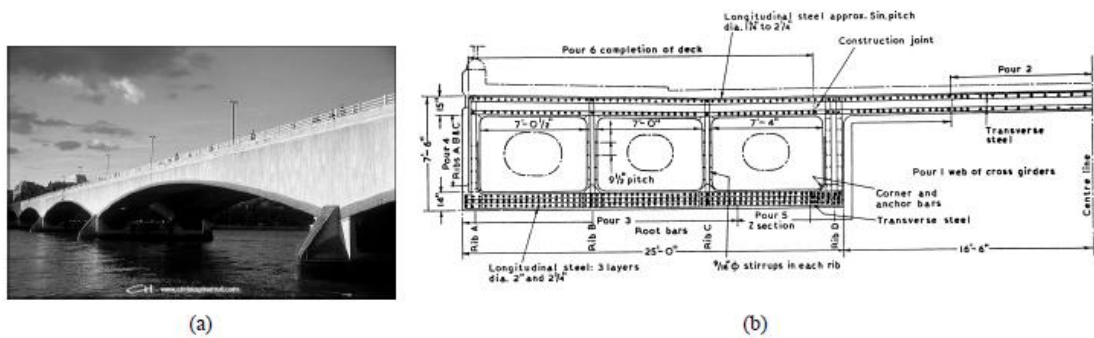


Figura 1.2 - Vista e corte transversal do tabuleiro da Ponte Waterloo [22]

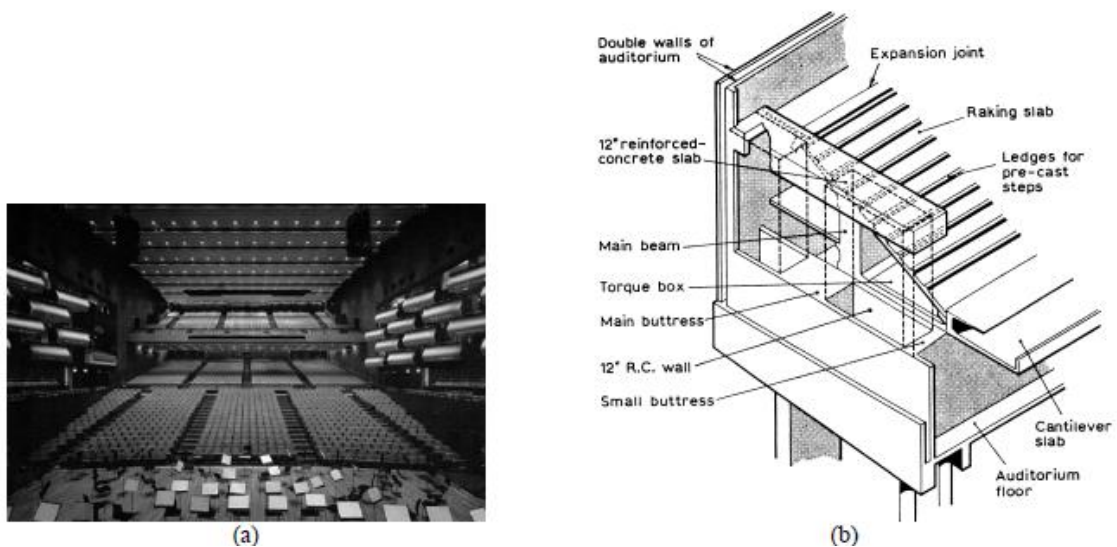


Figura 1.3 - Vista do balcão e do caixão triangular para suporte da laje em consola no Royal Festival [38]

Os dois casos práticos anteriormente expostos foram percursos de um sentimento geral na comunidade técnica e científica de que era urgente e necessário estudar-se adequadamente a problemática da torção em elementos de betão armado.

A partir da década de 60 do século XX, o desenvolvimento dos processos gerais de dimensionamento conduziu a que os elevados factores de segurança começassem a ser reduzidos. Tal redução dos factores de segurança resultou da adopção do método de dimensionamento baseado na teoria dos Estados Limites em substituição do método baseado nas tensões admissíveis. Deste modo, a reserva de resistência, que permitia considerar a torção como um efeito secundário, passou a ser menos significativa. Esta evolução no procedimento de dimensionamento estrutural contribuiu para que os então efeitos secundários de torção deveriam ser especialmente calculados e não desprezados.

Recorde-se que já antes da década de 60 do século XX, era tido como dado adquirido, usando a teoria da elasticidade, que as secções em caixão deveriam constituir a solução mais económicas quando sujeitas a momentos torsões elevados. De facto, a teoria da elasticidade

mostra que um tubo fino é a secção mais eficiente para a resistência à torção, uma vez que concentra a área toda da secção transversal na região mais solicitada (zona periférica da secção), de tal forma que é possível admitir que as tensões torsionais são constantes ao longo da espessura das paredes. Tanto no tabuleiro da Ponte de Waterloo (Figura 1.2) como para a viga de suporte da laje em consola do balcão no Royal Festival Hall (Figura 1.3) foram usadas vigas em caixão.

Antes da década de 60 do século XX, ocorreram casos problemáticos associados a resistências insuficientes a esforços elevados de torção e a estados de fissuração e deformação pronunciados comprometedores da estética e da durabilidade. No entanto, Hsu em 1984 [26] descreve um caso registado em 1964 da rotura de uma viga inserida na estrutura de um parque de estacionamento na Flórida (USA) (Figura 1.4). A superfície de rotura é denunciada exteriormente por uma única fenda com desenvolvimento helicoidal, evidenciando uma tipologia típica de uma rotura por insuficiência de armadura de torção.



Figura 1.4 - Rotura frágil por torção de uma viga num edifício [26]

O autor referido anteriormente relatou o caso de um edifício onde foi observado um estado de fissuração pronunciado nas vigas de apoio de pesados canteiros em consola. Na altura, foi demonstrado que o estado de fissuração fora provado pelos grandes esforços de torção induzidos pelos referidos elementos em consola.

Segundo Bernardo em 2003 [9], os poucos casos práticos relacionados com a insuficiência de resistência por torção foram registados em construções realizadas a partir de meados da década de 40, após o desenvolvimento da arquitectura moderna depois da segunda grande guerra. Posteriormente a essa altura, nos edifícios particulares, começaram a ser introduzidas expressões arquitectónicas arrojadas, dando muitas vezes origem a carregamentos excêntricos e não planos nos elementos estruturais: vigas curvas, estruturas enviesadas e muitas formas e configurações irregulares. Para estas estruturas, a simplificação que consistia em desprezar os efeitos torsionais no dimensionamento era obviamente a menos adequada.

Referia-se também a dificuldade sentida pelos engenheiros de estruturas antes da década de 60 do século XX e que se relacionava com o cálculo extremamente monótono e moroso dos efeitos torsionais em estruturas estaticamente indeterminadas. Tal aspecto agravou-se com o desenvolvimento da arquitectura moderna devido à maior complexidade das estruturas. No entanto, esse desenvolvimento foi sendo acompanhado pelo rápido avanço nas aplicações do computador na análise estrutural, permitindo aos engenheiros de estruturas calcular com maior facilidade e realismo os efeitos da torção. Assim, as estruturas irregulares e o cálculo específico da torção deixaram de representar dificuldades de cálculo e passaram a constituir casos normais no projecto de estruturas.

Nos dias de hoje, a modelação estrutural recorre a ferramentas computacionais o que torna tudo isto uma prática corrente na área de projecto de estruturas. A título exemplificativo, a Figura 1.5 representa dois exemplos de modelos de cálculo computacionais actuais de estruturas (edifício circular em planta - Figura 1.5 (a) e ponte com desenvolvimento não rectilíneo - Figura 1.5 (b)) e onde os esforços de torção foram certamente importantes para o dimensionamento de muitos elementos principais.

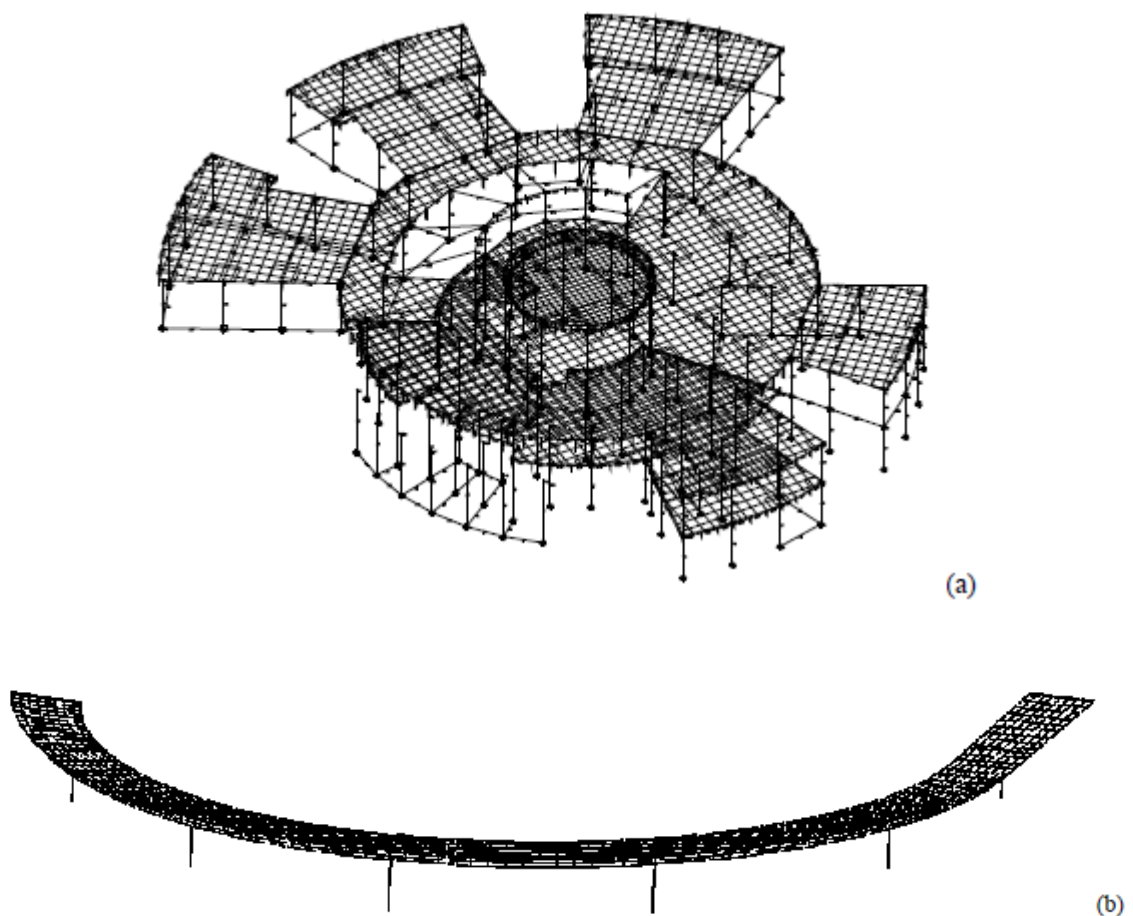


Figura 1.5 - Exemplos de modelação por elementos finitos com o software para análise estrutural [9]

Em 1958 foi criada a Comissão 438 do American Concrete Institute (ACI 438) para estudar e promover a investigação sobre a torção em elementos de betão armado e também elaborar recomendações com vista a definir as regras adequadas para o dimensionamento à torção de elementos de betão armado,

A partir das investigações realizadas por esta comissão, foram sendo publicados os resultados obtidos e foram sendo também incorporados uma série de novos critérios nas posteriores edições do código do ACI para o dimensionamento de elementos de betão armado à torção. O código de 1971 (ACI 318-71) representa o primeiro documento normativo americano que incluía explicitamente procedimentos para o dimensionamento à torção. De uma forma análoga, foi também promovida a investigação nesta área em outros países, de que resultaram novos critérios a introduzir nos respectivos códigos vigentes. Em particular, realça-se o esforço efectuado neste campo pelo Comité Européen du Béton (CEB) através da “Comissão V: Esforço Transverso - Torção”, criada posteriormente ao ACI 438 e que colaborou activamente com a comissão americana. A comissão V do CEB desenvolveu, entre 1972 e 1977, extensos estudos sobre torção que culminaram na incorporação dos procedimentos para o dimensionamento à torção na edição de 1978 do código europeu (MC 78 [14]), já baseado na teoria dos Estados Limites. Em Portugal, esse documento normativo deu origem ao Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (REBAP) em 1983 [36].

Apesar de todo este esforço, o dimensionamento e verificação de elementos em betão armado à torção sempre foi e continua a ser baseado em alguns procedimentos semi-empíricos e mesmo empíricos [26]. O cálculo e verificação do comportamento à torção em serviço de vigas de betão armado, sobretudo no estado fissurado, sofre ainda de grandes lacunas do ponto de vista normativo, cujas cláusulas em geral incluem apenas os cálculos e verificações explícitas em Estado Limite Último, sendo os Estados Limites de Serviço omissos em termos de verificação directa.

Nas situações práticas correntes, os elevados esforços de torção surgem combinados com outros esforços. Os documentos normativos prescrevem em geral que o dimensionamento das secções pode ser feito para os vários esforços em separado, somando-se e sobrepondo-se no final as armaduras resultantes. O dimensionamento é geralmente complementado com uma verificação da interacção entre esforços. Este procedimento corrente justifica que é importante a análise dos efeitos torsionais puros, sem interacção com outros esforços, para estudar o comportamento à torção e formular o respectivo dimensionamento.

De entre os problemas actuais relacionados com o estudo da torção, realça-se a necessidade de esclarecer alguns aspectos considerados ainda duvidosos nos actuais procedimentos de dimensionamento [9]. Realça-se também o surgimento e a utilização de novos materiais estruturais, ou menos convencionais, dos quais se destacam, por exemplo, os betões de alta resistência, os betões leves e os betões com fibras. A utilização de técnicas construtivas

especiais, designadamente a utilização de pré-esforço e de reforços estruturais, é outro dos aspectos a realçar. Os estudos acerca do comportamento em torção de elementos de betão armado executados com estes materiais e técnicas são ainda escassos. É assim necessário que sejam comprovadas e/ou reescritas as regras práticas de dimensionamento, por forma que este tipo de elementos estruturais possam ser utilizados com toda a confiança no domínio da construção. Neste trabalho, pretende-se estudar em particular os efeitos torsionais globais em vigas de betão armado com secção vazada, executadas com betão de resistência normal e também de alta resistência, e com pré-esforço longitudinal e/ou transversal.

1.1.2. Classificação Fundamental dos Efeitos de Torção

Nos problemas práticos em que o esforço de torção surge na análise estrutural, distinguem-se várias situações fundamentais, dependendo das condições em que a torção surge na estrutura e das consequências de ser desprezada no procedimento de verificação da segurança e também da forma como o esforço de torção é absorvido pela secção transversal.

Designa-se por Torção de Compatibilidade aquela que resulta para um elemento de uma estrutura essencialmente em virtude de condições de compatibilidade de deformação (Figura 1.6 (a)). Se a resistência à torção for nula ou não for considerada explicitamente no cálculo, podem ocorrer grandes deformações e também fissuração excessiva mas a estrutura não colapsa. Na maioria dos pórticos correntes de edifícios, com ligações monolíticas entre elementos estruturais, a torção que possa surgir nas vigas constitui assim uma acção secundária resultante das exigências de compatibilidade de deformação entre os vários elementos, não sendo necessária para o equilíbrio da estrutura. Tal torção de compatibilidade pode assim ser normalmente desprezada no dimensionamento desde que sejam adoptadas as necessárias disposições construtivas e garantidas as quantidades mínimas de armaduras para o controlo da fissuração, sobretudo na zona e ligações. Ao não ser prevista uma armadura específica para garantir a resistência à torção para o Estados Limites Últimos a rigidez de torção de vigas reduz-se drasticamente aquando da passagem para o Estado II (estado fissurado). A figura 1.7 representa a grande perda de rigidez de torção (85 a 90% segundo observado por Hsu em 1968 [27]), em função da carga, sofrida por vigas de secção rectangular (com dimensões diferentes mas áreas iguais) ensaiadas à torção pura [13]. Decorre desta perda de rigidez das vigas que os esforços internos da ligação (momentos flectores hiperestáticos) responsáveis pelos esforços de torção ficam muito reduzidos, pelo que estes momentos e os seus efeitos podem ser desprezados. A redistribuição interna de esforços decorrente, com a redução drástica dos esforços hiperestáticos da ligação, conduz a que os esforços iniciais de torção se reduzem conseqüentemente e passem a ser “compensados” por um aumento dos esforços de flexão e corte noutras secções críticas. No exemplo da Figura 1.6 (a) o novo modelo de dimensionamento a considerar, na situação limite e para os Estados Limites Últimos, encontra-se representado na Figura 1.6 (b).

No caso da Torção de Equilíbrio, é necessário assegurar a resistência à torção para que o equilíbrio se verifique (Figura 1.6 (c)). Na falta de resistência à torção de equilíbrio, a estrutura, ou parte dela, torna-se instável (Figura 1.6 (b)).

Nos exemplos ilustrados na Figura 1.6 se, no limite, as travessas dos pórticos, que servem de apoio indirecto às vigas perpendiculares, não possuem nenhuma resistência à torção, a viga apoiada será livre de rodar nas suas extremidades. Esta nova situação corresponderá a libertar as rotações, introduzindo rótulas, nas extremidades da viga apoiada. No caso ilustrativo da torção de compatibilidade (Figura 1.6 (b)) a estrutura mantém-se em equilíbrio e no caso da torção de equilíbrio (Figura 1.6 (d)), a viga apoiada roda no seu apoio, ficando parte da estrutura instável (a parte em consola da estrutura é, em si, isostática). Em estruturas isostáticas apenas pode assim ocorrer torção de equilíbrio.

Para os Estados Limites Últimos, a torção de equilíbrio, a existir, deve ser considerada de acordo com o exposto anteriormente. A torção de compatibilidade, quando existe, interessa fundamentalmente aos Estados Limites de Serviço. É este o procedimento simples, prescrito geralmente pelos documentos normativos para o caso da torção de compatibilidade, resultando na adopção de medidas construtivas adequadas em detrimento de um cálculo rigoroso e complexo da deformação e da fissuração resultantes da redistribuição interna de esforços.

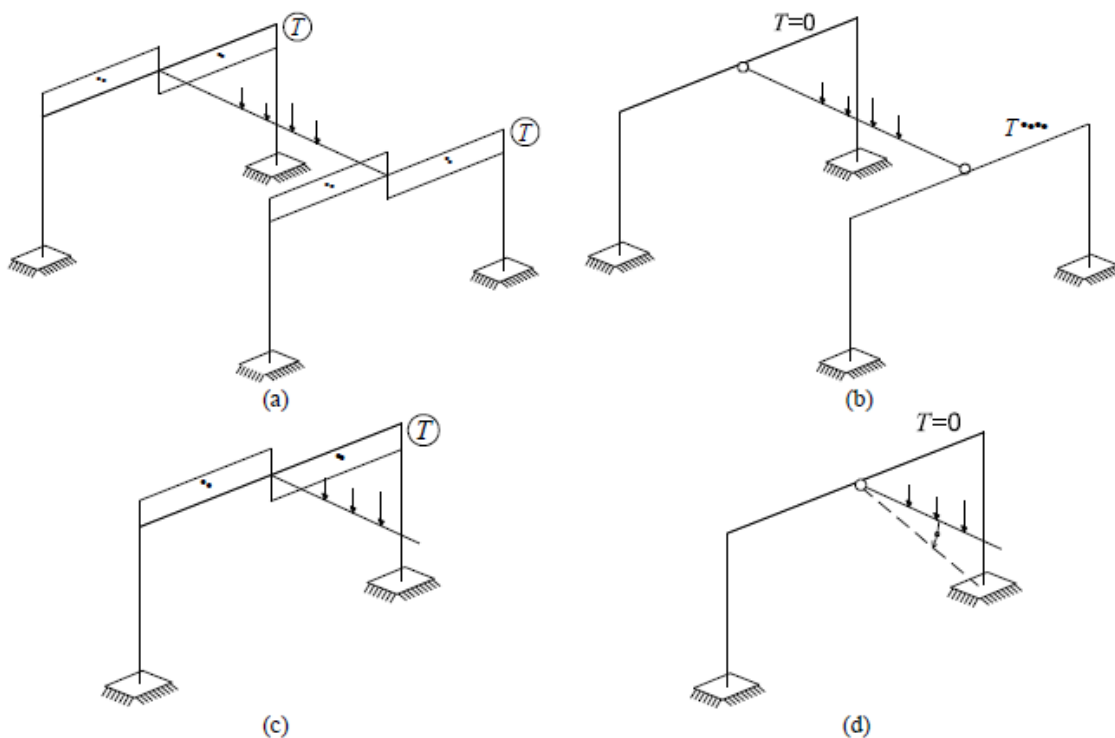


Figura 1.6 - Exemplos de estruturas com torção de compatibilidade e torção de equilíbrio [4]

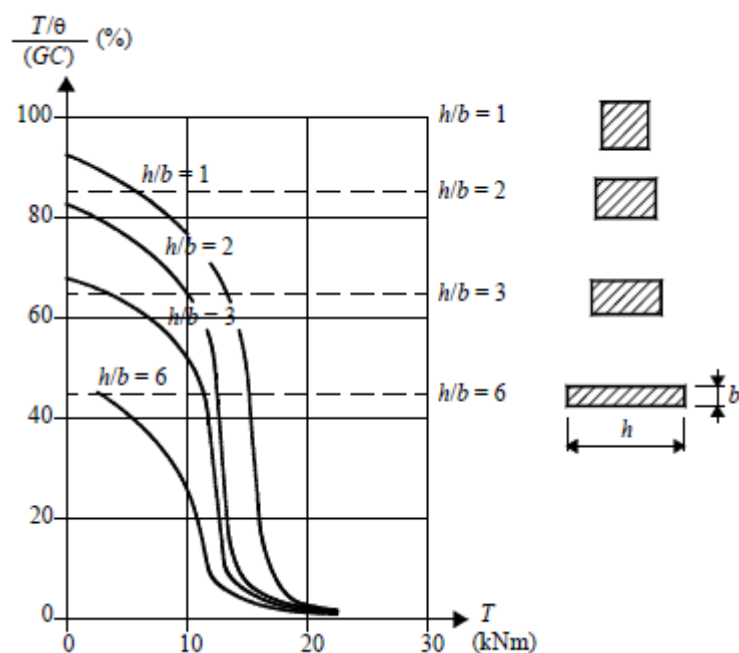


Figura 1.7 - Evolução da rigidez de torção com o momento torsor [13]

A Figura 1.8 (a) e (b) apresenta dois casos exemplificativos da simplificação induzida nos modelos de cálculo devido ao facto de se desprezar a rigidez de torção para os casos correntes e relativos, respectivamente, ao apoio de extremidade de uma laje de pavimento numa viga de bordo e ao apoio de continuidade de uma laje de pavimento numa viga interior. A mola de rotação, representada nos modelos iniciais, simula a rigidez de torção elástica das vigas de apoio. A figura 1.8 mostra que a simplificação induzida pelo facto de se desprezar a rigidez de torção das vigas de apoio facilita muito o cálculo dos diagramas elásticos de momentos flectores. Esta simplificação obriga à adopção de regras construtivas adequadas para o controlo da fendilhação na zona de ligação da laje às vigas. É exemplo de uma dessas regras a designada armadura de bordo apoiado habitualmente colocado na face superior das lajes na zona dos apoios de extremidade.

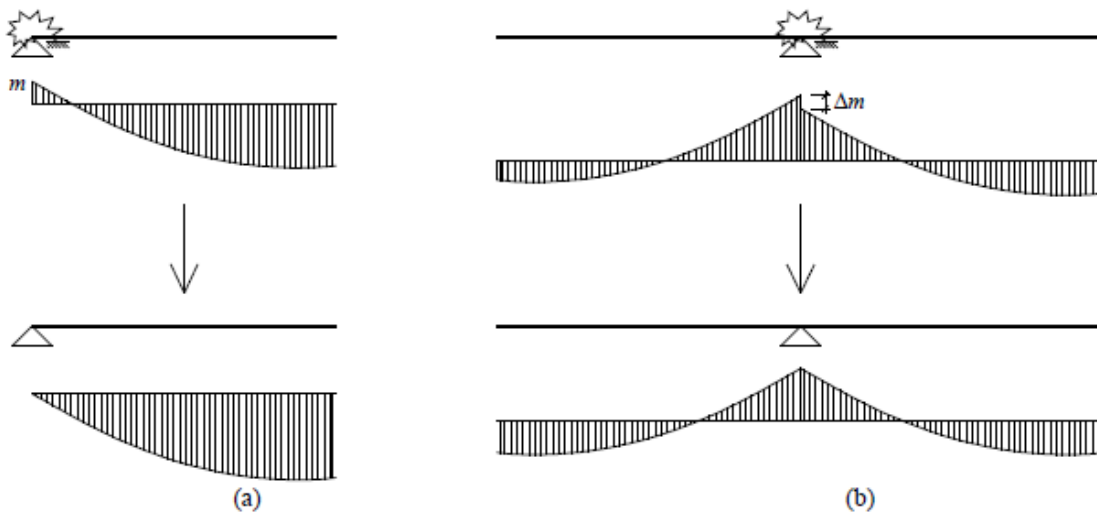


Figura 1.8 - Simplificação de modelos de cálculo de lajes de pavimento para zona de apoio [4]

O facto de se poder desprezar a torção de compatibilidade para efeito de dimensionamento que, em geral, na definição de modelos de grelha se pode considerar nula a rigidez de torção para os elementos lineares constituintes da grelha. Esta simplificação reduz significativamente o tempo necessário para o cálculo dos esforços e facilita também a passagem dos esforços para as armaduras na fase de dimensionamento.

O mecanismo segundo o qual os esforços de torção são resistidos por uma viga depende da forma da secção transversal e origina outra classificação fundamental dos problemas com torção. No caso de secções cheias e vazadas, os esforços de torção são essencialmente resistidos por um fluxo de tensões tangenciais (torção circulatoria ou torção de St. Venant - Figura 1.9 (a)) enquanto nas secções abertas em geral a torção é praticamente resistida por momentos adicionais (torção com empenamento - Figura 1.9 (b)).

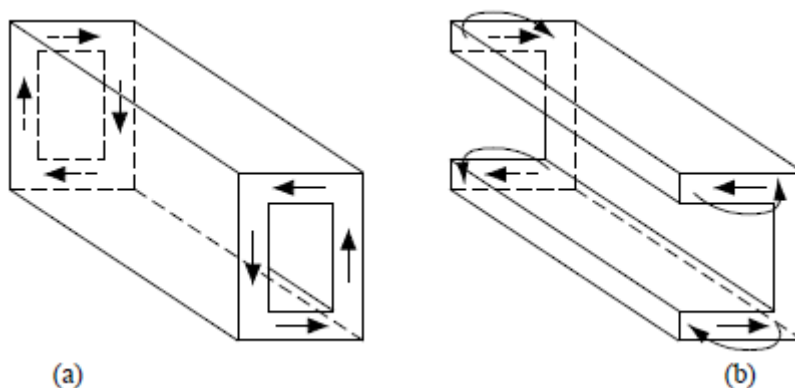


Figura 1.9 - Torção circulatoria e torção com empenamento [4]

O empenamento das secções é um fenómeno geralmente associado à acção torsional. Somente as secções de geometria circular e aquelas com certas propriedades de configuração são livres do empenamento. Nos casos em que o empenamento é variável ao longo do eixo da

viga devido a restrições, por exemplo pela presença de diagramas que restringem as deformações longitudinais, ou devido à distribuição não homogénea do momento torsor, desenvolvem-se extensões e tensões axiais adicionais. Em geral, quando não existe restrição ao empenamento e para secções cheias ou vazadas os efeitos do empenamento são muito reduzidos.

Para o caso do empenamento não poder ocorrer livremente, mesmo para secções cheias ou vazadas e sobretudo no estado não fissurado, a rigidez do elemento é consideravelmente aumentada. Deste ponto de vista, conclui-se que o empenamento, resultante de um carregamento que gera torção, é aparentemente um aspecto importante a ter em conta nas vigas em caixão de pontes, onde muitas vezes a utilização de pré-esforço garante a não fendilhação em serviço e onde é geralmente dada preferência a soluções monolíticas sempre que possível. No entanto, vários aspectos contribuem para que ainda assim os efeitos do empenamento possam ser desprezados. As vigas com paredes finas não sofrem tanto os efeitos do empenamento comparativamente às vigas com paredes mais espessas [46]. O grau de empenamento não é só controlado pela espessura das paredes, devendo ser também considerados outros parâmetros influentes, tais como a geometria global da secção, a configuração da viga e o tipo de carregamento [46], o que vem obviamente complicar a consideração deste efeito. Por exemplo, o caso de uma viga biencastada com secção rectangular cheia ou vazada, as zonas de repartição das tensões longitudinais induzidas pelo empenamento das secções são, em geral, bastante restritas. No entanto, nos casos com há restrição ao empenamento, as tensões longitudinais adicionais resultantes deste efeito reduzem-se drasticamente quando o betão se encontra fissurado, uma vez que a fissuração “liberta” grande parte desta restrição [46]. Este fenómeno pode assim, originar apenas pequenos aumentos de tensões em elementos de betão armado com secção rectangular cheia ou vazada que praticamente não afectam a capacidade resistente e, por isso, podem geralmente ser desprezados no cálculo. Estes aspectos explicam o facto de ainda não ter sido desenvolvido um método de cálculo satisfatório (simples) para se considerar nos Estados Limites Últimos os efeitos de empenamento em vigas de betão armado e também o facto de nos documentos normativos em geral, este aspecto não ser explicitamente contemplado. No caso de secções abertas em geral, o efeito do empenamento torna-se a componente principal da resistência à torção.

Quanto à torção circulatoria ou de St. Venant, para uma secção rectangular de betão armado o “comportamento puro” associado a esta classificação pode ser considerado válido apenas quando os elementos não fissuram. Após a fissuração de betão, o mecanismo de absorção dos efeitos torsionais não pode ser mais reduzido ao comportamento de uma secção mas deve passar a ter como base o comportamento do elemento ao longo do seu eixo.

1.1.3. Exemplos de Casos Práticos de Torção em Estruturas

Da Figura 1.10 à Figura 1.18 ilustram-se casos correntes de estruturas, designadamente no âmbito de estruturas de edifícios, com esforços de torção. A Figura 1.10 (a) ilustra esquematicamente o caso de uma laje de cobertura isolada, directamente sustentada pela travessa de um pórtico resistente, que fica sujeita a elevados momentos torsores. A Figura 1.10 (b) ilustra o caso de uma pala na zona de entrada de uma moradia. A pala possui continuidade com laje de pavimento, pelo que neste caso os esforços de torção na viga serão menos condicionantes comparativamente ao exemplo da Figura 1.10 (a).

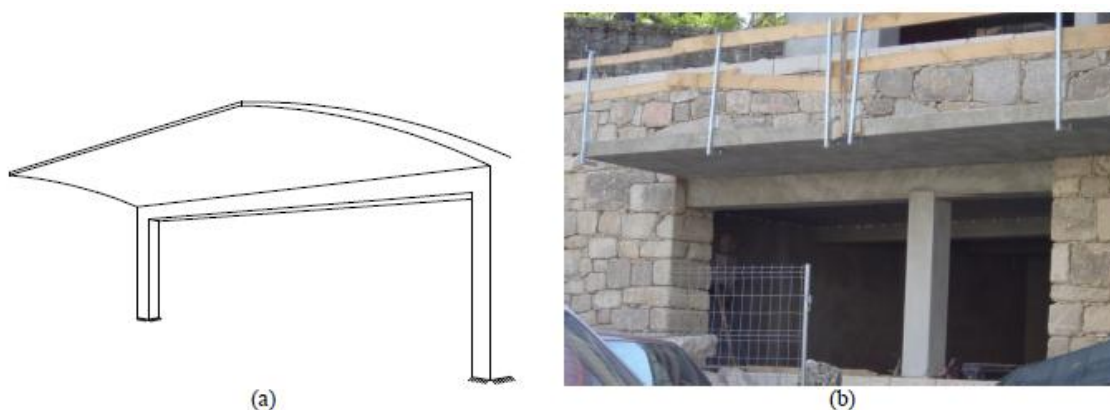


Figura 1.10 - Lajes de cobertura em consola (isolada e com continuidade) [9]

Na Figura 1.11 está representado o caso de um edifício onde existe o prolongamento para o exterior das lajes de pavimento, funcionando estas em consola. A viga de apoio em “L” fica sujeita a momentos torsores.



Figura 1.11 - Edifício com varandas [9]

O caso de vigas com desenvolvimento curvo em planta, em que a rotação transversal da secção se encontra restringida nos apoios está ilustrado na Figura 1.12. Para estes casos, qualquer carregamento vertical a actuar sobre o eixo das vigas, resultante por exemplo da reacção de lajes de pavimento ou de paredes exteriores, como é o caso da situação ilustrada na figura 1.12 (b), gera o aparecimento de momentos torsores.

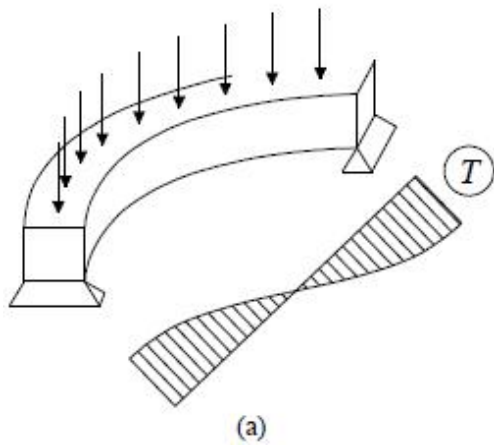


Figura 1.12 - Vigas curvas no plano horizontal [9]

A Figura 1.13 ilustra os casos de cargas excêntricas em vigas. As cargas são transmitidas às vigas por intermédio de abas que funcionam como consolas curvas. Na Figura 1.13 (a), qualquer assimetria entre as reacções suspensas na viga provoca o aparecimento de momentos torsores na viga de apoio. A Figura 1.13 (b) ilustra o caso de uma parede de alvenaria a apoiar excêntricamente, por intermédio de uma aba superior, numa viga. A parede provoca também esforços de torção na viga de apoio.

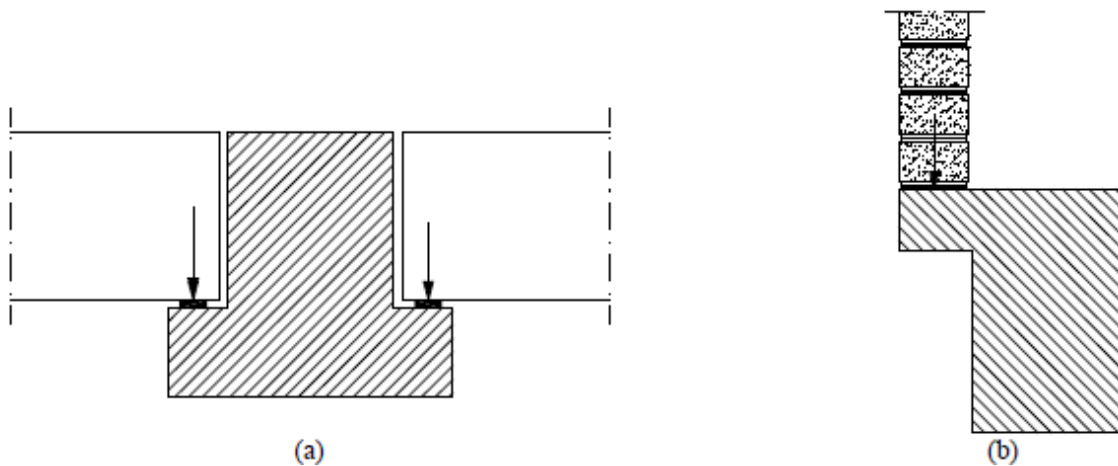


Figura 1.13 - Vigas com carregamento excêntrico [4]

A Figura 1.14 ilustra os casos de vigas com apoios indirectos. A compatibilidade de deformação entre as vigas apoiadas e as vigas de apoio obriga ao aparecimento, nestas últimas, de momentos torsores.

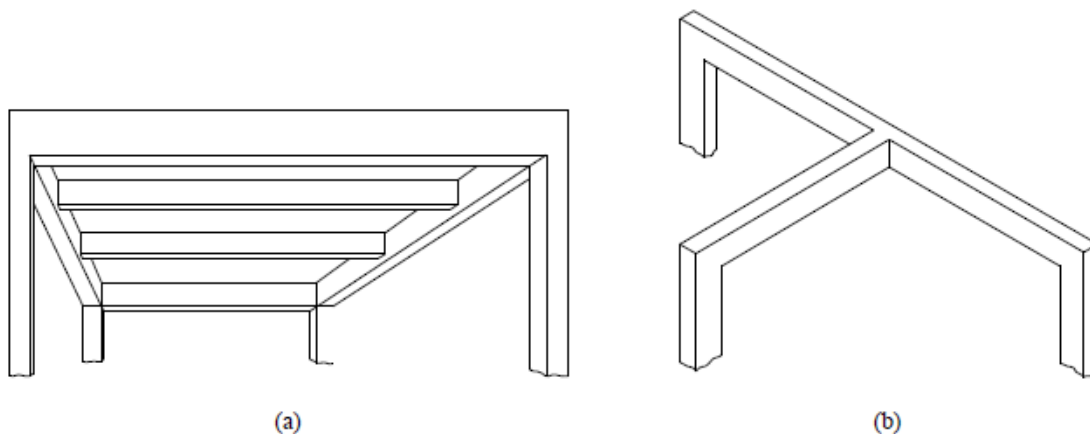


Figura 1.14 - Vigas com apoios indirectos [4]

Na Figura 1.15 estão representados os casos correntes de pavimentos das zonas de apoio de extremidade e de continuidade em laje maciça vigada, com ligação monolítica. O diagrama de momentos flectores elásticos M na laje mostra que, por equilíbrio, o momento de ligação, m , ou o diferencial de momento, Δm , resultantes de assimetrias dos painéis de laje adjacentes (vãos, rigidezes, carregamentos, etc.), tem de ser absorvido pela rigidez de torção da viga de apoio, originando neste momentos torsões T . De forma análoga do que acontece para os casos ilustrados na Figura 1.14, tais momentos torsões têm origem no facto da rotação das vigas de apoio estar restringida pela sua rigidez de torção e pela rigidez de flexão dos pilares.

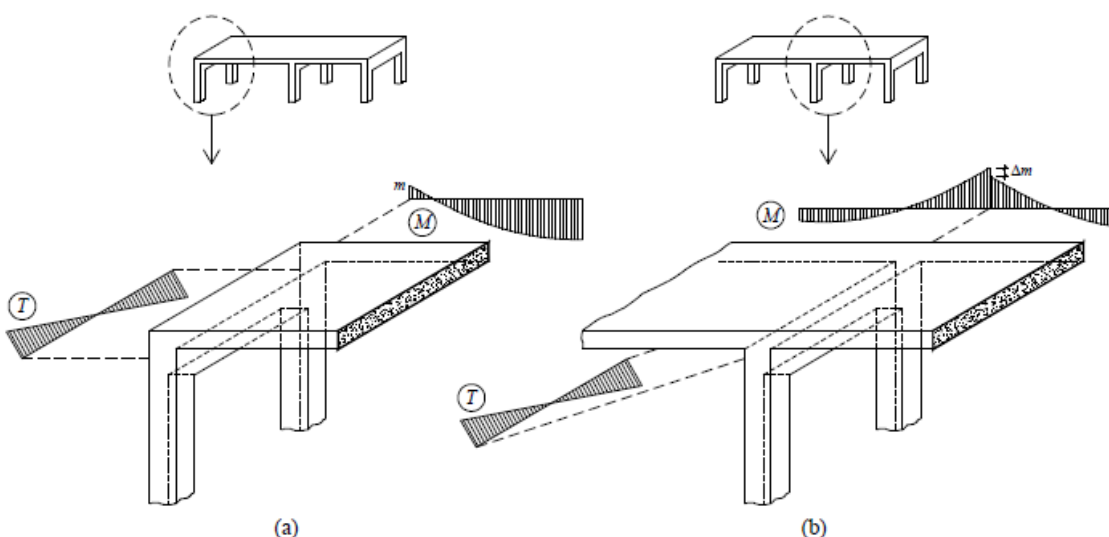


Figura 1.15 - Apoio de uma laje de pavimento em vigas de extremidade e de continuidade [9]

A Figura 1.16 ilustra esquematicamente o apoio de uma laje inclinada de cobertura numa viga de bordadura. Neste caso, o esforço axial no plano da laje é transmitido excentricamente à viga de apoio e origina momentos torsões nesta.

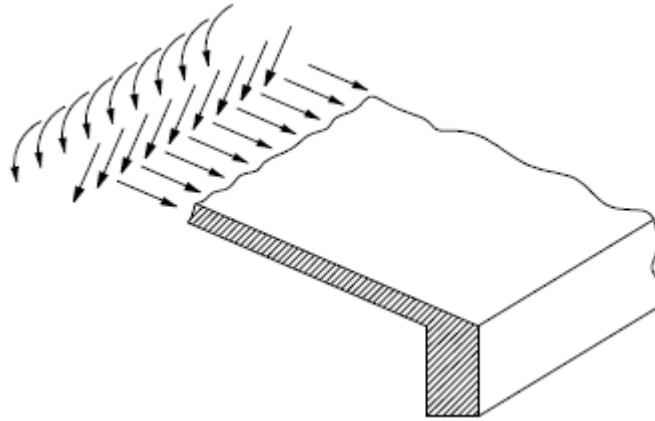


Figura 1.16 - Apoio de uma laje inclinada numa viga de extremidade [4]

Na figura seguinte (Figura 1.17) está ilustrado o caso de uma escada em curva, com os degraus activos posicionados em “asa de avião” e viga com directriz parcialmente helicoidal. Este tipo de escadas são obrigatoriamente encastradas nas suas extremidades, estando a sua viga sujeita a momentos torsões elevados nas extremidades.

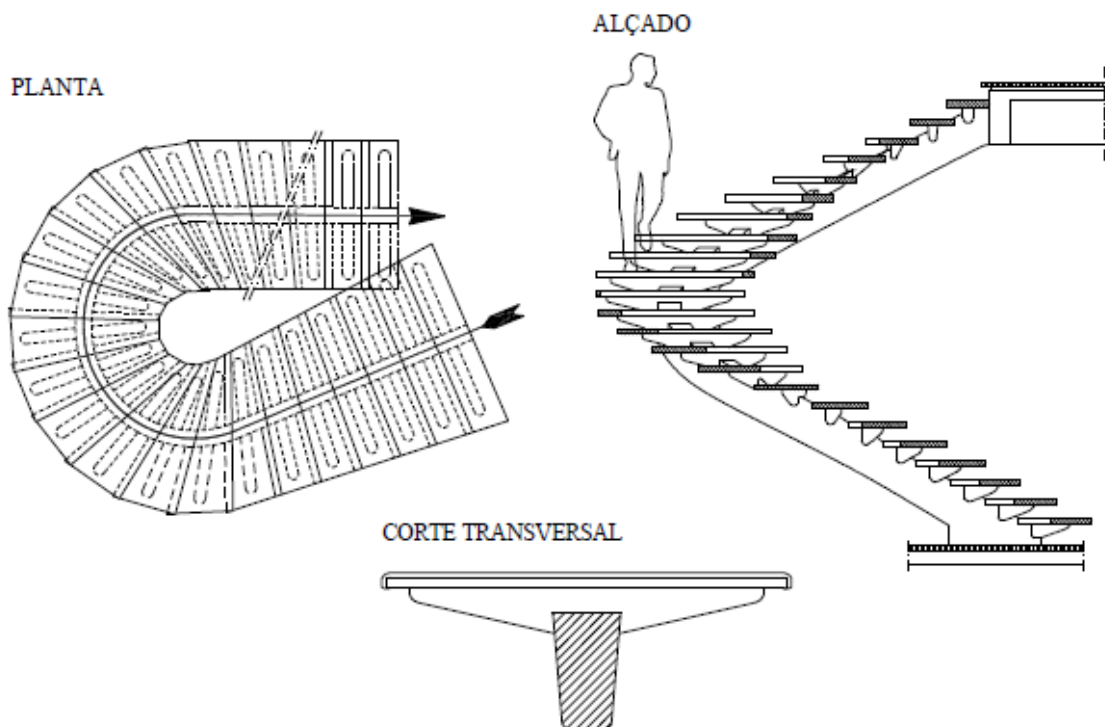


Figura 1.17 - Escada em curva [9]

A Figura 1.18 ilustra o caso de uma moradia em que a laje inclinada da cobertura do Piso 1 se prolonga em consola para o exterior do edifício. A existência da abertura contígua à banda de laje para apoio da consola origina um aumento dos momentos torsões na mesma banda.

