



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Abordagens ao Modelo de Lotka-Volterra Versão Final Após Defesa

Calvino Paulo Capoco

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática Para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof^a. Doutora Sandra Cristina de Pinto Vaz

Covilhã, agosto de 2018

Dedicatória

Dedico esta obra aos meus pais por me terem ensinado a andar em caminhos certos desde muito cedo e me ter tornado no filho que sou e esperar ser o pai que meus filhos se orgulhem a cada dia.

Agradecimentos

A Deus pela graça da vida e constante proteção. À Prof^a Doutora Sandra Cristina de Pinto Vaz, pelo nível de sapiência, paciência, humildade, espírito de coletividade e sobretudo excelente metodologia tutorial desde ter aceite este desafio ao longo desta formação. Ao Prof. Doutor César Silva pelo acompanhamento ao longo do Projeto de Ensino II e de uma maneira geral aos Professores afetos ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade da Beira Interior. À Direcção da Escola Superior Pedagógica do Bié, em especial ao Prof. Doutor Alfredo Maria de Jesus Paulo, por ter acreditado em mim e me ter integrado neste desafio científico. À minha esposa, meus irmãos, amigos e colegas pelo constante encorajamento.

Resumo

Nesta dissertação, vamos considerar o modelo Lotka-Volterra. Este foi obtido na década 1920's independentemente por Lotka e Volterra. O modelo é dado por um par de equações diferenciais não lineares de primeira ordem e considera a interação entre as duas populações. Existem três grandes tipos de interação: competição, cooperação e predador -presa. Neste trabalho, estudamos o modelo Lotka-Volterra com interação do tipo predador-presa. Para modelar a dinâmica entre as duas populações podemos adicionar termos ao modelo original de forma a torná-lo mais realista e sempre que possível estimar a sua estabilidade. No primeiro modelo a ser analisado, será introduzido um termo nas presas e será estudada sua estabilidade. Um dos termos a ser adicionado pode ser um controle, numa ou nas duas populações e pode ser visto como introdução ou remoção de elementos nas populações. No segundo e terceiro modelo, iremos introduzir um termo que deverá ser visto como um controle. Este será introduzido nos predadores e será do tipo ON-OFF. Em ambos os modelos iremos mostrar graficamente que os modelos aparentam convergir para um ponto numa zona específica. Todos serão modelados usando equações às diferenças mas para isso é necessário escolher um esquema numérico. Entre os mais comuns estão os métodos de Euler, Runge-Kutta e Mickens. Iremos usar o método de Mickens.

Palavras-chave

Equações às Diferenças, Sistemas não Lineares, Modelo de Lotka-Volterra, Estabilidade, Sistemas de Estrutura Variável

Abstract

In this dissertation, we consider the Lotka-Volterra model. It was obtained in 1920's independently by Lotka and Volterra.

The model is given by two first-order nonlinear differential equations and consider the interaction between two populations. The three main types of interaction are competition, cooperation, and predator-prey. In this work, we study the Lotka-Volterra model of the predator-prey type.

To model the dynamics between these two populations there can be added terms in an attempt to make it more realistic and if it is possible, to estimate its stability. In the first model, we add a term in the preys and its stability will be studied. One of the terms that can be added may be a control, in one or two populations and it can be seen as an introduction or removal of elements of the population or populations. In the second and third model, we will add a term that should be seen as a control. It will be added in the predators and will be an ON-OFF control. In these two last models, it will be shown graphically that the trajectories tend to converge to a point in a specific zone. All of them will be modeled by difference equations but, to do that, we need to choose some numerical scheme. The most common ones are Euler, Runge-Kutta and more recently Mickens method. We will use the Mickens Method.

Keywords

Difference Equations, Nonlinear Systems, Lotka-Volterra Model, Stability, Variable Structure Systems.

Conteúdo

Introdução	1
1 Sistemas Dinâmicos Discretos	3
1.1 Equações às Diferenças	3
1.2 Sistemas de Equações às Diferenças	7
1.3 Sistemas Híbridos	11
1.3.1 Sistemas de Controle de Estrutura Variável	14
2 Perturbações do Modelo Lotka-Volterra	23
2.1 Discretização do Modelo pelo Método de Mickens	25
2.2 Adição de termo nas Presas	27
2.3 Sistema com Controle nos Predadores 1	36
2.4 Sistema com Controle nos Predadores 2	52
3 Aplicações ao Ensino Secundário	59
Bibliografia	63
A	65
A.1 Conceitos sobre Cálculo Matricial	65
A.2 Algoritmo	66
A.3 Variáveis Booleanas	68

Lista de Figuras

Figura 1.1	Autômato Finito	12
Figura 1.2	Grafo	12
Figura 1.3	Vértice	13
Figura 1.4	Modo Deslizante	17
Figura 2.1	Curvas de Nível do Modelo de Lotka- Volterra	25
Figura 2.2	Varição do sinal de Δ	33
Figura 2.3	Superfície onde $\Delta = 0, \lambda = 3$	33
Figura 2.4	Superfície onde $\Delta = 0, \lambda = 5$	33
Figura 2.5	Zona de Chaveamento M	45
Figura 2.6	Pontos de equilíbrio virtuais	45
Figura 2.7	Banda limite $ s(z) \leq \sigma$	46
Figura 2.8	Zona de Chaveamento M com Histerese	46
Figura 2.9	Trajectoria de (N_0, P_0)	47
Figura 2.10	Comparação de trajetórias	47
Figura 2.11	Trajectoria de (N_0, P_0)	48
Figura 2.12	Comparação de trajetórias	48
Figura 2.13	Trajectoria de (N_0, P_0)	48
Figura 2.14	Comparação de trajetórias	48
Figura 2.15	Trajectoria de (N_0, P_0)	48
Figura 2.16	Comparação de trajetórias	48
Figura 2.17	Trajectoria de (N_0, P_0)	49
Figura 2.18	Comparação de trajetórias	49
Figura 2.19	Trajectoria de (N_0, P_0)	49
Figura 2.20	Comparação de trajetórias	49
Figura 2.21	Trajectoria de (N_0, P_0)	49
Figura 2.22	Comparação de trajetórias	49
Figura 2.23	Trajectoria de (N_0, P_0)	50
Figura 2.24	Comparação de trajetórias	50
Figura 2.25	Trajectoria de (N_0, P_0)	50
Figura 2.26	Comparação de trajetórias	50
Figura 2.27	Trajectoria de (N_0, P_0)	50
Figura 2.28	Comparação de trajetórias	50
Figura 2.29	Trajectoria de (N_0, P_0)	51
Figura 2.30	Comparação de trajetórias	51
Figura 2.31	Trajectoria de (N_0, P_0)	51
Figura 2.32	Comparação de trajetórias	51
Figura 2.33	Trajectoria de (N_0, P_0)	51
Figura 2.34	Comparação de trajetórias	51
Figura 2.35	Trajectoria de (N_0, P_0)	51
Figura 2.36	Comparação de trajetórias	51
Figura 2.37	Trajectoria de (N_0, P_0)	52
Figura 2.38	Comparação de trajetórias	52

Figura 2.39	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	56
Figura 2.40	Zona Quasi-Deslizante	56
Figura 2.41	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	56
Figura 2.42	Zona Quasi-Deslizante	56
Figura 2.43	A Trajetória de (N_0, P_0)	56
Figura 2.44	Zona Quasi-Deslizante	56
Figura 2.45	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	56
Figura 2.46	Zona Quasi-Deslizante	56
Figura 2.47	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	57
Figura 2.48	Zona Quasi-Deslizante	57
Figura 2.49	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	57
Figura 2.50	Zona Quasi-Deslizante	57
Figura 2.51	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	57
Figura 2.52	Zona Quasi-Deslizante	57
Figura 2.53	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	58
Figura 2.54	Zona Quasi-Deslizante	58
Figura 2.55	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	58
Figura 2.56	Zona Quasi-Deslizante	58
Figura 2.57	Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)	58
Figura 2.58	Zona Quasi-Deslizante	58

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Valores Próprios dos Pontos de Equilíbrio do Sistema Contínuo	24
Tabela 2.2	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_1	30
Tabela 2.3	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_1	40
Tabela 2.4	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{1P}	42
Tabela 2.5	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{2P}	43
Tabela 2.6	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{2P}	44
Tabela 2.7	1º Conjunto de Valores	47
Tabela 2.8	2º Conjunto de Valores	49
Tabela 2.9	3º Conjunto de Valores	50
Tabela 2.10	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_1	53
Tabela 2.11	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_2	53
Tabela 2.12	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{1M}	54
Tabela 2.13	Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{2M}	54
Tabela 2.14	1ª Conjunto de Valores	55
Tabela 2.15	2º Conjunto de Valores	57

Introdução

Volterra, em 1926, propôs um modelo simples para explicar os níveis oscilatórios da colheita de determinado tipo de peixes, no mar adriático. O modelo apresenta o desenvolvimento de cada espécie isoladamente e a respetiva interação entre elas. Portanto mostra como a dinâmica populacional de cada espécie é afetada. Se a taxa de crescimento de uma espécie aumenta e a outra decresce as populações estão numa interação do tipo predador-presa. Perante este tipo de interação, o modelo de Lotka -Volterra é um dos mais famosos. Existem imensos artigos disponíveis quer quando ele está modelado através de equações diferenciais [Mur02], quer através de equações às diferenças [Liu01]. Para discretizarmos o modelo precisamos de escolher um esquema numérico. Os mais utilizados são o método de Euler, de Runge-Kutta e mais recentemente o método de Mickens [Mic02]. Se usarmos o método de Euler, pode-se verificar que o sistema resultante tem várias deficiências e em particular falha em consistência dinâmica. O sistema de equações às diferenças diz-se dinamicamente consistente com o modelo contínuo se ambos exibem o mesmo comportamento qualitativo, tais como estabilidade, bifurcação e caos. Num sistema de equações às diferenças podemos ter soluções numericamente instáveis, isto é, soluções no modelo que não correspondem a soluções do modelo definido através de equações diferenciais. De acordo com Mickens, a instabilidade numérica ocorre devido ao facto do espaço de parâmetros nas equações às diferenças ser maior do que o espaço de parâmetros nas equações diferenciais. O parâmetro extra é o tamanho do passo a ser utilizado. Assim Mickens, em [Mic02], propôs seguir um conjunto de passos que permite eliminar instabilidades numéricas nos modelos discretos. Murray, em [Mur02], estudou extensivamente o modelo descrito através de equações diferenciais. Elaydi e Liu, em [Liu01], analisaram o modelo com interacção do tipo competição e cooperação, através de equações às diferenças usando o esquema de Mickens. Quando o modelo estudado (através de equações diferenciais ou equações às diferenças) é perturbado, introduzindo termos que expliquem o habitat ou as condições climáticas o objetivo é tornar o modelo mais realista. A sua análise poderá exigir uma monitorização constante. E se pretendermos diminuir o esforço de monitorização constante do modelo? E se só interferíssemos quando determinada condição não é satisfeita? Portanto o modelo mantém-se inalterado se a condição não é satisfeita e altera-se caso contrário. Se o modelo original é dado através de equações diferenciais ao perturbarmos esse modelo pela ideia descrita anteriormente, estamos perante os chamados sistemas híbridos, [Lyg04], [Shu99]. Isto porque o novo modelo tem uma componente contínua e outra discreta. Uma subclasse dos sistemas híbridos são os sistemas de controle com estrutura variável, [Eme67]. Isto é, sistemas cuja parte direita é descontínua, [Fil60], [Fil88]. Em 1978, Utkin em [Utk78] apresentou ferramentas para trabalhar com estes sistemas pois as ferramentas clássicas não se aplicam. Este tipo de sistemas tem imensas aplicações em engenharia, ciência dos computadores e ecologia. A investigação é vasta neste caso. Desde à apresentação do modelo a técnicas de análise de estabilidade. A complexidade dos sistemas tais como a não linearidade das equações e a necessidade de utilizarmos computadores para realizar simulações exigem a discretização dos sistemas e está-se perante uma nova linha de investigação, os sistemas de controle com estrutura variável discretos, [Ban15], [Kao05], [Dra89]. Esta linha de investigação tem várias questões em aberto nomeadamente a estabilidade. Esta é estudada modelo a modelo. O modelo de Lotka-Volterra pode ser descrito como um sistema de controle de estrutura variável, ver por exemplo [Li14], [Kas05]. Assim este trabalho está estruturado da seguinte forma: o primeiro capítulo está separado em três secções. Na primeira, serão apresentadas definições e resultados sobre estabilidade dos pontos

de equilíbrio de equações lineares às diferenças. Na segunda, os resultados serão generalizados a sistemas de equações às diferenças, lineares e não lineares, e como estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema. Terminaremos com uma terceira secção que consiste primeiro numa breve introdução aos sistemas híbridos. Como estamos interessados num tipo de sistemas híbridos- sistemas de controle de estrutura variável, abordaremos também nesta secção os conceitos relevantes para a realização deste trabalho. Começaremos pelos sistemas de controle de estrutura variável contínuos e depois os discretos. O segundo capítulo é dedicado ao modelo de Lotka-Volterra. Começamos por abordar o modelo contínuo e depois apresentaremos a discretização pelo método de Mickens. As três secções seguintes são dedicadas à adição de um termo ao modelo. Na primeira secção o termo será adicionado à equação que representa o comportamento das presas e estudaremos a estabilidade local e global dos pontos de equilíbrio. Na segunda e terceira secção serão estudados dois modelos onde o termo a ser adicionado deverá ser visto como um controle e será aplicado apenas à equação que representa o comportamento dos predadores. Ambos serão discretizados pelo método de Mickens mas o modelo final é diferente. O primeiro é a nossa proposta e o segundo foi apresentado em [Bay11]. Em ambos os modelos é analisada a natureza dos pontos de equilíbrio. Depois para cada um mostra-se através do método gráfico que as trajetórias tendem a convergir para um ponto numa determinada zona. Terminamos o capítulo comparando os resultados gráficos obtidos. No terceiro capítulo serão apresentadas algumas sugestões de como poderemos aplicar a modelação de sistemas dinâmicos discretos ao ensino secundário. Dada a não linearidade do modelo, optou-se por apresentar exercícios relativos a casos particulares do modelo. Neste trabalho temos três pequenos apêndices, um sobre cálculo matricial, outro sobre variáveis booleanas e outra com a apresentação dos algoritmos utilizados.

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos Discretos

Em sistemas dinâmicos, o conceito de tempo é fundamental. O tempo como parâmetro indexa as transições do sistema de um estado para o outro. É facto do sistema depender do tempo que torna o sistema dinâmico.

Define-se um espaço de estados de um sistema dinâmico como uma coleção de variáveis que dependem do tempo e tomam valores num espaço vetorial V , tal que a informação contida nas variáveis num determinado instante t_0 é suficiente para determinar os valores das variáveis em todo o tempo. Os valores destas variáveis num dado instante é o estado do sistema nesse instante.[Lam05]

No caso contínuo, a evolução do sistema é dada por equações diferenciais, isto é, um estado flui para outro segundo uma equação diferencial. No caso discreto, a evolução das variáveis de estado dependem do tempo mas este toma valores inteiros, isto é, um estado salta para outro segundo equações às diferenças. No entanto, o caso contínuo pode ser modelado e analisado por sistemas dinâmicos discretos.

Neste trabalho o nosso foco é em sistemas não lineares, mas primeiro é necessário apresentar os conceitos básicos de equações às diferenças. Assim este capítulo está dividido em três secções. Na primeira secção começamos por abordar o conceito de equações lineares às diferenças e um pouco sobre o estudo dos seus pontos de equilíbrio. Existem muitas situações que para serem descritas necessitam mais do que uma equação às diferenças. Temos então um sistema de equações. Os sistemas lineares satisfazem princípios que são excepções e não a regra e a sua simplicidade permite o desenvolvimento de teorias matemáticas apesar da maioria dos fenómenos no mundo natural apresentarem relações não lineares. O comportamento dos sistemas não lineares varia bastante e apresenta um comportamento mais rico, portanto o seu desenvolvimento é muito mais lento. Por um lado, nos sistemas dinâmicos contínuos existem técnicas tais como aproximação e linearização que permitem obter soluções enquanto os sistemas dinâmicos discretos manifestam comportamentos que tornam a sua análise mais desafiante. Assim, na segunda secção apresentamos alguns métodos de análise para sistemas de equações às diferenças. A terceira secção será dedicada a sistemas híbridos. Estes sistemas englobam nas suas expressões variáveis contínuas e variáveis discretas. As variáveis discretas são variáveis booleanas. Estamos interessados num tipo de sistemas híbridos, os chamados sistemas de controle de estrutura variável. Toda a secção será dedicada a definições e conceitos novos, pois a teoria clássica de sistemas dinâmicos não se aplica. As definições e conceitos criam a base ou a estrutura que está por trás do nosso trabalho. Para apresentar as definições e conceitos seguimos os seguintes livros [Utk78], [Shu99], [Ban15] e [Kao05]. No entanto iremos citá-los ao longo da exposição.

1.1 Equações às Diferenças

Começaremos por apresentar algumas definições relacionadas com equações às diferenças, [Ela05b]. Assumamos que o tempo é dividido em passos ou instantes discretos, $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.1. Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Uma equação da forma

$$x_{n+1} = f(n, x_n) \quad (1.1)$$

diz-se uma *equação às diferenças de primeira ordem*. Se f não depender explicitamente de n , isto é, se for da forma $f(n, x) = g(x)$ então a equação diz-se *autónoma*. Caso contrário, a equação diz-se *não-autónoma*.

Nas equações às diferenças, cada estado depende do instante de tempo (se a equação for não - autónoma) e dos estados anteriores do sistema. Pode-se determinar a ordem de uma equação às diferenças através da diferença entre o maior e o menor índice dos termos envolvidos na equação. Assim, se só depender do estado anterior diz-se equação às diferenças de primeira ordem. Se depender de dois estados anteriores diz-se de segunda ordem. Se depender de k estados anteriores diz-se uma equação às diferenças de ordem k .

A equação (1.1) no caso de ser autónoma

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1.2)$$

define uma *relação de recorrência*.

Definição 1.1.2. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, ou simplesmente x_n , diz-se *solução de uma equação às diferenças* se, para todos os valores de n , x_n satisfaz a equação (1.2).

Definição 1.1.3. A família de todas as soluções x_n que satisfaz a equação (1.2) designa-se por *solução geral* de uma equação às diferenças, de ordem 1.

Definição 1.1.4. A *solução particular* de uma equação às diferenças de ordem 1 é a única solução que obedece a 1 condição imposta.

A solução geral de uma equação às diferenças de ordem 1 depende de uma constante arbitrária C . A solução particular é obtida a partir da solução geral determinando o valor da constante C . Esse valor é obtido a partir do conhecimento do valor da solução do sistema no ponto inicial, que se designa por *condição inicial*.

Consideremos uma condição inicial, x_0 . O conceito de solução de uma equação governada pela relação de recorrência (1.2) é uma sequência de estados, determinados a partir da relação (1.2) começando em x_0 . Isto é, $\{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots\}$ que pode ser denotada por

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^k(x_0), \dots\}. \quad (1.3)$$

A aplicação progressiva de f ao estado anterior do sistema designa-se um estado do sistema. A k -ésima aplicação de f à condição inicial diz-se a k -ésima iterada do sistema. A sequência (1.3) corresponde à *órbita positiva* de x_0 e vai ser denotada por $\mathcal{O}^+(x_0)$. A *órbita negativa* de x_0 é denotada por $\mathcal{O}^-(x_0) = \{f^n(x_0) : n \leq 0\}$. O conjunto $\mathcal{O}(x_0) = \mathcal{O}^+(x_0) \cup \mathcal{O}^-(x_0)$ designa a *órbita* de x_0 .

Agora vamos definir o que é uma função ser linear.

Definição 1.1.5. Uma função $f : D \rightarrow R$, onde D e R são espaços vetoriais num dado corpo F , diz-se *linear* se para todo $x, y \in D$ e para todo $\alpha, \beta \in F$ temos

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

A função é *não linear* se não for linear.

As equações às diferenças não lineares são governadas por funções de transição não lineares. As equações mais bem compreendidas são governadas por equações "afins". No caso de equações às diferenças de primeira ordem, estas têm a seguinte forma:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad x_0 = f^0(x_0). \quad (1.4)$$

Os valores $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ e dependem do tempo. Se os termos b_n tomarem o valor zero para todo o n a equação às diferenças (1.4) pode ser vista como governada por uma função linear que é *homogénea*. Se para algum n , b_n é diferente de zero então a equação (1.4) diz-se *não homogénea*.

Um dos objetivos chave dos sistemas dinâmicos (discretos ou contínuos) é compreender o comportamento eventual ou assintótico de um processo iterativo. Isto é, dado um ponto inicial, perceber para onde este vai e o que faz quando chega lá.

Algumas órbitas podem ser muito complexas, mesmo para equações não lineares muito simples. Por outro lado algumas órbitas são simples, isto é, os pontos de equilíbrio dos sistemas. Determiná-los e estudar o comportamento das soluções em torno deles é outro dos objetivos principais do estudo dos sistemas dinâmicos.

Recordemos a forma de uma equação às diferenças de 1ª ordem autónoma

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = f^0(x_0) \quad (1.5)$$

onde $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 1.1.6. Considere o sistema dado pela equação (1.5). Um ponto $x_p \in X$ é um *ponto de equilíbrio* de (1.5) se $f(x_p) = x_p$. Isto é, x_p é *ponto fixo* da função f .

Ser ponto fixo da função f em (1.5), implica para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k(x_p) = f^{k-1}(f(x_p)) = f^{k-1}(x_p) = \dots = x_p.$$

Por outras palavras, a órbita positiva de x_p é $\mathcal{O}^+(x_p) = \{x_p\}$.

Definição 1.1.7. Dado $m \in \mathbb{N}$, a órbita positiva de x_0 diz-se *periódica de período m* (ou de *ciclo de período m*) se $f^m(x_0) = x_0$.

Isto é, uma órbita periódica de período m "repete-se" a cada intervalo de tempo de comprimento m :

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$$

Assim, se x_0 é um ponto periódico de período m então a sua órbita positiva é o conjunto $\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$.

Definição 1.1.8. Dado $m \in \mathbb{N}$, a órbita positiva de x_0 diz-se *eventualmente periódica de período m* (ou um *ciclo eventual de período m*) se existe um $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^m(x_k) = x_k$.

Um ponto eventualmente periódico de período m , x_0 , pode não ser periódico mas existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $y_0 = f^k(x_0)$ é um ponto periódico de período m :

$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, \dots$$

Nesta situação, a órbita positiva de x_0 é:

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}\}$$

e a órbita de $y_0 = f^k(x_0)$ é uma órbita periódica de período m :

$$\mathcal{O}^+(y_0) = \{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}\}$$

Um ponto de equilíbrio pode ser classificado quanto ao seu comportamento ou natureza. Assim, pode-se estabelecer o seguinte:

Definição 1.1.9. Um ponto de equilíbrio x_p da equação (1.5) diz-se:

1. *Estável* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_0 - x_p| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - x_p| < \varepsilon.$$

2. *Instável* se não for estável.

3. *Repulsor* se existe $\delta > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que, para todo o $n \geq N$, temos

$$0 < |x_0 - x_p| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - x_p| > |x_n - x_p|.$$

4. *Atrator* se $\exists \delta > 0$ tal que

$$|x_0 - x_p| < \delta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_p.$$

5. *Assintoticamente estável* se for estável e atrator.

6. *Globalmente assintoticamente estável* se for assintoticamente estável e pudermos tomar " $\delta = \infty$ " na definição de estabilidade assintótica.

7. *Globalmente atrator* se for atrator e pudermos tomar " $\delta = \infty$ " na definição de estabilidade assintótica.

Perante a dificuldade de classificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, podemos tentar contornar a situação usando uma técnica gráfica, nomeadamente o diagrama de degraus (Cobweb diagrams). Esta permite perceber o comportamento da solução em torno do ponto de equilíbrio mas não é uma demonstração da estabilidade das soluções. Para isso, existem alguns resultados que nos auxiliam.

Definição 1.1.10. Um ponto de equilíbrio x_p de (1.5), diz-se *hiperbólico* se $|f'(x_p)| \neq 1$.

Teorema 1.1.11. Seja x_p um ponto de equilíbrio da equação (1.5) e f continuamente diferenciável em x_p .

