



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

João Augusto Teixeira de Frias Rodrigues

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil: Estruturas e Construção
(2.º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo

Covilhã, Outubro de 2011

Aos meus Pais

Agradecimentos

A realização deste trabalho não seria possível sem a colaboração de algumas pessoas às quais quero deixar a minha mais sincera gratidão.

Ao meu orientador Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, o meu agradecimento pela simpatia, apoio, dinamismo e dedicação para a realização deste trabalho, um sincero obrigado.

Agradeço também ao Prof. Doutor Jorge Miguel Almeida Andrade a sua constante disponibilidade para o esclarecimento de dúvidas relacionadas com a utilização do software Excel que foi utilizado para a implementação do modelo.

Aos meus Pais, à Catarina e à Marisa, por todo o apoio, carinho e disponibilidade.

À Inês Simão que me ajudou bastante e sempre me incentivou na realização deste trabalho.

A todos os meus amigos que sempre estiveram presentes e me apoiaram no meu percurso académico, um muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho é estudado o comportamento global de vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal sujeitas à torção. São incluídas neste estudo vigas com secção rectangular vazada e secção rectangular cheia, de resistência normal e alta resistência. O estudo teórico teve por base o modelo de membrana para elementos sujeitos à torção (SMMT). Este modelo foi modificado com a adição da componente de pré-esforço com o objectivo de prever o comportamento global das vigas com pré-esforço sujeitas à torção. Foram analisadas todas as fases comportamentais das vigas à torção.

Para verificar a adequabilidade do modelo teórico utilizado e modificado com a introdução da componente do pré-esforço, os resultados foram comparados com os resultados experimentais provenientes de estudos realizados por diversos autores e encontrados na literatura consultada.

Palavras-chave

Pré-Esforço

Betão Armado

Vigas

Torção

Modelos Teóricos

Abstract

This work presents a study about the behavior of reinforced concrete beams with longitudinal prestress under pure torsion. Both hollow and plain beams (normal and high-strength concrete) with rectangular cross section are studied. The theoretical model was based on the membrane model for elements under torsion (SMMT). This model was modified in order to add the longitudinal prestress component to predict the overall behavior of longitudinal prestress beams under torsion. All the behavioral states of the beams under torsion were studied.

To verify the suitability of the modified theoretical model that incorporates the prestress, the theoretical results were compared with experimental results from studies conducted by several authors and found in the literature.

Keywords

Reinforced Concrete

Beams

Prestress

Torsion

Theoretical Models

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas.....	xvii
Simbologia	xix
Alfabeto Latino	xix
Alfabeto Grego	xxii
1- Introdução	1
1.1 - Classificação Fundamental de Efeitos de Torção	2
1.2 - Exemplos Práticos de Estruturas com Esforços de Torção	4
1.3 - Modelação Teórica do Comportamento de Vigas à Torção.....	5
1.4 - Objectivos e Justificação do Trabalho.....	8
2 - Modelos Teóricos	9
2.1 - Elementos sem Armadura Transversal	9
2.2 - Elementos com Armadura Transversal.....	10
3 - Modelos Teóricos Baseados na Analogia da Treliça Espacial	13
3.1 - A Analogia da Treliça Espacial de Rausch.....	13
3.2 - Modelos Teóricos com Base na Treliça Espacial de Ângulo Variável de Hsu e Mo	15
3.2.1 - Aspectos Gerais	15
3.2.2 - Análise de uma Viga com Base no Modelo de Treliça Plana	16
3.2.3 - Construção da Curva Teórica $T - \theta$	25
3.2.4 - Formulação do MTEAV para Vigas de Betão Armado e Pré-esforçado	29
3.3 - Modelo de Comportamento Global de Bernardo e Lopes	33
3.3.1 - Aspectos Gerais	33
3.3.2 - Análise Elástico-Linear em Regime Não Fissurado (Estado I).....	33
3.3.3 - Modelação da Zona Comportamental 2b.....	39
3.3.4 - Modelação da Zona Comportamental 3	42
3.3.5 - Critérios de Transição.....	43

3.4 - Método de Treliça Espacial de Ângulo Variável Modificado de Andrade	47
3.4.1 - Aspectos Gerais	47
3.4.2 - Zona Comportamental I.....	47
3.4.3 - Zona Comportamental 2.a.....	52
3.4.4 - Zona Comportamental 2.b e 3.....	53
4 - Modelo Membrana para Elementos de Betão Armado Sujeitos à Torção	57
4.1 - Aspectos Gerais.....	57
4.1.2 - Equações de Equilíbrio e de Compatibilidade	57
4.1.3 - Relação entre a Extensão Uniaxial e a Extensão Biaxial	62
4.1.4 - Relação Constitutiva do Betão à Compressão.....	63
4.1.5 - Relações Constitutivas do Betão à Tracção	64
4.1.6 - Solução do Algoritmo.....	66
5 - Caracterização do Comportamento à Torção Através do Cálculo das Curvas $T - \theta$ pelo SMMT	69
5.1 - Vigas de Referência	69
5.2 - Incorporação da Componente de Pré-esforço no Modelo SMMT	71
5.2.1 - Aspectos Gerais	71
5.2.2 - Equações de Equilíbrio e de Compatibilidade	71
5.2.3 - Extensões nas Armaduras de Pré-esforço (ϵ)	72
5.2.4 - Lei Constitutiva do Aço da Armadura de Pré-Esforço à Tracção	73
5.2.5 - Lei Constitutiva do Betão à Tracção.....	74
5.3 - Solução do Algoritmo SMMT com a Componente de Pré-Esforço.....	75
6 - Análise e Comparação de Resultados	77
6.1 - Introdução	77
6.2 - Fase de Pré-Fissuração (Estado I)	77
6.2.1 - Análise e Comparação dos Momentos Torsores de Fissuração	77
6.2.2 - Análise e Comparação da Rigidez em Estado I.....	79
6.3 - Fase de Pós-Fissuração (Estado II).....	80
6.3.1 - Análise e Comparação da Rigidez em Estado II.....	80
6.3.2 - Análise e Comparação da Ordenada na Origem T_0 em Estado II	81
6.4 - Fase de Rotura (Zona III)	82
6.4.1 - Análise e Comparação dos Momentos Torsores Máximos.....	82

6.4.2 - Análise e Comparação dos Momentos Torsores Máximos para as Vigas de Wafa et al 1995 [54]	84
6.5 - Curvas $T - \theta$	87
7 - Conclusões	91
7.1 - Recomendações para Trabalhos Futuros	92
8 - Referências Bibliográficas.....	93
Anexos	97

Lista de Figuras

Figura 1 - Exemplo de estrutura com torção de compatibilidade.....	2
Figura 2 - Exemplo de estrutura com torção de equilíbrio	3
Figura 3 - Torção circulatoria e torção de empenamento [4]	3
Figura 4 - Edifício com prolongamento para o exterior [10]	4
Figura 5 - Vigas com carregamento excêntrico [4]	4
Figura 6 - Vigas curvas no plano horizontal [10]	5
Figura 7 - Curva $T - \theta$ típica para vigas sem armadura transversal	10
Figura 8 - Curva $T - \theta$ para vigas de betão armado	12
Figura 9 - Analogia da treliça espacial de Rausch [4]	14
Figura 10 - Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana [10]	17
Figura 11 - Viga com secção rectangular vazada sujeita à torção pura [9]	18
Figura 12 - Viga vazada sujeita à torção.....	20
Figura 13 - Exemplo da parede OABC sujeita à torção θ	20
Figura 14 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão [4]	21
Figura 15 - Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão tendo em conta o <i>softening effect</i> [4].....	22
Figura 16 - Integração da curva para o betão comprimido nas escoras [4].....	23
Figura 17 - Exemplo de um diagrama de fluxo para o cálculo da curva $T - \theta$ (vigas de betão armado).....	27
Figura 18 - Parâmetros geométricos para uma secção rectangular (cheia e vazada)	36
Figura 19 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime não fissurado Estado I	36
Figura 20 - Estado de tensão numa viga sujeita à torção e a um pré-esforço longitudinal [10]...	36
Figura 21 - Estado de tensão numa viga sujeita à torção e a um pré-esforço transversal [10]	37
Figura 22 - Estado de tensão numa viga sujeita à torção e a um pré-esforço longitudinal e transversal [10]	38
Figura 23 - Viga de betão armado com secção rectangular [4].....	40
Figura 24 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime fendilhado (Estado II) [4]	41
Figura 25 - Traçado teórico da fase não linear da curva $T - \theta$ [8]	43
Figura 26 - Transição entre zonas 1 e 2: (a) secção cheia, (b) secção vazada [8]	44
Figura 27 - Transição entre as fases 2 e 3: rotura do tipo frágil [8].....	45
Figura 28-Transição entre as fases 2 e 3: rotura do tipo dúctil [22]	45
Figura 29 - Definição da secção vazada equivalente para o Estado I [8]	48
Figura 30 - Forças totais para o equilíbrio na direcção longitudinal e transversal [4]	49
Figura 31 - Encurtamento inicial do betão devido ao pré-esforço longitudinal [4]	51
Figura 32 - Encurtamento inicial do betão devido ao pré-esforço transversal [4]	52
Figura 33 - Modelação teórica da subzona 2.a da Curva $T - \theta$ (vigas com secção cheia) [4]	53
Figura 34 - Desvios entre as curvas $T - \theta$ experimental e teórica [4].....	54
Figura 35 - Correção das rotações das curvas práticas e teórica com variação linear [4].....	55
Figura 36 - Secção da viga de betão armado sujeita à torção	58

Figura 37 - Superfície parabolóide hiperbólica sujeita a rotação	60
Figura 38 - Plano biaxial do estado de tensões de uma secção sujeita à torção [24]	61
Figura 39 - Lei constitutiva do betão à compressão [24]	63
Figura 40 - Lei constitutiva de betão à tracção [24]	65
Figura 41- Diagrama de fluxo para o cálculo dos pontos da curva $T - \theta$ para o SMMT	67
Figura 42 - Exemplo de curva $T - \theta$ teórica baseada na equação de Ramberg-Osgood [27]	74
Figura 43 - Diagrama de fluxo para o cálculo dos pontos da curva $T - \theta$ para o SMMT com a componente de pré-esforço	76
Figura 44 - Curvas $T - \theta$ para a viga D1 [10].....	87
Figura 46 - Curvas $T - \theta$ para a viga P2 [40].....	88
Figura 45 - Curvas $T - \theta$ para a viga D2 [10].....	88
Figura 47 - Curvas $T - \theta$ para a viga P3 [40].....	89
Figura 48 - Curvas $T - \theta$ para a viga P8 [27].....	89

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Características das vigas de referência (vigas com pré-esforço longitudinal).....	69
Tabela 2 - Características do pré-esforço das vigas de referência	70
Tabela 3 - Características das vigas ensaiadas por Wafa et al. [54].....	70
Tabela 4 - Análise comparativa para o momento torsor de fissuração e respectiva rotação ..	78
Tabela 5 - Análise e comparação da rigidez em Estado I para as vigas de betão armado com pré-esforço	79
Tabela 6 - Análise e comparação da rigidez no Estado II	80
Tabela 7 - Valores da ordenada na origem em Estado II	81
Tabela 8 - Previsão da resistência à torção para as vigas de referência com pré-esforço (longitudinal)	82
Tabela 9 - Previsão da resistência à torção para as vigas de referência com pré-esforço (longitudinal) e ($\gamma_{21} = 0$).....	83
Tabela 10 - Previsão da resistência à torção para as vigas de Wafa et al 1995 [54] de referência com pré-esforço (longitudinal)	84

Simbologia

Alfabeto Latino

$(GC)^{II}$ - Rigidez de torção em Estado II

$(GC)^I$ - Rigidez de torção (Estado I) calculada pela teoria da elasticidade

\hat{A}_l - Área total da armadura longitudinal

h_e - Espessura efectiva da parede para a análise em Estado II

h_{eq} - Espessura equivalente da parede da secção

A_0 - Área limitada pelo perímetro médio

A_h - Área da zona vazada da secção (para secções cheias $A_h = 0$)

A'_h - Área da zona vazada

A_{hl} - Áreas de aço homogeneizadas na direcção longitudinal

A_c - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão

A'_c - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção de betão pré-esforçado transversalmente

$A_{cl,eq}$ - Área equivalente de betão para o equilíbrio da treliça na direcção longitudinal

A_{cp} - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão

$A_{ct,eq}$ - Área equivalente de betão para o equilíbrio da treliça na direcção transversal

A_l - Área da secção transversal de uma barra da armadura longitudinal / Área total da armadura longitudinal

A_{lh} - Área de aço homogeneizado para a armadura longitudinal

A_o - Área limitada pela linha média do fluxo de corte

A_{pt} - Área de uma unidade de armadura de pré-esforço transversal

A_{pt} - Área de uma unidade de armadura transversal de pré-esforço

A_t - Área da secção transversal de uma unidade da armadura transversal / Área de um ramo da cinta transversal

A_{th} - Área de aço homogeneizado para a armadura transversal

A_v - Área de armadura transversal

E_c - Módulo de elasticidade do betão

E_{pl} - Módulo de elasticidade da armadura longitudinal de pré-esforço

E_{pt} - Módulo de elasticidade da armadura de pré-esforço transversal

E_s - Módulo de elasticidade da armadura ordinária

$F_{l,tot}$ - Força longitudinal total

$F_{t,tot}$ - Força transversal total distribuída

$K_{t,exp}^I$ - Valor experimental da rigidez de torção efectiva (Estado I)

$K_{t,exp}^{II}$ - Valor experimental da rigidez de torção efectiva (Estado II)

$K_{t,th}^I$ - Valor teórico da rigidez de torção efectiva (Estado I)

$K_{t,th}^{II}$ - Valor teórico da rigidez de torção efectiva (Estado II)

- K_t^I - Rigidez de torção (Estado I) minorada: $K_t^I(GC)^I$
 K_t^{II} - Rigidez de torção efectiva (Estado II)
 \bar{N} - Força de tracção absorvida pela armadura longitudinal
 N_b - Força na corda inferior da treliça plana
 N_t - Força na corda superior da treliça plana
 $T_{0,exp}$ - Valor experimental da ordenada na origem da curva $T - \theta$ (Estado II)
 $T_{0,th}$ - Valor teórico da ordenada na origem da curva $T - \theta$ (Estado II)
 T_0 - Ordenada na origem da curva $T - \theta$ (Estado II)
 $T_{cr,ef}$ - Momento torsor de fissuração efectivo
 $T_{cr,exp}$ - Valor experimental do momento torsor de fissuração
 $T_{cr,th}$ - Valor teórico do momento torsor de fissuração
 T_{cr} - Momento torsor de fissuração
 T_e - Momento torsor resistente elástico
 $T_{n,exp}$ - Valor experimental do momento torsor resistente
 $T_{n,th}$ - Valor teórico do momento torsor resistente
 T_n - Valor nominal do momento torsor resistente
 T_{np} - Valor nominal do momento torsor resistente de uma viga de betão simples
 T_{pl} - Momento torsor resistente plástico
 T_y - Momento torsor de cedência
 d_v - Distância entre a corda superior e inferior do modelo de treliça plana
 f'_c - Resistência à compressão uniaxial do betão
 f_{ck} - Valor característico da resistência à compressão do betão
 f_{cr} - Tensão de rotura do betão
 f_l - Tensão da armadura longitudinal
 f_{lp} - Tensão de cedência de armadura longitudinal pré-esforço
 f_{ly} - Tensão de cedência da armadura longitudinal
 $f_{pi,l}$ - Tensão inicial na armadura longitudinal de pré-esforço
 $f_{pi,t}$ - Tensão inicial na armadura de pré-esforço transversal
 f_r - Módulo de rotura do betão
 f_{sty} - Tensão de cedência da armadura transversal ordinária
 f_{sy} - Tensão de cedência da armadura ordinária
 f_t - Tensão da armadura transversal
 f_{tp} - Tensão de cedência de armadura transversal pré-esforço
 f_v - Tensão na armadura transversal
 f_y - Tensão de cedência da armadura ordinária
 k_1 - Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão
 k_{1c} - Factor de tensão médio para o betão à compressão
 l_q - Comprimento da porção recta da linha média do fluxo de corte

n_v	Força uniforme na armadura transversal por unidade de comprimento
p_c	Perímetro da linha média do fluxo de corte/Perímetro exterior de uma secção transversal de betão
p_{cp}	Perímetro exterior de uma secção transversal de betão
p_o	Perímetro da linha média do fluxo de corte
s_p	Espaçamento das armaduras de pré-esforço
t_d	Espessura de fluxo na zona de corte
u_p	Perímetro médio da “cinta fechada” que constitui a armadura de pré-esforço transversal (considerando pré-esforço em todas as paredes da secção)
x_1	Dimensão menor de um estribo fechado (cinta) referido à linha média
y_1	Dimensão maior de um estribo fechado (cinta) referido à linha média
h	Altura da secção transversal / Espessura da parede da secção
y	Dimensão maior de uma secção transversal rectangular
A	Área da secção transversal / Área limitada pela linha média da parede de um tubo / Área limitada pela linha média da armadura transversal / Área limitada pela linha média do fluxo de corte
C	Factor de rigidez de torção / Factor de correcção
D	Força de compressão absorvida pela escora de betão
G	Módulo de distorção
K	Factor minorativo ($K \approx 0,7$) / Factor de redução
M	Momento flector
Q	Carga concentrada
R	Factor de redução para a relação Hsu/Zhu v_{12}
T	Momento torsor
V	Esforço transversal / Força de corte aplicada na viga
n	Número de varões longitudinais / Coeficiente de homogeneização / Número de valores da amostragem
q	Fluxo de corte
s	Espaçamento das barras longitudinais / Espaçamento longitudinal da armadura transversal (cintas ou estribos) / Desvio padrão amostral
t	Momento torsor distribuído / Espessura da escora de betão / Espessura da parede
u	Perímetro da linha média da parede de um tubo / Perímetro da linha média de uma cinta / Perímetro exterior da secção transversal
w	Deslocamento perpendicular ao plano $x - y$ / Deslocamento fora do plano na direcção normal para um elemento membrana
x	Dimensão menor de uma secção transversal rectangular
z	Comprimento da parede referida à linha média / Distância entre duas secções ao longo do eixo de uma viga

Alfabeto Grego

- $(v_{12,corte})$ - Relação Hsu/Zhu usado o modelo de membrana para o corte
- $(v_{12,torção})$ - Relação modificada de Hsu/Zhu para o modelo de membrana para a torção
- $\bar{\epsilon}_1$ - Extensão uniaxial média na direcção 1
- $\bar{\epsilon}_{1s}$ - Máxima extensão uniaxial na superfície na direcção 1
- $\bar{\epsilon}_2$ - Extensão uniaxial média na direcção 2
- $\bar{\epsilon}_{2s}$ - Máxima extensão uniaxial na superfície na direcção 2
- $\bar{\epsilon}_{li}$ - Extensão inicial de compressão na armadura ordinária longitudinal
- $\bar{\epsilon}_{lpi}$ - Extensão inicial na armadura de pré-esforço (A_{lp}) devido ao pré-esforço longitudinal
- $\bar{\epsilon}_{ti}$ - Extensão inicial de compressão na armadura ordinária transversal
- $\bar{\epsilon}_{tpi}$ - Extensão inicial na armadura de pré-esforço (A_{tp}) devido ao pré-esforço transversal
- $\theta_{cr,exp}^I$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{cr,exp}$ em Estado I
- $\theta_{cr,exp}^{II}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{cr,exp}$ em Estado II
- $\theta_{cr,th}^I$ - Valor teórico da rotação de torção correspondente a $T_{cr,th}$ em Estado I
- $\theta_{cr,th}^{II}$ - Valor teórico da rotação de torção correspondente a $T_{cr,th}$ em Estado II
- θ_{cr}^I - Rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado I
- θ_{cr}^{II} - Rotação de torção correspondente a T_{cr} em Estado II
- $\theta_{n,exp}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{n,exp}$
- $\theta_{n,th}$ - Valor experimental da rotação de torção correspondente a $T_{n,th}$
- θ_n - Rotação de torção correspondente a T_n
- α_2 - Coeficiente de St. Venant / Ângulo entre a direcção principal 2 e a direcção da armadura longitudinal
- β_ϵ - Factor de redução para as extensões
- β_σ - Factor de redução para as tensões
- γ_{21} - Tensão média de corte na direcção 2 e 1
- γ_{lt} - Tensão média de corte longitudinal-transversal
- ϵ_0 - Extensão correspondente ao pico de tensão
- ϵ_1 - Extensão na direcção 1 (compressão actuante)
- ϵ_2 - Extensão na direcção 2 (tracção actuante)
- ϵ_{cr} - Extensão de rotura do betão
- ϵ_{cu} - Extensão última do betão
- ϵ_d - Extensão na escora diagonal de betão
- $\epsilon_{dec,t}$ - Extensão da armadura de pré-esforço transversal na descompressão
- ϵ_{ds} - Extensão máxima de compressão à superfície da escora de betão
- ϵ_l - Extensão na armadura longitudinal / Extensão na direcção longitudinal
- ϵ_p - Extensão correspondente ao pico de tensão σ_p
- $\epsilon_{pi,t}$ - Extensão inicial de tracção na armadura de pré-esforço transversal
- ϵ_s - Extensão de tracção nas armaduras de torção

- ε_{sf} - Extensão média uniaxial da armadura ordinária de acordo com as razões Hsu/Zhu
- ε_{su} - Extensão última convencional da armadura ordinária
- ε_t - Extensão na armadura transversal / Extensão na direcção transversal
- ε_{ti} - Extensão inicial de compressão na armadura ordinária transversal
- ρ_l - Taxa de armadura longitudinal
- ρ_{lp} - Taxa de armadura longitudinal de pré-esforço
- ρ_t - Taxa de armadura transversal
- ρ_{tot} - Taxa total de armadura (incluindo a armadura de pré-esforço)
- ρ_{tp} - Taxa de armadura transversal de pré-esforço
- σ_1 - Tensão principal de tracção
- σ_1^c - Tensão média do betão na direcção principal de tracção
- σ_2 - Tensão principal de compressão
- σ_2^c - Tensão média do betão na direcção principal de compressão
- σ_d - Tensão na escora diagonal de betão
- σ_l - Tensão normal na direcção longitudinal
- σ_p - Tensão máxima de compressão no betão tendo em conta o *softening effect*
- σ_t - Tensão normal na direcção transversal
- τ_{21}^c - Tensão tangencial de corte do betão
- τ_{lt} - Tensão tangencial de corte na direcção longitudinal e transversal
- ν - Coeficiente de Poisson (para o betão no Estado I $\nu = 0,2$)
- θ - Ângulo entre a escora de betão e a direcção longitudinal / Ângulo de torção por unidade de comprimento
- $\Delta\theta_{cr,exp}$ - Valor experimental da extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
- $\Delta\theta_{cr,th}$ - Valor teórico da extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
- $\Delta\theta$ - Extensão do patamar de deformação correspondente à passagem do Estado I para o Estado II
- Φ - Ângulo total de torção / Ângulo da fissura de torção com o eixo da viga / Factor redutor de resistência
- Ψ - Função de empenamento / Curvatura da escora de betão
- α - Ângulo de rotação por torção / Ângulo de inclinação das escoras / Coeficiente de St. Venant
- β - Coeficiente de St. Venant / Ângulo de desvio
- γ - Distorção / Factor de pré-esforço
- ε - Extensão
- ζ - Coeficiente para ter em conta o *softening effect* para o betão à compressão
- η - Relação ente as forças resistentes nas armaduras na direcção longitudinal e transversal

- λ - Coeficiente de eficiência de Cowan / Coeficiente de redução para ter em conta o *softening effect*
- σ - Tensão normal
- τ - Tensão tangencial
- φ - Curvatura dos estribos ao longo da direcção 1

1- Introdução

A realização de projectos e construções de estruturas durante o século XX e até à década de 60 do século passado teve como grande influência e importância o betão armado. Para efeitos de dimensionamento, os esforços de torção eram desprezados, assumindo-se que eram absorvidos por redistribuições internas de esforços e pela resistência apreciável dos coeficientes de segurança à flexão.

Como os critérios de verificação de segurança tinham por base o método das tensões admissíveis para os materiais, o grau de segurança era muito superior comparativamente aos métodos utilizados actualmente, mais económicos, que têm por base os conceitos de estado limite e no comportamento plástico dos materiais.

Refere-se no entanto, a existência de casos pontuais relativos a elementos estruturais em que existia a necessidade de considerar os esforços de torção, designadamente, as estacas de betão pré-fabricadas que, pelo seu procedimento de aplicação, eram designadas de estacas parafuso (*screw piles*), a ponte de Waterloo concebida por Cuerel em 1948 [23], onde foram consideradas cargas excêntricas que geravam momentos torsões elevados nas vigas caixão e o Royal Festival Hall concebido e dimensionado por Measor e New em 1951 [39], onde existia uma viga caixão triangular sujeita a elevados momentos torsões para o suporte de uma laje em consola. Estes casos de aplicação prática alertaram a comunidade científica, que verificou a necessidade de realizar um estudo adequado à problemática da torção em elementos de betão armado.

Para uma redução de custos e optimização dos métodos de dimensionamento, por volta dos anos 60, foram reduzidos os factores de segurança do método das tensões admissíveis então aplicado e que resultou na substituição deste por uma teoria baseada nos Estados Limites. Esta mudança alertou a comunidade científica para a necessidade de cálculo de os então efeitos secundários de torção.

O desenvolvimento da arquitectura moderna e o aumento da complexidade das estruturas particularmente antes da década de 60 representava uma dificuldade para os engenheiros, com o cálculo extremamente fastidioso e moroso dos efeitos torsionais em estruturas estáticamente indeterminadas. No entanto, este desenvolvimento foi acompanhado pelo rápido avanço das aplicações computacionais na análise estrutural.

Nos tempos actuais, a modelação estrutural com recurso a ferramentas computacionais constitui já uma aplicação corrente na área de projecto de estruturas onde os esforços de torção são muitas vezes importantes para o dimensionamento de elementos principais.

Para o estudo e promoção da investigação na área dos esforços de torção em elementos de betão armado, foi criada em 1958 a Comissão 438 do *American Concrete Institute* (ACI 438). O código de 1971 (ACI 318-71 [1]) representava assim o primeiro documento normativo americano que incluía explicitamente procedimentos para o dimensionamento à torção.

Passou assim a ser exigido a consideração explícita do esforço de torção no processo de dimensionamento estrutural.

Foi também promovida a investigação nesta área na Europa, realça-se em particular o *Comité European du Béton* (CEB) através da "Comissão V: Esforço Transverso - Torção", que desenvolveu entre 1972-1977 estudos sobre torção e o seu dimensionamento. Em 1978 estes estudos foram incorporados nos procedimentos de dimensionamento do *Código Europeu* (MC 78 [15]), já baseado na teoria dos Estados Limites. Em Portugal este documento deu origem ao Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado (REBAP) em 1983 [36].

Apesar dos esforços, o dimensionamento e verificação de elementos de betão armado continuam a basear-se em procedimentos semi-empíricos ou mesmo empíricos, revelando-se importante a continuação dos estudos para a verificação de tais procedimentos e suas eventuais correcções.

Actualmente, dentro do estudo relativo à torção, realçam-se os problemas relacionados com a utilização de novos materiais estruturais, ou menos convencionais, como é o caso de betões de alta resistência, betões leves e betões com fibras. Existe ainda necessidade de elucidar alguns aspectos considerados ainda duvidosos nos actuais procedimentos de dimensionamento [30] bem como generalizar os procedimentos de modo a incorporar as verificações no âmbito dos Estados Limites de Serviço.

Neste trabalho mais especificamente, pretende-se estudar os efeitos torsionais globais de vigas de betão armado sujeitas à torção pura, com secção rectangular cheia ou vazada e sujeitas a pré-esforço longitudinal.

1.1 - Classificação Fundamental de Efeitos de Torção

Existem várias situações distintas nos problemas em que o esforço de torção surge na análise estrutural, tendo em conta como este esforço de torção é absorvido pela secção transversal e a consequência da sua omissão no procedimento de verificação de segurança.

Designa-se por torção de compatibilidade (fig. 1) aquela que resulta para um elemento de uma estrutura essencialmente em virtude de condições de compatibilidade de deformação. Se a resistência à torção for nula ou se a torção não entra explicitamente no cálculo, é possível ocorrer fissuração excessiva ou grandes deformações mas a estrutura não colapsa. Este tipo de torção não tem influência no equilíbrio da estrutura.

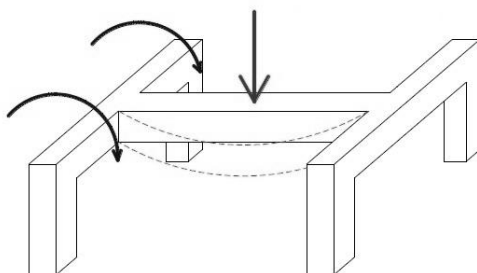


Figura 1 - Exemplo de estrutura com torção de compatibilidade

No caso da torção de equilíbrio (fig. 2), é preciso garantir a resistência à torção para que o equilíbrio se verifique, caso contrário a estrutura ou parte dela torna-se instável. Em estruturas isostáticas apenas pode existir torção de equilíbrio.

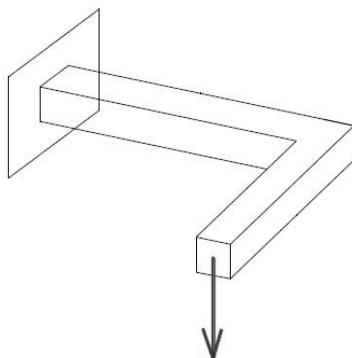


Figura 2 - Exemplo de estrutura com torção de equilíbrio

Conclui-se que a torção de compatibilidade interessa fundamentalmente aos Estados Limites de Serviço, e que a torção de equilíbrio interessa aos Estados Limites Últimos.

O mecanismo de resistência de uma viga quando sujeita ao esforço de torção depende essencialmente da forma da secção transversal. No caso de secções cheias e vazadas (fig. 3 (a)), os esforços de torção são essencialmente resistidos por um fluxo de tensões tangenciais (torção circulatória ou tensão de St. Venant), por sua vez nas secções abertas (fig.3 (b)) a torção é praticamente resistida por esforços adicionais (torção por empenamento).

O empenamento das secções é normalmente associado à acção torsional (fig. 3), a excepção verifica-se em secções de geometria circular e cujas propriedades de configuração são livres de empenamento. Normalmente, quando não existe restrição ao empenamento para secções cheias ou vazadas, os efeitos de empenamento são muito reduzidos. A restrição do empenamento, independentemente do tipo de secção e sobretudo no estado fissurado, aumenta consideravelmente a rigidez do elemento.

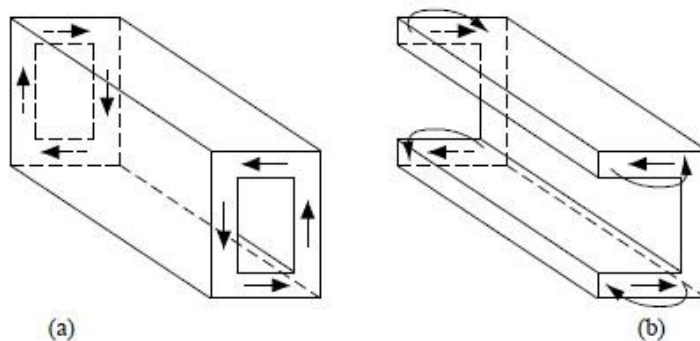


Figura 3 - Torção circulatória e torção de empenamento [4]

1.2 - Exemplos Práticos de Estruturas com Esforços de Torção

A figura 4 ilustra o caso de um edifício onde existe o prolongamento para o exterior de lajes de pavimento, funcionando estas como consolas. A viga de apoio está sujeita a momentos torsores.



Figura 4 - Edifício com prolongamento para o exterior [10]

A figura 5 ilustra os casos de cargas excêntricas em vigas. A transmissão de carga às vigas é feita por intermédio das abas que funcionam como consolas curtas. Na figura 5 (a), qualquer assimetria entre as reacções suspensas, provocam o aparecimento de momentos torsores na viga de apoio. A figura 5 (b) ilustra o apoio excêntrico superior na aba de uma viga. O peso da parede de alvenaria provoca o aparecimento de momentos torsores na viga de apoio.

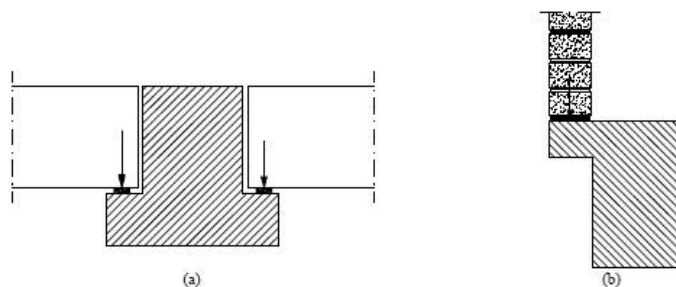


Figura 5 - Vigas com carregamento excêntrico [4]

A figura 6 ilustra o caso de vigas com desenvolvimento curvo em planta, em que a rotação transversal da secção está restringida nos apoios. O carregamento vertical sobre o eixo das vigas (resultante de lajes de pavimento ou paredes exteriores) gera o aparecimento de momentos torsores.

