

## Capítulo 2. Modelos Teóricos para Torção em Vigas

### 2.1. Introdução

Neste capítulo resumem-se algumas das teorias e estudos sobre o comportamento à torção em vigas de betão armado e em barras homogéneas. Descrevem-se unicamente as teorias aplicadas a vigas com secção rectangular cheia sem pré-esforço longitudinal uniforme.

As barras homogéneas constituem a base inicial dos estudos precursores à torção, sendo os modelos teóricos associados aplicados directamente a vigas de betão armado não fissuradas sujeitas à torção.

Hsu em 1984 [32] descreveu as etapas mais importantes que contribuíram para o desenvolvimento da teoria da torção e do comportamento e resistência de vigas de betão armado sujeitas à torção.

### 2.2. Torção em Barras Homogéneas

#### 2.2.1. Solução de Saint Venant para Secções Elásticas não Circulares

Navier em 1826 [63] deduziu uma equação teórica para o comportamento à torção de barras com secção rectangular, tendo anteriormente feito o mesmo para barras com secção circular, onde admitiu que as tensões tangenciais eram proporcionais à distância ao eixo de torção.

Para uma barra prismática sujeita a um momento torsor, Navier considerou as seguintes hipóteses:

- a forma da secção transversal permanece inalterada;
- a secção não sofre empenamento, ou seja, permanece plana.

Tendo como base as hipóteses anteriores Navier deduziu uma expressão para o cálculo do momento torsor, conforme as expressões seguintes:

$$\theta = \frac{d\phi}{dz} \quad (2.1)$$

$$T = GI_p \theta \quad (2.2)$$

$$I_p = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12} \quad (2.3)$$

em que:

$G$  - Módulo de distorção do material elástico linear constituinte da barra;

$I_p$  - Momento polar de inércia;

$a$  - Menor lado da secção transversal rectangular;

$b$  - Maior lado da secção transversal rectangular,

$GI_p$  - Rigidez de torção da secção rectangular.

# Modelos Teóricos para Torção em Vigas

Contudo Duleau em 1820 [30] com base em resultados de experiencias anteriores realizadas verificou que a equação de Navier sobrestimava em 20 % a rigidez de torção, tendo tal observação levantado dúvidas sobre a validade da equação 2.2.

St. Venant em 1855 [73] substituiu o momento polar de inércia definido pela equação 2.2 pela constante  $C$  de St. Venant. Para desenvolver a sua teoria St. Venant teve que aguardar pelo desenvolvimento de ferramentas matemáticas, onde se encontra incluídas as Séries de Fourier e a Teoria da Elasticidade desenvolvida por Cauchy em 1828 [18], resumido na tabela 2.1.

Tabela 2.1. Equações de Cauchy para a Teoria da Elasticidade

Equações	Ilustrações	Parâmetros
<p>Eq. de equilíbrio:</p> $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -X$ $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = -Y$ $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -Z$ <p>Eq. de compatibilidade:</p> $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$ $\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ <p>Relações constitutivas:</p> $\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$ $\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$ $\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$ $\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$ $\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$ <p>Condições de fronteira:</p> $\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = \bar{X}$ $\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = \bar{Y}$ $\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \bar{Z}$	<p style="text-align: center;">ELEMENTO INTERIOR DO SÓLIDO</p> <p style="text-align: center;">ELEMENTO IRREGULAR À SUPERFÍCIE</p>	<p>Componentes de tensão:</p> $\sigma_x$ = tensão normal na direcção $x$ $\sigma_y$ = tensão normal na direcção $y$ $\sigma_z$ = tensão normal na direcção $z$ $\tau_{xy}$ = tensão tangencial na face $x$ e na direcção $y$ $\tau_{yz}$ = tensão tangencial na face $y$ e na direcção $z$ $\tau_{zx}$ = tensão tangencial na face $z$ e na direcção $x$ <p>Componentes de deformação:</p> $\epsilon_x$ = extensão na direcção $x$ $\epsilon_y$ = extensão na direcção $y$ $\epsilon_z$ = extensão na direcção $z$ $\gamma_{xy}$ = distorção no plano $x$ - $y$ $\gamma_{yz}$ = distorção no plano $y$ - $z$ $\gamma_{zx}$ = distorção no plano $z$ - $x$ <p>Componentes de deslocamento:</p> $u$ = deslocamento na direcção $x$ $v$ = deslocamento na direcção $y$ $w$ = deslocamento na direcção $z$ <p>Componentes de deslocamento:</p> $u$ = deslocamento na direcção $x$ $v$ = deslocamento na direcção $y$ $w$ = deslocamento na direcção $z$ <p>Componentes das acções:</p> $X$ = força por unidade de volume na direcção $x$ $Y$ = força por unidade de volume na direcção $y$ $Z$ = força por unidade de volume na direcção $z$ $\bar{X}$ = tensão de superfície na área $A$ , na direcção $x$ $\bar{Y}$ = tensão de superfície na área $A$ , na direcção $y$ $\bar{Z}$ = tensão de superfície na área $A$ , na direcção $z$ <p>Cossenos directores:</p> $l = \cos(N, x)$ $m = \cos(N, y)$ $n = \cos(N, z)$ <p>Constantes:</p> $E$ = módulo de elasticidade $G$ = módulo de distorção $\nu$ = módulo de Poisson

## Modelos Teóricos para Torção em Vigas

Existem duas formas de aproximação geral para o cálculo das tensões utilizando a teoria da elasticidade: aproximação directa e inversa.

