



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências Sociais e Humanas

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Como desenvolver a comunicação e o raciocínio matemático

Maria de Jesus Cardoso Ribeiro

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Supervisão Pedagógica

(2º ciclo de estudos)

Orientador: Professora Doutora Maria de Fátima Simões

Covilhã, outubro de 2012

Agradecimentos

Gostava de agradecer à minha orientadora, Professora Doutora Maria de Fátima Simões pela motivação que me foi inculcando para que não desistisse da elaboração desta dissertação e pelas sugestões que me foi dando ao longo desta minha caminhada de aprendizagem.

Gostava, também, de agradecer ao meu marido, aos meus filhos e à minha sobrinha pela força e apoio que me deram no decorrer da elaboração deste trabalho.

Resumo

O desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas é considerado uma das mais importantes finalidades do ensino da matemática em todos os níveis de ensino, dado que permite desenvolver, nos alunos, processos cognitivos e entre outras as capacidades de comunicação e raciocínio matemáticos. Existem factores diversos e complexos que influenciam o desempenho dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Alguns destes factores estão relacionados com o sujeito e podem ser de ordem cognitiva ou não, outros estão relacionados com a própria tarefa ou a situação em que a mesma se resolve, que contribuem para que os alunos apresentem um baixo nível de desempenho na resolução de problemas. A matemática é uma ciência que lida com objectos e relações abstractas. Contar e medir terão estado porventura entre as primeiras manifestações do que hoje chamamos actividade matemática, e foi sendo progressivamente alargada desde que a matemática se constituiu como domínio autónomo ao estudo dos números e operações, das formas geométricas, das estruturas e regularidades, da variação, do acaso e da incerteza. A resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjecturas, a generalização e a demonstração, e a elaboração e refinamento de modelos são algumas das suas dimensões principais.

Depois da elaboração da revisão da literatura elaboramos uma proposta pedagógica de tarefas em contextos diversificados, com vários níveis de dificuldade e complexidade, a serem aplicadas aos alunos do 5º e 6ºanos de escolaridade, que permitem o desenvolvimento do raciocínio matemático através da resolução de problemas. A elaboração dos problemas teve em conta os temas, as orientações metodológicas e os objectivos constantes no novo programa de matemática do 2ºciclo.

Palavras chave

Problema. Resolução de problemas. Metacognição. Raciocínio matemático. Estratégias.

Abstract

The development of the ability to solve problems is considered one of the most important goals of mathematics teaching at all levels of education, as it allows developing in students, among other cognitive processes and communication skills and mathematical reasoning. There are many and complex factors that influence student performance in mathematical problem solving. Some of these factors are related to the subject and can be of cognitive or not; others are related to the task itself or the situation in which it is resolved that contribute to the students have a low level of performance in troubleshooting. Mathematics is a science that deals with abstract objects and relations. Count and measure perhaps have been among the first manifestations of what we now call mathematical activity, and these were gradually enlarged since mathematics is considered as an autonomous domain to the study of numbers and operations, geometric forms, structures and regularities of variation, of chance and uncertainty. The resolution and problem formulation, formulation and testing conjectures, generalizing and demonstration, and the development and refinement of models are some of its main dimensions.

After the preparation of the literature review we developed pedagogical tasks in different contexts, with different levels of difficulty and complexity to be applied to the students of the 5th and 6th grades, allowing the development of mathematical thinking through problem solving. The elaboration of problems took into account the issues, methodological guidelines and aims set in the new math program of “segundo ciclo”.

Keywords

Problem. Troubleshooting. Metacognition. Mathematical reasoning. Strategies.

Índice

Introdução	1
1. Revisão da literatura	3
1.1. Ensino e aprendizagem da matemática no 2ºciclo	3
1.1.1 - O programa e o currículo da matemática no 2ºciclo	3
1.1.2 - Temas do currículo e do programa de matemática	6
1.1.3 - Experiências de aprendizagem	9
1.2. A dinâmica e o ambiente na aula de matemática	10
1.2.1 - Avaliação das aprendizagens	13
1.3. Problemas e resolução de problemas matemáticos	16
1.3.1- Revisão da literatura: problemas e resolução de problemas	16
1.3.2 - Tipos de problemas	19
1.3.3 - Perspectivas e finalidades da resolução de problemas	23
1.4. O ensino e a aprendizagem na resolução de problemas	27
1.4.1- Modelos de ensino de resolução de problemas	27
1.4.2- Fases de resolução de problemas	28
1.4.3 -O ensino da matemática na perspectiva da resolução de problemas	34
1.4.4 - Avaliação da resolução de problemas	38
1.5. Factores implicados no desenvolvimento das capacidades transversais	41
1.5.1 - Categorias implicadas na resolução de problemas	41
1.5.2 - Processos mentais envolvidos na resolução de problemas	44
1.5.3- Resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemático	46
1.5.4 - Metacognição e resolução de problemas	48
2. Síntese da revisão teórica	51
2.1. Proposta pedagógica de tarefas	54
Conclusão	60
Bibliografia	62
Anexos	66
Anexo A: Proposta pedagógica de tarefas	67

Lista de tabelas

Tabela 1: Fases de resolução de problemas.	32
Tabela 2: Heurísticas aplicadas na resolução de problemas.	33
Tabela 3: Categorias de variáveis implicadas na resolução de problemas.	44
Tabela 4: Proposta pedagógica de tarefas.	55

Lista de Acrónimos

GAVE	Gabinete de Avaliação Educacional
ME	Ministério da Educação
DR	Diário da República
UBI	Universidade da Beira Interior

Introdução

Portugal participou nos diversos estudos realizados pela OCDE. O Estudo PISA (Program for International Student Assessment) lançado pela OCDE em 1997. Nos vários relatórios que sobre ele foram feitos, pode ler-se que o seu principal objectivo é estudar as capacidades de jovens de quinze anos de idade no domínio da leitura, matemática e ciências. Segundo se afirma, mais do que procurar medir o seu conhecimento curricular, o PISA procura saber até que ponto alunos, que estão perto do final da escolaridade obrigatória, dominam os conhecimentos e as capacidades essenciais para uma participação activa e eficaz na sociedade. O foco principal centra-se na resolução de problemas, sendo, entendida como a capacidade de um indivíduo usar processos cognitivos e resolver situações reais e interdisciplinares, nas quais o caminho para a solução não é imediatamente óbvio e em que os domínios de literacia ou áreas curriculares passíveis de aplicação não se inserem num único domínio, seja o da matemática, seja das ciências ou da leitura.

Do relatório referente ao PISA 2009 (OCDE), pode ler-se que a literacia matemática é entendida como a capacidade de um indivíduo de formular, usar e interpretar a matemática em diversos contextos. Nela se inclui o raciocínio matemático e a capacidade de usar conceitos e processos, factos e instrumentos matemáticos para descrever, explicar e prever fenómenos. Toma por pressuposto que a literacia matemática ajuda os indivíduos a compreender o papel da matemática no mundo, a formular julgamentos fundamentados, e a aprender a tomar decisões sensatas em função das exigências.

Em 1980, o N.C.T.M. declarou a resolução de problemas como tema central da matemática escolar (Schoenfeld, 1986), recomendação que voltou a ser reforçada pela N.C.T.M. em 1991 e em 2007. A resolução de problemas é uma das áreas da matemática que tem sido objecto de varias investigações.

Segundo M.E. (2001), os alunos, ao longo do 2º ciclo do ensino básico, devem adquirir várias competências, salientando-se as seguintes: mobilizar saberes culturais, científicos e tecnológicos para compreender a realidade e para abordar situações e problemas do dia a dia e adoptar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões. A aquisição destas competências, por parte dos discentes, exige uma articulação entre todas as áreas curriculares e disciplinares, sendo a aula de matemática um espaço privilegiado. O currículo da matemática e o novo programa têm como objectivo formar pessoas que sejam matematicamente competentes, o que envolve de forma integrada um conjunto de atitudes, capacidades e de conhecimentos relacionados com a matemática. A resolução de problemas é uma das capacidades transversais a desenvolver em todos os tópicos, ao longo de todos os anos de escolaridade do ensino básico, e desempenha um papel fulcral no ensino da matemática, pois permite desenvolver processos de pensamento nos alunos N.C.T.M. (2007). Porém, a resolução de problemas, na aula de matemática, é um espaço onde os alunos podem

aprender a comunicar e raciocinar matematicamente e a construir o seu próprio conhecimento.

A elaboração deste trabalho surgiu da necessidade de conhecer algo mais sobre os factores que influenciam o desempenho dos alunos ao nível da resolução de problemas, e também, pelo facto de ao longo da minha actividade docente me ter questionado acerca das razões que levam os alunos a terem baixo nível de desempenho na resolução de problemas. Desde 1992/1993, leccionei em onze escolas diferentes, nas zonas norte e centro do país, e em todas, constatei nos alunos, das turmas que me foram atribuídas, dificuldades na resolução de problemas. Perante esses factos comecei a fazer pesquisas em livros, revistas, jornais, nos diálogos com os alunos e em reflexão com colegas da mesma área, fui alterando a minha metodologia e exploração de problemas na sala de aula. Tendo em conta as reflexões e análise das resolução de problemas dos vários alunos a quem leccionei a disciplina de matemática, posso concluir que os alunos só aprendem a resolver problemas se lhes dada a oportunidade de os resolverem, em diferentes contextos, e que todos os alunos que revelam dificuldades no cálculo numérico (por exemplo: saber a tabuada, ter desembaraço nas operações elementares) têm dificuldades na resolução de problemas, mesmo nos de complexidade mais baixa. Atrevo-me a afirmar que para aceder a um nível de raciocínio mais complexo como o da resolução de problemas é necessário ter desenvolvido estruturas cognitivas que depois “fazem a ponte” com outros raciocínios mais complexos. É notório, num número crescente de alunos onde a aquisição e compreensão dos conceitos parece ser projectada num espelho, com uma superfície muito polida que passado pouco tempo esquecem os assuntos estudados, havendo a necessidade contínua de sistematização.

Presentemente, estou convicta de que um aluno só aprende a resolver problemas resolvendo problemas em contextos diversificados, e este deve ser estimulado desde cedo a explicar como pensa, isto é, explicar de forma clara, utilizando uma linguagem matemática, os seus raciocínios e a escolher a estratégias mais adequadas para chegar à solução do problema. No sentido de aprofundar os meus conhecimentos sobre o desenvolvimento do raciocínio através da resolução de problemas, elaboramos várias pesquisas e seleccionamos alguns investigadores que consideramos a sua informação relevante para este trabalho, tais como: Polya, Borasi, Kilpatrick, Schoenfeld, Lester. Nos relatórios elaborados pelo Ministério da Educação (2012) sobre a prova final (exame) de matemática do 6ºano, é referido que os alunos apresentam níveis de desempenho baixos na resolução de problemas, no raciocínio e na comunicação matemática e em relacionar dois ou mais conceitos diferentes no mesmo problema.

Na minha opinião a resolução de problemas é um dos pilares mais importante da matemática, mas não basta apenas resolver problemas do mesmo tipo, é preciso resolver problemas de diversos tipos e em contextos diferentes, porque os alunos podem resolver bem um tipo de problema e não conseguirem resolver os outros.

1. Revisão da literatura

1.1. O ensino - aprendizagem da matemática no 2º ciclo do ensino básico.

O ensino da matemática, no nosso país, tem sofrido mudanças significativas nos vários níveis de ensino. Os temas abordados, as experiências de aprendizagem, os recursos utilizados, o papel do professor, a avaliação das aprendizagens são muito diferentes dos que se encontravam em currículos anteriores e para o verificar basta analisar as orientações metodológicas referidas do novo programa de matemática e as orientações curriculares de diferentes épocas.

Neste capítulo, fazemos uma breve referência ao ensino e aprendizagem da matemática e ao seu currículo, no 2º ciclo do ensino básico. Inicialmente, focamos o espaço que a matemática ocupa no currículo, bem como os temas abordados e as experiências de aprendizagem proporcionadas aos alunos. Seguidamente, dedicamos atenção à dinâmica e ao ambiente de aprendizagem na sala de aula. Por fim, abordamos o tema da avaliação, assunto que tem merecido crescente importância, por parte da comunidade matemática.

1.1.1. O programa e o currículo de matemática no 2º ciclo do ensino básico.

A matemática constitui um património cultural da nossa sociedade, e cabe-nos transmiti-la às novas gerações, tendo o seu conhecimento, um carácter histórico, como qualquer outro domínio do conhecimento humano. Este conhecimento forma-se socialmente, através das interacções e comunicação entre as pessoas. Segundo Ponte e tal. (1997), uma das principais razões de natureza social atribuídas ao ensino da matemática, “(...) é proporcionar ao cidadão comum ferramentas matemáticas para o seu desempenho social, âmbito em que podemos distinguir três domínios essenciais de qualificação: o vocacional, o prático e o cívico” (p.63). A vertente vocacional refere-se essencialmente à preparação de um cidadão para um conjunto de cursos profissionais e científicos. A vertente prática visa ajudar os alunos a tornarem-se indivíduos competentes na resolução de problemas do quotidiano. A vertente cívica tem como finalidade tornar os alunos cidadãos capazes de participar numa sociedade, em que a matemática desempenha um papel fulcral, com sentido crítico.

Na educação matemática do ensino básico pretende-se que os alunos desenvolvam uma adequada compreensão matemática, o modo como ela pode ser aplicada em diversos contextos, implicando a aquisição não só de conceitos e procedimentos mas também o desenvolvimento de diversas capacidades, atitudes e aptidões. É inegável que a matemática é usada na sociedade de forma crescente em ligação com as diferentes áreas do conhecimento e actividade humana. Segundo o N.C.T.M. (1991), “ Todos os países (...) têm vindo a experimentar a mudança de uma sociedade industrial para uma sociedade de informação, um

movimento que transformou não só os aspectos da matemática que há necessidade de transmitir aos alunos como os conceitos e processos que eles devem dominar, se pretendemos que se tornem cidadãos produtivos” (p.3). Neste sentido, para responder às necessidades económicas do tempo presente, a sociedade espera que as escolas garantam que todos os alunos tenham oportunidade de se tornarem ao nível da matemática capazes de prolongar a sua aprendizagem, tenham iguais oportunidades de aprender e se tornem cidadãos aptos a compreender as questões em aberto, numa sociedade tecnológica (N.C.T.M., 1991).

Os objectivos educacionais para os alunos devem reflectir a importância da alfabetização matemática. No desenvolvimento do currículo da matemática a ênfase não deverá estar na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica um interesse e motivação pessoal para o fazer.

O currículo nacional do ensino básico (DEB, 2001), reafirmando as orientações anteriormente publicadas em Matemática na Educação Básica (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999), defende o desenvolvimento da capacidade das crianças e dos jovens usarem a matemática para resolver problemas, raciocinar e comunicar, acompanhando as orientações curriculares internacionais do ensino da matemática, as quais recomendam que se dêem às crianças oportunidades para interagirem e comunicarem as suas ideias e estratégias matemáticas.

No currículo nacional do ensino Básico (*CNEB*) salienta-se a importância do aluno “comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação” (p. 57). Na resolução de problemas e comunicação matemática, as orientações curriculares, internacionais e nacionais, põem a tónica na representação de ideias matemáticas seja na oralidade (falar e ouvir), seja na escrita e na leitura *de* e sobre matemática. Salientam ainda o papel da linguagem abstracta e simbólica da matemática (DEB, 2001; NCTM, 1991).

A matemática sofreu uma grande evolução nos seus métodos, processos e técnicas, na sua organização, na sua relação com outras áreas da actividade humana e no alcance e importância das suas aplicações, na quantidade e diversidade das áreas que a constituem. Esta sempre permeou a actividade humana e contribuiu para o seu desenvolvimento e são hoje múltiplos e variados os seus domínios. Está presente em todos os ramos da ciência e tecnologia, em diversos campos da arte, em muitas profissões e sectores de actividade de todos os dias. Por isso, hoje mais do que nunca se exige da escola uma formação sólida em matemática para todos os alunos (novo programa de matemática do ensino básico, (NPMEB, (2007)), nomeadamente:

- uma formação que permita aos alunos compreender e utilizar a matemática, desde logo ao longo do percurso escolar de cada um, nas diferentes disciplinas em que ela é necessária, mas igualmente depois da escolaridade, na profissão e na vida pessoal e em sociedade;

- uma formação que promova nos alunos uma visão adequada da matemática e da actividade matemática, bem como o reconhecimento do seu contributo para o desenvolvimento científico e tecnológico e da sua importância cultural e social em geral;
- uma formação que também promova nos alunos uma relação positiva com a disciplina e a confiança nas suas capacidades pessoais para trabalhar com ela.

O ensino da matemática ao longo da escolaridade básica, deve ser orientado por duas finalidades fundamentais:

→ promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.

Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos da:

- compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático;
- capacidade de analisar informação e de a resolver e formular problemas;
- capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos;
- capacidade de comunicar em matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega.

→ Desenvolver atitudes positivas face à matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

Esta finalidade deve ser entendida como incluindo o desenvolvimento nos alunos da:

- autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização;
- à-vontade e segurança em lidar com situações que envolvam matemática na vida escolar, corrente e profissional;
- interesse pela matemática e em partilhar aspectos da sua experiência nesta ciência;
- compreensão da matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua história;
- capacidade de reconhecer e valorizar o papel da matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico;
- capacidade de apreciar aspectos estéticos da matemática.

1.1.2. Temas do currículo e programa de matemática.

O actual programa de matemática (M.E., 2007) está estruturado em quatro grandes temas: números e operações; álgebra; geometria e organização e tratamento de dados. Apesar de cada um dos temas referidos poder constituir uma unidade didáctica por si só, eles deverão ser ensinados de forma integrada e não isoladamente, devendo a sua ligação e conexões serem uma preocupação contínua ao longo da operacionalização do programa. A aprendizagem da matemática envolve a cumulação de ideias e a construção de conhecimentos de conhecimentos cada vez mais profundos e complexos. O currículo escolar matemático deverá proporcionar uma espécie de mapa, que ajude os professores a conduzir os alunos para níveis crescentes de complexidade de conhecimentos. Segundo M.C.T.M., (2007), um currículo deve ser coerente, incidir numa matemática relevante e ser bem articulado ao longo dos anos de escolaridade. Um currículo bem articulado dá orientação acerca do momento em que é esperado que determinadas capacidades e conceitos estejam consolidados.

Números e cálculo

Actualmente, os adultos fazem pouco uso do cálculo escrito, nomeadamente dos algoritmos usando as operações elementares, devido ao facto de possível, a baixo custo adquirir uma calculadora. Porém todos os alunos devem adquirir uma compreensão global do conceito de número e das operações e a capacidade de usar essa compreensão, para tomar decisões perante situações problemáticas. Os números estão presentes em diversos campos da sociedade actual e não são usados apenas para fazer cálculos ou para representar medidas, mas também para estimar, localizar, identificar e ordenar. O cálculo mental, o domínio de um algoritmo e a utilização de uma fórmula, entre outros procedimentos, são destrezas úteis que se adquirem com a prática, a sua compreensão deve ser integrada em experiências matemáticas com significado para os alunos. O ensino dos números no ensino básico, não deve valorizar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras, mas sim uma aprendizagem ligada a uma compreensão que relacione entre si as propriedades dos números. O conhecimento dos números e cálculo, visto desta forma, constitui um saber indispensável no dia a dia dos alunos.

No domínio dos números e cálculo os alunos devem desenvolver os seguintes aspectos: o sentido de número (inteiros e racionais) e as diferentes formas de representação, as relações entre eles a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais, de maneira adequada ao contexto do problema; a compreensão dos números e das operações e a capacidade para as usar em situações concretas e apreciar a ordem de grandeza dos números; a destreza do cálculo mental e escrito e da avaliação da razoabilidade de um resultado, bem como de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos e diversos (M.E., 2007).

Geometria

A geometria está presente na natureza e em diversos campos da sociedade actual, como por exemplo, na indústria, na arquitectura, na engenharia e na topografia. O conhecimento das formas é muito importante na vida quotidiana, para os indivíduos se orientarem, estimarem, formas e distâncias, fazer medições e para apreciar a ordem e a estética na natureza e na arte. Desta forma, o estudo da geometria ajuda os alunos a representar e a dar significado ao mundo que os rodeia. É essencial para o aluno conhecer o espaço em que se move, torna-se importante promover a aprendizagem da geometria baseada na experimentação, observação e manipulação. Não devem ser apenas consideradas a aprendizagem do vocabulário, a memorização de definições e fórmulas e o conhecimento das propriedades das figuras, mas sim desenvolver as capacidades de visualização espacial, a intuição e a utilização destas na resolução de problemas.