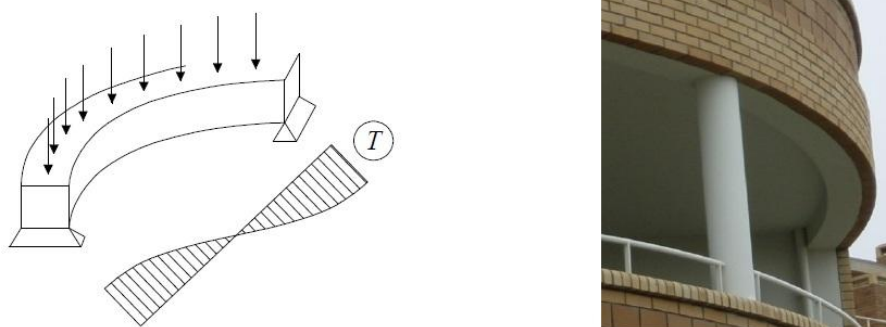


Figura 6 - Vigas curvas no plano horizontal [10]

1.3 - Modelação Teórica do Comportamento de Vigas à Torção

Vários estudos foram desenvolvidos desde o início do século passado, para o conhecimento do comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção. Alguns modelos teóricos tiveram por base estes estudos sobretudo para a previsão da resistência última de torção.

Os modelos mais clássicos podem ser divididos em duas teorias: a Teoria da Flexão Enviada que constitui a base do código americano entre 1971 e 1995, e a Analogia de Treliça Espacial ou Modelo de Treliça Espacial, que constitui a base do modelo europeu desde 1978 e do código americano desde 1995. O modelo teórico mais recente apresentado por Hsu e Mo em 1985 [26][27][25] é o Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (MTEAV) complementado com a influência das extensões transversais de tracção, principalmente no estado fissurado, no comportamento do betão comprimido nas escoras de elementos de betão armado (fenómeno designado por *Softening Effect*). Os autores utilizaram uma curva $\sigma - \varepsilon$ que tem em conta o *Softening Effect* em substituição da curva $\sigma - \varepsilon$ convencional de betão à compressão nas escoras. O MTEAV resultou de desenvolvimentos sucessivos do modelo de treliça original de Rausch em 1929 [46], designadamente: Andersen em 1935 [3], Cowan em 1950 [20], Lampert e Thurlimann em 1969 [37], Elfgren em 1972 [23], Collins e Mitchell em 1980 [16].

O MTEAV pode ainda ser dividido na Teoria da Plasticidade do Campo de Compressões (Lampert e Thurlimann, Elfgren) e na Teoria da Compatibilidade do Campo de Compressões (Collins, Hsu e Mo). Na primeira teoria, as tensões são baseadas na teoria da plasticidade, já na segunda teoria é utilizada a compatibilidade de deformações no modelo de treliça.

A analogia da treliça espacial permite simular o comportamento da viga para fases adiantadas de carregamento. Para carregamentos baixos, a referida analogia deixa de constituir uma boa aproximação uma vez que assume um estado plenamente fissurado desde o início do carregamento.

Rahal e Collins em 1996 [48] propuseram, com base em simplificações, um modelo simples baseado na analogia de treliça espacial para prever unicamente a resistência à torção e correspondente deformação em secções de betão armado com e sem pré-esforço. As

simplificações relacionaram-se com a espessura da escora diagonal de betão, com o *softening effect* e com a extensão principal de compressão para o betão.

A partir de condições de compatibilidade do modelo de treliça espacial de Rausch com um ângulo constante de 45° para as escoras de betão, Hsu em 1973 [29] derivou expressões para o módulo de distorção e a rigidez de torção para uma viga fissurada. Tal analogia pode ser utilizada para a caracterização de uma viga à torção no Estado II (fissurado).

Alguns autores modelaram o comportamento à torção de vigas de resistência normal com base na utilização de analogia de treliça espacial com ângulo variável, destaca-se Hsu em 1984 [30] com o objectivo de calcular o traçado da curva teórica $T - \theta$ e compará-la com os resultados experimentais de vigas de resistência normal com secção cheia.

Hsu desenvolveu um algoritmo e calculou alguns pontos teóricos para o traçado da Curva $T - \theta$ assumindo unicamente a formulação do MTEAV para caracterizar o comportamento da viga. Hsu concluiu que os valores teóricos do momento torsor se aproximam bastante dos valores experimentais essencialmente na parte final da Curva $T - \theta$. A mesma observação foi feita para vigas semelhantes, incluindo vigas com pré-esforço longitudinal uniforme.

Bernardo em 2003 [10] e Bernardo e Lopes em 2008 [8] criaram um procedimento de cálculo com o objectivo de prever teoricamente o comportamento global de uma viga de betão armado, incluindo vigas pré-esforçadas longitudinalmente e vigas de betão de alta resistência, sujeitas à torção pura até à rotura, com base no cálculo das curvas de comportamento $T - \theta$.

A aproximação teórica realizada por Bernardo e Lopes [8] foi inicialmente dividida por fases, individualmente caracterizadas com o recurso a diversas teorias separadas, nomeadamente:

- Análise elástico-linear em regime não fissurado (Estado I): Teoria da Elasticidade, Teoria da Flexão Enviesada e Teoria do Tubo Fino de Bredt;
- Análise elástico-linear em regime fissurado (Estado II): Analogia da Treliça Espacial com ângulo de 45° para as escoras de betão, tendo em conta o comportamento linear dos materiais;
- Análise não linear: Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável, tendo em conta o comportamento não linear dos materiais e o *softening effect*.

Para realizar a transição entre as várias análises, Bernardo e Lopes adoptaram critérios de transição que eram essencialmente ajustamentos semi-empíricos baseados na observação dos resultados experimentais obtidos por diversos autores e também pelos próprios, que incluíam o ensaio de 16 vigas com secção vazada, incluindo vigas de alta resistência.

O procedimento adoptado por Bernardo e Lopes [8] mostrou-se bastante adequado, designadamente para a previsão global da curva de comportamento $T - \theta$ em todas as suas fases comportamentais para vigas de betão de resistência normal.

Posteriormente Bernardo e Lopes [8] observaram que este modelo não fornecia resultados satisfatórios para vigas de alta resistência para a previsão do comportamento à torção nomeadamente para a fase não linear. Por isso, os autores experimentaram incorporar outras

leis constitutivas para o betão, designadamente a proposta de Belardi e Hsu em 1991 [7] a partir do ensaio de corte de placas de alta resistência. Para as armaduras ordinárias traccionadas, os referidos autores utilizaram uma lei bilinear com patamar horizontal (ex. proposta pelo EC2 [42]), que não tem em conta o *stiffening effect* (influência do betão traccionado entre fissuras) nem o endurecimento do aço na fase plástica. Para armaduras de pré-esforço, os autores utilizaram apenas uma lei constitutiva não linear proposta por Rao e Warwaruk em 1973 [45].

Em 2005, Costa [18] fez uma pesquisa exhaustiva sobre as propostas de diversos autores encontradas para a Curva $\sigma - \varepsilon$, onde mostrou existir uma dispersão apreciável. Para as armaduras traccionadas, algumas propostas de Curva $\sigma - \varepsilon$ têm em conta o *stiffening effect* e o endurecimento do aço no patamar de cedência. Para o caso do betão à compressão algumas propostas têm em conta o *softening effect*, através de factores de redução para a resistência do betão e para a extensão correspondente à tensão máxima de compressão.

Através da modificação do MTEAV, com a inclusão de algumas correcções para conseguir obter bons resultados na fase comportamental de pré-fissuração, Andrade em 2010 [4] desenvolveu um novo procedimento para a previsão global de vigas à torção. O modelo de Andrade distingue-se por uma maior consistência teórica relativamente ao modelo apresentado por Bernardo e Lopes em 2008 [8]. O trabalho desenvolvido por Andrade em 2010 [4] desenvolveu-se em três fases. Para a primeira fase o autor comparou diversos modelos teóricos para a previsão do comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção, com o propósito de encontrar o modelo que fornecia melhores resultados. Na segunda fase o modelo pré-seleccionado anteriormente foi corrigido para prever a última fase de comportamento e o comportamento global da viga. Por fim, na terceira fase Andrade criou e desenvolveu uma aplicação computacional, que permitia a modificação e/ou substituição de leis constitutivas dos materiais bem como a comparação dos resultados teóricos com os resultados experimentais.

Tendo por base outra aproximação teórica (modelo de membrana) Hsu e Jeng em 2009 [24], desenvolveram um novo modelo teórico para a análise do comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção, o SMMT (*Softened Membrane Model for Torsion*). Este modelo desenvolvido por Hsu e Jeng [24] consiste na adaptação de um modelo já existente para análise de placas de betão armado sujeitas ao corte, o SMM (*Softened Membrane Model*). Os resultados da publicação deste método por parte de Hsu e Jeng [28] apenas incidiam em vigas de betão armado de secção cheia permanecendo assim a incógnita sobre a validade de aplicação deste novo método a vigas de betão armado de secção vazada ou até a vigas de betão armado sujeitas a pré-esforço longitudinal e/ou transversal.

A incorporação de pré-esforço longitudinal/transversal não constitui uma aplicação corrente na resolução de problemas práticos de torção pura. Em elementos sujeitos a interacção de esforços em que a torção tem uma magnitude elevada, a incorporação de pré-esforço longitudinal e/ou transversal constitui um caso corrente (ex: pontes curvas com secção em

caixão). Nestas situações, os esforços de corte são absorvidos através do recurso ao pré-esforço transversal nas paredes da secção em adição à armadura transversal.

1.4 - Objectivos e Justificação do Trabalho

Perante o exposto anteriormente, vários aspectos e questões contribuíram para a escolha do tema deste trabalho e a sua importância:

- A inexistência de um procedimento de cálculo baseado essencialmente numa única teoria para a prever o comportamento global à torção de vigas de betão armado de resistência normal e de alta resistência com pré-esforço longitudinal;
- Análise e comparação dos resultados teóricos do modelo SMMT com resultados experimentais e resultados teóricos de modelos já existentes, para vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal;
- A verificação da adequabilidade do SMMT quando aplicado ao caso de vigas com pré-esforço sujeitas à torção através da adição da componente de pré-esforço no algoritmo de cálculo do modelo SMMT;
- A verificação da adequabilidade do SMMT quando aplicado ao caso de vigas com pré-esforço sujeitas à torção para a previsão do comportamento global à torção de vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal.

Para a possibilidade de uma situação em que um elemento está sujeito à torção pura, a existência de um estado longitudinal de tensão induzida por um pré-esforço longitudinal equivale a uma situação de interacção de esforços, pelo que deve ser feita uma revalidação da previsão teórica da resposta e da capacidade torsional da viga de betão armado sujeita a estas condições, corrigindo o modelo SMMT para tal.

2 - Modelos Teóricos

No estado fissurado, as extensões transversais têm grande influência no comportamento do betão comprimido nas escoras de betão armado, este efeito, é conhecido como *softening effect*. Na criação de um modelo de cálculo, é importante levar em conta este efeito, nomeadamente no caso da torção. No caso de uma viga com secção rectangular vazada, este efeito é mais evidenciado, uma vez que as paredes da secção funcionam como autenticas placas essencialmente sujeitas ao corte.

Como referido anteriormente, o comportamento do betão de alta resistência, difere do comportamento do betão normal, logo o efeito do "*softening effect*" difere nos dois casos. Os modelos de modelação mais usuais consideram na fase fissurada, o comportamento isolado do betão e das armaduras tendo em conta as suas tensões (σ) - extensão (ε), conduzindo a necessidade de estabelecer relações entre ambas.

Outro efeito que têm em conta a participação do betão traccionado entre fissuras e a interacção entre betão e armaduras ordinárias é denominado por *stiffening effect*. Também sobre este efeito têm sido apresentadas relações de tensões (σ) - extensão (ε), é de referir que quando utilizadas armaduras de pré-esforço a diferença da curva de tensões (σ) - extensão (ε) é idêntica com e sem o efeito de *stiffening effect* por isso desprezável.

Para simplificar a estimativa da capacidade de resistência das placas de betão armado mediante a relação $\sigma - \varepsilon$ do betão comprimido nas escoras, alguns modelos recorreram a simplificações. Considerar que a direcção principal do estado de tensão instalado no betão coincide com a direcção principal do estado de deformação foi uma das simplificações, esta foi confirmada por resultados experimentais, isto quando as armaduras são iguais nas direcções ortogonais. No caso da diferença de armaduras, considerou-se que o desvio medido experimentalmente entre $\sigma - \varepsilon$ é inferior a 10° e que existe uma perfeita aderência entre as armaduras e o betão. Outro procedimento comum entre os vários modelos é a exclusão do efeito ferrolho nas secções fissuradas, ou seja as armaduras apenas resistem a esforços na direcção do seu eixo.

É de referir que no presente trabalho apenas foram tomadas em conta as relações de tensão (σ) - extensão (ε) em que temos armaduras longitudinais e transversais ortogonais. Estas devem fazer um ângulo de 45° com as direcções principais de compressão e de tracção.

2.1 - Elementos sem Armadura Transversal

Através da observação da figura 7, que ilustra o diagrama de $T - \theta$ de uma viga de betão armado somente com armadura longitudinal e outra viga de betão simples, observa-se que o efeito ou influência da armadura longitudinal ao longo da viga, quando sujeita à torção, é praticamente desprezável e a rigidez de torção pode ser calculada através da teoria de St.

Venant. A existência de pouca armadura na viga de betão pode provocar o colapso imediato. No caso de uma viga ser muito armada, a resistência última pode exceder o momento torsor de fissuração, mas por regra nunca mais do que 15% [30]. Logo, verificou-se então que a influência da armadura longitudinal para uma viga sujeita a um momento torsor é muito pequena.

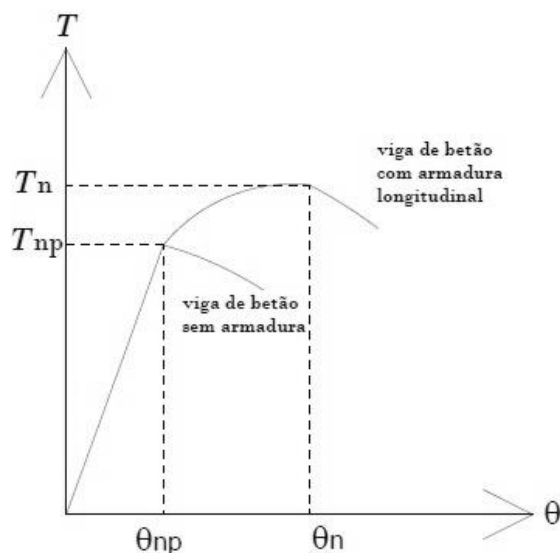


Figura 7 - Curva $T - \theta$ típica para vigas sem armadura transversal

2.2 - Elementos com Armadura Transversal

Por volta de 1963 através de análise de resultados experimentais, Hsu [31] observou que o momento torsor de fissuração (T_{cr}) é afectado pela taxa total de armadura (ρ_{tot}). Assim o autor propôs a seguinte expressão empírica:

$$T_{cr} = (1 + 4\rho_{tot})T_{np} \quad (1)$$

Onde:

T_{np} = Valor nominal do momento torsor resistente de uma viga de betão simples

Hsu chegou à conclusão que a taxa de armadura não tinha influência no cálculo da rigidez de torção da viga. Assim antes de ocorrer a fissuração, as vigas comportam-se como vigas simples e a rigidez de torção de St. Venant é aplicável em vigas com armadura longitudinal e transversal. Após a fissuração, já não pode ser aplicada a teoria de St. Venant uma vez que a teoria de elasticidade deduzida para um material homogéneo já não é válida, passando então a armadura a absorver as tensões de tracção e o betão as tensões de compressão. Na figura 8,

observa-se a passagem da pré-fissuração para a pós-fissuração através de um patamar horizontal na curva $T - \theta$.

A zona inicial da curva $T - \theta$ (curva típica para vigas sem armadura transversal), ilustrada na figura 8, mostra que numa primeira fase do desenvolvimento da curva, entre as coordenadas $(0,0)$ e $(\theta_{cr}^I; T_{cr})$, a progressão da curva pode ser considerada linear. Esta fase pode ser caracterizada com rigidez elástica a torção no Estado I (K^I), considerando-se geralmente válida nesta fase a teoria de St. Venant para a sua estimativa. Refere-se que segundo alguns estudos anteriores [14], antes de ser atingido o momento torsor de fissuração, a viga apresenta já microfissurações no betão, concretamente na zona mais externa da secção o que provoca uma quebra da rigidez. Ainda assim, a hipótese de caracterização da primeira fase da curva como análise elástico-linear em regime não fissurado constitui uma aproximação bastante aceitável. Para o cálculo do momento torsor de fissuração (T_{cr}), existem diversas teorias disponíveis e calculadas: a Teoria da Elasticidade [12], a Teoria da Flexão Enviada [30] ou ainda a Teoria do Tubo Fino de Bredt [11].

Na fase em análise e segundo resultados experimentais obtidos por Hsu logo em 1968 [31] e posteriormente por Bernardo em 2003 [10], a armadura de torção têm muito pouca influência na rigidez de torção da viga, esta apenas contribui ligeiramente para o aumento do momento torsor de fissuração da viga.

Quando a viga atinge o momento de fissuração, a curva $T - \theta$ evidencia em geral um aumento brusco de rotação para um momento torsor constante e igual a T_{cr} (patamar horizontal). A subzona 2a da curva corresponde a um incremento brusco da rotação, enquanto a subzona 2b corresponde a um desenvolvimento aproximadamente recto da curva $T - \theta$, cujo declive ilustra a rigidez de torção pós-fendilhação (K^{II}), ou seja, em Estado II.

O patamar horizontal tem maior evidência experimental em vigas cuja secção é cheia. No caso de vigas cuja secção é vazada, este patamar é imperceptível. Uma possível explicação para este fenómeno foi avançada por Bernardo em 2003 [10]. A influência do núcleo da secção cheia da viga de betão origina, imediatamente após a fissuração da viga uma redistribuição transversal das tensões tangenciais dirigidas para o interior da secção. Toda a transição poderá provocar o brusco aumento do ângulo de torção até a mobilização das armaduras. Relativamente ao caso das vigas de secção vazada, a mobilização das armaduras é imediata, visto que nestas vigas a capacidade de redistribuição transversal de tensão é muito reduzida.

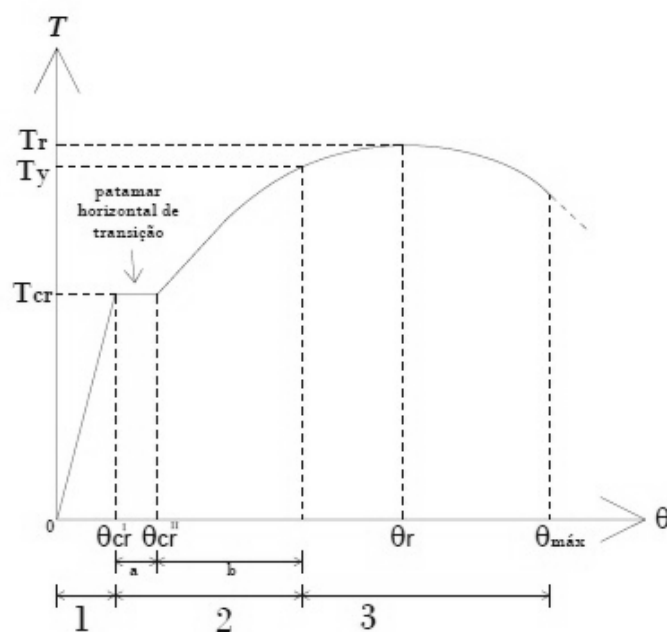


Figura 8 - Curva $T - \theta$ para vigas de betão armado

A escolha de uma análise elástico-linear em regime fissurado mediante uma analogia de treliça espacial com ângulo constante de 45° , bem como um comportamento elástico linear dos materiais, foi uma hipótese escolhida por diversos autores para a caracterização da zona comportamental 2b. Referem-se Hsu em 1973 [29], Bernardo em 2003 [10] e Bernardo e Lopes em 2008 [8]. Esta hipótese constitui uma aproximação aceitável enquanto as armaduras de torção não entram em cedência.

A partir de um determinado ponto, a curva $T - \theta$ deixa de ter um comportamento linear. Esta situação pode ocorrer em duas situações distintas relacionadas com o comportamento último da viga. Na primeira situação, este ponto pode coincidir com o ponto em que pelo menos uma das armaduras de torção (longitudinal ou transversal) entra em cedência. Na segunda situação, o ponto corresponde ao momento em que o betão comprimido nas escoras começa a apresentar um comportamento não linear devido as elevadas tensões instaladas. Este comportamento das escoras de betão pode ocorrer sem que as armaduras de torção entrem em cedência e normalmente ocorre em vigas cuja taxa de armadura de torção é elevada. A situação referida anteriormente foi abordada experimentalmente por Bernardo em 2003 [10]. Qualquer uma das situações referidas anteriormente destaca-se pelo facto da viga deixar de ter um comportamento linear até atingir o momento torsor máximo, passando assim para a zona 3 (fig. 7) da curva de comportamento.

3 - Modelos Teóricos Baseados na Analogia da Treliça Espacial

Diversas teorias foram desenvolvidas com o propósito de prever teoricamente o comportamento de uma viga de betão armado sujeita ao esforço de torção pura. Estas teorias, por sua vez, estão divididas em três tipos distintos, a Analogia de Treliça Espacial, a Teoria da Flexão Enviesada, e mais recentemente, o Modelo de Membrana. Entre as teorias com maior relevância destaca-se a desenvolvida por Rausch em 1929 [46], Cowan em 1950 [20] e Hsu em 1968 [34]. As duas primeiras teorias mencionadas pertencem a Analogia da Treliça Espacial, a terceira baseia-se na Teoria da Flexão Enviesada. Posteriormente outros autores desenvolveram outras teorias com base nas duas teorias mencionadas anteriormente e que servem como base para o modelo europeu de 1978 [15], Lampert e Thurlimann em 1969 [37], Elfgren em 1972 [23] e Collins em 1973 [17].

3.1 - A Analogia da Treliça Espacial de Rausch

Os autores Ritter em 1899 [47] e Morsh em 1902 [41], com base no modelo treliça iniciaram a simulação na fase pós-fissuração de um elemento de betão armado. Os autores observaram que para uma viga de betão armado sujeita a um esforço transversal se observa a formação de escoras no betão, isto porque a fissuração ocorre na diagonal. Para esta observação os autores consideraram que o elemento de betão armado (viga) funciona como uma treliça no plano de carregamento, ou seja, o equilíbrio da alma é suportado pelas escoras de betão e pelas barras transversais. As barras longitudinais na face superior e na face inferior funcionam como cordas superiores e inferiores da treliça. Para a simplificação do modelo, os autores consideraram que o ângulo das escoras do betão seria fixo, constante e igual a 45°. Através do equilíbrio da treliça existe a possibilidade de derivar três equações para o cálculo das tensões nas armaduras transversais e longitudinais, bem como na escora de betão.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

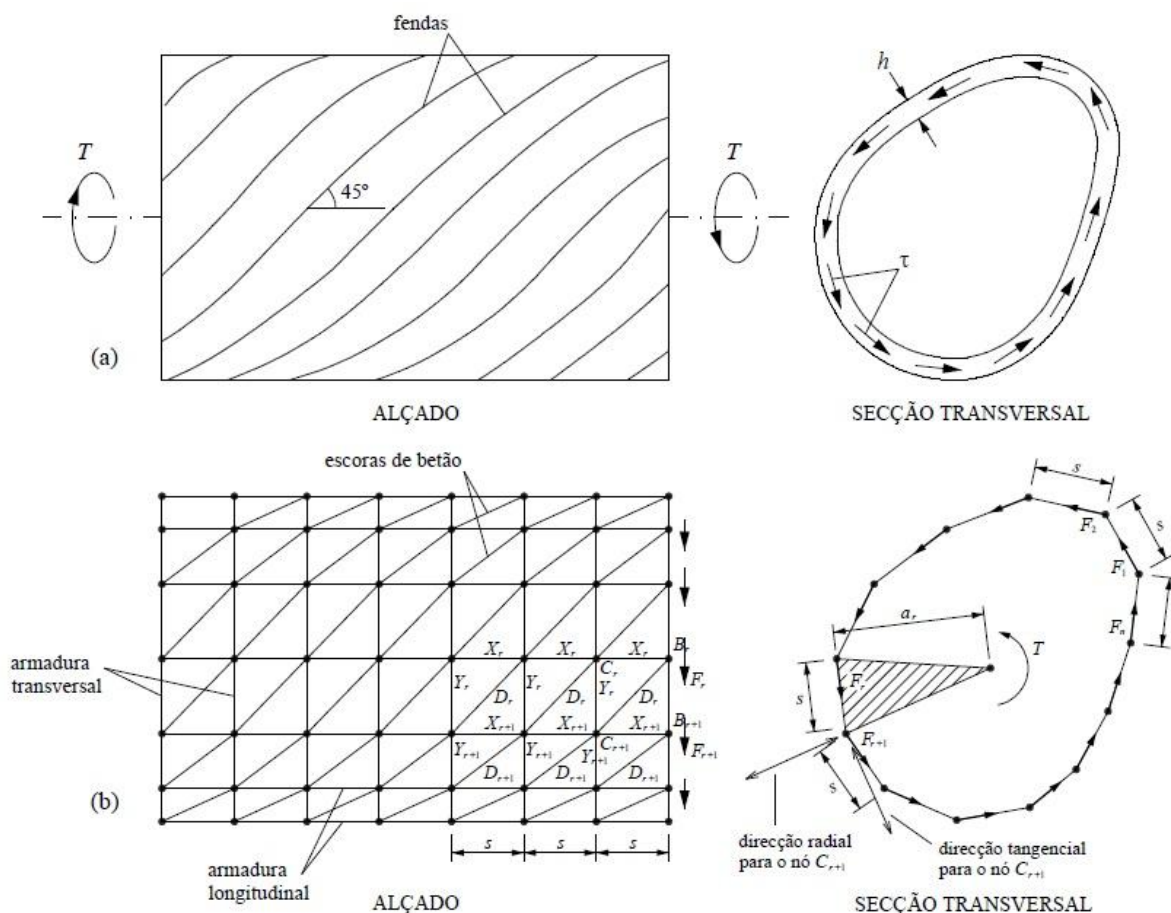


Figura 9 - Analogia da treliça espacial de Rausch [4]

Com o propósito de prever a resistência última de uma viga quando sujeita a torção, Rausch em 1929 [46], deu a aplicação da analogia da treliça a 45° . O referido autor considerou que uma viga de betão armado funciona como um tubo fechado e com espessura h (fig. 9), com armadura longitudinal e transversal constituída por cintas fechadas. Logo, quando o elemento fica sujeito a um momento torsor externo (T), este é resistido por um fluxo circulatório de corte (τ) existente nas paredes do tubo. Rausch assumiu que quando ocorre a fissuração, as fissuras existentes têm um ângulo de 45° (em relação ao eixo do elemento) originando a formação de diversos elementos helicoidais que interagem com a armadura longitudinal e transversal. Assim, o elemento comporta-se como uma treliça espacial para resistir ao fluxo de corte.

3.2 - Modelos Teóricos com Base na Treliça Espacial de Ângulo Variável de Hsu e Mo

3.2.1 - Aspectos Gerais

O modelo de treliça espacial com ângulo variável foi generalizado inicialmente em 1969 [37] por Lampert e Thurlimann. Estes autores assumiram que a teoria da plasticidade poderia ser aplicada a elementos de betão armado e que o ângulo de inclinação da escora poderia ser diferente de 45°. Este pressuposto permitiu explicar o facto de ambas as armaduras longitudinal e transversal, sem respeitarem o princípio da igualdade de volume, entrarem em cedência.

Foram derivadas três equações de equilíbrio que incluem o ângulo variável das escoras de betão. Este é determinado pela magnitude relativa das forças de cedência nas armaduras longitudinais e transversais.

Outra conclusão obtida por Lampert e Thurlimann em 1969 [37] foi que, após a deformação por torção das vigas, as superfícies planas transformavam-se em superfícies hiperbólicas. Tendo por base esta afirmação foi possível derivar duas condições de compatibilidade, uma relacionando a curvatura de flexão da escora de betão com o ângulo de torção e outra relacionando a mesma curvatura com a extensão máxima de compressão à superfície da referida escora.

Alguns anos mais tarde, em 1972 [23], Elfgren tendo por base a “*Teoria do Campo de Tensões de Compressão*” e bem como a teoria da plasticidade, concluiu que o modelo de treliça espacial com ângulo variável era muito semelhante ao da teoria do campo de tracções apresentado por Wagner em 1929 [55], para uma viga em perfil metálico de alma fina. Quando ocorre a encurvatura da alma por corte, a viga comporta-se como uma treliça e a alma apenas absorve as tensões de tracção na diagonal. Por analogia a alma de uma viga de betão armado, após fissuração, absorve somente as tensões de compressão. O ângulo de inclinação das fissuras é idêntico ao ângulo de inclinação do campo de compressões. Posteriormente Elfgren conclui que este pressuposto não era necessariamente válido.

A teoria de Lampert e Thurlimann e a teoria de Elfgren podem, de uma forma geral, ser designadas de “*Teoria da Plasticidade do Campo de Tensões de Compressão*” e que serve de base para o chamado método exacto do código europeu desde a edição de 1978 (MC 78 [15]).

Utilizando a compatibilidade de deformações do modelo de treliça, Collins em 1973 [17] desenvolveu a “*Teoria do Campo Diagonal de Compressões*”. Collins derivou uma equação de compatibilidade para obter o ângulo do campo de tensões de compressão e através do círculo de Mohr conseguiu estabelecer as condições de deformação.

No código canadiano (CAN3-A23.3-M04 [50]), o procedimento de cálculo tem como base as recomendações gerais propostas por Collins e Mitchell em 1980 [16], baseado na teoria do campo de compressões de Mitchell e Collins [16][39][40] e na teoria do campo de

compressões modificado de Vecchio e Collins [52] [53]. É de referir que este documento normativo não tem em conta o recobrimento no cálculo da capacidade torsional da peça.

Em complemento às equações de compatibilidade e equilíbrio, tornou-se necessário introduzir uma curva $\sigma - \varepsilon$ adequada para o betão comprimida nas escoras, com o objectivo de ter em conta o softening effect (influência da fissuração diagonal no comportamento do betão à compressão nas escoras). Em 1985 Hsu e Mo [26,25], introduziram uma equação no MTEAV, conseguindo prever adequadamente a resistência a torção bem como a respectiva deformação.

A utilização do MTEAV, em detrimento de outras teorias como é por exemplo a teoria da flexão enviesada ou a analogia da treliça espacial com destacamento do betão, permite calcular para além da resistência última da viga à torção, também nos fornece a evolução dos vários parâmetros caracterizadores do estado das vigas (estado de carga, deformação angular, extensões e tensões nas armaduras e no betão comprimido, etc.). Actualmente, este método é considerado como um dos mais sofisticados na descrição do comportamento de uma viga de betão armado sujeita à torção.

3.2.2 - Análise de uma Viga com Base no Modelo de Treliça

Plana

A partir do modelo de treliça plana aplicado ao caso do esforço transversal em vigas, é possível derivar numa segunda fase as equações básicas de equilíbrio para a torção. Para tal, considere-se um modelo de treliça (fig. 10 (a)), onde a acção combinada do esforço transversal e flexão perfaz o equilíbrio de uma viga de betão armado.