A aproximação directa consiste em integrar as equações de equilíbrio de forma a obter as tensões. A aproximação inversa consiste em substituir nas equações de compatibilidade os valores das componentes do deslocamento pelas componentes de deformação que depois são substituídas nas relações constitutivas pelas componentes de tensões.

St. Venant utilizou o método semi-inverso [73] para resolver o problema da torção em secções transversais não circulares, assumindo somente as componentes  $u$  e  $v$  do deslocamento, sendo a  $w$  e os restantes parâmetros calculados de forma a satisfazer as equações da teoria da elasticidade.

Com base nas observações experimentais sobre a deformação de barras com secções não circulares veio-se a comprovar que a segunda hipótese adoptada por Navier, não era válida, contudo a primeira permanecia inalterada. Consequentemente St. Venant apresentou as seguintes hipóteses para secções não circulares:

- a forma da secção transversal permanece inalterada após a torção;
- a deformação por empenamento, perpendicular à secção transversal, é uniforme ao longo de todo o comprimento da peça prismática.

Tendo por base as hipóteses formuladas e a figura 2.1, as componentes dos deslocamentos segundo  $x$ ,  $y$  e  $z$  são:

$$u = \theta z r \sin \alpha = -\theta z y \quad (2.4)$$

$$v = \theta z r \cos \alpha = \theta z x \quad (2.5)$$

$$w = \theta \psi(x, y) \quad (2.6)$$

em que:

$u, v$  - características conhecidas e assumidas da deformação

$\psi(x, y)$  - função de empenamento

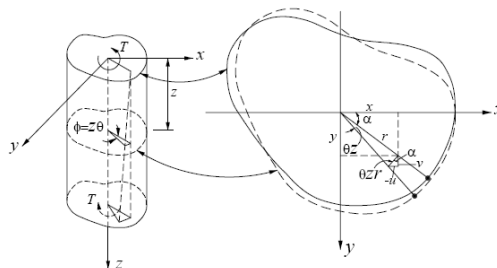


Fig. 2.1 - Torção de uma barra com secção transversal arbitrária [7]

St. Venant obteve as seguintes equações básicas relacionando  $T$ ,  $\theta$  e  $\tau_{max}$ :

$$T = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{x}{y} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{tgh} \frac{n\pi y}{2x} \right] = x^3 y G \theta = \beta x^3 y G \theta = CG \theta \quad (2.7)$$

$$\tau_{x,\max} = \frac{T}{\alpha_2 x y^2} \quad (2.8)$$

em que:

$CG$  - rigidez de torção

$C$  - constante de torção

$\alpha x^2 y$  - modulo elástico de torção

Os coeficientes  $k$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\alpha_2$  são função de  $\frac{y}{x}$  e encontram-se tabelados na tabela 2.2.

Tabela 2.2. Coeficientes de St. Venant para secções rectangulares [35]

y/x	k	$\beta$	$\alpha$	$\alpha_2$
1,0	0,675	0,141	0,208	0,208
1,2	0,759	0,166	0,219	0,196
1,4	0,822	0,187	0,227	0,185
1,6	0,869	0,204	0,234	0,174
1,8	0,904	0,217	0,240	0,164
2,0	0,930	0,229	0,246	0,155
2,5	0,968	0,249	0,258	0,135
3,0	0,985	0,264	0,267	0,118
4,0	0,997	0,281	0,282	0,0945
5,0	0,999	0,291	0,291	0,0782
10,0	1,00	0,312	0,312	0,0397
100	1,00	0,331	0,331	0,00217
$\infty$	1,00	0,333	0,333	0

### 2.2.2. Teoria de Bredt para Tubos de Parede Fina

Do ponto de vista prático a secção transversal mais eficaz para resistir à torção é um tubo fino. Bredt em 1896 [17] derivou umas equações muito simples para tubos finos, muito úteis para estudar a torção em vigas de betão armado.

Tendo por base as hipóteses de St. Venant e a figura 2.2, Bredt derivou a equação 2.9 para o momento torsor.

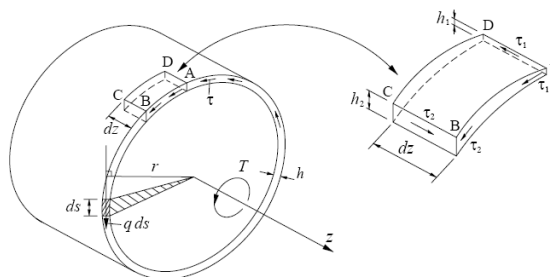


Fig. 2.2 - Tensões tangenciais num tubo fino [7]

$$T = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{h}} G\theta = CG\theta \quad (2.9)$$

em que:

$T$  - momento torsor

$\theta$  - ângulo de torção

$C$  - constante de torção para um tubo fino

Para tubos finos com espessura de parede  $h$  constante, a variável  $C$  é dada pela seguinte expressão:

$$C = \frac{4A^2 h}{u} = 2\pi r^3 h \quad (2.10)$$

em que:

$r$  - raio médio da secção

### 2.3. Torção em Vigas de Betão Simples

#### 2.3.1. Comportamento de Vigas com Secção Rectangular

A figura 2.3 ilustra o comportamento experimental de vigas de betão simples à torção. A curva  $T$ - $\theta$  associada possui um comportamento linear para baixos níveis de carga, perdendo linearidade para níveis maiores. A rotura das vigas é sempre frágil [35].