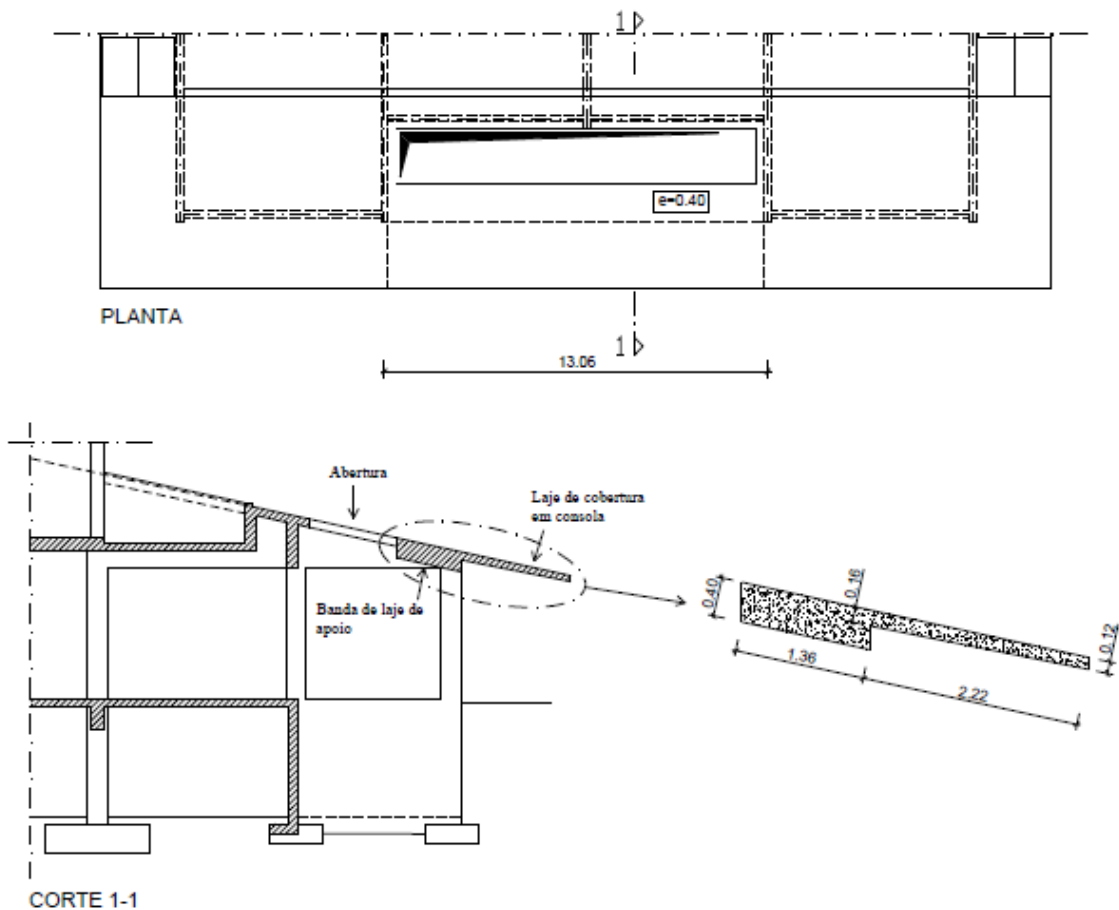


Figura 1.18 - Laje de cobertura inclinada [21]

A torção assume maior importância no domínio das estruturas especiais tendo, com muita frequência, um papel relevante. De entre tais estruturas, talvez o caso das pontes seja o mais exemplificativo devido à tipologia tanto da estrutura como das acções particularmente elevadas, concentradas e excêntricas. Neste tipo de estruturas, as acções excêntricas que incidem no tabuleiro podem provocar grandes momentos torsores nas vigas longitudinais que vencem os vãos (Figura 1.19).



Figura 1.19 - Efeito de uma carga excêntrica numa secção em caixão de um tabuleiro [4]

Na Figura 1.20 está ilustrado o caso de pontes com eixo curvo, onde a sobre-elevação da plataforma rodoviária e o raio de curvatura da viga dão origem a uma translação para fora do centro de gravidade, originando uma excentricidade. Assim, mesmo que existam cargas

simétricas em relação à secção transversal (ou directriz) originam momentos torsores ao longo da vida (Figura 1.21).



Figura 1.20 - Ponte curva (Viaduto rodoviário de Linn Cove, E.U.A.) [9]

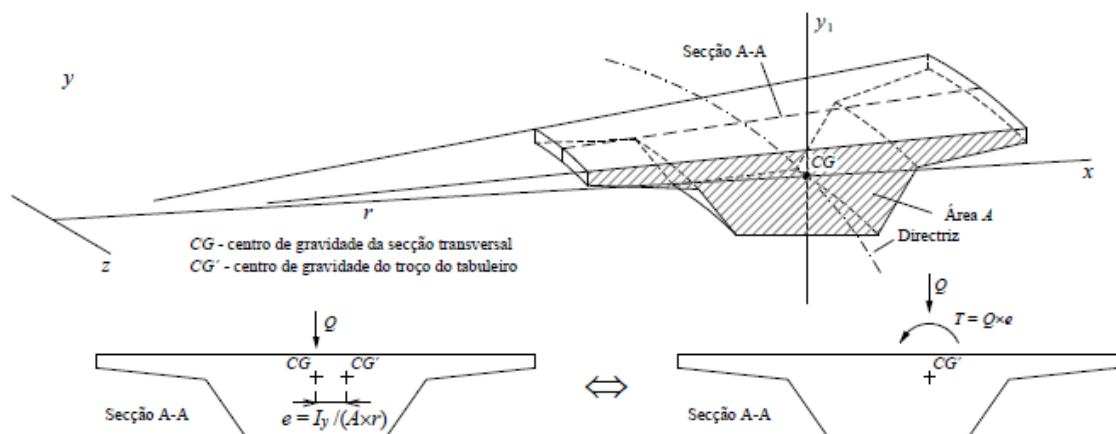


Figura 1.21 - Deslocamento do centro de gravidade da secção em pontes curvas [4]

O pré-esforço longitudinal em pontes curvas, pela sua existência, origina também esforços adicionais de torção resultantes do acompanhamento, em planta e em termos de traçado, da directriz do tabuleiro (Figura 1.22).

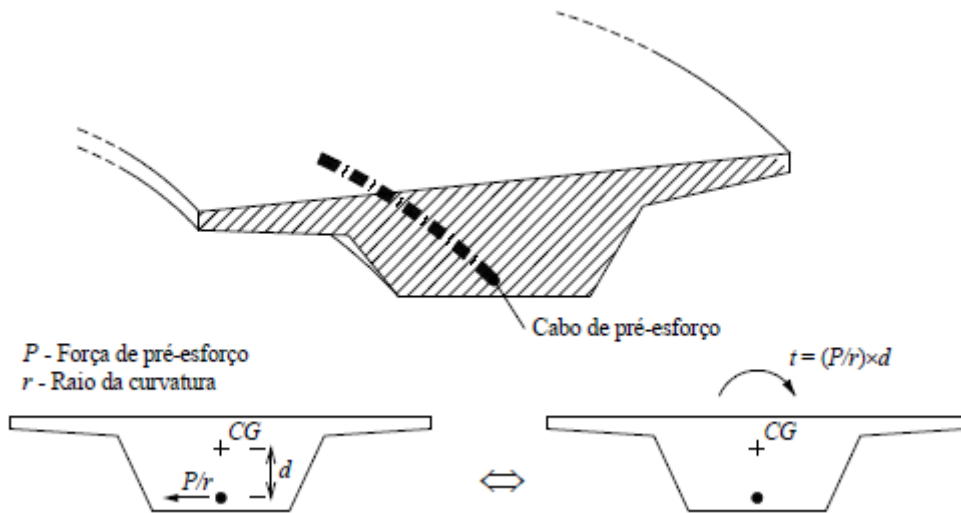
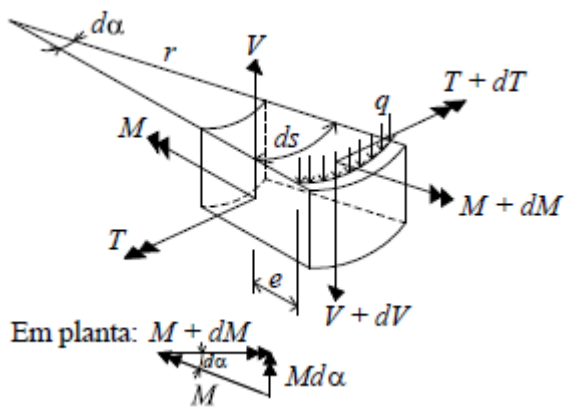


Figura 1.22 - Momento torsor provocado pelo pré-esforço [4]

A própria variação da direcção do vector momento flector ao longo da directriz do tabuleiro, vector sempre dirigido para o centro desta, origina um momento torsor adicional na secção. A Figura 1.23 mostra que o vector soma dos momentos M e $M + dM$, numa fatia elemental de uma viga curva com comprimento ds , é tangente ao eixo longitudinal do elemento podendo ser interpretado como um momento torsor $m = M/r$.



Equações de equilíbrio:

$$dV + qds = 0$$

$$dT + Md\alpha + (e \cdot q + t)ds = 0$$

$$dM - Td\alpha - Vds = 0$$

$$\frac{dT}{ds} = -\left(\frac{M}{r} + e \cdot q + t\right)$$

Nota:

$$m = \frac{Md\alpha}{ds} = \frac{M}{r}$$

Figura 1.23 - Equilíbrio de uma fatia elemental de uma viga curva [9]

É de referir-se que existem outras acções, para além das citadas anteriormente (cargas verticais e pré-esforço), que podem contribuir para a geração de momentos torsores adicionais, como sejam por exemplo a acção do vento sobre o tabuleiro e veículos e também o efeito da força centrífuga a ter em conta no caso particular de pontes curvas.

Na Figura 1.24 ilustram-se alguns exemplos práticos de estruturas especiais em que os esforços de torção induzidos pela curvatura das vigas e pelas acções foram certamente

condicionantes para a concepção e verificação da segurança de alguns dos elementos importantes constituintes da estrutura.



Figura 1.24 - Obras de arte com desenvolvimento curvo em planta [9]

São exemplos de situações com torção de compatibilidade os casos ilustrados nas Figura 1.10 (b), Figura 1.14, Figura 1.15 (a) (com a condição de que não existam na laje apoiada aberturas interiores e contíguas à viga de apoio) e Figura 1.15 (b).

As Figura 1.11, Figura 1.12, Figura 1.13, Figura 1.17, Figura 1.18 e finalmente a Figura 1.19 a Figura 1.24 são exemplos de situações com torção de equilíbrio. Para o caso ilustrado na Figura 1.16, a torção na viga de apoio induzida pela força axial distribuída pela laje deve ser considerada torção de equilíbrio.

Os casos práticos expostos anteriormente ilustram bem a importância que, hoje em dia, os efeitos da torção podem assumir mesmo em estruturas correntes.

1.1.4. Comportamento à Torção de Secções Cheias e Vazadas

De um ponto de vista prático, as secções vazadas são as mais eficientes na resistência à torção, uma vez que o fluxo de tensões tangenciais gerado é essencialmente absorvido pela zona periférica da secção. Sendo assim, as secções vazadas de parede fina são as que conduzem a um maior aproveitamento do material. Em estruturas de grandes dimensões,

como o caso das pontes, quando os esforços de torção assumem um papel importante, a opção por secções em caixão para o tabuleiro traduz-se numa solução vantajosa do ponto de vista económico, relativamente a uma secção cheia, apesar da maior dificuldade de execução envolvida (Figura 1.20). De facto, a economia na quantidade de betão, a redução do peso próprio, com implicação directa na altura da secção e na quantidade de armadura necessária, justifica que esta opção seja corrente em pontes. Já em estruturas correntes de edifícios tal não se verifica, uma vez que as dimensões correntes para as vigas utilizadas não justificam a opção por este tipo de secções.

O comportamento em torção de vigas com secção vazada não é totalmente idêntico ao de vigas correspondentes com secção cheia. As primeiras possuem uma capacidade muito limitada de redistribuição transversal de tensões tangenciais, particularmente nos casos de que as paredes serem finas, pelo que é de esperar que as vigas com secção vazada possuam uma menor capacidade de desenvolver um estágio dúctil na última fase de comportamento à torção. Com o intuito de se perceber a diferença de comportamento entre vigas de secção cheia e vazada, a Figura 1.25 apresenta alguns resultados editados por Hsu em 1973 [25]. A Figura 1.25 ilustra as curvas experimentais - momento torsor (T) "versus" rotação de torção (θ) - para duas vigas idênticas em termos de dimensões exteriores para a secção, materiais e taxas de armaduras de torção. A diferença reside apenas na espessura da parede da secção. A viga B4 possui uma secção cheia, enquanto que a Viga D4 possui uma secção vazada com $h/x = 0,25$ (com h = espessura da parede e x = largura exterior da secção). Apesar de garantida a resistência última, é evidente a perda de ductilidade quando é retirado o núcleo de betão da secção, uma vez que o intervalo da capacidade de sustentação de carga sob deformações inelásticas decrescente bastante. É também evidente a diferença de comportamento imediatamente após ser atingido o momento torsor de fendilhação, verificando-se a ausência, para a viga com secção vazada, do patamar horizontal.

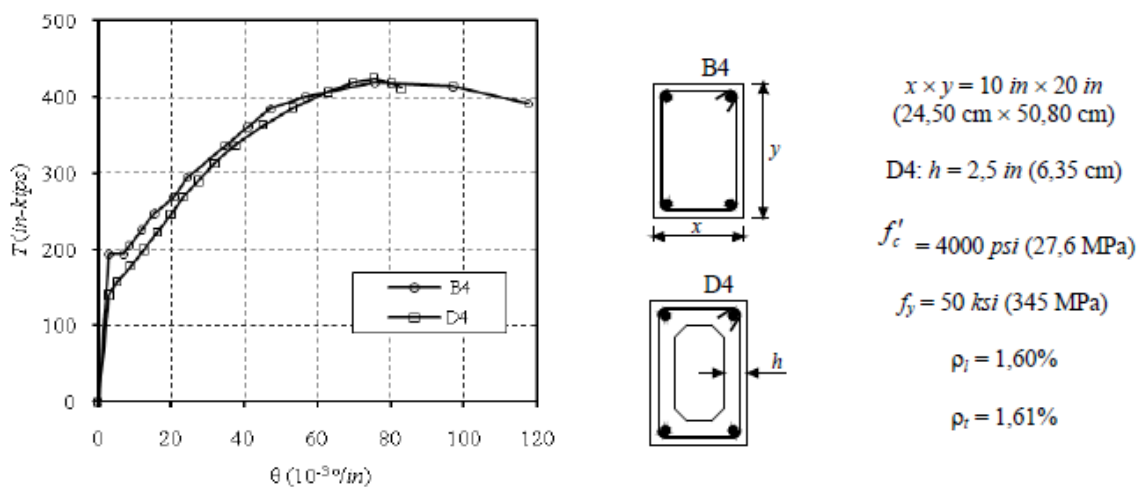


Figura 1.25 - Influência da espessura da parede no comportamento à torção pura [25]
 $(1^\circ/\text{in} = 39,37^\circ/\text{m}; 1 \text{ in-kips} = 0,113 \text{ kNm}; 1 \text{ MPa} = 145 \text{ psi})$

A problemática evidenciada anteriormente torna-se mais importante ao se observar que os autores em geral, e para o estabelecimento de conclusões, não costumam separar os resultados obtidos e referentes a vigas com secção cheia e vazada. No entanto, é com base nestas conclusões gerais que são estabelecidas as regras e as disposições normativas.

1.2. Objectivos e Justificação do Trabalho

Do exposto ao longo da secção 1.1, resultam vários aspectos e questões que contribuiriam bastante para a escolha do tema deste trabalho e também para realçar a sua importância:

- A conveniência em se fazer um ponto de situação sobre o estudo teórico do comportamento de vigas de betão armado de resistência normal e de alta resistência, com pré-esforço longitudinal e/ou transversal;
- A escassez de estudos para verificar em qual das direcções, longitudinal e transversal, o pré-esforço contribui para uma melhor resistência à torção;
- A escassez de estudos relativos à capacidade de rotação das vigas de betão pré-esforçado com secção vazada quando sujeitas à torção.

Numa situação hipotética de torção pura, a existência de um estado transversal de tensão induzido por um pré-esforço transversal equivale a uma situação de interacção de esforços, pelo que deve ser feita uma avaliação de previsão teórica da resposta e da capacidade torsional de vigas de betão armado sujeitas a estas condições.

Para justificar a inclusão neste trabalho de vigas de alta resistência com pré-esforço longitudinal e/ou transversal importa realçar vários aspectos importantes. A resistência à tracção do betão não é incrementada em proporção directa com a sua resistência à compressão. Por isso, não se consegue obter a máxima potencialidade do betão de alta resistência em estruturas em que a resistência à fissuração ou última do elemento é governada por tensões de tracção induzidas muitas vezes pelo esforço transversal ou pelo momento torsor. Assim sendo, um pré-esforço apropriado aumenta a capacidade de resistência global à torção e torna efectiva uma grande porção de betão na secção transversal. O pré-esforço é, por isso, de particular importância em estruturas com betões de alta resistência onde se espera que os elementos estruturais tenham uma menor rigidez devido às menores secções transversais. O uso do pré-esforço resulta, em geral, além de estruturas livres de fissuração em serviço, uma maior rigidez em comparação com estruturas de betão armado. Assim, o betão de alta resistência pré-esforçado combina o melhor do betão com as vantagens oferecidas pelo pré-esforço. Isto tudo é obviamente válido para o caso de elementos sujeitos à torção. Tem portanto todo o interesse o estudo do comportamento à torção pura de vigas com pré-esforço.

Foram consideradas as seguintes variáveis de estudo (com vista a permitir realizar análises paramétricas):

- tipo de secção transversal (vazada);
- classe de resistência à compressão uniaxial do betão (betões de resistência normal ou de alta resistência);
- taxa total de armadura de torção (armadura transversal e longitudinal);
- tensão média na secção induzida pelo pré-esforço longitudinal e/ou transversal.

O trabalho apresentado, em termos da análise efectuada, pode ser dividido em três fases principais de estudo interligadas:

Fase 1 - previsão do comportamento global de vigas sujeitas à torção pura, incluindo vigas com secção transversal vazada, de resistência normal e de alta resistência, com pré-esforço longitudinal e/ou transversal. Tal estudo do comportamento das vigas referidas anteriormente tem por base a analogia de treliça espacial com ângulo variável (modificado). O presente trabalho torna-se inovador ao pretender testar teoricamente vigas com pré-esforço transversal, uma vez que, não existem ou são escassos os estudos experimentais para este caso;

Fase 2 - estudo da capacidade de rotação para vigas com secção vazada e com pré-esforço transversal e/ou transversal;

Fase 3 - comparação paramétrica entre os resultados obtidos neste trabalho, nomeadamente entre vigas (secção vazada) com betão pré-esforçado transversal versus vigas com betão pré-esforçado transversal e vigas com betão pré-esforçado transversal versus vigas com betão pré-esforçado longitudinal e transversal.

Sobre esta matéria refere-se que existem ainda escassos estudos publicados e referentes a ensaios experimentais de vigas de alta resistência à torção. Merecem notoriedade os ensaios e estudos efectuados por vários autores, destacando-se Bernardo e Lopes desde 2003 [9][12] exclusivamente com vigas de secção vazada, incluindo com pré-esforço longitudinal uniforme.

Finalmente, refere-se que este trabalho incide unicamente sobre o caso da torção em vigas com pré-esforço longitudinal e/ou transversal. A existência de pré-esforço, ao introduzir um esforço axial na secção, corresponde, juntamente com o momento torsor, a uma situação de interacção de esforços. A torção pura não ocorre frequentemente na realidade, normalmente surge combinada com outros tipos de esforços; flexão, esforço transversal e esforço axial, este último sobretudo para o caso de pilares e de elementos pré-esforçados. No entanto, em algumas estruturas, de que são exemplo as pontes curvas, os esforços de torção podem

constituir uma acção primária para o dimensionamento por causa das elevadas acções excêntricas.

1.3. Organização deste Documento

Apresenta-se seguidamente a organização deste trabalho com uma descrição muito sumária do conteúdo dos diversos capítulos.

No Capítulo 1 apresenta-se o tema, enquadrando-o no âmbito da prática e da investigação na área do betão estrutural, salientando-se os aspectos que tornam esta investigação relevante e necessária. Ainda pertencente ao Capítulo 1, a presente secção descreve a organização seguida para a apresentação do trabalho.

No Capítulo 2 e no interesse do tema escolhido para este trabalho, são descritos os modelos e teorias consideradas mais relevantes para o estudo da torção no domínio do betão estrutural.

No Capítulo 3 é apresentada a descrição do modelo teórico utilizado. Tal modelo teórico é, baseado na analogia da treliça espacial com ângulo variável modificado com vista a torná-lo apto para prever teoricamente o comportamento global das vigas (com secção cheia ou vazada, de resistência normal ou de alta resistência, com ou sem pré-esforço longitudinal uniforme e/ou transversal).

No Capítulo 4 são apresentados, analisados e comentados os resultados obtidos a partir do aplicativo computacional desenvolvido por Andrade em 2010 [4] - TORQUE_MTEAVmod. Referem-se também as conclusões julgadas importantes relativamente aos resultados obtidos.

Finalmente, no Capítulo 5 resumem-se as conclusões principais dos estudos realizados e apresentam-se indicações e recomendações para futuros desenvolvimentos do trabalho.

Para facilitar a leitura da obra, a anteceder o texto são apresentados o índice geral, o índice de figuras, o índice de tabelas e uma lista da simbologia utilizada. As referências bibliográficas são listadas no final do texto.

Capítulo 2

Modelos Teóricos para a Torção em Vigas

2. Modelos Teóricos para a Torção em Vigas

2.1. Introdução

Neste capítulo, descrevem-se algumas teorias e estudos sobre o comportamento à torção de vigas de betão armado e de vigas de betão pré-esforçado. No âmbito do presente trabalho, são descritas as teorias aplicáveis a vigas com secção cheia ou vazada. Na parte do capítulo dedicada à torção em vigas de betão pré-esforçado são expostas as teorias aplicáveis aos casos com ou sem pré-esforço longitudinal uniforme. Para o caso de vigas de betão com pré-esforço transversal sujeitas à torção não foram encontrados estudos na bibliografia consultada. Tendo por base o referido no Capítulo 1 deste trabalho, apenas será abordado o caso da torção circulatoria.

2.2. Torção em Vigas de Betão Armado

Os estudos sobre torção em vigas de betão armado revestem-se de uma enorme importância uma vez que as teorias desenvolvidas para este tipo de elementos constituem as ferramentas de base para a compreensão e desenvolvimento de alguns modelos teóricos adoptados em documentos normativos. Tais teorias prevêem a resistência última em vigas de betão armado sujeitas à torção pura.

2.2.1. Comportamento de Vigas sem Armadura Transversal à Torção

A Curva $T - \theta$ típica de vigas que possuem unicamente armadura longitudinal está ilustrada na Figura 2.1.

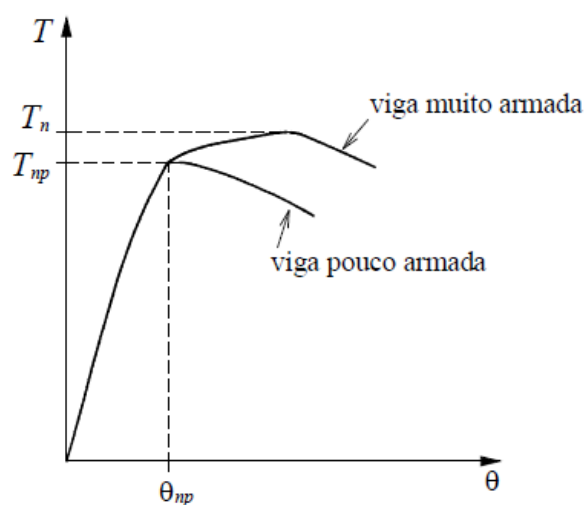


Figura 2.1 - Curva $T - \theta$ típica para vigas sem armadura transversal [26]

Os parâmetros T_n e T_{np} representam, respectivamente, os momentos torsores resistentes para uma viga de betão armado e para uma viga de betão simples (não armado).

Antes de ocorrer a fissuração, o efeito da armadura longitudinal é desprezável, pois a Curva $T - \theta$ é muito próxima à de uma viga de betão simples. A rigidez de torção pode ser razoavelmente calculada pela teoria de St. Venant.

Após a fissuração e relativamente à viga ser pouco armada, esta pode colapsar instantaneamente, uma vez que entra logo em cedência. No caso de a viga ser muito armada, a resistência última pode exceder o momento torsor de fissuração, mas raramente ultrapassa em mais de 15% [26]. Os ensaios experimentais mostraram que a armadura longitudinal, por si só, é praticamente não efectiva, independentemente da localização dos varões na secção. [26].

Para o cálculo da rigidez de torção e para o cálculo da resistência à torção, uma viga de betão armado sem armadura transversal pode ser tratada como uma viga de betão simples, desprezando-se o efeito da armadura longitudinal. A resistência última pode ser calculada através da teoria da flexão enviesada.

$$T_{cr} = (1 + 4\rho_{tot})T_{np} \quad (2.1)$$

2.2.2. Comportamento de Vigas com Armadura Longitudinal e Transversal à Torção

O comportamento típico de uma viga de betão armado, com secção rectangular cheia e com armadura longitudinal e transversal equilibrada (armadura de torção), encontra-se ilustrado na Figura 2.2.

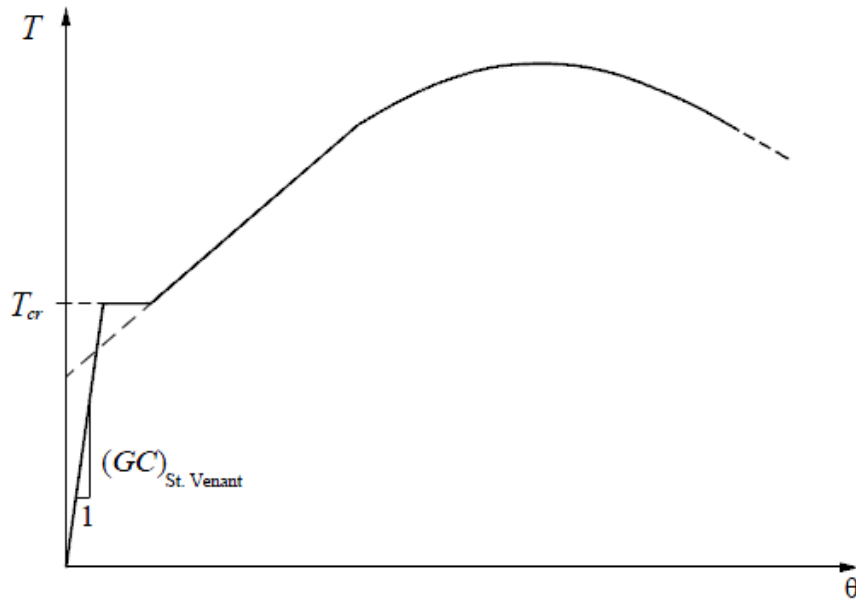


Figura 2.2 - Curva T - θ para vigas de betão armado [9]

Hsu [27], com base em vários ensaios à torção de vigas com secção rectangular cheia e armadas com várias quantidades de armadura de torção, observou que o momento torsor de fissuração (T_{cr}) é pouco afectado pela percentagem total de armadura (ρ_{tot}), tendo proposto a seguinte expressão empírica:

$$T_{cr} = (1 + 4\rho_{tot})T_{np} \quad (2.2)$$

O parâmetro T_{np} representa o valor teórico da resistência à torção para a viga sem armaduras (Equação 2.1). Observando que a taxa total de armadura de torção, ρ_{tot} , tem pouca influência, Hsu concluiu que seria mais simples e conservativo para o dimensionamento desprezar o pequeno efeito favorável de ρ_{tot} e tomar $T_{cr} = T_{np}$.

Antes de ocorrer a fissuração, Hsu verificou que a percentagem total de armadura, ρ_{tot} , tem um efeito desprezável na rigidez de torção das vigas. Nesta fase, as vigas comportam-se como vigas de betão não armado e a rigidez de torção de St. Venant é aplicável em vigas com armadura longitudinal e transversal.

Na fase pós-fissuração, o comportamento das vigas já não pode ser previsto pela teoria de St. Venant, tal como é ilustrado pela Figura 2.2. Esta constatação deve-se ao facto da fissuração acabar com a premissa básica da teoria da elasticidade, assim sendo, o material deixa de ser homogéneo. Assim, após a fissuração, a armadura absorve as tensões de tracção e o betão as tensões de compressão. A transição entre a condição de equilíbrio de St. Venant (fase pré-fissuração) e a nova condição de equilíbrio pós-fissuração é expressa pelo patamar horizontal

da Curva $T - \theta$ (Figura 2.2). No momento em que as vigas fissuram, o seu equilíbrio interno sofre uma completa perturbação. Como foi verificado por Hsu, o comprimento da deformação angular finita, sob momento torsor de fissuração constante, aumenta quando a percentagem de armadura diminui.

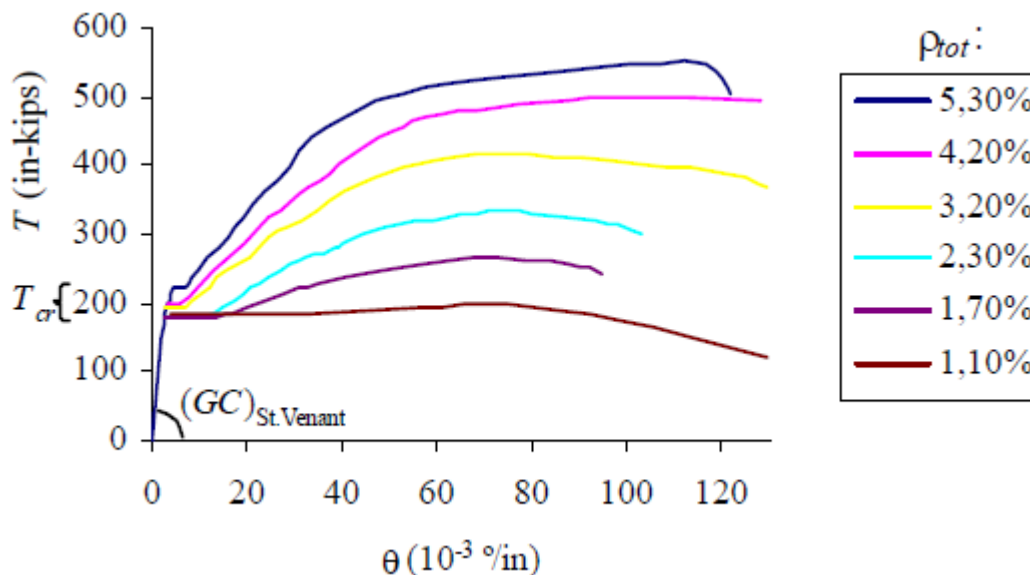


Figura 2.3 - Curva $T - \theta$ para vigas de betão armado [27]
 ($1^\circ/\text{in} = 39,37^\circ/\text{m}$; $1 \text{ in-kips} = 0,113 \text{ kNm}$)

Da análise da Figura 2.3, pode ser observado que a rigidez de torção pós-fissuração, traduzida pela inclinação da Curva $T - \theta$, e a resistência última são muito influenciadas pela percentagem de armadura. Hsu observou que a viga sofre rotura frágil para percentagens totais de armadura inferiores ou iguais a 1%. Por outras palavras, esta armadura é insuficiente para garantir um momento torsor último maior do que o momento torsor de fissuração. Nesta situação, a Curva $T - \theta$ desenvolve um patamar horizontal extenso pois a fissuração provoca instantaneamente a cedência das armaduras de tracção. Assim, Hsu concluiu que a percentagem de armadura de 1% poderia constituir o limite mínimo para a armadura de torção.

Para o caso de a armadura ser colocada numa quantidade excessiva, Hsu concluiu que a percentagem máxima de armadura deve ser definida de modo a limitar o momento torsor último a cerca de 2,5 a 3,0 vezes o momento torsor de fissuração. Se o momento torsor último ultrapassar este limite, a rotura será do tipo frágil (a viga não desenvolve ductilidade). O aço não entrará em cedência na rotura, ocorrendo esta última por esmagamento do betão comprimido nas escoras.

2.2.3. Modelos de Resistência à Torção

2.2.3.1. Nota Introdutória

Muitas teorias foram desenvolvidas nas últimas décadas para calcular a resistência à torção pura de vigas com armadura longitudinal e transversal. De uma forma geral, estas teorias podem ser agrupadas em dois tipos: Analogia da Treliça Espacial e a Teoria da Flexão Enviesada. As teorias desenvolvidas por Rausch em 1929 [42], Cowan em 1950 [17] e Hsu em 1968 [30] foram as mais relevantes. As duas primeiras teorias, as quais contêm um grande valor histórico, pertencem à analogia da treliça espacial. No entanto, outras teorias como as de Lampert e Thurlimann em 1969 [37], Elfgren em 1972 [23] e Collins em 1973 [15] foram desenvolvidas a partir destas teorias base que servem de base ao código modelo europeu desde 1978. A teoria de Hsu concerne à teoria da flexão enviesada que serviu de base ao código americano durante um longo período, de 1971 até 1995, tendo posteriormente sido substituída pela analogia da treliça espacial. Neste trabalho, será apresentada unicamente e com algum detalhe a analogia da treliça espacial, desde a sua concepção por Rausch até aos seus posteriores desenvolvimentos. Para uma leitura mais completa e pormenorizada sobre a evolução histórica do estudo da teoria da flexão enviesada, que apenas permite calcular a resistência última da viga, podem ser consultados vários textos (por exemplo, [26]).

2.2.3.2. A Analogia da Treliça Espacial de Rausch

Teve início com Ritter em 1899 [43] e Morsh em 1902 [39], a simulação de um elemento de betão armado na fase pós-fissuração por meio de um modelo de treliça. Uma viga de betão armado sujeita ao esforço transversal apresenta uma fissuração diagonal que divide o betão numa sucessão de escoras. Nestas condições, os autores referidos anteriormente, assumiram que a viga funciona como uma treliça no plano da carga. De uma forma geral, pode-se dividir a treliça em duas partes: as barras longitudinais superiores e inferiores que constituem as cordas da treliça e as barras transversais e as escoras de betão que servem como elementos de equilíbrio da alma. A inclinação das escoras de betão, por simplicidade, foi assumida como sendo igual a 45° . Assim, as teorias de Ritter e Morsh foram denominadas por Modelo de Treliça a 45° ou Analogia da Treliça a 45° . O cálculo das tensões na armadura longitudinal, na armadura transversal e nas escoras de betão a 45° pode ser obtido da derivação de três equações a partir do equilíbrio.

Rausch em 1929 [42], propôs a primeira teoria para prever a resistência última de elementos de betão armado sujeitos à torção. O campo de aplicação do modelo de treliça a 45° foi desenvolvido por Rausch para a fase pós-fissuração de elementos de betão armado sujeitos à torção. O referido autor constatou que um elemento de betão fissurado com armadura longitudinal e transversal constituída por cintas, funciona como um tubo. Deste modo, o momento torsor aplicado é resistido pelo fluxo circulatório de corte nas paredes do tubo. Além disso, Rausch assumiu que o tubo funciona como uma treliça espacial para a resistência

ao fluxo circulatório de corte. Tal como foi concebido por Ritter e Morsh, cada segmento recto de parede do tubo constitui uma treliça plana que resiste às forças de corte.

Encontra-se representado na Figura 2.4(a) um elemento de betão armado de pequeno comprimento sujeito à torção, cuja secção transversal tem uma forma arbitrária e é assumida como sendo oca. Após a fissuração, o betão é dividido por várias fissuras orientadas a 45° em relação ao eixo longitudinal do elemento numa série de elementos helicoidais. A armadura longitudinal e transversal (cintas a 90°) interage com os referidos elementos helicoidais por forma a formar uma treliça espacial como ilustrado na Figura 2.4(b).

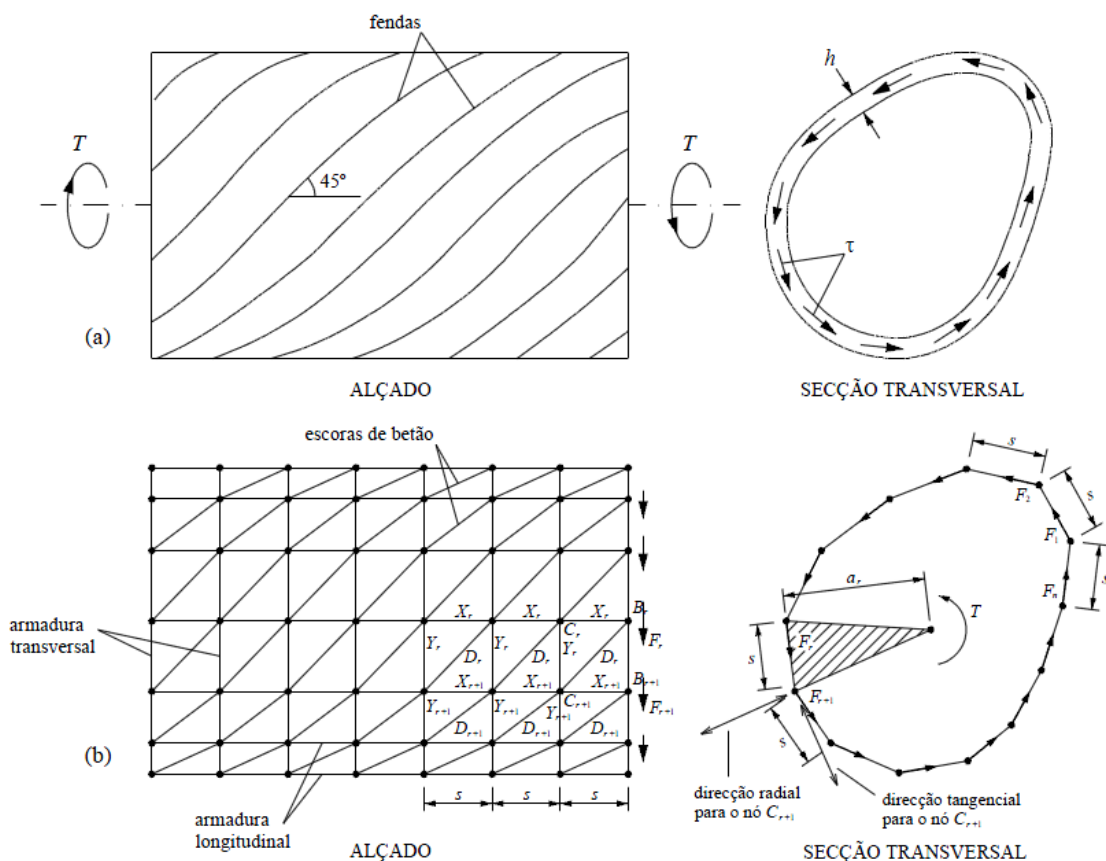


Figura 2.4 - Analogia da treliça espacial de Rausch [4]

Cada elemento helicoidal é idealizado numa série de escoras curtas e rectas, orientadas a 45° e ligadas nos nós da treliça. A armadura transversal é constituída por cintas, as quais são também idealizadas como uma série de barras curtas e rectas, ligadas às escoras de betão nos nós da treliça. Desta forma, a força de compressão nas escoras de betão produz, em cada nó, uma força radial dirigida para fora que será resistida pela armadura transversal. O mecanismo formado pela série de escoras diagonais de betão e a série de barras da armadura transversal tende a sofrer um alongamento quando sujeito a um momento torsor externo. Esta tendência a sofrer alongamento encontra resistência por parte da armadura longitudinal. Hsu em 1968 [27] descreveu e constatou experimentalmente este fenómeno de alongamento na fase

fendilhada. De forma análoga, cada barra longitudinal é assumida como sendo uma série de barras curtas ligadas, nos nós da treliça, às escoras diagonais e às barras da armadura transversal. Deste modo, a treliça espacial constituída por escoras de betão à compressão a 45° e barras longitudinais e transversais à tracção (Figura 2.4(b)) é capaz de resistir a momentos torsores externos.

Sucintamente, uma treliça espacial com esta configuração satisfaz as seguintes hipóteses:

- A treliça espacial é constituída por escoras diagonais de betão a 45° , barras longitudinais e barras transversais ligadas nos nós por rótulas;
- As escoras diagonais de betão resistem somente à compressão axial, ou seja, a resistência ao corte da escora é desprezável;
- As barras longitudinais e transversais resistem apenas à tracção axial, isto é, a resistência ao corte devido ao “efeito ferrolho” não é considerada;
- Para uma secção cheia, o núcleo de betão não contribui para a resistência à torção.

Rausch, com base na Figura 2.4(b), analisou as seguintes forças nas barras da treliça espacial:

- Força interna na barra longitudinal r , (X_r);
- Força interna na barra transversal r , (Y_r);
- Força interna na escora diagonal r , (D_r);
- Fluxo de corte em cada nó r , (F_r).

Cada força é representada sequencialmente com índices de 1 a n ao longo da periferia da secção transversal (parâmetro r). Desta forma, uma barra típica terá um índice r com valores entre 1 e n , a barra a seguir terá o índice $r + 1$ e assim sucessivamente. As forças internas X , Y e D devem estar distribuídas equitativamente em cada célula da treliça espacial ao longo da direcção longitudinal (Figura 2.4(b)). Esta condição é análoga à utilizada na teoria de St. Venant ou na teoria do tubo fino de Bredt, que particularizam que a distribuição de tensões deve ser semelhante em cada secção transversal de uma barra prismática sujeita a momentos torsores nas extremidades.

A Figura 2.5 ilustra os resultados de Rausch com a aplicação deste método de dimensionamento para o caso particular de uma viga com secção rectangular armada com quatro barras longitudinais nos cantos e cintas fechadas espaçadas de s .

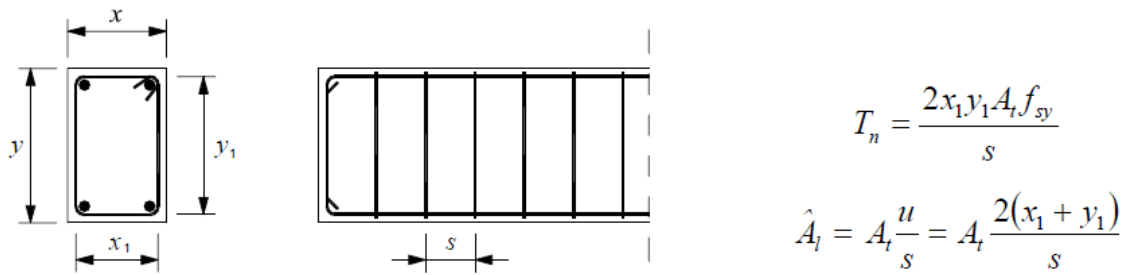


Figura 2.5 - Viga de betão armado com secção rectangular [9]

Na primeira equação da Figura 2.5, T_n é a resistência nominal à torção, A_t é a área da secção transversal de uma barra de uma cinta transversal e f_{sy} é a tensão de cedência da armadura transversal igual longitudinal ($f_{sty} = f_{sly} = f_{sy}$). Relativamente à segunda equação, o parâmetro \hat{A}_l é a área total da armadura longitudinal e u é o perímetro da área limitada pela linha média de uma cinta fechada ($u = ns$).

A analogia da treliça espacial de Rausch é uma combinação entre a teoria de tubo fino de Bredt com a analogia da treliça plana para a análise do esforço transversal em vigas de betão armado. Deste modo, temos o conhecimento do funcionamento principal da armadura e do betão na resistência à torção e as equações resultantes são bastante simples.

No entanto, verificou-se que a equação de Rausch (primeira equação da Figura 2.5) para o cálculo da resistência à torção (T_n), não era conservativa em muitos casos [17]. Teoricamente, a analogia da treliça espacial de Rausch não tem em conta o efeito da resistência ao corte das escoras de betão, a resistência ao corte devido ao “efeito ferrolho” das armaduras longitudinais e transversais, a contribuição do núcleo de betão e nem a resistência do betão à tracção. Por não ter em conta os mecanismos referidos anteriormente, nomeadamente os dois primeiros, a teoria de Rausch não explica a contribuição do betão observada nos ensaios experimentais. Por estes motivos, nas últimas décadas a equação de Rausch tem vindo a sofrer modificações para melhorar a sua precisão. As modificações resultantes da equação de Rausch podem ser classificadas em três aproximações.

A primeira aproximação assume que a armadura é apenas parcialmente eficiente. Esta primeira aproximação foi seguida em 1935 por Andersen [3] que sublinhou o facto de a analogia da treliça espacial de Rausch apresentar uma tensão uniforme ao longo de toda a armadura para uma viga de betão armado sujeita à torção. A distribuição de tensões de St. Venant, para o caso de uma secção rectangular, apresenta uma tensão máxima que ocorre no meio da face maior e decresce até zero no canto da secção. A Figura 2.6 ilustra qualitativamente as distribuições das tensões tangenciais ao longo da face maior e menor ao longo de três linhas radiais, respectivamente, para algumas relações y/x .

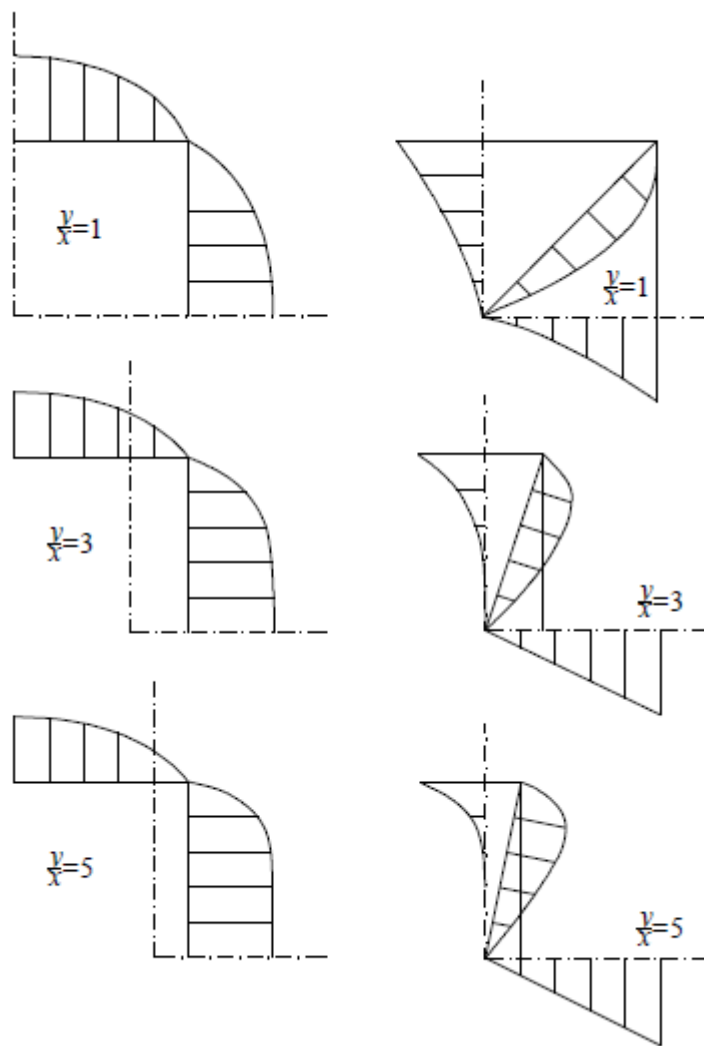


Figura 2.6 - Distribuição qualitativa das tensões de St. Venant em secções rectangulares [4]

A hipótese de uniformidade de tensões assumida pela teoria de Rausch contrapõe-se assim à distribuição de tensões de St. Venant para todos os tipos de secções transversais excepto o circular. Veio a verificar-se que tendo em conta a não uniformidade da distribuição de tensões na armadura, a resistência à torção da armadura é menos efectiva do que o previsto pela equação de Rausch (Figura 2.5). Deste modo, Andersen afectou a equação de Rausch por um coeficiente de eficiência para a armadura, λ , que varia entre cerca de 2/3 a 1 dependendo da forma da secção transversal e do número de barras da armadura. Consequentemente o coeficiente de eficiência para melhorar o valor teórico da resistência à torção de Rausch foi amplamente usado.

