



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Aplicações Harmónicas de Superfícies de Riemann sobre Espaços Simétricos

Nuno Miguel Ferreira Correia

Tese para obtenção do Grau de Doutor em
Matemática
(3º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco

Covilhã, Março de 2012

Dedicatória

À minha namorada Rita, por todos os momentos perdidos.

Aos meus pais, irmão, sobrinho e restante família, por todas as vezes em que lhes falhei.

Aos meus amigos, pelas vezes que não os acompanhei.

Agradecimentos

Quaisquer palavras seriam poucas para agradecer ao meu orientador Prof. Doutor Rui Pacheco toda a paciência e disponibilidade que teve para comigo, assim como por todas as vezes que conseguiu indicar o caminho certo; e também pelas outras em que não sendo o certo, não desistimos. Obrigado! Também por ter contribuído para o meu alargar de horizontes.

Obrigado à Universidade da Beira Interior (Faculdade de Ciências), por me disponibilizar todas as condições para realizar a minha tese de doutoramento, em particular, por aceitar o meu pedido de dispensa do serviço docente.

Obrigado a todos os meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior por acumularem trabalho docente, o que me permitiu redigir a tese.

Resumo

Descrevemos como a operação de somar um unitão surge através do método de Dorfmeister, Peddit e Wu (DPW) que permite obter aplicações harmónicas em espaços simétricos Riemannianos compactos a partir de certas 1-formas holomorfas. Exploramos este ponto de vista para investigar quais os unitões que preservam a propriedade do tipo finito das aplicações harmónicas. Em particular, provamos que o fibrado de Gauss de uma aplicação harmónica do tipo finito numa Grassmanniana também é do tipo finito.

Provamos que qualquer aplicação harmónica ϕ da esfera de dimensão 2 num grupo de Lie compacto semi-simples de matrizes pode ser reduzida a uma constante usando as *acções de revestimento singular*, isto é, as “*singular dressing actions*” introduzidas por Bergvelt e Guest. Encontramos também geradores para o grupo dos lacetes racionais das representações fundamentais de $\mathrm{Sp}(n)^{\mathbb{C}}$ e $\mathrm{SU}(n)^{\mathbb{C}}$: em ambos os casos a classe dos geradores é um pouco maior do que a classe de *factores simples* (lacetes racionais com um número mínimo de singularidades, cuja acção de revestimento pode ser calculada explicitamente).

Estabelecemos fórmulas explícitas para as factorizações canónicas de soluções estendidas que correspondem a aplicações harmónicas com número de unitão finito no grupo de Lie excepcional G_2 em termos do modelo Grassmanniano. É dada uma descrição dos geradores do referencial de Frenet para estas aplicações harmónicas. Em particular, mostramos que aplicações harmónicas da esfera de dimensão 2 em G_2 correspondem a soluções de certos sistemas algébricos de equações quadráticas e cúbicas.

Palavras-chave

Aplicações Harmónicas, Grupos de Lacetes, Unitão, Tipo Finito, Acções de Revestimento, Factores Simples, Modelo Grassmanniano

Abstract

We describe how the operation of adding a uniton arises via the Dorfmeister, Pedit and Wu (DPW) method of obtaining harmonic maps into compact Riemannian symmetric spaces out of certain holomorphic one forms. We exploit this point of view to investigate which unitons preserve finite type property of harmonic maps. In particular, we prove that the Gauss bundle of a harmonic map of finite type into a Grassmannian is also of finite type.

We prove that any harmonic map ϕ from a two-sphere into an arbitrary compact semisimple matrix Lie group may be reduced to a constant by using the *singular dressing actions* introduced by Bergvelt and Guest. We also prove generating theorems for the group of rational loops of the fundamental representations of $Sp(n)^{\mathbb{C}}$ and $SU(n)^{\mathbb{C}}$: in both cases the class of generators is slightly larger than the class of *simple factors* (rational loops having a minimum number of singularities, whose dressing action can be computed explicitly).

We establish explicit formulae for canonical factorizations of extended solutions corresponding to harmonic maps of finite uniton number into the exceptional Lie group G_2 in terms of the Grassmannian model. A description of the “Frenet frame data” for such harmonic maps is given. In particular, we show that harmonic maps from a two-sphere into G_2 correspond to solutions of certain algebraic systems of quadratic and cubic equations.

Keywords

Harmonic Maps, Loop Groups, Uniton, Finite Type, Dressing Actions, Simple Factors, Grassmannian Model

Índice

Introdução	1
1 Aplicações Harmónicas e Grupos de Lacetes	5
1.1 Grupo de Lacetes	5
1.1.1 Grupo de Lacetes Algébricos	5
1.2 Decomposições de Grupos de Lacetes	6
1.2.1 Grupos de Lacetes Torcidos	6
1.2.2 Grupos de Lacetes em \mathbb{C}	6
1.3 Aplicações Harmónicas num Grupo de Lie	7
1.3.1 Solução Estendida	8
1.3.2 Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito	9
1.4 Aplicações Harmónicas num Espaço G -Simétrico	9
1.4.1 Referencial Estendido	11
1.5 Soluções Estendidas e Referenciais Estendidos	11
1.6 O Modelo Grassmanniano	12
1.6.1 O Modelo Grassmanniano para $\Omega SO(n)$	12
1.6.2 A Grassmanniana Algébrica	13
1.6.3 Aplicações Harmónicas num Grupo de Lie via Modelo Grassmanniano	13
2 O Método de DPW na soma de Unitões	15
2.1 Potenciais Holomorfos e Referenciais Estendidos	15
2.2 Potenciais Holomorfos e Soluções Estendidas	16
2.3 Referenciais Estendidos e Soluções Estendidas	19
2.4 Acções de Revestimento e Transformações de Gauge	20
2.5 A Soma de Unitões e as Transformações de Gauge	21
2.6 Aplicações Harmónicas em Grassmannianas e Subfibrados	24
2.7 Unitões que preservam Aplicações Harmónicas do Tipo Finito	25
3 Acções de Revestimento Singular em Aplicações Harmónicas	29
3.1 Sistema de Raízes e Subálgebras Parabólicas	29
3.2 Potenciais Meromorfos e Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito	31
3.3 Geradores de Grupos de Lacetes Racionais Clássicos	32
3.3.1 Os casos $SO(n)$ e $Sp(n)$	33
3.3.2 O caso $SU(n)$	37
3.4 Acções de Revestimento em Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito	38
3.4.1 Acções de Revestimento Singular ou Processo de Completação Modificada	38
3.5 Factorizações de Aplicações Harmónicas por Acções de Revestimento Singular Simples	39
3.5.1 Factorizações de Aplicações Harmónicas em Espaços Simétricos	41
4 Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito em G_2	45
4.1 Decomposição de Bruhat de $Gr_{\text{alg}}(G)$	45
4.2 O Grupo G_2	46
4.2.1 O Modelo Grassmanniano para ΩG_2	49

4.3	Lacetes Algébricos em G_2	50
4.4	Factorizações de Lacetes Algébricos em G_2	52
4.4.1	O caso S^1 -invariante	52
4.4.2	O caso geral	53
4.5	Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito em G_2	58
4.5.1	Geradores do Referencial de Frenet para Aplicações Harmónicas em G_2	63
4.6	Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito em Espaços Simétricos de G_2	65
4.6.1	Factorização de Aplicações Harmónicas num Espaço Simétrico de G_2	67
Conclusões		69
Bibliografia		70
Índice Remissivo		75

Lista de Figuras

4.1 Diagrama de Pesos em G_2	48
--	----

Lista de Tabelas

4.1	Multiplicação Octoniónica	47
4.2	Multiplicação em \mathbb{C}^7	48

Introdução

Dadas (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas e $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação suave, o *funcional energia* é dado por

$$E(\phi, D) = \frac{1}{2} \int_D \|d\phi\|^2 dv_g,$$

onde $D \subseteq M$ é compacto e dv_g é o elemento volume em M . Dizemos que ϕ é uma *aplicação harmónica* se for um ponto crítico do funcional energia, para todo o $D \subseteq M$ compacto; temos assim uma generalização natural do conceito de geodésica, pois quando M tem dimensão 1 as aplicações harmónicas são as geodésicas de N . Para uma introdução e desenvolvimento de alguns resultados sobre aplicações harmónicas, acompanhados de exemplos, sugerimos os exaustivos trabalhos de Eells e Lemaire [16, 17].

Outra forma de, dada uma aplicação suave $\phi : M \rightarrow N$, decidir se ϕ é uma aplicação harmónica é verificar se ϕ satisfaz a equação de Euler-Lagrange associada $\tau_\phi = \text{tr} \nabla d\phi = 0$, onde ∇ é a conexão em $T^*M \otimes \phi^{-1}TN$ induzida pelas conexões de Levi-Civita de M e N . Por exemplo, uma aplicação suave $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é harmónica se $\Delta\phi = 0$. Quando M é uma superfície de Riemann podemos tomar (U, z) um sistema complexo de coordenadas locais e a equação de Euler-Lagrange escreve-se

$$\tau_\phi = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}^{\phi^{-1}TN} \right) d\phi \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0. \quad (1)$$

Em geometria diferencial, diferentes classes de superfícies podem ser caracterizadas pela harmonicidade de alguma aplicação conveniente. Por exemplo, uma superfície $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície de curvatura média constante se, e só se, a sua aplicação de Gauss $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ é harmónica.

O objecto de estudo no nosso trabalho são as aplicações harmónicas $\phi : M \rightarrow G$, em que M é uma superfície de Riemann e G um grupo de Lie compacto. A teoria moderna destas aplicações harmónicas baseia-se numa observação fundamental de Uhlenbeck, em [35]: uma aplicação harmónica ϕ de \mathbb{C} para um espaço simétrico Riemanniano compacto G/K corresponde a uma família de conexões no fibrado trivial $\underline{g} = M \times \mathfrak{g}$ de curvatura nula

$$d + \alpha_\lambda \quad \text{com} \quad \lambda \in S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\};$$

por integração directa desta família de conexões obtemos uma aplicação homolorfa

$$\Phi : M \rightarrow \Omega G = \{\gamma : S^1 \rightarrow G \mid \gamma \text{ é suave e } \gamma(1) = e\}$$

designada por *solução estendida* associada a ϕ ; a aplicação ϕ dada por $\phi(z) = \Phi(z)(-1)$, para todo o $z \in M$, é harmónica. Esta situação é apresentada, com alguns detalhes, no Capítulo 1. A formulação de curvatura nula leva a uma acção $\#$ de certos grupos de lacetes no espaço das aplicações harmónicas, que designamos por *acção de revestimento*. Por detrás desta acção está a existência de decomposições do tipo Iwasawa de grupos de lacetes e álgebras de lacetes [2, 7, 15, 22, 35]. Num caso limite temos uma acção de revestimento de \mathcal{G}_0 , o grupo dos germes em zero das aplicações holomorfas $\mathbb{C} \rightarrow G^{\mathbb{C}}$.

Assim, muitos resultados da teoria geral sobre grupos de lacetes [30] vão ter implicações

directas no estudo das aplicações harmónicas de M em G .

Por outro lado, Uhlenbeck também introduziu em [35] o conhecido processo de *somar uniões*, que é outra forma de obter novas aplicações harmónicas a partir de uma aplicação harmónica dada, e provou que todas as aplicações harmónicas de S^2 para o grupo unitário $U(n)$ podem ser factorizadas num produto finito de *factores bandeira* $S^2 \rightarrow U(n)$. Este processo foi posteriormente generalizado por Burstall e Guest [5] ao caso de um grupo de Lie G semi-simples compacto.

As soluções estendidas são também usadas para classificar as aplicações harmónicas de superfícies de Riemann em grupos de Lie e respectivos espaços simétricos. Quando a solução estendida pode ser obtida por integração de um certo par de campos vectoriais Hamiltonianos comutativos dizemos que a correspondente aplicação harmónica é do *tipo finito* [4, 6]. Quando a solução estendida associada a uma aplicação harmónica tem série de Fourier com um número finito de termos não nulos, dizemos que a aplicação harmónica correspondente tem *número de união finito*. Por exemplo, todas as aplicações de S^2 num grupo de Lie G compacto tem número de união finito [35].

No Capítulo 2 descrevemos como a operação de somar uniões é obtida através de transformações de gauge nas 1-formas holomorfas μ , indicadas por Dorfmeister, Pedit e Wu [15], e usamos esta descrição para determinar quais os uniões que preservam o tipo finito. Em particular, provamos, de uma forma alternativa à apresentada por Pacheco na sua Tese de Doutoramento [28], que o fibrado de Gauss de uma aplicação harmónica do tipo finito numa Grassmanniana ainda é uma aplicação harmónica do tipo finito. Este trabalho foi realizado em conjunto com Pacheco e pode ser encontrado em [12].

Consideremos uma curva $\{\gamma_a\}$ em \mathcal{G}_0 , onde o germe γ_a admite um representante definido no disco $|\lambda| < a$, e Φ uma solução estendida. Se o limite de $\gamma_a \# \Phi$ quando a tende para 0 existe em toda a parte, então $\tilde{\Phi}(z) = \lim_{a \rightarrow 0} \gamma_a \# \Phi(z)$ define uma nova solução estendida. Dizemos neste caso que $\tilde{\Phi}$ é obtida por um *processo de completção*. Acontece que, em geral, $\lim_{a \rightarrow 0} \gamma_a \# \Phi$ pode não estar definido em toda a parte. No entanto, as respectivas singularidades podem eventualmente ser removíveis e, deste modo, obtemos ainda uma nova solução estendida - *processo de completção modificada*. Em [2] Bergvelt e Guest, inspirados por Uhlenbeck, provaram que qualquer aplicação harmónica de S^2 para o espaço projectivo complexo $\mathbb{C}P^n$ pode ser reduzido a uma constante aplicando duas vezes o processo de completção modificada. Mais tarde, Jiao [25] provou que qualquer aplicação harmónica ϕ de S^2 no grupo unitário $U(n)$ pode ser reduzida a uma constante aplicando n *acções de revestimento singular*, isto é, n vezes o processo de completção modificada. Estas n acções de revestimento singular são obtidas a partir de curvas $\{\gamma_a\}$ representadas por lacetes racionais da forma $\gamma_a(\lambda) = \pi_V^\perp + \zeta_a(\lambda)\pi_V$, onde

$$\zeta_a(\lambda) = \frac{\lambda - a \bar{a} - 1}{\bar{a}\lambda - 1 \overline{1 - a}}.$$

Estes lacetes racionais são os *factores simples* de Uhlenbeck e geram o grupo dos lacetes racionais no grupo de Lie de matrizes $Gl(n, \mathbb{C})$ que satisfazem a condição de realidade relativamente a $U(n)$: $\overline{\gamma(\lambda)} = \gamma(1/\bar{\lambda})$ [35] (a condição de realidade implica que $\gamma(\lambda) \in U(n)$ sempre que $\lambda \in S^1$). Em [14], os autores introduziram uma nova definição de factores simples, coerente com a anterior, para um qualquer grupo de Lie reductivo complexo e uma representação qualquer, e provaram que nos casos $SO(n)^\mathbb{C}$ e $G_2^\mathbb{C}$, com a representação fundamental, os factores simples geram o grupo de lacetes racionais que satisfazem a condição de realidade.

No Capítulo 3 generalizamos os resultados de Bergvelt e Guest [2] e Jiao [25]: provamos que qualquer aplicação harmónica ϕ com número de união finito num grupo de Lie G compacto

semi-simples de matrizes pode ser reduzida a uma constante aplicando um número finito de acções de revestimento singular; as acções de revestimento singular são obtidas a partir de curvas de factores simples em $G^{\mathbb{C}}$. Também apresentamos uma versão deste resultado para aplicações harmónicas de S^2 num espaço simétrico G/K interno. Determinamos também os geradores dos lacetes racionais, para a representação fundamental, de $\mathrm{Sp}(n)^{\mathbb{C}}$ e $\mathrm{SU}(n)^{\mathbb{C}}$: em ambos os casos a classe dos geradores é ligeiramente maior do que a classe dos factores simples. Estes resultados foram obtidos em conjunto com Pacheco em [13].

Uhlenbeck [35] observou que as soluções estendidas que correspondem a aplicações harmónicas com número de unitão finito no grupo unitário admitem factorizações em factores lineares. Mais tarde, Burstall e Guest [5] generalizaram esse resultado para outros grupos de Lie, descrevendo as aplicações harmónicas com número de unitão finito em termos de certas funções meromorfas em M . Para isso consideraram o funcional de energia $E : \Omega G \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $E(\gamma) = \int_{S^1} |\gamma'|^2$. Este define uma função de Morse-Bott na variedade de Kähler ΩG e as suas variedades críticas são precisamente as classes de conjugação dos homomorfismos $S^1 \rightarrow G$. Se Ω_ξ é uma tal classe e U_ξ é a variedade instável de Ω_ξ em relação ao fluxo do campo vectorial gradiente $-\nabla E$, então vamos ter a decomposição

$$\Omega_{\mathrm{alg}} G = \{ \gamma \in \Omega G : \gamma \text{ e } \gamma^{-1} \text{ têm série de Fourier finita} \} = \bigcup_{\xi} U_{\xi}.$$

Mais, dada uma aplicação harmónica $\phi : M \rightarrow G$ com número de unitão finito, os autores provaram que esta admite uma solução estendida $\Phi : M \setminus D' \rightarrow \Omega_{\mathrm{alg}} G$ que toma valores em algum U_ξ , onde $D' \subset M$ é um conjunto discreto. As variedades instáveis U_ξ admitem uma descrição em termos de grupos de lacetes adequada, a qual pode ser aplicada no estudo das aplicações harmónicas. Em particular, um lacete em U_ξ admite uma “factorização canónica” que induz, conseqüentemente, uma factorização canónica nas soluções estendidas. No Capítulo 4 descrevemos esta factorização em termos do *modelo Grassmanniano* para o caso de aplicações harmónicas em G_2 .

Em [32] Segal descreveu as equações de harmonicidade em termos do modelo Grassmanniano para os grupos de lacetes ΛG . Desde então, este modelo tem vindo a ser utilizado com sucesso na obtenção de fórmulas explícitas para a construção de aplicações harmónicas em grupos de Lie clássicos e nos seus espaços simétricos [29, 34]. Nesta formulação, como Guest observou em [21], os geradores holomorfos de aplicações harmónicas pode ser apresentado em termos de referenciais de Frenet. Damos uma descrição dos geradores de referenciais de Frenet para aplicações harmónicas com número de unitão finito em G_2 e no seu espaço simétrico $G_2/\mathrm{SO}(4)$, a Grassmanniana dos espaços de dimensão 3 associativos. Em particular, mostramos que as aplicações harmónicas de S^2 em G_2 podem ser obtidas através da solução de um certo sistema algébrico de equações quadráticas e cúbicas. Parte dos resultados do Capítulo 4 são também apresentados em conjunto com Pacheco [11], embora no presente trabalho a nossa abordagem seja exclusivamente em termos do modelo Grassmanniano.

Capítulo 1

Aplicações Harmónicas e Grupos de Lacetes

Começamos por apresentar alguns grupos de lacetes e decomposições desses grupos. Mais pormenores podem ser encontrados em [30], ou na bibliografia indicada. Essas decomposições irão ser bastante importantes no estudo das aplicações harmónicas.

Recordamos o essencial da teoria das aplicações harmónicas num grupo de Lie G e seus espaços simétricos, em particular a sua formulação em termos de grupos de lacetes.

Na parte final introduzimos o modelo Grassmanniano de um grupo de lacetes. O livro de Pressley e Segal [30] é referência fundamental para este assunto, e Segal [32] estabelece as condições de harmonicidade no quadro do modelo Grassmanniano.

Ao longo do presente capítulo, G representa um grupo de Lie compacto conexo semi-simples de matrizes, com identidade e , e \mathfrak{g} representa a sua álgebra de Lie; recorde-se que $G \subseteq U(n)$ para algum n .

1.1 Grupo de Lacetes

Equipemos G com uma métrica bi-invariante. Seja $G^{\mathbb{C}}$ o complexificado de G , com álgebra de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (assim $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$). Consideremos $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ como habitualmente.

Definimos o *grupo de lacetes*

$$\Lambda G = \{\gamma : S^1 \rightarrow G \mid \gamma \text{ é suave}\}$$

e o *grupo de lacetes com base e*

$$\Omega G = \{\gamma : S^1 \rightarrow G \mid \gamma \text{ é suave e } \gamma(1) = e\}.$$

É fácil ver que ΛG e ΩG são grupos e pode ser demonstrado que são grupos de Lie de dimensão infinita [30]. Definimos ainda as *álgebras de lacetes*

$$\Lambda \mathfrak{g} = \{\xi : S^1 \rightarrow \mathfrak{g} \mid \xi \text{ é suave}\}$$

e

$$\Omega \mathfrak{g} = \{\xi : S^1 \rightarrow \mathfrak{g} \mid \xi \text{ é suave e } \xi(1) = 0\},$$

as correspondentes álgebras de Lie (de dimensão infinita) de ΛG e de ΩG , respectivamente.

1.1.1 Grupo de Lacetes Algébricos

Dado um lacete $\gamma \in \Omega G$, dizemos que γ é um *lacete algébrico* se γ e γ^{-1} tiverem série de Fourier finita, e denotamos por $\Omega_{\text{alg}} G$ o subgrupo de ΩG dos lacetes algébricos, isto é

$$\Omega_{\text{alg}} G = \left\{ \gamma \in \Omega G : \gamma(\lambda) = \sum_{i=-r}^r A_i \lambda^i, \gamma^{-1}(\lambda) = \sum_{i=-s}^s B_i \lambda^i \right\}.$$

1.2 Decomposições de Grupos de Lacetes

Nas próximas subsecções vamos ver algumas formas de decompor vários grupos de lacetes. Estas ferramentas desempenharão um papel fundamental nos próximos capítulos.

1.2.1 Grupos de Lacetes Torcidos

Sejam $\tau : G \rightarrow G$ um automorfismo de ordem k , isto é, $\tau^k = Id$; e $K \subset G$ o conjunto dos pontos fixos por τ . Denotamos por $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}}$ a k -ésima raiz da unidade. Definimos o grupo de Lie de dimensão infinita de *lacetes τ -torcidos*

$$\Lambda G_\tau = \{\gamma \in \Lambda G \mid \tau(\gamma(\lambda)) = \gamma(\omega\lambda) \text{ para todo } \lambda \in S^1\}.$$

Mais, fixamos uma decomposição de Iwasawa do grupo reductivo $K^\mathbb{C}$: $K^\mathbb{C} = KB$ e $K \cap B = \{e\}$, onde B é um subgrupo de Lie solúvel de $K^\mathbb{C}$. Assim, qualquer elemento $\hat{g} \in K^\mathbb{C}$ pode ser escrito de forma única $\hat{g} = gb$, onde $g \in K$ e $b \in B$.

Consideremos ainda os seguintes grupos de Lie de dimensão infinita de lacetes τ -torcidos

$$\begin{aligned} \Lambda G_\tau^\mathbb{C} &= \{\gamma : S^1 \rightarrow G^\mathbb{C} \mid \gamma \text{ é suave e } \tau(\gamma(\lambda)) = \gamma(\omega\lambda) \text{ para todo } \lambda \in S^1\} \\ \Lambda_B^+ G_\tau^\mathbb{C} &= \{\gamma \in \Lambda G_\tau^\mathbb{C} \mid \gamma \text{ estende-se holomorficamente a } |\lambda| < 1 \text{ e } \gamma(0) \in B\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Temos a seguinte decomposição:

Teorema 1.1. [15] *A multiplicação $\Lambda G_\tau \times \Lambda_B^+ G_\tau^\mathbb{C} \rightarrow \Lambda G_\tau^\mathbb{C}$ é um difeomorfismo sobrejectivo.*

1.2.2 Grupos de Lacetes em \mathbb{C}

Fixemos $0 < \varepsilon < 1$. Sejam C_ε e $C_{1/\varepsilon}$ as circunferências de raio ε e $1/\varepsilon$ com centro em $0 \in \mathbb{C}$, respectivamente. Definimos os seguintes subconjuntos abertos de $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \{\lambda \in \mathbb{P}^1 : |\lambda| < \varepsilon\} \quad , \quad I_{1/\varepsilon} = \{\lambda \in \mathbb{P}^1 : |\lambda| > 1/\varepsilon\} \\ \text{e } E^\varepsilon &= \{\lambda \in \mathbb{P}^1 : \varepsilon < |\lambda| < 1/\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Denotando $I^\varepsilon = I_\varepsilon \cup I_{1/\varepsilon}$ e $C^\varepsilon = C_\varepsilon \cup C_{1/\varepsilon}$ temos $\mathbb{P}^1 = I^\varepsilon \cup C^\varepsilon \cup E^\varepsilon$.

Consideremos, como em [7], os grupos de Lie de dimensão infinita

$$\begin{aligned} \Lambda^\varepsilon G &= \{\gamma : C^\varepsilon \rightarrow G^\mathbb{C} \mid \gamma \text{ é suave e } \overline{\gamma(\lambda)} = \gamma(1/\bar{\lambda}) \text{ para todo } \lambda \in C^\varepsilon\} \\ \Omega_E^\varepsilon G &= \{\gamma \in \Lambda^\varepsilon G \mid \gamma \text{ estende-se holomorficamente a } \gamma : E^\varepsilon \rightarrow G^\mathbb{C} \text{ e } \gamma(1) = e\} \\ \Lambda_I^\varepsilon G &= \{\gamma \in \Lambda^\varepsilon G \mid \gamma \text{ estende-se holomorficamente a } \gamma : I^\varepsilon \rightarrow G^\mathbb{C}\} \end{aligned}$$

e as correspondentes álgebras de Lie de dimensão infinita

$$\begin{aligned} \Lambda^\varepsilon \mathfrak{g} &= \{\xi : C^\varepsilon \rightarrow \mathfrak{g}^\mathbb{C} \mid \xi \text{ é suave e } \overline{\xi(\lambda)} = \xi(1/\bar{\lambda}) \text{ para todo } \lambda \in C^\varepsilon\} \\ \Omega_E^\varepsilon \mathfrak{g} &= \{\xi \in \Lambda^\varepsilon \mathfrak{g} \mid \xi \text{ estende-se holomorficamente a } \xi : E^\varepsilon \rightarrow \mathfrak{g}^\mathbb{C} \text{ e } \xi(1) = 0\} \\ \Lambda_I^\varepsilon \mathfrak{g} &= \{\xi \in \Lambda^\varepsilon \mathfrak{g} \mid \xi \text{ estende-se holomorficamente a } \xi : I^\varepsilon \rightarrow \mathfrak{g}^\mathbb{C}\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

A condição $\overline{\gamma(\lambda)} = \gamma(1/\bar{\lambda})$ garante que para determinar γ basta conhecer o lacete em C_ε ou em $C_{1/\varepsilon}$; ou seja, dado $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-) : C^\varepsilon \rightarrow G^\mathbb{C}$ em que $\gamma_+ : C_\varepsilon \rightarrow G^\mathbb{C}$ é suave, temos

$\gamma_- : C_{1/\varepsilon} \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ dado por $\gamma_-(1/\bar{\lambda}) = \overline{\gamma_+(\lambda)}$ para todo o $\lambda \in C_\varepsilon$. Esta condição é também conhecida como *condição de realidade*, porque quando $\lambda \in S^1$ implica que $\gamma(\lambda)$ toma valores em G ; por isso, indicamos apenas $\Lambda^\varepsilon G$, apesar dos lacetes tomarem valores em $G^{\mathbb{C}}$.

Temos a seguinte decomposição do tipo Iwasawa:

Teorema 1.2. [27] *A multiplicação $\Omega_E^\varepsilon G \times \Lambda_I^\varepsilon G \rightarrow \Lambda^\varepsilon G$ é um difeomorfismo. Em particular, cada $\gamma \in \Lambda^\varepsilon G$ pode ser escrito de forma única $\gamma = \gamma_E \gamma_I$, onde $\gamma_E \in \Omega_E^\varepsilon G$ e $\gamma_I \in \Lambda_I^\varepsilon G$.*

Observação 1.3. No caso limite $\varepsilon \rightarrow 1$, do teorema anterior obtemos a decomposição mais familiar $\Omega G \times \Lambda_+ G^{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}$ [30], onde

$$\begin{aligned}\Lambda G^{\mathbb{C}} &= \{\gamma : S^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}} \mid \gamma \text{ é suave}\} \\ \Lambda_+ G^{\mathbb{C}} &= \{\gamma \in \Lambda G^{\mathbb{C}} \mid \gamma \text{ estende-se holomorficamente a } |\lambda| < 1\}.\end{aligned}$$

1.3 Aplicações Harmônicas num Grupo de Lie

Sejam G um grupo de Lie compacto conexo de matrizes e \mathfrak{g} a sua álgebra de Lie, e equipemos G com uma métrica bi-invariante. Tomemos θ a *forma de Maurer-Cartan (à esquerda) de G* ; ou seja, temos $\theta_g(X) = g^{-1}X \in \mathfrak{g}$ para cada $X \in T_g G$ (θ é uma 1-forma com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g}). Usando a invariância à esquerda de θ , é fácil ver que θ satisfaz a *equação de Maurer-Cartan*

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0, \quad (1.3)$$

onde $[\sigma \wedge \nu](X, Y) = [\sigma(X), \nu(Y)] - [\sigma(Y), \nu(X)]$ para todo o $X, Y \in T_g G$.

Consideremos $\phi : M \rightarrow G$ uma aplicação suave e tomemos $\alpha = \phi^* \theta$, que é uma 1-forma em M com valores em \mathfrak{g} . Então, usando o *pull-back* por ϕ , α também satisfaz a equação de Maurer-Cartan (1.3), isto é,

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0. \quad (1.4)$$

Observação 1.4. Como trabalhamos com grupos de matrizes, iremos escrever $\phi^* \theta$ na sua forma mais habitual: $\alpha = \phi^{-1} d\phi$.

A equação de Maurer-Cartan torna-se importante porque nos fornece uma condição de integrabilidade, isto é, garante a existência de uma aplicação $\phi : M \rightarrow G$ tal que $\phi^{-1} d\phi = \alpha$; como vemos no seguinte teorema:

Teorema 1.5. [33] *Sejam M uma variedade simplesmente conexa e α uma 1-forma em M com valores em \mathfrak{g} . Então existe $\phi : M \rightarrow G$ uma aplicação suave tal que $\alpha = \phi^{-1} d\phi$ se e só se α satisfaz a equação de Maurer-Cartan (1.4). Neste caso, ϕ é única a menos de translação à esquerda por um elemento constante de G .*

Observação 1.6. Se a 1-forma α verificar a equação (1.4), então a conexão no fibrado G -principal trivial $M \times G \rightarrow M$ dada por $d_\alpha = d + \alpha$ é plana, ou seja, a sua curvatura é nula; e por isso, à equação (1.4) também chamamos *equação da curvatura-nula*.

Teorema 1.7. [36] *A aplicação suave $\phi : M \rightarrow G$ é harmônica se e só se $\alpha = \phi^{-1} d\phi$ é co-fechada, isto é,*

$$d^* \alpha = 0. \quad (1.5)$$

Assim, se $\phi : M \rightarrow G$ é harmônica, a 1-forma em M dada por $\alpha = \phi^{-1} d\phi$ satisfaz as equações (1.4) e (1.5). Inversamente, se M é simplesmente conexa, dada α uma 1-forma em M com

valores em \mathfrak{g} satisfazendo a equação (1.4), pelo Teorema 1.5 podemos encontrar $\phi : M \rightarrow G$ tal que $\phi^{-1}d\phi = \alpha$; então, se α satisfaz a equação (1.5), ϕ é harmónica [36]. Deste modo, temos que a equação (1) se pode escrever como as equações (1.4) e (1.5).

De agora em diante vamos considerar que M é uma superfície de Riemann. A 1-forma $\alpha = \phi^{-1}d\phi$ em M estende-se por linearização complexa a $TM^{\mathbb{C}} = TM^{(1,0)} \oplus TM^{(0,1)}$ e admite a decomposição

$$\alpha = \alpha' + \alpha''$$

relativamente à estrutura complexa de M , onde α' é uma $(1,0)$ -forma com valores em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e $\alpha'' = \overline{\alpha'}$ é uma $(0,1)$ -forma com valores em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, em que a conjugação em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ é relativa a \mathfrak{g} . Podemos ainda escrever a decomposição $d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$ induzida pela estrutura complexa de M ; como M tem dimensão real 2, temos ainda que $d\alpha = \bar{\partial}\alpha' + \partial\alpha''$.

Como M é uma superfície de Riemann, a equação (1.5) pode ser escrita na forma

$$\bar{\partial}\alpha' - \partial\alpha'' = 0. \quad (1.6)$$

Por cálculo directo, concluímos o seguinte:

Proposição 1.8. [35, 36] *As equações (1.4) e (1.6) são equivalentes ao sistema*

$$\begin{cases} \bar{\partial}\alpha' + \frac{1}{2}[\alpha' \wedge \alpha''] = 0 \\ \partial\alpha'' + \frac{1}{2}[\alpha' \wedge \alpha''] = 0 \end{cases}. \quad (1.7)$$

1.3.1 Solução Estendida

Seja $\phi : M \rightarrow G$ uma aplicação suave e $\alpha = \phi^{-1}d\phi$, com $\alpha = \alpha' + \alpha''$ como vimos antes. Para cada $\lambda \in S^1$ definimos

$$\alpha_\lambda = \frac{1}{2}A_\lambda \quad \text{com} \quad A_\lambda = (1 - \lambda^{-1})\alpha' + (1 - \lambda)\alpha'', \quad (1.8)$$

uma 1-forma em M com valores em $\Omega\mathfrak{g}$, uma vez que $\alpha_{-1} = 0$. Observemos ainda que $\alpha_{-1} = \alpha$.

Dada uma aplicação suave $\Phi : M \rightarrow \Omega G$, dizemos que Φ é uma *solução estendida* se $\Phi_\lambda^{-1}d\Phi_\lambda = \alpha_\lambda$ para todo o $\lambda \in S^1$, em que α_λ é da forma (1.8); usamos a notação $\Phi_\lambda(z) = \Phi(z)(\lambda)$. O conceito de solução estendida foi primeiramente introduzido por Uhlenbeck [35].

Repare-se que $d + \alpha_\lambda$ é uma conexão plana para todo o $\lambda \in S^1$ se e só se α satisfaz as equações (1.7).

Temos o seguinte resultado:

Teorema 1.9. [35] *Sejam M uma superfície de Riemann simplesmente conexa e α_λ como em (1.8) um lacete de 1-formas em M com valores em \mathfrak{g} . Temos que:*

1. *se $\Phi : M \rightarrow \Omega G$ é uma solução estendida, então a aplicação $\phi : M \rightarrow G$ definida por $\phi(z) = \Phi_{-1}(z)$, para todo o $z \in M$, é harmónica.*
2. *se $\phi : M \rightarrow G$ é uma aplicação harmónica, então existe uma solução estendida (associada a ϕ) $\Phi : M \rightarrow \Omega G$ tal que $\Phi_{-1}(z) = \phi(z)$, para todo o $z \in M$; a qual é única a menos de multiplicação à esquerda por um lacete $\gamma \in \Omega G$ tal que $\gamma(-1) = e$.*

Ou seja, numa superfície de Riemann simplesmente conexa M , dada uma aplicação harmónica $\phi : M \rightarrow G$ temos uma solução estendida $\Phi : M \rightarrow \Omega G$ tal que $\Phi_{-1} = \phi$; e, inversamente,

dada uma solução estendida $\Phi : M \rightarrow \Omega G$ obtemos uma aplicação harmónica $\phi = \Phi_{-1}$. Contudo, a menos que G seja abeliano, para qualquer $\alpha \in S^1 \setminus \{-1\}$ as aplicações $\Phi_\alpha : M \rightarrow G$ não são harmónicas, em geral [36].