No domínio da geometria os alunos devem aprender as formas e estruturas geométricas e o modo de analisar as suas características e relações. O desenvolvimento da visualização espacial implica a construção e manipulação de representações mentais de objectos bi e tridimensionais e a percepção de um objecto a partir de diferentes perspectivas, constitui um aspecto fulcral do raciocínio geométrico. A modelação geométrica e o raciocínio espacial proporcionam formas de interpretar e descrever ambientes físicos, podendo ser ferramentas bastante importantes na resolução de problemas. As ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e resolução de problemas em outras áreas da matemática e em situações do dia a dia, pelo que a geometria deverá ser integrada, sempre que possível com outras áreas. As representações geométricas poderão ajudar os alunos a dar significado a áreas e fracções, os histogramas e os diagramas de dispersão poderão ajudá-los a clarificar a informação e os gráficos de coordenadas poderão estabelecer um elo entre a geometria e a álgebra. O raciocínio espacial revela-se útil na utilização de mapas, no planeamento de trajectos, na construção de plantas e na criação artística.

No âmbito do tema da geometria, relativo ao 2ºciclo, devemos considerar os seguintes objectivos: Os alunos devem:

- compreender as propriedades das figuras geométricas no plano e no espaço;
- desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar;
- ser capazes de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria;
- ser capazes de resolver problemas e comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos.

Organização e tratamento de dados

Perante a sociedade actual, torna-se cada vez mais importante interpretar e compreender a forma como a informação é processada e traduzida em acontecimento utilizável. A quantidade disponível de dados que nos ajudam a tomar decisões na educação, nos negócios, na política, na investigação e na vida quotidiana é muito grande: os inquéritos

ao consumidor orientam o desenvolvimento e a comercialização dos produtos; as sondagens ajudam a determinar as estratégias das campanhas políticas e a experimentação é usada para avaliar a segurança e a eficácia dos novos tratamentos médicos. Para raciocinarem estatisticamente, os alunos precisam de compreender a análise de dados e os aspectos das probabilidades com ela relacionados, são aptidões necessárias para que se tornem cidadãos informados e consumidores inteligentes.

O novo programa da matemática veio introduzir em todos os níveis de ensino conceitos relativos à estatística e probabilidades onde a análise de dados é abordada de forma crescente ao longo de cada ano, na escolaridade básica. Os alunos para melhor compreenderem as ideias fundamentais da estatística, deverão trabalhar directamente com os dados. A importância atribuída ao trabalho com os dados exige o envolvimento dos alunos em novas ideias e procedimentos, à medida que avançam nos anos de escolaridade. Os temas relativos à análise de dados e estatística permitem aos professores e aos alunos o estabelecimento de importantes conexões entre ideias e procedimentos do número, álgebra, medida e geometria. A análise de dados e o estudo das probabilidades proporcionam um ambiente natural para os alunos estabelecerem conexões entre a matemática e as outras disciplinas escolares e as suas experiências quotidianas.

No âmbito do tema da organização e tratamento de dados pretende-se que os alunos, no 2º ciclo, sejam capazes de: explorar, analisar interpretar e utilizar a informação de natureza estatística; seleccionar e usar métodos estatísticos apropriados para recolher, organizar e representar os dados; planear e realizar estudos que envolvam procedimentos estatísticos, interpretar os resultados obtidos e formular conjecturas a partir deles, utilizando linguagem estatística, (novo programa de matemática (2007), p.42))

Álgebra

De acordo com Abrantes, Serrazina & Oliveira (1991), os métodos algébricos são elementos essenciais, para o estudo de problemas em diversas áreas do conhecimento, respectivamente, na economia, ciências naturais e ciências sociais e humanas. Além disso, no mundo actual e, em particular nos meios de comunicação social (jornais, revistas, TV, internet, livros,...) existe uma grande quantidade de informação sobre diversos temas, que geralmente é apresentada por tabelas e gráficos. A formação básica deve permitir aos alunos fazerem uma leitura adequada e interpretarem criticamente esse tipo de informação.

Pretende-se que o pensamento algébrico iniciado no 1º ciclo, nomeadamente, a investigação de sequências numéricas e padrões seja, no 2º ciclo, ampliado e aprofundado, explorando-se padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação ou de uma lei de formação pelo estudo da relação entre os termos. Os alunos desenvolvem igualmente a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. Este assunto é aprofundado e sistematizado através da exploração de múltiplas situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade directa, razão e

proporção. Neste ciclo, os alunos deverão ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos e de avaliar as vantagens e desvantagens de cada forma de representação, consoante os objectos em causa. À medida que trabalham com representações múltiplas de funções numéricas gráficas e simbólicas, irão desenvolver um conhecimento mais compreensivo das funções (Leinhardt, Zaslavsky, e Stein, 1990; NRC,1998, cit. N.C.T.M., 2007)

O propósito principal deste tema tem como objectivo principal desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem com a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos. Os alunos, no âmbito deste tema, devem ser capazes de explorar, investigar regularidades; compreender a noção de proporcionalidade directa e usar o raciocínio proporcional e serem capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas.

1.1.3. Experiências de aprendizagem.

O programa de matemática do ensino básico (2007) reforça a resolução de problemas incluídas no currículo nacional do ensino básico, ao incorporar como finalidade o desenvolvimento no aluno da “capacidade de resolver problemas e comunicar em matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas opiniões na resolução de tarefas/problemas. A resolução de problemas é vista como uma capacidade matemática fundamental, considerando-se que os alunos devem adquirir desembaraço a lidar com problemas matemáticos e relativos a contextos do dia a dia e de outros domínios do saber. Esta capacidade constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. O raciocínio matemático aliado à resolução de problemas, envolve a formulação e teste de conjecturas e, numa fase mais avançada a sua demonstração. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo. Além disso o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa, e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos números, da álgebra e da geometria. O programa da matemática valoriza também outras capacidades como as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática, contempladas quer no trabalho com as capacidades transversais quer no trabalho com os diversos temas matemáticos.

A resolução de problemas constitui um contexto universal de aprendizagem. Segundo o M.E. (2001), a resolução de problemas deve “(...) estar sempre presente, associada ao raciocínio e à comunicação matemática e integrada naturalmente nas diversas actividades. Os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e, em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução” (p.68). Deverá existir um equilíbrio entre problemas envolvendo aplicações da matemática ao mundo

real e problemas resultantes de investigações sobre ideias matemáticas. Segundo o N.T.C.M. (1991), o currículo da matemática deve envolver os alunos em problemas que exijam esforço e perseverança. O currículo da matemática deve proporcionar aos alunos a oportunidade para resolver problemas que requeiram trabalho cooperativo, a utilização de novas tecnologias, elaboração de ideias matemáticas relevantes e interessantes, experimentando o poder e a utilidade da matemática. A realização de jogos matemáticos devem ser explorados em todos os tópicos do programa de matemática. Estes podem ser apresentados como um desafio competitivo ou não, de forma lúdica, apelando ao raciocínio e à utilização de estratégias diversas. Os jogos colectivos, para além de desenvolverem as capacidades matemáticas, podem favorecer o trabalho cooperativo, e o desenvolvimento social do aluno. Um jogo pode ser o ponto de partida para a realização de actividades de investigação ou de um projecto.

Nos diversos tipos de aprendizagem vividas pelos alunos, devem ser considerados, em todos os temas, as capacidades transversais, nomeadamente a resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemáticos e a exploração de conexões com outros temas e áreas. A capacidade de resolução de problemas desenvolve-se resolvendo problemas de diversos tipos, identificando a informação relevante e em contextos variados, e analisando as estratégias utilizadas e os resultados obtidos (M.E.,2007). A prática de procedimentos não deve constituir uma actividade repetitiva e isolada, mas sim uma prática compreensiva que promova a aquisição de destrezas básicas. A prática e a compreensão de procedimentos, integrados em experiências matemáticas significativas, tais como o cálculo mental, o domínio dos algoritmos, a resolução de expressões numéricas e algébricas, a aplicação de fórmulas, a construção de figuras geométricas, a manipulação de instrumentos de desenho, entre outros, podem tornar-se importantes na resolução de um problema. Os recursos a materiais diversificados tais como: tangran, polidrons, multibásicos, régua graduada, ..., e recorrer a software de geometria dinâmica, geogebra e folha de cálculo, internet, geogebra, tarefas interativas. Os materiais manipuláveis são um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de várias tarefas matemáticas, principalmente das que visam promover actividades de investigação. As tecnologias, incluindo as calculadoras, computadores e vídeo, deverão ser utilizadas quando for apropriado. Estes instrumentos poderão libertar os alunos das tarefas fastidiosas de cálculo, permitindo-lhes que se concentrem na resolução de problemas e outros temas ou actividades.

1.2. A dinâmica e o ambiente na aula de matemática.

Existem vários tipos de aulas de matemática, cada uma com a sua dinâmica própria. Esta pode ser influenciada por diversos factores que se relacionam entre si. Estes factores podem estar associados ao contexto escolar e social, mas estão sobretudo relacionados com as características dos alunos, do professor e com a forma como estes se relacionam. É também importante um envolvimento activo dos encarregados de educação no processo de ensino e aprendizagem dos seus educandos e a manifestação de expectativas positivas da

família e de toda a comunidade, em relação à escola e em particular à disciplina de matemática.

A dinâmica da aula de matemática depende do próprio professor, do seu conhecimento e da sua experiência pedagógica e profissional. Em muitas aulas, os conceitos matemáticos são introduzidos pelo professor e os alunos têm um papel passivo, de meros receptores de informação. Noutras aulas, o professor promove a participação activa do aluno na construção do seu próprio saber, cabendo a ele um papel de organizador, conselheiro e dinamizador da aprendizagem. A dinâmica da aula de matemática é influenciada pelas concepções e atitudes dos alunos em relação à matemática, pelos seus conhecimentos e experiências de trabalho matemático e como estes encaram a escola. A actividade do aluno é um elemento essencial na construção do seu processo ensino aprendizagem, ao professor cabe favorecê-la, e para tal, deve planificar e conduzir as aulas tendo em conta as características e interesses dos alunos.

Na aula de matemática resolver problemas deve ser um ponto de partida para novas aprendizagens, em que os alunos desenvolvem o seu conhecimento matemática, como uma aplicação de aprendizagens precedentes, na qual os alunos mobilizam e põem em acção o seu saber e conhecimento. A discussão dos problemas, tanto em pequenos grupos como em colectivo, é uma via importante para promover a reflexão dos alunos, conduzir à sistematização de ideias e processos matemáticos e estabelecer relações com outros problemas ou variantes e extensões do mesmo problema. A resolução de problemas envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio progressivo da linguagem simbólica própria da matemática. O aluno deve ser capaz de expressar as suas ideias, de interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. A comunicação oral tem lugar tanto em situações de discussão na turma como no trabalho em pequenos grupos, e os registos escritos, nomeadamente no que diz respeito à elaboração de relatórios associados à realização de tarefas e de pequenos textos sobre assuntos matemáticos, promovem a comunicação escrita. O desenvolvimento da capacidade de comunicar matematicamente, por parte do aluno é considerado um objectivo curricular importante, e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é uma vertente essencial no trabalho que se realiza na sala de aula. No estudo da geometria e das grandezas geométricas deve tomar-se como ponto de partida situações do quotidiano dos alunos, recorrendo a exemplos e contra exemplos. Os alunos, ao resolverem problemas com regularidade que permitam diferentes abordagens incluindo problemas com mais que uma solução, problemas com excesso de dados e problemas sem solução, problemas de processo entre outros, vão adquirindo experiência e confiança no modo de procurar os dados necessários, de os interpretar de acordo com as condições dadas e de os relacionar entre si e com o que é pedido (M.E.2007).

Segundo o N.C.T.M. (2004), o professor de matemática deve criar um ambiente de aprendizagem que promova o poder matemático de cada aluno:

- permitindo e estruturando o tempo necessário para explorar profundamente a matemática e para se familiarizar com ideias e problemas significativos;
- usando um espaço físico e os materiais de forma a facilitar a aprendizagem do aluno em matemática;
- oferecendo um contexto que encoraje o desenvolvimento da aptidão e competência matemáticas;
- respeitando e valorizando as ideias dos alunos, as suas formas de pensar e a sua predisposição para a matemática;

e encorajando sistematicamente os alunos a:

- trabalhar independentemente ou em colaboração de modo a dar sentido à matemática;
- aceitar riscos intelectuais, colocando questões e formulando conjecturas;
- manifestar sentido e espírito crítico face à matemática.

A aprendizagem da matemática necessita de um ambiente harmonioso, onde os alunos se sintam respeitados e valorizados e possam, com naturalidade, exprimirem as suas dúvidas e sugestões. Por sua vez, o professor deverá valorizar as opiniões de cada aluno, a sua contribuição na resolução de determinada tarefa/problema e respeitar as suas diferenças.

O uso de novas tecnologias, nomeadamente, a calculadora, o computador possibilitam o desenvolvimento de um ambiente de trabalho participativo, estimulante e motivador. Estes materiais podem ser usados pelo professor para promover nos discentes uma atitude crítica, investigativa e desenvolver o raciocínio e a comunicação matemática.

Segundo o N.C.T.M. (2007), o ensino efectivo da matemática requer a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o sequente estímulo e apoio para que o aprendam correctamente. Os alunos aprendem matemática através das experiências que os professores proporcionam. Como tal, os seus conhecimentos matemáticos, a sua capacidade de os utilizar na resolução de problemas, a sua confiança e a sua predisposição em relação à matemática são modeladas pelo tipo de ensino com que se deparam na escola. Ensinar bem matemática é uma tarefa complexa, e não existem receitas fáceis para que todos os alunos aprendam ou todos os professores sejam de facto, eficientes. Para serem eficientes, os professores devem saber e compreender profundamente a matemática que ensinam e ser capazes de utilizar os seus conhecimentos de forma flexível, no decurso da sua prática pedagógica. Precisam de compreender os seus alunos, enquanto pessoas, e de ser criteriosos na escolha e na utilização de uma diversidade de tarefas, estratégias pedagógicas e de avaliação. As tarefas proposta aos alunos devem ser adequadas ao seu nível de conhecimento, de desempenho e à faixa etária.

1.2.1. Avaliação das aprendizagens.

A avaliação no domínio da matemática tem sido um tema muito discutido em publicações, debates, seminários e congressos. A avaliação dos alunos constitui, na verdade, para os professores uma das tarefas mais complexas. Tal como os programas de matemática têm evoluído, no sentido de valorizar não só a aquisição e compreensão de conhecimentos mas também no desenvolvimento das capacidades transversais e atitudes nos alunos, neste sentido também os princípios e instrumentos de avaliação devem evoluir.

Segundo Ponte *et al.* (1997), o ensino e a avaliação devem ser vistos como duas componentes do mesmo sistema e não como sistemas separados. Isto implica que os actividades de avaliação, sejam capazes, de constituir fontes de informação tanto para o professor como para o aluno e gerar novas oportunidades de aprendizagem. As actividades de avaliação, para além de fornecerem ao professor e ao aluno dados a respeito das suas capacidades, aptidões e preferências, devem também constituir uma base para elaborar actividades futuras.

A N.C.T.M. (1995), apresenta seis normas relativas a uma avaliação exemplar da matemática, a avaliação deve:

- refletir a matemática que os alunos devem saber e ser capazes de fazer;
- melhorar a aprendizagem da matemática;
- promover a equidade;
- ser um processo transparente;
- promover inferências válidas;
- ser um processo coerente.

A avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores quer para os alunos. Esta deverá constituir uma parte integrante do ensino, que informa e orienta os professores nas suas decisões. A avaliação não deverá ser meramente feita aos alunos, pelo contrário, ela deverá ser feita para os alunos. É importante que as tarefas de avaliação justifiquem o tempo e a atenção que os alunos despendem com elas. Quando os professores usam técnicas de avaliação como a observação directa, interações entre professor aluno e aluno professor, entrevistas com os alunos, os alunos tendem a aprender através do processo de verbalização das suas ideias e de resposta às questões do professor. Os comentários às tarefas de avaliação poderão ajudar os alunos na determinação de objectivos, assumindo a responsabilidade da sua própria aprendizagem e aprendendo de forma mais independente. Por exemplo, critérios de classificação com observações e indicações poderão ajudar os professores a analisar e a descrever as respostas dos alunos a tarefas complexas e a determinar os seus níveis de desempenho. Podem ainda ajudar os alunos a compreender as características que definem uma resposta correcta e completa. Da mesma forma, as discussões de turma, onde os alunos apresentam e avaliam diferentes tipos de resolução de problemas, poderão estimular a sua percepção da diferença entre uma resposta excelente e uma medíocre. Através da utilização de tarefas adequadas e da discussão dos critérios que compõem uma resposta correcta, que os professores poderão desenvolver nos seus alunos a disposição e a capacidade de eles se

envolverem na autoavaliação e reflexão do seu próprio trabalho e das ideias formuladas por outros.

Segundo Ponte *et al.* (1997), os testes constituem sem dúvida, o instrumento dominante na avaliação dos alunos. Contudo, este instrumento não parece responder aos princípios orientadores da avaliação, uma vez que não estimula a apresentação de raciocínios, interpretações e argumentos em situações complexas reais. Sendo provas individuais, não avaliam naturalmente a cooperação com os outros na resolução de um determinado problema. Sendo provas com tempo limitado, não permitem ao professor recolha de aspectos relacionados com a persistência do aluno, o seu gosto e envolvimento numa actividade de investigação ou experimental. Nas fichas de avaliação e nas questões aula o aluno responde em duas fases distintas. A primeira fase é realizada na sala de aula e sem quaisquer indicações do professor e em tempo limitado. Depois desta fase, o professor classifica a ficha de avaliação, indicando os erros mais graves e apresentando pistas de resolução. Com base nessas pistas, o aluno realiza a segunda fase, num período mais alargado de tempo, preocupando-se essencialmente com questões abertas. O processo completa-se com a atribuição de uma classificação final que contempla o desempenho nas duas fases e a evolução verificada (Menino & Santos, 2004). O teste em duas fases é normalmente composto por questões de diferentes tipos, questões de resposta curta, de resposta aberta e de ensaio (Leal, 1992, cit. por Menino & Santos, 2004). O relatório escrito, realizado pelos alunos a respeito de actividades de investigação, experimentais, projectos ou problemas constituem um elemento importante e um factor de aprendizagem. Com ele, o aluno aprende a registar por escrito o seu pensamento, a articular ideias e a explicar procedimentos. As produções escritas independentemente de serem elaboradas individualmente ou em pequenos grupos, têm um grande potencial formativo e contribuem para o desenvolvimento da autonomia e reflexão dos alunos, relativamente á própria aprendizagem.

O portefólio, de acordo com Almeida *et al.* (2004), é uma colecção organizada de trabalhos realizados pelos alunos, idealizada no sentido de permitir as várias componentes do seu desenvolvimento, e de fomentar a reflexão acerca do trabalho que é realizado, de acordo com o ritmo de cada um. Este deve conter os principais trabalhos do aluno, problemas que resolveu, testes, tarefas explorações e investigações em que esteve envolvido. A elaboração de um portefólio contribui para o desenvolvimento do sentido de responsabilidade e dos hábitos de reflexão, por parte do aluno, ao mesmo tempo que pode proporcionar ao professor, uma visão global do trabalho do aluno, focando sobretudo a sua evolução. O uso de portefólios é o reconhecimento de que a avaliação dos alunos deve considerar uma variedade de aspectos relativos à sua evolução de forma integral e global.

As apresentações orais devem desempenhar também um papel de relevo na avaliação. Quando um aluno expõe, perante os colegas e o professor, as estratégias utilizadas na resolução uma tarefa, está a ser submetido às questões que lhe são colocadas, e simultaneamente, desenvolve a sua compreensão dos problemas estudados, bem como a sua capacidade de comunicação e argumentação. As apresentações e discussões orais constituem

valiosas fontes de informação para o professor, quanto ao progresso dos seus alunos (Ponte e *al.*, 1997). O recurso a questionários e entrevistas pode também revelar-se uma prática de muita importância na avaliação, tanto nos aspectos do domínio das atitudes e valores, como das concepções dos alunos a respeito da matemática. Avaliar diferentes domínios de aprendizagem, impõe uma diversificação de formas e de instrumentos de avaliação. Eles não se substituem uns aos outros mas complementam-se entre si. Cabe a cada professor tomar as decisões, que julgue mais adequadas aos seus alunos, em função dos conhecimentos que pretende avaliar e das aprendizagens que pretende desenvolver.

Em síntese, neste capítulo, procuramos descrever a evolução do processo de ensino aprendizagem da matemática, baseado na mudança contínua das exigências, provocadas em parte, pelos avanços tecnológicos constantes numa sociedade cada vez mais informatizada. A matemática ocupa um espaço crescente nos actuais currículos/programas que advém do reconhecimento do seu papel primordial, na formação académica, pessoal e social do indivíduo. Na realidade, o ensino - aprendizagem da matemática tem um impacto que é reconhecido pela escola e pela comunidade em geral. Os professores, pais, e instituições são unânimes em considerar a competência matemática interessante e absolutamente necessária ao bom desempenho das tarefas quotidianas. Para o conseguir é preciso que se inicie o mais cedo possível, a cultivar o gosto pela matemática, através de actividades lúdicas, mas sempre atraentes e motivadoras, com vista ao desenvolvimento das capacidades de manusear, compreender, raciocinar, comunicar, manipular e criticar ao mesmo tempo que se incentiva a autoconfiança, o trabalho de grupo e a solidariedade. O desenvolvimento da competência matemática passa, obviamente, por uma selecção criteriosa de temas, que levam os alunos a situar-se de forma autónoma e segura, numa sociedade em constante transformação. A abordagem das diferentes temáticas deve, segundo o N.C.T.M. (1991), fluir de uma maneira interligada e integrada. O professor deverá agir no sentido de desenvolver a inteligência dos seus alunos através de acções dinâmicas tais como: investigar, criticar, descobrir, planejar, criar e resolver situações problemáticas. Neste sentido, deve encontrar ocasiões propícias à aquisição destes hábitos que, além de desenvolverem as potencialidades, preparam uma receptividade natural aos novos desafios, no campo da investigação e na compreensão de dados, nomeadamente aqueles que são lançados pelos media.