A segunda aproximação teve origem em Lampert e Thurlimann em 1969 [37]. Esta aproximação traduziu-se em reduzir a área A adoptando uma definição arbitrária para a linha média do fluxo de corte (linha fechada que delimita a área A). A referida linha foi assumida como sendo coincidente com a linha fechada que une os centros dos varões longitudinais.

Por último, a terceira aproximação consiste de forma análoga à segunda aproximação em reduzir a área A mas assumindo agora que a linha média do fluxo de corte coincide com a linha média do bloco equivalente das tensões de compressão nas escoras de betão. Collins e Mitchell em 1980 [16] sugeriram esta aproximação. Devido à observação experimental de que o betão de recobrimento exterior à linha média de um varão transversal fechado (cinta) se destaca muitas vezes imediatamente antes da viga atingir a sua resistência última, considera-se esta camada de betão como sendo não efectiva na determinação do bloco equivalente das tensões de compressão. Embora apresente um aspecto científico, esta terceira aproximação é bastante empírica devido à hipótese grosseira de se desprezar o betão de recobrimento.

Nas três aproximações referidas anteriormente, foi necessário assumir uma hipótese arbitrária para aproximar a teoria de Rausch aos resultados experimentais. Outra consideração a ter em conta, é o facto de Collins e Mitchell na formulação para o cálculo da profundidade do bloco equivalente das tensões de compressão consideram a resistência integral do betão à compressão uniaxial medida em provetes cilíndricos padrão. Desta forma constitui um erro uma vez que a resistência das escoras de betão é bastante reduzida pela existência de extensões transversais de tracção (fissuração diagonal), como é referido por Hsu e Mo em 1985 [33]. Este fenómeno é designado por *softening effect*. Por todos os pontos apresentados, a terceira aproximação foi, em geral, abandonada em detrimento das duas primeiras.

2.2.3.3. O Modelo de Treliza com Ângulo Variável

2.2.3.3.1. Considerações Gerais

No final da secção 2.2.3.2 foram referidas as duas aproximações que contribuíram para o melhoramento da equação de Rausch. A primeira assumia que a armadura era somente parcialmente eficiente. A segunda aproximação, que consistiu em reduzir a área A da equação de Rausch para o cálculo da resistência à torção (Figura 2.5), assumia que a linha média do fluxo de corte coincide com as linhas que ligam os centros das barras longitudinais.

Apesar de estas aproximações terem sido posteriormente adoptadas por alguns códigos de dimensionamento, eram consideradas deficientes em dois aspectos. Primeiro, eram unicamente aplicáveis para o tipo de estruturas para as quais foram feitas as calibrações. Segundo aspecto, os métodos empíricos de modificação são teoricamente não satisfatórios uma vez que há dificuldade em extrapolar ou generalizar estas modificações. Assim, era necessário um método teórico para unificar o dimensionamento à torção para vigas com pequenas secções (edifícios) e grandes secções (pontes) assim como para vigas pré-esforçadas.

Hsu e Mo em 1985 [33] [31] apresentaram o modelo teórico que tinha por objetivo unificar o dimensionamento à torção. Este modelo é designado por modelo de treliza com ângulo

variável e é complementado com a influência das extensões transversais (fissuração diagonal) no comportamento da resistência à compressão do betão nas escoras. Esta teoria é o resultado dos desenvolvimentos sucessivos por vários autores do modelo de treliça inicial de Rausch.

As etapas mais importantes que conduziram ao desenvolvimento do modelo de treliça com ângulo variável são apresentadas de seguida de forma sucinta.

2.2.3.3.2. Notas Históricas

Hsu em 1973 [25] estudou as condições de compatibilidade do modelo de treliça espacial a 45° de Rausch. Tendo por base essas condições de compatibilidade somando às equações de equilíbrio de Rausch, Hsu derivou o módulo de distorção e a rigidez de torção após a fissuração para uma viga de betão armado sujeita à torção.

O modelo de treliça a 45° foi difundido por Lampert e Thurlimann em 1969 [37] para vigas sujeitas à torção. Estes autores assumiram duas condições: o ângulo de inclinação das escoras de betão podia desviar-se de 45° e que a teoria da plasticidade seria aplicável aos elementos de betão armado. Desta forma, os autores citados anteriormente puderam explicar o facto de que ambas as armaduras de torção (longitudinal e transversal) podiam entrar em cedência mesmo se estas não respeitassem o princípio da igualdade de volume¹. Este fenómeno foi observado em vários ensaios experimentais. Devido ao facto de o ângulo das escoras de betão poder se afastar de 45° , Lampert e Thurlimann designaram a sua teoria de Modelo de Treliça com Ângulo Variável. Resultou a derivação de três equações de equilíbrio que incorporaram o tal ângulo variável das escoras de betão. Na análise de um determinado elemento, o ângulo das escoras de betão é determinado pela magnitude das forças de cedência nas armaduras transversais e longitudinais. Contudo, no âmbito do processo de dimensionamento, este ângulo pode ser arbitrariamente escolhido para se alcançar a máxima economia na selecção da armadura transversal e longitudinal. Esta escolha arbitrária do ângulo, no entanto, tem de garantir as verificações em serviço.

Lampert e Thurlimann em 1969 [37], aquando do estudo da deformação de vigas sujeitas à torção, observaram que as superfícies inicialmente planas das vigas transformavam-se numa superfície hiperbólica após a viga se deformar por torção. Assim, uma escora diagonal de betão devia estar sujeita à flexão em adição à compressão. Os referidos autores derivaram duas condições de compatibilidade a partir da geometria, uma relacionando a curvatura de flexão da escora de betão com o ângulo de torção da viga e outra relacionando a mesma curvatura com a extensão máxima de compressão à superfície da referida escora.

¹ O Princípio da Igualdade de Volume significa que o “volume” de toda a armadura longitudinal com espaçamento s deve ser igual ao “volume” de uma cinta transversal completa.

O modelo de treliça com ângulo variável foi posteriormente estudado por Elfgren em 1972 [23]. Este autor observou semelhanças entre a teoria do modelo de treliça com ângulo variável e a teoria do campo de tracções exposto por Wagner em 1929 [45] para uma viga constituída por um perfil metálico de alma fina. Uma viga metálica comporta-se como uma treliça com a alma a absorver apenas tensões de tracção na direcção diagonal após ocorrer a encurvadura da alma por corte. No caso de uma viga de betão armado, após ocorrer a fissuração, a alma de betão absorve unicamente tensões de compressão. Elfgren designou à sua teoria de Teoria do Campo de Tensões de Compressão. Esta teoria é assente no modelo de treliça de ângulo variável assumindo que o ângulo de inclinação das fissuras é análogo ao ângulo de inclinação do campo de compressões. A equação derivada por Elfgren para determinar o ângulo do campo de tensões de compressão foi baseada na teoria da plasticidade enquanto a equação derivada por Wagner para determinar o ângulo do campo de tensões de tracção foi baseada na compatibilidade de deformações. Elfgren também reconheceu que o ângulo do campo de compressões é diferente do ângulo real formado pelas fissuras.

De uma forma geral, a Teoria da Plasticidade do Campo de Tensões de Compressão é a designação dada à teoria de Lampert e Thurlimann e à teoria de Elfgren, porque tais tensões são baseadas na teoria da plasticidade.

O modelo de treliça com ângulo variável foi posteriormente desenvolvido por Collins a partir de 1973 [15] mas de forma diferente. Este autor orientou o seu estudo na compatibilidade de deformações do modelo de treliça em vez de utilizar a teoria da plasticidade. Collins derivou uma equação de compatibilidade idêntica à de Wagner. Esta equação de compatibilidade permitia determinar o ângulo do campo de tensões de compressão e prever as condições de deformação utilizando o círculo de Mohr. A teoria de Collins foi designada de Teoria do Campo Diagonal de Compressões.

É necessário assumir a Curva $\sigma - \epsilon$ para caracterizar o comportamento do betão à compressão nas escoras para além das equações de compatibilidade e das equações de equilíbrio no modelo de treliça de ângulo variável. Inicialmente a Curva $\sigma - \epsilon$ convencional assumida, curva esta obtida a partir do ensaio à compressão de provetes cilíndricos padrão, previa um valor bastante não conservativo para a resistência à torção. Assim, Hsu e Mo em 1985 [33] [31] utilizando uma Curva $\sigma - \epsilon$ que tem em conta o *softening effect* conseguiram boas previsões da resistência à torção bem como da respectiva deformação. O fenómeno do *softening effect* é a influência do corte nas escoras de betão provocando fissuração diagonal e diminuindo a resistência à compressão do betão, ou seja, é a influência das extensões transversais de tracção no comportamento do betão à compressão nas escoras.

De uma forma geral, a teoria de Collins e a teoria de Hsu e Mo podem ser chamadas de Teorias da Compatibilidade do Campo de Compressões porque utilizam a compatibilidade de deformações do modelo de treliça.

Conjuntamente, Collins e Mitchell em 1980 [16], tentaram apresentar algumas recomendações para o dimensionamento à torção utilizando a teoria de compatibilidade do campo de compressões.

2.2.3.3.3. Vantagens e Hipóteses do Modelo de Treliça com Ângulo Variável

O modelo de treliça com ângulo variável e a teoria do campo de compressões apresentam algumas vantagens para o caso de vigas sujeitas à torção pura e estão resumidas da seguinte forma:

1. A teoria fornece um conceito claro de como uma viga de betão armado se comporta em termos de resistência à torção pura na fase pós-fissuração, de forma análoga do que acontece com o esforço transversal;
2. O efeito de pré-esforço pode ser incluído de uma forma lógica;
3. A teoria tem como vantagem em relação à teoria da flexão enviesada de Hsu permitir a previsão da deformação de um elemento ao longo do historial da carga. A teoria da flexão enviesada de Hsu apenas fornece a carga última.
4. Os resultados obtidos com a teoria são de uma precisão aceitável quando comparados com os resultados de ensaios experimentais.

Para o caso da torção pura, as disposições regulamentares para o dimensionamento baseadas no modelo de treliça com ângulo variável têm a vantagem de serem aplicáveis a vigas com secções irregulares, mesmo sem componentes rectangulares. Esta vantagem é em relação à teoria da flexão enviesada.

As hipóteses em que o modelo de treliça com ângulo variável e a teoria do campo de compressões se baseiam são as seguintes:

1. O modelo de treliça é constituído por varões de aço longitudinais e transversais e escoras diagonais de betão com um ângulo α ;
2. As escoras diagonais de betão suportam a tensão principal de compressão enquanto que a resistência ao corte das mesmas é desprezada;
3. Nas barras longitudinais e transversais o “efeito ferrolho” é desprezado, ou seja, suportam apenas tracção axial;
4. A resistência à tracção do betão não é considerada;

5. Para o caso de uma secção cheia sujeita à torção, o núcleo de betão não contribui para a resistência à torção.

2.2.3.3.4. Análise de uma Viga com Base no Modelo de Treliça Plana

Com base na teoria do modelo de treliça com ângulo variável podem ser derivadas as equações de equilíbrio para a torção. No entanto, é necessário compreender primeiro a aplicação do modelo de treliça ao caso do problema do esforço transversal em vigas.

Encontra-se ilustrado na Figura 2.7 (a) uma viga de betão armado simplesmente apoiada sujeita a uma força concentrada a meio vão. Considere-se que a viga se encontra em equilíbrio e está sujeita à acção combinada do esforço transversal e da flexão. No modelo de treliça ilustrado, é assumido que toda a armadura longitudinal da viga está concentrada na corda superior e inferior. A distância entre estas duas cordas, d_v , cuja área total numa secção é assumida estar concentrada somente num único varão, pode ser também considerada como o comprimento das barras verticais.

Considerando-se as secções de corte I - I e II - II, é possível isolar um elemento de viga A de comprimento $d_v \cotg \alpha$ e sujeito aos esforços indicados na Figura 2.7 (a). Este elemento de viga A está sujeito a um esforço transversal V e a um momento flector M na face esquerda. Na face direita, o elemento está sujeito ao mesmo esforço transversal mas o momento flector sofre um incremento de $V d_v \cotg \alpha$. A Figura 2.7 (b) ilustra o equilíbrio do elemento de viga A. Observando o triângulo de forças ilustrado na Figura 2.7 (b), a força de corte V que actua na face esquerda, pode ser decomposta em duas forças, \bar{N} e D . A componente \bar{N} é absorvida pela armadura longitudinal sendo repartida igualmente entre a armadura superior e inferior, cada uma delas absorvendo $\bar{N}/2 = (V \cdot \cotg(\alpha)) / 2$. A componente D é absorvida pelas diagonais de betão.

$$\bar{N} = V \cotg \alpha \quad (2.3)$$

$$D = \frac{V}{\sen \alpha} \quad (2.4)$$

A tensão nas escoras diagonais de betão, σ_d , pode ser obtida a partir da equação 2.4 e se se observar que D actua numa distância $d_v \cos \alpha$:

$$\sigma_d = \frac{D}{t d_v \cos \alpha} = \frac{V}{t d_v \sen \alpha \cos \alpha} \quad (2.5)$$

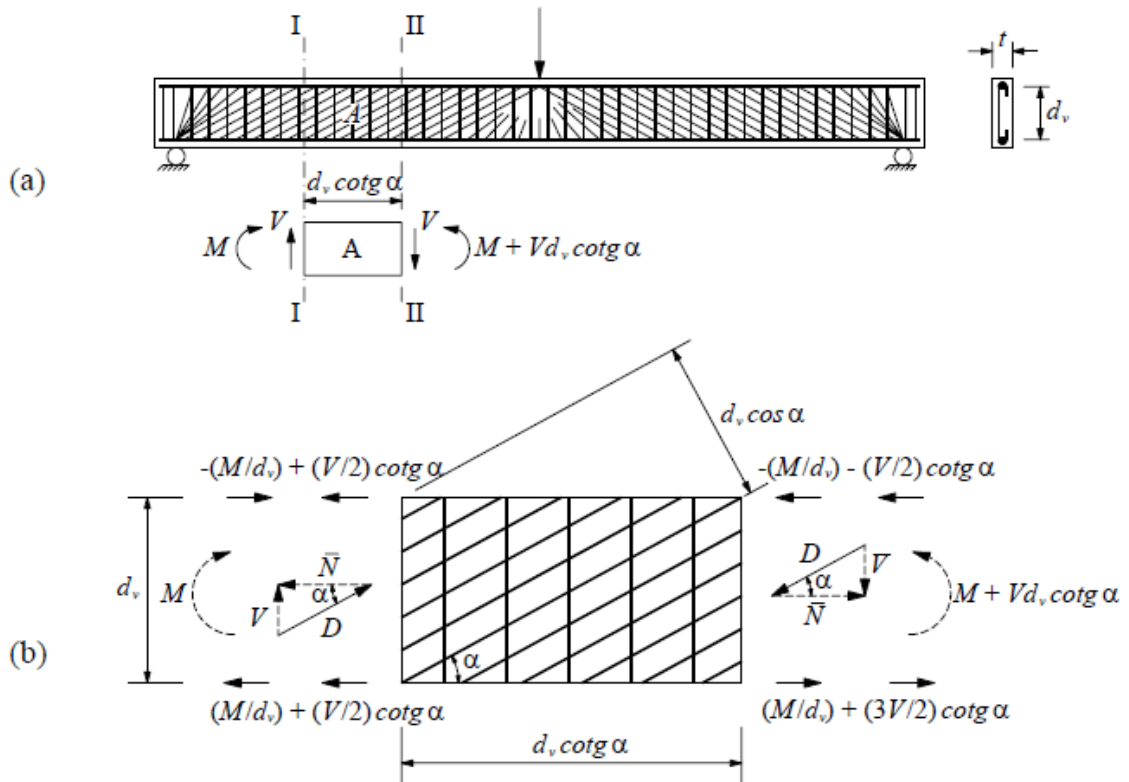


Figura 2.7 – Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana [9]

A componente $\bar{N}/2$ é provocada pela força de corte V na corda superior e inferior. Em adição à força $\bar{N}/2$, a força na armadura longitudinal na face esquerda é também provocada pelo momento M . A força na armadura superior e inferior devida ao momento é $\pm M/d_v$. Somando estas duas contribuições, as forças na corda superior e inferior, N_t e N_b , respectivamente, são:

$$N_t = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cotg \alpha \quad (2.6)$$

$$N_b = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cotg \alpha \quad (2.7)$$

Em relação à face direita do elemento de viga, o momento é $M + V d_v \cotg \alpha$. Consequentemente, as forças na corda superior e inferior, na face direita, são:

$$N_t = -\frac{M + V d_v \cotg \alpha}{d_v} + \frac{V}{2} \cotg \alpha = -\frac{M}{d_v} - \frac{V}{2} \cotg \alpha \quad (2.8)$$

$$N_b = + \frac{M + V d_v \cotg \alpha}{d_v} + \frac{V}{2} \cotg \alpha = + \frac{M}{d_v} + \frac{3V}{2} \cotg \alpha \quad (2.9)$$

Por forma a isolar um corpo livre rectangular como ilustrado na Figura 2.8, efectua-se um corte horizontal através do elemento de viga A e a uma distância arbitrária y a partir da face inferior. Desta forma pode ser obtida a força na armadura transversal. O equilíbrio horizontal do corpo livre é mantido por uma força horizontal $V \cotg \alpha$ na superfície de corte. Esta força horizontal pode ser decomposta em duas forças, D e $n_v d_v \cotg \alpha$, como representado pelo triângulo de forças superior na Figura 2.8. Esta última é a força na armadura transversal por unidade de comprimento, n_v , e actua num comprimento longitudinal $d_v \cotg \alpha$. A componente D , é a força diagonal que actua nas escoras de betão. A partir do referido triângulo de forças superior (Figura 2.8) vem:

$$n_v d_v = V \operatorname{tg} \alpha \quad (2.10)$$

Definindo $n_v = A_v f_v / s$ na equação anterior, fica:

$$A_s f_s = V \frac{s}{d_v} \operatorname{tg} \alpha \quad (2.11)$$

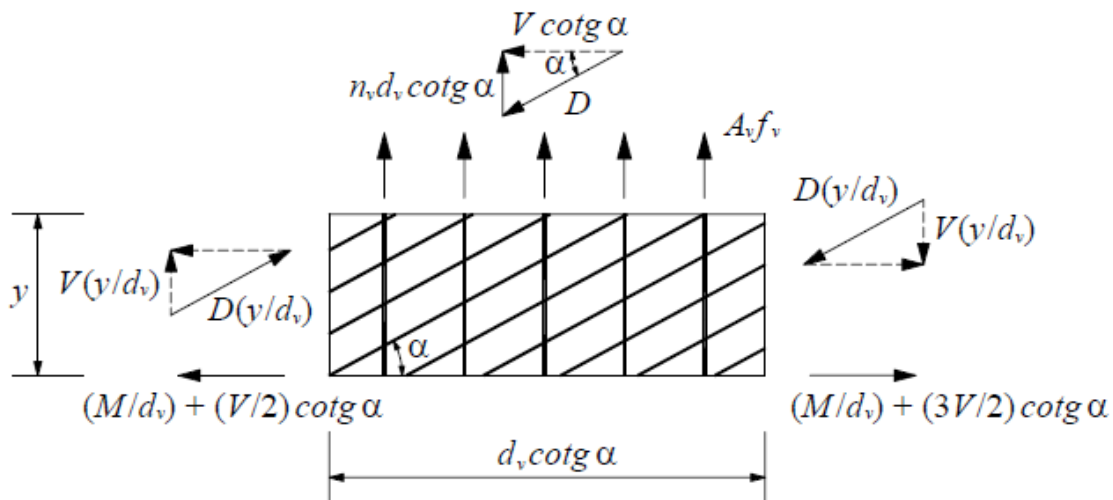


Figura 2.8 - Equilíbrio de um corpo livre rectangular [9]

2.2.3.3.5. Vigas com Secção Vazada Sujeitas à Torção Pura

A analogia da treliça espacial de Rausch, descrita na secção 2.2.3.2, postula que quando um momento torsor é aplicado num elemento de betão armado em estado fissurado, o betão fica separado em bielas inclinadas através de fissuras diagonais. Este autor assumiu que as bielas de betão interagem com a armadura longitudinal e transversal formando assim uma treliça espacial que resiste ao momento torsor externo aplicado. Em relação às referidas bielas de

betão, Rausch assumiu que estas tinham uma inclinação de 45° , resultando esta hipótese de uma exigência da relação definida entre a quantidade de armadura longitudinal e transversal. Para o caso da torção pura, esta relação definida implica uma igualdade entre o volume de armadura longitudinal em relação à transversal. No entanto, ensaios experimentais vieram posteriormente mostrar que as armaduras longitudinal e transversal podiam entrar em cedência para um determinado intervalo da relação entre a quantidade de armaduras (longitudinal e transversal). Para explicar este facto assumia-se que as bielas de betão podiam estar inclinadas com ângulo variável, α . Este ângulo α não é necessariamente igual a 45° e encontra-se orientado pela relação real entre o volume de armadura longitudinal em relação à transversal.

Na Figura 2.9 está ilustrado um modelo de treliça espacial com ângulo variável para uma viga com secção rectangular vazada sujeita à torção pura. A viga é armada com quatro barras de canto idênticas e cintas espaçadas uniformemente.

Numa secção transversal (Figura 2.9 (a)), podem ser observados dois tipos de forças: as forças nas barras longitudinais de canto e as forças nas escoras diagonais de betão inclinadas com um ângulo α em relação ao eixo longitudinal da viga. A resultante destes dois tipos de forças constitui o fluxo de corte q no plano da secção transversal.

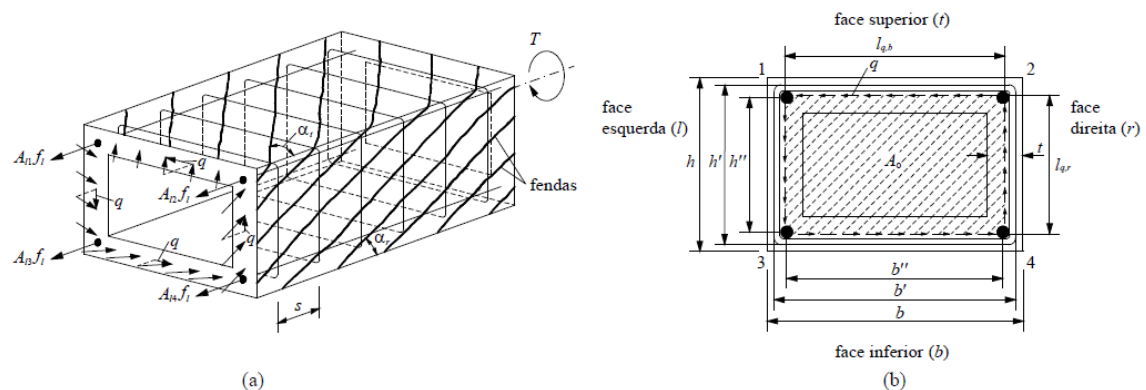


Figura 2.9 - Viga com secção rectangular vazada sujeita à torção pura [9]

A viga em caixão representada nas Figuras 2.9 (a) e 2.9 (b) pode ser assimilada a um tubo a resistir ao momento torsor, pelo que é aplicável a teoria do tubo com parede fina de Bredt. Devido ao momento torsor aplicado desenvolve-se nas paredes da secção em caixão um fluxo constante circulatório de corte q . Aplicando a equação de Rausch ($\tau = T/(2Ah)$), resultante do equilíbrio de momentos em torno do eixo longitudinal, vem:

$$q = \frac{T}{2A_0} \quad (2.12)$$

O parâmetro A_0 é a área limitada pela linha média do fluxo de corte (Figura 2.9 (b)). Esta área é assumida como coincidindo com a linha média da parede com espessura t .

O efeito de uma força de corte que actua numa parede recta de uma viga com secção vazada é idêntico ao de uma força de corte a actuar num elemento (alma) de uma viga corrente (Figura 2.7). O comprimento transversal do elemento da viga em caixão é l_q (Figura 2.9) e reporta-se à porção recta da linha média do fluxo de corte q . A força de corte na parede recta é assim igual a $V = ql_q$ e a força longitudinal na armadura pode ser obtida a partir da equação 2.3:

$$\bar{N} = ql_q \cotg \alpha \quad (2.13)$$

A força total nas barras longitudinais da secção em caixão é definida como $\Delta N = A_l f_l$, em que A_l e f_l representam a área total e a tensão da armadura longitudinal, respectivamente. Então:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = qp_0 \cotg \alpha \quad (2.14)$$

Aplicando a definição $p_0 = \sum l_q$ como sendo o perímetro da linha média do fluxo de corte e substituindo q da equação 2.12 na equação anterior, vem:

$$\Delta N = A_l f_l = \frac{Tp_0}{2A_0} \cotg \alpha \quad (2.15)$$

Com base na expressão $q = V/d_v$, a força em cada ramo transversal da cinta pode ser derivada, de forma semelhante, a partir da equação 2.11:

$$A_t f_t = qstg \alpha \quad (2.16)$$

Os parâmetros A_t e f_t representam a área e a tensão de uma barra transversal, respectivamente.

Introduzindo q da equação 2.12 na equação 2.16 vem:

$$A_t f_t = \frac{T_s}{2A_0} tg \alpha \quad (2.17)$$

Partindo da Equação 2.5 pode ser obtida a tensão na escora diagonal de betão:

$$\sigma_d = \frac{q}{t \sen \alpha \cos \alpha} \quad (2.18)$$

Substituindo na Equação 2.18 o q pela Equação 2.12, fica:

$$\sigma_d = \frac{T}{2A_0 t \sen \alpha \cos \alpha} \quad (2.19)$$

As quatro equações básicas de equilíbrio para a torção na teoria do modelo de treliça com ângulo variável são constituídas pelas equações 2.12, 2.15, 2.17 e 2.19.

No caso da cedência de ambas as armaduras longitudinal e transversal, isto é, $\Delta N = \Delta N_y f_t = f_{ty}$ e $T = T_y$, as equações 2.15 e 2.17 ficam:

$$\Delta N_y = \frac{T_y p_0}{2A_0} \cotg \alpha \quad (2.20)$$

$$A_t f_{ty} = \frac{T_y s}{2A_0} \tg \alpha \quad (2.21)$$

Com a eliminação de T_y nas duas equações anteriores resulta:

$$\tg \alpha = \sqrt{\frac{A_t f_{ty} p_0}{\Delta N_y s}} \quad (2.22)$$

De forma análoga, eliminando α nas equações 2.20 e 2.21 vem:

$$T_y = 2A_0 \sqrt{\frac{\Delta N_y A_t f_{ty}}{p_0 s}} \quad (2.23)$$

Para secções rectangulares em caixão com armadura longitudinal simétrica, tem-se:

- áreas: $A_{i1} = A_{i2} = A_{i3} = A_{i4} = A_i$;

- forças de cedência: $N_{1y} = N_{2y} = N_{3y} = N_{4y} = A_i f_{iy}$.

Os índices 1, 2, 3 e 4 referem-se aos cantos ilustrados na Figura 2.9 (b). A força resultante longitudinal devido à torção, ΔN_y , vem:

$$\Delta N_y = 4A_i f_{iy} \quad (2.24)$$

O texto exposto ao longo desta secção apenas fez referência ao caso da secção rectangular oca por duas razões. Primeiro, o tipo de secção transversal mais usado são as secções rectangulares. Segundo, foi demonstrado por Hsu em 1968 [27] que a resistência última de uma secção cheia é semelhante à de uma secção vazada com as mesmas características: dimensões exteriores, material e disposição/pormenorização das armaduras. Isto corresponde a considerar que o núcleo de betão não é efectivo quando a rotura está eminente, sendo o momento torsor externo suportado principalmente pela casca exterior do elemento. Refere-se que o apresentado ao longo desta secção também é válido para secções rectangulares cheias.

2.2.3.3.6. Flexão das Escoras de Betão

Quando é aplicado numa viga um momento torsor, as escoras de betão não ficam sujeitas apenas a um esforço axial mas também a um momento flector devido à deformação da viga.

Lampert e Thurlimann em 1969 [37] foram os primeiros a observar este fenómeno de flexão. As tensões e extensões induzidas pela flexão devem ser sobrepostas às tensões e extensões induzidas pelo esforço axial.

Na Figura 2.10 (b) está representada a geometria resultante da flexão de uma escora de betão. Considere-se a parede superior da viga com secção vazada sujeita à torção (Figura 2.10 (a)) onde se encontra representada uma superfície plana OABC da parede de topo localizada ao nível médio do fluxo de corte q . O sistema coordenado imposto é constituído pelo eixo x na direcção longitudinal, o eixo y na direcção transversal e a origem O é fixada no canto mais afastado do lado esquerdo. A linha diagonal OB (Figura 2.10 (b)) representa uma escora de betão com um ângulo de inclinação α em relação à direcção longitudinal (eixo x).

A superfície plana OABC encontra-se isolada na Figura 2.10 (b). Quando se impõe um ângulo de torção θ (por unidade de comprimento) à viga em caixão, o lado CB roda para a posição CD com um ângulo $\theta l_q \cotg \alpha$. Gera-se assim a nova superfície OADC que é um parabolóide hiperbólico e a escora de betão OD fica curva. Para derivar a curvatura da escora de betão, a superfície parabólica hiperbólica é primeiramente expressa pela seguinte equação:

$$w = \theta xy \quad (2.25)$$

O parâmetro w representa o deslocamento perpendicular ao plano $x - y$. Na figura 2.10 (b), o eixo s está definido ao longo da direcção da escora diagonal de betão.

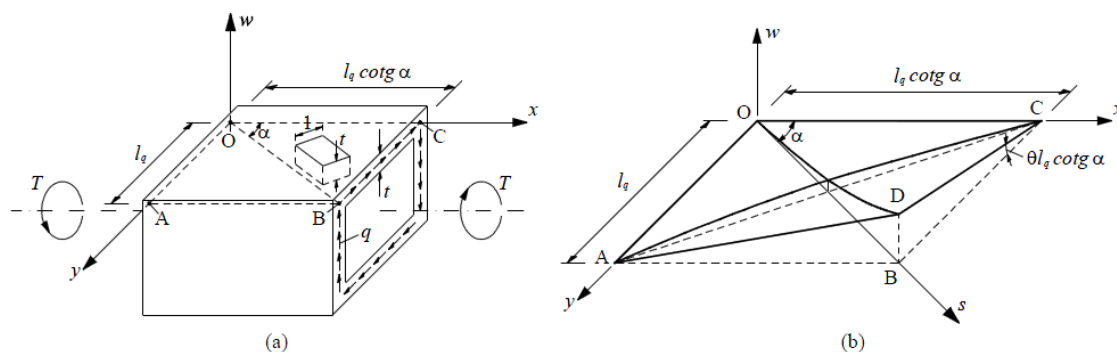


Figura 2.10 - Flexão de uma escora de betão na parede de uma viga em caixão sujeita à torção [9]

Derivando a Equação 2.25 em relação a s na direcção da escora diagonal de betão, obtém-se a inclinação da escora de betão, dw/ds :

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds} = (\theta x) \cos \alpha + (\theta y) \sen \alpha \quad (2.26)$$

A curvatura da escora de betão, ψ , é a segunda derivada de w em relação a s :

$$\psi = \frac{d^2w}{ds^2} = (\theta \operatorname{sen} \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha = \theta \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2.27)$$

A equação anterior relaciona a curvatura da escora, ψ , com o ângulo de torção da viga, θ .

Considere-se uma secção da escora de betão, com largura unitária, isolada a partir da parede superior, como ilustrada na Figura 2.10 (a) e na Figura 2.11. A espessura total da parede é designada por t . No entanto, numa determinada área junto à face inferior podem ocorrer tracções devido à flexão das escoras de betão. Esta área da escora nestas condições deve ser desprezada no cálculo. A área em compressão de profundidade t_d será considerada como sendo efectiva. Assumindo uma distribuição das extensões dentro da profundidade efectiva, t_d , como linear, então a extensão máxima de compressão à superfície, ε_{ds} , é (Figura 2.11):

$$\varepsilon_{ds} = \psi t_d \quad (2.28)$$

A Equação 2.28 relaciona a extensão máxima de compressão à superfície, ε_{ds} , com a curvatura da biela de betão, ψ . Em relação ao valor de t_d , este deve ser determinado a partir das condições de equilíbrio e das propriedades do bloco de tensões.

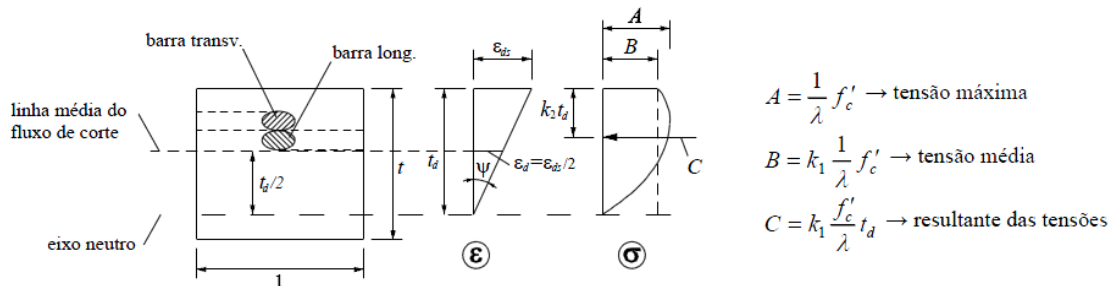


Figura 2.11 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão [4]

O parâmetro l representa a unidade de largura da escora de betão, ε o diagrama de extensões e σ o diagrama das tensões.

As duas equações básicas de compatibilidade para a flexão das bielas de betão devido à torção são constituídas pelas Equações 2.27 e 2.28.

Na Figura 2.11 considere-se a seguinte nota: a linha média do fluxo de corte é assumida como passando a meio da profundidade efectiva t_d e não tem de coincidir com a resultante das tensões de compressão.

2.2.3.3.7. Diagrama das Tensões de Compressão e Espessura Efectiva da Parede

O diagrama das tensões ao longo da profundidade efectiva t_d da parede da viga em caixão (escora de betão) sujeita à torção está representado na Figura 2.11. O referido diagrama é

baseado na Curva $\sigma - \epsilon$ para o betão comprimido tendo em conta o softening. A Curva $\sigma - \epsilon$ proposta por Vecchio e Collins em 1981 [44], ilustrada na Figura 2.12, permite uma melhor compreensão do procedimento usado tendo em conta o softening effect. Tal curva resultou do ensaio de placas ao corte e foi calibrada para a classe dos betões de resistência normal.

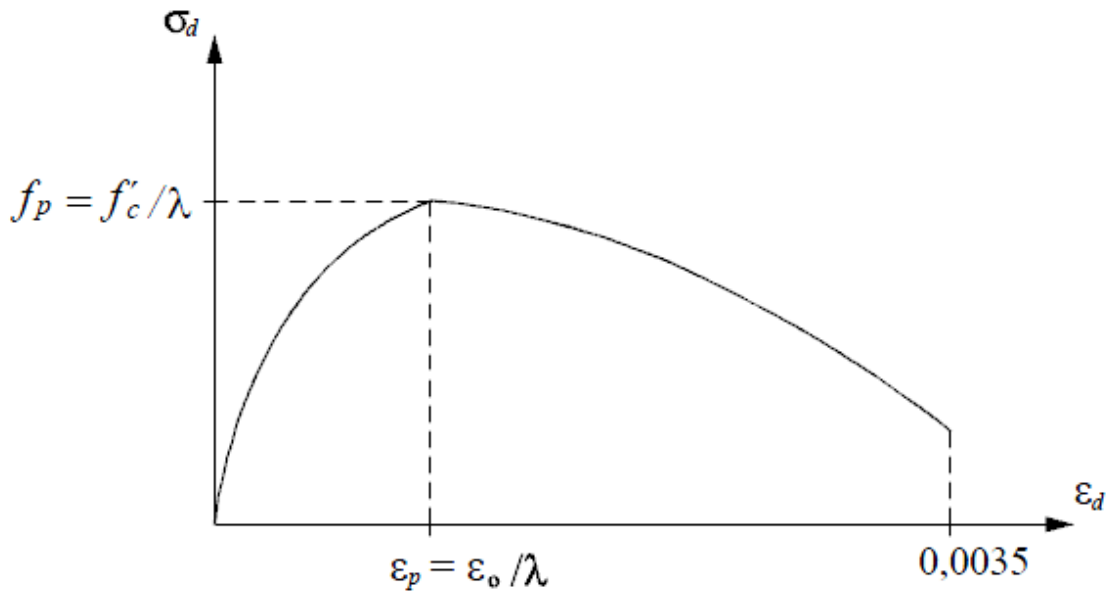


Figura 2.12 - Curva $\sigma - \epsilon$ para betão tendo em conta o softening effect [4]

A Curva $\sigma - \epsilon$ proposta por Vecchio e Collins onde o pico de resistência do betão no diagrama de tensões é f'_c / λ (Figura 2.12) é uma versão simplificada da originalmente proposta pelos mesmos autores.

A parte ascendente da Curva $\sigma - \epsilon$ do betão da Figura 2.12 para $\epsilon_d \leq \epsilon_p$ na direcção principal da compressão é caracterizada pela seguinte expressão:

$$\sigma_d = f'_c \left[2 \left(\frac{\epsilon_d}{\epsilon_0} \right) - \lambda \left(\frac{\epsilon_d}{\epsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.29)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma_m}{\epsilon_d} - \nu} \quad (2.30)$$

O parâmetro f'_c representa a resistência à compressão uniaxial do betão obtida em provetes cilíndricos padrão e ϵ_0 é a extensão correspondente ao pico de tensão f'_c . O parâmetro ν é o coeficiente de Poisson (considerado igual a 0,3 por constituir um valor comum observado nos ensaios de provetes cilíndricos de betão perto da rotura [26]), λ é um coeficiente empírico e γ_m é a distorção máxima num elemento da placa sujeita ao corte.

A Equação 2.29 rege uma curva que sofreu uma modificação da Curva $\sigma - \varepsilon$ parabólica comum utilizada na prática, em que o segundo termo, $(\varepsilon_d/\varepsilon_0)^2$, é afectado pelo coeficiente empírico λ .

A parte descendente da Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão tendo em conta o softening effect (Figura 2.12), ou seja, após o pico de resistência, para $\varepsilon_d > \varepsilon_p$, é expressa pela equação:

$$\sigma_d = f_p(1 - \eta^2) \quad (2.31)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_p}{2\varepsilon_0 - \varepsilon_p} \quad (2.32)$$

O coeficiente redutor $1/\lambda$ traduz o efeito do softening effect do betão devido à fissuração diagonal. O referido coeficiente reduz a resistência do betão comprimido nas escoras a partir do valor padrão f'_c para $\sigma_p = f'_c/\lambda$, bem como a extensão correspondente ε_0 para $\varepsilon_p = \varepsilon_0/\lambda$ (Figura 2.12).

O coeficiente λ é dado pela Equação 2.30 e o seu valor é pouco sensível ao coeficiente de Poisson, ν . Se ν for desprezado então a Equação 2.30 fica:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma_m}{\varepsilon_d}} \quad (2.33)$$

Tendo em conta que $\tan^2 \alpha = (\varepsilon_l + \varepsilon_d)/(\varepsilon_t + \varepsilon_d)$ e $\gamma_m = \varepsilon_l + \varepsilon_t + \varepsilon_d$, em que ε_l , ε_t e ε_d representam, respectivamente, a extensão na direcção longitudinal, transversal e diagonal da placa, a Equação 2.30 pode ser escrita como:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\varepsilon_t + \varepsilon_d}}{\sqrt{\varepsilon_d} \cos \alpha} \quad (2.34)$$

A tensão média do diagrama de tensões de compressão na escora, B , pode ser expressa como $k_1 f'_c/\lambda$ (Figura 2.11), em que k_1 é dado pelo quociente entre a tensão média e o pico de tensão. Assim, para calcular a resultante do diagrama de tensões C , é necessário conhecer o coeficiente k_1 . A referida resultante C para uma escora de betão com largura unitária é:

$$C = k_1 \frac{f'_c}{\lambda} t_d \quad (2.35)$$

Para calcular a localização da resultante C , que pode ser definida pela distância $k_2 t_d$ a partir da fibra extrema à compressão, é necessário conhecer o coeficiente k_2 . Tal coeficiente k_2 é dado pelo quociente entre a distância da resultante C à fibra extrema à compressão e a profundidade do diagrama de tensões de compressão t_d (Figura 2.11).

Hognestad et al. em 1955 [24] a partir de ensaios à flexão de betão não afectado pela fissuração diagonal determinaram os coeficientes k_1 e k_2 . Os referidos autores mostraram que os coeficientes k_1 e k_2 eram função de f'_c , tomado em unidades *psi* (1 MPa = 145 *psi*):

$$k_1 = 0,94 - \frac{f'_c}{26000} \quad (2.36)$$

$$k_2 = 0,50 - \frac{f'_c}{80000} \quad (2.37)$$

O coeficiente k_1 para o betão, tendo em conta o *softening effect*, pode ser calculado integrando as Equações (2.29) e (2.31) que regem a Curva $\sigma - \epsilon$ do betão. Hsu e Mo em 1985 [33][31] obtiveram matematicamente as seguintes expressões para o coeficiente k_1 , em que $\epsilon_p = \epsilon_0/\lambda$:

$$k_1 = \lambda \frac{\epsilon_{ds}}{\epsilon_0} - \frac{\lambda^2}{3} \left(\frac{\epsilon_{ds}}{\epsilon_0} \right)^2 \quad (2.38)$$

para $\epsilon_{ds} \leq \epsilon_0/\lambda$

$$k_1 = \left(1 - \frac{1}{(2\lambda - 1)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{ds}} \right) + \frac{1}{(2\lambda - 1)^2} \frac{\epsilon_{ds}}{\epsilon_p} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{ds}}{\epsilon_p} \right) \quad (2.39)$$

para $\epsilon_{ds} > \epsilon_0/\lambda$

O coeficiente k_1 encontra-se tabelado no Tabela 2.1 em função de $1/\lambda$ e ϵ_{ds} assumindo que $\epsilon_0 = 0,002$.

Tabela 2.1 - Coeficiente k_1 em função de $1/\lambda$ e ϵ_{ds} ($\epsilon_0 = 0,002$) [9]

$\epsilon_{ds} \backslash 1/\lambda$	0,005	0,001	0,0015	0,002	0,0025	0,003	0,0035
0,10	0,8654	0,9215	0,9218	0,8994	0,8610	0,8089	0,7439
0,20	0,7333	0,8611	0,8883	0,8806	0,8513	0,8048	0,7429
0,30	0,6018	0,7980	0,8526	0,8604	0,8409	0,8005	0,7419
0,40	0,4948	0,7331	0,8147	0,8385	0,8294	0,7956	0,7407
0,50	0,4167	0,6667	0,7747	0,8148	0,8167	0,7901	0,7394
0,60	0,3588	0,6019	0,7325	0,7891	0,8026	0,7840	0,7379
0,70	0,3146	0,5442	0,6889	0,7613	0,7870	0,7771	0,7362
0,80	0,2799	0,4948	0,6445	0,7314	0,7698	0,7693	0,7342
0,90	0,2521	0,4527	0,6018	0,6997	0,7506	0,7603	0,7319
1,00	0,2292	0,4167	0,5625	0,6667	0,7292	0,7500	0,7292

No momento em que a viga atinge a rotura, a profundidade do diagrama de tensões de compressão pode ser obtida a partir da Equação 2.19, tendo em conta que $t = t_d$, $\sigma_d = k_1 f'_c / \lambda$ e $T = T_n$:

$$t_d = \frac{T_n}{2A_0(k_1 f'_c / \lambda) \text{sen } \alpha \cos \alpha} \quad (2.40)$$

A linha média do fluxo de corte é assumida que se encontra a meia profundidade do diagrama de tensões (Figura 2.11). Consequentemente, o perímetro da linha média do fluxo de corte, p_o , e a área limitada pela mesma linha média, A_0 , podem ser obtidos por:

$$p_o = p_c - 4t_d \quad (2.41)$$

$$A_0 = A_c - (t_d/2)p_c \quad (2.42)$$

Os parâmetros p_c e A_c representam, respectivamente, o perímetro exterior da secção transversal de betão e a área da secção transversal limitada pelo perímetro exterior de betão. Substituindo a Equação (2.42) na Equação (2.40) e resolvendo em ordem a t_d , resulta:

$$t_d = \frac{A_c}{p_c} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{T_n p_c}{A_c^2} \right) \frac{1}{(k_1 f'_c / \lambda) \text{sen } \alpha \cos \alpha}} \right] \quad (2.43)$$

Na Equação (2.43) $k_1 f'_c / \lambda$ é a resistência efectiva do betão na parede de uma viga com secção em caixão sujeita à torção. Para elementos sujeitos à torção com pequena taxa de armadura, Hsu e Mo em 1985 [33] [31] através dos seus estudos, mostraram que a resistência efectiva do betão varia entre $0,3f'_c$ e $0,5f'_c$, com um valor médio de $0,4f'_c$.

2.3. Torção em Vigas de Betão Pré-esforçado

O pré-esforço aumenta a resistência à fissuração de um elemento de betão armado sujeito à flexão quando aplicado de forma racional. Nestes casos o pré-esforço induz uma tensão de compressão que contraria a tensão de tracção provocada pelo momento flector. A fissuração apenas ocorrerá quando a tensão de tracção devida à flexão excede a tensão de compressão devida ao pré-esforço.

O pré-esforço também incrementa a resistência à fissuração de um elemento de betão sujeito ao esforço transversal ou à torção. Tal situação deve-se ao facto de o pré-esforço induzir uma tensão de compressão que, em combinação com a tensão tangencial induzida pelo esforço transversal ou pelo momento torsor, resulta num estado de tensão biaxial (corte + compressão). A fissuração do betão é atrasada pelo estado de tensão biaxial. A armadura de pré-esforço, ao contribuir para os estados limites últimos, aumenta também a resistência última do elemento de betão armado.