A equação (2) para o cálculo da tensão nas escoras diagonais de betão, é estabelecida tendo em conta o equilíbrio de um elemento de viga (fig. 10(b)) cujo comprimento $d_v \cot \alpha$. A decomposição da força de corte V nas forças \bar{N} (repartida por igual entre a armadura superior e inferior, $\bar{N}/2 = (V \cot \alpha)/2$) e D (nas escoras diagonais de betão, $D = V/\sin \alpha$). Fornece a seguinte equação para calcular:

$$\sigma_d = \frac{D}{td_v \cos \alpha} = \frac{V}{td_v \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2)$$

Em que:

V - Força de corte aplicada na viga;

σ_d - Tensão na escora diagonal de betão;

d_v - Distância entre a corda superior e a corda inferior do modelo membrana;

t - Espessura da parede.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

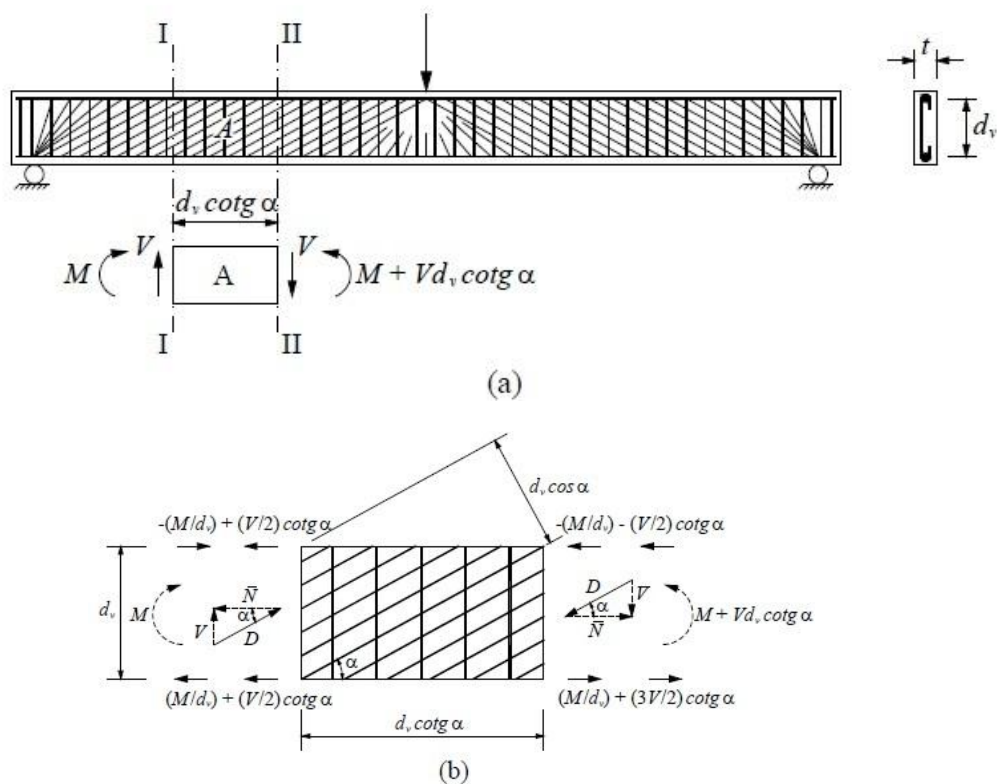


Figura 10 - Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana [10]

As forças nas armaduras longitudinais inferiores e superiores (N_d e N_t , respectivamente) resultam da soma de duas parcelas distintas. Em adição à força $\bar{N}/2$ provocada pela força de corte V , o momento M também provoca uma força $\pm M/d_v$ na face esquerda e de $\pm (M + Vd_v \cot \alpha)/d_v$ na face direita (fig. 10).

$$N_t^{esq} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (3)$$

$$N_b^{esq} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (4)$$

$$N_t^{dir} = -\frac{M}{d_v} - \frac{V}{2} \cot \alpha \quad (5)$$

$$N_b^{dir} = \frac{M}{d_v} + \frac{3V}{2} \cot \alpha \quad (6)$$

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

Através de um corte horizontal feito na viga, é possível obter a resultante na armadura transversal no elemento. A existência de equilíbrio horizontal do corpo livre é assegurada por uma força horizontal $V \cot \alpha$ na superfície do corte podendo, esta ser decomposta em duas componentes, D e $n_v d_v \cot \alpha$, sendo a última uma força uniforme na armadura transversal por unidade de comprimento, n_v . Com base no triângulo de forças superior (fig.10(b)) e definindo $n_v = A_v f_v / S$ vem:

$$n_v d_v = V \tan \alpha \Leftrightarrow A_v f_v = V \frac{S}{d_v} \tan \alpha \tag{7}$$

O ângulo α das bielas de compressão do betão (assumido anteriormente na analogia da treliça espacial de Rausch como sendo 45°) é ditado pela relação entre o volume de armadura longitudinal e transversal [30].

Um modelo de treliça espacial com ângulo variável para uma viga de secção vazada sujeita a torção pura, encontra-se na figura 11. A secção é armada com quatro barras de canto idênticas e cintas espaçadas uniformemente (s). São observados dois tipos de forças na secção transversal da viga, as forças nas barras longitudinais de canto e as forças nas escoras de betão inclinadas com ângulo α em relação ao eixo longitudinal da viga. A junção destes dois tipos de forças origina um fluxo de corte q no plano da secção transversal.

Através da teoria de tubo fino de Bredt 1896 [11], e associando o elemento a um tubo de parede fina, temos que o momento torsor aplicado produz nas paredes da secção um fluxo constante circulatório de corte q , dado por:

$$q = \frac{T}{2A_0} \tag{8}$$

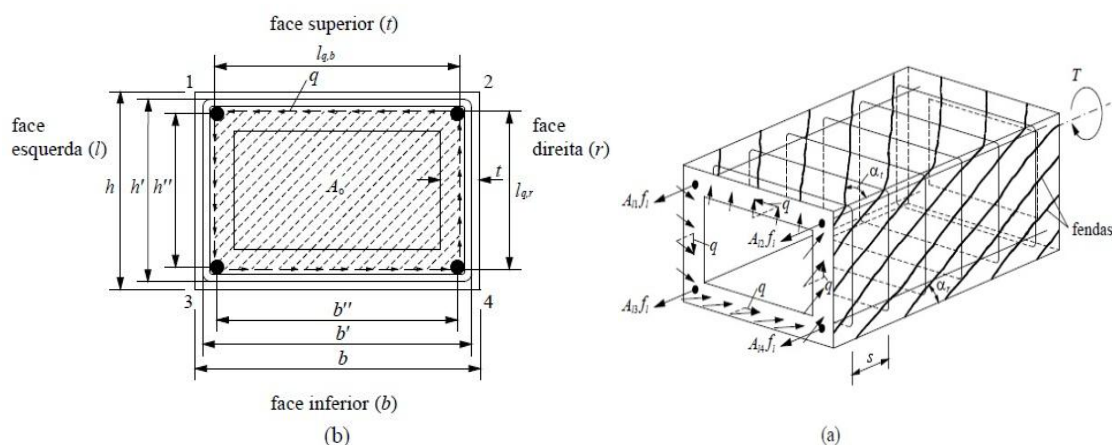


Figura 11 - Viga com secção rectangular vazada sujeita à torção pura [9]

Na equação (8), a área limitada pela linha média de fluxo de corte, que coincide com a linha média de espessura t (fig.11 (b)), é definida pelo parâmetro A_0 .

Existe uma semelhança entre o efeito de uma força de corte actuando na parede recta de uma viga com secção vazada relativamente ao de uma força de corte a actuar na alma de uma viga corrente. Analisando a figura 10, a altura dessa parede como l_q (comprimento recto da linha média do fluxo de corte q), a força de corte na parede recta $V = ql_q$ e a força longitudinal na parede como $\bar{N} = V \cot \alpha = ql_q \cot \alpha$. Definindo um perímetro da linha média do fluxo de corte através do $p_0 = \sum l_q$ bem como a força total nas barras longitudinais da secção através de $\Delta N = A_l f_l$, em que A_l representa a área total e f_l a tensão na armadura longitudinal, vem então:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = qp_0 \cot \alpha = A_l f_l \quad (9)$$

Substituindo o q proveniente da equação (8) analisada anteriormente vem:

$$A_l f_l = \frac{T p_0}{2A_0} \cot \alpha \quad (10)$$

A força de cada ramo da cinta pode ser calculada, derivando a equação (7) com $q = V/d_v$ e adicionando a equação (8) vem então:

$$A_t f_t = qs \tan \alpha = \frac{T_s}{2A_0} \tan \alpha \quad (11)$$

Na equação 11, A_t e f_t representam a área e a tensão de uma barra transversal, respectivamente.

A tensão na escora diagonal de betão pode ser obtida a partir da equação (2), adicionando a equação (8):

$$\sigma_d = \frac{q}{t \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{T}{2A_0 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (12)$$

As equações (8), (10), (11) e (12) constituem as equações básicas de equilíbrio para a torção de uma viga segundo o modelo de treliça espacial com ângulo variável. A resistência última experimental de uma viga vazada é idêntica ao de uma viga com secção cheia com as mesmas características. Este facto foi comprovado por Hsu em 1968 [31]. Conclui-se assim que as equações referidas anteriormente podem ser aplicadas a secções rectangulares cheias.

A geometria resultante da flexão de uma escora de betão sujeita à flexão está representada na figura 12, onde podemos considerar a parede representada pela superfície plana OABC ao nível médio de fluxo de corte q e uma linha OB (fig. 9) representativa de uma escora de betão, com ângulo α em relação à direcção longitudinal da peça.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

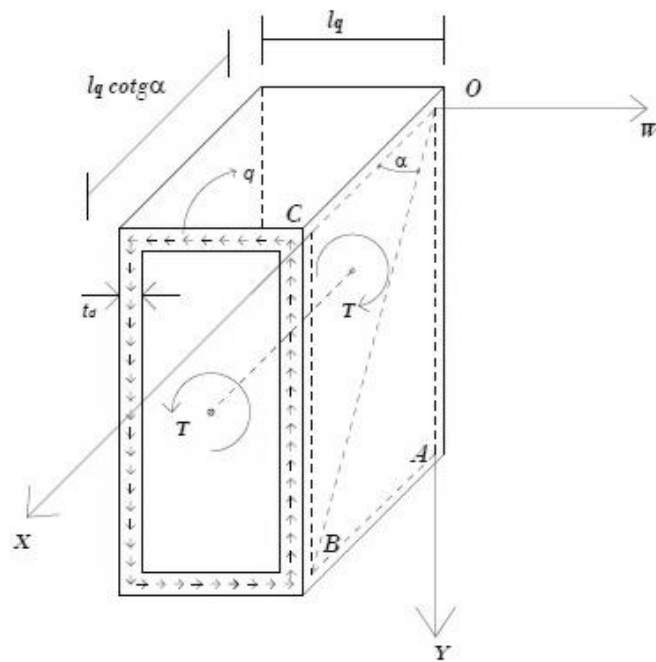


Figura 12 - Viga vazada sujeita à torção

Na figura 13, encontra-se representada uma nova superfície OADC na forma de um parabolóide hiperbólico (superfície hiperbólica dada pela equação (13)), em que uma escora de betão OD aparece curva. Este efeito surge quando a viga em caixão é sujeita a um ângulo de torção θ (por unidade de comprimento). Em consequência o lado CB roda para a posição CD com ângulo $\theta l_q \cot \alpha$.

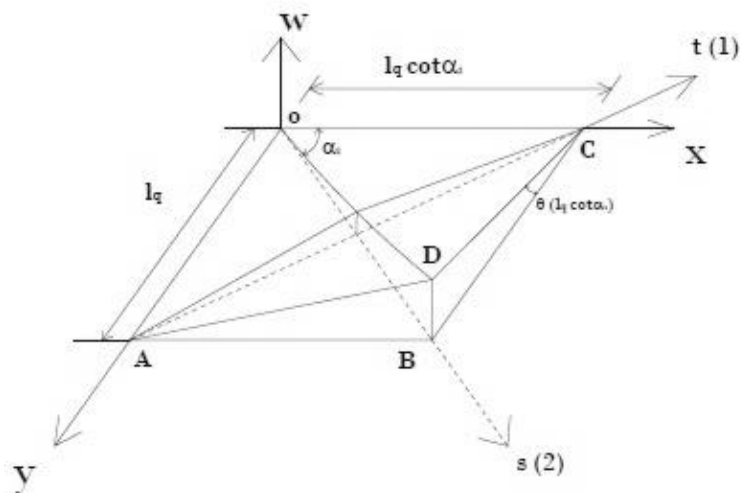


Figura 13 - Exemplo da parede OABC sujeita à torção θ

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

$$w = \theta xy \tag{13}$$

A curvatura da escora de betão é derivada através da equação (13) (equação do deslocamento w perpendicular ao plano $x - y$). Através desta equação é também possível obter a inclinação da escora diagonal de betão derivando a equação 13 em relação a s .

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dw}{dy} \frac{dy}{ds} = (\theta y) \cos \alpha + (\theta x) \sin \alpha \tag{14}$$

A segunda derivada de w em relação a s resulta na curvatura da escora de betão ψ :

$$\psi = \frac{d^2w}{ds^2} = (\theta \sin \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \sin \alpha = \sin 2\alpha \tag{15}$$

Devido à flexão das escoras de betão podem ocorrer tracções na face interior das escoras. Nestas condições despreza-se a área traccionada das escoras, considerando-se apenas para o cálculo a área efectiva da escora em compressão (com profundidade t_d). Nesta situação considera-se a secção da escora de betão, com largura unitária, isolada a partir da parede da viga com espessura t (fig.12 e 13). Considerando uma distribuição de extensões linear, a extensão máxima de compressão à superfície, ε_{ds} , é:

$$\varepsilon_{ds} = \psi t_d \tag{16}$$

A determinação do valor t_d deve ter origem nas condições de equilíbrio e nas propriedades do bloco de tensões. As equações 15 e 16 constituem as duas equações básicas de compatibilidade para a flexão das escoras de betão devido à torção.

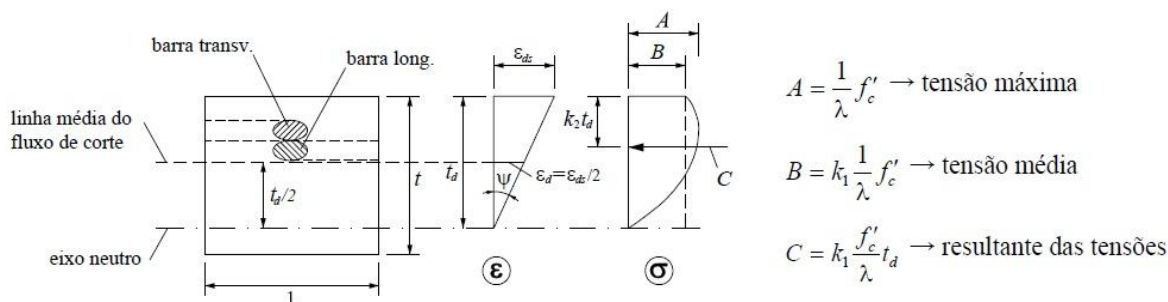


Figura 14 - Distribuição das extensões e tensões na escora de betão [4]

A figura 15 ilustra uma curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido na direcção principal de compressão e que tem em conta o *softening effect*. Em 1981 [51] vários autores utilizaram uma versão simplificada da curva de $\sigma - \varepsilon$ proposta por Vecchio e Collins (fig. 15). Esta curva foi proposta com base em resultados do ensaio de placas ao corte para classe de betões normais, sendo seguidamente utilizada para exemplificar o procedimento para introduzir a relação $\sigma - \varepsilon$ no MTEAV.

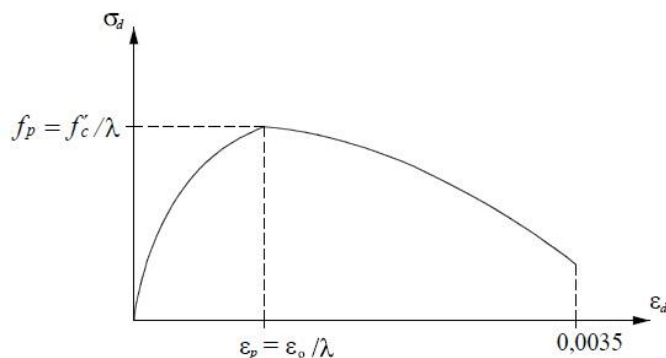


Figura 15 - Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão tendo em conta o *softening effect* [4]

Na figura 15, a curva $\sigma - \varepsilon$ para a parte ascendente é definida pela expressão:

$$\sigma_d = f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right) - \lambda \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \text{ se } \varepsilon_d \leq \varepsilon_p \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\varepsilon_t + \varepsilon_d}}{\sqrt{\varepsilon_d} \cos \alpha} \quad (18)$$

Após o pico de resistência máxima, a fase descendente da curva $\sigma - \varepsilon$ é definida pela expressão:

$$\sigma_d = f_p (1 - \eta^2) \text{ se } \varepsilon_d > \varepsilon_p \quad (19)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_p}{2\varepsilon_0 - \varepsilon_p} \quad (20)$$

A resistência à compressão uniaxial do betão é dada por factor f'_c , sendo este obtido através do ensaio de provetes cilíndricos padrão. O valor da extensão correspondente ao pico de tensão é dado por ε_0 . Os factores ε_d e ε_t , correspondem, respectivamente à extensão na direcção longitudinal e diagonal da placa (extensão nas armaduras na face fissurada).

O *softening effect*, que reduz a resistência do betão comprimido nas escoras a partir do valor padrão f'_c para $\sigma_p = f'_c / \lambda$ é dado pelo coeficiente $1/\lambda$, bem como a extensão correspondente ε_0 para $\varepsilon_p = \varepsilon_0 / \lambda$ (fig. 15).

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

A tensão média no diagrama de tensões de compressão na escora B, e a sua resultante C, é calculada através de um coeficiente k_1 (quociente entre a tensão média e o pico de tensão (fig.14)). Este coeficiente é conseguido através da integração das duas equações que definem a curva $\sigma - \varepsilon$ (eq. 17 e 19).

Tendo por base a integração analítica, obtém-se as seguintes expressões, com $\varepsilon_p = \varepsilon_0/\lambda$:

$$k_1 = \lambda \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_0} - \frac{\lambda^2}{3} \left(\frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_0} \right)^2 \text{ para } \varepsilon_{ds} \leq \varepsilon_0/\lambda \tag{21}$$

$$k_1 = \left(1 - \frac{1}{(2\lambda - 1)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{ds}} \right) + \frac{1}{(2\lambda - 1)^2} \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{ds}}{\varepsilon_p} \right) \text{ para } \varepsilon_{ds} > \varepsilon_0/\lambda \tag{22}$$

O processo de integração para a obtenção do coeficiente k_1 para uma dada curva $\sigma - \varepsilon$ genérica e um dado ε_{ds} está representado na figura 16 (a) - parte ascendente e (b) - parte descendente.

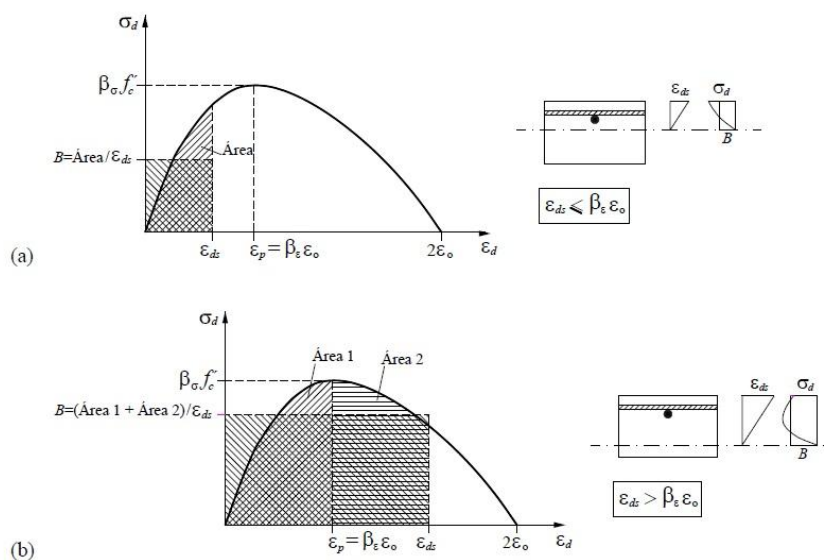


Figura 16 - Integração da curva para o betão comprimido nas escoras [4]

A tensão média do diagrama de tensões de compressão não uniforme (fig. 14), é, por definição tensão nas escoras diagonais de betão, σ_d .

$$\sigma_d = k_1 \beta_\sigma f'_c \tag{23}$$

O parâmetro utilizado na equação anterior, β_σ , é um factor de redução que tem em conta o *softening effect* para uma curva $\sigma - \varepsilon$ genérica. Os outros parâmetros A, B e C (fig. 14) são,

respectivamente o pico de tensão, a tensão média e a resultante do diagrama de tensão. Estes parâmetros são obtidos com base nas seguintes equações:

$$A = \beta_{\sigma} f'_c \quad (24)$$

$$B = k_1 \beta_{\sigma} f'_c \quad (25)$$

$$C = k_1 \beta_{\sigma} f'_c t_d \quad (26)$$

Existem diversas propostas de curvas $\sigma - \varepsilon$ de diversos autores, como observado por Costa em 2005 [18]. Tal ilustra a dificuldade da escolha da relação mais apropriada para o problema em estudo. Em 2010, Andrade [4] realizou uma análise exaustiva, com o objectivo de averiguar, para o problema da torção, qual a relação $\sigma - \varepsilon$ mais adequada para o betão comprimido nas escoras. Refere-se também que neste estudo foi abrangida a classe das vigas de alta resistência.

No que se refere às armaduras ordinárias e de pré-esforço traccionadas, existem também várias propostas desde relação $\sigma - \varepsilon$ bilineares estabelecidas uniaxialmente até relações médias não lineares tendo em conta o *stiffening effect*. Andrade em 2010 [4] também incorporou e analisou as diversas relações nas suas análises.

Através da equação 12 é possível determinar a profundidade do diagrama de tensões de compressão, tendo em conta que $t = t_d$, $\sigma_d = k_1 f'_c / \lambda$ e $T = T_n$.

$$t_d = \frac{T_n}{2A_0(k_1 f'_c / \lambda) \sin \alpha \cos \alpha} \quad (27)$$

Normalmente é assumido que a meia profundidade do diagrama de tensões está a linha média de fluxo de corte (fig.14). Por consequência o perímetro da linha média do fluxo de corte, p_0 , e a área limitada pela mesma linha média, A_0 , podem ser obtidos através de:

$$p_0 = p_c - 4t_d \quad (28)$$

$$A_0 = A_c - (t_d/2)p_c \quad (29)$$

Os parâmetros A_c e p_c correspondem, respectivamente, à área da secção transversal limitada pelo perímetro exterior da viga e ao perímetro exterior da secção transversal de betão.

Devido às características não lineares do MTEAV e existência de variáveis inicialmente desconhecidas e interdependentes, torna-se necessário recorrer a um procedimento iterativo com implementação computacional.

3.2.3 - Construção da Curva Teórica $T - \theta$

Para a construção de uma curva teórica $T - \theta$, com base no MTEAV, são necessárias três equações de equilíbrio para obter o momento torsor T , a espessura efectiva t_d das bielas de compressão e o ângulo α que estas fazem com o eixo da viga. Através da equação (12) obtém-se o momento torsor, onde t é considerado como a espessura efectiva t_d .

$$\sigma_d = \frac{T}{2A_0 t \sin \alpha \cos \alpha} \Leftrightarrow T = 2A_0 t_d \sigma_d \sin \alpha \cos \alpha \quad (30)$$

Tendo por base as equações (31) e (32), e substituindo nestas o valor T obtido através da equação (30), é possível obter o ângulo α .

$$A_l f_l = \frac{T p_0}{2A_0} \cot \alpha \quad (31)$$

$$A_t f_t = \frac{T s}{2A_0} \tan \alpha \quad (32)$$

Após a substituição, obtemos as seguintes equações:

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_l f_l}{s \sigma_d t_d} \quad (33)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{A_t f_t}{s \sigma_d t_d} \quad (34)$$

Através da soma das equações (33) e (34), eliminando o ângulo α obtém-se a equação relativa à espessura efectiva, t_d :

$$t_d = \frac{A_l f_l}{p_0 \sigma_d} + \frac{A_t f_t}{s \sigma_d} \quad (35)$$

As equações (30), (33), (34) e (35) constituem as três equações de equilíbrio tendo por base o MTEAV.

Para a determinação das extensões na armadura transversal (ε_t) e longitudinal (ε_l), bem como o ângulo de torção (θ) por unidade de comprimento, é necessário recorrer a três equações de compatibilidade, nomeadamente:

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_l + \varepsilon_d) \cot \alpha \quad (36)$$

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_l + \varepsilon_d) \tan \alpha \quad (37)$$

$$\theta = \frac{p_0}{2A_0} \gamma \quad (38)$$

As equações (36) e (37) são derivadas a partir do círculo de Mohr para o estado de deformação de um elemento de um painel sujeito ao corte. A equação (38) por sua vez, tem origem na teoria do tubo fino de Bredt, onde $\gamma = \tau/G$ é uma constante e $p_0 = \oint ds$ é o perímetro da linha média de fluxo de corte.

As substituições da equação (37) na equação (38) resulta em:

$$\varepsilon_{ds} = \frac{2p_0 t_d}{A_0} (\varepsilon_t + \varepsilon_d) \tan \alpha \sin \alpha \cos \alpha \quad (39)$$

A expressão para a extensão da armadura na direcção transversal (40) e longitudinalmente (41) é obtida similarmente substituindo t_d a partir da equação (30) na equação (39) e considerando $\varepsilon_d = \varepsilon_{ds}/2$.

$$\varepsilon_t = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \tan \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (40)$$

$$\varepsilon_l = \left(\frac{A_0^2 \sigma_d}{p_0 T \cotg \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{ds} \quad (41)$$

Para finalizar para o ângulo de torção, θ , que é calculado da seguinte forma:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{ds}}{2t_d \sin \alpha \cos \alpha} \quad (42)$$

Tendo por base o proposto anteriormente, é possível definir métodos iterativos, na forma de simples algoritmos, para a construção da curva teórica $T - \theta$. O recurso a tais métodos implica a ausência de informação referente a alguns parâmetros desconhecidos (ε_{ds} , t_d , β_σ e β_ε). É habitual seleccionar no início ε_{ds} , e estimar os restantes parâmetros. Posteriormente todos os valores finais obtidos são comparados com os inicialmente tomados, constituindo-se assim um critério de convergência.

O critério de selecção de diversos valores para ε_{ds} e a repetição do cálculo do algoritmo, permite com que seja possível obter diversos pares de valores (T, θ), que permitam traçar a curva teórica $T - \theta$. Teoricamente a rotura da viga é caracterizada através da imposição de valores de extensão convencionais de rotura para os materiais (betão e aço das armaduras).

A título ilustrativo, a figura 17 ilustra o diagrama de fluxo com a estrutura exemplificativa de um algoritmo para o cálculo da curva teórica $T - \theta$, para o caso em que devem ser atribuídos valores iniciais a ambos os factores de redução β_σ e β_ε .

As equações (40), (41) e (42) constituem as equações de compatibilidade do MTEAV.

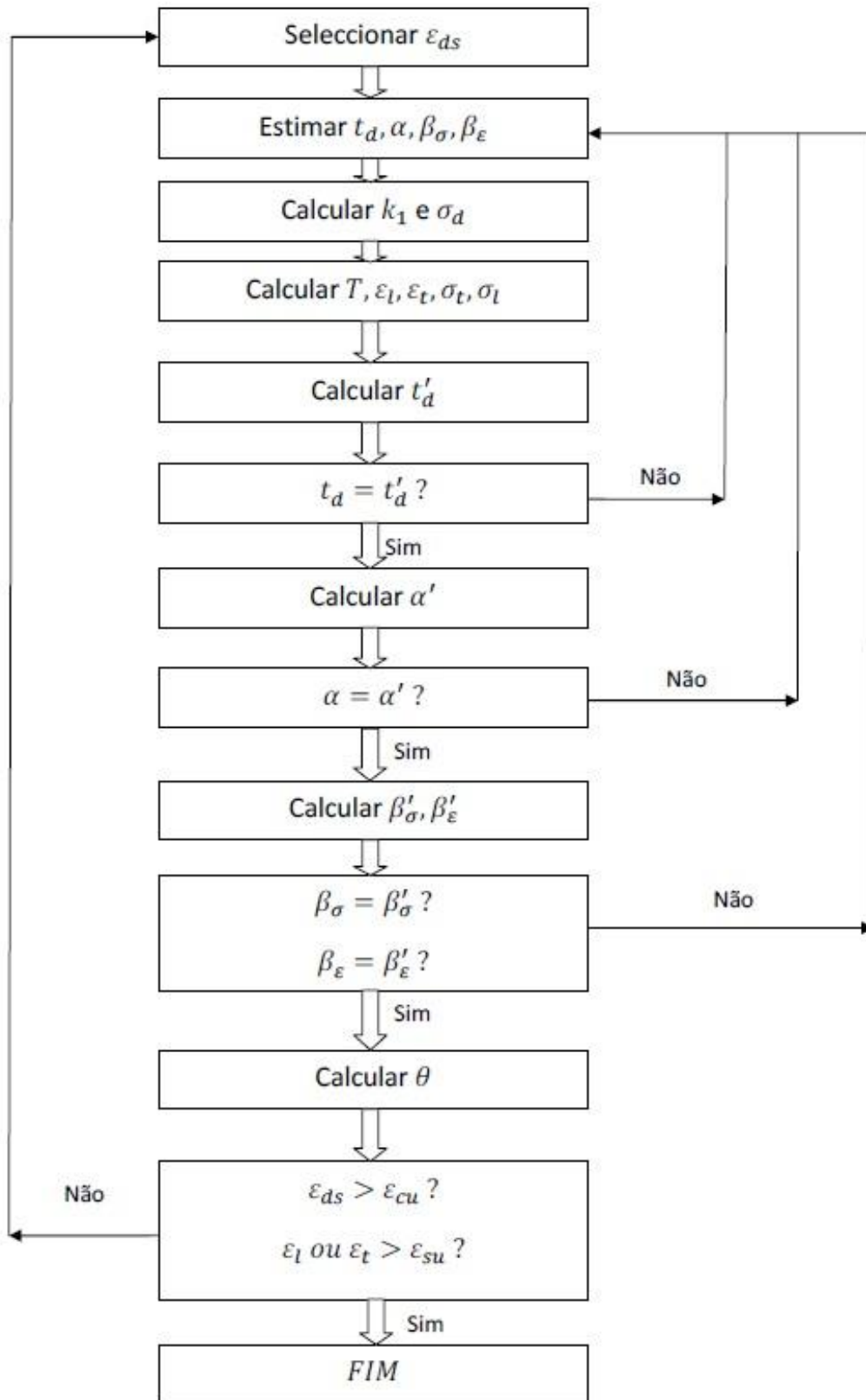


Figura 17 - Exemplo de um diagrama de fluxo para o cálculo da curva $T - \theta$ (vigas de betão armado)

**Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com
base no SMMT**

3.2.4 - Formulação do MTEAV para Vigas de Betão Armado e Pré-esforçado

O pré-esforço quando aplicado aumenta a resistência à fissuração de um elemento de betão armado sujeito à flexão, ao esforço transversal e à torção. Isto ocorre porque o pré-esforço induz um estado de tensão de compressão que, em combinação com a tensão tangencial induzida pelo esforço transversal/momento torsor, resulta num estado de tensão bidimensional que contraria e atrasa a fissuração do betão.

Em 1985 [27] Hsu e Mo demonstraram que a teoria do MTEAV poderia abranger também o caso de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme sujeitas à torção pura, através do conceito de decompressão do betão. Para este tipo de vigas, uma análise de treliça é perfeitamente válida para o caso dos estados limites últimos, onde os elementos se encontram já fissurados mesmo sobre a acção de pré-esforço.

É de referir que apenas em 2010 [4], Andrade generaliza o MTEAV para vigas com pré-esforço transversal isolado ou em conjunto com pré-esforço longitudinal.

A aplicação de um momento torsor numa treliça espacial pré-esforçada longitudinalmente dá origem a uma força longitudinal de tracção que irá reduzir as tensões de compressão no betão induzidas pelo pré-esforço. Contudo, se a força longitudinal de tracção possuir uma magnitude igual à força de compressão, esta anula-se e a armadura de pré-esforço suportará inteiramente a força longitudinal de tracção. Nesse instante, a extensão na armadura ordinária e no betão é nula. Este fenómeno denomina-se de decompressão do betão.

Depois de ocorrer a decompressão do betão, a viga apresenta um comportamento semelhante ao de uma viga de betão armado.

É possível concluir, face ao exposto anteriormente, que o pré-esforço afecta apenas as equações de equilíbrio longitudinal e/ou transversal, dependendo da existência de pré-esforço transversal e/ou longitudinal.

Para o caso mais usual de vigas com pré-esforço longitudinal, a força longitudinal na armadura ordinária ($A_l\sigma_l$) deve ser substituída pela força longitudinal total incluindo a armadura ordinária bem como a armadura de pré-esforço ($A_l\sigma_l + A_{pl}\sigma_{pl}$) nas equações de equilíbrio apresentadas anteriormente (secção 3.1.2).

Assim a equação 33, que resulta do equilíbrio longitudinal do modelo de treliça, para o cálculo de ângulo de inclinação das escoras de betão (α) e para o caso do pré-esforço longitudinal, fica:

$$\cos^2 \alpha = \frac{A_l\sigma_l + A_{pl}\sigma_{pl}}{p_0\sigma_d t_d} = \frac{A_l\sigma_l}{p_0\sigma_d t_d} + \frac{A_{pl}\sigma_{pl}}{p_0\sigma_d t_d} \quad (43)$$

Na equação anterior, A_{pl} e σ_{pl} representam, respectivamente a área total de armadura longitudinal de pré-esforço e a tensão na mesma.

No caso específico de vigas com pré-esforço transversal, assume-se que a influência do pré-esforço é semelhante à influência em vigas de pré-esforço longitudinal para o cálculo do ângulo das bielas de compressão do betão [4]. Logo a equação 34, que resulta do equilíbrio na direcção transversal do MTEAV, deve ser alterada substituindo a força transversal na armadura ordinária ($A_t\sigma_t/s$) pela força transversal total ($A_t\sigma_t/s + A_{pt}\sigma_{pt}/s_p$), vindo:

$$\sin^2 \alpha = \frac{A_t\sigma_t}{s\sigma_d t_d} + \frac{A_{pt}\sigma_{pt}}{s_p\sigma_d t_d} \quad (44)$$

Na equação 44, A_{pt} é a área de uma unidade de armadura transversal de pré-esforço, s_p o seu espaçamento e σ_{pt} a tensão nessa mesma armadura.