Nas diversas experiências de aprendizagem, damos especial relevo à resolução de problemas, pelo facto de desenvolverem várias capacidades, pelo sentido prático que envolvem e pela apetência que os alunos evidenciam em relacionar a matemática com o mundo que os rodeia. Não é por acaso que o novo programa de matemática do ensino básico N.C.T.M. (2007), consideram a resolução de problemas uma parte integrante de toda a aprendizagem da matemática e que nós a escolhemos para objecto deste estudo. Explorar este tipo de experiência proporciona e favorece a comunicação, a interajuda, a persistência e favorecem no crescimento intelectual e social dos alunos. Através de uma situação problemática pode experimentar-se uma diversidade de aprendizagens, tais como: raciocínio e comunicação matemáticos, projectos, investigações, manipulação de material tecnológico,

etc. Segundo o M.E. (2009) a resolução de problemas deve estar sempre presente, na abordagem de todos os temas do programa de matemática, por constituir um contexto transversal de toda a aprendizagem. As interações estabelecidas entre aluno e professor e professor e aluno na aula de matemática contribuem para o seu sucesso. São de valorizar as atitudes de respeito mútuo onde os alunos se sintam à vontade, para expor as suas dúvidas e sugestões, propor soluções e discutir a estratégia mais adequada. Se o aluno for respeitado e compreendido, saberá compreender melhor a avaliação a que inevitavelmente será sujeito. Quanto maior for a diversidade de formas e instrumentos de avaliação utilizados tanto mais justa e consciente será a avaliação.

1.3. Problemas e resolução de problemas matemáticos.

Neste capítulo fazemos referência à literatura consultada relativamente à resolução de problemas matemáticos e sua resolução. É necessário clarificar, em primeiro lugar, o que se entende por problema e por resolução de problemas. Apesar de discutidos ao longo de vários anos, esses conceitos têm sido objecto de definições com significados muitas vezes contraditórios, dado que na maioria das vezes, têm sentidos diferentes de indivíduo para indivíduo, o que por vezes dificulta a sua interpretação. São apresentadas algumas definições de problemas e de resolução de problemas, segundo a perspectiva de alguns autores. De seguida são revistas as diferentes tipologias de problemas que podem ser apresentadas aos alunos, segundo várias perspectivas, e por fim, são mencionadas as funções e a importância que a resolução de problemas representa no programa de matemática.

1.3.1. Revisão da literatura: problema e resolução de problemas.

Segundo Vergnaud, “ é problema tudo o que de uma maneira ou de outra implica da parte do sujeito a construção de uma resposta ou de uma acção que produza um certo efeito” (cit. por Boavida, 1993, p.101). Também para Kantowski (1997),” um individuo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar uma resposta ou com uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis” (p.163). Esta distingue dois processos importantes na resolução de problemas, um deles o processo - conjunto de acções desenvolvidas na procura da solução e o outro o produto - a própria acção.

Para Charles (1982,) um problema matemático é “ uma situação na qual o indivíduo ou grupo é chamado a desempenhar uma tarefa para a qual esse individuo ou grupo não tem um procedimento disponível para determinar a solução”. Segundo Lester (1980), um problema corresponde a uma situação, na qual o indivíduo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não tem acesso a um algoritmo que encontre a resolução.

Mayer (1985) defende que um problema acontece quando se tem uma situação inicial e se pretende chegar a outra final. Também Pehkonen (1991) define problema como uma

situação onde um indivíduo é chamado a relacionar, de maneira diferente, informação conhecida de modo a resolver uma tarefa. O mesmo autor considera que se, perante a resolução da tarefa, forem identificadas de imediato as operações/acções necessárias para a sua resolução, não se trata de um problema mas sim de um exercício. Neste contexto Polya (1981), procurou ajudar a descortinar o significado de problema, fazendo a distinção entre o problema em si e o seu processo de resolução. Polya refere que uma pessoa tem um problema quando procura conscientemente uma certa acção para alcançar um objectivo claramente concebido mas não atingível, de maneira imediata. Este autor é o único a indicar a dificuldade como uma característica inerente ao conceito de problema. A noção de dificuldade está muito ligada ao conceito de resolução de problemas, pois sem ela não se pode falar de problema. Por isso, os problemas podem ser classificados segundo o seu grau de dificuldade, se a dificuldade é muita o problema poderá ser considerado “grande” e se a dificuldade é pouca, estamos perante um “pequeno”problema. Ao analisarmos as definições anteriormente enumeradas, podemos verificar algumas características comuns. Na definição do conceito de problema destaca-se o carácter não rotineiro de uma tarefa para que esta possa constituir um problema. Neste âmbito também Boavida (1993) indica uma definição para um problema matemático:

Um problema matemático é um projecto pessoal, uma tarefa, uma situação:

- Que o aluno deseja resolver e desenvolver;
- Para o qual o aluno não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução;
- Que exige por parte do aluno a construção desse processo;
- Em cuja actividade de resolução estão envolvidos conceitos, procedimentos ou teorias matemáticas. (p.102).

São evidentes nesta definição, componentes de carácter não cognitivo - a necessidade de um problema despertar no aluno uma certa curiosidade, um envolvimento emocional e o desejo de o resolver - para que este possa constituir um verdadeiro problema. Nesse sentido, o problema deve estar formulado de forma adequada de modo a promover um verdadeiro desafio para o aluno, indo ao encontro das suas motivações, interesses e expectativas. Para resolver um problema é preciso definir um processo de resolução, exigindo este a elaboração de um raciocínio novo e criativo. Nesta definição é também de salientar o carácter subjectivo do conceito de problema matemático, e ainda, que este necessita de envolver conhecimentos prévios, técnicas e algoritmos matemáticos para a sua resolução. Uma tarefa pode representar para um aluno um simples exercício de aplicação, bastando que para isso o aluno conheça o caminho a seguir para encontrar a solução, e pode representar para outro aluno um verdadeiro problema, desde que este precise de construir um processo para a sua resolução. Nesta perspectiva, o mesmo problema pode ser interpretado de maneira diferente consoante o aluno. Ser problema não é uma característica intrínseca e imutável de uma tarefa, mas

depende da relação que cada aluno estabelece com ela e do contexto particular em que decorre a sua resolução (Fonseca, 1997).

Alguns autores fazem a diferença entre problemas e exercícios. Para Ponte (1984), o que distingue um problema de um exercício é que enquanto no exercício se utiliza um simples algoritmo para se obter o resultado, num problema é necessário uma certa criatividade em analisar e avaliar os dados e as relações. Para que o aluno resolva um exercício basta conhecer o algoritmo que aplicado de forma correcta o conduz à solução. Um discente que domine um conjunto de regras operatórias, conceitos e procedimentos pode ser bem sucedido na obtenção rápida de respostas a exercícios. Tal, pode não acontecer num problema. É preciso conceber uma estratégia adequada à sua resolução, dado que o aluno não dispõe de um processo rotineiro que lhe permita chegar à solução. Por isso, os problemas tenham excitado tanta curiosidade e vontade de os resolver.

Além dos diferentes significados que se atribuem ao conceito de problema, também a noção de "resolução de problemas", tem sido motivo de alguma polémica e discussão de ideias. Esta discussão engloba várias perspectivas sobre o que é o ensino, a matemática e a razão porque devemos resolver problemas matemáticos (Abreu, 2002). Lester (1980) refere que a resolução de problemas é um conjunto de acções desenvolvidas para resolver o problema. No mesmo contexto Mayer (1985) considera que a resolução de problemas é a descoberta do caminho que leva de uma situação inicial a outra final e que envolve uma série de operações mentais Fonseca (1997). As definições anteriores realçam a resolução de um problema como uma tarefa não rotineira, e que ocorre quando um aluno ou grupo de alunos se confronta com um problema e decide resolvê-lo. Para tal, precisa de desenvolver um conjunto de acções e processos que requerem algum raciocínio e conhecimentos matemáticos prévios, de forma a utilizar procedimentos que à partida não estão estabelecidos, cujo objectivo é obter a solução mais adequada para o problema.

O programa de matemática do ensino básico (2007) destaca três grandes capacidades transversais em toda aprendizagem da matemática, com destaque para a resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática. A resolução de problemas é vista como uma capacidade fundamental e deve constituir uma parte integrante do ensino e da aprendizagem em todos os níveis escolares. Segundo N.C.T.M. (2007, p.57), a resolução de problemas implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente. Para encontrar a solução, os alunos deverão explorar os seus conhecimentos e através deste processo desenvolvem, com frequência, novos conhecimentos matemáticos. Ponte (1987) refere-se à resolução de problemas como uma parte importante da actividade matemática, dado esta ser considerada fundamental no ensino da matemática, dando assim um importante contributo para a formação integral do aluno.

De seguida irei enunciar alguns tipos de problemas, fazendo uma breve caracterização para cada um deles.

1.3.2. Tipos de problemas

O desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de resolver problemas é considerado uma das grandes finalidades do ensino da matemática. É necessário colocar os alunos a resolver problemas para que estes aprendam a resolvê-los, isto é, aprende-se a resolver problemas resolvendo problemas. Polya (2003) diz que resolver uma grande variedade de problemas é um dos factores mais importantes para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas no indivíduo. Quando o professor planifica o tema sobre a resolução de problemas para propor na sala de aula, depara-se com a dificuldade em seleccionar as tarefas mais adequadas. Tal como referimos anteriormente, o conceito de problema é relativo e parece ser consensual que uma mesma tarefa, dependendo dos conhecimentos e da experiência de cada aluno, pode representar para uns, um verdadeiro problema e para outros não. Um verdadeiro problema tem de provocar, a quem é proposto, a curiosidade e o interesse de o resolver.

Existem diferentes formas de classificar os problemas. Dos vários tipos de problemas existentes, salientamos as dos seguintes autores: LeBlanc, Proudfti & Putt (1980), Borasi (1986), Kansky (1987), Fernandes e tal. (1994) e Ponte (1991).

LeBlanc, Proudfti & Putt (1980), resumem em dois tipos os problemas que aparecem no novo programa de matemática do ensino básico/currículo de matemática do ensino básico:

- problemas estandardizados dos manuais escolares;
- problemas de processo.

Os problemas estandardizados existentes, na sua maioria, nos manuais escolares de matemática podem ser resolvidos pela aplicação directa de um, dois ou mais algoritmos, já conhecidos pelos alunos.

Os problemas de processo exigem, da parte do aluno, de uma variedade de estratégias ou de um procedimento não algorítmico. Podem estar ou não relacionados com os tópicos/conteúdos e aparecem em menor quantidade nos manuais escolares, embora seja notório que a partir da implementação do novo programa de matemática do ensino básico, no ano lectivo de 2009/2010, verificou-se um aumento de problemas de processo nos manuais escolares.

Borasi (1986) propõe uma classificação dos vários tipos de problemas a partir de uma análise dos seguintes elementos estruturais:

- contexto do problema;
- formulação do problema;
- conjunto de soluções que o problema admite;
- estratégias de resolução.

Tendo em conta estes aspectos, Borasi distingue sete tipos de problemas:

- exercício;
- problemas de palavras;

- problema tipo puzzle;
- prova de uma conjectura;
- problema da vida real;
- situação problemática;
- situação.

O exercício é elaborado de uma forma explícita, única e fechada e o contexto é inexistente. As estratégias de resolução resumem-se à aplicação de regras operatórias e algoritmos anteriormente conhecidos que levam à solução, na maior parte das vezes única.

Para Boavida (1993), a diferença entre os exercícios e os problemas de palavras baseia-se, apenas, na presença de um contexto no enunciado dos problemas, não se restringindo a números e regras operatórias. Em relação a este aspecto, Abrantes (1989) diz-nos que o excesso de resolução de problemas contextualizados por parte dos alunos rapidamente os transforma em exercícios disfarçados nos quais o contexto do enunciado acaba por deixar de ser relevante. Os problemas tipo puzzle são caracterizados por uma formulação e contextos explícitos. As estratégias de resolução, geralmente, envolvem um truque que conduz à solução, que na maioria das vezes é única e exacta.

Nos problemas que consistem na prova de uma conjectura, a formulação é explícita e a solução é geralmente única. Neste tipo de problemas o contexto é em parte definido, supondo-se o conhecimento de fórmulas, teoremas e técnicas necessárias à sua resolução.

Nos problemas da vida real, a formulação e o contexto são em parte explicitados no enunciado e sendo por isso preciso proceder à recolha de informação complementar. A resolução deste tipo de problemas constitui um momento ideal para a tradução de linguagem corrente (da vida real) para linguagem matemática. Na exploração deste modelo exige-se a aplicação de técnicas matemáticas e torna-se necessário traduzir os resultados obtidos para a situação da vida real, a fim de verificar a validade da solução encontrada.

As situações problemáticas em que o contexto é em parte explícito no enunciado e a formulação é implicitamente sugerida, podem ter várias soluções. As estratégias de resolução para além de envolverem a exploração do contexto, também implicam a reformulação do problema e a formulação de novos problemas.

Há situações em que é apenas feito um convite à exploração do contexto e não há formulação do problema e nem são problemáticas.

Kansky (1987) num programa de ensino refere três tipos de problemas:

- problemas de tradução;
- problemas de aplicação;
- problemas não rotineiros.

Os problemas de tradução são resolvidos usando algoritmos já conhecidos e também podem requerer o uso de materiais manipuláveis.

Os problemas de aplicação são os que necessitam de recolher e analisar os dados, no meio onde vive o aluno.

Os problemas não rotineiros são aqueles que levam ao estudo de casos e extensões e problemas relacionados.

No âmbito do projecto resolução de problemas: ensino, avaliação e formação de professores financiado pela extinta Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, propõe outra tipologia de problemas existentes (Fonseca, 2000). Esta tipologia, a qual adoptamos neste trabalho, enumera quatro tipos de problemas diferentes que iremos exemplificar:

- problemas de processo;
- problemas de conteúdo;
- problemas de aplicação;
- problemas experimentais.

Os problemas de processo não se resolvem pela aplicação direta de um algoritmo. Neste processo é preciso a utilização de estratégias de resolução mais criativas para chegar à solução, respectivamente: trabalhar do fim para o princípio, descobrir um padrão, fazer um desenho ou esquema ilustrativo da situação apresentada no problema, reduzir a um problema mais simples, formular e testar uma conjectura. Estes problemas podem ser usados para desenvolver diferentes capacidades, para introduzir diferentes conceitos ou para aplicar conhecimentos e procedimentos matemáticos anteriormente aprendidos.

Os problemas de conteúdo requerem a utilização de tópicos/conteúdos programáticos conceitos, definições e técnicas matemáticas, pois sem elas será difícil resolvê-lo.

Os problemas de aplicação são problemas que utilizam dados da vida real que podem ser apresentados a quem os resolve ou recolhidos por estes. Este tipo de problemas requer uma ou mais estratégias de resolução, e também admitem mais que uma solução e podem demorar várias horas ou dias a serem resolvidos.

Na resolução de problemas experimentais é necessário a utilização de métodos de investigação próprios das ciências experimentais. Estes são problemas que permitem desenvolver algumas capacidades, tais como: planificar, organizar dados, fazer conjecturas, interpretar dados, medir contar ou pesar. Permitem que o aluno revele determinadas competências que, com outro tipo de problemas nem sempre são identificáveis. Além de se tornar um desafio, a sua resolução exige a utilização de processos diversificados de resolução de problemas, assim como a exploração de conceitos matemáticos. Na resolução e exploração deste tipo de problemas é importante realizar conexões matemáticas com outras áreas do saber.

Nos diferentes tipos de problemas é evidente a importância dos problemas relacionados com a vida real. Constatou-se que um número significativo de alunos, apesar de possuírem um vasto leque de conhecimentos matemáticos, e saberem resolvê-los no contexto matemático, quando confrontados com problemas da vida real não os conseguem resolver. Ponte (1991), quando frisa a importância deste tipo de problemas, propõe-lhes uma classificação, agrupando-os em três tipos: problemas do tipo I; problemas do tipo II; problemas tipo III. Os problemas do tipo I são definidos como situações do mundo real, e estes contêm geralmente

informação suficiente que permita uma resolução matemática e para a qual os discentes têm os conhecimentos necessários. Os problemas do tipo II são situações do mundo real que podem ser explorados de diversas maneiras e na sua resolução podem ser usados esquemas, tabelas, gráficos, diagramas, ..., e em relação aos anteriores necessitam de mais tempo para serem resolvidos. Os problemas do tipo III são definidos como investigações abertas e que, na sua exploração podem levar um tempo considerável. Podem ser usados para abordar questões que o professor não investigou em profundidade e requerem para a sua resolução, geralmente, um conjunto de conhecimentos matemáticos.

Smole & Diniz, 2001) considera cinco tipos de problemas:

- problemas sem solução;
- problemas com mais de uma solução;
- problemas com excesso de dados;
- problemas de lógica;
- outros problemas não convencionais.

Nos problemas sem solução ajuda o aluno a ter pensamento crítico, e geralmente as perguntas são inadequadas ao contexto, como no exemplo:

“Um menino possui 3 carrinhos com 4 rodas cada um. Qual a idade do menino?”

Os problemas com mais que uma solução rompem com a crença, nos alunos, de que estes têm apenas uma única resposta e o aluno ao resolvê-los participa na construção do seu próprio conhecimento.

Exemplo: *“Com 6 quadrados iguais construir uma planificação para o cubo”.*

Nos problemas com excesso de dados as informações dadas no enunciado não são usadas na resolução. Este tipo de problemas permite que o aluno aprenda a seleccionar dados relevantes para a sua resolução.

Os problemas de lógica exigem um raciocínio dedutivo e proporcionam, aos alunos, uma experiência enriquecedora ao nível da previsão, levantamento de hipóteses, análise e classificação.

Os problemas não convencionais podem ter várias soluções e podem transformarem-se em novos problemas, tal como o exemplo:

Preenche o quadrado mágico, usando os algarismos de 1 a 9, sem os repetir, de modo que a soma dos números na horizontal, na vertical e na diagonal do quadrado seja 15.

Para Dante (2005), há quatro tipos de problemas:

- problemas padrão cujo objectivo é memorizar conceitos básicos através dos algoritmos das quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) e envolvem a aplicação directa de um ou mais algoritmos aprendidos anteriormente.
- problemas de processo são aqueles em que as soluções não estão contidas nos enunciados. Não são resolvidos pela aplicação directa de algoritmos nem possuem uma tradução imediata para a linguagem matemática. É preciso que o aluno trace um plano de acção ou a estratégia para chegar à solução. Este tipo de problemas

incentiva a curiosidade e promove a criatividade no aluno. As estratégias e os processos utilizados para chegar à solução são mais valorizados, do que encontrar apenas a resposta correcta.

- problemas de aplicação são aqueles que envolvem situações do dia a dia mas necessitam do uso da matemática para os resolver. Também são chamados situações problema.
- problemas de quebra cabeça são um desafio para alguns alunos. Fazem parte da matemática recreativa e a sua solução depende, quase sempre de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque.

Dos diferentes tipos de problemas apresentados é de realçar a distinção entre um exercício e um problema; enquanto na resolução de um exercício se aplica apenas um algoritmo ou um resultado conhecido, num problema o aluno precisa de encontrar estratégias de resolução adequadas, alguma criatividade e a vontade de o resolver. Neste conjunto de problemas apresentados, apenas Borasi considera o exercício com sendo um tipo de problema, embora reconheça as diferenças entre estes e os restantes por ele apresentados.

1.3.3. Perspectivas e finalidades da resolução de problemas.

Segundo N.C.T.M. (2007, p.57), a resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática. O programa do ensino da matemática deve habilitar todos os alunos para:

- construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
- resolver problemas que surgem em matemática e em outros contextos;
- aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
- analisar e reflectir sobre o processo de resolução de problemas.

O currículo nacional do ensino básico considera a resolução de problemas como uma das principais experiências de aprendizagem no ensino da matemática. O ensino acerca da resolução de problemas salienta os procedimentos e as estratégias utilizadas com o objectivo de modelar comportamentos capazes de ajudar os alunos a resolverem problemas, promovendo deste modo a capacidade de resolver problemas. Segundo Polya (1945) “aprendemos a resolver problemas resolvendo”.