1.3.2 Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito

Dada uma aplicação harmónica $\phi : M \rightarrow G$, dizemos que ϕ é uma *aplicação harmónica com número de unitão finito* se tem uma solução estendida $\Phi : M \rightarrow \Omega G$ cuja série de Fourier tem um número finito de termos, isto é,

$$\Phi_\lambda(z) = \sum_{i=r}^s \Phi_i(z)\lambda^i, \text{ com } r, s \in \mathbb{Z}$$

para todo o $z \in M$. Ao valor mínimo de $s - r$ chamamos *número de unitão* de ϕ , e indicamos por $r(\phi)$. No entanto, este número de unitão não coincide com o *número de unitão mínimo* de ϕ estimado por Burstall e Guest [5] para um grupo de Lie compacto semi-simples.

Uhlenbeck [35] provou que qualquer solução estendida definida numa superfície de Riemann compacta tem número de unitão finito. Em particular, como a esfera S^2 é simplesmente conexa, todas as aplicações harmónicas de S^2 em G são aplicações harmónicas com número de unitão finito.

1.4 Aplicações Harmónicas num Espaço G -Simétrico

Tomemos $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ uma involução, isto é, um automorfismo de ordem 2 ($\tau^2 = Id$); em que \mathfrak{k} é o subespaço fixo por τ . Sejam $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ os espaços próprios de τ associados aos valores próprios 1 e -1 , respectivamente. Temos a decomposição $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, onde $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ verificam

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k},$$

sendo assim uma decomposição simétrica.

Suponhamos que podemos exponenciar a involução τ para obter uma involução em G , ainda denotada por $\tau : G \rightarrow G$. Seja $K \subset G$ tal que $(G_\tau)_0 \subseteq K \subseteq G_\tau$, onde $(G_\tau)_0$ é a componente identidade de $G_\tau = \{g \in G : \tau(g) = g\}$. Assim, \mathfrak{k} é a álgebra de Lie de K e dizemos que o espaço homogéneo reductivo G/K é um *espaço G -simétrico*.

Quando a involução τ for interna, isto é, $\tau(h) = ghg^{-1}$ para algum $g \in G$, dizemos que G/K é um *espaço G -simétrico interno*. Além disso, estamos também interessados no caso em que G é um grupo de Lie compacto semi-simples. Neste caso, a forma de Killing de \mathfrak{g} , B , é definida negativa e então $-B$ fornece uma métrica G -invariante no espaço simétrico G/K . Assim, estamos perante um espaço G -simétrico Riemanniano compacto.

Seja N uma variedade na qual o grupo de Lie G actua transitivamente. Tomemos um ponto base $x_0 \in N$ com subgrupo de isotropia K ; então N é difeomorfo a G/K . Suponha-se que $N = G/K$ é reductivo. Temos então uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, onde \mathfrak{m} é Ad_K -invariante. Para cada $x \in N$ e $g \in G$ tais que $x = g \cdot x_0$, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow T_x N \\ \xi &\mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot x \end{aligned}$$

tem kernel $\text{Ad}_g\mathfrak{k}$ e logo, considerando a restrição da aplicação a $\text{Ad}_g\mathfrak{m}$, temos um isomorfismo $\text{Ad}_g\mathfrak{m} \rightarrow T_xN$. Definimos a aplicação inversa (também um isomorfismo) desta última

$$\beta_x : T_xN \rightarrow \text{Ad}_g\mathfrak{m}$$

e, denotando por $[\mathfrak{m}]$ o subfibrado do fibrado trivial $\underline{g} = N \times \mathfrak{g}$ definido por $[\mathfrak{m}]_{g \cdot x_0} = \text{Ad}_g(\mathfrak{m})$, temos $\beta : TN \rightarrow [\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ uma 1-forma com valores em \mathfrak{g} à qual chamamos *forma de Maurer-Cartan de N* , como Burstall e Rawnsley [8]. O uso do nome forma de Maurer-Cartan faz sentido, uma vez que se N coincidir com o grupo G que actua sobre si mesmo por translações à direita, a forma de Maurer-Cartan de N agora definida coincide com a forma de Maurer-Cartan de G .

Seja N um espaço G -simétrico com involução τ , e denotemos por ι o *mergulho de Cartan*, definido por

$$\begin{aligned} \iota : N &\rightarrow G \\ g \cdot x_0 &\mapsto \tau(g)g^{-1} \end{aligned}$$

Recordemos que o mergulho de Cartan $\iota : G/K \rightarrow G$ é sempre totalmente geodésico [10]. Assim, temos que $\psi : M \rightarrow N$ é harmónica se e só se $\iota \circ \psi : M \rightarrow G$ é harmónica. Por outro lado:

Lema 1.10. [8] *Sejam $\psi : M \rightarrow G/K$ uma aplicação suave e $\iota : G/K \rightarrow G$ o mergulho de Cartan, então $\phi^*\theta = -2\psi^*\beta$, onde $\phi = \iota \circ \psi$.*

Logo, ψ é harmónica se e só se

$$d^*\psi^*\beta = 0. \tag{1.9}$$

De agora em diante vamos considerar que M é uma superfície de Riemann e que $N = G/K$ é um espaço G -simétrico Riemanniano.

Seja $\psi : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e tomemos $\phi : M \rightarrow G$ um levantamento de ψ , isto é, $\psi = \pi \circ \phi$ onde $\pi : G \rightarrow N$ é a projecção natural. Relativamente à decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ podemos escrever $\alpha = \phi^{-1}d\phi$ na forma

$$\alpha = \alpha_{\mathfrak{k}} + \alpha_{\mathfrak{m}}.$$

Mais, temos ainda a decomposição $\alpha_{\mathfrak{m}} = \alpha'_{\mathfrak{m}} + \alpha''_{\mathfrak{m}}$, onde $\alpha'_{\mathfrak{m}}$ é uma $(1,0)$ -forma de M com valores em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ e $\alpha''_{\mathfrak{m}} = \overline{\alpha'_{\mathfrak{m}}}$. Assim, temos que

$$\alpha = \alpha'_{\mathfrak{m}} + \alpha_{\mathfrak{k}} + \alpha''_{\mathfrak{m}}.$$

Por cálculo directo, obtemos o seguinte resultado, análogo ao da Proposição 1.8.

Proposição 1.11. [15] *Seja $\psi : M \rightarrow G/K$ uma aplicação suave com levantamento $\phi : M \rightarrow G$ e a respectiva forma de Maurer-Cartan de G , $\alpha = \phi^{-1}d\phi = \alpha'_{\mathfrak{m}} + \alpha_{\mathfrak{k}} + \alpha''_{\mathfrak{m}}$. Então ψ é harmónica se e só se*

$$\begin{cases} d\alpha'_{\mathfrak{m}} + [\alpha_{\mathfrak{k}} \wedge \alpha'_{\mathfrak{m}}] = 0 \\ d\alpha_{\mathfrak{k}} + \frac{1}{2}[\alpha_{\mathfrak{k}} \wedge \alpha_{\mathfrak{k}}] + [\alpha'_{\mathfrak{m}} \wedge \alpha''_{\mathfrak{m}}] = 0 \\ d\alpha''_{\mathfrak{m}} + [\alpha_{\mathfrak{k}} \wedge \alpha''_{\mathfrak{m}}] = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Inversamente, se M for simplesmente conexa, dadas $\alpha_{\mathfrak{k}}$ e $\alpha_{\mathfrak{m}}$ 1-formas de M soluções de (1.10) com valores em \mathfrak{k} e \mathfrak{m} , respectivamente, existe uma aplicação harmónica $\psi = \pi \circ \phi : M \rightarrow G/K$,

onde $\phi : M \rightarrow G$ é tal que $\phi^{-1}d\phi = \alpha_{\mathfrak{g}} + \alpha_{\mathfrak{m}}$; esta aplicação é única a menos de multiplicação por um elemento de G .

1.4.1 Referencial Estendido

Similar às soluções estendidas introduzidas por Uhlenbeck em [35] para aplicações harmónicas em grupos de Lie, visto na Subsecção 1.3.1, vamos relembrar a construção de referenciais estendidos em [6, 15] para aplicações harmónicas num espaço simétrico. Para cada $\lambda \in S^1$, consideramos

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-1}\alpha'_m + \alpha_{\mathfrak{g}} + \lambda\alpha''_m, \quad (1.11)$$

que se trata de uma 1-forma de M com valores em $\Lambda_{\mathfrak{g}_\tau}$. Observemos ainda que $\alpha_1 = \alpha$.

Dada uma aplicação suave $F : M \rightarrow \Lambda_{G_\tau}$, dizemos que F é um *referencial estendido* se $F_\lambda^{-1}dF_\lambda = \alpha_\lambda$ para todo o $\lambda \in S^1$, em que α_λ é da forma (1.11); voltamos a usar a notação $F_\lambda(z) = F(z)(\lambda)$.

Observe-se que α_λ satisfaz a equação de Maurer-Cartan para todo o $\lambda \in S^1$ se e só se satisfaz as condições (1.10). Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 1.12. [6] *Seja M uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Então, a aplicação suave $\psi : M \rightarrow G/K$ é harmónica se e só se existe um referencial estendido $F : M \rightarrow \Lambda_{G_\tau}$ tal que $\pi \circ F_1 = \psi$.*

No teorema anterior dizemos que F é um *referencial estendido associado a ψ* . Uma vez que a 1-forma α_λ verifica as equações (1.10) para todo o $\lambda \in S^1$, a aplicação $\psi_\lambda = \pi \circ F_\lambda$ é harmónica para todo o $\lambda \in S^1$, ao contrário do que acontecia com as aplicações harmónicas num grupo de Lie. Assim, o referencial estendido F_λ fornece uma *família de aplicações harmónicas associadas a ψ* .

1.5 Soluções Estendidas e Referenciais Estendidos

Ao longo do presente trabalho iremos usar preferencialmente soluções estendidas em detrimento dos referenciais estendidos; no entanto, podemos relacionar facilmente as soluções estendidas com os referenciais estendidos, como iremos ver.

Sabemos que $\psi : M \rightarrow N$ é harmónica se e só se $\iota \circ \psi : M \rightarrow G$ é harmónica. Seja F um referencial estendido associado a ψ . Então prova-se facilmente que $\Phi = FF_1^{-1}$ é uma solução estendida associada a $\phi = \iota \circ \psi$, de facto:

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda^{-1}d\Phi_\lambda &= F_1F_\lambda^{-1}(dF_\lambda F_1^{-1} - F_\lambda F_1^{-1}dF_1 F_1^{-1}) \\ &= F_1(\lambda^{-1}\alpha'_m + \alpha_{\mathfrak{g}} + \lambda\alpha''_m)F_1^{-1} - F_1(\alpha'_m + \alpha_{\mathfrak{g}} + \alpha''_m)F_1^{-1} \\ &= \frac{1-\lambda^{-1}}{2}2\text{Ad}_{F_1}(-\alpha'_m) + \frac{1-\lambda}{2}2\text{Ad}_{F_1}(-\alpha''_m) = \alpha_\lambda \end{aligned}$$

em que α_λ é da forma (1.8), e $\Phi_{-1} = F_{-1}F_1^{-1} = \tau(F_1)F_1^{-1} = \iota \circ \pi \circ F_1 = \iota \circ \psi = \phi$.

Por outro lado, todo o grupo de Lie G pode ser visto como o espaço simétrico $(G \times G)/\Delta G$, onde $\Delta G = \{(g, g) : g \in G\}$, e então podemos aplicar todos os resultados vistos na Secção 1.4 a aplicações suaves $\phi : M \rightarrow G$.

1.6 O Modelo Grassmanniano

Fixemos em \mathbb{C}^n a métrica hermitiana habitual. Seja $\mathcal{H}^{(n)}$ o espaço de Hilbert $L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$, das funções de quadrado somável definidas em S^1 com valores em \mathbb{C}^n . Tomemos e_1, \dots, e_n a base canónica de \mathbb{C}^n , então as funções $\lambda \mapsto \lambda^i e_j$ com $i \in \mathbb{Z}$ e $j = 1, \dots, n$ formam uma base de $\mathcal{H}^{(n)}$, isto é,

$$\mathcal{H}^{(n)} = \text{Span} \{ \lambda^i e_j : i \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, n \}.$$

As funções com $i \geq 0$ geram um subespaço de $\mathcal{H}^{(n)}$ fechado, que indicamos por

$$\mathcal{H}_+^{(n)} = \text{Span} \{ \lambda^i e_j : i \geq 0, j = 1, \dots, n \}.$$

Denotemos por $\mathcal{H}_-^{(n)}$ o ortogonal de $\mathcal{H}_+^{(n)}$ em $\mathcal{H}^{(n)}$.

Seja $Grass(\mathcal{H}^{(n)})$ o espaço de todos os subespaços vectoriais $W \subseteq \mathcal{H}^{(n)}$ tais que:

1. W é fechado
2. a projecção $W \rightarrow \mathcal{H}_+^{(n)}$ é Fredholm e a projecção $W \rightarrow \mathcal{H}_-^{(n)}$ é Hilbert-Schmidt
3. as imagens das projecções $W^\perp \rightarrow \mathcal{H}_+^{(n)}$ e $W \rightarrow \mathcal{H}_-^{(n)}$ são funções suaves.

Não vamos usar explicitamente os conceitos de operador de Fredholm e de Hilbert-Schmidt, no entanto, mais detalhes podem ser encontrados no livro de Pressley e Segal [30].

Definimos ainda

$$Gr^{(n)} = \{ W \in Grass(\mathcal{H}^{(n)}) : \lambda W \subseteq W \}.$$

Pressley e Segal [30] mostraram que $\Lambda U(n)$ actua transitivamente em $Gr^{(n)}$, em que a acção é dada por $\gamma \cdot W = \{ \gamma f : f \in W \}$. Mais, o subgrupo de isotropia de $Gr^{(n)}$ em $\mathcal{H}_+^{(n)}$ é $U(n)$ e logo temos o seguinte teorema:

Teorema 1.13. [30] $Gr^{(n)} \cong \Lambda U(n)/U(n) \cong \Omega U(n)$.

Dizemos que $Gr^{(n)}$ é o *modelo Grassmanniano* para $\Omega U(n)$.

Observação 1.14. Dado $W \in Gr^{(n)}$, também temos que $\dim W \ominus \lambda W = n$, onde $W \ominus \lambda W$ representa o complemento ortogonal de λW em W . Assim, tomando w_1, \dots, w_n uma base ortonormal de $W \ominus \lambda W$, podemos colocar as funções vectoriais w_i lado a lado de modo a formar γ , uma matriz $n \times n$ de funções definidas em S^1 , isto é, $\gamma \in \Lambda U(n)$. É possível mostrar que $\gamma \cdot \mathcal{H}_+^{(n)} = W$, tal pode ser visto em [30].

Quando G é um subgrupo de $U(n)$, denotaremos o respectivo modelo Grassmanniano de ΩG por $Gr(G) \subset Gr^{(n)}$.

1.6.1 O Modelo Grassmanniano para $\Omega SO(n)$

Consideremos o grupo ortogonal especial $SO(n)$ como um subgrupo de $U(n)$. Para cada X em \mathbb{C}^n denotamos por \bar{X} o seu conjugado complexo. O modelo Grassmanniano para $\Omega SO(n)$ é dado pela proposição seguinte.

Proposição 1.15. [30] Dado um subespaço $W \in Gr^{(n)}$, W corresponde a um lacete $\gamma \in \Omega SO(n)$ se e só se W pertence a

$$Gr(SO(n)) = \{ W \in Gr^{(n)} : \bar{W}^\perp = \lambda W \}.$$

1.6.2 A Grassmanniana Algébrica

O grupo dos lacetes algébricos $\Omega_{\text{alg}}U(n)$ actua na Grassmanniana algébrica

$$Gr_{\text{alg}}^{(n)} = \left\{ W \in Gr^{(n)} : \lambda^k \mathcal{H}_+^{(n)} \subseteq W \subseteq \lambda^{-k} \mathcal{H}_+^{(n)} \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \right\}$$

mais, temos $Gr_{\text{alg}}^{(n)} \cong \Omega_{\text{alg}}U(n)$ como é descrito em [30]. Novamente, quando G é um subgrupo de $U(n)$ também temos $Gr_{\text{alg}}(G) \cong \Omega_{\text{alg}}G$.

Observação 1.16. Observemos que cada $W \in Gr_{\text{alg}}^{(n)}$ pode ser visto como um subespaço de

$$E^N = \lambda^{-N} \mathcal{H}_+^{(n)} / \lambda^{N+1} \mathcal{H}_+^{(n)} \cong \sum_{i=-N}^N \lambda^i \mathbb{C}^n,$$

para algum N . Como E^N tem dimensão finita temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} (A + B)^\perp &= A^\perp \cap B^\perp \quad \text{e} \quad (A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp \\ (A + B) \cap C &= A + (B \cap C) \quad \text{sempre que } A \subset C \end{aligned}$$

onde A , B e C são subespaços de E^N .

1.6.3 Aplicações Harmónicas num Grupo de Lie via Modelo Grassmanniano

Seja M uma superfície de Riemann. Segal [32] provou que as equações de harmonicidade de uma solução estendida $\Phi : M \rightarrow \Omega U(n)$ associada a uma aplicação harmónica $\phi : M \rightarrow U(n)$ podem ser reformuladas para o modelo Grassmanniano $Gr^{(n)}$ como vamos ver de seguida.

Temos o seguinte resultado:

Proposição 1.17. [32] Φ é uma solução estendida se e só se $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+^{(n)}$ satisfaz as seguintes condições

$$W_z \subseteq \lambda^{-1} W \tag{1.12}$$

$$W_{\bar{z}} \subseteq W. \tag{1.13}$$

A condição (1.12) significa que para toda a aplicação suave $s : M \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}$ tal que $s(z) \in W(z)$ temos $\frac{\partial s}{\partial \bar{z}}(z)$ contido no subespaço $\lambda^{-1}W(z)$ de $\mathcal{H}^{(n)}$. A condição (1.13) significa que W é um subfibrado holomorfo de $M \times \mathcal{H}^{(n)}$.

Assim, dada uma aplicação harmónica $\phi : M \rightarrow U(n)$ com solução estendida associada $\Phi : M \rightarrow \Omega U(n)$, podemos tomar $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+^{(n)}$ associado a ϕ com valores em $Gr^{(n)}$ que verifica (1.12) e (1.13). Mais geralmente, se $\phi : M \rightarrow G$ é uma aplicação harmónica com solução estendida associada $\Phi : M \rightarrow \Omega G$, temos $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+^{(n)}$ com valores em $Gr(G)$ e que verifica (1.12) e (1.13).

Terminamos esta secção mostrando que quando temos M uma superfície de Riemann compacta, basta considerar apenas a Grassmanniana algébrica, tendo em vista o estudo das aplicações harmónicas.

Teorema 1.18. [35] *Seja M uma superfície de Riemann compacta. Se $\Phi : M \rightarrow \Omega U(n)$ é uma solução estendida, então existe um lacete $\gamma \in \Omega U(n)$ tal que $\gamma\Phi$ é um lacete polinomial em λ e em λ^{-1} , ou seja, $\gamma\Phi : M \rightarrow \Omega_{\text{alg}}U(n)$.*

E, conseqüentemente, temos um resultado análogo para o modelo Grassmanniano.

Teorema 1.19. [32] *Seja M uma superfície de Riemann compacta. Se $W : M \rightarrow Gr^{(n)}$ verifica (1.12) e (1.13), então existe um lacete $\gamma \in \Lambda U(n)$ tal que $\gamma W : M \rightarrow Gr_{\text{alg}}^{(n)}$.*

No teorema anterior γW deve ser entendido da seguinte forma: como $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+^{(n)}$ com $\Phi : M \rightarrow \Omega U(n)$, temos $\gamma W = \gamma \Phi \cdot \mathcal{H}_+^{(n)}$.

Mas o Teorema 1.18 (e logo o Teorema 1.19) pode ser estendido a qualquer subgrupo G de $U(n)$, uma vez que:

Proposição 1.20. [28] *Se M é uma superfície de Riemann compacta e $\Phi : M \rightarrow \Omega G$ é uma solução estendida, então existe um lacete $\gamma \in \Omega G$ tal que $\gamma \Phi : M \rightarrow \Omega_{\text{alg}} G$.*

Demonstração: Supondo que $\Phi : M \rightarrow \Omega G \subset \Omega U(n)$ é uma solução estendida, pelo Teorema 1.18 podemos tomar $\hat{\gamma}$ de modo que $\hat{\gamma} \Phi$ seja algébrico. Fixemos $z_0 \in M$, logo $\hat{\gamma} \Phi(z_0)$ é também algébrico. Assim, tomando $\gamma = \Phi(z_0)^{-1}$, temos que

$$\gamma \Phi := \Phi(z_0)^{-1} \Phi = (\hat{\gamma} \Phi(z_0))^{-1} \hat{\gamma} \Phi$$

é um lacete em ΩG e algébrico.

□

Capítulo 2

O Método de DPW na soma de Unitões

Dorfmeister, Pedit e Wu [15] introduziram um método para obter aplicações harmónicas num espaço simétrico Riemanniano compacto G/K a partir de 1-formas holomorfas com valores no subespaço

$$\Lambda_{-1,\infty} = \{ \xi \in \Lambda \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \lambda \xi \text{ se estende holomorficamente a } |\lambda| < 1 \}, \quad (2.1)$$

designadas por *potenciais holomorfos*. Provaram ainda que a correspondência entre essas 1-formas e as aplicações harmónicas é equivariante relativamente à acção de revestimento de $\Lambda_+ G$ e certas transformações de gauge naturais no espaço dos potenciais holomorfos.

Outra forma de obter aplicações harmónicas a partir de uma dada aplicação harmónica é a soma de unitões introduzida por Uhlenbek [35]. Neste capítulo vamos estudar como a operação de somar um unitão é obtida através de transformações de gauge no espaço dos potenciais holomorfos. Usamos esta abordagem para determinar unitões que preservam as aplicações harmónicas do tipo finito. Em particular, tomamos uma aplicação harmónica do tipo finito numa Grassmanniana e provamos que a aplicação harmónica correspondente ao fibrado de Gauss ainda é uma aplicação harmónica do tipo finito.

Para obter estes resultados precisamos de alargar o espaço de potenciais holomorfos envolvido no método original de Dorfmeister, Pedit e Wu (DPW).

2.1 Potenciais Holomorfos e Referenciais Estendidos

Comecemos por recordar o método de DPW introduzido em [15], que foi estabelecido para uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Mas no nosso caso vamos mesmo considerar $M = \mathbb{C}$ de forma a simplificar a escrita.

Consideremos o subespaço dos lacetes de $\Lambda \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ que se estendem holomorficamente ao interior do disco $|\lambda| < 1$, com um polo simples na origem, $\Lambda_{-1,\infty}$, definido em (2.1). Se μ é uma 1-forma holomorfa de \mathbb{C} com valores em $\Lambda_{-1,\infty}$, dizemos que μ é um *potencial holomorfo*; e denotamos o espaço de todos os potenciais holomorfos por \mathcal{P} .

Recordemos o grupo de lacetes $\Lambda G_{\tau}^{\mathbb{C}}$ definido em (1.1). Como agora estamos perante espaços simétricos ($k = 2$), a sua correspondente álgebra de Lie de dimensão infinita vem dada por

$$\Lambda \mathfrak{g}_{\tau}^{\mathbb{C}} = \{ \xi : S^1 \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \xi \text{ é suave e } \tau(\xi(\lambda)) = \xi(-\lambda) \text{ para todo o } \lambda \in S^1 \}.$$

Dado $\xi \in \Lambda \mathfrak{g}_{\tau}^{\mathbb{C}}$, a sua série de Fourier é escrita na forma

$$\xi(\lambda) = \sum \xi_i \lambda^i \quad \text{onde} \quad \xi_i \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}},$$

e $\tau(\xi_i) = (-1)^i \xi_i$ para todo o i , ou seja, temos de ter $\xi_{\text{par}} \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ e $\xi_{\text{impar}} \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$.

Se $\mu \in \mathcal{P}$ for um potencial holomorfo com valores em $\Lambda_{-1,\infty}^{\tau} = \Lambda \mathfrak{g}_{\tau}^{\mathbb{C}} \cap \Lambda_{-1,\infty}$, dizemos que μ é um *potencial holomorfo τ -torcido*; e denotamos o espaço de todos os potenciais holomorfos τ -torcidos por \mathcal{P}_{τ} .

Assim, $\mu \in \mathcal{P}_\tau$ se e só se

$$\mu(\lambda) = \sum_{k \geq -1} \mu_k \lambda^k,$$

onde μ_{par} é uma 1-forma holomorfa de \mathbb{C} com valores em $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ e μ_{impar} é uma 1-forma holomorfa de \mathbb{C} com valores em $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$.

Se $\mu \in \mathcal{P}_\tau$, como μ é holomorfo a sua parte $(0, 1)$ é nula, então $\mu = \xi dz$ para alguma função holomorfa $\xi : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_{-1, \infty}^\tau$. Assim,

$$d\mu + \frac{1}{2} [\mu \wedge \mu] = \bar{\partial}\mu = 0,$$

ou seja, μ verifica a equação de Maurer-Cartan (1.4) e, portanto, podemos integrar (a conexão $d_\mu = d + \mu$ é plana) para obter uma aplicação única $\Upsilon_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}$ tal que $\Upsilon_\mu^{-1} d\Upsilon_\mu = \mu$ e $\Upsilon_\mu(0) = e$.

Usando a decomposição $\Lambda G_\tau \times \Lambda_B^+ G_\tau^{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}$ (ver Teorema 1.1), podemos factorizar Υ_μ e obtemos uma aplicação suave $F_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G_\tau$ tal que $\Upsilon_\mu = F_\mu b$, onde $b : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_B^+ G_\tau^{\mathbb{C}}$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. [15] *Dado $\mu \in \mathcal{P}_\tau$, então $F_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G_\tau$ é um referencial estendido.*

Teorema 2.2. [15] *Seja $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G/K$ uma aplicação harmónica. Então, existe $\mu \in \mathcal{P}_\tau$ tal que a aplicação harmónica associada ao referencial estendido F_μ é ψ .*

2.2 Potenciais Holomorfos e Soluções Estendidas

Agora, vamos alargar o espaço dos potenciais holomorfos de DPW. Além disso, vamos usar soluções estendidas em vez de referenciais estendidos.

Fixamos $0 < \varepsilon < 1$ e consideramos o subespaço de $\Lambda^\varepsilon \mathfrak{g}$ (ver (1.2)) definido por

$$\Lambda_{-1, \infty}^\varepsilon = \{\xi \in \Lambda^\varepsilon \mathfrak{g} \mid \lambda \xi \text{ estende-se holomorficamente a } I_\varepsilon\};$$

ou seja, os elementos de $\Lambda^\varepsilon \mathfrak{g}$ que se estendem meromorficamente a I^ε com no máximo pólos simples em 0 e em ∞ . Dado $\xi \in \Lambda_{-1, \infty}^\varepsilon$, podemos escrever $\xi = (\xi_+, \xi_-)$, onde $\xi_+ : C_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ estende-se meromorficamente a I_ε com no máximo um polo simples na origem e $\xi_- : C_{1/\varepsilon} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ que é determinado pela igualdade $\xi_-(\lambda) = \overline{\xi_+(1/\bar{\lambda})}$.

Seja $\mu = (\mu_+, \mu_-)$ uma 1-forma em \mathbb{C} com valores em $\Lambda_{-1, \infty}^\varepsilon$. Se μ_+ é holomorfa, dizemos que μ é um *potencial ε -holomorfo*; e denotamos o espaço dos potenciais ε -holomorfos por \mathcal{P}^ε .

Seja μ um potencial ε -holomorfo, então μ verifica a equação de Maurer-Cartan (1.4) e podemos integrar (a conexão $d_\mu = d + \mu$ é plana) para obter uma aplicação única $\Psi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda^\varepsilon G$, com $\Psi_\mu^{-1} d\Psi_\mu = \mu$ e $\Psi_\mu(0) = e$. Dizemos que Ψ_μ é uma *solução estendida complexa*.

Observação 2.3. O já conhecido espaço dos potenciais holomorfos \mathcal{P} pode ser visto como o caso limite do espaço dos potenciais ε -holomorfos \mathcal{P}^ε , em que $\varepsilon \rightarrow 1$. Assim, ainda no caso limite $\varepsilon \rightarrow 1$, se μ for um potencial holomorfo podemos obter uma aplicação única $\Psi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}$ (recordemos a Observação 1.3) tal que $\Psi_\mu^{-1} d\Psi_\mu = \mu$, à qual também chamamos solução estendida complexa.

Recordemos que dada uma aplicação harmónica, temos alguma liberdade na escolha de uma solução estendida complexa associada, de facto:

Proposição 2.4. [21] *Sejam $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}$ uma solução estendida complexa e $\Upsilon : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_+ G^{\mathbb{C}}$ uma aplicação holomorfa. Então, o produto $\Psi\Upsilon$ é uma solução estendida complexa associada à mesma aplicação harmónica.*

E assim, podemos sempre escolher Υ de uma forma conveniente.

Usando a decomposição $\Omega_E^\varepsilon G \times \Lambda_I^\varepsilon G \rightarrow \Lambda^\varepsilon G$ (ver Teorema 1.2), podemos factorizar a solução estendida complexa $\Psi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda^\varepsilon G$ e obtemos uma aplicação suave $\Phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Omega_E^\varepsilon G$ tal que $\Psi_\mu = \Phi_\mu b$, onde $b : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_I^\varepsilon G$. Observemos que, como $\Psi_\mu(0) = e$, devido à decomposição referida temos de ter $\Phi_\mu(0) = e$ e $b(0) = e$.

Teorema 2.5. *Dado $\mu \in \mathcal{P}^\varepsilon$, então $\Phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Omega_E^\varepsilon G \subset \Omega G$ é uma solução estendida.*

Demonstração: Tendo em conta a decomposição de Iwasawa referida no Teorema 1.2 para o grupo de Lie $\Lambda^\varepsilon G$, temos que a correspondente álgebra de Lie $\Lambda^\varepsilon \mathfrak{g}$ pode ser escrita como soma directa de álgebras de Lie

$$\Lambda^\varepsilon \mathfrak{g} = \Omega_E^\varepsilon \mathfrak{g} \oplus \Lambda_I^\varepsilon \mathfrak{g}. \quad (2.2)$$

Como $\Phi_\mu = \Psi_\mu b^{-1}$ e $\Psi_\mu^{-1} d\Psi_\mu = \mu$, temos

$$\Phi_\mu^{-1} d\Phi_\mu = b\Psi_\mu^{-1} (d\Psi_\mu b^{-1} - \Psi b^{-1} db b^{-1}) = \text{Ad}_b(\mu) - db b^{-1}. \quad (2.3)$$

Mas b toma valores em $\Lambda_I^\varepsilon G$, isto é

$$b(z) = b_0(z) + b_1(z)\lambda + b_2(z)\lambda^2 + \dots$$

para todo o $\lambda \in I_\varepsilon$, então $db b^{-1}$ toma valores em $\Lambda_I^\varepsilon \mathfrak{g}$, de (2.2) e (2.3) concluímos que

$$\Phi_\mu^{-1} d\Phi_\mu = (\text{Ad}_b(\mu))_{\Omega_E^\varepsilon \mathfrak{g}}.$$

Agora μ é uma 1-forma em \mathbb{C} com valores em $\Lambda_{-1,\infty}^\varepsilon$ e $\Lambda_I^\varepsilon G$ actua em $\Lambda_{-1,\infty}^\varepsilon$; em C_ε podemos escrever $\mu = \sum_{k \geq -1} \mu_k \lambda^k$; assim

$$(\text{Ad}_b(\mu))_{\Omega_E^\varepsilon \mathfrak{g}} = (\lambda^{-1} - 1) \text{Ad}_{b_0}(\mu_{-1}) + (\lambda - 1) \overline{\text{Ad}_{b_0}(\mu_{-1})}.$$

Como μ é holomorfo, μ_{-1} é uma 1-forma holomorfa com valores em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e logo podemos escrever $\mu_{-1} = \xi_{-1} dz$ para alguma função holomorfa $\xi_{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$; então

$$\Phi_\mu^{-1} d\Phi_\mu = \frac{1 - \lambda^{-1}}{2} \alpha' + \frac{1 - \lambda}{2} \alpha'', \quad (2.4)$$

onde

$$\alpha' = -2\text{Ad}_{b_0}(\mu_{-1}) = -2\text{Ad}_{b_0}(\xi_{-1}) dz \quad (2.5)$$

e $\alpha'' = \overline{\alpha'}$. Assim, Φ_μ é uma solução estendida.

□

Como consequência imediata do teorema anterior, temos que, dado um potencial ε -holomorfo μ e a correspondente solução estendida $\Phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$, a aplicação $\phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow G$ dada por $\phi_\mu(z) = \Phi_\mu(z)(-1)$ é harmónica e $\phi_\mu(0) = \Phi_\mu(0)(-1) = e$. Também dizemos que ϕ_μ é a aplicação harmónica associada à solução estendida complexa Ψ_μ .

Consideremos b_0 o termo independente de λ em b , como na demonstração do Teorema 2.5, e $\mu = (\mu_+, \mu_-)$ com $\mu_+ = \sum_{k \geq -1} \mu_k \lambda^k$. O coeficiente em λ^{-1} de $\Phi_\mu^{-1} d\Phi_\mu$ é dado por $b_0 \mu_{-1} b_0^{-1}$. Assim, se $\mu_{-1} = 0$, a aplicação harmónica ϕ_μ é constante.

Observação 2.6. Novamente, tomando o caso limite do Teorema 2.5, com $\varepsilon \rightarrow 1$, concluímos que dado um potencial holomorfo $\mu \in \mathcal{P}$, $\Phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ é uma solução estendida e obtemos uma aplicação harmónica $\phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow G$ dada por $\phi_\mu(z) = \Phi_\mu(z)(-1)$ para todo o $z \in \mathbb{C}$; facto também provado em [15].

Observação 2.7. Mais, ainda no caso limite $\varepsilon \rightarrow 1$, consideremos um potencial da forma $\mu = \lambda^{-1} \eta$, com η uma função meromorfa. Este potencial dá origem a uma aplicação harmónica ϕ_μ , a qual está bem definida excepto num conjunto discreto de pontos. Por vezes estas singularidades são removíveis e ϕ_μ pode ser estendido a todo o \mathbb{C} . Em [15], os autores mostraram que toda a aplicação harmónica de \mathbb{C} em G pode ser obtida, a menos de multiplicação à esquerda por uma constante, a partir de um potencial da forma $\mu = \lambda^{-1} \eta$, se η for uma função meromorfa.

