

**Transferência Orbital Não Coplanar Baseada  
No Controle  $H_\infty$   
(Versão Final Após Defesa)**

**Luís Gabriel Flores Andrade**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia Aeronáutica**  
(ciclo de estudos integrado)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

**março de 2023**



# Declaração de Integridade

Eu, Luís Gabriel Flores Andrade, que abaixo assino, estudante com o número de inscrição 39377 de/o Mestrado Integrado em Engenharia Aeronáutica da Faculdade Engenharias, declaro ter desenvolvido o presente trabalho e elaborado o presente texto em total consonância com o **Código de Integridades da Universidade da Beira Interior**.

Mais concretamente afirmo não ter incorrido em qualquer das variedades de Fraude Académica, e que aqui declaro conhecer, que em particular atendi à exigida referenciação de frases, extratos, imagens e outras formas de trabalho intelectual, e assumindo assim na íntegra as responsabilidades da autoria.

Universidade da Beira Interior, Covilhã 24/03/2023

(assinatura conforme Cartão de Cidadão ou preferencialmente assinatura digital no documento original se naquele mesmo formato)



# Agradecimentos

Em primeiro lugar tenho de agradecer à minha mãe por me apoiar em todas as decisões que tenho vindo a fazer no meu percurso académico bem como o apoio que me proporciona sempre que os momentos menos bons surgem. Agradecer também aos meus irmãos e padrasto por sempre me apoiarem.

Ao Prof. Doutor Kouamana Bousson por me ter ajudado e ter partilhado comigo o seus conhecimentos nas mais diversas áreas. Desde aspetos científicos necessários para a realização desta dissertação ou mesmo sobre aspetos sobre o funcionamento do mundo em que atualmente vivemos. Agradeço-lhe por todos os bons momentos e boa disposição que sempre demonstrou e teve para comigo.

Aos meus amigos que sempre estiveram disponíveis para me ajudar e auxiliar em qualquer altura, por sempre terem tempo para conversar, por não desistirem de mim, um muito obrigado.

Um obrigado especial ao Eng. A. Caria por estar sempre disponível para me ouvir e ensinar independentemente do momento e do tipo de pergunta que me possa ocorrer.

Por último, a todas as pessoas que direta ou indiretamente estiveram presentes na minha vida académica e que me permitiram ter, nestes cinco anos e meio, todo o tipo de vivências que me fizeram crescer enquanto pessoa.



# Resumo

A transferência orbital é um elemento indispensável para qualquer missão espacial. Missões como a reparação, manutenção, intercessão, montagem de estruturas em grande escala ou formação de redes de satélites dependem diretamente do sucesso da transferência orbital que lhes está associada. Durante os últimos anos, o problema da transferência orbital tem sido abordado como parte do problema de *rendezvous* e raramente como um problema isolado.

O foco desta dissertação é a elaboração de um controlador robusto  $H_\infty$  para ser aplicado no problema de transferência orbital entre duas órbitas não coplanares onde são consideradas perturbações externas e limitações nos atuadores.

Inicialmente vai ser definido o modelo dinâmico utilizado para descrever o movimento relativo do veículo espacial na órbita de transferência. Existem dois modelos dinâmicos que podem ser utilizados que são as equações de Hill-Clohessy-Wiltshire (C-W) e as equações de Tschauner-Hempel (T-H). O modelo escolhido foi as equações T-H que permitem uma excentricidade da órbita arbitrária mas que só são válidas quando o veículo está na vizinhança da órbita. De seguida, é apresentado o modelo utilizado para determinar a trajetória de transferência, nomeadamente o Problema de Lambert, e os diversos elementos matemáticos que são necessários para fazer a conexão entre o modelo dinâmico e a trajetória de transferência.

Nos capítulos seguintes, é apresentado o modelo matemático para a elaboração do controlador robusto  $H_\infty$  bem como a sua implementação em dois exemplos práticos. Os resultados obtidos nos exemplos práticos são bastante satisfatórios tendo em conta as características do modelo implementado. Ou seja, o controlador desenvolvido apresenta robustez para ser aplicado em movimentos de transferência orbital.

## Palavras-chave

Transferência Orbital, Controlador Robusto  $H_\infty$ , Equações de Tschauner-Hempel (T-H), Problema de Lambert



# Abstract

Orbital transfer is an indispensable element for any space mission. Missions such as repair, maintenance, intersection, large-scale structure assembly, and satellite network formation depend directly on the success of the associated orbital transfer. During the last few years, the orbital transfer problem has been addressed as part of the *rendezvous* problem and rarely as a stand-alone problem.

This dissertation focuses on the development of a robust  $H_\infty$  controller to be applied to the orbital transfer problem between two non-coplanar orbits where external perturbations and actuator constraints are considered.

Initially, the dynamic model used to describe the relative motion of the spacecraft in the transfer orbit will be defined. There are two dynamic models that can be used which are the Hill-Clohessy-Wiltshire (C-W) equations and the Tschauner-Hempel (T-H) equations. The model chosen was the T-H equations that allow an arbitrary eccentricity of the orbit but are only valid when the vehicle is in the vicinity of the orbit. Next, the model used to determine the transfer path, namely the Lambert Problem, and the various mathematical elements that are needed to make the connection between the dynamic model and the transfer path are presented.

In the following chapters, the mathematical model for the elaboration of the robust controller  $H_\infty$  is presented as well as its implementation in two practical examples. The results obtained in the practical examples are quite satisfactory considering the characteristics of the implemented model. That is, the developed controller presents robustness to be applied in orbital transfer movements.

## Keywords

Orbital Transfer,  $H_\infty$  Robust Controller , Tschauner-Hempel (T-H) Equations, Lambert's Problem



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Transferência Orbital . . . . .	2
1.2	Perturbações no Espaço . . . . .	4
1.3	Revisão Bibliográfica . . . . .	6
1.4	Limitações dos Métodos . . . . .	8
1.5	Objetivo . . . . .	8
1.6	Plano da Dissertação . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Fundamentos Teóricos</b>	<b>11</b>
2.1	Modelo Dinâmico . . . . .	11
2.2	Definição da Órbita de Transferência . . . . .	15
2.2.1	Estudo das Órbitas . . . . .	15
2.2.2	Problema de Lambert . . . . .	16
2.2.3	Estudo da Órbita de Transferência . . . . .	18
2.3	Interpolação de Dados da Órbita de Transferência . . . . .	19
2.4	Simulação das Perturbações Espaciais . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Fundamentos de Controle de Sistemas</b>	<b>21</b>
3.1	Dinâmica de Sistemas . . . . .	21
3.2	Estabilidade, Controlabilidade e Observabilidade . . . . .	22
3.2.1	Estabilidade . . . . .	22
3.2.2	Controlabilidade . . . . .	22
3.2.3	Observabilidade . . . . .	23
3.2.4	Controlo Ótimo Quadrático de Sistemas Multivariáveis - LQR . . . . .	23
3.3	Controlador Robusto $H_\infty$ . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Implementação do Controlador Robusto</b>	<b>33</b>
4.1	Modelo Dinâmico . . . . .	33
4.2	Considerações Iniciais . . . . .	35
4.3	Exemplos Numéricos . . . . .	37
4.4	Simulações Numéricas do Sistema Controlado . . . . .	39
4.4.1	Exemplo A . . . . .	39
4.4.2	Exemplo B . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Conclusão e Trabalho Futuro</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>65</b>



# Lista de Figuras

1.1	Planeta Terra - mapa de relevo [1]	6
2.1	Sistema de coordenadas para deduzir as equações T-H [2]	12
2.2	Elementos Orbitais [3]	16
2.3	Problema de Lambert [3]	17
2.4	Distribuição Normal ou Gaussiana [4]	20
3.1	Esquema do controlador $H_\infty$ [5]	29
4.1	Órbitas Exemplo A	38
4.2	Órbitas Exemplo B	38
4.3	Distância relativa em x, y e z em cada eixo	41
4.4	Distância relativa 3D	41
4.5	Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo	41
4.6	Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo	42
4.7	Velocidade relativa 3D	42
4.8	Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo	42
4.9	Distância relativa em x, y e z em cada eixo	43
4.10	Distância relativa em 3D	43
4.11	Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo	43
4.12	Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo	44
4.13	Velocidade relativa 3D	44
4.14	Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo	44
4.15	Controlo em x	45
4.16	Controlo em y	45
4.17	Controlo em z	45
4.18	Distância relativa em x, y e z em cada eixo	46
4.19	Distância relativa	46
4.20	Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo	46
4.21	Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo	47
4.22	Velocidade relativa 3D	47
4.23	Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo	47
4.24	Controlo em x	48
4.25	Controlo em y	48
4.26	Controlo em z	48
4.27	Distância relativa em x, y e z em cada eixo	50
4.28	Distância relativa em 3D	50
4.29	Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo	50
4.30	Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo	51
4.31	Velocidade relativa 3D	51

4.32 Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo . . .	51
4.33 Distância relativa em x, y e z em cada eixo . . . . .	52
4.34 Distância relativa em 3D . . . . .	52
4.35 Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo . . . .	52
4.36 Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo . . . . .	53
4.37 Velocidade relativa 3D . . . . .	53
4.38 Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo . . .	53
4.39 Controle em x . . . . .	54
4.40 Controle em y . . . . .	54
4.41 Controle em z . . . . .	54
4.42 Distância relativa em cada eixo em função do tempo . . . . .	55
4.43 Distância relativa . . . . .	55
4.44 Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo . . . .	55
4.45 Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo . . . . .	56
4.46 Velocidade relativa 3D . . . . .	56
4.47 Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo . . .	56
4.48 Controle em x . . . . .	57
4.49 Controle em y . . . . .	57
4.50 Controle em z . . . . .	57

# Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros utilizados para cada exemplo simulado . . . . .	38
-----	--	----



## Lista de Acrónimos

UBI	Universidade da Beira Interior
C-W	Equações de Clohessy-Wiltshire
CSA	Canadian Space Agency
ESA	European Space Agency
LEO	Low Earth Orbits
LQR	Linear Quadratic Regulator
NASA	National Aeronautics and Space Administration
T-H	Equações de Tschauner-Hempel



# Nomenclatura

Símbolo	Descrição
$\vec{R}$	Vetor de origem no centro de gravidade do sistema e termina no target [km]
$\vec{r}$	Vetor de origem no target e termina no chaser [km]
$\vec{v}$	Vetor de velocidade do satélite [km/s]
$\mu$	Constante gravitacional [km <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> ]
$\vec{a}_t, \vec{a}_c$	Acelerações devido a forças externas aplicadas no target e no chaser respectivamente [km/s <sup>2</sup> ]
$\vec{a}_f$	Aceleração que os propulsores aplicam no chaser [m/s <sup>2</sup> ]
$\omega$	Velocidade angular da órbita de referência [Rad/s]
$h$	Momento angular específico [km <sup>2</sup> /s]
$e$	Excentricidade
$i$	Inclinação [Rad]
$\Omega$	Ascensão reta do nodo ascendente [Rad]
$w$	Argumento do perigeu [Rad]
$v$	Anomalia verdadeira [Rad]
[Q]	Matriz de rotação
$\Delta t$	Tempo de transferência [seg.]
$T$	Período da órbita [seg.]
$r_p$	Raio de perigeu [km]
$Me$	Anomalia média [Rad]
$\mu$	Média da distribuição normal
$\sigma^2$	Variância da distribuição normal
$x(t)$	Vetor de estado do sistema
$u(t)$	Vetor de variáveis de controlo de entrada no sistema
$y(t)$	Vetor de variáveis de saída do sistema
$A$	Matriz do sistema
$B$	Matriz de entrada
$C$	Matriz de saída
$C_0$	Matriz de controlabilidade
$\Theta$	Matriz de observabilidade
$n$	Dimensão do espaço de estado
$u$	Função de controlo
$K$	Matriz de ganho do sistema
$Q$	Matriz simétrica e positivamente semi-definida

$R$	Matriz simétrica e positivamente definida
$P$	Solução da equação de Riccati
$B_w$	Matriz de perturbações
$w(t)$	Vetor da função de perturbações
$x_0$	Vetor de condições iniciais
$dt$	Intervalo de tempo [seg.]
$x, y, z$	Componentes da posição [m]
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	Componentes da velocidade [m/s]

# Capítulo 1

## Introdução

Vivemos numa época de constante avanço científico e tecnológico. A humanidade procura aumentar o seu conhecimento nas diversas áreas da natureza e o universo não é exceção. Faz menos de um século que se iniciou a exploração espacial e neste curto intervalo de tempo já se alcançaram diversas proezas como a ida à Lua em 1969 no programa Apollo da NASA, a exploração de Marte ou mesmo a construção da estação espacial internacional que se iniciou em 1998. Tais feitos só foram possíveis com a colaboração de diversas entidades, empresas e países que se uniram para trabalhar e assim alcançar o mesmo objetivo, o exemplo mais recente é o telescópio espacial James Webb. Este telescópio, lançado em dezembro de 2021, representa o trabalho conjunto da NASA, ESA e CSA e tem o objetivo de explorar o espaço profundo.

A exploração espacial, devido às dificuldades e desafios que apresenta, é hoje um motor de desenvolvimento económico e tecnológico. Qualquer elemento que faça parte de um veículo espacial deve ser o mais fiável possível como, por exemplo, os sistemas de comunicação, os controladores, os sistemas de energia, ou propulsores entre outros. Assim, esta necessidade de aperfeiçoamento dos elementos tecnológicos relacionados com o setor espacial beneficia de forma direta e indireta o bem-estar das pessoas. Existem diversos exemplos como o sistema de GPS, as câmaras fotográficas de alta resolução ou mesmo a maior resistência que os elementos tecnológicos têm vindo a apresentar.

A incapacidade de controlar em tempo real qualquer equipamento que esteja fora da Terra leva a que seja necessário recorrer a meios autónomos e completamente independentes para se realizar qualquer missão no espaço. Desta forma, a utilização de ferramentas como a inteligência artificial, redes neuronais ou outros métodos de otimização autónomos está a aumentar de forma exponencial. A capacidade destes meios de planear trajetórias e desenvolver os comandos para o auto funcionamento sem a necessidade constante de serem corrigidos leva a que o sucesso da missão, a fiabilidade, a segurança e outros fatores sejam incrementados. Podem, mesmo assim, ocorrer erros nos próprios sistemas de controlo causados por diversos fatores como a falta de dados ou a incapacidade dos sistemas responderem da forma desejada aos comandos gerados pelos controladores o que coloca em risco toda a missão espacial, traduzindo-se em perdas de recursos financeiros e científicos. Assim, é essencial que o sistema seja robusto e que esteja preparado para agir de forma a prevenir que tais erros ocorram.

Qualquer missão espacial como reparação, transporte de carga e passageiros, acoplamento

de veículos espaciais, controlo e funcionamento de grandes estruturas modulares espaciais, constelações de satélites ou mesmo movimentos de *rendezvous* dependem diretamente do sucesso das diversas transferências entre as órbitas que lhes estão associadas. Nos últimos anos, a transferência orbital tem sido estudada como uma parte integrante do movimento de *rendezvous* e raramente como um problema isolado. De todos os artigos estudados neste trabalho os únicos que abordam este problema de forma direta são [6], [7] e [8], que vão ser discutidos na próxima secção. Desta forma, na presente dissertação, vai ser estudada e analisada a aplicação do controlo robusto  $H_\infty$  no problema de transferência orbital entre duas órbitas não coplanares. Assim, vamos definir inicialmente a órbita de transferência e, de seguida, aplicar um modelo dinâmico para simular essa órbita através do controlador projetado.

## 1.1 Transferência Orbital

A transferência orbital corresponde à sequência de ações que um veículo espacial tem de executar de forma a sair de uma órbita inicial e alcançar uma determinada órbita final, ou seja, corresponde ao percurso que se executa desde que se sai da órbita inicial até que se chega na órbita final. Este movimento resulta da atuação dos diversos dispositivos como o sistema propulsivo ou outros mecanismos, que vamos designar por atuadores, que estão presentes no veículo espacial. Os atuadores permitem que o vetor velocidade do veículo espacial seja alterado tanto em direção como em magnitude de forma a poder controlar o seu movimento no espaço.

A transferência orbital, tal como mencionado anteriormente, tem um papel muito importante no posicionamento dos veículos espaciais nas órbitas desejadas, na alteração e correção de órbitas e até mesmo nos movimentos de *rendezvous*. Assim, torna-se extremamente importante que esta manobra seja executada com bastante precisão e robustez de forma a que as perturbações a que o veículo está sujeito no espaço não provoquem a perda deste ou comprometam a sua missão.

Podemos dividir as transferências orbitais em duas categorias, as transferências coplanares e as não coplanares:

- Transferências coplanares – são as transferências mais comuns, mais estudadas e também as mais simples uma vez que a órbita final e a inicial pertencem ao mesmo plano. Estas transferências possuem um gasto energético muito baixo, quando só é considerado o modelo ideal sem perturbações, o que é um fator de bastante peso nas manobras executadas no espaço [6]. Dentro das transferências orbitais coplanares as principais são a transferência de Hohmann e a transferência bi-elíptica;
- Transferências não coplanares – são as transferências menos comuns uma vez que o plano da órbita inicial não é o mesmo que o plano da órbita final. Tal característica faz com que este movimento possua um gasto energético maior e seja mais complexo de se

idealizar e estudar.

Na presente dissertação vão ser utilizadas órbitas inicial e final não coplanares. Desta forma, a aplicabilidade do controlador é maior. Sabendo que a órbita inicial e a órbita final não são coplanares é necessário definir e analisar a trajetória que o veículo tem de percorrer de forma a fazer a transferência entre as duas órbitas. Existem poucos artigos que abordam diretamente este problema como [6], [7] e [8]. Lu Ting [6] demonstrou que a energia necessária para realizar a transferência orbital é mínima quando as órbitas inicial e final são coplanares. Demonstrou também que se as órbitas forem não coplanares é necessário realizar pelo menos dois gastos de energia (impulsos ou momentos instantâneos de propulsão) para realizar esse movimento. Gentry Lee [7] apresentou uma nova aproximação analítica ao problema da transferência orbital através de dois impulsos onde definiu um modelo para determinar a transferência ótima entre duas órbitas não coplanares. Em [8] é apresentado um modelo de três equações não lineares com três incógnitas que permitem definir a transferência orbital entre duas órbitas elípticas não coplanares onde é considerado também dois impulsos para realizar o movimento. Nestes estudos não foram consideradas as perturbações espaciais.

Por outro lado, podemos definir a órbita de transferência através do Problema de Lambert [9] [10] que é amplamente estudado e possui uma diversidade enorme de aplicações. O Problema de Lambert foi proposto por Johann Heinrich Lambert e a primeira demonstração matemática da sua resolução foi efetuada por Joseph-Louis Lagrange. Este algoritmo permite determinar uma órbita através de dois vetores de posição e o tempo que se demora a percorrer a órbita desde um desses pontos até ao outro. Este problema tem sido foco de grande estudo nos últimos anos uma vez que é uma ferramenta extremamente poderosa na determinação e na definição de órbitas sendo a base de alguns algoritmos cujo objetivo é o planeamento de missão, movimentos de *rendezvous*, intercessão de satélites e mísseis, definição de órbitas, entre outros [10] [11]. Existem diversos algoritmos diferentes para resolver o Problema de Lambert o que é uma vantagem na resolução de um determinado problema pois possibilita um leque maior de escolhas. Em [10] é apresentada e organizada uma revisão da extensa bibliografia do Problema de Lambert. Neste estudo são apresentados a maioria dos algoritmos que existem para resolver este problema e é realizada uma análise e comparação destes tendo em conta diversos parâmetros como o método de iteração ou a forma como se define os vetores velocidade, entre outros. Assim, para o problema proposto vamos aplicar o Problema de Lambert. Desta forma, é possível desenvolver um controlador que não depende do método escolhido para definir a órbita de transferência.

Para simular a órbita de transferência no controlador é necessário definir um modelo dinâmico composto por equações diferenciais. Vamos utilizar os modelos existentes para definir o movimento de *rendezvous* já que é constituído por transferências orbitais. Este movimento corresponde à sequência de ações que dois veículos espaciais têm de executar de formar a poderem encontrar-se no espaço num determinado tempo. Assim, a sua primeira fase corresponde ao posicionamento dos veículos espaciais na mesma órbita através de transferências orbitais. Este problema tem vindo a ser fortemente abordado nos últimos anos pois é im-

portante que o encontro entre dois objetos no espaço ocorra de forma segura, temos como exemplo as diversas idas à estação espacial internacional, onde qualquer falha pode resultar de perdas catastróficas. Para estudar a dinâmica deste movimento existem dois principais modelos de equações que podem ser aplicados, as equações de Hill-Clohessy-Wiltshire (C-W) e as equações de Tschauner-Hempel (T-H). As equações de C-W só são válidas para órbitas quase circulares [12] e as equações de T-H permitem que a órbita possua qualquer excentricidade desde que se esteja na vizinhança da órbita da trajetória. Assim, tendo em conta estas condições e o problema em estudo, vamos aplicar as equações T-H pois o veículo espacial vai estar sempre na vizinhança da órbita de transferência e porque estas equações permitem uma maior gama de aplicações para o controlador. Estes modelos de equações continuam a ser estudados de forma a tornarem-se mais eficientes e viáveis na sua aplicabilidade, por exemplo, em [11] foi estimada a manobra de *rendezvous* ótima entre órbitas Keplerianas utilizando as equações dinâmicas de Tschauner-Hempel e de um filtro de Kalman onde foi possível concluir que este filtro é uma ferramenta eficiente para a redução de erros de estimação da trajetória. Yamanaka e Ankersen [12] apresentam uma forma simplificada para a matriz que descreve o movimento relativo de dois veículos espaciais numa órbita elíptica, equações de T-H. Esta nova solução é válida para qualquer órbita elíptica e foi obtida através de uma função integral simples onde foi trabalhada a dinâmica do movimento orbital para resolver as equações diferenciais do movimento relativo.