Hatfield (1978), considera, no ensino da matemática, três perspectivas:

- ensino para a resolução de problemas;
- ensino acerca da resolução de problemas;
- ensino através da resolução de problemas.

O ensino para a resolução de problemas realça a importância da aquisição de conceitos e técnicas matemáticas que os alunos devem possuir para conseguirem resolver os problemas correctamente.

O ensino acerca da resolução de problemas dá importância aos procedimentos e estratégias utilizadas, com o objectivo de modelar comportamentos e de capacitar os alunos para os resolver.

Com o ensino através da resolução de problemas pretende-se a introdução de tópicos do programa de matemática e o desenvolvimento de conceitos utilizando situações problemáticas. Esta perspectiva vai ao encontro das finalidades referidas no novo programa de matemática do ensino básico.

No ensino da matemática, Borralho (1990), considera como objectivos principais a aquisição de conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento de capacidades e hábitos do pensamento matemático. Neste sentido distingue três funções para resolver problemas: função do ensino; função educativa e a função de desenvolvimento. Na função do ensino, a proposta de um problema ao aluno serve de oportunidade, para que este se confronte com uma situação matemática de forma a adquirir, exercitar ou consolidar conhecimentos e desenvolver conhecimentos matemáticos. A função educativa visa a formação da personalidade do aluno, exerce influência sobre o desenvolvimento da concepção científica do aluno e a promoção do espírito crítico face aos fenómenos e factos naturais e sociais. Esta função engloba também a formação de sentimentos e atitudes positivas, face ao trabalho em geral e à resolução de problemas em particular, bem como a sensibilização para a importância da matemática no desenvolvimento pessoal e social. A função de desenvolvimento relaciona-se com a influência que exerce a resolução de problemas ao nível do desenvolvimento intelectual e da formação do pensamento.

As funções da resolução de problemas mencionadas anteriormente, devem ser consideradas articuladas umas com as outras de forma consistente, de modo a poderem contribuir para a formação global do aluno.

Stanic & Kilpatrick (1989) referem que, no currículo da matemática, podem identificar-se três perspectivas diferentes no que se refere ao papel da resolução de problemas, nomeadamente:

- resolução de problemas como contexto;
- resolução de problemas como competência;
- resolução de problemas como arte.

Na perspectiva como contexto os problemas são utilizados como meios para atingir outras finalidades do ensino da matemática. Nesta perspectiva Stanic & Kilpatrick consideram cinco temas: a resolução de problemas como justificação (os problemas, relacionados com experiências e situações do mundo real, fazem parte integrante do currículo e, deste modo, é fácil explicar aos pais a sua importância e inclusão no currículo); a resolução de problemas como divertimento tem como função que os alunos se divirtam com os temas matemáticos, e

também serve de motivação; a resolução de problemas como motivação tem como objectivo principal a promoção do interesse dos alunos pelos tópicos matemáticos; A resolução de problemas como prática para reforçar conhecimentos é a perspectiva com maior influência no currículo da matemática. Os problemas constituem a prática necessária para reforçar conceitos e capacidades. No que se refere à perspectiva de resolução de problemas como competência, esta olha para a resolução de problemas como uma das diversas competências a ser ensinada na escola e deve ser encarada como um conteúdo que dá ênfase à resolução de problemas rotineiros e não rotineiros.

A forte influência de Polya nos trabalhos relacionados com a resolução de problemas é visível quando Stanic e Kilpatrick referem numa perspectiva mais compreensiva e profunda do papel da resolução de problemas; na resolução de problemas como arte, segundo Vale esta perspectiva primazia a descoberta matemática. Uma outra perspectiva, indicada por Porfírio (1993), e a de Ponte (1991) que analisando a forma de encarar a resolução de problemas ao nível dos currículos e da prática pedagógica dos professores, considera existirem três perspectivas diferentes. A primeira encara a resolução como um aspecto de enriquecimento do ensino da matemática. A actividade de resolução de problemas deve ser articulada com outros tópicos/temas e tarefas que deverão constituir o currículo da matemática. A segunda perspectiva defende a necessidade de partir de problemas, de modo que o conhecimento matemático surja deles e da exploração da sua resolução. Na terceira perspectiva considera que se deve proporcionar aos alunos a resolução de vários e diversos problemas e que é importante o seu ensino de uma forma explícita, realçando a discussão de heurísticas gerais e específicas e ao desenvolvimento nos alunos de capacidades metacognitivas.

No programa de matemática é reconhecida a importância da resolução de problemas no processo de ensino aprendizagem. Os problemas devem ser encarados como situações de descoberta, investigação e exploração e como consolidação de conhecimentos e surgem no centro de um esquema que inclui todos os temas/tópicos. Os alunos devem desenvolver a competência de saber resolver problemas, raciocinar e comunicar matematicamente. De acordo com o M. E. (2001, p.57) “ todas as crianças e jovens devem (...) desenvolver a capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a autoconfiança necessária para fazê-lo”. Ao longo do ensino básico todos os alunos devem ter a oportunidade de experimentar diversos tipos de experiências de aprendizagem. É neste sentido que a resolução de problemas é, também, proposta como uma experiência de aprendizagem. Desta forma novos conceitos e procedimentos matemáticos podem ser introduzidos, ao mesmo tempo que outros são consolidados, proporcionando-lhes ainda o desenvolvimento da capacidade de raciocinar e comunicar matematicamente.

As perspectivas referidas sobre a resolução de problemas no ensino da matemática estão hoje evidentes no currículo e programa da matemática, sendo atribuído à resolução de problemas um papel cada vez mais preponderante no ensino e aprendizagem da matemática.

Em suma, é de realçar que apesar das divergências dos autores consultados sobre os conceitos de problema e de resolução de problemas, todos eles estão de acordo acerca da importância que lhes é atribuída, tanto como factor de desenvolvimento de capacidades como pela utilidade prática no dia a dia.

Após analisarmos os pontos de vista de alguns autores, consideramos que um problema é algo não se consegue resolver com a simples aplicação de um algoritmo, sendo preciso recorrer à análise dos dados fornecidos, a relação entre eles e o contexto. É consensual que ser ou não problema não depende somente da natureza da tarefa mas também da relação que existe entre a tarefa e o aluno/indivíduo a quem ele é proposta. Segundo alguns autores, para que uma tarefa constitua um verdadeiro problema, tem de suscitar no aluno interesse curiosidade e vontade de o resolver. Associado ao conceito de problemas está a resolução de problemas que definimos como um conjunto de acções não rotineiras que desencadeiam a capacidade de raciocínio e de conhecimentos matemáticos na procura da estratégia mais adequada à sua resolução. A resolução de problemas constitui um dos pilares mais importantes do programa de matemática do ensino básico. Para Borralho (1990) são três as funções atribuídas à resolução de problemas: a função do ensino que visa a aquisição e consolidação de conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento de capacidades; a função educativa cujo objectivo é a formação da personalidade de um modo mais abrangente e o desenvolvimento da inteligência e da formação do pensamento. Pela importância crescente que ressalta da leitura do programa de matemática do ensino básico e da análise das perspectivas referidas anteriormente, a resolução de problemas é uma prática importante e imprescindível ao desenvolvimento intelectual do aluno e à sua formação global.

1.4. O ensino e a aprendizagem na resolução de problemas.

Durante vários anos, muitos investigadores têm-se debruçado sobre a resolução de problemas no ensino, tendo surgido diversos modelos de resolução, que seguidamente iremos analisar e que dão grande ênfase ao ensino das fases e das heurísticas inerentes ao processo de resolução de um problema. Falar em heurística de resolução de problemas é falar de métodos e regras que conduzem à descoberta e investigação e resolução de problemas. As heurísticas de resolução de problemas, segundo Polya, referem que resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano em que se pode aprender por meio de imitação prática. Então para se ser um bom resolvidor de problemas tem que se resolver problemas. Este matemático foi o primeiro a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática.

1.4.1. Modelos de ensino de resolução de problemas.

Nos dias de hoje, o matemático húngaro, Polya é conhecido como o pai da resolução de problemas. Este matemático considera que “o principal objectivo da educação matemática é ensinar os mais novos a pensar, e a resolução de problemas constitui uma arte prática que todos os alunos podem aprender”. Para Polya o “problema pode ser modesto, se desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Tais experiências (...) poderão criar o gosto pelo trabalho mental e deixar (...), a sua marca na mente e no carácter” (2003, p.11). Um aluno que experimente o prazer pelo estudo da matemática através da resolução de problemas, um problema pode tornar-se tão divertido como um jogo de xadrez ou de palavras cruzadas e o esforço mental pode tornar-se um exercício agradável como um animado jogo de hóquei.

Polya dedicou-se profundamente ao estudo sobre os métodos de ensino e a resolução de problemas. Este autor considera útil o conhecimento dos métodos de resolução de problemas por parte dos professores, de modo que estes desenvolvam nos seus alunos a capacidade de os resolver. Estes métodos consistem num conjunto de procedimentos usados para resolver um problema, através do uso de regras que permitam chegar à solução do problema.

Muitos trabalhos de investigação têm reflectido preocupações em avaliar os efeitos dos métodos de resolução de problemas no rendimento dos alunos, dado que uma das principais finalidades do ensino da matemática é melhorar o ensino e aumentar a capacidade dos alunos, ao nível da resolução de problemas. A maioria destes trabalhos revelam a influência de Polya. É convicção da comunidade científica que a utilização das ideias, das sugestões concebidas e da filosofia de ensino da matemática, segundo o modelo de Polya, é condição necessária para melhorar o nível de desempenho dos alunos na resolução de problemas.

O modelo de resolução de problemas concebidos por Polya compreende quatro fases e uma série de heurísticas associadas a cada uma das fases. Posteriormente surgiram outros modelos de resolução de problemas, tendo alguns como base o modelo de Polya, manifestando apenas diferenças nas Heurísticas associadas (Coelho, 1996). De seguida iremos apresentar as fases de alguns modelos de resolução de problemas, nomeadamente os propostos por Polya (2003), Lester (1980), Schoenfeld (1985) e Borralho (1990).

1.4.2. Fases da resolução de problemas.

Aprender a resolver problemas significa aprender a estabelecer relações entre conceitos, a reflectir sobre essas relações, discutindo-as e tomando decisões. Aprender a resolver problemas não significa ficar capacitado para resolver qualquer tipo de problema podemos apenas saber resolver um determinado tipo de problema ou nenhum. Os problemas não devem ser novidade para quem os resolve (Mourão, 1989).

A resolução de problemas é referida por vários autores como um processo sequencial, no qual se distinguem várias fases. A resolução de um problema, segundo Polya, envolve quatro fases que se desenvolvem de acordo com a seguinte ordem:

- 1º compreensão do problema;
- 2º elaboração de um plano ou estratégia de resolução;
- 3º execução do plano ou estratégia;
- 4º Verificação da solução.

Na compreensão do problema o aluno precisa de interpretar identificando, claramente, toda a informação que lhe é fornecida e o que é pedido. É muito importante que o aluno compreenda o problema. É importante fazer perguntas, tais como os dados, as condições, as incógnitas, estudando a compatibilidade e unicidade delas, e também, que o aluno manifeste o desejo de resolver o problema. Os problemas devem ser interessantes e bem escolhidos, isto é não serem nem muito fáceis nem muito difíceis. Em relação ao estabelecimento de um plano, Polya (2003) afirma:

Temos um plano quando conhecemos, pelo menos em linhas gerais, quais os obstáculos ou as construções que temos de executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até ao estabelecimento de um plano pode ser longo e tortuoso (...) o principal feito na resolução de um problema é, precisamente, a concepção do plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então após tentativas aparentemente infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo. (p.30).

A aplicação de conhecimentos matemáticos já adquiridos e exploração de problemas anteriormente resolvidos, pode ser útil. Os alunos, quando tentam lembrar problemas semelhantes ao problema proposto, estão a estabelecer conexões entre os dois tipos de problemas. Estas conexões podem ajudá-los a ver a matemática não só como uma disciplina, mas também como um instrumento que podem usar nas situações quotidianas.

No que concerne a fase de elaboração do plano ou estratégia de resolução, Polya refere que: “ traçar um plano, conceber a ideia da resolução, não é fácil. Para o conseguir é preciso, além dos conhecimentos anteriores, bons hábitos mentais, concentração no objectivo, fazendo a conexão entre os dados e a incógnita. É nesta fase que transformamos a linguagem usual na linguagem matemática, tornando-se, esta mais fácil quando o aluno elabora o plano ou estratégia.

Na última fase o aluno deve efectuar a verificação ou uma análise retrospectiva, verificando se o plano de acção foi adequado, ou se este pode ser melhorado. Embora esta fase seja importante para a organização final do pensamento, torna-se difícil para os alunos segui-la. Pois os alunos ficam satisfeitos quando encontram uma solução, considerando o problema terminado. Uma das estratégias de ajudar, os alunos, a pensar na existência de outras soluções e encorajá-los a discutir os seus resultados com outros alunos que tenham chegado a conclusões diferentes (Mourão, 1989). A revisão da resolução, voltando a examinar

o resultado final e todo o percurso que os levou até este, permite aos alunos consolidarem os seus conhecimentos e aperfeiçoarem a capacidade de resolver problemas.

Borrvalho (1991) propõe um modelo de resolução de problemas matemáticos baseado numa perspectiva metacognitiva e constituído por nove fases. Este autor pretende desenvolver em simultâneo, com este modelo, capacidades cognitivas e capacidades de resolução de problemas. A proposta de Borrvalho é composta pelas seguintes fases:

- leitura atenta do problema;
- consciencialização do problema;
- compreensão do problema;
- análise do problema;
- desenvolvimento do plano;
- implementação do plano;
- avaliação;
- identificar as aprendizagens;
- identificar as dificuldades.

Na primeira fase, Borrvalho (1991) pretende que o aluno faça uma leitura atenta do problema de modo a ficar com os elementos necessários para a compreensão deste, e poder, deste modo chegar à solução através de um processo adequado.

Quanto à fase de consciencialização do problema o aluno deve tomar consciência que o problema não pode ser resolvido de imediato e que para encontrar a solução terá de o resolver. Neste sentido, o problema deve despertar interesse e curiosidade de ser analisado pelo aluno.

Na terceira fase relativa à compreensão do problema permite que o aluno identifique concretamente o que lhe é pedido, a informação que possui para o resolver e a que deve procurar. É nesta fase que o aluno deve dar sentido ao problema e está dependente dos recursos e dos conhecimentos que o aluno possui para analisar a informação.

Na quarta fase sobre análise do problema é nesta fase que o aluno deve relacionar o identificado com os seus conhecimentos sobre o assunto, seleccionando as relações adequadas às condições do problema Borrvalho, (1991). Nesta fase surge a importância do conhecimento de conceitos e procedimentos prévios relacionados com o problema em estudo.

No que concerne à quinta fase, desenvolvimento de um plano o aluno deve “coordenar as questões tratadas nas fases anteriores, com o objectivo de manter uma visão geral do processo de resolução do problema, desenvolver um plano sobre o procedimento que vai seguir” (Borrvalho, 1991,p.172). O plano elaborado é colocado em prática na quinta fase, implementação do plano. Esta fase reflecte a decisão que se tomou em relação ao plano e deve conduzir a uma resolução e solução do problema.

A sétima fase do modelo, avaliação, é transversal a todo o processo de resolução do problema, pois o aluno deve fazer uma análise crítica das soluções encontradas, a verificação e adequação das mesmas às condições do problema e a sua explicitação.

No que se refere à oitava fase, identificar as aprendizagens, pretende-se que o aluno indique o que aprendeu de novo, ou o que recordou durante o processo de resolução do problema. Segundo Borralho (1991) é nesta fase que o aluno pode reflectir acerca da sua aprendizagem, dos seus pré-conceitos, dos seus recursos, da sua gestão em relação aos recursos, podendo deste modo desenvolver capacidades de controlo sobre a sua aprendizagem.

Por último, na nona fase, identificar as dificuldades, cujo objectivo é que o aluno indique quais foram as principais dificuldades na resolução de um determinado problema e a forma como as ultrapassou. Se as dificuldades não forem ultrapassadas é importante, proceder a uma análise profunda das mesmas.

Schoenfeld (1985) propõe um modelo de ensino para melhorar a capacidade de resolução de problemas tendo em conta o ensino de heurísticas. O modelo proposto refere cinco fases:

- análise;
- desenho;
- exploração;
- realização;
- verificação

A fase de análise inicia-se com a leitura do problema e cujos objectivos são a compreensão, simplificação ou reformulação do problema, não esquecendo de examinar todos os dados.

A segunda fase, desenho, tem como objectivo principal proporcionar ao aluno uma visão geral do processo de resolução, tendo o cuidado de desenvolver um plano de procedimentos a seguir. Esta fase pode não existir, em alguns problemas, isto é, quando não existe nenhum plano que conduza directamente à solução, e nesse caso poderá optar-se pela fase da exploração.

A fase de realização consiste na execução de um plano, passo a passo, que conduzirá à solução.

Na última fase, verificação, tem como principal finalidade o controlo da resolução.

O modelo de resolução de problemas apresentado por, Lester (1980), é constituído por seis fases, nomeadamente:

- consciencialização do problema;
- compreensão do problema;
- análise do objectivo;
- desenvolvimento do plano;
- implementação do plano;
- avaliação dos procedimentos e resultados.

Na fase de consciencialização do problema, a situação é colocada ao aluno, depois é analisada por este, e torna-se um problema quando o aluno toma consciência que existe dificuldade e que o problema não pode ser resolvido de imediato.

A fase da compreensão envolve a interpretação e selecção da informação contida no enunciado do problema dado.

Na terceira fase, análise do objectivo do problema pode ser vista como uma tentativa de reformular ou identificar partes do problema, a fim de se poderem usar estratégias e técnicas conhecidas pelo aluno. A análise dos objectivos deve envolver a especificidade da informação dada, a especificidade das relações na informação e especificidade das operações necessárias.

Em relação ao desenvolvimento do plano, nesta fase o aluno tem como objectivo delinear um plano para que venha ao encontro da solução do problema. No desenvolvimento do plano o aluno deve ter em conta a identificação das estratégias, tais como, encontrar um padrão ou problema semelhante, e também ordenar sub-objectivos e identificar as operações que podem ser usadas. Nesta fase, geralmente, a maioria dos alunos apresentam bastantes dificuldades, pois muitas vezes não sabem por onde começar ou o que fazer em primeiro lugar, como consequência de manifestarem dificuldades na interpretação da informação dada e em organizar as ideias.

A quinta fase, implementação do plano, consiste na execução do plano delineado. O aparecimento de erros de execução do plano, como por exemplo se o aluno decidir elaborar uma tabela ou sequência para descobrir um padrão pode cometer um erro de cálculo e que o leva a falhar a descoberta. Este tipo de erro pode ser reduzido se o aluno tiver a preocupação de avaliar cada um dos passos que faz, para chegar à resolução do problema.

Por último, a fase da avaliação dos procedimentos e resultados, cujo sucesso na resolução de problemas depende da avaliação sistemática e das decisões tomadas, ao longo do processo de resolução e da solução encontrada. A avaliação é um processo contínuo, que tem início logo que o aluno começa a analisar o/os objectivo(s) e continua até se encontrar a solução adequada.

Em seguida iremos apresentar uma tabela síntese dos modelos apresentados por alguns autores e estabelecer a comparação, no que diz respeito às suas fases:

Tabela 1: Fases de resolução de problemas.

Lester (1980)	Schoenfeld (1985)	Borralho (1990)	Polya (2003)
Consciencialização do problema. Compreensão do problema.	Análise.	Leitura atenta do problema. Consciencialização do problema. Compreensão.	Compreensão do problema.
Análise do objeto. Desenvolvimento de um plano.	Desenho. Exploração.	Análise do problema. Desenvolvimento de um plano.	Elaboração de um plano ou estratégia.
Implementação do plano.	Realização.	Implementação do plano.	Execução do plano ou estratégia.
Avaliação dos procedimentos e dos resultados.	Verificação.	Avaliação. Identificar aprendizagens. Identificar dificuldades.	Verificação da solução.

Ao observar a tabela 1 podemos salientar que os modelos de Schoenfeld (1985), de Lester (1980) e de Borralho (1990) coincidem em algumas fases com o modelo de Polya (2003). Associada à resolução de problemas, seja qual for o contexto, encontramos a noção de estratégia como entidade que contribui para a sua resolução (Simões, 1999) As heurísticas, na literatura, são designadas por estratégias de resolução de problemas englobando um conjunto de técnicas, métodos e procedimentos que devem ser bem conhecidas do aluno, tendo como finalidade a resolução de um problema, isto é, compreendê-lo melhor e evoluir no sentido de obter a solução ou pelo menos aproximar-se dela. Segundo Ponte (1991) as heurísticas “(...) são grandes sugestões ou estratégias correspondentes a operações mentais, em princípio aplicáveis a muitos problemas, cuja consideração poderá ajudar na sua resolução” (p.289).