Quando existe pré-esforço transversal e longitudinal simultaneamente, as equações 33 e 34, são substituídas, respectivamente pelas equações 43 e 44.

Para a determinação da espessura efectiva, t_d , através da equação de equilíbrio longitudinal, esta também é afectada pelas forças da armadura de pré-esforço. Assim para o caso de apenas pré-esforço longitudinal a equação 35 fica:

$$t_d = \frac{A_l\sigma_l + A_{pl}\sigma_{pl}}{p_0\sigma_d} + \frac{A_t\sigma_t}{s\sigma_d} = \frac{A_l\sigma_l}{p_0\sigma_d} + \frac{A_{pl}\sigma_{pl}}{p_0\sigma_d} + \frac{A_t\sigma_t}{s\sigma_d} \quad (45)$$

Nos casos de existir apenas pré-esforço transversal e simultaneamente os dois tipos de pré-esforços aplicam-se, respectivamente as equações 46 e 47.

$$t_d = \frac{A_l\sigma_l}{p_0\sigma_d} + \frac{A_t\sigma_t}{s\sigma_d} + \frac{A_{pt}\sigma_{pt}}{s_p\sigma_d} \quad (46)$$

$$t_d = \frac{A_l\sigma_l}{p_0\sigma_d} + \frac{A_t\sigma_t}{s\sigma_d} + \frac{A_{pt}\sigma_{pt}}{s_p\sigma_d} + \frac{A_{pl}\sigma_{pl}}{p_0\sigma_d} \quad (47)$$

Para o cálculo do ângulo das escoras de betão, com a participação da componente de pré-esforço, quer longitudinal ou transversal é respectivamente as equações 43 e 44 [4].

Para o cálculo da tensão da armadura de pré-esforço, f_{ps} , quando a viga está sujeita a um pré-esforço longitudinal, é preciso conhecer a extensão da mesma armadura, ε_{pl} . Esta pode ser calculada através do conceito de descompressão do betão:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{dec,l} + \varepsilon_l \quad (48)$$

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

Na equação anterior, as componentes $\varepsilon_{dec,l}$ e ε_l são, respectivamente, a extensão na armadura longitudinal de pré-esforço na descompressão e a extensão na armadura longitudinal ordinária.

A imposição de uma extensão inicial de tracção na armadura de pré-esforço longitudinal, $\varepsilon_{pi,l}$, e a extensão inicial de compressão na armadura ordinária longitudinal, ε_{li} , através da aplicação de pré-esforço, pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{pi,l} = \frac{f_{pi,l}}{E_{pl}} \quad (49)$$

$$\varepsilon_{li} = \frac{A_{pl}f_{pi,l}}{A_l(E_s - E_c) + (A_c - A_h - A_{pl})E_c} \quad (50)$$

Onde:

$f_{pi,l}$ - Tensão inicial na armadura longitudinal de pré-esforço;

E_s - Módulo de elasticidade da armadura longitudinal ordinária;

E_{pl} - Módulo de elasticidade da armadura longitudinal de pré-esforço;

E_c - Módulo de elasticidade do betão;

A_c - Área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal do betão;

A_h - Área da zona vazada da secção (para secções cheias $A_h = 0$).

Quando a extensão na armadura ordinária longitudinal é anulada por um momento torsor aplicado na viga em pré-esforço, a extensão na armadura longitudinal de pré-esforço corresponde à extensão de descompressão $\varepsilon_{pi,l}$:

$$\varepsilon_{dec,l} = \varepsilon_{pi,l} + \varepsilon_{li} \quad (51)$$

A partir do momento torsor de descompressão, a viga passa a comportar-se como uma viga ordinária de betão armado.

Para o caso de vigas com pré-esforço transversal, o procedimento anterior tem de ser adaptado às novas condições para o cálculo da extensão na armadura de pré-esforço transversal, ε_{pt} , e da tensão na mesma armadura, σ_{pt} [4]. Para tal, são utilizadas as seguintes equações:

$$\varepsilon_{pt} = \varepsilon_{dec,t} + \varepsilon_t \quad (52)$$

$$\varepsilon_{dec,t} = \varepsilon_{pi,t} + \varepsilon_{ti} \quad (53)$$

$$\varepsilon_{pi,t} = \frac{f_{pi,t}}{E_{pt}} \quad (54)$$

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

$$\varepsilon_{ti} = \frac{2 \frac{A_{pt}}{S_p} f_{pi,t}}{2 \frac{A_t}{S} (E_s - E_c) + \left(A'_c - A'_h - \frac{A_{pt}}{S_p} \right) E_c} \quad (55)$$

Onde:

$\varepsilon_{dec,t}$ - Extensão da armadura de pré-esforço transversal na descompressão;

$\varepsilon_{pi,t}$ - Extensão inicial de tracção na armadura de pré-esforço transversal;

ε_{ti} - Extensão inicial de compressão na armadura ordinária transversal;

$f_{pi,t}$ - Tensão inicial na armadura de pré-esforço transversal;

A_{pt} - Área de uma unidade de armadura de pré-esforço transversal;

E_{pt} - Módulo de elasticidade da armadura de pré-esforço transversal.

O valor de ε_t (extensão da armadura transversal ordinária) é calculado através da equação 40. Para vigas sujeitas a pré-esforço longitudinal e transversal, simultaneamente as equações 48 a 52 devem ser aplicadas em conjunto para o cálculo da extensão nas armaduras de pré-esforço, isto em cada direcção, para posteriormente calcular a tensão na respectiva armadura.

Após a modificação da equação 10, com a inclusão da armadura de pré-esforço, as restantes equações de equilíbrio e de compatibilidade do MTEAV são aplicáveis a vigas pré-esforçadas.

3.3 - Modelo de Comportamento Global de Bernardo e Lopes

3.3.1 - Aspectos Gerais

Tendo por base as limitações do MTEAV, Bernardo e Lopes em 2008 [8] propuseram um modelo teórico global, mediante a análise do traçado das curvas de comportamento $T - \theta$, com o objectivo de prever o desempenho global de uma viga quando está sujeita à torção em todas as suas fases comportamentais.

A aproximação teórica foi dividida em três fases distintas e cada uma identificada segundo o comportamento particular da viga quando esta se encontra sujeita a torção (fig. 8). A caracterização de cada fase foi feita mediante uma determinada teoria que posteriormente foi confirmada através de uma análise paramétrica, com base em resultados experimentais, nomeadamente:

- Fase 1 - Análise elástico-linear em regime não fissurado (Estado I);
- Fase 2b - Análise elástico-linear em regime fissurado (Estado II);
- Fase 3 - Análise não linear.

A existência de diversas teorias para a construção de uma curva teórica $T - \theta$ final levou a que os autores recorressem a critérios de transição entre as mesmas, bem como à comparação de resultados experimentais para a respectiva validação do modelo proposto.

3.3.2 - Análise Elástico-Linear em Regime Não Fissurado (Estado I)

A caracterização do comportamento à torção de uma viga na fase não fendilhada por Bernardo e Lopes [8] teve por base algumas teorias, nomeadamente: a teoria de St. Venant [49], a teoria da flexão enviesada de Hsu [32] e a teoria do tubo fino de Bret [11].

As teorias utilizadas precisaram de algumas correcções, tal como a necessidade de utilizar um factor minorativo para o cálculo da rigidez de torção segundo a teoria da elasticidade, com o propósito de ter em conta que, antes de atingir a fissuração, existe uma quebra da rigidez da viga.

De facto, os resultados experimentais mostram que tal quebra é cerca de 20 a 40% em relação ao valor elástico [14].

O momento torsor de fissuração de uma viga com secção cheia ou vazada pode ser calculado de uma forma aceitável com base na teoria de tubo fino de Bredt [11]. Esta conclusão foi verificada através de resultados experimentais por Bernardo e Lopes em 2008 [8] e

posteriormente também por Andrade em 2010 [4]. Os autores utilizaram uma formulação variante baseada originalmente por Bredt [11] e proposta por Hsu e Mo [25], aplicável a vigas de betão armado com secção rectangular vazada (f'_c em *psi*, t em *in.* e A_c em *inc.²*):

$$T_{cr} = 2A_c t \left(2,5 \sqrt{f'_c} \right) \quad (56)$$

Onde:

A_c - Área limitada pelo perímetro exterior da secção (inclui área vazada);

t - Espessura da parede da secção vazada.

A equação 56 pode também ser utilizada para secções rectangulares cheias, considerando que $t = 1,2 A_c / p_c$, em que p_c (em *in.*) é o perímetro exterior da secção transversal [30]. Esta mesma equação é formulada em função de uma dada percentagem do módulo de rotura do betão, f_r , que constitui uma medida da resistência à tracção do betão. O módulo de rotura do betão é feito por analogia com a resistência à compressão do betão. Hsu em 1968 [32] propôs para o módulo de rotura do betão à torção $f_r = 21(1 + 10/x^2) \sqrt[3]{f'_c}$, sendo esta expressão válida para $x \geq 4$ *in* (10,2 cm). Posteriormente Bernardo em 2003 [10] observou tendo por base resultados experimentais, que a equação 57 sobrestimava o momento torsor de fissuração de vigas de alta resistência em 15 a 20%. Perante esta observação e tendo por base resultados experimentais obtidos, Bernardo propôs multiplicar a equação 56 por um factor minorativo de 0.85 quando $f_{ck} \geq 50$ Mpa.

Observando experimentalmente que a presença das armaduras atrasa ligeiramente a fissuração, Hsu em 1968 [27] propôs para o cálculo do momento torsor de fissuração efectivo $T_{cr,ef}$ a seguinte equação empírica:

$$T_{cr,ef} = (1 + 4\rho_{tot})T_{cr} \quad (57)$$

A taxa total de armadura de torção, ρ_{tot} , é calculada mediante a soma das taxas de armadura longitudinal (ρ_l) e transversal (ρ_t), sendo estas calculadas por:

$$\rho_l = \frac{A_l}{A_c} \quad (58)$$

$$\rho_t = \frac{A_t u}{A_c s} \quad (59)$$

Em que:

A_l - Área total de armadura longitudinal;

A_t - Área de um ramo da cinta transversal;

A_c - Área da secção limitada pelo perímetro exterior (inclui a parte oca);

s - Espaçamento longitudinal entre cintas;

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

u - Perímetro da linha média das cintas;

A rotação unitária (T_{cr} , em unidades Rad/m) é calculada pela seguinte equação:

$$\theta_{cr}^I = \frac{T_{cr,ef}}{K_t^I} \quad (60)$$

Onde:

K_t^I - Rigidez de torção (Estado I) minorada - $K_t^I(GC)^I$;

$(GC)^I$ - Rigidez de torção (Estado I) calculada pela teoria da elasticidade;

K - Factor minorativo ($K \approx 0,7$);

G - Módulo de distorção - $G = E_c/[2(1 + \nu)]$ (sendo E_c o módulo de elasticidade do betão e $\nu = 0,2$ o coeficiente de Poisson para o betão no Estado I);

C - Factor de rigidez de torção.

O factor minorativo K com o valor proposto de $K = 0,7$ por Bernardo e Lopes [10] tendo como por base a análise de resultados experimentais, pretende ter em conta que, antes de ser atingida a fissuração do betão, a viga perde cerca de 20 a 40 % da rigidez em relação ao valor elástico.

O factor de rigidez de torção C , para secções rectangulares é obtido através das seguintes expressões (Teoria de St. Venant):

$$C = \beta x^3 y \text{ (secção cheia)} \quad (61)$$

$$C = 4A^2 h/u \text{ (secção vazada)} \quad (62)$$

Onde:

x, y - Menor e maior dimensão da secção cheia, respectivamente (fig. 18);

β - Coeficiente de St. Venant;

A - Área limitada pela linha média da parede da secção vazada ($A = x_1 y_1$, em que x_1 e y_1 representam, respectivamente a menor e maior dimensão da linha média da parede (fig. 18);

u - Perímetro da linha média da parede da secção vazada $u = 2x_1 + 2y_1$ (fig. 18);

h - Espessura da parede da secção vazada (fig.18).

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

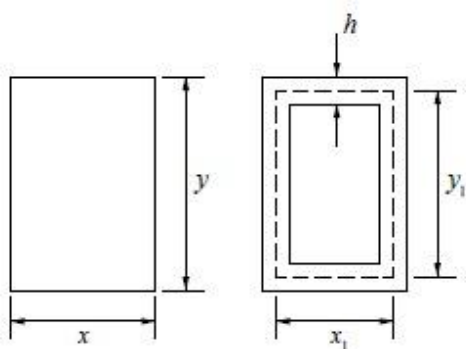


Figura 18 - Parâmetros geométricos para uma secção rectangular (cheia e vazada)

A figura 19 ilustra a parte da curva $T - \theta$ a que corresponde a zona 1 da figura 8, onde a curva aproxima-se a uma recta que une a origem do referencial $(0; 0)$ ao ponto $(\theta_{cr}^I; T_{cr,ef})$.

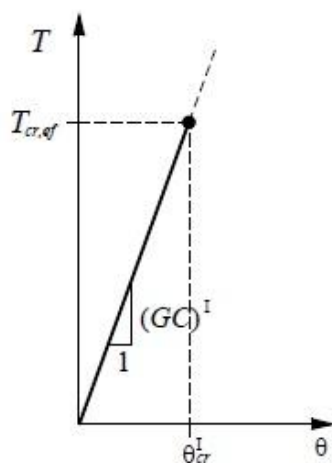


Figura 19 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime não fissurado Estado I

Em vigas com pré-esforço longitudinal, o estado de tensão biaxial (corte e compressão), resulta da combinação da tensão de compressão, induzida pelo pré-esforço longitudinal e a tensão tangencial induzida pelo momento torsor. Este estado de tensão biaxial atrasa a fissuração do betão (fig. 20).

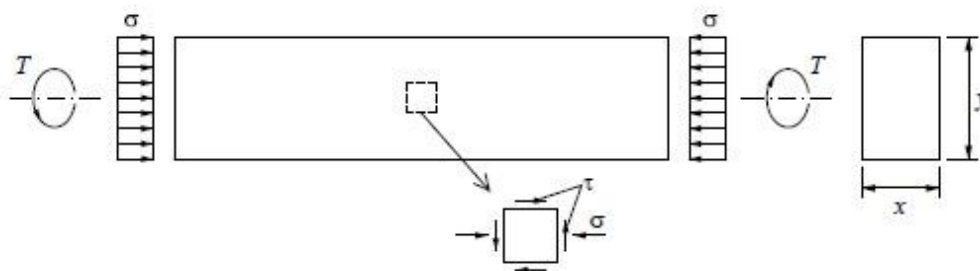


Figura 20 - Estado de tensão numa viga sujeita à torção e a um pré-esforço longitudinal [10]

Tendo por base o critério de rotura de Cowan em 1952 [21] para o betão sujeito a um estado de tensão biaxial e assumindo que a rotura tem origem inicialmente por tracção do betão (considerando os limites normais impostos pela regulamentação para o nível de pré-esforço), Cowan e Armstrong em 1955 [19] e Humphreys em 1957 [35] derivaram um simples factor de pré-esforço que posteriormente foi também utilizado por Hsu e Mo em 1985 [27]. Este factor de pré-esforço (γ) é definido como a relação entre a resistência de uma viga sem armadura transversal e com pré-esforço e a mesma viga sem pré-esforço. Este factor é baseado na resistência à tracção uniaxial do betão f'_t , que por sua vez está relacionada com a resistência à compressão uniaxial f'_c , tendo por base que $f'_c/f'_t = 10$ [30]:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f'_t}} \approx \sqrt{1 + 10 \frac{\sigma}{f'_c}} \quad (63)$$

Na equação 63 onde σ é a tensão de compressão no betão induzida pelo pré-esforço longitudinal o efeito das armaduras de pré-esforço pode ser ignorado. O momento torsor de uma viga pré-esforçada, T_{cr}^P , é idêntico ao de uma viga sem pré-esforço, T_{cr} , multiplicado pelo factor, γ (eq. 64). A validação deste procedimento foi feita através de numerosos ensaios experimentais.

$$T_{cr}^P = T_{cr} \gamma \quad (64)$$

O cálculo do momento torsor de fissuração de uma viga (T_{cr}), pode ser feito com base em diversas teorias, sendo uma delas a teoria do tubo fino de Bret [11].

Para o caso de vigas pré-esforçadas transversalmente e quando sujeitas a esforço de torção, Andrade em 2010 [4] demonstrou que a equação 64 também é válida para o cálculo do factor de pré-esforço, sendo que a diferença reside apenas no facto de σ ser agora tensão de compressão no betão induzida pelo pré-esforço transversal (fig. 21).

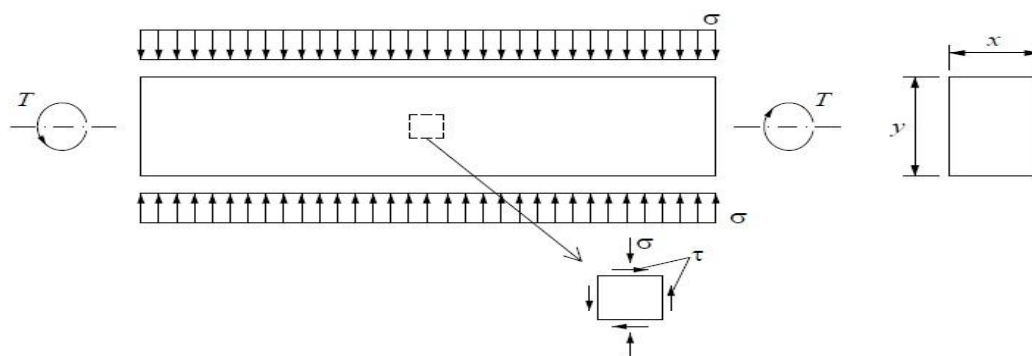


Figura 21 - Estado de tensão numa viga sujeita à torção e a um pré-esforço transversal [10]

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

Para o caso de vigas sujeitas à torção em que o pré-esforço é aplicado simultaneamente nas duas direcções (transversal e longitudinal) (fig. 22), originam-se tensões de pré-esforço longitudinais (σ_l) e transversais (σ_t). Foi demonstrado por Andrade em 2010 [9] que o cálculo do factor de pré-esforço (eq. 65) pode ser feito da seguinte forma:

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\sigma_t + \sigma_l}{f_t'}} \quad (65)$$

Vem então que o momento torsor de fissuração T_{cr}^P de uma viga com pré-esforço em ambas as direcções é dado por:

$$T_{cr}^P = T_{cr} \gamma = T_{cr} \sqrt{1 + \frac{\sigma_t + \sigma_l}{f_t'}} \quad (66)$$

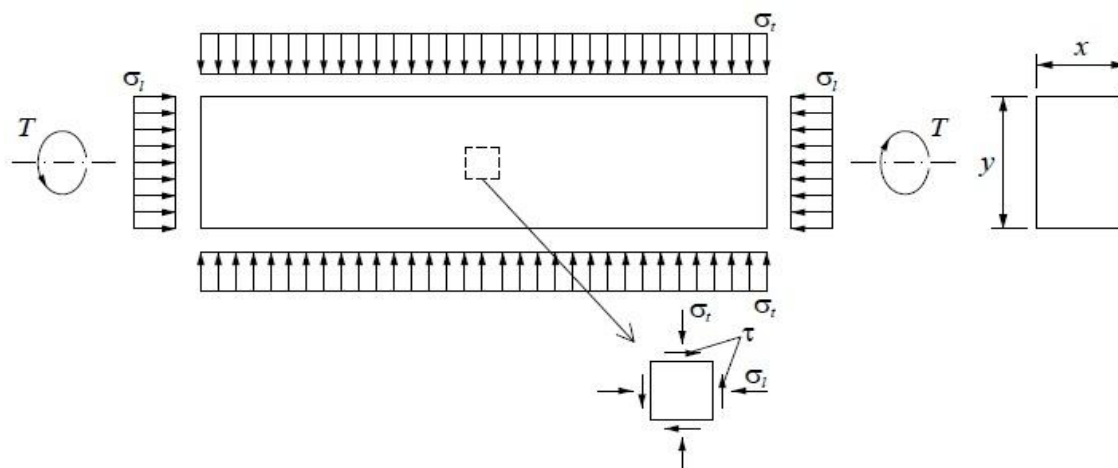


Figura 22 - Estado de tensão numa viga sujeita à torção e a um pré-esforço longitudinal e transversal [10]

O momento torsor de fissuração efectivo, $T_{cr,ef}^P$, pode ser calculado pela seguinte equação:

$$T_{cr,ef}^P = (1 + 4\rho_{tot})T_{cr}^P \quad (67)$$

Na equação anterior, a taxa total de armadura, ρ_{tot} , em conta a armadura de pré-esforço, dependendo se esta for ou não efectiva no controlo da fendilhação.

A influência no momento torsor de fissuração de uma determinada armadura de pré-esforço apenas se verifica se esta for aderente ao betão e se esta se localizar na “casca periférica” da secção (zona efectiva da secção para a torção).

Para considerar a armadura de pré-esforço, a percentagem total da armadura longitudinal ($\rho_{l,tot}$) e a percentagem total de armadura transversal ($\rho_{t,tot}$) são calculadas, respectivamente através das seguintes equações:

$$\rho_{l,tot} = \frac{A_{sl} + nA_p}{A_c} \approx \frac{A_{sl} + A_p}{A_c} \tag{68}$$

$$p_{t,tot} = \frac{A_{st}u}{A_c s} + \frac{nA_{pt}u_p}{A_c s_p} \approx \frac{A_{st}u}{A_c s} + \frac{A_{pt}u_p}{A_c s_p} \tag{69}$$

Em que:

n - Coeficiente de homogeneização ($n = E_p/E_s$, sendo E_p e E_s os módulos de elasticidade da armadura de pré-esforço e da armadura ordinária, respectivamente);

A_{pt} - Área de uma unidade de armadura transversal de pré-esforço;

u_p - Perímetro médio da “cinta fechada” que constitui a armadura de pré-esforço transversal (considerando pré-esforço em todas as paredes da secção);

s_p - Espaçamento das armaduras de pré-esforço.

3.3.3 - Modelação da Zona Comportamental 2b

Para a fase de comportamento nesta secção, Bernardo e Lopes em 2008 [8] assumiram que a curva $T - \theta$ podia ser aproximada com uma recta, sendo que a sua inclinação era definida pela rigidez de fissuração em estado fissurado ((GC)^{II}) tendo por base uma expressão proposta por Hsu em 1973 [29]. Para a derivação desta expressão, Hsu considerou que nesta fase a viga podia ser assimilada a um tubo de betão armado e comprovou esta analogia através de diversos resultados experimentais que demonstravam que o comportamento torsional pós-fissuração não seria afectado pelo núcleo de betão da secção. Para a simulação deste elemento Hsu combinou a teoria de Bredt para tubos de paredes finas [11] com a analogia de treliça espacial de Rausch.

Hsu derivou uma equação para o cálculo da rigidez de torção pós-fissuração para vigas com secção rectangular, baseando-se no equilíbrio e compatibilidade de deformações da treliça espacial constituída por uma escora diagonal de betão e pelas armaduras envolventes (longitudinal e transversal).

$$(GC^{II}) = \frac{E_s x_1^2 y_1^2 xy}{(x_1 + y_1)^2 \left[\frac{2nxy}{(x_1 + y_1)^2} + \frac{1}{p_l} + \frac{1}{p_t} \right]} \tag{70}$$

Onde:

x, y - Menor e maior dimensão externa da secção rectangular (fig.23);

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

x_1, y_1 - Menor e maior dimensão das cintas rectangulares, referidas aos eixos dos varões (fig.23);

E_s - Módulo de elasticidade das armaduras;

n - Coeficiente de homogeneização ($n = E_s/E_c$);

h - Espessura da parede do tubo equivalente de betão armado.

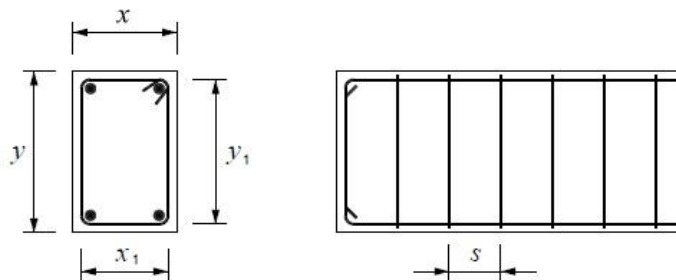


Figura 23 - Viga de betão armado com secção rectangular [4]

As taxas de armadura ordinária longitudinal (ρ_l) e transversal (ρ_t) são respectivamente calculadas através das equações 58 e 59. Na equação 70 os três termos que constituem o denominador representam, sequencialmente, as contribuições para a rigidez pós-fissuração das escoras de betão, da armadura longitudinal e da armadura transversal.

Hsu propôs ainda a adopção de uma espessura efectiva, h_e , para substituição do parâmetro h na equação 70, tendo por base resultados experimentais. Hsu onde observou que a relação adimensional h_e/x era aproximadamente proporcional à taxa total de armadura $\rho_l + \rho_t$.

$$h_e = 1,4(\rho_l + \rho_t)x \tag{71}$$

A curva $T - \theta$ correspondente à fase elástico-linear em regime fendilhado (fig. 24), aproxima-se de uma recta em que o declive corresponde à rigidez de torção em estado fissurado (GC^II), tem como inicio o ponto $(\theta_{cr}^II; T_{cr})$ e acaba no ponto em que a viga começa a demonstrar um comportamento não linear (devido à cedência de pelo menos uma das armaduras de torção ou à não linearidade do comportamento do betão à compressão nas escoras).

A intersecção do eixo das ordenadas pelo prolongamento inferior da recta num determinado ponto possibilita definir a sua posição no referencial em estudo. Hsu estabeleceu igualmente, com base em resultados experimentais, que a ordenada na origem do referido ponto podia ser obtida a partir de ηT_c , sendo η um coeficiente e T_c um momento torsor dado por (f_c' em *psi*, x e y em *in*):

$$T_c = \frac{x^2 y}{3} 2,4 \sqrt{f_c'} \tag{72}$$

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

Hsu conseguiu relacionar o parâmetro η com h/x , tendo estabelecido:

$$\eta = 0,57 + 2,86 h/x \quad (73)$$

Para uma secção cheia, $\eta = 2$ uma vez que $h/x = 0,5$.

Assim sendo, a relação $T - \theta$ pós-fissuração pode ser então expressa através da seguinte equação:

$$T = \eta T_c + (GC^{II})\theta \quad (74)$$

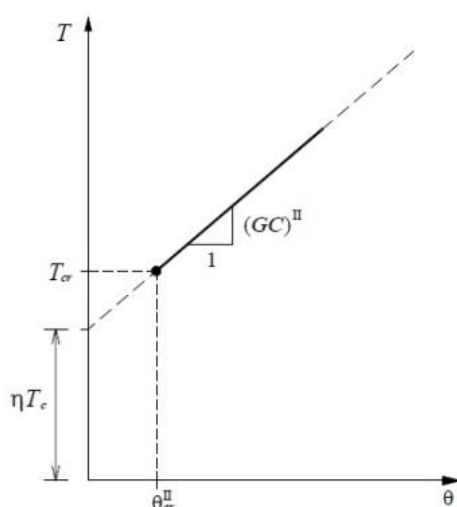


Figura 24 - Curva teórica $T - \theta$ para a fase elástico-linear em regime fendilhado (Estado II) [4]

O cálculo do momento torsor (T_c) depende de uma percentagem do módulo de rotura do betão. Por isso, e para vigas de alta resistência ($f_{ck} \geq 50 \text{ MPa}$), Bernardo em 2003 [10] à semelhança do realizado para o Estado I, propôs multiplicar a equação 72 por um factor de 0,85.

O Estado II caracterizado pelo modelo semi-empírico proposto por Hsu em 1973 [29] e apresentado anteriormente, incluindo a proposta da correcção em vigas de alta resistência foi posteriormente validado por Bernardo em 2003 [10] e Bernardo e Lopes em 2008 [8].

No caso de vigas sujeitas a pré-esforço, Bernardo em 2003 [10] estabeleceu que a introdução da armadura de pré-esforço na rigidez de torção para esta fase de comportamento da viga, apenas deveria ser feita se a armadura de pré-esforço for aderente e se a mesma estiver dentro da zona efectiva da secção.

De maneira análogo à explicada anteriormente para a primeira fase do comportamento da viga, a consideração da armadura de pré-esforço longitudinal e/ou transversal é feita através do cálculo da taxa total de armadura longitudinal (eq. 68) e/ou transversal (eq. 69). Tal taxa

deve ser inserida posteriormente na equação 70 para o cálculo da rigidez de torção pós-fissuração $(GC)''$.

Através do modelo proposto por Hsu em 1973 [28], a ordenada na origem da recta teórica de comportamento elástico linear em Estado II é dada por $\eta T_c'$, em que T_c' representa o momento torsor resistente do betão para as vigas em pré-esforço. O termo T_c' é calculado através da seguinte equação proposta por Hsu:

$$T_c' = T_c \gamma_1 = T_c \left(2,5 \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f_t'}} - 1,5 \right) \quad (75)$$

O parâmetro γ_1 presente na equação 75 representa um novo factor de pré-esforço que é função do factor anteriormente apresentado γ . Este novo factor foi inicialmente proposto por Hsu em 1984 [30] de forma empírica, tendo por base resultados experimentais obtidos, analisados e como hipótese de que as vigas com pré-esforço requerem a mesma armadura mínima das vigas sem pré-esforço.

Posteriormente Bernardo em 2003 [10], tendo por base novos ensaios experimentais, concluiu que o factor proposto inicialmente por Hsu não apresentava resultados satisfatórios, nomeadamente no caso da ordenada na origem para vigas com pré-esforço longitudinal uniforme. Através de uma análise paramétrica Bernardo propôs uma nova expressão para o factor γ_1 :

$$\gamma_1 = 2,20\gamma - 1,53 = 2,20 \sqrt{1 + \frac{\sigma}{f_t'}} - 1,53 \quad (76)$$

No caso da existência de vigas sujeitas simultaneamente a pré-esforço longitudinal e transversal, não foram encontrados estudos na literatura consultada.

3.3.4 - Modelação da Zona Comportamental 3

Para a caracterização do comportamento não linear de uma viga de betão armado sujeita à torção, Bernardo e Lopes em 2008 [8] adoptaram o MTEAV tendo em conta o *softening effect*. A escolha deste método de análise não linear prende-se com o facto de que a partir do instante em que uma das armaduras de torção entra em cedência ou o betão comprimidos das escoras apresenta um comportamento não linear, deixa de ser válida a análise elástico-linear em regime fendilhado (Estado II) utilizada anteriormente na zona comportamental 2.

Tendo por base este modelo de análise, os referidos autores calcularam integralmente a curva $T - \theta$, considerando a sua validade a partir dos pontos referidos anteriormente.

A análise e cálculo da zona de comportamento em questão da curva teórica $T - \theta$, através do MTEAV, abrangem duas situações possíveis de rotura nas vigas, nomeadamente uma rotura frágil ou uma rotura dúctil. No caso em que as armaduras de torção entram em cedência antes da rotura do betão comprimido das escoras (rotura dúctil), a região validada pelo método em questão tem início no ponto onde ocorre a cedência das armaduras ($T = T_y$, fig. 25 (a)). Quando não ocorre a cedência das armaduras (rotura frágil) a região validade pelo método em questão inicia-se no ponto em que a viga começa a apresentar um comportamento não linear ($T = T_{pl}$, fig. 25 (b)). O ponto de perda de linearidade no comportamento da viga foi definido por Bernardo e Lopes [8] com base em critérios explicados na secção a seguir.

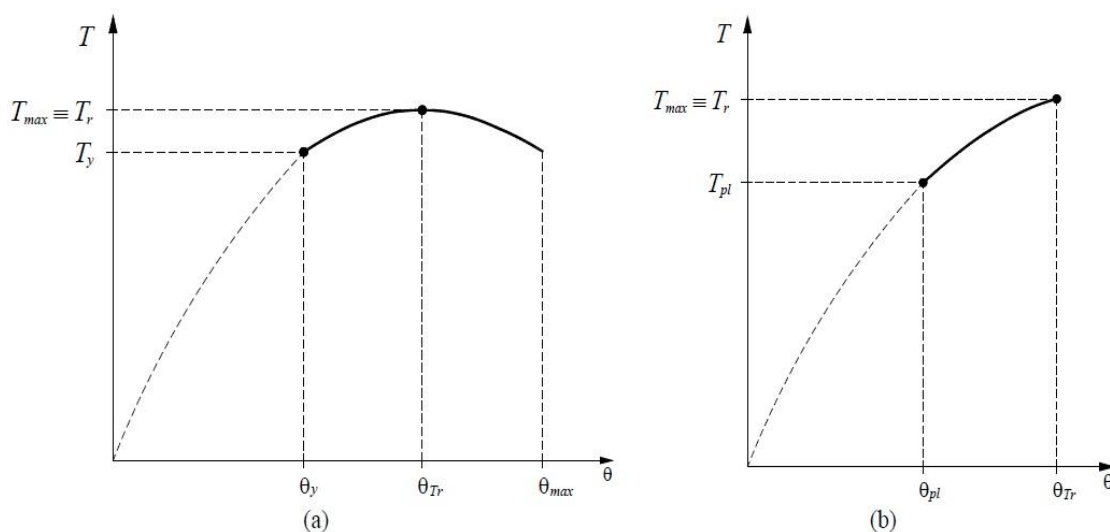


Figura 25 - Traçado teórico da fase não linear da curva $T - \theta$ [8]

As extensões convencionais de rotura dos materiais (aço das armaduras e betão) são usadas para a definição da rotura teórica de uma viga. A rotura de uma viga sujeita à torção ocorre quando a extensão máxima de compressão à superfície das escoras de betão (fig. 14), ε_{ds} , atinge o seu valor convencional de rotura (ε_{cu}) ou quando a extensão de tracção nas armaduras de torção, ε_s , atinge o seu valor convencional de rotura (ε_{su}). Para o cálculo de ε_{cu} pode ser utilizado o EC2.