## 1.2 Perturbações no Espaço

Na implementação de qualquer projeto de engenharia é necessário ter em conta que a natureza é muito mais complexa que os modelos utilizados na sua elaboração e, por essa razão, é necessário considerar as possíveis perturbações causadoras de falhas. No espaço existem diversos fatores causadores de perturbações na trajetória de um veículo espacial e que podem levar à perda deste ou ao seu mau funcionamento e resposta. Temos assim, como perturbações, a resistência atmosférica, a não esfericidade do planeta (achatamento da terra), os ventos solares, perturbações eletromagnéticas, a força de atração de outros corpos celestes (Sol, Lua, Júpiter, meteoros...), a pressão da radiação solar, entre outros. Destas perturbações mencionadas, as mais importantes são a resistência atmosférica e não esfericidade da Terra.

- Resistência provocada pela atmosfera

Esta resistência é causada pelas moléculas presentes na atmosfera que ao colidirem com a superfície do veículo espacial vão criar uma força oposta ao seu movimento, traduzindo-se numa diminuição da sua velocidade, ou seja, na diminuição da sua energia. Considera-se que existe resistência atmosférica em qualquer altitude abaixo dos 1500 km. A equação que define a aceleração da resistência provocada pela atmosfera é [13]:

$$a_D = \frac{1}{2}\rho V^2 \left( \frac{C_D A}{m} \right) \mathbf{i}_v \quad (1.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do ar,  $V$  é a velocidade do veículo em relação à atmosfera,  $C_D$  é o coeficiente de resistência adimensional,  $A$  é a área de secção transversal,  $m$  é a massa do veículo e  $\mathbf{i}_v$  é o vetor unitário da velocidade relativa do veículo em relação à atmosfera.

Podemos verificar que esta resistência depende diretamente da densidade da atmosfera ( $\rho$ ), do quadrado da velocidade do veículo ( $V^2$ ) e do coeficiente balístico ( $\frac{C_D A}{m}$ ) que resulta da geometria do veículo. Assim, quanto menor for a altitude da órbita ou maior a velocidade ou maior a dimensão do veículo maior peso vai ter este parâmetro nas perturbações. Resumidamente, a resistência atmosférica vai diminuir gradualmente a energia do veículo e conseqüentemente a altitude da órbita e a sua velocidade. Por esta razão, satélites como os GPS e os geostacionários têm de ter a sua órbita corrigida periodicamente.

- Achatamento da Terra

A rotação da Terra em torno do seu eixo fez com que os polos fossem mais achatados em comparação com a zona equatorial e assim o raio equatorial é maior que o raio nos polos. Ou seja, o planeta Terra não possui uma geometria totalmente esférica pois é achatada nos polos, Fig. 1.1, [13]. Para além disso, a Terra apresenta também muitas anomalias na distribuição de massa na sua superfície devido à existência de continentes, montanhas ou oceanos. Esta falta de simetria tem como consequência o facto de o centro de massa da Terra não corresponder ao seu centro geométrico (considerando uma esfera). Assim, a força gravítica que atua num corpo que órbita o planeta Terra vai variar com a latitude. O parâmetro adimensional que quantifica os efeitos do achatamento da Terra numa órbita é chamado  $J_2$  ("second zonal harmonic"). Este parâmetro depende das características do planeta como o achatamento, a massa e a rotação. Para a Terra o seu valor é de aproximadamente  $J_2 = 1.082 \times 10^{-3}$ . Existem elementos orbitais que são mais perturbados pelo achatamento da Terra, nomeadamente a ascensão reta do nodo ascendente ( $\Omega$ ) e o argumento do perigeu ( $w$ ) que vão ser abordados no próximo capítulo para definir as órbitas.

Por outro lado, a distribuição não simétrica de massa na superfície terrestre também provoca pequenas alterações na forma da órbita, ou seja, a órbita de um determinado veículo espacial pode torna-se irregular e alcançar desvios bastante significativos, na ordem de quilómetros.

Nos últimos anos, têm surgido diversos trabalhos que abordam os problemas causados por estas perturbações nos equipamentos dos veículos espaciais e nas suas órbitas de forma a diminuir qualquer risco de falha. Hamel e de Lafontaine [14] estudam a influência de  $J_2$  no

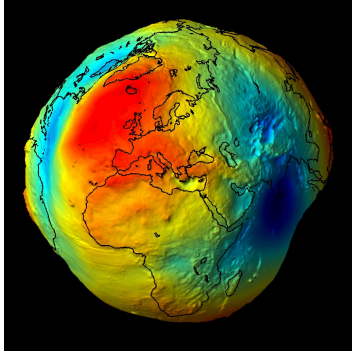


Figura 1.1: Planeta Terra - mapa de relevo [1]

movimento de um veículo espacial numa órbita elíptica bem como as alterações provocadas no seu período. Em [15] são considerados os efeitos de  $J_2$  e do efeito do calor em sistemas de satélites do tipo “tethered satellite system”. Em [16] é realizada uma comparação numérica da evolução temporal das soluções geradas por três métodos que descrevem o movimento de um satélite, onde foi considerada a perturbação  $J_2$ . Em [17] os autores apresentam uma alteração nas equações que definem o movimento de *rendezvous* descritas por Tschauner–Hempel de forma a considerarem as perturbações causadas pelo  $J_2$ .

### 1.3 Revisão Bibliográfica

Tal como já mencionado, qualquer missão espacial necessita de uma quantidade enorme de recursos financeiros e representa os interesses de diversas entidades. Por esta razão, a possibilidade de falha deve ser reduzida o máximo possível. Desde que se iniciou a exploração espacial têm vindo a ser efetuados esforços para estudar os sistemas de cada missão e assim assegurar o seu sucesso. Sendo a transferência orbital um movimento de enorme importância em qualquer missão, este movimento tem sido foco de estudo em diversas áreas onde se consideram parâmetros como a presença de perturbações, o consumo de combustível, a controlabilidade deste movimento, entre outros. Qualquer falha num destes parâmetros compromete a missão. Alguns dos estudos que envolvem diretamente a presença de perturbações e a forma como estas afetam a missão já foram mencionados anteriormente. De forma a diminuir o consumo de combustível necessário para realizar uma transferência orbital, existem diversos trabalhos que procuram otimizar este parâmetro de forma a torna-lo mais viável e sustentável, estudando fatores como as limitações dos propulsores ou a utilização de propulsores de baixa tração. Alguns exemplos destes trabalhos são o [18] onde é realizado um estudo sobre transferências orbitais utilizando sistemas propulsivos que geram pouca tração ( $0.1N$ ), cujo objetivo é maximizar a massa final. Os autores demonstram que é possível fazer uma transferência orbital de um veículo com  $1500kg$  e uma tração de  $0.1N$ . Herman e Spencer [19] apresentam uma técnica para otimizar os problemas de transferência orbital em torno da Terra considerando propulsores de baixa tração. Pardis e Carter [20] analisam os efeitos da saturação dos propulsores no movimento ótimo de *rendezvous* de um veículo espacial e demonstram que esta saturação provoca a diminuição da eficiência e performance do combustível. Desta forma, para diminuir estes problemas estudaram o efeito do

prolongamento do tempo de voo e o aumento do número de propulsores. Também em [21] é apresentado um modelo para a otimização das leis para a saturação dos atuadores. Em [22] é realizada uma comparação entre o método analítico, numérico e probabilístico de forma a obter o mínimo consumo de combustível entre manobras de transferência orbital de um veículo que sai de uma órbita na Terra e chega a uma órbita na Lua.

Uma vez que não é possível controlar a missão espacial em tempo real é necessário desenvolver métodos que possam atuar de forma independente e assim controlar o movimento do veículo espacial durante o processo de transferência orbital. Este problema tem sido foco de pesquisa desde o início da exploração espacial, mas devido às limitações dos sistemas eletrônicos e de processamento era muito difícil aplicar métodos de controle viáveis, mas a situação tem vindo a mudar desde o final do século XX. Um dos primeiros processos que surgiu foi o [23] onde se utiliza um método denominado “two-step sliding mode control” para aplicar nos problemas de *rendezvous* onde são consideradas perturbações gravitacionais terrestres e condições de tração limitadas. Desde então, com o desenvolvimento dos sistemas de processamento, a procura continua por aperfeiçoar e definir métodos de controle mais robustos aumentou e surgiram várias técnicas para definir controladores para serem aplicados em missão espaciais. Alguns destas técnicas consideram mesmo as perturbações espaciais como a  $J_2$ . Vários são os exemplos de métodos de controle que têm vindo a surgir, sendo alguns deles os seguintes: Karlgaard [24] apresenta um estudo onde o propósito é aplicar o filtro de Huber ao problema de *rendezvous* baseados em sistemas de radar ou laser que não possuem uma distribuição de erros estatísticos que seja gaussiana. Desta forma, pretende-se aumentar a robustez do filtro quando comparado aos filtros de Kalman. Gurfil [25] investiga o problema da transferência orbital utilizando o feedback contínuo dos elementos orbitais onde o modelo dinâmico utilizado é as GVEs (“Gauss’s variational equations”). Baseado nestas equações é definido um controlador de feedback não linear para realizar a transferência orbital entre duas órbitas elípticas. Em [26] é apresentado um método para definir um controlador robusto  $H_\infty$  para aplicar em movimentos de *rendezvous* sujeitos a incertezas, perturbações externas e condições de input. Assim, foi utilizado o método de Lyapunov para conceber uma solução para este problema de otimização e foi apresentado um exemplo prático da sua aplicabilidade. Em [27] é estudado o problema do controle robusto orbital para o movimento de *rendezvous* em baixas órbitas (LEO) onde são consideradas incertezas, condições de baixa tração e limitações dos controles durante o processo de transferência. São utilizadas as equações C-W para definir o movimento de *rendezvous* e é introduzida uma nova abordagem de Lyapunov. Desta forma, a definição do controlador é convertida num problema de otimização sujeita às restrições das LMI (“linear matrix inequality”). O problema do movimento de *rendezvous* para um veículo espacial numa órbita elíptica arbitrária é estudado em [2]. São utilizadas as equações de Tschauner–Hempel para modelar o sistema dinâmico e são consideradas restrições de magnitude ao nível dos controles e energia. Desta forma, é proposto um novo método de aplicação da equação diferencial de Lyapunov para definir um modelo de controlabilidade a ser aplicado ao problema mencionado acima. Por fim, Imani e Beigzadeh [28] consideram o problema do controle do movimento de *rendezvous* numa órbita elíptica. Desta forma, são desenvolvidos dois controladores baseados

no “sliding mode control theory” para conseguir corrigir os erros causados pela presença de perturbações externas ( $J_2$  e resistência atmosférica) e da dinâmica não linear do modelo (equações de Clohessy-Wiltshire).

## 1.4 Limitações dos Métodos

A sociedade tem vindo a evoluir no sentido de automatizar processos. Procura-se conhecer o maior número de informações sobre as perturbações e incertezas que existem na natureza de um determinado problema e converter esses dados em conhecimento útil. Com esse conhecimento procuramos controlar uma determinada condição caótica da natureza para benefício do Homem através da teoria do controlo. A transferência orbital não é exceção e podemos verificar isso pelo elevado número de artigos que já foram mencionados nesta dissertação e cujo foco se concentra na resolução do problema da transferência orbital. Mesmo assim, ainda não se alcançou o resultado ideal o que faz com que se continue a procurar a resposta mais eficiente ou mesmo a resposta que melhor se adapta a uma determinada missão. É natural que existam limitações em cada estudo que não foi possível colmatar ou mesmo ter em consideração.

Podemos verificar que existem três limitações, nomeadamente, em alguns estudos o problema da eficiência energética é o foco, noutros o problema é atenuar os efeitos indesejados das perturbações e nos restantes o problema é a necessidade de desenvolver um controlador que consiga proporcionar os resultados desejados para uma determinada missão tendo em conta alguma das outras limitações. A presente dissertação enquadra-se neste último problema. Uma das grandes limitações encontradas nos estudos que foram analisados é o facto de não serem considerados todo o tipo de perturbações que podem atuar no veículo espacial e, ao mesmo tempo, considerar as limitações que os atuadores possuem na resposta aos comandos gerados pelo controlador. Assim, pretende-se desenvolver um controlador robusto que considere os piores cenários possíveis em termos de perturbações e de limitações dos atuadores.

## 1.5 Objetivo

O principal objetivo desta dissertação é o uso dos conhecimentos de astrodinâmica e da teoria de controlo para desenvolver um controlador robusto  $H_\infty$  que consiga manter, alterar e definir a trajetória de um veículo espacial durante o seu processo de transferência orbital entre duas órbitas não coplanares, sujeita a vários tipos de perturbações e limitações nos atuadores. A fase de modelação do sistema é com base nas equações de Tschauner-Hempel para simular a dinâmica da transferência orbital. As perturbações vão ser introduzidas através de valores aleatórios gerados por um modelo probabilístico que, neste estudo, será a distribuição normal (gaussiana). As limitações nos atuadores vão ser baseadas no trabalho desenvolvido por Bernstein em [21].

## 1.6 Plano da Dissertação

A presente dissertação é dividida num total de cinco capítulos principais que, por sua vez, são subdivididos em diversas secções de forma a apresentar de forma clara e simplificada cada tópico abordado.

O presente capítulo apresenta uma breve introdução sobre o tema da dissertação, apresenta brevemente alguns conceitos de astrodinâmica e é realizada uma revisão bibliográfica sobre os estudos na área da transferência orbital.

O segundo capítulo corresponde aos fundamentos teóricos necessários para poder definir a transferência orbital entre duas órbitas não coplanares. Assim, inicialmente é definido o modelo dinâmico que foi adotado para descrever a transferência orbital, nomeadamente as equações Tschauner-Hempel e, de seguida, são apresentados os modelos na área da matemática e da astrodinâmica necessários para definir a órbita de transferência e simular todas as perturbações que estão presentes no espaço. Essas perturbações são simuladas através de um modelo probabilístico. Algumas das ferramentas usadas e descritas neste capítulo são o Problema de Lambert, na área da astrodinâmica, ou o modelo de distribuição gaussiano, na área da probabilidade.

O terceiro capítulo descreve os fundamentos teóricos de controlo de sistema, ou seja, é neste capítulo que se define matematicamente o controlador robusto  $H_\infty$ . Desta forma, inicialmente, é feita uma breve introdução à dinâmica de sistemas e aos elementos que um sistema dinâmico deve apresentar para estudar a sua aplicabilidade, nomeadamente, a estabilidade, controlabilidade e observabilidade. De seguida, é apresentado o controlo ótimo de sistemas multivariáveis (LQR) uma vez que o controlador robusto  $H_\infty$  deriva deste modelo. Por fim, é apresentado o controlador robusto  $H_\infty$ .

No quarto capítulo é aplicado o controlador robusto  $H_\infty$  em dois exemplos práticos. Para tal, inicialmente é descrito a implementação do modelo dinâmico no modelo do controlador e são feitas algumas considerações iniciais para poder realizar as simulações da aplicabilidade do controlador da melhor forma possível. Em seguida são apresentados os dois exemplos práticos e os resultados obtidos na implementação do controlador nestes exemplos.

O último capítulo é a conclusão da dissertação onde se faz um resumo de todo o procedimento necessário para gerar o controlador robusto  $H_\infty$  e se apresentam as principais conclusões retiradas da aplicação deste controlador nos exemplos práticos.



# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos

Neste capítulo vão ser apresentados os modelos matemáticos e dinâmicos que foram utilizados na resolução do problema proposto. Desta forma, este capítulo está dividido em quatro partes:

1. Descrição do modelo dinâmico utilizado para definir as equações do movimento que o veículo espacial tem de seguir;
2. Descrição dos modelos matemáticos da área de astrodinâmica utilizados para definir a órbita de transferência entre a órbita inicial e a órbita final, sendo estas não coplanares;
3. Descrição dos métodos utilizados e da transformação de coordenadas que foi necessário implementar de forma a fazer a ligação entre o modelo dinâmico e a órbita de transferência definida;
4. Descrição da solução encontrada para simular todas as possíveis perturbações que existem durante a transferência orbital (o modelo dinâmico não contempla as perturbações orbitais).

### 2.1 Modelo Dinâmico

O modelo dinâmico que foi aplicado neste trabalho para definir a órbita de transferência corresponde às equações de Tschauner-Hempel (T-H) [12] [11] [2]. Estas equações são baseadas no movimento de *rendezvous* e só são válidas quando se considera que o veículo espacial está na vizinhança da órbita que pretendemos simular. Na Fig. 2.1 é apresentado o sistema de coordenadas utilizado. Podemos observar que existem três elementos, nomeadamente, o guia ("target spacecraft"), o perseguidor ("chaser spacecraft") e o centro de gravidade. A origem do sistema corresponde à posição do guia onde eixo  $y$  é normal ao plano de órbita e oposto ao vetor do momento angular. Podemos observar que  $\vec{R}$  é o vetor de origem no centro de gravidade do sistema e termina no guia e o vetor  $\vec{r}$  corresponde ao vetor de origem no guia e termina no perseguidor.

A equação do movimento para o guia no referencial inercial é

$$\ddot{\vec{R}} = -\mu \left( \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \right) + \vec{a}_t \quad (2.1)$$

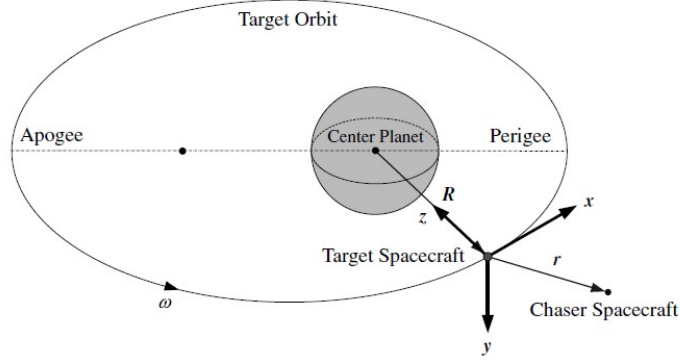


Figura 2.1: Sistema de coordenadas para deduzir as equações T-H [2]

A equação do movimento para o perseguidor é

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} = -\mu \left[ \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} \right] + \vec{a}_f + \vec{a}_c \quad (2.2)$$

Reescrevendo parte obtemos,

$$|\vec{R} + \vec{r}|^3 = |\vec{R}|^3 \left[ 1 + 2 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{R}|^2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (2.3)$$

Onde  $\mu$  é a constante gravitacional que depende o centro de gravidade,  $\vec{a}_i$  e  $\vec{a}_c$  correspondem às acelerações devido a forças externas aplicadas no guia e no perseguidor respetivamente, e  $\vec{a}_f = [a_f^x \ a_f^y \ a_f^z]^T$  é o vetor de aceleração que os propulsores aplicam no perseguidor.

Se a distância entre o guia e o perseguidor for muito pequena comparada com a distância entre o guia e o centro de gravidade,  $|\vec{R}| \gg |\vec{r}|$ , então

$$\frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} = \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R}|^3} \left[ 1 + 2 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{R}|^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R}|^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( 2 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{R}|^2} \right) \right] \quad (2.4)$$

$$\approx \frac{1}{|\vec{R}|^3} \left[ \vec{R} + \vec{r} - 3 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right] \quad (2.5)$$

A equação anterior foi obtida através da aplicação do Teorema Binomial que é definido por:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k \quad (2.6)$$

onde

$$(1 - b)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - k + 1)}{k!} b^k \quad (2.7)$$

A Eq. 2.5 é uma aproximação válida para o movimento de *rendezvous* que estamos a considerar porque o valor de  $|\vec{r}|$  é muito pequeno (inferior a  $10km$ ) quando comparado ao valor de  $|\vec{R}|$  que, para a Terra, corresponde ao valor do seu raio ( $6378km$ ) mais a altitude da órbita do veículo espacial.

Subtraindo a Eq. 2.1 da Eq. 2.2 e aplicando as aproximações acima mencionadas, Eq. 2.5, a equação para o movimento relativo no referencial inercial é

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \left[ \vec{r} - 3 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right] + \vec{a}_f + \vec{a}_c - \vec{a}_t \quad (2.8)$$

A derivada no tempo de um vetor arbitrário  $\vec{A}$  no sistema de coordenadas inercial pode ser expressa na forma de

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{rot} + \omega \times \vec{A} \quad (2.9)$$

Aplicando duas vezes na Eq. 2.8 obtemos,

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{R}|^3} \left[ \vec{r} - 3 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} \right] - 2 \left( \omega \times \dot{\vec{r}} \right) - \dot{\omega} \times \vec{r} - \omega \times (\omega \times \vec{r}) + \vec{a}_f + \vec{a}_c - \vec{a}_t \quad (2.10)$$

Onde os símbolos  $\dot{\vec{r}}$  e  $\ddot{\vec{r}}$  representam as derivadas em função do tempo no sistema de coordenadas rotativo. O vetor  $\vec{r} = [x \ y \ z]^T$  é o vetor de estado relativo do perseguidor.

Assim, as componentes de cada vetor no sistema de coordenadas definido são

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Onde  $\omega$  é a velocidade angular da órbita de referência e  $R$  representa a distância desde o centro de gravidade (Terra) até ao guia ( $|\vec{R}| = R$ ). Assim,

$$\omega \times \vec{r} = \begin{bmatrix} -\omega \dot{z} \\ 0 \\ \omega \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\dot{\omega} \times \vec{r} = \begin{bmatrix} -\dot{\omega} z \\ 0 \\ \dot{\omega} x \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\omega \times (\omega \times \vec{r}) = \begin{bmatrix} -\omega^2 x \\ 0 \\ -\omega^2 z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\vec{r} - 3 \frac{\vec{R}^T \vec{r}}{|\vec{R}|^2} \vec{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Sabendo que  $h$  é o momento angular orbital do guia, então  $R^2 \omega = h = \text{constante}$ . Podemos assim definir a constante  $k$  como,

$$\frac{\mu}{R^3} = \left( \frac{\mu}{h^{\frac{3}{2}}} \right) \omega^{\frac{3}{2}} \equiv k \omega^{\frac{3}{2}}, \quad k \equiv \frac{\mu}{h^{\frac{3}{2}}} = \text{constant} \quad (2.16)$$

Uma vez que as forças externas aplicadas no guia são idênticas às aplicadas no perseguidor, então  $\vec{a}_c = \vec{a}_t$ .