Tabela 2: Heurísticas aplicadas na resolução de problemas

Lester (1980)	Schoenfeld (1985)	Polya (2003)
<p>Consciencialização do problema.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Consigo resolver o problema de imediato? - Sinto alguma dificuldade em apresentar a solução? <p>Compreensão do problema.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Quais são os dados relevantes para o problema? - Compreendo as relações existentes na informação fornecida? - Compreendo o significado de todos os termos envolvidos? 	<p>Análise.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Elaborar um diagrama - Examinar casos especiais - Tentar simplificar o problema 	<p>Compreensão do problema.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Qual é a incógnita? - Quais são os dados? - Quais são as condições? - Pode-se utilizar figuras, um gráfico, um diagrama, um desenho, ajudará a compreender o problema?
<p>Análise do objecto.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Quais os sub-objetivos que me podem ajudar a encontrar o objetivo principal do problema? - Pode ser ordenados esses sub-objetivos? - Estão corretamente identificadas as condições operativas do problema? <p>Desenvolvimento de um plano.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Existe mais de um caminho para resolver o problema? - Será este o melhor caminho? - Já resolvi algum problema semelhante? 	<p>Desenho.</p> <ul style="list-style-type: none"> - (Não são sugeridas heurísticas) <p>Exploração.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Considerar problemas equivalentes - Considerar problemas modificados. - Considerar problemas profundamente modificados. 	<p>Elaboração de um plano ou estratégia de resolução.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Recordar um problema semelhante ou parecido? - Reformular o problema - É possível decompor o problemas por partes? - Recordar fórmulas ou teoremas que podem ajudar?

Fernandes (1992) refere que muitos têm sido os trabalhos de investigação que reflectem uma preocupação em avaliar os efeitos das heurísticas e dos métodos heurísticos no desenvolvimento da capacidade de os alunos resolverem problemas. No entanto, Fernandes (1992) refere que “ (...) as heurísticas gerais e específicas, podem ser ensinadas e aprendidas e contribuem para melhorar o desempenho dos alunos na resolução de problemas”(p.69). O mesmo autor refere ainda que os alunos que foram ensinados a resolver problemas, utilizando as heurísticas, usam-nas regularmente, para resolverem problemas de forma correcta, e revelam atitudes susceptíveis de os conduzir a um maior sucesso na resolução de problemas, comparando com outros alunos que não foram estimulados a utilizá-las. **Na tabela 2** apresentamos as heurísticas relativas a cada uma das fases de resolução de problemas, e no que diz respeito aos modelos de resolução de problemas referidos por Polya, Lester e Schoenfeld.

1.4.3. O ensino da matemática na perspectiva da resolução de problemas.

No relatório nacional da prova de aferição de matemática (M.E.,2010) salienta-se que os alunos revelam muitas dificuldades no tema de números e cálculo e geometria, ao nível da resolução de problemas, da comunicação matemática, na interpretação de enunciados, na resolução de problemas e na explicação das suas ideias e no relacionamento ou aplicação dos conceitos de área e perímetro, bem como as unidades de medida. No sentido de colmatar essas dificuldades tem sido solicitado, pelo Ministério da Educação, a cada escola a definição de estratégias ou medidas de apoio, a implementar com esses grupos de alunos, de modo a ultrapassarem as dificuldades reveladas. No final do ano lectivo de 2011/2012, o Ministério da Educação, lançou as metas curriculares para a disciplina de matemática, referentes a cada um dos temas do programa de matemática do ensino básico. Nas metas curriculares estão indicados os objectivos específicos para cada tema, indicando o que os alunos devem saber em cada ano de escolaridade. É de salientar que a resolução de problemas é transversal ao longo de todos os temas do programa de matemática.

Dos estudos referidos anteriormente sobre o conhecimento das fases da resolução de problemas e das heurísticas, é possível concluir que determinadas orientações são importantes para os professores inculcarem nos alunos o conhecimento das fases e estratégias, de forma a capacitá-los para melhor resolverem problemas. Além do desenvolvimento da capacidade de resolver problemas também é útil ensinar aos alunos tópicos, conceitos, procedimentos matemáticos. Se o aluno não possuir conhecimentos de conceitos de algoritmos o seu campo de resolução de problemas fica limitado. É importante ensinar o aluno a trabalhar com as novas tecnologias (computador: folha de cálculo, Internet, pesquisas, questões on-line,...) e com os materiais manipulativos diversificados (tangram, polidrons, multibásicos, régua graduada, barra de cozinha, modelos de sólidos geométricos,...).O uso destes materiais permitem ao professor diversificar as estratégias na

resolução de problemas, e permitem um maior envolvimento do aluno na resolução do problema.

Segundo N.C.T.M. (1991) a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática e as conexões são pilares centrais no desenvolvimento do currículo/programa da matemática do ensino básico. A resolução de problemas deve ser uma metodologia regular na prática diária de qualquer professor de matemática. Para que essa metodologia seja utilizada sistematicamente, pelos docentes, tem de verificar-se mudanças significativas ao nível do que é ensinado e como é ensinado, e no discurso utilizado na sala de aula pelos alunos e professores e nas interações estabelecidas entre ambos.

Segundo Delisle (2000), na aprendizagem baseada na resolução de problemas o professor assume o papel de guia ou facilitador das aprendizagens. O professor tem a tarefa de orientar, guiar, sem conduzir e apoiar se dirigir. Cabe ao professor elaborar e definir o sucesso do problema no desenvolvimento dos conhecimentos e competências do aluno. Um problema não deverá ser demasiado fácil nem difícil de resolver pois não facultará o progresso dos alunos. Se isto acontecer, o professor deverá modificar o problema, fornecendo mais informação aos alunos ou alterando os dados.

Citado por Delisle (Dewey (1944))

“ Uma grande parte da arte de ensinar reside em fazer com que a dificuldade dos problemas novos seja suficientemente grande de modo a constituir-se como desafio ao raciocínio, e suficientemente pequena para que, juntamente com a confusão que naturalmente acompanha os novos dados, se vislumbre pequenas luzes algo familiares, das quais possam nascer sugestões úteis”(p.8)

Ainda, segundo o mesmo autor na elaboração de um problema o professor deve ter em conta os itens seguintes:

- ser adequado ao desenvolvimento do aluno;
- assentar na experiência do aluno;
- ser baseado no programa;
- adaptar-se a uma variedade de estratégias e estilos de aprendizagem.

Os professores na resolução de problemas devem orientar os alunos no processo de respostas aos problemas mas não devem dar qualquer resposta. No entanto, devem guiar os alunos no seu percurso, colocando questões às resoluções apresentadas, de modo que estes clarifiquem os seus raciocínios, promovendo deste modo, que estes desempenhem um papel activo na construção da sua aprendizagem.

Para Vale (1995), para se obter um ensino eficaz na resolução de problemas é importante que se tenham em conta os seguintes aspectos:

- comunicar o que é importante: os alunos geralmente valorizam os aspectos que o professor realça e avaliar regularmente;
- o ambiente de sala de aula: o ambiente criado na aula é essencial para o sucesso dos alunos. Este inclui o entusiasmo do professor, a frequência com que resolvem problemas e a avaliação das práticas usadas;

- tomar decisões sobre o conteúdo e métodos de ensino de na resolução de problemas: deverá se efectuado um diagnóstico do que os alunos sabem e das dificuldades quando resolvem problemas, a partir da observação e avaliação dos seus trabalhos.

Na perspectiva de resolução de problemas, segundo Vale (1995), o ensino da matemática deve ter em conta alguns objectivos, tais como:

- desenvolver a capacidade de resolver problemas;
- desenvolver a capacidade de seleccionar estratégias adequadas à resolução de problemas;
- promover o aprofundamento de conhecimentos acerca da resolução de problemas;
- desenvolver atitudes e concepções favoráveis à resolução de problemas;
- desenvolver a capacidade de generalizar soluções e estratégias para novas situações problemáticas;
- incutir confiança nos alunos quanto às suas capacidades para resolver problemas;
- desenvolver a capacidade de gerir e avaliar o pensamento e o progresso enquanto resolvem problemas;
- desenvolver a capacidade de resolver problemas em grupo;
- desenvolver a capacidade para estabelecerem conexões dentro e fora da matemática;
- utilizar a resolução de problemas para investigar e compreender temas de matemática;
- aplicar o processo de modelação matemática a situações do mundo real.

Durante, os 20 anos, da minha actividade docente fiz várias leituras (revistas, jornais, livros, artigos, formação, debates, Internet, jornais) e em reflexões críticas no sentido de melhorar a minha prática pedagógica, e também, perceber a razão do insucesso dos alunos na resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática. No entanto, comecei por elaborar o diagrama 1 sobre as fases de promoção do sucesso de resolução de problemas, e este está sendo aperfeiçoado, consoante as reflexões que faço e as sugestões/feedback que recebo dos alunos, nas minhas aulas. Todos os alunos possuem um conhecimento adquirido na escola - currículo escolar e o currículo oculto - adquirido no meio familiar, no meio envolvente,..., e ambos formam o conjunto de conhecimentos que o aluno possui. Este conjunto de conhecimentos, que o aluno possui, deve ser o ponto de partida para quaisquer aprendizagens subsequentes, e a partir deles o professor planifica e desenvolve as suas tarefas, cujo objectivo é desenvolver nos alunos a capacidade de raciocínio através da resolução de problemas de forma a alcançar o sucesso escolar. Para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático através da resolução de problemas é preciso realizar diversos tipos de problemas, tais como: problemas de cálculo, problemas com uma ou mais soluções, problemas com falta de dados, problemas com dados a mais; problemas com grau de complexidade baixo, média e elevado, problemas sem solução, problemas impossíveis, problemas de investigação, problemas de estratégia e problemas com conexões

com outras áreas. No diagrama 1 apresentamos uma síntese das fases de promoção do sucesso da resolução de problemas.

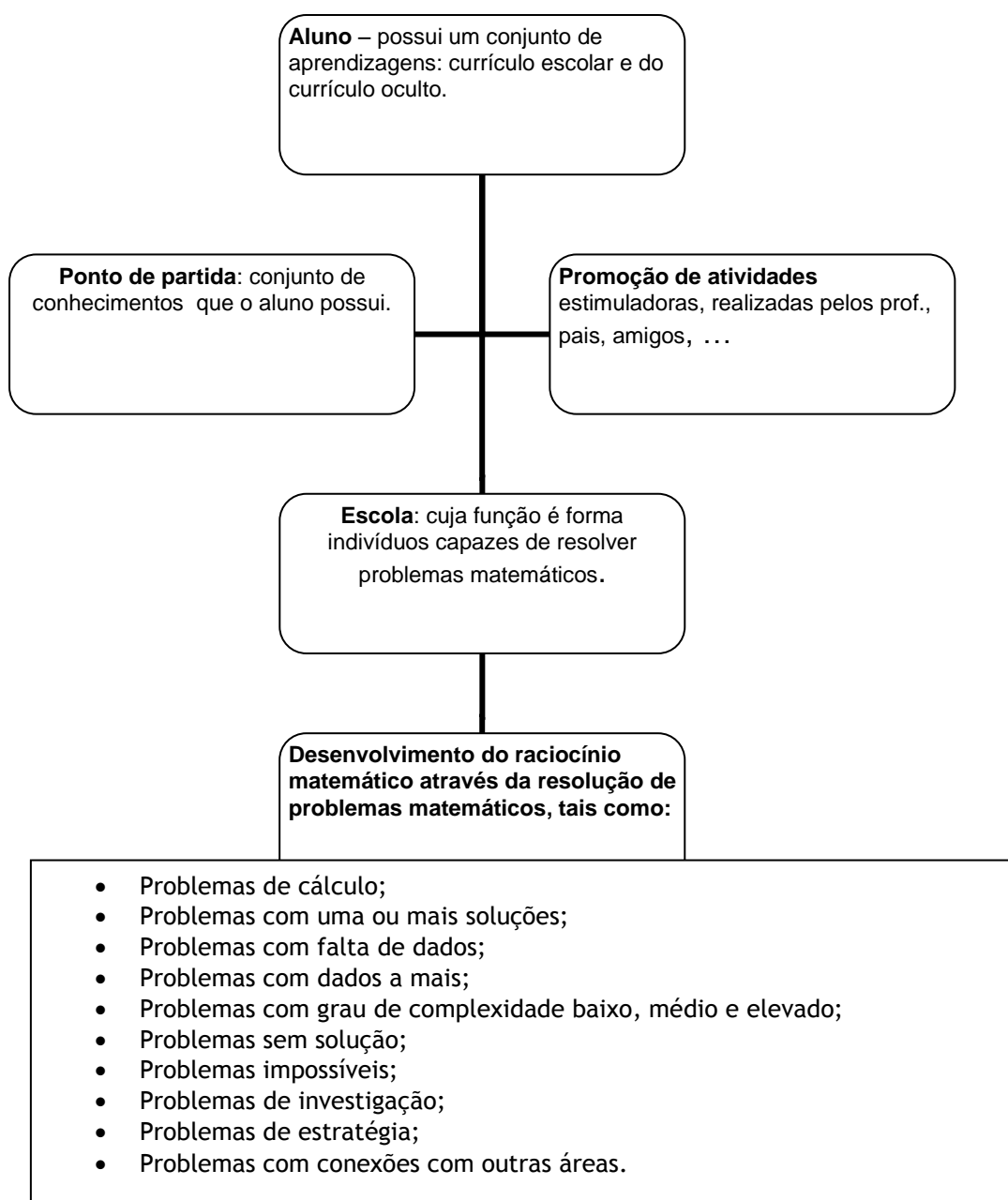


Diagrama 1: Fases de promoção do sucesso da resolução de problemas (elaborado pela autora).

É fundamental orientar as crianças, desde o pré-escolar, para experiências que conduzam ao desenvolvimento do pensamento lógico matemático, de modo que muito daquilo que aprendam seja fruto de uma descoberta. Antes da fase de abstracção as crianças devem passar por situações concretas que lhes permitam, não só a construção de certos conceitos como, também, uma estruturação destes. A apreensão dos conceitos deve ser feita de modo

gradual, levando a que sejam retomados, em contextos diversos, ao longo dos diferentes níveis de ensino, durante o seu percurso escolar. A utilização orientada de materiais manipuláveis estruturados (blocos lógicos, calculadores multibásicos, barras de cuisenaire, geoplano, pentaminós, tangran,...) coloca as crianças em situações cada vez mais complexas envolvendo-as, progressivamente. Os materiais manipulativos são suportes de aprendizagem que permitem envolver os alunos numa construção sólida e gradual. Estas experiências, além de despertarem um grande entusiasmo, permitem que as crianças permaneçam activas, motivadas, questionadoras e imaginativas. No contacto directo com a material, as crianças agem e comunicam, adquirindo vocabulário fundamental, associando uma acção real a uma expressão verbal. É importante a acção dos professores perante os materiais que usam, as questões que suscitam e as interacções que promovem. É a partir do real, da observação e da experiência que se levantam questões dando oportunidade, aos alunos, de se envolverem em descobertas e discussões matemáticas.

Apresentamos algumas sugestões de estratégias de ensino-aprendizagem para melhorar e desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos em contextos diversificados, tais como:

- Realizar intercâmbios com alunos de escolas diferentes do mesmo ano de escolaridade no âmbito da troca de correspondência matemática. Cada grupo/turma elabora problemas sob a orientação e supervisão do professor que envia para a turma da outra escola e vice-versa.
- Participar em provas de matemática: prova canguru matemático, olimpíadas da matemática,...;
- Participar em projetos como por exemplo: projeto Hypatiamat em que alia a matemática, a psicologia e a tecnologia, tendo como objetivo o sucesso escolar da matemática.
- Treino de problemas diversificados em diferentes contextos.
- Valorizar os pequenos progressos realizados pelos alunos nas aulas de matemática.

Em 10 de agosto de 2012 foram homologadas as metas curriculares pelo Despacho nº10874/2012, D.R. nº155, Série II, estas constituem-se como referência da aprendizagem essencial a realizar na disciplina de matemática. As metas curriculares, reforçam novamente, a abordagem da resolução de problemas em todos os tópicos do programa de matemática do ensino básico. A elaboração das metas curriculares fundamentou-se em estudos científicos e teve em conta as orientações estabelecidas em países com bons níveis de desempenho e identificam os desempenhos que traduzem os conhecimentos a adquirir e as capacidades que devem ser desenvolvidas.

1.4.4. Avaliação da resolução de problemas.

No ensino da matemática a resolução de problemas ocupa um lugar relevante quer como capacidade adquirida, quer como contexto de aprendizagem, quer na avaliação de desempenho dos alunos, tendo merecido especial atenção por parte dos professores e investigadores. Na avaliação das resoluções apresentadas aos problemas propostos nas aulas

ou em fichas de avaliação escrita, o professor ou investigador não se pode limitar apenas a verificar se o aluno encontrou a resposta correcta, este deve analisar o grau de compreensão e de elaboração que a resolução revela. É muito importante insistir, sistematicamente, nas aulas, no sentido de explicarem todas as estratégias e procedimentos que utilizaram para chegar à solução. Fernandes (1992) faz referência a duas técnicas descritas por Charles (1983), para avaliar o desempenho na resolução de problemas:

- analisar o trabalho escrito dos estudantes;
- observar o comportamento enquanto resolvem problemas.

A análise de trabalhos escritos poderá ser feita com a aplicação de uma escala de classificação ou sistema de pontos. Este sistema avalia o grau de compreensão do problema, a selecção e a utilização/escolha da estratégia mais adequada e a veracidade da resposta. Observar o comportamento dos alunos é muito importante para se fazer uma avaliação rigorosa. Charles (1983) sugere que seja feito um registo sistemático das observações feitas pelo professor. A elaboração de produções escritas, tais como, textos, relatórios de aulas ou de um problema, que podem ser elaboradas individualmente, em grupo de pares e dentro ou fora da sala de aula, onde o aluno deve explicar todo o processo de resolução de um problema ou a síntese de uma aula descrevendo o que aprendeu e onde sentiu dificuldades. O feedback ou escrita avaliativa é uma forma possível de criar contextos de aprendizagem que ajudem o aluno a ir desenvolvendo a sua capacidade de auto-avaliação, podendo constituir uma estratégia facilitadora para o aluno ser levado a tomar consciência dos seus erros, e de os autocorrigir e, pouco a pouco vaie-se apropriando do rigor da linguagem matemática.

Segundo Kilpatrick (1992) o método de avaliação de resolução de problemas deve centrar-se na comunicação, realçando a sua importância, e refere que o aluno só consegue resolver verdadeiramente um problema se conseguir comunicar aquilo que faz. Quando o aluno escreve um texto coerente sobre a resolução de um problema, de modo que esteja compreensível para quem o lê, ele reflecte globalmente sobre o problema, isto é sobre o modo como o abordou, as estratégias usadas e as coexções matemáticas realizadas. Segundo o mesmo autor, uma das formas de avaliação da resolução de problemas é através de uma composição escrita. “(...) tratar a resolução de problemas como uma composição. Isto é, tal como numa composição se pode distinguir entre a reprodução e a transformação de conhecimentos, também na resolução de um problema se pode observar que alguns raciocínios são uma execução mecânica de um procedimento treinado, enquanto outros operam em vários níveis para atingir uma compreensão do problema através de várias transformações que, em última análise, produza uma solução. Quando se pede a um aluno um relatório de uma resolução de um problema matemático, ele envolve-se numa actividade parecida com a de escrever uma composição. (...) O relatório escrito pode ser avaliado de modo muito parecido com o modo como um ensaio é avaliado, pode-se ver se a resolução

envolve apenas procedimentos mecanizados ou algum nível de compreensão mais profundo,”(p.42).

Para Charles, Lester & O Daffer (1987), a avaliação do progresso dos alunos ao nível da capacidade de resolução de problemas deve ter em conta a capacidade de aplicar uma série de habilidades e estratégias, tais como concepções e atitudes em relação à resolução de problemas. Estes autores, para avaliar o desempenho dos alunos na resolução de problemas, referem quatro técnicas, tais como:

- observar e questionar os alunos quando resolvem problemas. É importante que o professor faça um registo sistemático das observações feitas sobre o desempenho dos alunos, das suas atitudes e concepções acerca da matemática e da resolução de problemas.
- usar relatórios e inventários. As produções escritas realizadas pelos alunos sobre determinados problemas constituem um forte elemento de avaliação e de aprendizagem. O professor deverá pedir aos alunos que elaborem um relatório sobre a sua experiência em resolução de problemas ou preencher um inventário que traduza a sua atitude em relação a um ou mais problemas.
- testes de escolha múltipla são constituídos por itens que se responde com a identificação da resposta pretendida.
- usar uma escala de classificação. Este instrumento de avaliação é muito usado para classificar/quantificar os trabalhos escritos realizados pelos alunos. No que se refere à resolução de problemas a escala deve dar ênfase ao processo de resolução.