1. Se $|f'(x_p)| < 1$ então x_p é *assintoticamente estável*.

2. Se $|f'(x_p)| > 1$ então x_p é *instável*.

No caso do ponto de equilíbrio ser não hiperbólico, temos de recorrer à determinação e análise das derivadas de ordem superior. É a análise do valor das derivadas de ordem superior que permite classificar o ponto de equilíbrio e o que sucede às soluções que passam perto dele. Os resultados a utilizar podem ser vistos em [Hol83], [Koc91], [Hom05] e em [Ela05a].

1.2 Sistemas de Equações às Diferenças

As definições e resultados de sistemas dinâmicos discretos fornecem uma base que nos permite estudar modelos que envolvem interação. Como o termo interação implica a existência de duas ou mais variáveis de estado, vamos agora generalizar os resultados da secção anterior a sistemas de equações.

Consideremos um sistema dinâmico discreto autónomo governado por k equações:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = f_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \\ x_2(n+1) = f_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \\ \vdots \\ x_k(n+1) = f_k(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $f_j : X \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, k$. Consideremos o caso em que $f_j : X \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, k$ é linear. Então o sistema (1.6) pode ser reescrito na forma

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (1.7)$$

onde $n \geq n_0 \geq 0, x_{n+1} = (x_1(n+1), x_2(n+1), \dots, x_k(n+1)) \in \mathbb{R}^k$ e A é uma matriz $k \times k$ com coeficientes constantes.

Tal como para equações às diferenças, uma solução de um sistema linear é uma sucessão de estados onde cada estado satisfaz a relação (1.7).

Definição 1.2.1. A *solução* do sistema (1.7) é uma sucessão $(x_n)_0^\infty$ e cada elemento $x_n \in \mathbb{R}$.

Relativamente aos pontos de equilíbrio do sistema (1.7) a definição formal é:

Definição 1.2.2. Consideremos o sistema dado pelas equações de transição (1.6) onde para cada $j = 1, \dots, k, f_j : X \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é linear. Um elemento x_p no domínio de $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ diz-se um *ponto de equilíbrio* do sistema se $f(x_p) = x_p$.

Os pontos de equilíbrio podem ser categorizados pelo seu comportamento mas para isso precisamos de apresentar o conceito de norma num espaço vetorial.

Definição 1.2.3. Seja V um espaço vetorial. Uma função escalar $\|*\| : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma norma se

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in V$;
- $\|x\| = 0$ é equivalente a $x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $x \in V$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.4. Seja x_p uma solução do sistema (1.7) e x_0 uma condição inicial. A solução diz-se

1. *Localmente estável* se dado $\varepsilon > 0$ e $n_0 \geq 0, \exists \delta(\varepsilon, n_0)$ tal que

$$\|x_0 - x_p\| < \delta \Rightarrow \|x_n - x_p\| < \varepsilon, \forall n \geq n_0;$$

2. *Localmente uniformemente estável* se δ pode ser escolhido independentemente de n_0 ;

3. *Instável* se não é estável.

4. *Atrator* se

$$\exists \delta = \delta(n_0) : \|x_0 - x_p\| < \delta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_p.$$

5. *Uniformemente atratora* se a escolha de δ for independente de n_0 : $\exists \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0, n_0 > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ independente de n_0 tal que

$$\|x_n - x_p\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 + N \text{ sempre que } \|x_0 - x_p\| < \delta.$$

6. *Assintoticamente estável* se é estável e atratora e *uniformemente assintoticamente estável* se é uniformemente estável e uniformemente atratora.

7. *Localmente exponencialmente estável* se $\exists \delta > 0, M > 0$ e $\eta \in (0, 1)$:

$$\|x_n - x_p\| \leq M \|x_0 - x_p\| \eta^{n-n_0},$$

sempre que $\|x_0 - x_p\| < \delta$.

8. Uma solução x_n é limitada se para alguma constante M ,

$$\|x_n\| \leq M, \quad \forall n \geq n_0,$$

onde M depende de cada solução.

Se de 1. até 7. excepto 3. $\delta = \infty$ então a estabilidade diz-se *global*.

A estabilidade de um ponto fixo x_p de (1.7) é caracterizada pelos valores próprios da matriz associada ao sistema. Ver Apêndice A.1.

Dada uma matriz A , $k \times k$. A sua norma é dada por $\|A\| = \max \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : \|x\| \neq 0 \right\}$.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ os valores próprios da matriz A do sistema (1.7). O *raio espectral* da matriz A é dado pela seguinte expressão

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Para qualquer norma, $\rho(A) \leq \|A\|$. Seguem alguns resultados envolvendo o raio espectral e a natureza da solução do sistema (1.7).

Teorema 1.2.5. Se $\rho(A) < 1$, então toda a solução (x_n) do sistema (1.7) satisfaz a condição $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Corolário 1.2.6. Um ponto de equilíbrio do sistema (1.7) é assintoticamente estável se e só se $\rho(A) < 1$.

Teorema 1.2.7. Se $\rho(A) > 1$ então existe uma solução x_n do sistema (1.7) arbitrariamente próxima da solução nula, que satisfaz a relação $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty$.

Corolário 1.2.8. A solução (x_n) de (1.7) é instável se $\rho(A) > 1$.

Estabilidade por aproximação linear

Os resultados anteriores são relativos a sistemas lineares, mas são os modelos não lineares que retratam melhor a realidade. Estes podem apresentar comportamento caótico e imprevisível. Neste trabalho, o nosso foco é em sistemas discretos não lineares e uma ferramenta fundamental na sua análise é a linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio.

Em sistemas unidimensionais, dada uma equação onde a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ é diferenciável, a linearização em torno do ponto de equilíbrio x_p é dada por (\approx significa aproximadamente)

$$f(x) \approx f'(x_p)(x - x_p) + x_p.$$

Para sistemas de ordem superior Lyapunov e Perron criaram um método de linearização aplicado a equações diferenciais. Vamos apresentar os dois métodos adaptados às equações às diferenças.

Começamos pela perspectiva de Perron adaptada a sistemas de equações às diferenças não lineares.

Dado o sistema

$$y_{n+1} = Ay_n + g(y_n) \quad (1.8)$$

consideremos a sua componente linear

$$z_{n+1} = Az_n \quad (1.9)$$

onde A é uma matriz $k \times k$ e $g : G \rightarrow \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$ é uma função contínua. Pode-se ver (1.8) como uma perturbação de (1.9). A função $g(y_n)$ representa a perturbação devido a um ruído, falha de medição, etc.

O sistema (1.8) pode surgir da linearização do sistema, autónomo, não linear:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1.10)$$

onde $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$, $G \subset \mathbb{R}^k$ é continuamente diferenciável no ponto de equilíbrio, x_p . Isto é, numa vizinhança aberta de x_p , $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_p)$ existe e é contínua para todo $1 \leq i \leq k$.

O sistema (1.10) pode ser linearizado da seguinte forma:

Escreve-se $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T$ e calcula-se a respetiva matriz jacobiana de f no ponto de equilíbrio, $Df(x_p)$. A matriz jacobiana de f no ponto $x = 0$ é dada por:

$$Df_{x=0} = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \end{pmatrix}.$$

Se $y_n = x_n - x_p$ então

$$x_{n+1} = f(x_n) \Leftrightarrow y_{n+1} = f(y_n + x_p) - x_p = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_p)y_n + g(y_n) = Df(x_p)y_n + g(y_n)$$

onde $g(y_n) = f(y_n + x_p) - x_p - Df(x_p)y_n$.

Se assumirmos que $A = Df(x_p)$ então obtemos o sistema (1.9). Tendo em consideração as

hipóteses assumidas por f , concluímos que $g(y) = o(\|y\|)$ quando $\|y\|$ tende para zero. Por outras palavras, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que sempre que $\|y\| < \delta$, $\|g(y)\| \leq \varepsilon\|y\|$.

Caso $x_p = 0$ temos $g(y_n) = f(y_n) - Df(0)y_n = f(y_n) - Ay_n$. Como f é diferenciável em $x_p = 0$, segue que $g(y) = o(\|y\|)$ quando $\|y\|$ tende para zero. Ou, de modo equivalente

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0.$$

Corolário 1.2.9. Se $\rho(A) < 1$, então a solução nula do sistema $y_{n+1} = Ay_n + g(y_n)$ é *exponencialmente estável*. Se $\rho(A) > 1$, a solução do sistema é *instável*.

Corolário 1.2.10. Se $\|Df(0)\| < 1$ então a solução nula de $y_{n+1} = f(y_n)$ é *exponencialmente estável*.

É extremamente importante perceber que somente quando $\rho(A) \neq 1$ é que poder-se-á concluir que o comportamento das soluções em torno do ponto de equilíbrio do sistema não linear é semelhante ao comportamento das soluções em torno do ponto de equilíbrio do sistema linear. Se $\rho(A) = 1$ mesmo que as soluções dos sistemas não linear e linear apresentem comportamento semelhante não é possível afirmar que o sistema linear "espelha" o comportamento do sistema não linear.

A base da teoria de Lyapunov é a *Função de Lyapunov* associada a um dado sistema de equações às diferenças. Assumamos que temos um vetor $x \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ e a função de transição do sistema é autónoma e é dada por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

com $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua. Para uma dada funcional $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definimos a variação de V por

$$\Delta V(x_n) = V(x_{n+1}) - V(x_n).$$

A definição de função de Lyapunov para sistemas dinâmicos discretos é análoga à definição para o caso contínuo, mas a variação está a substituir a derivada do caso contínuo. Segue a definição de *Função de Lyapunov* segundo [Ela05a].

Definição 1.2.11. Uma função $V : G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *Função de Lyapunov* no conjunto $G \subset \mathbb{R}^m$ se:

1. V é contínua em G ;
2. $\Delta V(x_n) \leq 0$ sempre que x_n e $x_{n+1} = f(x_n)$ pertencem a G .

A função de Lyapunov diz-se *definida positiva* num ponto fixo x_p se existe uma bola aberta G centrada em x_p tal que $V(x) > 0$ para todo o $x \in B_\varepsilon(x_p)$, $V(x_p) = 0$, $x \neq x_p$. Se o mesmo se verifica mas com $V(x) < 0$ então a função diz-se *definida negativa*.

Teorema 1.2.12. Se existe uma função de Lyapunov V definida positiva numa bola aberta G onde x_p é um ponto fixo de um sistema dinâmico discreto m - dimensional com funções de transição contínuas, então podemos concluir que x_p é estável. Se a variação de $V(x_n)$ segundo o sistema de equações é negativo em G sempre que $x_n, x_{n+1} \in G$, $x_n \neq x_p$ então também podemos concluir que x_p é assintoticamente estável. Se o exposto anteriormente se verifica quando G é extendido a \mathbb{R}^m e $V(x_n)$ tende para o infinito quando $|x|$ tende para o infinito, então x_p é globalmente assintoticamente estável.

É de notar que este resultado permite-nos concluir acerca da estabilidade global do sistema se certas condições forem satisfeitas. A informação que podemos retirar da linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio, geralmente apenas permite-nos conhecer o comportamento local em torno do ponto de equilíbrio. O teorema 1.2.12 pode ser utilizado para provar o corolário 1.2.6 e o corolário 1.2.8.

1.3 Sistemas Híbridos

Vamos introduzir o conceito de sistemas híbridos seguindo as definições apresentadas em [Shu99]. Os sistemas híbridos resultam de uma combinação entre variáveis que tomam valores reais e variáveis que tomam valores num conjunto finito ou contínuos. O desenvolvimento da teoria que sustenta os sistemas híbridos foi impulsionada por: ciências dos computadores, teoria de controle, sistemas dinâmicos, programação matemática, entre outros. Em 1998, esta ainda estava no início, [Shu99]. Perante um sistema híbrido, gostaríamos de conseguir definir o conjunto de todas as trajetórias do sistema. No entanto como a definição é muito geral é a definição de autómato híbrido que se aceita com mais facilidade. Antes de o definir vamos apresentar o conceito de *sistema de variáveis de estado contínuas* e a *definição de autómato finito*.

Definição 1.3.1. Um *sistema de variáveis de estado contínuas* é descrito como um conjunto de variáveis de estado $x \in \mathbb{R}^n$ (ou mais geral numa variedade n -dimensional), e um conjunto de variáveis externas $w \in \mathbb{R}^q$ relacionadas por um conjunto misto de equações diferenciáveis e algébricas da forma:

$$F(x, \dot{x}, w) = 0. \quad (1.11)$$

Na equação anterior \dot{x} denota a derivada de x relativamente ao tempo. As soluções de (1.11) são funções suficientemente diferenciáveis $x(t)$ e $w(t)$ que satisfazem $F(x(t), \dot{x}(t), w(t)) = 0$ em quase todo o instante $t \in \mathbb{R}$ (cujo sentido preciso não cabe neste trabalho).

A definição clássica de autómato finito é:

Definição 1.3.2. Um *autómato finito* é descrito pelo triplo (L, A, E) . Aqui L é um conjunto finito chamado espaço de estado, A é um conjunto finito chamado o Alfabeto, cujos elementos são símbolos. E é a regra de transição: consiste num subconjunto de $L \times A \times L$ e os seus elementos designam-se por arestas (transições ou eventos). Uma sequência $(l_0, a_0, l_1, a_1, \dots, l_{n-1}, a_{n-1}, l_n)$ com $(l_i, a_i, l_{i+1}) \in E$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$ diz-se uma trajetória ou caminho.

A maneira usual de apresentar um autómato é através de um grafo onde os seus vértices estão em L e as suas arestas ou eventos estão em E . Assim o conjunto A pode ser visto como o conjunto que rotula as arestas ou eventos. Na Figura 1.1 podemos ver um exemplo de um autómato finito. O conceito de solução de um autómato finito consiste em todos os caminhos bem sucedidos. Se combinarmos as definições anteriores temos a seguinte definição para autómato híbrido:

Definição 1.3.3. Um autómato híbrido é descrito pelo 7-úplo $(L, X, A, W, E, Inv, Act)$ onde os símbolos têm os seguintes significados.

- L é um conjunto finito, que designa o conjunto dos estados discretos ou zonas. São os vértices de um grafo.
- X é um espaço das variáveis de estado do autómato híbrido, nos quais as variáveis x tomam valores em $X \subset \mathbb{R}^n$.

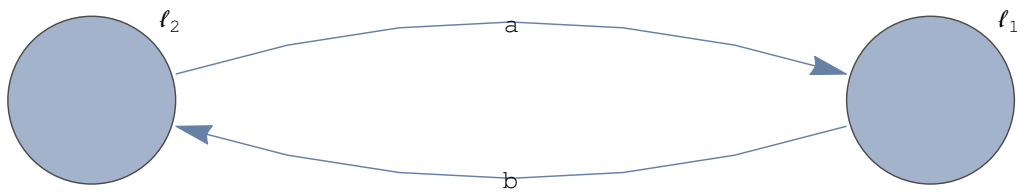


Figura 1.1: Autômato Finito

- A é um conjunto finito de símbolos que servem como rótulo para as arestas.
- $W = \mathbb{R}^q$ é o espaço de comunicação contínuo no qual as variáveis contínuas externas w tomam os seus valores.
- E é a regra de transição. Os seus elementos são um conjunto finito de arestas ou transições (ou eventos). Cada aresta é definida por um 5-uplo $(l, a, Guard_{ll'}, Jump_{ll'}, l')$ onde $l, l' \in L, a \in A, Guard_{ll'}$ é um subconjunto de X e $Jump_{ll'}$ é uma relação definida por um subconjunto de $X \times X$. A transição do estado discreto l para l' é permitida quando o estado contínuo x está em $Guard_{ll'}$, a transição do estado contínuo x para x' é dada pela relação $(x, x') \in Jump_{ll'}$.
- Inv é uma aplicação das zonas L para o conjunto de subconjuntos de X , isto é, $Inv(l) \subset X$ para todo $l \in L$. Sempre que o sistema está na zona l , o estado contínuo tem de satisfazer $x \in Inv(l)$. O subconjunto $Inv(l)$ para $l \in L$ diz-se a zona invariante da zona l .
- Act é a aplicação que associa cada zona l um conjunto de equações algébricas F_l , relacionando as variáveis de estado contínuas x com as suas derivadas e as variáveis contínuas externas w : $F_l(x, \dot{x}, w) = 0$.

Na Figura 1.2 é apresentado um exemplo de um grafo.

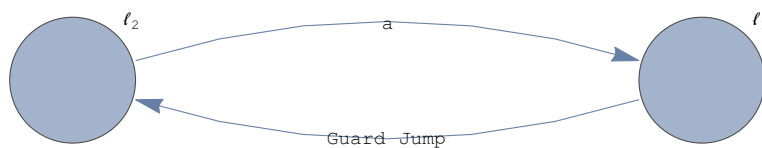


Figura 1.2: Grafo

Na Figura 1.3 está representado um exemplo das condições do vértice l_1 da Figura 1.2.

As soluções destas equações diferenciais-algébricas designam-se por actividades da zona. A definição 1.3.3 estende a definição 1.3.2 pois a definição 1.3.3 associa a cada vértice ou zona uma dinâmica contínua cujas soluções são actividades e associa a cada transição $l \rightarrow l'$ um possível salto ("jump") no estado contínuo. É de notar que cada estado do autômato híbrido consiste numa parte discreta $l \in L$ e uma componente contínua em X . As variáveis externas também consistem numa parte discreta que tomam valores em $a \in A$ e uma componente contínua w

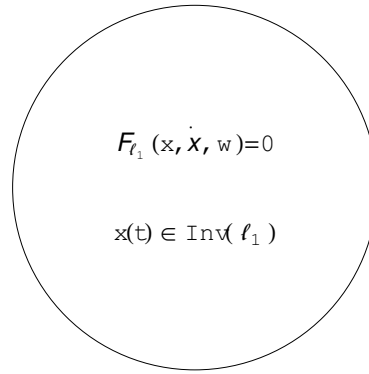


Figura 1.3: Vértice

que toma valores em \mathbb{R}^q . A dinâmica consiste em transições discretas, de uma zona para outra, juntamente com uma parte contínua que se desenvolve numa zona invariante.

Uma trajetória contínua (l, δ, x, w) associada a uma zona l consiste num tempo positivo δ que corresponde à duração da trajetória contínua, uma função contínua por partes $w : [0, \delta] \rightarrow W$ e uma função diferenciável por partes $x : [0, \delta] \rightarrow X$ tal que

- $x(t) \in \text{Inv}(l)$ para todo $t \in (0, \delta)$,
- $F_l(x, \dot{x}, w) = 0$ para todo $t \in (0, \delta)$ excepto para pontos de descontinuidade de w .

Uma trajetória de um autómato híbrido é uma sequência (infinita) de trajetórias contínuas

$$(l_0, \delta_0, x_0, w_0) \xrightarrow{a_0} (l_1, \delta_1, x_1, w_1) \xrightarrow{a_1} (l_2, \delta_2, x_2, w_2) \xrightarrow{a_2} \dots$$

tal que nos tempos dos eventos

$$t_0 = \delta_0 \quad t_1 = \delta_0 + \delta_1 \quad t_2 = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 \dots$$

as seguintes inclusões verificam-se nas transições discretas:

$$x_j(t_j) \in \text{Guard}_{l_j l_{j+1}}; (x_j(t_j), x_{j+1}(t_j)) \in \text{Jump}_{l_j l_{j+1}}, \forall j = 0, 1, 2, \dots$$

É de notar que a j -ésima seta \rightarrow associa um rótulo a_j que representa o valor do sinal discreto na j -ésima transição discreta.

Segundo [Shu99], [Lyg04], as trajetórias do autómato híbrido satisfazem as seguintes características: começa em determinada zona l_1 a componente contínua do estado evolui de acordo com a dinâmica contínua associada a esta zona, desde que se mantenha na localização invariante da zona. Em algum instante em \mathbb{R} designado *instante do evento*, um evento ocorre e a parte discreta do estado, a zona l_1 , muda para outra localização ou zona l_2 . Esta transição é instantânea e é guardada, isto é, é necessário que determinada condição ocorra para que essa transição efetivamente se dê. Mais, em geral, essa transição envolve um salto na componente contínua do estado. Em l_2 , todo o processo decorre de modo análogo e assim sucessivamente. Depois de obtermos o modelo híbrido, podemos estar interessados em recorrer à simulação, para determinar os possíveis comportamentos. Existem três tipos de abordagens que podemos utilizar quando se pretende simular sistemas/ autómatos híbridos:

1. *O método por diferenciação*: consiste em encontrar um modelo diferenciável que esteja próximo do híbrido e portanto a solução estará próxima do sistema híbrido.

2. *O método por monitorização dos eventos*: consiste em seguir os instantes em que os eventos surgem, isto é, quando as zonas de comutação são cruzadas. Este método pode implicar a discretização do modelo.
3. *O método por discretização*: consiste em discretizar os modelos híbridos. Alguns esquemas numéricos possíveis são: Euler, Runge-Kutta e Mickens. Usando a discretização correta é possível obter uma aproximação muito boa das trajetórias dos sistemas híbridos.

Podemos representar um sistema híbrido de diferentes maneiras, cada uma com diferentes propriedades. Portanto não existe uma melhor representação para um dado sistema. Estes têm de ser analisados caso a caso. Mas temos de ter em consideração que a partir do momento que escolhemos uma representação, temos definido um ponto de partida e as ferramentas que são as mais adequadas para analisar o sistema. Um dos tipos de sistemas híbridos são os sistemas de controle de estrutura variável. É neste tipo de sistemas que estamos interessados, no entanto o modo como eles são descritos e analisados não é de forma explicitamente híbrida.

1.3.1 Sistemas de Controle de Estrutura Variável

Em meados de 1960, Emelyanov [Eme67] e Drazenovic [Dra69] apresentaram os *sistemas de controle de estrutura variável contínuos* (SCEVC) que possuem *modo deslizante* (MD). Eles têm sido alvo de muitos estudos devido à sua robustez perante perturbações externas, isto é, invariância numa classe de perturbações limitadas e variações dos parâmetros no *modo deslizante*(MD) [Ban15]. Devido à enorme popularidade do microprocessador, o desenho ou determinação dos controles passou para o controle totalmente digital. Assim o desenvolvimento dos sistemas de controle de estrutura variável discreta (SCEVD) com modo deslizante não pôde ser negligenciado. Vamos começar esta secção com a apresentação formal de um sistema de controle de estrutura variável contínuo, modo deslizante e todos os conceitos relevantes. Depois passaremos para os conceitos análogos em sistemas de controle de estrutura variável discretos.

1.3.1.1 Sistemas de Controle de Estrutura Variável Contínuos

Considere um sistema dinâmico em que o espaço de estados é dividido em regiões e, em cada região, as dinâmicas são determinadas pelo vetor de estados e a respetiva entrada de controle. Em termos de controle, este tipo de sistema dinâmico é compreendido como um sistema de controle com estrutura variável. É necessário usar uma política de limiar ("threshold policy") neste sistema, isto é, como agir na mudança de regiões. Em termos matemáticos, considerando um sistema com duas variáveis, podemos escrever da seguinte maneira:

$$\dot{z} = f_j(z, t, u_j(z, t)), \quad z \in S_j, \quad z(0) = z_0 \in \mathbb{R}_+^2, \quad (1.12)$$

na qual $z = [x \ y]^T$ é o vetor de estados do sistema e x, y podem representar as densidades das variáveis, a variável de estado está definida em $\mathbb{R}_+^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ e M é o conjunto definido por

$$M = \{z \in \mathbb{R}_+^2 | s(z) = 0\}$$

sendo $s : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função que define o limiar ou limite e depende do vetor de estados. A variedade M divide o espaço de estados \mathbb{R}_+^2 em regiões abertas $S_j, j = 1, 2$, nas quais os campos

vetoriais contínuos correspondentes $f_j : S_j \rightarrow \mathbb{R}^2$ estão determinados. ($f_1 \neq f_2$). A lei de controle u_s do sistema depende da variável de estado

$$u_s(z, t) = \begin{cases} u_1(z, t) & \text{se } s(z) > 0, z \in S_1 \\ u_2(z, t) & \text{se } s(z) < 0, z \in S_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

e comuta de um valor para o outro conforme $z \in S_1$ ou $z \in S_2$, isto é, quando o sistema no instante t , z cruza M . A lei de controle u_s ($u_1 \neq u_2$) é indefinida quando z pertence ao conjunto M , isto é, u_s é uma lei de controle descontínua, embora u_1 e u_2 sejam funções contínuas. Por este motivo o conjunto M chama-se *zona de chaveamento (ou comutação)*.