Substituindo as relações descritas acima na Eq. 2.10 obtemos as equações T-H,

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\omega^{\frac{3}{2}}x + 2\omega\dot{z} + \dot{\omega}z + \omega^2x \\ -k\omega^{\frac{3}{2}}y \\ 2k\omega^{\frac{3}{2}}z - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x + \omega^2z \end{bmatrix} + \vec{a}_f \quad (2.17)$$

Estas equações são válidas para qualquer órbita com excentricidade arbitrária. A única aproximação que foi considerada foi o facto de a distância entre o guia e o perseguidor ser muito

pequena em comparação com a distância entre o guia e o centro de gravidade (Terra),  $|\vec{R}| \gg |\vec{r}|$ . Por outras palavras, tal como já mencionado, o veículo espacial tem de estar na vizinhança da órbita.

## 2.2 Definição da Órbita de Transferência

Conhecendo a órbita inicial de um dado veículo espacial e a órbita final que se pretende atingir é necessário definir e estudar a órbita de transferência que permite ao veículo realizar essa mudança orbital. Assim, esta secção vai ser dividida em três subsecções. Na primeira parte é apresentado a forma como se define uma órbita no espaço e os modelos matemáticos necessários para se converter esses elementos para o referencial cartesiano. Na segunda parte, é apresentado o Problema de Lambert (Lambert's theorem) que corresponde ao teorema utilizado para definirmos a órbita de transferência. Este teorema apresenta-se como um dos elementos mais importantes em astrodinâmica e é amplamente utilizado para determinar a órbita de diversos elementos espaciais como asteroides, planetas ou cometas. Na última parte, são apresentadas as equações de astrodinâmica e os modelos matemáticos que são necessários para estudar a órbita de transferência no que toca aos vetores de posição e velocidade em função do tempo, tendo em conta o ponto inicial e final da transferência.

### 2.2.1 Estudo das Órbitas

Qualquer órbita pode ser definida através dos seguintes seis elementos orbitais [3], como mostra a Fig. 2.2.

- momento angular específico ("the specific angular momentum") ( $h$ );
- excentricidade ("eccentricity") ( $e$ );
- inclinação ("inclination") ( $i$ );
- ascensão reta do nodo ascendente ("the right ascension of the ascending node") ( $\Omega$ );
- argumento do perigeu ("the argument of periapsis") ( $w$ );
- anomalia verdadeira ("the true anomaly") ( $v$ ).

Para converter estes elementos para coordenadas cartesianas é necessário calcular os vetores de posição e velocidade para cada posição da órbita no sistema de coordenadas perifocal (PCS). De seguida, multiplicamos estes vetores pela matriz de rotação [Q] e obtemos os vetores no sistema de coordenadas geocêntrico (coordenadas cartesianas) [3] [24] [25]. Assim,

$$a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2} \quad (2.18)$$

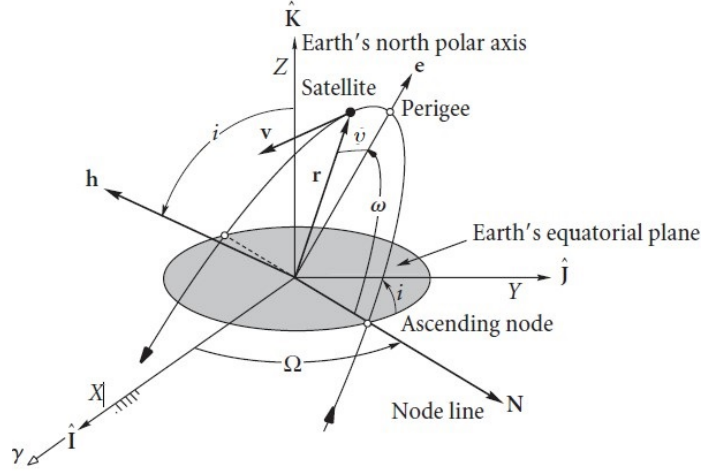


Figura 2.2: Elementos Orbitais [3]

$$\vec{r}_{PCS} = \begin{bmatrix} \frac{a(1-e^2) \cos v}{1+e \cos v} \\ \frac{a(1-e^2) \sin v}{1+e \cos v} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\vec{v}_{PCS} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \sin v \\ \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} (e + \cos v) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Utilizando a matriz [Q] obtemos os vetores que definem a órbita de transferência para qualquer ponto em coordenadas cartesianas.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} \vec{r} = Q \cdot \vec{r}_{PCS} \\ \vec{v} = Q \cdot \vec{v}_{PCS} \end{cases} \quad (2.22)$$

### 2.2.2 Problema de Lambert

O algoritmo de resolução do Problema de Lambert que foi aplicado nesta dissertação corresponde ao presente em [3]. De uma forma muito breve, este algoritmo é descrito da seguinte forma:

Pretende-se determinar os parâmetros que caracterizam uma determinada órbita de um objeto de massa  $m$  um torno um objeto de massa  $M$  onde só se conhecem dois vetores de posição,  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , que pertencem aos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respetivamente.

De acordo com o Problema de Lambert, o tempo de transferência  $\Delta t$  entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  é independente da excentricidade da órbita e depende unicamente da soma das magnitudes dos vetores de posição ( $r_1 + r_2$ ), do semimaior eixo  $a$  e da distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Assim, se conhecermos o tempo de voo  $\Delta t$  entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , então o Problema de Lambert corresponde à determinação da órbita entre esses pontos. Essa órbita é determinada assim que se consiga calcular o vetor velocidade para o ponto  $P_1$  ou  $P_2$ . Assim, para resolver o Problema de Lambert temos:

$$\begin{cases} \vec{r}_2 = f\vec{r}_1 + g\vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 = \dot{f}\vec{r}_1 + \dot{g}\vec{v}_1 \end{cases} = \begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{1}{g} (\vec{r}_2 - f\vec{r}_1) \\ \vec{v}_2 = \frac{1}{g} (\dot{g}\vec{r}_2 - \dot{f}\vec{r}_1) \end{cases} \quad (2.23)$$

onde os parâmetros  $f$ ,  $g$ ,  $\dot{f}$  e  $\dot{g}$  correspondem aos Coeficientes de Lagrange.

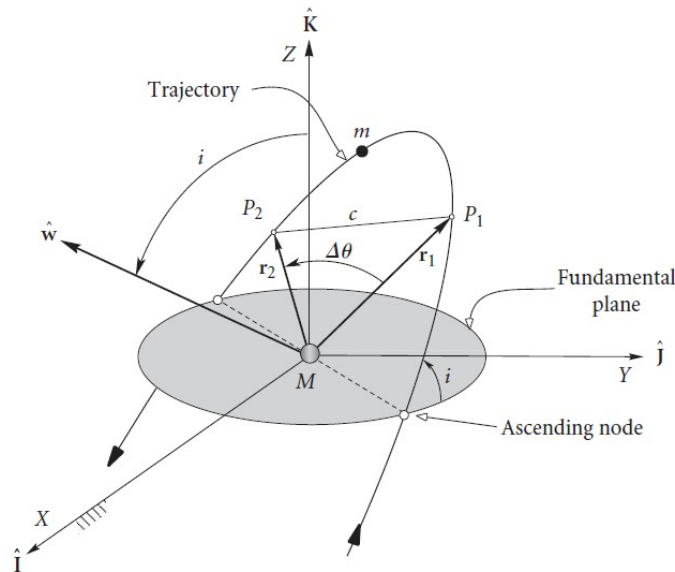


Figura 2.3: Problema de Lambert [3]

Ou seja, para resolver o Problema de Lambert é necessário saber  $P_1$ ,  $P_2$  e  $\Delta t$ . Assim, definimos que  $P_1$  pertence à órbita inicial e  $P_2$  pertence à órbita final, ou seja, são os pontos onde o veículo espacial vai iniciar e terminar a transferência. Estes pontos são escolhidos de forma a tornar a transferência o mais rápida e segura possível tendo em conta as órbitas em estudo. Para definir o tempo que é necessário para a transferência entre os dois pontos,  $\Delta t$ , foi implementado um ciclo de iteração no algoritmo cujo objetivo é minimizar a diferença entre o modulo do vetor velocidade no ponto onde termina a transferência orbital para a órbita de transferência e para a órbita final, ou seja, minimizar  $|(\vec{v}_2)_{o.transf.} - (\vec{v}_2)_{o.final}|$ . Por outras palavras, pretende-se que quando a transferência orbital termine o vetor velocidade

nesse ponto seja o mais próximo do vetor velocidade que a órbita final possui nesse mesmo ponto e assim não ser necessário realizar um grande gasto de energia no posicionamento final. O  $(\vec{v}_2)_{o.transf.}$  resulta da resolução do Problema de Lambert, Eq. 2.23, e o  $(\vec{v}_2)_{o.final}$  foi determinado utilizando a Eq. 2.22.

### 2.2.3 Estudo da Órbita de Transferência

Sabendo o tempo de transferência  $\Delta t$ , os pontos onde se inicia e termina a órbita de transferência e a anomalia verdadeira no vetor  $\vec{r}_1$  é possível determinar qual é o tempo após a passagem pelo perigeu que está associado ao início da transferência e, desta forma, conseguir calcular o tempo associado a cada um dos pontos da órbita. Assim, é possível criar funções de determinados parâmetros em função do tempo, uma vez que, a órbita de transferência pode não se iniciar no perigeu. Para poder determinar estes parâmetros é necessário determinar o tempo após o perigeu em  $\vec{r}_1$ . Sabendo esse tempo e o intervalo de tempo que demora a transferência,  $\Delta t$ , temos então o intervalo de tempo após o perigeu que corresponde à transferência orbital. Considerando a órbita de transferência elíptica, para calcular o tempo em  $\vec{r}_1$  após o perigeu utilizamos a seguinte equação,

$$t = \frac{Me \times T}{2\pi} \quad (2.24)$$

onde o período da órbita  $T$  e a anomalia média  $Me$  para o ponto  $P_1$  são determinados através de,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \quad (2.25)$$

$$Me = 2 \times \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin v}{1+e \cos v} \quad (2.26)$$

Sabendo o tempo após o perigeu onde se inicia a transferência é possível determinar a anomalia verdadeira,  $v$ , para vários pontos ao longo da órbita. Assim, iniciando no tempo calculado para  $r_1$  e definindo um incremento de  $\Delta t$  para definir cada novo ponto da órbita de transferência, até termos alcançado o tempo final, vamos calcular o respectivo  $v$  e criar uma tabela com estes valores. Desta forma temos para cada novo tempo,

$$v = 2 \times \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right) \quad (2.27)$$

onde  $E$  tem de ser calculado de forma iterativa aplicando o método de newton sendo,

$$E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e \sin(E_i) - Me}{1 - e \cos(E_i)} \quad (2.28)$$

e a anomalia média  $Me$  é calculado para cada tempo da seguinte forma,

$$Me = \frac{\mu^2}{h^3} (1 - e)^{3/2} \times t \quad (2.29)$$

Por fim, é necessário converter os pontos da órbita de transferência que se obtêm através da resolução do Problema de Lambert e das iterações mencionadas acima em vetores nas coordenadas cartesianas. Para tal, aplica-se novamente a Eq. 2.22.

### 2.3 Interpolação de Dados da Órbita de Transferência

Para simular a órbita de transferência utilizando as equações de Tschauner-Hempel (T-H), Eq. 2.17, é necessário determinar alguns parâmetros que variam ao longo da transferência e que estão presentes nestas equações, nomeadamente o velocidade angular da órbita de referência ( $\omega$ ) e a sua derivada em função do tempo ( $\dot{\omega}$ ). Uma vez que já temos os pontos que definem a órbita de transferência podemos utilizar a Eq. 2.30 para calcular os valores da velocidade angular para cada ponto.

$$\omega = \frac{h}{r^2} \quad (2.30)$$

onde  $h$  é o momento angular específico da órbita de transferência e o  $r$  corresponde ao raio no ponto da órbita de transferência onde se pretende determinar a velocidade angular.

Tendo estes valores de velocidade angular e sabendo o tempo de transferência para cada um dos pontos da órbita podemos fazer uma aproximação de forma a definir uma função polinomial. Desta forma, é possível fazer a derivada em função do tempo para a velocidade angular. Ou seja, analisando os resultados verificamos que podemos fazer a seguinte aproximação,

$$\begin{cases} \omega(t) \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = \dot{\omega}(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

Ou seja, a função função polinomial corresponde à velocidade angular da órbita de referência,  $\omega(t)$ , a sua primeira derivada corresponde à aceleração angular da órbita de referência  $\dot{\omega}$ . Para criar esta função foi utilizado a função "CubicSpline" da biblioteca "scipy" do *Python*<sup>TM</sup>.

## 2.4 Simulação das Perturbações Espaciais

Tal como mencionado no primeiro capítulo, existem diversas perturbações que podem afetar a trajetória do veículo espacial durante a transferência orbital e levar a que este movimento não ocorra da forma desejada. Uma vez que, o modelo dinâmico não tem em conta nenhum tipo de perturbação, torna-se necessário utilizar um método de fácil implementações e fiável para poder introduzir este parâmetro no modelo. Desta forma, vamos utilizar um modelo probabilístico para simular as perturbações.

O modelo escolhido corresponde à distribuição normal ou gaussiana [4] uma vez que se apresenta como a distribuição de probabilidades que é mais utilizada para modelar fenómenos naturais, ou seja, na natureza existem diversos fenómenos que tendem a apresentar resultados muito próximos dos obtidos por uma distribuição normal.

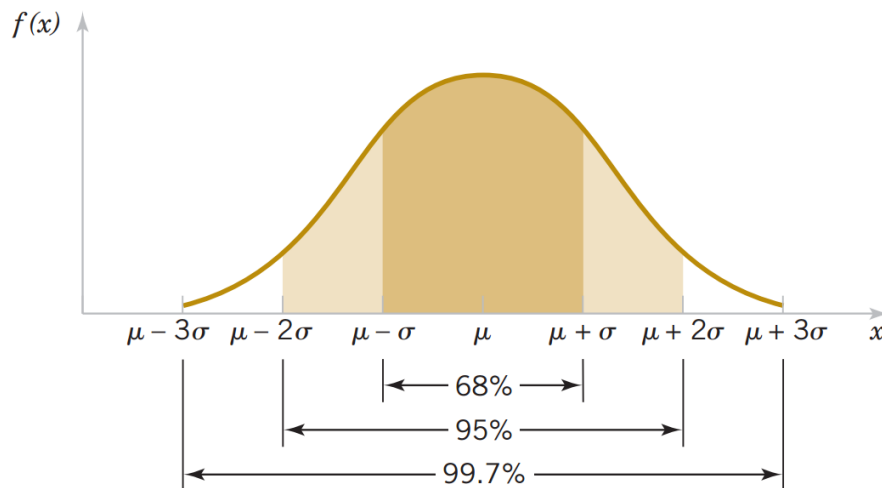


Figura 2.4: Distribuição Normal ou Gaussiana [4]

Para definir uma distribuição normal, Fig. 2.4, são necessários dois parâmetros:

- Média ( $\mu$ ) - corresponde ao valor onde está centralizada a variância, sendo o valor médio que surge ao ser observado diversas vezes um dado fenómeno;
- Variância ( $\sigma^2$ ) - descreve o grau de dispersão dos dados observados de um dado fenómeno. Podemos ainda utilizar o desvio padrão ( $\sigma$ ) que descreve a dispersão em termos de unidades padrão.

Assim, de acordo com os parâmetros que definimos para a distribuição normal vamos obter gráficos diferentes que podem representar diversos fenómenos naturais. Esses gráficos distribuem-se de forma contínua em  $x$  e a área total sob a curva do modelo é unitária. Para gerar os valores de acordo com este modelo probabilístico foi utilizada a biblioteca "random" do *Python*<sup>TM</sup>.

# Capítulo 3

## Fundamentos de Controlo de Sistemas

O Homem lida constantemente com sistemas dinâmicos na execução de diversas tarefas que, por vezes, são monótonas e repetitivas. Assim, surgiu a necessidade de desenvolver técnicas de controlo de sistemas cujo objetivo principal é a execução de determinadas ações para a resolução de problemas práticos que sejam regidos por equações matemáticas. Assim, todo o sistema dinâmico pode ser controlado através de inputs, outputs, atuadores, sensores e de um controlador.

Para o presente estudo, pretende-se controlar o movimento de transferência orbital de um veículo espacial de forma a que este saia de uma determinada órbita inicial e alcance uma órbita final de forma segura e viável, sem que as diversas perturbações a que está sujeito provoquem um resultado indesejado.

Desta forma, o presente capítulo apresenta uma breve introdução à teoria do controlo de sistemas lineares e descreve o procedimento para definir o controlador robusto  $H_\infty$  que corresponde ao controlador escolhido na execução do presente trabalho.

### 3.1 Dinâmica de Sistemas

A maioria dos sistemas dinâmicos podem ser representados matematicamente através de equações diferenciais ordinárias onde se define o tempo como a variável independente. Estes sistemas são representados sob a forma,

$$\dot{x} = f[x(t), u(t), t] \quad (3.1)$$

onde  $f$  representa a função real,  $t$  representa a variável tempo,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estado do sistema e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  representa o vetor de variáveis de controlo de entrada no sistema. Este sistema depende da estrutura física que representa e das equações físicas a que está sujeito, ou seja, surge da própria natureza do sistema.

A variável de saída do sistema é representada na forma de  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  e corresponde aos resultados que o sistema origina para dar resposta aos dados de entrada. A variável de saída do sistema  $y(t)$  é representada na forma de,

$$y(t) = g[x(t), u(t), t] \quad (3.2)$$

onde  $g$  representa uma função real que pode ser representada em torno de cada estado de equilíbrio.

Assim, o sistema definido pelas equações anteriores é representado por,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz do sistema,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada e  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  é a matriz de saída.

## 3.2 Estabilidade, Controlabilidade e Observabilidade

É fundamental estudar a estabilidade, controlabilidade e observabilidade de qualquer sistema dinâmico de forma a avaliar a sua possível aplicabilidade. Existem diversas categorias para os sistemas dinâmicos baseadas nestas três propriedades.

A estabilidade é uma propriedade bastante importante porque um sistema não estável requer que sejam gastos muitos recursos na sua implementação o que o torna não viável. Por outro lado, um sistema muito estável não é desejável porque não permite que exista alguma controlabilidade por parte do utilizador. Assim, controlabilidade está intimamente relacionada com os atuadores que são implementados e que, por sua vez, são responsáveis por introduzir alterações no sistema de forma a direcionar a sua evolução para um resultado pretendido. A observabilidade está relacionada com os sensores que são implementados no sistema para retirar informações e dados sobre a evolução deste.

### 3.2.1 Estabilidade

É uma propriedade com elevada importância para um sistema dinâmico. O método usual para verificar a estabilidade de um sistema é através da determinação dos autovalores da matriz  $A$ . Um sistema dinâmico  $\dot{x} = Ax$  é estável se todas as partes reais dos autovalores da matriz  $A$  possuírem um valor inferior a zero,  $Re(\lambda) < 0$ . Se as partes reais dos autovalores forem números negativos ou iguais a zero então o sistema é marginalmente estável.

### 3.2.2 Controlabilidade

A controlabilidade estuda a possibilidade de um sistema ser controlado pelas variáveis de entrada, ou seja, representa a capacidade de intervenção externa na evolução do sistema. O sistema é controlável se e só se for possível definir uma entrada que altere as variáveis de um

determinado estado inicial até um determinado estado final num intervalo de tempo finito, ou seja, se puder guiar o sistema de um qualquer estado até atingir um outro estado dentro de um prazo finito. Um sistema dinâmico é definido pela Eq. 3.3 e é um sistema controlável se a característica da matriz de controlabilidade for igual a  $n$ . A matriz de controlabilidade é definida por,

$$C_0 = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

sendo  $n$  a dimensão do espaço de estado (número de elementos do vetor de estado  $x$ ).

### 3.2.3 Observabilidade

Um sistema é observável se os valores do vetor de observação (saída) nos tempos  $t^*$ ,  $t^* + n\Delta t$ , (com  $n \geq 2$ , sendo  $\Delta t$  o passo de observação), permitirem ter uma estimativa fiável do valor do vetor de estado no tempo  $t^*$ . Ou seja, um sistema dinâmico é observável se e só se o estado inicial do sistema possa ser determinado através das diversas entradas e saídas ao longo do tempo. Um sistema dinâmico é definido pela Eq. 3.3 e este sistema é observável se a característica da matriz de observabilidade for igual a  $n$ . A matriz de observabilidade é definida por,

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde  $n$  representa a dimensão do espaço de estado (número de elementos do vetor de estado  $x$ ).

### 3.2.4 Controlo Ótimo Quadrático de Sistemas Multivariáveis - LQR

O controlo ótimo de um sistema dinâmico é composto pela estabilização do estado, regulação e controlo da saída. Assim, o objetivo do controlador é definir o controlo que permita maximizar ou minimizar o critério que constitui o problema de otimização para o sistema em estudo.

Para poder definir o controlador robusto  $H_\infty$  é necessário introduzir e utilizar alguns conceitos que são aplicados em controladores mais simples. Assim, nesta secção, é apresentado um método para dimensionar controladores lineares ótimos com base em critérios de desempenho quadráticos para sistemas multivariáveis cujos parâmetros não variam no tempo mas permanecem constantes em torno de dados modos de funcionamento.