O professor deve analisar as respostas dos alunos através de uma “escala analítica”, avaliando sucessivamente a compreensão do problema, a elaboração do plano, as estratégias de resolução e a formulação da resposta final. Este método pretende avaliar o desempenho do aluno em cada uma das fases de resolução de um problema. No entanto, nem sempre é possível aplicar este tipo de escalas, porque em alguns problemas as várias fases da sua resolução não surgem claramente demarcadas ou porque o professor prefere fazer uma avaliação tendo por base critérios que atendam à maneira como o aluno abordou o problema e o resolveu. Nestes casos, Charles, Lester & O Daffer (1987) propõem a utilização de uma “escala holística focada”. Esta escala pretende chamar à atenção para a importância que deve ser atribuída na resolução e avaliação de problemas, a aspectos tais como a compreensão, a escolha e o desenvolvimento de uma estratégia e a sua explicitação. É importante que a prática de avaliação esteja focada na identificação e execução de procedimentos usados para obter a resposta de um problema, e também, na atribuição de uma classificação à solução como um todo, e não apenas com base na resposta final.

Em síntese, abordamos os métodos de resolução de problemas segundo vários autores. Polya foi um dos matemáticos mais importantes do século XX e o primeiro a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática, o qual lhe foi dado o título de “pai da resolução de problemas” e que influenciou grande parte dos trabalhos de

investigação. Propõe que se aguce a curiosidade, a criatividade e o gosto pela resolução de problemas, tornando-a uma actividade de lazer e divertida. Dos diversos autores que me servem de referência todos propõem um processo de várias fases para a resolução de problemas. Polya estabelece quatro fases, Lester propõe seis, Schoenfeld cinco enquanto Borralho divide a tarefa em nove fases. A cada fase estão associadas várias heurísticas.

Actualmente constata-se que os alunos ensinados a utilizar as heurísticas na resolução de problemas, obtêm melhores resultados e têm maior facilidade em encontrar a estratégia mais adequada e obter a solução do problema. Perante, as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas dos exames e das provas de aferição do ensino básico foram introduzidas, no programa de matemática do ensino básico (2007), as capacidades transversais: resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático para serem abordadas em todos os temas do programa. Tanto Fernandes (1992) como Ponte (1991) referem que as heurísticas são importantes na resolução de problemas.

O professor deve ter um conhecimento profundo das fases das heurísticas inerentes ao processo de resolução de problemas e não deve descurar o ambiente físico onde ocorre a actividade e o ambiente psicológico dos alunos. Este deve planificar as tarefas de acordo com o nível etário dos seus alunos, proporcionar aulas dinâmicas, onde o aluno deixe de ser um mero ouvinte e espectador passivo e se torne o “actor principal”, com uma participação activa onde o professor assume o papel de dinamizador e moderador.

Todos os autores referidos anteriormente salientam a importância de uma avaliação da resolução de problemas, mas salientam que esta não se pode limitar apenas a verificar se o aluno encontrou a solução correcta, mas sim a analisar o nível de compreensão e desempenho que a resolução apresenta.

1.5. Factores implicados no desenvolvimento das capacidades transversais

Neste capítulo fazemos referência à literatura no que diz respeito às categorias das variáveis implicadas na resolução de problemas e aos processos mentais envolvidos, e por fim, salientamos a importância das capacidades metacognitivas no desempenho dos alunos na resolução de problemas.

1.5.1. Categorias implicadas na resolução de problemas.

Para Vale (1995), a resolução de problemas engloba acções cognitivas, sendo importantes a memória, os conhecimentos e outras capacidades dos domínios cognitivo, metacognitivo e afectivo, entre outras. Estas razões levam vários investigadores a empenharem-se na verificação dos factores que influenciam o nível de desempenho dos alunos, na resolução de problemas. Kilpatrick (1975), (cit. Leitão, Fernandes & Cabrita, 1994) refere dois grupos de categorias de variáveis ligadas à resolução de problemas, sendo o primeiro grupo constituído por três categorias de variáveis independentes:

- Variáveis de sujeito;
- Variáveis de tarefa;
- Variáveis de situação.

O segundo grupo é composto por quatro categorias de variáveis dependentes:

- Variáveis de produto;
- Variáveis de processo;
- Variáveis de avaliação;
- Variáveis concomitantes.

As variáveis de sujeito referem-se às características específicas do aluno e são classificadas de acordo com a facilidade que podem ser modificadas. Salientamos nesta categoria as variáveis orgânicas (exemplo: o sexo, a idade, o estatuto social e económico e o local de residência), as de personalidade (são o estilo cognitivo, as atitudes, a persistência e a memória matemática e são possíveis de modificação através do ensino) e as de historial educativo consistem nas escolas frequentadas e os programas de ensino de matemática e também são possíveis de modificação.

As variáveis de tarefa dizem respeito à própria resolução do problema e incluem três tipos distintos de variáveis, tais como: variáveis de contexto, de estrutura e de formato. As variáveis de contexto caracterizam a forma do enunciado do problema e a linguagem utilizada. As variáveis de estrutura descrevem a estrutura matemática intrínseca da representação de um problema. As variáveis de formato descrevem as diferentes formas de como um problema pode ser apresentado, isto é, conjuntamente com outros problemas, com o auxílio de materiais manipulativos ou de outros materiais.

As variáveis de situação referem-se ao ambiente físico, psicológico e social em que a resolução de problemas ocorre. No ambiente físico estão incluídas as seguintes variáveis: sala de aula, o laboratório, a natureza do espaço (confortável, familiar, estimulante,...) e os recursos disponíveis tais como: calculadoras, computadores, materiais manipulativos, instrumentos de medida, entre outros. No ambiente psicológico inclui as variáveis que descrevem a finalidade, a natureza do ambiente de aprendizagem e a motivação para a resolução de problemas. O ambiente social considera as variáveis que descrevem o grupo de resolvidores, o seu tamanho, o relacionamento entre estes, assim como o relacionamento entre estes e o professor.

As variáveis de produto referem-se ao desempenho do aluno na procura da resposta para o problema. Estas incluem o tempo necessário para chegar à solução, a correcção, a elegância da solução e a apresentação de várias soluções, caso seja possível.

As variáveis de processo estão relacionadas com o comportamento do indivíduo durante a resolução de problema, isto é os processos heurísticos utilizados, os algoritmos usados, as estratégias utilizadas (correctas e erradas).

As variáveis de avaliação dizem respeito aos pontos de vista, às opiniões e pensamentos, a revisão crítica, o grau de satisfação e confiança na solução indicada pelo sujeito, depois de resolver o problema.

As variáveis concomitantes são as variáveis dependentes e podem modificar-se com a resolução de problemas e não estão incluídas nas anteriores. Leitão, (1994), as atitudes e a capacidade de estimar podem ser melhoradas depois de resolver um conjunto de problemas.

Também Charles & Lester (1992) refere três categorias de factores que intervêm na resolução de problemas, tais como:

- aspectos extra-instituição;
- processos na sala de aula;
- resultados da instrução.

Na primeira categoria de factores, aspectos extra-instituição, estes referem-se aos conhecimentos, crenças, atitudes características intrínsecas dos professores e alunos, às componentes da tarefa e às condições contextuais externas ao aluno e professor. No que se refere aos alunos, esta categoria diz respeito ao seu conhecimento matemático, às crenças de si mesmo, do professor, da matemática e da resolução de problemas e às atitudes, e também às seguintes características intrínsecas: sexo, idade, historial de instrução, personalidade e QI. Esta categoria de variáveis, no que concerne ao professor, tem a ver com o seu conhecimento em relação ao conteúdo, à pedagogia, ao currículo, e com as suas atitudes e crenças acerca de si mesmo, dos alunos, da matemática, da resolução de problemas e do ensino e também com as seguintes características intrínsecas: sexo, idade, experiências pedagógicas/educativas e de ensino, personalidade e QI. As características da tarefa referem-se à sua sintaxe, contexto, conteúdo à sua estrutura matemática e lógica. O contexto de sala de aula, o escolar e os programas a serem ensinados, dizem respeito às condições contextuais.

A segunda categoria de factores, processos na sala de aula, engloba todas as acções desenvolvidas pelo professor e pelos alunos na aula, onde podemos indicar quatro dimensões: atitudes, aspectos cognitivos e metacognitivos e comportamentos do professor e dos alunos. As três primeiras dizem respeito às fases de resolução de um problema e às atitudes e crenças de si mesmos, da matemática e da resolução de problemas. Clarificar, guiar, questionar, orientar modelar e avaliar são alguns dos comportamentos do professor. São comportamentos inerentes ao aluno identificar a informação necessária para resolver um problema, seleccionar e implementar a estratégia adequada e determinar a aceitação dos resultados.

Na terceira categoria de factores, resultados da instrução, refere-se aos aspectos relacionados com os resultados que o ensino pode provocar nos alunos e professores. Nos alunos são de salientar como resultados da instrução, os efeitos imediatos e a longo prazo, no que diz respeito à capacidade e ao desempenho na resolução de problemas, aos conhecimentos matemáticos e às atitudes e crenças. Os resultados da instrução nos professores dizem respeito aos efeitos no seu comportamento numa instrução futura e nas suas atitudes e crenças acerca da eficácia da instrução, à validade dos métodos de instrução e à facilidade do uso dos métodos de instrução.

Na **tabela 3** está uma síntese comparativa das categorias de variáveis implicadas na resolução de problemas, segundo Kilpatrick e Charles & Lester

Tabela 3: Categorias de variáveis implicadas na resolução de problemas.

Kilpatrick (1975)	Charles & Lester (1992)
Sujeito - Organísmicas - Personalidade - Historial educativo	Considerações Extra instituição - Conhecimentos atitudes e crenças - Características intrínsecas
Tarefa - Contexto - Estrutura - Formato	Considerações Extra-instituição - Componentes da tarefa
Situação - Ambiente físico - Ambiente psicológico - Ambiente social	Considerações Extra-instituição - Condições contextuais
Produto Processo	Processos na sala de aula - Atitudes, cognição e metacognição - Comportamentos
Avaliação Concomitantes	Resultados da instrução Processos na sala de aula - Atitudes, cognição e metacognição

1.5.2. Processos mentais envolvidos na resolução de problemas.

Nos processos mentais envolvidos na resolução de problemas de matemática, destacam-se as investigações de Charles & Lester (1984), que apresentam três tipos de factores, respectivamente:

- factores afectivos;
- factores relacionados com a experiência ;
- factores cognitivos.

A pressão, a resistência a bloqueios prematuros, o stress, o interesse, a perseverança e a motivação são exemplos de factores afectivos. As definições de problema apresentadas neste trabalho referem a necessidade de interesse e empenho na resolução do problema por parte do aluno. O processo de resolução de problemas pode ser afectado se um discente está pouco motivado na resolução do mesmo. Neste caso, o professor tem um papel fundamental no sentido de fomentar atitudes positivas e motivação face à resolução de problemas. No sentido de promover um clima favorável face à resolução de problemas, Borralho (1990) destaca um

conjunto de acções do professor, respectivamente: ser entusiástico acerca da resolução de problemas, personalizar os problemas sempre que possível, promover a perseverança e reforçar a vontade dos alunos em resolver problemas, recompensar verbalmente (por exemplo através do elogio ou reforço positivo), os alunos que arriscam propostas de resolução e promover a persistência em vez da rapidez na resolução de problemas.

Os factores relacionados com a experiência estão relacionados com a familiaridade que o estudante tem com o contexto e o conteúdo do problema, com as estratégias de resolução e com o conjunto de conceitos e procedimentos que o aluno consegue fazer. Segundo Borralho (1990), o conhecimento das fases de resolução de problemas é de extrema importância, dado que permite ao sujeito estabelecer uma linha geral de actuação para resolver o problema. O conjunto de conhecimentos, procedimentos e de estratégias que o sujeito conhece são, também, ferramentas que este pode recorrer para abordar um problema, nas diversas fases da sua resolução, com o objectivo de chegar à solução. É de realçar, nos factores cognitivos associados à capacidade de resolução de problemas, a capacidade de raciocínio matemático (espacial, proporcional, dedutivo ou indutivo, lógico e abstracto), e as capacidades linguísticas e de comunicação matemática.

Schoenfeld (1985), aponta quatro categorias de comportamentos e conhecimentos envolvidos na resolução de problemas:

- recursos;
- heurísticas;
- controlo;
- sistema de convicções.

Para Schoenfeld (1985) o resolvidor possui à partida um conjunto de ferramentas designado por recursos e que engloba conhecimentos matemáticos necessários à resolução de problemas, factos, procedimentos e destrezas que o aluno possui e que é capaz de se apoiar para resolver um problema. O termo heurísticas utilizado por Schoenfeld, refere-se às regras básicas que ajudam o indivíduo a resolver um problema. Esse conjunto de estratégias inclui, entre outras: reformular o problema, desenhar figuras, testar e verificar procedimentos, explorar problemas relacionados, trabalhar do fim para o princípio e introduzir a notação científica. O aluno, além dos recursos e das heurísticas, ao resolver um problema, precisa de processos de controlo. O controlo baseia-se na capacidade do aluno gerir toda a informação que tem acesso, respectivamente os recursos e as heurísticas. É necessário tomar decisões no que diz respeito à selecção dos recursos e das heurísticas e adequar ao problema em causa. O controlo é o que muitas vezes vai permitir distinguir um bom resolvidor de um fraco resolvidor de problemas. Os bons resolvidores são melhores do que os fracos resolvidores a controlar e a regular os esforços na resolução. Os sistemas de convicção dos alunos são factores a considerar no nível de desempenho da resolução de problemas. Os sistemas de convicções são as interpretações, a visão do mundo matemático que o aluno possui, as perspectivas que o aluno tem acerca de si próprio e como se relaciona com a disciplina de

matemática, com a resolução de problemas de matemática e com o mundo em geral. O sucesso e o insucesso na resolução de problemas deve ter em conta as quatro categorias, dado que estas estão interligadas, interajem e sobrepõem-se entre si (Borrvalho 1990).

1.5.3. Resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemático.

O raciocínio matemático é uma capacidade transversal a todo o programa de matemática do ensino básico e, segundo as orientações metodológicas, deve ser explorado em todos os tópicos do programa. Pois, este é fundamental na compreensão e na construção do pensamento matemático. A capacidade de raciocínio evolui ao longo da escolaridade, no 2ºciclo, um número significativo de alunos encontram-se num estágio de pensamento concreto, pois precisa de manipular materiais (sólidos geométricos, quantidades diversas, ...) para compreenderem conceitos numéricos e geométricos. É de referir que alguns destes alunos são capazes de fazer alguma abstracção.

Segundo a (N.C.T.M., 2007), ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática. Em todos os níveis e anos de escolaridade, os alunos devem perceber e acreditar que a matemática faz sentido, através do desenvolvimento de ideias, exploração de fenómenos, da justificação de resultados e da utilização de conjecturas em todas as áreas. O raciocínio matemático é um hábito mental que deve ser desenvolvido através da sua utilização consistente numa diversidade de contextos. É importante, que as crianças desde as suas primeiras experiências no campo da matemática, sejam ajudadas a compreenderem que as afirmações deverão ser sempre justificadas. Os programas de matemática referem que deverão habilitar todos os alunos para:

- reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspectos fundamentais da matemática;
- formular e investigar conjecturas matemáticas;
- desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticos;
- seleccionar e usar diversos tipos de raciocínio e método de demonstração. (N.C.T.M, 2007, p.61).

O raciocínio matemático envolve o reconhecimento e a aplicação do raciocínio indutivo e dedutivo; a utilização do raciocínio proporcional e espacial para resolver problemas; a formulação e avaliação de conjecturas e argumentos matemáticos, a validação do próprio pensamento e a capacidade de apreciar o uso e o poder do raciocínio como parte da matemática, (N.C.T.M.,1991).

A indução e a dedução são processos úteis na resolução de problemas. A dedução parte do geral para o particular, enquanto a indução se refere ao processo de descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares, procurando encontrar regularidades e coerência entre factos observados. Os instrumentos mais importantes são a particularização, a generalização, a identificação de regularidades e a analogia. O raciocínio proporcional é um instrumento bastante útil na resolução de problemas, pois é importante na generalização, em problemas que envolvam funções, tais como problemas associados à proporcionalidade directa, escalas,

distâncias e semelhança de figuras. A capacidade de raciocínio espacial envolve a percepção de formas e do movimento dessas no plano e no espaço, e é importante na resolução de problemas geométricos que envolvam áreas, volumes e sólidos geométricos.

A capacidade de ler, escrever, ouvir, pensar criativamente e comunicar acerca dos problemas, desenvolve a compreensão dos alunos acerca da matemática, e é um instrumento importante na resolução de problemas. N.C.T.M., (1991) a comunicação está fortemente ligada à resolução de problemas e ao raciocínio. À medida que se desenvolve a linguagem matemática dos alunos, desenvolve-se também a capacidade de resolver problemas. A capacidade de comunicar matematicamente deve envolver a compreensão, a interpretação e avaliação de ideias matemáticas apresentadas de forma escrita, oral e visual e a utilização de vocabulário específico, símbolos para representar ideias, descrever relações e construir modelos de situações.

Kilpatrick (1992), também salienta o papel da comunicação na educação matemática, comparando a tarefa de explicar a resolução de um problema com a de escrever uma composição. O mesmo autor, refere ainda que o aluno que não consegue comunicar os seus procedimentos na resolução de um problema é porque não o resolveu verdadeiramente. Na mesma perspectiva, Borralho (1990), considera que um dos factores que pode tornar um problema difícil é a complexidade do seu enunciado, isto é, a quantidade de informação dada, a complexidade da sintaxe e o conteúdo do problema. Na mesma linha de pensamento Kulme (1979), a partir dos estudos de compreensão de leitura e linguagem corrente, conclui que a complexidade sintáctica é um factor determinante na dificuldade e no tempo de resolução de um problema. Outro autor Malojo (2004), refere que a correlação entre as capacidades linguísticas e as dificuldades na matemática estão associadas à não compreensão do enunciado, sendo estas sentidas pelos professores. Será difícil para um aluno que não desenvolva competências linguísticas e de comunicação matemática resolver um problema complexo ao nível da linguagem. Segundo o modelo de Polya, as dificuldades do resolvidor poderão ocorrer na primeira fase da resolução do problema, pois esta fase exige uma compreensão do que é pedido e da informação que é dada, podendo esta não estar explícita ou ser insuficiente. Uma deficiente compreensão do problema por parte do aluno poderá levá-lo a uma escolha inadequada da estratégia de resolução.

As capacidades de raciocínio e de comunicação devem ser consideradas importantes recursos a ter em conta no desempenho e na resolução de problemas. Estas capacidades podem ser inseridas nos factores cognitivos, segundo a tipologia apresentada por Charles & Lester (1984), na categoria de variáveis de sujeito/personalidade, segundo Kilpatrick (1975) ou na categoria de variáveis de considerações extra-instituição (características intrínsecas), para Charles & Lester (1992)

Algumas dificuldades associadas ao processo de resolução de problemas estão relacionadas com o nível de compreensão. O aluno compreende melhor o problema quanto mais informação conseguir identificar no enunciado. Vale (1997) refere que, segundo Schroeder & Lester (1989), a compreensão de um aluno, em matemática, aumenta se este

conseguir relacionar determinado conceito matemático numa grande variedade de contextos, que relacione determinado problema com uma variedade de conceitos nele explícitos, e construir relações entre os vários conceitos matemáticos envolvidos no problema.

Segundo Borralho (1990), o facto do aluno possuir um corpo organizado de conhecimentos ou a capacidade de os organizar e os ordenar, em função das suas necessidades tem influência na capacidade de resolver problemas. Este autor, referindo-se a estudos comparativos de peritos em resolução de problemas, sugere que “(...) o facto dos peritos possuírem conhecimentos específicos sobre o problema, em forma organizada, lhes facilita o acesso à representação do problema e ao mesmo tempo permite desenvolver um plano de resolução utilizando as estratégias mais adequadas para chegar à solução de forma mais eficaz (...)”, (1990, p.98)

1.5.4. Metacognição e resolução de problemas.

A metacognição começou a ser referida por investigadores na educação matemática, a partir do trabalho desenvolvido por Flavell (1976), tendo um contributo importante para as aprendizagens da matemática e em particular para a aprendizagem da resolução de problemas. Para Flavell a metacognição é o conhecimento que cada um tem dos seus processos e produtos cognitivos ou relacionados. De acordo com Weinert (1987), a metacognição pode ser considerada como cognição de segunda ordem, esta refere-se ao conhecimento do próprio conhecimento, que permite a avaliação e a regulação dos processos cognitivos (Simões, 1999), Lester & Garofalo (1985), partilham da mesma ideia, reconhecendo que a metacognição envolve dois aspectos: conhecimento dos conhecimentos e a gestão ou verificação dos conhecimentos.

No que se refere à resolução de problemas de matemática, salienta-se o trabalho desenvolvido por Schoenfeld (1985), em que indicou quatro caminhos diferentes de conhecimentos e comportamentos envolvidos na resolução de problemas, tais como:

- recursos: conhecimentos matemáticos, factos e algoritmos;
- heurísticas: estratégias de resolução de problemas;
- controlo: formas individuais de gerir a informação a que acedem;
- sistemas de convicções: visão que os indivíduos têm acerca deles próprios, acerca da matemática, da resolução de problemas e do mundo.