Ao longo do trabalho iremos utilizar o conceito de "ponto representativo". Este designará um ponto aleatório que pertence ao domínio da variável de estado e a sua órbita. O "ponto representativo" representará uma órbita qualquer do sistema e será utilizado para explicar as trajetórias do sistema. Também, por opção usaremos chaveamento em vez de comutação.

Na especificação dos sistemas de controle de estrutura variável é vital definir as trajetórias do sistema quando o ponto representativo se encontra em M .

Modo Deslizante

Para obtermos uma boa dinâmica num sistema de controle de estrutura variável (1.12) é assumido que o sistema seja composto por subsistemas contínuos designados por estruturas. Cada uma destas estruturas pode apresentar um comportamento instável. Determinar uma lei de controle ("control design") $u_s(z, t)$ é selecionar parâmetros para estas estruturas e definir chaves ("switchings") lógicas de forma a que as propriedades úteis das estruturas sejam preservadas e sempre que possível obter novos efeitos. Nos instantes em que as estruturas mudam, o lado direito das equações diferenciais são descontínuas e portanto pode ocorrer movimento nas *zonas de chaveamento*. A teoria, conhecida, para a existência e unicidade das soluções de equações diferenciais não se aplicam e exigir que as soluções sejam diferenciáveis é demasiado.

O objetivo principal dos SCEVC-MD (com modo deslizante) é a introdução deliberada de movimento na zona de chaveamento, M , mas tal só faz sentido quando este apresenta a dinâmica desejada. A característica principal dos SCEVC-MD é determinar e utilizar uma lei de controle chaveada para levar a trajetória dos estados do sistema em direcção a uma superfície específica, a *zona de chaveamento*, e manter a trajetória dos estados nesta superfície durante o tempo necessário para se concretizar os objetivos predefinidos.

Definição 1.3.4. Quando as trajetórias do sistema convergem para a *zona de chaveamento*, M , esta designa-se por *zona de deslizamento*.

Esta zona é determinada mediante os objetivos a atingir. Para cada sistema é necessário procurar a melhor zona de chaveamento.

Definição 1.3.5. Define-se por *Modo Deslizante* à trajetória do sistema ao longo da variedade M , a designada *zona deslizante*.

Esta pode ser uma linha/plano/superfície ou tomar uma qualquer outra forma no espaço de estados. Quando se está no modo deslizante, as condições externas ou alterações paramétricas não interferem muito nas equações que descrevem o movimento daí a robustez destes sistemas

controlados. Não faz sentido determinar o movimento na zona deslizante antes de apresentar as condições que implicam a sua existência e a sua descrição matemática.

Assim a determinação do modo deslizante, [Ban15], pode ser visto como um processo de controle que consiste em duas fases importantes:

- a fase de alcance;
- a fase de deslizamento (ou atração);

FASE DE ALCANCE: A existência de um modo deslizante requer a convergência da trajetória da variável de estado para a superfície de deslizamento. Nesta fase é necessário escolher a superfície de deslizamento, de tal maneira que a dinâmica do sistema seja a desejada e definir uma lei de controle $u_s(z, t)$ que satisfaça as condições de existência e assegure a alcançabilidade da zona deslizante.

Durante esse período, existem erros que não podem ser controlados diretamente. Portanto gostaríamos de diminuir e se possível eliminar esta fase. A robustez dos SCEVC pode ser melhorada diminuindo o tempo nesta fase. Se esta fase puder ser eliminada a robustez é garantida na região deslizante. Existem vários métodos para diminuir ou mesmo eliminar esta fase.

FASE DE DESLIZAMENTO: Depois da trajetória alcançar a zona deslizante esta tem de permanecer nela todo o tempo subsequente (atratividade). Nesta fase, o ponto representativo não descreve uma qualquer trajetória do sistema original.

As propriedades que o modo deslizante tem de satisfazer são:

- A estabilidade do sistema tem de estar confinada à zona deslizante;
- O modo deslizante tem de começar num tempo finito.

A primeira deve ser conseguida escolhendo bem a expressão da zona deslizante. Mas para analisar a estabilidade necessitamos de conseguir obter uma expressão para o movimento na zona deslizante. Já foram propostos muitos métodos.

Fillipov em [Fil60], [Fil88] foi o primeiro a encontrar vários conceitos de solução no modo deslizante. Eis alguns conceitos, ver [Shu99] e [Fil88].

Conceito de Solução Convexa Simples

Ter ou não ter soluções que cruzam a superfície de deslizamento M , depende dos campos de vetores determinados por $f_1(z) = f_1(z, t, u_1)$ e por $f_2(z) = f_2(z, t, u_2)$. Consideremos um ponto z_0 na zona de deslizamento M . Para este ponto temos dois vetores $f_1(z_0)$ e $f_2(z_0)$. Relativamente à relação entre estes vetores e o espaço tangente da variedade M no ponto z_0 , Fillipov concentrou-se no caso em que: o vetor $f_1(z_0)$ aponta para S_2 e o vetor $f_2(z_0)$ aponta para S_1 . Como os vetores $f_1(z_0)$ e por $f_2(z_0)$ estão em diferentes lados do espaço tangente de M no ponto z_0 , tem de existir uma combinação convexa dos vectores que pertence ao espaço tangente.

Denotemos o vetor obtido por $f_0(z_0) = \mu f_1(z_0) + (1 - \mu)f_2(z_0)$, ver Figura 1.4. O parâmetro μ depende das magnitudes e direções de $f_1(z_0)$, de $f_2(z_0)$ e do gradiente de $s(z)$. Repetimos a operação anterior para os pontos z que estão numa vizinhança de z_0 , obtendo assim a função $f_0(z)$ definida em M pelo menos numa vizinhança de z_0 , com a direção do espaço tangente de M em z .

Definição 1.3.6. A equação diferencial $\dot{z} = f_0(z) = \mu f_1(z) + (1 - \mu)f_2(z)$ pode ser usada para definir o movimento na zona deslizante M .

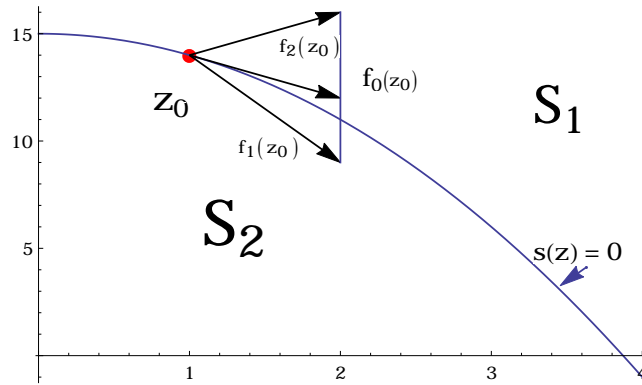


Figura 1.4: Modo Deslizante

Método de Controlo Equivalente

A segunda noção de solução definida por Fillipov é a chamada *método de controlo equivalente*. O modo de definir este método é, considerar que em (1.12) $u_s(z, t)$ toma vários valores. De facto, em $S_1 \cup S_2$ toma um único valor, em cada região, mas quando $z \in M$ toma vários valores definidos num intervalo fechado $U(z)$. Fillipov encontra uma lei de controlo equivalente $u_{eq}(z, t)$ para $z \in M$ tal que $\dot{z} = f_j(z, t, u_{eq}(z))$ é tangente a M e $u_{eq}(z, t) \in U(z)$.

Definição 1.3.7. O movimento dado por $\dot{z} = f_j(z, t, u_{eq}(z, t))$ é o movimento ao longo da zona deslizante M .

A determinação de $u_{eq}(z, t)$ depende do sistema que está a ser analisado e da expressão de $s(z) = 0$ em M . Utiliza-se $s(z) = 0$ no sistema e obtém-se sempre que possível uma expressão para $u_{eq}(z, t)$ na zona deslizante.

Voltando à segunda propriedade que o modo deslizante (o movimento na zona deslizante) tem de satisfazer, isto é, começar num tempo finito, esta implica uma condição que tem de ser verificada.

Consideremos a zona deslizante definida por $s(z) = C_s z$. O vector C_s consiste nos coeficientes que descrevem a zona deslizante em termos do vector de estado z . A variedade pode tomar qualquer forma por exemplo plano/hiperplano /reta. Se a zona deslizante é um plano, então o gradiente da matriz é ela própria.

O valor de $s(z)$ no ponto representativo z_0 corresponde à distância dele à zona deslizante. Se $s(z_0)$ é positivo quer dizer que o ponto representativo está num lado de $s(z) = 0$ e se $s(z_0)$ é negativo então está no lado oposto. Se $s(z_0) = 0$ então o ponto está na zona deslizante.

A condição que precisa de ser satisfeita para que exista movimento na zona deslizante é a distância $s(z)$ e a sua velocidade de mudança $\dot{s}(z)$ têm de ter sinais opostos, isto é,

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad (1.14)$$

de outro modo

$$s\dot{s} < 0.$$

Esta designa-se por *condição de alcance*. No entanto, esta condição não é suficiente para ocorrer movimento na zona deslizante.

Por exemplo: Seja

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -s \\ \dot{s} \cdot s &= -s^2 \quad \forall s \neq 0\end{aligned}$$

A solução é dada por $s(t) = \exp(-t)s(0)$ o que implica que $s(t) = 0$ quando t tende para infinito.

Para ultrapassar esta situação, outra condição pode ser proposta:

$$s\dot{s} < -\eta|s|, \quad \eta > 0$$

Esta designa-se por *condição de alcance- η* que define uma taxa de convergência mínima.

Para além dos conceitos de solução propostos por Fillipov, outro modo de obter o modo deslizante é através da *abordagem da lei de alcance*, ver [Ban15]. Isto é, usar o comportamento de \dot{s} para descrever a lei de controle $u_{eq}(z, t)$ na zona deslizante. É um processo diferente de obter o $u_{eq}(z, t)$ na zona deslizante M .

Muitas propriedades deste tipo de sistemas estão bem documentadas em [Itk76] e em [Utk78]. Em particular, o livro de Utkin, [Utk78], é dedicado à apresentação de ferramentas e ao estudo do movimento nas zonas deslizantes que podem surgir em diversos sistemas de controle de estrutura variável. Em algumas situações ele aplicou os conceitos de solução de Fillipov e noutros estendeu os conceitos.

Meza, em [Mez04] definiu o conceito de ponto de equilíbrio virtual e real para o sistema (1.12) sujeito à lei de controle (1.13).

Definição 1.3.8. Seja $z_{S_i}^{eq}$ tal que $f_i(z_{S_i}^{eq}, t, u_i) = 0$ para algum u_i em (1.13). Então $z_{S_i}^{eq}$ diz-se um *ponto de equilíbrio real* se $z_{S_i}^{eq} \in S_i$ e diz-se um *ponto de equilíbrio virtual* se pertence a S_j e $j \neq i$.

É claro que a partir da definição anterior um ponto de equilíbrio virtual estável nunca é atingido. Pois se uma trajetória começa em S_1 procura um equilíbrio virtual estável $z_{S_1}^{eq}$ que se encontra em S_2 , no entanto a dinâmica mudará assim que cruzar $s(z) = 0$, a função que define a zona de chaveamento. O *modo deslizante* também ocorre na variedade M quando determinamos M de forma a ter este tipo de pontos de equilíbrio virtuais.

Conclusão: definir a expressão de movimento na chamada *zona deslizante* é capaz de resolver imensos problemas em sistemas de controle de estrutura variável. De facto, a introdução de uma lei de controle na zona de chaveamento é responsável por um novo comportamento dinâmico, isto é, a convergência para a zona deslizante juntamente com o movimento ao longo da zona deslizante dá origem a um ponto chamado o *ponto de equilíbrio de deslizamento* z_{sl}^{eq} . Um ponto de equilíbrio atingido através de um *modo deslizante*.

Ao longo do trabalho podemos escrever o sistema de modo a utilizar uma política de limiar ou "Threshold Policy" que é outro modo de dizer lei de controle e é definida como a função

$$\phi(s(z)) = \begin{cases} 1 & \text{se } s(z) < 0, \\ 0 & \text{se } s(z) > 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

onde $s(z)$ corresponde à função que define a zona de chaveamento e depende dos estados do sistema. O sistema diz-se livre quando não é aplicado um controle nele $\phi(s(z)) = 0$ e diz-se

controlado quando $\phi(s(z)) = 1$.

Limitações do Modo deslizante

Uma limitação do modo deslizante, é a não satisfação da condição de invariância. Isto é, o sistema ideal, que consiste no que se pode investigar matematicamente e o sistema real não coincidirem. Os erros ou incertezas, que se encontram no sistema real, se não forem desprezáveis, entrarão na dinâmica do sistema e perturbarão o movimento na zona deslizante. Outro fator que também perturba o modo deslizante, é o fenómeno trepidação ou "*chattering phenomenon*" ver [Ban15], [Utk78]. Por outras palavras, um modo deslizante ideal ocorre somente quando a trajetória de estado z está na zona deslizante M , isto é, quando $s(z) = s(z) = s(t) = 0$ para todo o tempo $t \geq t_0$ para algum t_0 . Isto requer chaveamentos ou comutações infinitamente rápidos. Em sistemas reais isto é praticamente impossível, pois todos os sistemas reais com lei de controle têm imperfeições tais como retardamentos ("*delays*"), histereses entre outros que forçam os deslizamentos a ocorrerem numa frequência finita. Deste modo a trajetória de estado z oscila numa vizinhança da superfície de deslizamento. Esta oscilação é chamada de trepidação ("*chattering*"). Portanto o modo deslizante real não ocorre numa superfície, mas dentro de uma banda limite da zona de deslizamento.

Definição 1.3.9. Define-se banda limite por $\bar{M} = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : \|s(z)\| \leq \sigma\}$.

Definição 1.3.10. Define-se uma lei de controle com *histerese* se esta toma a seguinte forma:

$$u_s(z, t) = \begin{cases} u_1(z, t) & \text{se } s(z) > \sigma, z \in S_1 \\ u_2(z, t) & \text{se } s(z) < \sigma, z \in S_2 \end{cases} \quad (1.16)$$

e na região \bar{M} a lei toma sempre o valor de quando esta se encontra em $\|s(z)\| = \sigma$.

Num sistema ideal, se $\sigma = 0$ ou pelo menos estiver próximo de zero, o modo deslizante pode ocorrer. Caso contrário, a histerese é responsável pela trajetória do ponto representativo não se mover ao longo da zona deslizante.

1.3.1.2 Sistemas de Controle de Estrutura Variável Discretos

Se existir modo deslizante no caso contínuo, as trajetórias do sistema convergem para a zona deslizante, o termo que corresponde ao controle é descontínuo e muda com frequência infinita. Este facto é a maior diferença entre o SCEVC e os sistemas de controle de estrutura variável discretos (SCEVD). Os sistemas e a lei de controle só ocorrem nos instantes de tempo em que são considerados. Portanto, a trajetória de estado não pode estar sempre na zona deslizante e oscila. Esse movimento designa-se por *movimento quasi-deslizante*. E daqui conclui-se que os SCEVD não possuem a propriedade de invariância dos SCEVC, pois esta propriedade só é alcançada quando o estado do sistema está e mantém-se na zona deslizante. O conceito de zona quasi-deslizante foi definida por Milosavljevic [Mil85] e depois foi extendido por Utkin e Dracunov em [Dra89]. Existem artigos, desde 1990, cujo foco é apresentar possíveis discretizações dos sistemas, outros encontrar a lei de controle, dos sistemas discretizados, na zona quasi-deslizante e outros dedicam-se a estudar a estabilidade do sistema usando, por exemplo, a teoria de estabilidade de Lyapunov relativos a SCEVD. O procedimento para ocorrer o modo quasi-deslizante inclui dois passos.

- O primeiro passo consiste na determinação da zona de chaveamento $s(k) = C_s z(k)$ que tem de ter uma dinâmica interna estável;
- O segundo passo é estabelecer uma lei de controle que permita que as trajetórias do sistema se aproximem da zona de chaveamento e que garanta que elas permaneçam o mais próximo possível da superfície de chaveamento.

No primeiro passo é assumido que o sistema é mantido suficientemente próximo da zona de chaveamento, para que a função $s(k)$ esteja próxima de zero. Se $s(k) = 0$, o ponto representativo encontra-se na zona M . O segundo passo é diferente dos utilizados nos SCEVC no caso da *abordagem pela lei de alcance*. A diferença reside na definição de *lei de alcance* que em SCEVD não é direta. Existem várias propostas de lei de alcance. A que se deve utilizar depende do sistema a estudar. Algumas das leis de alcance propostas para obter as leis de controle no modo deslizante são:

- *Lei de alcance de Sarpturk's*: a sua lei é a versão direta e discreta da lei de alcance do modo contínuo. Esta é dada por

$$|s(k+1)| < |s(k)| \quad (1.17)$$

A função $s(k)$ está sempre direcionada para a superfície de chaveamento M , em que $s(k) = 0$ e a norma de $s(k)$ decresce monotonamente. Outro modo de escrever a lei de alcance é:

$$\begin{aligned} (s(k+1) - s(k)) \operatorname{sgn}(s(k)) &< 0 \\ (s(k+1) + s(k)) \operatorname{sgn}(s(k)) &> 0 \end{aligned}$$

Onde $\operatorname{sgn}(s(k))$ corresponde ao sinal de $s(k)$. A primeira condição implica que o sistema deve-se mover na direção da zona de chaveamento e a segunda não permite que o sistema se afaste muito da zona de chaveamento.

- *Lei de Alcance de Gao* é a seguinte:

$$s(k+1) = (1 - q\tau)s(k) - \rho\tau \operatorname{sgn}(s(k)) \quad (1.18)$$

onde $\tau > 0$ é o tempo amostral, $q > 0$, $\rho > 0$ e $1 - q\tau > 0$.

Outros exemplos de leis podem ser vistos em [Ban15]. Um sistema de controle de estrutura variável discreto tem de satisfazer as seguintes características:

1. Começando em qualquer ponto inicial, a sua trajetória move-se monotonamente para a zona de chaveamento e cruza-a em tempo finito.
2. Uma vez que a trajetória cruza a zona de chaveamento volta a cruzá-la num movimento oscilatório em torno da zona de chaveamento.
3. A distância da trajetória que se move oscilando em torno da zona de chaveamento é não crescente e a trajetória fica dentro de uma zona especificada, a banda limite.

Em [Kao05], é apresentado um resumo do desenvolvimento dos sistemas de controle de estrutura variável discretos. Depois da discretização e obter uma lei de controle que satisfaz as

características acima, o interesse a seguir é a robustez do sistema perante perturbações. Assim aumentaram os métodos e teorias por detrás de SCEVD.

Capítulo 2

Perturbações do Modelo Lotka-Volterra

Este capítulo é totalmente dedicado ao modelo Lotka-Volterra. Este modelo considera duas espécies ou duas populações. São inúmeros os artigos acerca deste modelo. Ele já foi extensivamente analisado na vertente contínua, na discreta, na sua forma original e/ ou com inserção de novos termos. O modelo original é um pouco irrealista, mas é um excelente ponto de partida para analisar sistemas não lineares. Murray, em [Mur02], apresenta um estudo muito detalhado acerca deste modelo. Um fator importante quando temos duas populações é o tipo de interação que existe entre elas. Existem três grandes tipos de interação: competição, cooperação ou simbiose e predador-presa. Elaydi, em [Liu01], discretizou o modelo e analisou as vertentes competição e cooperação. Quando pretendemos discretizar o modelo precisamos de escolher um esquema numérico. Elaydi utilizou o esquema de Mickens, [Mic02], e nós também iremos utilizar esse esquema. Neste trabalho estamos interessados na interação do tipo predador-presa. Neste capítulo começaremos por apresentar o modelo contínuo, os seus pontos de equilíbrio e a sua natureza. Como estamos interessados na análise do sistema discretizado, na primeira secção apresentaremos uma possível discretização do modelo através do método de Mickens. Na segunda secção, aplicaremos essa discretização ao modelo inserindo um controle, na equação que apresenta o comportamento das presas. Na terceira e quarta secção, iremos utilizar o modelo discretizado adicionando uma variável de controle do tipo ON-OFF na equação que apresenta o comportamento da população dos predadores. Terminaremos a quarta secção apresentando as conclusões acerca da comparação dos resultados obtidos nos dois modelos apresentados nas terceira e quarta secções.

Modelo Lotka-Volterra Contínuo

Vamos considerar o modelo de Lotka-Volterra original. Por outras palavras, na ausência de predação vamos assumir que o crescimento é malthusiano. Elaydi, em [Liu01], usou o crescimento logístico, que é um pouco mais realista. Consideramos o seguinte modelo

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(a - bP) \\ \frac{dP}{dt} = P(cN - d) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde N representa o número de elementos ou a densidade da população de presas e P representa o número de elementos ou a densidade da população de predadores ao longo do tempo e a , b , c e d são constantes positivas.

Hipóteses do Modelo

1. As presas, na ausência dos predadores crescem exponencialmente, isto é, de modo malthu-

siano.

$$\text{Se } P = 0 \text{ então } N' = aN \quad (2.2)$$

onde a corresponde à taxa de crescimento, per capita, da população de presas. Isto é,

$$N(t) = N_0 e^{at}.$$

2. O efeito da predação é diminuir a taxa de crescimento das presas por um termo proporcional à população das presas e dos predadores, e este é dado por $-bNP$. Portanto b é a taxa de mudança das presas que resulta da interação entre as duas espécies.

3. Na ausência de presas, a população de predadores decresce exponencialmente.

$$\text{Se } N = 0 \text{ então } \frac{dP}{dt} = -dP \quad (2.3)$$

onde d é a taxa de mortalidade, per capita da população de predadores. Isto é,

$$P(t) = P_0 e^{-dt}.$$

4. A contribuição de presas para o crescimento dos predadores é dado por cNP , que é proporcional ao tamanho das populações de presas e predadores. O significado de c é análogo ao de b .

Os pontos de equilíbrio do sistema (2.1) são os que verificam as seguintes condições:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = 0 \\ \frac{dP}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N(a - bP) = 0 \\ P(cN - d) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = 0 \text{ e } P = 0 \\ N = \frac{d}{c} \text{ e } P = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Assim os pontos de equilíbrio são $e_1 = (0, 0)$ e $e_2 = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$. Relativamente à estabilidade dos pontos de equilíbrio, temos o seguinte:

Dado o sistema (2.1) a sua matriz jacobiana é dada por

$$DF_{(N,P)} = \begin{pmatrix} a - bP & -bN \\ cP & cN - P \end{pmatrix}$$

e os valores próprios associados a cada ponto de equilíbrio são os seguintes:

$e_1 = (0, 0)$	$\psi_1 = a$	$\psi_2 = -d$
$e_2 = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$	$\psi_1 = i\sqrt{ad}$	$\psi_2 = -i\sqrt{ad}$

Tabela 2.1: Valores Próprios dos Pontos de Equilíbrio do Sistema Contínuo

Relativamente a e_1 podemos concluir que é *ponto sela*, pois quer a , quer d são positivos. Quanto a e_2 os valores próprios são complexos puros, logo é um *centro*.

Podemos relacionar as equações de (2.1) e ter apenas uma equação que contempla a relação entre as duas espécies:

$$\frac{dP}{dN} = \frac{P(cN - d)}{N(a - bP)}.$$

Reescrevendo e integrando chegamos a

$$\int \frac{a - bP}{P} dP = \int \frac{cN - d}{N} dN$$

e a solução geral tem a seguinte expressão:

$$a \ln P - bP + A = -d \ln N + cN + B \Leftrightarrow a \ln P - bP + d \ln N - cN = C$$

Na Figura 2.1 considera-se a relação acima com $a = b = c = d = 1$ e apresenta-se algumas trajectórias para diferentes condições iniciais, em torno de $e_2 = (1, 1)$.