Desta forma, considera-se o seguinte sistema dinâmico linearizado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.6)$$

onde  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ , ou seja, o vetor de estado, o vetor de controle, a matriz de estado e a matriz de controle.

Para projetar um controlador quadrático, é necessário escolher um vetor de controle  $u(t)$  para que um critério de desempenho ( $J$ ) seja minimizado, em que  $J$  é definido por:

$$J(u) = \int_0^{\infty} L(x, u) dt \quad (3.7)$$

onde  $L(u, x)$  é uma função quadrática de  $x$  e  $u$ .

Como o controlador que pretendemos determinar se destina a sistemas lineares, o controlador resultante, neste caso, é um regulador linear quadrático, ou seja, um "Linear Quadratic Regulator"(LQR).

Nos controladores LQR interessa parametrizar o vetor de controle como uma função linear do vetor de estado  $x$ , ou seja:

$$u_c = -Kx \quad (3.8)$$

em que  $K$  é uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas ( $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ).

Desta forma, o principal objetivo do controlador é definir a matriz  $K$  que minimize o critério de desempenho ( $J$ ) através da função de controle definida na Eq. 3.8.

A expressão  $L(x, u)$  deve ser quadrática em  $x$  e  $u$  por isso, poderá ser escrita da seguinte forma:

$$L(x, u) = x^T Q x + u^T R u \quad (3.9)$$

onde  $Q \in R^{n \times n}$  é uma matriz simétrica e positivamente semi-definida (ou seja,  $\forall x \neq 0, Q(x) \geq 0$  e  $Q(x) = 0$  para  $x = 0$ ) e a matriz  $R \in R^{m \times m}$  é positivamente definida (ou seja,  $\forall x \neq 0, R(x) > 0$  e  $R(x) = 0$  para  $x = 0$ ). Tanto a matriz  $Q$  como a matriz  $R$  vão afetar a performance do controlador e, por esta razão, os seus valores não devem ser escolhidos de forma

arbitrária mas sim através diversas iterações e simulações.

A matriz  $Q$  é uma matriz diagonal que depende do número de elementos do vetor de estado  $x$ .

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_n \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Para o presente problema de otimização, a matriz  $Q$  será uma matriz  $6 \times 6$ , podendo ser definida por:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_6 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde os seus elementos  $q_1, q_2, \dots, q_6$  podem ser definidos de diversas maneiras. Um exemplo é o método de Bryson Modificado:

$$q_1 = \frac{\eta_1}{x_{1max}^2} \quad (3.12)$$

$$q_2 = \frac{\eta_2}{x_{2max}^2} \quad (3.13)$$

$$q_3 = \frac{\eta_3}{x_{3max}^2} \quad (3.14)$$

$$q_4 = \frac{\eta_4}{x_{4max}^2} \quad (3.15)$$

$$q_5 = \frac{\eta_5}{x_{5max}^2} \quad (3.16)$$

$$q_6 = \frac{\eta_6}{x_{6max}^2} \quad (3.17)$$

onde  $x_{1max} \dots x_{6max}$  são os valores máximos aceitáveis para cada estado e os valores de  $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_6$  têm que ser iguais ou superiores a 1 podendo tomar diferentes valores.

A matriz  $R$ , da mesma forma que a matriz  $Q$ , também é uma matriz diagonal e quadrada, sendo que possui um número de linhas e de colunas que depende do número de elementos do vetor de controlo  $u$ .

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_m \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Para o modelo dinâmico em estudo a matriz  $R$  será uma matriz  $3 \times 3$  e é definida por:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

em que  $r_1, r_2$  e  $r_3$  podem ser definidos de diversas maneiras. Para o método de Bryson Modificado temos:

$$r_1 = \frac{\lambda_1}{u_{1max}^2} \quad (3.20)$$

$$r_2 = \frac{\lambda_2}{u_{2max}^2} \quad (3.21)$$

$$r_3 = \frac{\lambda_3}{u_{3max}^2} \quad (3.22)$$

onde  $u_{1max}, u_{2max}$  e  $u_{3max}$  são os valores máximos aceitáveis para o controlo e os valores de  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  então definidos entre 0 e 1 podendo tomar qualquer valor dentro deste intervalo, nunca tomando o valor de 0 mas podendo tomar o valor 1.

É importante referir que a forma como as matrizes  $Q$  e  $R$  foram definidas acima é apenas um possível exemplo para realizar uma otimização do controlador. Normalmente, são utilizadas

matrizes identidade nas primeiras simulações do controlador para avaliar a aplicabilidade e só posteriormente é que se vai alterar as matrizes  $Q$  e  $R$  para tentar otimizar os resultados obtidos.

Uma vez definido  $L(x, u)$ , a Eq. 3.7, que define  $J$ , fica:

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.23)$$

Desta forma, se substituirmos a Eq. 3.8 na Eq. 3.6 obtém-se:

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (3.24)$$

Da mesma forma, se substituirmos a Eq. 3.24 na Eq. 3.23 ficamos com

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T (Q + K^T R K) x) dt \quad (3.25)$$

A Eq. 3.25 corresponde à equação do sistema de malha fechada, ou seja, com o controlador a funcionar. Assim, para determinar a lei de controlo, é necessário achar a função de Liapunov  $V$  para o sistema de malha fechada sob a forma de  $V(x) \equiv x^T P x$ , onde  $P$  é uma matriz simétrica positivamente definida. A derivada no tempo da função de Liapunov  $V$  deve ser igual à oposta da função a ser integrada na equação, isto é:

$$\dot{V}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial t} (x^T P x) = -x^T (Q + K^T R K) x \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (x^T P x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (3.27)$$

Assim, obtemos:

$$x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x = -x^T (Q + K^T R K) x \quad (3.28)$$

Para que a equação diferencial anterior seja estável, será necessário que a matriz  $K$  satisfaça a seguinte equação, de Liapunov:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (3.29)$$

onde assumimos que a matriz  $K$  é a incógnita. Desta forma, a solução obtida é:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (3.30)$$

onde a matriz  $P$  é obtida a partir da equação de Riccati.

Assim, a função de controlo obtida é:

$$u_c = -Kx = -R^{-1}B^T P x \quad (3.31)$$

Para se obter a solução da equação de Riccati é necessário garantir que as matrizes em estudo cumpram as condições de estabilidade e controlabilidade mencionadas anteriormente. Assim, a matriz  $P$  poderá ser obtida a partir da equação de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.32)$$

### 3.3 Controlador Robusto $H_\infty$

É importante e essencial ter um controlo robusto para fazer a transferência orbital pois, este movimento é um dos elementos mais importantes em qualquer missão espacial. Assim, devemos ter em atenção as perturbações e as incertezas a que o nosso sistema está sujeito e tentar colmatar-las. Desta forma, para a presente dissertação foi escolhido o controlo robusto  $H_\infty$  [29, 30, 31] para aplicar ao problema em estudo.

O controlador robusto  $H_\infty$  é essencialmente um controlador que atua diretamente nas perturbações que estão presentes nos controlos de saída do sistema. A sua norma, norma de  $H_\infty$ , é a medida dos piores cenários possíveis de performance para todas as classes de sinais de entrada, ou seja, ao minimizar este parâmetro vamos ter uma atenuação da discrepância entre os sinais de entradas e de saídas do sistema. Assim, para atenuar as perturbações que existem nos controlos de saída, o principal objetivo do controlador  $H_\infty$  é determinar a matriz de ganho  $K$  que minimiza a função de transferência  $\|T\|_\infty$ . Podemos representar o controlador  $H_\infty$  através do esquema da Fig. 3.1.

Assim, o problema de otimização do controlador  $H_\infty$  corresponde à resolução da lei de controlo de feedback,  $\Sigma_{cmp}$ , para estabilizar o sistema internamente de forma a fazer com que a norma de  $H_\infty$  da função da matriz de transferência,  $\|T\|_\infty$ , de  $w$  para  $h$  seja minimizada. Deste modo, temos uma norma que considera uma medida de ganho do sistema com os piores cenários possíveis, tal como mencionado acima.

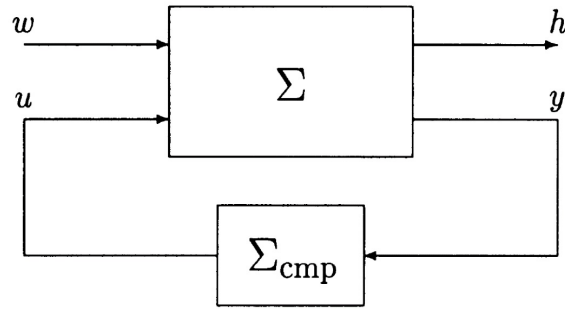


Figura 3.1: Esquema do controlador  $H_\infty$  [5]

Considerando o sistema dinâmico linearizado sujeito a perturbações:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\
 y(t) &= Cx(t) \\
 x(t_0) &= x_0
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

onde:

- $A$  é a matriz do sistema;
- $x(t)$  é o vetor de estado do sistema;
- $B$  é a matriz de entrada (input);
- $u(t)$  é o vetor de controle;
- $B_w$  é a matriz de perturbações;
- $w(t)$  é o vetor da função de perturbações;
- $y(t)$  é o vetor de controle de saída (output);
- $C$  é a matriz de saída (output);
- $x_0$  é o vetor de condições iniciais.

O objetivo é determinar a função de controle  $u(t)$  que faça com que os valores obtidos para o vetor de estado  $x(t)$ , no intervalo  $[t_0; T_f]$  onde  $T_f$  é o intervalo de tempo de aplicação, sejam os mais próximos possíveis dos valores que desejamos. Para o presente trabalho os valores desejados correspondem ao percurso da transferência orbital e o  $T_f$  corresponde ao tempo que esse movimento demora a ser executado.

Para o sistema descrito acima existem duas classes de controlador, o estático e o dinâmico. Para o presente estudo vai ser utilizado o controlador estático pela sua simplicidade de implementação e por não existirem diferenças significativas no que toca à atenuação das perturbações que estes controladores provocam.

Temos então a função de controlo definida por:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3.34)$$

O objetivo do controlador  $H_\infty$ , tal como já mencionado, é minimizar a norma da função de transferência que relaciona a entrada  $w$  com a saída  $y$ . Utilizando a condição de controlador estático, essa norma é definida por:

$$T(s) := C[sI - (A - BK)]^{-1}D \quad (3.35)$$

Assim, para conseguir minimizar a norma de  $H_\infty$  temos de achar uma matriz  $K$  que minimize  $\|T\|_\infty$ . Devido à dificuldade em atingir esta condição é utilizada uma aproximação que considera um erro aceitável, nomeadamente:

$$\|T(s)\|_\infty \leq \gamma \quad (3.36)$$

sendo que  $\gamma$  representa o efeito máximo do ruído que deve ser o mínimo possível. Este parâmetro é definido por:

$$\gamma = \inf \{ \|T\|_\infty : K \in S \} \quad (3.37)$$

onde

$$S = \{ K \in \mathbb{R}^{m.m} : A - BK \text{ is a stability matrix} \} \quad (3.38)$$

Desta forma, a norma da função de transferência é reduzida em cada ciclo devido às atenuações das perturbações e obtemos o controlo robusto  $H_\infty$ .

Para determinar a matriz  $K$  necessitamos de resolver as equações de Riccati e obter a matriz  $P$ . Assim,

$$PA + A^T P - \frac{1}{\varepsilon} P B R^{-1} B^T P + \frac{1}{\gamma} P D D^T + \frac{1}{\gamma} C^T C + \varepsilon Q = 0 \quad (3.39)$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  e  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matrizes definidas positivamente, tal como no LQR. Estas matrizes podem ser definidas de modo a melhorar o desempenho do controlo e a reduzir o esforço do mesmo. Para a presente dissertação vai ser utilizado unicamente as matrizes identidade para definir  $Q$  e  $R$ .

Com atenuação de perturbações,  $\gamma$ , constante e  $\varepsilon > 0$ , temos assim:

$$K = \frac{R^{-1} B^T P}{2\varepsilon} \quad (3.40)$$

Por fim, a função de controlo toma a forma de:

$$u(t) = -\frac{R^{-1} B^T P}{2\varepsilon} x(t) \quad (3.41)$$



# Capítulo 4

## Implementação do Controlador Robusto

O presente capítulo tem como função apresentar os resultados numéricos e as simulações que foram desenvolvidas na elaboração e aplicação do controlador. Desta forma, todas as análises e exemplos que foram elaborados vão ser apresentados e discutidos de forma pormenorizada. A linguagem de programação *Python<sup>TM</sup>* foi utilizada para realizar todas as simulações presentes neste capítulo.

De forma a criar uma estrutura coerente e de fácil compreensão, o presente capítulo é subdividido em diferentes secções, nomeadamente:

1. Modelo dinâmico - é apresentado como se vai implementar o modelo dinâmico na elaboração do controlador robusto;
2. Considerações iniciais - são apresentadas as considerações que foram adotadas na implementação do controlador robusto nos exemplos práticos;
3. Exemplos numéricos - são apresentados os exemplos definidos para a implementação do controlador projetado;
4. Simulações numéricas do sistema controlado - são apresentados os resultados obtidos na implementação do controlador para os exemplos práticos definidos.

### 4.1 Modelo Dinâmico

Para poder simular o movimento que o veículo espacial vai executar durante a transferência orbital é necessário definir o seu modelo dinâmico. O modelo que foi adotado para as simulações foi descrito no capítulo 2 e corresponde às equações T-H, Eq. 2.17. Para poder aplicar estas equações ao controlador vamos utilizar o seguinte modelo de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Onde, o vetor de estado,  $x(t)$ , representa a posição e velocidade relativa para cada uma das três direções do referencial, o vetor de controlo,  $u(t)$ , representa as componentes da aceleração aplicadas pelos atuadores em cada uma das direções do referencial, o vetor de pertur-

bações externas,  $w(t)$ , permite introduzir no modelo valores que vão representar as perturbações existentes no espaço e, por fim, temos o vetor de saída que representa a posição da nave espacial. Temos assim:

$$x(t) = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}]^T \quad (4.2)$$

$$u(t) = [a_f^x, a_f^y, a_f^z]^T \quad (4.3)$$

$$w(t) = [w_x, w_y, w_z]^T \quad (4.4)$$

$$y(t) = [x, y, z]^T \quad (4.5)$$

As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_w$  e  $C$  são elaboradas de forma a considerarem o modelo dinâmico definido pelas equações de Tschauner-Hempel (T-H), Eq. 2.17. Ou seja, para poder aplicar as equações T-H no controlador, sob a forma do modelo de equações diferenciais descrito em 4.1, definimos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k\omega^{\frac{3}{2}} + \omega^2 & 0 & 0 & 0 & \dot{\omega} & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k\omega^{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dot{\omega} & -2\omega & 0 & 0 & 2k\omega^{\frac{3}{2}} + \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$B = B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Desta forma, toda a transferência orbital pode ser descrita convertendo o vetor de estado  $x(t)$  desde o vetor inicial  $x(t_0)$  até ao vetor final  $x(t_{ot})$ , onde  $t_{ot}$  corresponde ao tempo de transferência.

## 4.2 Considerações Iniciais

Antes de iniciar a análise da implementação do controlador  $H_\infty$  para o problema da transferência orbital entre duas órbitas não coplanares é necessário fazer algumas considerações iniciais. Posteriormente, vamos definir os exemplos que vão ser utilizados para aplicar o controlador em estudo e assim analisar e estudar a sua performance. As considerações iniciais são:

1. É necessário estudar algumas propriedades importantes do sistema em estudo como a estabilidade, controlabilidade e observabilidade, tal como definido no capítulo 3. Tendo em conta que o estudo destes parâmetros requer as matrizes A, B e C presentes em 4.1, é necessário definir os exemplos de aplicação do controlador em primeiro lugar. Assim, em cada exemplo vão ser estudados estes parâmetros utilizando duas bibliotecas da linguagem de programação *Python<sup>TM</sup>*, a biblioteca "numpy" e "control".
2. É necessário definir o método numérico que vai ser utilizado de forma a fazer as simulações dos estados do sistema,  $x_k$ , para cada intervalo de tempo,  $dt$ , sabendo as condições iniciais,  $x_0$ , e a equação diferencial,  $\dot{x}$ . Ou seja, é necessário definir o método numérico que vai permitir resolver a equação diferencial ordinária definida no capítulo 3, Eq. 3.33. O método de Butcher, também conhecido como o algoritmo de quinta ordem de Runge-Kutta, foi o método numérico escolhido para simular o sistema representado em 4.1. O método de Butcher permite resolver equações diferenciais definidas por:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.9)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estado do sistema e  $u \in \mathbb{R}^m$  corresponde ao vetor de controlo.

Assim, considerando as condições iniciais  $(t_0, x_0)$ , o método de Butcher é definido da seguintes forma:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{90} (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (4.10)$$

onde  $k_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  são obtidos para cada iteração de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
k_1 &= dt \times f(x_k, u_k) \\
k_2 &= dt \times f(x_k + \frac{1}{4}k_1, u_k) \\
k_3 &= dt \times f(x_k + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, u_k) \\
k_4 &= dt \times f(x_k - \frac{1}{2}k_2 + k_3, u_k) \\
k_5 &= dt \times f(x_k + \frac{3}{16}k_1 + \frac{9}{16}k_4, u_k) \\
k_6 &= dt \times f(x_k - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, u_k)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

O  $dt$  representa o intervalo de tempo entre cada iteração para realizar os cálculos e assim obter as simulações pretendidas para o controlador. O valor utilizado para este parâmetro foi  $dt = 0.1s$ , sendo suficientemente pequeno para realizar os cálculos computacionais com aproximações bastante razoáveis tendo em conta o sistema complexo que se pretende simular e o tempo necessário nesse processo.

3. Para as presentes simulações vão ser utilizadas algumas aproximações no que diz respeito a determinados parâmetros que afetam diretamente a performance do controlador  $H_\infty$ . Estes parâmetros são o  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  e as matrizes  $Q$  e  $R$  que estão presentes na equação de Riccati, Eq. 3.39, utilizada para calcular a matriz  $K$ . Assim, tal como é possível verificar no capítulo 3, estes parâmetros afetam diretamente a função de controlo  $u(t)$ . Os valores utilizados para as simulações dos exemplos são o valor de  $\gamma = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  e as matrizes  $Q$  e  $R$  utilizadas foram as matrizes identidade, tal como referido anteriormente. As matrizes  $Q$  e  $R$  são:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Utilizando estes valores e obtendo resultados satisfatórios podemos concluir que o controlador é aplicável e que a sua performance pode ser ainda melhorada.

4. O modelo dinâmico utilizado não tem em conta as perturbações que existem no espaço e que vão afetar a trajetória do veículo espacial. Assim, tal como descrito no capítulo 2, vai ser utilizada a distribuição normal ou gaussiana para simular todas as possíveis perturbações que afetam o sistema. Para introduzir as perturbações foi definido um

vetor de acelerações que gera valores aleatórios em cada iteração. O vetor é definido por:

$$w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ w_x \\ 0 \\ w_y \\ 0 \\ w_z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

onde  $w_x$ ,  $w_y$  e  $w_z$  representam os valores gerados em cada iteração.

A distribuição normal ou gaussiana que foi utilizada para gerar os valores tem média,  $\mu$ , igual a 0 e desvio padrão,  $\sigma$ , igual a 1. A estes valores aleatórios gerados vamos multiplicar por  $\frac{10}{3}$  e assim obtemos os erros a introduzir em cada iteração.

5. Por fim, temos de considerar as limitações físicas que o veículo espacial possui, nomeadamente o trabalho dos atuadores. Os atuadores são os elementos que vão receber as informações geradas pelo controlador e que vão atuar de forma a orientar o veículo espacial na trajetória pretendida. Desta forma, é necessário introduzir nas simulações a possibilidade dos atuadores saturarem ou não gerarem os valores definidos pelo controlador [21]. Assim, vamos introduzir limitações de entrada definidas por:

$$f_i = |u(t)| \leq u_{i,max}(i = x, y, z) \quad (4.15)$$

onde  $u_{i,max}$  corresponde ao valor máximo de aceleração que os atuadores conseguem produzir em relação ao eixo  $i$ . Ou seja, os atuadores não podem exceder esses valores máximos e o controlador  $H_\infty$  deve fazer as simulações com essas limitações. Os valores limite utilizados para as acelerações geradas pelos atuadores em todos os exemplos foram  $1.5m/s^2$ ,  $1.5m/s^2$  e  $1.5m/s^2$  em  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respetivamente.

### 4.3 Exemplos Numéricos

Nesta secção, vão ser apresentados dois exemplos práticos de transferência orbital não coplanar onde se pretende aplicar o controlador robusto  $H_\infty$ . A tabela 4.1 apresenta os elementos orbitais que definem as órbitas inicial e final para cada um dos exemplos, os pontos de início e fim de transferência e a respetiva órbita de transferência gerada pelo Problema de Lambert.

É importante referir que para o presente trabalho as simulações são realizadas para veículos espaciais cujas órbitas sejam em torno do planeta Terra e, por esta razão, as variáveis físicas,

como a constante gravitacional universal ( $\mu_{Terra} = 398600km^3/s^2$ ), utilizadas correspondem aos valores definidos para este planeta.