Observação 2.8. Se tomarmos α_λ como foi definido em (1.8), no fibrado $\underline{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ podemos decompor a conexão trivial d e a conexão $d_{\alpha_\lambda} = d + \alpha_\lambda$ nas formas

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad \text{e} \quad d_{\alpha_\lambda} = \partial_{\alpha_\lambda} + \bar{\partial}_{\alpha_\lambda}.$$

Igualando as partes $(0,1)$ das equações (2.3) e (2.4) obtemos que $(1 - \lambda)\alpha'' = -2\bar{\partial}b b^{-1}$. Assim, $b : (\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial}) \rightarrow (\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial}_{\alpha_\lambda})$ é um isomorfismo holomorfo, visto que dada uma secção s holomorfa em $(\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial})$, isto é $\bar{\partial}s = 0$, temos $\bar{\partial}_{\alpha_\lambda}(bs) = \bar{\partial}(bs) + \frac{1-\lambda}{2}\alpha''(bs) = \bar{\partial}bs + b\bar{\partial}s - \bar{\partial}b b^{-1}bs = 0$.

Qualquer aplicação harmónica de \mathbb{C} em G é obtida, a menos de multiplicação à esquerda por uma constante, através de um potencial holomorfo $\mu \in \mathcal{P}$:

Teorema 2.9. *Seja $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$ uma aplicação harmónica tal que $\phi(0) = e$. Então existe um potencial holomorfo $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $\phi = \phi_\mu$.*

Demonstração: Tomemos $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ uma solução estendida associada à aplicação harmónica ϕ , isto é,

$$\Phi^{-1} d\Phi = \alpha_\lambda = \frac{1 - \lambda^{-1}}{2} \alpha' + \frac{1 - \lambda}{2} \alpha'', \quad \text{com} \quad \phi^{-1} d\phi = \alpha' + \alpha''.$$

Consideremos a $(0,1)$ -forma $\theta = -\frac{1-\lambda}{2}\alpha''$ que tem valores em $\Lambda_+ \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Tal como no Apêndice $\bar{\partial}$ -problem de [15], podemos determinar em \mathbb{C} a única solução de

$$\bar{\partial}b b^{-1} = \theta \quad , \quad b(0) = e;$$

seja $b : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_+ G^{\mathbb{C}}$ essa solução e tomamos $\Psi = \Phi b : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G^{\mathbb{C}}$. Então

$$\Psi^{-1} d\Psi = b^{-1} \Phi^{-1} (d\Phi b + \Phi db) = \text{Ad}_{b^{-1}}(\alpha_\lambda) + b^{-1} db.$$

Por construção, $\mu = \Psi^{-1} d\Psi$ é uma 1-forma com valores em $\Lambda_{-1, \infty}$. Mais, a parte $(0,1)$ de μ é

$$b^{-1} \frac{1-\lambda}{2} \alpha'' b + b^{-1} \bar{\partial}b = -b^{-1} \theta b + b^{-1} \theta b = 0,$$

pelo que μ é uma $(1,0)$ -forma, em particular, devido à equação de Maurer-Cartan temos

$$0 = d\mu + \frac{1}{2} [\mu \wedge \mu] = \bar{\partial}\mu,$$

ou seja, μ é holomorfa, e portanto $\mu \in \mathcal{P}$. Assim, tomando a aplicação harmónica associada a μ , ϕ_μ como na Observação 2.6, temos que $\phi_\mu = \phi$.

□

Interessa-nos ainda considerar a seguinte classe de potenciais. Denotemos por $\hat{\mathcal{P}}$ o espaço de todas as 1-formas μ em \mathbb{C} tais que

1. μ toma valores em $\Lambda_{-1,\infty}$
2. $d_\mu = d + \mu$ é uma conexão plana
3. a parte $(0,1)$ de μ toma valores em $\Lambda_+ \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$; a álgebra de Lie de $\Lambda_+ G^{\mathbb{C}}$.

Dado $\mu \in \hat{\mathcal{P}}$, apesar de μ não ser holomorfo, como d_μ é uma conexão plana, podemos integrar e obtemos $\Psi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}$ tal que $\Psi_\mu^{-1} d\Psi_\mu = \mu$. Aplicando a decomposição de Iwasawa referida na Observação 1.3, podemos escrever $\Psi_\mu = \Phi_\mu b$ em que $b : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_+ G^{\mathbb{C}}$, mas estamos particularmente interessados na aplicação suave $\Phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$, uma vez que:

Proposição 2.10. *Dado $\mu \in \hat{\mathcal{P}}$, $\Phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ é uma solução estendida.*

Demonstração: A prova deste resultado segue a demonstração do Teorema 2.5, com $\varepsilon \rightarrow 1$. A única diferença reside no facto de μ_{-1} não ser holomorfo, apesar disso, pelo facto da parte $(0,1)$ de μ tomar valores em $\Lambda_+ \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ podemos escrever $(\mu_{-1})_{\Omega \mathfrak{g}} = \xi_{-1} dz$ e logo

$$\Phi_\mu^{-1} d\Phi_\mu = \frac{1 - \lambda^{-1}}{2} \alpha' + \frac{1 - \lambda}{2} \alpha'' \quad \text{com} \quad \alpha' = -2 \text{Ad}_{b_0}(\xi_{-1}) dz,$$

ou seja, Φ_μ é uma solução estendida.

□

Consideremos um potencial holomorfo $\mu \in \mathcal{P}$ em que Φ_μ é a solução estendida associada referida na Observação 2.6; denotemos por S_μ o conjunto de todas as transformações de gauge $h : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}$ tais que $h \cdot \mu = \text{Ad}_h(\mu) - dh h^{-1}$ está em $\hat{\mathcal{P}}$. Pela Proposição 2.10 temos o seguinte resultado:

Corolário 2.11. *Dado $\mu \in \mathcal{P}$, para cada $h \in S_\mu$ temos $h \cdot \mu \in \hat{\mathcal{P}}$, e logo $\Phi_{h \cdot \mu} : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ é uma solução estendida.*

Os potenciais em $\hat{\mathcal{P}}$ e o conjunto S_μ terão um papel mais importante no final da Secção 2.4 e na Secção 2.5.

2.3 Referenciais Estendidos e Soluções Estendidas

Nas duas secções anteriores vimos os dois processos para obter aplicações hamónicas através de um potencial μ . Primeiro usando referenciais estendidos, em que se μ é um potencial holomorfo τ -torcido, obtemos uma aplicação harmónica $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G/K$; e depois usando soluções estendidas, com μ um potencial holomorfo, obtemos uma aplicação harmónica $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$.

Nesta secção mostramos que ϕ e ψ são essencialmente a mesma aplicação harmónica, isto quando μ é um potencial holomorfo τ -torcido.

Tomamos um potencial holomorfo τ -torcido $\mu \in \mathcal{P}_\tau$ e integrando obtemos uma solução estendida complexa $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G^\mathbb{C}$. Pela Observação 1.3 podemos factorizar Ψ de uma forma única $\Psi = \Phi b$, onde $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ é uma solução estendida e $b : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_+ G^\mathbb{C}$. A correspondente aplicação harmónica é dada por $\phi = \Phi_{-1} : \mathbb{C} \rightarrow G$.

Por outro lado, podemos ver Ψ como uma aplicação de \mathbb{C} em $\Lambda G_\tau^\mathbb{C}$ e usar o Teorema 1.1 para factorizar Ψ na forma $\Psi = F\tilde{b}$, onde $F : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G_\tau$ é um referencial estendido e $\tilde{b} : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_B^+ G_\tau^\mathbb{C}$. A correspondente aplicação harmónica é dada por $\psi = \pi \circ F_1 : \mathbb{C} \rightarrow G/K$.

Seja $\iota : G/K \rightarrow G$ o mergulho de Cartan. Acontece que ϕ toma valores em $\iota(G/K)$ e $\phi = \iota \circ \psi$. De facto, temos que $\iota \circ \psi = \iota \circ \pi \circ F_1 = \iota(F_1 \cdot x_0) = \tau(F_1) F_1^{-1} = F_{-1} F_1^{-1}$; além disso, pela unicidade da decomposição

$$\Psi = F\tilde{b} = FF_1^{-1} F_1 \tilde{b},$$

como $F_1 F_1^{-1} = e$ temos de ter $\Phi = FF_1^{-1}$ e $b = F_1 \tilde{b}$; e então $\iota \circ \psi = \Phi_{-1} = \phi$. Assim, Φ e F dão origem à mesma aplicação harmónica em G .

2.4 Acções de Revestimento e Transformações de Gauge

A decomposição de $\Lambda^\varepsilon G$ do tipo Iwasawa referida no Teorema 1.2 também nos permite definir uma acção natural $\#_\varepsilon$ de $\Lambda_I^\varepsilon G$ em $\Omega_E^\varepsilon G$ definida do seguinte modo: dados $h \in \Lambda_I^\varepsilon G$ e $g \in \Omega_E^\varepsilon G$, então $h\#_\varepsilon g = (hg)_{\Omega_E^\varepsilon G}$.

Aplicando esta acção pontualmente, da solução estendida $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ obtemos uma nova aplicação $h\#_\varepsilon \Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ definida por $(h\#_\varepsilon \Phi)(z) = h\#_\varepsilon \Phi(z)$, para todo o $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.12. [7, 15, 22] *Se Φ é uma solução estendida, então $h\#_\varepsilon \Phi$ é uma solução estendida.*

De [7] vamos recordar como estas acções variam com ε . Para $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$ temos as inclusões $\Lambda_I^{\varepsilon'} G \subset \Lambda_I^\varepsilon G$ e $\Omega_E^\varepsilon G \subset \Omega_E^{\varepsilon'} G$. Definimos o subespaço

$$\Omega_{\text{hol}} G = \bigcap_{0 < \varepsilon < 1} \Omega_E^\varepsilon G,$$

e é fácil ver que

$$\Omega_{\text{hol}} G = \left\{ \gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow G^\mathbb{C} \mid \gamma \text{ é holomorfo, } \overline{\gamma(\lambda)} = \gamma(1/\bar{\lambda}) \text{ e } \gamma(1) = e \right\}.$$

Assim, para $0 < \varepsilon < 1$, temos $\Omega_{\text{hol}} G \subset \Omega_E^\varepsilon G$ e o seguinte resultado:

Teorema 2.13. [7] *Para $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$, dados $\gamma \in \Lambda_I^{\varepsilon'} G \subset \Lambda_I^\varepsilon G$ e $g \in \Omega_E^\varepsilon G \subset \Omega_E^{\varepsilon'} G$, temos $\gamma\#_{\varepsilon'} g = \gamma\#_\varepsilon g \in \Omega_E^\varepsilon G$.*

Corolário 2.14. [7] *A acção de cada $\Lambda_I^{\varepsilon'} G$ preserva $\Omega_{\text{hol}} G$ e, para $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$, dados $\gamma \in \Lambda_I^{\varepsilon'} G \subset \Lambda_I^\varepsilon G$ e $g \in \Omega_{\text{hol}} G$, temos $\gamma\#_{\varepsilon'} g = \gamma\#_\varepsilon g$.*

Assim, podemos tomar o limite com $\varepsilon \rightarrow 0$ e obtemos uma acção de \mathcal{G}_0 , o grupo dos germes em zero das aplicações holomorfas $\mathbb{C} \rightarrow G^\mathbb{C}$, em $\Omega_{\text{hol}} G$; e vamos escrever apenas $\gamma\#g$ para esta acção, à qual chamamos *acção de revestimento*.

Por outro lado, o grupo de gauge ε -holomorfo

$$\mathcal{G}^\varepsilon = \{h = (h_+, h_-) : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_I^\varepsilon G \mid \bar{\partial} h_+ = 0\}$$

actua no espaço dos potenciais ε -holomorfos, \mathcal{P}^ε , por transformações de gauge da seguinte forma: dado $h \in \mathcal{G}^\varepsilon$ e $\mu \in \mathcal{P}^\varepsilon$, então $h \cdot \mu = \text{Ad}_h(\mu) - dh h^{-1} \in \mathcal{P}^\varepsilon$. Esta acção assume

importância porque a correspondência entre os potenciais ε -holomorfos e soluções estendidas $\mu \rightarrow \Phi_\mu$ é equivariante relativamente à acção:

Teorema 2.15. *Dados $h \in \mathcal{G}^\varepsilon$ e $\mu \in \mathcal{P}^\varepsilon$, então $\Phi_{h \cdot \mu} = h(0) \# \Phi_\mu$.*

A prova deste teorema é uma adaptação imediata da prova do Lema 4.4 em [15].

Observação 2.16. O caso limite do teorema anterior, quando $\varepsilon \rightarrow 1$ pode ser estabelecido da seguinte forma:

Tal como já vimos na Observação 1.3, quando $\varepsilon \rightarrow 1$, temos a decomposição do tipo Iwasawa: $\Omega G \times \Lambda_+ G^\mathbb{C} \rightarrow \Lambda G^\mathbb{C}$, relativamente à qual definimos a acção de revestimento de $\Lambda_+ G^\mathbb{C}$ em ΩG , que também indicaremos por $\#$; também já vimos na Observação 2.3 que o caso limite de \mathcal{P}^ε é precisamente \mathcal{P} (com $\varepsilon \rightarrow 1$). Assim, dados $\mu \in \mathcal{P}$ e \mathcal{G} o grupo de gauge holomorfo de todas as aplicações $h : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_+ G^\mathbb{C}$ tais que $\bar{\partial}h = 0$ (caso limite de \mathcal{G}^ε com $\varepsilon \rightarrow 1$), então $\Phi_{h \cdot \mu} = h(0) \# \Phi_\mu$.

Em particular, como $\mathcal{G} \subset S_\mu$, se $h \in \mathcal{G}$ então a solução estendida referida no Corolário 2.11 é dada por $\Phi_{h \cdot \mu} = h(0) \# \Phi_\mu$.

Observação 2.17. No caso em que M é uma superfície de Riemann compacta, $\phi : M \rightarrow G$ é uma aplicação harmónica com número de unitão finito se admitir uma solução estendida $\Phi : M \rightarrow \Omega G$ [35]. Neste caso, se γ é um germe em zero de uma aplicação holomorfa $M \rightarrow G^\mathbb{C}$, então $\gamma \# \Phi$ é uma nova solução estendida definida em M . Logo, a aplicação harmónica $\tilde{\phi} = (\gamma \# \Phi)_{-1} : M \rightarrow G$ também tem número de unitão finito.

2.5 A Soma de Unitões e as Transformações de Gauge

Outro processo para gerar novas soluções estendidas a partir de uma solução estendida foi introduzido por Uhlenbeck [35], a chamada *soma de unitões*. Nesta secção vamos descrever como podemos chegar a este processo através da acção de transformações de gauge nos potenciais holomorfos.

Recordemos o seguinte resultado de Uhlenbeck:

Teorema 2.18. [35] *Tomemos $\phi : \mathbb{C} \rightarrow U(n)$ uma aplicação harmónica e $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega U(n)$ uma solução estendida associada; e escrevemos $\alpha_0 = \frac{1}{2} \phi^{-1} d\phi = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$. Seja $\hat{\ell}$ um subfibrado de $\underline{\mathbb{C}}^n$ com projecção hermitiana $\hat{\pi} : \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \hat{\ell}$ e $\tilde{\Phi} : \mathbb{C} \rightarrow \Omega U(n)$ definida por $\tilde{\Phi}_\lambda = \Phi_\lambda (\hat{\pi} + \lambda \hat{\pi}^\perp)$. $\tilde{\Phi}$ é uma solução estendida se e só se*

$$\hat{\pi}^\perp A_z \hat{\pi} = 0 \tag{2.6}$$

$$\hat{\pi}^\perp (\bar{\partial} \hat{\pi} + A_{\bar{z}} \hat{\pi}) = 0. \tag{2.7}$$

Às condições (2.6) e (2.7) chamamos *condições de unitão*. A condição (2.6) afirma que $A_z : \hat{\ell} \rightarrow \hat{\ell}$, enquanto que a condição (2.7) afirma que $\hat{\ell}$ é um subfibrado holomorfo de $\underline{\mathbb{C}}^n$ relativamente à estrutura holomorfa $\bar{\partial}_{\alpha_0} = \bar{\partial} + A_{\bar{z}}$.

A este processo, em que obtemos aplicações harmónicas a partir de outra aplicação harmónica, chamamos *soma de unitão*, como em [35].

Recordemos do trabalho de Uhlenbeck [35] como somar um unitão no caso particular em que temos uma aplicação harmónica de \mathbb{C} numa Grassmanniana:

Seja $G_k(\mathbb{C}^n)$ a Grassmanniana complexa, isto é, a variedade constituída pelos subespaços complexos de \mathbb{C}^n com dimensão k . O grupo unitário $U(n)$ actua transitivamente em $G_k(\mathbb{C}^n)$, com estabilizador (ou subgrupo de isotropia) $U(k) \times U(n-k)$, pelo que $G_k(\mathbb{C}^n)$ tem uma estrutura de espaço homogéneo

$$G_k(\mathbb{C}^n) \cong \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}.$$

Fixemos $V_0 \in G_k(\mathbb{C}^n)$, um subespaço complexo de \mathbb{C}^n de dimensão k , com estabilizador K e seja $\pi_0 : \mathbb{C}^n \rightarrow V_0$ a projecção hermitiana. Consideremos τ a involução de $U(n)$ dada por conjugação com $Q_0 = \pi_0 - \pi_0^\perp$; isto é $\tau(\alpha) = Q_0 \alpha Q_0^{-1}$ para todo o $\alpha \in U(n)$. A componente da identidade do conjunto fixo por τ é K , e então $G_k(\mathbb{C}^n)$ é um espaço simétrico (interno) com involução τ . Para cada $V \in G_k(\mathbb{C}^n)$ tomemos $\alpha \in U(n)$ tal que $\alpha(V_0) = V$. O correspondente mergulho de Cartan $\iota_k : G_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow U(n)$ é dado por $\iota_k(V) = \iota_k(\alpha(V_0)) = \tau(\alpha)\alpha^{-1} = Q_0 \alpha Q_0^{-1} \alpha^{-1} = Q_0 (\pi_V - \pi_V^\perp)$, onde π_V é a projecção hermitiana de \mathbb{C}^n em V .

Teorema 2.19. [35] *Tomemos $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ uma aplicação harmónica e Φ uma solução estendida associada a $\phi = \iota_k \circ \psi$. Seja $\hat{\ell}$ um subfibrado de $\underline{\mathbb{C}}^n$ com projecção hermitiana $\hat{\pi} : \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \hat{\ell}$ tal que $[\phi, \hat{\pi}] = 0$ e satisfazendo as condições de unitão (2.6) e (2.7). Então $\tilde{\Phi} : \mathbb{C} \rightarrow \Omega U(n)$ definida por $\tilde{\Phi}_\lambda = \Phi_\lambda (\hat{\pi} + \lambda \hat{\pi}^\perp)$ é uma solução estendida associada a uma aplicação harmónica com valores numa certa Grassmanniana $G_{\tilde{k}}(\mathbb{C}^n)$: $\tilde{\Phi}_{-1} = \iota_{\tilde{k}} \circ \tilde{\psi}$.*

Agora vamos descrever como a acção de certos elementos $h \in S_\mu$ em μ corresponde a somar um unitão à solução estendida Φ_μ .

Seja ℓ um subfibrado holomorfo de $(\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial})$, com projecção hermitiana $\pi : \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \ell$. Tomemos um potencial holomorfo $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $\pi^\perp \mu_{-1} \pi = 0$. Definimos $\gamma_\ell : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ como

$$\gamma_\ell = \pi^\perp + \lambda \pi. \quad (2.8)$$

A aplicação γ_ℓ transforma a conexão (plana) $d_\mu = d + \mu$ numa conexão (plana) associada à 1-forma

$$\begin{aligned} \gamma_\ell \cdot \mu &= \text{Ad}_{\gamma_\ell}(\mu) - d\gamma_\ell \gamma_\ell^{-1} = \gamma_\ell \mu \gamma_\ell^{-1} - d\gamma_\ell \gamma_\ell^{-1} \\ &= (\pi^\perp + \lambda \pi) \left(\sum_{k \geq -1} \mu_k \lambda^k \right) (\pi^\perp + \lambda^{-1} \pi) + (1 - \lambda) d\pi (\pi^\perp + \lambda^{-1} \pi). \end{aligned}$$

Na expressão acima, o coeficiente em λ^{-2} é nulo, uma vez que $\pi^\perp \mu_{-1} \pi = 0$; pelo que $\gamma_\ell \cdot \mu$ toma valores em $\Lambda_{-1, \infty}$. Mais, como ℓ é um subfibrado holomorfo de $(\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial})$, temos que $\bar{\partial} \pi \pi = 0$, e logo o coeficiente de $\gamma_\ell \cdot \mu$ em λ^{-1} tem a sua parte em $(0, 1)$ nula; pelo que a parte $(0, 1)$ de $\gamma_\ell \cdot \mu$ toma valores em $\Lambda_+ \mathfrak{g}^\mathbb{C}$. Então $\gamma_\ell \cdot \mu \in \hat{\mathcal{P}}$ e logo $\gamma_\ell \in S_\mu$.

Teorema 2.20. *Sejam ℓ um subfibrado holomorfo de $(\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial})$, com projecção hermitiana $\pi : \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \ell$ e $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $\pi^\perp \mu_{-1} \pi = 0$. Então, a solução estendida $\Phi_{\gamma_\ell \cdot \mu}$ é obtida a partir da solução estendida Φ_μ somando um unitão. Mais concretamente: consideremos a decomposição de Iwasawa de Ψ_μ , $\Psi_\mu = \Phi_\mu b$, o subfibrado $\hat{\ell} = b_0 \ell$, onde $b_0(z) = b(z)(0)$, e a projecção hermitiana $\hat{\pi} : \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \hat{\ell}$; então $\hat{\ell}$ satisfaz as condições de unitão e*

$$\Phi_{\gamma_\ell \cdot \mu} = (\hat{\pi}_0 + \lambda^{-1} \hat{\pi}_0^\perp) \Phi_\mu (\hat{\pi} + \lambda \hat{\pi}^\perp),$$

onde $\hat{\pi}_0$ é a projecção hermitiana na fibra de $\hat{\ell}$ em $z = 0$.

Demonstração: Como $\gamma_\ell \cdot \mu \in \hat{\mathcal{P}}$, já sabemos que podemos integrar e obtemos uma única aplicação $\Psi_{\gamma_\ell \cdot \mu} : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}$ tal que $\Psi_{\gamma_\ell \cdot \mu}^{-1} d\Psi_{\gamma_\ell \cdot \mu} = \gamma_\ell \cdot \mu$ e $\Psi_{\gamma_\ell \cdot \mu}(0) = e$. Por outro lado, tomando $\tilde{\Psi} = \gamma_{\hat{\ell}}(0) \Psi_\mu \gamma_\ell^{-1}$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{-1} d\tilde{\Psi} &= \gamma_\ell \Psi_\mu^{-1} \gamma_{\hat{\ell}}(0)^{-1} (\gamma_{\hat{\ell}}(0) d\Psi_\mu \gamma_\ell^{-1} - \gamma_{\hat{\ell}}(0) \Psi_\mu \gamma_\ell^{-1} d\gamma_\ell \gamma_\ell^{-1}) \\ &= \gamma_\ell \Psi_\mu^{-1} d\Psi_\mu \gamma_\ell^{-1} - d\gamma_\ell \gamma_\ell^{-1} = \gamma_\ell \mu \gamma_\ell^{-1} - d\gamma_\ell \gamma_\ell^{-1} = \gamma_\ell \cdot \mu \end{aligned}$$

e $\tilde{\Psi}(0) = \gamma_{\hat{\ell}}(0) \Psi_\mu(0) \gamma_\ell(0)^{-1} = (\hat{\pi}_0^\perp + \lambda \hat{\pi}_0) (\pi_0^\perp + \lambda^{-1} \pi_0) = b_0(0) = e$, pelo que

$$\Psi_{\gamma_\ell \cdot \mu} = \tilde{\Psi} = (\hat{\pi}_0^\perp + \lambda \hat{\pi}_0) \Psi_\mu (\pi^\perp + \lambda^{-1} \pi).$$

Agora, factorizando $\Psi_{\gamma_\ell \cdot \mu}$ de acordo com a decomposição de Iwasawa, temos

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma_\ell \cdot \mu} &= (\hat{\pi}_0^\perp + \lambda \hat{\pi}_0) \Psi_\mu (\pi^\perp + \lambda^{-1} \pi) = (\hat{\pi}_0^\perp + \lambda \hat{\pi}_0) \Phi_\mu b (\pi^\perp + \lambda^{-1} \pi) \\ &= (\hat{\pi}_0^\perp + \lambda \hat{\pi}_0) \Phi_\mu (\hat{\pi}^\perp + \lambda^{-1} \hat{\pi}) (\hat{\pi}^\perp + \lambda \hat{\pi}) b (\pi^\perp + \lambda^{-1} \pi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Tomemos $\hat{b} = (\hat{\pi}^\perp + \lambda \hat{\pi}) b (\pi^\perp + \lambda^{-1} \pi)$ e

$$\Phi_{\gamma_\ell \cdot \mu} = (\hat{\pi}_0^\perp + \lambda \hat{\pi}_0) \Phi_\mu (\hat{\pi}^\perp + \lambda^{-1} \hat{\pi}) = (\hat{\pi}_0 + \lambda^{-1} \hat{\pi}_0^\perp) \Phi_\mu (\hat{\pi} + \lambda \hat{\pi}^\perp)$$

e vamos ver que (2.9) se trata de uma decomposição do tipo Iwasawa.

Precisamos que \hat{b} tome valores em $\Lambda_+ G^{\mathbb{C}}$; \hat{b} é holomorfo em $\lambda = 0$ se o seu coeficiente em λ^{-1} for nulo, isto é, se $\hat{\pi}^\perp b_0 \pi = 0$; o que é verdade, visto que $\hat{\ell} = b_0 \ell$ e logo $b_0 \pi$ está em $\hat{\ell}$. Aplicando o mesmo argumento a \hat{b}^{-1} , concluímos o que precisávamos.

Também é necessário que $\Phi_{\gamma_\ell \cdot \mu}$ tome valores em ΩG ; o que acontece visto que $\Phi_{\gamma_\ell \cdot \mu}(z)(1) = (\hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_0^\perp) \Phi_\mu(z)(1) (\hat{\pi} + \hat{\pi}^\perp) = e$. Assim, $\Phi_{\gamma_\ell \cdot \mu}$ é uma solução estendida. Em particular $\hat{\ell}$ satisfaz as condições de unitão. □

Reciprocamente, qualquer unitão pode ser somado através da acção de um γ_ℓ , da forma (2.8), num potencial holomorfo μ :

Teorema 2.21. *Sejam $\mu \in \mathcal{P}$ e Φ_μ a respectiva solução estendida. Suponhamos que $\hat{\ell}$ é um subfibrado de $\underline{\mathbb{C}}^n$ com projecção hermitiana $\hat{\pi} : \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \hat{\ell}$ e que satisfaz as condições de unitão relativamente a Φ_μ . Seja $\ell = b_0^{-1} \hat{\ell}$, então*

1. ℓ é holomorfo relativamente à estrutura holomorfa trivial $\bar{\partial}$;
2. $\pi^\perp \mu_{-1} \pi = 0$;
3. $\Phi_{\gamma_\ell \cdot \mu} = (\hat{\pi}_0 + \lambda^{-1} \hat{\pi}_0^\perp) \Phi_\mu (\hat{\pi} + \lambda \hat{\pi}^\perp)$.

Demonstração: 1. Já vimos na Observação 2.8 que $b : (\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial}) \rightarrow (\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial}_{\alpha_\lambda})$ é um isomorfismo holomorfo. Além disso, como $\hat{\ell}$ satisfaz a condição de unitão (2.7), logo é um subfibrado holomorfo de $(\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial}_{\alpha_0})$, e então ℓ é um subfibrado holomorfo de $(\underline{\mathbb{C}}^n, \bar{\partial})$.

2. De (2.5) sabemos que $\mu_{-1} = -b_0^{-1} A_z b_0 dz$, e portanto

$$\pi^\perp \mu_{-1} \pi = -\pi^\perp b_0^{-1} A_z b_0 \pi dz = -\hat{\pi}^\perp A_z \hat{\pi} dz = 0,$$

pela condição de unitão (2.6).

3. Pelo Teorema 2.20.

□

2.6 Aplicações Harmónicas em Grassmannianas e Subfibrados

Na Secção 2.7 iremos aplicar as ideias introduzidas na Secção 2.5 num caso em que temos aplicações harmónicas do tipo finito, melhorando alguns resultados de Pacheco [28]. Mas antes vamos recordar de Burstall e Wood [9] alguns factos relevantes sobre aplicações harmónicas em Grassmannianas.

Consideremos novamente a Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$. Denotemos por $\mathfrak{u}(n)$ a álgebra de Lie de $U(n)$ e fixemos $V_0 \in G_k(\mathbb{C}^n)$ como ponto base. A decomposição simétrica associada $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} &= \{\xi \in \mathfrak{u}(n) : \tau(\xi) = \xi\} = \text{Hom}(V_0, V_0) \oplus \text{Hom}(V_0^{\perp}, V_0^{\perp}) \\ \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} &= \{\xi \in \mathfrak{u}(n) : \tau(\xi) = -\xi\} = \text{Hom}(V_0, V_0^{\perp}) \oplus \text{Hom}(V_0^{\perp}, V_0).\end{aligned}\quad (2.10)$$

Seja $T \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ o subfibrado tautológico de $G_k(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n$ cuja fibra no ponto $V \in G_k(\mathbb{C}^n)$ é o próprio subespaço $V \subseteq \mathbb{C}^n$. Existe um isomorfismo natural $\beta^{(1,0)} : T^{(1,0)}G_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Hom}(T, T^{\perp})$ dado por $\beta^{(1,0)}(X)\sigma = \pi_{T^{\perp}}(X \cdot \sigma)$, onde $X \in T^{(1,0)}G_k(\mathbb{C}^n)$, σ é uma secção de T e $\pi_{T^{\perp}} : \mathbb{C}^n \rightarrow T^{\perp}$ é a projecção ortogonal.

Inspirados por [9], identificamos a aplicação suave $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ com o subfibrado complexo suave $\underline{\psi}$, do fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, de rank k cuja fibra no ponto z é $\psi(z)$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.

Denotando por $\pi_{\underline{\psi}}$ a projecção hermitiana no fibrado vectorial $\underline{\psi}$, definimos os morfismos entre fibrados vectoriais $A'_{\underline{\psi}}, A''_{\underline{\psi}} : \underline{\psi} \rightarrow \underline{\psi}^{\perp}$ por

$$A'_{\underline{\psi}}(v) = \pi_{\underline{\psi}^{\perp}}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad \text{e} \quad A''_{\underline{\psi}}(v) = \pi_{\underline{\psi}^{\perp}}\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\right),$$

onde v é uma secção suave do fibrado $\underline{\psi}$. A $A'_{\underline{\psi}}$ (respectivamente $A''_{\underline{\psi}}$) chamamos ∂ - (respectivamente $\bar{\partial}$ -)segunda forma fundamental de $\underline{\psi}$ em $\underline{\mathbb{C}}^n$. Observemos que $A'_{\underline{\psi}}$ é menos a adjunta de $A''_{\underline{\psi}^{\perp}}$, isto é $\langle A'_{\underline{\psi}}(v), w \rangle = -\langle v, A''_{\underline{\psi}^{\perp}}(w) \rangle$ para todas as secções suaves v, w do fibrado $\underline{\psi}$.

As ∂ - e $\bar{\partial}$ -segundas formas fundamentais de $\underline{\psi}$ em $\underline{\mathbb{C}}^n$, $A'_{\underline{\psi}}$ e $A''_{\underline{\psi}}$, representam, através de $\beta^{(1,0)}$, as componentes $(1,0)$ das derivadas parciais $\partial\psi$ e $\bar{\partial}\psi$ ([9]):

$$\psi^*\beta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \psi^*\beta^{(1,0)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + \psi^*\beta^{(0,1)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = A'_{\underline{\psi}} + A'_{\underline{\psi}^{\perp}}.\quad (2.11)$$

Tendo em conta o Lema 1.10 e a igualdade acima (2.11), obtemos a seguinte expressão em que está envolvida a derivada de $\phi = \iota \circ \psi$ em termos das segundas formas fundamentais de $\underline{\psi}$ em $\underline{\mathbb{C}}^n$:

$$\phi^{-1}\partial\phi = \phi^*\theta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -2\psi^*\beta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -2\left(A'_{\underline{\psi}} + A'_{\underline{\psi}^{\perp}}\right).\quad (2.12)$$

Neste espírito, recordando o conhecido resultado de Koszul-Malgrange:

Teorema 2.22. [26] *Seja E um fibrado vectorial complexo com conexão ∇ sobre uma superfície de Riemann M . Então, existe uma única estrutura complexa em E para a qual E é um fibrado*

vectorial holomorfo, e uma secção local suave σ é holomorfa se e só se $\nabla_Z \sigma = 0$ para todo o $Z \in T^{(0,1)}M$.

E seguindo [9] vamos reformular as condições de harmonicidade. Equipamos cada subfibrado de \mathbb{C}^n com a conexão induzida pela conexão trivial de \mathbb{C}^n e com a correspondente estrutura holomorfa de Koszul-Malgrange. Uma aplicação suave $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ é harmónica se e só se A'_ψ é holomorfa; o que é equivalente a dizer que A''_ψ é anti-holomorfa. Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.23. [9] *Dados dois fibrados holomorfos E e F sobre uma superfície de Riemann e um morfismo holomorfo entre fibrados $A : E \rightarrow F$, existem dois únicos subfibrados holomorfos que vamos indicar por $\underline{\text{Ker}}A$ e $\underline{\text{Im}}A$, subfibrados de E e de F respectivamente, tais que coincidem com $\text{Ker}A$ e com $\text{Im}A$ em quase todo o lado.*

Assim, podemos definir o *fibrado ∂ -Gauss* de uma dada aplicação harmónica $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ por $G'(\psi) = \underline{\text{Im}}A'_\psi$. A correspondente aplicação suave associada é uma aplicação harmónica numa Grassmanniana [9]. De forma análoga, definimos o *fibrado $\bar{\partial}$ -Gauss* por $G''(\psi) = \underline{\text{Im}}A''_\psi$, que também dá origem a uma nova aplicação harmónica.

Por forma a iterar este processo, denotamos $G^{(0)}(\psi) = \underline{\psi}$ e tomamos $G^{(i)}(\psi) = G'(G^{(i-1)}(\psi))$ e $G^{(-i)}(\psi) = G''(G^{(-i+1)}(\psi))$, para todo o $i \in \mathbb{N}$; ou seja, $G^{(1)}(\psi) = G'(\psi)$ e $G^{(-1)}(\psi) = G''(\psi)$. Ao fibrado $G^{(i)}(\psi)$ chamamos *i ésimo fibrado de Gauss* de ψ .