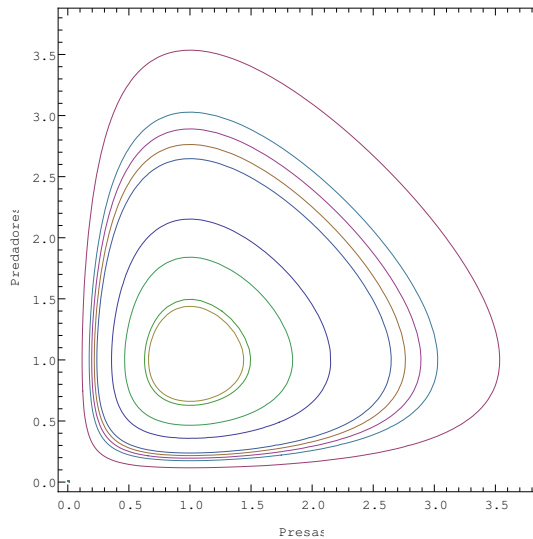


Figura 2.1: Curvas de Nível do Modelo de Lotka- Volterra

2.1 Discretização do Modelo pelo Método de Mickens

Existem vários artigos que mostram que muitos fenómenos económicos, físicos e biológicos podem ser bem representados através de equações às diferenças. Para utilizarmos equações às diferenças, é necessário escolher um esquema numérico. A equação às diferenças obtida diz-se dinamicamente consistente se ela e a sua correspondente contínua exibem o mesmo comportamento qualitativo, tal como por exemplo estabilidade, bifurcação e caos. O esquema de discretização mais simples é o método de Euler progressivo. No entanto, por vezes a aplicação deste método apresenta inconsistência dinâmica. Por outro lado, a aplicação deste método também pode apresentar soluções numericamente instáveis. Isto é, soluções possíveis nos sistemas de equações às diferenças que não ocorrem no sistema contínuo correspondente. Segundo Mickens, [Mic02], a instabilidade numérica ocorre devido ao facto do espaço de parâmetros ser maior na equações às diferenças do que no sistema descrito através de equações diferenciais. O parâmetro extra é $h = \Delta t$, usado nas equações às diferenças. Isto é $t_k = hk$. Portanto o

comportamento qualitativo e quantitativo das soluções dos sistemas de equações às diferenças depende do valor do passo h . Agora vamos proceder à lista de passos proposta por Mickens e vamos aplicá-la ao nosso modelo (2.1):

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(\alpha - bP) \\ \frac{dP}{dt} = P(cN - d) \end{cases}$$

de modo a eliminar instabilidades numéricas. Tendo em consideração o modelo (2.1) necessitamos das seguintes hipóteses:

1. Cada espécie cresce do modo malthusiano na ausência do predador;
2. O cone \mathbb{R}_+^2 é invariante para qualquer valor inicial não negativo.

Consideremos a primeira equação: Sabemos que

$$N' = f_1(N, P)$$

O primeiro passo é substituir a derivada por uma expressão um pouco mais complexa:

$$\frac{dN}{dt} \rightarrow \frac{N(t+h) - N(t)}{\varphi(h)}. \quad (2.4)$$

onde $\varphi(h)$ satisfaz $\varphi(h) = h + o(h)$. Para muitas situações $\varphi(h)$ satisfaz a condição $0 \leq \varphi(h) \leq 1$. O segundo passo é substituir os termos não lineares, por expressões não locais. Por exemplo:

$$N(t)P(t) \rightarrow N(t)P(t+h). \quad (2.5)$$

O terceiro passo é substituir t por kh . Portanto pretendemos considerar o tempo, em determinados instantes de tempo $k = 0, 1, 2, \dots$ onde a distância entre eles é h .

$$N(t) \rightarrow N(kh) = N_k$$

Aplicando os passos acima às derivadas N' e P' , respectivamente, elas serão substituídas pelas razões incrementais:

$$N' \rightarrow \frac{N(kh+h) - N(kh)}{\varphi(h)} \quad \text{e} \quad P' \rightarrow \frac{P(kh+h) - P(kh)}{\varphi(h)}.$$

E no intervalo de tempo entre dois instantes consecutivos, o estado do sistema permanece constante. Denotando $N(kh)$ por N_k e $P(kh)$ por P_k , obtemos

$$N' \rightarrow \frac{N(kh+h) - N(kh)}{\varphi(h)} = \frac{N((k+1)h) - N(kh)}{\varphi(h)} = \frac{N_{k+1} - N_k}{\varphi(h)}$$

e

$$P' \rightarrow \frac{P(kh+h) - P(kh)}{\varphi(h)} = \frac{P((k+1)h) - P(kh)}{\varphi(h)} = \frac{P_{k+1} - P_k}{\varphi(h)}.$$

Assim, dados os passos anteriores, na primeira equação do sistema (2.1) substitui-se a derivada pela razão incremental, $N(t)$ por N_k e $P(t)$ por P_k , e obtém-se

$$\frac{N_{k+1} - N_k}{\varphi(h)} = aN_k - bN_{k+1}P_k \Leftrightarrow N_{k+1} = N_k + a\varphi(h)N_k - b\varphi(h)N_{k+1}P_k$$

Considerando a segunda equação de (2.1) e procedendo de forma análoga, obtemos

$$P_{k+1} = P_k + \varphi(h)cN_{k+1}P_k - d\varphi(h)P_{k+1}$$

Tendo em consideração as substituições acima, o modelo de equações às diferenças seguindo os passos propostos por Mickens toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} N_{k+1} = (1 + a\varphi(h))N_k - b\varphi(h)N_{k+1}P_k \\ P_{k+1} = P_k + c\varphi(h)N_{k+1}P_k - d\varphi(h)P_{k+1} \end{cases} \quad (2.6)$$

Nas secções seguintes, iremos perturbar o modelo (2.6) acrescentando termos. Cada termo será interpretado como um controle. Assim, no início de cada secção será apresentado o modelo que vai ser estudado.

2.2 Adição de termo nas Presas

Dado o sistema (2.6), $\varphi(h) = h$ e substituindo $\alpha = ah$, $\beta = bh$, $\gamma = ch$ e $\theta = dh$ obtém-se:

$$\begin{cases} N_{k+1} = (1 + \alpha)N_k - \beta N_{k+1}P_k \\ P_{k+1} = P_k + \gamma N_{k+1}P_k - \theta P_{k+1} \end{cases}, \quad (2.7)$$

Da primeira equação do sistema (2.7) determina-se explicitamente N_{k+1} :

$$N_{k+1} = \frac{(1 + \alpha)N_k}{1 + \beta P_k} = \frac{\lambda N_k}{1 + \beta P_k} \quad (2.8)$$

sendo $\lambda = 1 + \alpha$.

Substituindo (2.8) na segunda equação de (2.7) obtém-se

$$P_{k+1} + \theta P_{k+1} = (1 + \theta)P_{k+1} = P_k + \gamma \left(\frac{\lambda N_k}{1 + \beta P_k} \right) P_k.$$

Logo P_{k+1} toma a expressão

$$P_{k+1} = \frac{P_k}{1 + \beta P_k} \left(\frac{1}{1 + \theta} + \frac{\beta P_k}{1 + \theta} + \frac{N_k \gamma \lambda}{1 + \theta} \right)$$

Substituindo $\mu = \frac{1}{1 + \theta}$ e $\gamma \lambda = \xi$, o modelo de Lotka-Volterra, discretizado pelo método de

Mickens, que vamos considerar nesta secção é dado por:

$$\begin{cases} N_{k+1} = \frac{\lambda N_k}{1 + \beta P_k} \\ P_{k+1} = \frac{P_k \mu}{1 + \beta P_k} (1 + \beta P_k + N_k \xi) \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $\mu \in]0, 1[$; $\lambda \in]1, +\infty[$, $\xi > 0$ e $\beta > 0$ e lembrando também que no modelo original a, b, c, d são constantes positivas.

Estudo do modelo discretizado

O modelo discretizado que será analisado é o seguinte

$$\begin{cases} N_{k+1} = \frac{\lambda N_k}{1 + \beta P_k} + \omega N_k \\ P_{k+1} = \frac{P_k \mu}{1 + \beta P_k} (1 + \beta P_k + N_k \xi) \end{cases} \quad (2.10)$$

onde $\mu \in]0, 1[$; $\lambda \in]1, +\infty[$, $\xi > 0$ e $\beta > 0$ e a, b, c, d são positivas. Neste modelo estamos a acrescentar um termo na primeira equação ωN_k onde $\omega \in]-1, 1[$. O termo ωN_k pode ser visto como um "controle". Se ω tomar o valor zero então estamos perante o modelo (2.9). Assim, este modelo é mais abrangente do que o modelo (2.9). O termo ωN_k pode ser visto da seguinte maneira: se ω for negativo estamos a retirar presas ao sistema, por exemplo, através da introdução de um novo predador no sistema e se ω for positivo então estaremos a introduzir presas ao sistema, por exemplo, aumentando a disponibilidade de alimentos para elas. Perante a introdução deste controle pretende-se analisar a estabilidade do sistema.

Pontos de equilíbrio

O sistema (2.10) pode escrito da seguinte forma

$$(N_{k+1}, P_{k+1}) = F(N_k, P_k)$$

onde $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é dada pela seguinte expressão

$$F(N, P) = \left(\frac{\lambda N}{1 + \beta P} + \omega N, \frac{P \mu}{1 + \beta P} (1 + \beta P + N \xi) \right).$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (2.10) são os pontos que verificam a seguinte relação $(N^*, P^*) = F(N^*, P^*)$. Isto é,

$$\begin{cases} N^* = \left(\frac{\lambda}{1 + \beta P^*} + \omega \right) N^* \\ P^* = \frac{P^* \mu}{1 + \beta P^*} (1 + \beta P^* + N^* \xi) \end{cases} \quad (2.11)$$

Resolvendo a primeira equação do sistema (2.11) obtém-se

$$\begin{aligned} N^* - \left(\frac{\lambda}{1 + \beta P^*} + \omega \right) N^* = 0 &\Leftrightarrow N^* = 0 \vee \frac{(1 + \beta P^*) - \lambda - \omega(1 + \beta P^*)}{1 + \beta P^*} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N^* = 0 \vee P^* = \frac{\lambda + \omega - 1}{(1 - \omega)\beta} \end{aligned}$$

Se $N^* = 0$ então resolvendo a segunda equação do sistema obtém-se

$$P^* = \frac{P^* \mu}{1 + \beta P^*} (1 + \beta P^*) \Leftrightarrow P^* = 0$$

Assim, $e_1 = (N^*, P^*) = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio que corresponde à extinção de ambas as espécies.

Se $P^* = \frac{\lambda + \omega - 1}{(1 - \omega)\beta}$ então resolvendo a segunda equação relativamente a N^* obtemos

$$\begin{aligned} P^* (1 + \beta P^*) &= (P^* \mu) (1 + \beta P^* + N^* \xi) \Leftrightarrow N^* \xi = \frac{1 + \beta P^* - (1 + \beta P^*) \mu}{\mu} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N^* = (1 + \beta P^*) \frac{(1 - \mu)}{\mu \xi} \Leftrightarrow N^* = \left(1 + \beta \left(\frac{\lambda + \omega - 1}{(1 - \omega)\beta} \right) \right) \frac{(1 - \mu)}{\mu \xi} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N^* = \frac{\lambda(1 - \mu)}{\mu \xi (1 - \omega)} \end{aligned}$$

Assim o ponto $e_2 = (N^*, P^*) = \left(\frac{\lambda(1 - \mu)}{\mu \xi (1 - \omega)}, \frac{\lambda + \omega - 1}{(1 - \omega)\beta} \right)$ é outro ponto de equilíbrio.

Apesar de existirem duas soluções, biologicamente, esta última só faz sentido se $N^* > 0$ e $P^* > 0$. N^* é sempre positivo pois $0 < \mu < 1$, $-1 < \omega < 1$ e os outros parâmetros são positivos. Quanto a P^* para este ser positivo $\lambda + \omega - 1 > 0$. Portanto apenas quando esta relação é satisfeita é que faz sentido analisar a estabilidade do ponto e_2 .

De facto, para existirem duas soluções biologicamente possíveis, $\lambda + \omega - 1 > 0$. Logo só quando esta relação for satisfeita é que os pontos de equilíbrio serão analisados.

Estabilidade local dos pontos de equilíbrio

Para analisar a estabilidade de cada ponto de equilíbrio relembramos que o sistema (2.10) pode escrito da seguinte forma

$$(N_{k+1}, P_{k+1}) = F(N_k, P_k)$$

onde $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é dada pela seguinte expressão

$$F(N, P) = \left(\frac{\lambda N}{1 + \beta P} + \omega N, \frac{P\mu}{1 + \beta P} (1 + \beta P + N\xi) \right).$$

A matriz jacobiana de $F(N, P)$ num ponto (N, P) é dada pela seguinte matriz

$$DF_{(N,P)} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{1 + \beta P} + \omega & -\frac{\lambda N \beta}{(1 + \beta P)^2} \\ \frac{P\mu\xi}{1 + \beta P} & \frac{\mu(1 + \beta P(2 + \beta P) + \xi N)}{(1 + \beta P)^2} \end{pmatrix}$$

Para o ponto $e_1 = (N^*, P^*) = (0, 0)$ a matriz jacobiana aplicada em e_1 é dada por

$$DF_{e_1} = \begin{pmatrix} \lambda + \omega & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

O polinómio característico da matriz acima é dado por

$$P(\psi) = \det(DF_{e_1} - \psi Id) = \det \begin{pmatrix} \lambda + \omega - \psi & 0 \\ 0 & \mu - \psi \end{pmatrix} = (\lambda + \omega - \psi)(\mu - \psi).$$

As raízes de $P(\psi)$ são os valores próprios associados a DF_{e_1} .

$e_1 = (0, 0)$	$\psi_1 = \lambda + \omega$	$\psi_2 = \mu$
----------------	-----------------------------	----------------

Tabela 2.2: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_1

Dado o sistema (2.10) e as considerações relativamente aos parâmetros sabe-se que $0 < \mu < 1$, logo o valor próprio $0 < \psi_2 < 1$. Relativamente ao ψ_1 , este varia e o valor depende de ω . Assim, existem ω 's tais que :

- $-1 < \omega < 0 : \lambda + \omega = 1 \Leftrightarrow \psi_1 = 1$;
- $-1 < \omega < 0 : \lambda + \omega > 1 \Leftrightarrow \psi_1 > 1$;
- $0 \leq \omega < 1 : \lambda + \omega > 1 \Leftrightarrow \psi_1 > 1$.

Dado que biologicamente duas soluções diferentes só fazem sentido quando $\lambda + \omega > 1$ quanto à classificação de $e_1 = (N^*, P^*) = (0, 0)$ temos o seguinte:

$0 < \psi_2 < 1$ e para $-1 < \omega < 1$ tem-se $\psi_1 > 1$ logo e_1 é *ponto sela*.

Vamos agora proceder à análise da estabilidade de $e_2 = (N^*, P^*) = \left(\frac{\lambda(1 - \mu)}{\mu\xi(1 - \omega)}, \frac{\lambda + \omega - 1}{(1 - \omega)\beta} \right)$.

$$DF_{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta(\mu-1)(1-\omega)}{\mu\xi} \\ \frac{\mu\xi}{\beta\lambda}(\lambda+(\omega-1)) & \frac{\mu(\lambda+(\omega-1))+(1-\omega)}{\lambda} \end{pmatrix}$$

O respetivo polinómio característico é dado por:

$$P(\psi) = \det(DF_{e_2} - \psi Id) = \psi^2 + \left[\frac{\mu((1-\omega)-\lambda) - ((1-\omega)+\lambda)}{\lambda} \right] \psi + \frac{\omega(\mu-1)(\lambda+(\omega-1)) + \lambda}{\lambda}$$

As raízes do polinómio são as seguintes

$$\psi = \frac{((1-\omega)+\lambda) - \mu((1-\omega)-\lambda)}{2\lambda} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu((1-\omega)-\lambda) - ((1-\omega)+\lambda))^2 - 4\lambda\omega(\mu-1)(\lambda+(\omega-1)) - 4\lambda^2}{\lambda^2}}$$

Simplificando temos

$$\psi = \frac{((1-\omega)+\lambda) - \mu((1-\omega)-\lambda)}{2\lambda} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu-1)((1-\omega)-\lambda)[(\mu-1)(1-\omega) - \lambda(\mu+3-4\omega)]}{\lambda^2}}$$

Para classificarmos o ponto e_2 precisamos de analisar o discriminante dos valores próprios, tendo em consideração que $-1 < \omega < 1$.

$$\Delta = \frac{(\mu((1-\omega)-\lambda) - ((1-\omega)+\lambda))^2 - 4\lambda\omega(\mu-1)(\lambda+(\omega-1)) - 4\lambda^2}{\lambda^2} \quad (2.12)$$

como $\lambda > 1$ precisamos de analisar apenas o numerador de (2.12) que simplificado toma a seguinte forma

$$\Delta = \underbrace{(\mu-1)}_A \underbrace{((1-\omega)-\lambda)}_B \underbrace{[(\mu-1)(1-\omega) - \lambda(\mu+3-4\omega)]}_C \quad (2.13)$$

1º Caso: $-1 < \omega < 0$

Tendo em consideração que $0 < \mu < 1$, é de fácil verificação que $C < 0$ e $A < 0$ portanto o sinal de (2.13) depende do sinal de B . Foi visto na determinação de e_2 que biologicamente este só fazia sentido se $\lambda + \omega - 1 > 0$.

Se $\lambda + \omega - 1 > 0$ então $B = (1-\omega) - \lambda < 0$. Portanto $\Delta < 0$ logo os valores próprios são complexos. Para determinar a natureza de e_2 é necessário determinar $|\psi|$.

$$\begin{aligned}
|\psi| &= \left(\frac{((1-\omega)+\lambda) - \mu((1-\omega)-\lambda)}{2\lambda} \right)^2 + \\
&+ \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu((1-\omega)-\lambda) - ((1-\omega)+\lambda))^2 - 4\lambda\omega(\mu-1)(\lambda+(\omega-1)) - 4\lambda^2}{\lambda^2}} \right)^2 = \\
&= 1 + \frac{\omega(\mu-1)(\lambda+\omega-1)}{\lambda} > 1.
\end{aligned}$$

Logo, verifica-se que e_2 é um *foco instável*.

2º Caso: $\omega = 0$

Neste caso, as raízes do polinómio característico têm a seguinte expressão:

$$\psi = \frac{(1+\lambda) - \mu(1-\lambda)}{2\lambda} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu(1-\lambda) - (1+\lambda))^2 - 4\lambda^2}{\lambda^2}}.$$

Mais uma vez, apenas é necessário analisar o numerador do discriminante. E verifica-se que

$$(\mu(1-\lambda) - (1+\lambda))^2 - 4\lambda^2 = (\mu-1)(\lambda-1)((\lambda-1)(\mu+3) + 4) < 0$$

pois $0 < \mu < 1$ e $\lambda > 1$. Portanto estamos perante raízes complexas e o valor absoluto dos valores próprios toma a seguinte expressão:

$$|\psi| = \left(\frac{(1+\lambda) - \mu(1-\lambda)}{2\lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu(1-\lambda) - (1+\lambda))^2 - 4\lambda^2}{\lambda^2}} \right)^2 = 1$$

Isto porque:

$$\begin{aligned}
|\psi| &= \left(\frac{\mu(\lambda-1) + (\lambda+1)}{2\lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{(\mu(1-\lambda) - (\lambda+1))^2}{\lambda^2}} \right)^2 \\
&= \frac{(\mu(\lambda-1) + (\lambda+1))^2}{4\lambda^2} + \frac{1}{4} \left(4 - \frac{(\mu(1-\lambda) - (\lambda+1))^2}{\lambda^2} \right) \\
&= \frac{(\mu(\lambda-1) + (\lambda+1))^2}{4\lambda^2} + 1 - \frac{(\mu(1-\lambda) - (\lambda+1))^2}{4\lambda^2} = 1
\end{aligned}$$

Logo e_2 é um *centro*.

3º Caso: $0 < \omega < 1$

Verifica-se facilmente que $A < 0$ e $B < 0$. Falta apenas analisar o que sucede com C .

Seja

$$\begin{aligned}
f :]1, +\infty[\times]0, 1[\times]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\
(\lambda, \mu, \omega) &\rightarrow (1-\omega)(\mu-1) - \lambda(\mu+3-4\omega)
\end{aligned}$$

Os valores de (λ, μ, ω) para os quais $f(\lambda, \mu, \omega) = 0$ são os que tornam $\Delta = 0$.

Fixemos $\lambda = 1$. O discriminante é zero se

$$f(1, \mu, \omega) = 0 \Leftrightarrow (1 - \omega)(\mu - 1) - (\mu + 3 - 4\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{4}{5 - \mu}$$

Assim, se $\omega > \frac{4}{5 - \mu}$, para todo $\mu \in [0, 1]$,

$$f(1.2, 0.1, 0.85) = (1 - 0.85)(0.1 - 1) - 1.2(0.1 + 3 - 4 * 0.85) = 0.225 > 0$$

logo $\Delta > 0$. Se $\omega < \frac{4}{5 - \mu}$, para todo $\mu \in [0, 1]$ então $\Delta < 0$.

Graficamente, para $\lambda = 1$, a variação do sinal de Δ é apresentado na Figura 2.2

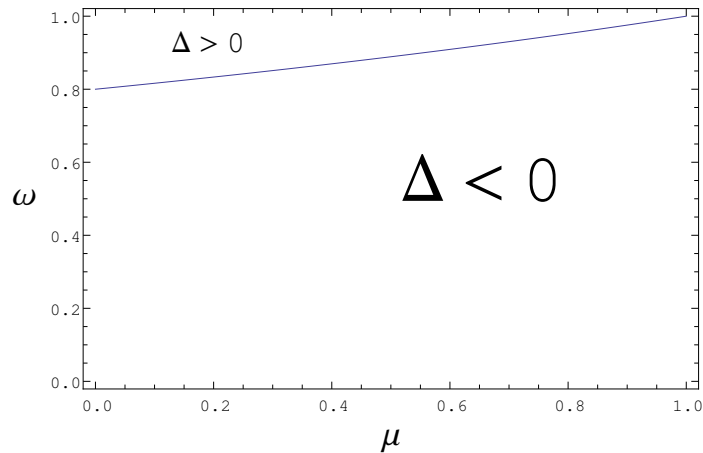


Figura 2.2: Variação do sinal de Δ

Na linha azul, $\Delta = 0$. Seja $\lambda = \lambda_0 > 1$ fixo. Para Δ ser nulo,

$$f(\lambda_0, \mu, \omega) = (1 - \omega)(\mu - 1) - \lambda_0(\mu + 3 - 4\omega) = 0 \quad (2.14)$$

Isto é,

$$\lambda_0 = \frac{(1 - \omega)(\mu - 1)}{\mu + 3 - 4\omega}$$

Deste modo obtemos, na Figura 2.3 e Figura 2.4 a variação de Δ para $\lambda = 3$, e $\lambda = 5$ respectivamente quando $\mu \in]0, 1[$ e $\omega \in]0, 1[$.

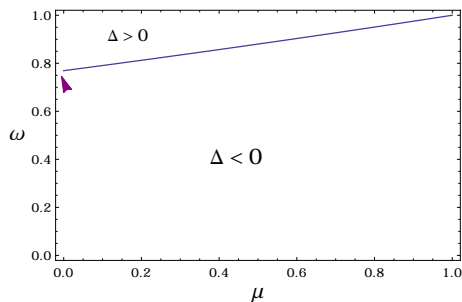


Figura 2.3: Superfície onde $\Delta = 0$, $\lambda = 3$

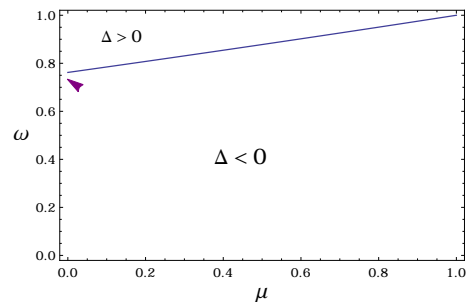


Figura 2.4: Superfície onde $\Delta = 0$, $\lambda = 5$

Quando $0 < \omega < 1$, apesar do sinal de Δ variar, a natureza de e_2 é atratora, como vamos poder

ver analiticamente a seguir.

1. Se $0 < \omega < 1$ e $\Delta < 0$ os valores próprios são complexos. Para determinar a natureza de e_2 é necessário determinar $|\psi|$. Já foi visto anteriormente que

$$|\psi| = 1 + \frac{\omega(\mu - 1)(\lambda + \omega - 1)}{\lambda}.$$

Ora, como $0 < \omega < 1$, $0 < \mu < 1$ e $\lambda + \omega - 1 > 0$ pois $\lambda > 1 - \omega$ visto $\lambda > 1$. Verifica-se que $|\psi| < 1$, logo e_2 é um *foco estável*.

2. Se $0 < \omega < 1$ e $\Delta = 0$ temos um único valor próprio, uma raiz dupla.

$$\psi = \frac{((1 - \omega) + \lambda) + \mu(\lambda + (\omega - 1))}{2\lambda} \quad (2.15)$$

Como $(1 - \omega) + \lambda > 0$ e $\lambda + (\omega - 1) > 0$ pois $\lambda > 1$ verifica-se que $\psi > 0$.

