

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR



**PROJECTO ESTRUTURAL DE ASAS USANDO A
TEORIA DA PLACA-EQUIVALENTE**

FLÁVIO DE MELO

COVILHÃ, AGOSTO DE 2008

Resumo

Foi desenvolvido um programa numérico de análise e optimização estrutural de asas constituídas por revestimento, longarinas e nervuras.

No caso da análise estrutural a asa é modelada como uma placa equivalente que usa a teoria da deformação de corte de primeira ordem – *first order shear deformation theory* (FSDT) – baseada no modelo de Reissner-Mindlin. Neste modelo, a condição de que a normal ao plano médio da placa permanece normal ao plano médio após a deformação é relaxada e uma deformação uniforme de corte transversal é permitida. O método de Rayleigh-Ritz é usado para resolver o problema da placa equivalente resultante fazendo uso de polinómios de Legendre como funções para representar a superfície média. Este tipo de polinómio é preferível uma vez que os polinómios mais simples podem resultar em singularidades computacionais. Depois das matrizes de rigidez e de massa serem obtidas a partir das equações de Lagrange, a análise estrutural é realizada sem dificuldade. As frequências naturais e as formas dos modos de vibração podem ser calculadas resolvendo um problema de valores e vectores próprios. As deformações estáticas devido a forças concentradas ou a cargas aerodinâmicas obtêm-se resolvendo um sistema de equações lineares.

Relativamente à optimização estrutural recorre-se ao método da “*Programação Quadrática Sequencial*” (SQP) para atingir o objectivo. Pretende-se minimizar a função objectivo, que neste caso é a massa da asa, e que está sujeita a constrangimentos. Os gradientes, que permitem ao programa determinar a direcção da procura, são calculados pelo método das diferenças finitas.

Palavras-chave: Projecto de Aeronaves, Análise Estrutural, Optimização Estrutural, Placa-Equivalente.

Abstract

A numerical program has been developed for structural analysis and optimization of wings composed of skin, spars and ribs.

In the structural analysis an equivalent-plate model is used. It follows the first order shear deformation theory (FSDT) – based on the Reissner-Mindlin model where the constraint that a normal to the midsurface remains normal to the midsurface after deformation is relaxed and a uniform transverse shear strain is allowed. The Rayleigh-Ritz method is used to solve the equivalent-plate problem and the Legendre polynomials are used as trial functions. This kind of polynomials is better because de simpler ones are known to be prone to ill-conditioning problems. After the stiffness and mass matrices are determined by applying the Lagrange equations, structural analysis can be easily performed. The natural frequencies and mode shapes can be obtained by solving an eigenvalue problem. Static deformation, due to concentrated forces or aerodynamic loads, is calculated by solving a linear equation system.

In the structural optimization the “*Sequential Quadratic Programming*” (SQP) method is used. The goal is to minimize the objective function, which is in this case the mass of the wing, subject to constraints. Gradients, that allow the program to determine the search direction, are calculated by the finite differences method.

Keywords: Aircraft Design, Structural Analysis, Structural Optimization, Equivalent-Plate.

*Aos meus pais, António e Fátima
e ao meu irmão Tiago*

*“Uma caminhada de mil quilómetros
começa com um único passo”*

Agradecimentos

Este trabalho é o resultado da minha passagem pela Universidade da Beira Interior e pelo Departamento das Ciências Aeroespaciais. É um marco de extrema importância na minha vida que nunca teria sido alcançado sem o apoio de um número considerável de pessoas. Queria, por isso, deixar uma palavra especial de apreço ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Vieira Gamboa, pelo trabalho previamente desenvolvido e pelo seu apoio e disponibilidade incondicional. Agradeço também, à Professora Doutora Anna Guermann, ao Professor Doutor André Silva e à Professora Teresa Lopes, minha tia, por toda a ajuda disponibilizada. Gostaria de agradecer, ainda, aos meus amigos pelo encorajamento incansável e por estarem comigo nas alturas mais difíceis. Aos meus pais, o meu mais sincero obrigado, por me inculcarem o amor ao estudo e à realização profissional, entre outros valores que regem a minha vida. Finalmente, gostaria de expressar o meu sentimento de gratidão à minha família pelo seu apoio, pela sua paciência e sacrifício.

A todos, um muito obrigado pois afinal, sem Vós, este trabalho nunca teria conhecido um fim.

Índice

Resumo	ii
Abstract	iii
Agradecimentos	viii
Índice	ix
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica.....	2
1.3 Objectivo	3
1.4 Disposição do trabalho	4
2 Conceitos Fundamentais	6
2.1 Aeroelasticidade	6
2.2 Teorias de Placas	8
2.2.1 Teoria Clássica das Placas finas (CPT)	8
2.2.2 Teoria da deformação de corte de primeira ordem (FSDT)	9
2.3 Quadratura de Gauss-Legendre	11
2.4 Método de Rayleigh-Ritz	13
2.5 Programação Quadrática Sequencial (SQP).....	15
2.6 Gradiente e Diferenças Finitas	17
2.7 Critério de von Mises	18
3 Modelo Matemático	19
3.1 Formulação Matemática.....	19
3.2 Energia de deformação da asa.....	23

3.3	Energia cinética de uma asa	25
3.4	Integração numérica das matrizes de massa e de rigidez	26
3.5	Condições de fronteira e convergência	30
3.6	Formulação para análise de vibração da asa	32
3.7	Solução para o problema estático.....	32
3.8	Geometria da asa	34
4	Implementação Numérica	36
4.1	Programa de análise	36
4.2	Programa de optimização	40
4.3	Programa final	44
5	Discussão de Resultados	47
5.1	Análise de Vibração	47
5.2	Análise de deslocamentos	54
5.2.1	Deslocamentos segundo X	54
5.2.2	Deslocamentos segundo Y	56
5.2.3	Deslocamentos segundo Z.....	57
5.3	Análise de tensões	59
5.3.1	Revestimento	59
5.3.2	Longarinas	61
5.3.3	Nervuras	65
5.4	Optimização	70
5.4.1	Primeiro Caso	71
5.4.2	Segundo Caso	72
6	Conclusões e Recomendações	75
6.1	Conclusões	75
6.2	Recomendações para trabalhos futuros	76
	Bibliografia	77
	Anexo	79
	Construção das Matrizes Constitutivas.....	79
	A. Rotação em torno do eixo y.....	79
	B. Rotação em torno do eixo z	80