Observação 2.24. Seja $\underline{\psi}$ o fibrado associado à aplicação harmónica $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$, com $\iota \circ \psi = Q_0(\pi - \pi^\perp)$ e ℓ o fibrado dado por $\ell = \underline{\text{ker}}A'_{\psi^\perp}$, que verifica as condições de unitão. Observemos que $\mathbb{C}^n = \underline{\psi} \oplus \underline{\psi}^\perp = \underline{\psi} \oplus \underline{\text{Im}}A''_\psi \oplus \underline{\text{ker}}A'_{\psi^\perp} = \underline{\psi} \oplus G^{(-1)}(\psi) \oplus \ell$. Assim, somando o unitão ℓ , obtemos

$$Q_0(\pi - \pi^\perp)(\pi_\ell - \pi_\ell^\perp) = Q_0(\pi_{G^{(-1)}(\psi)} - \pi_{G^{(-1)}(\psi)}^\perp),$$

ou seja, a aplicação harmónica associada ao fibrado $\bar{\partial}$ -Gauss, $G^{(-1)}(\psi)$.

2.7 Unitões que preservam Aplicações Harmónicas do Tipo Finito

Para além das aplicações harmónicas com número de unitão finito, existem as aplicações harmónicas do tipo finito; as quais não serão objecto principal do nosso trabalho, mas para as quais vamos apresentar alguns resultados neste final de capítulo. Começemos por definir as aplicações harmónicas do tipo finito.

Dada uma aplicação harmónica $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$, dizemos que ϕ é *aplicação harmónica do tipo finito*, tal como em [6], se pode ser obtida através de uma solução estendida $\Phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ cujo potencial holomorfo associado $\mu = \xi dz$ é constante da forma $\xi = \lambda^{d-1}\eta$, para algum ímpar $d \in \mathbb{N}$, com

$$\eta \in \Omega_d \mathfrak{g} = \left\{ \eta \in \Omega \mathfrak{g} \mid \eta = \sum_{|k| \leq d} \eta_k \lambda^k \right\}.$$

Ou seja, μ pode ser escrito na forma

$$\mu = \mu_{-1}\lambda^{-1} + \mu_0 + \dots + \mu_{2d-1}\lambda^{2d-1} = (\eta_{-d}\lambda^{-1} + \eta_{-d+1} + \dots + \eta_d\lambda^{2d-1}) dz.$$

Teorema 2.25. *Seja $\phi_\mu : \mathbb{C} \rightarrow G$ uma aplicação harmônica do tipo finito, com $\mu = \lambda^{d-1}\eta dz$ e $\eta \in \Omega_{dg}$. Fixemos um subfibrado constante de $\underline{\mathbb{C}}^n$, ℓ_0 , e seja $\pi_0 : \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \ell_0$ a correspondente projecção hermitiana. Se $\gamma_{\ell_0} = \pi_0^\perp + \lambda\pi_0 \in S_\mu$, então a aplicação harmônica $\phi_{\gamma_{\ell_0} \cdot \mu}$ também é do tipo finito.*

Demonstração: Do Teorema 2.20 já sabemos que $\phi_{\gamma_{\ell_0} \cdot \mu}$ é uma aplicação harmônica. Mais, como μ é um potencial holomorfo constante e γ_{ℓ_0} é constante, também $\gamma_{\ell_0} \cdot \mu$ é um potencial holomorfo constante. □

Consideremos o subespaço vectorial $\ell_0 = \ker \eta_{-d} \subseteq \mathbb{C}^n$, e indiquemos por π_0 a habitual projecção hermitiana em ℓ_0 ; neste caso, temos $\gamma_{\ell_0} \cdot \mu = (\pi_0^\perp + \lambda\pi_0) \mu (\pi_0^\perp + \lambda^{-1}\pi_0)$ cujo termo em λ^{-2} é dado por $\pi_0^\perp \mu_{-1} \pi_0 = \pi_0^\perp \eta_{-d} \pi_0 dz$ que é nulo, logo $\gamma_{\ell_0} \cdot \mu \in \Lambda_{-1, \infty}$. Assim, $\gamma_{\ell_0} \in S_\mu$. Ou seja, temos um unitão γ_{ℓ_0} que, pelo Teorema 2.25, preserva o tipo finito nas aplicações harmônicas.

Temos ainda um exemplo de unitões que preservam o tipo finito das aplicações harmônicas na Grassmanniana:

Teorema 2.26. *Se $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ é uma aplicação harmônica do tipo finito, então a aplicação harmônica correspondente ao fibrado de Gauss $G^{(r)}(\psi)$ é do tipo finito, para todo o $r \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Fixemos $\psi(0)$ como ponto base de $G_k(\mathbb{C}^n)$. Sejam K o subgrupo de isotropia de $U(n)$ em $\psi(0)$ e τ o automorfismo correspondente. Seja $\mu = \xi dz \in \mathcal{P}_\tau$ um potencial holomorfo τ -torcido constante associado a ψ , em que $\xi = \lambda^{d-1}\eta$ para algum $d \in \mathbb{N}$ ímpar, com $\eta = \sum_{|k| \leq d} \eta_k \lambda^k \in \Omega_{dg}$. Uma vez que d é ímpar e μ é τ -torcido, temos que $\eta_{-d} \in \mathfrak{m}^\mathbb{C}$.

Usando a decomposição de $\mathfrak{m}^\mathbb{C}$ em (2.10), podemos decompor $\mathfrak{m}^\mathbb{C}$ nas suas partes $(1, 0)$ e $(0, 1)$, com $\mathfrak{m}^\mathbb{C} = \mathfrak{m}^+ \oplus \mathfrak{m}^-$ em que $\mathfrak{m}^+ = \text{Hom}(\psi(0), \psi(0)^\perp)$ e $\mathfrak{m}^- = \text{Hom}(\psi(0)^\perp, \psi(0))$; e escrevemos $\eta_{-d} = \eta_{-d}^+ + \eta_{-d}^-$ de acordo com essa decomposição.

Fixemos o subespaço vectorial $\ell_0 = \ker \eta_{-d}^-$ e tal como antes, temos $\gamma_{\ell_0} \in S_\mu$. Assim, pelo Teorema 2.25, a solução estendida $\Phi_{\gamma_{\ell_0} \cdot \mu}$ dá origem a uma aplicação harmônica do tipo finito. Vamos ver que esta aplicação harmônica é precisamente a mesma a que o fibrado de Gauss $G^{(-1)}(\psi)$ dá origem:

Seja Ψ_μ a solução estendida complexa associada a μ . Factorizemos Ψ_μ de acordo com a Observação 1.3, $\Psi_\mu = \Phi b$, com $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ e $b : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_+ G^\mathbb{C}$. Por outro lado, fixemos uma decomposição de Iwasawa $K^\mathbb{C} = KB$ e factorizemos Ψ_μ de acordo com o Teorema 1.1, $\Psi_\mu = F \tilde{b}$, com $F : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G_\tau$ e $\tilde{b} : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_B^+ G_\tau^\mathbb{C}$.

Como *i)* \tilde{b}_0 toma valores em $B \subset K^\mathbb{C}$; *ii)* $\psi = \pi \circ F_1$ (ver Teorema 1.12), isto é, $\psi = F_1 \cdot \psi(0)$; e *iii)* $b_0 = F_1 \tilde{b}_0$ (ver Secção 2.3), concluímos que para $b_0 : \mathbb{C} \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{C})$ também temos $\psi = b_0 \cdot \psi(0)$ e $\psi^\perp = b_0 \cdot \psi(0)^\perp$. Em particular, $\psi^* [\mathfrak{m}^\mathbb{C}]_{\psi(z)} = \psi^* [\mathfrak{m}^\mathbb{C}]_{b_0(z) \cdot \psi(0)} = \text{Ad}_{b_0(z)}(\mathfrak{m}^\mathbb{C})$ e

$$\text{Hom}(\psi^* T, \psi^* T^\perp)_z = \text{Ad}_{b_0(z)}(\mathfrak{m}^+) \quad , \quad \text{Hom}(\psi^* T^\perp, \psi^* T)_z = \text{Ad}_{b_0(z)}(\mathfrak{m}^-) \quad (2.13)$$

para todo o $z \in \mathbb{C}$. Por outro lado, de (2.5) e de (2.12) concluímos que

$$\text{Ad}_{b_0}(\eta_{-d}) = A'_\psi + A'_{\psi^\perp}. \quad (2.14)$$

Assim, de (2.13) e (2.14) concluímos que $\text{Ad}_{b_0}(\eta_{-d}^-) = A'_{\psi^\perp}$, e logo

$$\underline{\ker} A'_{\psi^\perp} = \underline{\ker} \text{Ad}_{b_0}(\eta_{-d}^-) = b_0 \ell_0.$$

Pelo Teorema 2.20 e usando a Observação 2.24 obtemos o que queríamos.

Iterando este processo podemos provar para todo o $G^{(r)}(\psi)$ com $r < 0$.

Por outro lado, invertendo a orientação, isto é, trocando z com \bar{z} , os fibrados de ∂ -Gauss coincidem com os anteriores fibrados $\bar{\partial}$ -Gauss e obtemos o pretendido para todo o $r > 0$.

□

Contudo, a soma de unitões nem sempre preserva as aplicações harmónicas do tipo finito, de facto: dadas $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ uma aplicação harmónica do tipo finito (não-constante) e $\delta : \mathbb{C} \rightarrow G_s(\mathbb{C}^m)$ uma aplicação holomorfa (não-constante). Podemos tomar $\psi = \phi \oplus \delta : \mathbb{C} \rightarrow G_{k+s}(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m)$ que é uma aplicação harmónica que pode ser obtida através de ϕ somando o unitão δ . Sempre que A'_δ tenha pontos singulares, o mesmo acontece com $A'_\psi = A'_\phi \oplus A'_\delta$; e nesse caso ψ não pode ser uma aplicação harmónica do tipo finito, uma vez que a equação (2.14) garante que as segundas formas fundamentais A'_ψ e A''_ψ (pois esta é precisamente menos a adjunta de A'_{ψ^\perp}) associadas à aplicação harmónica $\psi : \mathbb{C} \rightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ do tipo finito não tem pontos singulares (isto é, pontos onde o rank de $\text{Im}A'_\psi$ cai).

Capítulo 3

Acções de Revestimento Singular em Aplicações Harmónicas

No final do capítulo anterior apresentámos alguns resultados para aplicações harmónicas do tipo finito, mas neste capítulo (e também no seguinte) iremos considerar aplicações harmónicas com número de unitão finito.

Uhlenbeck [35] provou que os seus *factores simples*, $\gamma_a(\lambda) = \pi^\perp + \zeta_a(\lambda)\pi$, com

$$\zeta_a(\lambda) = \frac{\lambda - a}{\bar{a}\lambda - 1} \frac{\bar{a} - 1}{1 - a}, \quad (3.1)$$

geram o grupo dos lacetes racionais em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ satisfazendo a condição de realidade relativamente a $\mathrm{U}(n)$. Em [14], Donaldson, Fox e Goertsches introduziram uma definição de factor simples, consistente com a de Uhlenbeck, para um grupo de Lie complexo reductivo e provaram que nos casos $\mathrm{SO}(n)^\mathbb{C}$ e $\mathrm{G}_2^\mathbb{C}$, relativamente às suas representações fundamentais, esses factores simples geram o grupo dos lacetes racionais que satisfazem a condição de realidade.

Inspirados por [14], começamos por determinar geradores dos grupos de lacetes racionais, relativamente às representações fundamentais, de $\mathrm{Sp}(n)^\mathbb{C}$ e $\mathrm{SU}(n)^\mathbb{C}$; em ambos os casos, a classe dos geradores é ligeiramente maior do que os factores simples anteriormente definidos.

Através dessa classe de factores simples provamos que qualquer aplicação harmónica ϕ de \mathbb{S}^2 para um grupo de Lie compacto semi-simples matricial (logo ϕ tem número de unitão finito) pode ser reduzida a uma constante aplicando um número finito de acções de revestimento singular, as quais são produzidas a partir de curvas de factores simples em $G^\mathbb{C}$. Essa redução induz uma factorização de ϕ . No final, apresentamos uma versão deste resultado para aplicações harmónicas num espaço G -simétrico interno.

As duas secções iniciais deste capítulo introduzem alguns conceitos e resultados que nos permitem definir as acções de revestimento singular. Os resultados fundamentais apresentados neste capítulo podem ser encontrados no trabalho em conjunto com Pacheco [13].

3.1 Sistema de Raízes e Subálgebras Parabólicas

Primeiro vamos recordar algumas definições e resultados em álgebras de Lie, que nos permitem relacionar os sistemas de raízes com as subálgebras parabólicas, mais pormenores podem ser encontrados no trabalho de Burstall e Rawnsley [8]. Esses resultados serão usados na secção seguinte.

Seja $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ uma álgebra de Lie complexa semi-simples. Tomemos \mathfrak{a} uma *subálgebra de Cartan* de $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$, isto é, um conjunto maximal abeliano de elementos semi-simples. Dada α no espaço dual \mathfrak{a}^* , definimos

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^\mathbb{C} : [H, X] = \alpha(H)X, \text{ para todo o } H \in \mathfrak{a}\}, \quad (3.2)$$

então $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{a}$ e para os outros α com $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$ dizemos que α são raízes e \mathfrak{g}^α são espaços raízes; vamos ainda indicar o conjunto das raízes por Δ .

Teorema 3.1. [23] Com as notações anteriores, temos as seguintes propriedades:

1. $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$;
2. \mathfrak{g}^α tem dimensão 1;
3. se $\alpha \in \Delta$ então $-\alpha \in \Delta$;
4. dadas $\alpha, \beta \in \Delta$, se $\alpha + \beta \in \Delta$ então $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Dado um subconjunto Δ^+ de Δ , dizemos que Δ^+ é um sistema de raízes positivas se para quaisquer $\alpha, \beta \in \Delta^+$ tais que $\alpha + \beta$ é uma raiz, então $\alpha + \beta \in \Delta^+$; e se o complementar de Δ^+ em Δ for $-\Delta^+$. Aos elementos de Δ^+ chamamos raízes positivas. Dada $\alpha \in \Delta^+$, dizemos que α é uma raiz positiva simples se não pode ser escrita como a soma de outras duas raízes em Δ^+ .

Teorema 3.2. [23] Com as notações anteriores, sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ as raízes positivas simples relativamente a Δ^+ . Temos as seguintes propriedades:

1. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ são linearmente independentes;
2. se $\alpha \in \Delta^+$, então $\alpha = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$, onde n_i são inteiros não-negativos;
3. $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a} = l$.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie compacta, se $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ é um torus maximal, então $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Mais, para cada raiz $\alpha \in \Delta$ temos que $\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ e $\overline{\mathfrak{g}^\alpha} = \mathfrak{g}^{-\alpha}$, em que temos a conjugação em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ relativamente a \mathfrak{g} .

Dada uma subálgebra \mathfrak{q} de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, dizemos que \mathfrak{q} é uma subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ se \mathfrak{q}^\perp é uma subálgebra nilpotente de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, onde \mathfrak{q}^\perp denota o polar de \mathfrak{q} relativamente à forma de Killing em $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, que sabemos não ser degenerada. A relação entre subálgebras parabólicas e sistema de raízes vem dada pelo seguinte resultado:

Teorema 3.3. [24] Seja \mathfrak{a} uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ e Δ^+ um sistema de raízes positivas com raízes simples $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Para cada subconjunto I de $\{1, \dots, l\}$ definimos a função peso n_I em Δ da seguinte forma: $n_I(\alpha) = \sum_{i \in I} n_i$, onde $\alpha = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$. Então

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{a} \oplus \sum_{n_I(\alpha) \geq 0} \mathfrak{g}^\alpha$$

é uma subálgebra parabólica.

Tomemos

$$\mathfrak{g}_j = \sum_{n_I(\alpha)=j} \mathfrak{g}^\alpha,$$

temos que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$ e

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \sum_{j=-k}^k \mathfrak{g}_j.$$

De [8], em concreto do seu Teorema 4.4 (e respectiva prova), concluímos que existe um elemento único $\xi_I \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ tal que $\text{ad}_{\xi_I} = j\sqrt{-1}$ em \mathfrak{g}_j para todo o $j \in \{-k, \dots, k\}$; e que ξ_I pertence ao centro de $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_I \cap \overline{\mathfrak{p}_I} \cap \mathfrak{g}$ em \mathfrak{g} , isto é, $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \text{ para todo o } Y \in \mathfrak{h}\}$. Dizemos que ξ_I é o *elemento canónico* de \mathfrak{p}_I .

Observemos que ad_{ξ_I} tem valores em \mathfrak{g} , quando restringido a \mathfrak{g} . Por outro lado, como \mathfrak{g} é álgebra de Lie compacta e semi-simples, tem centro trivial

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \text{ para todo o } Y \in \mathfrak{g}\} = \{0\}.$$

Assim $\xi_I \in \mathfrak{g}$.

Consideremos os elementos $\xi_1, \dots, \xi_l \in \mathfrak{t}$ como sendo os duais de $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, no sentido que $\alpha_i(\xi_j) = \delta_{ij}\sqrt{-1}$. Então $\xi_I = \sum_{i \in I} \xi_i$ (ver [8]).

3.2 Potenciais Meromorfos e Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito

Nesta secção vamos recordar quais os potenciais meromorfos que geram aplicações harmónicas com número de unitão finito, mais detalhes podem ver vistos em [5, 21].

No seguimento da secção anterior, definimos

$$\mathfrak{p}_I^{(i)} = \bigoplus_{j \geq i} \mathfrak{g}_j = \bigoplus_{n_I(\alpha) \geq i} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

temos que $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_I^{(0)}$ é uma subálgebra parabólica e $\mathfrak{p}_I^{(i+1)} \subset \mathfrak{p}_I^{(i)}$ para todo o i .

Teorema 3.4. [5, 21] *Seja Ψ uma solução estendida complexa associada à aplicação harmónica com número de unitão finito $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$. Então, existe uma subálgebra parabólica \mathfrak{p}_I e uma transformação de gauge (no sentido de Υ da Proposição 2.4) que transforma Ψ na forma canónica $\Psi(z)(\lambda) = \exp B(z, \lambda)$, onde*

$$B(z, \lambda) = \lambda^{-1}B_1(z) + \lambda^{-2}B_2(z) + \dots + \lambda^{-k}B_k(z) \tag{3.3}$$

para alguns B_1, \dots, B_k , com B_i uma função meromorfa com valores em $\mathfrak{p}_I^{(i)}$.

Inversamente, seja $B_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{p}_I^{(1)}$ uma função meromorfa. Sejam B_2, \dots, B_k , com B_i uma função meromorfa com valores em $\mathfrak{p}_I^{(i)}$, obtidas resolvendo recursivamente o sistema de equações diferenciais meromorfas

$$(\exp B)^{-1} (\exp B)' = \lambda^{-1}B_1',$$

com B dada por (3.3). Então $\Psi = \exp B$ é uma solução estendida complexa associada a uma aplicação harmónica com número de unitão finito $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$.

Assim, é fácil concluir que o potencial meromorfo $\mu = \lambda^{-1}B_1'dz$ em \mathbb{C} dá origem a uma aplicação harmónica com número de unitão finito com solução estendida complexa associada $\Psi_{\mu} = \exp B$.

Observação 3.5. Seja $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$ uma aplicação harmónica com número de unitão finito; a série de Fourier de uma solução estendida complexa associada $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}} \subset \Lambda \text{Gl}(n, \mathbb{C})$ tem

um número finito de termos:

$$\Psi_\lambda = \sum_{i=-k}^k A_i \lambda^i.$$

Neste caso, de [20, 32] sabemos que Ψ corresponde, através do modelo Grassmanniano para grupos de lacetes (recordar a Secção 1.6), a um subfibrado vectorial holomorfo $W = \Psi \cdot \mathcal{H}_+^{(n)}$ do fibrado trivial de dimensão finita sobre \mathbb{C} dado por

$$\underline{E} = \bigoplus_{i=-k}^k \lambda^i \mathbb{C}^n.$$

Se Ψ é meromorfa em \mathbb{C} (as matrizes A_i têm entradas meromorfas), W admite um campo de referenciais formado por secções meromorfas s_1, \dots, s_r de \underline{E} sobre \mathbb{C} . Assim, $s_1 \wedge \dots \wedge s_r$ é uma secção meromorfa de $\bigwedge^r \underline{E}$. Se $s_1 \wedge \dots \wedge s_r$ tiver um pólo de ordem k_0 em z_0 , então $s_1 \wedge \dots \wedge s_r = (z - z_0)^{-k_0} S$, onde S é uma secção local holomorfa de $\bigwedge^r \underline{E}$ tal que $S(z_0) \neq 0$ e S é decomponível para todo o z numa vizinhança de z_0 . Então S define um subfibrado holomorfo local com rank r que coincide com W excepto em z_0 . Pelo que W pode ser holomorficamente estendido a todo o \mathbb{C} , isto é, as singularidades de ϕ são removíveis. Observemos que, se Ψ é da forma canónica, $\Psi = \exp B$, então a série de Fourier de Ψ tem um número finito de termos e Ψ é meromorfa, uma vez que B é nilpotente e meromorfa. Ou seja, a aplicação harmónica associada à solução estendida complexa $\Psi = \exp B$ admite uma extensão a todo o \mathbb{C} .

3.3 Geradores de Grupos de Lacetes Racionais Clássicos

Dado um subespaço $V \subset \mathbb{C}^n$ e a respectiva projecção hermitiana π_V , consideramos as curvas $\{\gamma_a\}$ de lacetes racionais da forma

$$\gamma_a(\lambda) = \pi_V^\perp + \zeta_a(\lambda) \pi_V, \quad (3.4)$$

onde $\zeta_a(\lambda)$ é dado por (3.1); estes lacetes são os *factores simples*, referidos em [35], para a acção do grupo dos germes em zero das aplicações holomorfas de \mathbb{C} em $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ em $\Omega_{\text{hol}} \text{U}(n)$. A sua acção de revestimento pode ser calculada explicitamente e geram o grupo dos lacetes racionais em $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ que satisfazem a condição de realidade $\overline{\gamma(\lambda)} = \gamma(1/\bar{\lambda})$.

Sejam G um grupo de Lie de matrizes e $\Omega_{\text{rat}} G$ o grupo de lacetes racionais em $G^{\mathbb{C}}$ que satisfazem a condição de realidade e que $\gamma(1) = e$. Este grupo actua por uma acção de revestimento no espaço das aplicações harmónicas em G ; e por isso, é importante conhecer os geradores de $\Omega_{\text{rat}} G$ e saber como calcular a sua acção de revestimento no espaço das aplicações harmónicas.

Inspirados por [3, 14] vamos redefinir os nossos factores simples.

Definição 3.6. Seja G um grupo de Lie de matrizes compacto semi-simples. Para todo o $a \in \mathbb{C} \setminus \{S^1\}$ e ξ na rede inteira $\mathfrak{J} = (2\pi)^{-1} \exp^{-1}(e) \cap \mathfrak{g}$, dizemos que o lacete

$$p_{a,\xi}(\lambda) = \exp(-\ln(\zeta_a(\lambda)) \sqrt{-1}\xi) \quad (3.5)$$

é um *factor simples*, onde $\zeta_a(\lambda)$ é dado por (3.1).

O facto de $\xi \in \mathfrak{J}$ garante que $p_{a,\xi}$ está bem definido. Recordando que $\bar{A} = A^{*-1}$ em G e que $\bar{A} = -A^*$ em \mathfrak{g} , por cálculo directo podemos observar que $\overline{\zeta_a(1/\bar{\lambda})}^{-1} = \zeta_a(\lambda)$ de onde

concluimos que

$$\begin{aligned}
 \overline{p_{a,\xi}(1/\lambda)} &= \overline{\exp\left(-\ln\left(\zeta_a\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\sqrt{-1}\xi\right)} \\
 &= \exp\left(\overline{\ln\left(\zeta_a\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\sqrt{-1}\xi}\right) \\
 &= \exp\left(\ln\left(\overline{\zeta_a\left(\frac{1}{\lambda}\right)}\right)\sqrt{-1}\xi\right) \\
 &= \exp\left(\ln\left(\zeta_a(\lambda)^{-1}\right)\sqrt{-1}\xi\right) \\
 &= \exp\left(-\ln(\zeta_a(\lambda))\sqrt{-1}\xi\right) = p_{a,\xi}(\lambda),
 \end{aligned}$$

ou seja, $p_{a,\xi}(\lambda)$ satisfaz a condição de realidade, isto é, $\overline{p_{a,\xi}(\lambda)} = p_{a,\xi}(1/\lambda)$. Mais, $p_{a,\xi}$ é um lacete racional.

Em [14] os autores mostraram que para o caso $G = \text{SO}(n)$ o grupo $\Omega_{\text{rat}}G$ é gerado pelos factores simples da forma (3.5). No entanto, como iremos ver, no caso $G = \text{SU}(n)$ e no caso $G = \text{Sp}(n)$ temos de alargar a classe dos nossos geradores.

Observação 3.7. Os factores simples da Definição 3.6 são compatíveis com os factores simples de Uhlenbeck, uma vez que dado H_V o elemento de \mathfrak{g} tal que

$$H_V = \begin{cases} \sqrt{-1} & \text{em } V \\ 0 & \text{em } V^\perp \end{cases},$$

temos $p_{a,H_V}(\lambda) = \exp(-\ln(\zeta_a(\lambda))\sqrt{-1}H_V) = \pi_V^\perp + \zeta_a(\lambda)\pi_V = \gamma_a(\lambda)$.

Observação 3.8. Consideremos as raízes positivas simples $\alpha_i \in \Delta^+$, com $i \in \{1, \dots, l\}$, e ξ_i os seus duais no sentido que já conhecemos: $\alpha_i(\xi_j) = \delta_{ij}\sqrt{-1}$. Dado $X \in \mathfrak{g}^{\alpha_j}$, temos que

$$\begin{aligned}
 \text{Ad}_{\exp(2\pi\xi_i)}X &= \exp(\text{ad}_{2\pi\xi_i}(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi\text{ad}_{\xi_i})^n(X)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi\alpha_j(\xi_i))^n(X)}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi\delta_{ji}\sqrt{-1})^n X}{n!} = e^{2\pi\delta_{ji}\sqrt{-1}}X = X
 \end{aligned}$$

e logo $\text{Ad}_{\exp(2\pi\xi_i)} = \text{Id}$, o que equivale a dizer que $\exp(2\pi\xi_i) \in Z(G)$, o centro de G . Como G é semi-simples, $Z(G)$ é discreto; como G é compacto $Z(G)$ é finito. Além disso, $Z(G)$ é naturalmente abeliano, assim $Z(G)$ é cíclico. Então, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $\exp(2\pi m_i \xi_i) = e$. Concluimos então o seguinte: apesar de ξ_i não estar necessariamente em \mathfrak{J} , temos $m_i \xi_i \in \mathfrak{J}$ para algum $m_i \in \mathbb{N}$.

3.3.1 Os casos $\text{SO}(n)$ e $\text{Sp}(n)$

Seja V um espaço vectorial complexo de dimensão n com um produto interno hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Suponhamos que V possui uma j -estrutura, isto é, uma aplicação $j : V \rightarrow V$ linear em \mathbb{R} tal que: $j^2 = \pm 1$; $j(zu) = \bar{z}j(u)$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ e $u \in V$; e $\langle ju, jv \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ para todo o $u, v \in V$. Consideremos a aplicação bilinear $\omega : V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\omega(u, v) = \langle u, jv \rangle$ para todo o $u, v \in V$; chamada algumas vezes de *2-forma fundamental*. Seja $G \subset \text{U}(n)$ o grupo de Lie compacto semi-simples que preserva ω , isto é, $\omega(gu, gv) = \omega(u, v)$ para todo o $u, v \in V$ e $g \in G$;

então, temos que

$$\omega(u, gv) = \omega(g^{-1}u, v) \Leftrightarrow \langle u, jgv \rangle = \langle g^{-1}u, jv \rangle \Leftrightarrow \langle u, jgv \rangle = \langle u, gjv \rangle,$$

e logo $jj = gj$. Assim, $G = \{g \in U(n) : jj = gj\}$.

Observemos que

$$\omega(v, u) = \langle v, ju \rangle = \pm \langle j^2 v, ju \rangle = \pm \overline{\langle jv, u \rangle} = \pm \langle u, jv \rangle = \pm \omega(u, v),$$

ou seja, ω é simétrica se $j^2 = 1$ e ω é anti-simétrica se $j^2 = -1$. Assim, quando $j^2 = 1$ temos $G = \text{SO}(n)$, enquanto que quando $j^2 = -1$ temos $G = \text{Sp}(n)$.

Recordemos que dado L um subespaço de V , dizemos que L é j -isotrópico se jL é ortogonal a L , ou seja, $jL \subseteq L^\perp$.

Lema 3.9. *Consideremos um lacete $\gamma \in \Lambda U(n)$ da forma*

$$\gamma(\lambda) = (\pi_L^\perp + \lambda^{-1}\pi_L) (\pi_W^\perp + \lambda\pi_W),$$

onde $\dim L = \dim W = 1$. Então, γ é um lacete em ΛG com $G = \text{SO}(n)$ ou $G = \text{Sp}(n)$ se e só se L e W são j -isotrópicos e $W \subset L \oplus jL$ (ou equivalentemente, $L \subset W \oplus jW$). Se $j^2 = 1$ (o caso $\text{SO}(n)$), então ou $W = L$ ou $W = jL$.

Demonstração: Se $\gamma \in \Lambda G$, então $j\gamma(\lambda) = \gamma(\lambda)j$, ou seja $\gamma(\lambda) = \pm j\gamma(\lambda)j$ para todo o $\lambda \in \mathbb{C}^*$, isto é,

$$\begin{aligned} (\pi_L^\perp + \lambda^{-1}\pi_L) (\pi_W^\perp + \lambda\pi_W) &= \pm j (\pi_L^\perp + \lambda^{-1}\pi_L) (\pi_W^\perp + \lambda\pi_W) j \\ &= j (\pi_L^\perp + \lambda^{-1}\pi_L) jj (\pi_W^\perp + \lambda\pi_W) \\ &= (\pi_{jL}^\perp + \lambda\pi_{jL}) (\pi_{jW}^\perp + \lambda^{-1}\pi_{jW}), \end{aligned}$$

em que na última igualdade usámos o facto de $j(zu) = \bar{z}ju$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ e $u \in V$.

Comparando os coeficientes em λ^{-1} e os independentes de λ , obtemos

$$\pi_L \pi_W^\perp = \pi_{jL}^\perp \pi_{jW} \quad \text{e} \quad \pi_L \pi_W + \pi_L^\perp \pi_W^\perp = \pi_{jL} \pi_{jW} + \pi_{jL}^\perp \pi_{jW}^\perp.$$

No caso não trivial $L \neq W$, logo $\pi_L \pi_W^\perp \neq 0$, e então $\pi_{jL}^\perp \pi_{jW} \neq 0$. Da primeira igualdade acima, e como $\dim L = 1$, logo $L \subseteq jL^\perp$, o que equivale a $jL \subseteq L^\perp$, ou seja, L é j -isotrópico. Como $\gamma^{-1} \in \Lambda G$, usando o mesmo argumento, provamos que W é j -isotrópico.

Por outro lado, tendo em conta a decomposição $\mathbb{C}^n = jL \oplus (jL)^\perp$, escrevemos $w = w_1 + w_2 \in W$. Da segunda equação concluímos que $\pi_L(w) = \pi_{jL}^\perp(w)$, e logo $L \ni \pi_L(w) = w_2$. Assim, $W \subset L \oplus jL$.

Vamos agora supor que $j^2 = 1$. Como $W \subset L \oplus jL$, qualquer elemento $w \in W$ pode ser tomado como $w = v_1 + jv_2$, com $v_1, v_2 \in L$. Como L e W são j -isotrópicos, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w, jw \rangle = \langle v_1 + jv_2, jv_1 + v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle jv_2, jv_1 \rangle \\ &= \langle v_1, v_2 \rangle + \overline{\langle v_2, v_1 \rangle} = 2\langle v_1, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Assim, ou $v_1 = 0$ o que significa que $W = jL$, ou $v_2 = 0$ o que significa que $W = L$.

□

Em [14], os autores provaram que o grupo $\Omega_{\text{rat}}\text{SO}(n)$ é gerado pelos factores simples. Mas no caso de $G = \text{Sp}(n)$ a classe de geradores é ligeiramente maior.

Teorema 3.10. *O grupo dos lacetes racionais $\Omega_{\text{rat}}G$, com $G = \text{Sp}(n)$ ou $G = \text{SO}(n)$, é gerado pelos lacetes da forma*

$$q_{a,L,W}(\lambda) = (\pi_L^\perp + \zeta_a(\lambda)^{-1}\pi_L) (\pi_W^\perp + \zeta_a(\lambda)\pi_W), \quad (3.6)$$

onde L e W são dois espaços j -isotrópicos de dimensão 1 tais que $L \subset W \oplus jW$, e $a \in \mathbb{C} \setminus \{S^1\}$.

Demonstração: A prova que apresentamos é inspirada no trabalho de [14]. Tomemos um lacete $\Phi \in \Omega_{\text{rat}}G$. Usando a fracção linear $\zeta_a : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ definida em (3.1) podemos mover as singularidades de Φ em a e em $1/\bar{a}$ para 0 e para ∞ , com $a \in \mathbb{C} \setminus \{S^1\}$. Consideremos que a série de Laurent de $\Phi \circ \zeta_a^{-1}$ em potências de λ tem a forma

$$\Phi \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) = \lambda^{-k}\Phi_{-k} + \lambda^{-k+1}\Phi_{-k+1} + \lambda^{-k+2}\Phi_{-k+2} + \dots,$$

com $\Phi_{-k} \neq 0$. Como Φ toma valores em $G^{\mathbb{C}}$, preserva a forma bilinear ω , e logo

$$\omega(\Phi \circ \zeta_a^{-1}(\lambda)u, \Phi \circ \zeta_a^{-1}(\lambda)v) = \omega(u, v)$$

para todo o $u, v \in V$ e para todo o $\lambda \neq 0, \infty$. Comparando os coeficientes em λ temos que

$$\omega(\Phi_{-k}u, \Phi_{-k}v) = 0 \quad (3.7)$$

$$\omega(\Phi_{-k+1}u, \Phi_{-k}v) + \omega(\Phi_{-k}u, \Phi_{-k+1}v) = 0. \quad (3.8)$$

Da equação (3.7) concluímos que $\text{Im}\Phi_{-k}$ é j -isotrópico. Então, podemos escrever

$$V = \text{Im}\Phi_{-k} \oplus (\text{Im}\Phi_{-k} \oplus j\text{Im}\Phi_{-k})^\perp \oplus j\text{Im}\Phi_{-k}.$$

Para quaisquer espaços L e W de dimensão 1, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=-k-1}^{\infty} \lambda^i \Psi_i &:= (q_{a,L,W}\Phi) \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) \\ &= \lambda^{-k-1}\pi_L\pi_W^\perp\Phi_{-k} + \lambda^{-k}(\pi_L^\perp\pi_W^\perp\Phi_{-k} + \pi_L\pi_W\Phi_{-k} + \pi_L\pi_W^\perp\Phi_{-k+1}) + \dots \end{aligned}$$

Assim, tomemos $W \subset \text{Im}\Phi_{-k}$ (logo j -isotrópico) e L também j -isotrópico. Pelo Lema 3.9, o lacete racional $q_{a,L,W}(\lambda)$ é um lacete em ΛG se e só se $L \subset W \oplus jW$; recordemos ainda que no caso de $j^2 = 1$ (o caso $G = \text{SO}(n)$) temos apenas duas possibilidades: ou $L = W$ ou $L = jW$. Então

$$\sum_{i=-k-1}^{\infty} \lambda^i \Psi_i = \lambda^{-k-1}\pi_L\pi_{jW}\Phi_{-k} + \lambda^{-k}(\pi_L^\perp\pi_W^\perp\Phi_{-k} + \pi_L\pi_W\Phi_{-k} + \pi_L\pi_{jW}\Phi_{-k+1}) + \dots$$

Como $\text{Im}\Phi_{-k}$ é j -isotrópico temos

$$\text{Im}\Phi_{-k} \subset j\text{Im}\Phi_{-k}^\perp \subset jW^\perp = \ker \pi_{jW},$$

e logo $\pi_{jW}\Phi_{-k} = 0$ o que implica que Ψ_{-k-1} é nulo; assim, a multiplicação à esquerda por $q_{a,L,W}$ não aumenta a ordem do pólo de Φ em a .