3.3.5 - Critérios de Transição

Para a construção integral da curva teórica $T - \theta$, Bernardo e Lopes 2008 [8] recorreram a diversos modelos teóricos para as diferentes fases de comportamento. A interligação das diversas fases comportamentais foi realizada através de critérios de transição.

No caso de vigas de secção cheia, para as quais a observação experimental mostra a existência de um patamar horizontal de transição na curva teórica $T - \theta$ entre as duas primeiras fases comportamentais. A figura 26 (a) ilustra a transição na curva teórica $T - \theta$

entre a fase elástico-linear em regime não fendilhado e o regime fendilhado (zonas 1 e 2) para este tipo de vigas. Para o caso de vigas com secção vazada, não se observa o referido patamar de transição, razão pela qual Bernardo e Lopes em 2008 [8] assumiram que a recta correspondente à fase elástico-linear em Estado II começa no ponto de coordenadas $(\theta_{cr}^I; T_{cr})$. Para tal, é necessária uma translação da curva $T - \theta$ na fase elástico-linear em regime fissurado como ilustrado na figura 26 (b). Posteriormente os referidos autores verificaram, com base em análises comparativas com resultados experimentais, que a translação necessária $\Delta\theta = |\theta_{cr}^{II} - \theta_{cr}^I|$, para vigas com secção vazada, era muito pequena, validando o critério de transição.

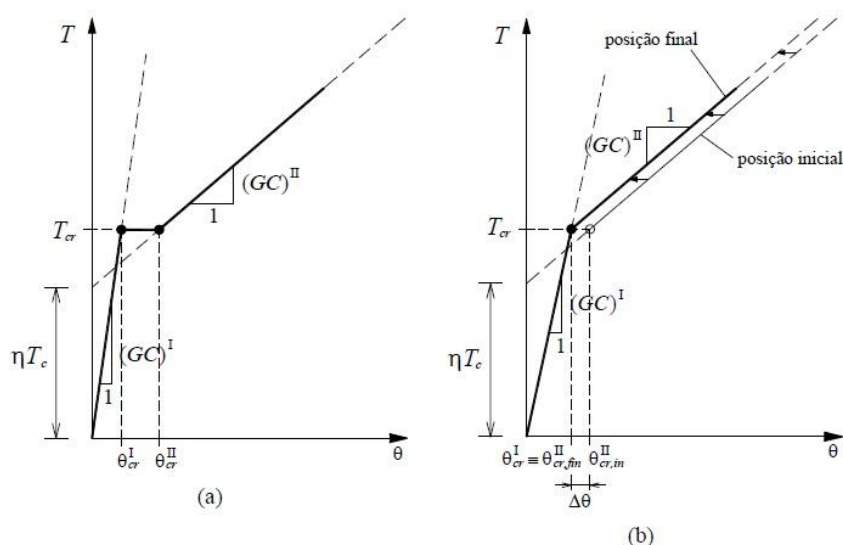


Figura 26 - Transição entre zonas 1 e 2: (a) secção cheia, (b) secção vazada [8]

A transição na curva teórica $T - \theta$ entre as fases elástico-linear em regime fissurado e a fase não linear (zona 2 e 3) para as duas situações possíveis (rotura dúctil e rotura frágil) encontra-se ilustrada nas figuras 17 e 18, respectivamente.

O cálculo da curva $T - \theta$ na fase não linear foi realizado usando o MTEAV. As figuras 27 e 28, ilustram os critérios de transição entre a zona 2 e 3 adoptados por Bernardo e Lopes [8].

O critério de transição para a curva teórica $T - \theta$ para o caso em que ocorre uma rotura frágil (fig. 27) foi definido por Bernardo e Lopes com base na localização do limite superior de validade da curva elástico-linear no Estado II. Tal foi convencionalmente definido como sendo o ponto a partir do qual se verifica que o declive da curva não linear é superior ao da curva elástico-linear. Este ponto pode ser identificado pelas coordenadas dadas pelo momento torsor (T_A) , a que corresponde duas rotações $(\theta_A^I e \theta_A)$. A diferença entre as rotações $(\Delta\theta)$ corresponde a translação da curva $T - \theta$ para que o ponto seja comum às duas curvas (fig. 27).

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

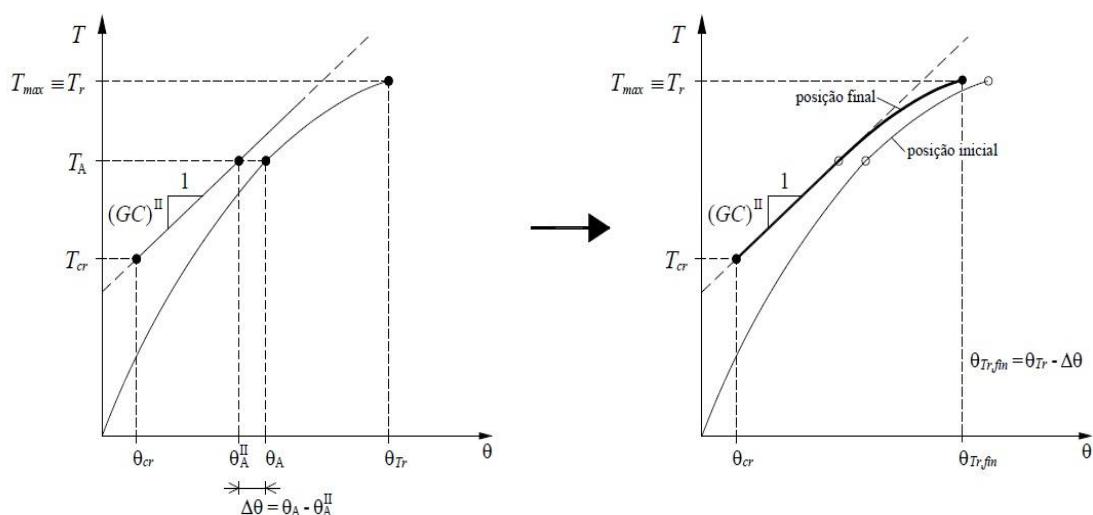


Figura 27 - Transição entre as fases 2 e 3: rotura do tipo frágil [8]

Para vigas com rotura dúctil (fig. 28), o método utilizado por Bernardo e Lopes [8] teve por base o deslocamento horizontal para a esquerda da curva teórica $T - \theta$ correspondente à análise não linear (troço após a cedência das armaduras), isto segundo o eixo das rotações e de valor igual à translação necessária $\Delta\theta$. Tal critério permite unir as curvas (análise elástico-linear no Estado II e a análise não linear) no ponto correspondente à cedência de armaduras com este critério, ocorre uma pequena redução das rotações respectivas ($\Delta\theta$), provocada pela translação da curva da fase não linear. Esta redução pode ser considerada, segundo Bernardo e Lopes [8], como uma pequena correcção das rotações.

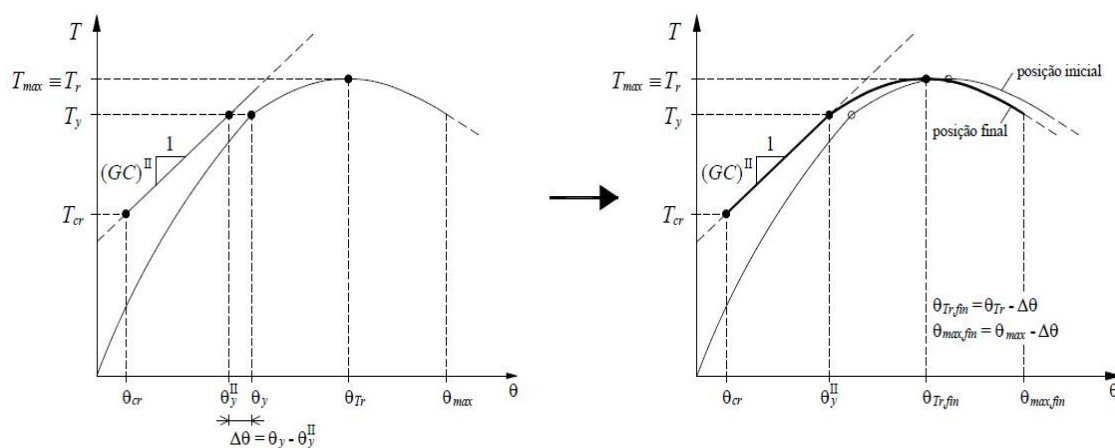


Figura 28-Transição entre as fases 2 e 3: rotura do tipo dúctil [22]

Tendo por base os critérios de transição anteriormente descritos, e apesar dos conteúdos algo subjectivo dos mesmos, Bernardo e Lopes [8] confirmaram a validade do seu modelo global proposto com base em análises referentes à construção de curvas teóricas $T - \theta$ e à comparação das mesmas com as obtidas através de ensaios experimentais.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

3.4 - Método de Treliça Espacial de Ângulo Variável Modificado de Andrade

3.4.1 - Aspectos Gerais

A modificação do MTEAV foi objecto de estudo por parte de Andrade em 2010 [4] com o objectivo de implementar um procedimento de cálculo para prever o comportamento global das vigas à torção baseado quase exclusivamente no MTEAV. Este novo desenvolvimento pode ser considerado mais consistente do ponto de vista teórico, em relação ao modelo apresentado anteriormente por Bernardo e Lopes [8], pois deixa de ser necessário o recurso a diversas teorias e a critérios de transição empíricos.

3.4.2 - Zona Comportamental I

A formulação do MTEAV para a modelação da fase pré-fissuração ou Estado I foi corrigida por Andrade em 2010 [4]. Para tal, o referido autor estabeleceu inicialmente o limite de validade desta fase comportamental, adaptando a teoria de Bredt [11] para o cálculo do momento torsor de fendilhação, tal como adoptado por Bernardo e Lopes [8].

Para o cálculo da rigidez de torção no Estado I, Andrade [4] optou por simular tal rigidez com base no MTEAV, o objectivo era retratar a passagem da viga do Estado I para o Estado II, com um único modelo. Tal passagem ocorre porque a viga sofre uma perda de rigidez instantânea provocada pela fissuração do betão. Deste modo, o MTEAV tinha de incorporar a contribuição do betão tracionado no estado I (efeito este desprezado na formulação original do MTEAV). Desta forma a passagem da viga do Estado I para o Estado II seria simulada com base num único modelo.

Tendo por base os objectivos traçados anteriormente, Andrade [4] decidiu então que a alteração a realizar no MTEAV, deveria considerar a reposição do estado não fendilhado da secção da viga, considerando a secção de betão tracionado como sendo efectiva. Outra alteração seria que o núcleo de uma secção cheia deveria ser também incorporado no modelo, nomeadamente para o cálculo da rigidez em Estado I.

Para começar com o propósito de manter a consistência com as hipóteses formuladas para o MTEAV, Andrade [4] definiu uma secção equivalente para a fase pré-fissuração (fig. 28). Para o caso de vigas de secção cheia, foram seguidas as recomendações do ACI 318R-05 [2] que, ao considerar a teoria do tubo fino de Bredt para o cálculo do momento torsor de fissuração, considera uma espessura equivalente de parede (h_{eq}) igual a $0,75 A_{cp}/p_{cp}$, sendo A_{cp} a área limitada pelo perímetro exterior da secção e p_{cp} o perímetro exterior da secção. Para o caso de vigas com secção vazada, Andrade considerou o mesmo critério, com a ressalva de que a espessura equivalente deve ser inferior ou igual, à espessura real, caso contrário é adoptada

a espessura real. Esta espessura equivalente foi utilizada para calcular algumas propriedades da secção. O parâmetro que traduz a espessura das escoras (t_d) foi calculado de acordo com o MTEAV para cada aumento da deformação ε_{ds} em estudo.

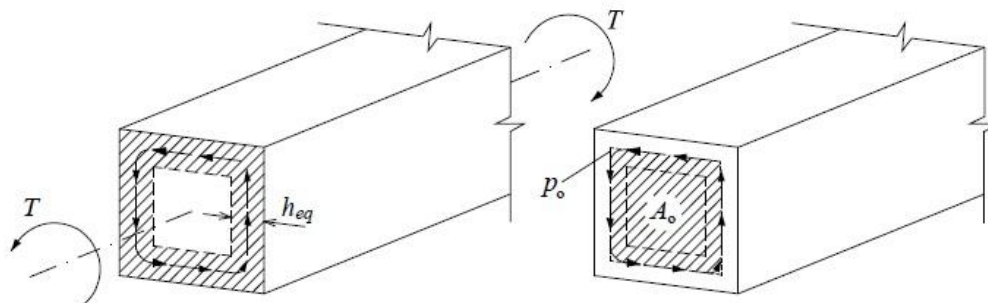


Figura 29 - Definição da secção vazada equivalente para o Estado I [8]

Tendo em conta que na fase comportamental em estudo a existência de armaduras não influencia a linha média do fluxo de corte, Andrade definiu A_0 (área limitada pela linha média de fluxo de corte) como tendo a área limitada pela linha média da parede equivalente (o mesmo critério foi aplicado em vigas de secção vazada com a ressalva de que se a área fosse superior à real, adoptar-se-ia a área real) e p_0 (perímetro da linha média de fluxo de corte) como sendo o perímetro dessa mesma área.

$$A_0 = (x - h_{eq})(y - h_{eq}) \quad (77)$$

$$p_0 = 2(x - h_{eq}) + 2(y - h_{eq}) \quad (78)$$

O MTEAV estabelece o equilíbrio na direcção longitudinal e transversal, sendo as forças nessas direcções absorvidas pelas armaduras longitudinais e transversais. Para caracterizar o Estado I, Andrade decidiu assim a influência do betão traccionado nas referidas direcções. Para tal, o autor referido homogeneizou a viga, em ambas as direcções e admitiu como espessura de betão participativo o correspondente a espessura equivalente (h_{eq}) definida no Código Americano (ACI 318R-05). Assim, as equações de equilíbrio ficam escritas em função das forças totais a actuar em cada direcção. A área de betão considerado participativo foi “transformado” em área equivalente de aço. A força longitudinal total ($F_{l,tot}$) e transversal total ($F_{t,tot}$) tendo em conta a participação do betão traccionado, vem (fig. 30(a) e fig. 30(b)):

$$F_{l,tot} = A_l f_l = (A_l + nA_{cl,eq}) f_l \quad (79)$$

$$F_{t,tot} = A_t f_t / s = (A_t + nA_{ct,eq}) f_t / s \quad (80)$$

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

$$A_{cl,eq} = xy - (x - h_{eq})(y - h_{eq}) \quad (81)$$

$$A_{ct,eq} = s h_{eq} \quad (82)$$

Nas equações temos:

$n = E_c/E_s$ - Coeficiente de homogeneização (betão/aço da armadura ordinária);

A_{hl} e A_{th} - Áreas de aço homogeneizadas na direcção longitudinal e transversal, respectivamente;

$A_{cl,eq}$ e $A_{ct,eq}$ - Áreas equivalentes de betão considerado participativo na direcção longitudinal e transversal, respectivamente.

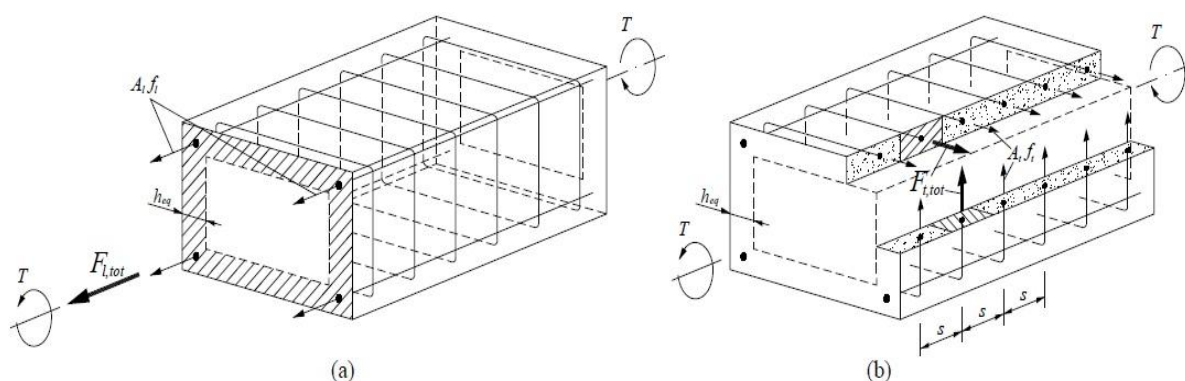


Figura 30 - Forças totais para o equilíbrio na direcção longitudinal e transversal [4]

Tendo por base as alterações atrás referidas no MTEAV, Andrade em 2010 [4] escreveu um novo algoritmo para o cálculo dos pontos da curva teórica $T - \theta$ para a fase inicial de comportamento (Estado I).

Uma vez que Andrade [4] usou como teoria base o MTEAV, que não incorpora a influência do núcleo de betão com secção cheia, a influência do mesmo foi levada em conta através de sobreposição de efeitos. Para tal, Andrade calculou separadamente a rigidez de torção do núcleo e somou-a à rigidez do tubo equivalente, originando as rotações calculadas através do MTEAV modificado.

No caso de vigas pré-esforçadas, para a contabilização da participação do betão traccionado é também requerida a homogeneização da secção em ambas as direcções (longitudinal e transversal), com a participação das armaduras de pré-esforço. Para a situação de pré-esforço longitudinal e transversal, as forças totais na direcção longitudinal e transversal (respectivamente, $F_{l,tot}$ e $F_{t,tot}$), vêm:

$$F_{l,tot} = A_{lh} f_l = (A_l + n_c A_{cl,eq} + n_p A_{pl}) f_l \quad (83)$$

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

$$F_{t,tot} = A_{th}f_s/s = (A_t/s + n_c A_{ct,eq}/s + n_p A_{pl}/s)f_t \quad (84)$$

Onde:

$n_p = E_p/E_s \approx 1$ - Coeficiente de homogeneização aço de pré-esforço / aço de armadura ordinária.

Na fase de comportamento em estudo para vigas em pré-esforço longitudinal uniforme, Andrade corrigiu o procedimento para o cálculo para a extensão e tensão na armadura de pré-esforço longitudinal (ε_{pl}) e (σ_{pl}), respectivamente). O objectivo era ter em conta o estado inicial de deformação induzido pelo pré-esforço, Andrade [4] apresentou as seguintes expressões de cálculo:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{pi,l} + \varepsilon'_l \quad (85)$$

$$\varepsilon_{pi,l} = \frac{f_{pi,l}}{E_{pl}} \quad (86)$$

$$\varepsilon'_l = -\varepsilon_{li} + \varepsilon_l \quad (87)$$

$$\varepsilon_{li} = \frac{A_{pl}f_{pi,l}}{A_l(E_s - E_c) + (A_c - A_h - A_{pl})E_c} \quad (88)$$

Na armadura longitudinal, a extensão efectiva (ε'_l) deve ser calculada de forma a ter em conta a extensão inicial (encurtamento) que a armadura de pré-esforço sofre devido ao pré-esforço aplicado longitudinalmente. A extensão na armadura longitudinal ε_l provocada pela aplicação de um momento torsor T é obtida com base na equação 38.

A aplicação de um pré-esforço longitudinal provoca também um encurtamento da escora de betão (ε_{dsi}). Por hipótese e assumindo que a influência das armaduras neste encurtamento é reduzida, Andrade [4] assumiu que um ângulo de 45° entre o eixo da viga e a direcção da escora. O referido encurtamento foi calculado simplifcadamente da seguinte forma (fig. 31):

$$\varepsilon_{dsi} \approx \frac{\varepsilon_{li}}{\cos 45} \quad (89)$$

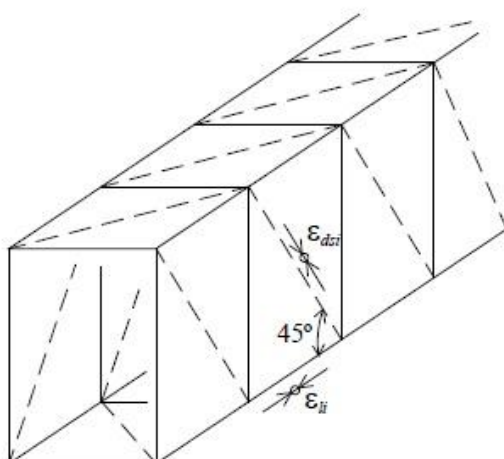


Figura 31 - Encurtamento inicial do betão devido ao pré-esforço longitudinal [4]

Assim para a extensão efectiva (ε'_{ds}) na escora de betão é dada por:

$$\varepsilon'_{ds} = \varepsilon_{ds} + \varepsilon_{dsi} \quad (90)$$

O procedimento de cálculo anteriormente apresentado, é válido até a viga atingir o momento torsor de fissuração. Para o caso de vigas com pré-esforço transversal, as equações propostas para o caso de vigas com pré-esforço transversal, a expressão proposta por Andrade [4] para o cálculo da extensão na armadura de pré-esforço transversal ε_{pt} , para o posterior cálculo da tensão σ_{pt} , seguem de forma análoga o apresentado anteriormente para as vigas com pré-esforço longitudinal:

$$\varepsilon_{pt} = \varepsilon_{pi,t} + \varepsilon'_t \quad (91)$$

$$\varepsilon_{pi,t} = \frac{f_{pi,t}}{E_{pt}} \quad (92)$$

$$\varepsilon'_t = -\varepsilon_{ti} + \varepsilon_t \quad (93)$$

$$\varepsilon_{ti} = \frac{2 \frac{A_{pt}}{S_p} f_{pi,t}}{2 \frac{A_l}{S} (E_s - E_c) + \left(A'_c - A'_h - 2 \frac{A_{pt}}{S_p} \right) E_c} \quad (94)$$

Da mesma forma, para o cálculo do encurtamento da escora de betão (ε_{dsi}) devido ao pré-esforço transversal (fig. 32):

$$\varepsilon_{dsi} \approx \frac{\varepsilon_{ti}}{\cos 45} \quad (95)$$

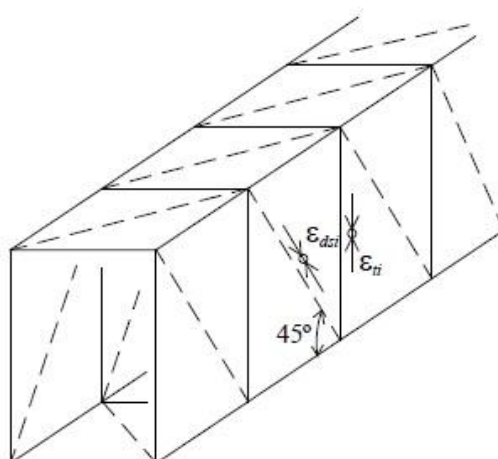


Figura 32 - Encurtamento inicial do betão devido ao pré-esforço transversal [4]

No caso de vigas com pré-esforço em ambas as direcções em simultâneo (direcção longitudinal e transversal), o cálculo da extensão na armadura de pré-esforço para cada direcção, bem como o cálculo da tensão, é realizado utilizando simultaneamente as equações 85 a 88 e as equações 91 a 94 em conjunto. Nesta situação (figs. 31 e 32), e por sobreposição de efeitos, ocorre um encurtamento (ε_{dsi}) da escora de betão comprido que pode ser calculado através:

$$\varepsilon_{dsi} \approx \frac{\varepsilon_{li} + \varepsilon_{ti}}{\cos 45} \quad (96)$$

3.4.3 - Zona Comportamental 2.a

Para caracterizar a zona comportamental 2.a, Andrade [4] considerou que, após ser atingido o momento torsor de fissuração, a participação do betão traccionado em ambas as direcções (transversal e longitudinal) deixa de ser instantaneamente contabilizada para o equilíbrio do modelo. Assim, as equações de equilíbrio do modelo de treliça voltam a ser escritas tendo em conta apenas as forças nas armaduras ordinárias ($A_l f_l$ para as armaduras longitudinais e $A_t f_t/s$ para as armaduras transversais).

Para vigas de secção cheia é geralmente observado experimentalmente um incremento instantâneo da rotação para o momento de fissuração. No caso das vigas com secção vazada o incremento instantâneo da rotação não é geralmente observado. Para o primeiro tipo de vigas, Andrade [4] considerou que o referido incremento de rotação é provocado pelo desaparecimento da participação do betão traccionado. Para o segundo tipo de vigas Andrade [4] simplesmente não considerou a existência de uma subzona 2.a (fig.33).

Bernardo em 2003 [10] mostra que o núcleo das secções cheias continua a ter efectivamente influência na rigidez de torção no Estado II. Assim Andrade [4], considerou que no método de

cálculo para modelar a subzona 2.a (a passagem do estado não fendilhado para o estado fendilhado), o núcleo da secção continua ter influência. Assim as equações continuam a ser corrigidas de acordo com o exposto anteriormente para a zona comportamental 1.

Na passagem do Estado I para o Estado II, de acordo com a metodologia adoptada por Andrade [4], o aparecimento de um patamar de horizontal correspondente à subzona 2.a ocorre naturalmente (fig. 33), com um momento torsor constante (T_{cr}) e limitado num intervalo de deformações ($\theta_{cr}^I \leq \theta \leq \theta_{cr}^{II}$). Neste intervalo de deformações, o valor de θ_{cr}^I é segundo o Andrade [4], a abcissa do ponto de intersecção entre a curva do MTEAV modificado (inclui a participação do betão traccionado e a influência do núcleo de betão), e o patamar horizontal para $T = T_{cr}$. No caso do valor de θ_{cr}^{II} , este corresponde à abcissa do ponto de intersecção entre MTEAV tendo em conta a influencia do núcleo de betão e o patamar horizontal para $T = T_{cr}$.

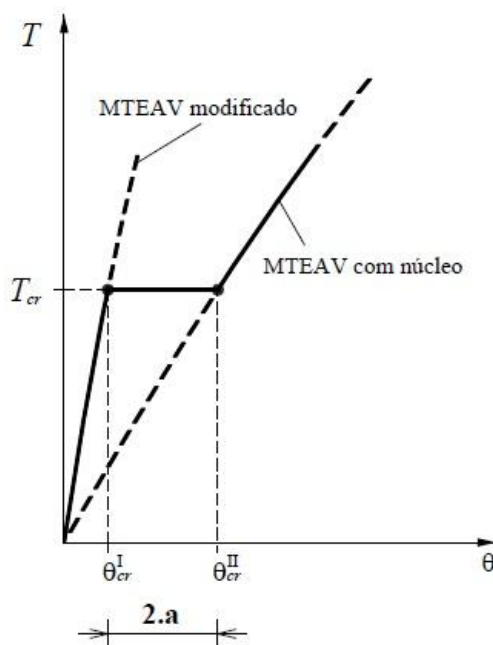


Figura 33 - Modelação teórica da subzona 2.a da Curva $T - \theta$ (vigas com secção cheia) [4]

De forma análoga o referido anteriormente para as vigas de betão armado, para as vigas de betão pré-esforçado, após ser atingido o momento torsor de fissuração, as equações de equilíbrio voltam a ser escritas tendo em conta as forças nas armaduras de pré-esforço longitudinal ($A_{pl}f_{pl}$) e transversal ($A_{pt}f_{pt}/s$) para além das forças nas armaduras ordinárias longitudinais ($A_l f_l$) e transversais ($A_t f_t/s$).

3.4.4 - Zona Comportamental 2.b e 3

Tendo por base resultados experimentais e através da análise dos mesmos, verificou-se que a curva teórica $T - \theta$, calculada com base no MTEAV variável para a subzona 2.b se encontra

geralmente desfasada em relação à curva experimental. Este desfasamento é mais evidente para níveis mais baixos de carregamento e para vigas com secção cheia (fig.34). Este desfasamento é compreensível uma vez que o MTEAV parte do pressuposto que a viga se encontra plenamente fissurada logo no início do carregamento, o que não corresponde com à realidade. A observação do maior desfasamento para vigas de secção cheia é justificado segundo Andrade [4], pelo facto do MTEAV desprezar a influência do núcleo de betão na rigidez de torção pós-fissuração.

Tendo por base estas observações, Andrade [4] criou um procedimento para corrigir, os desvios observados entre as curvas teóricas e experimentais. A correcção desses desvios, segundo Andrade [4] incide essencialmente na subzona 2.b (troço onde ocorrem os maiores desvios).

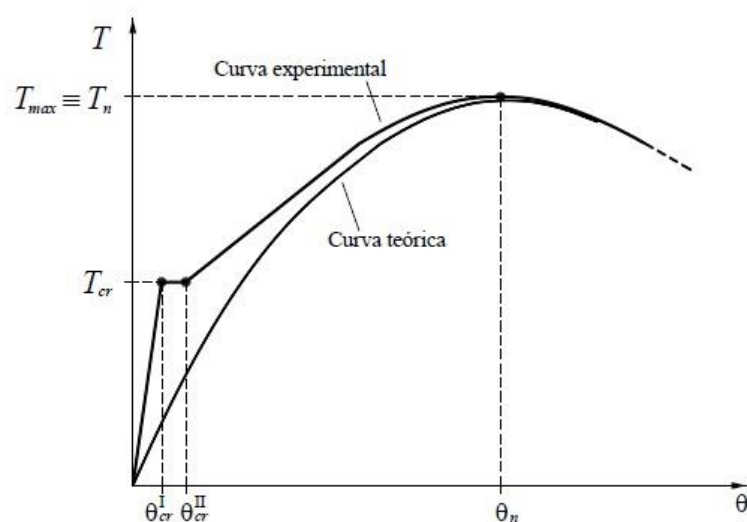


Figura 34 - Desvios entre as curvas $T - \theta$ experimental e teórica [4]

O procedimento de correcção dos desvios proposto por Andrade [8] consiste em fixar primeiramente todos os pontos da curva teórica $T - \theta$ localizados à direita do ponto correspondente ao momento torsor máximo e de coordenada (θ_n, T_n) . De seguida deve proceder-se ao ajustamento da curva teórica $T - \theta$, desde o início do estado fendilhado (ponto com coordenadas (θ_{cr}^I, T_{cr})) até ao ponto de coordenadas (θ_n, T_n) . A coordenada θ_{cr}^I é obtida de acordo com o apresentado na secção anterior. A correcção realizada é apenas feita redefinindo o eixo das rotações, que constituem os parâmetros da curva $T - \theta$ onde os desvios são maiores, desde as premissas do MTEAV.

O método de correcção referido encontra-se ilustrado na figura 35, sendo aplicada a vigas de secção cheia e vazada.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

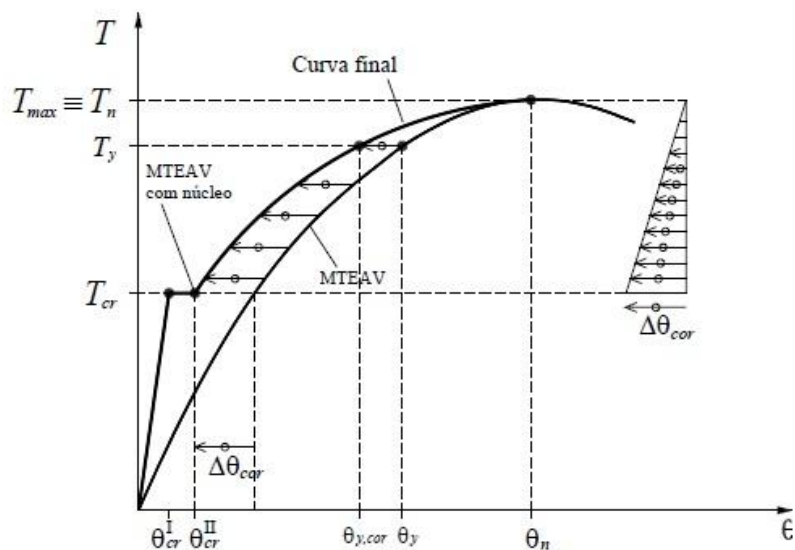


Figura 35 - Correção das rotações das curvas práticas e teórica com variação linear [4]

Andrade observou que a repercussão do método da correção apresentado é maior em vigas cuja secção é cheia, devido provavelmente a uma maior influência do núcleo após a fissuração.

Andrade verificou, mediante a análise comparativa com resultados experimentais, que o método de correção era adequado.

**Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com
base no SMMT**

4 - Modelo Membrana para Elementos de Betão Armado Sujeitos à Torção

4.1 - Aspectos Gerais

O modelo de membrana designado por SMMT (“Softened Membrane Model for Torsion”), foi proposto por Hsu e Jeng em 2009 [24]. Este modelo foi definido com base numa adaptação de vigas secção cheia à torção num modelo de membrana já proposto anteriormente por Hsu e outros e calibrado para elementos sujeitos ao corte (SMM) [28].

Segundo Hsu e Jeng [24], o SMMT consegue prever a curva $T - \theta$ de uma viga quando sujeita à torção em todas as fases comportamentais.

O SMMT, segundo Hsu e Jeng [24], constitui um novo tratamento teórico para o estudo do elemento de membrana de betão armado sujeito essencialmente ao corte, tudo como acontece para as paredes de uma secção sujeita à torção. O formalismo deste método é derivado a partir da mecânica dos meios contínuos (incluindo equações de equilíbrio, de compatibilidade e relações constitutivas) adaptado e calibrado para caracterizar o estado fissurado e último da membrana. Para tal, os autores definem, com base em ensaios experimentais, expressões para o coeficiente de Poisson de membrana no estado fissurado e também modificações nas relações constitutivas não lineares para os materiais (betão à compressão, betão à tracção e armaduras ordinárias à tracção).

No seu artigo publicado [24], os autores apenas demonstram que o SMMT fornece boas previsões para o momento torsor de fendilhação e momento torsor máximo, bem como as respectivas rotações. As análises comparativas apenas indicam vigas de betão armado de secção cheia sujeitas à torção.

4.1.2 - Equações de Equilíbrio e de Compatibilidade

Uma viga de betão armado sujeita a um momento torsor exterior desencadeia um estado interno de tensão, no sentido de contrariar esta acção (fig 36). Este estado forma um fluxo de corte circular, q , que se desenvolve na "casca externa" da secção com uma espessura efectiva t_d . No plano do equilíbrio devem ser satisfeitas três equações algébricas, expressas na forma matricial:

$$\{\sigma_t \tau_t \tau_{tt}\}^T = [T(\alpha_2)]\{\sigma_2^c \sigma_1^c \tau_{21}^c\}^T + \{\rho_l f_l \rho_t f_t \ 0\}^T \quad (97)$$

$$\rho_l = \frac{A_l}{p_0 t_d} \quad (98)$$

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

$$\rho_t = \frac{A_t}{s t_d}$$

(99)

Em que:

σ_l - Tensão normal na direcção longitudinal;

σ_t - Tensão normal na direcção transversal;

τ_{lt} - Tensão tangencial de corte na direcção longitudinal e transversal;

ρ_l - Taxa de armadura longitudinal;

ρ_t - Taxa de armadura transversal;

f_l - Tensão de cedência de armadura longitudinal;

f_t - Tensão de cedência de armadura transversal;

σ_1 - Tensão principal de tracção;

σ_2 - Tensão principal de compressão;

τ_{12} - Tensão tangencial de corte;

s - Espaçamento longitudinal da armadura transversal;

A_l - Área total da armadura ordinária longitudinal;

A_t - Área total da armadura ordinária transversal;

p_0 - Perímetro da linha média de fluxo de corte;

t_d - Espessura de fluxo na zona de corte.

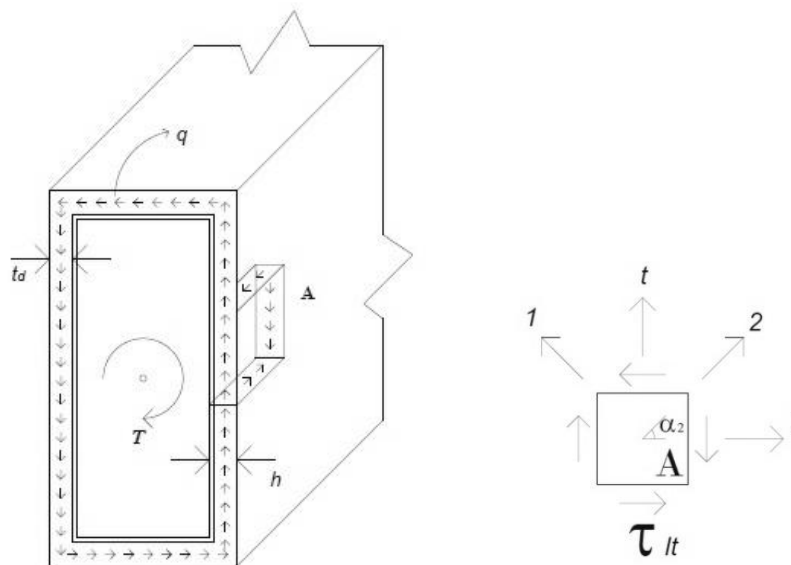


Figura 36 - Secção da viga de betão armado sujeita à torção

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

Onde a matriz de transformação $[T(\alpha_2)]$, é dada por:

$$[T(\alpha_2)] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (100)$$

Em que $c = (\cos \alpha_2)$ e $s = (\sin \alpha_2)$.

No caso da torção pura, o elemento A da figura 36 fica sujeito a um estado de corte puro. Nesta situação, as tensões normais são $\sigma_l = \sigma_t = 0$ e o ângulo $\alpha_2 = 45^\circ$. Através da aplicação do conceito do tubo de paredes finas de Bredt, a relação entre a tensão tangencial τ_{lt} e o momento torsor externo T , é:

$$T = 2A_0q = 2A_0t_d\tau_{lt} \quad (101)$$

$$A_0 = Ac - 0,5 * p_c * t_d + t_d^2 \quad (102)$$

$$p_0 = p_c - 4t_d \quad (103)$$

Em que:

A_0 - Área limitada pelo perímetro médio;

A_c - Área limitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão;

p_c - Perímetro exterior de uma secção transversal de betão;

q - Fluxo de corte.

Segundo o SMMT devem também ser satisfeitas três equações de compatibilidade, que podem ser expressas da seguinte forma matricial:

$$\{\varepsilon_l \varepsilon_t \gamma_{lt}/2\}^T = [T(\alpha_2)]\{\varepsilon_2 \varepsilon_1 \gamma_{21}/2\}^T \quad (104)$$

Em que:

ε_l - Extensão na direcção longitudinal;

ε_t - Extensão na direcção transversal;

ε_1 - Extensão na direcção 1 (tracção actuante);

ε_2 - Extensão na direcção 2 (compressão actuante).

Em adição às equações anteriores, o SMMT também incorpora uma quarta e quinta equação de compatibilidade para calcular o ângulo de torção, θ , e a curvatura da escora de betão, ϕ :

$$\theta = \frac{\rho_0}{2A_0} \gamma_{lt} \quad (105)$$

$$\phi = \theta \sin 2\alpha_2 \quad (106)$$

A deformação fora do plano normal cria uma superfície idêntica a um parabolóide hiperbólico (fig.37). Na direcção $s(2)$ a curvatura ϕ da curva OD corresponde à segunda derivada de w em relação ao comprimento na direcção $s(2)$, e está também relacionado com o ângulo de torção (θ) aplicado e o ângulo fixo (α_2) da equação 105. Similarmente ao processo utilizado para a direcção $s(2)$, na direcção $t(1)$, é possível derivar a curvatura ϕ da curva AC como derivada de w em relação ao comprimento na direcção $t(1)$.

$$\phi = \frac{d^2w}{dt^2} = -\theta \sin 2\alpha_2 = -\phi \quad (107)$$

Segundo Hsu e Jeng [24] a curvatura ϕ reflecte a distribuição das extensões elásticas e tensões do betão na zona de fluxo de corte, assumindo que esta curvatura resulta na distribuição da extensão linear com uma espessura específica, t_d , e assumindo que a mesma profundidade t_d é idêntica para a zona de compressão e tensão.

A extensão máxima de tracção, $\bar{\epsilon}_{1s}$ é dada pela equação:

$$\bar{\epsilon}_{1s} = \phi t_d \quad (108)$$

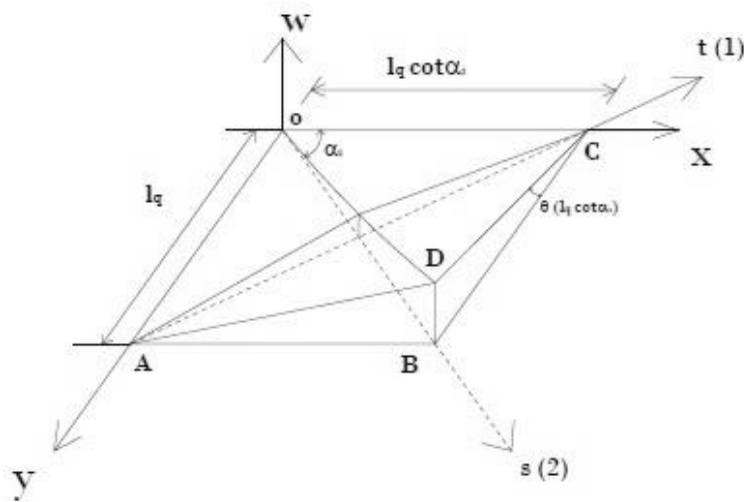


Figura 37 - Superfície parabolóide hiperbólica sujeita a rotação

A extensão média de tracção $\bar{\epsilon}_1$ está relacionada com a extensão máxima de tracção através da relação $\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}_{1s} / 2$.

As curvaturas das equações 106 e 107 resultam da distribuição não uniforme das extensões na escora de betão (direcção 2) e no tirante (direcção 1) devido à flexão das mesmas (diagrama

triangular). A espessura na zona de fluxo de corte (t_d) foi assumida pelos autores como sendo igual nas duas direcções 1 e 2 (tracção e compressão) (fig.38).

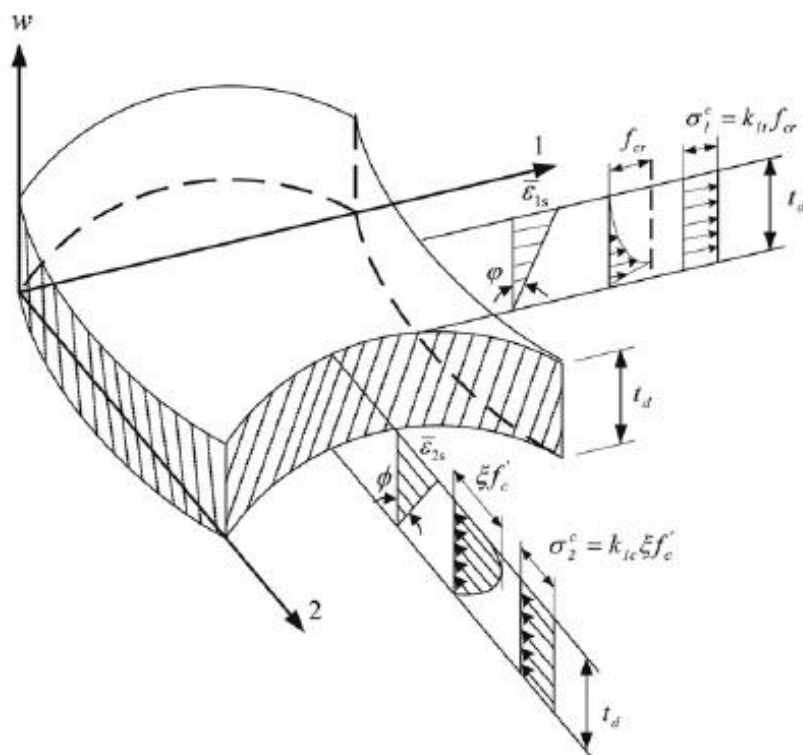


Figura 38 - Plano biaxial do estado de tensões de uma secção sujeita à torção [24]

Assim, essa espessura é definida como sendo:

$$t_d = \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\phi} \quad (109)$$

A extensão uniaxial média, $\bar{\varepsilon}_2$ está relacionada com a extensão máxima uniaxial na superfície do elemento, $\bar{\varepsilon}_{2s}$ através da relação $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_{2s}/2$.

O cálculo da espessura efectiva da zona de fluxo de corte (t_d) é realizado através das seguintes equações:

$$t_d = \frac{1}{2(Q+4)} * \left[p_c \left(1 + \frac{Q}{2} \right) - \sqrt{\left(1 + \frac{Q}{2} \right)^2 p_c^2 - 4Q(Q+4)A_c} \right] \quad (110)$$

$$Q = \frac{2\bar{\varepsilon}_{2s}}{\gamma_{lt} \sin 2\alpha_2} \quad (111)$$

Nas expressões anteriores, os parâmetros A_c e p_c correspondem respectivamente, à área de secção limitada pelo perímetro exterior do betão e o perímetro exterior.

4.1.3 - Relação entre a Extensão Uniaxial e a Extensão Biaxial

A relação entre as extensões uniaxiais e biaxiais segundo as direcções 1 e 2 foi analisada por Hsu e Zhu [28] de uma forma algébrica, sendo que a sua representação na forma matricial é a seguinte:

$$\{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_1 \gamma_{21}/2\}^T = [V]\{\varepsilon_2 \varepsilon_1 \gamma_{21}/2\}^T \quad (112)$$

A matriz de conversão $[V]$ é dada por:

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & v_{21} & 0 \\ \frac{1 - v_{12}v_{21}}{v_{12}} & \frac{1 - v_{12}v_{21}}{1} & 0 \\ \frac{1 - v_{12}v_{21}}{0} & \frac{1 - v_{12}v_{21}}{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (113)$$

As extensões uniaxiais nas direcções longitudinal e transversal são dadas por:

$$\{\bar{\varepsilon}_l \bar{\varepsilon}_t \gamma_{lt}/2\}^T = [T(\alpha_2)]\{\bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_1 \gamma_{21}/2\}^T \quad (114)$$

Os parâmetros, v_{12} e v_{21} designados de razão Hsu/Zhu, foram propostos por Zhu e Hsu [28] para β (v_{12} e v_{21} são os coeficientes de Poisson das placas em estado fissurado).

$$v_{12} = 0.2 + 850\varepsilon_{sf} \text{ para } \varepsilon_{sf} \leq \varepsilon_y \quad (115)$$

$$v_{12} = 1.9 \text{ para } \varepsilon_{sf} > \varepsilon_y \quad (116)$$

$$v_{21} = 0 \quad (117)$$

Em que:

ε_{sf} - Extensão média uniaxial da armadura ordinária com parâmetros de Hsu/Zhu.

4.1.4 - Relação Constitutiva do Betão à Compressão

O comportamento do betão à compressão na direcção principal de compressão depende do *softening effect*, que provoca uma redução da tensão de compressão no betão. Este efeito é função de três variáveis, nomeadamente a extensão de tracção na direcção principal ($\bar{\varepsilon}_1$), a resistência do betão à compressão (f'_c) e o ângulo de desvio (β).

O ângulo de desvio (β), que representa o ângulo entre a direcção principal e a direcção de aplicação do carregamento é dado por:

$$(\alpha_2 - \alpha); 2\beta = \tan^{-1} * (\gamma_{21}/\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (118)$$

Em que:

α_2 - Ângulo fixo entre a direcção 2 (principal de compressão) e a direcção da armadura longitudinal ordinária ($\alpha_2 \approx 45^\circ$);

α - Ângulo de rotação por torção.

Para o cálculo da tensão média de compressão na escora (σ_2^c) de betão, é calculado um factor de tensão média (k_{1c}).

$$\sigma_2^c = k_{1c} \zeta f'_c \quad (119)$$

Em que:

ζ - Coeficiente para ter em conta o *softening effect*.

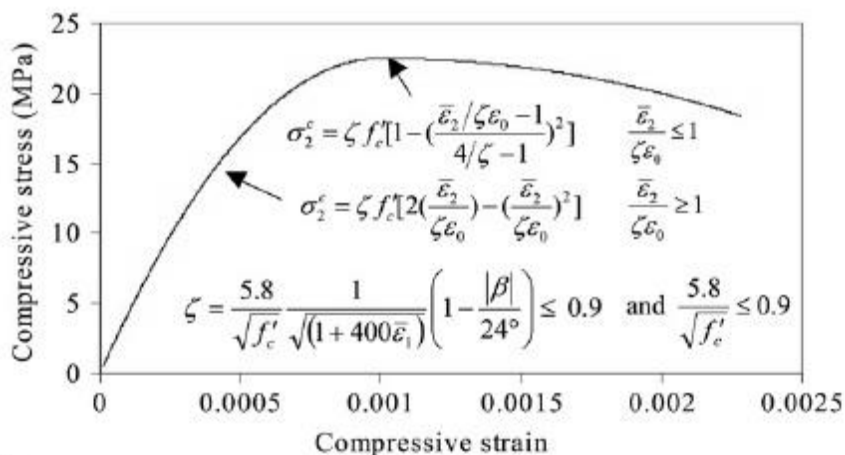


Figura 39 - Lei constitutiva do betão à compressão [24]

A tensão média de compressão na escora de betão (σ_2^c) representado na figura 39 é obtida através das seguintes equações:

$$\sigma_2^c = \zeta * f_c' \left[1 - \left(\frac{\bar{\varepsilon}_2 / \zeta \varepsilon_0 - 1}{4/\zeta - 1} \right)^2 \right] \text{ para } \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} \leq 1 \quad (120)$$

$$\sigma_2^c = \zeta * f_c' \left[2 \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right] \text{ para } \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} > 1 \quad (121)$$

$$\zeta = \frac{5,8}{\sqrt{f_c'}} \frac{1}{\sqrt{(1 + 400\bar{\varepsilon}_1)}} \left(1 - \frac{|\beta|}{24^\circ} \right) \leq 0,9 \text{ e } \frac{5,8}{\sqrt{f_c'}} \leq 0,9 \quad (122)$$

O factor de tensão média de compressão (k_{1c}) é obtido integrando as equações de $\sigma - \varepsilon$ (113, 114 e 115) do gráfico representado na figura 39:

$$k_{1c} = \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} - \frac{(\bar{\varepsilon}_{2s})^2}{3(\zeta \varepsilon_0)^2} \text{ para } \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} \leq 1 \quad (123)$$

$$k_{1c} = 1 - \frac{\zeta \varepsilon_0}{3\bar{\varepsilon}_{2s}} - \frac{(\bar{\varepsilon}_{2s} - \zeta \varepsilon_0)^3}{3\bar{\varepsilon}_{2s}(4\varepsilon_0 - \zeta \varepsilon_0)^2} \text{ para } \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\zeta \varepsilon_0} > 1 \quad (124)$$

4.1.5 - Relações Constitutivas do Betão à Tracção

Existem diversas teorias para a análise do efeito de torção, contudo a influência da tensão de tracção no betão é sempre ignorada. Esta deficiência agora dos modelos é agora ultrapassada por Hsu e Jeng [24] com o SMMT, que ao introduzir a relação $\sigma - \varepsilon$ do betão à tracção consegue prever para além do momento torsor de rotura, também o momento torsor de fendilhação bem como todo o estado evolutivo do elemento à torção desde o início do carregamento.

Segundo Hsu e Jeng [24], o SMMT incorpora assim uma relação constitutiva do betão à tracção, de forma idêntica ao realizado para a relação constitutiva do betão à compressão. Um factor de tensão média de tracção é incorporado à relação constitutiva do betão (componente de tracção do betão).

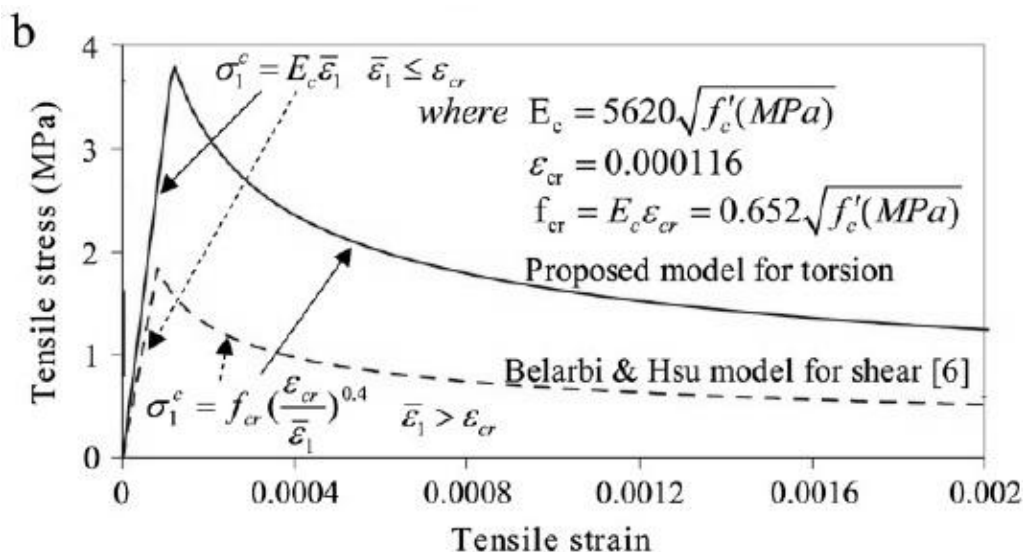


Figura 40 - Lei constitutiva de betão à tracção [24]

A distinção entre a relação constitutiva de tracção e a relação constitutiva de compressão do betão é feita através da substituição de uma consoante c ou t , no factor k_1 das equações 123 e 124.

Para a relação constitutiva do betão à tracção temos:

$$\sigma_1^c = k_{1t} f_{cr} \quad (125)$$

A tensão média de tracção do betão (σ_1^c) representado na figura 40 é obtida através das seguintes equações:

$$\sigma_1^c = E_c * \bar{\epsilon}_1 \text{ para } \bar{\epsilon}_1 \leq \epsilon_{cr} \quad (126)$$

$$\sigma_1^c = f_{cr} \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\bar{\epsilon}_1} \right)^{0.4} \text{ para } \bar{\epsilon}_1 \geq \epsilon_{cr} \quad (127)$$

$$E_c = 5620 * \sqrt{f'_c [MPa]} \quad (128)$$

$$f_{cr} = E_c * \epsilon_{cr} = 0,652 * \sqrt{f'_c [MPa]} \quad (129)$$

Em que:

E_c - Módulo de elasticidade do betão;

ϵ_{cr} - Extensão de rotura do betão.

O factor de tensão média de tracção (k_{1t}) é obtido integrando as equações de $\sigma - \varepsilon$ (126 e 129) do gráfico representado na figura 40:

$$k_{1t} = \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{2 * \varepsilon_{cr}} \text{ para } \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{cr}} \leq 1 \quad (130)$$

$$k_{1t} = \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{2 * \varepsilon_{cr}} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0,4}}{(0,6) * \bar{\varepsilon}_{1s}} [(\bar{\varepsilon}_{1s})^{0,6} - (\varepsilon_{cr})^{0,6}] \text{ para } \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{cr}} \geq 1 \quad (131)$$

As relações constitutivas originais do betão inicialmente propostas por Belardi e Hsu [6] para elementos sujeitos à torção demonstraram ser deficientes segundo Hsu e Jeng [24]. Tendo por base comparações com numerosos resultados experimentais, os autores observaram que os parâmetros f_{cr} e E_c não eram adequados por não ser contabilizada o gradiente de extensão. Com base no estudo paramétrico realizado, Hsu e Jeng [24] propuseram uma nova relação constitutiva do betão à tracção para elementos sujeitos à torção. Tal relação incorpora novos parâmetros, tais como E_c e f_{cr} (módulo de elasticidade do betão e a resistência máxima do betão à tracção).

4.1.6 - Solução do Algoritmo

Segundo Hsu e Jeng [24], o modelo teórico SMMT para elementos à torção constitui uma extensão do modelo teórico SMM para elementos ao corte. Tal como no modelo SMM, as duas equações de equilíbrio (equação 97) são utilizadas como critérios de convergência:

$$\rho_l f_l + \rho_t f_t = (\sigma_l + \sigma_t) - (\sigma_2^c - \sigma_1^c) \quad (132)$$

$$\rho_l f_l + \rho_t f_t = (\sigma_l + \sigma_t) - (\sigma_2^c - \sigma_1^c) \cos 2\alpha_2 - 2\tau_{21}^c \sin 2\alpha_2 \quad (133)$$

Esta solução (modelo SMMT), proposto por Hsu e Zhu [24], apresenta algumas diferenças entre o algoritmo do modelo SMM (corte) e o novo modelo SMMT (torção), nomeadamente a variável t_d . Esta diferença na variável t_d , implica igualmente a alteração dos valores das taxas de armadura transversal e longitudinal (respectivamente, ρ_t e ρ_l). Outra dificuldade referente ao SMMT é o desconhecimento dos valores das diversas variáveis e a interdependência das mesmas, o que provoca a necessidade de uma solução através de um processo iterativo de cálculo, o que aumenta a dificuldade deste novo método. Conclui-se assim que o algoritmo do modelo inicial ao corte (SMM) é mais simples que o novo modelo proposto pelos autores, uma vez que os valores de rigidez e taxa de armaduras do modelo ao corte são constantes.

O procedimento de cálculo iterativo pode ser formulado com um algoritmo de cálculo cujo o diagrama de fluxo está representado na figura 41.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

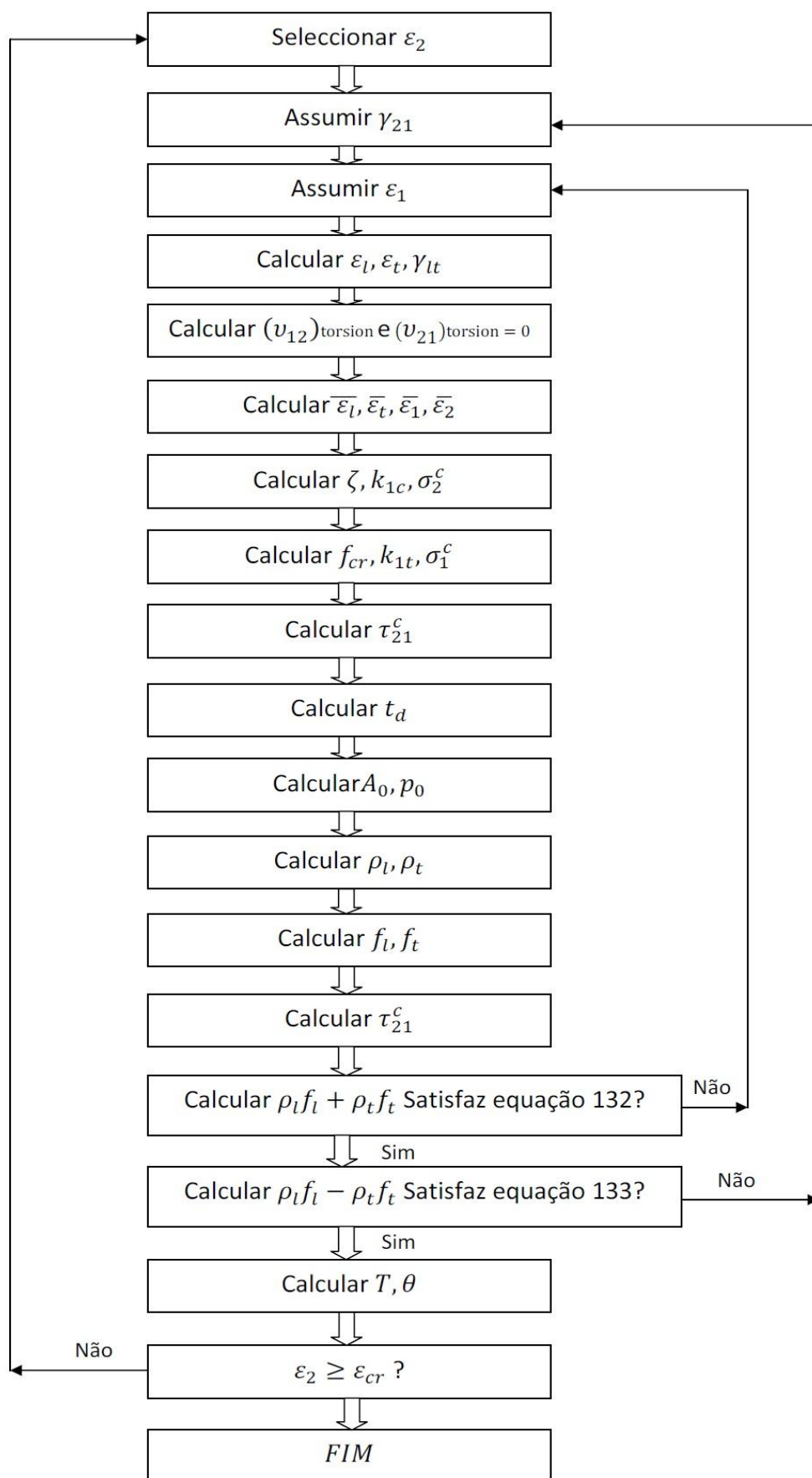


Figura 41- Diagrama de fluxo para o cálculo dos pontos da curva $T - \theta$ para o SMMT

**Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com
base no SMMT**

5 - Caracterização do Comportamento à Torção Através do Cálculo das Curvas $T - \theta$ pelo SMMT

5.1 - Vigas de Referência

Para a validação correcta do modelo teórico SMMT, com base numa análise comparativa entre as curvas $T - \theta$ teóricas e experimentais, é preciso definir pontos característicos de tais curvas sobre as quais incidirá a respectiva comparação.

Estes pontos característicos são definidos pelas coordenadas (θ, T) num referencial ortonormado. Nesta primeira fase, o objectivo do trabalho é testar e comparar os resultados do modelo teórico SMMT com a incorporação da componente de pré-esforço em relação aos experimentais.

Para as análises comparativas, foram escolhidas cinco vigas com pré-esforço longitudinal (três vigas de secção vazada e duas de secção cheia) cujos resultados experimentais foram encontrados na literatura consultada [4] procede-se à caracterização de alguns pontos específicos na curva $T - \theta$, o momento torsor de fissuração e a respectiva rotação (θ_{cr}^l, T_{cr}) bem como o momento torsor máximo (resistência última da viga) e a respectiva rotação (θ_n, T_n) .

Na tabela 1 apresentam-se as características principais das vigas com pré-esforço longitudinal. A designação das vigas respeita a designação original do autor.

Tabela 1 - Características das vigas de referência (vigas com pré-esforço longitudinal)

Viga	Tipo de secção	x (cm)	y (cm)	t (cm)	x_1 (cm)	y_1 (cm)	A_{sl} (cm ²)	A_{sl}/s (cm ² /m)	A_p (cm ²)	ρ_l (%)	ρ_t (%)	ρ_{tot} (%)
P2 [40]	Vazada	35,56	43,18	8,89	31,24	38,86	5,58	7,35	4,63	0,37	0,67	1,04
D1 [10]	Vazada	60,00	60,00	11,38	54,25	54,20	23,75	11,22	4,20	0,66	0,68	1,34
D2 [10]	Vazada	60,00	60,00	11,50	55,50	55,50	23,75	11,22	5,60	0,66	0,69	1,35
P3 [40]	Cheia	35,56	43,18	-	29,21	36,83	4,26	7,35	1,16	0,28	0,63	0,91
P8 [27]	Cheia	25,40	38,10	-	21,59	34,29	5,16	22,58	9,58	0,53	2,61	3,14

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

A tabela 2 apresenta a informação relativa ao pré-esforço longitudinal das vigas em análise.

Tabela 2 - Características do pré-esforço das vigas de referência

Viga	Tipo de secção	$\rho_{l,tot}$ (%)	$\rho_{t,tot}$ (%)	f_{cm} (MPa)	f_{cm} (MPa)	f_{lym} (MPa)	f_{lym} (MPa)	$f_{p0,1\%}$ (MPa)	f_{pi} (MPa)	f_{cp} (MPa)	E_c (GPa)
P2 [40]	Vazada	0,66	1,34	32,90	3,19	406,90	406,90	1475,86	1144,83	4,89	27,15
D1 [10]	Vazada	0,77	1,45	80,84	4,43	723,89	714,83	1670,00	639,59	1,79	41,18
D2 [10]	Vazada	0,81	1,50	58,77	3,66	723,89	714,83	1670,00	1100,34	3,08	37,43
P3 [40]	Cheia	0,35	0,98	34,00	3,24	327,59	327,59	1475,86	1144,83	0,86	27,60
P8 [27]	Cheia	1,55	4,16	31,03	3,10	334,48	335,86	959,31	689,66	6,83	26,37

Dentro das referidas vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal estão duas vigas de alta resistência com secção vazada, no entanto não inclui qualquer viga de alta resistência com secção cheia.

Na literatura encontrou-se apenas um estudo experimental realizado por Wafa et al. em 1995 [54] relativo ao ensaio de 14 vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal uniforme à torção pura e com secção cheia. Os gráficos das curvas de $T - \theta$ dessas vigas apresentam algumas inconsistências no seu desenvolvimento bem como a falta de informação presente no artigo científico. Um problema que surge de imediato é a utilização de valores de rotações médias no cálculo do desenvolvimento das curvas e a ausência de informação relativa às rotações nas várias secções da viga por parte do autor. Outra questão prende-se com o desenvolvimento das curvas na última fase do comportamento $T - \theta$ em que as vigas no geral apresentam um comportamento característico de rotura frágil por insuficiência de armadura. Estas vigas serão apenas comparadas tendo por base unicamente o valor do momento torsor máximo de rotura das vigas, as suas características estão resumidas na tabela 3.