Lista de Figuras

Figura 2.1	Aeronave Fokker D-8 de 1918 [8].	7
Figura 2.2	Análise da uma placa através da teoria da deformação de corte de primeira ordem.	10
Figura 2.3	Viga encastrada com força a actuar na outra extremidade.....	13
Figura 3.1	Transformação de coordenadas.....	20
Figura 3.2	Revestimento da asa.....	28
Figura 3.3	Longarina ou Nervura da asa	28
Figura 3.4	Distribuição dos componentes internos da asa em estudo.	35
Figura 4.1	Fluxograma do programa de análise	37
Figura 4.2	Fluxograma do programa de optimização.....	42
Figura 4.3	Fluxograma do programa de principal	45
Figura 5.1	Representação gráfica das frequências em [rad/s] obtidas para o método da placa- equivalente para diferentes números de nós.	48
Figura 5.2	Representação gráfica das frequências em [rad/s] obtidas para o método dos elementos finitos para diferentes números de nós.	50
Figura 5.3	Comparação das formas dos modos de vibração entre o método da placa-equivalente e o método dos elementos finitos.....	53
Figura 5.4	Comparação dos deslocamentos, segundo x, obtidos com os métodos dos elementos finitos (em cima) e placa-equivalente (em baixo).	55
Figura 5.5	Comparação dos deslocamentos, segundo y, obtidos com os métodos dos elementos finitos (em cima) e placa-equivalente (em baixo).	56
Figura 5.6	Comparação dos deslocamentos, segundo z, obtidos com os métodos dos elementos finitos (em cima) e placa-equivalente (em baixo).	58

Figura 5.7	Distribuição, ao longo do revestimento, das tensões de <i>von Mises</i> . Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.	60
Figura 5.8	Distribuição das tensões de <i>von Mises</i> nas almas das longarinas. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.	61
Figura 5.9	Distribuição das tensões de <i>von Mises</i> nos banzos superiores das longarinas. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.	63
Figura 5.10	Distribuição das tensões de <i>von Mises</i> nos banzos inferiores das longarinas. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.	64
Figura 5.11	Distribuição das tensões de <i>von Mises</i> nas almas das nervuras. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.	65
Figura 5.12	Distribuição das tensões de <i>von Mises</i> nos banzos superiores das nervuras. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.	67
Figura 5.13	Distribuição das tensões de <i>von Mises</i> nos banzos inferiores das longarinas. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.	68

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Exemplos de polinómios de Legendre até ao grau 10.....	12
Tabela 3.1	Dados relativos à geometria dos componentes da asa.	34
Tabela 5.1	Valores das frequências em [rad/s] obtidos com o método da placa-equivalente para diferentes números de nós.....	48
Tabela 5.2	Valores das frequências em [rad/s] obtidos com o método dos elementos finitos para diferentes números de nós utilizados no cálculo.	49
Tabela 5.3	Comparação dos resultados obtidos através dos dois métodos.....	50
Tabela 5.4	Tempo de utilização da CPU, para o cálculo das frequências naturais, com o método dos elementos finitos.....	51
Tabela 5.5	Tempo de utilização da CPU, para o cálculo das frequências naturais, com o método da placa-equivalente.....	51
Tabela 5.6	Valores máximos, mínimos e erro relativo dos deslocamentos, segundo x, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente. ...	55
Tabela 5.7	Valores máximos, mínimos e erro relativo dos deslocamentos, segundo y, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente. ...	57
Tabela 5.8	Valores máximos, mínimos e erro relativo dos deslocamentos, segundo z, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente. ...	58
Tabela 5.9	Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de <i>von Mises</i> , ao longo do revestimento, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.....	60
Tabela 5.10	Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de <i>von Mises</i> , ao longo das almas das longarinas, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.	62

Tabela 5.11	Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de <i>von Mises</i> , ao longo dos banzos superiores das longarinas, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.	63
Tabela 5.12	Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de <i>von Mises</i> , ao longo dos banzos inferiores das longarinas, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.	64
Tabela 5.13	Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de <i>von Mises</i> , ao longo das almas das longarinas, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.	66
Tabela 5.14	Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de <i>von Mises</i> , ao longo dos banzos superiores das nervuras, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.	67
Tabela 5.15	Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de <i>von Mises</i> , ao longo dos banzos inferiores das nervuras, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.	69
Tabela 5.16	Tempo de utilização da CPU, para o cálculo das tensões de <i>von Mises</i> , com o método dos elementos finitos.	69
Tabela 5.17	Tempo de utilização da CPU, para o cálculo das tensões de <i>von Mises</i> , com o método da placa-equivalente.	70
Tabela 5.18	Constrangimentos usados no primeiro caso.	71
Tabela 5.19	Resultados obtidos para a optimização do primeiro caso.	71
Tabela 5.20	Constrangimentos usados no segundo caso.	73
Tabela 5.21	Resultados obtidos para a optimização do segundo caso.	73

1 Introdução

1.1 Motivação

Tem havido um grande esforço para compreender o comportamento estrutural e a resposta aeroelástica de estruturas de asas genéricas compostas por revestimento, longarinas e nervuras. Esta compreensão permite desenvolver modelos computacionais que, com a precisão necessária, representam os fenómenos físicos que ocorrem quando uma asa real é colocada num escoamento.

No passado, os efeitos aeroelásticos que, surgiam devido à flexibilidade da estrutura, eram considerados indesejados e resultavam num aumento do peso estrutural necessário para tornar a estrutura mais rígida. A necessidade de manter o peso num nível baixo e de usar razões de aspecto da asa cada vez maiores nos UAVs (Unmanned Aerial Vehicles) e planadores tem mudado esta prática nos últimos anos. De facto, pode usar-se o comportamento aeroelástico da asa para melhorar o seu desempenho desde que esse comportamento seja monitorizado e controlado.

Existem vários métodos que podem ser usados para modelar a estrutura da asa. O método apropriado para um dado estudo depende de factores como a precisão, a complexidade e os requisitos computacionais. Enquanto que, para o projecto detalhado, os métodos mais complexos e mais exigentes a nível computacional, como o método dos elementos finitos (FEM), podem ser utilizados, para a fase de projecto inicial os métodos mais simples são preferíveis. Modelos simplificados para investigação aeroelástica com representação estrutural por vigas ou placas não são suficientemente precisos para asas com baixa razão de aspecto com forma complexa. Para tais asas, e mesmo para asas de grande razão de aspecto, um modelo baseado numa representação de placa equivalente é melhor como descrito em [1] e [2]. Este

modelo tem em conta os diferentes elementos que constituem a asa (revestimento, longarinas e nervuras).

Em contraste com modelos de elementos finitos, modelos contínuos equivalentes são utilizados frequentemente para simular estruturas complexas com o objectivo de obter soluções globais nas fases iniciais de projecto. Esta ideia é razoável desde que a estrutura complexa se comporte de forma idêntica ao modelo contínuo usado e, apenas, quando são necessários valores globais da resposta.