Aceitar a perspectiva de Schoenfeld (1985), segundo Fernandes (1992), é reconhecer que o desenvolvimento das capacidades metacognitivas está fortemente ligado ao ensino da resolução de problemas e vice-versa. Schoenfeld enumera diferenças entre os bons e os maus resolvidores de problemas, estes distinguem-se nos seguintes aspectos:

- os bons resolvidores de problemas sabem mais que os fracos resolvidores mas também sabem de maneira diferente; o seu conhecimento está bem relacionado e é composto de esquemas ricos;

- os bons resolvedores tendem a focar a sua atenção nas características estruturais dos problemas, os fracos resolvedores concentram a atenção nas características superficiais;
- os bons resolvedores estão mais conscientes do que os fracos resolvedores no que respeita aos pontos fortes e fracos;
- os bons resolvedores são melhores do que os fracos resolvedores controlar e a regular os seus esforços de resolução;
- os bons resolvedores tendem a preocuparem-se mais do que os fracos resolvedores com a obtenção de soluções mais completas.

Para se ter êxito na resolução de problemas não basta ter um elevado número de conhecimentos matemáticos e de estratégias de resolução, pois é necessário relacionar todos esses conhecimentos e adequá-los à resolução de cada problema.

Investigações realizadas sugerem que o ensino de aspectos metacognitivos pode ter resultados positivos no ensino da matemática e em particular na resolução de problemas (Vale, 1995). Neste sentido, Garofalo, (1987) diz que é preciso desenvolver as capacidades metacognitivas dos alunos, levando-os a participar mais activamente na aprendizagem da matemática. Este indica três tipos de actividades que o professor pode realizar para implementar os processos cognitivos nos alunos, que são os seguintes:

- estimular os alunos a questionarem-se sobre o seu trabalho e a reflectir acerca dos seus conhecimentos matemáticos;
- ajudar os alunos a desenvolverem um sistema de convicções que possa contribuir para melhorar o seu desempenho. Por exemplo, o professor deverá transmitir aos seus alunos que o grau de dificuldade de vários problemas diferentes, o tempo que cada um demora a resolver e o número de soluções possível não é igual;
- os professores devem modelar resoluções de problemas, que mostrem claramente os processos envolvidos.

Na mesma sequência de pensamento Schoenfeld (1987) refere quatro técnicas que poderão ser usadas pelos professores cujo objectivo é desenvolver as capacidades metacognitivas nos alunos, tais como:

- visionamento de filmes/vídeos onde os alunos tenham a oportunidade de observar outros alunos a resolver problemas, na perspectiva deste autor, esta técnica ajuda os alunos a analisarem o seu comportamento;
- o professor como modelo do comportamento metacognitivo. Esta técnica tem por finalidade que o professor se apresente como um resolvidor de problemas e não como um solucionador de problemas. O professor deve trabalhar o problema desde o início, andando devagar através do processo de resolução, mostrando aos seus alunos todos os comportamentos e processos que vão aparecendo ao longo da resolução;
- discussão da resolução de problemas pela turma, assumindo o professor o papel de controlador de conhecimentos. Esta técnica permite que o professor modere as

actividades e ajude os seus alunos a analisarem o seu próprio comportamento na resolução de problemas;

- resolver problemas em pequenos grupos. O professor desloca-se junto de cada grupo, formulando questões aos grupo de forma a ajudá-los a discutir e a perceber o que estão a fazer.

Em sùmula, a actividade matemática tem despertado interesse dos investigadores no que respeita à resolução de problemas. Umas das principais referências neste campo são as categorias de variáveis de investigação preconizadas por Kilpatrick (1975), em que refere as variáveis de sujeito, tarefa, situação, produto, avaliação, processo e concomitantes, e por Charles &lester (1992) aspectos extra instituição, processos na sala de aula e resultados da instrução.

Dos vários factores implicados na resolução de problemas debruçamo-nos, em pormenor, nos factores cognitivos, tais como o raciocínio, a comunicação matemática, o conhecimento de conceitos e procedimentos. O raciocínio matemático anda a par da comunicação matemática, sendo ambos importantes na resolução de problemas. Este envolve o reconhecimento e a aplicação dos vários tipos de raciocínio (indutivo, dedutivo, analógico, abstracto, etc). A capacidade de comunicar matematicamente envolve entre vários aspectos a compreensão, a interpretação e avaliação de ideias matemáticas e a utilização de símbolos matemáticos para representar ideias, descrever relações e construir modelos. Outro aspecto a ter em conta na resolução de problemas é o conhecimento organizado de um vasto conjunto de conceitos e procedimentos.

Ultimamente, as capacidades metacognitivas têm sido referidas por alguns autores, como factores de extrema importância no desempenho da resolução de problemas. Na perspectiva de Schoenfeld é através das capacidades metacognitivas que o aluno adquire a capacidade de reflectir sobre as tarefas que está a realizar, de avaliar os caminhos alternativos e de decidir em determinado momento se deverá manter ou modificar a sua atuação, perante determinado problema. Ter um elevado número de conhecimentos e de estratégias de resolução, não basta, para se ter êxito na resolução de problemas, e também é preciso relacionar todos esses conhecimentos e gerir a sua aplicação na resolução de um problema. Daí a necessidade de reconhecer a importância das capacidades metacognitivas na resolução de problemas.

2. Síntese da revisão teórica

Com base na revisão de literatura consultada, a matemática constitui um património cultural na nossa sociedade, cabe-nos transmiti-la às novas gerações, tendo o seu conhecimento um carácter histórico. Este conhecimento forma-se socialmente, através das relações e interacções estabelecidas entre as pessoas. É evidente que a matemática é usada na sociedade de forma crescente em ligação com as diferentes áreas do conhecimento e a actividade humana. Segundo Ponte, *et al.* (1997), uma das principais razões de natureza social atribuídas ao ensino da matemática, “ (...) é proporcionar ao cidadão comum ferramentas matemáticas para o seu desempenho social (...) podemos distinguir três domínios essenciais de classificação: o vocacional, o prático e o cívico” (p.63). Na mesma perspectiva, N.C.T.M. (1991) refere “ Todos os países (...) têm vindo a experimentar a mudança de uma sociedade industrial para uma sociedade de informação, um movimento que transformou não só os aspectos da matemática que há necessidade de transmitir aos alunos como os conceitos e processos que eles devem dominar, se pretendermos que se tornem cidadãos produtivos”. (p.3). Neste sentido, para responder às necessidades económicas presentes, a sociedade espera que as escolas garantam que todos os alunos tenham oportunidade de se tornarem ao nível da matemática capazes de prolongar a sua aprendizagem, tenham iguais oportunidades de aprender e se tornem cidadãos aptos a compreender as questões em aberto, numa sociedade tecnológica.

A importância da prática de resolução de problemas é reconhecida por vários autores. Todos os autores que nos servem de referência propõem para a resolução de problemas, um processo que engloba várias fases. Polya estabelece quatro fases, Lester põe seis, Schenfeld cinco enquanto Borralho divide a tarefa em nove fases. A cada uma das fases estão subjacentes várias heurísticas. Ponte (1991) refere que as heurísticas são importantes na resolução de problemas. Na resolução de problemas estão implicados vários factores, tais como: os factores cognitivos, o raciocínio, a comunicação matemática, o conhecimento de conceitos e procedimentos. O raciocínio matemático anda a par da comunicação matemática, sendo ambos importantes na resolução de problemas. Para Fernandes *et al.* (1994), a resolução de problemas envolve um vasto e complexo conjunto de factores interrelacionados e dependentes uns dos outros: o raciocínio (indutivo, dedutivo, analógico e abstracto).

As capacidades metacognitivas têm sido referidas, como factores de extrema importância no desempenho da resolução de problemas. Na perspectiva de Schoenfeld é através das capacidades metacognitivas que o aluno adquire a capacidade de reflectir sobre as tarefas que está a realizar, de avaliar os caminhos alternativos e de decidir em determinado momento se deverá manter ou modificar a sua actuação, perante determinado problema.

No currículo nacional do ensino básico salienta-se a importância do aluno “ comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação” (p.57). Na resolução de problemas na comunicação matemática, as orientações curriculares nacionais e internacionais, põem a tónica na

representação de ideias matemáticas seja na oralidade (falar e ouvir), seja na escrita e na leitura de e sobre a matemática (DEB, 2001; N.C.T.M. 1991).

A matemática sofreu uma grande evolução nos seus métodos, processos e técnicas, organização, na sua relação com outras áreas da actividade humana e do saber. Está presente em todos os ramos da ciência e tecnologia, em diversos campos da arte, em muitas profissões e sectores de actividade de todos os dias. Por isso, hoje mais do que nunca se exige da escola uma formação sólida em matemática para todos os alunos (N.P.M.E.B., 2007).

O novo programa de matemática do ensino básico (2007) salienta que a resolução de problemas deve estar presente na abordagem de todos os temas do programa de matemática, por constituir um contexto transversal de toda a aprendizagem. A abordagem das diferentes temáticas deve, segundo o N.C.T.M. (1991), fluir de uma maneira interligada e integrada. O professor deverá agir no sentido de desenvolver a inteligência dos seus alunos através de acções dinâmicas tais como: investigar, criticar, descobrir, planear, criar e resolver situações problemáticas. Nas diversas experiências de aprendizagem, damos especial relevo à resolução de problemas, pelo facto de desenvolverem várias capacidades, pelo sentido prático que envolvem e pela apetência que os alunos evidenciam em relacionar a matemática com o mundo que os rodeia.

O papel da comunicação matemática está associado a vários factores, segundo alguns autores, tais como: Kilpatrick (1992) refere a importância do papel da comunicação na educação matemática, compara a tarefa de explicar a resolução de um problema com a de escrever uma composição; Borralho (1990), considera que um dos factores que pode tornar um problema difícil é a complexidade do seu enunciado; Kulme (1979) a partir de estudos de compreensão da leitura e linguagem, conclui que a complexidade sintáctica é um factor de dificuldade; Maloja (2004) refere que a correlação entre as capacidades linguísticas e as dificuldades na matemática estão associadas à não compreensão do enunciado; Polya, as dificuldades do resolvidor podem ocorrer na primeira fase (compreensão do problema) da resolução do problema, uma vez que esta fase exige uma compreensão do que é pedido e da informação dada. A dificuldade na compreensão de um problema por parte do aluno pode conduzi-lo a uma escolha incorrecta da estratégia adequada.

Nos relatórios elaborados pelo Ministério da Educação (2012) sobre a prova de aferição de matemática do 4ºano e a prova final (exame) de matemática do 6ºano (foi a primeira vez que se realizou a prova final), é referido que os alunos apresentam níveis de desempenho baixos na resolução de problemas, no raciocínio e na comunicação matemática e em relacionar dois ou mais conceitos diferentes no mesmo problema. A elaboração do exame teve em conta as quatro áreas temáticas explícitas no programa de matemática/currículo nomeadamente, números e operações, álgebra, geometria, organização e tratamento de dados, e também as quatro competências: comunicação e raciocínio matemáticos, resolução de problemas e conhecimento de conceitos e procedimentos. Ao compararmos os resultados das provas de aferição de anos anteriores e do exame final do 6ºano, deste ano, verificamos que a percentagem de respostas com classificação máxima diminuiu significativamente,

quando aumenta o nível de complexidade cognitiva apresentado. No geral, é na competência conhecimento de conceitos e procedimentos que os alunos apresentam melhores níveis de desempenho. Este resultado poderá explicar-se devido ao facto das tarefas envolvidas não exigirem o envolvimento de recursos cognitivos complexos e das perguntas incidirem sobre conceitos e procedimentos, facilmente memorizáveis comparando-as com as que envolvem o recurso a uma diversidade de estratégias.

O programa de matemática do ensino básico (2007) reforça a resolução de problemas ao incorporar como finalidade o desenvolvimento no aluno da capacidade de resolver problemas e comunicar em matemática, oralmente e por escrito. A aula de matemática é um espaço importante onde os alunos podem expressar as suas ideias, interpretar e compreender as ideias que lhe são apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos. O desenvolvimento da capacidade de comunicar matematicamente, por parte do aluno é considerado um objectivo curricular importante, e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é uma vertente essencial no trabalho que se realiza na sala de aula. A realização de jogos matemáticos podem ser apresentados como um desafio competitivo, de forma lúdica, apelando ao raciocínio e à utilização de estratégias diversas. Os jogos colectivos, para além de desenvolverem as capacidades matemáticas, podem favorecer o trabalho cooperativo, e o desenvolvimento social do aluno. O desenvolvimento da abordagem dos diferentes tópicos do programa deve ter em conta o uso de materiais diversificados, tais como: tangran, polidrons, multibásicos, réguas graduadas, ..., e recorrer a software de geometria dinâmica, geogebra e folha de cálculo, internet, geogebra, tarefas interactivas e de materiais manipuláveis são um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de várias tarefas matemáticas.

Em 10 agosto de 2012 foram homologadas as metas curriculares pelo Despacho nº10874/2012, D.R. nº155, Série II, estas constituem-se como referência da aprendizagem essencial a realizar na disciplina de matemática. As metas curriculares, reforçam novamente, a abordagem da resolução de problemas em todos os tópicos do programa de matemática do ensino básico e identificam os desempenhos que traduzem os conhecimentos a adquirir e as capacidades que devem ser desenvolvidas.

De acordo com as ideias apresentadas anteriormente, salientamos que para desenvolver a capacidade de raciocinar e comunicar matematicamente é necessário que os alunos, na aula de matemática, resolvam problemas em contextos diversificados, de acordo com o seu nível de conhecimentos e usando diversos materiais. Os vários estudos corroboram neste sentido, e com base nessa ideia elaboramos uma proposta pedagógica de tarefas com problemas diversos englobando todos os temas do programa de matemática, para ser aplicada a alunos, do 2ºciclo, na disciplina de matemática.

2.1. Proposta pedagógica de tarefas.

A presente proposta pedagógica de tarefas sobre a resolução de problemas pretende desenvolver a capacidade de raciocínio através da resolução de problemas matemáticos em diferentes contextos abrangendo os vários temas do programa de matemática do 2ºciclo. O objectivo deste trabalho é apresentar uma proposta pedagógica de tarefas tendo por base a fundamentação teórica e a experiência pedagógica, que permitirá ao professor desenvolver estratégias para orientar os alunos na resolução de problemas, contribuindo deste modo, para o sucesso ao nível de desempenho dos alunos na resolução de problemas. Para Almeida & Freire (2000), qualquer ficha de avaliação ou prova pode definir-se como um conjunto de itens, questões ou situações mais ou menos organizado e relacionado com um certo domínio a avaliar. A construção da proposta pedagógica de tarefas é constituída por 16 tarefas e surgiu da necessidade de elaborar um conjunto de tarefas/problemas que promovessem o raciocínio matemático através do desenvolvimento da resolução de problemas.

A escolha das tarefas teve como referência a tipologia definida pelos investigadores do projecto resolução de problemas: ensino, avaliação e formação de professores, que enumera quatro tipos de problemas: problemas de processo, de conteúdo, de aplicação e experimentais. A construção da proposta pedagógica de tarefas, além da tipologia dos problemas, também teve em conta as orientações, os temas, os objectivos específicos indicados no programa de matemática do 2ºciclo e as respectivas metas curriculares, permitindo assim avaliar o nível de desempenho dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Esta proposta está adequada ao nível de desenvolvimento dos alunos e permite a abordagem a uma variedade de estratégias e estilos de aprendizagens. De seguida, apresento a tabela 4 com a caracterização de cada uma das tarefas, no que concerne à tipologia do tema dominante, dos objectivos específicos, dos pré-requisitos e das estratégias de resolução.

Tabela 4: Caracterização das tarefas

Tarefa (Anexo A)	Tema dominante	Objectivos específicos	Estratégia de resolução	Pré-requisitos	Tipo de problema
1	Números e cálculo.	Identificar os dados. Efectuar a subtracção, multiplicação e divisão. Verificar a adequação do resultado. Encontrar um valor desconhecido.	Recurso ao algoritmo da subtração, multiplicação e divisão.	Subtrair, multiplicar e dividir números inteiros; Moeda-Euro.	Conteúdo
2	Números e cálculo.	Identificar os dados. Efectuar a subtracção e multiplicação. Verificar a adequação do resultado. Usar um desenho ou esquema. Encontrar um valor desconhecido.	Recurso a um desenho ou esquema ou usando a operação adição e subtracção.	- Subtração e adição de números inteiros.	Conteúdo
3	Números e cálculo.	Identificar os dados do problema. Escolher a estratégia mais adequada.	Recurso a uma tabela, esquema ou desenho. Uso do conjunto dos divisores e do máximo divisor comum de dois números. Divisão do problema em partes.	Múltiplo, divisor, máximo divisor comum (m.d.c.). Números primos e factores primos.	Aplicação
4	Números e cálculo.	Calcular uma percentagem. Relacionar percentagem com uma fração. Relacionar a parte e todo e vice-versa. Escolher a estratégia adequada.	Divisão do problema em partes. Recurso a desenhos e a proporção, divisão, multiplicação. Recurso a desenho ou esquema.	Fração. Percentagem. Adição, subtração, multiplicação e divisão.	Aplicação

Continuação da tabela 4: Caracterização das tarefas.

Tarefa (Anexo A)	Tema dominante	Objectivos específicos	Estratégia de resolução	Pré-requisitos	Tipo de problema
5	Números e cálculo.	Escolher a estratégia mais adequada. Relacionar os múltiplos de 6 e de 8.	Divisão do problema em partes. Recurso a tabelas, desenho. Recurso a tabelas de múltiplos e divisores.	Múltiplo. Divisão e multiplicação de números inteiros.	Aplicação
6	Números e cálculo.	Usar um desenho, tabela ou esquema. Relacionar a informação dada com os conhecimentos apreendidos. Interpretar a informação dada.	Recurso a um desenho, esquema ou tabela. Recurso às operações elementares. Divisão do problema em partes.	Subtração e adição de números inteiros.	Processo
7	Geometria	Identificar a superfície do cubo. Relacionar as superfícies do cubo com a figura formada. Determinar o nº de superfícies numa torre de cubos. Relacionar a geometria com os de números e cálculo. Usar o raciocínio dedutivo.	Divisão do problema em partes. Recurso às operações elementares. Recurso a esquema, tabela ou desenhos.	Adição, subtração e multiplicação de números inteiros. Superfície do cubo ou face.	Processo
8	Geometria	Calcular a área do retângulo. Relacionar as diferentes áreas dos retângulos.	Recurso a uma figura. Divisão do problema em partes.	Retângulo. Área do retângulo. Unidades de medida.	Aplicação

Continuação da tabela 4: Caracterização das tarefas.

Tarefa (Anexo A)	Tema dominante	Objectivos específicos	Estratégia de resolução	Pré-requisitos	Tipo de problema
9	Números e cálculo.	<p>Analisar as relações entre os números da tabela.</p> <p>Interpretar as diferentes representações dos 4 números na tabela.</p> <p>Fazer generalizações a partir dos dados obtidos.</p>	<p>Divisão do problema em partes.</p> <p>Recurso a regularidades numéricas.</p> <p>Recurso a múltiplos de um número.</p> <p>Recurso às operações elementares.</p>	<p>Múltiplo.</p> <p>Adição e multiplicação de números inteiros.</p> <p>Proporcionalidade direta.</p>	Investigação
10	Geometria	<p>Identificar os diferentes comprimentos dos segmentos de reta no geoplano com áreas diferentes.</p> <p>Relacionar o nº de segmentos de reta no geoplano com áreas diferentes.</p> <p>Determinar o termo ou lei de formação da sequência.</p>	<p>Recurso a um desenho, esquema ou tabela.</p> <p>Recurso às operações elementares.</p> <p>Divisão do problema em partes.</p>	<p>Adição de números inteiros.</p> <p>Diagonal de um quadrado.</p> <p>Sequência.</p>	Processo
11	Geometria	<p>Determinar o nº de fitas das oito participantes.</p> <p>Descobrir a relação entre o nº de fitas e o de participantes.</p> <p>Encontrar o padrão adequado.</p>	<p>Reduzir a um problema mais simples.</p> <p>Recurso um esquema ou tabela.</p>	<p>Diagonal.</p> <p>Área.</p> <p>Operações elementares.</p>	Processo
12	Álgebra	<p>Determinar os termos da sequência.</p> <p>Encontrar a lei de formação da sequência.</p>	<p>Recurso a tabelas ou desenhos.</p> <p>Recurso a conjunto dos números ímpares.</p>	<p>Termo da sequência.</p> <p>Número ímpar.</p> <p>Operação adição.</p>	Processo

Continuação da tabela 4: Caracterização das tarefas

Tarefa (Anexo A)	Tema dominante	Objectivos específicos	Estratégia de resolução	Pré-requisitos	Tipo de problema
14	Organização e tratamento de dados	Relacionar a moda e a média.	Recurso a uma tabela ou esquema.	Média. Moda.	Conteúdo
15	Organização e tratamento de dados	Explicar corretamente como calcular a média dos testes?	Recurso ao cálculo da média. Divisão do problema em partes.	Média aritmética. Operações elementares.	Processo
16	Álgebra	Calcular a razão de cada uma das receitas. Comparar as razões das várias receitas. Relacionar os valores das razões. Usar a identidade fundamental das proporções. Relacionar o todo com a parte.	Recurso a tabelas, esquemas. Recurso à proporcionalidade direta. Recurso á razão Da proporção. Divisão do problema em partes.	Razão. Proporção. Operações elementares	Aplicação

No desenvolvimento de cada uma das tarefas propostas o professor deverá ter em conta, na exploração das tarefas, em cada tópico, os objectivos específicos e as sugestões das estratégias/actividades a utilizar, que indicamos a seguir:

Tópico: Resolução de problemas (M.E., 2007)

- Compreensão do problema
- Concepção, aplicação e justificação de estratégias

Objectivos Específicos:

- Identificar os dados, as condições e o objectivo do problema;
- Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;
- Averiguar da possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um problema.