2.3.1. Comportamento de Vigas sem Armadura Transversal à Torção

Em termos da avaliação da eficiência do pré-esforço no seu contributo de aumentar a resistência do momento torsor de fissuração de um elemento de betão armado, torna-se necessário estudar *à priori* o critério de rotura do betão em estado biaxial. Tendo como base o critério de rotura, é possível obter-se um simples factor de pré-esforço, que é definido como sendo a relação entre a resistência de um elemento pré-esforçado e a de um elemento sem pré-esforço. Este factor de pré-esforço pode ser obtido a partir da teoria elástica e plástica bem como a partir da teoria da flexão enviesada.

Para o caso de um elemento pré-esforçado sem armadura transversal, a fissuração devida à torção será logo seguida da rotura. Por conseguinte, o momento torsor de fissuração de um elemento pré-esforçado sem armadura transversal pode ser considerado como sendo a resistência última. O factor de pré-esforço é assim aplicável tanto ao momento torsor de fissuração como ao momento torsor resistente.

2.3.1.1. Critério de Rotura do Betão Sujeito a um Estado de Tensão Biaxial

Considere-se uma viga rectangular sujeita a um momento torsor, T , e a uma tensão de pré-esforço longitudinal, σ , na Figura 2.13 (a). Um elemento A isolado a meia altura da superfície lateral da viga encontra-se ilustrado na Figura 2.13 (b). Em cada uma das quatro faces, este elemento está sujeito a uma tensão tangencial, τ , devida à torção. O elemento A, em cada uma das faces verticais, está sujeito a uma tensão de compressão, σ , devido ao pré-esforço. O estado de tensão do mesmo elemento pode ser ilustrado através do círculo de Mohr num sistema de coordenadas $\sigma - \tau$, como ilustrado na Figura 2.13 (c).

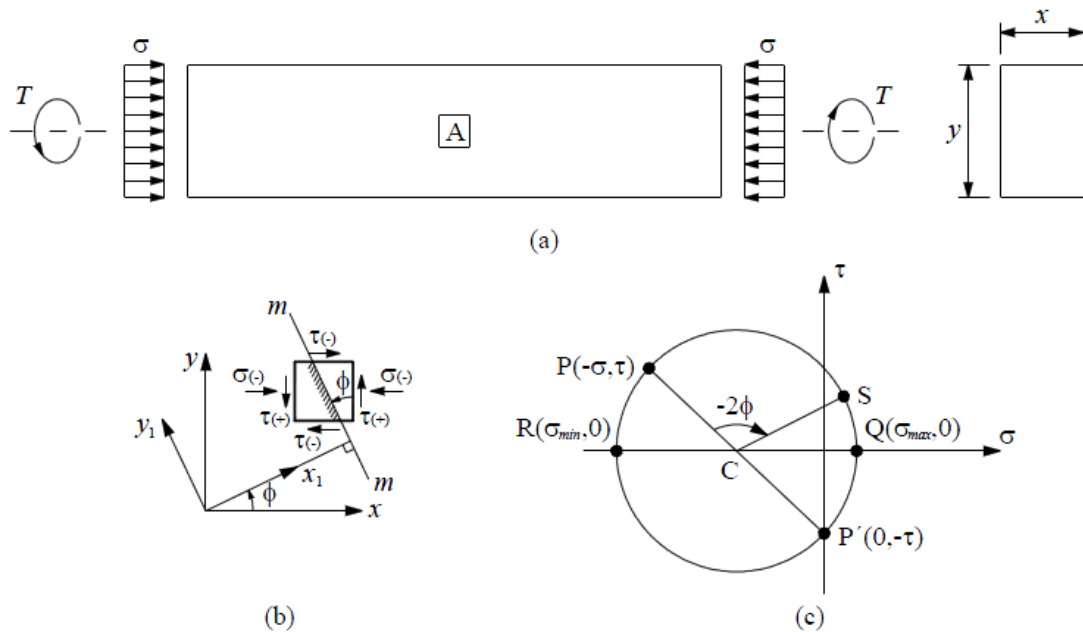


Figura 2.13 - Estado de tensão numa viga sujeita à torção e ao pré-esforço [9]

O Ponto P de coordenadas $(-\sigma ; \tau)$ ilustrado na Figura 2.13 (c) representa o estado de tensão numa face vertical do elemento A. Na mesma figura, o ponto P' de coordenadas $(0 ; -\tau)$ representa o estado de tensão na face horizontal, onde a tensão normal é zero e a tensão tangencial é convencionalmente considerada negativa para marcação na circunferência de Mohr (a convenção de sinais encontra-se explicada mais à frente). Unindo os pontos P e P' desenha-se o círculo de Mohr, constituindo a recta PP' o diâmetro do círculo. De acordo com o princípio da transformação de tensões, as tensões numa superfície arbitrária $m - m$ (Figura 2.13 (b)), que faz um ângulo ϕ medido no sentido contrário dos ponteiros do relógio em relação à superfície vertical, podem ser representadas pelas coordenadas do Ponto S. Este ponto é obtido rodando o raio CP do círculo de Mohr de um ângulo de -2ϕ . O referido ângulo possui sinal negativo na Figura 2.13 (c) o que indica que este ângulo é rodado no sentido oposto ao ângulo ϕ da Figura 2.13 (b).

Para a compreensão do círculo de Mohr torna-se necessário definir a convenção de sinais para as tensões. A convenção de sinais para as tensões nas faces verticais e horizontais do elemento A é determinado de acordo com os eixos coordenados $x_1 - y_1$, rodados de um ângulo ϕ a partir dos eixos $x - y$. Uma tensão que actua numa face cuja normal aponta para fora e aponta (a tensão) na direcção positiva de um eixo rodado é definida como uma tensão positiva. A normal referida é sempre tomada como o eixo positivo x_1 dos eixos coordenados rodados $x_1 - y_1$. Esta convenção de sinais é aplicável a ambas as tensões tangenciais nas duas faces verticais do elemento A que tomam o valor positivo (Figura 2.13 (b)). A mesma análise é aplicada para o estudo das tensões nas outras faces.

A rotura do elemento A ocorre quando as tensões biaxiais, actuando no elemento, atingem um valor crítico. A teoria de rotura de Mohr que define que a rotura ocorre devido ao deslizamento de um plano definido dentro do material é o critério de rotura mais amplamente aceite para o betão. No momento da rotura, a tensão tangencial e normal nesse plano, τ e σ , respectivamente, estão relacionadas por uma determinada função. Esta é designada por envolvente de rotura de Mohr e constitui uma característica do material (Figura 2.14):

$$\tau = F(\sigma) \quad (2.44)$$

A relação estabelecida pela Equação (2.44) encontra-se ilustrada na Figura 2.14. Esta relação pode ser obtida através de vários ensaios do betão até à rotura para vários estados biaxiais de tensão e desenhando os respectivos círculos de Mohr. Existem três tipos de ensaios mais utilizados, designadamente: ensaio de compressão uniaxial, ensaio de tracção uniaxial e ensaio de corte puro. Os círculos de Mohr para estes três estados estão representados na Figura 2.14 como C_1 , C_2 e C_3 , respectivamente. O círculo, desenhado com uma curva a tracejado na Figura 2.14, representa uma condição biaxial arbitrária de carga. Todos estes círculos de Mohr devem ser tangenciais à curva $\tau = F(\sigma)$. Assim, esta curva é também designada como a envolvente de rotura de Mohr.

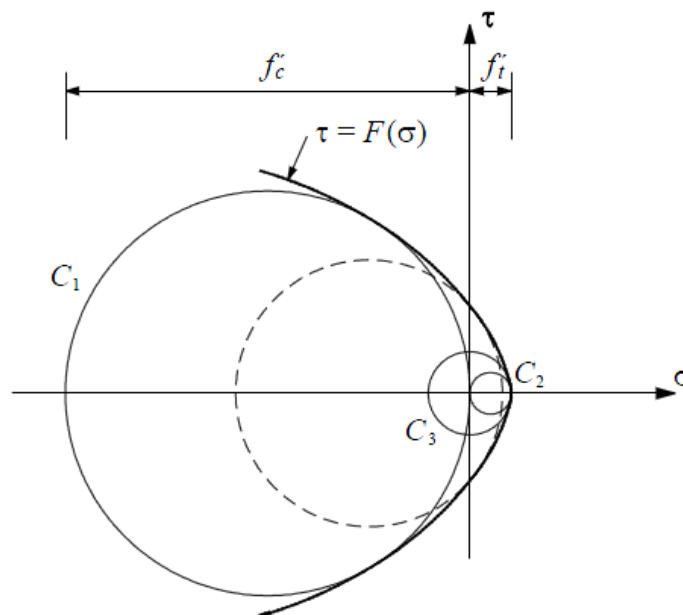


Figura 2.14 - Envolvente de rotura de Mohr [26]

Em relação à envolvente de rotura de Mohr foram realizadas várias tentativas para determiná-la e exprimi-la matematicamente. Todavia, esta relação curva é difícil de estabelecer e difícil de utilizar na prática. Consequentemente, foram propostas várias simplificações como é o caso do critério de rotura de Cowan de 1952 [18] para o betão. O referido critério é dos mais simples para utilizar e é bastante preciso no seu conceito. O

critério de rotura de Cowan encontra-se ilustrado na Figura 2.15, onde a envolvente de rotura de Mohr é traduzida, de uma forma simplificada, por duas linhas rectas BD e DE (considerando a simetria da envolvente de rotura).

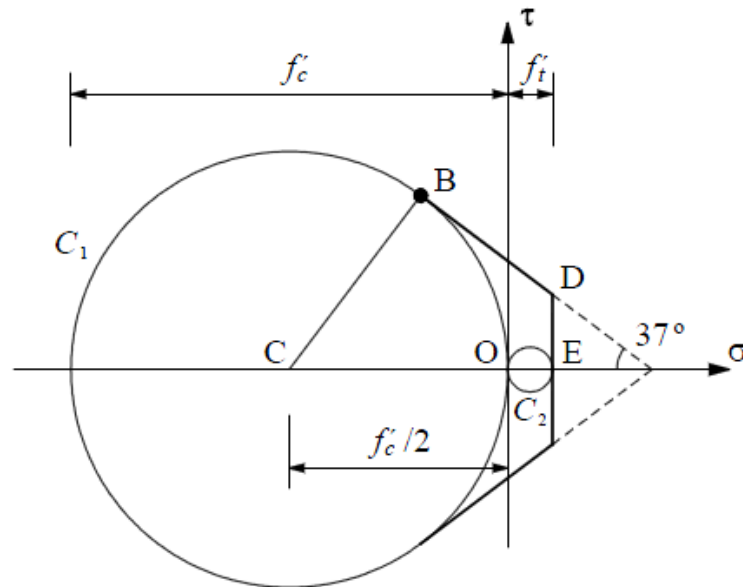


Figura 2.15 - Envolvente de rotura de Cowan [18]

A linha recta BD deriva do círculo de Mohr C_1 para a compressão uniaxial, sendo tangente a C_1 no ponto B. Foi assumido que esta recta forma um ângulo de 37° (ângulo de atrito interno) com o eixo horizontal. Este critério é conhecido como a Teoria do Atrito Interno e prepondera quando o betão entra em rotura primeiro por compressão. A linha vertical DE é tangencial ao círculo de Mohr C_2 para a tracção uniaxial. Este outro critério é conhecido como a Teoria da Tensão Máxima de Rotura e prevalece quando o betão entra em rotura primeiro por tracção.

Com base nos critérios expostos anteriormente, Cowan [18] derivou as seguintes duas equações que expressam, numa forma adimensional, a tensão tangencial devida à torção, τ , na rotura em função da tensão induzida pelo pré-esforço, σ :

$$\frac{\tau}{f'_c} = \sqrt{0,0396 + 0,120 \frac{\sigma}{f'_c} - 0,1594 \left(\frac{\sigma}{f'_c}\right)^2} \quad (2.45)$$

$$\frac{\tau}{f'_c} = \frac{1}{\left(\frac{f'_c}{f'_t}\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{f'_c}{f'_t}\right) \frac{\sigma_c}{f'_c}} \quad (2.46)$$

A Equação (2.45) é aplicável somente no caso em que a rotura ocorre primeiramente por compressão, enquanto que a Equação (2.46) é aplicável apenas no caso em que a rotura ocorre primeiro por tracção. Na Equação (2.46), τ/f'_c é definida em função da relação de resistências f'_c/f'_t . A tensão tangencial de rotura cresce sempre com o pré-esforço. Com os

limites normalmente impostos pela regulamentação para o nível de pré-esforço, a Equação (2.46), baseada na teoria da tensão máxima de tracção, é a única a ter em conta.

2.3.1.2. O Factor de Pré-esforço (Teoria Elástica, Teoria Plástica e Teoria Enviesada)

Cowan e Armstrong em 1955 [19] e Humphreys em 1957 [35] utilizaram a teoria elástica para obter o factor de pré-esforço. A partir da Equação $\tau_{max} = T/(ax^2y)$ e da Equação (2.46):

$$T = ax^2y\tau_{max} = ax^2yf'_t \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f'_t}} \quad (2.47)$$

em que o parâmetro τ_{max} é a tensão tangencial máxima de torção no elemento A (Figura 2.13 (a)). Uma vez que $ax^2yf'_t$ representa o momento tursor elástico sem pré-esforço, T_e , a Equação (2.47) pode ser expressa da seguinte forma:

$$T = T_e \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f'_t}} = T_e \gamma \quad (2.48)$$

A Equação (2.48) determina que o momento tursor de rotura de uma viga pré-esforçada, T , é igual ao momento tursor de uma viga sem pré-esforço, T_e , vezes um factor de pré-esforço, γ .

A teoria Plástica foi proposta por Nylander em 1945 [41] também para obter o factor de pré-esforço γ . A partir da Equação $T_p = \alpha_p x^2 y f'_t$ e da Equação (2.46) segue-se:

$$T = \alpha_p x^2 y \tau = \alpha_p x^2 y f'_t \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f'_t}} \quad (2.49)$$

Uma vez que o termo $\alpha_p x^2 y f'_t$ é o momento tursor plástico em pré-esforço, T_p , a Equação (2.49) pode ser escrita da seguinte forma:

$$T = T_p \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f'_t}} = T_p \gamma \quad (2.50)$$

Novamente, o momento tursor de rotura de uma viga pré-esforçada, T , pode ser expresso como o momento tursor de rotura de uma viga sem pré-esforço, T_p , vezes o factor de pré-esforço, γ .

Nas Equações (2.48) e (2.50), o factor de pré-esforço é assente na resistência à tracção uniaxial do betão, f'_t . Assumindo que $f'_c/f'_t = 10$ [26], a quantidade f'_t pode ser convertida na resistência à compressão uniaxial f'_c , logo:

$$\gamma = \sqrt{1 + 10 \frac{\sigma}{f'_c}} \quad (2.51)$$

Hsu utilizou o mesmo factor de pré-esforço na teoria da flexão enviesada para calcular o momento torsor resistente de vigas sem armadura transversal e com pré-esforço longitudinal uniforme [26]. Os ensaios experimentais realizados por Nylander em 1945 [41], Humphreys em 1957 [35] e Zia e McGee em 1974 [49] permitiram validar o factor de pré-esforço definido pela Equação (2.51).

2.3.2. Comportamento de Vigas com Armadura Longitudinal e Transversal à Torção

2.3.2.1. A Analogia da Treliça Espacial com Ângulo Variável

Hsu e Mo em 1985 [32] mostraram que a teoria do modelo de treliça espacial com ângulo variável podia ser aplicada também ao caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme sujeitas à torção pura, utilizando o conceito de descompressão do betão. O modelo de treliça é totalmente válido uma vez que, para uma análise em estado limite último, admite-se que os elementos estão inteiramente fissurados, mesmo na situação de estarem fortemente pré-esforçados.

Num modelo de treliça espacial pré-esforçada longitudinalmente sujeita a um momento torsor externo, origina-se uma força longitudinal de tracção que irá reduzir as tensões de compressão no betão induzidas pelo pré-esforço. Se a força longitudinal de tracção possuir uma magnitude igual à força de compressão induzida no betão, esta desaparecerá e a armadura de pré-esforço passará a suportar inteiramente a força longitudinal de tracção, uma vez que, nesse instante, a extensão na armadura ordinária e no betão é nula. Este fenómeno é classificado por descompressão do betão. Para efeitos do desenvolvimento do equilíbrio interno da treliça, o elemento irá apresentar um comportamento similar ao de um elemento ordinário de betão armado, após ocorrer a descompressão do betão.

A partir do exposto no parágrafo anterior, conclui-se que o pré-esforço afecta somente as expressões para o equilíbrio longitudinal. Desta forma, nas equações apresentadas na Secção 2.2.3.3.5 a única alteração a introduzir resume-se à substituição da força longitudinal na armadura, $A_l f_l$, pela força longitudinal total incluindo tanto a armadura ordinária como a de pré-esforço, $A_l f_l + A_{ps} f_{ps}$. A Equação 2.15 para o equilíbrio longitudinal fica:

$$A_l f_l + A_{ps} f_{ps} = \frac{T p_0}{2A_0} \cotg \alpha \quad (2.52)$$

Na Equação (2.52) A_{ps} é a área total da armadura de pré-esforço e f_{ps} a tensão na armadura de pré-esforço.

Conhecida primeiramente a extensão na armadura de pré-esforço, ε_{ps} , é calculada a tensão na armadura de pré-esforço, f_{ps} . Utilizando o conceito de descompressão do betão, a extensão na armadura de pré-esforço é calculada por:

$$\varepsilon_{ps} = \varepsilon_{dec} + \varepsilon_l \quad (2.53)$$

O parâmetro ε_{ps} representa a extensão na armadura de pré-esforço, ε_{dec} a extensão na armadura de pré-esforço na descompressão e ε_l a extensão na armadura longitudinal ordinária.

A sobreposição das Curvas $\sigma - \varepsilon$ para o aço da armadura ordinária e para o aço da armadura de pré-esforço está ilustrada na Figura 2.16.

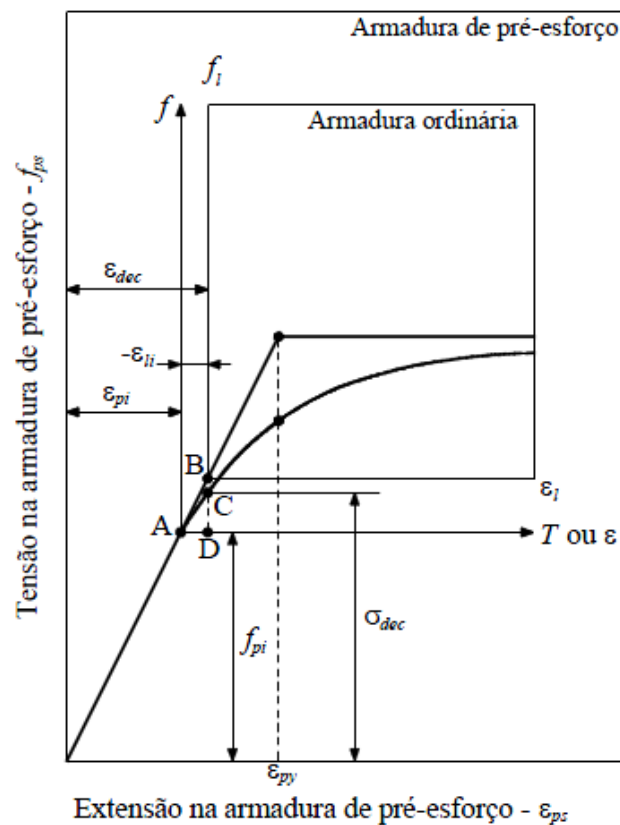


Figura 2.16 - Ilustração do conceito de descompressão [26]

Quando aplicado o pré-esforço, são impostas uma extensão inicial de tração na armadura de pré-esforço longitudinal, ε_{pi} , e uma extensão inicial de compressão na armadura ordinária longitudinal, ε_{li} . Este estado de tensão é representado pelo ponto A da Figura 2.16. As duas extensões referidas, ε_{pi} e ε_{li} são calculadas da seguinte forma:

$$\varepsilon_{pi} = \frac{f_{pi}}{E_p} \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_{li} = \frac{A_{ps} f_{pi}}{A_l(E_s - E_c) + (A_c - A_h - A_{ps})E_c} \quad (2.55)$$

em que:

f_{pi} = tensão inicial na armadura de pré-esforço;

E_s = módulo de elasticidade da armadura longitudinal ordinária;

E_p = módulo de elasticidade da armadura de pré-esforço;

E_c = módulo de elasticidade do betão;

A_c = área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão;

A_h = área da zona oca da secção (para secções cheias $A_h = 0$).

Na aplicação de um momento torsor, correspondente a AD (Figura 2.16), numa viga pré-esforçada, a extensão na armadura ordinária longitudinal fica nula (estado representado pelo ponto B da Figura 2.16) e a extensão na armadura longitudinal de pré-esforço será a extensão de descompressão ε_{dec} (ponto C da Figura 2.16). A extensão ε_{dec} pode ser calculada por:

$$\varepsilon_{dec} = \varepsilon_{pi} + \varepsilon_{li} \quad (2.56)$$

O momento torsor correspondente ao ponto D da Figura 2.16 é designado por momento torsor de descompressão. A partir deste momento torsor, o elemento apresenta um comportamento análogo ao de uma viga ordinária de betão armado.

Após a alteração introduzida na Equação (2.15), para incluir a armadura de pré-esforço, as equações de equilíbrio, de compatibilidade e as relações $\sigma - \varepsilon$ para elementos de betão armado sem pré-esforço e deduzidas a partir do modelo de treliça com ângulo variável (Secções 2.2.3.3.5 a 2.2.3.3.7) são aplicáveis a elementos pré-esforçados.

A Curva $\sigma - \varepsilon$ do aço corrente, que constitui a armadura ordinária, é geralmente idealizada por duas linhas rectas. Este aço é assumido como tendo um comportamento elástico linear até ao ponto de cedência, seguido de um patamar de cedência. Contudo, para o caso do aço de alta resistência que constitui a armadura de pré-esforço, esta idealização simples e bilinear não é aplicável. Para este tipo de aço, existe inicialmente uma resposta elástico linear até um limite proporcional. Com o aumento da tensão para além deste limite proporcional, surgirá uma relação não linear, entre a tensão e a extensão, até à rotura.

Portanto, a armadura de pré-esforço que afecta o equilíbrio longitudinal deve ser considerada na análise do modelo de treliça. Outra questão que se coloca agora é de se saber se a armadura de pré-esforço é efectiva mesmo não estando localizada na região da espessura

efectiva da secção, isto é, na área onde se situa a “gaiola” da armadura de torção. Tal situação observa-se no caso da armadura de pré-esforço centrada na secção (Figura 2.17 (b)).

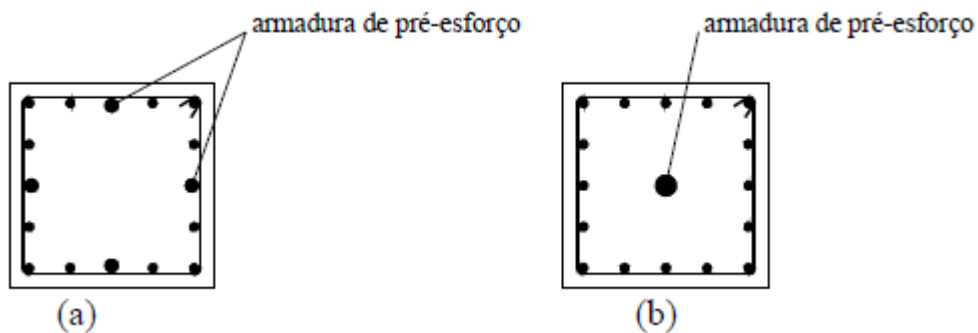


Figura 2.17 - Localização da armadura de pré-esforço (pré-esforço uniforme) [9]

Hsu e Mo estudaram a influência da localização da armadura de pré-esforço (uniforme) na resistência e no comportamento geral de uma viga sujeita à torção pura [32]. Os referidos autores concluíram que a distribuição da armadura de pré-esforço não tem praticamente nenhum efeito. No caso da armadura de pré-esforço concêntrica (Figura 2.17 (b)), ou seja, sem esta estar localizada na região da espessura efectiva (Figura 2.17 (a)), a sua participação será efectiva na resistência e no comportamento global do elemento à torção. Tal situação apenas será assumida desde que a armadura de pré-esforço se encontre convenientemente ancorada nos topos do elemento.

Refere-se ainda que quando a armadura de pré-esforço existe em quantidade excessiva, o esmagamento do betão poderá ocorrer antes da descompressão do betão, resultando numa extensão de compressão nos varões longitudinais da armadura ordinária para o momento torsor máximo. Neste caso, a teoria do modelo de treliça espacial com ângulo variável, que assume a viga como estando inteiramente fissurada, será inválida.

Capítulo 3

Modelo da Treliça Espacial com Ângulo Variável Modificado

3. Modelo da Treliza Espacial com Ângulo Variável Modificado

3.1. Introdução

Neste capítulo é apresentado e descrito o modelo teórico utilizado no presente trabalho, baseado na formulação do modelo de treliça espacial com ângulo variável. No entanto, este modelo é modificado com o objectivo de calcular uma previsão teórica global do comportamento de vigas de betão armado (com secção cheia ou vazada, de resistência normal ou de alta resistência, com ou sem pré-esforço longitudinal uniforme) sujeitas à torção pura até à rotura e ao longo do seu historial de carga. Esta previsão teórica global é obtida particularmente por meio do cálculo e respectivo traçado das curvas de comportamento momento torsor (T) - rotação (θ) em todas as suas fases comportamentais e a determinação dos respectivos pontos característicos e propriedades notáveis.

Andrade em 2010 [4], de entre os vários modelos teóricos testados, encontrou um modelo que apresentava os melhores resultados referentes à previsão do comportamento último de vigas sujeitas à torção, nomeadamente do momento torsor resistente e respectiva rotação. A razão da sua escolha foi fundamentada em análises comparativas com vigas de referência cujos resultados experimentais estavam disponíveis na literatura consultada por Andrade. O modelo teórico (Tabela 3.1) encontrado pelo referido autor incorpora o modelo de betão *b14*, com relação $\sigma - \epsilon$ para o betão comprimido nas escoras proposta por Belardi e Hsu em 1991 [8] e com os factores de redução propostos por Hsu e Zhang em 1998 [48] para ter em conta o *softening effect*, o modelo de aço *ao3* para as armaduras ordinárias traccionadas proposto por Belardi e Hsu em 1994 [7] e juntamente com o modelo de aço *ap3* para as armaduras de pré-esforço traccionadas proposto por Ramberg-Osgood [32].

Tabela 3.1 - Modelos Teóricos considerados para o comportamento dos materiais

Modelo	Relação $\sigma - \epsilon$	Factores de Redução
<i>b14</i>	<p>Belardi e Hsu (1991) [8]</p> $f_{c2} = \beta_{\sigma} f'_c \left[2 \left(\frac{\epsilon_{c2}}{\beta_{\epsilon} \epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon_{c2}}{\beta_{\epsilon} \epsilon_0} \right)^2 \right] \text{ para } \epsilon_{c2} \geq \beta_{\epsilon} \epsilon_0$ $f_{c2} = \beta_{\sigma} f'_c \left[1 - \left(\frac{\epsilon_{c2} - \beta_{\epsilon} \epsilon_0}{2\epsilon_0 - \beta_{\epsilon} \epsilon_0} \right)^2 \right] \text{ para } \epsilon_{c2} < \beta_{\epsilon} \epsilon_0$	<p>Hsu e Zhang (1997, 1998) [34] [48]</p> $\beta_{\sigma} = \beta_{\epsilon} = \frac{R(f'_c)}{\sqrt{1 + \frac{400\epsilon_{c1}}{\eta'}}}; \eta = \frac{\rho_l f_{sy,l}}{\rho_t f_{sy,t}};$ $\sigma_h = \sigma_v = 0$ $\begin{cases} \eta \leq 1 \Rightarrow \eta' = \eta \\ \eta > 1 \Rightarrow \eta' = 1/\eta \end{cases};$ $R(f'_c) = \frac{5,8}{\sqrt{-f'_c (MPa)}} \leq 0,9$

ao3	<p>Belardi e Hsu (1994)</p> $f_s = \frac{0,975 E_s \varepsilon_s}{\left[1 + \left(\frac{1,1 E_s \varepsilon_s}{f_{sy}}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}} + 0,025 E_s \varepsilon_s ;$ $m = \frac{1}{9B - 0,2} \leq 25 ; B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{cr}}\right)^{1,5} ;$ $f_{cr} = 3,75 \sqrt{f'_c (psi)}$	
ap3	<p>Ramberg-Osgood [32]</p> $f_{ps} = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_p}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_p \varepsilon_p}{f_{pu}}\right)^R\right]^{\frac{1}{R}}} ; R = 4,38$	

O *softening effect* que se traduz pela influência das extensões transversais de tracção no comportamento do betão comprimido nas escoras é tido em conta através da relação média tensão (σ) - extensão (ε) para o betão comprimido nas escoras.

As modificações realizadas por Andrade em 2010 [4] na formulação do modelo teórico foram feitas com base em aproximações justificadas e divididas por fases, cada uma delas identificando-se com uma fase particular do comportamento das vigas à torção observada experimentalmente, designadamente:

- Fase pré-fissuração (Estado I): análise elástico-linear em regime não fissurado;
- Transição entre Estado I e Estado II: análise elástico-linear em regime fissurado;
- Fase pós-fissuração (Estado III): análise não linear.

Reporte-se que Bernardo em 2003 [9] e Bernardo e Lopes em 2008 [10] pretenderam obter os mesmos objetivos definidos por Andrade em 2010 [4] em relação ao assunto do presente capítulo. Os referidos autores caracterizaram as várias fases comportamentais também já referidas anteriormente com base em variadas teorias distintas e validadas. A aproximação realizada pelos autores consistiu em estabelecer critérios de transição entre as teorias utilizadas com vista à obtenção da Curva $T - \theta$ final. O modelo global obtido por Bernardo e Lopes não é teoricamente satisfatório devido ao facto de utilizar diversas teorias para cada fase comportamental, apesar de válidas, e estabelecer critérios um pouco arbitrários para as transições. Andrade em 2010 [4] conseguiu estabelecer um modelo teórico global baseado na formulação da teoria da treliça espacial com ângulo variável com recurso à introdução de correcções e ao aproveitamento de algumas previsões estabelecidas por outras teorias. A aproximação realizada por Andrade tornou-se teoricamente mais aceitável.

O presente capítulo reserva-se para a apresentação e justificação das correcções efectuadas por Andrade em 2010 [4] no modelo original.

A aproximação teórica realizada encontra-se dividida por fases e é feita separadamente para as vigas de betão normal e para as vigas com pré-esforço longitudinal e/ou transversal (com secção cheia ou vazada, de resistência normal ou de alta resistência).

3.2. Descrição e Caracterização da Curva $T - \theta$

De forma análoga ao realizado por Bernardo em 2003 [9] e Bernardo e Lopes em 2008 [10], a observação das Curvas $T - \theta$ experimentais resultantes dos ensaios das vigas de referência usadas por Andrade em 2010 [4] sujeitas à torção pura até à rotura e disponíveis na literatura consultada pelo autor referido anteriormente, permitem, para taxas de armaduras de torção correntes, desenhar o traçado de uma Curva $T - \theta$ típica como a ilustrada na Figura 3.1. Na referida curva idealizada é possível distinguir três zonas (Zona 1, 2 e 3) correspondentes a fases de comportamento distintas relacionadas com as fases particulares de comportamento referenciadas anteriormente.

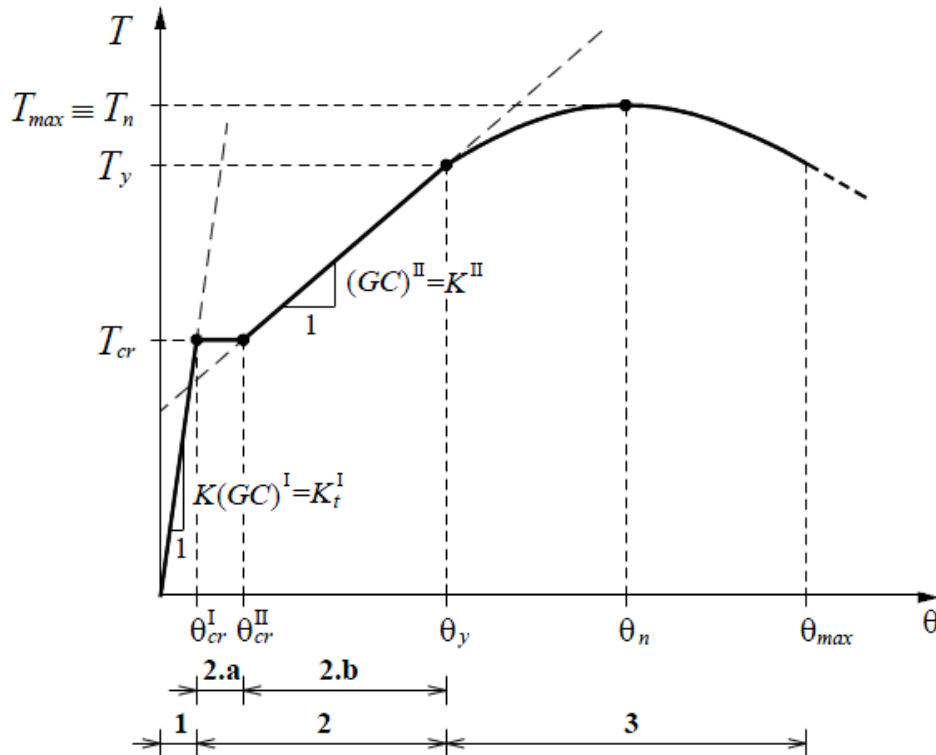


Figura 3.1 - Curva $T - \theta$ típica para uma viga de betão armado sujeita à torção pura [4]

A Zona 1 da Curva $T - \theta$ típica da Figura 3.1 representa o Estado I da viga, isto é, a zona de comportamento da viga antes de ser atingido o momento torsor de fissuração. Nesta zona, a rigidez elástica de torção $((GC)^I \equiv K_t^I)$ é representada pelo declive da Curva $T - \theta$ e o seu cálculo é baseado na Teoria de St. Venant que é geralmente válida nesta fase. Em tal fase, a Curva $T - \theta$ é aproximada a uma recta que tem início no ponto de coordenadas $(0;0)$ e término no ponto de coordenadas $(\theta_{cr}^I; T_{cr})$, onde os parâmetros T_{cr} e θ_{cr}^I representam,

respectivamente, o momento torsor de fissuração e a rotação de torção, por unidade de comprimento da viga, correspondente a T_{cr} . Contudo, esta aproximação da Curva $T - \theta$ a uma recta de ser considerada como uma hipótese simplificativa uma vez que, imediatamente antes de atingir o momento torsor, a viga na realidade tem um comportamento ligeiramente não linear devido à presença de microfissurações que se desenvolvem no betão localizado na “casca externa” da secção. Nesta fase comportamental, na medida em que as rotações são muito pequenas, é aceitável a caracterização da Zona I com uma análise elástico-linear em regime não fissurado. Os modelos teóricos que podem ser utilizados para o cálculo do momento torsor de fissuração (T_{cr}) são a Teoria da Elasticidade, a Teoria da Flexão Enviesada ou a Teoria do Tubo Fino de Bredt. A taxa de armadura de torção nesta fase comportamental referida tem pouca influência na rigidez da viga, contribuindo com um pequeno aumento do momento torsor de fissuração, isto é, apenas adia ligeiramente o aparecimento da primeira fissura. Este pequeno incremento do momento torsor de fissuração acompanha o aumento da taxa de armadura de torção, tal como observado experimentalmente (por exemplo, Hsu em 1968 [27] ou Bernardo em 2003 [9]).

A Curva $T - \theta$, após a viga alcançar o momento torsor de fissuração e devido a um incremento brusco da rotação para um momento torsor constante e igual a T_{cr} , aproxima-se novamente a uma recta até um determinado nível do momento torsor. Quando a Curva $T - \theta$ atinge esse nível tende a perder a sua linearidade. Na Figura 3.1, a Zona 2 está dividida em duas Subzonas: 2.a e 2.b. A Subzona 2.a da curva de comportamento representa o aumento súbito da rotação referido, enquanto que a Subzona 2.b corresponde a uma aproximação da Curva $T - \theta$ a uma recta. O declive deste desenvolvimento aproximadamente recto da Curva $T - \theta$ corresponde à rigidez de torção pós-fissuração ($(GC)^{II} \equiv K^{II}$), ou seja, em Estado II. A ligação entre a Zona I e a Subzona 2.b é estabelecida pela Subzona 2.a. O conjunto formado pelas duas Subzonas referidas anteriormente ocorre antes da perda de comportamento linear e corresponde ao comportamento da viga em regime fissurado.

Recorde-se que, para vigas com secções em vazadas, a Subzona 2.a representada na Figura 3.1 pode não existir ou então noutros casos ser muito menos evidenciada, ou seja, não apresenta um patamar horizontal comparativamente a vigas com secções cheias. Neste último tipo de vigas, a observação experimental mostra que a Subzona 2.a é nomeadamente observada nas vigas que apresentam menores taxas de armadura e o seu comprimento, medido em termos de deformação, é inversamente proporcional à taxa de armadura de torção, ou seja, um maior comprimento da Subzona 2.a corresponde a uma menor taxa de armadura de torção (Hsu em 1968 [27]). A zona de comportamento 2.a é explicada pelos autores, em geral, como correspondendo ao incremento repentino e necessário da deformação angular para que a viga se adapte às novas condições de equilíbrio na fase fissurada. Esta explicação não é satisfatória uma vez que não permite explicar porque, em geral, nas vigas com secção vazada de parede fina este patamar horizontal (Subzona 2.a) não

é tao claramente evidenciado (por exemplo, nos estudos de Lampert e Thurlimann em 1969 [37] e também Bernardo em 2003 [9]). Em alguns casos esta zona de transição não se observa ou então faz-se de uma forma muito suave. Para o caso das vigas com secção cheia, uma possível explicação para a observação de um patamar horizontal é a influência do núcleo de betão da secção. Logo após a fissuração das vigas, poderá acontecer uma pequena redistribuição transversal de tensões tangenciais direccionada para o interior da secção. Este facto associado à perda de rigidez devido à fissuração da viga, poderá causar um acréscimo súbito sem aumento do momento torsor. No caso das vigas com secção vazada, particularmente aquelas que apresentam secções de parede fina, a viga após fissurar é quase obrigada a equilibrar o momento torsor exterior por meio de um mecanismo de treliça com a participação efectiva e imediata das armaduras. Nas vigas com secções cheias ou com secções vazadas de paredes espessas, a passagem para o modelo de treliça poderá exigir um intervalo de deformação uma vez que há a possibilidade de uma participação efectiva do betão interior para o equilíbrio do momento torsor exterior.

A caracterização da viga em Estado II será realizada por intermédio de uma análise elástico-linear em regime fissurado, tal como adoptado por Hsu em 1973 [25], por Bernardo em 2003 [9] e Bernardo e Lopes em 2008 [10]. O modelo adoptado neste trabalho para caracterizar este estado baseado na utilização do modelo de treliça espacial com as escoras de betão a um ângulo constante de 45° e tendo em conta o comportamento elástico-linear dos materiais, estabelece uma aproximação aceitável enquanto as armaduras de torção não entrarem em cedência. A caracterização dessa fase comportamental desenvolve-se por um troço recto que prevê um comportamento elástico-linear dos materiais e que ocorra logo a estabilização da fissuração. Por outro lado, o modelo de treliça espacial com ângulo variável não possibilita contabilizar a participação efectiva do núcleo de betão em vigas com secção cheia, particularmente para níveis de carregamento baixos.

O Estado II deixa de ter um comportamento linear válido a partir de um determinado ponto da Curva $T - \theta$ que corresponde, em geral, à ocorrência da primeira de duas situações distintas. Na primeira situação, o ponto corresponde ao momento da entrada em cedência (caso ilustrado na Figura 3.1) de pelo menos uma das armadura de torção (armadura longitudinal ou transversal). Para a segunda situação, o referido ponto da Curva $T - \theta$ corresponde ao instante em que o betão comprimido nas escoras das vigas começa a apresentar um regime caracterizado pela não linearidade devido às tensões elevadas instaladas. Este comportamento pode ocorrer inclusive antes da cedência das armaduras de torção e em vigas com elevadas taxas de armaduras de torção. Em qualquer dos casos, as vigas passam a desenvolver um comportamento marcadamente não linear até atingirem o momento torsor máximo estabelecendo assim a Zona 3 (Figura 3.1) da curva de comportamento. O modelo adoptado neste trabalho para caracterizar a Zona 3 é baseado no modelo de treliça espacial de ângulo variável que é particularmente adequado para

caracterizar esta última zona comportamental uma vez que a viga se encontra já extensamente fissurada. Esta é a premissa básica do modelo teórico referido bem como a consideração do comportamento não linear dos materiais e o *softening effect* (influência da fissuração diagonal no betão comprimido das escoras).

Neste trabalho, pretende-se estudar as três zonas de comportamento identificadas na Curva $T - \theta$ da Figura 3.1 com base no modelo de treliça espacial com ângulo variável modificado que tem por objectivo adaptar o modelo a cada fase comportamental. Será tida em conta a experiência da observação comportamental de vigas de betão sujeitas à torção de diversos autores, o conhecimento de diversas teorias da torção e respectivas metodologias aplicáveis a vigas de betão armado e pré-esforçado, as propostas e recomendações de autores e códigos de dimensionamento.

3.3. Zona Comportamental 1 (Estado I)

3.3.1 Vigas de Betão Armado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)

Inicialmente é necessário rever as formulações de teorias reconhecidas e validadas para caracterizar esta fase de pré-fissuração ou Estado I (zona comportamental 1 da Figura 3.1), particularmente para o cálculo da rigidez de torção em Estado I ($(GC)^I = K_t^I$) e do momento tursor de fissuração (T_{cr}). É importante também ter em conta os aspectos particulares do comportamento de vigas de betão simples (não armado) à torção observadas experimentalmente por diversos autores bem como as respectivas conclusões obtidas por esses mesmos autores. Todo este conhecimento serviu de base a Andrade [4] para modificar, de forma consistente, a formulação original do modelo de treliça espacial com ângulo.

Com uma pequena correcção, segundo Bernardo em 2003 [9], a teoria da elasticidade pode ser utilizada para descrever o comportamento da viga na fase não fissurada/pré-fissuração (Estado I). Em função do momento tursor externo aplicado, T , a rotação de torção por unidade de comprimento, θ , pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\theta = \frac{d\phi}{dz} = \frac{T}{K(GC)^I} = \frac{T}{K_t^I} \quad (3.1)$$

em que:

ϕ = ângulo total de torção ao longo de um comprimento z da viga;

T = momento tursor externo aplicado na viga;

$(GC)^I$ = rigidez de torção (Estado I) calculada pela teoria da elasticidade;

K = factor minorativo ($K \approx 0,7$);

K_t^I = rigidez de torção (Estado I) minorada.

O factor minorativo K tem em conta a perda de rigidez de cerca de 20 a 40% em relação ao valor elástico $(GC)^1$ antes de ser atingida a fissuração como mostram os ensaios experimentais. Estas percentagens referidas foram indicadas por outros autores, por exemplo Leonhardt em 1969 [13]. O valor geralmente recomendado de $K = 0,7$ é um valor médio entre 0,8 e 0,6 que representam as perdas, em percentagem, referidas anteriormente. A rigidez K_t^I constitui assim uma rigidez secante.

Bernardo em 2003 [9] observou experimentalmente esta perda de rigidez com base nos resultados obtidos de ensaios de vigas com secção vazada, como ilustra a Figura 3.2. O referido autor verificou a quebra de rigidez na fase comportamental de pré-fissuração nas Curvas $T - \theta$.

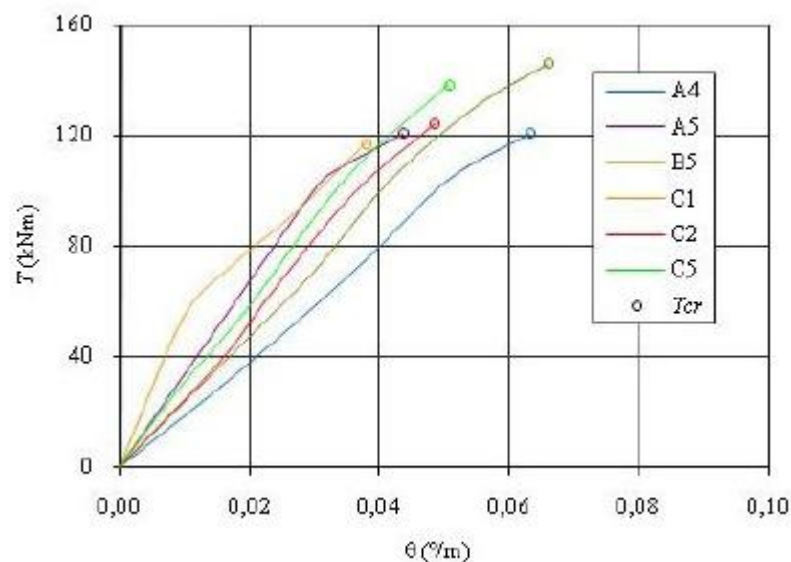


Figura 3.2 - Evolução do momento torsor com a deformação angular média para o Estado I [9]

O fenómeno de quebra de rigidez é explicado pelos autores, em geral, pelo facto das tensões tangenciais de torção se concentrarem principalmente na periferia das secções. A teoria de St. Venant explica que o núcleo de betão das secções cheias tem uma pequena contribuição para a absorção do momento torsor na fase elástica (Figura 2.6). Este facto da concentração de tensões na “casca exterior” da secção resultará no aparecimento de microfissuras prematuras e anteriores à fissuração efectiva que afectam a rigidez à torção das vigas. Em relação ao interior da secção, Leonhardt em 1969 [13] desenvolveu o conceito de que, devido à heterogeneidade do betão armado, a repartição das tensões no interior da secção tende a ser diferente da de um material homogéneo e isotrópico. Em alguns casos podem ocorrer picos de tensão maiores na periferia da secção onde se localizam as armaduras e por esse motivo existe maior rigidez. Nas secções vazadas com parede fina, onde não existe núcleo de betão, a questão da concentração de tensões na periferia da secção é inequívoca.

A teoria da elasticidade, no que concerne à influência das armaduras na rigidez de torção e para o caso corrente de armadura transversal constituída por cintas perpendiculares ao eixo das vigas, refere que a rigidez $(GC)^1$ pode ser calculada desprezando a influência de tal armadura.