Motivado pela necessidade de criar uma aplicação que permitisse a análise e a optimização de estruturas de asas, de uma forma simples, rápida e com uma precisão satisfatória para a fase de projecto conceptual, realizou-se este programa numérico. Pretende-se que esta aplicação seja usada como ferramenta de optimização em projectos futuros.

1.2 Revisão Bibliográfica

Os modelos matemáticos de asas baseados no método da placa equivalente são usados desde há muitos anos.

Em 1986 Gary L. Giles apresentou um método de análise estrutural de asas onde usou o método da placa equivalente e a teoria clássica de placas – “*Classic Plate Theory*” (CPT). Este permitia modelar asas simétricas e com formas variadas, assumindo, para tal, que a asa era composta por vários segmentos trapezoidais. A técnica de Ritz foi implementada num programa computacional em conjunto com funções de deslocamento global para resolução do problema. Era assim possível determinar as deflexões estáticas, tensões, frequências naturais, e as formas dos modos de vibração [3]. Este método foi, posteriormente, desenvolvido de forma a tornar possível o estudo de asas assimétricas. O método previa ainda a distribuição de cargas térmicas no revestimento e fazia uso de molas para simulação das condições de fronteira [4].

A teoria clássica das placas (CPT), usada nos métodos descritos anteriormente, apresenta no entanto algumas limitações. Ao desprezar as tensões de corte, esta teoria tende a sobrestimar a rigidez da placa levando a resultados pouco fiáveis quando se estudam placas espessas ou laminadas. Assim, começou a utilizar-se a teoria de deformação de corte de primeira ordem – “*First Order Shear Deformation Theory*” (FSDT) que provou fornecer resultados muito satisfatórios, quando comparados com os valores obtidos através de métodos de elementos finitos [5].

Nos últimos anos, a necessidade de se estudarem as aeronaves de combate não tripuladas (UCAVs) capazes de executar manobras que pressupõem elevadas acelerações gravíticas e deformações levou ao desenvolvimento de novas técnicas de análise. Eli Livne e Israel Navarro propuseram um método geometricamente não linear de modelação baseado na teoria da placa equivalente que permitia a análise estática e dinâmica de estruturas [6].

Rakesh K. Kapania e Youhua Liu desenvolveram um método eficiente que usa o modelo da placa equivalente para análise estática e de vibração. Esta teoria faz uso dos polinómios de Legendre, contrariamente aos métodos anteriores, que usavam polinómios simples e que se sabia terem tendência para conduzir a singularidades computacionais [2].

Partindo deste método anterior, foi desenvolvido um programa de análise aeroelástica de asas, com capacidade de alterarem a geometria do seu perfil (*Morphing airfoils*). Os resultados foram mais uma vez comparados com os elementos finitos e demonstraram ter uma fiabilidade aceitável, o que torna este método muito popular na fase de projecto conceptual [1].

1.3 Objectivo

O objectivo deste trabalho consiste em continuar o trabalho iniciado por Gamboa (2003) [7] na implementação de uma ferramenta numérica para o projecto aeroelástico de asas. Assim pretende-se desenvolver um programa computacional de

análise e optimização estrutural de asas de forma a reduzir o peso da estrutura e permitir, conseqüentemente, um melhor desempenho da aeronave.

No futuro, o projecto aqui desenvolvido poderá ser anexado a um programa de análise aerodinâmica para formar uma aplicação importante de estudo aeroelástico.

Com o intuito de mais facilmente atingir o objectivo proposto é de extrema importância dividi-lo em várias etapas, que são:

- Pesquisa bibliográfica, a fim de adquirir conhecimento acerca dos desenvolvimentos realizados pelos diversos investigadores nesta área ao longo das últimas décadas;
- Desenvolvimento do programa numérico de análise estrutural;
- Validação do programa desenvolvido anteriormente comparando, para tal, os resultados obtidos com aqueles provenientes de uma análise de elementos finitos(FEM) usando o software comercial Nastran;
- Implementação do programa numérico de optimização estrutural;
- Análise de resultados;

1.4 Disposição do trabalho

Este trabalho é composto por seis capítulos. Neste primeiro capítulo foi feita uma introdução ao trabalho e abordaram-se os desenvolvimentos realizados, ao longo dos últimos vinte anos, por diversos investigadores sobre o método da placa-equivalente.

Com o intuito de preparar o leitor para os capítulos seguintes, serão descritos, no **capítulo 2**, conceitos básicos acerca de: aeroelasticidade, teoria das placas, quadratura de Gauss e polinómios de Legendre, método de Rayleigh-Ritz, programação quadrática sequencial, gradientes e diferenças finitas.

No **capítulo 3** aborda-se o modelo matemático elaborado por Liu [2], no qual se baseia este trabalho para o desenvolvimento do programa numérico de análise estrutural.

O **capítulo 4** expõe o funcionamento do programa numérico. Começa por se dar a compreender o funcionamento dos subprogramas, o de análise estrutural e o de optimização, que compõem o programa principal. Finalmente é explicado o funcionamento deste último.

Os resultados obtidos são discutidos no **capítulo 5**. Neste são feitas comparações entre os vários resultados provenientes do método da placa-equivalente, no qual assenta este projecto, e aqueles obtidos pelo método dos elementos finitos, de forma a validar o programa desenvolvido.

No **capítulo 6** são apresentadas as conclusões acerca dos resultados alcançados e são ainda feitas recomendações para trabalhos futuros.

2 Conceitos Fundamentais

Neste capítulo são abordados e explicados alguns dos temas ou métodos utilizados ao longo do trabalho, para que o leitor melhor o possa compreender. Assim, são expostas algumas ideias acerca de: aeroelasticidade, teoria das placas, quadratura de Gauss e polinómios de Legendre, método de Rayleigh-Ritz, programação quadrática sequencial, e ainda, gradientes e diferenças finitas.

2.1 Aeroelasticidade

Como foi referido no capítulo 1.1, as aplicações de análise aeroelástica são de extrema importância no actual desenvolvimento de aeronaves. A aeroelasticidade tornou-se mesmo num dos termos mais usados, nos dias de hoje, na indústria aeronáutica. Como se pretende que este trabalho venha a ser incluído num programa de análise aeroelástica, será explicado ao leitor o que é a aeroelasticidade e quais as razões que levaram ao início do seu estudo.

A aeroelasticidade define-se como sendo a ciência que estuda a interacção mútua entre as forças de inércia, as forças aerodinâmicas e as forças elásticas, e a influência destas no projecto da aeronave. Aos fenómenos aeroelásticos onde estão presentes os três tipos de forças chama-se “*fenómenos aeroelásticos dinâmicos*” enquanto que nos casos onde apenas interagem as forças aerodinâmicas e as forças elásticas dá-se o nome de “*fenómenos aeroelásticos estáticos*”.