Tabela 3 - Características das vigas ensaiadas por Wafa et al. [54]

Viga	Tipo de secção	x (cm)	y (cm)	x_1 (cm)	y_1 (cm)	A_{sl} (cm ²)	A_{sl}/s (cm ² /m)	A_p (cm ²)	f_{cm} (MPa)	f_{lym} (MPa)	f_{lym} (MPa)	$f_{p0,2\%}$ (MPa)	f_{cp} (MPa)
H3AR	Cheia	14,00	42,00	9,80	37,80	8,04	10,28	3,97	92,22	487	390	1816	8,30
H2A	Cheia	17,00	34,00	12,80	29,80	8,04	12,57	3,97	91,88	487	390	1816	8,67
H1AR	Cheia	24,00	24,00	19,80	19,80	8,04	12,57	3,97	94,67	487	390	1816	6,39
H3B	Cheia	14,00	42,00	10,00	38,00	6,16	5,61	2,06	91,51	374	387	1841	3,97
H2B	Cheia	24,00	24,00	13,00	30,00	6,16	6,04	2,06	95,60	374	387	1841	4,28
H1B	Cheia	24,00	24,00	20,00	20,00	6,16	6,54	2,06	89,78	374	387	1841	4,27

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

M3A	Cheia	14,00	42,00	9,80	37,80	8,04	10,28	3,97	69,92	487	390	1816	6,52
M2A	Cheia	17,00	34,00	12,80	29,80	8,04	11,31	3,97	70,07	487	390	1816	6,21
M1A	Cheia	24,00	24,00	19,80	19,80	8,04	12,57	3,97	72,54	487	390	1816	6,44
M3B	Cheia	14,00	42,00	10,00	38,00	6,16	5,61	2,06	69,33	374	387	1841	3,23
M2B	Cheia	17,00	34,00	13,00	30,00	6,16	6,04	2,06	69,67	374	387	1841	3,29
M1B	Cheia	24,00	24,00	20,00	20,00	6,16	6,54	2,06	71,97	374	387	1841	3,17

5.2 - Incorporação da Componente de Pré-esforço no Modelo SMMT

5.2.1 - Aspectos Gerais

O SMMT, proposto por Hsu e Jeng em 2009 [24], constitui um novo tratamento teórico para o estudo de elementos de betão armado sujeitos à torção. Aproveitando o modelo SMMT exposto anteriormente (capítulo 4) e tendo por base os mesmos princípios foi adicionada a componente de pré-esforço no procedimento de cálculo. No artigo publicado por Hsu e Jeng [24], as análises comparativas apenas são realizadas para vigas de betão armado de secção cheia sujeitas à torção. Neste trabalho, o método de SMMT será analisado com a adição da componente de pré-esforço longitudinal para vigas de secção cheia e secção vazada sujeitas à torção pura.

5.2.2 - Equações de Equilíbrio e de Compatibilidade

No plano do equilíbrio devem ser satisfeitas quatro equações algébricas, as três equações expostas anteriormente e uma nova equação algébrica com a componente de pré-esforço. As equações podem ser expressas na forma matricial:

$$\{\sigma_l \sigma_t \tau_{lt}\}^T = [T(\alpha_2)]\{\sigma_2^c \sigma_1^c \tau_{21}^c\}^T + \{\rho_l f_l \rho_t f_t 0\}^T + \{\rho_{lp} f_{lp} \rho_{tp} f_{tp} 0\}^T \quad (134)$$

$$\rho_{lp} = \frac{A_{pl}}{p_0 t_d} \quad (135)$$

$$\rho_{tp} = \frac{A_{pt}}{s_p t_d} \quad (136)$$

Em que:

ρ_{lp} - Taxa de armadura longitudinal de pré-esforço;

ρ_{tp} - Taxa de armadura transversal de pré-esforço;

A_{pl} - Área da armadura longitudinal de pré-esforço;

A_{pt} - Área de uma unidade da armadura transversal de pré-esforço;

f_{lp} - Tensão na armadura longitudinal de pré-esforço;

f_{tp} - Tensão na armadura transversal de pré-esforço;

s_p - Espaçamento da armadura transversal de pré-esforço.

5.2.3 - Extensões nas Armaduras de Pré-esforço ($\bar{\epsilon}$)

Para calcular a tensão na armadura de pré-esforço em vigas com pré-esforço longitudinal uniforme é necessário calcular previamente a extensão na armadura de pré-esforço $\bar{\epsilon}_{lp}$ ou $\bar{\epsilon}_{tp}$ (extensão horizontal e extensão transversal, respectivamente):

(i) Armadura longitudinal

$$\bar{\epsilon}_{lp} = \epsilon_{dec,l} + \bar{\epsilon}_l \quad (137)$$

$$\bar{\epsilon}_{lpi} = \frac{f_{lpi}}{E_p} \quad (138)$$

$$\bar{\epsilon}_{li} = \frac{A_{pl} * f_{lpi}}{A_{sl} * (E_s * E_c) + (A_c - A_h - A_{pl}) * E_c} \quad (139)$$

$$\bar{\epsilon}_{dec,l} = \bar{\epsilon}_{lpi} + \bar{\epsilon}_{li} \quad (140)$$

Em que:

$\bar{\epsilon}_{lpi}$ - Extensão inicial na armadura de pré-esforço (A_{lp}) devido ao pré-esforço longitudinal;

E_s - Módulo de elasticidade da armadura longitudinal ordinária;

E_{pl} - Módulo de elasticidade da armadura longitudinal de pré-esforço;

E_c - Módulo de elasticidade do betão;

f_{lpi} - Tensão inicial na armadura longitudinal de pré-esforço;

$\bar{\epsilon}_{li}$ - Extensão inicial de compressão na armadura ordinária longitudinal;

$A_h = (x - 2h)(y - 2h)$ - Área da zona vazada;

$A_c = x * y$ - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção de betão pré-esforçado longitudinalmente.

(ii) Armadura Transversal

$$\bar{\epsilon}_{tp} = \epsilon_{dec,t} + \bar{\epsilon}_t \quad (141)$$

$$\bar{\epsilon}_{tpi} = \frac{f_{tpi}}{E_p} \quad (142)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ti} = \frac{2 * \frac{A_{pt}}{S_p} * f_{tpi}}{2 * \frac{A_t}{S} * (E_s - E_c) + \left(A'_c - A'_h - 2 * \frac{A_{tp}}{S_p} \right) * E_c} \quad (143)$$

Em que:

$\bar{\varepsilon}_{tpi}$ - Extensão inicial na armadura de pré-esforço (A_{tp}) devido ao pré-esforço transversal;

$\bar{\varepsilon}_{ti}$ - Extensão inicial de compressão na armadura ordinária transversal;

f_{tpi} - Tensão inicial na armadura transversal de pré-esforço;

E_{pt} - Módulo de elasticidade da armadura transversal de pré-esforço;

$A'_h = (x - 2h) * l$ - Área da zona vazada;

$A'_c = x * l$ - Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção de betão pré-esforçado transversalmente.

5.2.4 - Lei Constitutiva do Aço da Armadura de Pré-Esforço à Tracção

O EC2 [42] propõe leis bilineares, com ou sem endurecimento na fase plástica, para a relação $\sigma - \varepsilon$ para o aço das armaduras de pré-esforço solicitadas à tracção. Segundo Hsu [30], as idealizações simples e bilineares em rigor não são aplicáveis ao aço de alta resistência que constitui a armadura de pré-esforço. Para a armadura de pré-esforço existe uma resposta inicial elástico linear até um limite proporcional. Se a tensão for incrementada para além desse limite, surge uma relação não linear entre a tensão e a extensão até à rotura (fig.42). Para descrever esta relação não linear, Hsu [30] refere que pode ser empregue a equação de Ramberg-Osgood [27]:

$$f_{ps} = \frac{E_p \varepsilon_{ps}}{\left[1 + \left(\frac{E_p \varepsilon_{ps}}{f_{pu}} \right)^R \right]^{1/R}} ; R = 4,38 \quad (144)$$

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

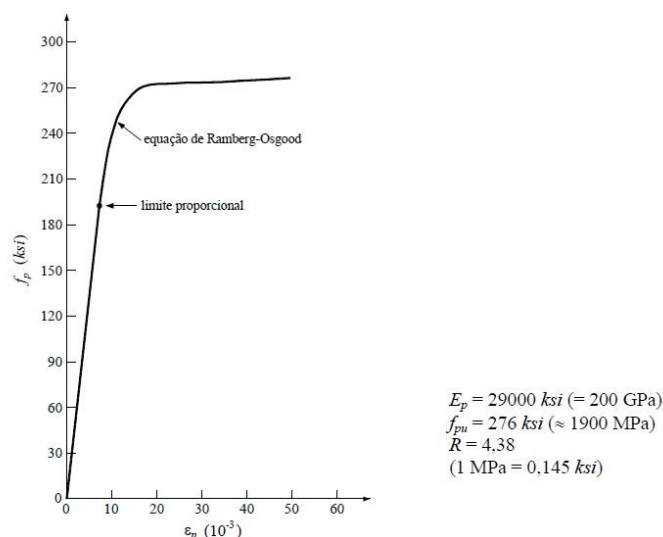


Figura 42 - Exemplo de curva $T - \theta$ teórica baseada na equação de Ramberg-Osgood [27]

Na equação 142, f_{pu} é a tensão de rotura da armadura de pré-esforço e R é um coeficiente determinado com base em ensaios experimentais, geralmente é assumido que o $R = 4,38$ para aços correntes de armaduras de pré-esforço. O valor do coeficiente $R = 4,38$ foi comprovado por Rao e Warwaruk em 1973 [45] com base em ensaios de cabos correntes de pré-esforço.

5.2.5 - Lei Constitutiva do Betão à Tracção

Adição da componente de pré-esforço no factor à tracção uniaxial do betão, relativo à lei constitutiva do betão à tracção. O factor de pré-esforço, γ , é baseado na resistência à tracção uniaxial do betão, f'_t . A quantidade f'_t pode ser relacionada com a resistência à compressão uniaxial f'_c , assumindo que $f'_c / f'_t = 10$ [30].

$$f_{cr} = (E_c * \varepsilon_{cr}) * \gamma \tag{145}$$

Este factor de pré-esforço foi incorporado por Hsu na teoria da flexão enviesada para calcular o momento torsor resistente de vigas com pré-esforço longitudinal uniforme [33]. Este factor de pré-esforço da equação 145 foi validado por intermédio de ensaios experimentais realizados por Nylander em 1945 [43], Humphreys em 1957 [35] e Zia e McGee em 1974 [57].

$$\gamma = \sqrt{1 + 10 \frac{f_p}{f'_c}} \tag{146}$$

5.3 - Solução do Algoritmo SMMT com a Componente de Pré-Esforço

Como referido anteriormente com a incorporação da componente de pré-esforço no modelo SMMT, duas novas equações de equilíbrio (equação 134) são utilizadas como critérios de convergência.

$$\rho_l f_l + \rho_{lp} f_{lp} + \rho_t f_t + \rho_{tp} f_{tp} = (\sigma_l + \sigma_t) - (\sigma_2^c - \sigma_1^c) \quad (147)$$

$$\rho_l f_l + \rho_{lp} f_{lp} - (\rho_t f_t + \rho_{tp} f_{tp}) = (\sigma_l + \sigma_t) - (\sigma_2^c - \sigma_1^c) \cos 2\alpha_2 - 2\tau_{21}^c \sin 2\alpha_2 \quad (148)$$

No caso da torção pura as tensões normais são $\sigma_l = \sigma_t = 0$ (tensões anteriores).

O procedimento de cálculo iterativo pode ser formulado com um algoritmo de cálculo com a alteração correspondente à introdução da componente de pré-esforço no SMMT. O diagrama de fluxo está representado na figura 43.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

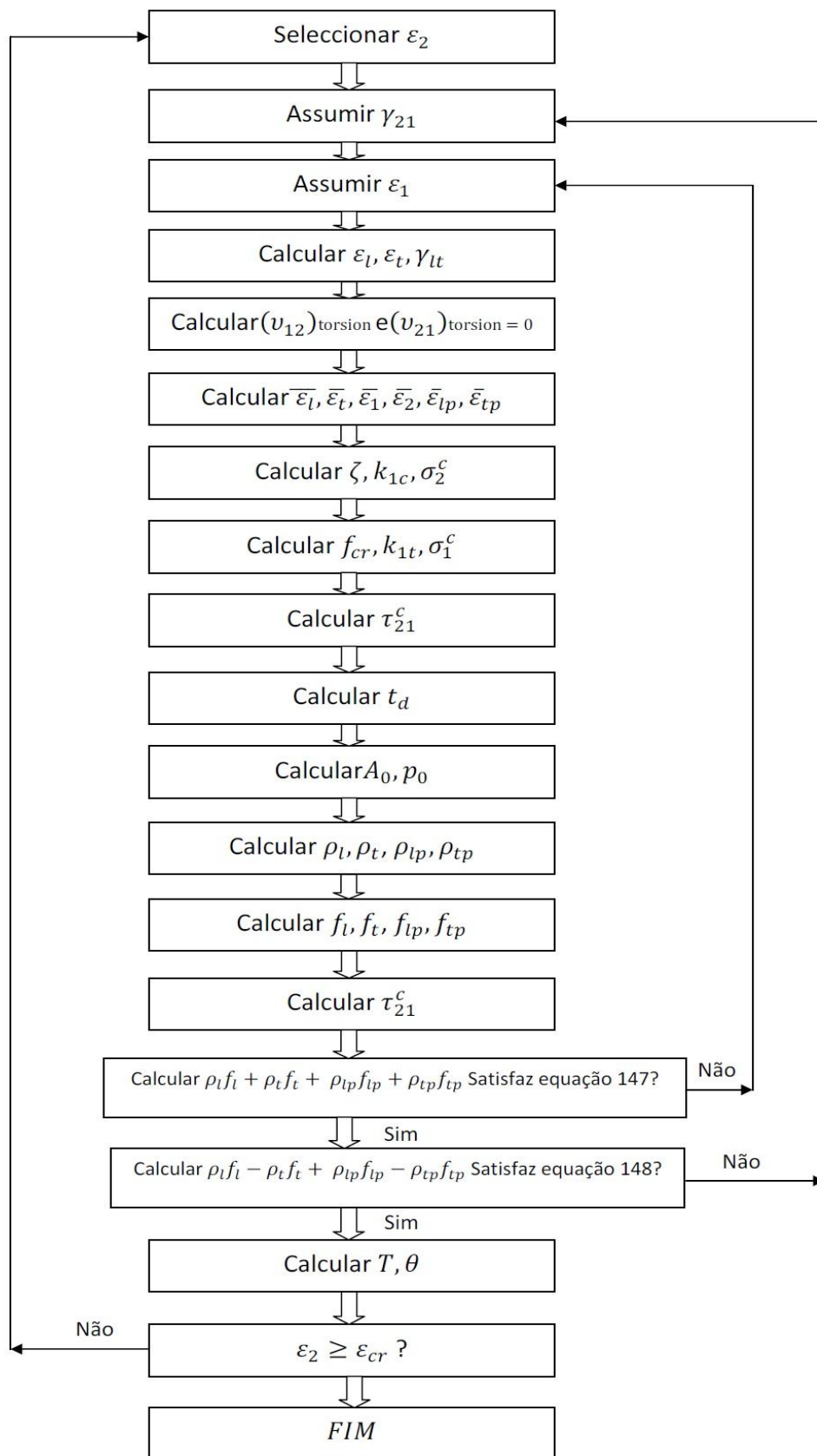


Figura 43 - Diagrama de fluxo para o cálculo dos pontos da curva $T - \theta$ para o SMMT com a componente de pré-esforço

6 - Análise e Comparação de Resultados

6.1 - Introdução

Para a comparação do método SMMT proposto por Hsu e Jeng [24] em 2009, com a adição da componente de pré-esforço, recorreu-se à implementação computacional do algoritmo de cálculo e à convergência dos pontos que definem as curvas $T - \theta$, para cada uma das vigas de betão armado pré-esforçado longitudinal, através de uma folha de cálculo.

Durante a convergência dos pontos (θ, T) , que constituem o desenvolvimento das curvas $T - \theta$ para o método SMMT com a componente de pré-esforço, através das variáveis $\varepsilon_2, \varepsilon_1, \gamma_{21}$, ocorreram algumas dificuldades. Para a viga P2 (proposta por Mitchell e Collins em 1974 [40]) de secção vazada, não foi possível a convergência dos pontos da curva $T - \theta$, devido à variável γ_{21} (componente de distorção), uma vez que a convergência apenas foi possível considerando as variáveis $\varepsilon_2, \varepsilon_1$ (extensões na direcção principal de compressão e tracção, respectivamente) e a variável γ_{21} como nula. Em relação às vigas P8 e P3 (propostas por Hsu em 1985 [27] e Mitchell e Collins em 1974 [40], respectivamente) de secção cheia, a convergência dos pontos apenas foi possível considerando a variável γ_{21} com a introdução de valores positivos.

Foram analisadas também as variações de valores, do método SMMT, com a componente de pré-esforço, considerando a variável γ_{21} nula. Esta opção foi considerada por se ter observado que os valores associados a esta variável eram em geral muito pequenos.

6.2 - Fase de Pré-Fissuração (Estado I)

Para a fase de pré-fissuração (Estado I), ou seja, a zona comportamental antes de ocorrer fissuração, o declive da curva $T - \theta$ representa a rigidez elástica de torção $((GC)^I \equiv K_T^I)$. A curva $T - \theta$ nesta fase pode ser aproximada a uma recta com as coordenadas iniciais (0;0) e com coordenadas finais $(\theta_{cr}; T_{cr})$, onde T_{cr} representa o momento torsor de fissuração e θ_{cr} a rotação de torção por unidade de comprimento da viga, respectiva. Esta aproximação geralmente aceite representa uma hipótese simplificativa, uma vez que antes de alcançar o momento torsor de fissuração a viga apresenta na realidade um ligeiro comportamento não linear devido ao aparecimento de microfissurações na "casca externa" da secção. Assim, a rigidez calculada desta forma constitui uma rigidez secante.

6.2.1 - Análise e Comparação dos Momentos Torsores de Fissuração

A tabela 4 apresenta os valores obtidos para os momentos torsores máximos (T_{cr}) e as respectivas rotações (θ_{cr}) para as cinco vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal,

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

bem como a comparação entre os valores experimentais e os valores do modelo teórico SMMT com a componente de pré-esforço.

Tabela 4 - Análise comparativa para o momento torsor de fissuração e respectiva rotação

Modelo SMMT com a componente de pré-esforço							
Momento Torsor de Fissuração e Rotação							
Vigas	Secção	$T_{cr, exp}$ (KN.m)	$T_{cr, th}$ (KN.m)	$T_{cr, exp}/T_{cr, th}$	$\theta_{cr, exp}$ (rad)	$\theta_{cr, th}$ (rad)	$\theta_{cr, exp}/\theta_{cr, th}$
D1 [10]	Vazada	172,9	243,298	0,710651136	0,0011345	0,000958453	1,183678282
D2 [10]	Vazada	184,69	199,957	0,923648584	0,001291	0,000691216	1,867722969
P2 [40]	Vazada	57,95742	40,524	1,430199882	0,00241	0,000944749	2,550942102
P3 [40]	Cheia	41,2304	44,821	0,91989023	0,003647	0,001270633	2,870222952
P8 [27]	Cheia	45,21649	25,976	1,740702572	0,00415	0,001815131	2,286336358
				Média	1,145018481		
				Desvio padrão	0,425596733	Média	2,151780533
				Coeficiente de variação [%]	37,17	Desvio padrão	0,654122581
						Coeficiente de variação [%]	30,4

Através da análise da tabela 4 pode-se observar relativamente ao momento torsor de fissuração uma média de valores de 1,14, um desvio padrão de 0,43 e um coeficiente de variação de 37,17%. Conclui-se desde logo que os valores obtidos pelo método SMMT com pré-esforço apresenta muitas oscilações com um coeficiente de variação de quase 40%, os valores para o momento de fissuração para as vigas P2 [40] e P8 [27] estão sobrestimados, no caso da viga P8 [27], o valor de 1,74 para a razão entre o momento torsor experimental e valor teórico indica que o valor teórico é quase metade do valor obtido experimentalmente.

Para as restantes vigas (D1 [10], D2 [10] e P3 [40]), os valores obtidos para a razão entre o momento experimental e o teórico para as vigas D2 [10] e P3 [40] estão ligeiramente sobrestimados. O valor referente à viga D1 [10] para a razão entre o momento experimental e teórico (0,71) é menor entre as vigas analisadas.

Em relação às rotações referentes aos momentos torsos de fissuração obteve-se um valor de 2,15 relativo à média de valores e um coeficiente de variação na ordem dos 30,4%.

Observa-se desde logo que as vigas D1 [10] e D2 [10], ambas de betão de alta resistência, têm os valores onde a razão entre o valor experimental e o valor teórico para a rotação do momento de fissuração é menor, contudo para a viga D1 [10] esse valor da razão (1,18) está contudo subestimada, mas é a melhor aproximação entre a rotação teórica e a rotação experimental. Para as restantes vigas, os valores para a razão são superiores a 2, o que demonstra que o valor para a rotação teórica de fissuração está muito subestimado em

relação ao valor da rotação experimental de fissuração. Através de uma análise comparativa visual dos gráficos referentes às vigas em questão ajuda a interpretação dos resultados obtidos (secção 6.5).

6.2.2 - Análise e Comparação da Rigidez em Estado I

A análise e comparação entre os valores experimentais e os valores teóricos do SMMT para as vigas de betão armado pré-esforçado longitudinal referentes à rigidez em Estado I (K_t^I), é feita através da tabela 5.

Tabela 5 - Análise e comparação da rigidez em Estado I para as vigas de betão armado com pré-esforço

Modelo SMMT com a componente de pré-esforço				
Rigidez em Estado I				
Vigas	Secção	K_t^I, exp (KN.m)	K_t^I, th (KN.m)	$K_t^I, exp / K_t^I, th$
P3-Mitchell e Collins [40]	Cheia	11305,29202	35274,54426	0,320494347
P8-Hsu [27]	Cheia	10895,53976	14310,81283	0,761350169
P2-Mitchell e Collins [40]	Vazada	24048,72199	42893,93267	0,560655563
D1-Bernardo [10]	Vazada	152401,9392	253844,4765	0,600375243
D2-Bernardo [10]	Vazada	143059,6437	289282,9448	0,494531898
Média				0,547481444
Desvio padrão				0,160497616
Coeficiente de variação [%]				29,32

Pela análise da tabela 5, verificamos que a rigidez em Estado I obtida pelo método SMMT com componente de pré-esforço é sobrestimada. Os valores teóricos calculados são superiores aos valores obtidos experimentalmente. Com valores de média aproximada de 0,55, um desvio padrão de 0,16 e um coeficiente de variação de 29,3% conclui-se que o valor da rigidez teórica sobrestimada é comum em todas as vigas e que a rigidez experimental é aproximadamente metade da rigidez calculada pelo método SMMT teórico.

Pode-se observar ainda que as rotações existentes nesta fase são muito pequenas, razão pela qual os valores menos positivos associados às rotações, incluindo a rigidez, perdem importância.

6.3 - Fase de Pós-Fissuração (Estado II)

Para a análise desta fase de pós-fissuração, Bernardo e Lopes em 2008 [8] assumiram que a curva $T - \theta$ podia ser aproximada com uma recta, sendo que a sua inclinação era definida pela rigidez de fissuração em Estado Fissurado (GC^{II}) o que permitia o cálculo do valor da ordenada na origem (T_0) tendo por base uma recta de regressão linear. Através de uma regressão linear com os pontos que definem a curva $T - \theta$, é possível obter o valor de K_t^{II} que avalia a inclinação da curva $T - \theta$ no Estado II e o valor de T_0 que avalia a posição no gráfico da curva $T - \theta$ no Estado II.

6.3.1 - Análise e Comparação da Rigidez em Estado II

A análise e comparação entre os valores experimentais e os valores teóricos do SMMT com a componente de pré-esforço para as vigas de betão armado pré-esforçado longitudinal referentes à rigidez em Estado II (K_t^{II}), é feita através da tabela 6. As análises e comparações também são feitas com os resultados obtidos considerando a variável do método teórico γ_{21} nula.

Tabela 6 - Análise e comparação da rigidez no Estado II

		Modelo SMMT com a componente de pré-esforço					
		Rigidez em Estado II			Rigidez em Estado II com $\gamma_{21} = 0$		
Vigas	Secção	$K_T^{\text{II}, exp}$ (KN.m)	$K_T^{\text{II}, th}$ (KN.m)	$K_T^{\text{II}, exp} / K_T^{\text{II}, th}$	$K_T^{\text{II}, exp}$ (KN.m)	$K_T^{\text{II}, th}$ (KN.m)	$K_T^{\text{II}, exp} / K_T^{\text{II}, th}$
P3-Mitchell e Collins [40]	Cheia	451,21	465,01	0,970323219	451,21	870,9	0,518096222
P8-Hsu [27]	Cheia	756,99	1056,4	0,716575161	756,99	826,95	0,915399964
P2-Mitchell e Collins [40]	Vazada	1061,6	566,16	1,875088314	1061,6	566,16	1,875088314
D1-Bernardo [10]	Vazada	8112,6	8848,5	0,916833362	8112,6	7200,9	1,126609174
D2-Bernardo [10]	Vazada	9529,6	7023,1	1,356893679	9529,6	8934	1,066666667
		Média		1,167142747	Média		1,100372068
		Desvio padrão		0,458692764	Desvio padrão		0,493778681
		Coeficiente de variação [%]		39,30	Coeficiente de variação [%]		44,87

A análise da tabela 6 em relação a razão entre os valores experimentais e teóricos da rigidez em Estado II (K_t^{II}) apresenta uma média de valores de 1,16; um desvio de padrão de 0,46 e um coeficiente de variação de 39,3%. Perante estes valores observa-se que dois valores destacam-se em relação aos demais, o valor (1,87) da viga P2 [40] e o valor (0,71) da viga P8 [27], referentes à razão entre a rigidez experimental e a rigidez teórica. O valor da viga P2 [40] indica que o resultado da rigidez obtida pelo método teórico é muito inferior ao resultado experimental, quase metade da rigidez obtida experimentalmente. Por outro lado o resultado obtido para a viga P8 [27] pelo método teórico é cerca de 30% superior ao resultado obtido para a rigidez experimentalmente. Analisando o valor do coeficiente de variação e através das folhas de cálculo ao substituir o valor da razão para a viga P2 [40] por um (valor ideal) o valor do coeficiente de variação diminui quase para metade do valor obtido, concluindo que este valor deveria ser ignorado desta análise. Na segunda parte da tabela através da convergência dos pontos para a curva $T - \theta$ com a variável $\gamma_{21} = 0$ do método teórico SMMT, conclui-se que tal simplificação não tem impacto relevante nos resultados.

6.3.2 - Análise e Comparação da Ordenada na Origem T_0 em Estado II

A análise e comparação entre valores experimentais e valores teóricos do SMMT com a componente de pré-esforço para as vigas de betão armado pré-esforçado longitudinal referentes à ordenada na origem (T_0). As análises e comparações também são feitas com os resultados obtidos considerando a variável do método teórico γ_{21} nula.

Tabela 7 - Valores da ordenada na origem em Estado II

		Modelo SMMT com a componente de pré-esforço					
		Ordenada na origem em Estado II			Ordenada na origem em Estado II com $\gamma_{21} = 0$		
Vigas	Secção	$T_{0,exp}$ (KN.m)	$T_{0,th}$ (KN.m)	$T_{0,exp}/T_{0,th}$	$T_{0,exp}$ (KN.m)	$T_{0,th}$ (KN.m)	$T_{0,exp}/T_{0,th}$
P3-Mitchell e Collins [40]	Cheia	39,098	34,29	1,140215806	39,098	30,806	1,269168344
P8-Hsu [27]	Cheia	43,21	24,85	1,738832998	43,21	27,218	1,587552355
P2-Mitchell e Collins [40]	Vazada	54,13	34,88	1,551892202	54,13	34,88	1,551892202
D1-Bernardo [10]	Vazada	158,77	135,12	1,175029603	158,77	150,93	1,05194461
D2-Bernardo [10]	Vazada	166,04	150,83	1,100842008	166,04	134,69	1,232756701
		Média		1,341362523	Média		1,338662842
		Desvio padrão		0,286479617	Desvio padrão		0,226751896
		Coeficiente de Variação [%]		21,36	Coeficiente de variação [%]		16,94

A análise da tabela 7 em relação à razão entre os valores experimentais e os valores teóricos obtidos relativos à ordenada na origem (T_0) apresenta uma média de valores de 1,34; um desvio padrão de 0,28 e um coeficiente de variação de 21,4%. Através de uma análise geral observa-se que os valores teóricos para todas as vigas são inferiores aos valores experimentais. Dentro destes valores, o valor da viga P8 [27] é o que apresenta maior discrepância, já o valor teórico da viga D2 [10] apresenta maior proximidade do valor experimental para a ordenada na origem (T_0). Na segunda parte da tabela através da convergência dos pontos para a curva $T - \theta$ com a variável $\gamma_{21} = 0$ do método teórico SMMT, tal como aconteceu anteriormente para a rigidez em Estado II, também neste caso não é possível chegar a nenhuma conclusão com a oscilação incoerente dos valores da razão $T_{0,exp}/T_{0,th}$. A análise comparativa visual dos gráficos (secção 6.5) referentes às vigas em questão ajuda a perceber as conclusões obtidas.

6.4 - Fase de Rotura (Zona III)

6.4.1 - Análise e Comparação dos Momentos Torsores Máximos

A tabela 8 apresenta os valores obtidos para os momentos torsores máximos (T_n) e as respectivas rotações (θ_n), para as cinco vigas de betão armado pré-esforçado longitudinalmente, bem como a comparação entre os valores obtidos experimentalmente e os valores obtidos através do método teórico SMMT com a componente de pré-esforço. As análises e comparações também são feitas com os resultados obtidos considerando a variável do método teórico γ_{21} nula através da tabela 9.

Tabela 8 - Previsão da resistência à torção para as vigas de referência com pré-esforço (longitudinal)

Modelo SMMT com a componente de pré-esforço							
Momento Torsor Máximo e Rotação							
Vigas	Secção	$T_{n,exp}$ (KN.m)	$T_{n,th}$ (KN.m)	$T_{n,exp}/T_{n,th}$	$\theta_{n,exp}$ (rad)	$\theta_{n,th}$ (rad)	$\theta_{n,exp}/\theta_{n,th}$
D1 [10]	Vazada	396,04	455,455	0,869548034	0,030159	0,05283333	0,570832844
D2 [10]	Vazada	447,66	438,23	1,021518381	0,033597	0,05766667	0,582606903
P2 [40]	Vazada	87,143	69,781	1,248806982	0,04894	0,1016723	0,481350378
P3 [40]	Cheia	55,791	58,47	0,954181632	0,05473	0,0836963	0,653911822
P8 [27]	Cheia	61,806	56,292	1,097953528	0,032899	0,0580817	0,566426258
			Média	1,038401711		Média	0,571025641
			Desvio padrão	0,144660317		Desvio padrão	0,061374035
			Coeficiente de Variação [%]	13,93		Coeficiente de variação [%]	10,75

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

Através da análise dos valores representados na tabela 8, podemos analisar que relativamente ao momento torsor máximo das vigas, os valores obtidos são similares e não ocorre nenhuma dispersão acentuada entre os valores práticos e os valores experimentais com um valor de coeficiente de variação de 13,93%, um desvio padrão de 0,14 e uma média de valores aproximada de 1,04. O valor que apresenta maior divergência entre o valor prático e o valor teórico é o referente à viga P2 [40] com 1,2448 para a razão $T_{n,exp}/T_{n,th}$, a alteração deste valor para 1 na folha de cálculo mostra que o coeficiente de variação passa de imediato para 8%, o que pode dever-se a problemas na convergência do método já mencionados anteriormente.

Pode-se verificar também uma grande discrepância na ordem de grandeza dos valores para os momentos torsores experimentais e momentos teóricos máximos das vigas D1 [10] e D2 [10] em relação às restantes vigas, isto porque estas vigas são de betão de alta resistência.

Relativamente aos valores obtidos para as rotações dos momentos torsores máximos, podemos observar que a média obtida de valores é de 0,57 e com um coeficiente de variação de 10,75%. Podemos concluir que relativamente às rotações, de uma forma geral, os valores obtidos pelo método teórico para as vigas analisadas, são cerca de 40% superiores ao valores obtidos experimentalmente, com um coeficiente de variação a rondar os 10% temos a indicação de que este aspecto é comum em todas as vigas. A média de valores comum em todas as vigas ronda os 0,6; sendo o valor ideal 1.

Podemos observar estas conclusões através da análise comparativa visual dos gráficos (secção 6.5) referentes às vigas em questão.