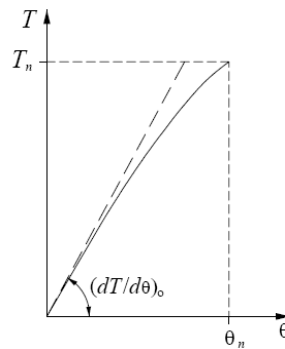


Fig. 2.3 - Curva  $T$ - $\theta$  típica para vigas de betão simples [35] [7]

Hsu [35] relacionou o declive das curvas  $T$ - $\theta$  num dado ponto com a curva  $\sigma$  -  $\epsilon$  do betão em compressão e tracção uniaxial, conforme a figura 2.4:

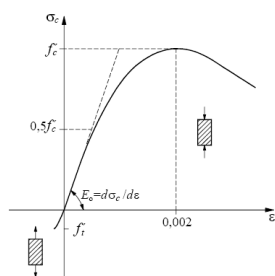


Fig. 2.4 - Curva  $\sigma$ - $\epsilon$  para o betão [35] [7]

Tendo por base as equações determinadas por St. Venant, Hsu estabeleceu que a teoria de St. Venant pode descrever com precisão o comportamento em torção de vigas de betão simples sujeitas a momentos torsores baixos. Contudo, para níveis maiores de momentos torsores a curva  $T - \theta$  desvia-se da linha recta correspondente à rigidez de torção linear. Contudo, a curva pode ainda assim continuar a ser aproximada a uma recta se for utilizado o modulo de elasticidade secante, estimado por Hsu, definida pela seguinte expressão.

$$E_c = 33w^{1.5} \sqrt{f'_c} \quad (2.11)$$

Hsu observou que devido à microfissuração o comportamento das vigas à torção para níveis de carga elevados desviam-se da Teoria de Saint Venant, contudo, o comportamento global pode em aproximação ser considerado como o descrito na teoria de St. Venant.

### 2.3.2. Resistência à Torção de Secções Rectangulares

Existem três teorias para determinar a resistência à torção de secções rectangulares: teoria elástica, teoria plástica e teoria da flexão enviesada

#### 2.3.2.1. Teoria Elástica

Esta teoria assume que a rotura por torção da viga ocorre quando a tensão principal máxima de tracção é igual à resistência à tracção do betão. Na situação de corte puro o momento torsor resistente elástico é igual a :

$$T_e = \alpha x^2 y f'_t \quad (2.12)$$

A teoria elástica foi primeiramente utilizada por Bach e Graf em 1912 [10], sendo mais tarde largamente utilizada por Young *et al.* em 1922 [83], Andersen em 1937 [5], Cowan em 1951 [25], Humphreys em 1957 [48] e Zia em 1961 [87]. No entanto, os ensaios vieram mostrar que esta teoria subestima bastante a resistência das vigas à torção (em cerca de 50%).

#### 2.3.2.2. Teoria Plástica

Nylander em 1945 [64] desconfiou que a resistência extra medida experimentalmente podia se atribuída ao comportamento plástico do betão, tendo assumido assim o mesmo critério que a teoria elástica. Logo o momento torsor plástico pode ser calculado da seguinte forma:

$$T_p = \alpha_p x^2 y f'_t \quad (2.13)$$

A equação anterior constitui uma variante da proposta por Nadai em 1923 [62] para barras homogéneas, que alargou a Analogia da Membrana de Prandtl de 1903 [67] para o caso de material plástico.

Segundo Hsu [7] a teoria plástica é discutível em três aspectos. Primeiro, é teoricamente não satisfatória porque sendo a tracção principal a causa da rotura da viga em

torção, não é observado um comportamento plástico aparente do betão à tracção (Figura 2.4). Segundo, a rotura em torção de vigas em betão simples é bastante frágil, não existindo evidência experimental de uma rotação plástica (Figura 2.3). Terceiro, a teoria não tem em conta o efeito de escala (dimensões da secção transversal).

### 2.3.2.3. Teoria da Flexão Enviesada

Hsu em 1968 [46] desconfiou que o critério de rotura utilizado nas teorias anteriores poderia estar incorrecto. Por isso, este autor procedeu a reexaminação da secção rectangular de uma viga de betão simples. Hsu concluiu assim que o processo de rotura é similar ao observado em vigas de betão simples sujeitas à flexão. Hsu decidiu assimilar a rotura de torção à rotura por flexão.

Tendo por base o mecanismo de flexão para a rotura à torção, Hsu deduziu uma equação para prever a resistência à torção de vigas rectangulares de betão simples, conforme a seguinte expressão:

$$T_{np} = 6y(x^2 + 10)\sqrt{f'_c} \quad \text{para } x \geq 4 \text{ in. } (10,2 \text{ cm}) \quad (2.14)$$

## 2.4. Torção em Vigas de Betão Armado

### 2.4.1. Comportamento de Vigas Sujeitas à Torção

#### 2.4.1.1. Vigas Sem Armadura Transversal

A figura 2.5 representa o comportamento típico de vigas que contém apenas armaduras longitudinais.