Uma das razões que levou a que os aviões da Primeira Grande Guerra fossem biplanos era o facto de assim se conseguir uma maior rigidez à torção das asas, conseguida através dos componentes que uniam os dois planos. As velocidades atingidas pelas aeronaves eram relativamente baixas e os critérios de projecto

utilizados levavam à criação de estruturas suficientemente rígidas que evitavam a maior parte dos fenómenos supracitados.

Os verdadeiros problemas de aeroelasticidade apenas começaram a merecer mais atenção no início da Segunda Guerra Mundial. À medida que a necessidade de se atingir a supremacia aérea requeria aviões mais rápidos e manobráveis, a escolha recaiu nos monoplanos. Foi então que se iniciou, verdadeiramente, o estudo dos fenómenos aeroelásticos.

Os problemas relativos à aeroelasticidade não se colocavam caso as estruturas fossem perfeitamente rígidas. No entanto, tal não é possível devido ao peso excessivo e proibitivo que isso acarreta. As aeronaves modernas possuem estruturas muito flexíveis, o que requer, na fase de projecto, uma análise cuidada dos fenómenos aeroelásticos, pois uma deformação da asa pode aumentar as forças aerodinâmicas. Este aumento poderá originar uma maior deformação da estrutura que, por sua vez, levará a um novo aumento na intensidade das forças aerodinâmicas. Esta interacção pode ir diminuindo até ser atingido um ponto de equilíbrio estável ou pode aumentar conduzindo à destruição da estrutura.

Um caso real daquilo que acabou de ser referido verificou-se com o avião Fokker D-8 de 1918, ilustrado na Figura 2.1.



Figura 2.1 Aeronave Fokker D-8 de 1918 [8].

Este avião monoplano era considerado, na altura em que iniciou os voos, como sendo um dos aviões com melhor desempenho da época. O que muitas pessoas não sabem é que ele foi um verdadeiro fracasso e teve mesmo que ser retirado do serviço pela Força Aérea Alemã, devido às falhas estruturais nas asas que ocorriam com frequência. Depois de vários estudos, Anthony Fokker concluiu que as falhas se deviam ao significativo acréscimo do ângulo de ataque na ponta das asas, quando aumentava a carga alar em manobras de combate. O elevado momento de torção resultante de tal fenómeno levava ao colapso da estrutura. A empresa tinha inicialmente realizado apenas ensaios estáticos pelo que os efeitos aeroelásticos não tinham sido considerados [8].

2.2 Teorias de Placas

As primeiras análises de placas ocorreram no séc. XVII. Desde então, muitos problemas que envolvem placas têm vindo a ser estudados. A teoria fundamental foi desenvolvida principalmente por Navier, Kirchhoff e Lévy, enquanto que Galerkin, Wahl e outros trabalharam nas aproximações numéricas [9].

2.2.1 Teoria Clássica das Placas finas (CPT)

As placas são elementos estruturais limitados por duas superfícies planas distanciadas entre si de uma grandeza designada por espessura. O que caracteriza uma placa é o facto de a sua espessura ser muito pequena, quando comparada com as outras dimensões. O plano equidistante das superfícies planas externas é designado por plano médio da placa e a espessura da mesma é medida perpendicularmente a esse plano.

As placas podem ser classificadas em dois grupos: placas finas e placas espessas. Quando a dimensão da espessura é inferior a $1/20$ do seu comprimento considera-se uma placa fina, caso contrário a placa é considerada espessa.

A teoria clássica das placas – “*Classic Plate Theory*” (CPT) para placas isotrópicas, homogéneas, elásticas e finas é baseada na geometria das deformações. Esta teoria assenta nas hipóteses de Kirchhoff [9,10,11], que são:

1. A superfície média da placa é plana e indeformável;

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad \text{para } z = 0$$

2. As secções planas normais ao plano médio da placa antes da deformação permanecem planas e normais à superfície média depois de ocorrer a deformação;

3. As tensões normais ao plano médio são pequenas quando comparadas com as outras componentes podendo, por isso, ser desprezadas;

$$\sigma_{zz} = 0$$

2.2.2 Teoria da deformação de corte de primeira ordem (FSDT)

A teoria clássica das placas, referida no capítulo 2.2.1, não pode ser aplicada a placas espessas, pois neste tipo de placas, as tensões de corte não podem ser desprezadas. Esta teoria também não fornece resultados aceitáveis no caso de placas laminadas. De forma a possibilitar, no futuro, a análise de placas laminadas é necessário utilizar uma teoria que não despreze as tensões de corte. Assim é usado o modelo de Reissner-Mindlin que é uma teoria de deformação de corte de primeira ordem – “*First Order Shear Deformation Theory*” (FSDT) e que considera o campo de deslocamentos, como variação linear dos deslocamentos do plano médio [9,10,11]. Esta teoria tem a vantagem de ser simples e ter baixos custos computacionais.

Inicialmente Reissner propôs que as rotações da normal ao plano médio da placa nos planos xz e yz podiam ser introduzidas como variáveis independentes na teoria da

placa. Mindlin simplificou a proposta de Reissner assumindo que as normais ao plano médio da placa, antes da deformação, permanecem rectas, mas não necessariamente normais ao plano médio, depois da placa deformada [9]. As tensões normais ao plano médio continuam, no entanto, a ser desprezadas tal como na teoria clássica.

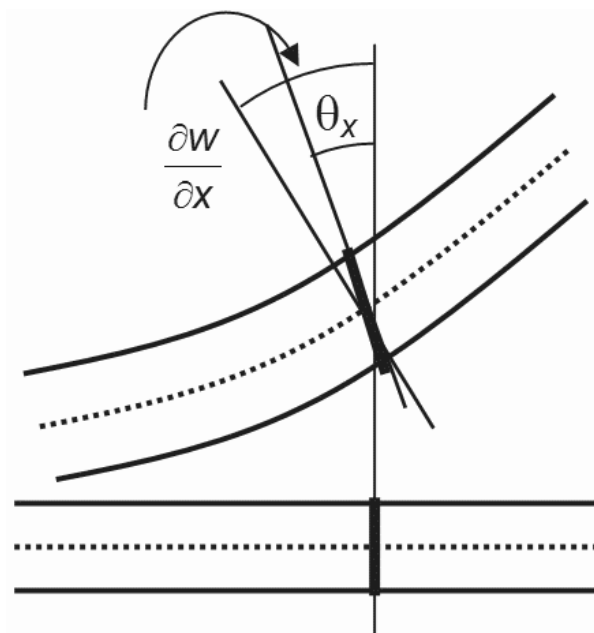


Figura 2.2 Análise da uma placa através da teoria da deformação de corte de primeira ordem.