Para uma escolha conveniente de L o rank de Ψ_{-k} é menor do que o rank de Φ_{-k} . De facto, tomando $u \in \ker \Phi_{-k}$ temos $\Psi_{-k}u = \pi_L \pi_{jW} \Phi_{-k+1}u$. Além disso, pela equação (3.8), temos que $\omega(\Phi_{-k+1}u, \Phi_{-k}v) = 0$ para todo o $v \in V$; ou seja, $\langle \Phi_{-k+1}u, j\Phi_{-k}v \rangle = 0$ para todo o $v \in V$. Assim

$$\Phi_{-k+1}(\ker \Phi_{-k}) \perp j\text{Im}\Phi_{-k} \supset jW,$$

o que em particular significa que $\Psi_{-k}u = 0$ e logo $\ker \Phi_{-k} \subseteq \ker \Psi_{-k}$. Seja $v_0 \in V$ tal que $\Phi_{-k}v_0 \in W \setminus \{0\}$ e escolhemos L o espaço de dimensão 1 gerado por

$$j(\Phi_{-k}v_0 + \pi_{jW}\Phi_{-k+1}v_0).$$

No caso $j^2 = 1$, se na equação (3.8) tomarmos $u, v = v_0$ e usando a simetria de ω temos $\Phi_{-k+1}v_0 \in jW^\perp$ e logo $L = jW$, por isso, L é j -isotrópico; quando $j^2 = -1$, temos $\langle u, ju \rangle = \omega(u, u) = 0$, como L é um subespaço de dimensão 1, logo é j -isotrópico. Com esta escolha, a inclusão $\ker \Phi_{-k} \subset \ker \Psi_{-k}$ é própria, ou seja, $\text{rank}\Psi_{-k} < \text{rank}\Phi_{-k}$.

Podemos continuar este processo até removermos a singularidade de Φ em a ; é claro que, ao fazermos isso, ao mesmo tempo também removemos a singularidade em $1/\bar{a}$, devido à condição de realidade. Assim, como Φ tem um número finito de singularidades, depois de multiplicarmos à esquerda por um número finito de lacetes da forma (3.6), obtemos uma aplicação holomorfa $\mathbb{P}^1 \rightarrow G^\mathbb{C}$. Como as únicas aplicações holomorfas em compactos são as aplicações constantes, concluímos que os lacetes da forma (3.6) geram o grupo $\Omega_{\text{rat}}G$.

□

Observação 3.11. O lacete racional $q_{a,L,W}$ é um factor simples não trivial, como na Definição 3.6, se e só se $W = jL$. Assim, como no Teorema 5.1 em [14], concluímos que o grupo dos lacetes racionais em $\text{SO}(n)$ é gerado pelos factores simples $q_{a,L,jL}$; neste caso, vamos denotar $q_{a,L,jL}$ apenas por $q_{a,L}$.

De forma a calcular a acção de revestimento destes geradores, vamos usar a fórmula de Uhlenbeck [35] para acções de revestimento dos factores simples, definidos em (3.4), em $\Omega_{\text{hol}}\text{U}(n)$; a qual temos de adaptar uma vez que os seus factores simples e os nossos são ligeiramente diferentes. Recordemos então que dado p_{a,H_V} como na Observação 3.7, e Φ uma solução estendida, então

$$p_{a,H_V} \# \Phi = p_{a,H_V} \Phi p_{a,H_{\hat{V}}}^{-1},$$

onde $\hat{V} = \Phi(a)^{-1}V$; da mesma forma, como $\zeta_a(\lambda)^{-1} = \zeta_{1/\bar{a}}(\lambda)$, temos que

$$p_{a,H_V}^{-1} \# \Phi = p_{1/\bar{a},H_V} \# \Phi = p_{1/\bar{a},H_V} \Phi p_{1/\bar{a},H_{\hat{V}}}^{-1} = p_{a,H_V}^{-1} \Phi p_{a,H_{\hat{V}}},$$

onde $\hat{V} = \Phi(1/\bar{a})^{-1}V$. Mais concretamente, aplicamos duas vezes esta fórmula:

Denotemos por H_L o elemento de $\mathfrak{u}(n)$ dado por $\sqrt{-1}$ em L e por 0 em L^\perp ; e de forma análoga, denotemos $H_W \in \mathfrak{u}(n)$. Como vimos na Observação 3.7, os lacetes p_{a,H_L} e p_{a,H_W} são da forma (3.4); e como $q_{a,L,W} = p_{a,H_L}^{-1} p_{a,H_W}$, temos

$$\begin{aligned} q_{a,L,W} \# \Phi &= p_{a,H_L}^{-1} \# (p_{a,H_W} \# \Phi) = p_{a,H_L}^{-1} \# \left(p_{a,H_W} \Phi p_{a,H_{\hat{W}}}^{-1} \right) \\ &= p_{a,H_L}^{-1} p_{a,H_W} \Phi p_{a,H_{\hat{W}}}^{-1} p_{a,H_L} = q_{a,L,W} \Phi q_{a,\hat{W},\hat{L}} \\ &= q_{a,L,W} \Phi q_{a,\hat{L},\hat{W}}^{-1} \in \Omega_{\text{hol}}G \subset \Omega_{\text{hol}}\text{U}(n), \end{aligned}$$

onde $\hat{W} = \Phi(a)^{-1}W$ e $\hat{L} = (p_{a,H_W} \# \Phi)(1/\bar{a})^{-1}L$. Então, o Lema 3.9 garante que os espaços de

dimensão 1, \hat{L} e \hat{W} , são j -isotrópicos e que $\hat{L} \subset \hat{W} \oplus j\hat{W}$. Quando $G = \text{SO}(n)$ (ou seja, $j^2 = 1$) temos de ter, no caso não trivial, $W = jL$ e $\hat{W} = j\hat{L}$ e, assim, recuperamos a fórmula indicada em [3, 14] para as acções de revestimento de $q_{a,L}$ em Φ , dada por

$$q_{a,L} \# \Phi = q_{a,L} \Phi q_{a,L}^{-1},$$

onde $\hat{L} = \Phi(a)^{-1}L$.

3.3.2 O caso $\text{SU}(n)$

Observemos que um lacete $\gamma \in \Lambda\text{U}(n)$ da forma

$$\gamma(\lambda) = (\pi_L^\perp + \lambda^{-1}\pi_L) (\pi_W^\perp + \lambda\pi_W)$$

está em $\Lambda\text{SU}(n)$ se e só se $\dim L = \dim W$. Temos o seguinte teorema.

Teorema 3.12. *O grupo dos lacetes racionais $\Omega_{\text{rat}}\text{SU}(n)$ é gerado pelos lacetes da forma*

$$q_{a,L,W}(\lambda) = (\pi_L^\perp + \zeta_a(\lambda)^{-1}\pi_L) (\pi_W^\perp + \zeta_a(\lambda)\pi_W)$$

onde L e W são subespaços tais que $\dim L = \dim W$, e $a \in \mathbb{C} \setminus \{S^1\}$.

Demonstração: Seja $\Phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Sl}(n, \mathbb{C})$ um lacete racional satisfazendo a condição de realidade. Fixemos um pólo $a \in \mathbb{C} \setminus \{S^1\}$. Novamente, podemos usar a fracção linear ζ_a para mover as singularidades em a e $1/\bar{a}$ para 0 e ∞ . Indicamos a série de Laurent de $\Phi \circ \zeta_a^{-1}$ em λ da seguinte forma

$$\Phi \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) = \lambda^{-k}\Phi_{-k} + \lambda^{-k+1}\Phi_{-k+1} + \lambda^{-k+2}\Phi_{-k+2} + \dots$$

em que $\Phi_{-k} \neq 0$.

Como $\det(\lambda^k \Phi \circ \zeta_a^{-1}(\lambda)) = \lambda^{kn}$, tomando $\lambda = 0$ temos que $\det \Phi_{-k} = 0$. Consideremos $W = \text{Im} \Phi_{-k}$ e $p_{a,H_W} \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) = \gamma_{a,W} \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) = \pi_W^\perp + \lambda\pi_W$, e então

$$\begin{aligned} \Psi \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) &= \sum_{i=-k+1}^{\infty} \lambda^i \Psi_i := (\gamma_{a,W} \Phi) \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) \\ &= \lambda^{-k+1} (\pi_W \Phi_{-k} + \pi_W^\perp \Phi_{-k+1}) + \lambda^{-k+2} (\pi_W \Phi_{-k+1} + \pi_W^\perp \Phi_{-k+2}) + \dots \end{aligned}$$

Observemos que

$$\det(\lambda^{k-1} \Psi \circ \zeta_a^{-1}(\lambda)) = \lambda^{(k-1)n+m},$$

onde $\dim W = m$. Tomando $\lambda = 0$ obtemos $\det(\pi_W \Phi_{-k} + \pi_W^\perp \Phi_{-k+1}) = 0$; em particular

$$R := \text{Im}^\perp (\pi_W \Phi_{-k} + \pi_W^\perp \Phi_{-k+1}) \neq \{0\}.$$

Tomemos L um subespaço de dimensão m contendo pelo menos uma linha de R , e então temos que

$$\text{rank} \pi_L (\pi_W \Phi_{-k} + \pi_W^\perp \Phi_{-k+1}) < \text{rank} \Phi_{-k}.$$

Como $p_{a,H_L}^{-1} \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) = \pi_L^\perp + \lambda^{-1}\pi_L$ temos

$$(q_{a,L,W}\Phi) \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) = (p_{a,H_L}^{-1}\Psi) \circ \zeta_a^{-1}(\lambda) = \lambda^{-k}\pi_L (\pi_W\Phi_{-k} + \pi_W^\perp\Phi_{-k+1}) \\ + \lambda^{-k+1} [\pi_L^\perp (\pi_W\Phi_{-k} + \pi_W^\perp\Phi_{-k+1}) + \pi_L (\pi_W\Phi_{-k+1} + \pi_W^\perp\Phi_{-k+2})] + \dots,$$

e podemos continuar com este processo, analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.10, até remover todas as singularidades em a e logo em $1/\bar{a}$.

□

Novamente, tal como no caso anterior, a acção de revestimento dos geradores dos lacetes racionais em $SU(n)$, $q_{a,L,W}$, pode ser calculada aplicando duas vezes a fórmula da acção de revestimento dos factores simples (3.4).

3.4 Acções de Revestimento em Aplicações Harmónicas com Número de União Finito

Suponhamos que $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$ é uma aplicação harmónica com número de união finito e energia finita, isto é, $\int_{\mathbb{C}} |d\phi|^2 < \infty$. Neste caso, de [31] sabemos que ϕ se estende a uma aplicação suave harmónica definida em S^2 . Por outro lado, em [2] os autores provaram que as acções de revestimento preservam a energia. Assim, qualquer nova aplicação harmónica $\tilde{\phi}$ obtida a partir de ϕ por meio de uma acção de revestimento também tem energia finita e logo admite uma extensão a S^2 .

3.4.1 Acções de Revestimento Singular ou Processo de Completação Modificada

Consideremos uma curva $\{\gamma_a\}$ em \mathcal{G}_0 e $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ uma solução estendida. Consideremos o limite $\tilde{\Phi} = \lim_{a \rightarrow 0} (\gamma_a \# \Phi)$. Suponhamos que $\tilde{\Phi}$ tem um número finito de singularidades removíveis; removendo essas singularidades obtemos uma nova solução estendida que também indicamos por $\tilde{\Phi}$. Este processo de obter $\tilde{\Phi}$ a partir de Φ é chamado de *processo de completação modificada* em [2] ou *acção de revestimento singular* em [25].

Em [2], Bergvelt e Guest provaram que qualquer aplicação harmónica $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ pode ser reduzida a uma constante aplicando duas vezes o processo de completação modificada. Jiao [25] generalizou este resultado e provou que qualquer aplicação harmónica $S^2 \rightarrow U(n)$ pode ser reduzida a uma constante aplicando n acções de revestimento singular. Mais, para uma escolha conveniente de subespaços complexos V de \mathbb{C}^n na expressão (3.4), a acção de revestimento singular $\tilde{\Phi} = \lim_{a \rightarrow 0} (\gamma_a \# \Phi)$ equivale a somar um união a Φ [2, 35]. No entanto, nem todos os uniões podem ser somados através de acções de revestimento singular, como foi observado em [2].

Quando $p_{a,\xi}$ é um factor simples, como definido em (3.5), dizemos que a acção de revestimento singular $\tilde{\Phi} = \lim_{a \rightarrow 0} (p_{a,\xi} \# \Phi)$ é uma *acção de revestimento singular simples*.

Em seguida, provamos que qualquer aplicação harmónica ϕ de S^2 num grupo de Lie de matrizes compacto semi-simples G pode ser reduzida a uma constante aplicando um número finito de acções de revestimento singular, mais concretamente acções de revestimento singular simples; esta redução induz uma factorização de ϕ em factores bandeira $S^2 \rightarrow G$.

3.5 Factorizações de Aplicações Harmónicas por Acções de Revestimento Singular Simples

Seja G um grupo de Lie de matrizes compacto semi-simples e tomemos T um torus maximal de G ; denotemos por \mathfrak{t} e \mathfrak{g} as álgebras de Lie de T e de G , respectivamente. Tal como na Secção 3.1, seja Δ o conjunto das raízes de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ relativamente a $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$; fixemos um sistema de raízes positivas Δ^+ com raízes simples $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ e tomemos $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ um subconjunto de $\{1, \dots, l\}$.

Tendo presente as notações do Teorema 3.4, consideremos $\Psi = \exp B : \mathbb{C} \setminus D' \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}$ uma solução estendida complexa, onde D' é um subconjunto discreto, associada ao potencial meromorfo $\mu = \lambda^{-1} B'_1 dz$, correspondente a uma aplicação harmónica $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$ com número de unitão finito, sendo $\Phi : \mathbb{C} \setminus D' \rightarrow \Omega_{\text{hol}} G$ a solução estendida associada. Em particular, B_1 é uma função meromorfa com valores em $\mathfrak{p}_I^{(1)}$. E nestas condições, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.13. *A aplicação harmónica com número de unitão finito ϕ pode ser reduzida a uma constante aplicando k acções de revestimento singular simples. Assim, qualquer aplicação harmónica de S^2 para G pode ser reduzida a uma constante aplicando um número finito de acções de revestimento singular simples.*

Demonstração: Recordemos a Secção 3.1. Sejam $\xi_1, \dots, \xi_l \in \mathfrak{t}$ os elementos duais de $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, no sentido em que $\alpha_i(\xi_j) = \delta_{ij} \sqrt{-1}$. Dada uma raiz $\alpha \in \Delta$, escrevemos $\alpha = \sum_{i=1}^l n_i(\alpha) \alpha_i$; quando $\alpha \in \Delta^+$ temos que $n_i(\alpha)$ é um inteiro não negativo. Além disso, recordemos a Observação 3.8, $m_i \xi_i \in \mathfrak{J}$ para todo o $i \in \{1, \dots, l\}$, para algum $m_i \in \mathbb{N}$.

Consideremos o factor simples $p_{a, m_{i_1} \xi_{i_1}}$, com $0 < |a| < 1$ e a sua acção no potencial meromorfo $\mu = \lambda^{-1} B'_1 dz$, que indicaremos por $\mu^{i_1, a}$, e temos

$$\begin{aligned} \mu^{i_1, a} &:= p_{a, m_{i_1} \xi_{i_1}} \cdot \mu = \lambda^{-1} \text{Ad}_{\exp(-\ln(\zeta_a(\lambda)) \sqrt{-1} m_{i_1} \xi_{i_1})} (B'_1 dz) \\ &= \lambda^{-1} \exp(-\ln(\zeta_a(\lambda)) \sqrt{-1} m_{i_1} \text{ad}_{\xi_{i_1}}) (B'_1 dz) \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\ln(\zeta_a(\lambda)) \sqrt{-1} m_{i_1})^n}{n!} (\text{ad}_{\xi_{i_1}})^n (B'_1 dz) \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n_I(\alpha) \geq 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\ln(\zeta_a(\lambda)) \sqrt{-1} m_{i_1})^n}{n!} (\text{ad}_{\xi_{i_1}})^n (B'_{1\alpha} dz) \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n_I(\alpha) \geq 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\ln(\zeta_a(\lambda)) \sqrt{-1} m_{i_1})^n}{n!} (\sqrt{-1})^n n_{i_1}(\alpha)^n B'_{1\alpha} dz \\ &= \lambda^{-1} \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) = 0}} B'_{1\alpha} dz + \lambda^{-1} \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) > 0}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln(\zeta_a(\lambda)) m_{i_1})^n}{n!} n_{i_1}(\alpha)^n B'_{1\alpha} dz \\ &= \lambda^{-1} \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) = 0}} B'_{1\alpha} dz + \lambda^{-1} \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) > 0}} \zeta_a(\lambda)^{m_{i_1} n_{i_1}(\alpha)} B'_{1\alpha} dz, \end{aligned}$$

visto que $B'_1 \in \mathfrak{p}_I^{(1)} \Leftrightarrow B'_1 = \sum_{n_I(\alpha) \geq 1} B'_{1\alpha} \mathbf{e} \text{ad}_{\xi_{i_1}} (B'_{1\alpha}) = \alpha(\xi_{i_1}) B'_{1\alpha} = \sqrt{-1} n_{i_1}(\alpha) B'_{1\alpha}$.

Assim, apesar de $p_{a, m_{i_1} \xi_{i_1}}$ não pertencer a $\Lambda_+ G^{\mathbb{C}}$, o novo potencial $\mu^{i_1, a}$ estende-se meromorficamente em λ ao disco unitário $I = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ com no máximo um pólo simples em

0, e consideremos a solução estendida complexa dada por

$$\Psi^{i_1, a} = \text{Ad}_{p_{a, m_{i_1} \xi_{i_1}}}(\Psi) : \mathbb{C} \setminus D' \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}},$$

associada a $\mu^{i_1, a}$, visto que $(\Psi^{i_1, a})^{-1} d\Psi^{i_1, a} = \mu^{i_1, a}$.

Se factorizarmos $\Psi^{i_1, a}$ de acordo com a Observação 1.3, obtemos uma solução estendida

$$\Phi^{i_1, a} : \mathbb{C} \setminus D' \rightarrow \Omega G.$$

Observemos que $\Psi^{i_1, a}$ pode ser vista como uma aplicação em $\Lambda^\varepsilon G$ para todo o $0 < \varepsilon < |a|$ da seguinte forma: em C_ε é precisamente $\Psi^{i_1, a}$, em $C_{1/\varepsilon}$ é determinada pela condição de realidade. Do mesmo modo, $\mu^{i_1, a}$ pode ser visto como um potencial ε -holomorfo para todo o $0 < \varepsilon < |a|$. Assim, como $\Phi^{i_1, a}$ é a solução estendida associada ao potencial $\mu^{i_1, a} = p_{a, m_{i_1} \xi_{i_1}} \cdot \mu$, pelo Teorema 2.15 temos $\Phi^{i_1, a} = p_{a, m_{i_1} \xi_{i_1}} \# \Phi$.

Agora, vamos tomar o limite $\Psi^{i_1} = \lim_{a \rightarrow 0} \Psi^{i_1, a}$ em $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ e temos

$$\begin{aligned} \Psi^{i_1} &= \exp(-\ln(\lambda)\sqrt{-1}m_{i_1}\xi_{i_1}) \exp(B) \exp(\ln(\lambda)\sqrt{-1}m_{i_1}\xi_{i_1}) \\ &= \exp(\exp(-\ln(\lambda)\sqrt{-1}m_{i_1}\xi_{i_1}) B \exp(\ln(\lambda)\sqrt{-1}m_{i_1}\xi_{i_1})) \\ &= \exp\left(\text{Ad}_{\exp(-\ln(\lambda)\sqrt{-1}m_{i_1}\xi_{i_1})} B\right), \end{aligned}$$

ou seja

$$\Psi^{i_1} = \exp(B^{i_1}) : \mathbb{C} \setminus D' \rightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}$$

onde

$$B^{i_1} = \text{Ad}_{\exp(-\ln(\lambda)\sqrt{-1}m_{i_1}\xi_{i_1})}(B).$$

A solução estendida complexa Ψ^{i_1} integra o potencial

$$\mu^{i_1} := \lim_{a \rightarrow 0} \mu^{i_1, a} = \lambda^{-1} \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) = 0}} B'_{1\alpha} dz + \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) > 0}} \lambda^{m_{i_1} n_{i_1}(\alpha) - 1} B'_{1\alpha} dz.$$

Novamente, podemos factorizar Ψ^{i_1} usando a Observação 1.3 e obtemos uma solução estendida $\Phi^{i_1} : \mathbb{C} \setminus D' \rightarrow \Omega G$; mas pela continuidade dessa mesma factorização, temos $\Phi^{i_1} = \lim_{a \rightarrow 0} \Phi^{i_1, a}$. Por outro lado, como B^{i_1} é meromorfa e nilpotente, pela Observação 3.5 a correspondente aplicação harmónica ϕ^{i_1} pode ser estendida a todo o \mathbb{C} . Assim, $\phi^{i_1} : \mathbb{C} \rightarrow G$ é uma aplicação harmónica obtida a partir de ϕ através de uma acção de revestimento singular simples.

Se aplicarmos a ϕ^{i_1} a acção de revestimento singular simples definida por $p_{a, m_{i_2} \xi_{i_2}}$, iremos obter um novo potencial meromorfo

$$\mu^{i_1 i_2} = \lambda^{-1} \mu_{-1}^{i_1 i_2} + \mu_0^{i_1 i_2} + \lambda_1 \mu^{i_1 i_2} + \dots$$

com

$$\mu_{-1}^{i_1 i_2} = \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) = n_{i_2}(\alpha) = 0}} B'_{1\alpha} dz.$$

O potencial meromorfo $\mu^{i_1 i_2}$ dá origem a uma solução estendida complexa $\Psi^{i_1 i_2}$ bem definida

excepto nas suas singularidades. Mais, tal como antes $\Psi^{i_1 i_2} = \exp(B^{i_1 i_2})$ com

$$B^{i_1 i_2} = \text{Ad}_{\exp(-\ln(\lambda)\sqrt{-1}m_{i_2}\xi_{i_2})}(B^{i_1}).$$

Novamente, $B^{i_1 i_2}$ é meromorfa e nilpotente e então $\Psi^{i_1 i_2}$ corresponde a uma aplicação harmónica $\phi^{i_1 i_2}$ definida em todo \mathbb{C} .

Se continuarmos com este processo, alcançaremos um potencial $\mu^{i_1 i_2 \dots i_k}$ em que o coeficiente associado a λ^{-1} é nulo. Assim, a correspondente aplicação harmónica $\phi^{i_1 i_2 \dots i_k}$ é constante.

Se partirmos de uma aplicação harmónica $\phi : \mathbb{C} \rightarrow G$ que admita uma extensão suave a S^2 , então todas as aplicações $\phi^{i_1 i_2 \dots i_k}$ também admitem uma extensão a S^2 . Como toda a aplicação harmónica de S^2 em G tem número de unitão finito, toda a aplicação harmónica de S^2 em G pode ser reduzida a uma constante aplicando um número finito de acções de revestimento singular simples. □

Quando G é um grupo de Lie semi-simples compacto clássico, esta factorização pode ser refinada numa factorização de factores lineares. De facto, seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(n)$ uma álgebra de Lie semi-simples compacta clássica; e escolhemos um torus maximal \mathfrak{t} . A subálgebra \mathfrak{t} é gerada por elementos da forma $H = H^+ + H^-$, em que: $H^\pm \in \mathfrak{u}(n)$; H^+ actua diagonalmente em \mathbb{C}^n com valores próprios 0 e $\sqrt{-1}$; $H^- \in \mathfrak{u}(n)$ actua diagonalmente em \mathbb{C}^n com valores próprios 0 e $-\sqrt{-1}$ (denote-se por V_0^\pm e V_1^\pm os espaços próprios de H^\pm correspondentes a 0 e a $\pm\sqrt{-1}$), temos $\dim V_1^+ = \dim V_1^- = 1$ e V_1^+ é ortogonal a V_1^- . Em particular, $H \in \mathfrak{J}$ e temos que

$$\begin{aligned} p_{a,H}(\lambda) &= \exp(-\ln(\zeta_a(\lambda))\sqrt{-1}H^+) \exp(-\ln(\zeta_a(\lambda))\sqrt{-1}H^-) \\ &= \left(\pi_{V_1^+}^\perp + \zeta_a(\lambda)\pi_{V_1^+}\right) \left(\pi_{V_1^-}^\perp + \zeta_a(\lambda)^{-1}\pi_{V_1^-}\right). \end{aligned}$$

Como cada $p_{a,m_{i_k}\xi_{i_k}}$ é um produto de lacetes racionais $p_{a,H}$, concluímos que a factorização indicada anteriormente pode ser refinada numa factorização de factores lineares - a factorização que corresponde à acção de revestimento singular dos factores lineares $\gamma_a(\lambda) = \pi_{V_1^\pm}^\perp + \zeta_a(\lambda)^{\pm 1}\pi_{V_1^\pm}$.

3.5.1 Factorizações de Aplicações Harmónicas em Espaços Simétricos

Terminamos este capítulo com uma extensão destas técnicas ao caso de aplicações harmónicas com número de unitão finito em espaços simétricos.

Consideremos uma aplicação harmónica ψ com número de unitão finito de \mathbb{C} num espaço simétrico $N = G/K$. Recordando a Secção 1.5, através da imersão de Cartan de G/K em G podemos identificar ψ com uma aplicação harmónica de $\phi = \iota \circ \psi : \mathbb{C} \rightarrow G$. Seja $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ uma solução estendida associada a ϕ . Pelo Teorema 3.13, podemos reduzir ϕ a uma constante aplicando um número finito de acções de revestimento singular simples. No entanto, em geral, nem $p_{a,\xi} \# \Phi$ nem $\lim_{a \rightarrow 0} p_{a,\xi} \# \Phi$ correspondem a aplicações harmónicas em espaços G -simétricos.

Em seguida descrevemos como reduzir ϕ a uma constante aplicando um número finito de acções de revestimento singular, mas ao mesmo tempo preservando a simetria do espaço. Faremos isso no caso de espaços G -simétricos internos, que devido ao seguinte resultado de Burstall e Guest tem uma formulação mais simples.

Proposição 3.14. [5] *Seja G um grupo de Lie compacto (conexo). Então cada componente conexa de $\sqrt{e} = \{g \in G : g^2 = e\}$ é um espaço simétrico compacto interno.*

Inversamente, qualquer espaço simétrico compacto interno (conexo) pode ser imerso num grupo de Lie G como componente conexa de \sqrt{e} .

A imersão referida na proposição anterior é totalmente geodésica; assim, as aplicações harmónicas em espaços simétricos internos podem ser vistas como aplicações harmónicas especiais em grupos de Lie G . Como em [5, 32, 35], vamos caracterizar a correspondente solução estendida especial:

Consideremos a involução $\mathcal{I} : \Omega G \rightarrow \Omega G$ tal que

$$\mathcal{I}(\gamma)(\lambda) = \gamma(-\lambda)\gamma(-1)^{-1},$$

e denotamos o conjunto fixado por \mathcal{I} por

$$\Omega G^{\mathcal{I}} = \{\gamma \in \Omega G : \mathcal{I}(\gamma) = \gamma\}.$$

Se $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G$ for uma solução estendida, é fácil verificar que $\mathcal{I}(\Phi)$ também é uma solução estendida; isto é que $\mathcal{I}(\Phi)^{-1}d\mathcal{I}(\Phi) = \alpha_\lambda$, para algum α_λ da forma (1.8). Se $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G^{\mathcal{I}}$, logo $\Phi_{-1} = \Phi_1\Phi_{-1}^{-1} \Rightarrow \Phi_{-1}^2 = \Phi_1 = e$, ou seja, $\Phi_{-1} \in \sqrt{e}$. Temos o seguinte Teorema.

Teorema 3.15. [5, 32, 35] *Seja $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G^{\mathcal{I}}$ uma solução estendida. Então $\phi = \Phi_{-1}$ define uma aplicação harmónica de \mathbb{C} numa componente conexa de \sqrt{e} .*

Inversamente, seja $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \sqrt{e}$ uma aplicação harmónica. Então, existe uma solução estendida $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G^{\mathcal{I}}$ tal que $\Phi_{-1} = \phi$.

Observemos que ϕ toma valores em \sqrt{e} se e só se $\phi = \pi_V - \pi_V^\perp$, para algum subespaço $V \subseteq \mathbb{C}^n$. De facto, se $\phi = \Phi_{-1} = \pi_V - \pi_V^\perp$ temos $\phi^2 = Id$ e, portanto, ϕ toma valores em \sqrt{e} . Por outro lado, se ϕ toma valores em \sqrt{e} , ou seja, $\phi^2 = Id$, ϕ é diagonalizável com valores próprios 1 e -1 , assim $\phi = \pi_V - \pi_V^\perp$ para algum $V \subseteq \mathbb{C}^n$.

O próximo lema apresenta os elementos de \mathcal{G}_0 , o grupo dos germes em zero das aplicações holomorfas de \mathbb{C} em $G^\mathbb{C}$, que preservam $\Omega G^{\mathcal{I}}$ segundo uma acção de revestimento.

Lema 3.16. *Seja $\Phi \in \Omega G^{\mathcal{I}}$ e $\gamma \in \mathcal{G}_0$ tal que $\gamma(\lambda) = \gamma(-\lambda)$. Então $\gamma\#\Phi \in \Omega G^{\mathcal{I}}$.*

Demonstração: Começemos por observar que $(\gamma\Phi)(-\lambda) = \gamma(-\lambda)\Phi(-\lambda) = \gamma(\lambda)\Phi(\lambda)\Phi(-1) = (\gamma\Phi)(\lambda)\Phi(-1)$, e então temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\gamma\#\Phi)(\lambda) &= \underbrace{\mathcal{I}((\gamma\Phi)_E)(\lambda)}_{\in \Omega_{\mathbb{E}}G} = (\gamma\Phi)_E(-\lambda)(\gamma\Phi)_E(-1)^{-1} \\ &= (\gamma\Phi)(-\lambda)(\gamma\Phi)_I(-\lambda)^{-1}(\gamma\Phi)_E(-1)^{-1} \\ &= (\gamma\Phi)(\lambda)\Phi(-1)(\gamma\Phi)_I(-\lambda)^{-1}(\gamma\Phi)_E(-1)^{-1} \\ &= (\gamma\Phi)_E(\lambda) \underbrace{(\gamma\Phi)_I(\lambda)\Phi(-1)(\gamma\Phi)_I(-\lambda)^{-1}(\gamma\Phi)_E(-1)^{-1}}_{\in \Lambda_I^\mathbb{E}G}. \end{aligned}$$

Assim, pela unicidade da decomposição $\mathcal{I}((\gamma\Phi)_E) = (\mathcal{I}((\gamma\Phi)_E))_E (\mathcal{I}((\gamma\Phi)_E))_I$ referida no Teorema 1.2, temos $(\gamma\Phi)_I(\lambda)\Phi(-1)(\gamma\Phi)_I(-\lambda)^{-1}(\gamma\Phi)_E(-1)^{-1} = e$ e $\mathcal{I}((\gamma\Phi)_E) = (\gamma\Phi)_E$.

□

Agora consideremos os germes referidos no lema anterior, isto é,

$$\mathcal{G}_0^{\mathcal{I}} = \{\gamma \in \mathcal{G}_0 : \gamma(\lambda) = \gamma(-\lambda)\}.$$

Seja $\gamma \in \mathcal{G}_0^{\mathcal{I}}$ um lacete racional satisfazendo a condição de realidade $\overline{\gamma(\lambda)} = \gamma(1/\bar{\lambda})$. Se γ tiver uma singularidade em $a \in \mathbb{C}^*$, então, além de ter uma singularidade em $\lambda = 1/\bar{a}$, também $\lambda = -a$ será um ponto singular de γ . Assim, não existe nenhum factor simples não trivial em $\mathcal{G}_0^{\mathcal{I}}$.

Definição 3.17. Dado um factor simples $p_{a,\xi}$, definimos $\hat{p}_{a,\xi}(\lambda) = p_{a,\xi}(\lambda^2)$. É imediato que $\hat{p}_{a,\xi}$ é um lacete racional satisfazendo a condição de realidade e que $\hat{p}_{a,\xi} \in \mathcal{G}_0^{\mathcal{I}}$. À acção de revestimento singular $\tilde{\Phi} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\hat{p}_{a,\xi} \# \Phi)$ chamamos *acção de revestimento singular \mathcal{I} -simples*.

Seja $\phi : \mathbb{C} \rightarrow N \hookrightarrow G$ uma aplicação harmónica com número de unitão finito com $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Omega G^{\mathcal{I}}$ solução estendida e Ψ_μ solução estendida complexa associadas. Usando as mesmas notações que na demonstração do Teorema 3.13, a acção de revestimento singular \mathcal{I} -simples de $\hat{p}_{a,m_{i_1}\xi_{i_1}}$, para algum $m_{i_1} \in \mathbb{N}$, origina uma nova aplicação harmónica $\hat{\phi}^{i_1}$, com solução estendida complexa $\hat{\Psi}^{i_1}$ e potencial $\hat{\mu}^{i_1}$ dado por

$$\hat{\mu}^{i_1} = \lambda^{-1} \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) = 0}} B'_{1\alpha} dz + \sum_{\substack{n_I(\alpha) \geq 1 \\ n_{i_1}(\alpha) > 0}} \lambda^{2m_{i_1}n_{i_1}(\alpha)-1} B'_{1\alpha} dz.$$

Tal como anteriormente, se continuarmos com este processo, iremos obter um potencial $\hat{\mu}^{i_1 i_2 \dots i_k}$ em que o seu coeficiente em λ^{-1} é zero. Ou seja, provámos o seguinte Teorema:

Teorema 3.18. *Qualquer aplicação harmónica $\psi : \mathbb{C} \rightarrow N$ com número de unitão finito pode ser reduzida a uma constante aplicando k vezes uma acção de revestimento singular \mathcal{I} -simples. Em particular, qualquer aplicação harmónica de S^2 em N pode ser reduzida a uma constante aplicando um número finito de vezes uma acção de revestimento singular \mathcal{I} -simples.*

Capítulo 4

Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito em G_2

Neste Capítulo, usando o modelo Grassmanniano para o grupo de lactes de base em G_2 , vamos obter fórmulas explícitas para as factorizações canónicas de soluções estendidas que correspondem a aplicações harmónicas com número de unitão finito no grupo de Lie excepcional G_2 , assim como para aplicações harmónicas com número de unitão finito em espaços simétricos internos de G_2 . Os resultados obtidos neste capítulo coincidem com os do trabalho realizado em conjunto com Pacheco [11], onde a definição de uma relação de ordem parcial em \mathfrak{I} desempenha um papel fundamental nas provas dos mesmos. No entanto, na presente tese utilizamos exclusivamente o modelo Grassmanniano.