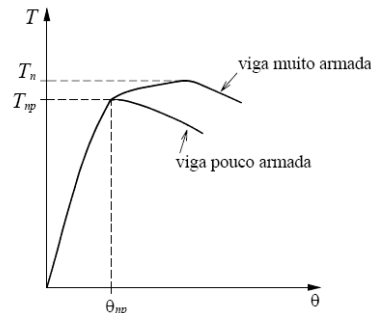


Fig. 2.5 - Curva T-θ típica para vigas sem armadura transversal [7]

$T_n$  e  $T_{np}$  representam, respectivamente os momentos torsores para vigas de betão armado e de betão simples.

Segundo Hsu [7] desprezando o pequeno efeito da armadura longitudinal, uma viga de betão armado sem armadura transversal pode ser tratada como uma viga de betão simples, tanto no cálculo da rigidez de torção como no cálculo da resistência à torção.

### 2.4.1.2. Vigas Com Armadura Longitudinal e Transversal

A figura 2.6 ilustra a curva  $T-\theta$  típica de uma viga de betão armado com secção rectangular cheia.

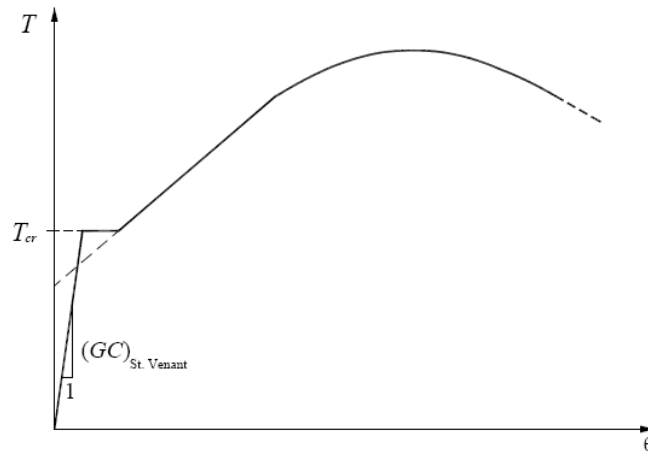


Fig. 2.6 - Curva  $T-\theta$  típica para vigas de betão armado [13] [7]

Hsu [43] a partir de vários ensaios à torção de vigas com secção rectangular cheia com diversas taxas totais de armaduras de torção, concluiu que o momento torsor de fissuração é ligeiramente afectado pela percentagem total de armadura e por isso propôs a seguinte expressão:

$$T_{cr} = (1 + 4\rho_{tot})T_{np} \quad (2.15)$$

em que:

$T_{np}$  - resistência teórica para vigas sem armadura

Hsu observou também que, antes da fissuração, a percentagem total de armadura tem efeito desprezável na rigidez de torção das vigas fazendo com que as vigas tenham um comportamento de vigas de betão simples. Contudo assim a rigidez de torção de St. Venant é aplicável em vigas com armadura longitudinal e transversal.

Hsu concluiu que a percentagem máxima de armadura deve ser definida de modo a limitar o momento torsor último entre 2,5 a 3 vezes o momento torsor de fissuração. Se este momento ultrapassar o limite definido então ocorrerá uma rotura frágil por esmagamento do betão comprimido nas escoras, sem a cedência prévia das armaduras.

### 2.4.2. Modelos de Resistência à Torção

Nas últimas décadas, muitas teorias foram desenvolvidas para calcular a resistência à torção pura de vigas com armadura longitudinal e transversal. A Teoria da Analogia da Treliça Espacial e a Teoria da Flexão Enviada. As três teorias mais marcantes foram desenvolvidas por Rausch em 1929 [69], Cowan em 1950 [24] e Hsu em 1968 [47]. Outras teorias, tais como as de Lampert e Thurlimann em 1969 [51], Elfgren em 1972 [29] e Collins em 1973 [21] foram

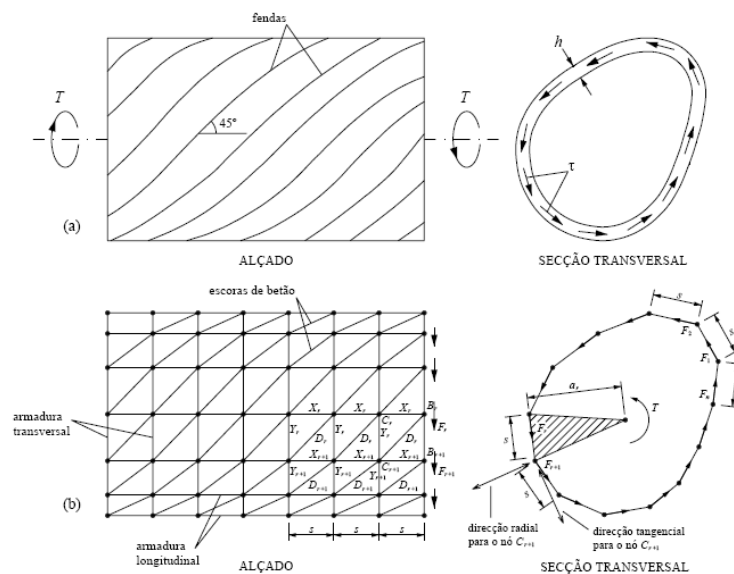
desenvolvidas a partir destas teorias base e servem de base ao código modelo europeu desde 1978 [19].