Para secções rectangulares, de acordo com a Teoria de St. Venant e a Teoria de Bredt para tubos de parede fina, o factor de rigidez de torção C é calculado da seguinte forma, consoante se trate de uma secção cheia ou vazada:

$$\text{(secção cheia)} \quad C = \beta x^3 y \quad (3.2)$$

$$\text{(secção vazada)} \quad C = 4A^2 h / u \quad (3.3)$$

em que:

x, y = menor e maior dimensão da secção cheia, respectivamente;

β = Coeficiente de St. Venant (Tabela 3.2);

A = área limitada pela linha média da parede da secção oca ($A = x_1 y_1$ em que x_1 e y_1 representam a menor e maior dimensão da linha média da parede, respectivamente);

u = perímetro da linha média da parede da secção vazada: $u = 2x_1 + 2y_1$;

h = espessura da parede da secção vazada.

Tabela 3.2 - Coeficientes de St. Venant para secções rectangulares [26]

y/x	k	β	α	α_2
1.0	0.675	0.141	0.208	0.208
1.2	0.759	0.166	0.219	0.196
1.4	0.822	0.187	0.227	0.185
1.6	0.869	0.204	0.234	0.174
1.8	0.904	0.217	0.240	0.164
2.0	0.930	0.229	0.246	0.155
2.5	0.968	0.249	0.258	0.135
3.0	0.985	0.264	0.267	0.118
4.0	0.997	0.281	0.282	0.0945
5.0	0.999	0.291	0.291	0.0782
10.0	1.00	0.312	0.312	0.0397
100	1.00	0.331	0.331	0.00217
∞	1.00	0.333	0.333	0

Em resultado da torção, surgem tensões de tracção no betão segundo a Teoria da Elasticidade. A tensão tangencial máxima, que surge sempre a meio da face maior da secção, pode ser calculada, de uma forma geral, através da seguinte equação:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_T} \quad (3.4)$$

em que W_T é o módulo elástico de torção.

Para secções rectangulares, de acordo com a Teoria de St. Venant e a Teoria de Bredt para tubos de parede fina, a tensão τ_{max} é calculada pelas seguintes equações, consoante se trate de uma secção cheia ou vazada:

$$\text{(secção cheia)} \quad \tau_{max} = \frac{T}{\alpha x^2 y} \quad (3.5)$$

$$\text{(secção vazada)} \quad \tau_{max} = \frac{T}{2Ah} \quad (3.6)$$

O coeficiente α encontra-se na Tabela 3.2.

O momento tursor de fissuração, T_{cr} , será o valor para o qual a tensão tangencial máxima iguala a tensão resistente à tracção do betão, f_{ctm} , isto é:

$$\tau = \sigma_I = -\sigma_{II} = \frac{T_{cr}}{W_T} = f_{ctm} \quad (3.7)$$

Portanto, o momento tursor de fissuração é:

$$T_{cr} = W_T f_{ctm} \quad (3.8)$$

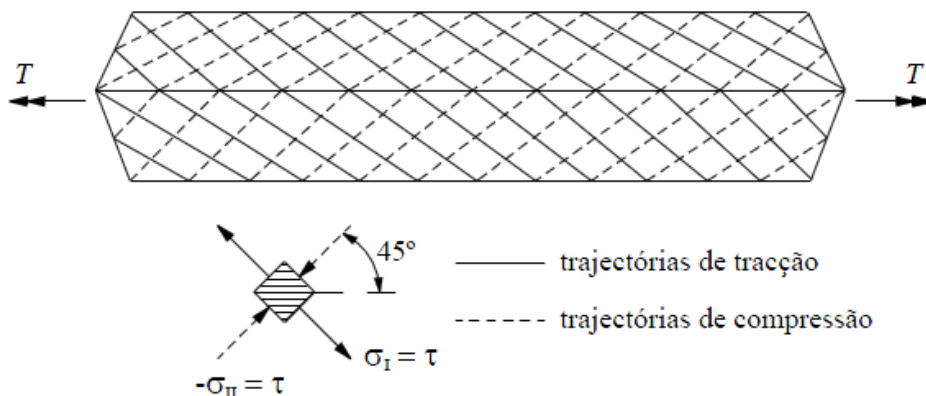


Figura 3.3 - Tensões principais numa viga sujeita à torção (Estado I) [9]

O EC 2 [40], para o cálculo de f_{ctm} , estabelece as seguintes expressões de correlação com a resistência à compressão do betão:

$$\text{(para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa)} \quad f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{2/3} \quad (3.9)$$

$$\text{(para } f_{ck} > 50 \text{ MPa)} \quad f_{ctm} = 2,12 \ln(1 + f_{cm}/10) \quad (3.10)$$

A Teoria da Flexão Enviesada para as vigas de betão não armado é outro método para calcular o momento torsor de fissuração, T_{cr} , pois a influência das armaduras de torção não entra nesta fase de comportamento. Deste modo, T_{cr} será igual à resistência à torção da viga correspondente sem armaduras de torção, T_{np} , que para vigas de secção cheia pode ser calculada pela seguinte expressão (f'_c em *psi*, x e y em *in*):

$$T_{cr} = T_{np} = 6y(x^2 + 10)^3 \sqrt[3]{f'_c} \quad (3.11)$$

No caso das secções vazadas com espessura de parede constante h , a Equação 3.11 transforma-se, segundo Hsu em 1984 [26], em (f'_c em *psi*, x , y e h em *in*):

$$\text{(para } h \leq x/4) \quad T_{cr} = 6(x^2 + 10)y^3 \sqrt[3]{f'_c} (4h/x) \quad (3.12)$$

Quando $h > x/4$ deve considerar-se $h = x/4$.

Outra forma de calcular o momento torsor de fissuração consiste em usar a Teoria do Tubo Fino de Bredt. Tendo como ponto de partida a referida teoria, Hsu e Mo em 1985 [33] apresentaram uma expressão derivada a partir de $T = 2\tau Ah$ e aplicável a vigas de betão armado com secção rectangular vazada (f'_c em *psi*, t em *in* e A_c em *in*²):

$$T_{cr} = 2A_c t (2,5 \sqrt[3]{f'_c}) \quad (3.13)$$

O parâmetro A_c representa a área limitada pelo perímetro exterior da secção (incluindo a área vazada) e t a espessura da parede da secção vazada.

Em 1984, Hsu [26] mostrou que a Equação 3.13 também podia ser utilizada no caso de secções rectangulares cheias, adoptando $t = 1,2A_c/p_c$, em que p_c (em *in.*) representa o perímetro exterior da secção transversal.

Conforme o ACI 318R-05 [2], o momento torsor de fissuração em torção pura pode ser derivado substituindo a secção real por um tubo equivalente de parede fina. Na fase anterior à fissuração, o tubo referido possui uma espessura de parede, t , igual a $0,75A_{cp}/p_{cp}$ e uma área limitada pela linha média da parede, A_0 , igual a $2A_{cp}/3$. O parâmetro A_{cp} nas expressões anteriores representa a área limitada pelo perímetro exterior da secção e p_{cp} representa o perímetro exterior da secção. O ACI 318R-05 [2] fornece também uma expressão

para o cálculo do momento torsor de fissuração baseada na equação $T = 2\tau Ah$ (Teoria de Bredt para tubos de parede fina), assumindo que a fissuração ocorre quando a tensão principal de tracção alcança um valor igual a $4\sqrt{f'_c}$ (f'_c em *psi*):

$$T_{cr} = 4\sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \quad (3.14)$$

O módulo de rotura do betão, f_r , que constitui uma medida da sua resistência à tracção, é a base da formulação das Equações 3.11 a 3.14. As referidas equações devem ter em consideração a classe de resistência do betão uma vez que o cálculo do módulo de rotura é feito por correlação com a resistência à compressão do betão. Em relação à Teoria da Flexão Enviesada, a Equação 3.11 resultou da equação $T_{np} = (x^2y/3)(0,85f_r)$ (momento torsor resistente de uma viga de betão sem armaduras e com secção rectangular) utilizando o módulo de rotura da equação $f_r = 21(1 + (10/x^2))\sqrt[3]{f'_c}$ proposto por Hsu em 1968 [28] para o caso da torção. Este módulo de rotura é diferente do estabelecido pelo ACI 318R-05 [2] que propõe para o caso de vigas sujeitas à flexão (Cláusula 9.5.2.3: $f_r = 7,5\sqrt{f'_c}$, f' em unidades *psi*). Bernardo em 2003 [9] abordou esta questão na tentativa de encontrar estudos publicados a fim de actualizar o módulo de rotura proposto por Hsu para betões de alta resistência. O autor referido observou que o ACI 318R-05 não especifica limite de validade para o cálculo do módulo de rotura normal no que se refere à resistência do betão à compressão. Assim, as Equações 3.11 e 3.12 não deveriam sofrer qualquer alteração para as vigas de alta resistência. Para o caso da Teoria de Bredt para tubos de parede fina, o problema é semelhante ao da Teoria da Flexão Enviesada, uma vez que a Equação 3.13 depende de uma percentagem do módulo de rotura, razão pela qual esta equação também não deveria sofrer qualquer alteração. O mesmo se pode aplicar à Equação 3.14 que não foi utilizada por Bernardo em 2003 [9]. No entanto, o autor citado anteriormente observou, ao efectuar análises comparativas para os momentos torsores de fissuração tendo por base resultados de ensaios com vigas de alta resistência, que as equações anteriormente referidas sobrestimavam o momento torsor de fissuração das vigas analisadas entre 15% a 20%. Bernardo concluiu assim que a não alteração do módulo de rotura normal para os betões de alta resistência é impróprio, pelo menos para o caso da torção. Tendo em conta estas conclusões, e depois de realizar um estudo de correlação com base nos resultados experimentais utilizados, Bernardo propôs um factor minorativo de 0,85 quando $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ para multiplicar pelas equações do momento torsor de fissuração que incorporam a referida resistência à tracção do betão caracterizada pelo módulo de rotura. Deste modo, as Equações 3.11 a 3.14 devem ser afectadas por esse factor.

Apesar dos estudos experimentais mostrarem em geral que as armaduras de torção, com cintas perpendiculares ao eixo da viga, possuem um efeito desprezável na rigidez à torção

[5], a presença destas atrasa efectivamente a fissuração. Resultado disto é um valor ligeiramente maior para o momento torsor de fissuração. Hsu em 1968 [27] demonstrou que, apesar do momento torsor de fissuração T_{cr} ser pouco afectado pela percentagem total de armadura de torção (ρ_{tot}), este pode ser calculado através da seguinte equação empírica:

$$T_{cr,ef} = (1 + 4\rho_{tot})T_{cr} \quad (3.15)$$

em que $T_{cr,ef}$ é o momento torsor de fissuração efectivo que incorpora a as armaduras de torção.

A percentagem (ou taxa) total de armadura de torção, ρ_{tot} , é calculada somando as percentagens de armadura longitudinal (ρ_l) e transversal (ρ_t).

A rotação unitária correspondente a T_{cr} (Figura 3.1), em unidades rad/m, é calculada através da seguinte expressão, que tem por base a Equação 3.1:

$$\theta_{cr}^1 = \frac{T_{cr,ef}}{K(GC)^1} = \frac{T_{cr,ef}}{K_t^1} \quad (3.16)$$

A Figura 3.4 ilustra a parte da Curva $T - \theta$ correspondente à zona de comportamento 1 da Figura 3.1, cuja curva pode ser aproximada a uma recta que une a origem do referencial (0;0) ao ponto $(\theta_{cr}^1; T_{cr,ef})$. As coordenadas deste último ponto são determinadas através das Equações 3.15 e 3.16. O declive da recta referida anteriormente corresponde à rigidez de torção em estado não fissurado $((GC)^1)$.

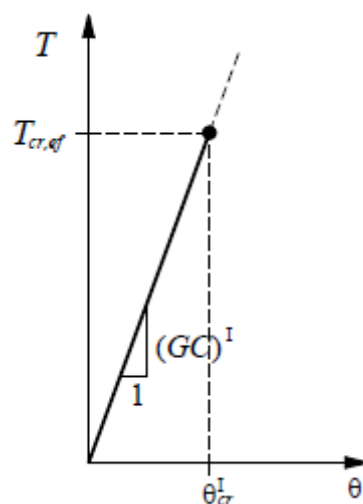


Figura 3.4 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico linear em regime não fissurado (Estado I) [9]

De acordo com o exposto anteriormente concluiu-se que existem diversas formulações para calcular o momento torsor de fissuração. Desta forma, Bernardo em 2003 [9] realizou uma

análise comparativa tendo por base os resultados experimentais da maioria das vigas de referência usadas por Andrade em 2010 [4] para verificar, de entre as formulações referidas anteriormente (com excepção da Equação 3.14), quais é que dão as melhores previsões para a rigidez de torção em estado I ($(GC)^I \equiv K_t^I$).

Tendo como ponto de partida as análises comparativas efectuadas entre as previsões teóricas, com as modificações propostas para as vigas de alta resistência, e os resultados experimentais, Bernardo [9] mostrou que tanto a Teoria da Elasticidade como a Teoria da Flexão Enviesada fornecem muito boas previsões do momento torsor de fissuração efectivo ($T_{cr,ef}$) para vigas com secção cheia. Para o caso das vigas com secção vazada, as melhores previsões são obtidas com a Teoria do Tubo Fino de Bredt. Em relação à previsão da rigidez de torção em Estado I ($(GC)^I \equiv K_t^I$), Bernardo [9] mostrou que deve ser utilizado o factor diminutivo $K = 0,7$ uma vez que não é possível desprezar o efeito da microfissuração do betão antes da fissuração efectiva das vigas.

O autor citado anteriormente não estudou a proposta do ACI 318R-05 [2] para o cálculo do momento torsor de fissuração (Equação 3.14).

Os resultados relativos à previsão do momento torsor de fissuração foram úteis para o estudo de Andrade em 2010 [4] uma vez que, para corrigir a formulação original do modelo de treliça espacial com ângulo variável para a fase comportamental em estudo, é essencial definir, em termos de intervalo de carregamento, o limite superior da zona comportamental 1 (Figura 3.1) para o qual a viga se encontra em Estado I. Por este motivo, torna-se imprescindível conhecer o momento torsor de fissuração da viga em estudo.

Deste modo, Andrade em 2010 [4] realizou um novo estudo do momento torsor de fissuração para as suas vigas de referência. Em comparação com o estudo realizado por Bernardo em 2003 [9], Andrade incluiu os seguintes novos aspectos na sua análise:

- Incluiu na análise comparativa o estudo do coeficiente de variação (cv), em complemento do valor médio (\bar{x});
- Incluiu na análise comparativa a nova equação proposta pelo ACI 318R-05 [2] para o cálculo do momento torsor de fissuração (Equação 3.14);
- Incluiu as vigas de betão armado com secção cheia de alta resistência de Rasmussen e Baker e de Fang e Shian para complementar a sua lista de vigas de referência;
- No caso da teoria da elasticidade, incluiu as novas equações do EC2 [40] para o cálculo do valor médio da resistência à tracção do betão (Equações 3.9 e 3.10).

Os resultados obtidos por Andrade em 2010 [4] são relativos à Teoria da Elasticidade (Equação 3.8), Teoria da Flexão Enviesada (Equações 3.11 e 3.12) e Teoria do Tubo Fino de Bredt (Equações 3.13 e 3.14). Com base nas teorias referidas anteriormente, Andrade calculou, para cada viga de referência, o valor experimental do momento torsor de fissuração ($T_{cr,exp}$) e os respectivos valores teóricos ($T_{cr,th}$). Andrade em 2010 [4] calculou também o valor médio (\bar{x}), o desvio padrão amostral (s) e o coeficiente de variação (cv) separadamente para as vigas de resistência normal (NSC) e de alta resistência (HSC). No caso dos momentos torsores de fissuração efectivos Andrade em 2010 [4] corrigiu-os através da Equação 3.15 para ter em conta a influência das amaduras de torção.

No estudo realizado por Andrade em 2010 [4] verificou que para as vigas com secção cheia, a Equação 3.13 de Hsu baseada na Teoria do Tubo Fino de Bredt tende, no geral, a sobrestimar o momento torsor de fissuração enquanto que a Equação 3.14 proposta pelo ACI 318R-05 [2], baseada na mesma teoria, tende a subestimar o referido parâmetro. Tal facto poderá ter origem na correcção induzida pelo ACI 318R-05 tendo como ponto de partida a adopção de uma espessura equivalente (h_{eq}), para corrigir o modelo para a fase de comportamento em estudo. Em relação à Teoria da Flexão Enviesada e à Teoria da Elasticidade, tendo por base a abordagem adoptada por Andrade em 2010 [4], estas fornecem previsões de T_{cr} com graus de dispersão consideráveis. No sentido inverso, as Equações 3.13 e 3.14 baseadas na Teoria do Tubo Fino de Bredt são as que fornecem previsões com a menor dispersão. Relativamente às observações anteriores e ao contrário do proposto por Bernardo em 2003 [9], Andrade em 2010 [4] concluiu que é a Teoria do Tubo Fino de Bredt (Equação 3.13) de Hsu que fornece as previsões mais aceitáveis para o momento torsor de fissuração.

Para o caso das vigas com secção vazada, as conclusões obtidas por Andrade em 2010 [4] são análogas às anteriormente descritas, embora a amostragem de resultados tenha sido menor. É de realçar que para este tipo de vigas, as observações estão em concordância com as de Bernardo em 2003 [9] e mais uma vez Andrade em 2010 [4] concluiu que é a Teoria do Tubo Fino de Bredt (Equação 3.13 e 3.14) que fornece as melhores previsões.

Assim, Andrade em 2010 [4] opta por calcular o momento torsor de fissuração com base na Teoria do Tubo Fino de Bredt para todas as vigas, aplicando a Equação 3.13 proposta por Hsu. Esta equação é afectada de um coeficiente minorativo de 0,85 quando $f_{ck} > 50$ MPa, conforme proposto por Bernardo em 2003 [9]. A influência da taxa de armadura de torção é tida em conta através de uma correcção adicional do momento torsor de fissuração de acordo com a Equação 3.15.

Em relação à rigidez de torção em Estado I, Andrade em 2010 [4] opta por calculá-la utilizando o modelo de treliça espacial com ângulo variável, em detrimento de um cálculo através das expressões expostas no início da presente secção e da imposição do valor obtido.

Esta escolha prende-se com o objectivo do modelo conseguir simular posteriormente e directamente a passagem da viga do Estado I para o Estado II através da perda instantânea da rigidez devido à fissuração do betão. Deste modo, se o modelo teórico incorporar, na sua formulação, a contribuição do betão traccionado no Estado I, tal passagem traduzir-se-á pela perda instantânea dessa contribuição no modelo aquando da passagem para o Estado II.

Andrade em 2010 [4] resolveu definir algumas modificações a realizar na formulação original do modelo de treliça espacial com ângulo variável quando o momento torsor é inferior ao de fissuração. Recorde-se que este modelo teórico, prevê para a viga em estudo um estado plenamente fissurado logo desde o início do carregamento, o que não corresponde à realidade. O referido modelo também não tem em conta a influência do núcleo de betão nas vigas com secção cheia, sendo que para a fase comportamental em estudo (Estado I) tal influência existe, particularmente na rigidez de torção.

Tendo por base o exposto anteriormente, as modificações na formulação do modelo de treliça espacial com ângulo variável realizadas por Andrade em 2010 [4] incidiram na reposição do estado não fissurado da secção, mediante a consideração de toda a secção de betão traccionado como sendo efectiva. Outra modificação foi a incorporação do núcleo de betão nas vigas com secção cheia, nomeadamente para o cálculo da rigidez.

Para manter a coerência com o modelo de treliça espacial variável, Andrade em 2010 [4] adopta uma secção vazada equivalente também para o Estado I. No caso das vigas com secção cheia seguiu as recomendações do ACI 318R-05 [2] que especifica a consideração de uma espessura equivalente (h_{eq}) de parede igual a $0,75 A_{cp}/p_{cp}$ quando adoptado o modelo de treliça espacial na fase pré-fissuração para o cálculo do momento torsor de fissuração. O parâmetro A_{cp} representa a área limitada pelo perímetro exterior da secção e p_{cp} o perímetro exterior da secção. Para as vigas com secção vazada, Andrade em 2010 [4] adoptou o mesmo critério com a excepção de que a espessura equivalente deve ser inferior ou igual à real, adoptando-se a espessura real caso esta condição seja não seja verificada. A espessura equivalente tem como objectivo a sua utilização no cálculo de algumas propriedades da secção, não sendo no entanto atribuída ao parâmetro t_d (espessura das escoras). O valor da espessura t_d é calculado de acordo com a formulação geral do modelo de treliça para o equilíbrio do modelo para cada patamar de carga.

Na fase comportamental em estudo, Andrade em 2010 [4] assume que a existência de armaduras não é factor condicionante no posicionamento da linha média do fluxo de corte. Deste modo, para as vigas com secção cheia é atribuído ao parâmetro A_0 (área limitada pela linha média do fluxo de corte) a área limitada pela linha média da parede equivalente, dada pela Equação 3.17. Para o caso das vigas com secção vazada o mesmo critério é utilizado com a ressalva de que se a área for superior à real adopta-se a área real.

$$A_0 = (x - h_{eq})(y - h_{eq}) \quad (3.17)$$

O perímetro da linha média do fluxo de corte, p_0 , é calculado a partir da seguinte equação:

$$p_0 = 2(x - h_{eq}) + 2(y - h_{eq}) \quad (3.18)$$

A Figura 3.5 ilustra a transformação de uma secção cheia na secção vazada equivalente para a fase pré-fissuração.

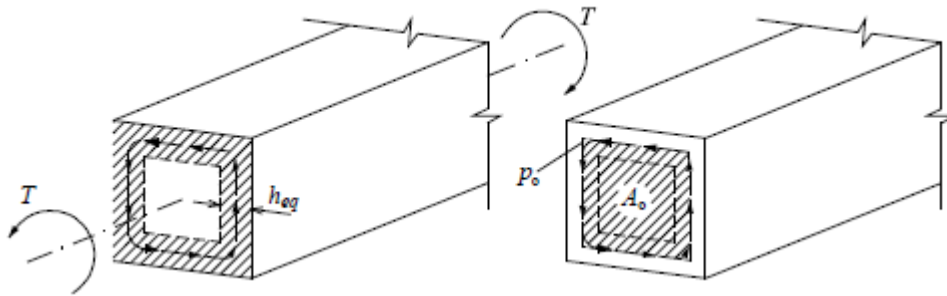


Figura 3.5 - Definição da secção vazada equivalente para o Estado I [4]

Nesta fase comportamental, as armaduras têm uma pequena influência sobre o ângulo das escoras de betão. Apesar de a teoria da elasticidade assumir, em geral, simplificada para as trajectórias dos campos de tensões um ângulo de $\alpha = 45^\circ$ (Figura 3.6), Andrade em 2010 [4] assumiu que o ângulo das escoras de betão é uma variável que tem de ser calculada para cada iteração. No entanto, o valor da referida variável deverá rondar os 45° e a sua variação ao longo da fase pré-fissuração (Estado I) é muito pequena.

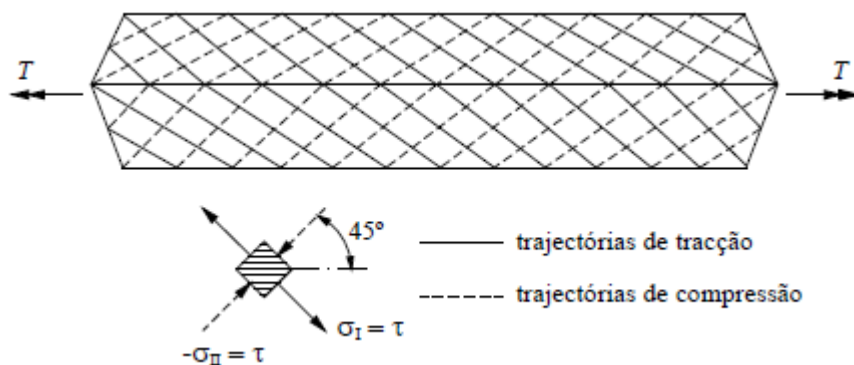


Figura 3.6 - Tensões principais numa viga sujeita à torção (Estado I) [9]

As relações matemáticas não lineares $\sigma - \epsilon$ referidas na Tabela 3.1 (modelo de betão b14 e modelo de aço ao3) são válidas para esta fase comportamental em estudo caracterizada pelos carregamentos baixos. No entanto estas relações tornam-se praticamente lineares.

Para a Fase 1, a influência do *softening effect* é muito pequena, uma vez que, o betão não se encontra fissurado e o nível de carregamento é baixo. Andrade em 2010 [4] assume este

efeito através da sua incorporação no modelo de betão *b14* e em conformidade com a formulação do modelo teórico de treliça espacial com ângulo variável. O efeito *stiffening effect* é incorporado no modelo de aço *ao3*.

Tendo por objectivo a incorporação de todo o betão considerado efectivo na fase comportamental em estudo, a transformação da secção numa secção vazada equivalente apenas tem impacto nos parâmetros A_0 e p_0 . Na formulação do modelo de treliça espacial com ângulo variável, para carregamentos elevados, há a necessidade de definir as forças de equilíbrio na direcção longitudinal e transversal que se admitem serem absorvidas apenas pelas armaduras longitudinais e transversais, respectivamente. Para o estado I (fase pré-fissuração) o betão traccionado também deve ser contabilizado na direcção longitudinal e transversal para o equilíbrio do modelo. Deste modo, Andrade em 2010 [4] decidiu homogeneizar a secção nas referidas direcções. Esta opção traduz-se na espessura equivalente (h_{sq}), anteriormente definida, correspondente à espessura de betão participativo juntamente com as armaduras. A área de betão considerado efectivo é então “transformado” em área equivalente de aço, uma vez que as equações de equilíbrio do modelo de treliça estão formuladas em função das forças nas armaduras ($A_l f_l$ para as armaduras longitudinais e $A_t f_t / s$ para as armaduras transversais). Assim, a força longitudinal total ($F_{l,tot}$) e a força transversal total ($F_{t,tot}$) distribuída no modelo de treliça, respectivamente, vem:

$$F_{l,tot} = A_{lh} f_l = (A_l + nA_{cl,sq}) f_l \quad (3.19)$$

$$F_{t,tot} = A_{th} f_t / s = (A_t + nA_{ct,sq}) f_t / s \quad (3.20)$$

$$A_{cl,sq} = xy - (x - h_{sq})(y - h_{sq}) \quad (3.21)$$

$$A_{ct,sq} = s h_{sq} \quad (3.22)$$

Nas equações descritas anteriormente, o parâmetro n é o coeficiente de homogeneização (relação entre os módulos de elasticidade do betão e do aço - $n = E_c / E_s$), $A_{cl,sq}$ e $A_{ct,sq}$ são as áreas equivalentes de betão participativo para a armadura longitudinal total e para uma unidade da unidade transversal, respectivamente.

A explicação das áreas de betão consideradas “participantes” para o cálculo das forças totais de equilíbrio na direcção longitudinal e transversal e as respectivas forças nessas direcções encontra-se representada na Figura 3.7 (a) e (b), respectivamente.

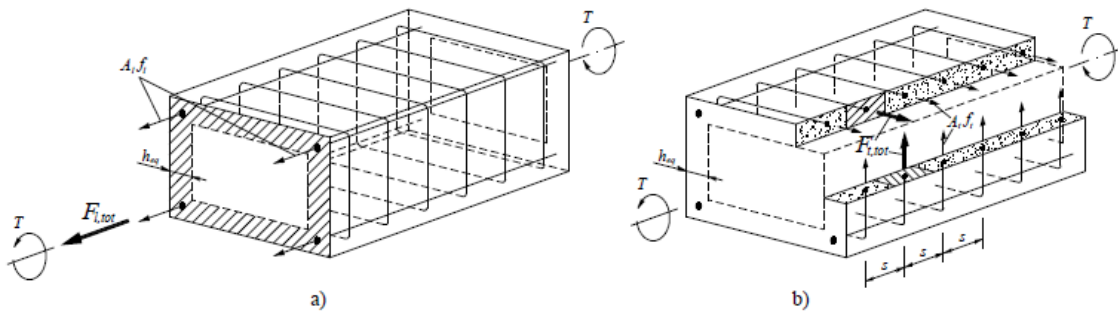


Figura 3.7 – Tubo de parede fina e fluxo de corte [2]

Andrade em 2010 [4] assumiu que, no modelo de treliça espacial, a distância entre as cordas (barras de cantos) não sofreu qualquer alteração. Caso não se adopte esta simplificação de cálculo é necessário, para cada iteração, calcular o centro de gravidade da secção que suporta a força correspondente. Nesta fase comportamental, este rigor não requer muita importância.

Com base no método de cálculo iterativo e do respectivo formalismo do modelo de treliça espacial com ângulo variável, os parâmetros t_d e α continuam a depender das forças totais na direcção longitudinal e transversal o que obriga a que estes continuem a ser considerados variáveis. A atribuição de valores constantes aos parâmetros t_d e α traduz-se na não consideração das forças referidas.

Tendo como origem a formulação do modelo teórico de treliça espacial com ângulo variável e o exposto anteriormente, Andrade em 2010 [4] definiu um novo método de cálculo iterativo para o cálculo dos pontos da curva teórica $T - \theta$ para a fase comportamental 1 (Estado I). Os passos estabelecidos para a realização da construção da Curva $T - \theta$, após o cálculo do momento torsor de fissuração (T_{cr}), são os seguintes (estabelecidos para os modelos de betão b14 e de aço ao3):

1. Assumir valores iniciais para t_d , α e β e seleccionar ε_{ds} . A partir da expressão matemática que define a Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão comprimido nas escoras (para o modelo de betão b14 da Tabela 3.1) obtém-se k_1 por integração numérica e a partir da equação $\sigma_d = k_1 \beta \sigma_c'$ é calculado σ_d ;
2. Calcular T a partir da equação $T = 2A_0 t_d \sigma_d \text{sen } \alpha \cos \alpha$ (referir que A_0 é calculada a partir de h_{eq});
3. Calcular ε_t e ε_l a partir das seguintes equações, respectivamente:

$$\varepsilon_t = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \cotg \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_l = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \cotg \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (3.24)$$

e calcular as tensões σ_l e σ_t a partir da expressão matemática que define a Curva $\sigma - \varepsilon$ da armadura ordinária tracionada (para o modelo de σ_3 da Tabela 3.1);

4. Averiguar t_d e α pelas equações seguintes:

$$t_d = \frac{A_l f_l}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t f_t}{s \sigma_d} \quad (3.25)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_l f_l}{p_0 \sigma_d t_d} \quad \text{ou} \quad (3.26)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{A_t f_t}{s \sigma_d t_d}$$

com as forças nas armaduras $A_l f_l$ e $A_t f_t / s$ calculadas pelas Equações 3.19 e 3.20, respectivamente;

5. Verificar β pela expressão matemática que define o factor de redução (para o modelo b_{14} da Tabela 3.1);

6.

- 6.1 Caso a série de valores calculados para t_d , α e β não estejam suficientemente próximos da série de valores assumidos, repetir os Passos (1) a (5);

- 6.2 Se a série de valores calculados para t_d , α e β estão bastante próximos da série de valores assumidos deve proceder-se ao cálculo de θ a partir da equação seguinte:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{ds}}{2 t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (3.27)$$

Assim obtém-se um par de valores (θ ; T) que constitui um ponto para o traçado da curva teórica $T - \theta$;

7. Enquanto T for inferior ou igual a T_{cr} , seleccionar outros valores para ε_{ds} e repetir os Passos (1) a (6) para cada valor de ε_{ds} , com o objectivo de obter-se vários pares de valores (θ ; T) para o traçado integral da Curva $T - \theta$ para o Estado I.

Andrade em 2010 [4] no seu estudo, realizou o cálculo teórico dos pontos da curva de comportamento $T - \theta$ para a fase comportamental 1 das vigas de referência, de modo a poder calcular o valor teórico da rigidez de torção ($K_{t,th}^I$). Para esta fase comportamental em estudo, se for assumida uma relação perfeitamente linear entre T e θ , a rigidez de torção pode ser calculada a partir da Equação 3.1. Resolvendo a equação referida em ordem a K_t^I e tomando para T o momento tórsor de fissuração (T_{cr}) e para θ a rotação associada, isto é, tomando para T e θ o último ponto da fase comportamental 1 obtém-se o valor da rigidez. Caso a curva $T - \theta$ não for perfeitamente linear, a rigidez calculada traduz-se numa rigidez secante. Andrade em 2010 [4] procedeu então à comparação das previsões teóricas obtidas a partir destas hipóteses formuladas anteriormente com os resultados experimentais.

Para cada viga de referência, Andrade em 2010 [4] analisou o valor experimental de rigidez de torção em Estado I ($K_{t,exp}^I$) e o respectivo valor teórico ($K_{t,th}^I$) calculado com base na Curva $T - \theta$. Para cada modelo teórico testado por Andrade, calculou também o valor médio (\bar{x}), o desvio padrão amostral (s) e o coeficiente de variação (cv).

O objectivo da incorporação da curva teórica $T - \theta$ por parte do autor referido anteriormente é apenas de constituir uma referência a partir da qual o modelo terá de “progredir” com vista a aproximar-se da curva experimental nesta fase comportamental.

Para o cálculo da rigidez K_t^I , Andrade em 2010 [4] considerou as variáveis α , t_d e β do procedimento de cálculo como constantes com os seguintes valores: $\alpha = 45^\circ$ (valor usualmente adoptado pela Teoria da Elasticidade para o Estado I), $t_d = h_{eq}$ (segundo a recomendação do ACI 318R-05 [2]) e $\beta = 1$ (não considerar o *softening effect* por a sua influência ser desprezável nesta fase). Com esta opção não é necessário o recurso ao método iterativo descrito por Andrade em 2010 [4] e mencionado já anteriormente nesta secção. Os resultados obtidos por Andrade mostram que as previsões das rigidezes experimentais são bastantes subestimadas e com níveis de dispersão notáveis tanto para as vigas com secção cheia como para vigas com secção vazada. Assim confirma-se a influência do betão tracionado para o equilíbrio longitudinal e transversal da treliça espacial.

Outra hipótese assumida por Andrade em 2010 [4] foi calcular a rigidez K_t^I segundo o método iterativo (referido anteriormente nesta secção) proposto pelo próprio autor, tomando os parâmetros α , t_d e β como variáveis do procedimento de cálculo. Deste modo, é contabilizada, no modelo, a influência do betão tracionado nas forças de equilíbrio longitudinal e transversal da treliça espacial através das Equações 3.19 e 3.20. Os resultados de Andrade em 2010 [4] mostram um incremento de rigidez das vigas com secção cheia ficando mais próxima da rigidez experimental, considerando a participação do betão para as forças de equilíbrio longitudinal e transversal. No entanto o incremento da rigidez teórica não

é suficiente. Com esta observação para as vigas com secção cheia concluiu-se que o núcleo de betão deve ser considerado efectivo para a rigidez da secção em Estado I e a sua participação deve ser considerada nos cálculos.

No caso das vigas com secção vazada, a questão da participação do núcleo de betão não se coloca, com a excepção de a espessura real das paredes da secção for superior à espessura equivalente (h_{eq}). Com este facto, existe uma parcela de betão interior que não é contabilizado para o cálculo da rigidez tornando-se necessário diferenciar as vigas com secção vazada em função da relação entre a espessura real e a espessura equivalente das paredes. Para as vigas em que a espessura real é inferior ou igual à espessura equivalente, a espessura de cálculo é tomada igual à espessura real e todo o betão da secção é portanto considerado para o cálculo da rigidez. Relativamente às vigas em que a espessura real é superior à espessura equivalente, a espessura de cálculo é tomada igual à espessura equivalente existente, existindo betão interior que não é considerado efectivo para o cálculo da rigidez. Para ambos os tipos de vigas de secção vazada referidos anteriormente, a rigidez teórica é bastante próxima da rigidez experimental.

Andrade em 2010 [4], quanto à participação do núcleo de betão nas secções cheias ou do eventual betão interior para as secções vazadas para o cálculo da rigidez, sem modificar o conceito do modelo assumido (tubo equivalente), optou por somar à rigidez de torção da secção vazada equivalente a rigidez à torção do seu núcleo ou betão interior, com recurso ao conceito de sobreposição de efeitos. Nas vigas com secção cheia o núcleo é constituído por uma secção cheia enquanto que nas vigas com secção vazada o betão interior é constituído por um tubo de parede fina. No processo de cálculo, a rigidez da secção vazada equivalente não é claramente calculada, ou seja, são obtidos sim os pontos de coordenadas ($T ; \theta$) para o traçado do gráfico. Por consequência, Andrade em 2010 [4] decidiu ter em conta a influência do núcleo no valor final da rotação calculada no final de cada iteração. O procedimento de cálculo usado é independente do procedimento global de cálculo iterativo protagonizado pelo autor referido e que consiste, para cada aumento de ε_{ds} , em realizar os passos seguintes:

1. Tendo como ponto de partida o procedimento global de cálculo iterativo de Andrade de 2010 [4], referido nesta secção, e para cada incremento de ε_{ds} , obter o valor da rotação θ_i e respectivo valor do momento torsor T_i ;
2. Calcular uma rigidez equivalente secante com base nos valores anteriores:

$$K_{ti,eq}^1 = T_i / \theta_i \quad (3.28)$$

3. A partir da Teoria da Elasticidade calcular a rigidez da secção de betão correspondente ao núcleo de betão (secções cheias) ou ao betão interior (secções vazadas): $K_{ti,n}^1$;

4. Com base na sobreposição de efeitos calcular a rigidez equivalente total da secção completa:

$$K_{ti,eq,tot}^1 = K_{ti,eq}^1 + K_{ti,n}^1 \quad (3.29)$$

5. Calcular a rotação corrigida, $\theta_{i,cor}$, tendo por base a rigidez equivalente total (Equação 3.30). Deste modo, obtém-se um par de valores ($\theta_{i,cor}$; T_i) que constitui um ponto para o traçado da curva teórica $T - \theta$:

$$\theta_{i,cor} = T_i / K_{ti,eq,tot}^1 \quad (3.30)$$

6. Repetir os Passos (1) a (5) para cada ponto de coordenadas (θ_i ; T_i) para o traçado integral da Curva $T - \theta$ para o Estado I.

Andrade em 2010 [4] aplicou dois critérios para definir as dimensões das secções relativamente ao cálculo da rigidez da secção correspondente ao núcleo de betão (secções cheias) e ao betão interior (secções vazadas). O primeiro critério consiste em definir tais dimensões tendo por base as dimensões exteriores da secção real, às quais deve ser subtraída duas vezes a espessura equivalente (Figura 3.8 (a)). Neste critério, apesar de não corresponder à realidade, assume-se que o tubo equivalente e o núcleo estão “desligados”, ou seja, não é considerada a existência de sobreposição entre a secção equivalente considerada no modelo de cálculo e o núcleo de betão. O segundo critério tem como objectivo corrigir o aspecto referido anteriormente, considerando a sobreposição da secção real e do núcleo até à linha média do fluxo de corte, considerada a uma profundidade de $h_{eq}/2$ medida do exterior (Figura 3.8 (b)). Esta tentativa de ligação (indirecta) entre a secção equivalente e o núcleo torna-se mais simples.

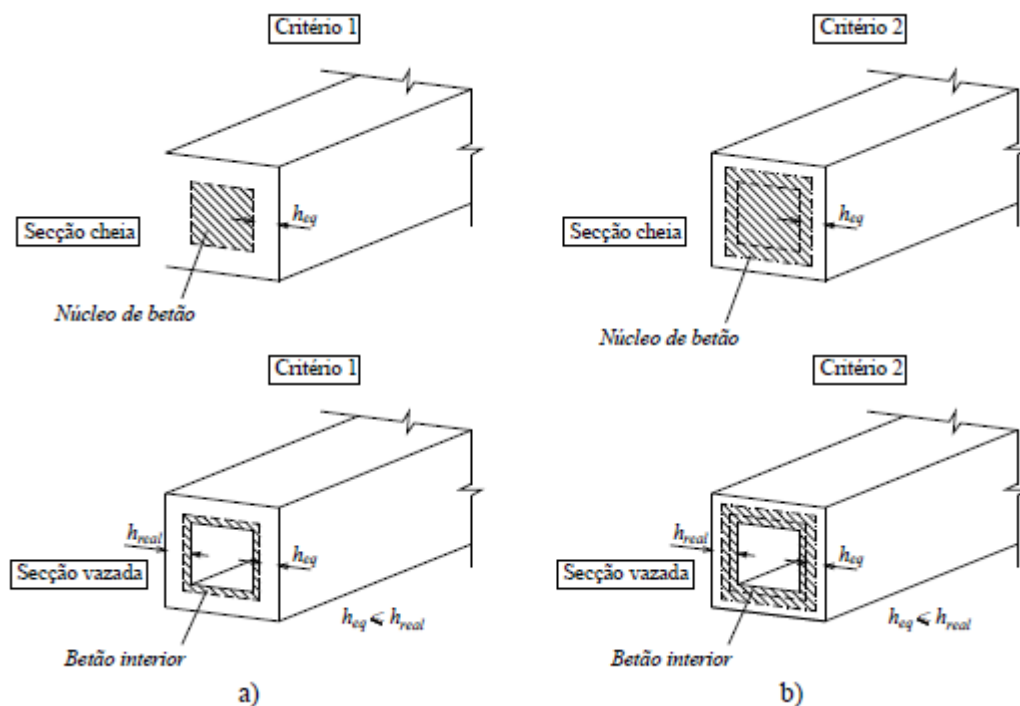


Figura 3.8 - Definição das dimensões exteriores no núcleo e do betão interior [4]

Relativamente ao factor de rigidez de torção, C , este assume diferentes valores no caso de o núcleo ser constituído por uma secção rectangular cheia (Figura 3.8 (a)) e no caso de o núcleo ser constituído por uma secção vazada (Figura 3.8 (b)). Na primeira situação, o factor de rigidez de torção (C) é $\beta x^3 y$ de acordo com a Teoria de St. Venant, com β obtido a partir da Tabela 3.1. Para a segunda situação, o factor de rigidez de torção (C) é $4A^2 h/u$ de acordo com a Teoria de Bredt para tubos de parede fina. O módulo de distorção G é igual a $E_c/[2(1+\nu)]$, em que o parâmetro E_c representa o módulo de elasticidade do betão e ν o coeficiente de Poisson. Andrade em 2010 [4] para o critério sem sobreposição, considerou $K = 1$ uma vez que todo o betão do núcleo é interior à secção real e se se considerar $\nu = 0,2$ nesta fase comportamental 1, obtém-se um valor aproximado para a rigidez de torção de $K_t^1 = K(CG)^1 = 0,417E_c C$. Para o critério com sobreposição, Andrade em 2010 [4], considerou $K = 0,7$ visto que verificou que, em geral, o limite do núcleo se aproxima do plano das armaduras. Assim, assumindo também que $\nu = 0,2$ em Estado I obtém-se $K_t^1 = K(CG)^1 = 0,292E_c C$.

Para secções cheias, Andrade em 2010 [4] concluiu que o segundo critério para definir as dimensões do núcleo (com sobreposição) é o mais apropriado pois apresenta uma previsão da rigidez bastante aceitável. No caso das secções vazadas para as quais existe betão interior participante, o autor referido, mostrou que a correcção da rigidez para ter em conta o núcleo de betão, independentemente do critério usado (sem sobreposição e com sobreposição), não

requer muita importância relativamente ao modelo que não contabilizou a existência de núcleo devido ao facto das espessuras das paredes do núcleo interior serem pequenas.

Deste modo, Andrade em 2010 [4], com base nos resultados obtidos considerou que se adoptem os seguintes critérios para o cálculo da Curva $T - \theta$ para a fase comportamental 1 (Estado I):

- Com recurso à Teoria de Bredt para tubos de parede fina, calcular o momento torsor de fissuração independentemente da viga ter uma secção cheia ou vazada;
- No caso das vigas com secção cheia é considerada a participação do núcleo de betão com sobreposição;
- No caso das vigas com secção vazada é desprezada a eventual influência do betão interior.

3.3.2 Vigas de Betão Pré-esforçado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)

Quando se aplica a Teoria da Elasticidade a elementos pré-esforçados, o efeito do pré-esforço longitudinal é introduzido através de um simples factor de pré-esforço $\gamma = \sqrt{1 + \sigma/f'_t}$ (Equações 2.46 ou 2.49), em que o parâmetro σ é tensão de compressão no betão induzida pelo pré-esforço. Nesta fase comportamental admite-se que o efeito das armaduras de pré-esforço em si pode ser desprezado. Em outras teorias pode também ser aplicada esta simplificação do efeito do pré-esforço. Deste modo, o momento torsor de fissuração para uma viga pré-esforçada, T_{cr}^P , é dado por:

$$T_{cr}^P = T_{cr}\gamma = T_{cr}\sqrt{1 + \sigma/f'_t} \quad (3.31)$$

O parâmetro T_{cr} representa o momento torsor de fissuração calculado a partir de qualquer das teorias descritas na secção 3.3.1, com a excepção da equação 3.14 estabelecida pelo código americano ACI 318R-05 [2]. Caso se pretenda utilizar a Teoria da Flexão Enviesada (Equações 3.11 e 3.12) ou a Teoria do Tubo Fino de Bredt (Equação 3.13) para o cálculo do momento torsor de fissuração de uma viga pré-esforçada, apenas é necessário afectar as equações respectivas pelo mesmo factor de pré-esforço γ , de acordo com a Equação 3.31.

Segundo o código ACI 318R-05 [2], o momento torsor de fissuração, para elementos pré-

esforçados, é incrementado de $\sqrt{1 + f_{pc}/4\sqrt{f'_c}}$ vezes o momento torsor correspondente ao da viga sem pré-esforço. Na expressão anterior, f_{cp} tem o mesmo significado que o parâmetro σ da Equação 3.31 e a mesma expressão define o factor de pré-esforço a usar quando são

usadas as disposições do ACI 318R-05 [2]. Assim, a Equação 3.14 para elementos pré-esforçados, fica:

$$T_{cr}^P = T_{cr} \gamma = 4\sqrt{f'_c} \left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right) \sqrt{1 + f_{pc}/4\sqrt{f'_c}} \quad (3.32)$$

Tudo o que foi exposto anteriormente é válido para o caso de vigas com pré-esforço longitudinal. Andrade em 2010 [4] no seu trabalho de pesquisa não encontrou estudos relativos a vigas sujeitas à torção com pré-esforço transversal ou com pré-esforço longitudinal e transversal simultâneo. O autor referido aconselha a que nestas situações o cálculo do momento torsor de fissuração seja revisto.