4.1 Decomposição de Bruhat de $Gr_{\text{alg}}(G)$

Recordemos as notações da Secção 3.1, a rede inteira $\mathfrak{I} = (2\pi)^{-1} \exp^{-1}(e) \cap \mathfrak{t}$ pode ser identificada com o grupo dos homomorfismos $S^1 \rightarrow T$ associando a cada $\xi \in \mathfrak{I}$ o homomorfismo γ_ξ definido por $\gamma_\xi(\lambda) = \exp(-\ln(\lambda)\sqrt{-1}\xi)$; que coincide precisamente com $p_{a,\xi}(\lambda)$ definido em (3.5) quando $a \rightarrow 0$.

Denotemos por \mathfrak{g}_i^ξ o espaço próprio de ad_ξ associado ao valor próprio $\sqrt{-1}i$, para todo o $i \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$\mathfrak{g}_i^\xi = \{X \in \mathfrak{g}^\mathbb{C} : \text{ad}_\xi X = \sqrt{-1}iX\};$$

e temos em $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ uma estrutura de álgebra de Lie graduada

$$\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \bigoplus_{i \in \{-r(\xi), \dots, r(\xi)\}} \mathfrak{g}_i^\xi, \quad [\mathfrak{g}_i^\xi, \mathfrak{g}_j^\xi] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}^\xi,$$

onde $r(\xi) = \max\{i : \mathfrak{g}_i^\xi \neq 0\}$. É fácil verificar que

$$\mathfrak{g}_i^\xi = \bigoplus_{\alpha(\xi)=\sqrt{-1}i} \mathfrak{g}^\alpha,$$

com \mathfrak{g}^α definido por (3.2).

Para cada $\xi \in \mathfrak{I}$, podemos tomar a classe de conjugação dos homomorfismos $S^1 \rightarrow T$ que contém γ_ξ , e escrevemos

$$\Omega_\xi = \{g\gamma_\xi g^{-1} : g \in G\}.$$

Dado $\gamma \in \Omega_\xi$, dizemos que γ é um *lacete* S^1 -invariante. De acordo com [2], trata-se de um espaço homogéneo complexo, pois

$$\Omega_\xi \cong G^\mathbb{C} / \left(\gamma_\xi \Lambda^+ G^\mathbb{C} \gamma_\xi^{-1} \right).$$

Tomemos uma câmara de Weyl fundamental \mathcal{W} em \mathfrak{t} e seja $\mathfrak{I}' = \mathfrak{I} \cap \mathcal{W}$. Então:

Teorema 4.1. [30] *Temos a decomposição de Bruhat* $Gr_{\text{alg}}(G) = \bigcup_{\xi \in \mathcal{J}'} \Lambda_{\text{alg}}^+ G^{\mathbb{C}} \gamma_{\xi} \mathcal{H}_+^{(n)}$.

Agora, definimos $U_{\xi} \subset \Omega_{\text{alg}} G$ tal que $U_{\xi} \mathcal{H}_+^{(n)} = \Lambda_{\text{alg}}^+ G^{\mathbb{C}} \gamma_{\xi} \mathcal{H}_+^{(n)}$; este também é um espaço homogéneo complexo, visto que

$$U_{\xi} \cong \Lambda_{\text{alg}}^+ G^{\mathbb{C}} / \left(\Lambda_{\text{alg}}^+ G^{\mathbb{C}} \cap \gamma_{\xi} \Lambda^+ G^{\mathbb{C}} \gamma_{\xi}^{-1} \right).$$

Mais, U_{ξ} tem uma estrutura de fibrado vectorial holomorfo sobre Ω_{ξ} e usando as identificações com os respectivos espaços homogéneos complexos, temos a projecção do fibrado $u_{\xi} : U_{\xi} \rightarrow \Omega_{\xi}$ dada por $[\gamma] \rightarrow [\gamma(0)]$ (os detalhes podem ser encontrados em [5]). Como referido na Introdução, esta decomposição de Bruhat admite uma interpretação alternativa em termos da teoria de Morse-Bott.

Tomemos $\gamma \in U_{\xi} \subset \Omega_{\text{alg}} G$ e seja $W = \gamma \cdot \mathcal{H}_+^{(n)} \in Gr_{\text{alg}}(G)$, logo $\lambda^r \mathcal{H}_+^{(n)} \subseteq W \subseteq \lambda^{-s} \mathcal{H}_+^{(n)}$; por definição de U_{ξ} podemos tomar $\Psi \in \Lambda_{\text{alg}}^+ G^{\mathbb{C}}$ tal que $W = \Psi \gamma_{\xi} \cdot \mathcal{H}_+^{(n)}$. Escrevemos

$$\gamma_{\xi} \cdot \mathcal{H}_+^{(n)} = \lambda^{-s} A_{-s}^{\xi} + \dots + \lambda^{r-1} A_{r-1}^{\xi} + \lambda^r \mathcal{H}_+^{(n)}$$

onde os subespaços A_i^{ξ} definem uma bandeira

$$\{0\} = A_{-s-1}^{\xi} \subsetneq A_{-s}^{\xi} \subseteq \dots \subseteq A_{r-1}^{\xi} \subsetneq A_r^{\xi} = \mathbb{C}^n.$$

Relativamente ao modelo Grassmanianno, a aplicação $u_{\xi} : U_{\xi} \rightarrow \Omega_{\xi}$ definida anteriormente fica

$$u_{\xi}(W) = u_{\xi} \left(\Psi \gamma_{\xi} \cdot \mathcal{H}_+^{(n)} \right) = \lambda^{-s} A_{-s} + \dots + \lambda^{r-1} A_{r-1} + \lambda^r \mathcal{H}_+^{(n)},$$

com

$$A_i = \Psi(0) A_i^{\xi} = p_i \left(W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+^{(n)} \right), \quad (4.1)$$

onde $p_i : \mathcal{H}^{(n)} \rightarrow \mathbb{C}^n$ é a projecção definida por $p_i \left(\sum a_j \lambda^j \right) = a_i$. A filtração de W por $W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+^{(n)}$

$$\lambda^r \mathcal{H}_+^{(n)} = W \cap \lambda^r \mathcal{H}_+^{(n)} \subseteq \dots \subseteq W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+^{(n)} \subseteq \dots \subseteq W \cap \lambda^{-s} \mathcal{H}_+^{(n)} = W$$

induz a decomposição

$$W \ominus \lambda W = \mathcal{A}_{-s} \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_r, \quad (4.2)$$

onde

$$\mathcal{A}_i \cong \left(W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+^{(n)} \right) / \left(\left(\lambda W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+^{(n)} \right) + \left(W \cap \lambda^{i+1} \mathcal{H}_+^{(n)} \right) \right) \cong A_i / A_{i-1}. \quad (4.3)$$

Observação 4.2. Da relação (4.3), concluímos que

$$W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+^{(n)} = \left(\lambda W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+^{(n)} \right) + \left(W \cap \lambda^{i+1} \mathcal{H}_+^{(n)} \right),$$

sempre que A_i e A_{i-1} têm a mesma dimensão, ou seja, sempre que \mathcal{A}_i é trivial.

4.2 O Grupo G_2

Vamos recordar a construção de G_2 . Observemos que os *quaterniões*, \mathbb{H} , têm base $1, i, j, k$ sobre \mathbb{R} . O produto em \mathbb{H} é totalmente descrito pelas propriedades:

1. 1 é a identidade
2. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Consideremos a álgebra dos octoniões, \mathbb{O} , a qual tem dimensão real 8, sendo a álgebra de divisão normada de maior dimensão. Seja $1, e_1, e_2, \dots, e_7$ uma base de \mathbb{O} sobre \mathbb{R} . O produto em \mathbb{O} pode ser visto de modo a que os quádruplos $(1, e_1, e_2, e_4)$, $(1, e_2, e_3, e_5)$, $(1, e_3, e_4, e_6)$, $(1, e_4, e_5, e_7)$, $(1, e_5, e_6, e_1)$, $(1, e_6, e_7, e_2)$ e $(1, e_7, e_1, e_3)$ sejam cópias de \mathbb{H} . Assim, é possível construir a Tabela 4.1 da multiplicação em \mathbb{O} .

Tabela 4.1: Multiplicação Octoniónica

\times	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Esta não é uma tabela de fácil memorização, no entanto, tendo presente as seguintes propriedades:

1. $e_i^2 = -1$
2. $e_i e_j = -e_j e_i$ para todo o $i \neq j$
3. $e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1} \pmod{7}$
4. $e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k} \pmod{7}$,

e um produto do tipo $e_1 e_2 = e_4$ podemos recuperar essa tabela. Mais detalhes sobre octoniões podem ser vistos no trabalho de Baez [1].

Podemos dotar \mathbb{O} com um produto interno natural, em que dados $x, y \in \mathbb{O}$ temos

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(x\bar{y}) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}),$$

onde \bar{x} é o conjugado octoniónico de x .

O grupo dos automorfismos de \mathbb{O} , $\operatorname{Aut}(\mathbb{O})$, é o grupo de Lie excepcional compacto simples G_2 . Como a métrica está definida através da multiplicação, temos $G_2 \subset \operatorname{SO}(\mathbb{O})$.

Dado $\xi \in G_2$, como $\xi(a) = \xi(a \cdot 1) = a\xi(1) = a$ para todo o $a \in \mathbb{R}$, todo o elemento de G_2 fixa o subespaço $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{O}$ e assim preserva o subespaço dos octoniões ortogonais à identidade, isto é, o subespaço dos octoniões imaginários puros, $\operatorname{Im}(\mathbb{O})$, o qual tem dimensão 7. Então, se identificarmos $\operatorname{Im}(\mathbb{O})$ com \mathbb{R}^7 , temos a *representação fundamental* $G_2 \subset \operatorname{SO}(7)$, a qual é a mais pequena representação de G_2 não trivial.

Seja $\mathbb{O}^{\mathbb{C}} = \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, então $G_2^{\mathbb{C}} \subset \operatorname{SO}(7, \mathbb{C})$. Dados $x, y \in \mathbb{C}^7 \simeq \operatorname{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathbb{C}$ temos um produto em \mathbb{C}^7 definido por $x \cdot y = \operatorname{Im}(xy)$.

Para algumas das afirmações que se seguem não iremos apresentar as respectivas provas, no entanto, as mesmas e outras observações pertinentes podem ser encontradas no livro de Fulton e Harris [19].

Fixemos T um torus maximal de G_2 , o qual tem dimensão 2 (ver Teorema 3.2). O que induz uma decomposição ortogonal de \mathbb{C}^7 em subespaços próprios de dimensão complexa 1:

$$\mathbb{C}^7 = \bigoplus_{i=-3}^3 L_i,$$

onde L_{-i} representa o espaço $\overline{L_i}$. Em particular, para $i \neq 0$, os subespaços L_i são *isotrópicos*, isto é $L_i \perp \overline{L_i}$, o que é equivalente a ter $\overline{L_i} \subseteq L_i^\perp$. O *diagrama de pesos* correspondente é dado pela Figura 4.1.

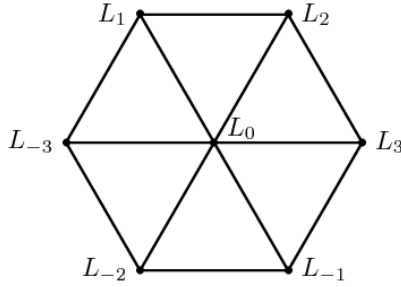


Figura 4.1: Diagrama de Pesos em G_2

Seja ω_i o peso do subespaço L_i . Então, se $\omega_i + \omega_j$ for um peso, $L_i \cdot L_j$ é o correspondente espaço peso; se $\omega_i + \omega_j$ não for um peso, $L_i \cdot L_j$ é zero. Assim, do diagrama peso da Figura 4.1 obtemos a Tabela 4.2 de Multiplicação em \mathbb{C}^7 .

Tabela 4.2: Multiplicação em \mathbb{C}^7

\cdot	L_0	L_1	L_2	L_3	$\overline{L_1}$	$\overline{L_2}$	$\overline{L_3}$
L_0	0	L_1	L_2	L_3	$\overline{L_1}$	$\overline{L_2}$	$\overline{L_3}$
L_1	L_1	0	0	L_2	L_0	$\overline{L_3}$	0
L_2	L_2	0	0	0	L_3	L_0	L_1
L_3	L_3	L_2	0	0	0	$\overline{L_1}$	L_0
$\overline{L_1}$	$\overline{L_1}$	L_0	L_3	0	0	0	$\overline{L_2}$
$\overline{L_2}$	$\overline{L_2}$	$\overline{L_3}$	L_0	$\overline{L_1}$	0	0	0
$\overline{L_3}$	$\overline{L_3}$	0	L_1	L_0	$\overline{L_2}$	0	0

Dado um subespaço isotrópico $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^7$, chamamos *estabilizador* de \mathcal{D} ao espaço

$$\mathcal{D}^0 = \{x \in \mathbb{C}^7 : x \cdot \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}\}$$

e *aniquilador* de \mathcal{D} ao espaço

$$\mathcal{D}^a = \{x \in \mathbb{C}^7 : x \cdot \mathcal{D} = 0\}.$$

É fácil observar, pela tabela de multiplicação octoniónica, que $L_i \cdot L_i = \{0\}$ para todo o i , e logo $L_i \subset L_i^a$. Além disso, como o grupo G_2 actua transitivamente nos subespaços orientados de dimensão 2 de \mathbb{R}^7 ([14]), e logo nos subespaços isotrópicos de dimensão 1 de \mathbb{C}^7 , concluímos que para qualquer subespaço isotrópico \mathcal{D} de dimensão 1 temos $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^a$.

Temos ainda os seguintes lemas:

Lema 4.3. *Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^7$ um subespaço isotrópico de dimensão 1. Então $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}^a = 3$ e $\mathcal{D}^a \subset \overline{\mathcal{D}^a}^\perp = \mathcal{D}^0$, pelo que \mathcal{D}^a também é um subespaço isotrópico e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}^0 = 4$.*

Demonstração: Usando o mesmo argumento que acima, podemos tomar, por exemplo, para modelo de \mathcal{D} o espaço L_1 .

Através da Tabela 4.2 concluímos que $\mathcal{D}^a = L_1 \oplus L_2 \oplus \overline{L_3}$, que tem dimensão complexa 3, e $\mathcal{D}^a \subset \overline{\mathcal{D}^a}^\perp$.

Também através dessa tabela, temos que $\mathcal{D}^0 = L_0 \oplus L_1 \oplus L_2 \oplus \overline{L_3} = \overline{\mathcal{D}^a}^\perp$, o qual tem dimensão complexa 4.

□

Dado um plano isotrópico $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^7$, dizemos que \mathcal{D} é um *plano complexo co-associativo* se $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} = \{0\}$.

Dado \mathcal{C} um plano complexo co-associativo, logo isotrópico, temos uma decomposição ortogonal

$$\mathbb{C}^7 = \mathcal{C} \oplus \mathcal{A} \oplus \overline{\mathcal{C}},$$

onde $\mathcal{A} = (\mathcal{C} \oplus \overline{\mathcal{C}})^\perp$, que designamos por *espaço complexo associativo*, tem dimensão complexa 3.

Lema 4.4. *Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^7$ um plano complexo co-associativo. Então $\mathcal{D}^a = \mathcal{D}$.*

Demonstração: Como G_2 actua transitivamente nos planos complexos co-associativos ([14]), usamos a Tabela 4.2 para escolher um qualquer plano complexo co-associativo, por exemplo $\mathcal{D} = L_1 \oplus L_2$.

Da Tabela 4.2 concluímos que $\mathcal{D}^a = L_1 \oplus L_2$, como pretendíamos.

□

Lema 4.5. *Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^7$ um subespaço isotrópico tal que $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} = \{0\}$. Então $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D} < 3$.*

Demonstração: Usando o mesmo argumento que nos lemas anteriores, sai directamente da tabela de multiplicação.

□

4.2.1 O Modelo Grassmanniano para ΩG_2

Recordemos o modelo Grassmanniano introduzido na Secção 1.6; para o caso $G = G_2$ (como $G_2 \subset SO(7)$) temos $n = 7$. Por isso, para simplificar a notação, não faremos referência a n escrevendo apenas \mathcal{H} e \mathcal{H}_+ .

O modelo Grassmanniano para o grupo de lacetes ΩG_2 é dado pela seguinte proposição:

Proposição 4.6. *Dado um subespaço $W \in Gr(SO(7))$, W corresponde a um lacete $\gamma \in \Omega G_2$ se e só se W pertence a*

$$Gr(G_2) = \{W \in Gr(SO(7)) : W^{su} \cdot W^{su} \subseteq W^{su}\},$$

onde W^{su} é o subespaço das funções suaves em W , o qual é denso.

Demonstração: A prova do Teorema 8.6.2 de [30] pode ser adaptada ao nosso caso. Seja $\gamma \in \Omega G_2$ e $W = \gamma \cdot \mathcal{H}_+$ o correspondente subespaço de $Gr(SO(7))$, então W satisfaz $W^{su} \cdot W^{su} \subseteq W^{su}$ uma vez que G_2 actua em \mathbb{C}^7 por automorfismos.

Inversamente, suponha-se que $W \in Gr(SO(7))$ é tal que $W^{su} \cdot W^{su} \subseteq W^{su}$. Como $W \in Gr(SO(7))$ temos $\lambda W \subseteq W$ e $\overline{W}^\perp = \lambda W$; e logo $W \ominus \lambda W = W \cap \overline{W}$. Como as imagens das projecções $(\lambda W)^\perp \rightarrow \mathcal{H}_+$ e $W \rightarrow \mathcal{H}_+^\perp$ são funções suaves e uma função f em $W \ominus \lambda W$ tem projecções suaves f_1 e f_2 em \mathcal{H}_+ e \mathcal{H}_+^\perp respectivamente, logo $f = f_1 + f_2$ é suave. Como $\dim W \ominus \lambda W = 7$, então $W \cap \overline{W}$ é uma subálgebra de \mathcal{H} de dimensão 7 relativamente ao produto induzido pelo produto octoniónico em \mathbb{R}^7 . Assim, para cada $\lambda \in S^1$, a aplicação $ev_\lambda : W \cap \overline{W} \rightarrow \mathbb{C}^7$ define um isomorfismo tal que $ev_\lambda(\alpha \cdot \beta) = ev_\lambda(\alpha) \cdot ev_\lambda(\beta) = \alpha(\lambda) \cdot \beta(\lambda)$. Tomemos γ definido por $\gamma(\lambda) = ev_\lambda \circ ev_1^{-1}$. Além disso, ev_λ comuta com a conjugação complexa e ev_λ é um isomorfismo para todo o $\lambda \in S^1$, então γ é um lacete em ΩG_2 . Assim, pela Observação 1.14 temos que $W = \gamma \cdot \mathcal{H}_+$. □

Como estamos interessados em aplicações harmónicas $\phi : S^2 \rightarrow G_2$ com número de unitão finito, a correspondente solução estendida Φ toma valores no grupo dos lacetes algébricos (recordemos a Proposição 1.20) e $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+$ está na Grassmanniana algébrica. Assim, a condição do teorema anterior $W^{su} \cdot W^{su} \subseteq W^{su}$ pode ser escrita apenas na forma $W \cdot W \subseteq W$, uma vez que todas as funções em W são suaves.

4.3 Lacetes Algébricos em G_2

Usando as notações da Secção 4.1, tomemos γ um lacete algébrico em G_2 e o correspondente subespaço $W = \gamma \cdot \mathcal{H}_+ \in Gr_{\text{alg}}(G_2) = Gr_{\text{alg}} \cap Gr(G_2)$, a Grassmanniana algébrica em G_2 . Consideremos os subespaços A_i dados por (4.1), temos o seguinte lema:

- Lema 4.7.**
1. $A_i \subseteq A_j$ se $i < j$;
 2. $A_i = \overline{A}_{-i-1}^\perp$, para todo o $i \geq 0$;
 3. $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$, para todo o i, j ;
 4. A_{-i-1} é isotrópico, para todo o $i \geq 0$.

Demonstração: Tendo em conta (4.1) podemos supor que γ é S^1 -invariante. Então

$$W = \gamma \cdot \mathcal{H}_+^{(n)} = \lambda^{-s} A_{-s} + \dots + \lambda^{r-1} A_{r-1} + \lambda^r \mathcal{H}_+.$$

As três primeiras condições seguem directamente de $\lambda W \subseteq W$, $\lambda W = \overline{W}^\perp$ e $W \cdot W \subseteq W$, de facto:

1. Seja $j - i > 0$, dado $a_i \in A_i$ temos que $a_i \lambda^i \in W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+$ e logo $a_i \lambda^j \in \lambda^{j-i} W \cap \lambda^j \mathcal{H}_+ \subseteq W \cap \lambda^j \mathcal{H}_+$ de onde concluímos que $a_i \in A_j$.
2. Como $\lambda W = \overline{W}^\perp$ temos

$$\begin{aligned} \lambda^{-s+1} A_{-s} + \dots + \lambda^r A_{r-1} + \lambda^{r+1} \mathcal{H}_+ &= (\lambda^s \overline{A}_{-s} + \dots + \lambda^{-r+1} \overline{A}_{r-1} + \lambda^{-r} \overline{\mathcal{H}_+})^\perp \\ &= \lambda^s \overline{A}_{-s}^\perp + \dots + \lambda^{-r+1} \overline{A}_{r-1}^\perp + \lambda^{-r+1} \mathcal{H}_+ \end{aligned}$$

e logo $A_i = \overline{A}_{-i-1}^\perp$.

3. Como $W \cdot W \subseteq W$ temos

$$\begin{aligned} \lambda^{-2s} A_{-s} \cdot A_{-s} + \dots + \lambda^{i+j} (\dots + A_i \cdot A_j + \dots) + \dots + \lambda^{2r} \mathcal{H}_+ \\ \subseteq \lambda^{-s} A_{-s} + \dots + \lambda^{r-1} A_{r-1} + \lambda^r \mathcal{H}_+ \end{aligned}$$

e logo $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$.

Finalmente, das duas primeiras condições concluímos que $A_{-i-1} \subseteq A_i = \overline{A}_{-i-1}^\perp$, ou seja, A_{-i-1} é isotrópico.

□

Lema 4.8. *Seja $W \in Gr_{\text{alg}}(G_2)$ tal que $\lambda^k \mathcal{H}_+ \subseteq W \subseteq \lambda^{-k} \mathcal{H}_+$. Para algum inteiro l , com $0 \leq l \leq \frac{k}{2}$, temos:*

1. $\dim A_{-j-1} = 3$ e $\dim A_{-k+j} = 1$, sempre que $0 \leq j \leq l-1$;
2. $\dim A_{-j-1} = 2$, sempre que $l \leq j \leq k-l-1$.

Neste caso, dizemos que W e o correspondente lacete γ , $W = \gamma \cdot \mathcal{H}_+$, são do tipo (k, l) .

Demonstração: Pela condição 1. do Lema anterior temos

$$\{0\} \subsetneq A_{-k} \subseteq A_{-k+1} \subseteq \dots \subseteq A_{-1} \subseteq A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_{k-1} \subsetneq A_k = \mathbb{C}^7.$$

E das condições 2. e 4. do mesmo, A_{-j-1} é isotrópico e $A_j = \overline{A}_{-j-1}^\perp$ para todo o $j \geq 0$, então temos de ter $\dim A_{-j-1} \leq 3$ e $\dim A_j \geq 4$.

Por outro lado, para $0 \leq j < \frac{k}{2}$, a condição 3. do Lema 4.7 implica que $A_{-k+j} \cdot A_{-k+j} \subseteq A_{-2k+2j} \subseteq A_{-k-1} = \{0\}$. Assim, pelo Lema 4.5, $\dim A_{-k+j} < 3$. Então, para algum $0 \leq l \leq \frac{k}{2}$, temos $\dim A_{-k+j} = 1$ quando $0 \leq j \leq l-1$ e $\dim A_{-k+j} = 2$ quando $l \leq j < \frac{k}{2}$. O que prova parte da primeira afirmação do Lema.

Consideremos $0 < l < \frac{k}{2}$ e vamos provar a afirmação 2. Observemos que

$$A_{-k+l} \cdot A_{-l-1} \subseteq A_{-k-1} = \{0\}.$$

Assim, A_{-l-1} está contido no aniquilador de A_{-k+l} , A_{-k+l}^a . Como $A_{-k+l} \cdot A_{-k+l} = \{0\}$ e $\dim A_{-k+l} = 2$, pelo Lema 4.4, temos que $A_{-k+l}^a = A_{-k+l}$. Então, como $A_{-k+l} \subseteq A_{-l-1}$, concluímos que $A_{-l-1} = A_{-k+l}$, ou seja

$$\dim A_{-k+l} = \dim A_{-k+l+1} = \dots = \dim A_{-l-1} = 2.$$

Para provar a outra parte da primeira afirmação do lema, observemos que

$$\dim A_{-k} = \dim A_{-k+1} = \dots = \dim A_{-k+l-1} = 1$$

e $A_{-k} \cdot A_{-l-1} \subseteq A_{-k+l-1} = A_{-k}$. Então A_{-l-1} está contido no estabilizador de A_{-k} , A_{-k}^0 , o qual tem dimensão 4, pelo Lema 4.3. Por outro lado, já vimos que $\dim A_j \geq 4$, para $j \geq 0$. Assim, $\dim A_{-l-1} = 4$ e, conseqüentemente $\dim A_j = 4$ para todo o $0 \leq j \leq l-1$. Como $A_j = \overline{A}_{-j-1}^\perp$, concluímos que $\dim A_{-j-1} = 3$ para todo o $0 \leq j \leq l-1$, isto é

$$\dim A_{-l} = \dim A_{-l+1} = \dots = \dim A_{-1} = 3.$$

Quando $l = 0$, a primeira afirmação do lema é vazia (logo verdadeira) e a segunda prova-se como acima, sendo que $\dim A_{-j} = 2$ para todo o $1 \leq j \leq k$.

Quando $l = \frac{k}{2}$, a segunda afirmação do lema é vazia (logo verdadeira) e a outra parte da primeira afirmação prova-se como acima, sendo que $\dim A_{-j-1} = 3$ e $\dim A_{-k+j} = 1$ para todo o $0 \leq j \leq \frac{k}{2} - 1$.

□

4.4 Factorizações de Lacetes Algébricos em G_2

Para cada $k \geq 0$ inteiro, definimos

$$\Omega^k G_2 = \left\{ \gamma \in \Omega_{\text{alg}} G_2 : \gamma(\lambda) = \sum_{i=-k}^k \lambda^i \xi_i, \quad \xi_k = \bar{\xi}_{-k} \neq 0 \right\}.$$

Observemos que $\gamma \in \Omega^k G_2$ se e só se o correspondente espaço $W_\gamma = \gamma \cdot \mathcal{H}_+ \in Gr_{\text{alg}}(G_2)$ é tal que $W_\gamma \subseteq \lambda^{-k} \mathcal{H}_+$ e $W_\gamma \not\subseteq \lambda^{-k+1} \mathcal{H}_+$.

Dado $\gamma \in \Omega^k G_2$, chamamos *factorização de γ com comprimento N do tipo (k_1, k_2, \dots, k_N)* a uma sequência de lacetes $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-1}, \gamma_N$ tais que $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{N-1} \gamma_N$, onde $\gamma_i \in \Omega^{k_i} G_2$ para cada $i = 1, \dots, N$.

Seja $W^i = \gamma_1 \dots \gamma_i \cdot \mathcal{H}_+$. Uma factorização como acima corresponde a uma sequência

$$W_\gamma = W^N, W^{N-1}, \dots, W^1, W^0 = \mathcal{H}_+,$$

em que $\lambda^{k_i} W^i \subseteq W^{i-1}$. De facto, tomando $\Phi_i = \gamma_1 \dots \gamma_i$ e $W_{\gamma_i} = \gamma_i \cdot \mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{-k_i} \mathcal{H}_+$, onde $\gamma_i \in \Omega^{k_i} G_2$; temos que $W^i = \Phi_i \cdot \mathcal{H}_+$ e $\Phi_i = \Phi_{i-1} \gamma_i$ e logo

$$W^i = \Phi_{i-1} \gamma_i \cdot \mathcal{H}_+ = \Phi_{i-1} W_{\gamma_i} \subseteq \lambda^{-k_i} \Phi_{i-1} \cdot \mathcal{H}_+ = \lambda^{-k_i} W^{i-1}.$$

4.4.1 O caso S^1 -invariante

Consideremos $\gamma \in \Omega^k G_2$ um lacete S^1 -invariante e o correspondente subespaço $W^k = \gamma \cdot \mathcal{H}_+$. Pelo Lema 4.8 (e sua demonstração) para algum $0 \leq l \leq \frac{k}{2}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} W^k &= \lambda^{-k} A + \dots + \lambda^{-k+l-1} A + \lambda^{-k+l} D + \dots + \lambda^{-l-1} D \\ &\quad + \lambda^{-l} A^a + \dots + \lambda^{-1} A^a + \overline{A^a}^\perp + \dots + \lambda^{l-1} \overline{A^a}^\perp \\ &\quad + \lambda^l \overline{D}^\perp + \dots + \lambda^{k-l-1} \overline{D}^\perp + \lambda^{k-l} \overline{A}^\perp + \dots + \lambda^{k-1} \overline{A}^\perp + \lambda^k \mathcal{H}_+, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde A é um subespaço complexo isotrópico de dimensão 1, D é um plano complexo co-associativo, A^a é o aniquilador de A , o qual tem dimensão 3 (pelo Lema 4.3), e $A \subset D \subset A^a$.

Para um dado plano complexo co-associativo \mathcal{C} , tomamos $H_{\mathcal{C}} \in \mathfrak{g}_2$ dado por $-\sqrt{-1}$ em \mathcal{C} , $\sqrt{-1}$ em $\overline{\mathcal{C}}$ e 0 em $(\mathcal{C} \oplus \overline{\mathcal{C}})^\perp$ e consideramos o lacete S^1 -invariante $\gamma_{H_{\mathcal{C}}} \in \Omega^1 G_2$, que indicamos apenas por $\gamma_{\mathcal{C}}$, definido por

$$\gamma_{\mathcal{C}}(\lambda) = \exp(-\ln(\lambda)\sqrt{-1}H_{\mathcal{C}}) = \lambda^{-1} \pi_{\mathcal{C}} + \pi_{(\mathcal{C} \oplus \overline{\mathcal{C}})}^\perp + \lambda \pi_{\overline{\mathcal{C}}}.$$

Tomemos $B = A \oplus (A^a \ominus D)$, onde $A^a \ominus D$ é o complemento ortogonal de D em A^a ; escolhendo um modelo, por exemplo: $A = L_1$, $D = L_1 \oplus L_2$ e $B = L_1 \oplus \overline{L_3}$; e usando a Tabela 4.2 é fácil

verificar que B é um plano complexo co-associativo.

Suponhamos que $0 \leq l < \frac{k}{2}$, é fácil verificar que $\gamma = \gamma_D^{k-l} \gamma_B^l$. Mas, como γ_B e γ_D comutam, também podemos escrever $\gamma = \gamma_D^{k-2l} (\gamma_B \gamma_D)^l$. A sequência de lacetes S^1 -invariantes

$$\begin{aligned} \Phi_k = \gamma = \gamma_D^{k-2l} (\gamma_B \gamma_D)^l, \dots, \Phi_{k-i} = \gamma_D^{k-2l-i} (\gamma_B \gamma_D)^l, \dots, \\ \Phi_{2l} = (\gamma_B \gamma_D)^l, \Phi_{2l-1} = \gamma_D (\gamma_B \gamma_D)^{l-1}, \dots, \\ \Phi_{2(l-j)} = (\gamma_B \gamma_D)^{l-j}, \Phi_{2(l-j)-1} = \gamma_D (\gamma_B \gamma_D)^{l-j-1}, \dots, \\ \Phi_2 = \gamma_B \gamma_D, \Phi_1 = \gamma_D \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $0 \leq i \leq k - 2l$ e $0 \leq j \leq l - 1$, dá uma fatorização de γ com comprimento k do tipo $(1, 1, \dots, 1)$, à qual iremos chamar *fatorização canônica* de γ .

Suponhamos agora que k é par com $k = 2l$. Neste caso,

$$\begin{aligned} W^{2l} = \lambda^{-2l} A + \dots + \lambda^{-l-1} A + \lambda^{-l} A^a + \dots + \lambda^{-1} A^a \\ + \overline{A}^{a\perp} + \dots + \lambda^{l-1} \overline{A}^{a\perp} + \lambda^l \overline{A}^\perp + \dots + \lambda^{2l-1} \overline{A}^\perp + \lambda^{2l} \mathcal{H}_+. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Escolhemos dois planos complexos co-associativos $B, D \subset A^a$ tais que $B \cap D = A$ e $B = A \oplus (A^a \ominus D)$. É fácil verificar que $\gamma = (\gamma_D \gamma_B)^l$. Observemos que com a escolha de outros planos complexos co-associativos $\tilde{B}, \tilde{D} \subset A^a$ nas condições anteriores, teremos $\gamma_{\tilde{D}} \gamma_{\tilde{B}} = \gamma_D \gamma_B$. A sequência de lacetes S^1 -invariantes

$$\gamma = \Phi_l, \dots, \Phi_{l-i} = (\gamma_B \gamma_D)^{l-i}, \dots, \Phi_1 = \gamma_B \gamma_D$$

onde $0 \leq i \leq l - 1$, dá uma fatorização de γ com comprimento l do tipo $(2, 2, \dots, 2)$, à qual iremos chamar *fatorização canônica* de γ .

Assim, para um lacete do tipo (k, l) com $k \neq 2l$ temos a fatorização canônica com comprimento k do tipo $(1, 1, \dots, 1)$, e para um lacete do tipo $(2l, l)$ temos a fatorização canônica com comprimento l do tipo $(2, 2, \dots, 2)$.

4.4.2 O caso geral

Com base na Observação 4.2 vamos estabelecer o seguinte lema que iremos usar nos resultados fundamentais.

Lema 4.9. *Sejam $\alpha < \beta$ inteiros tais que $\dim A_{\alpha-1} < \dim A_\alpha = \dots = \dim A_\beta < \dim A_{\beta+1}$, ou seja, A_i é trivial para todo o $\alpha < i \leq \beta$. Então*

$$W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+ = \lambda^{i-\alpha} (W \cap \lambda^\alpha \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{\beta+1} \mathcal{H}_+),$$

para todo o $\alpha < i \leq \beta$.