## 2.4.2.1. A Analogia da Treliça Espacial de Rausch

Ritter em 1899 [70] e Morsh em 1902 [61] simularam a fase de pós-fissuração de um elemento de betão armado através de um modelo de treliça. A teoria de Ritter e de Morsh foi designada de Modelo de Treliça a 45° ou Analogia da Treliça a 45°.

Rausch em 1929 [69] propôs a primeira teoria para prever a resistência última de elementos de betão armado sujeitos à torção, alargando deste modo a aplicação do Modelo de Treliça a 45°. Este autor assumiu que um elemento de betão fissurado com armadura longitudinal e transversal constituída por cintas funciona como um tubo. Desta forma, o momento torsor aplicado é resistido por um fluxo circulatório de corte nas paredes desse tubo.

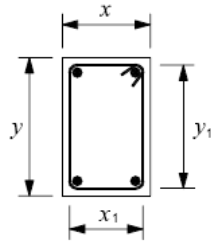
A figura 2.7 apresenta um modelo de um elemento de betão armado de pequeno comprimento e sujeito à torção.



**Fig. 2.7** - Analogia da Treliça Espacial de Rausch [7]

Com base na figura 2.7 (b), Rausch analisou determinadas forças nas barras da treliça espacial: designadamente força interna na barra longitudinal  $r$ , ( $X_r$ ), força interna na barra transversal  $r$ , ( $Y_r$ ); força interna na escora diagonal  $r$ , ( $D_r$ ) e fluxo de corte em cada nó  $r$ , ( $F_r$ ). Tendo parâmetro  $r$ , assumindo valores entre 1 e  $n$ , vai variando ao longo da periferia da secção.

A figura 2.8 resume os resultados obtidos por Rausch particularizados para uma viga com secção rectangular armada com quatro barras longitudinais nos cantos e cintas fechadas espaçadas de  $s$ .



$$T_n = \frac{2x_1y_1A_t f_{sy}}{s}$$

$$\hat{A}_t = A_t \frac{u}{s} = A_t \frac{2(x_1 + y_1)}{s}$$

Fig. 2.8 - Viga de betão armado com secção rectangular [7]

A analogia da treliça espacial de Rausch constitui uma combinação engenhosa entre a teoria do tubo fino de Bredt com a analogia da treliça plana para a análise do esforço transversal em vigas de betão armado.

No entanto verificou-se que a equação de Rausch (Equação (2.16)), para a resistência à torção não era conservativa em muitos casos [24]. O modelo de Rausch não considera vários mecanismos resistentes, designadamente; a resistência ao corte da escora, a resistência ao corte devido ao "efeito de ferrolho" nas barras longitudinais e transversais, a contribuição do núcleo de betão nem a resistência do betão à tracção.

$$T_n = \frac{2AA_f f_{sty}}{s} \quad (2.16)$$

Em 1935 Andersen [5] apontou o facto da analogia da treliça de Rausch assumir uma tensão uniforme ao longo de toda a armadura para uma viga sujeita à torção. Esta hipótese da uniformidade de tensões contradizia a distribuição de tensões de St. Venant para todos os tipos de secções transversais excepto o circular. No caso de uma secção rectangular, a distribuição de tensões de St. Venant requer que uma tensão máxima ocorra no meio da face maior e decresça até zero no canto da secção, conforme figura 2.9.

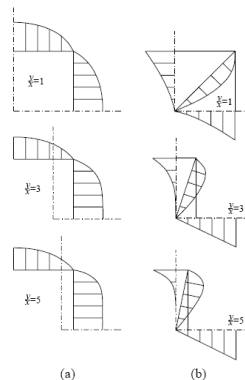


Fig. 2.9 - Distribuição qualitativa das tensões de St. Venant em secções rectangulares [7]

Andersen sugeriu que a equação 2.16 passasse a ter em conta a resistência à torção da viga sem armadura, tendo proposto a seguinte equação:

$$T_n = T_e + \lambda \frac{2AA_f f_{sty}}{s} \quad (2.17)$$

A primeira aproximação foi seguida por Andersen em 1935 [5], Cowan em 1950 [24] e pelo código americano desde 1971 [1] até 1995 [2]. Infelizmente, o coeficiente de Andersen carecia de rigor na sua derivação e o seu cálculo era muito trabalhoso, contudo não foi aceite.

A dificuldade de Andersen em obter um simples e rigoroso coeficiente de eficiência foi resolvida por Cowan em 1950 [24] utilizando um método baseado na energia de deformação.

A derivação de Cowan era baseada estritamente na distribuição das tensões e extensões de St. Venant para secções rectangulares.

A segunda aproximação consistiu em reduzir a área  $A$  assumindo uma definição arbitrária para a linha média do fluxo de corte (linha fechada que delimita a área  $A$ ). Foi assumido que a referida linha coincide com a linha fechada que liga os centros dos varões longitudinais. Esta aproximação foi primeiramente sugerida por Lampert e Thurlimann em 1969 [51] e foi adoptada pelo código modelo europeu de 1978 [19].

A terceira aproximação foi sugerida por Collins e Mitchell em 1980 [22] e consiste também em reduzir a área  $A$  assumindo agora que a linha média do fluxo de corte coincide com a linha média do bloco equivalente das tensões de compressão nas escoras de betão.