	Exemplo A	Exemplo B
Órbita inicial	$h = 52739.3km^2/s$ $e = 0$ $i = 0^\circ$ $\Omega = 0^\circ$ $w = 0^\circ$ $r_p = 6978km$	$h = 54552.1km^2/s$ $e = 0.04$ $i = 0^\circ$ $\Omega = 0^\circ$ $w = 0^\circ$ $r_p = 7179km$
Órbita final	$h = 55321.3km^2/s$ $e = 0$ $i = 20^\circ$ $\Omega = 0^\circ$ $w = 0^\circ$ $r_p = 7678km$	$h = 54787.4km^2/s$ $e = 0.08$ $i = 20^\circ$ $\Omega = 20^\circ$ $w = 10^\circ$ $r_p = 6972km$
Ponto de início da transferência orbital (órbita inicial)	$[6978; 0; 0]^T (v = 0^\circ)$	$[-7778; 0; 0]^T (v = 180^\circ)$
Ponto de finalização da transferência orbital (órbita final)	$[-7215; 2468; 898]^T (v = 160^\circ)$	$[-4150; -6707; -1777]^T (v = 210^\circ)$
Órbita de transferência (Problema de Lambert)	$h = 54676.5km^2/s$ $e = 0.1567$ $i = 19.99^\circ$ $\Omega = 0^\circ$ $w = 61.49^\circ$ $r_p = 6484km$ $\Delta t = 2369$ segundos	$h = 57298km^2/s$ $e = 0.06$ $i = 14.84^\circ$ $\Omega = 0^\circ$ $w = 167.2^\circ$ $r_p = 7771km$ $\Delta t = 1124$ segundos

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados para cada exemplo simulado

Nas Figuras 4.1 e 4.2 podemos observar as órbitas que foram definidas para cada exemplo prático.

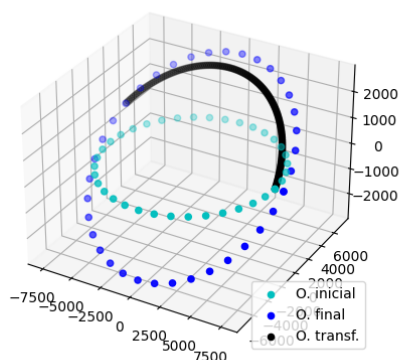


Figura 4.1: Órbitas Exemplo A

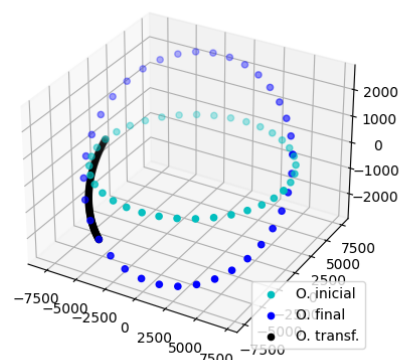


Figura 4.2: Órbitas Exemplo B

## 4.4 Simulações Numéricas do Sistema Controlado

Podemos iniciar as simulações numéricas para cada exemplo prático. Desta forma, esta seção vai ser dividida em duas partes, sendo que, cada parte corresponde a um dos exemplos apresentados.

Em cada exemplo foram realizadas três simulações diferentes de forma a poder estudar e analisar de forma mais abrangente os resultados obtidos com a implementação do controlador, estas simulações são:

1. Simulações sem perturbações e sem limitações dos atuadores;
2. Simulações com perturbações e sem limitações dos atuadores;
3. Simulações com perturbações e com limitações dos atuadores.

### 4.4.1 Exemplo A

Inicialmente, é necessário estudar a estabilidade, controlabilidade e observabilidade do sistema dinâmico. Uma vez que a matriz  $A$  varia com o tempo (a velocidade angular varia ao longo da transferência), torna-se necessário fazer este estudo para cada intervalo de tempo que se tenha definido. Utilizando as bibliotecas *Python<sup>TM</sup>* descritas anteriormente e diversos ciclos de iteração, podemos verificar que o sistema é marginalmente estável pois as matrizes  $A$ , para os diversos tempos, apresentam autovalores com as partes reais sempre negativas ou iguais a zero. Relativamente à controlabilidade, a *caract* ( $C_0$ ) obtida em cada ciclo de iteração foi sempre igual a  $n$ , no caso em estudo  $n = 6$ , e assim podemos verificar que o sistema é controlável. Para a observabilidade, a *caract* ( $\theta$ ) obtida também foi sempre 6, ou seja, o sistema possui observabilidade durante toda a missão.

Para os casos em estudo, é importante realçar que o veículo espacial se encontra num sistema estável antes de se realizar o movimento de transferência orbital pois o seu movimento corresponde a uma órbita bem definida. Assim, para se iniciar a transferência orbital é necessário introduzir propositadamente perturbações que vão fazer com que o ele saia da órbita inicial e inicie o movimento de transferência. Ou seja, ao aplicarmos o controlador  $H_\infty$  ao sistema que pretendemos simular, devemos ter em conta que o veículo espacial inicia o seu movimento de transferência orbital com o mesmo vetor de velocidade que possui na órbita inicial mas com algumas perturbações iniciais.

Para a elaboração do controlador  $H_\infty$  devemos calcular função de controlo  $u(t)$ , que depende da matriz  $P$  e  $K$  que resultam da resolução da equação de Riccati, Eq.3.39. Para resolvermos esta equação temos de definir uma matriz  $A$  que possa representar todo o processo de transferência pois a matriz  $A$  varia com o tempo de transferência. Assim, como sabemos os valores máximos e mínimos que os parâmetros que compõem a matriz  $A$  tomam, nomeadamente  $\omega$  e  $\dot{\omega}$ , podemos calcular a sua média e obter uma nova matriz  $A$ . Esta matriz apresenta as

mesmas características de estabilidade, controlabilidade e observabilidade descritas acima. Com esta nova matriz  $A$  podemos resolver a equação de Riccati. Foram obtidas as seguintes matrizes  $P$  e  $K$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1.9999 & 2.9990 & 1.1929 \cdot 10^{-20} & 1.3379 \cdot 10^{-19} & 4.3953 \cdot 10^{-08} & 0.0089 \\ 2.9990 & 9.9859 & 1.0874 \cdot 10^{-19} & 1.2720 \cdot 10^{-18} & -0.0045 & 0.0216 \\ 1.1929 \cdot 10^{-20} & 1.0874 \cdot 10^{-19} & 1.9999 & 2.9990 & 1.8275 \cdot 10^{-21} & -1.5241 \cdot 10^{-20} \\ 1.3379 \cdot 10^{-19} & 1.2720 \cdot 10^{-18} & 2.9990 & 8.9863 & 6.6612 \cdot 10^{-20} & 3.7235 \cdot 10^{-19} \\ 4.3953 \cdot 10^{-08} & -0.0045 & 1.8275 \cdot 10^{-21} & 6.6612 \cdot 10^{-20} & 1.0001 & 1.5012 \\ 0.0089 & 0.0216 & -1.5241 \cdot 10^{-20} & 3.7235 \cdot 10^{-19} & 1.5012 & 5.0106 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.4995 & 4.9929 & 5.4372 \cdot 10^{-20} & 6.3600 \cdot 10^{-19} & -0.0022 & 0.0108 \\ 6.6896 \cdot 10^{-20} & 6.3600 \cdot 10^{-19} & 1.4995 & 4.4931 & 3.3306 \cdot 10^{-20} & 1.8617 \cdot 10^{-19} \\ 0.0044 & 0.0108 & -7.6205 \cdot 10^{-21} & 1.8617 \cdot 10^{-19} & 0.7506 & 2.5053 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Desta forma, já podemos calcular a função de controlo  $u(t)$ , tal como descrito no capítulo 3, ou seja:

$$u(t) = -\frac{R^{-1}B^T P}{2\varepsilon}x(t) = -Kx(t) \quad (4.18)$$

onde  $x(t)$  representa o vetor de estado para cada tempo.

Com a função de controlo definida podemos aplicar o método do Butcher para resolver o sistema 4.1 e obter os resultados da aplicação do controlador  $H_\infty$  para o exemplo em estudo sendo somente necessário definir o vetor das condições iniciais. Considerando que no início da transferência orbital o vetor de velocidades do veículo espacial é tangente ao vetor de velocidades que possuía na órbita inicial, só temos de considerar algumas perturbações nestes parâmetros. Desta forma, podemos definir o  $x(t_0) = x_0$  que corresponde ao vetor das condições iniciais (vetor de estado inicial) para aplicação no controlador como:

$$x(t_0) = x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

Assim, toda a transferência orbital pode ser descrita pela evolução do vetor de estado  $x(t)$ , desde o vetor de estado inicial  $x(t_0)$  até ao vetor de estado final  $x(t_{to})$  sendo  $t_{to}$  o tempo da transferência.

De seguida, vão ser apresentados os resultados obtidos para cada uma das simulações bem

como, sempre que necessário, as alterações que foram efetuadas no modelo descrito acima para introduzir as perturbações e as limitações.

- Simulações sem perturbações e sem limitações dos atuadores

De forma a validar a capacidade que o controlador possui para fazer o veículo espacial convergir para os pontos da transferência orbital foi realizada uma primeira análise onde simplesmente vamos aplicar o controlador robusto ao modelo dinâmico sem a introdução das perturbações e limitações dos atuadores. Para esta simulação foram obtidos resultados bastante satisfatórios que são visíveis nas seguintes Figuras:

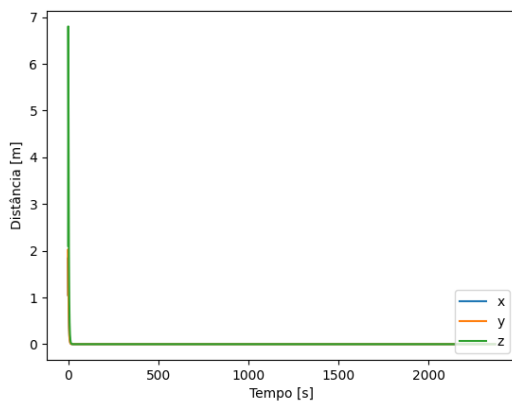


Figura 4.3: Distância relativa em x, y e z em cada eixo

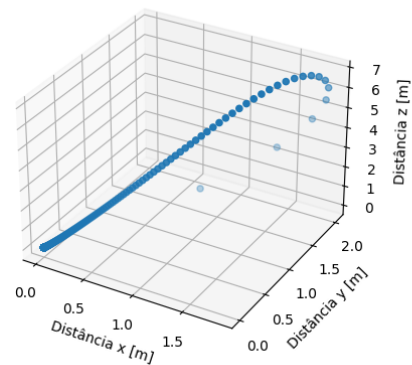


Figura 4.4: Distância relativa 3D

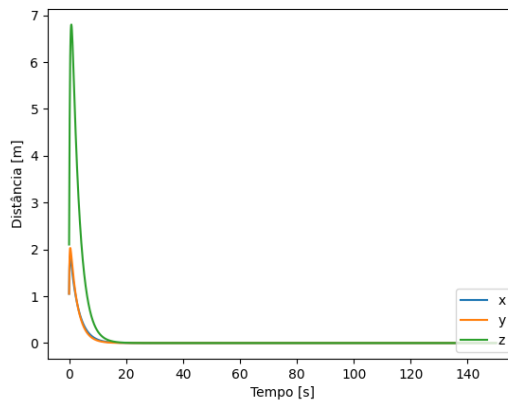


Figura 4.5: Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo

Nas Figuras 4.3 e 4.5 podemos verificar que inicialmente existe uma diferença entre os pontos onde o veículo espacial se encontra e os pontos ideais da transferência orbital e, desta forma, temos uma distância relativa diferente de zero. Essa diferença não é muito significativa, sendo maior na componente em  $z$ . Podemos também observar que rapidamente convergem assintoticamente para zero todas as componentes da distância relativa. Na Figura 4.4, observamos a distância relativa em 3D entre o veículo espacial e os pontos ideais

da transferência orbital ao longo do tempo. Nesta Figura as coordenadas de cada ponto são as distâncias relativas para cada um dos componentes,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , num determinado tempo. Assim, podemos observar a evolução das componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  até se conseguir alcançar o ponto de origem do referencial e cujo significado é o facto de o veículo espacial está no percurso ideal de transferência.

Relativamente à velocidade do veículo espacial ao longo da transferência orbital, foram obtidos os resultados presentes nas seguintes Figuras:

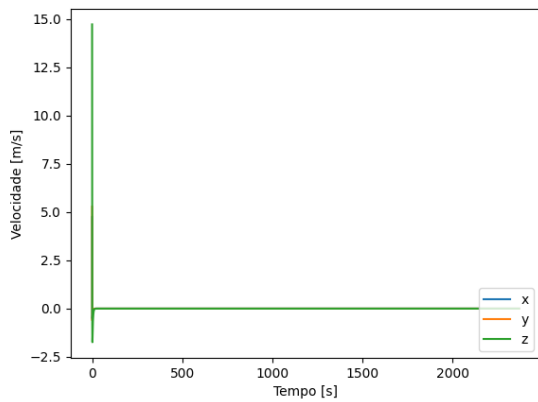


Figura 4.6: Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

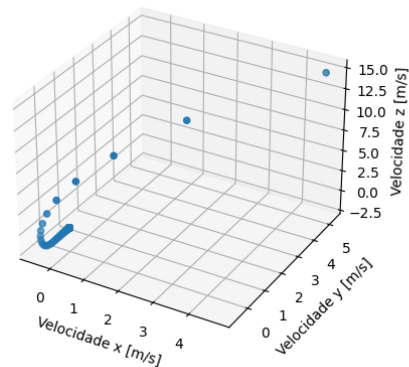


Figura 4.7: Velocidade relativa 3D

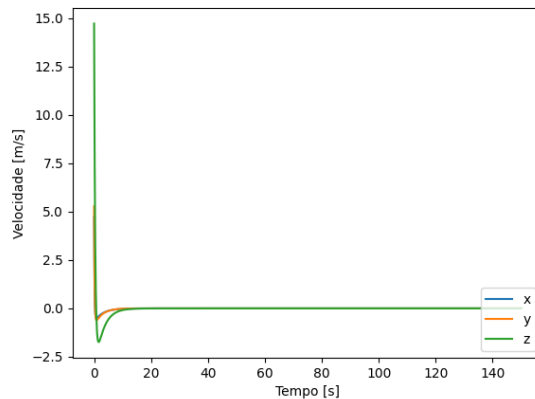


Figura 4.8: Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

Nas figuras 4.6 e 4.8 podemos visualizar a velocidade relativa ao longo do tempo da missão para cada uma das componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Verificamos que a velocidade converge para zero em todos os componentes num curto período de tempo, ou seja, rapidamente é alcançada a velocidade que o veículo espacial deve ter durante o movimento de transferência. Na Figura 4.7 podemos visualizar a evolução ao longo do tempo das coordenadas para a velocidade relativas do veículo espacial onde observamos que existe uma convergência para zero e que nesse ponto não existem variações mesmo que mínimas.

Assim, podemos concluir que o controlador  $H_\infty$  apresenta bons resultados quando aplicado unicamente ao modelo dinâmico escolhido. Podemos assim introduzir as perturbações às simulações.

- Simulações com perturbações e sem limitações dos atuadores

Tal como referido anteriormente, no espaço existem diversos tipos de perturbações que podem comprometer o funcionamento e a capacidade do controlador  $H_\infty$ . Assim, na presente secção vão ser introduzidas as perturbações ao modelo em estudo. A forma como vamos aplicar as perturbações já foi explicada anteriormente neste capítulo. Ao aplicar as perturbações foram obtidos os seguintes resultados para as distâncias relativas:

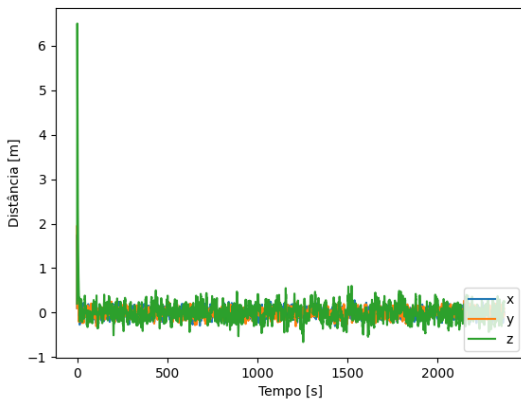


Figura 4.9: Distância relativa em x, y e z em cada eixo

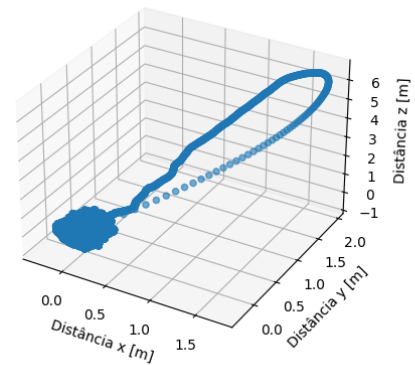


Figura 4.10: Distância relativa em 3D

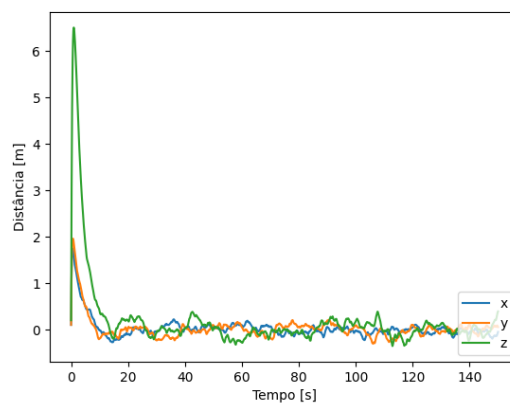


Figura 4.11: Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo

Verificamos que todas as componentes convergem para valores muito próximos de zero, Figura 4.9 e 4.11. Na Figura 4.11, inicialmente temos uma distância relativa maior que rapidamente é diminuída e que, ao longo da missão, existem sucessivamente correções a fazer neste parâmetro em todas as componente. Tal é devido às perturbações introduzidas em cada ciclo

de cálculo e às correções introduzidas pelo controlador. Podemos verificar que esses erros introduzidas não afetam de forma significativa a posição do veículo espacial pois as distâncias relativas obtidas para a transferência são muito pequenas. Mesmo assim, a maior variação/desvio corresponde à componente em  $z$ . Na Figura 4.10 podemos visualizar os pontos em 3D que são constituídos pelas componentes de  $x$ ,  $y$  e  $z$  num determinado tempo. Observamos que inicialmente os pontos convergem para a origem do referencial, o ponto de coordenadas zero. Neste ponto é visível uma pequena "nuvem de pontos" que representa a constante introdução de perturbações no sistema e que são corrigidas pelo controlador, fazendo com que surja este fenômeno.

Relativamente à velocidade do veículo espacial ao longo da transferência orbital com a introdução das perturbações, foram obtidos os seguintes resultados:

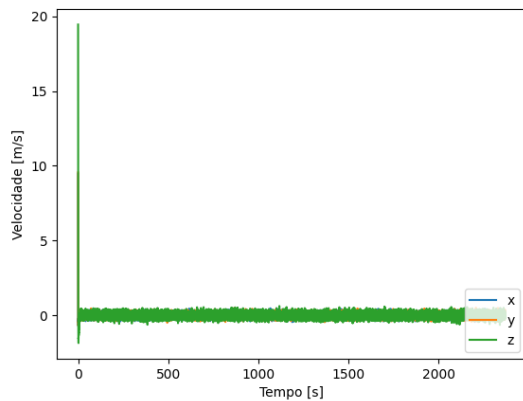


Figura 4.12: Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

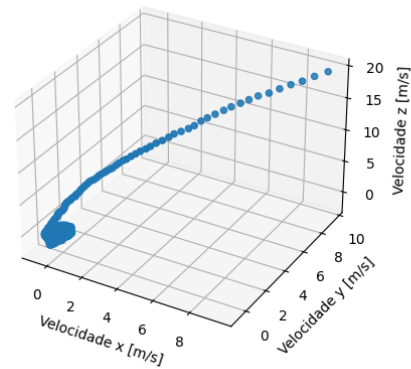


Figura 4.13: Velocidade relativa 3D

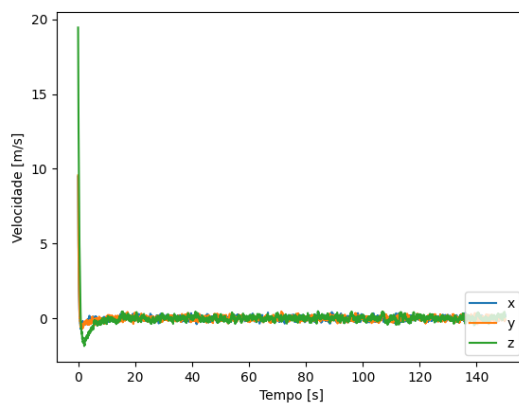


Figura 4.14: Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

Tal como esperado, inicialmente temos as maiores variações que são rapidamente corrigidas pelo controlador. Ao longo de toda a transferência existem variações na velocidade relativa que são resultado das perturbações e das ações do controlador. Mesmo assim, podemos verificar que todas as componentes de velocidade relativa convergem para valores muito próxi-

mos de zero sendo a componente  $z$  a apresentar os maiores desvios, tal como observamos nas Figuras 4.12 e 4.14. Na Figura 4.13 observamos os pontos constituídos pelas velocidades relativas em um determinado tempo. Podemos observar que, ao contrário do gráfico obtido em 4.7, existe uma constante variação que indica que o controlador está constantemente a corrigir as perturbações introduzidas fazendo com que as velocidades relativas do veículo espacial sejam sempre minimizadas. Essa constante ação do controlador para corrigir as perturbações pode ser observada nos seguintes gráficos onde são visíveis as acelerações aplicadas nos diversos eixos pelo trabalho dos atuadores:

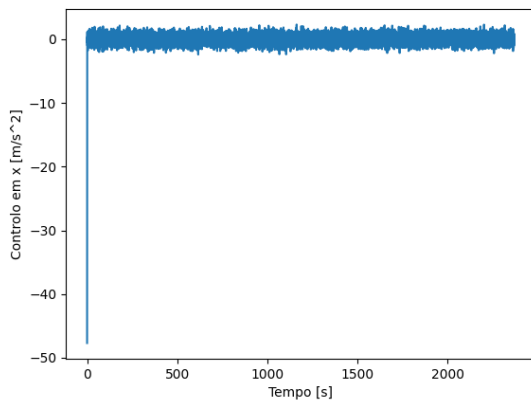


Figura 4.15: Controlo em x

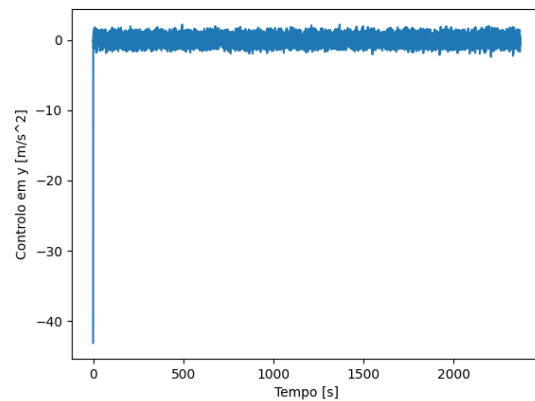


Figura 4.16: Controlo em y

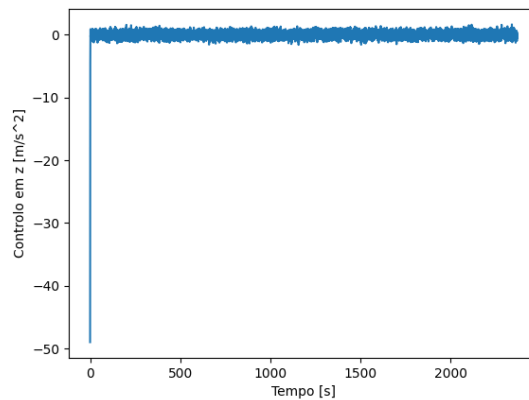


Figura 4.17: Controlo em z

Nestes gráficos observamos a introdução de acelerações no veículo espacial provocadas pelos propulsores ou atuadores de forma a permitir que o veículo espacial tenha sucesso a finalizar a transferência. Na presente simulação não foram consideradas as limitações dos atuadores e, desta forma, os gráficos acima apresentados podem não corresponder à capacidade que estes elementos possuem e induzir em erro aquando da execução da missão. Desta forma, na próxima simulação estas limitações já vão ser consideradas e podemos analisar de forma correta a capacidade e fiabilidade do controlador.