Demonstração: Usando sucessivamente a Observação 4.2, temos que

$$\begin{aligned}
 W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+ &= (\lambda W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{i+1} \mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda (W \cap \lambda^{i-1} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{i+1} \mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda (\lambda W \cap \lambda^{i-1} \mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+) \\
 &\quad + (\lambda W \cap \lambda^{i+1} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{i+2} \mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^2 (W \cap \lambda^{i-2} \mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{i+2} \mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^2 (W \cap \lambda^{i-2} \mathcal{H}_+) + \lambda (\lambda W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+) \\
 &\quad + \lambda (W \cap \lambda^{i+1} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{i+2} \mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^2 (W \cap \lambda^{i-2} \mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W \cap \lambda^{i-1} \mathcal{H}_+) \\
 &\quad + (\lambda W \cap \lambda^{i+2} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{i+2} \mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^2 (W \cap \lambda^{i-2} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{i+2} \mathcal{H}_+) = \dots \\
 &= \lambda^{i-\alpha} (W \cap \lambda^\alpha \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{\beta+1} \mathcal{H}_+).
 \end{aligned}$$

□

Consideremos um lacete $\gamma \in \Omega^k G_2$ do tipo (k, l) tal que $\gamma \in U_\xi$ para algum $\xi \in \mathcal{J}'$, e seja $W = \gamma \cdot \mathcal{H}_+ \in Gr_{\text{alg}}(G_2)$ o correspondente subespaço.

Teorema 4.10. Se $0 \leq l < \frac{k}{2}$, a sequência de subespaços

$$W = W^k, \dots, W^{k-i}, \dots, W^{2l}, W^{2l-1}, \dots, W^{2(l-j)}, W^{2(l-j)-1}, \dots, W^2, W^1,$$

onde $0 \leq i \leq k - 2l$ e $0 \leq j \leq l - 1$, definida por

$$\begin{aligned}
 W^{k-i} &= \lambda^i (W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{l+i} \mathcal{H}_+) \\
 W^{2(l-j)} &= \lambda^{k-2l+j} (W \cap \lambda^{-k+j} \mathcal{H}_+) + \lambda^j (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \\
 &\quad + \lambda^{-j} (W \cap \lambda^j \mathcal{H}_+) + \lambda^{-k+2l-j} (W \cap \lambda^{k-l} \mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-j)} \mathcal{H}_+ \\
 W^{2(l-j)-1} &= \lambda^{k-2l+j} (W \cap \lambda^{-k+j+1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{j+1} (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \\
 &\quad + \lambda^{-j-1} (W \cap \lambda^{j+1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-k+2l-j} (W \cap \lambda^{k-l-1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-j)-1} \mathcal{H}_+
 \end{aligned}$$

dá uma factorização com comprimento k do tipo $(1, 1, \dots, 1)$ de γ , a factorização canónica.

Demonstração: Começemos por ver que cada um dos subespaços W^α corresponde a um lacete algébrico de G_2 .

A condição $\lambda W^\alpha \subseteq W^\alpha$ é facilmente verificada, pois sai directamente da hipótese $\lambda W \subseteq W$.

É evidente que $\lambda^\beta \mathcal{H}_+ \subseteq W^\alpha \subseteq \lambda^{-\beta} \mathcal{H}_+$ para algum β , sendo assim $W^\alpha = \gamma_\alpha \cdot \mathcal{H}_+$ com γ_α um lacete algébrico.

Escrevendo $W^{k-i} = (\lambda^i W \cap \lambda^{-k+i} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) + (\lambda^{-i} W \cap \lambda^l \mathcal{H}_+)$ e tendo presente

a Observação 1.16 temos que

$$\begin{aligned}
 \overline{W^{k-i}}^\perp &= (\lambda^{-i}\overline{W}^\perp + \lambda^{k-i}\overline{\mathcal{H}_+}^\perp) \cap (\overline{W}^\perp + \lambda^l\overline{\mathcal{H}_+}^\perp) \cap (\lambda^i\overline{W}^\perp + \lambda^{-l}\overline{\mathcal{H}_+}^\perp) \\
 &= \lambda [(\lambda^{-i}W + \lambda^{k-i}\mathcal{H}_+) \cap (W + \lambda^l\mathcal{H}_+) \cap (\lambda^iW + \lambda^{-l}\mathcal{H}_+)] \\
 &= \lambda [(\lambda^{-i}W + \lambda^{k-i}\mathcal{H}_+) \cap [\lambda^iW + ((W + \lambda^l\mathcal{H}_+) \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+)]] \\
 &= \lambda [(\lambda^{-i}W + \lambda^{k-i}\mathcal{H}_+) \cap [\lambda^iW + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^l\mathcal{H}_+]] \\
 &= \lambda [(\lambda^{-i}W + \lambda^{k-i}\mathcal{H}_+) \cap [(\lambda^iW \cap \lambda^{-k+i}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^l\mathcal{H}_+]] \\
 &= \lambda [(\lambda^iW \cap \lambda^{-k+i}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (\lambda^{-i}W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{k-i}\mathcal{H}_+] \\
 &= \lambda [(\lambda^iW \cap \lambda^{-k+i}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (\lambda^{-i}W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+)] = \lambda W^{k-i},
 \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usámos o facto de $\lambda^k\mathcal{H}_+ \subseteq W \Rightarrow \lambda^{k-i}\mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{-i}W$ e $\lambda^{k-i}\mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^l\mathcal{H}_+$ para todo o $0 \leq i \leq k - 2l$.

Analogamente se mostrava esta condição para os restantes W^α .

Vamos agora ver que W^α corresponde a um lacete de G_2 . Para isso, falta ver que $W^\alpha \cdot W^\alpha \subseteq W^\alpha$. Consideremos novamente W^{k-i} , para os restantes será de forma análoga.

Tendo em conta o Lema 4.9 temos

$$\begin{aligned}
 W^{k-i} &= \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{l+i}\mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-i}\lambda^{l+i-l} (W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) \\
 &\quad + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) \\
 &\quad + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+).
 \end{aligned}$$

Comecemos por observar que

$$\begin{aligned}
 \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) \cdot \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) &\subseteq \lambda^{2i} (W \cap \lambda^{-2k}\mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^i (\lambda^i W \cap \lambda^{-2k+i}\mathcal{H}_+) \subseteq \lambda^i (W \cap \lambda^{-2k+i}\mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) \subseteq W^{k-i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) \cdot (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) &\subseteq \lambda^i (W \cap \lambda^{-k-l}\mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) \subseteq W^{k-i}
 \end{aligned}$$

$$\lambda^i (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) \cdot \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) \subseteq W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+ \subseteq W^{k-i}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) \cdot \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) &\subseteq \lambda^{-2i} (W \cap \lambda^{2k-2l}\mathcal{H}_+) \\
 &= \lambda^{-2i} W \cap \lambda^{2k-2l-2i}\mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{2k-2l-2i}\mathcal{H}_+ \\
 &= \lambda^{k-i+(k-2l-i)}\mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{k-i}\mathcal{H}_+ \subseteq W^{k-i}
 \end{aligned}$$

Mas para $(W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) \cdot (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+)$ apenas podemos dizer que está em $W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+$. Para obter o pretendido temos de contornar alguns aspectos técnicos.

Dado $r \in W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+$ podemos escrever

$$r = r_{-l}\lambda^{-l} + r_{-l+1}\lambda^{-l+1} + r_{-l+2}\lambda^{-l+2} + \dots,$$

em que $r_{-l} \in A_{-l}$ e $r_m \in \mathbb{C}^7 \cong A_{-l} \oplus A_{-l}^\perp$ para todo o $m \geq -l + 1$. Como $\dim A_{-l} = 3$, temos que $A_{-l} \cong L_1 \oplus L_2 \oplus \overline{L_3}$ é um modelo, por exemplo.

Podemos assim decompor r_{-l} e os r_m , com $m \geq -l + 1$, na forma

$$r_{-l} = r_{-l}^{12} + r_{-l}^{\overline{3}} \quad \text{e} \quad r_m = r_m^\top + r_m^\perp,$$

onde $r_\alpha^{12} \in A_{-l}^{12} \cong L_1 \oplus L_2$, $r_\alpha^{\overline{3}} \in A_{-l}^{\overline{3}} \cong \overline{L_3}$, $r_m^\top \in A_{-l}$ e $r_m^\perp \in A_{-l}^\perp$.

Sejam W_n^{12} e $W_n^{\overline{3}}$, com $-l \leq n \leq -1$, os espaços gerados pelos elementos

$$r_n^{12} \lambda^n + r_{n+1}^\top \lambda^{n+1} + r_{n+2}^\top \lambda^{n+2} + \dots + r_{-1}^\top \lambda^{-1} + r_0 + r_1 \lambda + \dots$$

e

$$r_n^{\overline{3}} \lambda^n + r_{n+1}^\perp \lambda^{n+1} + r_{n+2}^\perp \lambda^{n+2} + \dots + r_{-1}^\perp \lambda^{-1} + r_0 + r_1 \lambda + \dots,$$

respectivamente. É fácil observar que

$$W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+ = W_{-l}^{12} + W_{-l}^{\overline{3}} + \dots + W_{-1}^{12} + W_{-1}^{\overline{3}} + (W \cap \mathcal{H}_+).$$

Mais, dado $r = r_n^{12} \lambda^n + r_{n+1}^\top \lambda^{n+1} + r_{n+2}^\top \lambda^{n+2} + \dots \in W_n^{12}$ existe $v \in W \cap \lambda^{-l-i} \mathcal{H}_+$ dado por

$$v = r_n^{12} \lambda^{-l-i} + r_{n+1}^\top \lambda^{-l-i+1} + \dots + r_{-1}^\top \lambda^{-l-i-n-1} \\ + v_{-l-i-n} \lambda^{-l-i-n} + v_{-l-i-n+1} \lambda^{-l-i-n+1} + \dots,$$

já que o termo de v em λ^{-l-i} está em $A_{-l-i} \cong L_1 \oplus L_2$. Logo temos $r - \lambda^{n+l+i} v \in W \cap \mathcal{H}_+$, de onde concluímos que

$$r \in \lambda^{n+l+i} (W \cap \lambda^{-l-i} \mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) \subseteq \lambda^i (W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+).$$

Então

$$W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+ \subseteq W_{-l}^{\overline{3}} + \dots + W_{-1}^{\overline{3}} + \lambda^i (W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+),$$

e como

a) $W_n^{\overline{3}} \cdot W_m^{\overline{3}} \subseteq W \cap \lambda^{n+m} \mathcal{H}_+$. O termo em λ^{n+m} é $r_n^{\overline{3}} s_m^{\overline{3}} \in \overline{L_3} \cdot \overline{L_3} = \{0\}$; e portanto, $W_n^{\overline{3}} \cdot W_m^{\overline{3}} \subseteq W \cap \lambda^{n+m+1} \mathcal{H}_+$. Agora o termo em λ^{n+m+1} é

$$r_n^{\overline{3}} s_{m+1}^\perp + r_{n+1}^\perp s_m^{\overline{3}} \in \overline{L_3} \cdot (L_0 \oplus L_3 \oplus \overline{L_1} \oplus \overline{L_2}) \subseteq L_0 \oplus \overline{L_2} \oplus \overline{L_3}$$

e ao mesmo tempo tem de estar em $A_{n+m+1} \subseteq A_{-l-1} \cong L_1 \oplus L_2$, logo, é nulo; e portanto $W_n^{\overline{3}} \cdot W_m^{\overline{3}} \subseteq W \cap \lambda^{n+m+2} \mathcal{H}_+$. Assim, o termo em λ^{n+m+2} tem parcelas do tipo

$$r_n^{\overline{3}} s_{m+2}^\perp, r_{n+2}^\perp s_m^{\overline{3}} \in \overline{L_3} \cdot (L_0 \oplus L_3 \oplus \overline{L_1} \oplus \overline{L_2}) \subseteq L_0 \oplus \overline{L_2} \oplus \overline{L_3}$$

e do tipo

$$r_{n+1}^\perp s_{m+1}^\perp \in (L_0 \oplus L_3 \oplus \overline{L_1} \oplus \overline{L_2}) \cdot (L_0 \oplus L_3 \oplus \overline{L_1} \oplus \overline{L_2}) \subseteq L_3 \oplus \overline{L_1} \oplus \overline{L_2};$$

e ao mesmo tempo tem de estar em $A_{n+m+2} \subseteq A_{-l-1} \cong L_1 \oplus L_2$, logo, é nulo; e portanto $W_n^{\overline{3}} \cdot W_m^{\overline{3}} \subseteq W \cap \lambda^{n+m+3} \mathcal{H}_+$. Continuando com este processo, concluímos que $W_n^{\overline{3}} \cdot W_m^{\overline{3}} \subseteq W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+ \subseteq W^{k-i}$.

b) e visto que $W_\alpha^3 \subseteq W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+$, das inclusões vistas anteriormente, temos que as restantes parcelas também verificam a propriedade;

concluimos assim que $(W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) \cdot (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) \subseteq W^{k-i}$.

Para mostrar que $(W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) \cdot \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) \subseteq W^{k-i}$ o processo é análogo ao anterior.

Vamos ver que se trata de uma sequência com o comprimento e do tipo pretendido, isto é, $\lambda W^\alpha \subseteq W^{\alpha-1}$. Vamos verificar para o caso W^{k-i} :

$$\begin{aligned} \lambda W^{k-i} &= \lambda^{i+1} (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + (\lambda W \cap \lambda^{-l+1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-i+1} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) \\ &\subseteq \lambda^{i+1} (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-i-1} (W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) \\ &= W^{k-(i+1)} = W^{k-i-1}, \end{aligned}$$

para os restantes W^α o processo é análogo. □

Teorema 4.11. *Se $k = 2l$ com $l \geq 1$, a sequência de subespaços $W = W^l, \dots, W^{l-i}, \dots, W^1$, onde $0 \leq i \leq l-1$, definida por*

$$W^{l-i} = \lambda^i (W \cap \lambda^{-2l+i}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^i\mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-i)}\mathcal{H}_+$$

dá uma factorização com comprimento l do tipo $(2, 2, \dots, 2)$ de γ , a factorização canónica.

Demonstração: Começemos por ver que os subespaços W^{l-i} correspondem a um lacete algébrico de G_2 .

A condição $\lambda W^{l-i} \subseteq W^{l-i}$ é facilmente verificada, pois sai directamente da hipótese $\lambda W \subseteq W$.

É evidente que $\lambda^{2(l-i)}\mathcal{H}_+ \subseteq W^{l-i} \subseteq \lambda^{2(l-i)}\mathcal{H}_+$, sendo assim $W^{l-i} = \gamma_{2(l-i)} \cdot \mathcal{H}_+$ com $\gamma_{2(l-i)}$ um lacete algébrico.

Escrevendo $W^{l-i} = (\lambda^i W \cap \lambda^{-2(l-i)}\mathcal{H}_+) + (\lambda^{-i} W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-i)}\mathcal{H}_+$ e tendo presente a Observação 1.16 temos que

$$\begin{aligned} \overline{W^{k-i}}^\perp &= \left(\lambda^{-i} \overline{W}^\perp + \lambda^{2(l-i)} \overline{\mathcal{H}_+}^\perp \right) \cap \left(\lambda^i \overline{W}^\perp + \overline{\mathcal{H}_+}^\perp \right) \cap \lambda^{-2(l-i)} \overline{\mathcal{H}_+}^\perp \\ &= \lambda \left[\left(\lambda^{-i} W + \lambda^{2(l-i)} \mathcal{H}_+ \right) \cap \left(\lambda^i W + \mathcal{H}_+ \right) \cap \lambda^{-2(l-i)} \mathcal{H}_+ \right] \\ &= \lambda \left[\left(\lambda^{-i} W + \lambda^{2(l-i)} \mathcal{H}_+ \right) \cap \left[\left(\lambda^i W \cap \lambda^{-2(l-i)} \mathcal{H}_+ \right) + \mathcal{H}_+ \right] \right] \\ &= \lambda \left[\left(\lambda^i W \cap \lambda^{-2(l-i)} \mathcal{H}_+ \right) + \left(\lambda^{-i} W \cap \mathcal{H}_+ \right) + \lambda^{2(l-i)} \mathcal{H}_+ \right] = \lambda W^{l-i}. \end{aligned}$$

Vamos agora ver que W^{l-i} corresponde a um lacete de G_2 , para isso, falta ver que $W^{l-i} \cdot W^{l-i} \subseteq W^{l-i}$.

Tendo em conta o Lema 4.9 temos

$$\begin{aligned} W^{l-i} &= \lambda^i (W \cap \lambda^{-2l+i}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^i\mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-i)}\mathcal{H}_+ \\ &= \lambda^i \lambda^{-2l+i+2l} (W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda^i (W \cap \lambda^{-l-1+1}\mathcal{H}_+) \\ &\quad + \lambda^{-i} \lambda^i (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{l-1+1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-i)}\mathcal{H}_+ \\ &= \lambda^{2i} (W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda^i (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) \\ &\quad + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-i} (W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-i)}\mathcal{H}_+. \end{aligned}$$

Ao contrário da demonstração anterior, aqui conseguimos concluir todas as inclusões de uma forma directa. Deixamos alguns cálculos a título de exemplo:

$$\begin{aligned} \lambda^{2i} (W \cap \lambda^{-2l} \mathcal{H}_+) \cdot \lambda^i (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) &\subseteq \lambda^{3i} (W \cap \lambda^{-3l} \mathcal{H}_+) \\ &= \lambda^{2i} (\lambda^i W \cap \lambda^{-3l+i} \mathcal{H}_+) \subseteq \lambda^{2i} (W \cap \lambda^{-3l+i} \mathcal{H}_+) \\ &= \lambda^{2i} (W \cap \lambda^{-2l} \mathcal{H}_+) \subseteq W^{l-i} \end{aligned}$$

$$\lambda^{2i} (W \cap \lambda^{-2l} \mathcal{H}_+) \cdot \lambda^{-i} (W \cap \lambda^l \mathcal{H}_+) \subseteq \lambda^i (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \subseteq W^{l-i}$$

$$\begin{aligned} \lambda^i (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \cdot \lambda^{2(l-i)} \mathcal{H}_+ &= \lambda^{-i} (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \cdot \lambda^{2l} \mathcal{H}_+ \\ &\subseteq \lambda^{-i} (W \cap \lambda^l \mathcal{H}_+) \subseteq W^{l-i}. \end{aligned}$$

Para terminar, falta apenas ver que se trata de uma sequência com o comprimento e do tipo pretendido, isto é, $\lambda^2 W^{l-i} \subseteq W^{l-i-1}$:

$$\begin{aligned} \lambda^2 W^{l-i} &= \lambda^{i+1} (\lambda W \cap \lambda^{-2l+i+1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-i-1} (\lambda^3 W \cap \lambda^{i+3} \mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-i)+2} \mathcal{H}_+ \\ &\subseteq \lambda^{i+1} (W \cap \lambda^{-2l+(i+1)} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-(i+1)} (W \cap \lambda^{i+1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{2(l-(i+1))} \mathcal{H}_+ \\ &= W^{l-(i+1)} = W^{l-i-1}. \end{aligned}$$

□

Na demonstração dos dois teoremas anteriores, indicamos várias vezes que para os cálculos não apresentados o processo decorre de uma forma análoga; no entanto, a veracidade desses resultados pode ser confirmada em [11], na Secção 5. O aspecto decisivo usado em [11] é a definição de uma relação de ordem parcial em \mathfrak{J} , o que permite estabelecer uma sequência de $\xi_i \in \mathfrak{J}$ que por sua vez factorizam o lacete γ , e logo fixam uma sequência de subespaços W^i , precisamente os que indicamos para as factorizações canónicas.

4.5 Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito em G_2

Sejam M uma superfície de Riemann, $\phi : M \rightarrow G$ uma aplicação harmónica com número de unitão finito, onde para já G é um grupo de Lie compacto semi-simples, e $\Phi : M \rightarrow \Omega_{\text{alg}} G$ uma solução estendida associada a ϕ .

Na Subsecção 4.4.2 usámos o termo “caso geral” para uma situação em que tínhamos um lacete γ em U_ξ ; talvez fosse um pouco abusivo, no entanto, como trabalhamos com soluções estendidas, o teorema seguinte permite-nos sempre tomar uma solução estendida $\Phi : M \setminus D' \rightarrow U_\xi$.

Teorema 4.12. [5] *Seja $\Phi : M \rightarrow \Omega_{\text{alg}} G$ uma solução estendida. Então existe $\xi \in \mathfrak{J}$ e um subconjunto discreto $D' \subset M$ tais que $\Phi(M \setminus D') \subseteq U_\xi$.*

Mais, usando a aplicação $u_\xi : U_\xi \rightarrow \Omega_\xi$ temos o seguinte resultado:

Proposição 4.13. [5] *Se $\Phi : M \setminus D' \rightarrow U_\xi$ é uma solução estendida, então $u_\xi \circ \Phi : M \setminus D' \rightarrow \Omega_\xi$ também é uma solução estendida.*

Voltemos ao nosso objecto de estudo $G = G_2$. Consideremos $\phi : M \rightarrow G_2$ uma aplicação harmónica com número de unitão finito, $\Phi : M \setminus D' \rightarrow \Omega_\xi$ uma solução estendida associada a ϕ do tipo (k, l) e $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+ \in Gr_{\text{alg}}(G_2)$ definido em $M \setminus D'$. Aplicando o Teorema 4.10 ou o Teorema 4.11 (conforme o caso) obtemos uma factorização canónica para a solução estendida Φ .

Observação 4.14. De facto, todos os elementos W^α das seqüências referidas nos Teoremas 4.10 e 4.11 verificam as condições de harmonicidade: $W_{\bar{z}}^\alpha \subseteq W^\alpha$ e $W_{\bar{z}}^\alpha \subseteq \lambda^{-1}W^\alpha$; visto que W também verifica essas condições (1.12) e (1.13).

Nos próximos resultados usamos o modelo Grassmanianno, para partindo de uma dada solução estendida obter uma solução estendida constante; através dela obtemos uma solução estendida chamada *normalizada*, associada à mesma aplicação harmónica, o que nos permite estimar o número de unitão de ϕ , $r(\phi)$.

Teorema 4.15. *Se $0 < 2l < k$, então V dado por*

$$V = \lambda^3 (W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W \cap \lambda^{-k+l} \mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \\ + \lambda^{-1} (W \cap \lambda \mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{l+1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-3} (W \cap \lambda^{k-l+1} \mathcal{H}_+)$$

definido em $M \setminus D'$ com valores em $Gr_{\text{alg}}(G_2)$ corresponde a um lacete constante de G_2 .

Demonstração: A condição $\lambda V \subseteq V$ é facilmente verificada, pois sai directamente da hipótese $\lambda W \subseteq W$.

Como $\lambda^k \mathcal{H}_+ \subseteq W \Rightarrow \lambda^{k-3} \mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{-3} W$ e $\lambda^{k-3} \mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{k-l-2} \mathcal{H}_+$ temos $\lambda^{k-3} \mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{-3} W \cap \lambda^{k-l-2} \mathcal{H}_+$ e podemos escrever

$$V = (\lambda^3 W \cap \lambda^{-k+3} \mathcal{H}_+) + (\lambda^2 W \cap \lambda^{-k+l+2} \mathcal{H}_+) + (\lambda W \cap \lambda^{-l+1} \mathcal{H}_+) \\ + (\lambda^{-1} W \cap \mathcal{H}_+) + (\lambda^{-2} W \cap \lambda^{l-1} \mathcal{H}_+) + (\lambda^{-3} W \cap \lambda^{k-l-2} \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-3} \mathcal{H}_+,$$

usando os mesmos argumentos que na demonstração dos Teoremas 4.10 e 4.11 concluímos que $\bar{V}^\perp = \lambda V$, pelo que V corresponde a um lacete de $SO(7)$.

Tendo em conta o Lema 4.9 temos

$$V = \lambda^3 (W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W \cap \lambda^{-k+l} \mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W \cap \lambda^l \mathcal{H}_+) \\ + \lambda^{-1} (W \cap \lambda^l \mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{k-l} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{k-l} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-3} (W \cap \lambda^k \mathcal{H}_+) \\ = \lambda^3 (W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W \cap \lambda^{-k+l} \mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \\ + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W \cap \lambda^l \mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{k-l} \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-3} \mathcal{H}_+,$$

este V é precisamente o mesmo do que em [11]. Agora, para ver que $V \cdot V \subseteq V$ o processo é completamente análogo ao efectuado na demonstração do Teorema 4.10, e logo V corresponde a um lacete de G_2 .

Uma vez que $W_{\bar{z}} \subseteq W$ temos

$$V_{\bar{z}} = \lambda^3 (W_{\bar{z}} \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W_{\bar{z}} \cap \lambda^{-k+l} \mathcal{H}_+) + \lambda (W_{\bar{z}} \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \\ + (W_{\bar{z}} \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W_{\bar{z}} \cap \lambda^l \mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W_{\bar{z}} \cap \lambda^{k-l} \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-3} \mathcal{H}_+ \\ \subseteq \lambda^3 (W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W \cap \lambda^{-k+l} \mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l} \mathcal{H}_+) \\ + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W \cap \lambda^l \mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{k-l} \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-3} \mathcal{H}_+ = V$$

e logo V é holomorfo. Como $W_z \subseteq \lambda^{-1}W$ temos (usando o Lema 4.9)

$$\begin{aligned}
 V_z &= \lambda^3 (W_z \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W_z \cap \lambda^{-k+l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W_z \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) \\
 &\quad + (W_z \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W_z \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W_z \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^{k-3}\mathcal{H}_+ \\
 &\subseteq \lambda^3 (\lambda^{-1}W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + \lambda^2 (\lambda^{-1}W \cap \lambda^{-k+l}\mathcal{H}_+) + \lambda (\lambda^{-1}W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) \\
 &\quad + (\lambda^{-1}W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (\lambda^{-1}W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (\lambda^{-1}W \cap \lambda^{k-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^{k-3}\mathcal{H}_+ \\
 &= \lambda^2 (W \cap \lambda^{-k+1}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-k+l+1}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l+1}\mathcal{H}_+) \\
 &\quad + \lambda^{-1} (W \cap \lambda\mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{l+1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-3} (W \cap \lambda^{k-l+1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{k-3}\mathcal{H}_+ \\
 &\subseteq V + \lambda^2 (W \cap \lambda^{-k+1}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-k+l+1}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l+1}\mathcal{H}_+) \\
 &= V + \lambda^3 (W \cap \lambda^{-k}\mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W \cap \lambda^{-k+l}\mathcal{H}_+) + \lambda^2 (W \cap \lambda^{-k+l}\mathcal{H}_+) \\
 &\quad + \lambda (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) \subseteq V
 \end{aligned}$$

e logo V é anti-holomorfo. Assim, concluímos que V é constante. □

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \lambda^3 V &= (\lambda^6 W \cap \lambda^{-k+6}\mathcal{H}_+) + (\lambda^5 W \cap \lambda^{-k+l+5}\mathcal{H}_+) + (\lambda^4 W \cap \lambda^{-l+4}\mathcal{H}_+) \\
 &\quad + (\lambda^3 W \cap \lambda^3\mathcal{H}_+) + (\lambda^2 W \cap \lambda^{l+2}\mathcal{H}_+) + (\lambda W \cap \lambda^{k-l+1}\mathcal{H}_+) + \lambda^k \mathcal{H}_+ \subseteq W,
 \end{aligned}$$

e logo $\lambda^3 V \subseteq W \subseteq \lambda^{-3}V$. Consideremos o lacete constante γ de G_2 tal que $V = \gamma \cdot \mathcal{H}_+$. Assim, $W^n = \gamma^{-1}\Phi \cdot \mathcal{H}_+$ também corresponde a uma solução estendida associada a ϕ (a menos de multiplicação por uma constante) e $\lambda^3 \mathcal{H}_+ \subseteq W^n \subseteq \lambda^{-3}\mathcal{H}_+$, pelo que $r(\phi) \leq 6$. Então $\gamma^{-1}\Phi$ é uma *solução estendida normalizada* para este caso: $0 < 2l < k$.

Usando o Teorema 4.10, a solução estendida W^n pode ainda ser factorizada, de facto

$$\begin{aligned}
 W^3 &= W^n \\
 W^2 &= \lambda (W^n \cap \lambda^{-3}\mathcal{H}_+) + (W^n \cap \lambda^{-1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W^n \cap \lambda^2\mathcal{H}_+) \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

$$W^1 = \lambda (W^n \cap \lambda^{-2}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W^n \cap \lambda\mathcal{H}_+) + \lambda\mathcal{H}_+ \tag{4.8}$$

$$W^0 = \mathcal{H}_+,$$

é uma factorização de comprimento 3 do tipo $(1, 1, 1)$ tal como também é referido em [11]. Além disso, usando (4.4) no caso $k = 3$ e $l = 1$, a correspondente solução estendida S^1 -invariante vem dada por

$$u_\xi(W^n) = \lambda^{-3}A + \lambda^{-2}D + \lambda^{-1}A^a + \overline{A}^{\perp} + \lambda\overline{D}^{\perp} + \lambda^2\overline{A}^{\perp} + \lambda^3\mathcal{H}_+, \tag{4.9}$$

onde A é um subfibrado complexo isotrópico de dimensão 1, D é um subfibrado complexo co-associativo de dimensão 2, A^a é o aniquilador de A e $A \subset D \subset A^a$.

Teorema 4.16. *Se $k = 2l$, então V dado por*

$$V = \lambda^2 (W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W \cap \lambda\mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{l+1}\mathcal{H}_+)$$

definido em $M \setminus D'$ com valores em $Gr_{\text{alg}}(G_2)$ corresponde a um lacete constante de G_2 .

Demonstração: A condição $\lambda V \subseteq V$ é facilmente verificada, pois sai directamente da hipótese $\lambda W \subseteq W$.

Como $\lambda^{2l}\mathcal{H}_+ \subseteq W \Rightarrow \lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{-2}W$ e $\lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{l-1}\mathcal{H}_+$ temos $\lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{-2}W \cap \lambda^{l-1}\mathcal{H}_+$ e podemos escrever

$$V = (\lambda^2W \cap \lambda^{-2l+2}\mathcal{H}_+) + (\lambda W \cap \lambda^{-l+1}\mathcal{H}_+) + (\lambda^{-1}W \cap \mathcal{H}_+) + (\lambda^{-2}W \cap \lambda^{l-1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+,$$

usando os mesmos argumentos que na demonstração dos Teoremas 4.10 e 4.11 concluímos que $\bar{V}^\perp = \lambda V$, pelo que V corresponde a um lacete de $SO(7)$.

Tendo em conta o Lema 4.9 temos

$$\begin{aligned} V &= \lambda^2 (W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) \\ &\quad + \lambda^{-1} (W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{2l}\mathcal{H}_+) \\ &= \lambda^2 (W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+, \end{aligned}$$

este V é precisamente o mesmo do que em [11]. Agora, para ver que $V \cdot V \subseteq V$ o processo é completamente análogo ao efectuado na demonstração do Teorema 4.11, e logo V corresponde a um lacete de G_2 .

Uma vez que $W_{\bar{z}} \subseteq W$ temos

$$\begin{aligned} V_{\bar{z}} &= \lambda^2 (W_{\bar{z}} \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W_{\bar{z}} \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (W_{\bar{z}} \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W_{\bar{z}} \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+ \\ &\subseteq \lambda^2 (W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+ = V \end{aligned}$$

e logo V é holomorfo. Como $W_z \subseteq \lambda^{-1}W$ temos (usando o Lema 4.9)

$$\begin{aligned} V_z &= \lambda^2 (W_z \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W_z \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (W_z \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W_z \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+ \\ &\subseteq \lambda^2 (\lambda^{-1}W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda (\lambda^{-1}W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) \\ &\quad + (\lambda^{-1}W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (\lambda^{-1}W \cap \lambda^l\mathcal{H}_+) + \lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+ \\ &= \lambda (W \cap \lambda^{-2l+1}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l+1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-1} (W \cap \lambda\mathcal{H}_+) + \lambda^{-2} (W \cap \lambda^{l+1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{2l-2}\mathcal{H}_+ \\ &\subseteq V + \lambda (W \cap \lambda^{-2l+1}\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-l+1}\mathcal{H}_+) \\ &= V + \lambda^2 (W \cap \lambda^{-2l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + \lambda (W \cap \lambda^{-l}\mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) \subseteq V \end{aligned}$$

e logo V é anti-holomorfo. Assim, concluímos que V é constante. □

Além disso,

$$\lambda^2 V = (\lambda^4 W \cap \lambda^{-2l+4}\mathcal{H}_+) + (\lambda^3 W \cap \lambda^{-l+3}\mathcal{H}_+) + (\lambda W \cap \lambda^2\mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{l+1}\mathcal{H}_+) \subseteq W,$$

e logo $\lambda^2 V \subseteq W \subseteq \lambda^{-2}V$. Consideremos o lacete constante γ de G_2 tal que $V = \gamma \cdot \mathcal{H}_+$. Assim, $W^n = \gamma^{-1}\Phi \cdot \mathcal{H}_+$ também corresponde a uma solução estendida associada a ϕ (a menos de multiplicação por uma constante) e $\lambda^2\mathcal{H}_+ \subseteq W^n \subseteq \lambda^{-2}\mathcal{H}_+$, pelo que $r(\phi) \leq 4$. Então $\gamma^{-1}\Phi$ é uma *solução estendida normalizada* para este caso: $k = 2l$.

Usando o Teorema 4.11, a solução estendida W^n pode ainda ser factorizado, onde obtemos a factorização trivial $W^1 = W^n$, $W_0 = \mathcal{H}_+$, isto é uma factorização de comprimento 1 do tipo (2). Além disso, usando (4.6) no caso $k = 2$ e $l = 1$, a correspondente solução estendida S^1 -invariante vem dada por

$$u_\xi(W^n) = \lambda^{-2}A + \lambda^{-1}A^a + \bar{A}^{a\perp} + \lambda\bar{A}^\perp + \lambda^2\mathcal{H}_+, \quad (4.10)$$

onde A é um subfibrado complexo isotrópico de dimensão 1 e A^α é o aniquilador de A .

Teorema 4.17. *Se $l = 0$, então V dado por*

$$V = \lambda(W \cap \lambda^{-k}H_+) + \lambda^{-1}(W \cap \lambda H_+)$$

definido em $M \setminus D'$ com valores em $Gr_{\text{alg}}(G_2)$ corresponde a um lacete constante de G_2 .

Demonstração: A condição $\lambda V \subseteq V$ é facilmente verificada, pois sai directamente da hipótese $\lambda W \subseteq W$.

Como $\lambda^k \mathcal{H}_+ \subseteq W \Rightarrow \lambda^{k-1} \mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{-1}W$ e $\lambda^{k-1} \mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{H}_+$ temos $\lambda^{k-1} \mathcal{H}_+ \subseteq \lambda^{-1}W \cap \mathcal{H}_+$ e podemos escrever

$$V = (\lambda W \cap \lambda^{-k+1} \mathcal{H}_+) + (\lambda^{-1}W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-1} \mathcal{H}_+,$$

usando os mesmos argumentos que na demonstração dos Teoremas 4.10 e 4.11 concluímos que $\bar{V}^\perp = \lambda V$, pelo que V corresponde a um lacete de $SO(7)$.