Assim, assume-se que os deslocamentos dos pontos localizados no plano médio são u_0' , v_0' , e w_0' nas direcções das coordenadas locais, x' , y' e z' , respectivamente. No caso das rotações $\theta_{x'}$ e $\theta_{y'}$ das normais ao plano médio existirem então podemos chegar à seguinte relação:

$$u' = u_0' + z'\theta_{x'}, \quad v' = v_0' + z'\theta_{y'}, \quad w' = w_0' \quad \text{Eq. 2.1}$$

Se os eixos do sistema local de coordenadas forem paralelos aos eixos do sistema global de coordenadas para todos os pontos do plano médio da placa, então, obtém-se:

$$u = u_0 + z\theta_x, \quad v = v_0 + z\theta_y, \quad w = w_0 \quad \text{Eq. 2.2}$$

2.3 *Quadratura de Gauss-Legendre*

Para a realização deste trabalho foi necessário o uso de um método numérico de cálculo integral. Optou-se, seguindo [2], pela implementação do método de cálculo denominado por “*Quadratura de Gauss*”. Este método consiste em calcular o valor

do integral $\int_a^b f(x) dx$ usando um polinómio interpolador de grau n para aproximar a

função $f(x)$. A integração é, então, feita da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx \quad \text{Eq. 2.3}$$

sendo $p_n(x)$ o polinómio interpolador de grau n e $R_n(x)$ o erro para esse mesmo polinómio. Para simplificar o cálculo, o intervalo de integração é transformado de $[a, b]$ para $[-1, 1]$ através de uma transformação de variáveis. Supondo $-1 \leq z \leq 1$, obtemos os valores de z fazendo:

$$z = \frac{2x - (a + b)}{b - a} \quad \text{Eq. 2.4}$$

O objectivo, nesta transformação, é encontrar os valores de z de forma a fazer desaparecer o termo do erro na Eq. 2.3. A propriedade de ortogonalidade dos polinómios de Legendre é usada para a determinação desses valores. Quando no cálculo se usam polinómios de Legendre, este método passa a denominar-se “*Quadratura de Gauss-Legendre*”, [12]. Neste caso, temos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 F(z) dz = \sum_{i=0}^n w_i F(z_i) dz \quad \text{Eq. 2.5}$$

onde w_i são os pesos e z_i são as raízes dos polinómios de Legendre.

Cada polinómio de Legendre $P_n(x)$ é um polinómio de n -ésimo grau e pode ser expresso utilizando a fórmula de Rodrigues [12]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad \text{Eq. 2.6}$$

Resumindo, o procedimento para calcular um integral usando a Quadratura de Gauss-Legendre, é o seguinte:

- a) determinar os pesos, w_i , $i=0,1,\dots,n$ no intervalo $[a,b]$.
- b) calcular os pontos de integração, também chamados de raízes, z_0, z_2, \dots, z_n .
- c) determinar os polinómios de Legendre $F(z_i)$, $i=0,1,\dots,n$, usando os pontos obtidos em b).
- d) calcular $\int_a^b f(x) dx$.

Este trabalho não tem como objectivo uma análise mais profunda deste método de integração. Para uma análise mais pormenorizada acerca deste tema o leitor pode consultar [12] e [13]. Na Tabela 2.1 estão representados os polinómios de Legendre até ao grau 10.

Tabela 2.1 Exemplos de polinómios de Legendre até ao grau 10.

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$

2.4 Método de Rayleigh-Ritz

Para se explicar o método de Rayleigh-Ritz recorreremos a um exemplo onde temos uma viga encastrada numa ponta e com uma força a actuar na extremidade oposta, tal como está ilustrado na Figura 2.3.

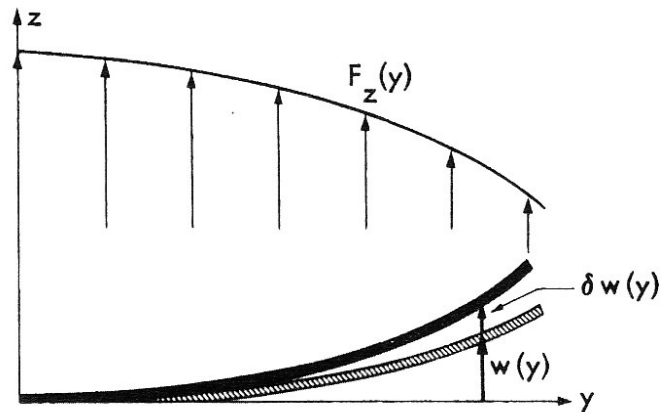


Figura 2.3 Viga encastrada com força a actuar na outra extremidade.

Vamos assumir que a deflexão da viga pode ser escrita como uma soma de funções de deformação independentes, $\gamma_i(y)$, cada uma satisfazendo as condições de fronteira:

$$w(y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) q_i \tag{Eq. 2.7}$$

Onde q_i são as coordenadas generalizadas cujo valor se pretende determinar. Para uma viga encastrada, as condições para os constrangimentos das funções $\gamma_i(y)$ são:

$$\gamma_i(0) = \gamma_i'(0) = 0 \quad \text{Eq. 2.8}$$

Assumindo, agora, que a viga sofre um deslocamento virtual arbitrário, representado na Figura 2.3, com uma magnitude

$$\delta w(y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(y) \delta q_i \quad \text{Eq. 2.9}$$

o trabalho realizado pelas forças externas é dado por:

$$\delta W_e = \int_0^l F_z(y) \delta w(y) dy = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^l F_z(y) \gamma_i(y) dy \right\} \delta q_i \quad \text{Eq. 2.10}$$

A energia de deformação da viga, devida à deflexão da mesma, pode ser expressa em termos dos deslocamentos pela seguinte fórmula:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy \quad \text{Eq. 2.11}$$

Quando se introduz a Eq. 2.7 na Eq. 2.11, esta fica:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \gamma_i}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \gamma_j}{dy^2} \right) dy \right\} q_i q_j \quad \text{Eq. 2.12}$$

Devido à mudança de coordenadas para δq_i a variação da energia de deformação é dada por:

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \gamma_i}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \gamma_j}{dy^2} \right) dy \right\} q_j \delta q_i \quad \text{Eq. 2.13}$$

O princípio do trabalho virtual pode ser escrito da seguinte forma:

$$\delta W_e = \delta U \quad \text{Eq. 2.14}$$

Substituindo as Eq. 2.10 e Eq. 2.13 na Eq. 2.14, obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \gamma_i}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \gamma_j}{dy^2} \right) dy \right\} q_j - \int_0^l F_z(y) \gamma_i(y) dy \right] \delta q_i = 0 \quad \text{Eq. 2.15}$$

Visto que δq_i são quantidades arbitrárias independentes, a Eq. 2.15 só pode ser satisfeita se:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^l EI \left(\frac{d^2 \gamma_i}{dy^2} \right) \left(\frac{d^2 \gamma_j}{dy^2} \right) dy \right\} q_j - \int_0^l F_z(y) \gamma_i(y) dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{Eq. 2.16}$$

A Eq. 2.16 constitui uma série de n equações algébricas lineares simultâneas nas coordenadas generalizadas desconhecidas, q_1, \dots, q_n . A solução final para a deflexão é obtida resolvendo as Eq. 2.16, na Eq. 2.7. Esta solução é aproximada no caso de n ser uma quantidade finita. Ao processo em que se determina uma solução aproximada desta forma dá-se o nome de método de Rayleigh-Ritz [8].