Segundo Hsu [7] em todas estas aproximações foi necessário assumir uma hipótese arbitrária para aproximar a teoria de Rausch aos resultados experimentais. Além disso, a formulação apresentada por Collins e Mitchell para o cálculo da profundidade do bloco equivalente das tensões de compressão entra com a resistência integral do betão à compressão uniaxial medida em provetes cilíndricos padrão, o que constitui um erro uma vez que a resistência das escoras de betão é bastante reduzida pela existência de extensões transversais de tracção (*softening effect*), como é referido por Hsu e Mo em 1985 [41]. Por tudo isto, esta terceira aproximação foi em geral abandonada em detrimento das duas primeiras, continuando no entanto a constituir a base de cálculo do momento torsor resistente do código canadiano [76].

### 2.4.2.2. Modelo de Treliça com Ângulo Variável

#### 2.4.2.2.1. Considerações Gerais

Embora as aproximações propostas para melhorar a equação de Rausch tivessem sido adoptadas por alguns códigos de dimensionamento, eram consideradas deficientes em dois aspectos.

Primeiro, eram somente aplicáveis para o tipo de estruturas para as quais foram feitas as calibrações.

Segundo, os métodos empíricos de modificação da equação de Rausch são considerados teoricamente não satisfatórios. Era assim requerido um método teórico para unificar o dimensionamento à torção para vigas com pequenas e grandes secções, assim como para vigas pré-esforçadas.

O modelo teórico mais recente, com o propósito de unificar o dimensionamento à torção, é o modelo de treliça com ângulo variável complementado com a influência das extensões transversais de tracção no comportamento à compressão do betão nas escoras, apresentado por Hsu e Mo em 1985 [41] [38].

### 2.4.2.2.2. Notas Históricas

As condições de compatibilidade do modelo de treliça espacial a 45° de Rausch foram estudadas por Hsu em 1973 [33]. Fazendo uso de tais condições de compatibilidade, em adição às equações de equilíbrio de Rausch, Hsu derivou o módulo de distorção e a rigidez de torção após a fissuração para uma viga de betão armado sujeita à torção.

O modelo de treliça a 45° foi generalizado por Lampert e Thurlimann em 1969 [51]. Estes autores assumiram que o ângulo de inclinação das escoras de betão podia desviar-se de 45° e que a teoria da plasticidade seria aplicável aos elementos de betão armado.

Uma vez que o ângulo das escoras de betão podia afastar-se de 45°, Lampert e Thurlimann designaram a sua teoria de Modelo de Treliça com Ângulo Variável.

O modelo de treliça com ângulo variável foi posteriormente estudado por Elfgren em 1972 [29]. Este autor observou que a teoria do modelo de treliça com ângulo variável era muito similar à teoria do campo de tracções apresentado por Wagner em 1929 [80] para uma viga constituída por um perfil metálico de alma fina.

A teoria de Lampert e Thurlimann e a teoria de Elfgren podem, de uma forma geral, ser designadas de Teoria da Plasticidade do Campo de Tensões de Compressão, que serve de base para o chamado método exacto do código modelo europeu desde a edição de 1978 (MC 78 [35]).

O modelo de treliça com ângulo variável foi desenvolvido de uma forma algo diferente por Collins a partir de 1973 [21]. Em vez de utilizar a teoria da plasticidade, este autor usou a compatibilidade de deformações do modelo de treliça.

Existiu também uma tentativa, por parte de Collins e Mitchell em 1980 [22], para apresentarem recomendações para o dimensionamento à torção utilizando a teoria de compatibilidade do campo de compressões, mas tal não foi adoptado no código europeu oficial. As recomendações gerais baseadas na teoria do campo de compressões de Mitchell e Collins [22] [58] [57] e na teoria do campo de compressões modificado de Vecchio e Collins [79] [77] foram adoptadas para o estabelecimento do procedimento de cálculo segundo o código canadiano (CAN3-A23.3-M04 [76]).

### 2.4.2.2.3. Vantagens e Hipóteses do Modelo de Treliça com Ângulo Variável

As vantagens do modelo de treliça com ângulo variável e da teoria do campo de compressões, para vigas sujeitas à torção pura, podem ser resumidas da seguinte forma:

1. A teoria fornece um conceito claro de como uma viga de betão armado resiste à torção pura após a fissuração, à semelhança do que acontece com o esforço transversal;

2. O efeito do pré-esforço pode ser incluído de uma forma lógica;
3. A teoria permite a previsão da deformação de um elemento ao longo do historial da carga. Isto constitui uma clara vantagem em relação à teoria da flexão enviesada de Hsu que fornece somente a carga última;
4. A teoria é de uma precisão aceitável quando os resultados obtidos são comparados com os resultados de ensaios experimentais.

### 2.4.2.2.4. Análise de uma Viga com Base no Modelo de Treliça Plana

A figura 2.10(a) ilustra uma viga simplesmente apoiada sujeita a uma força concentrada a meio vão. No modelo de treliça ilustrado, é assumido que toda a armadura longitudinal da viga está concentrada na corda superior e inferior. A distância entre estas duas cordas é designada por  $d_v$ .