Falta verificar se $\psi < 1$.

$$\begin{aligned} \psi < 1 &\Leftrightarrow ((1 - \omega) + \lambda) + \mu(\lambda + (\omega - 1)) < 2\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \omega - \lambda + \mu(\lambda + (\omega - 1)) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mu - 1)(\lambda + (\omega - 1)) < 0 \end{aligned}$$

Como $\lambda > 1 - \omega$ e $\mu - 1 < 0$ verifica-se que $\psi < 1$. Logo e_2 é um *ponto assintoticamente estável*.

3. Se $0 < \omega < 1$ e $\Delta > 0$ então os valores próprios são reais. Relembrando, eles são

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{((1 - \omega) + \lambda) - \mu((1 - \omega) - \lambda)}{2\lambda} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu((1 - \omega) - \lambda) - ((1 - \omega) + \lambda))^2 - 4\lambda\omega(\mu - 1)(\lambda + (\omega - 1)) - 4\lambda^2}{\lambda^2}} \end{aligned}$$

Seja $x = \frac{((1 - \omega) + \lambda) - \mu((1 - \omega) - \lambda)}{2\lambda}$ e $y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu((1 - \omega) - \lambda) - ((1 - \omega) + \lambda))^2 - 4\lambda\omega(\mu - 1)(\lambda + (\omega - 1)) - 4\lambda^2}{\lambda^2}}$.

Sabemos que $x > 0$, logo $x - \sqrt{y} < x + \sqrt{y}$. Vamos agora verificar que $x - \sqrt{y} > 0$.

$$\begin{aligned} x - \sqrt{y} > 0 &\Leftrightarrow y < x^2 \Leftrightarrow \frac{\omega(1 - \mu)(\lambda + (\omega - 1))}{\lambda} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(\omega(1 - \mu) - 1) - \omega(1 - \mu)(1 - \omega) < 0 \end{aligned}$$

Dadas as condições relativamente aos parâmetros verifica-se que $x - \sqrt{y} > 0$.

O próximo passo é verificar que $x + \sqrt{y} < 1$.

Ora $x + \sqrt{y} < 1 \Leftrightarrow y < (1 - x)^2$ se $1 - x > 0$. Sabe-se que $x > 0$. Pode-se verificar, dadas as condições sobre os parâmetros, que

$$1 - x = \frac{(\mu - 1)((1 - \omega) - \lambda)}{2\lambda} > 0.$$

E

$$y < (1 - x)^2 \Leftrightarrow 4\lambda(\lambda - (1 - \omega))(\mu - 1)(1 - \omega) < 0.$$

Logo $0 < x - \sqrt{y} < x + \sqrt{y} < 1$, isto é, e_2 é um *ponto assintoticamente estável ou poço*.

Se $-1 < \omega < 0$ temos hiperbolicidade do sistema pois verifica-se que em valor absoluto os valores próprios são superiores a um. De facto,

$$-1 < \omega < 0 \Rightarrow e_2 \quad \text{é foco instável.}$$

Quando $0 < \omega < 1$, apesar da expressão dos valores próprios ser diferente, o facto é que em valor absoluto são sempre inferiores a um. Portanto temos hiperbolicidade no sistema e o ponto e_2 é atrator. Se

$$0 < \omega < 1 \Rightarrow e_2 \quad \text{foco estável / assintoticamente estável.}$$

Deste modo, conseguimos verificar a fragilidade da estabilidade do ponto e_2 , se

$$\omega = 0 \Rightarrow e_2 \quad \text{centro.}$$

Uma pequena perturbação em ω e temos um comportamento dinâmico completamente diferente.

Estabilidade global dos pontos de equilíbrio

No caso em que $-1 < \omega < 0$ e $\lambda + \omega < 1$, o ponto $e_1 = (0, 0)$ tem ambos os valores próprios menores do que 1, $|\psi_i| < 1$, $i = 1, 2$. Logo é atrator. De facto, quando $\lambda + \omega < 1$, o ponto e_2 não faz sentido biologicamente, pois significa que $P^* \leq 0$. Pode-se verificar que

$$\begin{aligned} N_{k+1} + P_{k+1} &= \mu P_k + \omega N_k + \frac{\lambda N_k + \mu \xi P_k N_k}{1 + \beta P_k} \\ &= \mu P_k + \left(\omega + \frac{\lambda + \mu \xi P_k}{1 + \beta P_k} \right) N_k \\ &= \mu P_k + \left(\frac{\omega + \beta \omega P_k + \mu \xi P_k + \lambda}{1 + \beta P_k} \right) N_k \\ &= \mu P_k + \frac{\alpha + (\beta \omega + \mu \xi) P_k}{1 + \beta P_k} N_k \quad \text{onde} \quad \alpha = \omega + \lambda < 1 \\ &< \mu P_k + \left(\frac{\alpha + \tilde{\beta} P_k}{1 + \beta P_k} \right) N_k \quad \text{onde} \quad \tilde{\beta} = \beta \omega + \mu \xi \quad \text{e} \quad \mu \xi \leq \beta \\ &< \mu P_k + \tilde{\alpha} N_k < \max\{\mu, \tilde{\alpha}\} (P_k + N_k) \\ &= \tilde{\alpha} (P_k + N_k) = \dots = (\tilde{\alpha})^k (P_0 + N_0) \end{aligned}$$

Deste modo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_{k+1} + P_{k+1} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{\alpha})^k (P_0 + N_0) = 0 \quad (2.16)$$

pois $\tilde{\alpha} \leq 1$ desde que $\mu\xi \leq \beta$. Perante esta condição pode-se concluir que e_1 é atrator global. Isto é, quando $\lambda + \omega < 1$ ocorre a extinção das espécies.

2.3 Sistema com Controle nos Predadores 1

Na análise do modelo Lotka-Volterra, adicionarmos termos a cada uma das equações tem como objetivo principal a busca de um modelo mais real e se possível encontrar um ponto de equilíbrio para o sistema. Existem vários contextos, em que esses termos podem ser vistos como a adição de um controle na dinâmica. Na secção anterior adicionamos um controle às presas. Sem perda de generalidade, pode-se assumir que o controle corresponde a remoção de elementos na população das presas ou dos predadores. Existem vários artigos que aplicam este tipo de técnica (adicionar um controle) e analisam a estabilidade do sistema. Nesta secção vamos abordar o caso em que apenas usamos um controle e será nos predadores. O controle será do tipo ON-OFF, também chamado de *política de limiar*. Um controle deve ter as seguintes características:

- *Simplicidade de implementação*: Isto é:
 1. a expressão matemática do controle deve ser a mais simples possível,
 2. o controle não deve depender dos parâmetros do sistema para que estes não precisem ser estimados.
- *Não negatividade do controle*: Como neste trabalho o controle consiste na remoção de uma proporção da população de uma determinada espécie, este deve ter um único sinal correspondente à remoção.
- *Monitorização mínima*: O número de densidades que precisam ser medidas para implementar determinado controle. Quando se trata de sistemas de duas espécies, o vetor de estados do sistema possui duas componentes, há duas possibilidades para a monitorização destas, visando a realimentação. Quando se mede apenas uma das espécies, o termo correspondente utilizado na teoria de controle é realimentação de saída. A outra opção, é medição de ambas espécies, que se denomina de realimentação de estado.
- *Promover coexistência*: apesar de remover predadores, as espécies devem equilibrar-se em níveis sustentáveis, nos quais o valor das populações, nas unidades apropriadas, são positivos.

Relativamente às unidades das variáveis e do tempo, consideramos o seguinte:

- *Unidades da Densidade*: A densidade populacional é o tamanho da população em relação a alguma unidade de espaço. Geralmente é avaliada e expressa como o número de indivíduos ou a biomassa da população, por unidade de área ou de volume.
- *Unidades de Tempo*: Tempo nos sistemas ecológicos é medido usualmente em dias, semanas ou anos.

Voltando ao sistema original (2.1) este pode ser descrito de várias formas equivalentes. Vamos descrever a nossa proposta de lei de controle ou política de limiar, aplicando as definições e conceitos da subsecção 1.3.1.

Seja $z = (N, P)$. z estará sempre em $\mathbb{R}_+^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : N > 0, P > 0\}$ e designaremos a zona de chaveamento M por

$$M = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : s(z) = 0\}$$

onde

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}_+^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longrightarrow s(z) = N - \eta_0 \end{aligned}$$

e η_0 é um valor "limite" da população das presas. A variedade M divide \mathbb{R}_+^2 em duas regiões:

$$S_1 = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : s(z) > 0\} \text{ e } S_2 = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : s(z) < 0\}.$$

Aplicando um controle a cada uma das regiões, o modelo de Lotka-Volterra, toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f_1(z, u_1(z)), \text{ se } z \in S_1 \\ \dot{z} &= f_2(z, u_2(z)), \text{ se } z \in S_2 \end{aligned}$$

A zona de chaveamento M descrita acima está definida de modo a que, sempre que a trajetória de um ponto representativo cruza M , isto é, comuta de S_1 para S_2 uma proporção de predadores é retirada. Por outras palavras, sempre que N , a densidade ou nº de presas, é inferior a η_0 uma proporção de predadores deve ser removida. A proporção é designada por ϵ e deve ser determinada de forma ao sistema ter a dinâmica desejada. Assim, a lei de controle aplicada é a seguinte:

$$\begin{aligned} u_s(z) &= \begin{cases} u_1(z) & \text{se } z \in S_1 \\ u_2(z) & \text{se } z \in S_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } z \in S_1 \\ \epsilon P & \text{se } z \in S_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Desta forma temos dois sistemas, um por cada região:

- Se $z \in S_1$ então $\dot{z} = f_1(z, 0) = (N(a - bP), P(cN - d))$
- Se $z \in S_2$ então $\dot{z} = f_2(z, u_2(z)) = (N(a - bP), P(cN - d) - \epsilon P)$

Escrevendo de uma forma equivalente, mas mais simples, utilizando apenas um sistema para descrever toda a dinâmica de controle com estrutura variável é:

$$\begin{cases} \dot{N} &= N(a - bP) \\ \dot{P} &= P(cN - d) - u_P(z) \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $u_P(z) = \epsilon P \phi(s(z))$ e $\phi(s(z))$ designa a *política de limiar* e é definida por

$$\phi(s(z)) = \begin{cases} 0 & \text{se } s(z) > 0, \\ 1 & \text{se } s(z) < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

É de notar que em M , a lei de controle não está definida. Jessica Li, em [Li14], usou este modelo na versão contínua e esta zona de chaveamento M . Comparou-a com outra zona $\tilde{M} = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : s(z) = \dot{N} - \eta_0 = 0\}$ e mostrou através do método gráfico que as órbitas continuam a ser centros mas afastam as populações da extinção. Meza, em [Kas05], também com o modelo contínuo, usando esta lei de controle mostra através de funções de Lyapunov que existe um ponto em M que é assintoticamente estável, portanto existe movimento deslizante em M . Em [Bay11], discretiza o modelo de Lotka-Volterra usando o método de Mickens, apresenta uma zona de chaveamento que implica a implementação de uma lei de controle nas duas espécies e remete para [L.H00], a demonstração. No entanto, em [L.H00] apenas é demonstrado o caso contínuo. Nesta secção discretizamos o modelo de Lotka-Volterra, usando o método de Mickens mas o modelo obtido é diferente do de Meza, em [Bay11]. A nossa superfície de chaveamento é um caso particular de [Bay11]. Discretizando o modelo (2.17), temos de ter em consideração que $u_P(z) = \epsilon P \phi(s(z))$ depende do valor da política de limiar $\phi(s(z))$. Assim, se $\phi(s(z)) = 0$, o modelo (2.17) consiste no modelo de Lotka-Volterra original cuja discretização já foi obtida na secção 2.1. Recordando o modelo (2.6):

$$\begin{cases} N_{k+1} = (1 + a\varphi(h))N_k - b\varphi(h)N_{k+1}P_k \\ P_{k+1} = P_k + c\varphi(h)N_{k+1}P_k - d\varphi(h)P_{k+1} \end{cases} \quad (2.19)$$

substituindo $a\varphi(h) = \alpha$, $b\varphi(h) = \beta$, $c\varphi(h) = \xi$ e $d\varphi(h) = \gamma$ temos o modelo livre:

$$\begin{cases} N_{k+1} = (1 + \alpha)N_k - \beta N_{k+1}P_k \\ P_{k+1} = P_k + \xi N_{k+1}P_k - \gamma P_{k+1} \end{cases} \quad (2.20)$$

Se $\phi(s(z)) = 1$ o modelo (2.17) consiste em

$$\begin{cases} \dot{N} = N(a - bP) \\ \dot{P} = P(cN - d) - \epsilon P \end{cases} \quad (2.21)$$

Discretizando obtemos:

$$\begin{cases} N_{k+1} = (1 + \alpha)N_k - \beta N_{k+1}P_k \\ P_{k+1} = P_k + \xi N_{k+1}P_k - \gamma P_{k+1} - \epsilon P_k \end{cases} \quad (2.22)$$

Neste caso $\varepsilon = \varepsilon\phi(h)$ e reescrevendo os sistemas (2.20) e (2.22) de modo explícito, podemos escrevê-lo num só

$$\begin{cases} N_{k+1} = \frac{(1+\alpha)N_k}{1+\beta P_k} \\ P_{k+1} = \frac{P_k}{1+\gamma} \left(\frac{1+\beta P_k + \xi(1+\alpha)N_k}{1+\beta P_k} - \varepsilon\phi(s(N_k, P_k)) \right) \end{cases} \quad (2.23)$$

e a política de limiar, $\phi(s(N_k, P_k)) = \phi(s(z(k))) = \phi(s(k))$ mantém-se:

$$\phi(s(k)) = \begin{cases} 0 & \text{se } s(k) > 0, \\ 1 & \text{se } s(k) < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Note-se que $s(k)$ corresponde à função que define a zona de chaveamento e depende dos estados do sistema. Esta afirma o seguinte: quando a trajetória do ponto representativo $z(k)$ cruza $s(z(k)) = 0$ o controle comuta instantaneamente. E isto permite que exista movimento na zona de chaveamento M , o modo deslizante e atinja o ponto de equilíbrio de deslizamento z_{sl}^{eq} . Agora vamos determinar os pontos de equilíbrio do sistema livre e controlado (2.23) e analisá-los quanto à estabilidade.

Pontos de Equilíbrio

Se o sistema é livre, $\phi(s(k)) = 0$ então temos o sistema

$$\begin{cases} N_{k+1} = \frac{(1+\alpha)N_k}{1+\beta P_k} \\ P_{k+1} = \frac{P_k}{1+\gamma} \left(\frac{1+\beta P_k + \xi(1+\alpha)N_k}{1+\beta P_k} \right) \end{cases} \quad (2.25)$$

O sistema anterior pode ser escrito da forma $(N_{k+1}, P_{k+1}) = F(N_k, P_k)$ onde $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é dada por

$$F(N, P) = \left(\frac{(1+\alpha)N}{1+\beta P}, \frac{P}{1+\gamma} \left(\frac{1+\beta P + \xi(1+\alpha)N}{1+\beta P} \right) \right).$$

Os pontos de equilíbrio são os pontos que satisfazem $F(N^*, P^*) = (N^*, P^*)$. Resolvendo esta equação obtemos:

$$e_1 = (0, 0) \text{ e } e_2 = \left(\frac{\gamma}{\xi}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Se o sistema é controlado, $\phi(s(k)) = 1$ então temos o sistema

$$\begin{cases} N_{k+1} = \frac{(1+\alpha)N_k}{1+\beta P_k} \\ P_{k+1} = \frac{P_k}{1+\gamma} \left(\frac{1+\beta P_k + \xi(1+\alpha)N_k}{1+\beta P_k} - \varepsilon \right) \end{cases} \quad (2.26)$$

Reescrevendo o sistema anterior da forma $(N_{k+1}, P_{k+1}) = G(N_k, P_k)$ onde $G : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é dada por

$$G(N, P) = \left(\frac{(1+\alpha)N}{1+\beta P}, \frac{P}{1+\gamma} \left(\frac{1+\beta P + \xi(1+\alpha)N}{1+\beta P} - \varepsilon \right) \right).$$

Os pontos de equilíbrio satisfazem $G(N^*, P^*) = (N^*, P^*)$ e obtemos como soluções

$$e_{1P} = (0, 0) \text{ e } e_{2P} = \left(\frac{\gamma(1+\varepsilon) + \varepsilon}{\xi}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Relembrando que o sistema livre (2.25) pode ser escrito da forma $(N_{k+1}, P_{k+1}) = F(N_k, P_k)$ onde

$$F(N, P) = \left(\frac{(1+\alpha)N}{1+\beta P}, \frac{P}{1+\gamma} \left(\frac{1+\beta P + \xi(1+\alpha)N}{1+\beta P} \right) \right).$$

a matriz jacobiana associada a $F(N, P)$, num ponto qualquer (N, P) é a seguinte:

$$DF_{(N,P)} = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha}{1+\beta P} & -\frac{(1+\alpha)N\beta}{(1+\beta P)^2} \\ \frac{(1+\alpha)\xi P}{(1+\delta)(1+\beta P)} & \frac{(1+\alpha)\xi N + (1+\beta P)^2}{(1+\delta)(1+\beta P)^2} \end{pmatrix}$$

Aplicando a matriz no ponto $e_1 = (N^*, P^*) = (0, 0)$ temos:

$$DF_{e_1} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\gamma} \end{pmatrix}$$

como α e γ são positivos por definição, temos que e_1 é um ponto sela pois

$e_1 = (0, 0)$	$\psi_1 = 1 + \alpha$	$\psi_2 = \frac{1}{1 + \gamma}$
----------------	-----------------------	---------------------------------

Tabela 2.3: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_1

Aplicando a matriz no ponto $e_2 = (N^*, P^*) = \left(\frac{\gamma}{\xi}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$ vem:

$$DF_{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta\gamma}{(1+\alpha)\xi} \\ \frac{\alpha\xi}{\beta(1+\gamma)} & \frac{(1+\alpha)^2 + (1+\alpha)\gamma}{(1+\alpha)^2(1+\gamma)} \end{pmatrix}$$

Calculando os valores próprios, obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{\beta\xi(2(1+\gamma) + \alpha(2+\gamma)) \pm i\sqrt{\alpha\beta^2\xi^2\gamma(4+4\alpha+4\gamma+3\alpha\gamma)}}{2(1+\alpha)(1+\gamma)\beta\xi} \\ &= \frac{(2(1+\gamma) + \alpha(2+\gamma)) \pm i\sqrt{\alpha\gamma(4+4\alpha+4\gamma+3\alpha\gamma)}}{2(1+\alpha)(1+\gamma)} = \alpha + \beta i \end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{2(1+\gamma) + \alpha(2+\gamma)}{2(1+\alpha)(1+\gamma)}$ e $\beta = \frac{\sqrt{\alpha\gamma(4+4\alpha+4\gamma+3\alpha\gamma)}}{2(1+\alpha)(1+\gamma)}$.

Como ψ_i é complexo o seu valor absoluto é dado por

$$|\psi_i| = |\alpha \pm \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\sqrt{4\alpha(1+\gamma) + 2(1+\gamma)^2 - \alpha^2(-2+\gamma^2)}}{(1+\alpha)(1+\gamma)\sqrt{2}}$$

Portanto, o valor absoluto depende apenas de α e de γ . Consideremos o caso em que ambos são idênticos. Neste caso

$$|\psi_i| = \frac{\sqrt{2 + \alpha(8 + 8\alpha - \alpha^3)}}{\sqrt{2}(1 + \alpha)^2}$$

Para analisar o seu valor primeiro tentamos analisar quando $|\psi_i| < 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2 + \alpha(8 + 8\alpha - \alpha^3)}}{\sqrt{2}(1 + \alpha)^2} < 1 &\Leftrightarrow (\sqrt{2 + \alpha(8 + 8\alpha - \alpha^3)})^2 < (\sqrt{2}(1 + \alpha)^2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 + \alpha(8 + 8\alpha - \alpha^3) < 2(1 + \alpha)^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha(-\alpha^3 - 8\alpha^2 - 4\alpha) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha(\alpha^3 + 8\alpha^2 + 4\alpha) > 0 \end{aligned}$$

Como α é sempre positivo a expressão acima é sempre positiva. Portanto,

$$|\psi_i| < 1 \text{ para todo } \alpha > 0. \text{ Logo } e_2 \text{ é um } \textit{foco estável}.$$

No caso geral, em que $\alpha \neq \gamma$ tentando averiguar se $|\psi_i| < 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4\alpha(1+\gamma) + 2(1+\gamma)^2 - \alpha^2(-2+\gamma^2)}}{(1+\alpha)(1+\gamma)\sqrt{2}} < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4\alpha(1+\gamma) + 2(1+\gamma)^2 - \alpha^2(-2+\gamma^2)})^2 < ((1+\alpha)(1+\gamma)\sqrt{2})^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\alpha(1+\gamma) + 2(1+\gamma)^2 - \alpha^2(-2+\gamma^2) < 2(1+\alpha)^2(1+\gamma)^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4\alpha\gamma(1+\alpha+\gamma) - 3\alpha^2\gamma^2 < 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha\gamma[4(1+\alpha+\gamma) + 3\alpha\gamma] > 0 \end{aligned}$$

Como $\alpha > 0$ e $\gamma > 0$, temos que a expressão acima é sempre positiva. Assim, no caso geral

$$|\psi_i| < 1 \text{ para todo } \alpha > 0 \text{ e } \gamma > 0. \text{ Logo } e_2 \text{ é um } \textit{foco estável}.$$

Portanto no sistema livre, o ponto de equilíbrio e_2 é sempre *foco estável*. Relembrando que o sistema (2.26) pode ser escrito da forma $(N_{k+1}, P_{k+1}) = G(N_k, P_k)$ onde $G : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é dada pela seguinte expressão

$$G(N, P) = \left(\frac{N(\alpha + 1)}{1 + \beta P}, \frac{(1 + \xi N - \varepsilon)P}{(1 + \gamma)} \right)$$

A matriz jacobiana associada a $G(N, P)$ num ponto qualquer (N, P) é dada pela seguinte matriz:

$$DG_{(N,P)} = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha}{1+\beta P} & -\frac{(1+\alpha)N\beta}{(1+\beta P)^2} \\ \frac{(1+\alpha)\xi P}{(1+\gamma)(1+\beta P)} & \frac{(1+\varepsilon(1+\gamma))(1+\beta P)^2 + (1+\alpha)\xi N}{(1+\gamma)(1+\beta P)^2} \end{pmatrix}$$

Aplicando a matriz no ponto $e_{1P} = (N^*, P^*) = (0, 0)$ vem:

$$DG_{e_{1P}} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1-\varepsilon(1+\gamma)}{1+\gamma} \end{pmatrix}$$

Como α e γ são positivos, temos $\psi_1 = 1 + \alpha > 1$ e $\psi_2 = \frac{1-\varepsilon(1+\gamma)}{1+\gamma} = \frac{1}{1+\gamma} - \varepsilon < 1$. Assim, tendo em consideração os valores próprios e_{1P} é um *ponto sela*.

$e_{1P} = (0, 0)$	$\psi_1 = 1 + \alpha$	$\psi_2 = \frac{1}{1+\gamma}$
-------------------	-----------------------	-------------------------------

Tabela 2.4: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{1P}

Aplicando a matriz no ponto $e_{2P} = (N^*, P^*) = \left(\frac{\gamma+\varepsilon(1+\gamma)}{\xi}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ vem:

$$DG_{e_{2P}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta(\gamma+\varepsilon+\gamma\varepsilon)}{(1+\alpha)\xi} \\ \frac{\alpha\xi}{\beta+\beta\gamma} & \frac{1+\alpha+\gamma-\alpha(1+\gamma)-\varepsilon}{(1+\alpha)(1+\gamma)} \end{pmatrix}$$

Calculando os valores próprios através do polinómio característico obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{2(1+\gamma) + \alpha(2+\gamma - (1+\gamma)\varepsilon) \pm \sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma(1+\varepsilon) + \varepsilon}\sqrt{-4(1+\gamma) + \alpha(-4+\gamma(-3+\varepsilon) + \varepsilon)}}{2(1+\alpha)(1+\gamma)} \\ &= \tilde{\alpha} \pm \beta \end{aligned}$$

Onde

$$\tilde{\alpha} = \frac{2(1+\gamma) + \alpha(2+\gamma - (1+\gamma)\varepsilon)}{2(1+\alpha)(1+\gamma)}$$

e

$$\beta = \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma(1+\varepsilon) + \varepsilon}\sqrt{-4(1+\gamma) + \alpha(-4+\gamma(-3+\varepsilon) + \varepsilon)}}{2(1+\alpha)(1+\gamma)}.$$

A natureza de e_2 depende do valor de $|\psi_i|$. De facto β e ε são cruciais no valor de $|\psi_i|$. Devido ao facto de todos os parâmetros do sistema serem positivos temos

$$\begin{cases} -4(1+\gamma) + \alpha(-4+\gamma(-3+\varepsilon) + \varepsilon) \geq 0 & \Leftrightarrow \beta \in \mathbb{R}_0^+, \\ -4(1+\gamma) + \alpha(-4+\gamma(-3+\varepsilon) + \varepsilon) < 0 & \Leftrightarrow \beta \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

O primeiro caso implica que $\psi_i = \tilde{\alpha} \pm \beta$ são valores próprios reais e no segundo temos $\psi_i \in \mathbb{C}$.