Tendo em conta o Lema 4.9 temos

$$\begin{aligned} V &= \lambda(W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1}(W \cap \lambda^k \mathcal{H}_+) \\ &= \lambda(W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-1} \mathcal{H}_+, \end{aligned}$$

este V é precisamente o mesmo do que em [11]. Agora, para ver que $V \cdot V \subseteq V$ o processo é completamente análogo ao efectuado na demonstração do Teorema 4.11, e logo V corresponde a um lacete de G_2 .

Uma vez que $W_{\bar{z}} \subseteq W$ temos

$$\begin{aligned} V_{\bar{z}} &= \lambda(W_{\bar{z}} \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W_{\bar{z}} \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-1} \mathcal{H}_+ \\ &\subseteq \lambda(W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-1} \mathcal{H}_+ = V \end{aligned}$$

e logo V é holomorfo. Como $W_z \subseteq \lambda^{-1}W$ temos (usando o Lema 4.9)

$$\begin{aligned} V_z &= \lambda(W_z \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W_z \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-1} \mathcal{H}_+ \\ &\subseteq \lambda(\lambda^{-1}W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (\lambda^{-1}W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-1} \mathcal{H}_+ \\ &= (W \cap \lambda^{-k+1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1}(W \cap \lambda \mathcal{H}_+) + \lambda^{k-1} \mathcal{H}_+ \\ &\subseteq V + (W \cap \lambda^{-k+1} \mathcal{H}_+) \\ &= V + \lambda(W \cap \lambda^{-k} \mathcal{H}_+) + (W \cap \mathcal{H}_+) \subseteq V \end{aligned}$$

e logo V é anti-holomorfo. Assim, V é constante.

□

Além disso,

$$\lambda V = (\lambda^2 W \cap \lambda^{-k+2} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda \mathcal{H}_+) \subseteq W,$$

e logo $\lambda V \subseteq W \subseteq \lambda^{-1}V$. Consideremos o lacete constante γ de G_2 tal que $V = \gamma \cdot \mathcal{H}_+$. Assim, $W^n = \gamma^{-1} \Phi \cdot \mathcal{H}_+$ também corresponde a uma solução estendida associada a ϕ (a menos de multiplicação por uma constante) e $\lambda \mathcal{H}_+ \subseteq W^n \subseteq \lambda^{-1} \mathcal{H}_+$, pelo que $r(\phi) \leq 2$. Então $\gamma^{-1} \Phi$ é uma *solução estendida normalizada* para este caso: $l = 0$.

Usando o Teorema 4.10, o correspondente subespaço W^n pode ainda ser factorizado, onde obtemos a factorização trivial $W^1 = W^n$, $W_0 = \mathcal{H}_+$, isto é uma factorização de comprimento 1 do tipo (1). Além disso, usando (4.4) no caso $k = 1$ e $l = 0$, a correspondente solução estendida S^1 -invariante vem dada por

$$u_\xi(W^n) = \lambda^{-1}D + \overline{D}^{-1} + \lambda\mathcal{H}_+, \quad (4.11)$$

onde D é um subfibrado complexo co-associativo de dimensão 2.

4.5.1 Geradores do Referencial de Frenet para Aplicações Harmônicas em G_2

Guest em [21] observou que qualquer aplicação suave $W : M \rightarrow Gr^{(n)}$ que corresponda a uma solução estendida $\Phi : M \rightarrow \Omega_{\text{alg}}^k U(n)$ é *gerada* por um certo subfibrado holomorfo X do fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}^{2kn} \simeq M \times \lambda^{-k}\mathcal{H}_+^{(n)} / \lambda^k\mathcal{H}_+^{(n)}$ definindo

$$W = X + \lambda X^{(1)} + \dots + \lambda^{2k-1} X^{(2k-1)} + \lambda^k \mathcal{H}_+^{(n)}$$

onde $X^{(i)}$ denota o subfibrado gerado pelas secções locais holomorfas de X e as suas deviradas até à ordem i .

Observação 4.18. Recordemos ainda a bem-conhecida classificação das aplicações harmônicas $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ dada por Eells e Wood [18]: seja $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ uma aplicação holomorfa e f um função meromorfa em S^2 com valores em \mathbb{C}^n tal que $\varphi = \text{Span}\{f\}$, seja $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e definimos $\phi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ por

$$\phi = \text{Span}\{f, f', \dots, f^{(i)}\} \ominus \text{Span}\{f, f', \dots, f^{(i-1)}\},$$

então ϕ é uma aplicação harmônica; inversamente, todas as aplicações harmônicas $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ obtêm-se desta forma; isto é, qualquer aplicação harmônica $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ é um elemento do referencial de Frenet de uma curva racional. Assim, se $\text{Span}\{u_1, \dots, u_r\} = X$ com u_i funções meromorfas, estes u_i são análogos à função meromorfa f de Eells e Wood. Por essa razão, e seguindo Guest em [21], a u_1, \dots, u_r chamamos os *geradores do referencial de Frenet* para a correspondente aplicação harmônica.

Seja $\phi : M \rightarrow G_2$ uma aplicação harmônica com número de unitão finito com solução estendida $\Phi : M \setminus D' \rightarrow U_\xi \subset \Omega_{\text{alg}} G_2$, para algum subconjunto discreto D' e $\xi \in \mathcal{I}$. Definimos $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+$, o qual satisfaz $\overline{W}^{-1} = \lambda W$ e $W \cdot W \subseteq W$. Como vimos anteriormente, podemos supor que $\lambda^3 \mathcal{H}_+ \subseteq W \subseteq \lambda^{-3} \mathcal{H}_+$. Se X gera W , então as condições algébricas em W significam que

$$\langle \lambda^{i+1} s^{(i)}, \lambda^{-j} \overline{u^{(j)}} \rangle_H = 0 \quad \text{e} \quad \langle \lambda^{i+j} s^{(i)} \cdot u^{(j)}, \lambda^{-k-1} \overline{w^{(k)}} \rangle_H = 0 \quad (4.12)$$

para todo o $i, j, k = 0, 1, \dots, 5$ e todas as secções meromorfas s, u e w de X , onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ é o produto interno complexo induzido em $\mathcal{H}^{(n)} = L^2(S^1; \mathbb{C}^7)$.

Observação 4.19. Como todas as funções meromorfas na esfera S^2 são funções racionais, podemos escolher sempre um conjunto de geradores meromorfos $\{u_1, \dots, u_r\}$ de X formados por polinómios em z se $M = S^2$:

$$u_i(z) = P_i^0(\lambda) + P_i^1(\lambda)z + P_i^2(\lambda)z^2 + \dots + P_i^{n_i}(\lambda)z^{n_i}.$$

Neste caso, as condições (4.12) transformam-se num sistema algébrico de equações quadráticas

e cúbicas para os coeficientes em \mathbb{C}^7 dos polinómios P_i^j em λ e λ^{-1} . Por outro lado, todas as aplicações harmónicas de S^2 num grupo de Lie compacto têm número de unitão finito; assim, todas as aplicações harmónicas de S^2 em G_2 podem ser obtidas resolvendo um sistema algébrico de equações quadráticas e cúbicas.

Consideremos os conhecidos subfibrados holomorfos $A_i = p_i(W \cap \lambda^i \mathcal{H}_+)$. De seguida damos uma descrição dos geradores do referencial de Frenet associado a tais soluções estendidas. Novamente, temos três casos: $k = 3$ e $l = 1$; $k = 2$ e $l = 1$; $k = 1$ e $l = 0$.

4.5.1.1 Caso $k = 3$ e $l = 1$

Recordemos a expressão (4.9)

$$u_\xi(W) = \lambda^{-3}A + \lambda^{-2}D + \lambda^{-1}A^a + \overline{A^a}^\perp + \lambda \overline{D}^\perp + \lambda^2 \overline{A}^\perp + \lambda^3 \mathcal{H}_+,$$

onde, para cada $z \in M$, $A(z) = A_{-3}(z)$ é uma linha isotrópica, $D(z) = A_{-2}(z)$ é um plano complexo co-associativo que contém $A(z)$, e $A^a(z) = A_{-1}(z)$ é o aniquilador de $A(z)$.

Recordemos que dizemos que um subfibrado de \mathbb{C}^n é *cheio* se não está contido num subespaço $V_0 \subsetneq \mathbb{C}^n$. Então, se A é um subfibrado cheio, neste caso W é gerado por um fibrado linha

$$X = \text{Span} \{s = s_{-3}\lambda^{-3} + s_{-2}\lambda^{-2} + s_{-1}\lambda^{-1} + s_0 + s_1\lambda + s_2\lambda^2\},$$

com $s_i : M \rightarrow \mathbb{C}^7$ funções meromorfas satisfazendo (4.12) e s_{-3} uma secção meromorfa de A . Relativamente à factorização canónica de Φ dada por (4.7) and (4.8), os fibrados vectoriais de W^2 e W^1 são dados, respectivamente, por:

$$X_2 = \text{Span} \{\lambda s, \lambda^2 s^{(2)}, \lambda^4 s^{(5)}\}, \quad X_1 = \text{Span} \{\lambda^2 s, \lambda^2 s^{(1)}, \lambda^3 s^{(3)}, \lambda^3 s^{(4)}\}.$$

Se A é um subfibrado não cheio, então $r(\phi) \leq 4$; de facto:

Lema 4.20. *Se A não é cheio, então existe um lacete constante $\gamma \in \Omega G_2$ tal que $\lambda^2 \mathcal{H}_+ \subseteq \gamma^{-1}W \subseteq \lambda^{-2} \mathcal{H}_+$.*

Demonstração: Começamos por mostrar que se A não é cheio, então ou A é constante ou D é constante. De facto, fixemos um subespaço $V_0 \subsetneq \mathbb{C}^7$ constante tal que $A \subseteq V_0$. Se $A = V_0$ já estava; caso contrário, como a co-dimensão de A em D é um e da condição de harmonicidade (1.12) vem $A_z \subseteq D$, temos de ter $D = A_z \subseteq V_0$. Novamente, se $D = V_0$ já estava; caso contrário, da mesma forma temos de ter $A^a = D_z \subseteq V_0$. Como A não é constante, A^a também não é constante e temos de ter $\overline{A^a}^\perp = A_z^a \subseteq V_0$. Aplicando sucessivamente este argumento concluiríamos que se A e D não são constantes, então $V_0 = \mathbb{C}^7$, o que é uma contradição.

Quando A é constante (e, logo A^a é também constante), podemos tomar um lacete constante γ de G_2 tal que

$$\gamma \cdot \mathcal{H}_+ = V = \lambda(W \cap \lambda^{-3} \mathcal{H}_+) + (W \cap \lambda^{-1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1}(W \cap \lambda^2 \mathcal{H}_+).$$

De facto, pelo Teorema 4.10, sabemos que V corresponde a um lacete de G_2 ; além disso, é um lacete constante porque

$$\begin{aligned} V_z &\subseteq \lambda(W_z \cap \lambda^{-2} \mathcal{H}_+) + (W_z \cap \lambda \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1}(W_z \cap \lambda^3 \mathcal{H}_+) \\ &\subseteq (W \cap \lambda^{-1} \mathcal{H}_+) + \lambda^{-1}(W \cap \lambda^2 \mathcal{H}_+) + \lambda^{-2}(W \cap \lambda^4 \mathcal{H}_+) \subseteq V \end{aligned}$$

e $V_{\bar{z}} \subseteq V$. Neste caso, $\lambda\mathcal{H}_+ \subseteq \gamma^{-1}W \subseteq \lambda^{-1}\mathcal{H}_+$.

Quando D é constante, podemos tomar um lacete constante de G_2 tal que

$$\gamma \cdot \mathcal{H}_+ = V = \lambda(W \cap \lambda^{-2}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-1}(W \cap \lambda\mathcal{H}_+) + \lambda\mathcal{H}_+.$$

De facto, pelo Teorema 4.10, sabemos que V corresponde a um lacete de G_2 ; além disso, é um lacete constante porque

$$\begin{aligned} V_z &\subseteq \lambda(W_z \cap \lambda^{-1}\mathcal{H}_+) + \lambda^{-1}(W_z \cap \lambda^2\mathcal{H}_+) + \lambda\mathcal{H}_+ \\ &\subseteq (W \cap \mathcal{H}_+) + \lambda^{-2}(W \cap \lambda^3\mathcal{H}_+) + \lambda\mathcal{H}_+ \subseteq V \end{aligned}$$

e $V_{\bar{z}} \subseteq V$. Neste caso, $\lambda^2\mathcal{H}_+ \subseteq \gamma^{-1}W \subseteq \lambda^{-2}\mathcal{H}_+$.

□

4.5.1.2 Caso $k = 2$ e $l = 1$

Recordemos a expressão (4.10)

$$u_\xi(W) = \lambda^{-2}A + \lambda^{-1}A^a + \overline{A^a}^\perp + \lambda\overline{A}^\perp + \lambda^2\mathcal{H}_+,$$

onde, para cada $z \in M$, $A(z) = A_{-2}(z)$ é uma linha isotrópica.

No máximo, temos de tomar doze funções meromorfas com valores em \mathbb{C}^7 da seguinte forma: tomamos quatro secções meromorfas da forma

$$\begin{aligned} s &= s_{-2}\lambda^{-2} + s_{-1}\lambda^{-1} + s_0 + s_1\lambda & w &= w_{-1}\lambda^{-1} + w_0 + w_1\lambda \\ u &= u_{-1}\lambda^{-1} + u_0 + u_1\lambda & v &= v_0 + v_1\lambda \end{aligned}$$

que satisfaçam (4.12), e tais que:

$$A = \text{Span}\{s_{-2}\}, A^a = \text{Span}\{s_{-2}, w_{-1}, u_{-1}\}, \overline{A^a}^\perp = \text{Span}\{s_{-2}, w_{-1}, u_{-1}, v_0\}.$$

Então, X é dado por $X = \text{Span}\{s, u, w, v\} + \lambda\overline{A}^\perp$.

4.5.1.3 Caso $k = 1$ e $l = 0$

Recordemos de (4.11) que temos $u_\xi(W) = \lambda^{-1}D + \overline{D}^\perp + \lambda\mathcal{H}_+$, onde, para cada $z \in M$, $D(z) = A_{-1}(z)$ é um plano complexo co-associativo. Neste caso, W pode ser obtido a partir de quatro funções meromorfas com valores em \mathbb{C}^7 da seguinte forma: tomamos duas secções meromorfas $s = s_{-1}\lambda^{-1} + s_0$ e $w = w_{-1}\lambda^{-1} + w_0$, satisfazendo (4.12) e tais que D é gerado por s_{-1} e w_{-1} ; então $X = \text{Span}\{s, w\} + \overline{D}^\perp$.

4.6 Aplicações Harmónicas com Número de Unitão Finito em Espaços Simétricos de G_2

Recordando as notações da SubSecção 3.5.1, $\mathcal{I} : \Omega G_2 \rightarrow \Omega G_2$ é a involução definida por $\mathcal{I}(\gamma)(\lambda) = \gamma(-\lambda)\gamma(-1)^{-1}$, e o conjunto fixado por \mathcal{I} é denotado por

$$\Omega G_2^{\mathcal{I}} = \{\gamma \in \Omega G_2 : \mathcal{I}(\gamma) = \gamma\}.$$

O Teorema 3.15 garante que se $\Phi : M \rightarrow \Omega G_2^{\mathcal{I}}$ é uma solução estendida, então $\phi = \Phi_{-1}$ é uma aplicação harmónica de M numa componente conexa de \sqrt{e} ; por outro lado, se $\phi : M \rightarrow \sqrt{e}$ é uma aplicação harmónica, então existe uma solução estendida $\Phi : M \rightarrow \Omega G_2^{\mathcal{I}}$ tal que $\phi = \Phi_{-1}$, sempre que M for simplesmente conexa.

Usando a identificação $\Omega G_2 \cong Gr(G_2)$ (Proposição 4.6), a involução \mathcal{I} induz uma involução em $Gr(G_2)$ que também iremos notar por \mathcal{I} , e então o conjunto $\Omega G_2^{\mathcal{I}}$ pode ser identificado com o conjunto

$$Gr(G_2)^{\mathcal{I}} = \{W \in Gr(G_2) : \text{se } s(\lambda) \in W \text{ então } s(-\lambda) \in W\}.$$

Seja $\Phi : M \rightarrow \Omega G_2^{\mathcal{I}}$ uma solução estendida e consideremos o correspondente fibrado $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+ : M \rightarrow Gr(G_2)^{\mathcal{I}}$. Assim, $W = W^+ \oplus W^-$ onde W^+ é o espaço próprio associado ao valor próprio $+1$ de \mathcal{I} e W^- é o espaço próprio associado ao valor próprio -1 de \mathcal{I} .

Por outro lado, notemos por $Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$ a Grassmanniana dos espaços complexos associativos (logo espaços de dimensão complexa 3), e então G_2 actua transitivamente em $Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$ com subgrupo de isotropia num ponto fixo isomorfo a $SO(4)$; ou seja, $Gr_3^a(\mathbb{C}^7) \cong G_2/SO(4)$.

Fixemos $\mathcal{V}_0 \in Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$ e seja $\pi_{\mathcal{V}_0}$ a projecção hermitiana, então este é um espaço simétrico interno, já que a involução τ é dada por $\tau(g) = Q_0 g Q_0^{-1}$, onde $Q_0 = \pi_{\mathcal{V}_0} - \pi_{\mathcal{V}_0}^\perp$; e temos o mergulho de Cartan totalmente geodésico $\iota : Gr_3^a(\mathbb{C}^7) \rightarrow G_2$ dado por $\iota(\mathcal{V}) = Q_0(\pi_{\mathcal{V}} - \pi_{\mathcal{V}}^\perp)$. Assim, como referimos anteriormente, as aplicações harmónicas no espaço simétrico interno $G_2/SO(4)$ podem ser vistas como aplicações harmónicas especiais em G_2 . Então, os resultados anteriores, relativamente a factorizações de soluções estendidas e soluções estendidas normalizadas de aplicações harmónicas em G_2 , também são válidos para espaços G_2 -simétricos internos.

Consideremos uma aplicação harmónica $\psi : M \rightarrow Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$ com número de unitão finito, que identificamos com a aplicação harmónica $\phi = Q_0^{-1}(\iota \circ \psi) : M \rightarrow G_2$; sejam $\Phi : M \rightarrow \Omega G_2^{\mathcal{I}}$ uma solução estendida associada a ϕ e $W = \Phi \cdot \mathcal{H}_+ : M \rightarrow Gr(G_2)^{\mathcal{I}}$. Como $W(z) \ominus \lambda W(z)$ tem dimensão 7, recordando a Observação 1.14, podemos tomar $\tilde{\Phi} \in \Lambda G_2$, uma matriz cujas colunas são uma base ortonormada de $\mathbb{C}^7 \cong W(z) \ominus \lambda W(z)$ e logo $\Phi = \tilde{\Phi} g^{-1} \in \Omega G_2$ onde $g \in \Lambda G_2$ é o lacete constante dado por $g = \tilde{\Phi}_1$.

Então, usando a decomposição

$$W(z) \ominus \lambda W(z) = (W(z) \ominus \lambda W(z))^+ \oplus (W(z) \ominus \lambda W(z))^-$$

podemos escrever

$$\Phi = \tilde{\Phi}^+ g^{-1} + \tilde{\Phi}^- g^{-1}. \quad (4.13)$$

Por um lado, fazendo $\lambda = -1$ em (4.13) obtemos $\tilde{\Phi}_1^+ g^{-1} - \tilde{\Phi}_1^- g^{-1} = \Phi_{-1} = \phi = \pi_{\mathcal{V}} - \pi_{\mathcal{V}}^\perp$, para algum $\mathcal{V} \subseteq Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$; por outro lado, fazendo $\lambda = 1$ em (4.13) obtemos $\tilde{\Phi}_1^+ g^{-1} + \tilde{\Phi}_1^- g^{-1} = \Phi_1 = Id = \pi_{\mathcal{V}} + \pi_{\mathcal{V}}^\perp$. Logo $\tilde{\Phi}_1^+ g^{-1} = \pi_{\mathcal{V}}$ e $\tilde{\Phi}_1^- g^{-1} = \pi_{\mathcal{V}}^\perp$.

Assim, temos de ter $\dim_{\mathbb{C}}(W(z) \ominus \lambda W(z))^+ = 3$. A aplicação harmónica ψ é recuperada fazendo $\lambda = 1$ em $(W(z) \ominus \lambda W(z))^+$.

Redordemos a decomposição (4.2) indicada no final da Secção 4.1. A involução \mathcal{I} fixa essa decomposição e actua em cada um dos \mathcal{A}_i (ver (4.3)) como $(-1)^i$. Então, temos de ter

$$\sum_{i \text{ par}} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_i = 3.$$

Como $\mathcal{A}_{-i} = \overline{\mathcal{A}_{i-1}}^\perp$, logo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_{-i}$ e portanto $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_0 \neq 0, 2$, de onde concluímos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_0 = 1, 3$.

4.6.1 Factorização de Aplicações Harmónicas num Espaço Simétrico de G_2

A condição que indicamos no final da secção anterior obriga a que tenhamos um dos seguintes casos:

1. se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_0 = 1$ e, ou $k > 2l$ e k é ímpar, ou $k > 2l$ e l é ímpar, e nestas condições podemos factorizar a solução estendida usando o Teorema 4.10,
2. se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_0 = 1$ e $k = 2l$ e nestas condições podemos factorizar a solução estendida usando o Teorema 4.11,
3. se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_0 = 3$ e k é ímpar, podemos factorizar a solução estendida usando o Teorema 4.10 (com $l = 0$).

Nessas factorizações, de cada vez que obtemos um novo W^α temos uma nova solução estendida que origina uma aplicação harmónica num espaço G_2 -simétrico, mas não necessariamente no mesmo espaço simétrico de G_2 .

Tal como na Secção 4.5, dada uma aplicação harmónica $\psi : M \rightarrow Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$ com número de unitão finito, ψ admite uma solução estendida normalizada $\Phi^n : M \setminus D' \rightarrow \Omega G_2^{\mathbb{I}} \cap U_{\xi^n}$ tal que $\lambda^3 \mathcal{H}_+ \subseteq W^n \subseteq \lambda^{-3} \mathcal{H}_+$, onde $W^n = \Phi^n \cdot \mathcal{H}_+$. Essa solução estendida normalizada W^n enquadra-se num dos seguintes casos.

4.6.1.1 Caso $k = 3$ e $l = 1$

Quando estamos nas condições do caso 1. indicado acima, a solução estendida S^1 -invariante correspondente $u_\xi(W^n)$ é dada por (4.9), à qual corresponde a aplicação harmónica $\psi_\xi : M \rightarrow Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$ dada por $\psi_\xi = (D \ominus A) \oplus (\overline{A^{a^\perp}} \ominus A^a) \oplus (\overline{A^\perp} \ominus \overline{D^\perp})$. Se A é cheio, W é gerado por um fibrado linha $X = \text{Span}\{s = s_{-3}\lambda^{-3} + s_{-1}\lambda^{-1} + s_1\lambda\}$, em que s satisfaz (4.12). Se A não é cheio, pelo Lema 4.20, temos $r(\phi) \leq 4$.

4.6.1.2 Caso $k = 2$ e $l = 1$

Quando estamos nas condições do caso 2. indicado acima, a solução estendida S^1 -invariante correspondente $u_\xi(W^n)$ é dada por (4.10), à qual corresponde a aplicação harmónica $\psi_\xi : M \rightarrow Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$ dada por $\psi_\xi = A \oplus (\overline{A^{a^\perp}} \ominus A^a) \oplus \overline{A}$. Neste caso, temos de considerar seis funções meromorfas com valores em \mathbb{C}^7 : tomamos $s = s_{-2}\lambda^{-2} + s_0$, $w = w_{-1}\lambda^{-1} + w_1\lambda$ e $u = u_{-1}\lambda^{-1} + u_1\lambda$ satisfazendo (4.12) e tais que $A = \text{Span}\{s_{-2}\}$ e $A^a = \text{Span}\{s_{-2}, w_{-1}, u_{-1}\}$. Então, X é dado por $X = \text{Span}\{s, w, u\} + \overline{A^{a^\perp}} + \lambda \overline{A^\perp}$.

4.6.1.3 Caso $k = 1$ e $l = 0$

Quando estamos nas condições do caso 3. indicado acima, a solução estendida é necessariamente S^1 -invariante e é dada por (4.11), à qual corresponde a aplicação harmónica $\psi_\xi : M \rightarrow Gr_3^a(\mathbb{C}^7)$ dada por $\psi_\xi = \overline{D^\perp} \ominus D$.

Conclusões

Ao longo deste trabalho, descrevemos como a operação de somar um unitão a uma solução estendida associada a uma dada aplicação harmónica, introduzida por Uhlenbeck [35], surge através do método de DPW em [15]; e usámos esse ponto de vista para determinar os unitões que preservam a propriedade do tipo finito nas aplicações harmónicas, em particular provámos que o fibrado de Gauss de uma aplicação harmónica do tipo finito numa Grassmanniana também é do tipo finito.

Tomando os geradores para os lacetes racionais das representações fundamentais de $Sp(n)^{\mathbb{C}}$ e $SU(n)^{\mathbb{C}}$, que são ligeiramente mais do que os factores simples de Uhlenbeck, redefinimos o conceito de factor simples; e provámos que qualquer aplicação harmónica ϕ com número de unitão finito num grupo de Lie G compacto semi-simples de matrizes (em particular, ϕ pode estar definida sobre S^2) pode ser reduzida a uma constante usando um número finito de acções de revestimento singulares simples produzidas a partir de curvas de factores simples em $G^{\mathbb{C}}$, redução essa que induz uma factorização de ϕ em factores bandeira $S^2 \rightarrow G$. Para o caso de uma aplicação harmónica com número de unitão finito num espaço simétrico G/K interno temos um resultado equivalente.

Usando o modelo Grassmanniano para o grupo de lacetes de base em G_2 , obtivemos fórmulas explícitas para as factorizações canónicas de soluções estendidas que correspondem a aplicações harmónicas com número de unitão finito no grupo de Lie excepcional G_2 , assim como para aplicações harmónicas com número de unitão finito em espaços simétricos internos de G_2 . Através da descrição dos geradores do referencial de Frenet para estas aplicações harmónicas, foi mostrado que as aplicações harmónicas $\phi : S^2 \rightarrow G$ correspondem a soluções de um certo sistema algébrico de equações quádricas e cúbicas, esperamos em breve obter fórmulas explícitas resolvendo esses sistemas. Por outro lado, pretendemos avançar nos grupos de Lie excepcionais, estudando aplicações harmónicas em F_4 , o grupo dos automorfismos de $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ (ver [1]).

Bibliografia

- [1] J.C. Baez, *The Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), no. 2, 145-205. 47, 69
- [2] M.J. Bergvelt and M.A. Guest, *Actions of Loop Groups on Harmonic Maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), no. 2, 861-886. 1, 2, 38, 45
- [3] F.E. Burstall, *Isothermic Surfaces: Conformal Geometry, Clifford Algebras and Integrable Systems*, Integrable Systems, Geometry and Topology (C.-L. Terng, ed.), Studies in Advanced Mathematics, no. 36, AMS/IP, 2006, pp. 1-82. 32, 37
- [4] F.E. Burstall, D. Ferus, F. Pedit, and U. Pinkall, *Harmonic Tori in Symmetric Spaces and Commuting Hamiltonian Systems on Loop Algebras*, Ann. of Math. **138** (1993), 173-212. 2
- [5] F.E. Burstall and M.A. Guest, *Harmonic Two-Spheres in Compact Symmetric Spaces, revisited*, Math. Ann. **309** (1997), no. 4, 541-572. 2, 3, 9, 31, 41, 42, 46, 58
- [6] F.E. Burstall and F. Pedit, *Harmonic Maps via Adler-Kostant-Symes Theory*, Harmonic Maps and Integrable Systems (A.P. Fordy and J.C. Wood, eds.), Aspects of Mathematics, no. 23, 1994, pp. 221-272. 2, 11, 25
- [7] _____, *Dressing Orbits of Harmonic Maps*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 2, 353-382. 1, 6, 20
- [8] F.E. Burstall and J.H. Rawnsley, *Twistor Theory for Riemannian Symmetric Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, no. 1424, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990. 10, 29, 31
- [9] F.E. Burstall and J.C. Wood, *The Construction of Harmonic Maps into Complex Grassmannians*, J. Differential Geom. **23** (1986), no. 3, 255-297. 24, 25
- [10] J. Cheeger and D. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, Amsterdam, 1975. 10
- [11] N. Correia and R. Pacheco, *Harmonic Maps of Finite Uniton Number into G_2* , Math. Z. **3**, 45, 58, 59, 60, 61, 62
- [12] _____, *Adding a Uniton Via the DPW Method*, Internat. Journal of Math. **20** (2009), no. 8, 997-1010. 2
- [13] _____, *Singular Dressing Actions on Harmonic Maps*, Q. J. Math. **62** (2011), no. 1, 71-85. 3, 29
- [14] N. Donaldson, D. Fox, and O. Goertsches, *Generators for Rational Loop Groups and Geometric Applications*, arXiv:0803.0029v1 [math.DG] (2008). 2, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 48, 49
- [15] J. Dorfmeister, F. Pedit, and H. Wu, *Weierstrass Type Representation of Harmonic Maps into Symmetric Spaces*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 4, 633-668. 1, 2, 6, 10, 11, 15, 16, 18, 20, 21, 69
- [16] J. Eells and L. Lemaire, *A Report on Harmonic Maps*, Bull. London Math. Soc. **10** (1978), no. 1, 1-68. 1

- [17] ———, *Another Report on Harmonic Maps*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), no. 5, 385-524. 1
- [18] J. Eells and J.C. Wood, *Harmonic Maps from Surfaces to Complex Projective Spaces*, Advances in Math. **49** (1983), 217-263. 63
- [19] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory - A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, no. 129, Springer, 2004. 47
- [20] M.A. Guest, *Harmonic Maps, Loop Groups, and Integrable Systems*, London Mathematical Society Student Texts, no. 38, Cambridge University Press, 1997. 32
- [21] ———, *An update on Harmonic Maps of Finite Uniton Number, via the Zero Curvature Equation*, Integrable Systems, Topology, and Physics: A Conference on Integrable Systems in Differential Geometry (M. Guest, R. Miyaoka, and Y. Ohnita, eds.), Contemporary Mathematics, no. 309, Amer. Math. Soc., 2002, pp. 85-113. 3, 17, 31, 63
- [22] M.A. Guest and Y. Ohnita, *Group Actions and Deformations for Harmonic Maps*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), no. 4, 671-704. 1, 20
- [23] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, 2001. 30
- [24] J.E. Humphreys, *Intoduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, no. 9, Springer-Verlag, 1972. 30
- [25] X. Jiao, *Factorizations of Harmonic Maps of Suraces into Lie Groups by Singular Dressing Actions*, Differential Geometry and Integrable Systems: A Conference on Integrable Systems in Differential Geometry (M. Guest, R. Miyaoka, and Y. Ohnita, eds.), Contemporary Mathematics, no. 308, American Mathematical Society, 2002, pp. 199-204. 2, 38
- [26] J.L. Koszul and B. Malgrange, *Sur Certaines Structures Fibrées Complexes*, Arch. Math. **9** (1958), 102-109. 24
- [27] I. McIntosh, *Global Solutions of the Elliptic 2D Periodic Toda Lattice*, Nonlinearity **7** (1994), no. 1, 85-108. 7
- [28] R. Pacheco, *Harmonic Maps and Loop Groups*, Ph.D. thesis, University of Bath, 2004. 2, 14, 24
- [29] ———, *Harmonic Two-Spheres in the Symplectic Group $Sp(n)$* , Internat. Journal of Math. **17** (2006), no. 3, 295-311. 3
- [30] A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Mathematical Monographs, 2003. 1, 5, 7, 12, 13, 46, 50
- [31] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The Existence of Minimal Immersions of 2-Spheres*, Ann. of Math. **113** (1981), no. 1, 1-24. 38
- [32] G. Segal, *Loop Groups and Harmonic Maps*, Advances in Homotopy Theory (S.M. Salamon, B. Steer, and W.A. Sutherland, eds.), Lecture Note Series, no. 139, London Mathematical Society, 1989, pp. 153-164. 3, 5, 13, 14, 32, 42
- [33] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Chelsea Publishing Company, N.Y., 1983. 7

- [34] M. Svensson and J. Wood, *Filtrations, Factorizations and Explicit Formulae for Harmonic Maps*, arXiv:0909.5582v3 [math.DG] (2010). 3
- [35] K. Uhlenbeck, *Harmonic Maps into Lie Groups (classical solutions of the chiral model)*, J. Differential Geom. **30** (1989), no. 1, 1-50. 1, 2, 3, 8, 9, 11, 13, 15, 21, 22, 29, 32, 36, 38, 42, 69
- [36] J.C. Wood, *Harmonic Maps into Symmetric Spaces and Integrable Systems*, Harmonic Maps and Integrable Systems (A.P. Fordy and J.C. Wood, eds.), Aspects of Mathematics, no. 23, 1994, pp. 29-55. 7, 8, 9

Índice Remissivo

- Acção de Revestimento, 1, 20
 - Singular, 2, 38
 - \mathcal{I} -Simples, 43
 - Simples, 38
- Aniquilador, 48
- Aplicação Harmónica, 1, 7
 - com Número de União Finito, 9
 - do Tipo Finito, 25
- Condição de Realidade, 7
- Curvatura-Nula
 - Equação, 7
- Elemento Canónico, 31
- Espaço
 - j -isotrópico, 34
- Espaço Complexo
 - Associativo, 49
 - Co-Associativo, 49
 - Isotrópico, 48
- Espaço G -Simétrico
 - Interno, 9
- Estabilizador, 48
- Factores Simples, 29, 32
- Fibrados de Gauss, 25
- Forma Fundamental
 - 2-, 33
- Funcional Energia, 1
- G_2 , 47
- \mathcal{G}_0 , 20
- Grupo Gauge
 - ε -Holomorfo, 20
 - Holomorfo, 21
- j -estrutura, 33
- Lacetes
 - Algebras com Base e , 5
 - Álgebras de, 5
 - Algébrios, 5
 - Factorização
 - Canónica, 53
 - Comprimento N Tipo (k_1, \dots, k_N) , 52
 - Grupo com Base e , 5
 - Grupo de, 5
 - S^1 -invariantes, 45
 - Tipo (k, l) , 51
 - τ -torcidos, 6
- Maurer-Cartan
 - Equação, 7
 - Forma, 7, 10
- Mergulho de Cartan, 10
- Modelo Grassmanniano, 12, 49
 - Algébrico, 13, 50
- Octoniões, 47
 - Imaginários Puros, 47
- Potencial
 - ε -Holomorfo, 16
 - Holomorfo, 15
 - Holomorfo τ -torcido, 15
- Processo de Completação, 2
 - Modificada, 2, 38
- Quaterniões, 46
- Raízes, 30
 - Espaços, 30
 - Positivas, 30
 - Simples, 30
 - Sistema Positivo, 30
- Referencial de Frenet
 - Geradores, 63
- Referencial Estendido, 11
- Segunda Forma Fundamental
 - ∂ -, 24
 - $\bar{\partial}$ -, 24
- Solução Estendida, 1, 8
 - Complexa, 16
 - Normalizada, 60-62
- Subálgebra de Cartan, 29
- Subálgebra Parabólica, 30
- Subfibrado Cheio, 64
- Unitão

Condições, 21
Número, 9
Número Mínimo, 9
Soma, 21