Considera-se, entre as Secções I - I e II - II, um elemento de viga  $A$  de comprimento  $d_v \cotg \alpha$  ( $\alpha$ ) sujeito nas secções de corte aos esforços indicados na figura 2.10 (a). O equilíbrio do elemento  $A$  encontra-se ilustrado na figura 2.10 (b).

A força na armadura transversal pode ser obtida efectuando um corte horizontal através do elemento de viga  $A$  e a uma distância arbitrária  $y$  a partir da face inferior. Desta forma, isola-se um corpo livre rectangular (Fig. 2.10 (c)). Para manter o equilíbrio horizontal do corpo livre, deve existir uma força horizontal  $V \cotg \alpha$  na superfície de corte, que pode ser decomposta em duas forças,  $D$  e  $n_v d_v \cotg \alpha$ .

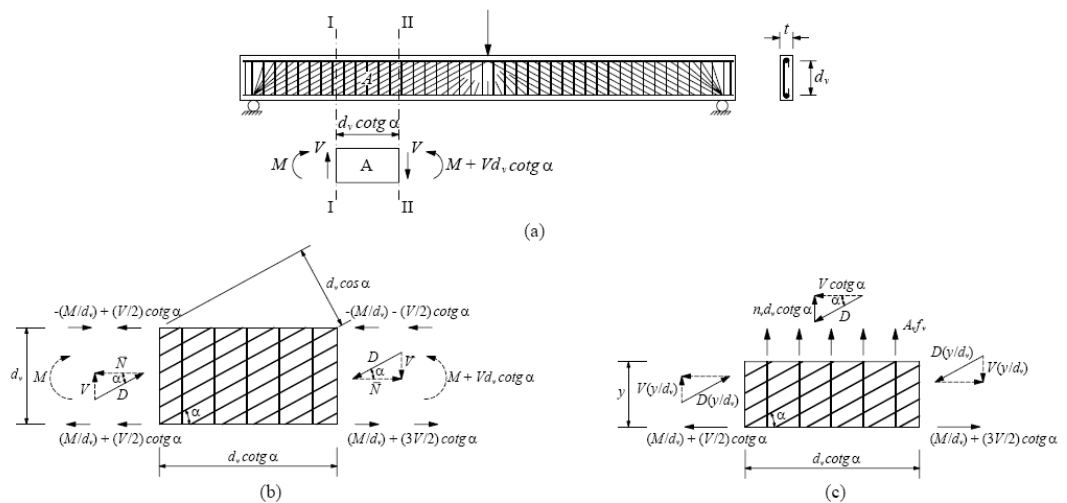


Fig. 2.10 - Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana [13] [7]

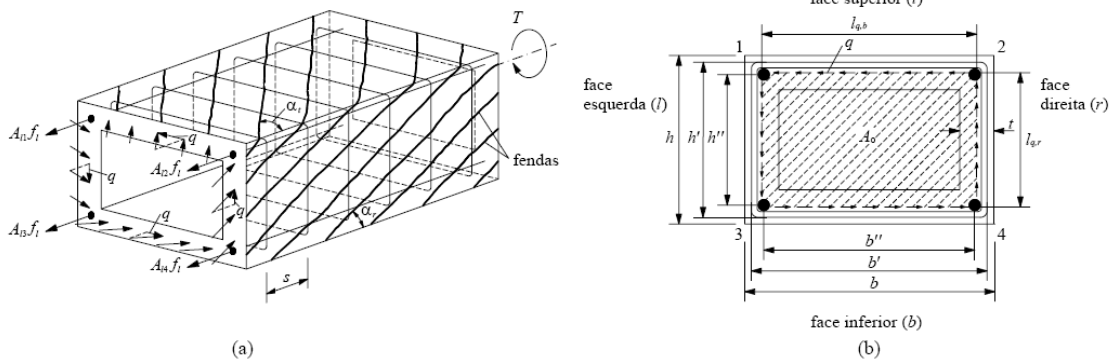
### 2.4.2.2.5. Vigas com Secção Vazada Sujeitas à Torção Pura

A figura 2.11 ilustra o modelo de treliça espacial com ângulo variável para uma viga com secção rectangular vazada sujeita à torção pura. A secção é armada com quatro barras de canto idênticas e cintas espaçadas uniformemente.

Numa secção transversal interior são observados dois tipos de forças: as forças nas barras longitudinais de canto e as forças nas escoras diagonais de betão inclinadas com um

## Modelos Teóricos para Torção em Vigas

ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo longitudinal da viga. A resultante destes dois tipos de forças constitui o fluxo de corte  $q$  no plano da secção transversal.



**Fig. 2.11** - Viga com secção rectangular vazada sujeita à torção pura [13] [7]

Devido ao momento torsor aplicado desenvolve-se nas paredes da secção um fluxo constante circulatório de corte  $q$ , que segundo a teoria de Rausch é:

$$q = \frac{T}{2A_0} \quad (2.18)$$

em que:

$A_0$  - área limitada pela linha média do fluxo de corte (Figura 2.11 (b)), que é assumida como coincidindo com a linha média da parede com espessura  $t$ .