Para especificar o valor de $|\psi_i|$ nos casos anteriormente descritos precisamos de analisar o valor de β . Assim, temos três casos:

- 1º Caso: $\beta = 0$ isto é $\varepsilon = \frac{4(1 + \gamma + \alpha) + 3\alpha\gamma}{\alpha(\gamma + 1)}$.

Substituindo ε em $|\psi_i|$ obtém-se que $|\psi_i| = |\tilde{\alpha}| = 1$.

e_{2P}	$\psi_1 = \tilde{\alpha} = 1$	$\psi_2 = \tilde{\alpha} = 1$
----------	---------------------------------	---------------------------------

Tabela 2.5: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{2P}

Logo e_{2P} é um *nodo degenerado*. Seja este valor de ε denotado por ε_1 .

- 2º Caso: $\beta > 0$ isto é $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Neste caso, ambos os valores próprios são reais. A natureza do ponto de equilíbrio e_{2P} depende, em particular, do valor de ε . Por outro lado como ε corresponde a uma proporção de predadores temos de ter $\varepsilon \leq 1$. Se $\alpha = \gamma$, ao substituímos em ε_1 vem

$$\varepsilon_1 > 1 \Leftrightarrow \frac{4(1 + 2\alpha) + 3\alpha^2}{\alpha(\alpha + 1)} > 1 \quad (2.27)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 + 2\alpha) + 3\alpha^2 > \alpha(\alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 7\alpha + 4 > 0 \quad (2.28)$$

Pode-se ver que para todo o valor de $\alpha > 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1 > 1$. O que biologicamente é impossível. Se $\alpha \neq \gamma$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{4(1 + \gamma + \alpha) + 3\alpha\gamma}{\alpha(\gamma + 1)} > 1 &\Leftrightarrow 4(1 + \gamma + \alpha) + 3\alpha\gamma > \alpha(\gamma + 1) \\ &\Leftrightarrow 3\alpha + 4 + 4\gamma + 2\alpha\gamma > 0 \end{aligned}$$

Como α e γ são positivos, ε_1 é sempre superior a um. Logo biologicamente e_{2P} ter dois valores próprios reais não faz sentido. Portanto resta analisar o terceiro caso.

- 3º Caso: $\beta \in \mathbb{C}$, isto é, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Neste caso, $\psi_i = \tilde{\alpha} \pm \beta i$.

Dada a complexidade da expressão vamos considerar dois sub-casos.

- Assumamos que $\alpha = \gamma$. Relativamente a $|\psi_i|$ temos

$$\begin{aligned} |\psi_i| < 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2 + \alpha(8 + 8\alpha - \alpha^3 - 2(1 + \alpha)(2 + \alpha(4 + \alpha))\varepsilon + \alpha(1 + \alpha)^2\varepsilon^2))}}{\sqrt{2}(1 + \alpha)^2} < 1 \\ &\Leftrightarrow (2 + \alpha(8 + 8\alpha - \alpha^3 - 2(1 + \alpha)(2 + \alpha(4 + \alpha))\varepsilon + \alpha(1 + \alpha)^2\varepsilon^2)) < 2(1 + \alpha)^4 \\ &\Leftrightarrow \alpha(\alpha + \varepsilon + \alpha\varepsilon)(-4 - 8\alpha - 3\alpha^2 + \alpha\varepsilon + \alpha^2\varepsilon) < 0 \end{aligned}$$

Como $\alpha(\alpha + \varepsilon + \alpha\varepsilon)$ é sempre positivo, para a expressão acima ser negativa

$$(-4 - 8\alpha - 3\alpha^2 + \alpha\varepsilon + \alpha^2\varepsilon) < 0 \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{4(1 + 2\alpha) + 3\alpha^2}{\alpha(\alpha + 1)}$$

Já foi visto em (2.27) que $\frac{4(1+2\alpha)+3\alpha^2}{\alpha(\alpha+1)} > 1$ para todo $\alpha > 0$. Logo para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $|\psi_i| < 1$.

- Assumamos que $\alpha \neq \gamma$. Este é o caso geral. Relativamente a $|\psi_i|$ temos:

$$\begin{aligned} |\psi_i| < 1 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(1+\gamma)^2 - 4\alpha(1+\gamma)(-1+\varepsilon+\gamma\varepsilon) + \alpha^2(2-\gamma^2 - 2(1+\gamma)(2+\gamma)\varepsilon + (1+\gamma)^2\varepsilon^2) - \\ &2(1+\alpha)^2(1+\gamma)^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha(\gamma+\varepsilon+\gamma\varepsilon)(-4(1+\gamma) + \alpha(-4+\gamma(-3+\varepsilon)+\varepsilon)) < 0 \end{aligned}$$

Como $\alpha(\gamma+\varepsilon+\gamma\varepsilon)$ é sempre positivo, para a expressão acima ser negativa temos de ter $(-4(1+\gamma) + \alpha(-4+\gamma(-3+\varepsilon)+\varepsilon)) < 0$, que é equivalente a $\varepsilon < \varepsilon_1$. E já foi visto anteriormente que $\varepsilon_1 > 1$. Logo $|\psi_i| < 1$, para todo α e γ positivo.

Assim temos para α, γ positivo

e_{2P}	$ \psi_1 < 1$	$ \psi_2 < 1$
----------	----------------	----------------

Tabela 2.6: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{2P}

Logo e_{2P} é um *foco estável*.

Só faz sentido analisar sistemas em que existem parâmetros $\alpha, \beta, \xi, \gamma$ e ε que estejam definidos quer no sistema livre, quer no sistema controlado. Da análise anterior, tem-se

α	γ	ε	Sistema Livre	Sistema Controlado
$\alpha > 0$	$\gamma > 0$	$\varepsilon < \varepsilon_1$	foco estável	foco estável

Análise Gráfica

Começamos por relembrar que $M = \{z \in \mathbb{R}_+^2 : s(z) = 0\}$ onde

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}_+^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longrightarrow s(z) = N - \eta_0 \end{aligned}$$

e η_0 é um valor "limite" da população das presas. No sistema livre, o ponto de equilíbrio é $e_2 = z_{S_1}^{eq} = (N_2, P^*)$ e no sistema controlado o ponto de equilíbrio é $e_{2P} = z_{S_2}^{eq} = (N_{2P}, P^*)$. Queremos que estes pontos sejam virtuais, ver definição 1.3.8. Tendo em consideração a nossa variedade, a condição necessária para os pontos serem virtuais é que η_0 seja escolhido de modo a $N_2 < \eta_0 < N_{2P}$. O valor que vamos usar, sem perda de generalidade é:

$$\eta_0 = \frac{N_2 + N_{2P}}{2}.$$

Ver um exemplo na Figura 2.5.

A política de limiar, $\phi(s(k))$

$$\phi(s(k)) = \begin{cases} 0 & \text{se } s(k) > 0, z(k) \in S_1 \\ 1 & \text{se } s(k) < 0, z(k) \in S_2 \end{cases}$$

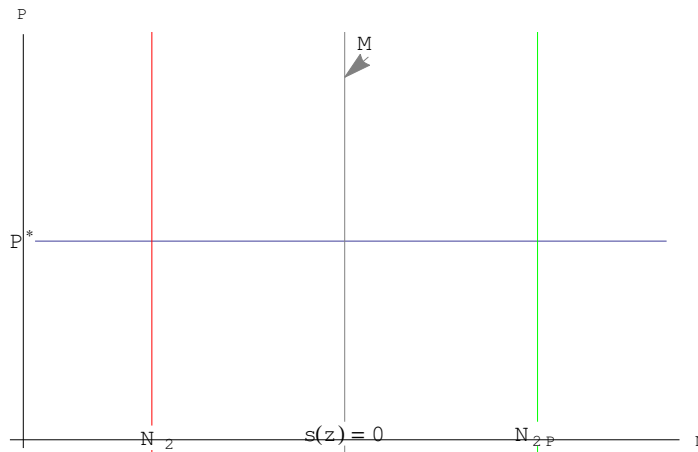


Figura 2.5: Zona de Chaveamento M

está definida de modo a que: na zona S_1 atua o controle $u_1(z(k)) = 0$ e $z(k+1) = F(z(k))$ tenta encontrar $z_{S_1}^{eq}$ que se encontra em S_2 . No entanto mal a trajetória cruza M , ou $s(k) = 0$, o controle comuta para u_2 e entra em ação $z(k+1) = G(z(k))$ que tenta encontrar $z_{S_2}^{eq}$ que por sua vez se encontra em S_1 , ver Figura 2.6.

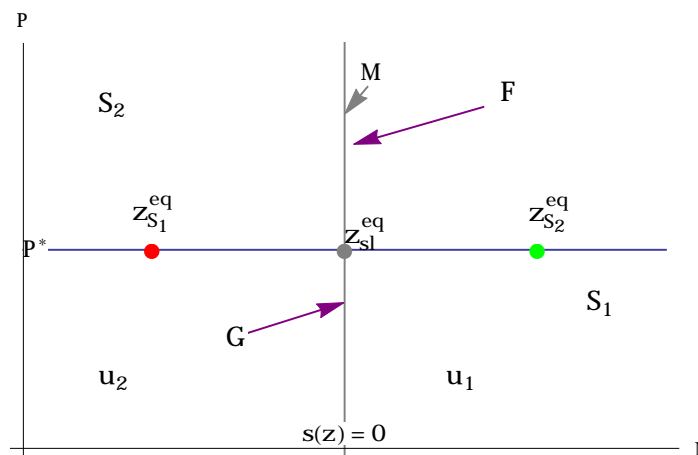


Figura 2.6: Pontos de equilíbrio virtuais

No entanto, em sistemas de equações às diferenças, a zona de chaveamento M só poderá ser uma zona quasi-deslizante. Isto porque, na prática, a lei de controle ou política de limiar, em sistemas de equações às diferenças, deve comutar um pouco antes da zona de chaveamento quando a trajetória vai da região com controle S_2 para a região sem controle S_1 . E comuta um pouco antes quando se vai da região sem controle S_1 para a região com controle S_2 . Assim a política de limiar deve ser considerada com Histerese ("Threshold Policy with hysteresis"). Para tal precisamos de definir uma banda limite, ver definição 1.3.9. Seja $\sigma > 0$ e definimos \bar{M} do seguinte modo

$$\bar{M} = \{z(k) \in \mathbb{R}_+^2 : -\sigma \leq N_k - \eta_0 \leq \sigma\}. \quad (2.29)$$

Graficamente temos a Figura 2.7.

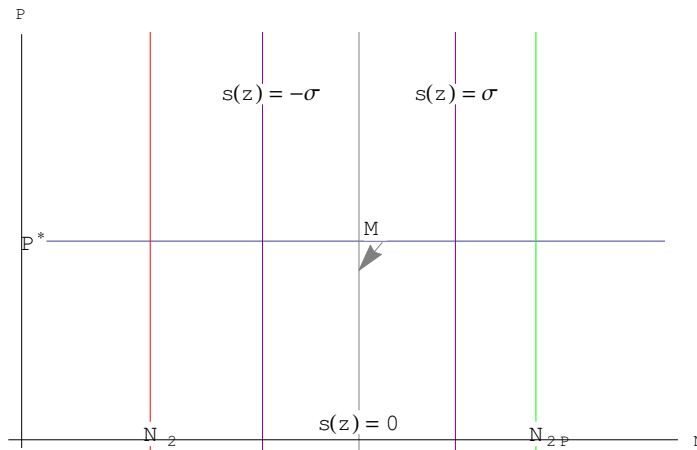


Figura 2.7: Banda limite $|s(z)| \leq \sigma$

O valor de σ tem de ser escolhido de forma a

$$N_2 < \eta_0 - \sigma < \eta_0 < \eta_0 + \sigma < N_{2P}$$

sem perda de generalidade vamos considerar $\sigma = \frac{\eta_0 - N_2}{2}$. Portanto verifica-se sempre a condição exigida. Precisamos de definir uma lei de controle de tal modo que as trajetórias converjam para \bar{M} e que a partir de um determinado instante k as trajetórias permaneçam nessa banda. De facto, a distância à zona de chaveamento tem de ser não crescente, conforme o tempo vai passando, ver Figura 2.8.

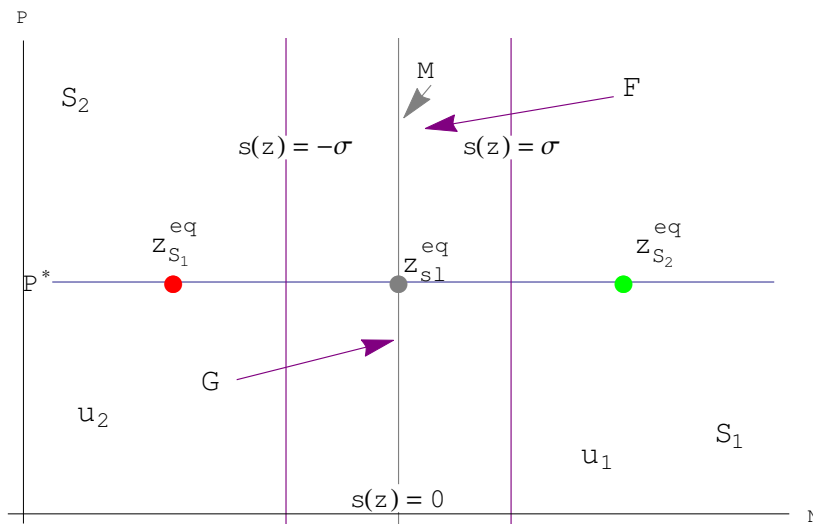


Figura 2.8: Zona de Chaveamento M com Histerese

Assim, a política de limiar que vamos utilizar é definida do seguinte modo:

$$\phi_H(s, \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{se } s(k) > \sigma \vee (s(k) - s(k-1)) \geq 0 \wedge s(k) \geq -\sigma, \\ 1 & \text{se } s(k) < -\sigma \vee (s(k) - s(k-1)) < 0 \wedge s(k) \leq \sigma \end{cases} \quad (2.30)$$

onde $z(k) = (N_k, P_k)$ e σ é o valor onde começa e termina a banda limite.

Tendo em consideração a política de limiar com histerese e a tabela com os parâmetros que fazem sentido biologicamente, apresentamos agora alguns gráficos. Consideramos 3 conjuntos de parâmetros. Neles consegue-se verificar que para os pontos considerados as suas trajetórias convergem para \bar{M} e conforme o tempo passa as trajetórias ficam confinadas a \bar{M} . Portanto \bar{M} é uma zona quasi-deslizante pois as trajetórias tendem a convergir para um ponto definido em M , z_{eq}^{sl} , o ponto de equilíbrio de deslizamento. Para diferentes parâmetros, o comportamento das trajetórias é semelhante. Vamos utilizar a função $\varphi(h) = e(h) - 1$, com $h = 0.01$ tal como Meza utilizou em [Bay11].

A cada ponto inicial está associado dois gráficos. No gráfico do lado esquerdo estará representada a sua trajetória. No gráfico da direita estará representada uma combinação de gráficos.

- A laranja está representado a trajetória do ponto inicial considerando o sistema livre;
- A vermelho está representado a trajetória do ponto inicial considerando que o sistema é constantemente controlado;
- A azul temos $P = P^*$, para todo o t considerado.
- A lilás temos $N = \eta_0$, para todo o t considerado.
- A verde temos $N = N_2$ e $N = N_{2P}$.
- A preto temos $N = \eta_0 - \sigma$ e $N = \eta_0 + \sigma$.
- A azul temos a trajetória do ponto inicial considerando o controle ON-OFF com histerese.

Em cada gráfico, foram consideradas milhares de iterações. Na maioria deles, pelo menos 7000 e no máximo 40000. O número de iterações depende do valor de ε . Quanto mais pequeno mais tempo se demora a encontrar o ponto de equilíbrio de deslizamento. Os algoritmos utilizados estão descritos no Apêndice A.2.

1. Para o conjunto de parâmetros: $a = 1$; $b = c = 0.2$, $d = 0.5$ e $e = 0.3$ têm-se:

N_2	η_0	σ	N_{2P}	P^*	z_{eq}^{sl}
2.5	3.25377	0.376884	4.00754	5	(3.25377, 5)

Tabela 2.7: 1º Conjunto de Valores

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (10, 10)$.

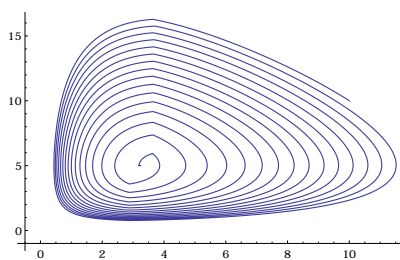


Figura 2.9: Trajetória de (N_0, P_0)

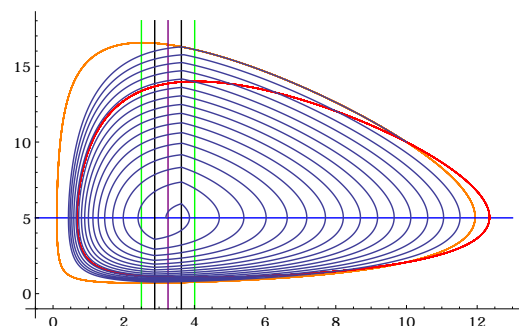


Figura 2.10: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (7, 4)$.

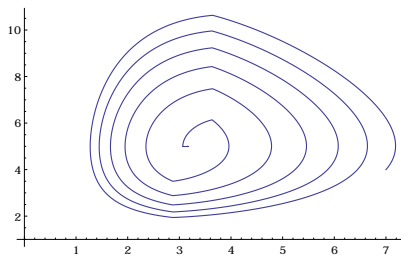


Figura 2.11: Trajetória de (N_0, P_0)

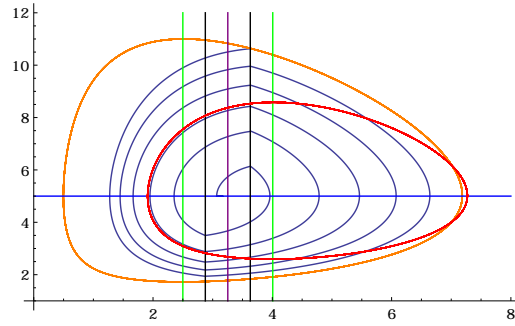


Figura 2.12: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (2, 3)$.

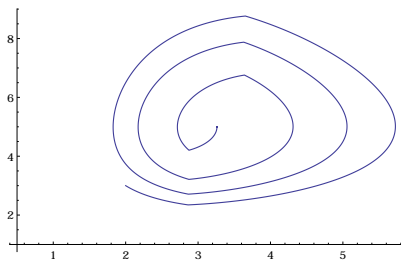


Figura 2.13: Trajetória de (N_0, P_0)

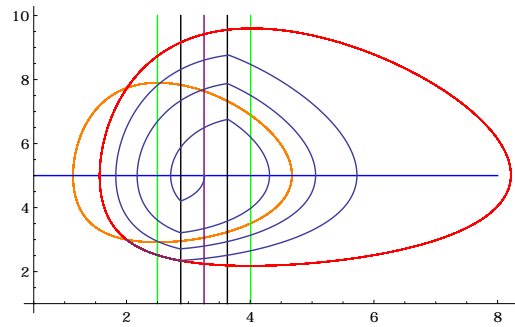


Figura 2.14: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (2, 8)$.

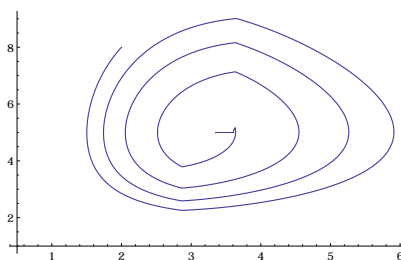


Figura 2.15: Trajetória de (N_0, P_0)

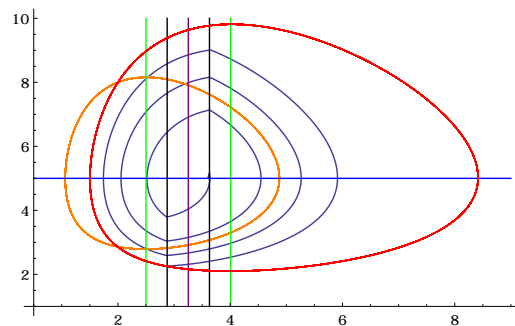


Figura 2.16: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (3.5, 10)$.

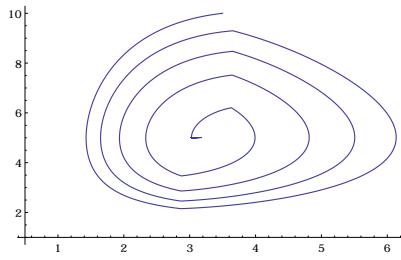


Figura 2.17: Trajetória de (N_0, P_0)

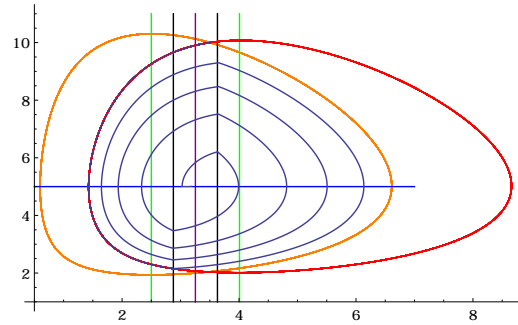


Figura 2.18: Comparação de trajetórias

2. Para o conjunto de parâmetros: $\alpha = 1.5$; $b = c = 0.4$, $d = 0.3$ e $e = 0.1$ têm-se:

N_2	η_0	σ	N_{2P}	P^*	z_{eq}^{sl}
0.75	0.875377	0.0626884	1.00075	3.75	(0.875377, 3.75)

Tabela 2.8: 2º Conjunto de Valores

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (3, 3)$.

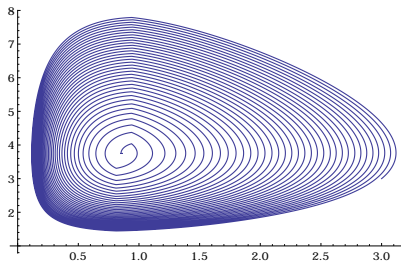


Figura 2.19: Trajetória de (N_0, P_0)

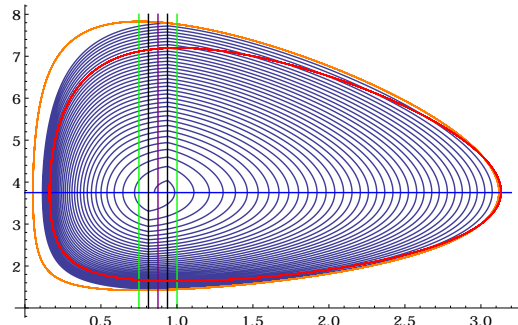


Figura 2.20: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (2, 2)$.