Em seguida apresenta-se um exemplo de uma viga rectangular sujeita a um momento torsor, T , e a uma tensão de pré-esforço transversal na direcção vertical (Figura 3.9 (a)), tendo por base o exposto na secção 2.3.1. Considere-se um elemento A isolado a meia altura da superfície lateral da viga (Figura 3.9 (b)). O elemento referido está sujeito em cada faceta a uma força tangencial, τ , devida à torção e sujeito nas facetas horizontais a uma tensão de compressão, σ , devido ao pré-esforço transversal. Na Figura 3.9 (c) está representado o círculo de Mohr para o estado de tensão do elemento A. É de realçar dois pontos no círculo de Mohr: o Ponto P de coordenadas $(-\sigma ; \tau)$ que representa o estado de tensão numa faceta horizontal e o Ponto P' de coordenadas $(0 ; \tau)$ que representa o estado de tensão numa faceta vertical, onde a tensão normal é zero. Os sinais atribuídos à tensão tangencial nas facetas são convencionais para a marcação gráfica.

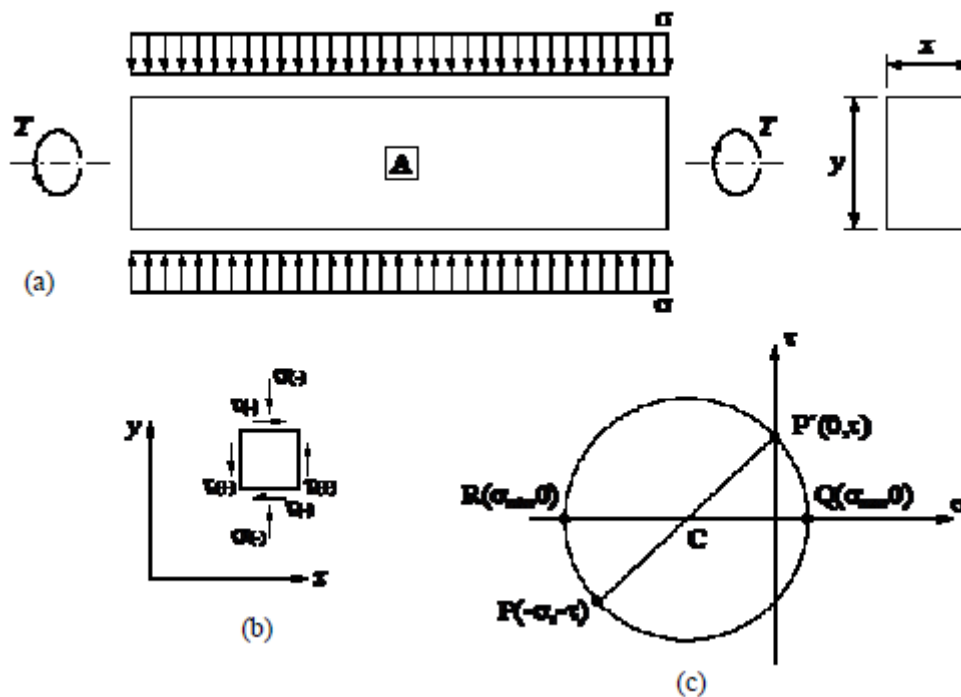


Figura 3.9 - Estudo de tensão numa viga sujeita à torção e pré-esforço transversal [4]

Comparando o caso de uma viga rectangular sujeita a um momento torsor, T , e a uma tensão de pré-esforço longitudinal (Figura 2.13) com a Figura 3.9 verifica-se que a única diferença é a inversão, em relação ao eixo horizontal, da circunferência de Mohr. Tendo por base o critério de rotura de Cowan de 1952 [18] (Figura 2.15) e a Equação 2.46 (assumindo que a rotura é governada pela tracção), Andrade em 2010 [4] concluiu que a dedução do factor de pré-esforço, γ , conduz aos mesmos resultados expostos na Secção 2.3.1.1, ou seja, à mesma expressão de cálculo para o referido factor $\gamma = \sqrt{1 + 10 \sigma / f'_t}$ (Equação 2.51). Na expressão anterior, o parâmetro σ representa a tensão de compressão no betão induzida pelo pré-esforço transversal na direcção vertical.

Andrade em 2010 [4] admitiu no seu trabalho que nas vigas com pré-esforço transversal, a tensão no betão induzida pela força do pré-esforço é igual nas duas direcções (horizontal e transversal). Assim, considerando uma tensão de pré-esforço transversal na direcção horizontal no exposto anteriormente conduziria ao mesmo resultado.

Desta forma, o momento torsor de fissuração, T_{cr}^P , para uma viga com pré-esforço transversal é igualmente dado pela Equação 3.31.

Considere-se agora o caso de uma viga rectangular sujeita a um momento torsor, T , e a tensões de pré-esforço na direcção longitudinal (σ_l) e transversal (σ_t) simultaneamente (Figura 3.10 (a)). Tomando novamente um elemento A isolado a meia altura da superfície

lateral da viga (Figura 3.10 (b)), sujeito em cada faceta à tensão tangencial, τ , devida à torção e sujeito também em cada faceta à tensão de compressão na direcção respectiva, σ_l ou σ_t , devido ao pré-esforço em ambas as direcções da viga. Na Figura 3.10 (c) está representado o círculo Mohr para o estado de tensão do elemento A, onde se destacam os seguintes pontos: o Ponto P de coordenadas $(-\sigma ; -\tau)$ que representa o estado de tensão numa faceta horizontal e o Ponto P' de coordenadas $(-\sigma' ; \tau)$ que representa o estado de tensão numa faceta vertical.

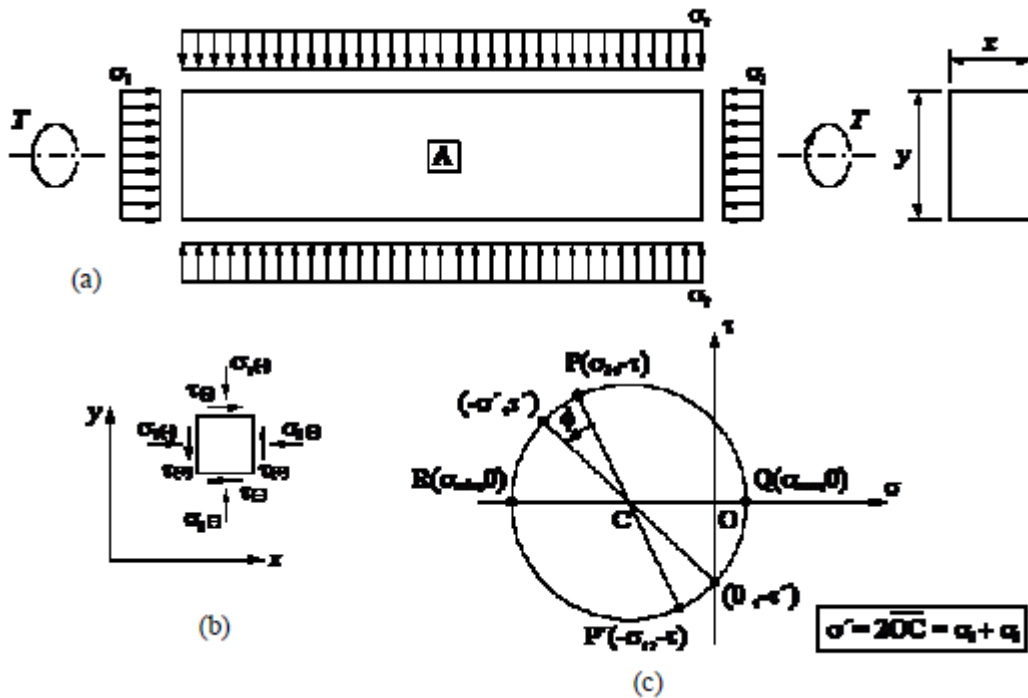


Figura 3.10 - Estado de tensão numa viga sujeita à torção e pré-esforço longitudinal e transversal [4]

Comparando o caso de uma viga rectangular sujeita a um momento torsor, T , e somente a uma tensão de pré-esforço longitudinal (Figura 2.13) com a Figura 3.10, verifica-se que o elemento isolado A deve rodar de um ângulo ϕ (Figura 3.10 (c)) para que as condições do estado de tensão (tensão normal apenas numa direcção) se reúnam. Tais condições, através do critério de rotura de Cowan de 1952 [17] (Figura 2.15), deram origem à Equação 2.46 (assumindo que a rotura é governada pela tracção). Tendo em conta estes factos, a tensão normal na faceta vertical é $\sigma_l + \sigma_t$ (Figura 3.10 (c)) e o factor de pré-esforço, para o caso de estudo de Andrade em 2010 [4], vem:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\sigma_l + \sigma_t}{f'_t}} \quad (3.33)$$

Assim, para uma viga pré-esforçada em ambas as direcções longitudinal e transversal, o momento tursor de fissuração, T_{cr}^P , é:

$$T_{cr}^P = T_{cr} \gamma = T_{cr} \sqrt{1 + \frac{\sigma_l + \sigma_t}{f_t'}} \quad (3.34)$$

Em relação à questão da participação ou não da armadura, os ensaios realizados por Andrade em 2010 [4], para as vigas com pré-esforço longitudinal, mostram que a presença de armaduras aumenta o momento tursor de fissuração. Para o mesmo tipo de vigas, o momento tursor de fissuração efectivo pode ser calculado através da seguinte equação (análoga à Equação 3.15):

$$T_{cr,ef}^P = (1 + 4\rho_{tot}) T_{cr}^P \quad (3.35)$$

Na equação anterior, o parâmetro ρ_{tot} que representa a taxa total de armadura poderá ou não ter em conta a armadura longitudinal de pré-esforço, dependendo se esta participa ou não no controlo da fissuração. De uma forma geral, uma armadura qualquer só poderá influenciar o momento tursor de fissuração se esta for aderente ao betão e se se localizar na “casca periférica” da secção. Assim, se a armadura longitudinal de pré-esforço cumprir os requisitos referidos anteriormente (por exemplo o caso da Figura 2.17 (a) com armaduras aderentes), ela poderá ser contabilizada na taxa total de armadura. No caso de a armadura longitudinal de pré-esforço não reunir os tais requisitos (caso ilustrado na Figura 2.17 (b) com armaduras aderentes ou não) ela não deverá ser incluída. A percentagem total da armadura longitudinal, $\rho_{l,tot}$, quando inclui a armadura de pré-esforço, pode ser calculada pela seguinte equação:

$$\rho_{l,tot} = \frac{A_{sl} + nA_p}{A_c} \approx \frac{A_{sl} + A_p}{A_c} \quad (3.36)$$

A taxa total de armadura, ρ_{tot} , para o caso das vigas com pré-esforço transversal, poderá ou não incluir a armadura transversal de pré-esforço, como explicado anteriormente para a armadura longitudinal de pré-esforço. A percentagem total da armadura transversal, $\rho_{t,tot}$, quando inclui a armadura de pré-esforço transversal, pode ser calculada pela seguinte equação:

$$\rho_{t,tot} = \frac{A_{st}u}{A_c s} + \frac{nA_{pt}u_p}{A_c s_p} \approx \frac{A_{st}u}{A_c s} + \frac{A_{pt}u_p}{A_c s_p} \quad (3.37)$$

O parâmetro A_{pt} representa a área de uma unidade de armadura transversal de pré-esforço, u_p é o perímetro médio da “cinta fechada” que se considera constituir a armadura de pré-esforço transversal e s_p o seu espaçamento, n é o coeficiente de homogeneização

($n = E_p/E_s$, sendo que E_s e E_p representam os módulos de elasticidade da armadura ordinária e de pré-esforço, respectivamente), que pode ser adoptado unitário.

No caso das vigas com pré-esforço longitudinal e transversal simultâneo, as taxas de armadura longitudinal e transversal quando consideradas efectivas para o controlo da fissuração, são calculadas de acordo com as Equações 3.36 e 3.37, respectivamente:

Para o cálculo do momento torsor de fissuração, as equações anteriores devem ser afectadas de um coeficiente minorativo de 0,85 quando $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$, tal como indicado por Bernardo em 2003 [9] e adoptado por Andrade em 2010 [4] para as vigas de betão armado.

Em termos de comparação dos estudos realizados pelos autores referidos anteriormente, relativamente ao momento torsor de fissuração, Andrade em 2010 [4] adicionou ao seu trabalho as vigas com secção rectangular cheia, de alta resistência e com pré-esforço longitudinal uniforme ensaiadas por Wafa *et al.* em 1995 para complementar a sua lista de vigas de referência.

Os resultados obtidos por Andrade em 2010 [4] apresentam para cada viga de referência analisada o valor experimental do momento torsor de fissuração ($T_{cr,exp}$) e os respectivos valores teóricos ($T_{cr,th}$) calculados com base nas seguintes teorias: Teoria da Elasticidade (Equação 3.8), Teoria da Flexão Enviada (Equações 3.11 e 3.12) e Teoria do Tubo Fino de Bredt (Equação 3.13 de Hsu e Equação 3.14 pelo ACI 318R-05 [2]). Os momentos torsos de fissuração, para todas as teorias mencionadas, foram corrigidos por Andrade em 2010 [4] através das Equações 3.31 (Equação 3.32 para o ACI 318R-05 [2]) e 3.35 para ter em conta a influência da força de pré-esforço e das armaduras, respectivamente. Andrade calculou também o valor médio (\bar{x}), o desvio padrão amostral (s) e o coeficiente de variação (cv) para cada viga e cada teoria.

De uma forma geral, Andrade em 2010 [4] observou que é a Teoria do Tubo Fino de Bredt (com a Equação 3.13 de Hsu) que fornece as melhores previsões, tal como já tinha observado para as vigas de betão armado, com a menor dispersão observada, apesar de esta ser apreciável. Assim, Andrade em 2010 [4] optou pela utilização da Teoria do Tubo Fino de Bredt para o cálculo do momento torsor de fissuração para todas as vigas com pré-esforço de acordo com a Equação 3.13 proposta por Hsu. A equação referida é afectada de um coeficiente minorativo de 0,85 quando $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ conforme proposto por Bernardo em 2003 [9]. Em relação à quantidade de armadura e à influência do pré-esforço, são ambos tidos em conta através de uma correcção adicional do momento torsor de fissuração de acordo com as Equações 3.35 e 3.31, respectivamente.

O cálculo da rigidez na fase comportamental 1 (Estado 1), para as vias com pré-esforço, baseia-se na transformação da secção efectiva numa secção vazada equivalente tendo em conta o cálculo dos parâmetros A_0 e p_0 .

A ponderação das armaduras de pré-esforço é necessária na homogeneização da secção na direcção longitudinal e transversal, de modo a contabilizar a participação do betão traccionado. Desta forma, as forças estabelecidas nessas armaduras devem ser incorporadas no modelo, na respectiva direcção. A força longitudinal total ($F_{l,tot}$) e a força transversal total ($F_{t,tot}$) distribuída no modelo de treliça, após a consideração das forças das armaduras de pré-esforço e considerando a hipótese da existência da armadura de pré-esforço longitudinal e transversal, vem:

$$F_{l,tot} = A_{lh}f_l = (A_l + n_c A_{cl,eq} + n_p A_{pl})f_l \quad (3.38)$$

$$F_{t,tot} = A_{th}f_t/s = (A_t/s + n A_{ct,eq}/s + n_p A_{pt}/s_p)f_t \quad (3.39)$$

Nas equações anteriores, $n_c = E_c/E_s$ representa o coeficiente de homogeneização betão/aço e $n_p = E_p/E_s \approx 1$ é o coeficiente de homogeneização aço de pré-esforço/aço de armadura ordinária (relação entre os módulos de elasticidade respectivos).

A extensão na armadura de pré-esforço, ε_{ps} , é calculada pela Equação 2.53 (Secção 2.3.2.1) utilizando o conceito de descompressão do betão e a extensão na armadura ordinária longitudinal, ε_l , pode ser calculada por uma das seguintes equações:

$$\sigma_l = \frac{X}{A_l} = \frac{\tau}{r_l} \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_l = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \cotg \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (3.41)$$

A equação 3.40 é baseada no modelo de Hsu para a fase comportamental 2.b - Estado II) e a equação 3.41 é baseada no Modelo da Treliça Espacial com Ângulo Variável. A extensão na armadura de pré-esforço na descompressão, ε_{dec} é calculada pela Equação 2.56. As extensões iniciais na armadura longitudinal de pré-esforço, ε_{pi} , e na armadura ordinária longitudinal, ε_{li} , quando se aplica o pré-esforço, são calculadas através das Equações 2.54 e 2.55, respectivamente.

O procedimento de cálculo da extensão na armadura de pré-esforço longitudinal, ε_{pi} , para o caso das vigas com pré-esforço longitudinal na fase comportamental em estudo tendo por base o modelo de treliça espacial com ângulo variável deve ser corrigido. O motivo para esta correcção deve-se ao facto de a viga não se encontrar fissurada na fase comportamental 1 e deve-se ter em conta que nesta fase existiu um intervalo de carregamento no qual a viga ainda

não atingiu a descompressão do betão. Desta forma, a extensão na armadura longitudinal de pré-esforço, antes da descompressão e em rigor, deve ser calculada da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{pi,l} + \varepsilon'_l \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_{pi,l} = \frac{f_{pi,l}}{E_{pl}} \quad (3.43)$$

$$\varepsilon'_l = -\varepsilon_{ii} + \varepsilon_l \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{A_{pl}f_{pi,l}}{A_l(E_s - E_c) + (A_c - A_h - A_{pl})E_c} \quad (3.45)$$

em que:

ε'_l = extensão efectiva na armadura longitudinal;

ε_{ii} = extensão inicial de compressão na armadura ordinária longitudinal;

ε_l = extensão na armadura longitudinal ordinária;

$f_{pi,l}$ = tensão inicial na armadura de pré-esforço longitudinal;

E_{pl} = módulo de elasticidade da armadura de pré-esforço longitudinal;

ε_{pl} = extensão na armadura de pré-esforço longitudinal;

$\varepsilon_{pi,l}$ = extensão inicial de tracção na armadura de pré-esforço longitudinal;

A_{pl} = área de uma unidade de armadura de pré-esforço longitudinal.

A armadura longitudinal sofre inicialmente um encurtamento ε_{ii} devido ao pré-esforço longitudinal, pelo que a extensão efectiva na armadura longitudinal, ε'_l deve ser calculada tendo em conta esse facto. A extensão na armadura longitudinal ε_l provocada pela aplicação de um momento torsor T é calculada com base na Equação 3.41.

A fibra da face exterior da escora de betão sofre igualmente um encurtamento ε_{dsi} devido à aplicação de pré-esforço longitudinal. Assumindo por hipótese um ângulo aproximado de 45° para a direcção da escora com o eixo da viga, o ε_{dsi} pode ser calculado, em módulo, da seguinte forma (ver Figura 3.11 (a)):

$$\varepsilon_{dsi} \approx \frac{\varepsilon_{ii}}{\cos 45} \quad (3.46)$$

No procedimento de cálculo iterativo, o valor de entrada ε_{ds} , deve ser somado do encurtamento inicial no cálculo da extensão efectiva ε'_{ds} . Com base na formulação do modelo de treliça espacial, e a partir do valor efectivo da ε'_{ds} calculam-se os restantes parâmetros inclusive a extensão na armadura longitudinal, ε_l .

$$\varepsilon'_{ds} = \varepsilon_{ds} + \varepsilon_{dsi} \quad (3.47)$$

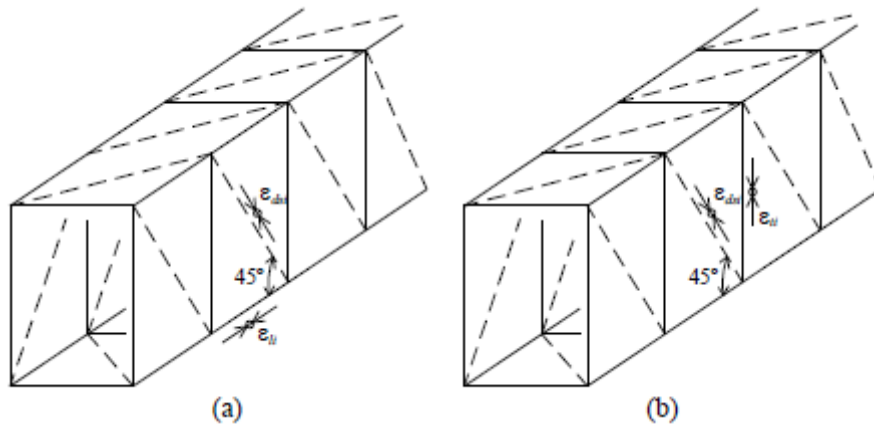


Figura 3.11 - Encurtamento inicial na escora de betão devido ao pré-esforço [4]

O procedimento de cálculo exposto anteriormente é válido até ao momento em que o incremento da extensão na armadura de pré-esforço é igual à extensão inicial na armadura longitudinal induzida pelo pré-esforço, isto é, $\varepsilon_l = \varepsilon_{li}$ (descompressão do betão). No entanto, uma vez que se pretende aproveitar o modelo formulado por Andrade em 2010 [4] até ao nível de carregamento correspondente ao momento torsor de fissuração, o mesmo procedimento continua válido após a descompressão. Assim, é possível ter, com maior exactidão, conhecimento das condições iniciais de deformação dos materiais devido à aplicação do pré-esforço.

O descrito anteriormente é válido para o caso do pré-esforço aderente uma vez que se baseia na hipótese de que o aumento da extensão na armadura de pré-esforço é igual ao aumento da extensão na armadura ordinária (Figura 2.16). Para o caso do pré-esforço não aderente ou exterior, esta hipótese continua a ser válida desde que a viga não possua um comprimento muito grande e se considerarmos as deformações médias ao longo da viga.

O procedimento de cálculo da extensão na armadura de pré-esforço transversal, ε_{pt} , para o caso das vigas com pré-esforço transversal, tendo por base o modelo da treliça espacial com ângulo variável deve também ser corrigido. De forma semelhante ao caso das vigas com pré-esforço longitudinal, a extensão na armadura transversal de pré-esforço (para posterior cálculo da tensão na mesma armadura, σ_{pt}) é calculada da seguinte forma:

$$\varepsilon_{pt} = \varepsilon_{pi,t} + \varepsilon'_t \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_{pi,t} = \frac{f_{pi,t}}{E_{pt}} \quad (3.49)$$

$$\varepsilon'_t = -\varepsilon_{ti} + \varepsilon_t \quad (3.50)$$

$$\varepsilon_{ti} = \frac{2 \frac{A_{pt}}{S_p} f_{pi,t}}{2 \frac{A_t}{S} (E_s - E_c) + \left(A'_c + A'_h - 2 \frac{A_{pt}}{S_p} \right) E_c} \quad (3.51)$$

em que:

ε'_t = extensão efectiva na armadura transversal;

ε_{ti} = extensão inicial de compressão na armadura ordinária transversal;

ε_t = extensão na armadura transversal ordinária;

$f_{pi,t}$ = tensão inicial na armadura de pré-esforço transversal;

E_{pt} = módulo de elasticidade da armadura de pré-esforço transversal;

ε_{pt} = extensão na armadura de pré-esforço transversal;

$\varepsilon_{pi,t}$ = extensão inicial de tracção na armadura de pré-esforço transversal;

A_{pt} = área de uma unidade de armadura de pré-esforço transversal.

A armadura transversal sofre inicialmente um encurtamento ε_{ti} devido ao pré-esforço transversal, pelo que a extensão efectiva na armadura transversal, ε'_t deve ser calculada tendo em conta esse facto. A extensão na armadura transversal ε_t provocada pela aplicação de um momento torsor T é calculada com base na seguinte equação:

$$\varepsilon_t = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (3.52)$$

A fibra da face exterior da escora de betão sofre igualmente um encurtamento ε_{dsi} devido à aplicação de pré-esforço transversal. Assumindo novamente por hipótese um ângulo aproximado de 45° para a direcção da escora com o eixo da viga, o ε_{dsi} pode ser calculado, em módulo, da seguinte forma (ver Figura 3.11 (b)):

$$\varepsilon_{dsi} \approx \frac{\varepsilon_{ti}}{\cos 45} \quad (3.53)$$

No procedimento de cálculo iterativo, o valor de entrada ε_{ds} , deve ser somado do encurtamento inicial no cálculo da extensão efectiva ε'_{ds} (Equação 3.47). Com base na formulação do modelo de treliça espacial, e a partir do valor efectivo da ε'_{ds} calculam-se os restantes parâmetros inclusive a extensão na armadura transversal, ε_t .

Para o caso das vigas com pré-esforço longitudinal e transversal, o cálculo da extensão das armaduras de pré-esforço em cada direcção, para posterior cálculo das tensões nas mesmas armaduras deve ser realizado com base no conjunto das Equações 3.42 a 3.45 e das Equações 3.48 a 3.51. Com base na sobreposição de efeitos e na Figura 3.1 a fibra da face exterior da escora de betão sofre igualmente um encurtamento ε_{dsi} devido à aplicação de pré-esforço

longitudinal e transversal. Assumindo novamente por hipótese um ângulo aproximado de 45° para a direcção da escora com o eixo da viga, o ε_{dsi} pode ser calculado, em módulo, da seguinte forma:

$$\varepsilon_{dsi} = \frac{\varepsilon_{li} + \varepsilon_{ti}}{\cos 45} \quad (3.54)$$

Desta forma, no procedimento de cálculo iterativo, o valor de entrada ε_{ds} , deve ser somado do encurtamento inicial no cálculo da extensão efectiva ε'_{ds} (Equação 3.47). Com base na formulação do modelo de treliça espacial, e a partir do valor efectivo da ε'_{ds} calculam-se os restantes parâmetros.

Para as vigas com pré-esforço continua a ser válida toda a restante matéria descrita na secção 3.3.1.

Tendo como origem a formulação do modelo teórico de treliça espacial com ângulo variável e o exposto anteriormente, Andrade em 2010 [4] definiu um novo método de cálculo iterativo para o cálculo dos pontos da curva teórica $T - \theta$ para a fase comportamental 1 (Estado I). Os passos estabelecidos para a realização da construção da Curva $T - \theta$, após o cálculo do momento tissor de fissuração (T_{cr}), são os seguintes (estabelecidos para os modelos de betão b14 e de aço ao3):

1. Assumir valores iniciais para t_d , α e β , seleccionar ε_{ds} , calcular ε_{dsi} a partir da Equação 3.46 (só pré-esforço longitudinal) ou da Equação 3.53 (só pré-esforço transversal) ou da Equação 3.54 (pré-esforço longitudinal e transversal) e calcular ε'_{ds} a partir da Equação 3.47. A partir da expressão matemática que define a Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão comprimido nas escoras (para o modelo de betão b14 da Tabela 3.1) obtém-se k_1 por integração numérica e a partir da equação $\sigma_d = k_1 \beta \sigma'_c$ é calculado σ_d ;
2. Calcular T a partir da equação $T = 2A_0 t_d \sigma_d \sin \alpha \cos \alpha$ (referir que A_0 é calculada a partir de h_{eq});
3. Calcular ε_t e ε_l a partir das seguintes Equações 3.23 e 3.24, respectivamente. Calcular ε_{pl} a partir da Equação 3.42 (só pré-esforço longitudinal) ou calcular ε_{pt} a partir da Equação 3.48 (só pré-esforço transversal) ou calcular ε_{pl} e ε_{pt} a partir das Equações 3.42 e 3.48 (pré-esforço longitudinal e transversal). Calcular as tensões σ_l , σ_t e σ_p a partir das expressões matemáticas que definem a Curva $\sigma - \varepsilon$ da armadura

ordinária tracionada (modelo de *ao3* da Tabela 3.1) e da armadura de pré-esforço tracionada (modelo *ap3* da Tabela 3.1);

4. Averiguar t_d pelas equações seguintes:

$$t_d = \frac{A_l \sigma_l + A_{pl} \sigma_{pl}}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t \sigma_t}{s \sigma_d} = \frac{A_l \sigma_l}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_{pl} \sigma_{pl}}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t \sigma_t}{s \sigma_d} \quad (3.55)$$

$$t_d = \frac{A_l \sigma_l}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t \sigma_t}{s \sigma_d} + \frac{A_{pt} \sigma_{pt}}{s_p \sigma_d} \quad (3.56)$$

$$t_d = \frac{A_l \sigma_l}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t \sigma_t}{s \sigma_d} + \frac{A_{pl} \sigma_{pl}}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_{pt} \sigma_{pt}}{s_p \sigma_d} \quad (3.57)$$

As equações anteriores referem-se aos casos de pré-esforço longitudinal, pré-esforço transversal e pré-esforço longitudinal e transversal, respectivamente. Averiguar α através das equações seguintes:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{\frac{A_t \sigma_t}{s}}{\frac{A_l \sigma_l}{p_0} + \frac{A_{pl} \sigma_{pl}}{p_0}} \quad (3.58)$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{\frac{A_t \sigma_t}{s} + \frac{A_{pt} \sigma_{pt}}{s_p}}{\frac{A_l \sigma_l}{p_0}} \quad (3.59)$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{\frac{A_t \sigma_t}{s} + \frac{A_{pt} \sigma_{pt}}{s_p}}{\frac{A_l \sigma_l}{p_0} + \frac{A_{pl} \sigma_{pl}}{p_0}} \quad (3.60)$$

As Equações 3.60 a 3.62 representam os casos de pré-esforço longitudinal, pré-esforço transversal e pré-esforço longitudinal e transversal, respectivamente com $A_l f_l$ e $A_t f_t / s$ a partir das Equações 3.38 (se existe pré-esforço longitudinal) e 3.39 (se existe pré-esforço transversal), respectivamente;

5. Verificar $\beta = \beta_\sigma = \beta_\varepsilon$ pela expressão matemática que define a Curva $\sigma - \varepsilon$ do betão comprimido nas escoras (modelo *b14* da Tabela 3.1);

6.

- 6.1 Caso a série de valores calculados para t_d , α e β não estejam suficientemente próximos da série de valores assumidos, repetir os Passos (1) a (5);
- 6.2 Se a série de valores calculados para t_d , α e β estão bastante próximos da série de valores assumidos deve proceder-se ao cálculo de θ a partir da Equação 3.27.

Assim obtém-se um par de valores de coordenadas ($\theta ; T$) que constitui um ponto para o traçado da curva teórica $T - \theta$;

7. Enquanto T for inferior ou igual a T_{cr} , seleccionar outros valores para ε_{ds} e repetir os Passos (1) a (6) para cada valor de ε_{ds} , com o objectivo de obter-se vários pares de valores ($\theta ; T$) para o traçado integral da Curva $T - \theta$ para o Estado I.

Para cada viga de referência, Andrade em 2010 [4] analisou o valor experimental de rigidez de torção em Estado I ($K_{t,exp}^I$) e os respectivos valores teóricos ($K_{t,th}^I$) calculado com base na Curva $T - \theta$. Para cada modelo teórico testado por Andrade, calculou também o valor médio (\bar{x}), o desvio padrão amostral (s) e o coeficiente de variação (cv). O autor referido verificou que independentemente do modelo de cálculo e do tipo de viga (com secção cheia ou vazada) as rigidezes são bastantes subestimadas apesar de no entanto o modelo com a contabilização do núcleo (com sobreposição) apresentar globalmente os melhores resultados. Outro facto verificado por Andrade em 2010 [4] é que os resultados para as vigas com pré-esforço longitudinal uniforme não foram tão bons em relação aos resultados para as vigas de betão armado. Estas conclusões de Andrade no entanto não podem ser consideradas definitivas uma vez que as vigas com pré-esforço analisadas foram muito reduzidas. Deste modo, Andrade em 2010 [4], com base nos resultados obtidos considerou que se adoptem os seguintes critérios para o cálculo da Curva $T - \theta$ para a fase comportamental 1 (Estado I):

- No caso das vigas com secção cheia é considerada a participação do núcleo de betão com sobreposição;
- No caso das vigas com secção vazada é desprezada a eventual influência do núcleo do betão.

3.4. Zona Comportamental 2.a (Estado II)

3.4.1 Vigas de Betão Armado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)

Tendo por base o exposto na Secção 3.2, a Curva $T - \theta$, após a viga alcançar o momento torsor de fissuração e devido a um incremento brusco da rotação para um momento torsor constante e igual a T_{cr} , aproxima-se novamente a uma recta até um determinado nível do momento torsor. A Subzona 2.a da curva de comportamento representa o aumento súbito da rotação referido, constituindo desta forma uma zona de transição entre o Estado I (não fissurado) e o Estado II efectivo (fissurado). A ligação entre a Zona I e a Subzona 2.b é estabelecida pela Subzona 2.a.

De acordo com a formulação do modelo de treliça espacial com ângulo variável modificado como referido na secção 3.3, a subzona 2.a tem como premissa básica o facto de o betão fissurar. A participação do betão traccionado na direcção longitudinal e transversal para o equilíbrio do modelo deixa de ser contabilizada após ser atingido o momento torsor de fissuração. Deste modo, o equilíbrio do modelo de treliça, na direcção longitudinal e transversal é assegurado pelas armaduras através das equações de equilíbrio das forças nas armaduras ordinárias ($A_l f_l$ para as armaduras longitudinais e $A_t f_t / s$ para as armaduras transversais).

O momento torsor de fissuração traduz-se pelo desaparecimento da participação do betão mantendo-se o mesmo nível de carregamento da viga o que provoca um aumento súbito da rotação, tal como foi observado experimentalmente por Andrade em 2010 [4]. Devido a esta deformação instantânea a viga tem de se adaptar às novas condições de equilíbrio na fase fissurada. Quanto maior a taxa de armadura de torção menor o aumento da rotação, pois ao existir maior área de armadura, a rigidez pós-fissuração é maior e contrariamente a deformação instantânea nas armaduras é menor (Hsu em 1968 [27])

Para o caso das vigas com secção vazada, as observações realizadas por Andrade em 2010 [4] mostram que, na globalidade, a Subzona 2.a é inexistente comparativamente às vigas com secção cheia. Esta observação torna-se evidente pois ao não existir núcleo de betão nas vigas com secção vazada, a viga não consegue redistribuir transversalmente as tensões tangenciais, o que faz com que o novo estado mobilizado para equilíbrio de carregamento tende a ser mobilizado rapidamente. Assim, Andrade em 2010 [4] assume para este tipo de vigas a não existência da Subzona 2.a.

Hsu em 1973 [29] considerou um tubo equivalente de betão armado, com uma secção transversal de forma arbitrária e uma espessura de parede uniforme, tal como ilustrado na Figura 3.12 para derivar a rigidez de torção após a fissuração ($(GC)^{II} \equiv K^{II}$) para uma viga de betão armado. Hsu através de ensaios experimentais pode comprovar tal analogia uma vez que os resultados obtidos mostraram que o comportamento torsional pós-fissuração não é fundamentalmente afectado pelo núcleo de betão da secção.

Com base na Teoria de Bredt para tubos de parede fina, a tensão tangencial pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\tau = \frac{T}{2Ah} \quad (3.61)$$

em que:

A = área limitada pela linha média da armadura transversal;

h = espessura da parede do tubo de betão armado.

Esta tensão tangencial induz tensões e extensões nas armaduras e no betão. O tubo de betão armado é idealizado com base na Treliça Espacial de Rausch representada na Figura 3.12 para avaliar os parâmetros referidos anteriormente após a fissuração do elemento.

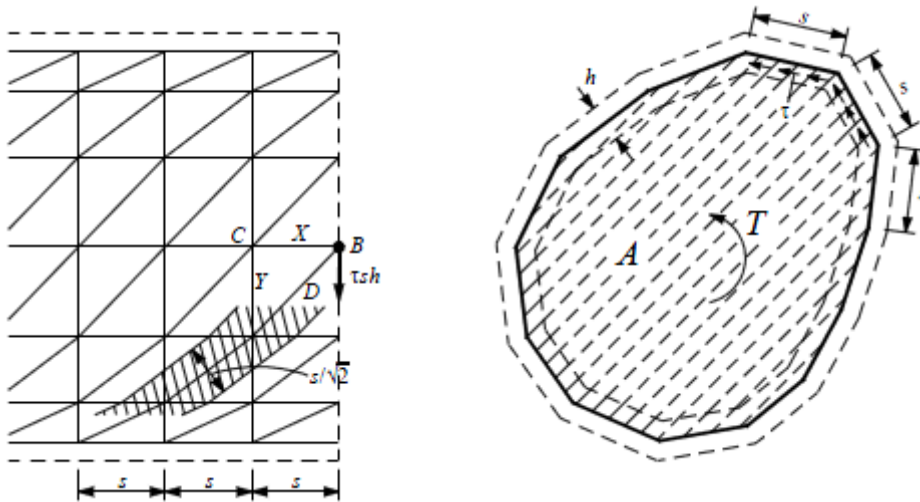


Figura 3.12 - Treliça espacial para um tubo de betão armado com secção arbitrária (Estado II) [4]

Na análise de Rausch da treliça espacial, as forças nos varões longitudinais, nos varões transversais e nas escoras diagonais de betão são designadas por X , Y e D , respectivamente. Cada uma destas forças é constante ao longo do tubo e estão relacionadas de acordo com a seguinte equação:

$$X = Y = \frac{D}{\sqrt{2}} = \tau sh \quad (3.62)$$

A partir da equação anterior, a tensão nas escoras de betão (σ_c), nos varões longitudinais (σ_l) e nos varões transversais, podem ser expressas por:

$$\sigma_c = \frac{D}{(s/\sqrt{2})h} = 2\tau \quad (3.63)$$

$$\sigma_l = \frac{X}{A_l} = \frac{\tau}{r_l} \quad (3.64)$$

$$\sigma_t = \frac{Y}{A_t} = \frac{\tau}{r_t} \quad (3.65)$$

O parâmetro r_l representa a taxa de armadura longitudinal em relação à área de parede ($r_l = A_l/uh$) e r_t representa a taxa de armadura transversal em relação à área de parede ($r_t = A_t/sh$).

A partir da Lei de Hooke e das Equações 3.63 a 3.65, a extensão nas escoras de betão (ε_c), nos varões longitudinais (ε_l) e nos varões transversais (ε_t) podem ser calculadas por:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{2\tau}{E_c} \quad (3.66)$$

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_s} = \frac{\tau}{E_s r_l} \quad (3.67)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_s} = \frac{\tau}{E_s r_t} \quad (3.68)$$

O aparecimento de uma distorção γ nas paredes do tubo é causado pelas extensões obtidas a partir das Equações 3.66 a 3.68. A distorção γ pode ser obtida através da compatibilidade de deformações numa célula básica da treliça espacial constituída por uma escora diagonal de betão e pelos varões das armaduras envolventes, formando um quadrado de lado s . Em 1973, Hsu [25] demonstrou, de forma teórica, que a distorção total γ pode ser decomposta na soma de três parcelas: a distorção da célula devido ao encurtamento da escora de betão, γ_c , a distorção devido ao alongamento dos varões longitudinais, γ_l , e dos varões transversais, γ_t . Para calcular γ , Hsu derivou a seguinte equação:

$$\gamma = \gamma_c + \gamma_l + \gamma_t = 2\varepsilon_c + \varepsilon_l + \varepsilon_t \quad (3.69)$$

Substituindo as Equações 3.66 a 3.68 na equação anterior, Hsu obteve:

$$\frac{\tau}{\gamma} = \frac{E_s}{4n + 1/r_l + 1/r_t} \quad (3.70)$$

Na Equação 3.70, $n = E_s/E_c$ e se se definir $G_{cr} = \tau/\gamma$ como sendo o módulo de distorção, vem:

$$G_{cr} = \frac{E_s}{4n + 1/r_l + 1/r_t} \quad (3.71)$$

Tendo em conta as definições das taxas de armaduras ρ_l e ρ_t , vem :

$$\rho_l = \frac{A_l}{A_c} = \frac{uh}{A_c} r_l \quad (3.72)$$

$$\rho_t = \frac{A_t u}{A_c s} = \frac{uh}{A_c} r_t \quad (3.73)$$

Substituindo as Equações 3.72 e 3.73 na Equação 3.71, fica:

$$G_{cr} = \frac{E_s}{4n + \frac{uh}{A_c \rho_l} + \frac{uh}{A_c \rho_t}} \quad (3.74)$$

De acordo com Bredt, a constante de torção pós-fissuração C_{cr} de um elemento de betão com espessura uniforme de parede pode ser expressa por:

$$C_{cr} = \frac{4A^2h}{u} \quad (3.75)$$

em que o parâmetro A representa a área limitada pela linha média da armadura transversal. Para Hsu [25], no caso de elementos de betão armado, a melhor forma de definir A é a partir da armadura transversal em detrimento do betão. Esta opção deve-se ao facto de na fase pós-fissuração, o betão encontrar-se já fissurado e o momento torsor resistente é conferido principalmente pelas armaduras tracionadas conjuntamente com o betão comprimido. A rigidez de torção pós-fissuração, $G_{cr}C_{cr} \equiv (GC)^{II} \equiv K^{II}$, é obtida a partir da combinação das Equações 3.74 e 3.75:

$$(GC)^{II} \equiv K^{II} = \frac{4E_s A^2 A_c}{u^2 \left(\frac{4nA_c}{uh} + \frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_t} \right)} \quad (3.76)$$

O denominador da Equação 3.76 é constituído por três termos que representam, respectivamente, as contribuições para a rigidez pós-fissuração das escoras de betão, da armadura longitudinal e da armadura transversal.

A Equação 3.76 utilizada para secções transversais arbitrárias, pode ser também aplicável para o caso de secções rectangulares, considerando que $A_c = xy$, $A = x_1y_1$ e $u = 2(x_1 + y_1)$, vindo:

$$(GC)^{II} \equiv K^{II} = \frac{E_s x_1^2 y_1^2 xy}{(x_1 + y_1)^2 \left[\frac{2nxy}{(x_1 + y_1)h} + \frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{\rho_t} \right]} \quad (3.77)$$

Na equação anterior, x e y representam, respectivamente, a dimensão menor e maior da secção rectangular, enquanto que x_1 e y_1 representam, respectivamente, a dimensão menor e maior das cintas rectangulares, referidas aos eixos dos ramos (Figura 2.5). Na mesma equação, o parâmetro h representa a espessura uniforme da parede do tubo com secção rectangular. Devido à necessidade de se conhecer a espessura efectiva (h_e), Hsu em 1973 [25] apresentou uma expressão empírica para h_e com base em resultados experimentais. O autor referido observou que a relação adimensional h_e/x era aproximadamente proporcional à taxa total de armadura $\rho_i + \rho_t$ na forma:

$$h_e = 1,4(\rho_i + \rho_t)x \quad (3.78)$$

É de referir que h_e (Equação 3.78) constitui um parâmetro empírico e não deve ser, por isso, encarado como sendo a espessura efectiva da parede para o cálculo da resistência última à torção.

A Figura 3.13 ilustra a parte da Curva $T - \theta$ correspondente à fase elástico-linear em regime fissurado (Zona 2.b da Figura 3.1), de acordo com o modelo proposto por Hsu em 1973 [25]. Tal curva pode ser aproximada a uma recta com um declive correspondente à rigidez de torção em estado fissurado $((GC)_{II}^{\Pi})$, calculada através da Equação 3.77 e utilizando a espessura efectiva da parede h_e calculada a partir da Equação 3.78.

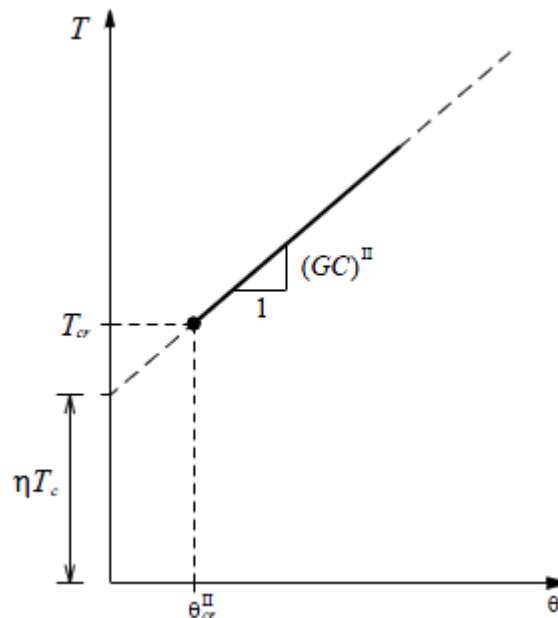


Figura 3.13 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime fissurado (Estado II) [25]

A intercepção do prolongamento inferior da recta na Figura 3.13 com o eixo das ordenadas num determinado ponto permite definir a posição, no referencial, da recta de comportamento em estudo. A partir de resultados experimentais, Hsu em 1973 [35] determinou que a ordenada na origem da referida recta podia ser obtida a partir de ηT_c , sendo η um coeficiente e T_c um momento torsor dado por (f'_c em *psi*, x e y em *in.*):

$$T_c = \frac{x^2 y}{3} 2,4 \sqrt{f'_c} \quad (3.79)$$

A Equação 3.79 foi estabelecida tendo por base uma tensão tangencial limite devida à torção igual a $2,4 \sqrt{f'_c}$. Tal tensão corresponde a um momento torsor de cerca de 40% do momento torsor de fissuração da viga.

Hsu [25] aquando da avaliação experimental do coeficiente η , observou que no caso de vigas com espessuras de parede diferente, mas materiais e as restantes dimensões da secção iguais, a rigidez de torção pós-fissuração mantém-se igual. Contudo, a ordenada na origem cresce com a espessura da parede. O autor referido estabeleceu a seguinte relação entre η e h/x , sendo h a espessura da parede e x a menor dimensão da secção:

$$\eta = 0,57 + 2,86 h/x \quad (3.80)$$

No caso de uma secção cheia, $\eta = 2$ uma vez que $h/x = 0,5$.

Bernardo em 2003 [9] verificou o facto interessante de o parâmetro η ser função da espessura da parede. Os ensaios experimentais mostram que o núcleo de betão não tem influência na resistência última de um elemento de betão armado à torção. Contrariamente, a Equação 3.80 indica que o núcleo de betão tem uma influência no comportamento à torção pós-fissuração através da ordenada na origem da recta $T - \theta$. Assim sendo, a relação $T - \theta$ pós-fissuração pode ser então expressa através da seguinte equação:

$$T = \eta T_c + (GC)^{II} \theta \quad (3.81)$$

Na Figura 3.14 estão representadas esquematicamente as Curvas $T - \theta$ teóricas na fase pós-fissuração para uma viga com secção oca (Caso 1) e para uma viga com secção cheia (Caso 2). Em relação ao parâmetro η e com base na Equação 3.80, Andrade em 2010 [4] concluiu que η é inferior para a secção vazada comparativamente à secção cheia correspondente. Na Figura 3.14 estão ilustradas as duas Curvas $T - \theta$ para os dois tipos de secção (Equações 3.77 e 3.79, com $h = h_g$), as quais são paralelas uma vez que os parâmetros $(GC)^{II}$ e T_{cr} são iguais mas localizando-se a alturas diferentes por influência do parâmetro η . As curvas teóricas fornecem dois valores para as rotações ($\theta_{th,1}$ e $\theta_{th,2}$), tal que $\theta_{th,1} > \theta_{th,2}$, para um determinado momento torsor T . Mostra-se assim a influência indirecta da presença do núcleo de betão através do parâmetro η .