Assim, tendo em conta os resultados obtidos podemos concluir que o controlador projetado responde satisfatoriamente às perturbações introduzidas no sistema sendo capaz de

minimizá-las até termos valores praticamente desprezáveis. Finalmente, podemos introduzir as limitações físicas que os atuadores possuem e analisar a resposta do controlador.

- Simulações com perturbações e com limitações dos atuadores

Ao projetar qualquer tipo de sistema é necessário ter em atenção as possíveis limitações físicas que os seus constituintes possam possuir. Assim, devemos considerar as limitações que os componentes do veículo espacial possuem de forma a obter resultados aplicáveis no mundo real e, de seguida, aplica-las no controlador. Caso contrário, os atuadores podem saturar e não gerarem os valores de aceleração necessários para que a transferência orbital seja realizada. O modelo para implementar as limitações dos atuadores já foi apresentado nas secções anteriores. Ao aplicar as limitações dos atuadores no modelo do controlador robusto foram obtidos os seguintes resultados para as distâncias relativas:

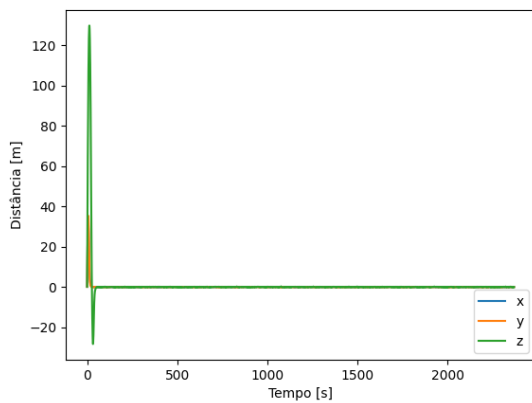


Figura 4.18: Distância relativa em x, y e z em cada eixo

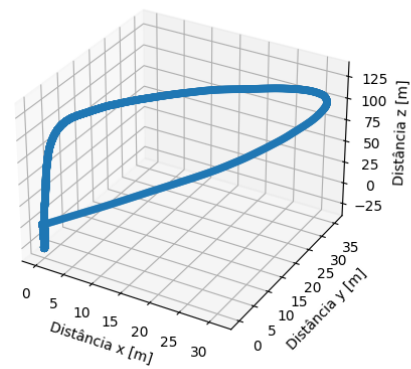


Figura 4.19: Distância relativa

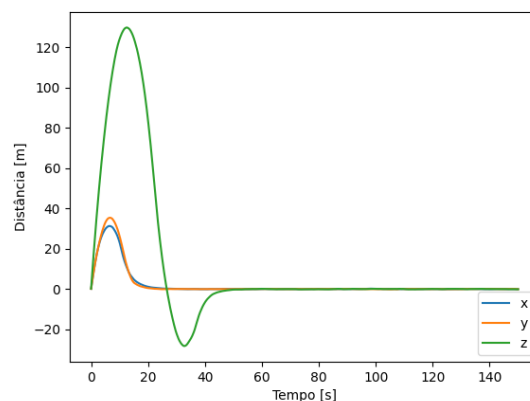


Figura 4.20: Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo

Nas Figuras 4.18 e 4.20 podemos observar que o controlador demora mais tempo a reduzir as distâncias relativas para valores próximos de zero, tal como era esperado. Tal facto é devido aos valores máximos que foram definidos para a atuação do controlador no o sis-

tema. Mesmo assim, o controlador  $H_\infty$  conseguiu desenvolver resultados bastante satisfatórios pois, a partir dos 50 segundos de missão, a distância relativa apresenta valores que indicam que a transferência orbital está a ser efetuada com erros muito pequenos, mesmo nulos. Na Figura 4.19 observamos que os pontos descrevem uma curva maior antes de alcançar a origem do referencial, essa curva é constituída pelos pontos nos momentos iniciais onde o controlador demorou mais tempo a minimizar a distância relativa.

Relativamente à velocidade do veículo espacial ao longo da transferência orbital com a introdução das perturbações e limitações dos atuadores, foram obtidas as seguintes Figuras:

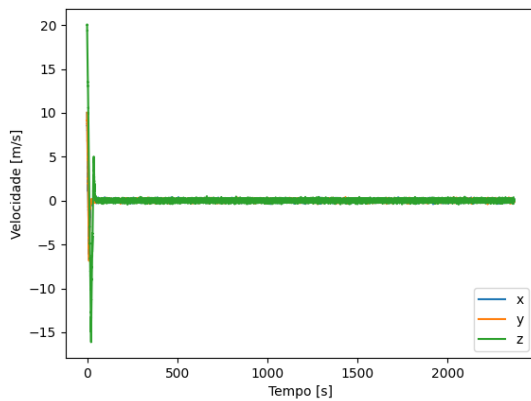


Figura 4.21: Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

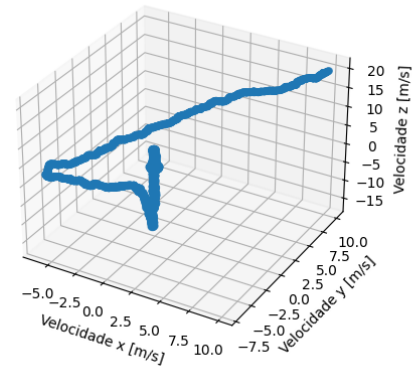


Figura 4.22: Velocidade relativa 3D

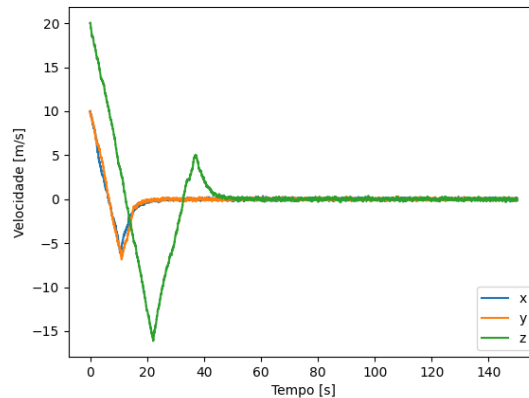


Figura 4.23: Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

Podemos observar que ao aplicar as limitações dos atuadores obtemos, mais uma vez, um maior tempo na minimização da velocidade relativa do veículo espacial, Figuras 4.21 e 4.23. Observamos também que a componente em  $z$  da velocidade relativa apresenta os maiores desvios quando comparada aos valores das componentes  $x$  e  $y$ . Mesmo assim, o controlador conseguiu minimizar este parâmetro para valores desprezáveis após 50 segundos de missão. Na Figura 4.22 observamos que temos um percurso de pontos maior antes de alcançar a origem do referencial que correspondem aos pontos do início da transferência.

Por fim, é importante analisar os gráficos gerados pelo controlador  $H_\infty$  para a ação dos atuadores na resposta às perturbações. Esses gráficos para as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  são:

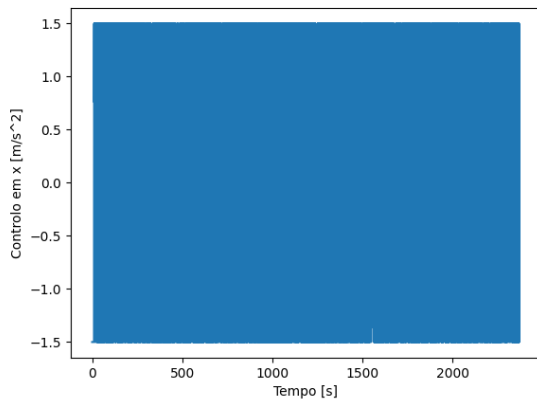


Figura 4.24: Controle em x

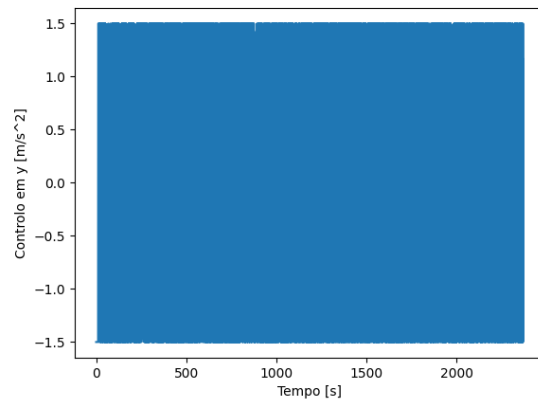


Figura 4.25: Controle em y

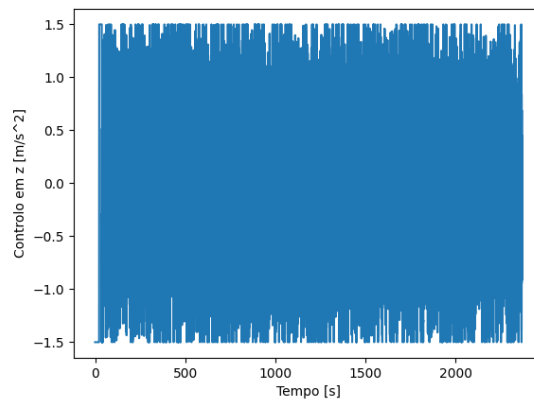


Figura 4.26: Controle em z

Podemos observar que para a resposta do controlador em  $x$ , e,  $y$  e em  $z$ , Figuras 4.24, 4.25 e 4.26 é necessário aplicar diversas vezes os valores máximos que são permitidos para os atuadores sendo o atuador menos solicitado o que corresponde à resposta em  $z$ , tendo em conta toda a missão. Nestes gráficos, podemos observar que os atuadores estão em regime máximo permitido constantemente e que, mesmo assim, foi possível realizar a transferência.

Em conclusão, analisando os resultados obtidos para a presente simulação, onde consideramos as perturbações e as limitações dos atuadores, o controlador  $H_\infty$  projetado apresentou resultados satisfatórios na otimização pretendida. Assim, concluímos que a transferência orbital era executável com a aplicação deste controlador.

#### 4.4.2 Exemplo B

Considerando agora o segundo exemplo para a aplicação do controlador  $H_\infty$ , podemos gerar novas simulações e analisar os resultados obtidos para este exemplo.

Inicialmente devemos estudar a estabilidade, controlabilidade e observabilidade do sistema. Assim, aplicando o mesmo modelo apresentado no exemplo anterior, foi obtido que o sistema é, mais uma vez, marginalmente estável para as diversas matrizes  $A$  que variam com o tempo da transferência pois os autovalores apresentam partes reais iguais ou menores que zero. Foi obtido  $caract(C_0) = 6$  para todas as iterações e assim verificamos que o sistema é controlável. Foi sempre obtido  $caract(\theta) = 6$  o que nos indica, mais uma vez, que o sistema possui observabilidade. Para a matriz  $A$  inicial, que é formada pela média dos valores máximos e mínimos dos parâmetros que a constituem, foram obtidas as mesmas características de estabilidade, controlabilidade e observabilidade mencionadas acima.

Resolvendo a equação de Riccati para o exemplo em estudo, foram obtidas as seguintes matrizes  $P$  e  $K$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1.9999 & 2.9990 & 3.7427 \cdot 10^{-20} & 3.5648 \cdot 10^{-19} & 2.4304 \cdot 10^{-08} & 0.0073 \\ 2.9990 & 9.9860 & 3.4854 \cdot 10^{-19} & 3.6238 \cdot 10^{-18} & -0.0036 & 0.0175 \\ 3.7427 \cdot 10^{-20} & 3.4854 \cdot 10^{-19} & 1.9999 & 2.9990 & 1.7584 \cdot 10^{-20} & 1.1880 \cdot 10^{-19} \\ 3.5648 \cdot 10^{-19} & 3.6238 \cdot 10^{-18} & 2.9990 & 8.9863 & 2.0461 \cdot 10^{-19} & 1.6545 \cdot 10^{-18} \\ 2.4304 \cdot 10^{-08} & -0.0036 & 1.7584 & 2.0461 \cdot 10^{-19} & 1.0001 & 1.5012 \\ 0.0073 & 0.0175 & 1.1880 \cdot 10^{-19} & 1.6545 \cdot 10^{-18} & 1.5012 & 5.0105 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1.4995 & 4.9930 & 1.7427 \cdot 10^{-19} & 1.8119 \cdot 10^{-18} & -0.0018 & 0.0087 \\ 1.7824 \cdot 10^{-19} & 1.8119 \cdot 10^{-18} & 1.4995 & 4.4931 & 1.0230 \cdot 10^{-19} & 8.2727 \cdot 10^{-19} \\ 0.0036 & 0.0087 & 5.9401 \cdot 10^{-20} & 8.2727 \cdot 10^{-19} & 0.7506 & 2.5052 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Com estas matrizes podemos calcular a equação de controlo que é definida em 4.18. Necessitamos somente do vetor de estado inicial  $x(t_0)$  para poder iniciar as simulações para o exemplo em estudo. O vetor de estado inicial considerado é:

$$x(t_0) = x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}^T \quad (4.22)$$

- Simulações sem perturbações e sem limitações dos atuadores

Para a presente simulação, tal como para o exemplo A, foram obtidos resultados bastante satisfatórios. Relativamente às distâncias relativas foram obtidos os seguintes gráficos:

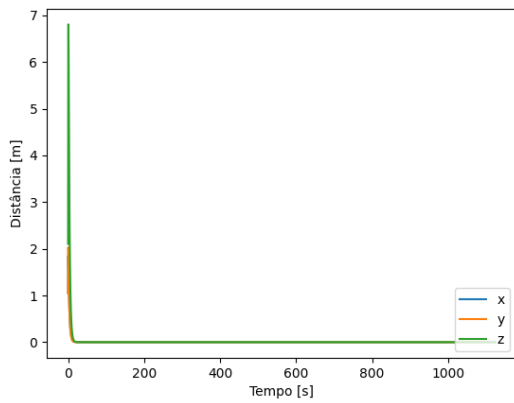


Figura 4.27: Distância relativa em x, y e z em cada eixo

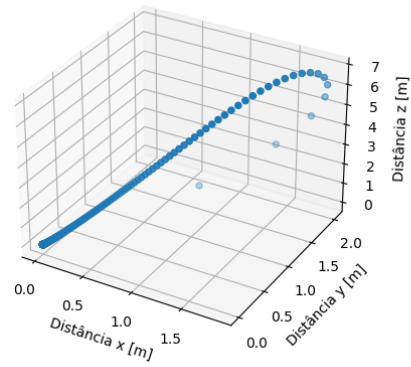


Figura 4.28: Distância relativa em 3D

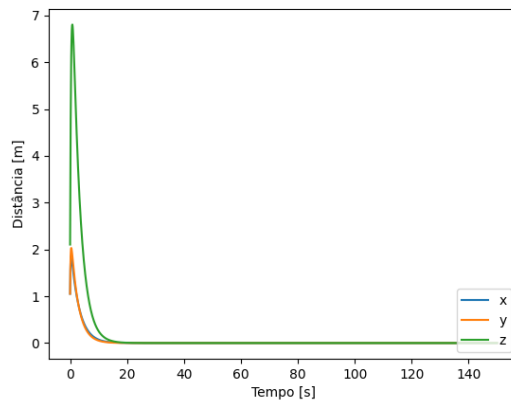


Figura 4.29: Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo

Nas Figuras 4.27 e 4.29 verificamos que a coordenada em  $z$  apresentou um afastamento muito significativo do ponto ideal da trajetória quando comparado com as outras coordenadas no início do movimento. Esse deslocamento foi rapidamente corrigido pelo controlador juntamente com os deslocamentos em  $x$  e  $y$ , sendo a distância relativa nula a partir dos 20 segundos. Na Figura 4.28 observamos que os pontos formados pelas distâncias relativas convergem para a origem do referencial rapidamente, tal como no exemplo A. É possível verificar isso uma vez que as distâncias entre os pontos são muito maiores no início da missão e quanto mais próximos os pontos estiverem da origem do referencial mais pequenas são essas distâncias. Temos assim uma convergência para zero em todas as componentes.

Relativamente à velocidade do veículo espacial ao longo da transferência orbital, foram obtidas os seguintes gráficos:

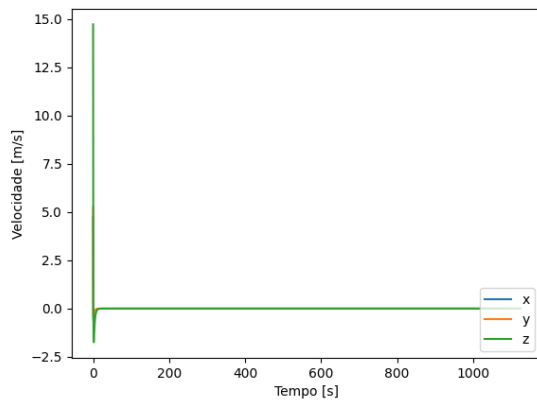


Figura 4.30: Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

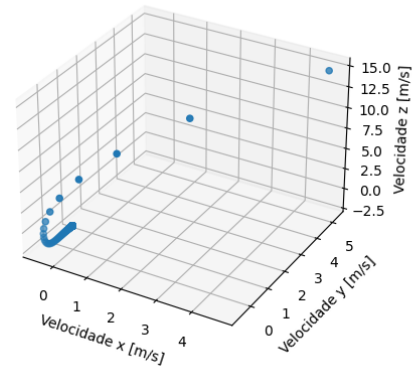


Figura 4.31: Velocidade relativa 3D

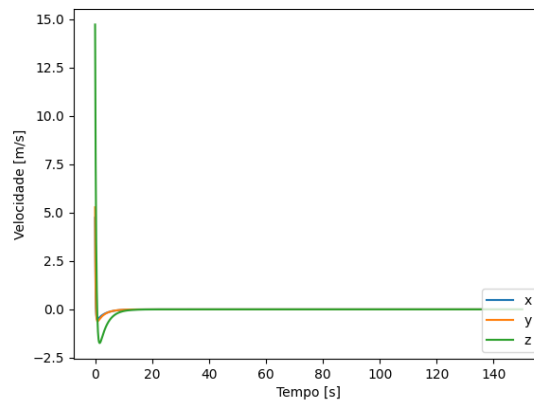


Figura 4.32: Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

Nas Figuras 4.30 e 4.32 verificamos que todas as componentes da velocidade convergem para zero num curto período de tempo. Na Figura 4.31 verificamos que quanto maior a proximidade com a origem do referencial mais pequena é a distância entre os pontos o que indica que as diferenças entre as velocidades relativas variam muito rapidamente com o tempo no início da missão.

Observando os resultados, e comparando com os obtidos no exemplo A, podemos concluir que o controlador  $H_\infty$  apresenta, novamente, bons resultados quando aplicado unicamente ao modelo dinâmico.