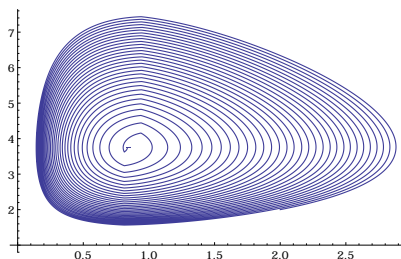


Figura 2.21: Trajetória de (N_0, P_0)

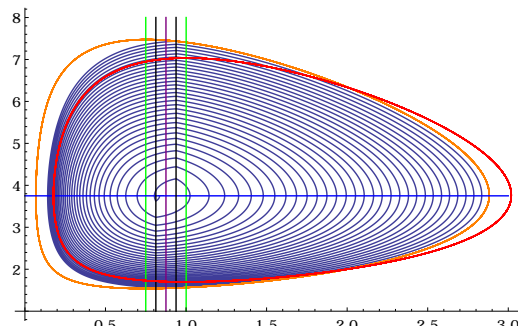


Figura 2.22: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (0.5, 4)$.

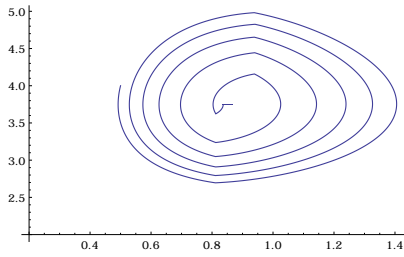


Figura 2.23: Trajetória de (N_0, P_0)

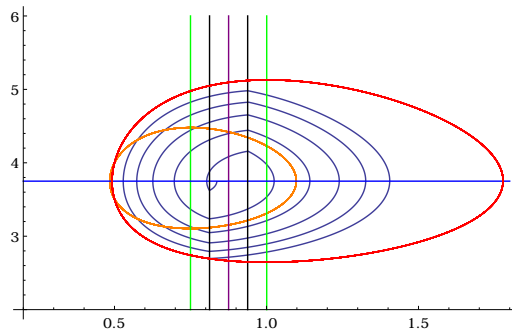


Figura 2.24: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (0.6, 2)$.

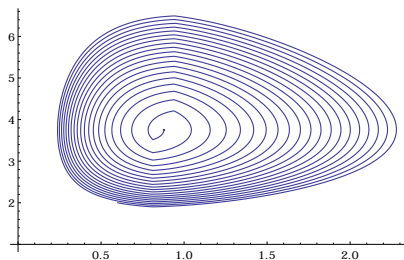


Figura 2.25: Trajetória de (N_0, P_0)

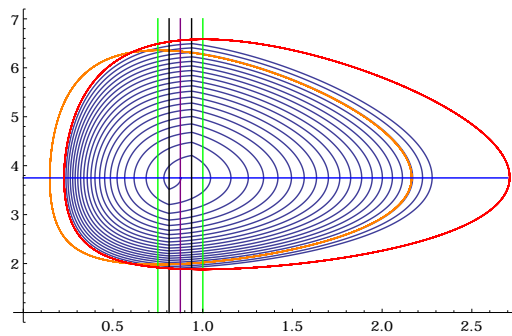


Figura 2.26: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (0.9, 2.5)$.

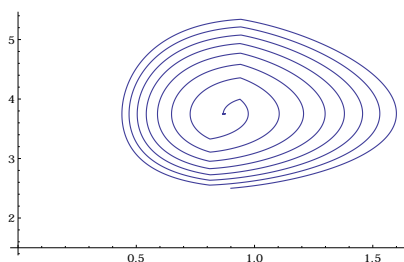


Figura 2.27: Trajetória de (N_0, P_0)

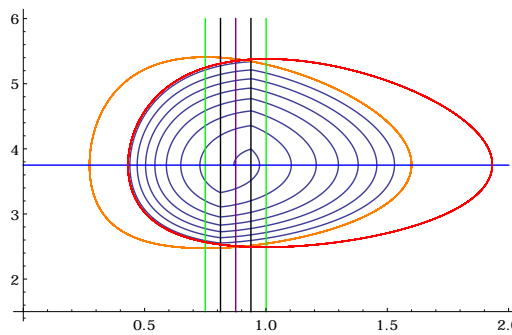


Figura 2.28: Comparação de trajetórias

3. Para o conjunto de parâmetros: $a = 2$; $b = c = 0.3$, $d = 0.4$ e $e = 0.5$ têm-se:

N_2	η_0	σ	N_{2P}	P^*	z_{eq}^{sl}
1.3333	2.17002	0.418342	3.0067	6.66667	(2.17002, 6.66667)

Tabela 2.9: 3º Conjunto de Valores

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (4, 4)$.

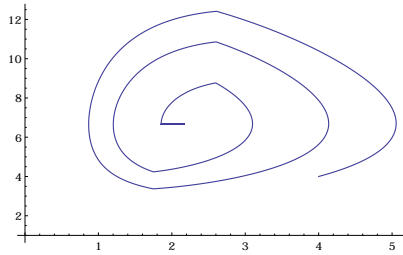


Figura 2.29: Trajetória de (N_0, P_0)

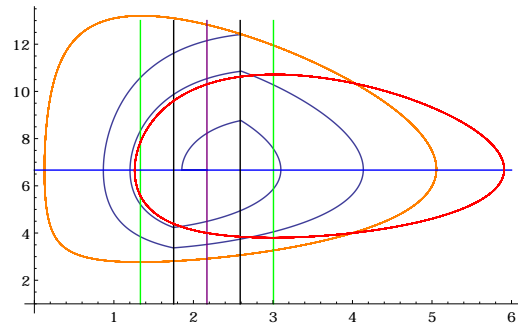


Figura 2.30: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (3.5, 3)$.

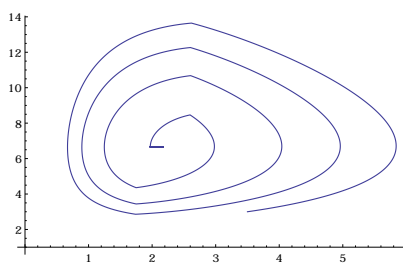


Figura 2.31: Trajetória de (N_0, P_0)

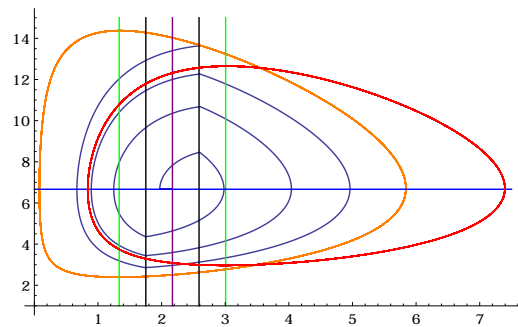


Figura 2.32: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (2, 3)$.

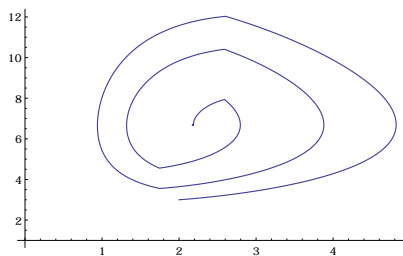


Figura 2.33: Trajetória de (N_0, P_0)

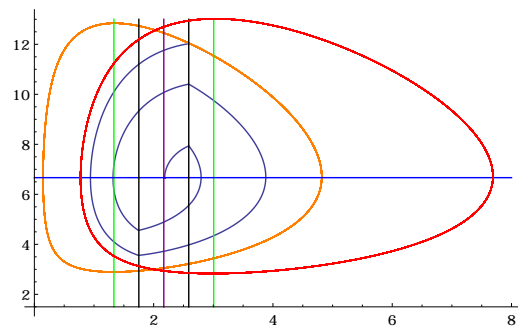


Figura 2.34: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (0.5, 5)$.

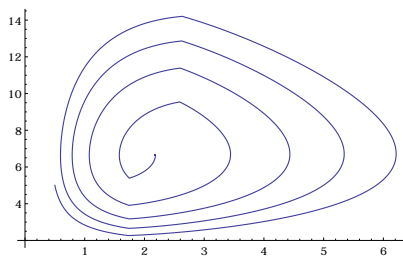


Figura 2.35: Trajetória de (N_0, P_0)

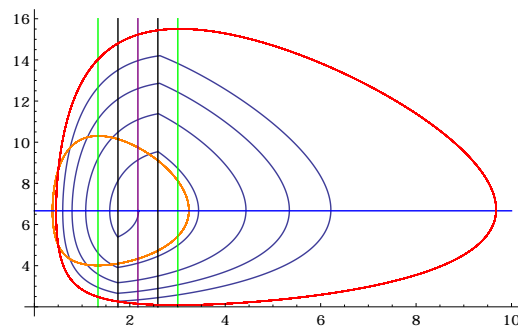


Figura 2.36: Comparação de trajetórias

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (1, 2)$.

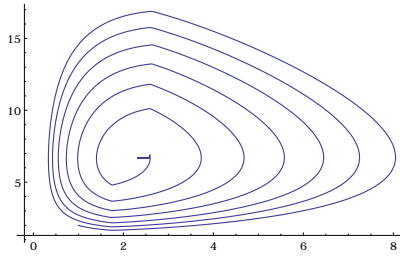


Figura 2.37: Trajetória de (N_0, P_0)

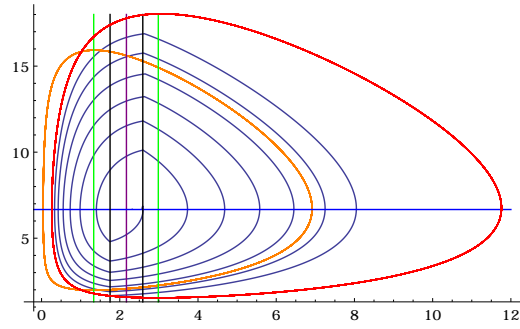


Figura 2.38: Comparação de trajetórias

2.4 Sistema com Controle nos Predadores 2

Meza, em [Bay11], discretiza o modelo de Lotka-Volterra, usando método de Mickens, mas na segunda equação a discretização é diferente. O passo diferente decisivo é

$$P_{k+1} = P_k + \xi N_k P_{k+1} - \gamma P_k.$$

Assim o sistema final discretizado é:

$$\begin{cases} N_{k+1} = \frac{(1 + \alpha)N_k}{1 + \beta P_k} \\ P_{k+1} = \frac{(1 - \gamma)P_k}{1 - \xi N_k} \end{cases}.$$

Considerando a lei de controle apenas nos predadores, obtém-se

$$\begin{cases} N_{k+1} = \frac{(1 + \alpha)N_k}{1 + \beta P_k} \\ P_{k+1} = \frac{(1 - \gamma)P_k}{1 - \xi N_k} - \varepsilon P_k \phi(s(k)) \end{cases} \quad (2.31)$$

$\phi(s(k))$ é a política de limiar com histerese, (2.30) descrita na secção anterior. A superfície de chaveamento e a zona de quasi-deslizamento mantém-se igual à definida na secção anterior.

Pontos de Equilíbrio

O sistema (2.31), quando é livre, pode ser reescrito da seguinte forma $(N_{k+1}, P_{k+1}) = H(N_k, P_k)$ onde $H: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é dada pela expressão

$$H(N, P) = \left(\frac{(1 + \alpha)N}{1 + \beta P}, \frac{(1 - \gamma)P}{1 - \xi N} \right).$$

para um ponto qualquer $(N, P) \in \mathbb{R}_+^2$. Os pontos de equilíbrio de (2.31) são as soluções de $H(N^*, P^*) = (N^*, P^*)$. Estes tomam os valores

$$e_1 = (0, 0) \text{ e } e_2 = \left(\frac{\gamma}{\xi}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

No sistema controlado, o sistema (2.31) pode ser reescrito da forma $(N_{k+1}, P_{k+1}) = HC(N_k, P_k)$ onde $HC : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ é dada pela expressão

$$HC(N, P) = \left(\frac{(1 + \alpha)N}{1 + \beta P}, \frac{(1 - \gamma)P}{1 - \xi N} - \varepsilon P \right).$$

para um ponto qualquer $(N, P) \in \mathbb{R}_+^2$. Mais uma vez, os pontos de equilíbrio são as soluções de $HC(N^*, P^*) = (N^*, P^*)$. Estes tomam os valores

$$e_{1M} = (0, 0) \text{ e } e_{2M} = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{\xi(1 + \varepsilon)}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

2.4.0.3 Análise da Estabilidade Local dos Pontos de Equilíbrio

Para o sistema (2.31), pretendemos analisar a natureza dos pontos de equilíbrio e verificar como se comportam as trajetórias de um ponto representativo relativamente a \bar{M} , (2.29). A matriz jacobiana associada a $H(N, P)$ num ponto (N, P) qualquer é dada por

$$DH_{(N,P)} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \alpha}{1 + \beta P} & -\frac{(1 + \alpha)N\beta}{(1 + \beta P)^2} \\ \frac{P(1 - \gamma)\xi}{(1 - \xi N)^2} & \frac{(1 - \gamma)}{1 + \xi N} \end{pmatrix}$$

Relativamente a $e_1 = (0, 0)$, DH aplicada em e_1 é dada por

$$DH_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \gamma \end{pmatrix}$$

como α e γ são positivos por definição, temos que e_1 é um *ponto sela* pois

$e_1 = (0, 0)$	$\psi_1 = 1 + \alpha$	$\psi_2 = 1 - \gamma$
----------------	-----------------------	-----------------------

Tabela 2.10: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_1

Relativamente a $e_2 = \left(\frac{\gamma}{\xi}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$, a matriz DH aplicada em e_2 é dada por

$$DH_{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta\gamma}{(1 + \alpha)\xi} \\ \frac{\alpha\xi}{\beta(1 - \gamma)} & 1 \end{pmatrix}$$

os valores próprios do polinómio característico associado à matriz acima são

$e_2 = \left(\frac{\gamma}{\xi}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$	$\psi_1 = 1 - \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{(1 + \alpha)(\gamma - 1)}}$	$\psi_2 = 1 + \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{(1 + \alpha)(\gamma - 1)}}$
-----------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------

Tabela 2.11: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_2

Analisando os valores próprios observamos que para estarem bem definidos $\gamma \neq 1$ e se

- Se $\gamma > 1$ então e_2 é um *ponto sela*;

- Se $\gamma < 1$ então os valores próprios são complexos e $|\phi_i| = 1 + \frac{\alpha\gamma}{(1+\alpha)(\gamma-1)} < 1$ pois $(\gamma-1) < 1$ logo e_2 é um *foco estável*.

Considerando agora o sistema controlado *HC* a matriz jacobiana, para um ponto qualquer (N, P) toma a forma:

$$DHC_{(N,P)} = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha}{1+\beta P} & -\frac{(1+\alpha)N\beta}{(1+\beta P)^2} \\ \frac{P(\gamma-1)\xi}{(\xi N-1)^2} & \frac{(\gamma-1)}{\xi N-1} - \varepsilon \end{pmatrix}$$

Relativamente a $e_{1M} = (0, 0)$, a matriz *DHC* aplicada a e_{1M} é dada por:

$$DHC_{e_{1M}} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1-(1+\gamma)\varepsilon}{1+\gamma} \end{pmatrix}$$

como ε e γ são positivos por definição, temos que e_{1M} é um *ponto sela* pois

$e_{1M} = (0, 0)$	$\psi_1 = 1 + \alpha$	$\psi_2 = \frac{1}{1+\gamma} - \varepsilon$
-------------------	-----------------------	---------------------------------------------

Tabela 2.12: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{1M}

Relativamente a $e_{2M} = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{\xi(1 + \varepsilon)}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$, a matriz *DHC* aplicada a e_{2M} é dada por:

$$DHC_{e_{2M}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\beta(\gamma + \varepsilon)}{(1 + \alpha)\xi(1 + \varepsilon)} \\ \frac{\alpha\xi(1 + \varepsilon)^2}{\beta(\gamma - 1)} & 1 \end{pmatrix}$$

os valores próprios do polinómio característico associado à matriz acima são

$e_{2M} = \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{\xi(1 + \varepsilon)}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$	$\psi_1 = 1 - \sqrt{\frac{\alpha(1 + \varepsilon)(\gamma + \varepsilon)}{(1 + \alpha)(\gamma - 1)}}$	$\psi_2 = 1 + \sqrt{\frac{\alpha(1 + \varepsilon)(\gamma + \varepsilon)}{(1 + \alpha)(\gamma - 1)}}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tabela 2.13: Valores próprios para o ponto de equilíbrio e_{2M}

Analisando as expressões dos valores próprios observamos que para estarem bem definidos é necessário que $\gamma \neq 1$ e se

- Se $\gamma > 1$ então e_{2M} é um *ponto sela*;
- Se $\gamma < 1$ então os valores próprios são complexos e $|\psi_i| = 1 + \frac{\alpha(1 + \varepsilon)(\gamma + \varepsilon)}{(1 + \alpha)(\gamma - 1)} < 1$ pois $(\gamma - 1) < 0$ logo e_{2M} é um *foco estável*.

Biologicamente γ é a taxa de mortalidade e não pode ser superior a 1. Assim, nos sistemas livres e controlado, temos que o ponto de equilíbrio positivo e_{2M} é sempre *foco estável*.

Análise Gráfica do Sistema 2

O ponto de equilíbrio do sistema livre $e_2 = z_{S_1}^{eq} = (N_2, P^*)$ coincide com o obtido no sistema 1. No sistema controlado, o ponto de equilíbrio é $e_{2M} = z_{S_2}^{eq} = (N_{2M}, P^*)$ que é diferente de e_{2P} do sistema 1. De facto, têm-se para todos os valores dos parâmetros que $N_{2M} < N_{2P}$ isto porque

$$\frac{\gamma + \varepsilon}{\xi(1 + \varepsilon)} < \frac{\gamma(1 + \varepsilon) + \varepsilon}{\xi}.$$

Queremos que estes pontos sejam virtuais e para tal a condição necessária é que η_0 seja escolhido de modo a $N_2 < \eta_0 < N_{2M}$. Iremos utilizar a mesma política de limiar com histerese e a mesma função $\varphi(h) = e(h) - 1$, com $h = 0.01$ tal como Meza utilizou em [Bay11].

Nesta secção o nosso objetivo é comparar as trajetórias de pontos tendo em consideração os sistemas 1 e 2. Mas como os pontos equilíbrio dos sistemas controlados são diferentes teremos de manter a mesma superfície de chaveamento e os mesmos pontos iniciais. A definição da superfície desde que satisfaça a condição de que os pontos sejam virtuais fica ao critério dos autores. Vamos apresentar dois conjuntos de parâmetros e para alguns pontos será apresentada a sua trajetória. Tal como na secção gráfica anterior quanto mais pequena for a proporção a ser retirada mais iterações serão necessárias para o ponto estar próximo do ponto de equilíbrio de deslizamento. Tal como foi realizado na secção anterior, a cada ponto será associado dois gráficos. O da esquerda conterá a sua trajetória e a do sistema 1. Para podermos verificar as diferenças ou semelhanças, considerando o mesmo número de iterações. No da direita incluiremos o ponto de equilíbrio de deslizamento z_{eq}^{sl} , dado pela interseção de $y(t) = P^*$ e $x(t) = \eta_0$. Assim:

- A azul temos $P = P^*$, para todo o t considerado.
- A lilás temos $N = \eta_0$, para todo o t considerado.
- A preto temos $N = \eta_0 - \sigma$ e $N = \eta_0 + \sigma$.
- A verde temos $N = N_2$ e $N = N_{2M}$.
- A vermelho temos a trajetória do ponto inicial considerando o controle ON-OFF com histerese de Meza.
- A azul temos a trajetória do ponto inicial considerando o controle ON-OFF com histerese, do sistema 1.

Tal como na análise gráfica do sistema 1, os valores representados nos gráficos dependem dos parâmetros, e consideramos $\eta_0 = \frac{N_2 + N_{2P}}{2}$ e $\sigma = \frac{\eta_0 - N_2}{2}$. Deste modo a comparação entre eles será mais fácil.

1. Para o conjunto de parâmetros: $a = 1$; $b = c = 0.2$, $d = 0.5$ e $e = 0.3$ têm-se:

N_2	η_0	σ	N_{2M}	P^*	z_{eq}^{sl}
2.5	3.25377	0.376884	3.98798	5	(3.25377, 5)

Tabela 2.14: 1ª Conjunto de Valores

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (10, 10)$.

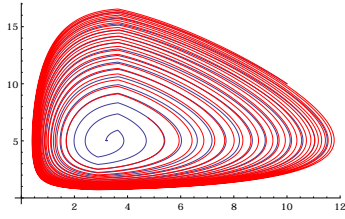


Figura 2.39: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

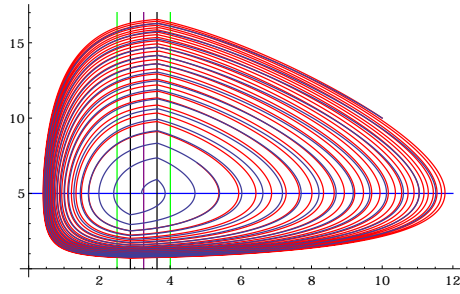


Figura 2.40: Zona Quasi-Deslizante

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (7, 4)$.

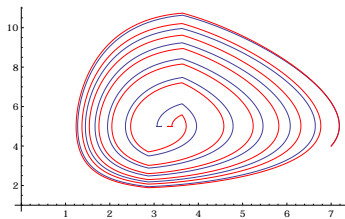


Figura 2.41: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

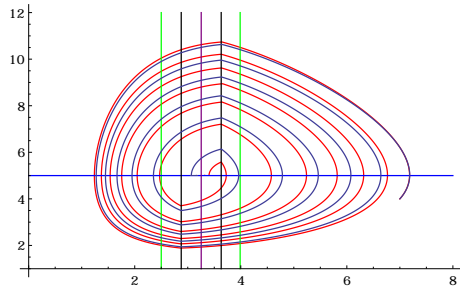


Figura 2.42: Zona Quasi-Deslizante

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (2, 3)$.

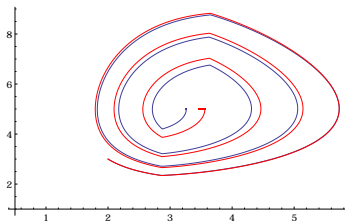


Figura 2.43: A Trajetória de (N_0, P_0)

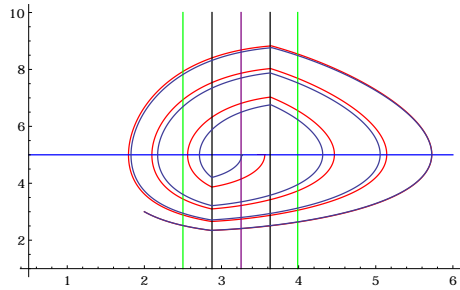


Figura 2.44: Zona Quasi-Deslizante

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (2, 8)$.

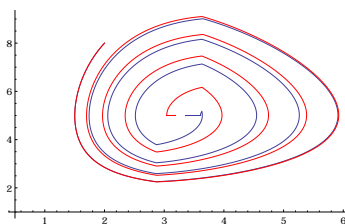


Figura 2.45: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

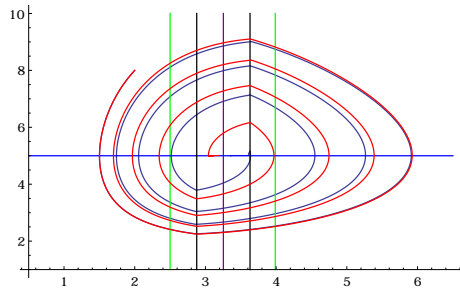


Figura 2.46: Zona Quasi-Deslizante

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (3.5, 10)$.

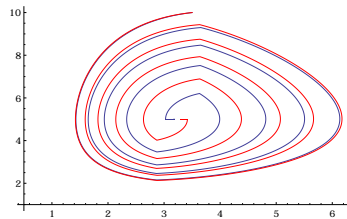


Figura 2.47: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

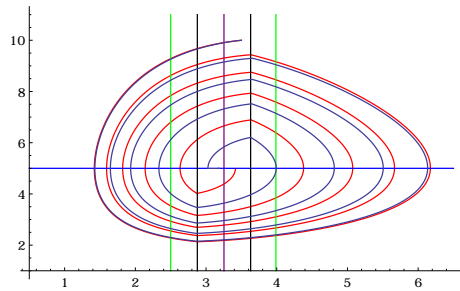


Figura 2.48: Zona Quasi-Deslizante

2. Para o conjunto de parâmetros: $a = 2$; $b = c = 0.3$, $d = 0.4$ e $e = 0.5$ têm-se:

N_2	η_0	σ	N_{2M}	P^*	z_{eq}^{sl}
1.3333	2.17002	0.418342	3.985	6.66667	(2.17002, 6.66667)

Tabela 2.15: 2º Conjunto de Valores

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (4, 4)$.