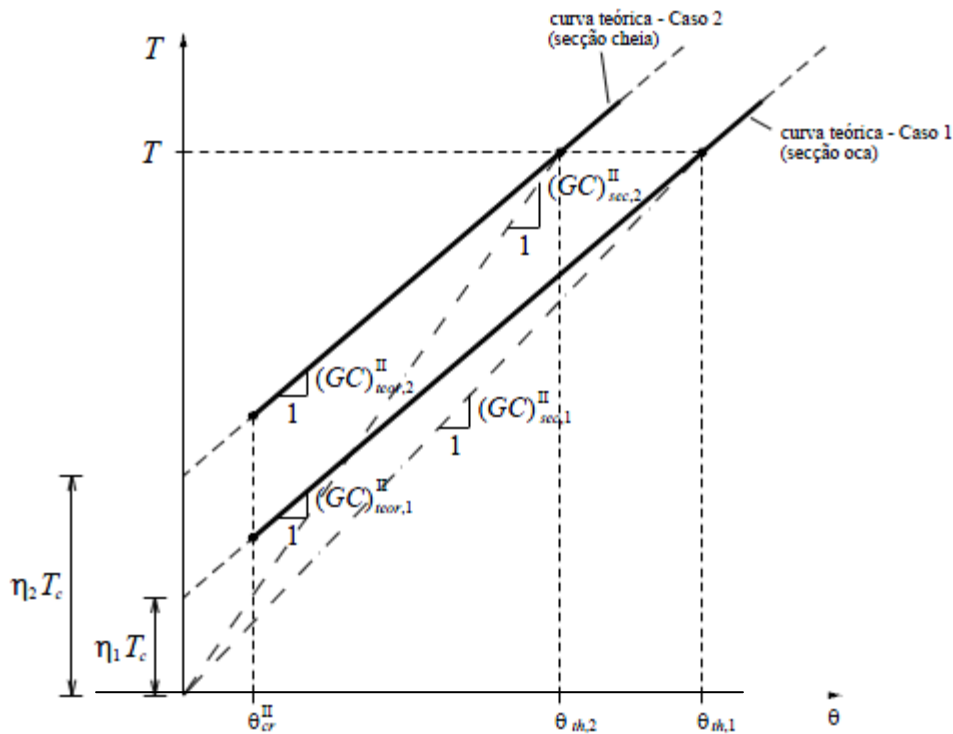


Figura 3.14 - Influência do núcleo de betão na rigidez de torção pós-fissuração [9]

A influência do núcleo de betão pode também ser mostrada em termos de rigidez secante. A rigidez calculada através da Equação 3.77 é, de facto, uma rigidez tangente e é igual para uma secção cheia ou vazada. Em relação à questão da rigidez secante, a Figura 3.14 mostra que, para um determinado momento torsor T , para o caso da secção vazada $((GC)_{sec,1}^{II})$ a correspondente rigidez é inferior comparativamente ao caso da secção cheia $((GC)_{sec,2}^{II})$. Isto mostra claramente a influência do núcleo de betão na rigidificação da secção em Estado II.

Bernardo em 2003 [9], observou que para vigas de alta resistência, o cálculo de T_c (Equação 3.79) para o cálculo posterior da ordenada na origem ηT_c depende de uma percentagem do módulo de rotura. Tendo por base esta observação, o autor referido propôs, de forma análoga para o Estado I para o cálculo do momento torsor de fissuração, multiplicar a Equação 3.79 pelo factor 0,85, ficando:

$$T_c = 0,85 \times \frac{x^2 y}{3} 2,4 \sqrt{f'_c} = \frac{x^2 y}{3} 2,04 \sqrt{f'_c} \quad (3.82)$$

Bernardo em 2003 [9] e Bernardo e Lopes em 2008 [10] verificaram que o modelo semi-empírico de Hsu de 1973 [25] para caracterizar o Estado II se ajusta bastante bem com as observações experimentais, incluindo os resultados das vigas de alta resistência.

Recorde-se que a viga na passagem para o Estado II terá como ponto de partida o facto do betão traccionado, ao fissurar, deixar de ter influência para o equilíbrio do modelo na

direcção longitudinal e transversal. Deste modo, as equações das forças de equilíbrio do modelo de treliça (Equações 3.19 e 3.20) vêm em função das forças nas armaduras ordinárias ($A_l f_l$ para as armaduras longitudinais e $A_t f_t/s$ para as armaduras transversais).

É de referir ainda que o núcleo das secções cheias participa no comportamento das vigas em Estado II, particularmente na questão da rigidez de torção. Desta forma, no cálculo da Subzona 2.a deve-se ter em conta a influência do núcleo, uma vez que este continua assumir uma importância no comportamento da viga na passagem para o estado fissurado, no que se refere à rigidez.

Andrade em 2010 [4] designou por “MTEAV estado 1” para o modelo com α , t_d e β variáveis, com a participação do betão no equilíbrio longitudinal e transversal da treliça, com a contabilização do núcleo e com sobreposição, para as vigas com secção cheia. Com o objectivo de modelar a Subzona 2.a para o tipo de vigas referido anteriormente, Andrade em 2010 [4] para o procedimento de cálculo “MTEAV estado 1” (modelo de cálculo descrito na Secção 3.3.1) foi recalculado com duas seguintes alterações, passando a denominar-se “MTEAV estado 2”:

- Não é tida em conta a influência do betão traccionado para o equilíbrio da treliça na direcção longitudinal e transversal. Assim sendo, a força longitudinal total $F_{l,tot}$ () e a força transversal total distribuída na armadura transversal ($F_{t,tot}$) no modelo de treliça são calculados através das seguintes equações em vez das Equações 3.19 e 3.20:

$$F_{l,tot} = A_l f_l \quad (3.83)$$

$$F_{t,tot} = A_t f_t / s \quad (3.84)$$

- Não é utilizada a espessura equivalente (h_e) adoptada para a escora de betão para o estado não fissurado porque a viga encontra-se agora no estado fissurado. A espessura equivalente da escora é novamente associada ao parâmetro t_d cujo valor é calculado de acordo com a formulação geral do modelo de treliça, isto é, o seu valor é obtido de acordo com os resultados obtidos a partir do procedimento de cálculo. Em função de t_d voltam a ser definidos os parâmetros A_0 (área limitada pela linha média do fluxo de corte) e p_0 (perímetro da linha média do fluxo de corte), com a linha média do fluxo a ser assumida como coincidindo com a linha média da parede com espessura t_d . Contudo, o núcleo interior de betão continua a participar no cálculo das rotações de acordo com o método apresentado na Secção 3.3.1. O núcleo de betão é definido

geometricamente com base no conhecimento das medidas exteriores da secção e do h_{eq} calculado para o Estado I.

Na Figura 3.15 está ilustrado um patamar correspondente ao momento torsor de fissuração (T_{cr}), ou seja, a Subzona 2.a é assim definida por um patamar horizontal, com momento torsor constante e igual a T_{cr} , e limitado num intervalo de deformações $\theta_{cr}^I \leq \theta \leq \theta_{cr}^{II}$. O valor de θ_{cr}^I corresponde à abcissa do ponto de intersecção entre o patamar horizontal para $T = T_{cr}$ e o modelo teórico apresentado na secção 3.3.1 (“MTEAV estado 1”). O valor θ_{cr}^{II} corresponde à abcissa do ponto de intersecção entre o patamar horizontal para $T = T_{cr}$ e o modelo teórico descrito nesta secção (“MTEAV estado 2”). Andrade em 2010 [4], em alternativa ao último modelo referido, testou também o modelo semi-empírico proposto por Hsu em 1973 [25] designado por “Hsu estado 2” (Figura 3.15 (b)). Tendo por base este modelo, o valor de θ_{cr}^{II} corresponde à abcissa do ponto de intersecção entre o patamar horizontal para $T = T_{cr}$ e a recta $T - \theta$ (Figura 3.15 (b)), após o cálculo da inclinação da referida recta $T - \theta$ para o Estado II ($(GC)^{II}$) e do respectivo posicionamento no gráfico $T - \theta$ mediante o cálculo da ordenada na origem, ηT_c .

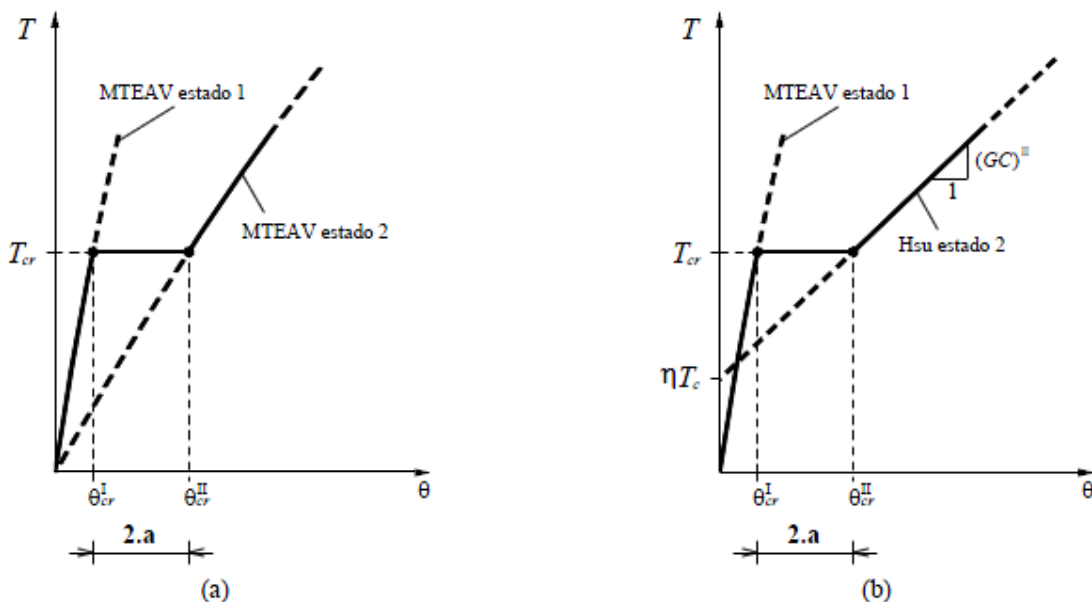


Figura 3.15 - Modelação teórica da subzona 2.a da Curva $T - \theta$ (vigas com secção cheia) [4]

Para cada viga de referência, Andrade em 2010 [4] analisou o valor experimental do comprimento do patamar correspondente à subzona 2.a ($\Delta\theta = \theta_{cr}^{II} - \theta_{cr}^I$) ($\Delta\theta_{exp}$), quando indicado pelos autores ou quando possível de ser obtido directamente na curva experimental

$T - \theta$ e os respectivos valores teóricos ($\Delta\theta_{th}$) calculados com base na Curva $T - \theta$ obtida a partir do aplicativo computacional desenvolvido por Andrade. Para cada modelo teórico testado por Andrade em 2010 [4], calculou também o valor médio (\bar{x}), o desvio padrão amostral (s) e o coeficiente de variação (cv). O autor referido anteriormente verificou que, de uma forma geral, o comprimento do patamar $\Delta\theta$ é previsto teoricamente com alguma dificuldade, independentemente do modelo teórico utilizado, mostrando assim a complexidade do fenómeno desta fase de transição comportamental. Esta dificuldade foi demonstrada por Andrade em 2010 [4] ao observar que, para algumas vigas com secção cheia, não apresentavam um patamar horizontal na curva experimental $T - \theta$ e também o facto do modelo de Hsu para outras vigas fornecer uma previsão “negativa” para $\Delta\theta$. Tal como já tinha sido observado pelos autores Bernardo e Lopes em 2009 [11], o modelo de Hsu (“Hsu modelo 2”) é aquele que dá as melhores previsões para o patamar $\Delta\theta$, devido ao facto de a rigidez de torção pós-fissuração das vigas ser consideravelmente bem prevista por este modelo. Andrade em 2010 [4] concluiu que, apesar do procedimento teórico referido nesta secção ser relativamente mais satisfatório, comparativamente ao modelo de Hsu para o posicionamento da recta $T - \theta$ no Estado I, os resultados que obteve não são conclusivos na sua generalidade.

3.4.2 Vigas de Betão Pré-esforçado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)

Após ser atingido o momento torsor de fissuração, considera-se que de forma instantânea, o betão traccionado na direcção longitudinal e transversal deixa de ter influência para o equilíbrio do modelo. Desta forma, as equações de equilíbrio do modelo de treliça ficam escritas com as forças nas armaduras ordinárias ($A_l f_l$ para as armaduras longitudinais e $A_t f_t / s$ para as armaduras transversais) e de forma adicional com as forças nas armaduras de pré-esforço ($A_{pl} f_{pl}$ para as armaduras longitudinais e $A_{pt} f_{pt} / s_p$ para as armaduras transversais). O equilíbrio do modelo de treliça fica assim assegurado pelas armaduras ordinárias e de pré-esforço, na direcção longitudinal e transversal.

Hsu e Mo em 1985 [32] realizaram um estudo sobre a introdução/localização da armadura de pré-esforço na resistência e no comportamento geral de uma viga sujeita à torção pura. Bernardo em 2003 [9], com base nos seus resultados obtidos em ensaios de vigas com secção vazada com pré-esforço longitudinal uniforme e nos resultados dos autores referidos anteriormente, verificou que participação da armadura de pré-esforço aderente só deve ser considerada na rigidez de torção quando esta se encontrar dentro da zona efectiva da secção. Desta forma, a consideração da armadura de pré-esforço (longitudinal e/ou transversal) é feita através do cálculo da taxa total de armadura longitudinal (Equação 3.36) e/ou

transversal (Equação 3.37) e da força total na armadura na direcção em que existe pré-esforço (Equações 3.38 e 3.39), de acordo com o exposto nas Secções 3.3.1 e 3.3.2. No caso do modelo de Hsu [25], a taxa de armadura é inserida na Equação 3.77 para o cálculo da rigidez de torção pós-fissuração, $(GC)''$.

Uma vez que o modelo assumido é o de uma treliça, a armadura de pré-esforço localizada fora da espessura efectiva, ou seja, onde se localizam os planos das paredes da treliça espacial, dificilmente pode ter alguma influência apreciável na rigidez de torção em Estado II.

Em relação à extensão da armadura de pré-esforço, esta é calculada com base no procedimento de cálculo descrito na Secção 3.3.1. A extensão na armadura ordinária longitudinal, ε_l , é obtida pela Equação 3.67 (modelo de Hsu) ou pela Equação 3.41 (modelo MTEAV). A extensão na armadura ordinária transversal, ε_t , é calculada pela Equação 3.68 (modelo de Hsu) ou Equação 3.52 (modelo MTEAV).

Andrade em 2010 [4] por forma a modelar a Subzona 2.a para as vigas com secção cheia e com pré-esforço, recalculou o procedimento de cálculo “MTEAV estado 1” de acordo com o exposto na Secção 3.3.2 e com as alterações indicadas na Secção 3.4.1, relativas às forças longitudinal e transversal a considerar no modelo da treliça espacial e aos parâmetros A_0 e p_0 . Para o caso do cálculo das referidas forças, em substituição das Equações 3.83 e 3.84 (vigas de betão armado), devem ser utilizadas as Equações 3.38 e 3.84 (vigas com pré-esforço longitudinal), Equações 3.38 e 3.83 (vigas só com pré-esforço transversal) ou Equações 3.38 e 3.39 (vigas com pré-esforço nas duas direcções). Este procedimento de cálculo tem a denominação de “MTEAV estado 2”.

No modelo de Hsu [25] (“Hsu estado 2”), a ordenada na origem da recta teórica de comportamento elástico-linear em Estado II é dada por $\eta T'_c$. O parâmetro T'_c representa a contribuição do betão para as vigas com pré-esforço. Hsu, para o cálculo de T'_c , propôs a seguinte expressão (para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme):

$$T'_c = T_c \gamma_1 = T_c \left(2,5 \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f'_t}} - 1,5 \right) \quad (3.85)$$

O parâmetro γ_1 representa um factor de pré-esforço que é função de γ e foi proposto empiricamente por Hsu em 1984 [26]. O factor de pré-esforço referido teve por base os resultados experimentais obtidos por Hsu e assumindo a hipótese de que as vigas com pré-esforço requerem a mesma armadura mínima das vigas sem pré-esforço.

Bernardo em 2003 [9] através de novos resultados experimentais, verificou que o factor de pré-esforço γ_1 , tal como definido anteriormente, não possibilitava a obtenção de bons resultados para a ordenada na origem para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme. Deste modo, o autor referido estabeleceu uma nova expressão para o factor de pré-esforço γ_1 :

$$\gamma_1 = 2,20\gamma - 1,53 = 2,20 \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f'_t}} - 1,53 \quad (3.86)$$

Andrade em 2010 [4] verificou que não havia estudos sobre esta questão para o caso de vigas com pré-esforço transversal, pelo que assumiu que a Equação 3.86 para o cálculo do factor de pré-esforço γ_1 é válida para este tipo de vigas. No caso de vigas com pré-esforço longitudinal e transversal simultâneo, o factor de pré-esforço γ a adicionar na Equação 3.86 deve ser obtido com base na Equação 3.34.

Para as vigas de alta resistência, o referido ao longo da presente secção mantém-se válido. No entanto, a contribuição do betão, T_c , para o cálculo da ordenada na origem da recta referente à fase comportamental em estudo e para vigas sem pré-esforço (Equação 3.79) é afectada pelo coeficiente de redução 0,85 uma vez que depende do módulo de rotura:

$$T_c = 0,85 \times \frac{x^2 y}{3} 2,4 \sqrt{f'_c} = \frac{x^2 y}{3} 2,04 \sqrt{f'_c} \quad (3.87)$$

A afectação deste parâmetro pelo factor de pré-esforço γ_1 segue o mesmo processo descrito atrás.

Andrade em 2010 [4] tendo por base os resultados obtidos para o comprimento do patamar correspondente à Subzona 2.a, $\Delta\theta = \theta_{cr}^I - \theta_{cr}^{II}$, para somente duas vigas de referência com secção cheia e com pré-esforço longitudinal uniforme, verificou que apresentam os mesmos problemas verificados na Secção 3.4.1 relativamente à ausência do patamar horizontal na curva experimental e ao posicionamento absurdo da recta $T - \theta$ a partir do modelo de Hsu (“Hsu estado 2”). Os resultados mostraram-se desta forma também inconclusivos no que se refere ao escolher qual o melhor modelo teórico a adoptar.

3.5. Zona Comportamental 2.b e 3 (Estado II e Estado III)

3.5.1 Vigas de Betão Armado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)

Após a viga atingir o momento torsor de fissuração e a Curva $T - \theta$ apresentar, para o caso das vigas com secção cheia, um acréscimo brusco da rotação para um momento torsor constante e igual a T_{cr} , a viga entra no estado fissurado e portanto o modelo original de treliça espacial com ângulo variável passaria a ser válido. No entanto Andrade em 2010 [4] verificou que a Curva $T - \theta$ teórica obtida a partir do aplicativo computacional desenvolvido pelo autor referido para a Fase 2.b, nomeadamente para as vigas com secção cheia, não se adequa com rigor à respectiva Curva $T - \theta$ experimental. Esta observação deve-se ao facto de o modelo de treliça espacial com ângulo variável assumir logo desde o início do carregamento um estado plenamente fissurado, o que não se verifica na realidade. Para o caso das vigas com secção cheia poderá apresentar maiores desvios devido ao facto do modelo de treliça espacial com ângulo variável não considerar a influência do núcleo de betão na rigidez de torção pós-fissuração, sendo que não corresponde à realidade.

A Figura 3.16 ilustra os desvios observados por Andrade em 2010 [4] entre as Curvas $T - \theta$ teórica e experimental:

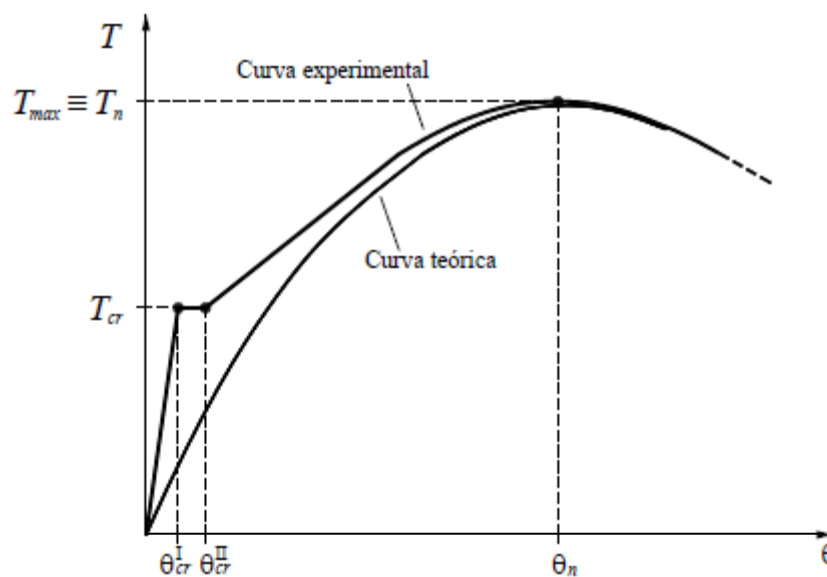


Figura 3.16 - Desvios entre as Curvas $T - \theta$ experimental e teórica (Zona 2.b) [4]

O aplicativo computacional desenvolvido por Andrade em 2010 [4], denominado de TORQUE_MTEAV (utilizando o modelo de betão $b14$ e o modelo de aço $ao3$) fornece boas previsões para o comportamento último das vigas de referência analisadas pelo autor referido, nomeadamente, o momento torsor resistente (T_n) e a respectiva rotação (θ_n). Andrade optou por adoptar a curva teórica $T - \theta$ calculada a partir do aplicativo TORQUE_MTEAV correspondente à fase última comportamental (Fase 3 - Figura 3.1) e corrigir o troço da Curva $T - \theta$ correspondente à Fase 2.b (Figura 3.1) de forma a aproximar os resultados teóricos aos experimentais.

O critério de correcção adoptado por Andrade em 2010 [4] consistiu em fixar todos os pontos da curva teórica $T - \theta$, obtida pelo aplicativo TORQUE_MTEAV, localizados à direita do ponto de coordenadas $(\theta_n ; T_n)$ e ajustar a referida curva teórica $T - \theta$ desde o ponto correspondente ao início do carregamento em estado fissurado (Fase 2.b - Figura 3.1), ponto com coordenadas $(\theta_{cr}^{II} ; T_{cr})$, até ao ponto referido anteriormente $(\theta_n ; T_n)$. Com base nos modelos referidos anteriormente na Secção 3.4.1 (“MTEAV estado2” e “Hsu estado2”) obtém-se a coordenada θ_{cr}^{II} .

Andrade em 2010 [4] optou por fazer o ajustamento referido anteriormente apenas ao nível das rotações, uma vez que ao nível dos momentos torsores o autor citado obteve previsões teóricas bastante aceitáveis. Tal como já foi referido neste trabalho o modelo de treliça espacial com ângulo variável estabelece como premissa o facto de a viga já se encontrar fendilhada logo desde o início do carregamento o que não corresponde à realidade. Este aspecto associado à não incorporação da participação do núcleo de betão nas secções cheias, é presumivelmente a causa da maior dificuldade do modelo teórico prever as rotações com resultados bastantes aceitáveis tal como para os momentos torsores. Por este motivo, Andrade [4] optou em proceder ao ajustamento apenas das rotações na fase comportamental 2.b.

Na Figura 3.17 encontra-se ilustrada a metodologia seguida por Andrade em 2010 [4] para corrigir a curva teórica $T - \theta$ para a fase 2.b, sendo válida tanto para vigas com secções cheias como com secções vazadas.

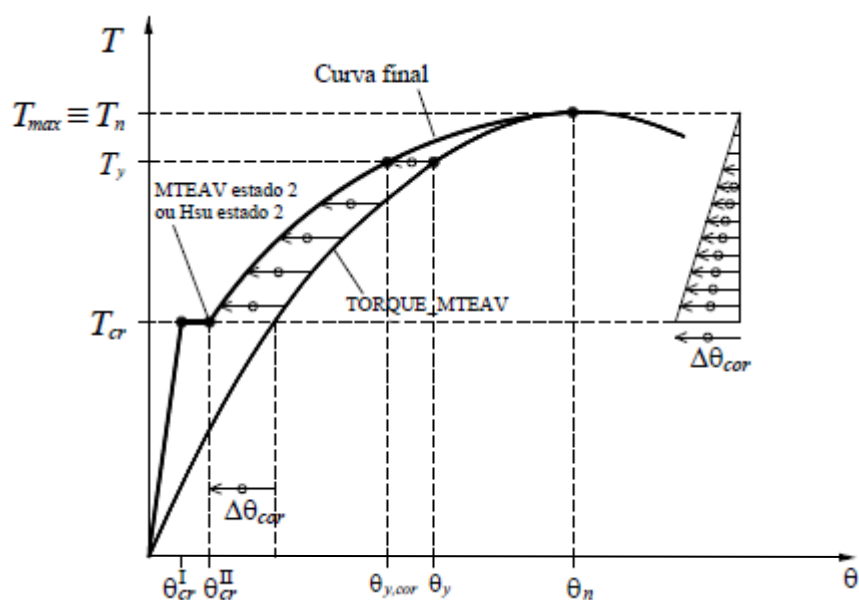


Figura 3.17 - Correção das rotações (Zona 2.b) [4]

Com base na Figura 3.17, a rotação obtida mediante o aplicativo TORQUE_MTEAV e correspondente ao momento tissor de fissuração (T_{cr}) é corrigida através de uma translação de $\Delta\theta_{cor}$ por forma a coincidir com o valor de θ_{cr}^{II} . As rotações entre a rotação correspondente a T_{cr} (que sofre a correcção anterior) e a rotação θ_n correspondente a T_n (que não sofre correcção), são corrigidas de acordo com a variação linear representada através do triângulo das translações da Figura 3.17.

Este critério de correcção aplicado às rotações abrange também o início da Fase 3 além da Fase 2.b, conforme ilustra a Figura 3.17. Este aspecto verifica-se, nomeadamente nas vigas com comportamento dúctil, que mostram pontos ($\theta ; T$) correspondentes à cedência das armaduras antes de ser atingido o momento tissor máximo T_n na Curva $T - \theta$ e a partir dos quais começa a fase comportamental 3 (Figura 3.1).

Recorde-se que os desvios entre a Curva $T - \theta$ teórica e experimental para a Zona 2.b são maiores para as vigas com secção cheia e conseqüentemente terá mais influência deste método de correcção. O método de correcção representado na Figura 3.17, simplificada e de forma indirecta, tem em conta a influência do núcleo de betão na rigidez de torção entre os pontos de coordenadas ($\theta_{cr}^{II}; T_{cr}$) e ($\theta_n ; T_n$). Do ponto de vista físico, este método de correcção considera tal influência como máxima para o primeiro ponto e uma variação linear entre os mesmos.

Com base na metodologia de correcção apresentada por Andrade em 2010 [4], os pontos de cedência das armaduras de torção são também corrigidos no sentido de serem ligeiramente movidos para a esquerda.

Uma vez que esta correcção anteriormente descrita impõe a alteração do estado da viga entre os pontos de coordenadas ($\theta_{cr}^{II}; T_{cr}$) e ($\theta_n ; T_n$), as previsões obtidas com base na formulação original do modelo de treliça espacial com ângulo variável (TORQUE_MTEAV) não são válidas neste intervalo de deformações e conseqüentemente o procedimento que deu origem ao aplicativo computacional referido. Desta forma, é necessário calcular-se o estado interno corrigido da viga (tensões e deformações da viga) para além de se proceder à referida correcção entre os pontos de coordenadas ($\theta_{cr}^{II}; T_{cr}$) e ($\theta_n ; T_n$), isto em relação à obtenção de informação do comportamento da viga. Após o cálculo da curva teórica $T - \theta$ ser realizado de acordo com o aplicativo TORQUE_MTEAV e depois da metodologia de correcção representada na Figura 3.17 ter sido aplicada no intervalo de pontos entre ($\theta_{cr}^{II}; T_{cr}$) e ($\theta_n ; T_n$), Andrade em 2010 [4] assumiu que as coordenadas de cada ponto ($\theta_{cor}; T$) ou apenas da rotação θ_{cor} são conhecidas à partida. O autor referido, depois de realizar algumas experiências para tentar implementar a correcção do estado interno das vigas, obteve as seguintes conclusões:

- Impondo à partida os valores constantes (θ_{cor} ; T) não é possível obter uma solução numérica com base na formulação do modelo de treliça espacial com ângulo variável. Esta constatação deve-se ao facto dos valores constantes (θ_{cor} ; T) corresponderem a um ponto que não se encontra na curva original $T - \theta$ obtida a partir do aplicativo TORQUE_MTEAV o que não cumpre a condição de equilíbrio interno da treliça espacial com base na qual a formulação original foi derivada (Figura 3.18 (a));
- Se à partida apenas se impuser somente o valor constante θ_{cor} , o procedimento de cálculo devolve um valor para T , em projecção vertical e na linha que passa por θ_{cor} sobre a Curva $T - \theta$ original e obtida com base no aplicativo TORQUE_MTEAV, resultando por isso para a coordenada T um novo valor inferior ao nível do momento torsor em análise (Figura 3.18 (b)).

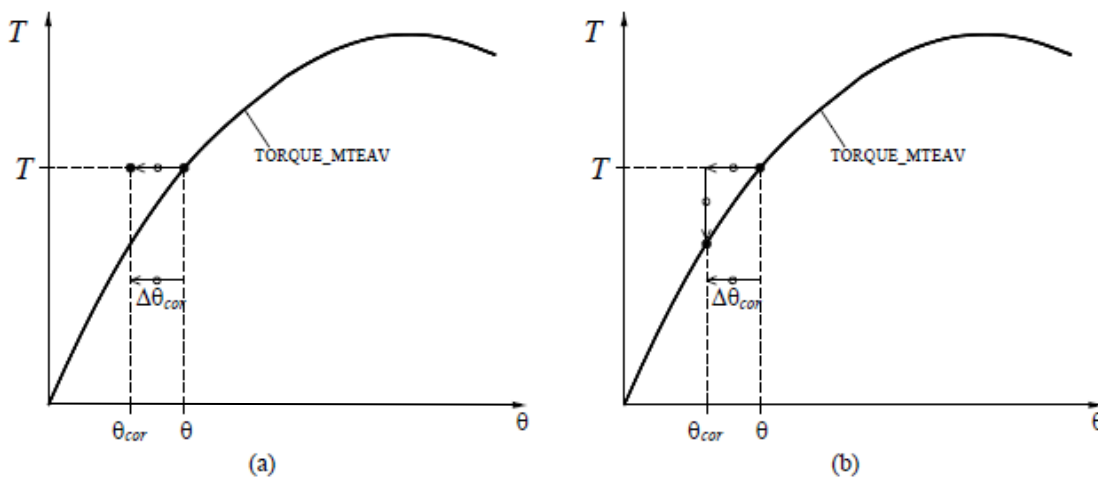


Figura 3.18 - Tubo de parede fina e fluxo de corte [2]

Andrade em 2010 [4] optou por manter os parâmetros t_d , α , β_σ e β_ε obtidos a partir do aplicativo TORQUE_MTEAV inalterados, ou seja, manteve os mesmos valores calculados para as deformações (ε_{ds} , ε_l e ε_t) e tensões (σ_d , σ_l e σ_t) nos materiais. Esta opção de não recalculer o estado interno da viga depois da correcção das rotações corresponde a considerar deformações e tensões ligeiramente superiores às reais o que na questão da verificação em serviço está do lado da segurança.

De acordo com o exposto nesta secção, Andrade em 2010 [4] desenvolveu um aplicativo computacional que tinha por base o procedimento de cálculo descrito nas Secções 3.3.1 e 3.4.1, para o cálculo teórico dos pontos da curva de comportamento $T - \theta$ para as fases comportamentais 1 e 2.a (Estado I e transição entre os Estados I e II) e o procedimento de cálculo do modelo teórico baseado na analogia da treliça espacial com ângulo variável (TORQUE_MTEAV) para as vigas de referência do autor referido anteriormente. Neste

aplicativo computacional Andrade [4] adicionou a incorporação da metodologia de correcção apresentada anteriormente nesta secção. Desta forma, tal aplicativo constitui uma nova versão modificada do aplicativo TORQUE_MTEAV, com o objectivo de calcular a curva teórica $T - \theta$ integral com todas as fases comportamentais. Ao novo aplicativo, Andrade em 2010 [4] atribui-lhe o nome de TORQUE_MTEAVmod.

Andrade apresentou, para cada viga de referência, o valor experimental da rigidez de torção em Estado II (K_{exp}^{II}) e da ordenada na origem ($T_{o,exp}^{II}$) bem como os respectivos valores teóricos (K_{th}^{II} e $T_{o,exp}^{II}$) obtidos para os dois modelos de cálculo utilizados pelo autor referido para obter o ponto inicial da Fase 2.b (Figura 3.17): “MTEAV estado 2” e “Hsu estado 2”. A partir da combinação dos dois modelos referidos anteriormente com o modelo de treliça espacial com ângulo variável com as correcções das rotações, o modelo global que dá origem à Curva $T - \theta$ passa a ser designado por Andrade em 2010 [4] por “MTEAV 123” e “MTEAV 1Hsu3”, respectivamente. O referido autor a partir de uma análise preliminar, verificou que para as vigas com secção cheia, as Curvas $T - \theta$ teóricas obtidas com base nos dois modelos teóricos “MTEAV 123” e “MTEAV 1Hsu3” estão geralmente muito próximas na fase comportamental correspondente ao Estado II e também muito próximas da curva experimental.

Independentemente do modelo teórico utilizado (“MTEAV 123” e “MTEAV 1Hsu3”), para o caso das vigas com secção cheia, a previsão da rigidez de torção em Estado II (K^{II}) é bastante aceitável embora apresente níveis de dispersão notáveis. No caso das vigas com secção vazada, Andrade em 2010 [4] verificou que as Curvas $T - \theta$ teóricas obtidas a partir dos dois modelos teóricos (“MTEAV 123” e “MTEAV 1Hsu3”) praticamente se sobrepõem e também são muito próximas da curva experimental na fase de comportamental correspondente ao Estado II. Esta sobreposição verificada resulta do facto de, nas vigas com secção vazada, não ser considerada a fase de transição do Estado I para o Estado II na forma de um patamar horizontal nas Curvas $T - \theta$.

Andrade em 2010 [4], tendo como objectivo a previsão da parte da Curva $T - \theta$ correspondente à fase comportamental em Estado II, concluiu que o modelo teórico “MTEAV 1Hsu3” apresenta melhores resultados em relação ao modelo teórico “MTEAV 123”. Esta conclusão é verificada particularmente par as vigas com secção cheia, uma vez que para as vigas com secção vazada Andrade [4] não observou diferenças entre as previsões dos referidos modelos. O autor referido conclui também que aparentemente os modelos teóricos, para as vigas com secção cheia, continuam a ter uma grande dificuldade em estimar correctamente as rotações para a última fase comportamental. Para as vigas com secção vazada, o mesmo autor concluiu que os modelos teóricos mostram boas previsões para os momentos torsores de cedência, embora com níveis de dispersão notavelmente maiores comparativamente aos

observados para as vigas com secção cheia. Em relação às deformações correspondentes aos momentos torsores de cedência para as vigas com secção vazada, os resultados obtidos por Andrade em 2010 [4] mostram boas previsões do ponto de vista dos valores médios globais, independentemente do modelo teórico utilizado (“MTEAV 123” e “MTEAV 1Hsu3”).

3.5.2 Vigas de Betão Pré-esforçado de Resistência Normal ou de Alta Resistência com Secção Rectangular (Cheia ou Vazada)

Na presente secção e de forma análoga para as vigas de betão armado, Andrade em 2010 [4] optou por conservar a curva teórica $T - \theta$ calculada a partir do aplicativo TORQUE_MTEAV e correspondente à fase última comportamental (Fase 3 da Figura 3.1) a partir do ponto $(T_n ; \theta_n)$. Desta forma, a correcção adoptada por Andrade [4] para aproximar os resultados teóricos aos experimentais, incidirá somente no troço da Curva $T - \theta$ correspondente à Fase 2.b e início da Fase 3 para as vigas com comportamento dúctil.

O exposto na Secção 3.5.1, para as vigas de betão armado, continua válido para o caso das vigas de betão pré-esforçado. De acordo com os mesmos critérios referidos para as vigas de betão armado na secção 3.5.1, Andrade em 2010 [4] corrigiu a curva teórica $T - \theta$ calculada a partir do aplicativo TORQUE_MTEAV para o caso das vigas de betão pré-esforçado.

Assim, Andrade em 2010 [4] desenvolveu, novamente, um aplicativo computacional que tinha por base o procedimento de cálculo descrito nas Secções 3.3.1 e 3.4.1, para o cálculo teórico dos pontos da curva de comportamento $T - \theta$ para as fases comportamentais 1 e 2.a (Estado I e transição entre os Estados I e II) e o procedimento de cálculo do modelo teórico baseado na analogia da treliça espacial com ângulo variável (TORQUE_MTEAV) para as vigas de referência com pré-esforço do autor referido anteriormente. Neste aplicativo computacional Andrade [4] adicionou a incorporação da metodologia de correcção apresentada anteriormente na secção 3.5.1. Desta forma, tal aplicativo constitui uma nova versão modificada do aplicativo TORQUE_MTEAV, com o objectivo de calcular a curva teórica $T - \theta$ integral com todas as fases comportamentais. Ao novo aplicativo, Andrade em 2010 [4] atribuiu-lhe o nome de TORQUE_MTEAVmod.

Andrade apresentou, para cada viga de referência, o valor experimental da rigidez de torção em Estado II (K_{exp}^{II}) e da ordenada na origem ($T_{o,exp}^{II}$) bem como os respectivos valores teóricos (K_{th}^{II} e $T_{o,exp}^{II}$) obtidos para os dois modelos de cálculo utilizados pelo autor referido.

Andrade em 2010 [4], com base nas suas análises, verificou que para nenhuma viga se observa experimentalmente e de forma clara um patamar horizontal de transição entre o Estado I e o

Estado II. De uma forma geral, o autor supracitado observou que as Curvas $T - \theta$ teóricas obtidas com base dos dois modelos teóricos utilizados por Andrade [4] (“MTEAV 123” e “MTEAV 1Hsu3”) são praticamente coincidentes e muito próximas da curva experimental.

O autor referido, tendo como objectivo a previsão da parte da Curva $T - \theta$ correspondente à fase comportamental em Estado II, concluiu que o modelo teórico “MTEAV 1Hsu3” apresenta melhores resultados em relação ao modelo teórico “MTEAV 123”.

De uma forma geral, os resultados obtidos por Andrade em 2010 [4] para as vigas com pré-esforço não permitem conclusões definitivas uma vez que o número de vigas analisadas pelo autor era limitado. Apesar de as diferenças entre as previsões obtidas a partir dos dois modelos teóricos testados para a fase comportamental 2.b, “MTEAV 123” (baseado integralmente no modelo de treliça espacial com ângulo variável com correcções incorporadas) e “MTEAV 1Hsu3” (que combina o modelo de treliça espacial com ângulo variável com o modelo semi-empírico proposto por Hsu em 1973 [25] não serem grandes, o segundo modelo apresenta melhores resultados para as vigas com secção cheia. No entanto, Andrade [4] considerou que o primeiro modelo é notavelmente mais satisfatório, uma vez que explicar (parcialmente), fisicamente, a passagem da viga de Estado I para o Estado II.

Capítulo 4

Simulação de Vigas de Betão Armado com Pré-esforço Sujeitas à Torção

4. Simulação de Vigas de Betão Armado com Pré-esforço Sujeitas à Torção

4.1. Introdução

Neste capítulo é simulado o comportamento de vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal, transversal e com ambos em simultâneo sujeitas à torção. Este estudo toma por base vigas de secção vazada de resistência normal ou alta resistência e sem pré-esforço ensaiadas experimentalmente por Bernardo e Lopes [10]. O estudo teórico realizado teve por base um modelo teórico baseado na analogia da treliça espacial com ângulo variável, tendo em conta o comportamento não linear dos materiais. Tal modelo foi modificado por Andrade em 2010 [4] com o objectivo de prever o comportamento global das vigas à torção em todas as suas fases comportamentais, desde o início do carregamento até à rotura.

É feita uma análise global e comparativa entre o conjunto de vigas escolhidas em termos de comportamento à torção e também é analisada a influência global das variáveis consideradas neste estudo, nomeadamente: a taxa de armadura de torção e tensão induzida pelo pré-esforço no betão.

Pretende-se expor de uma forma sucinta o modo de funcionamento do aplicativo computacional na óptica do utilizador desenvolvido por Andrade em 2010 [4], TORQUE_MTEAVmod. Este aplicativo permite o estudo da previsão do comportamento global de vigas à torção tendo por base a proposta de um modelo de treliça espacial com ângulo variável modificado desenvolvido pelo autor referido anteriormente.

Apresentam-se os gráficos momento torsor (T) “versus” deformação angular (θ). As Curvas $T - \theta$ foram obtidas directamente a partir dos valores teóricos com base no aplicativo computacional desenvolvido por Andrade em 2010 [4], TORQUE_MTEAVmod.

Neste capítulo são também apresentados e analisados os gráficos globais de comportamento teórico obtidos para cada viga, designadamente a evolução do momento torsor com a rotação angular.

O modelo teórico utilizado tem como objectivo a previsão teórica do comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção pura até à rotura, nomeadamente, mediante o traçado das curvas de comportamento $T - \theta$.

4.2. Conjunto de Vigas Escolhidas

Para os propósitos do presente estudo serão utilizadas como vigas de referência um conjunto de vigas de betão armado de secção vazada testadas por Bernardo e Lopes [10]. Entre as 16 vigas ensaiadas pelos autores, foram escolhidas um conjunto de 9 vigas com uma resistência de betão semelhante e taxa de armadura diferente (rotura dúctil e frágil) e também vigas com taxa de armadura semelhante e diferente resistência de betão (resistência normal e alta resistência).

A Tabela 4.1 e a Tabela 4.2 resume as propriedades geométricas e mecânicas das 9 vigas de betão armado de secção vazada analisadas encontradas na bibliografia consultada. A primeira tabela referida anteriormente apresenta, para cada viga de referência analisada, a largura exterior (x), a altura (y) da secção transversal, a espessura das paredes (t), a distância entre o centro dos estribos fechados (x_1 e y_1), a área da armadura longitudinal (A_{sl}), a área de distribuição de um ramo da armadura transversal (A_{st}/s , onde s representa o espaçamento da armadura transversal e a taxa de armadura longitudinal ($\rho_{sl} = A_{sl}/A_c$, com $A_c = xy$). A Tabela 4.2 reúne outras propriedades do conjunto de 9 vigas analisadas, tais como: taxa de armadura transversal ($\rho_{st} = A_{st}u/(A_c s)$, com $u = 2(x_1 + y_1)$), a resistência média à compressão do betão e a resistência média à tracção do betão ($f_{cm} \equiv f'_c$ e $f_{ctm} \equiv f_{cr}$), a tensão média da armadura longitudinal e transversal (f_{lym} e f_{tym}), o módulo de Young do betão (E_c) e as extensões do betão à compressão (o valor de tensão de pico, ε_0 , e o valor máximo, ε_{cu}).

Tabela 4.1 – Propriedades das vigas de betão armado de secção vazada de referência

Viga	x cm	y cm	t cm	x_1 cm	y_1 cm	A_{sl} cm ²	A_{st}/s cm ² /m	ρ_{sl} %
A2	60	60	10,7	53,8	53,1	14	6,3	0,39
A3	60	60	10,9	54	53,5	18,1	8,3	0,5
A5	60	60	10,4	52,8	52,8	30,7	14,1	0,85
B2	60	60	10,8	53,3	53,4	14,6	6,7	0,41
B4	60	60	11,2	52,3	53,6	32,2	15,1	0,89
C2	60	60	10	53,2	53,3	14	6,3	0,39
C3	60	60	10,3	54,5	54	23,8	10,5	0,66
C4	60	60	10,3	54,6	54,5	30,7	14,1	0,85
C6	60	60	10,4	53,3	52,9	48,3	22,6	1,34

Tabela 4.2 - Propriedades das vigas de betão armado de secção vazada de referência

Viga	ρ_{sr} %	f_{cm} MPa	f_{ctm} MPa	f_{lym} MPa	f_{lym} MPa	E_c GPa	ε_0 %	ε_{cu} %
A2	0,37	47,3	3,5	672	696	36,1	0,2	0,35
A3	0,49	46,2	3,4	672	715	35,8	0,2	0,35
A5	0,83	53,1	3,8	724	672	37,5	0,2	0,35
B2	0,4	69,8	4,1	672	696	39,4	0,21	0,33
B4	0,89	79,8	4,4	724	672	41	0,21	0,31
C2	0,37	94,8	4,9	672	696	43,2	0,22	0,28
C3	0,63	91,6	4,8	724	715	42,8	0,22	0,28
C4	0,86	91,4	4,8	724	672	42,7	0,22	0,28
C6	1,34	87,5	4,7	724	724	42,2	0,22	0,29

Para a armadura, foram adoptados valores para a tensão de tracção máxima ($\varepsilon_{lu} = \varepsilon_{tu} = 10\%$) e o módulo de Young ($E_s = 200$ GPa). Deve-se salientar o facto de, para todas as vigas, a taxa de armadura longitudinal e transversal são equilibradas.

O objectivo deste estudo, é a aplicação de pré-esforço de forma teórica nas vigas de referência na direcção longitudinal (LPC), na direcção transversal (TPC) e em ambas as direcções longitudinal e transversal (LTPC) de modo a poder-se comparar qual a influência do pré-esforço no comportamento das secções. É considerado um valor de pré-esforço médio com relação à tensão do betão devido ao pré-esforço (f_{cp}): $f_{cp} = 0,225f'_c$. Este último parâmetro corresponde a um valor médio do intervalo permitido pelo código ACI ($f_{cp,max} = 0,45f'_c$).