- Simulações com perturbações e sem limitações dos atuadores

Introduzindo as perturbações nas simulações do exemplo B, foram obtidas as seguintes Figuras:

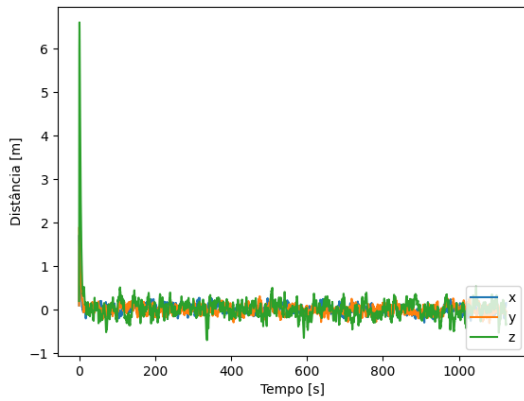


Figura 4.33: Distância relativa em x, y e z em cada eixo

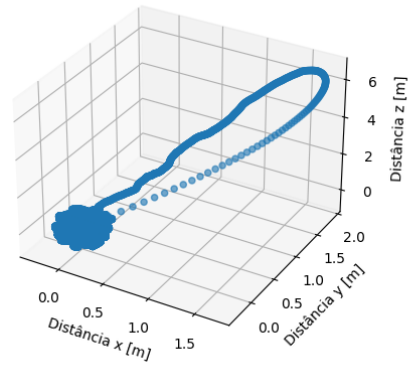


Figura 4.34: Distância relativa em 3D

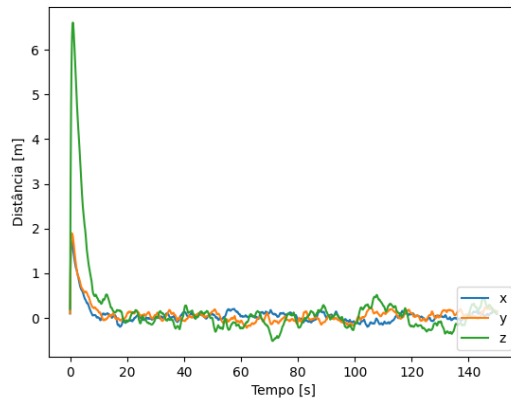


Figura 4.35: Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo

Nas Figuras 4.33 e 4.35 podemos verificar que o controlador conseguiu minimizar as distâncias relativas para valores próximos de zero, praticamente valores nulos em todas as componentes sendo a componente em  $z$  a que apresenta os maiores valores de distância relativa ao longo da missão, tal como foi obtido no exemplo A. Na Figura 4.34 podemos observar que os pontos convergem para a origem do referencial. Tal como no exemplo A, existe uma curva formada pelos pontos iniciais que converge para a origem do referencial e, em torno deste ponto, está presente uma nuvem de pontos que representa a constante introdução de perturbações no sistema e que são sucessivamente corrigidas pela ação do controlador.

Relativamente à velocidade do veículo espacial ao longo da transferência orbital com a introdução das perturbações, foram obtidos os seguintes gráficos:

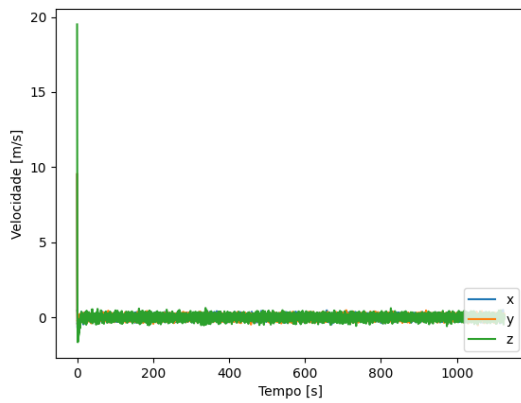


Figura 4.36: Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

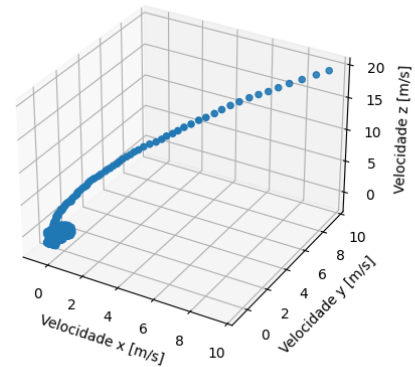


Figura 4.37: Velocidade relativa 3D

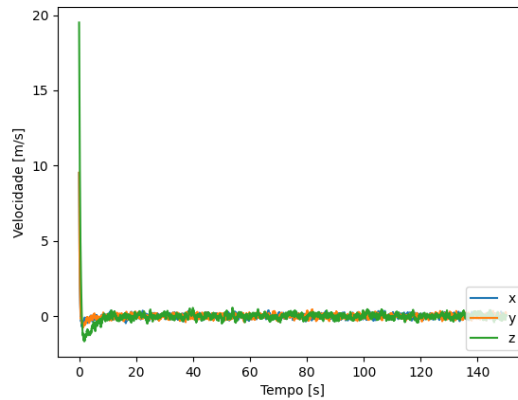


Figura 4.38: Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

A componente em  $z$  apresenta, durante toda a missão, os maiores valores de velocidade relativa, Figuras 4.36 e 4.38, tal como o obtido no exemplo A. Mesmo assim, estes valores são muito pequenos, sendo praticamente desprezáveis. Verificamos também que inicialmente existem valores muito elevados de velocidade relativa que são rapidamente corrigidos pelo controlador o que pode não corresponder à realidade do sistema quando consideradas as limitações físicas. Na Figura 4.37 verificamos que os valores obtidos e que descrevem os pontos apresentam uma distribuição em forma de nuvem em torno do percurso que inicialmente foi obtido em 4.31. Mesmo assim, é possível verificar que o controlador consegue manter as velocidades dentro de um intervalo de valores bastante pequeno ao longo de toda a transferência mesmo com a influência das perturbações.

Os gráficos gerados pelo controlador para a ação dos atuadores em resposta às perturbações introduzidas são as Figuras 4.39, 4.40 e 4.41.

Podemos observar que o controlador introduz durante toda a missão vários valores de aceleração nos diversos eixos para corrigir as perturbações introduzidas no sistema. Na presente

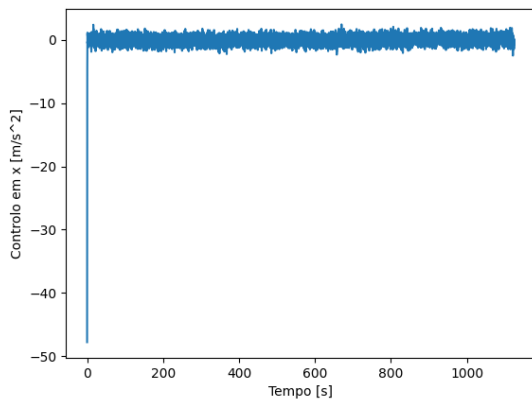


Figura 4.39: Controlo em x

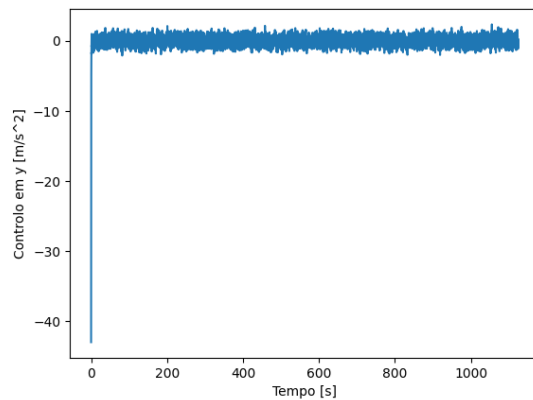


Figura 4.40: Controlo em y

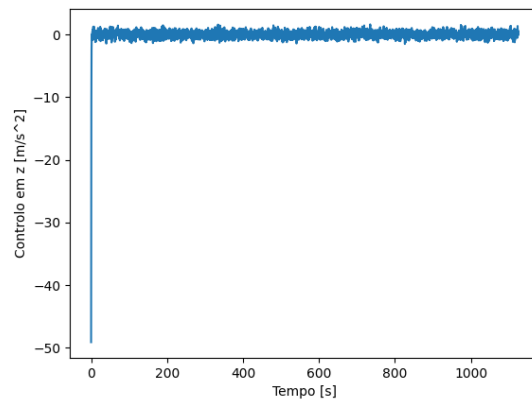


Figura 4.41: Controlo em z

simulação não foi considerado a possível saturação ou incapacidade dos atuadores de gerarem as acelerações presentes nos gráficos acima. Desta forma, na próxima secção vão ser introduzidos valores máximos para as acelerações que podem ser geradas pelos atuadores e estudar a fiabilidade do controlador para presente exemplo prático.

Assim, mais uma vez, verificamos que o controlador consegue desenvolver resultados bastante satisfatórios na resposta às perturbações que foram introduzidas no sistema, tal como observado no exemplo A.

- Simulações com perturbações e com limitações dos atuadores

Por fim, vamos simular o sistema com as limitações dos atuadores, tal como realizado no exemplo A. Desta forma, considerando as limitações e as perturbações nas simulações para o exemplo B, foram obtidos os seguintes resultados para as distâncias relativas:

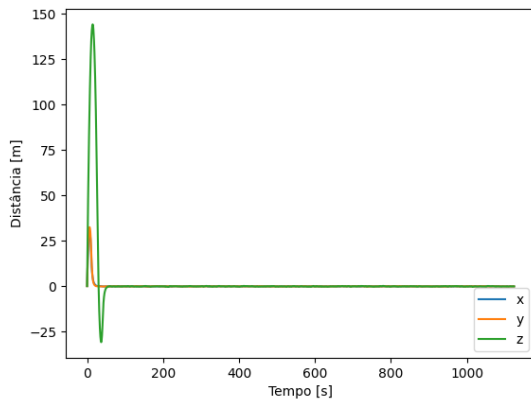


Figura 4.42: Distância relativa em cada eixo em função do tempo

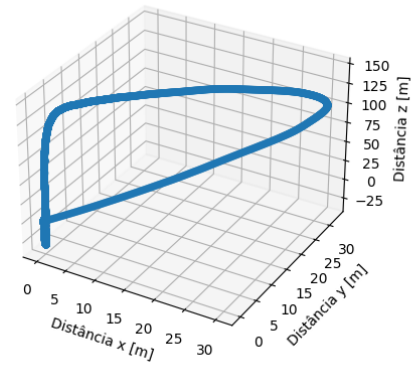


Figura 4.43: Distância relativa

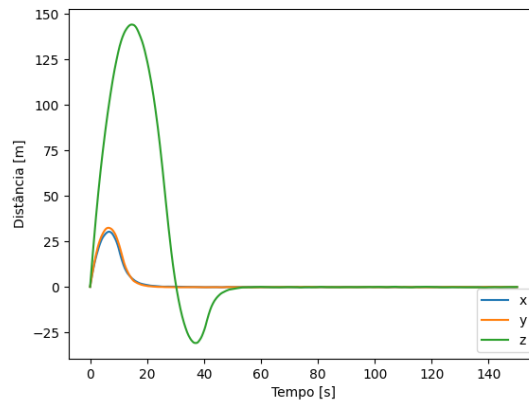


Figura 4.44: Escala de tempo reduzida da distância relativa em x, y e z em cada eixo

Tal como era esperado, para a presente simulação a atenuação dos valores de distância relativa demora mais tempo, uma vez que temos valores máximos para a atuação do controlador, Figuras 4.42 e 4.44, tal como foi obtido no exemplo A. A componente em  $z$  apresenta o deslocamento relativo maior no início do movimento sendo que, a partir do segundo 60 o controlador consegue minimizar os valores da distância relativa para valores muito pequenos ou mesmo nulos. Na Figura 4.43 observamos que a nuvem de pontos em torno da origem do referencial é muito mais pequena que a obtida em 4.34 o que nos indica que a variação da distância relativa ao longo da missão é muito pequena. O arco para alcançar a origem é maior pois é necessário mais tempo para diminuir a distância relativa.

Relativamente à velocidade do veículo espacial ao longo da transferência orbital com a introdução das perturbações e limitações dos atuadores, foram obtidos os seguintes gráficos:

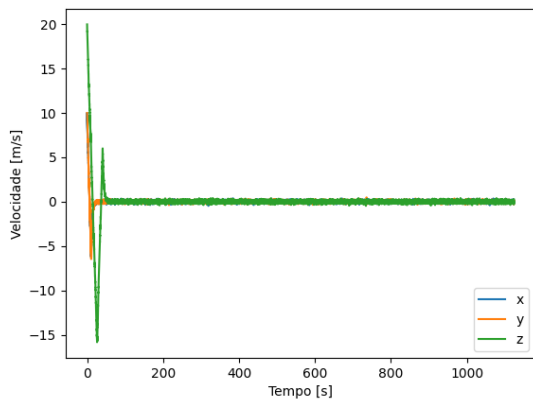


Figura 4.45: Velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

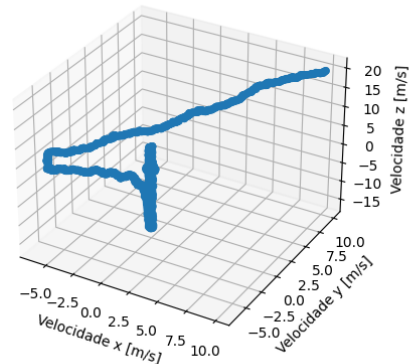


Figura 4.46: Velocidade relativa 3D

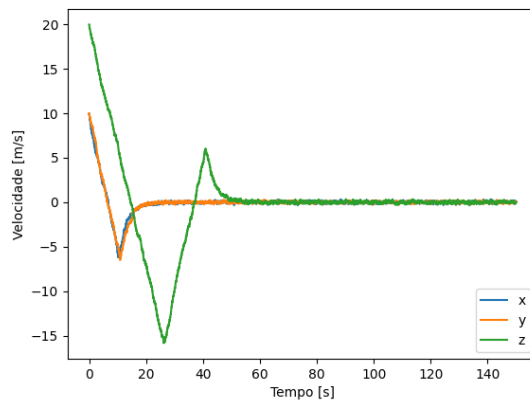


Figura 4.47: Escala de tempo reduzida da velocidade relativa em x, y e z em cada eixo

Nas Figuras 4.45 e 4.47 observamos que os valores de velocidade relativa são mais elevados no início da missão mas que, a partir dos 60 segundos temos valores muito próximos de zero, com variações mínimas. Tal como mencionado na simulação anterior, podemos verificar que os valores de velocidade iniciais não podem ser minimizados rapidamente pois é necessário um intervalo de tempo para a ação dos atuadores. Verificamos também que a componente  $z$  apresenta os valores mais elevados para o início da transferência quando comparada com as outras componentes. Na Figura 4.46 temos um percurso de pontos maior até alcançar a origem quando comparado com a Figura 4.37, ou seja, o tempo necessário para conseguir convergir os pontos para valores próximos de zero é maior.

Por fim, os gráficos gerados pelo controlador  $H_\infty$  para a atuação dos controladores na resposta às perturbações são as Figuras 4.48, 4.49 e 4.50.

Na resposta do controlador em  $x$ ,  $y$  e  $z$  os valores máximos definidos para a resposta dos atuadores foram atingidos diversas vezes, sendo os momentos iniciais da transferência os períodos onde os atuadores foram mais solicitados. Tal como no exemplo A, em todos os

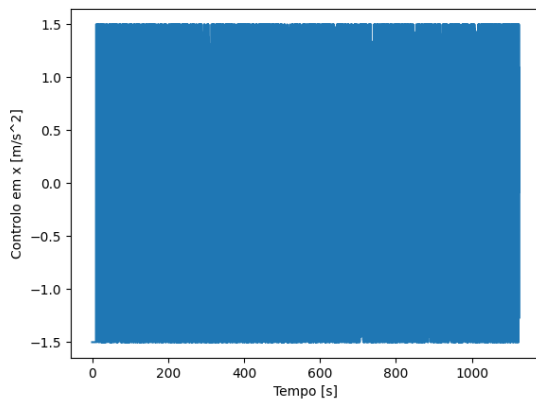


Figura 4.48: Controlo em x

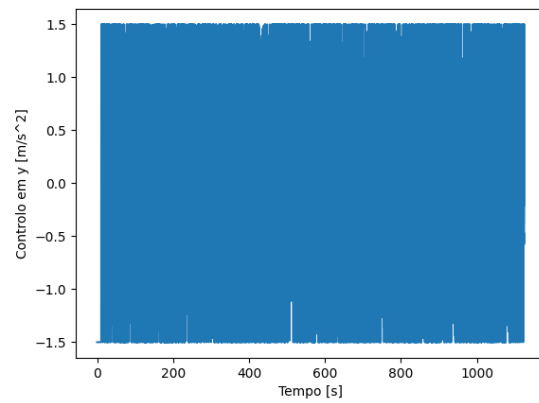


Figura 4.49: Controlo em y

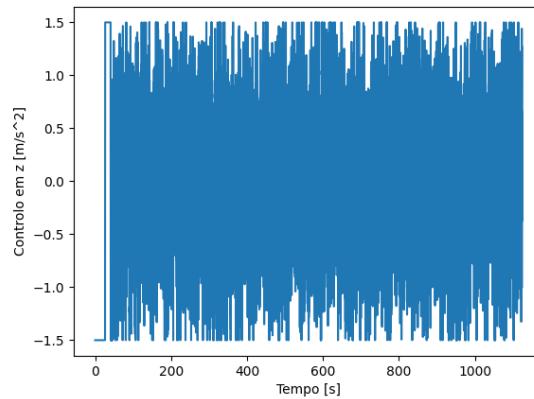


Figura 4.50: Controlo em z

atuadores o controlo apresenta uma maior solicitação do regime máximo permitido nos momentos iniciais. A resposta em  $z$  do controlador é a que apresenta valores menos elevados para alguns momentos da transferência.

Em conclusão, o controlador  $H_\infty$  projetado apresentou resultados satisfatórios na otimização pretendida. Assim, tendo em conta as análises, observamos que a transferência orbital era executável com a aplicação deste controlador tal como verificamos também no exemplo A.



# Capítulo 5

## Conclusão e Trabalho Futuro

O espaço representa hoje um motor de desenvolvimento e crescimento económico a nível mundial. Os diversos obstáculos que este ambiente possui fazem com que o Homem esteja constantemente em busca de soluções novas e mais eficientes para poder operar nele nas melhores condições e com as maiores garantias. Assim, qualquer elemento que faça parte de uma missão espacial deve ser estudado e otimizado da melhor forma possível para reduzir a possibilidade de surgimento de falhas. A presente dissertação tem como principal objetivo projetar um controlador robusto  $H_\infty$  para realizar a transferência orbital entre duas órbitas não coplanares sujeita a perturbações externas e limitações nos atuadores, ou seja, otimizar e tornar mais viável um dos principais elementos em qualquer missão espacial.

No primeiro capítulo foi realizada uma breve introdução e revisão ao tema central do problema em estudo, nomeadamente o problema de transferência orbital. No segundo capítulo foram descritos todos os elementos matemáticos e de astrodinâmica necessários para desenvolver e simular a órbita de transferência como, por exemplo, as equações de Tschauner-Hempel, o Problema de Lambert ou simular as perturbações espaciais. No terceiro capítulo são apresentados os elementos de controlo de sistemas e é onde se descreve o modelo matemático para desenvolver o controlador robusto  $H_\infty$ . Por fim, no quarto capítulo o controlador  $H_\infty$  projetado é aplicado a dois exemplos práticos e são analisados os resultados obtidos.

Dos resultados obtidos para cada exemplo podemos concluir que o controlador robusto  $H_\infty$  apresenta resultados bastante satisfatórios, tendo conseguido otimizar a transferência orbital diminuindo e corrigindo sucessivamente as diversas perturbações que foram introduzidas durante toda a missão mesmo com a presença das limitações. Assim, tendo em conta os resultados obtidos, o controlador robusto  $H_\infty$  desenvolvido apresenta condições de ser aplicado na execução de transferências orbitais. Estes resultados são muito interessantes no domínio aeroespacial pois, devido às dificuldades que este setor apresenta e aos elevados custos de operação, qualquer possível falha deve ser minimizada ao máximo. Este controlador apresenta-se assim, como uma ótima ferramenta no que toca à redução dos efeitos das perturbações espaciais, mesmo quando se têm limitações nos atuadores.

Para um estudo mais pormenorizado, seria de grande interesse analisar o gasto energético, que não foi tido em conta no presente estudo, e implementar este controlador em simuladores realistas onde possam ser introduzidas variáveis como as dimensões do veículo espacial ou características mais precisas dos propulsores.



# Bibliografia

- [1] “ESA - Earth explorers, the earth’s true shape.” [https://www.esa.int/ESA\\_Multimedia/Images/2010/04/Earth\\_Explorers\\_The\\_Earth\\_s\\_true\\_shape](https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2010/04/Earth_Explorers_The_Earth_s_true_shape). (Visitado em dezembro 2022).
- [2] Zhou, B., Lin, Z., and Duan, G.-R., “Lyapunov differential equation approach to elliptical orbital rendezvous with constrained controls,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 34, no. 2, p. 345–358, 2011.
- [3] Curtis, H. D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier, 2008.
- [4] “Distribuição normal (gaussiana).” <https://www.inf.ufsc.br/~andre.zibetti/probabilidade/normal.html>. (Visitado em dezembro 2022).
- [5] Chen, B. M., “Robust  $H_\infty$  control,” *Springer-Verlag London, Singapore*, 2000.
- [6] Ting, L., “Optimum orbital transfer by impulses,” *ARS Journal*, vol. 30, no. 11, p. 1013–1018, 1960.
- [7] Lee, G., “An analysis of two-impulse orbital transfer,” *AIAA Journal*, vol. 2, no. 10, p. 1767–1773, 1964.
- [8] Vinh, N. X., Kuo, S. H., and Marchal, C., “Optimal time-free nodal transfers between elliptical orbits,” *Acta Astronautica*, vol. 17, no. 8, p. 875–880, 1988.
- [9] Izzo, D., “Revisiting lambert’s problem,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 121, no. 1, p. 1–15, 2014.
- [10] De La Torre, D. and Fantino, E., “Review of lambert’s problem.,” in *ISSFD 2015: 25th International Symposium on Space Flight Dynamics*, LNCS, pp. 1–15, Springer Verlag, 2015.
- [11] Santos, D., Kuga, H., and Lopes, R., “Estimação da trajetória de rendezvous através da dinâmica do movimento relativo (formation flying),” 2015.
- [12] Yamanaka, K. and Ankersen, F., “New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 25, no. 1, p. 60–66, 2002.
- [13] Raja, M., Pandey, S., Kumar, R., and Dalmia, A., “Design of trajectory and perturbation analysis for satellite orbital parameters,” *Advances in Fire and Process Safety*, p. 319–

336, 2018.