2.5 Programação Quadrática Sequencial (SQP)

Na etapa de optimização deste trabalho utilizou-se uma sub-rotina que faz uso do método da “*Programação Quadrática Sequencial*” – “*Sequential Quadratic Programming*” (SQP). Este método é também conhecido como “*Programação Quadrática Recursiva*”. Apesar de ser um método que envolve alguma complexidade, comparativamente com outros, demonstrou ser bastante poderoso, desde que exista algum cuidado na formulação do problema de optimização. O princípio básico de funcionamento consiste em encontrar uma direcção de procura S que irá minimizar a aproximação quadrática à função Lagrangeana sujeita a aproximações lineares aos constrangimentos [14]. Isto é, pretendemos determinar os componentes de S de forma a minimizar a função:

$$Q(S) = F(X^0) + \nabla F(X^0)^T S + S^T B \frac{S}{2} \quad \text{Eq. 2.17}$$

Sujeita a:

$$\begin{aligned}\nabla g_j(X^0)^T S + \gamma g_j(X^0) &\leq 0 \\ \nabla h_k(X^0)^T S + h_k(X^0) &= 0\end{aligned}\tag{Eq. 2.18}$$

Em que γ assume, normalmente, o valor de 0,9 no caso do constrangimento ser violado, ou 1,0 quando o constrangimento não é violado. Este parâmetro γ é usado para evitar constrangimentos ou pode ser usado de forma a ultrapassar as suas violações de constrangimentos. Este é um subproblema de programação quadrática que pode ser resolvido usando métodos padrão.

Uma vez obtida a direcção de procura, resolve-se um problema unidimensional de maneira a minimizar uma função exterior de penalidade. Assim temos:

$$\Phi = F(\alpha) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \max(0, g_j) + R \sum_{j=m+1}^{m+1} \lambda_j [h_{j-m}]^2\tag{Eq. 2.19}$$

em que λ_j são os multiplicadores de Lagrange do subproblema quadrático e R é uma constante de valor elevado.

Inicialmente igualamos a matriz B à matriz identidade I . No final de cada iteração, actualizamos B usando o algoritmo *BFGS* da seguinte forma:

$$B^{novo} = B - \frac{B p p^T B}{p^T B p} + \frac{\eta \eta^T}{p^T \eta}\tag{Eq. 2.20}$$

onde,

$$\begin{aligned}p &= X^q - X^{q-1} \\ \eta &= \theta y + (1-\theta)B p \\ y &= \nabla_x \Phi(X^q, \lambda^q) - \nabla_x \Phi(X^{q-1}, \lambda^{q-1}) \\ \Phi(X, \lambda) &= F(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X) + \sum_{j=m+1}^{m+1} \lambda_j h_{j-m}(X) \\ \theta &= \begin{cases} 1,0 & \text{caso } p^T y \geq 0,2 p^T B p \\ \frac{0,8 p^T B p}{p^T B p - p^T y} & \text{caso } p^T y < 0,2 p^T B p \end{cases}\end{aligned}\tag{Eq. 2.21}$$

O algoritmo escrito anteriormente pode ser resumido nos seguintes seis passos:

- 1- Inicializar B , fazendo $B = I$.
- 2- Calcular os gradientes.
- 3- Resolver o subproblema de programação quadrática.
- 4- Calcular os multiplicadores de Lagrange correspondentes à solução do subproblema quadrático.
- 5- Procura usando uma função de penalidade externa.
- 6- Verificar a convergência. No caso de satisfeita, sair. Caso contrário, actualizar B , e voltar ao passo 2.

Para uma análise mais profunda sobre este método, o leitor pode consultar [14].

2.6 Gradiente e Diferenças Finitas

Nalguns algoritmos de optimização (é o caso do método SQP) é necessário realizar uma análise de sensibilidade através da avaliação dos gradientes. O cálculo dessa sensibilidade é equivalente ao problema matemático de se obterem as derivadas de determinadas equações em relação às variáveis de projecto. Por outras palavras, a análise de sensibilidade é na verdade a determinação da variação das funções em consequência de alterações nas variáveis de projecto.

Em muitas circunstâncias torna-se difícil obter os valores das derivadas de uma função por não ser possível recorrer à respectiva expressão analítica, pois esta pode não ser conhecida ou pode ser demasiado complexa para ser escrita explicitamente. Uma das técnicas mais simples para a obtenção das derivadas é a aproximação por diferenças finitas. Neste trabalho é utilizado o método das diferenças finitas progressivas de primeira ordem por ser um dos mais simples e fácil de implementar.

A Eq. 2.22 representa o uso deste mesmo método no cálculo do gradiente de uma função qualquer.

$$\frac{\partial f_q}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta f_q}{\Delta x_i} = \frac{f_q(x + \Delta x_i) - f_q}{\Delta x_i} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{Eq. 2.22}$$

onde: Δx_i é o incremento na variável de projecto e n é o número de variáveis de projecto.

Para se obterem as derivadas em relação às n variáveis de projecto o método das diferenças finitas progressivas requer n análises adicionais da função [12, 13].

2.7 Critério de von Mises

O critério da energia de distorção máxima, também conhecido por critério de *von Mises*, em memória do matemático germano-americano *Richard von Mises* (1883-1953), baseia-se na determinação da energia de distorção de um dado material. Este critério garante que um dado componente estrutural é seguro quando o valor máximo da energia de distorção por unidade de volume nesse material for inferior à energia de distorção por unidade de volume necessária para causar a cedência num provete sujeito à tracção num ensaio laboratorial do mesmo material [15]. Este critério é utilizado, no capítulo 5, para analisar as tensões obtidas.

3 Modelo Matemático

Como já foi referido anteriormente, neste trabalho é utilizado o método de Reissner-Mindlin usando a *Teoria de deformação de corte de primeira ordem* (FSDT). O modelo matemático aqui apresentado é baseado em [2].

3.1 Formulação Matemática

O método FSDT assenta em dois pressupostos para o campo de deslocamentos:

1º - Uma linha normal à superfície média não deformada permanece uma linha recta depois de ocorrer a deformação.

2º - A tensão normal transversa pode ser desprezada nas relações constitutivas.