Assim, a força de corte na parede recta é igual a  $q V = ql$  e a força longitudinal na armadura pode ser obtida a partir de:

$$\bar{N} = ql_q \cot g \alpha \quad (2.19)$$

Definindo a força total nas barras longitudinais da secção como  $\Delta n = A_i f_i$  em que  $A_i$  e  $f_i$  representam a área total e a tensão da armadura longitudinal, respectivamente, e definindo  $p_0 = \sum l_q$  como sendo o perímetro da linha media do fluxo de corte, vem:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = qp_0 \cot g \alpha = A_i f_i \quad (2.20)$$

Introduzindo  $q$  da Equação (2.18) na equação anterior vem:

$$A_i f_i = \frac{T p_0}{2A_0} \cot g \alpha \quad (2.21)$$

A força em cada ramo da cinta pode ser derivada similarmente se se reparar que  $q = V / d_v$ :

$$A_i f_i = qs \operatorname{tg} \alpha \quad (2.22)$$

Os parâmetros  $A_i$  e  $f_i$  representam a área e a tensão de uma barra transversal, respectivamente.

Substituindo  $q$  da Equação (2.18) na Equação (2.22) resulta:

$$A_i f_i = \frac{T s}{2A_0} \operatorname{tg} \alpha \quad (2.23)$$

A tensão na escora diagonal de betão pode ser obtida a partir da Equação (2.23):

$$\sigma_d = \frac{q}{t \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \quad (2.24)$$

Inserindo  $q$  da Equação (2.18) na Equação (2.24) vem:

$$\sigma_d = \frac{q}{2A_0 t \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \quad (2.25)$$

As Equações (2.18), (2.21), (2.23) e (2.24) constituem as quatro equações básicas de equilíbrio para a torção na teoria do modelo de treliça com ângulo variável.

Se ambas as armaduras longitudinal e transversal entrarem em cedência, isto é,  $\Delta N = \Delta N_y$ ,  $f_t = f_{ty}$  e  $T = T_y$ , as Equações (2.21) e (2.22) ficam:

$$\Delta N_y = \frac{T_y p_0}{2A_0} \cot g \alpha \quad (2.26)$$

$$A_t f_{ty} = \frac{T_y s}{2A_0} \operatorname{tg} \alpha \quad (2.27)$$

Eliminando  $T_y$  ou  $\alpha$  das duas equações anteriores vem, respectivamente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{A_t f_{ty} p_0}{\Delta N_y s}} \quad (2.28)$$

$$T_y = 2A_0 \sqrt{\frac{\Delta N_y A_t f_{ty}}{p_0 s}} \quad (2.29)$$

Quando a viga atinge a rotura, a profundidade do diagrama de tensões de compressão pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$t_d = \frac{A_c}{p_c} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{T_n p_c}{A_c^2} \right) \left( \frac{1}{\left( \frac{k_1 f'_c}{\lambda} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right)} \right)} \right] \quad (2.30)$$

### 2.4.2.2.6. Flexão das Escoras de Betão

Lampert e Thurlimann em 1969 [51] observaram um fenómeno de flexão, nas escoras, em resultado do qual as tensões e extensões induzidas pela flexão devem ser sobrepostas às induzidas pelo esforço axial. A figura 2.12 representa a geometria resultante da flexão de uma escora de betão.

## Modelos Teóricos para Torção em Vigas

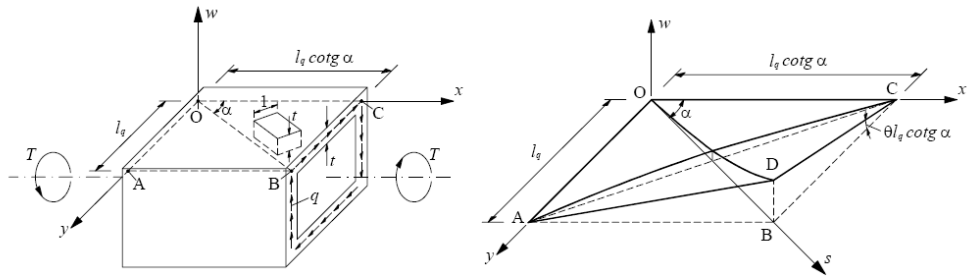


Fig. 2.12- Flexão de uma escora de betão na parede de uma viga em caixão sujeita à torção [13] [7]

Considerando uma secção de escora de betão com largura unitária isolada a partir da parede superior, conforme figura 2.12 e 2.13 as duas equações básicas de compatibilidade para a flexão das escoras de betão devido à torção são:

$$\psi = \frac{d^2 w}{ds^2} = (\theta \sin \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \sin \alpha = \theta \sin 2\alpha \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_{ds} = \psi t_d \quad (2.32)$$

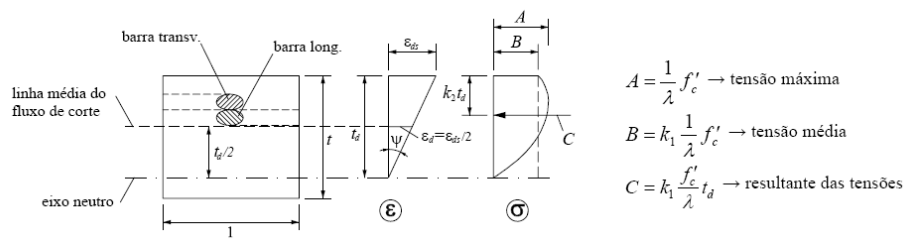


Fig. 2.13- Distribuição das extensões e tensões na escora de betão [7]