Tópico: Raciocínio matemático

- Justificação
- Argumentação
- Formulação e teste de conjecturas

Objectivos específicos:

- Explicar, justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos;
- Formular e testar conjecturas e justificá-las fazendo deduções informais.

Tópico: Comunicação matemática

- Interpretação
- Representação
- Expressão
- Discussão

Objectivos específicos:

- Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas;
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios;
- Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas;
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa;
- Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Sugestões de estratégias/actividades

Introdução da tarefa. Depois de lida e explicada no grupo turma, os alunos deverão resolvê-la em grupo de pares. Começando por identificar os dados e os pedidos. O professor deverá observar com atenção o trabalho realizado em cada grupo, solicitando a verificação e interpretação dos resultados com perguntas, tais como: A resposta encontrada é plausível?, Como podemos saber se a resposta está certa?, Explica como pensaste?, O que acontece se ...? Colocar perguntas que relacionem estas tarefas com outras similares e fazer conexões com outras áreas do saber. No entanto, pode acontecer que algum grupo de trabalho não esteja a conseguir ultrapassar alguma dificuldade, então o professor deverá dar uma pista que os conduza no sentido de encontrar a estratégia mais adequada para chegar à solução.

CONCLUSAO

Numa sociedade em constante evolução tecnológica é cada vez mais importante formar jovens matematicamente competentes e capazes de aprender a aprender. A resolução de problemas é sem dúvida uma das capacidades da matemática a desenvolver nos alunos. O reconhecimento da importância da resolução de problemas no currículo e programa de matemática do ensino básico é visível nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (N.C.T.M. 1991, 2007) e no Currículo Nacional do Ensino Básico (M.E., 2001) e Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (M.E.2007). A partir da generalização da implementação do novo programa de matemática do ensino básico (2007), todos os manuais escolares elaborados segundo as suas orientações metodológicas apresentam uma maior diversidade de problemas e tarefas, em detrimento dos exercícios de aplicação existentes nos manuais escolares dos anos anteriores, que pouco mais desenvolviam nos alunos do que técnicas de cálculo a partir de algoritmos e procedimentos. Segundo (Delisle, 2000), “(...) fornecer factos e procedimentos aos alunos sem lhes dar a oportunidade de desenvolverem as suas próprias questões e de eles próprios investigarem, os alunos são capazes de memorizar matérias, mas não as compreenderão completamente nem serão capazes de as utilizar”(p.8). Os alunos de hoje precisam de construir as suas próprias competências na resolução de problemas, assim como as capacidades de raciocínio, enquanto estão a aprender o conteúdo necessário para aplicar. O currículo/programa que melhor os prepara para serem cidadãos produtivos e activos não os deve encher de teorias e factos do presente que rapidamente ficarão desactualizados, mas mostrar-lhes como aprender autonomamente e como utilizar a informação que adquirem.

Resolver problemas não é uma tarefa fácil, pois ela exige processos cognitivos complexos e são vários os factores implicados na sua resolução, desde factores relacionados com o aluno, com a tarefa/problema e com a situação onde ocorre a resolução. Nos relatórios das provas de aferição e da prova final de matemática do 6ºano, está referido o nível de desempenho baixo, na resolução de problemas matemáticos. Segundo orientações do Ministério da Educação, no sentido de colmatar as dificuldades reveladas pelos alunos nos exames e provas de aferição de matemática do 6ºano, é referido que o professor deve “... proporcionar aos seus alunos frequentes experiências matemáticas envolvendo a resolução de problemas, a partilha e discussão de diferentes estratégias de resolução, a análise do seu significado e a elaboração de registos escritos relatando o trabalho realizado”, GAVE, relatório nacional da prova de aferição de matemática, 2ºciclo (M.E., 2011, p.20). Neste sentido alguns autores afirmam que se devem valorizar os pequenos progressos realizados pelos alunos que arriscam propostas de resolução e a promoção da persistência, em vez da rapidez na resolução de problemas são aspectos a considerar nas aulas de matemática, de modo a incutir-lhes a autoconfiança, entusiasmo e motivação para continuarem.

Durante os anos de 2007 a 2010 Ministério da Educação promoveu formação contínua de matemática para professores do 1º e 2º ciclos, seguindo as directrizes do novo programa,

também seria interessante investigar, no ensino da matemática, a relação que existe entre a formação contínua de matemática para professores do 1º e 2º ciclos (durante os anos de 2007-2010) e o desenvolvimento dessa prática na sala de aula ao nível da resolução de problemas e a sua influência na melhoria dos resultados escolares. Estamos convictos que o treino da resolução de problemas, tendo por base o conhecimento das heurísticas associadas a este processo, influencia significativamente o desempenho dos alunos.

Com base na literatura consultada apresentamos uma proposta pedagógica de tarefas, cujo objectivo é o desenvolvimento do raciocínio matemático através da resolução de problemas. A construção da proposta de tarefas teve como referência as orientações, os temas e objectivos do programa de matemática do 2º ciclo, para serem aplicadas aos alunos do 5º e 6º anos de escolaridade. Este ano letivo não me foi possível aplicar este conjunto de tarefas devido a constrangimentos da planificação anual e de ter sido a primeira vez que os alunos do 6º ano realizaram prova final (exame) do 6º ano. É minha vontade iniciar a sua aplicação este ano letivo numa turma de 5º ano e depois continuar no 6º ano, uma vez que sou e irei ser professora das duas turmas durante estes dois anos letivos. E se for possível, também tenho a intenção de as aplicar noutras escolas, caso os colegas mostrem disponibilidade em colaborar, lecionem os mesmos anos durante os dois anos consecutivos e tenham frequentado a formação contínua de matemática para professores do 1º e 2º ciclos. Na realização das tarefas irei recolher o máximo de informação junto dos alunos, de forma a permitir-me, no futuro, fazer uma análise fiável dos resultados obtidos e dar-me informações sobre a evolução dos alunos no desempenho da resolução de problemas, e caso seja necessário adequar ou reformular as estratégias e atividades, de modo a colmatar algumas dificuldades ainda reveladas.

Bibliografia

- Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)...*Educação Matemática*, 8,7-10/35. Lisboa: APM.
- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básico*. Lisboa: ME, DEB.
- Abreu, M. (2002). *Os professores de Matemática e a Resolução de problemas na Gestão do Currículo*. Lisboa: APM.
- Almeida, L. S., (1988). *Raciocínio diferencial nos jovens*. Porto. INIC
- Boavida, A. (1993). *Resolução de Problemas Educação em Matemática: contributo para a análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores*. Lisboa: APM.
- Boavida, A. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.
- Borasi, R. (1986). *On the Nature of Problems*. In *Educational Studies in Mathematics*, 17 (2), 125-141.
- Borralho, A. (1990). *Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas de Matemática: Proposta de um plano de intervenção*. Lisboa: APM.
- Borralho, A. (1991). *Resolução de Problemas - metacognição: um possível modelo*. In Abrantes, P. & Silva, A. (Orgs), PROFMAT90
- Charles, R. (1982). *A instructional system for Mathematical Problem Solving. Problem Solving in the Mathematics Classroom*. Aberta: MACATA.
- Charles, R. & Lester, F. (1984). *Teaching Problem Solving*. London: Edward Arnold Pty Ltd.
- Costermans, J. (2001). *As Actividades Cognitivas, Raciocínio, Decisão e resolução de Problemas*. Coimbra: Quarteto Editora.
- Delisle, R. (2000). *Como realizar a aprendizagem baseada em problemas*. CRIAPASA: ASA
- Fernandes, D. (1992). *Resolução de Problemas: Investigação ensino, avaliação e formação de professores*. In Brown, M., Fernandes, D., matos, J.&Ponte, J. (Eds), *Educação Matemática: Temas de investigação*. Lisboa: IIE

- Fernandes, D., Borralho, A. & Amaro, G. (1994). Processos de resolução de problemas: Revisão e análise Crítica de Investigação que Utilizou Esquemas de Codificação, In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: IIE.
- Fonseca, L. (1995). *Três futuros professores perante a resolução de problemas: Concepções e processos utilizados*. Lisboa: APM.
- Fonseca, V. (1999). *Aprender a Aprender a Educabilidade Cognitiva*. Notícias Editorial
- Fonseca, L. (2009). *Problemas com Aparatos*. In actas do ProfMat 2000. Madeira: APM.
- Garafolo, J. (1987). Metacognition and school mathematics. *Arithmetic Teacher*, 34, 9, 22-23.
- Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: rationales and research. In L. Hatfield & D. Bradbard (Eds), *Mathematical Problem Solving: papers from a Research Workshop*. Columbus: ERIC.
- Kantowski, E. (1997). Processes Involved in Mathematical Problem Solving. In *Journal for Research in Mathematical Education*. 8, 3, 163- 180. N.C.T.M.
- Kilpatrick, J. (1992). Some issues in the assessment of mathematical problem solving. In Ponte, J. P., Matos, J. F., Matos, J. M. & Fernandes, D. (Eds), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in contexts of Practice*. Berlim: Springer-Verlag.
- Leitão, A. & Fernandes, H. (1997). Trabalho de grupo e aprendizagem cooperativa na resolução de problemas por futuros professores de matemática. In Fernandes, D. Lester, F., Borralho, A. & Vale, L. (Orgs), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspectivas*. Aveiro: GIRPR.
- Leitão, A. Fernandes, M. & Cabrita, I. (1994). Variáveis de tarefa na resolução de problemas. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: IIE.
- Lester, F. (1994). *O que aconteceu à resolução de problemas de matemática? A situação nos Estados Unidos*. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: IIE.

- Lester, F. & Garofalo, J. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research In Mathematics Education*, 16 (3), 163-176.

- Lopes, A. (2005) V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J. M., Oliveira, M. J., Delgado, M. J. Bastos, R. E Graça, T.. *Actividades Matemáticas na Sala de Aula*, 2.ª Edição. Lisboa: Texto Editores.

- Menino, H. & L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática: o uso do relatório escrito, do teste em duas fases e o portefólio no 2º ciclo do ensino básico. In Alves, C., Morais, C., Martins, C., Pires, M. & Barros, P, (Orgs), *Actas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Covilhã: APM.

- Martins, M. E., Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

- Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico-competências Essenciais*, Lisboa: ME(DEB).
- Mourão, A. (1989). *Algumas Reflexões sobre a Importância da Resolução de Problemas no Ensino da aprendizagem da Matemática*. In PROFMAT 89-actas. Viana do Castelo: APM.

- NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. (Tradução portuguesa do original em inglês de 1989). Lisboa: APM & IIE.

- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

- National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas Profissionais para Ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

- National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

- Neves, M. (2010). *Caderno de Atividades de Matemática 6ºano*. Porto Editora

- Neves, M. (2010). *Matemática 6ºano*. Porto Editora.

- Oliveira, I., Pereira, J. & Fernandes, D. (1993). *Desenvolvimento de instrumentos de Avaliação da Aprendizagem em Matemática*. Lisboa: IIE.

- Pehkeonen, E. (1991). *Problem Solving in Mathematics*, ZDM, 91/1, 1-4.
- Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. New York: Wiley.
- Polya, G.,(2003). *Como Resolver Problemas*. Lisboa: Gradiva.
- Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas* (Tradução do original inglês de 1945). Lisboa: Gradiva. Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L..
- Ponte, J. P. (1984). *Resolução de Problemas em Matemática*. Evoluta, 2, 3-9.
- Ponte, J. P. (1987). *A matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço*. Educação Matemática, 4,5-6.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: ME
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1996). *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?* In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender Matemática*. Lisboa: APM.
- Simões, M. F. (1999). *Cognição e Aprendizagem de Conceitos - Chave da Física*. Lisboa: IIE.

Smole, K. Dinis, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas*. Artimed: Editora LTDA

Sites consultados:

www.artmed.com.br

www.dgidc.min-edu.pt

http://www.gave.minedu.pt/np3content/?newsId=7&fileName=PA_MAT_CC_2C_2011.pdf

<http://www.gave.min-edu.pt>

ANEXOS

Anexo A

Proposta pedagógica de tarefas

Tarefa 1

Quatro amigos juntaram o seu dinheiro para comprarem um jogo, que custou 60 euros. O Pedro deu 12 euros e os outros três amigos deram todos o mesmo valor. Quanto deu cada um dos outros três amigos (Apresenta todos os cálculos que efetuaste)?

(Adaptado de Neves, M.(2007). Manual 6ºano, matemática, Porto Editora)

Tarefa 2

A Marta pintou três mesas na segunda-feira e quatro na terça-feira. Na quarta-feira à noite precisa de entregar uma dúzia. Quantas mesas precisa de pintar na quarta-feira? (Adaptado de Boavida, 2008, p.17).

Tarefa 3

A Sónia levou 30 rebuçados e a Teresa 24 bombons para a escola. Ambas distribuíram igualmente todos os rebuçados e todos os bombons pelos mesmos amigos. Qual é o maior número possível de amigos que podem receber simultaneamente os doces? (Adaptado de D.G.I.D.C.,2009)

Tarefa 4

O Marcelo recebeu de presente uma caixa com chocolates. Ofereceu $\frac{1}{5}$ à mãe e 50% dos restantes ao pai. Ficou com 24 chocolates para ele. Quantos chocolates tinha a caixa? (Adaptado do manual Matemática - 6ºano, Neves, M. (2008). Porto Editora)

Tarefa 5

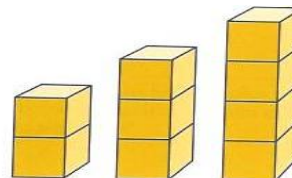
Numa caixa estão aranhas e escaravelhos. Contámos as patas dos animais e obtivemos 58. Quantas aranhas e escaravelhos estão na caixa? Explica como chegaste à tua resposta (aranhas – 8 patas e os escaravelhos – 6 patas).
(Adaptado da prova de aferição, 2001)

Tarefa 6

A Catarina vai pôr a secar guardanapos, como é uma rapariga organizada, pendura todos os guardanapos, usando o mesmo processo. Ajuda a Catarina a descobrir quantas molas são necessárias para pendurar 30 guardanapos. (Boavida, 2008, p.21)

Tarefa 7

Observa com atenção a figura seguinte.

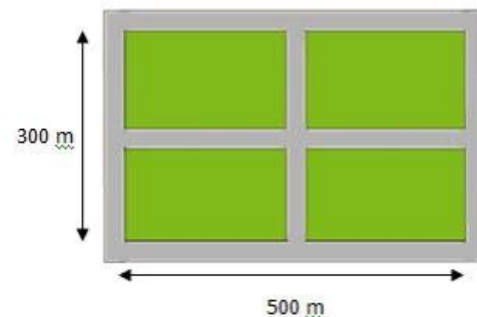


- a) Qual é o nº de superfícies/faces de cada uma das torres de cubos (incluir a face de baixo)?
- b) Qual é o nº de superfícies/faces de uma torre com 50 cubos?
- c) À medida que as torres crescem, de que modo varia o nº de superfícies/faces? (Adaptado de N.C.T.M, 2007)

Tarefa 8

Numa vila, havia um parque relvado de forma retangular com 500 metros por 300 metros, conforme a figura ao lado.

Para que as pessoas pudessem passear no parque nos dias de chuva, sem molhar os pés, o presidente da Câmara mandou construir passeios com 5 metros de largura a ladear e a atravessar o parque, conforme se vê na figura.



Qual é a área total desses passeios? (Adaptado de Neves, M. (2008).

Matemática-6ºano, Porto Editora.

Tarefa 9

Observa a tabela abaixo. Vamos investigar regularidades!..

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

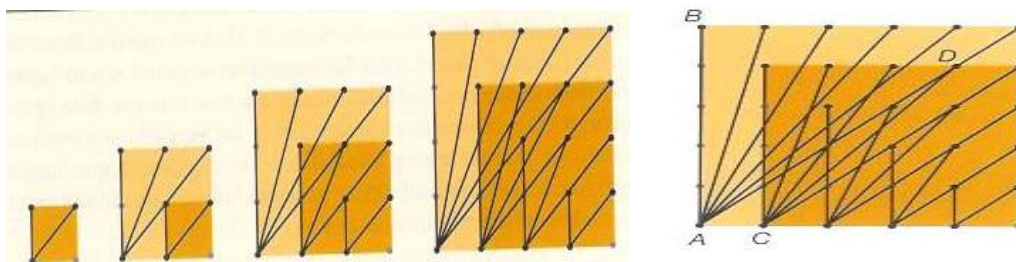
a) Existe alguma regularidade entre os números da coluna 3 e os números da coluna 6? Explica as tuas descobertas.

b) E entre os números da coluna 6 e os da coluna 3?

(Adaptado de DGIDC, 2009)

Tarefa 10

Observa com atenção cada uma das figuras seguintes que representam segmentos de recta com diferentes comprimentos. Cada quadrado contém o quadrado anterior.



a) Completa a tabela seguinte:

Tamanho do quadrado	Número de segmentos diferentes comprimentos: anterior+novo	Número total de comprimentos diferentes
1x1	2	2
2x2	2+3	

b) Indica o número de segmentos de diferentes comprimentos obtidos pela união de dois pregos, no geoplano, cuja área é de 7x7 e 10x10?

(Adaptada de N.C.T.M, 2007)

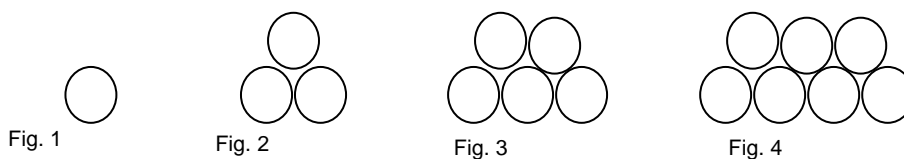
Tarefa 11

Num grupo de ginástica as oito participantes devem ficar unidas duas a duas com fitas coloridas. Quantas fitas são necessárias para realizar este número?

(Adaptado de Boavida, 2008)

Tarefa 12

Observa a sequência com atenção e responde.



- a) Indica quantos círculos tem a figura 5? E a figura 10? E a figura 50?
b) Encontra uma lei de formação para determinar o número de círculos de qualquer figura. (Adaptado da DGIDC., 2009).

Tarefa 13

No dia de aniversário da Mariana, ela e as suas amigas foram jogar minigolfe. Para jogar uma hora e trinta minutos cada pessoa paga 3,45 euros. Elas jogaram 4 horas. Quanto pagou cada uma delas para jogar as quatro horas?

(Adaptado de Neves, M. (2008). Matemática 6ºano. Porto Editora.

Tarefa 14

Em três sacos estão guardadas as economias da Mariana, do Simão e da Marta. Não sabemos a quantia que cada um tem no saco, mas sabemos que a média é 70 euros e a moda é 80 euros. Sabemos que o Simão é o que tem menos dinheiro. Que quantia tem cada um no saco?

(Explica como pensaste para chegar á resposta). (Adaptado de Neves, M., (2008), Porto Editora)

Tarefa 15

O grupo da Maria ficou responsável pelo cálculo da média dos testes dos alunos da turma. Explica todo o trabalho que o grupo deve desenvolver e os cálculos que tem de realizar para calcular a média dos testes.

(Adaptado da prova de aferição, 2003)

Tarefa 16

Os alunos do 6ºano da Escola Básica Solpoente vão fazer uma festa no final do ano lectivo. A turma do 6ºB está encarregue das bebidas. A cozinheira da escola deu aos alunos 4 receitas diferentes para confecção do sumo, sendo para todas necessário água e sumo de framboesa.

Receitas	Receita A	Receita B	Receita C	Receita D
Ingredientes	- 2 copos de sumo de framboesa. - 3 copos de água.	- 4 copos de sumo de framboesa - 8 copos de água	3 copos de sumo de framboesa. - 5 copos de água	- 1 copo de sumo de framboesa. - 4 copos de água

a) Qual das receitas irá ter um sabor a framboesa mais acentuado? E menos acentuado? Justifica.

b) A cozinheira diz que são necessários 120 copos de sumo. Quantos copos de água e de framboesa são necessários em cada receita? Justifica.

c) Se cada copo de sumo custar 35 cêntimos, quanto custarão os 120 copos?

(Adaptado de N.C.T.M. 2007)