Então, e assumindo que há linearidade, o campo de deslocamentos da placa é dado por:

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)\end{aligned}\tag{Eq. 3.1}$$

sendo u, v, w os deslocamentos nas direcções x, y, z , respectivamente, e u_0, v_0, w_0 os deslocamentos referentes ao plano $z = 0$. Já ϕ_x e ϕ_y representam as rotações em torno dos eixos x e y , respectivamente.

Assume-se também que a superfície média da placa não possui curvatura ou possui apenas uma ligeira curvatura, podendo $z = 0$ ser considerada como a superfície média.

Das Eq. 3.1 podem ser obtidas as extensões, na seguinte forma.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xy} &= 2 \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{yz} &= 2 \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 \gamma_{zx} &= 2 \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 3.2}$$

A análise estrutural da asa é feita considerando que esta se comporta como uma placa, pois a razão espessura-corda é pequena.

Por forma a facilitar os cálculos, efectuou-se uma mudança de coordenadas de (x, y) para (ζ, η) . Assim, a asa com a forma de um trapézio no plano (x, y) é transformada num quadrado no plano (ζ, η) , como é mostrado na Figura 3.1.

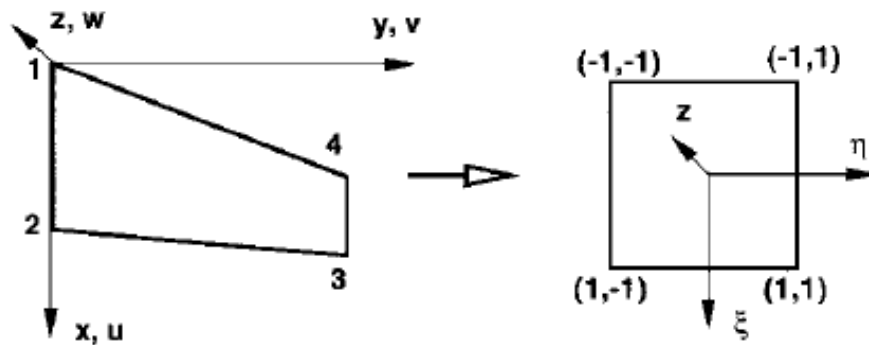


Figura 3.1 Transformação de coordenadas

A transformação é realizada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta, \eta) x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta, \eta) y_i
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 3.3}$$

onde

$$\begin{aligned}
 N_1(\zeta, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta) \\
 N_2(\zeta, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta) \\
 N_3(\zeta, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta) \\
 N_4(\zeta, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 3.4}$$

A inversa da matriz Jacobiana é escrita como:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix}
 \tag{Eq. 3.5}$$

As componentes dos deslocamentos no plano $z = 0$ da Eq. 3.1, ou seja, $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$, podem ser expressas da seguinte forma, usando os polinómios de Legendre:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \{B_{IJ}\}^T \{q_U\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij}(t) B_i(\zeta) B_j(\eta) \\
 v_0 &= \{B_{KL}\}^T \{q_V\} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L V_{kl}(t) B_k(\zeta) B_l(\eta) \\
 w_0 &= \{B_{MN}\}^T \{q_W\} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn}(t) B_m(\zeta) B_n(\eta) \\
 \phi_x &= \{B_{PQ}\}^T \{q_X\} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q X_{pq}(t) B_p(\zeta) B_q(\eta) \\
 \phi_y &= \{B_{RS}\}^T \{q_Y\} = \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S Y_{rs}(t) B_r(\zeta) B_s(\eta)
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 3.6}$$

ou

$$\{u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y\}^T = [H] \{q\}
 \tag{Eq. 3.7}$$

em que I, L, M, N, P, Q, R , e S são números inteiros, $\{q\}$ é o vector de deslocamento generalizado dado por

$$\begin{aligned} \{q\} &= \left\{ \{q_U\}^T, \{q_V\}^T, \{q_W\}^T, \{q_X\}^T, \{q_Y\}^T \right\}^T \\ \{q_U\} &= \{U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1J}, U_{21}, \dots, U_{2J}, \dots, U_{I1}, \dots, U_{IJ}\}^T \\ \{q_V\} &= \{V_{11}, \dots, V_{KL}\}^T \\ \{q_W\} &= \{W_{11}, \dots, W_{MN}\}^T \\ \{q_X\} &= \{X_{11}, \dots, X_{PQ}\}^T \\ \{q_Y\} &= \{Y_{11}, \dots, Y_{RS}\}^T \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.8}$$

e a matriz $[H]$ é dada por

$$[H] = \text{diag} \left[\{B_{IJ}\}^T, \{B_{KL}\}^T, \{B_{MN}\}^T, \{B_{PQ}\}^T, \{B_{RS}\}^T \right] \quad \text{Eq. 3.9}$$

em que

$$\begin{aligned} \{B_{\mu\nu}\} &= \{B_1(\zeta)B_1(\eta), B_1(\zeta)B_2(\eta), \dots, B_\mu(\zeta)B_\nu(\eta)\}^T \\ \mu\nu &= IJ, KLM, MN, PQ, RS \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.10}$$

é o vector da função de base de Ritz, podendo $B_i(x)$ ser polinómios de Legendre

$$B_i(x) = P_{i-1}(x) \quad \text{Eq. 3.11}$$

neste caso,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= \left[\frac{2n+1}{n+1} \right] x P_n(x) - \left[\frac{n}{n+1} \right] P_{n-1}(x) \quad n = 1, \dots \end{aligned}$$

3.2 Energia de deformação da asa

A energia de deformação de uma asa é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad \text{Eq. 3.12}$$

Introduzindo a relação tensão-deformação da Lei de Hooke generalizada a

Eq. 3.12 fica:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad \text{Eq. 3.13}$$

Sabendo que $\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$, assume-se que $[D]^T=[D]$, e que o domínio V de integração nas e Eq. 3.12 e Eq. 3.13 inclui apenas o espaço que os componentes ocupam na asa. Então, usando a equação Eq. 3.5 pode escrever-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} &= ([J]^T)^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = ([J]^{-1})^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} \\ \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.14}$$