- [14] Hamel, J.-F. and de Lafontaine, J., “Linearized dynamics of formation flying spacecraft on a J2-perturbed elliptical orbit,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 30, no. 6, p. 1649–1658, 2007.
- [15] Yu, B. and Jin, D., “Deployment and retrieval of tethered satellite system under J2 perturbation and heating effect,” *Acta Astronautica*, vol. 67, no. 7-8, p. 845–853, 2010.
- [16] Jo, J.-H., Park, I.-K., Choe, N.-M., and Choi, M.-S., “The comparison of the classical keplerian orbit elements, non-singular orbital elements (equinoctial elements), and the cartesian state variables in lagrange planetary equations with j2perturbation: Part i,” *Journal of Astronomy and Space Sciences*, vol. 28, no. 1, p. 37–54, 2011.
- [17] Yamada, K., Kimura, M., Shima, T., and Yoshikawa, S., “New state transition matrix for formation flying in J2-perturbed elliptic orbits,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 35, no. 2, p. 536–547, 2012.
- [18] Haberkorn, T., Martinon, P., and Gergaud, J., “Low thrust minimum-fuel orbital transfer: A homotopic approach,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 27, no. 6, p. 1046–1060, 2004.
- [19] Herman, A. L. and Spencer, D. B., “Optimal, low-thrust earth-orbit transfers using higher-order collocation methods,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 25, no. 1, p. 40–47, 2002.
- [20] Pardis, C. J. and Carter, T. E., “Optimal power-limited rendezvous with thrust saturation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 5, p. 1145–1150, 1995.
- [21] Bernstein, D. S., “Optimal nonlinear, but continuous, feedback control of systems with saturating actuators,” *International Journal of Control*, vol. 62, no. 5, p. 1209–1216, 1995.
- [22] Teodoro, A. R. B., Santos, D. P. S. d., de A. Prado, A. F. B., and Policarpo, L. S., “Análise e comparação de dinâmicas para transferências orbitais no sistema terra-lua,” *Revista Univap.*, 2013.
- [23] Park, J.-U., Choi, K.-H., and Lee, S., “Orbital rendezvous using two-step sliding mode control,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 3, no. 4, p. 239–245, 1999.
- [24] Karlgaard, C. D., “Robust rendezvous navigation in elliptical orbit,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 29, no. 2, p. 495–499, 2006.

- [25] Gurfil, P., “Nonlinear feedback control of low-thrust orbital transfer in a central gravitational field,” *Acta Astronautica*, vol. 60, no. 8-9, p. 631–648, 2007.
- [26] Gao, H., Yang, X., and Shi, P., “Multi-objective robust  $H_\infty$  control of spacecraft rendezvous,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, no. 4, p. 794–802, 2009.
- [27] Yang, X., Gao, H., and Shi, P., “Robust orbital transfer for low earth orbit spacecraft with small-thrust,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 347, no. 10, p. 1863–1887, 2010.
- [28] Imani, A. and Beigzadeh, B., “Robust control of spacecraft rendezvous on elliptical orbits: Optimal sliding mode and backstepping sliding mode approaches,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 230, no. 10, p. 1975–1989, 2015.
- [29] Khargonekar, P., Petersen, I., and Rotea, M., “ $H_2/H_\infty$ -optimal control with state-feedback,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 8, p. 786–788, 1988.
- [30] Khargonekar, P., Petersen, I., and Zhou, K., “Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and  $H_2/H_\infty$  control theory,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 3, p. 356–361, 1990.
- [31] Saberi, A., Chen, B., Sannuti, P., and Ly, U.-L., “Simultaneous  $H_2/H_\infty$  optimal control - the state feedback case,” *Guidance, Navigation and Control Conference*, 1992.
- [32] Oliveira, R. P. M., “Numerical study of earth-mars trajectories with lunar gravity assist manoeuvres,” *Dissertação de Mestrado em Engenharia Aeronáutica, Universidade da Beira Interior*, 2017.
- [33] Fontenelle, B. M., “Técnica de controle robusto  $H_\infty$  aplicada a um sistema de posicionamento dinâmico,” *Universidade Federal do Rio de Janeiro*, 2011.
- [34] Barros, P. H. O., “Robust  $H_\infty$  control for rendezvous in near-circular orbit,” *Dissertação de Mestrado em Engenharia Aeronáutica, Universidade da Beira Interior*, 2018.
- [35] Costa, M. E. M. N., “Orientação de mísseis interceptores com base no método dos reguladores quadráticos lineares (LQR) com estimação de trajetórias,” *Dissertação de Mestrado em Engenharia Aeronáutica, Universidade da Beira Interior*, 2017.
- [36] Coelho, M. F., “Estimação robusta de Órbitas de satélites LEO baseada na fusão multissensorial de dados,” *Dissertação de Mestrado em Engenharia Aeronáutica*, 2017.

*tica, Universidade da Beira Interior, 2014.*

- [37] Gil, P. J. S., “Elementos de mecânica orbital(para a cadeira de dinâmica de satélites),” *Instituto Superior Técnico, 2020.*

# Apêndices

Versão corrigida do artigo apresentado por videochamada na Conferência ISATECH'22 a 16 de setembro de 2022 na Universidade de Belgrado, Servia.

# H-infinity Control of Orbital Trajectories with Stochastic Models

Luís G. Andrade and K. Bousson

**Abstract:** This paper describes the formulation and numerical investigation of the robust  $H_\infty$  control problem for the orbital transfer of a spacecraft between two non-coplanar orbits subject to parameter uncertainties and external disturbance. The dynamic model of relative motion illustrated by Tschauner-Hempel (T-H) equations is used to define the orbital transfer model. An illustrative example is provided to show the effectiveness of the proposed control design method.

**Keywords:** Orbital Transfer,  $H_\infty$  robust controller, Tschauner-Hempel (T-H) equations.

## 1. Introduction

Any mission such as repair, rescue, docking interception, large-scale structure assembling, satellite networking and even rendezvous depend directly on the success of the orbital transfer associated with them. During the last few years, the orbital transfer problem has been addressed as an integral part of the rendezvous problem and rarely as an isolated problem since the rendezvous problem necessarily possesses the orbital transfer motion. Thus, we will use the relative motion models to study the robust  $H_\infty$  control problem for orbital transfer between two non-coplanar orbits. There are mainly two models for the rendezvous problem, the Hill-Clohessy-Wiltshire (C-W) equations and the Tschauner-Hempel (T-H) equations which we will use in this study. We will use the robust  $H_\infty$  control problem to achieve a more robust control since the control methods usually used do not have robustness for some types of orbital transfers. In [2] the robust control of a spacecraft rendezvous using the C-W equations is studied and in [3] the T-W equations are used.

The paper is organized as follows: Section 2 presents the problem statement that we intend to solve. Section 3 presents the dynamic model for orbital transfer, models used to define the transfer orbit and other tools needed to generate the solution to the problem. Section 4,  $H_\infty$  controller is presented. Section 5 presents an example to illustrate the applicability of the study and section 6 is the conclusion.

---

A1. Andrade(✉) A2. Bousson  
Universidade da Beira Interior (UBI), Covilhã, Portugal  
e-mail: gabriel.andrade@ubi.pt; bousson@ubi.pt  
Supported by LAETA-AEROG in the framework of the Project UIDB/50022/2020.

© Springer International Publishing AG ....  
T.H. Karakoç et al. (eds.), ISATECH'22, University of Belgrade, Serbia,  
DOI 10.1007/ .....

1

## 2. Problem Statement

The problem consists in transferring a spacecraft that is in an initial orbit to a final orbit efficiently and safely. The initial and final orbits are not coplanar and during the transference movement there are external disturbances that affect the spacecraft's ideal motion. The T-H equations will be used to define the dynamic motion of the spacecraft.

## 3. Orbit Transfer Model

This section will present the T-H equations [3] and establish the orbital transfer model to be implemented, which is based on the rendezvous motion. Thus, the problem under study in this paper will be formulated based on this model. We have the target-orbital coordinate system where the origin of the coordinate system is the position of the target, and the y axis is normal to the orbital plane, opposite to the angular momentum vector.  $\mathbf{R}$  is the vector from the centre of gravity to the target spacecraft and  $\mathbf{r}$  is the vector from the target spacecraft to the chaser spacecraft. The T-H equations of motion for the target spacecraft in the inertial frame are

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k\omega^{\frac{3}{2}}x + 2\omega\dot{z} + \dot{\omega}z + \omega^2x \\ -k\omega^{\frac{3}{2}}y \\ 2k\omega^{\frac{3}{2}}z - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x + \omega^2z \end{bmatrix} + \mathbf{a}_f$$

Where  $\omega$  is the orbital rate of the rotating coordinate system,  $\mathbf{a}_f = [a_f^x \ a_f^y \ a_f^z]^T$  is the acceleration vector due to thrust forces on the chaser spacecraft, and the constant  $k$  is defined as  $\frac{\mu}{R^3} = \left(\frac{\mu}{h^2}\right)\omega^{\frac{3}{2}} \equiv k\omega^{\frac{3}{2}}$ ,  $k \equiv \frac{\mu}{h^2} = \text{constant}$ . Where  $h$  is the orbital angular momentum of the target. These equations are valid for any orbit with arbitrary eccentricity. The only assumptions made were that the distance between the chaser and the target is very small compared to the distance between the target and the centre of the Earth ( $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}|$ ).

### 3.1. Orbit Trajectory Design

Knowing the initial orbit that a given spacecraft and the final orbit that it is intended to reach, it is necessary to define the transfer orbit between them. By defining a starting point vector in the initial orbit and the end point vector in the final orbit we can apply Lambert's Problem to define the transfer orbit [1]. This theorem consists of the determination of an orbit of which we know two position vectors,  $\mathbf{r}_1$  and  $\mathbf{r}_2$ , and the flight time between them, under a gravitational field of strength  $\mu$ . Since the ideal time interval for the orbit transfer is not defined, this value was determined by implementing an iteration cycle which goal is to minimize the difference between the module of the velocity vector of the point of arrival in the final orbit and the final point of the transfer orbit.

To implement the described above it is necessary to convert the orbital elements that define the orbits into Cartesian vectors. The orbital elements are the

semi-major axis ( $a$ ), eccentricity ( $e$ ), inclination ( $i$ ), the right ascension of the ascending node ( $\Omega$ ), the argument of periapsis ( $\omega$ ) and, the true anomaly ( $v$ ) [1]. As such we first calculate the position and velocity vectors in the perifocal coordinate system (PCS) and then use the rotation matrix  $[Q]$  to convert those vectors the geocentric equatorial system (Cartesian coordinates).

$$\mathbf{r}_{PCS} = \begin{bmatrix} \frac{a(1-e^2) \cos v}{1+e \cos v} \\ \frac{a(1-e^2) \sin v}{1+e \cos v} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{PCS} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \sin v \\ \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} (e + \cos v) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r} = Q \cdot \mathbf{r}_{PCS} \\ \mathbf{v} = Q \cdot \mathbf{v}_{PCS} \end{cases}$$

### 3.2. Orbit Trajectory Data Interpolation

To simulate the orbital transfer defined by the T-H equations, it is necessary to calculate some parameters that vary along the transfer, namely, the  $\omega$  and its derivative in time  $\dot{\omega}$ . To this end, we use the spherical coordinate system to determine the values of the desired orbital transfer and create a polynomial function for each of these coordinates. We can verify that the first derivative of the azimuthal angle polynomial function ( $\theta(t)$ ) corresponds to  $\omega$  and the second derivative of  $\theta(t)$  corresponds to  $\dot{\omega}$ .

## 4. H-infinity Control Design

In this section the  $H_\infty$  controller that was applied for orbital transfer is presented [4]. The main objective of the robust control is to determine the gain matrix  $K$  that minimizes the transfer function  $\|T\|_\infty$ . This way, the controller will attenuate the input disturbances in the system so that the outputs have minimal disturbance.

Considering the following linear dynamic uncertain system:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Where  $x_0$  is given but arbitrary,  $w(t) \in \mathbb{R}^p$  and  $D$  is a matrix of appropriate size. The matrix  $A$  is a time varying matrix which contains uncertain parameters and the measured state is assumed to be available for feedback, i.e. the measured output is the state  $x(t)$ . The main objective is to find a control function  $u(t)$  defined on the interval  $[t_0, t_f]$ , where  $t_f$  represents the total orbital transfer time. Thus, we can rewrite the T-H equations by defining the state vector  $x(t) = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}]^T$ , control input vector,  $u(t) = [a_f^x, a_f^y, a_f^z]^T$ , external disturbance vector  $w(t) = [w_x, w_y, w_z]^T$ , and output vector  $y(t) = [x, y, z]^T$  we have

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k\omega^{\frac{3}{2}} + \omega^2 & 0 & 0 & 0 & \dot{\omega} & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k\omega^{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dot{\omega} & -2\omega & 0 & 0 & 2k\omega^{\frac{3}{2}} + \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = B_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concerning the disturbances on the plant state, a static state feedback disturbance attenuation is applied to the norm  $\gamma$ , thus decreasing them. A linear function of the state vector can be used to characterize the control vector of the H controller as follows:  $u(t) = Kx(t)$

The main objective of the controller is to determine the matrix  $K$  that minimizes the performance index  $J$ .

Let,  $\gamma := \inf \{\|T\|_\infty : K \in S\}$  where  $S = \{K \in \mathbb{R}^{m,m} : A - BK \text{ is a stability matrix}\}$

Let  $P$  be a positive definite solution of the Algebraic Riccati Equation,

$$PA + A^T P - \frac{1}{\varepsilon} P B R^{-1} B^T P + \frac{1}{\gamma} P D D^T + \frac{1}{\gamma} C^T C + \varepsilon Q = 0$$

with disturbance attenuation,  $\gamma$ , constant for some  $\varepsilon > 0$ , where  $K = -\frac{R^{-1} B^T P}{2\varepsilon}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  is a positive-semi definite matrix and  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  is a positive definite matrix. These matrices can be defined in such a way that improve the control tracking performance and reduces the control effort.

The matrix  $P$  is the solution to the Algebraic Riccati Equation. Finally, the control function is

$$u(t) = -\frac{R^{-1} B^T P x(t)}{2\varepsilon}$$

## 5. Numerical Simulation

In this section an example of the robust  $H_\infty$  control for an orbital transfer between two non-coplanar orbits is presented. For instance, the gravitational constant parameter is  $\mu = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$  and the following orbital elements are considered; Initial orbit:  $h = 54552.1 \text{ km}^2/\text{s}$ ,  $e = 0.04$ ,  $i = 0^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ ; Final orbit:  $h = 54787.4 \text{ km}^2/\text{s}$ ,  $e = 0.08$ ,  $i = 20^\circ$ ,  $\Omega = 20^\circ$ ,  $\omega = 10^\circ$ . Analysing the orbits, the points  $[-7778; 0; 0]^T$  ( $v = 180^\circ$ ) (of the initial orbit) and  $[-4150; -6707; -1777]^T$  ( $v = 210^\circ$ ) (of the final orbit) were chosen respectively as start and end points of the orbital transfer. Thus, from Lambert's Problem we obtained the transfer orbit defined by  $h = 57298 \text{ km}^2/\text{s}$ ,  $e = 0.06$ ,  $i = 14.84^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ ,  $\omega = 167.2^\circ$  and a transfer time of 1124 seconds.

The whole orbital transfer can be described by the transformation of state vector  $x(t)$  from nonzero state  $x(t_0)$  to the terminal state  $x(t_{ot})$ , where  $t_{ot}$  is the orbital transfer time. The initial state for this example is  $x(0) = [0; 10; 0; 10; 0; 20]$

which is the assumed difference between the velocity of the initial point of the transfer between the transfer orbit and the initial orbit, the matrices  $Q$  and  $R$  chosen were the identity matrices, and  $\varepsilon = \gamma = 1$ .

First, we consider the situation without external perturbations ( $w(t) = 0$ ). By solving the control function the output of the system is shown in Fig. 1 and 2.

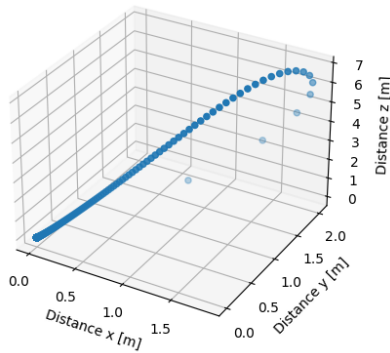


Fig. 1-Relative positions components 3D

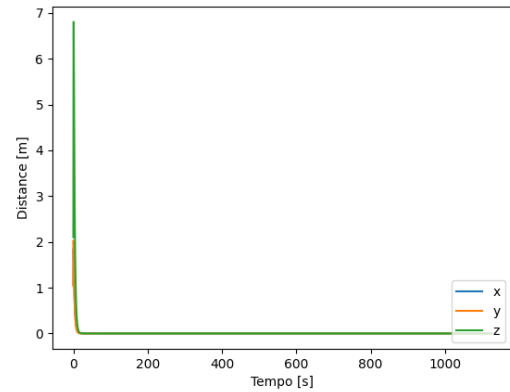


Fig. 2-Relative positions components x, y and z along each axis

In Fig. 1 we can see the relative position between the spacecraft and the orbital transfer points along the transfer and from Fig. 2 we can conclude that all position components converge asymptotically to zero in a very short time.

The Fig. 3 display the relative velocity history for the whole mission. It is visible that all velocity components also converge to zero.

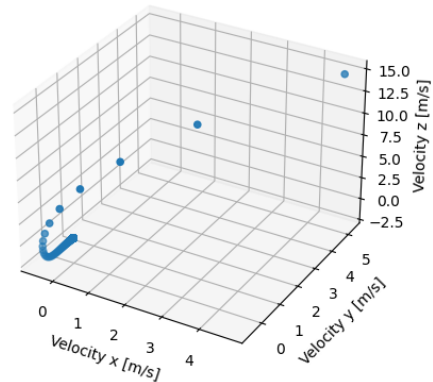


Fig. 3-Relative velocity components 3D

Now we will introduce external perturbations to the orbital transfer to simulate the several orbital perturbations that exist in space like the atmospheric drag, Earth's oblateness ( $J_2$ ), among others. To simulate the external disturbances, we will use the Gaussian distribution (normal distribution) to generate a vector of accelerations of random values for each iteration. The defined Gaussian distribution has a mean of zero and a standard deviation of one. To these random values we multiply by  $10/3$  and the vector has the form  $[0; w_x; 0; w_y; 0; w_z]^T$  where  $w_x, w_y$  and  $w_z$  represents the random values generated.

Solving the control function considering the vector that simulates the external disturbances the results obtained are present in Fig. 4. We can conclude that all the components of the position converge to values very close to zero. It is visible that the z component presents the largest deviations but even so those are minimal.

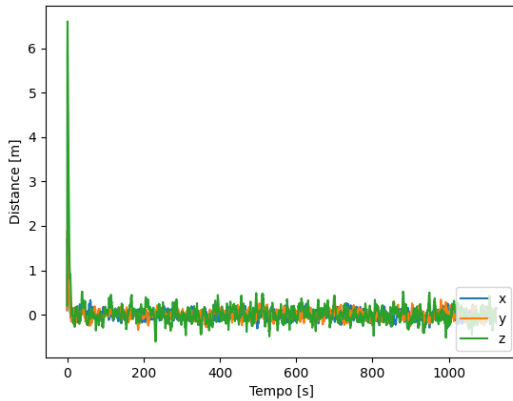


Fig. 4-Relative positions components x, y and z along each axis

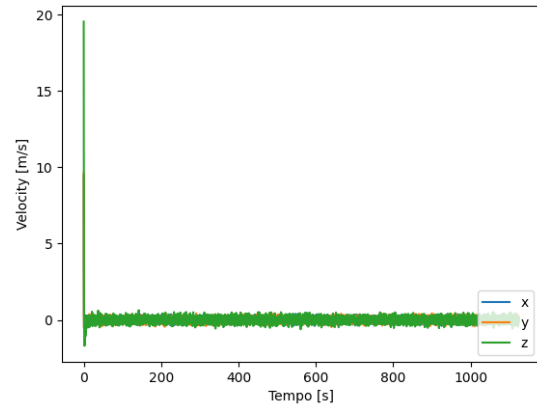


Fig. 5-Relative velocity components x, y and z along each axis

Fig. 5 show the relative velocity history. It is visible that all velocity components also converge to values close to zero being the relative velocity of the z-component the one that presents greater variations.

## 6. Conclusion and Future Work

This paper presents a study of the implementation of a robust  $H_\infty$  controller for non-coplanar orbital transfers subject to external disturbances. It described the methods used to define the initial and final orbits and how was generated the orbital transfer between these orbits through Lambert's Problem. The Tschauner-Hempel (T-H) equations were used to design the robust controller for the orbital transfer. An illustrative example was presented where the methods described in this study were applied and the results obtained show very promising results. In future work, it is necessary to consider the actuators limitations to study the response of the robust  $H_\infty$  controller.

## References

- [1] Curtis, H. D. (2008). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier.
- [2] Huijun Gao, Xuebo Yang, & Peng Shi. (2009). Multi-objective robust  $H_\infty$  control of spacecraft rendezvous. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(4), 794–802. <https://doi.org/10.1109/tcst.2008.2012166>
- [3] Zhou, B., Lin, Z., & Duan, G.-R. (2011). Lyapunov differential equation approach to elliptical orbital rendezvous with constrained controls. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(2), 345–358. <https://doi.org/10.2514/1.52372>
- [4] Khargonekar, P. P., Petersen, I. R., & Rotea, M. A. (1988).  $H_\infty$ -optimal control with state-feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8), 786–788. <https://doi.org/10.1109/9.1301>