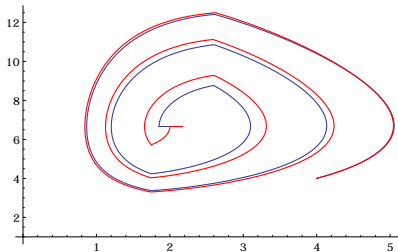


Figura 2.49: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

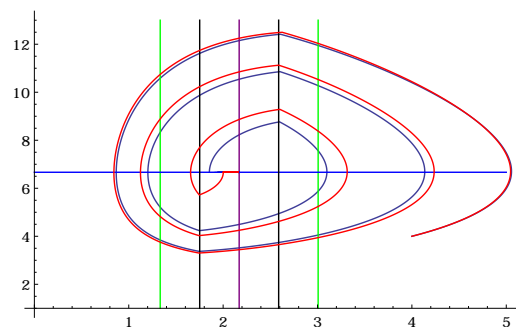


Figura 2.50: Zona Quasi-Deslizante

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (3.5, 3)$.

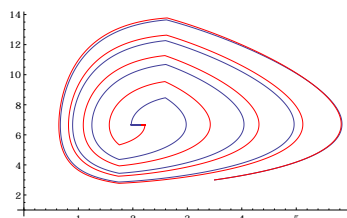


Figura 2.51: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

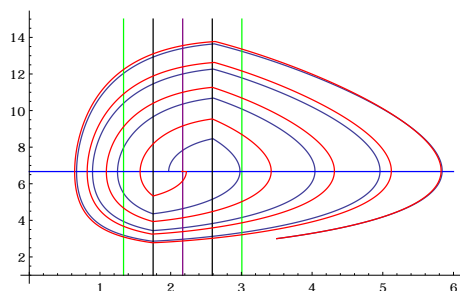


Figura 2.52: Zona Quasi-Deslizante

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (2, 3)$.

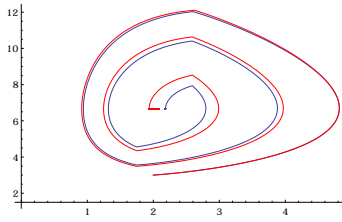


Figura 2.53: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

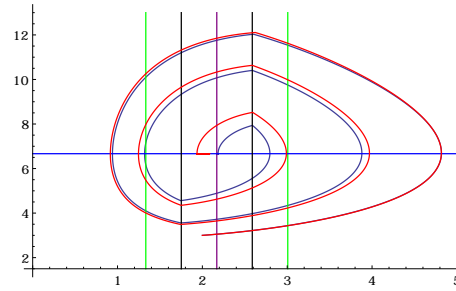


Figura 2.54: Zona Quasi-Deslizante

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (0.5, 5)$.

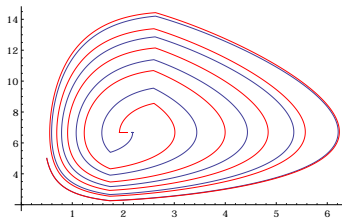


Figura 2.55: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

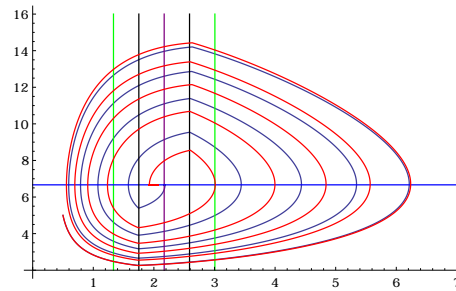


Figura 2.56: Zona Quasi-Deslizante

- Ponto Inicial $(N_0, P_0) = (1, 2)$.

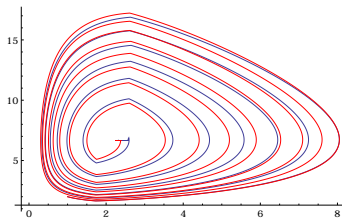


Figura 2.57: Comparação de Trajetórias de (N_0, P_0)

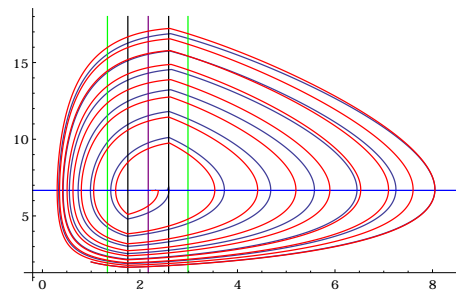


Figura 2.58: Zona Quasi-Deslizante

Comparação dos Sistemas com Controle nos Predadores

A natureza dos pontos de equilíbrio de ambos os sistemas é semelhante apesar da classificação dos pontos do método proposto seja um pouco menos direta do que a proposta por Meza. Comparando os gráficos obtidos para ambos os sistemas, verifica-se que a nossa proposta aparenta convergir mais rapidamente para o ponto de equilíbrio de deslizamento z_{eq}^{sl} . Este facto verifica-se mais facilmente quando os pontos estão relativamente longe da zona quasi-deslizante. Assim em sistemas em que a rapidez para atingir o ponto de equilíbrio seja fundamental, o sistema proposto aparenta ser o melhor. Na maioria dos gráficos apresentados, menos iterações faria a trajetória do ponto representativo estar mais longe de z_{eq}^{sl} .

Capítulo 3

Aplicações ao Ensino Secundário

Neste capítulo abordaremos como podemos aplicar o modelo de Lotka-Volterra no ensino secundário e para melhor abordagem apresentam-se os seguintes exercícios:

Exercício 1: Seja P_k o número de predadores (densidade) no instante k num determinado ecossistema perante a ausência de presas. O número de predadores ao longo do tempo é dado pela seguinte lei:

$$P_{k+1} = (1 - \gamma)P_k, \quad k \geq 0, \quad 0 < \gamma < 1 \text{ e } P_0 > 0. \quad (3.1)$$

1. A sucessão $(P_k)_{k \geq 0}$ é a solução de (3.1) com P_0 o número inicial de predadores.

Mostre que a sucessão P_k é:

- (a) monótona decrescente;
- (b) limitada;
- (c) convergente e $\lim P_k = 0$.
- (d) Explique por palavras suas o que isso significa biologicamente.

Exercício 2: Seja N_k o número de presas no instante k num determinado ecossistema perante a ausência de predadores. O número de presas ao longo do tempo é dado pela seguinte lei:

$$N_{k+1} = (1 + \alpha)N_k, \quad k \geq 0 \text{ e } 0 < N_0 < 1. \quad (3.2)$$

1. A sucessão $(N_k)_{k \geq 0}$ é a solução de (3.2) com N_0 o número inicial de presas e $\alpha > 0$.

Mostre que a sucessão N_k é:

- (a) monótona crescente;
- (b) não é limitada e $\lim N_k = \infty$.
- (c) Explique por palavras suas o que isso significa biologicamente.

Resolução dos exercícios.

1. Exercício 1.

- (a) Vamos mostrar por indução que a sucessão $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ é decrescente.
 - Primeiro precisamos de mostrar que $P_1 - P_0 < 0$.

$$P_1 - P_0 = (1 - \gamma)P_0 - P_0 = -\gamma P_0$$

Como $0 < \gamma < 1$ e $P_0 > 0$, tem-se que $P_1 - P_0 < 0$.

- Agora precisamos de mostrar que se $P_k - P_{k-1} < 0$ então $P_{k+1} - P_k < 0$ para todo o $k > 1$.

$$P_{k+1} - P_k = (1 - \gamma)P_k - (1 - \gamma)P_{k-1} = (1 - \gamma)(P_k - P_{k-1})$$

Como por hipótese $P_k - P_{k-1} < 0$ e $0 < \gamma < 1$ temos $P_{k+1} - P_k < 0$. Portanto a sucessão é decrescente.

- (b) Agora precisamos de mostrar que a sucessão é limitada, isto é, existe um a e um b tais que $a < P_k < b$ para todo o $k \in N_0$.

Na alínea anterior, provou-se que a sucessão P_k é monótona decrescente, isto é: para todo o k temos:

$$\dots < P_{k+2} < P_{k+1} < P_k < P_{k-1} < \dots < P_1 < P_0,$$

ou seja, o majorante desta sucessão é P_0 e o minorante é 0 . Assim $0 < P_k < P_0$ para todo o $k \in N$ e a sucessão é limitada.

- (c) Existe um teorema que diz que toda a sucessão monótona e limitada é convergente. Uma vez que, de acordo com as alíneas anteriores, (P_k) é monótona e limitada, concluímos que é convergente. Seja $E = \lim P_k$. Como $\lim P_{k+1} = \lim P_k = E$, concluímos que

$$\begin{aligned} E &= \lim P_{k+1} = \lim(1 - \gamma)P_k = (1 - \gamma) \lim P_k = (1 - \gamma)E \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E = (1 - \gamma)E \Leftrightarrow E - E + \gamma E = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Logo concluímos que $\lim P_k = 0$.

- (d) Biologicamente se estamos perante um cenário em que os predadores não têm alimento isso levará à sua extinção.

2. Exercício 2.

- (a) Vamos mostrar por indução que a sucessão $(N_k)_{k \in N_0}$ é crescente.

- Primeiro precisamos de mostrar que $N_1 - N_0 > 0$.

$$N_1 - N_0 = (1 + \alpha)N_0 - N_0 = \alpha N_0$$

Como $0 < N_0 < 1$ e $\alpha > 0$ tem-se que $N_1 - N_0 > 0$.

- Agora precisamos de mostrar que se $N_k - N_{k-1} > 0$ então $N_{k+1} - N_k > 0$ para todo o $k > 1$

$$\begin{aligned} N_{k+1} - N_k &= (1 + \alpha)N_k - (1 + \alpha)(N_{k-1}) = \\ &= (1 + \alpha)(N_k - N_{k-1}) \end{aligned}$$

Como por hipótese $N_k - N_{k-1} > 0$ e $\alpha > 0$ temos $N_{k+1} - N_k > 0$. Portanto a sucessão é crescente.

- (b) Agora precisamos de mostrar que a sucessão não é limitada. Se fosse, existiria um α e um b tais que $\alpha < N_k < b$ para todo o $k \in \mathbb{N}_0$.

Na alínea anterior, provou-se que a sucessão N_k é monótona crescente, isto é: para todo o k temos:

$$N_0 < N_1 < \dots < N_{k-1} < N_k < N_{k+1} < N_{k+2} < \dots,$$

ou seja, o minorante desta sucessão é N_0 .

Tem-se

$$\lim N_k = \lim(1 + \alpha)^k N_0 = \infty.$$

pois $\alpha > 0$ e $N_0 > 0$ logo N_k não é majorada.

- (c) Biologicamente perante a ausência de predadores, as presas crescerão indefinidamente, enquanto o ecossistema permitir (apesar da limitação do ecossistema não estar presente na equação).

Bibliografia

- [Ban15] A. Mehta; B. Bandyopadhyay. *Preliminaries of Sliding Mode Control*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, 2015. 1, 3, 14, 16, 18, 19, 20
- [Bay11] Magno Meza; Amit Baya. Controlling predator-prey discrete dynamics utilizing a threshold policy with hysteresis. *Applied Mathematics and computation*, 2011. 2, 38, 47, 52, 55
- [Dra69] B. Drazenovic. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, (5):287-295, 1969. 14
- [Dra89] V.I. Utkin; S. V. Dracunov. On discrete-time sliding modes control. In *Proceedings of IFAC Conference on nonlinear control*, pages 484-489, Capri, Italy, 1989. 1, 19
- [Ela05a] Saber Elaydi. *Discrete Chaos: with Applications in Science and Engineering*. Chapman and Hall/ CRC, 2 edition, 2005. 6, 10
- [Ela05b] Saber Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer, 2005. 3
- [Eme67] S.V. Emelyanov. Variable structure control system. *Nauka, Moscow*, 1967. 1, 14
- [Fil60] A.F. Fillipov. Differential equations with discontinuous right-hand side. 58(93):99-128, 1960. 1, 16
- [Fil88] A.F. Fillipov. *Differential Equations with discontinuous right-hand sides*. Kluwer, Dordrecht, 1988. 1, 16
- [Hol83] T. Guckenheimer ; P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York, 1983. 6
- [Hom05] Cars Hommes. Heterogeneous agents models: two simple examples. *Nonlinear Dynamical Systems In Economics.*, pages 131-164, 2005. 6
- [Itk76] U. Itkis. *Control Systems of Variable Structure*. Wiley, New York, 1976. 18
- [Kao05] Chih-Cheng Kao. Surveys of discrete-time variable structure control. *International Conference on Systems and Signals*, 2005. 1, 3, 20
- [Kas05] Magno Meza; Amit Baya; E. Kaszkurewicz. Controller design techniques for the lotka-volterra nonlinear system. *Revista Controle e Automação*, 16(7), Abril, Maio e Junho 2005. 1, 38
- [Koc91] T. Hale; H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. New York, 1991. 6
- [Lam05] Giano Italo Bischi; Fabio Lamantia. Coexisting attractors and complex basins in discrete-time economic models. *Nonlinear Dynamical Systems In Economics*, pages 165-186, 2005. 3
- [L.H00] M.I.S. Costa; E. Kaskhurewicz; A. Baya; L. Hsu. Achieving global convergence to an equilibrium population in predator-prey systems by the use of a discontinuous harvesting policy. *Ecological Modelling*, (128):89-99, 2000. 38

- [Li14] Jessica Li. Control schemes to reduce risk of extinction in the lotka-volterra predator-prey model. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2:644-652, 2014. 1, 38
- [Liu01] Saber Elaydi; PingZhou Liu. Discrete competitive and cooperative models of lokta-volterra type. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 3(1):53-73, 2001. 1, 23
- [Lyg04] Jonh Lygeros. *Lecture Notes on Hybrid Systems*. University of Patras, Rio,Patras, GR-26500,Greece, Frebruary 2004. 1, 13
- [MAC04] MAC. *Notas de aula de MAC0329*, 2004. 68
- [Mez04] Magno Meza. Sistemas não lineares do tipo predador-presa: Projeto de controles via funções de liapunov. Master's thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Abril 2004. 18
- [Mic02] Ronald E. Mickens. Nonstandard finite difference models of differential equations. *Journal of difference equations and applications*, 8(9):823-847, 2002. 1, 23, 25
- [Mil85] C. Milosavljevic. General conditions for the existence of quasi sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems. *Autom Remote Control*, 46:307-314, 1985. 19
- [Mur02] J.D. Murray. *Mathematical Biology:I. An Introduction.*, volume 17. Springer, third edition edition, 2002. 1, 23
- [Pad93] António J. Gil Padilla. *Sistemas Digitais*. Macgraw Hill, 1 edition, 1993. 68
- [Shu99] Arjan Shaft; H. Shumacher. *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, 1999. 1, 3, 11, 13, 16
- [Utk78] V. I. Utkin. *Sliding Modes and their application in variable structure systems*. MIR Publishers Moscow, 1978. 1, 3, 18, 19

Apêndice A

A.1 Conceitos sobre Cálculo Matricial

Vamos apresentar alguns conceitos relativamente ao cálculo matricial com o objetivo de referirmos alguns resultados relevantes para análise de sistemas de equações às diferenças.

Relembremos o conceito de função linear. Seja $F \subset \mathbb{R}^N$ e $T : F \rightarrow F$, uma aplicação linear. Então T satisfaz as seguintes relações:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y)$;
2. $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

Existem dois subespaços importantes numa aplicação linear, o $Ker(T)$ e $Im(T)$.

Definição A.1.1. O *Kernel* de T , ou o seu núcleo é o conjunto

$$Ker(T) = \{x \in F : T(x) = 0\} = T^{-1}(0).$$

Definição A.1.2. A Imagem de T é o conjunto

$$Im(T) = \{y \in F : T(x) = y \text{ para algum } x \in F\} = T(F).$$

Seja $F \subset \mathbb{R}^N$. Um conjunto $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ de vetores de F diz-se *linearmente independente* se $\sum_{i=1}^k t_i v_i = 0$ é equivalente a $t_i = 0$, para todo $i = \{1, \dots, k\}$.

O conjunto S diz-se uma *base* de F se este contém o número mínimo de vetores capazes de gerar F . Isto é, S diz-se *gerador* de F , se cada vector de F pode ser escrito como soma direta de vetores de S : $u = \sum_{i=1}^k t_i v_i, t_i \in \mathbb{R}$.

Uma propriedade importante do $Ker(T)$ é a seguinte:

” T é injectiva se e só se $Ker(T) = \{0\}$.”

Dada uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in Ker(T) \text{ se e só se } bT(x) = \vec{0}$$

Isto é, $Ker(T)$ é o espaço solução do sistema.

Qualquer aplicação linear T pode ser identificada com uma matriz A cujas colunas são determinadas da seguinte forma: $T(e_i) = A \cdot e_i$ para os elementos $e_i, \{1, \dots, N\}$ que formam uma base de \mathbb{R}^N ,

$$T = A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Note-se que $Det(T) \neq 0$ implica o $Ker(T) = \{0\}$ e é equivalente a T ser invertível.

Definição A.1.3. Um número real λ diz-se *valor próprio* se existir um vector $x \neq \vec{0}$ tal que $A \cdot x = \lambda x$. Este vector x designa-se *vector próprio* associado ao valor próprio λ .

A condição para um escalar λ ser um valor próprio de A é: $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$. O conjunto $\text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$ é o espaço próprio de λ e consiste em todos os vectores próprios associados a λ , juntamente com o vector nulo.

Encontrar os valores próprios de A é encontrar os números λ que verificam a condição

$$P(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I) = 0.$$

$P(\lambda)$ designa-se por polinómio característico de A e as suas raízes são os valores próprios de A .

Consideremos um sistema linear com duas variáveis dependentes e autónomas. Vamos apresentar alguns comportamentos das soluções do sistema

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (\text{A.1})$$

onde $V \subset \mathbb{R}^2$, $A : V \rightarrow V$ tendo em consideração as raízes do polinómio característico associado a A .

Definição A.1.4. Sejam λ_1 e λ_2 os dois valores próprios associados a $P(\lambda)$.

1. Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e
 - (a) se $0 < |\lambda_1| < 1$, $0 < |\lambda_2| < 1$, então o ponto de equilíbrio de (A.1) é assintoticamente estável e designa-se por *poço*;
 - (b) se $0 < |\lambda_i| < 1 < |\lambda_j|$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$ então o ponto de equilíbrio designa-se por *ponto sela*.
2. Se os valores próprios forem complexos eles são da forma $\lambda_k = \alpha \pm \beta i$, $\beta > 0$, $k = 1, 2$ e a natureza do ponto de equilíbrio depende de $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.
 - (a) Se $|\lambda_1| = 1$ o ponto de equilíbrio diz-se estável e designa-se por *centro*;
 - (b) Se $|\lambda_1| < 1$ o ponto de equilíbrio diz-se assintoticamente estável e designa-se por *foco estável*;
 - (c) Se $|\lambda_1| > 1$ o ponto de equilíbrio diz-se instável e designa-se por *foco instável*.

A.2 Algoritmo

Nesta secção vamos apresentar os algoritmos utilizados ao longo do trabalho. O primeiro chama-se *Orbita* e o segundo chama-se *OrbitaM*. A única diferença entre eles é que no primeiro trabalha-se com a função f_2 que corresponde à função dos predadores do modelo proposto pelos autores e f_3 é a função proposta por Meza.

As entradas nos programas têm o seguinte significado:

- n_0 número de presas no instante inicial;
- p_0 número de predadores no instante inicial;
- k número de iterações;

- η valor limite das presas;
- σ limite da banda;
- f_1 é 1ª função do sistema que representa a variação das presas;
- f_2 é 2ª função do sistema que representa a variação dos predadores;
- f_3 é a 2ª função do sistema de Meza que representa os predadores.
- $\alpha, \beta, \xi, \gamma$ são os parâmetros dos sistemas

```

Orbita[n0_, p0_, η_, σ_, k_, ε_, α_, β_, ξ_, γ_] :=
Module[{l, l1},
R[0] = N0; P[0] = p0;
l = {{R[0], P[0]}};
S[0] = R[0] - η;
For[i = 1, i ≤ k, i ++,
R[i] = f1[α, β, R[i - 1]];
S[i] = R[i] - η;
Which[S[i] > σ|((S[i] - S[i - 1]) ≥ 0 && S[i] ≥ -σ),
P[i] = f2[α, β, ξ, γ, 0, R[i - 1]]
S[i] < -σ|((S[i] - S[i - 1]) < 0 && S[i] ≤ σ),
P[i] = f2[α, β, ξ, γ, ε, R[i - 1]],
True, Print["O sistema tem cycles"];
l1 = Append[l, {R[i], P[i]}];
l = l1;
];
Print[l];
]

```

```

OrbitaM[n0_, p0_, η_, σ_, k_, ε_, α_, β_, ξ_, γ_] :=
Module[{l, l1},
R[0] = N0; P[0] = p0;
l = {{R[0], P[0]}};
S[0] = R[0] - η;
For[i = 1, i ≤ k, i ++,
R[i] = f1[α, β, R[i - 1]];
S[i] = R[i] - η;
Which[S[i] > σ|((S[i] - S[i - 1]) ≥ 0 && S[i] ≥ -σ),
P[i] = f3[α, β, ξ, γ, 0, R[i - 1]]
S[i] < -σ|((S[i] - S[i - 1]) < 0 && S[i] ≤ σ),
P[i] = f3[α, β, ξ, γ, ε, R[i - 1]],
True, Print["O sistema tem cycles"];
l1 = Append[l, {R[i], P[i]}];
l = l1;
];
Print[l];
]

```

A.3 Variáveis Booleanas

Neste apêndice pretende-se mostrar apenas o conceito formal de variáveis booleanas e o de chaveamento ou comutação. Pois este conceito será utilizado ao longo da tese. Em 1854, George Boole introduziu o formalismo que até hoje se usa para o tratamento sistemático da lógica, que é a chamada Álgebra Booleana.

Definição A.3.1. Uma *Álgebra Booleana* pode ser definida como um conjunto de operadores e um conjunto de axiomas, que são assumidos verdadeiros sem necessidade de prova.

Em 1938, C. E. Shannon aplicou esta Álgebra para mostrar que as propriedades de circuitos elétricos com chaveamento podem ser apresentadas por uma Álgebra Booleana com dois valores. As Variáveis Booleanas só podem assumir um número finito de valores. Em particular na Álgebra Booleana de dois valores, cada variável pode assumir um de entre dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por [F, V] (falso ou verdadeiro), [H, L] (high and Low) ou ainda [0, 1]. O número de valores que cada variável pode assumir é finito e pequeno, assim como, o número de estados que uma função Booleana pode assumir. O que significa que podemos descrever completamente as funções Booleanas utilizando (*tabelas verdade*).

Definição A.3.2. Chama-se *tabela verdade* à tabela onde são listadas todas as combinações de valores que as variáveis de entrada podem assumir e os correspondentes valores da função (saídas).

Uma *tabela verdade* consiste basicamente num conjunto de colunas nas quais são listadas todas as combinações possíveis entre as variáveis de entrada (à esquerda) e o resultado da função (à direita). Ver [Pad93].

Circuitos de chaveamento ou Comutação

No quotidiano deparamo-nos com dispositivos físicos de dois estados tais como interruptores, contatos, diodos, transistores, etc. Dependendo do dispositivo em questão, eles podem tomar os estados ligado/desligado, conduzindo/não conduzindo, fechado/aberto, carregado/descarregado, magnetizado/não magnetizado, alto-potencial/baixo-potencial, etc. Vários circuitos podem ser formados com esses dispositivos tais como circuitos de computadores eletrónicos, sistemas de chaveamento telefónico, dispositivos ou sistemas de controle em geral (elevador, display digital, etc). Num circuito elétrico, uma chave é um dispositivo ligado a um ponto do circuito e que pode tomar um dos dois estados, fechado ou aberto. No estado fechado, a chave permite que a corrente passe através do ponto, enquanto que no estado aberto nenhuma corrente passa através do ponto. O estado fechado (respec., aberto) pode ser referenciado por 1 (respec., 0) e as chaves podem ser representadas por letras como x, y, z, etc. Dois pontos P e Q (inicial e final) estão ligados por um circuito de chaveamento ou comutação se estes estão ligados por um circuito (linhas) no qual está localizado um número finito de chaves. A disposição dos fios e das chaves no circuito determina alguns tipos de circuitos. [MAC04].

Glossário

\LaTeX Conjunto de macros para o processador de textos \TeX , utilizado amplamente para a produção de textos matemáticos e científicos devido à sua alta qualidade tipográfica.