A fim de avaliar a eficácia do pré-esforço transversal, comparando com o pré-esforço longitudinal é seguido um critério que impõe o mesmo estado de tensão para o betão (f_{cp}) para cada caso (LPC, TPC e LTPC). Para as vigas de secção vazada com pré-esforço na direcção longitudinal e transversal foi utilizado em cada direcção metade do valor do pré-esforço para LPC e TPC. Deste modo, as áreas da armadura de pré-esforço foram definidas de modo a corresponderem a taxas de armadura ordinária semelhantes para cada direcção.

As variáveis estudadas foram: a resistência do betão (f'_c) e a taxa de armadura total ($\rho_{l,tot} = \rho_{sl} + \rho_{pl}$, $\rho_{t,tot} = \rho_{st} + \rho_{pt}$). Para calcular ρ_{pt} , é assumido que u_p é igual ao perímetro da linha central das paredes.

A Tabela 4.3 e a Tabela 4.4 apresentam a informação sobre o pré-esforço para as vigas de betão armado de secção vazada de referência, designadamente: a área total da armadura de

pré-esforço longitudinal (A_{pl}), a área de distribuição de um ramo da armadura de pré-esforço transversal (A_{pt}/s_p , onde s representa o espaçamento da armadura de pré-esforço transversal), a taxa da armadura de pré-esforço longitudinal e transversal ($\rho_{pl,tot}$ e $\rho_{pt,tot}$, respectivamente), a taxa de armadura total de pré-esforço (ρ_{Tot}), a tensão limite proporcional convencional para 0,1% ($f_{p0,1\%}$) e a tensão média do betão devido ao pré-esforço em cada direcção (f_{cpl} e f_{cpt}). Para a armadura de pré-esforço, foram adoptados valores para a tensão limite proporcional convencional para 0,1% ($f_{p0,1\%} = 1670$ MPa) e o módulo de Young ($E_s = 195$ GPa). A tensão inicial na armadura de pré-esforço em cada direcção (f_{pli} e f_{pti}) foi assumida como um valor constante de 1350 MPa e corresponde aos critérios escolhidos para calcular a área da armadura de pré-esforço. Este valor é igual a $0,75f_{pu}$, com o parâmetro f_{pu} a representar a resistência à tracção da armadura de pré-esforço assumida como 1800 MPa.

Tabela 4.3 - Dados do pré-esforço na direcção longitudinal (LPC) e na direcção transversal (TPC)

Viga	LPC				TPC			
	A_{pl} cm ²	ρ_{pl} %	f_{pli} (MPa)	f_{cpl} (MPa)	A_{pt} / s_p cm ² /m	ρ_{pt} %	f_{pti} (MPa)	f_{cpt} (MPa)
A2	16,63	0,46	1350	10,64	8,44	0,46	1350	10,64
A3	16,48	0,46	1350	10,4	8,39	0,46	1350	10,4
A5	18,26	0,51	1350	11,95	9,2	0,51	1350	11,95
B2	24,73	0,69	1350	15,71	12,56	0,69	1350	15,71
B4	29,08	0,81	1350	17,96	14,9	0,81	1350	17,96
C2	31,6	0,88	1350	21,33	15,8	0,88	1350	21,33
C3	31,26	0,87	1350	20,61	15,72	0,87	1350	20,61
C4	31,19	0,87	1350	20,57	15,69	0,87	1350	20,57
C6	30,09	0,84	1350	19,69	15,17	0,84	1350	19,69

Tabela 4.4 - Dados do pré-esforço na direcção longitudinal e transversal em simultâneo (LTPC)

LTPC								
Viga	A_{pl} cm ²	A_{pt} / s_p cm ² /m	ρ_{pl} %	ρ_{pt} %	f_{pli} (MPa)	f_{cpt} (MPa)	f_{pti} (MPa)	f_{cpt} (MPa)
A2	8,32	4,22	0,23	0,23	1350	5,32	1350	5,32
A3	8,24	4,2	0,23	0,23	1350	5,2	1350	5,2
A5	9,13	4,6	0,25	0,25	1350	5,97	1350	5,97
B2	12,36	6,28	0,34	0,34	1350	7,85	1350	7,85
B4	14,54	7,45	0,4	0,4	1350	8,98	1350	8,98
C2	15,8	7,9	0,44	0,44	1350	10,67	1350	10,67
C3	15,63	7,86	0,43	0,43	1350	10,31	1350	10,31
C4	15,6	7,85	0,43	0,43	1350	10,28	1350	10,28
C6	15,05	7,58	0,42	0,42	1350	9,84	1350	9,84

Tabela 4.5 - Dados gerais assumidos para o pré-esforço

$f_{p0,1\%}$ (MPa)	f_{pu} (MPa)	$\epsilon_{p0,1\%}$ %	ϵ_{pu} %	E_p (GPa)
1670	1860	0,001	0,035	195

4.3. TORQUE_MTEAVmod

O aplicativo TORQUE_MTEAVmod desenvolvido por Andrade em 2010 [4] constitui uma modificação do aplicativo TORQUE_MTEAV desenvolvido pelo mesmo autor e tem como principal função fornecer ao utilizador uma ferramenta que permite, de uma forma simples e rápida, o cálculo teórico do comportamento global à torção de vigas de betão armado por meio da previsão da curva de comportamento $T - \theta$ para uma dada secção (cheia ou vazada, de resistência normal ou de alta resistência, com pré-esforço longitudinal e/ou transversal) e a sua comparação com resultados experimentais. Tal aplicativo computacional tem como base o modelo teórico de treliça espacial com ângulo variável com as modificações apresentadas no capítulo 3. O procedimento de utilização deste aplicativo, segue os seguintes quatro passos principais:

1. Abrir o ficheiro com a definição da secção a calcular;
2. Escolher os modelos de comportamento para o betão e para o aço que se pretendem utilizar;
3. Realizar o cálculo das curvas de comportamento;
4. Visualizar os resultados

No aplicativo TORQUE_MTEAVmod apenas é possível calcular com um único modelo teórico para o betão de cada vez contrariamente ao aplicativo TORQUE_MTEAV onde é possível realizar o cálculo para vários modelos em simultâneo.

O TORQUE_MTEAVmod tem as seguintes funcionalidades:

- Abrir um ficheiro com resultados experimentais relativos a curvas $T - \theta$, de forma que tais curvas experimentais possam ser sobrepostas no Passo 4 com as curvas teóricas calculadas;
- Incorporar no aplicativo modelos de comportamento próprios que o utilizador queira testar;
- Editar os dados relativos à secção introduzida no Passo 1, tais como, por exemplo, as dimensões, as propriedades dos materiais, as quantidades de armaduras e a existência de pré-esforço;
- Alterar os valores de vários parâmetros, tais como, por exemplo, o valor inicial da extensão na escora ε_{ds} ou o valor do erro admissível para o cálculo de t_d , α , β_σ e β_ε ;
- Visualizar a evolução de diversas variáveis, tais como, por exemplo, as extensões e as tensões nas armaduras e na escora de betão.

4.4. Simulação das Vigas

O conjunto de vigas analisadas é constituído por 9 vigas de betão armado com secção quadrada vazada), vigas com betão de resistência normal e de alta resistência. Em todas as vigas foi simulado a introdução de pré-esforço na direcção longitudinal, na direcção transversal e em ambas as direcções. As vigas de referência utilizadas no presente trabalho estão divididas em 3 grupos (Grupo A, B e C), em função das variáveis de estudo.

A caracterização geral dos grupos de vigas prende-se essencialmente com a resistência à compressão do betão, variando esta entre os limites aproximados de 40 e 100 MPa. Desta forma, as resistências do betão estão distribuídas pelos três grupos em questão (entre 40 e 50 MPa para as vigas do Grupo A, 70 e 80 MPa para as vigas do Grupo B e entre 90 e 100 MPa para as vigas do Grupo C). Consegue-se abranger um largo intervalo em termos de classes de resistência do betão (desde a resistência normal do betão até à alta resistência do betão). Dentro de cada grupo de vigas, as taxas de armaduras de torção variam de viga para viga e variam em termos de direcção (longitudinal e transversal). Todas as Vigas dos Grupos A, B e C foram dimensionadas por Bernardo em 2003 [9] respeitando o princípio da igualdade de “volume” das armaduras e as cláusulas específicas para a armadura de torção (espaçamentos entre armaduras, diâmetros mínimos, etc.). Cada grupo de vigas (A, B e C) permite dispor de

um conjunto de vigas com resistências de betão iguais ou semelhantes mas com taxas de armaduras diferentes. As taxas de armaduras nos vários grupos têm a capacidade de se disporem por conjuntos de vigas com taxas de armadura semelhantes mas com resistências de betão diferentes. Desta forma, foi possível realizar-se um estudo separado do efeito da variável do pré-esforço tendo por base a resistência à compressão do betão e a taxa de armadura de torção.

Nesta secção apresentam-se os gráficos momento torsor (T) “versus” deformação angular (θ). As Curvas $T - \theta$ foram obtidas directamente a partir dos valores teóricos com base no aplicativo computacional desenvolvido por Andrade em 2010 [4], TORQUE_MTEAVmod.

Com o TORQUE_MTEAVmod foram calculadas, para todas as vigas e para todos os casos (pré-esforço longitudinal, pré-esforço transversal e pré-esforço em ambas as direcções), todas as curvas teóricas $T - \theta$ e agrupadas da seguinte forma:

- Figura 4.1: inclui as vigas da mesma série (Grupo de vigas A) com classe de resistência normal de betão semelhante, taxas de armadura à torção diferentes e armadura de pré-esforço na direcção longitudinal (LPC), transversal (TPC) e nas duas direcções em simultâneo (LTPC);
- Figura 4.2: inclui as vigas da mesma série (Grupo de vigas C) com classe de alta resistência de betão semelhante, taxas de armadura à torção diferentes armadura de pré-esforço na direcção longitudinal (LPC), transversal (TPC) e nas duas direcções em simultâneo (LTPC);
- Figura 4.3: inclui vigas do Grupo A, B e C, com diferentes classes de betão de resistência à compressão mas com taxas de armadura à torção semelhantes e armadura de pré-esforço na direcção longitudinal (LPC), transversal (TPC) e nas duas direcções em simultâneo (LTPC);
- Figura 4.4: inclui vigas do Grupo A, B e C, com diferentes classes de betão de resistência à compressão mas com taxas de armadura à torção semelhantes e armadura de pré-esforço na direcção longitudinal (LPC), transversal (TPC) e nas duas direcções em simultâneo (LTPC);

As Figuras 4.1 a 4.4 apresentam as curvas teóricas $T - \theta$ obtidas com base no aplicativo TORQUE_MTEAVmod para as vigas de referência (secção vazada) do Grupo A, B e C. Cada figura, inclui as curvas obtidas para cada direcção de pré-esforço (longitudinal (LPC), transversal (TPC) e longitudinal e transversal (LTPC)) e para cada série de vigas (A2, A3, A5, B2, B4, C2, C3, C4 e C6).

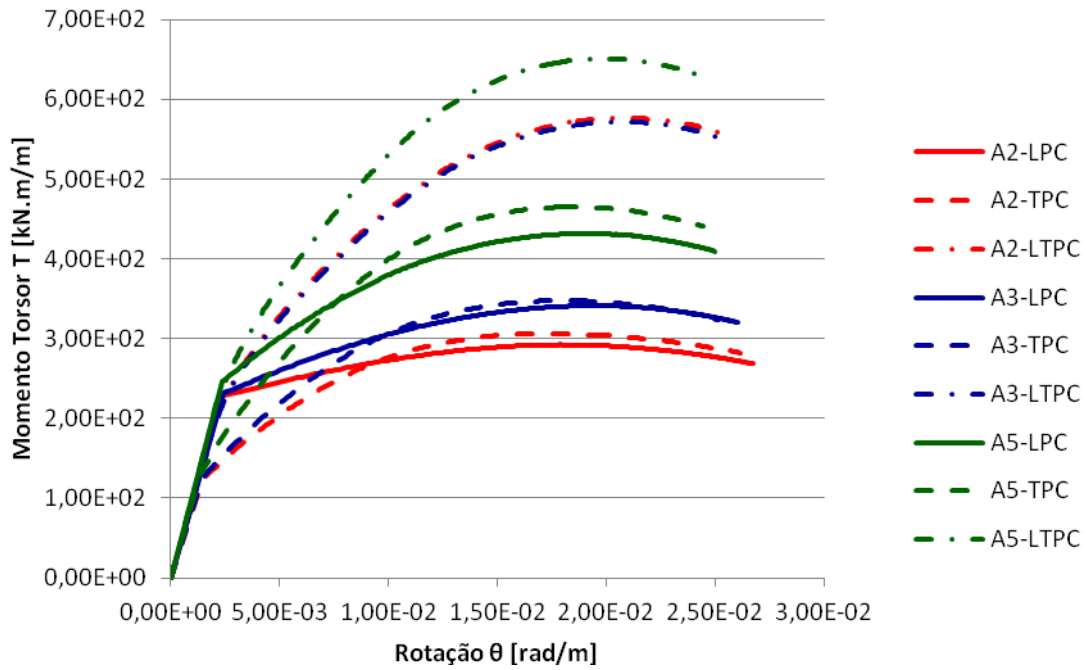


Figura 4.1 - Curvas $T - \theta$ para as vigas do Grupo A

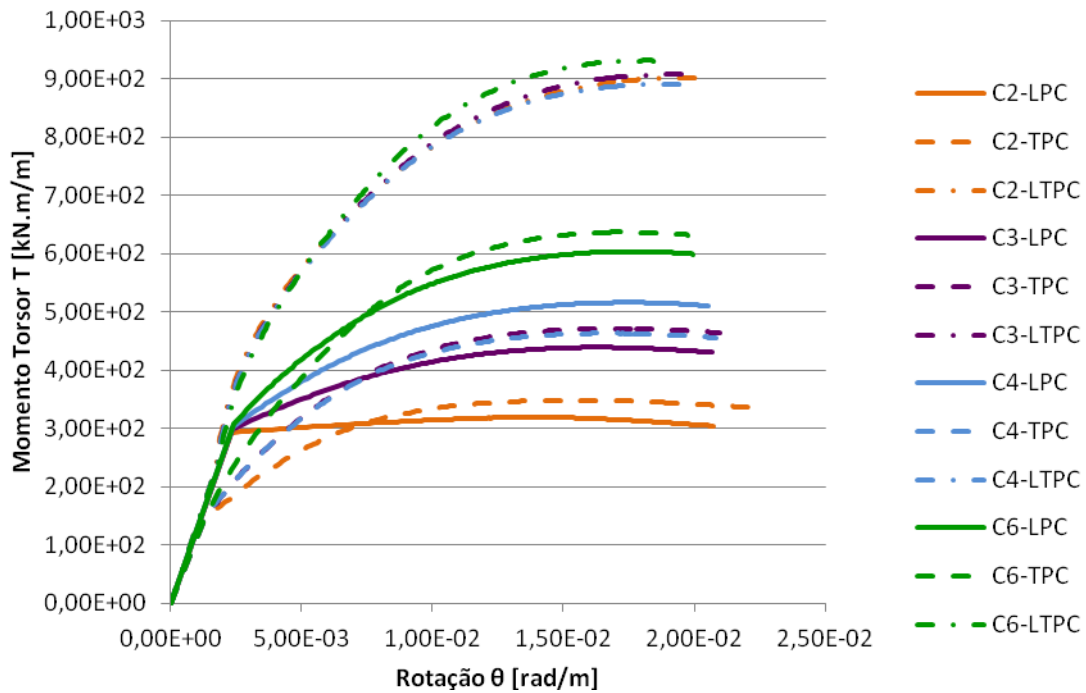


Figura 4.2 - Curvas $T - \theta$ para as vigas do Grupo C

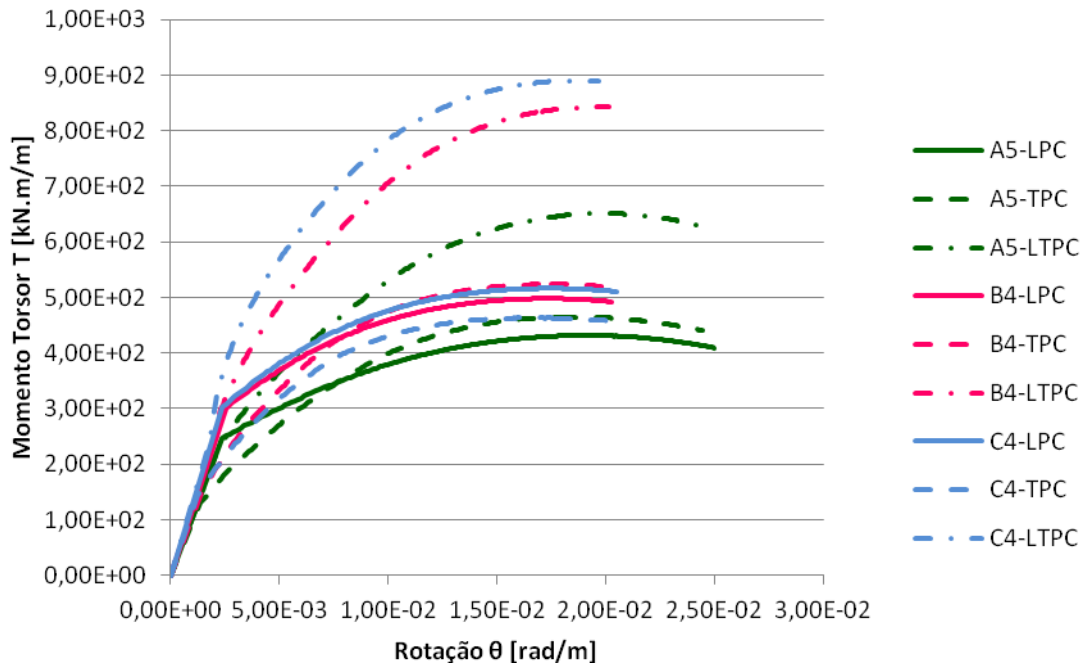


Figura 4.3 - Curvas $T - \theta$ para as vigas do Grupo A, B e C

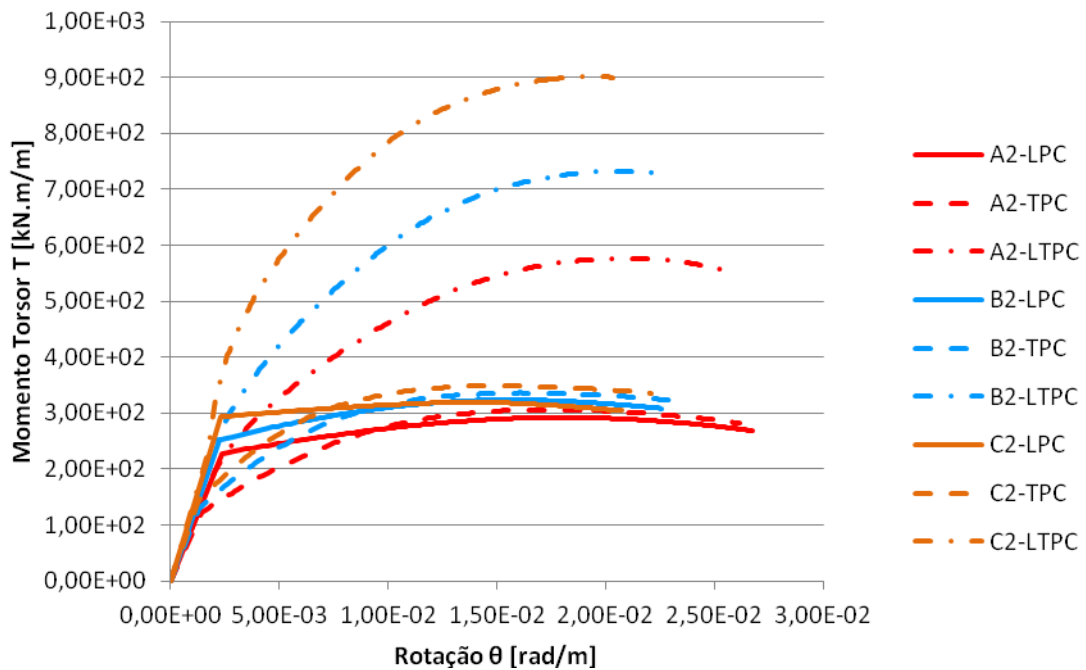


Figura 4.4 - Curvas $T - \theta$ para as vigas do Grupo A, B e C

4.5. Análise Paramétrica dos Resultados

Na Figura 4.1 estão representadas as curvas teóricas $T - \theta$ obtidas com base no aplicativo TORQUE_MTEAVmod para as vigas de referência (secção vazada) do Grupo A com resistência à

compressão do betão que varia entre 40 e 50 MPa. Para cada série de vigas do Grupo A (A2, A3 e A5) foram calculadas as curvas teóricas $T - \theta$ para o pré-esforço longitudinal (LPC), pré-esforço transversal (TPC) e pré-esforço longitudinal e transversal (LTPC). Para este conjunto de vigas que possuem uma classe de resistência à compressão de betão semelhante (betão de resistência normal) e taxa de armadura à torção diferente. Analisando o gráfico da Figura 4.1 podemos concluir que as vigas que têm pré-esforço aplicado na direcção longitudinal e transversal (LTPC) em simultâneo apresentam uma maior resistência ao momento torsor aplicado comparativamente às vigas com pré-esforço transversal (TPC) e longitudinal (LPC). A viga da série A5 (A5-LTPC) é a que apresenta maior resistência ao momento torsor uma vez que também é esta que de entre o conjunto da série das 3 vigas representadas na Figura 4.1 tem uma maior resistência à compressão do betão (Tabela 4.2). Em relação às vigas com pré-esforço transversal (TPC) e longitudinal (LPC) para cada série de vigas (A2, A3 e A5) aparentam acompanhar-se ao longo da Curva $T - \theta$. No entanto para o caso das vigas com pré-esforço transversal, estas mostram que para carregamentos mais baixos fissuram mais cedo do que as vigas com pré-esforço longitudinal apresentando assim uma maior deformação, originando o aparecimento de fissuração para estados mais baixos de tensão. Por outro lado, as vigas com pré-esforço longitudinal apresentam um melhor comportamento para estados mais baixos de tensão, fissurando para momentos torsores superiores (quando comparadas com vigas com pré-esforço transversal), mas atingem um momento torsor máximo (T_m) menor que as primeiras. De acordo com a Figura 4.1 podemos concluir que as vigas com uma maior taxa de armadura de torção, independentemente da direcção do pré-esforço aplicado, apresentam uma maior resistência ao momento torsor aplicado na viga.

Na Figura 4.2 estão representadas as curvas teóricas $T - \theta$ obtidas com base no aplicativo TORQUE_MTEAVmod para as vigas de referência (secção vazada) do Grupo C com resistência à compressão do betão que varia entre 70 e 80 MPa. Para cada série de vigas do Grupo C (C2, C3, C4 e C5) foram calculadas as curvas teóricas $T - \theta$ para o pré-esforço longitudinal (LPC), pré-esforço transversal (TPC) e pré-esforço longitudinal e transversal (LTPC). Este conjunto de vigas que possuem uma classe de resistência à compressão de betão semelhante (betão de alta resistência) e taxa de armadura à torção diferente. Analisando o gráfico da Figura 4.2 podemos concluir, de forma análoga à Figura 4.1, que as vigas que têm pré-esforço aplicado na direcção longitudinal e transversal (LTPC) em simultâneo apresentam uma maior resistência ao momento torsor aplicado comparativamente às vigas com pré-esforço transversal (TPC) e longitudinal (LPC). A viga que tem uma maior resistência à compressão do betão do conjunto total de vigas analisadas na Figura 4.2, viga da série C6 (C6-LTPC) é a que apresenta maior resistência ao momento torsor. Em relação às vigas com pré-esforço nas outras direcções individualmente, transversal (TPC) e longitudinal (LPC), as primeiras fissuram mais rapidamente e por isso têm maiores deformações comparativamente às vigas com pré-esforço longitudinal mas no entanto as curvas teóricas $T - \theta$ para cada série do

conjunto de vigas do Grupo C e para cada direcção de pré-esforço (LPC e TPC) acompanham-se de forma semelhante ao longo do carregamento. As vigas da série C4 são a excepção a este facto referido anteriormente, apresentando uma maior resistência ao momento torsor as vigas com pré-esforço na direcção longitudinal relativamente às vigas com pré-esforço transversal. De acordo com a Figura 4.2 podemos concluir que as vigas com uma maior taxa de armadura de torção, independentemente da direcção do pré-esforço aplicado, apresentam uma maior resistência ao momento torsor aplicado na viga.

Comparando a Figura 4.1 (betão de resistência normal) com a Figura 4.2 (betão de alta resistência), as vigas do Grupo C (Figura 4.2) apresentam uma maior rigidez face ao momento torsor aplicado e por isso o momento torsor de fissuração (T_{cr}) tem um valor mais elevado do que as vigas do Grupo A (Figura 4.1). No entanto, as vigas deste último grupo apresentam um valor mais elevado relativamente ao parâmetro rotação (θ) do que as vigas de betão de alta resistência.

Na Figura 4.3 estão representadas as curvas teóricas $T - \theta$ obtidas com base no aplicativo TORQUE_MTEAVmod para as vigas de referência (secção vazada) do Grupo A, B e C com resistência à compressão do betão que varia entre 50 e 100 MPa. Para cada série de vigas do Grupo A, B e C (A5, B4 e C4) foram calculadas as curvas teóricas $T - \theta$ para o pré-esforço longitudinal (LPC), pré-esforço transversal (TPC) e pré-esforço longitudinal e transversal (LTPC). Para este conjunto de vigas que possuem uma classe de resistência à compressão de betão diferente (resistência normal e alta resistência) e taxa de armadura à torção semelhante podemos concluir que as vigas que têm pré-esforço aplicado na direcção longitudinal e transversal (LTPC) em simultâneo apresentam uma maior resistência ao momento torsor aplicado comparativamente às vigas com pré-esforço transversal (TPC) e longitudinal (LPC). A viga da série C6 (C6-LTPC) é a que apresenta maior resistência ao momento torsor uma vez que também é esta que pertence a uma classe de alta resistência à compressão do betão (Tabela 4.2). Em relação às vigas com pré-esforço transversal (TPC) e longitudinal (LPC) podemos concluir que, independentemente da resistência do betão, para cada série de vigas (A5, B4 e C4) as curvas teóricas $T - \theta$ dos dois tipos de vigas referidas anteriormente (LPC e TPC) apresentam um trajecto semelhante ao longo do carregamento. No entanto para o caso das vigas com pré-esforço transversal, estas mostram que para carregamentos mais baixos fissuram mais cedo do que as vigas com pré-esforço longitudinal apresentando mais deformações. As vigas da série C4 continuam a ser a excepção a este facto referido anteriormente, apresentando uma maior resistência ao momento torsor as vigas com pré-esforço na direcção longitudinal relativamente às vigas com pré-esforço transversal. De acordo com a Figura 4.3 podemos concluir que as vigas com uma taxa de armadura de torção semelhante, independentemente da direcção do pré-esforço aplicado, apresentam curvas teóricas $T - \theta$ diferentes, ou seja, para o mesmo tipo de pré-esforço aumenta consoante aumenta a classe de betão.

Na Figura 4.4 estão representadas as curvas teóricas $T - \theta$ obtidas com base no aplicativo TORQUE_MTEAVmod para as vigas de referência (secção vazada) do Grupo A, B e C com resistência à compressão do betão que varia entre 40 e 100 MPa. Para cada série de vigas do Grupo A, B e C (A2, B2 e C2) foram calculadas as curvas teóricas $T - \theta$ para o pré-esforço longitudinal (LPC), pré-esforço transversal (TPC) e pré-esforço longitudinal e transversal (LTPC). Para este conjunto de vigas que possuem uma classe de resistência à compressão de betão diferente (resistência normal e alta resistência) e taxa de armadura à torção semelhante podemos concluir que as vigas que têm pré-esforço aplicado nas duas direcções (longitudinal e transversal (LTPC)) apresentam uma maior resistência ao momento torsor aplicado comparativamente às vigas com pré-esforço transversal (TPC) e longitudinal (LPC). A viga da série C2 (C2-LTPC) é a que apresenta maior resistência ao momento torsor uma vez que esta viga pertence a uma classe de alta resistência à compressão do betão (Tabela 4.2). Em relação às vigas com pré-esforço transversal (TPC) e longitudinal (LPC) podemos concluir que, independentemente da resistência do betão, para cada série de vigas (A2, B2 e C2) as curvas teóricas $T - \theta$ dos dois tipos de vigas referidas anteriormente (LPC e TPC) apresentam um trajecto semelhante ao longo do carregamento. No entanto para o caso das vigas com pré-esforço transversal, estas mostram que para carregamentos mais baixos fissuram mais cedo do que as vigas com pré-esforço longitudinal apresentando mais deformações. De acordo com a Figura 4.4 podemos concluir que as vigas com uma taxa de armadura de torção semelhante, independentemente da direcção do pré-esforço aplicado, apresentam curvas teóricas $T - \theta$ diferentes, mas semelhantes para a mesma série nas direcções longitudinal (LPC) e transversal (TPC). Para o mesmo tipo de pré-esforço aumenta consoante aumenta a classe de betão.

Nas figuras 4.3 e 4.4 estão representadas vigas com diferentes classes de resistência de betão (resistência normal e alta resistência). Comparando a Figura 4.3 e 4.4, a primeira figura representa as vigas com uma taxa de armadura de torção inferior em relação às vigas representadas na segunda figura, ou seja, as vigas da Figura 4.3 têm uma maior rigidez em relação ao momento torsor aplicado enquanto que as vigas da figura 4.4 por sua vez apresentam uma maior valor para a deformação angular. Deste modo, podemos concluir que as vigas que possuem uma taxa de armadura de torção mais baixa apresentam uma rotura frágil, uma vez que a rotura se dá pelo betão, enquanto que, as vigas que têm uma maior taxa de armadura de torção apresentam uma rotura dúctil uma vez que a rotura se dá pela cedência das armaduras.

Capítulo 5

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

5. Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

5.1. Introdução

Neste capítulo, resumem-se as principais conclusões do presente trabalho e apresentam-se também propostas de desenvolvimentos futuros dentro do tema exposto.

Para as vigas dos Grupos A, B e C, os betões compreenderam uma ampla gama de resistências entre 46,2 MPa e 94,8 MPa em termos valores médios, englobando portanto betões de resistência normal e betões de alta resistência. A taxa total de armadura de torção abrange o seguinte intervalo: $0,37\% \leq \rho_{tot} \leq 1,34\%$ constituindo este também um intervalo de variação razoável.

No que se refere ao aplicativo computacional utilizado, TORQUE_MTEAVmod, este foi uma ferramenta fundamental para este estudo permitindo de uma forma rápida e simples obter as informações necessárias para se poder traçar as curvas teóricas $T - \theta$.

A principal variável para este trabalho foi o pré-esforço, nomeadamente na direcção transversal.

5.2. Conclusões

As curvas teóricas de comportamento $T - \theta$ obtidas com base no aplicativo computacional desenvolvido por Andrade em 2010 [4], TORQUE_MTEAVmod, retratam as fases evolutivas sofridas pelas vigas ao longo do carregamento.

A primeira parte do presente trabalho teve por objectivo apresentar a descrição do modelo teórico baseado no modelo de treliça espacial com ângulo variável, com vista ao cálculo e traçado das curvas de comportamento momento torsor (T) - rotação (θ) de vigas de betão armado com secção vazada, de resistência normal ou de alta resistência, com pré-esforço longitudinal e/ou transversal sujeitas à torção pura. Recorde-se que teve-se em conta o comportamento dos materiais: betão comprimido nas escoras, armaduras ordinárias e de pré-esforço tracionadas.

Com vista ao cálculo das curvas teóricas $T - \theta$ das vigas de referência utilizou-se o aplicativo TORQUE_MTEAVmod no qual utilizou-se o conjunto de vigas de betão armado de secção vazada testadas por Bernardo e Lopes [10]. Entre as 16 vigas ensaiadas pelos autores, foram escolhidas um conjunto de 9 vigas com uma resistência de betão semelhante e taxa de armadura diferente (rotura dúctil e frágil) e também vigas com taxa de armadura semelhante

e diferente resistência de betão (resistência normal e alta resistência). Posteriormente e como objectivo deste trabalho introduziram-se os valores de pré-esforço no aplicativo TORQUE_MTEAVmod nas vigas de referência na direcção longitudinal (LPC), na direcção transversal (TPC) e em ambas as direcções longitudinal e transversal (LTPC).

Para as vigas dos grupos em que é variada a taxa total de armadura de torção (Grupos A, B e C), observa-se que a fissuração das vigas é ligeiramente atrasada com o aumento dessa mesma variável. Verificou-se que o factor de participação das armaduras, no atrasar do início da fissuração efectiva, é independente da resistência do betão.

Apos as vigas de referência terem atingido o momento torsor de fissuração observou-se que a influência da taxa de armadura na rigidez de torção é muito grande.

Os resultados deste trabalho confirmam que para as vigas em caixão, a transição entre o Estado I (não fissurado) e o Estado II (fissurado) não se observa um patamar horizontal de deformação, como é habitual para o caso das vigas com secção cheia.

Para os Grupos de vigas em que a resistência à compressão do betão era semelhante (Grupos A, B e C), verificou-se que a capacidade de deformação última das vigas, especialmente com as armaduras em cedência, vai diminuindo com o aumento da taxa total de armadura de torção. Este fenómeno é mais evidenciado à medida que a classe de resistência do betão aumenta.

Para as séries de vigas em que apenas é variada a taxa total de armadura de torção, foi observado que, à medida que aumenta a resistência à compressão do betão, diminui o intervalo da taxa de armadura em que as vigas evidenciam um comportamento dúctil na rotura.

Em relação ao factor de pré-esforço, de uma forma geral, observou-se nas Figuras 4.1 a 4.4 que as vigas com pré-esforço aplicado nas duas direcções (longitudinal e transversal) em simultâneo apresentam uma maior resistência ao momento torsor. Em relação às vigas com pré-esforço transversal (TPC) e longitudinal (LPC) para cada série de vigas de cada grupo (A, B e C) as curvas teóricas do seu comportamento respectivo aparentam acompanhar-se ao longo da Curva $T - \theta$. No entanto para o caso das vigas com pré-esforço transversal, estas mostram que para carregamentos mais baixos fissuram mais cedo do que as vigas com pré-esforço longitudinal apresentando mais deformações. De acordo com esta observação podemos concluir que as vigas com pré-esforço transversal parecem apresentar um melhor comportamento para os Estados Limite Último do que para os Estados Limite de Serviço comparativamente com as vigas com pré-esforço longitudinal. Esta observação apenas não se registou para o caso das vigas da série C4 (C4-LPC e C4-TPC).

De acordo com os resultados obtidos neste trabalho podemos também concluir que as vigas com uma maior taxa de armadura de torção, independentemente da direcção do pré-esforço aplicado, apresentam uma maior resistência ao momento torsor aplicado na viga.

Comparando as vigas de betão de resistência normal com as vigas de betão de alta resistência, as últimas apresentam uma maior rigidez face ao momento torsor aplicado e por isso o momento torsor de fissuração (T_{cr}) tem um valor mais elevado do que as vigas com classe de resistência normal de betão.

Comparando as vigas com taxas de armadura de torção inferior em relação às vigas representadas na segunda figura, ou seja, as vigas da Figura 4.3 têm uma maior rigidez em relação ao momento torsor aplicado enquanto que as vigas da figura 4.4 por sua vez apresentam uma maior valor para a deformação angular. Deste modo, podemos concluir que as vigas que possuem uma taxa de armadura de torção mais baixa apresentam uma rotura frágil, uma vez que a rotura se dá pelo betão, enquanto que, as vigas que têm uma maior taxa de armadura de torção apresentam uma rotura dúctil uma vez que a rotura se dá pela cedência das armaduras.

De uma forma geral, os resultados obtidos para as vigas de referência com pré-esforço não permitem estabelecer conclusões definitivas dado o número limitado de vigas analisadas.

5.3. Propostas para Estudos Futuros

Como extensão do presente trabalho desenvolvido, considera-se de interesse os seguintes estudos, referentes ou relacionados com a torção em vigas de resistência normal ou de alta resistência e com pré-esforço longitudinal e/ou transversal, ainda pouco estudados ou não estudados:

- Complementar as análises realizadas ao longo do presente trabalho com resultados experimentais;
- Realizar ensaios experimentais com vista a estudar o efeito do pré-esforço transversal em vigas em caixão sujeitas à torção pura;
- Estudar outras soluções práticas para reforço de vigas em caixão sujeitas à torção, nomeadamente, recorrendo ao uso de novos materiais estruturais (como por exemplo, betões com fibras de carbono ou fibras de vidro);
- Estudar o efeito do pré-esforço transversal para os Estados Limite de Serviço, nomeadamente para o controlo de fissuração;
- Estudar o efeito do pré-esforço transversal para os Estados Limite Último e comparar com o caso das vigas com pré-esforço longitudinal.

Referências Bibliográficas

Referências Bibliográficas

1. A. B. Chance Co. Civil Construction Installing Tools for Screw Anchores and Piles. Centralia, Bulletin 01-0203. 2006.
2. ACI Committee 318. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05). Detroit, MI : American Concrete Institute, 2005.
3. Andersen, P. Experiments with Concrete in Torsion. Transactions, ASCE. 1935, Vols. 100, pp. 949-983.
4. Andrade, J. M. A., “Modelação do Comportamental Global de Vigas Sujeitas à Torção - Generalização da Analogia da Treliza Espacial com Ângulo Variável” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, Faculdade de Engenharia, Universidade da Beira Interior, Covilhã. 2010;
5. Appleton, J. A. S., Almeida, J. C. F. e Câmara, J. M. N., “Dimensionamento e Pormenorização de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado,” Volume 1 - “Dimensionamento,” Centro de Mecânica e Engenharia Estruturais, Instituto Superior Técnico, 1984.
6. Armstrong, S. “The Strength of Concrete Members in Combined Bending and Torsion”, Proceedings of a Symposium of the Strength of Concrete Structures, Session B: Paper 2. Cement and Concrete Association, London, pp. 101-122, May 1956.
7. Belarbi, A. and Hsu, T. C. “Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete”, Structural Journal of American Concrete Institute, 91(4). 1994, pp. 465-474.
8. Belarbi, A. and Hsu, T. C. “Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression”, Research Report UHCEE 91-2, Univ. of Houston, Houston, Texas. 1991. (citado em [132]).
9. Bernardo, L. F. A. “Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência”, PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra. 2003.
10. Bernardo, L. F. A. and Lopes, S. M. R. “Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams”, Journal Materials and Structures, RILEM, Springer, Netherlands. 2008, Vols. 41, No. 6, pp. 1143-1167.
11. Bernardo, L. F. A. and Lopes, S. M. R. “Plastic Analysis of HSC Beams In Flexure”, Materials and Structures, RILEM, Springer, Netherlands. January, 2009, Vols. 42, No. 1, pp. 51-69.
12. Bernardo, L. F. A. and Lopes, S. M. R. “Torsion in HSC Hollow Beams: Strength and Ductility Analysis”, ACI Structural Journal, American Concrete Institute, Michigan, U.S.A. Jan/Feb 2009, Vols. 106, Issue 1, pp. 39-48.
13. CEB. Torsion. Bulletin d'Information N.º 71. Mars 1969.
14. CEB-FIP. Model Code for Concrete Structures. CEB-FIP International Recommendations. third edition, Paris, 1978.

15. Collins, M. P. "Torque-Twist Characteristics of Reinforced Concrete Beams", Inelasticity and Non-Linearity in Structural Concrete, Study No. 8, University of Waterloo Press. Waterloo, Ontario, Canada, 1973, pp. 211-232.
16. Collins, M. P. and Mitchell, D. "Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams", Journal of the Prestressed Concrete Institute, Proc. September-October 1980, Vols. 25, No. 5, pp. 32-100.
17. Cowan, H. J. Elastic "Theory for Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams", Magazine of Concrete Research. July 1950, Vols. 2, No. 4, pp. 3-8.
18. Cowan, H. J. "Strength of Reinforced Concrete Under the Action of Combined Stresses at the Representation of the Criterion of Failure by a Space Model",. Nature (London). 1952, Vols. 169, 663 pp. (citado em [62]).
19. Cowan, H. J. and Armstrong, S. "Experiments on the Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams and of Concrete-Encased Steel Joists in Combined Bending and Torsion", Magazine of Concrete Research. March 1955, Vols. 7, No. 19, pp. 3-20.
20. Cuerel, J. New Waterloo Bridge at London. International Association for Bridge and Structural Engineering, 3rd Congress. Liège, 1948, pp. 367-380. (citado em [14]).
21. Câmara, J. N. and Almeida, J. F. "O Pré-Esforço como Alternativa no Projecto de Edifícios", Seminário: A Utilização de Pré-Esforço não Aderente em Estruturas de Edifícios, Ordem dos Engenheiros. Lisboa, 1999.
22. Delagrave, A., Marchand, J. and Pigeon, M. "Durability of High Performance Cement Pastes in Contact with Chloride Solutions", Fourth International Symposium on the Utilization of High Strength/ High Performance Concrete, Paris. May 1996, pp. 479-488.
23. Elfgren, L. "Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear", Publication 71:3, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology. Goteborg, Sweden, 1972.
24. Hognestad, E., Hanson, N. W. and McHenry D., "Concrete Stress distribution in Ultimate Strength Design," Journal of the American Concrete Institute, Proc., Vol. 52, No.4, December 1955, pp. 455-479.
25. Hsu, T. T. C. "Post-Cracking Torsional Rigidity of Reinforced Concrete Sections", Journal of the American Concrete Institute, Proc. May 1973, Vols. 70, No. 5, pp. 352-360.
26. Hsu, T. T. C., "Torsion of Reinforced Concrete," Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
27. Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members," Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 261-306.

28. Hsu, T. T. C. "Torsion of Structural Concrete - Plain Concrete Rectangular Sections", *Torsion of Structural Concrete*, SP-18, American Concrete Institute. Detroit, 1968, pp. 203-238.
29. Hsu, T. T. C. "Torsion of Structural Concrete - Uniformly Prestressed Rectangular Members Without Web Reinforcement", *Journal of the Prestressed Concrete Institute*. April 1968, Vols. 13, No. 2, pp. 34-44.
30. Hsu, T. T. C. "Ultimate Torque of Reinforced Rectangular Beams", *Journal of the Structural Division, ASCE*. February 1968, Vols. 94, ST 2, pp. 485-510.
31. Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., "Softening of Concrete in Torsional Members - Design Recommendations," *Journal of the American Concrete Institute, Proc.*, Vol. 82, No. 4, July-August 1985, pp. 443-452.
32. Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L. "Softening of Concrete in Torsional Members - Prestressed Concrete", *Journal of the American Concrete Institute, Proc.* September-October 1985, Vols. 82, No. 5, pp. 603-615.
33. Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L., "Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests," *Journal of the American Concrete Institute, Proc.*, Vol. 83, No. 3, May-June 1985, pp. 290-303.
34. Hsu, T. T. C. and Zhang, L. X. "Nonlinear Analysis of Membrane Elements by Fixed-Angle Softened-Truss Model", *Structural Journal of American Concrete Institute*, 94(5). 1997, pp. 483-492.
35. Humphreys, R. "Torsional Properties of Prestressed Concrete", *The Structural Engineer*, London. June 1957, Vols. 35, No. 6, pp. 213-224.
36. INCM. Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado. Lisboa : Imprensa Nacional, Casa da Moeda, 1983.
37. Lampert, P. and Thurlimann, B. "Torsionsversuche an Stahlbetonbalken" (Torsion Tests of Reinforced Concrete Beams). Bericht, Nr. 6506-2, Institut für Baustatik, ETH, Zurich. 1969. (em Alemão, citado em [30]).
38. Measor, E. O. and New, D. H. "The Design and Construction of the Royal Festival Hall, South Bank", *Journal of the Institution of Civil Engineers*. May 1951, Vols. 36, No. 7, pp. 241-318.
39. Morsh, E. "Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie", 1st ed., Wayss and Freytag, A. G., Im selbstverlag der Firma, Neustadt a. d. Haardt, May 1902, 118 pp.; "Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung", 2nd ed. Verlag von Konrad Wittmer, Stuttgart, 1906, 252 pp.; 3rd ed. (traduzido para Inglês por E. P. Goodrich, McGraw-Hill Book Co., New York, 1909, 368 pp.). (citado em [62]).
40. NP EN 1992-1-1. Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de Betão - Part 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios. Março 2010.
41. Nylander, H. "Vridning Vridningsinspanning vid Betongkonstruktioner" (Torsion and Torsional Restraint of Concrete Structures). Statens Kommitté för Byggnadsforskning, Bulletin No. 3, Stockholm. 1945. (em Alemão, citado em [62]).

42. Rausch, E. "Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung" (Design of Reinforced Concrete in torsion). Ph.D. Thesis, Berlin. 1929. (em Alemão, citado em [62]).
43. Ritter, W. "Die Bauweise Hennebique", Schweizerische Bauzeitung, Zurich. February 1899. (em Alemão, citado em [62]).
44. Vecchio, F. J. and Collins, M. P. "Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear", IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced concrete, Delft, Final Report. 1981, pp. 211-225.
45. Wagner, H. "Ebene Blechwandträger mit Sehr Dunnem Stegblech" (Flat Sheet Metal Girders with Very Thin Metal Web). Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Berlin. 1929, Vols. 20, No. 8 to 12. (em Alemão, citado em [62]).
46. Waldren, P. "The Significance of Warping Torsion in the Design of Straight Concrete Box Girder Bridges", Canadian Journal of Civil Engineering. 1988, Vol. 15, pp. 879-889.
47. Wang, W. and Hsu, C. T. T. "Limit Analysis of Reinforced Concrete Beams Subjected to Pure Torsion", Journal of Structural Engineering. January 1997, Vols. 123, No. 1, pp. 86-94.
48. Zhang, L. X. and Hsu, T. C. "Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements", Journal of Structural Engineering, ASCE. January-February 1998, Vols. 124, No. 1, pp. 24-34.
49. Zia, P. and D., McGee W. "Torsion Design of Prestressed Concrete". Journal of the Prestressed Concrete Institute. March-April 1974, Vols. 19, No. 2, pp. 46-65.