Tabela 9 - Previsão da resistência à torção para as vigas de referência com pré-esforço (longitudinal) e ($\gamma_{21} = 0$)

Modelo SMMT com a componente de pré-esforço								
Momento Torsor Máximo e Rotação ($\gamma_{21} = 0$)								
Vigas	Secção	$T_{n,exp}$ (KN.m)	$T_{n,th}$ (KN.m)	$T_{n,exp}/T_{n,th}$	$\theta_{n,exp}$ (rad)	$\theta_{n,th}$ (rad)	$\theta_{n,exp}/\theta_{n,th}$	
D1 [10]	Vazada	396,04	472,845	0,837568336	0,030159	0,043666667	0,690664069	
D2 [10]	Vazada	447,66	458,675	0,975985175	0,033597	0,057666667	0,582606933	
P2 [40]	Vazada	87,143	69,781	1,248806982	0,04894	0,1016723	0,481350378	
P3 [40]	Cheia	55,791	61,431	0,908189676	0,05473	0,097027155	0,564068894	
P8 [27]	Cheia	61,806	59,861	1,03249194	0,032899	0,058081741	0,566425858	
			Média	1,000608422			Média	0,577023226
			Desvio padrão	0,156802967			Desvio padrão	0,074797781
			Coeficiente de variação [%]	15,67			Coeficiente de variação [%]	12,96

Através da análise da tabela 9, com a previsão da resistência à torção (momento torsor máximo de rotura) considerando a variável do método teórico γ_{21} nula, podemos concluir que não existe nenhuma alteração significativa nos resultados obtidos. Em comparação com os resultados obtidos para a tabela 8, o momento torsor máximo teórico aumenta ligeiramente para todas as vigas analisadas. Este aumento tem pouca influência nos resultados finais, contudo considera-se negativa a sua influência porque aumenta a diferença entre os valores experimentais e os valores teóricos obtidos. A mesma conclusão é obtida para as rotações correspondentes aos momentos torsores de rotura. Estas conclusões podem ser observadas através da análise comparativa visual dos gráficos (secção 6.5) referentes às vigas em questão.

6.4.2 - Análise e Comparação dos Momentos Torsores Máximos para as Vigas de Wafa et al 1995 [54]

A tabela 10 apresenta os valores obtidos para os momentos torsores máximos (T_n), para as doze vigas de betão armado pré-esforçado longitudinalmente, bem como a comparação entre os valores obtidos experimentalmente e os valores obtidos através do método teórico SMMT com a componente de pré-esforço.

Tabela 10 - Previsão da resistência à torção para as vigas de Wafa et al 1995 [54] de referência com pré-esforço (longitudinal)

Modelo SMMT com a componente de pré-esforço				
Momento Torsor Máximo				
Vigas Wafa [54]	Secção	$T_{n, exp}$ (KN.m)	$T_{n, th}$ (KN.m)	$T_{n, exp}/T_{n, th}$
H3AR	Cheia	33,5	35,37	0,947130336
H2A	Cheia	35,78	32,508	1,100652147
H1AR	Cheia	38,44	41,813	0,919331308
H3B	Cheia	26,43	23,287	1,134968008
H2B	Cheia	29,46	25,822	1,140887615
H1B	Cheia	31,33	26,975	1,161445783
M3A	Cheia	29,96	35,555	0,842638166
M2A	Cheia	31,94	38,477	0,830106297
M1A	Cheia	35,41	39,85	0,888582183
M3B	Cheia	24,52	22,625	1,083756906
M2B	Cheia	26,17	24,422	1,07157481
M1B	Cheia	28,94	26,35	1,09829222
Média				1,018280482
Desvio padrão				0,123359742
Coeficiente de variação [%]				12,11451505

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

A análise da tabela 10, de forma semelhante aos resultados obtidos anteriormente para as cinco vigas com pré-esforço longitudinal, mostra uma média de valores para a razão $T_{n,exp}/T_{n,th}$ de 1,2; um desvio padrão de 0,12 e um coeficiente de variação de 12,1%. Perante a análise destes valores conclui-se que a dispersão de valores não é muito acentuada para a razão $T_{n,exp}/T_{n,th}$. Pela quantidade de vigas analisadas (12 vigas) o coeficiente de variação superior a 10%, indica desvios relevantes entre a razão $T_{n,exp}/T_{n,th}$ obtida para as várias vigas, contudo ainda assim pode-se considerar os desvios aceitáveis. O valor da viga cuja a razão $T_{n,exp}/T_{n,th}$ é superior é para a viga H1B (1,16), já o oposto verifica-se para a viga M2A (0,83). Esta ordem de valores indica uma oscilação aproximada de 20% entre o valor ideal e o valor inferior ou superior. Não foram comparados outros parâmetros pelas dificuldades referidas anteriormente na bibliografia (secção 5.1).

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

6.5 - Curvas $T - \theta$

Apresentamos para as cinco vigas analisadas com os dados experimentais da literatura consultada, as respectivas curvas $T - \theta$ nomeadamente: para o modelo teórico SMMT com a componente de pré-esforço, o modelo teórico SMMT com a componente de pré-esforço e com a variável $\gamma_{21} = 0$, a curva experimental e a curva obtida pelo modelo teórico MTEAV-mod apresentada por Andrade [4].

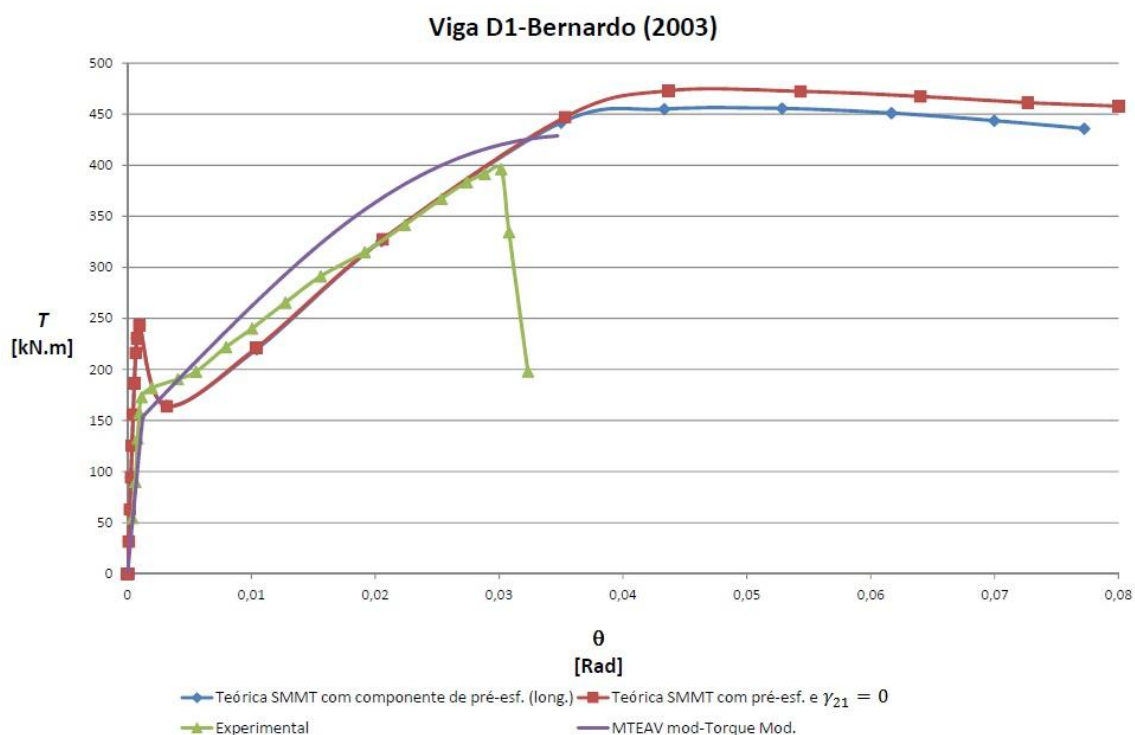


Figura 44 - Curvas $T - \theta$ para a viga D1 [10]

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

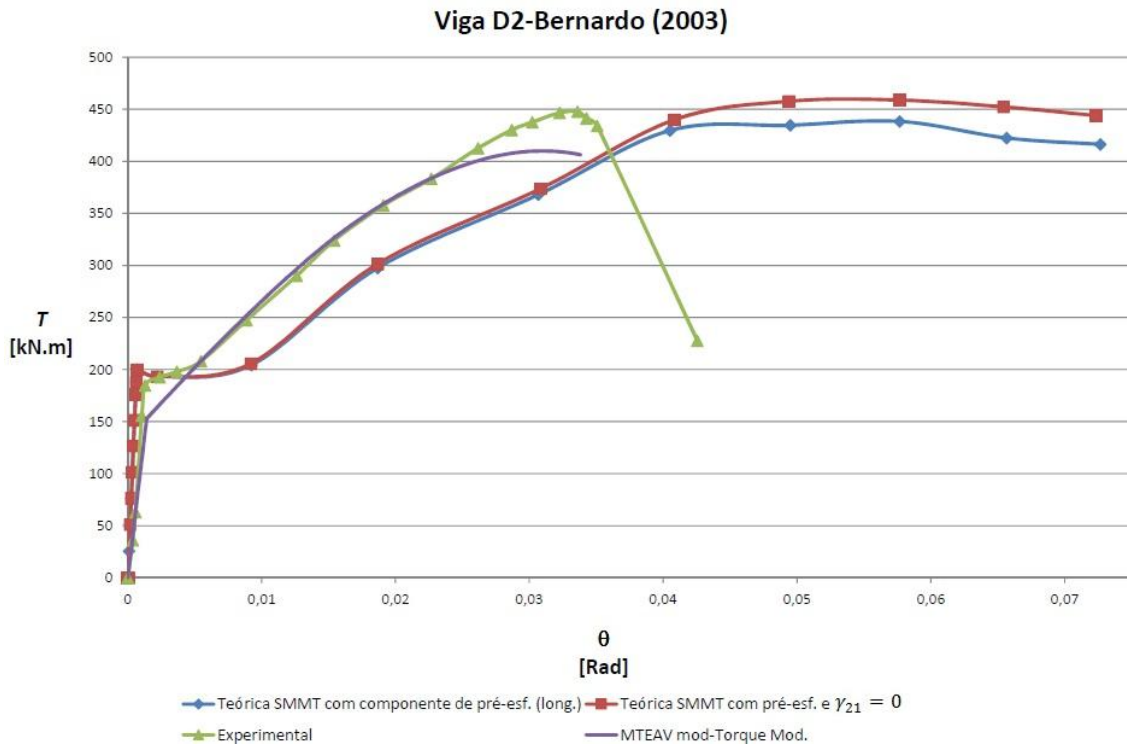


Figura 45 - Curvas $T - \theta$ para a viga D2 [10]

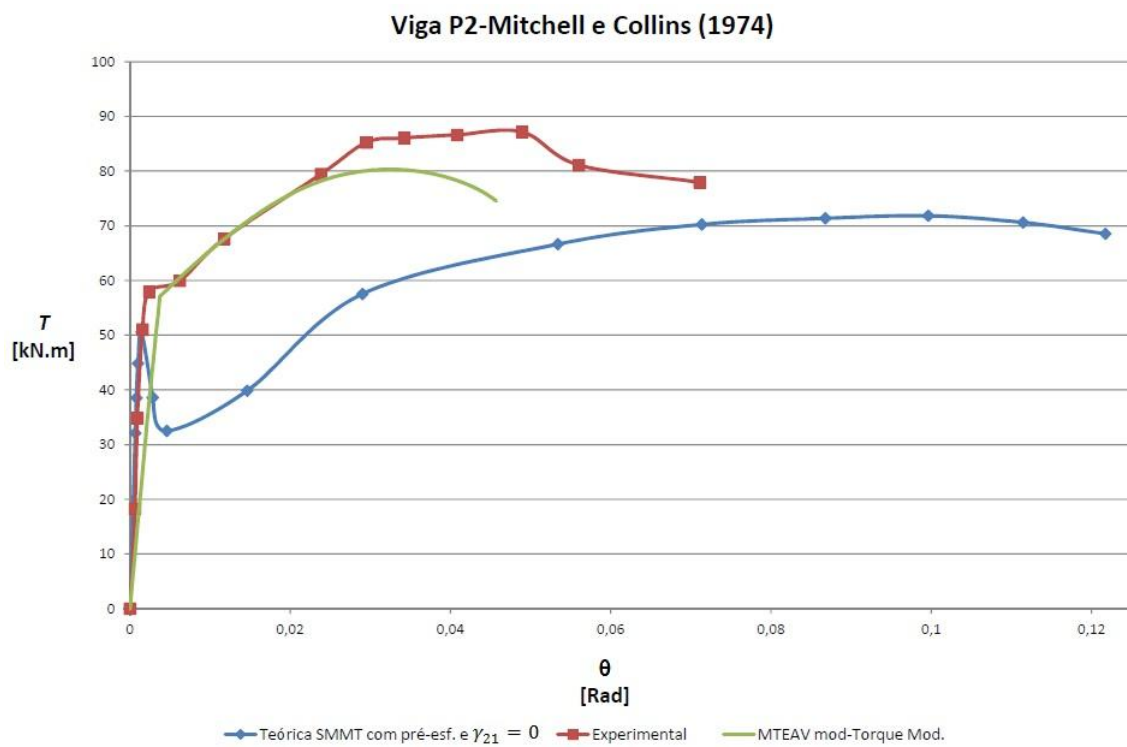


Figura 46 - Curvas $T - \theta$ para a viga P2 [40]

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

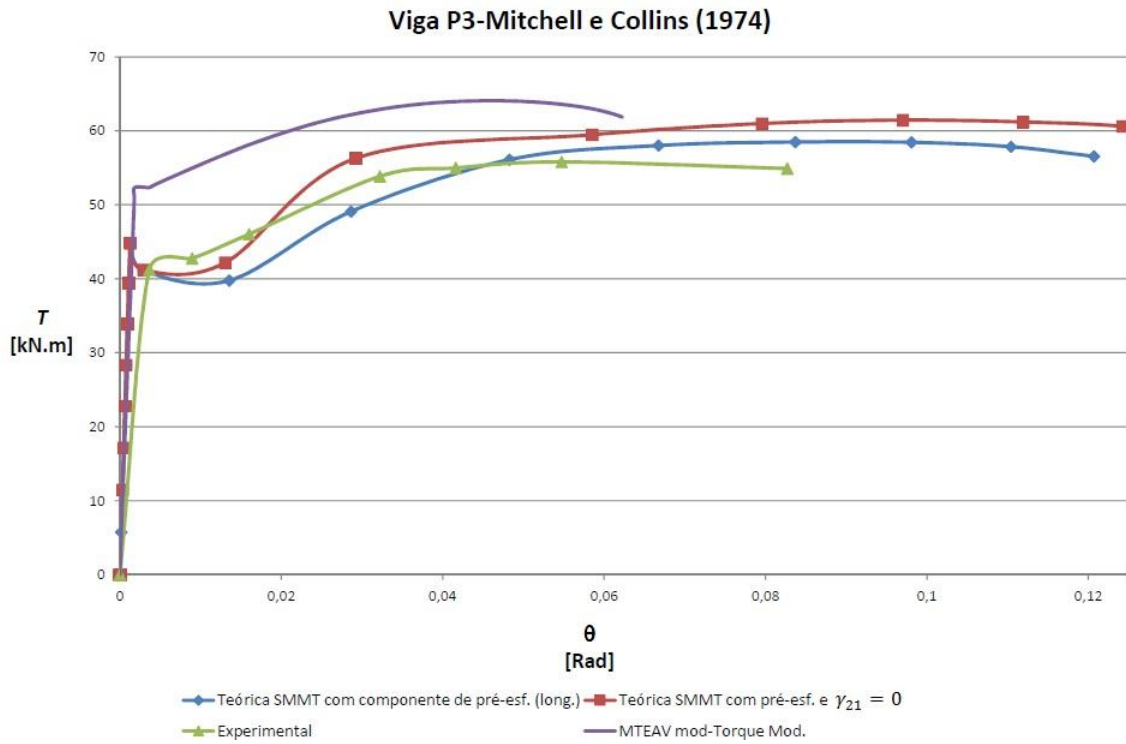


Figura 47 - Curvas $T - \theta$ para a viga P3 [40]

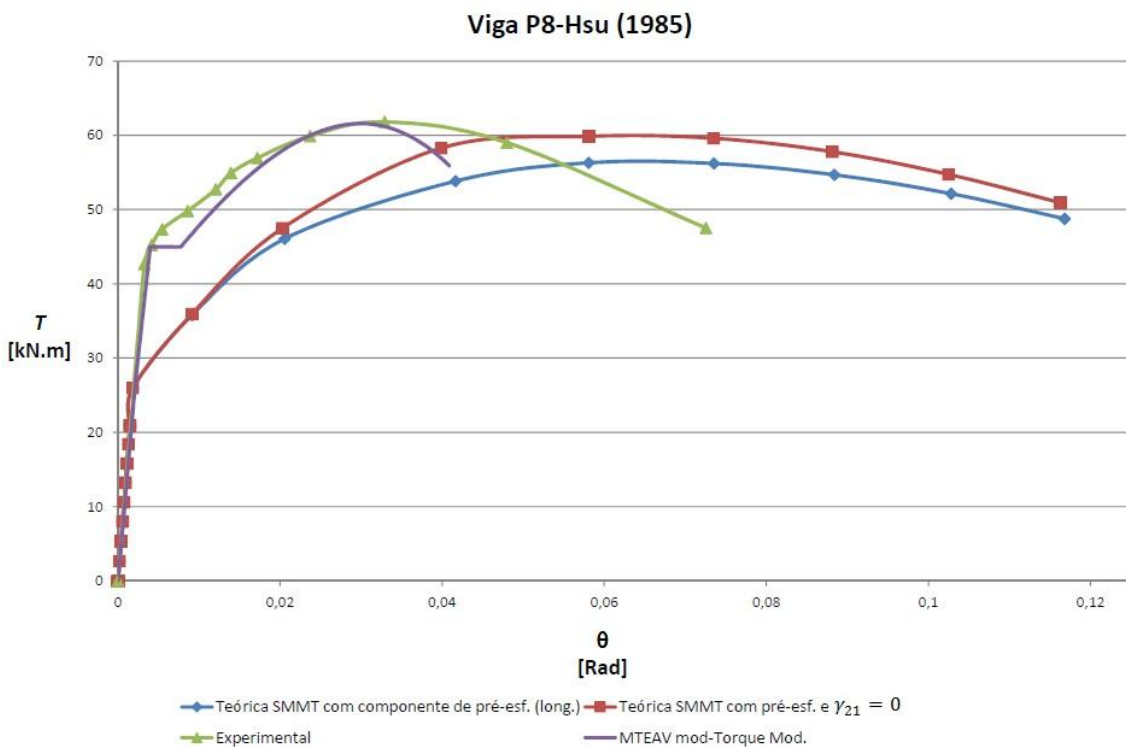


Figura 48 - Curvas $T - \theta$ para a viga P8 [27]

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

A análise visual comparativa das figuras 44-48 referentes às curvas $T - \theta$ para as vigas analisadas, de uma forma geral não permite estabelecer conclusões definitivas dado o número limitado de vigas analisadas e a dispersão dos resultados observados. No geral o método SMMT com componente de pré-esforço para vigas com pré-esforço longitudinal apresenta resultados muito idênticos aos resultados experimentais para a estimativa do momento torsor máximo. Em relação aos restantes parâmetros, existe uma grande divergência entre os valores experimentais e teóricos. Foram adicionadas curvas nos gráficos (fig. 44-48) para cada uma das cinco vigas pré-esforçadas, relativas aos resultados obtidos para um outro método teórico, o MTEAV mod (referido anteriormente secção 3.4). Podemos observar que o MTEAV mod apresenta resultados para os aspectos analisados mais coerentes e com maior proximidade dos resultados experimentais.

7 - Conclusões

Este trabalho teve por objectivo a apresentação, descrição e análise de um modelo teórico baseado no modelo membrana (SMMT) através do cálculo e traçado de uma curva $T - \theta$ para a caracterização do comportamento global de uma viga de betão armado com pré-esforço (longitudinal). O comportamento dos materiais foi tido em conta mediante a incorporação de várias leis constitutivas tensão (σ) - extensão (ε) adequadas. Para o betão à compressão foi introduzido um factor de redução ζ que representa a redução da tensão de compressão do betão (*softening effect*). Neste modelo é incorporado uma relação do betão à tracção que tem em conta o efeito do gradiente de extensão. Para incorporar este efeito os valores da tensão de rotura do betão à tracção (f_{cr}) e o módulo de elasticidade do betão (E_c) são multiplicados por um factor de 1,45.

Para a caracterização do comportamento global de uma viga com pré-esforço foi adicionado ao modelo SMMT a componente de pré-esforço. A lei constitutiva do aço da armadura de pré-esforço à tracção foi incorporada à metodologia do modelo, bem como a alteração das equações de equilíbrio e de compatibilidade com a incorporação da componente de pré-esforço. A componente do efeito das armaduras de pré-esforço foi também adicionada aos valores da tensão de rotura do betão à tracção (f_{cr}) para ter em conta a sua influência no momento torsor de fendilhação.

Após a análise de todos os resultados obtidos pela comparação entre os valores experimentais e teóricos torna-se difícil conseguir chegar a conclusões definitivas por diversas razões:

- Incompatibilidade de dados referentes à literatura consultada, como é o caso das vigas com pré-esforço longitudinal do Wafa et al (1995) [55], que utiliza rotações médias ao longo das vigas e não nas secções críticas, o que impossibilita a utilização das mesmas para a análise e comparação com os resultados do método SMMT para o comportamento global da viga;
- A quantidade de vigas de betão armado com pré-esforço longitudinal disponível na literatura e posteriormente utilizada na análise é muito reduzida;
- A implementação computacional deste método, onde a convergência de todos os pontos da curva $T - \theta$ que caracterizam o comportamento global de uma viga foi feita através de uma folha de cálculo para todas as vigas, é bastante difícil e morosa, o que não possibilitou tentativas de correcções ou aplicação de outras leis constitutivas;
- O modelo teórico SMMT tem por base o modelo teórico SMM cuja finalidade é a análise de painéis sujeitos ao corte, logo a metodologia e leis constituintes utilizadas são adaptadas para a análise de vigas à torção;
- O grau de dificuldade na análise deste modelo teórico e a complexidade inerente com a interdependência de três variáveis ($\varepsilon_2, \varepsilon_1, \gamma_{21}$).

Os resultados obtidos mostram que as modificações incorporadas no SMMT para ter em conta o pré-esforço longitudinal parecem válidas. No entanto, o trabalho deve continuar no sentido de calibrar este mesmo modelo tendo por mais um número maior de resultados experimentais.

7.1 - Recomendações para Trabalhos Futuros

- Tentar "corrigir" os resultados das vigas de referência consideradas "incompatíveis", através do cálculo da rotação na zona crítica a partir da rotação média das vigas, de forma a aumentar a lista de vigas de referência;
- Optimização ou correcção das leis constitutivas utilizadas pelo modelo teórico SMMT para obter melhores resultados;
- Implementação computacional do modelo teórico SMMT com a respectiva componente de pré-esforço, para melhorar e aumentar a possibilidade de alterações no aperfeiçoamento do modelo.

8 - Referências Bibliográficas

- 1) **ACI Committee 318**. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71). Detroit, MI : American Concrete Institute, 1971.
- 2) **ACI Committee 318**. Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05). Detroit, MI : American Concrete Institute, 2005.
- 3) **Andersen, P.** Experiments with Concrete in Torsion. Transactions, ASCE. 1935, Vols. 100, pp. 949-983.
- 4) **Andrade, J. M. A.** “Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção. Generalização da Analogia da Treliça Espacial cm Ângulo Variável”, PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, Universidade da Beira Interior, Covilhã. 2010
- 5) **Armstrong, S.** The Strength of Concrete Members in Combined Bending and Torsion. Proceedings of a Symposium of the Strength of Concrete Structures, Session B: Paper 2. Cement and Concrete Association, London, pp. 101-122, May 1956.
- 6) **Belarbi, A. and Hsu, T. C.** Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete. Structural Journal of American Concrete Institute, 91(4). 1994, pp. 465-474.
- 7) **Belarbi, A. and Hsu, T. C.** Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension Compression. Research Report UHCEE 91-2, Univ. of Houston, Houston, Texas. 1991. (citado em [24]).
- 8) **Bernardo, L. F. A. and Lopes, S. M. R.** Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams. Journal Materials and Structures, RILEM, Springer, Netherlands. 2008, Vols. 41, No. 6, pp. 1143-1167.
- 9) **Bernardo, L. F. A. and Lopes, S. M. R.** Plastic Analysis of HSC Beams In Flexure. Materials and Structures, RILEM, Springer, Netherlands. January, 2009, Vols. 42, No. 1, pp. 51-69.
- 10) **Bernardo, L. F. A.** Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência. PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra. 2003.
- 11) **Bredt, R.** "Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität". Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure,. 1896, Vols. 40, , No. 28, July 11, pp. 785-790; No. 29, July 18, pp. 813-817. (em Alemão, citado em [30]).
- 12) **Cauchy, A.** Sur les équations qui expérimentent les conditions d'équilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide. Exercices de mathématique. Paris, 1828. (citado em [30]).
- 13) **CEB.** Shear and Torsion. Bulletin d'Information N.º 126. Juin 1978.
- 14) **CEB.** Torsion. Bulletin d'Information N.º 71. Mars 1969.
- 15) **CEB-FIP.** Model Code for Concrete Structures. CEB-FIP International Recommendations. third edition, Paris, 1978.
- 16) **Collins, M. P. and Mitchell, D.** Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams. Journal of the Prestressed Concrete Institute, Proc. September- October 1980, Vols. 25, No. 5, pp. 32-100.
- 17) **Collins, M. P.** Torque-Twist Characteristics of Reinforced Concrete Beams. Inelasticity and Non-Linearity in Structural Concrete, Study No. 8, University of Waterloo Press. Waterloo, Ontario, Canada, 1973, pp. 211-232.
- 18) **Costa, R. J. T.** Placas de Betão Armado Submetidas a Estados Bidimensionais de Tensão. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra. 2005.

- 19) Cowan, H. J. and Armstrong, S. Experiments on the Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams and of Concrete-Encased Steel Joists in Combined Bending and Torsion. Magazine of Concrete Research. March 1955, Vols. 7, No. 19, pp. 3-20.
- 20) Cowan, H. J. Elastic Theory for Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams. Magazine of Concrete Research. July 1950, Vols. 2, No. 4, pp. 3-8.
- 21) Cowan, H. J. Strength of Reinforced Concrete Under the Action of Combined Stresses at the Representation of the Criterion of Failure by a Space Model. Nature (London). 1952, Vols. 169, 663 pp. (citado em [30]).
- 22) Cuereel, J. New Waterloo Bridge at London. International Association for Bridge and Structural Engineering, 3rd Congress. Liège, 1948, pp. 367-380. (citado em [5]).
- 23) Elfgrén, L. Reinforced Concrete Beams Loaded in Combined Torsion, Bending and Shear. Publication 71:3, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology. Goteborg, Sweden, 1972.
- 24) Hsu, T. T. C. and Jeng, C.-H. Softened Membrane Model for Torsion in Reinforced Concrete Members. Engineering Structures 31. 2009, pp.1944-1954
- 25) Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L. Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests. Journal of the American Concrete Institute, Proc. May-June 1985, Vols. 82, No. 3, pp. 290-303.
- 26) Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L. Softening of Concrete in Torsional Members - Design Recommendations. Journal of the American Concrete Institute, Proc. July-August 1985, Vols. 82, No. 4, pp. 443-452.
- 27) Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L. Softening of Concrete in Torsional Members - Prestressed Concrete. Journal of the American Concrete Institute, Proc. September-October 1985, Vols. 82, No. 5, pp. 603-615.
- 28) Hsu, T. T. C. and Zhu, R. R. H. Softened Membrane Model for Reinforced Concrete Elements in Shear. Structural Journal of American Concrete Institute, 99(4). 2002, pp. 460- 469.
- 29) Hsu, T. T. C. Post-Cracking Torsional Rigidity of Reinforced Concrete Sections. Journal of the American Concrete Institute, Proc. May 1973, Vols. 70, No. 5, pp. 352-360.
- 30) Hsu, T. T. C. Torsion of Reinforced Concrete. s.l. : Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
- 31) Hsu, T. T. C. Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members. Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute. Detroit, 1968, pp. 261-306.
- 32) Hsu, T. T. C. Torsion of Structural Concrete - Plain Concrete Rectangular Sections. Torsion of Structural Concrete, SP-18, American Concrete Institute. Detroit, 1968, pp. 203-238.
- 33) Hsu, T. T. C. Torsion of Structural Concrete - Uniformly Prestressed Rectangular Members Without Web Reinforcement. Journal of the Prestressed Concrete Institute. April 1968, Vols. 13, No. 2, pp. 34-44.
- 34) Hsu, T. T. C. Ultimate Torque of Reinforced Rectangular Beams. Journal of the Structural Division, ASCE. February 1968, Vols. 94, ST 2, pp. 485-510.
- 35) Humphreys, R. Torsional Properties of Prestressed Concrete. The Structural Engineer, London. June 1957, Vols. 35, No. 6, pp. 213-224.
- 36) INCM. Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado. Lisboa : Imprensa Nacional, Casa da Moeda, 1983.
- 37) Lampert, P. and Thurlimann, B. Torsionsversuche an Stahlbetonbalken (Torsion Tests of Reinforced Concrete Beams). Bericht, Nr. 6506-2, Institut fur Baustatik, ETH, Zurich. 1969. (em Alemão, citado em [13]).

- 38) Measor, E. O. and New, D. H. The Design and Construction of the Royal Festival Hall, South Bank. Journal of the Institution of Civil Engineers. May 1951, Vols. 36, No. 7, pp. 241-318.
- 39) Mitchell, D. and Collins, M. P. Diagonal Compression Field Theory - A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. August 1974, Vols. 71, No. 8, pp. 396-408.
- 40) Mitchell, D. and Collins, M. P. The Behavior of Structural Concrete Beams in Pure Torsion. Civil Engineering Publication No.74-06, Department of Civil Engineering, University of Toronto. March 1974. (citado em [44]).
- 41) Morsh, E. "Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie", 1st ed., Wayss and Freytag, A. G., Im selbstverlag der Firma, Neustadt a. d. Haardt, May 1902, 118 pp.; "Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung", 2nd ed. Verlag von Konrad Wittmer, Stuttgart, 1906, 252 pp.; 3rd ed. (traduzido para Inglês por E. P. Goodrich, McGraw-Hill Book Co., New York, 1909, 368 pp.). (citado em [30]).
- 42) NP EN 1992-1-1. Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de Betão - Part 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios. Março 2010.
- 43) Nylander, H. Vridning Vridningsinspanning vid Betongkonstruktioner (Torsion and Torsional Restraint of Concrete Structures). Statens Kommitté för Byggnadsforskning, Bulletin No. 3, Stockholm. 1945. (em Alemão, citado em [30]).
- 44) Rahal, K. N. and Collins, M. P. Simple Model for Predicting Torsional Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Sections. Journal of the American Concrete Institute, Proc. November-December 1996, Vols. 93, No. 6, pp. 658-666.
- 45) Rao, D. L. N. and Warwaruk, J. Prestressed Concrete I-Beams Subjected to Combined Loadings. Structural Engineering Report No. 46, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton. November 1973. (citado em [11]).
- 46) Rausch, E. Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung (Design of Reinforced Concrete in torsion). Ph.D. Thesis, Berlin. 1929. (em Alemão, citado em [30]).
- 47) Ritter, W. Die Bauweise Hennebique. Schweizerische Bauzeitung, Zurich. February 1899. (em Alemão, citado em [30]).
- 48) Roller, J. J. and Russel, H. G. Shear Strength of High Strength Concrete Beams with Web Reinforcement. Journal of the American Concrete Institute. March-April 1990, Vols. 87, No. 2, pp. 191-198.
- 49) Saint-Venant, B. de. Mémoire sur la torsion des prismes, (lu à l'Académie le 13 juin 1853). Mémoires des savants étrangers, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, de l'Institut Impérial de France et imprimé par son ordre. 1856, Vols. 14, imprimerie Impériale, Paris, pp. 233-560. (citado em [30]).
- 50) Standards Council of Canada. Design of Concrete Structure for Buildings. CAN3-A23.3-04, Canadian Standards Association, Rexdale, (Toronto), Canada. December 2004.
- 51) Vecchio, F. J. and Collins, M. P. Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear. IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced concrete, Delft, Final Report. 1981, pp. 211- 225.
- 52) Vecchio, F. J. and Collins, M. P. The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear. Journal of the American Concrete Institute. March-April 1986, Vols. 83, No. 2, pp. 219-231.
- 53) Vecchio, F. J. and Collins, M. P. The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Forces. Publication No. 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto. March 1982. (citado em [56]).
- 54) Wafa, F. F., et al. Prestressed High-Strength Concrete Beams under Torsion. Journal of the Structural Engineering, ASCE. September 1995, Vols. 121, No. 9, pp. 1280-1286.

Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-Esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT

- 55) **Wagner, H.** Ebene Blechwandträger mit Sehr Dünnem Stegblech (Flat Sheet Metal Girders with Very Thin Metal Web). Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Berlin. 1929, Vols. 20, No. 8 to 12. (em Alemão, citado em [30]).
- 56) **Zhang, L. X. and Hsu, T. C.** Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements. Journal of Structural Engineering, ASCE. January-February 1998, Vols. 124, No. 1, pp. 24-34.
- 57) **Zia, P. and D., McGee W.** Torsion Design of Prestressed Concrete. Journal of the Prestressed Concrete Institute. March-April 1974, Vols. 19, No. 2, pp. 46-65.

Anexos