Das Eq. 3.2 e Eq. 3.14 temos que:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & z\bar{J}_{11} & z\bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & z\bar{J}_{12} & z\bar{J}_{22} & 0 & 0 \\ \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & z\bar{J}_{12} & z\bar{J}_{22} & z\bar{J}_{11} & z\bar{J}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{\bar{\varepsilon}\} = [T] \{\bar{\varepsilon}\} \quad \text{Eq. 3.15}$$

onde $\{\bar{\varepsilon}\}$ é

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_0}{\partial \eta}, \frac{\partial v_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial v_0}{\partial \eta}, \frac{\partial w_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial w_0}{\partial \eta}, \frac{\partial \phi_x}{\partial \zeta}, \frac{\partial \phi_x}{\partial \eta}, \frac{\partial \phi_{0y}}{\partial \zeta}, \frac{\partial \phi_y}{\partial \eta}, \phi_x, \phi_y \right\}^T = [C]\{q\} \text{Eq. 3.16}$$

sendo,

$$[C] = \begin{bmatrix} [B_{IJ,\zeta\eta}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [B_{KL,\zeta\eta}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [B_{MN,\zeta\eta}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [B_{PQ,\zeta\eta}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [B_{RS,\zeta\eta}] \\ 0 & 0 & 0 & \{B_{PQ}\}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{B_{RS}\}^T \end{bmatrix} \text{Eq. 3.17}$$

onde,

$$B_{\mu\nu,\zeta\eta} = \begin{bmatrix} B'_1(\zeta)B_1(\eta) & B'_1(\zeta)B_2(\eta) & \dots & B'_\mu(\zeta)B_\nu(\eta) \\ B_1(\zeta)B'_1(\eta) & B_1(\zeta)B'_2(\eta) & \dots & B_\mu(\zeta)B'_\nu(\eta) \end{bmatrix}$$

com $\mu\nu=IJ, KL, MN, PQ, RS$ e

$\{B_{\mu\nu}\}$ pode ser retirado da Eq. 3.10, e $\{q\}$ é o vector de deslocamento geral definido na Eq. 3.8.

Substituindo a Eq. 3.15 e Eq. 3.16 na Eq. 3.13, obtém-se, para a energia de deformação

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{q\}^T [C]^T [T]^T [D][T][C]\{q\} dV \text{Eq. 3.18}$$

Escrevendo a energia potencial na seguinte forma

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K]\{q\} \text{Eq. 3.19}$$

e comparando a Eq. 3.18 e Eq. 3.19, obtém-se

$$[K] = \iiint_V [C]^T [T]^T [D] [T] [C] dV \quad \text{Eq. 3.20}$$

Esta é a matriz de rigidez da asa em função de $\{q\}$. A matriz constitutiva $[D]$ é diferente para os vários componentes da asa. A construção das matrizes constitutivas é descrita no anexo.

3.3 Energia cinética de uma asa

A energia cinética de uma asa é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \bar{v}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \{\bar{v}\}^T \{\bar{v}\} dV \quad \text{Eq. 3.21}$$

onde o vector velocidade, $\{\bar{v}\}$, pode ser escrito como:

$$\{\bar{v}\} = \left\{ \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \\ \frac{\partial w_0}{\partial t} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial t} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} \\ \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \end{array} \right\} \quad \text{Eq. 3.22}$$

$$= [Z][H]\{\dot{q}\}$$

sendo

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.23}$$

$[H]$ é definido na equação Eq. 3.9 e $\{\dot{q}\}$ é a derivada de $\{q\}$ em ordem ao tempo. Obtemos, então,

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \{\dot{q}\}^T [H]^T [ZZ] [H] \{\dot{q}\} dV \quad \text{Eq. 3.24}$$

onde

$$[ZZ] = [Z]^T [Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3.25}$$

Comparando, agora,

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \quad \text{Eq. 3.26}$$

com a equação Eq. 3.24 temos

$$[M] = \iiint_V \rho [H]^T [ZZ] [H] dV \quad \text{Eq. 3.27}$$

que é a matriz de massa da asa em função do vector geral de velocidade, $\{\dot{q}\}$.

3.4 Integração numérica das matrizes de massa e de rigidez

Assumindo $I = J = K = L = M = N = P = Q = R = S = k$, então $[K]$ e $[M]$ são matrizes de dimensão $N \times N$, em que $N = 5k^2$.

É de notar que, apesar de ser realizada uma transformação de coordenadas de (x, y) para (ζ, η) , a coordenada z não sofre quaisquer alterações. Então, integrando no espaço (x, y, z) , temos

$$I = \iiint_V F(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad \text{Eq. 3.28}$$

onde

$$G(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^{N_z} \int_{z_{i1}}^{z_{i2}} F[x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta), z] \cdot |J| dz \quad \text{Eq. 3.29}$$

N_z é o número de zonas de integração na direcção de z , e z_{i1} e z_{i2} são os limites de integração de cada uma dessas zonas.

Usando a quadratura de Gauss, podemos calcular o integral da equação Eq. 3.28 da seguinte forma:

$$I \cong \sum_{i=1}^{Mg} \sum_{j=1}^{Ng} g_i^{(Mg)} g_j^{(Ng)} G[\zeta_i^{(Mg)}, \eta_j^{(Ng)}] \quad \text{Eq. 3.30}$$

sendo $g_i^{(Mg)}$, $g_j^{(Ng)}$ os pesos, $\zeta_i^{(Mg)}$, $\eta_j^{(Ng)}$ os pontos de amostragem, e Mg e Ng representam o número de pontos de amostragem usados nas direcções ζ , η , respectivamente.

Para uma asa composta por revestimento, longarinas e nervuras, os integrais da equação Eq. 3.28 podem ser escritos da seguinte forma:

1) Revestimento

A Figura 3.2 mostra uma secção do revestimento da asa. A integração particular para o revestimento é dada por:

$$\iiint_V F(x, y, z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\int_{z_L - \frac{1}{2}t_L}^{z_L + \frac{1}{2}t_L} F \cdot |J| dz + \int_{z_U - \frac{1}{2}t_U}^{z_U + \frac{1}{2}t_U} F \cdot |J| dz \right) d\zeta d\eta \quad \text{Eq. 3.31}$$

onde $t_{L,U} = t_0 \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_{L,U}}$, indicando os índices L (*lower*) e U (*upper*) os revestimentos do intradorso e extradorso, respectivamente.

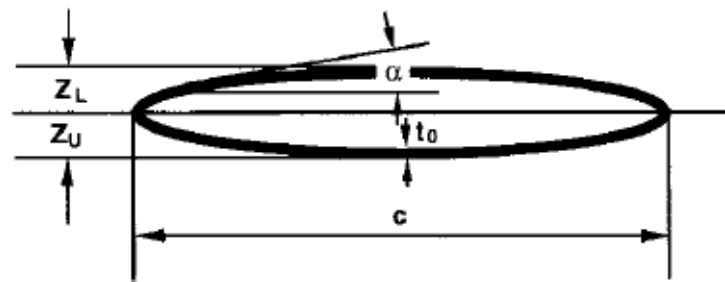


Figura 3.2 Revestimento da asa

2) Longarinas

O contributo destes componentes para a matriz de rigidez e de massa pode ser obtido calculando os integrais para cada uma das longarinas. A Figura 3.3 mostra a geometria destes componentes.

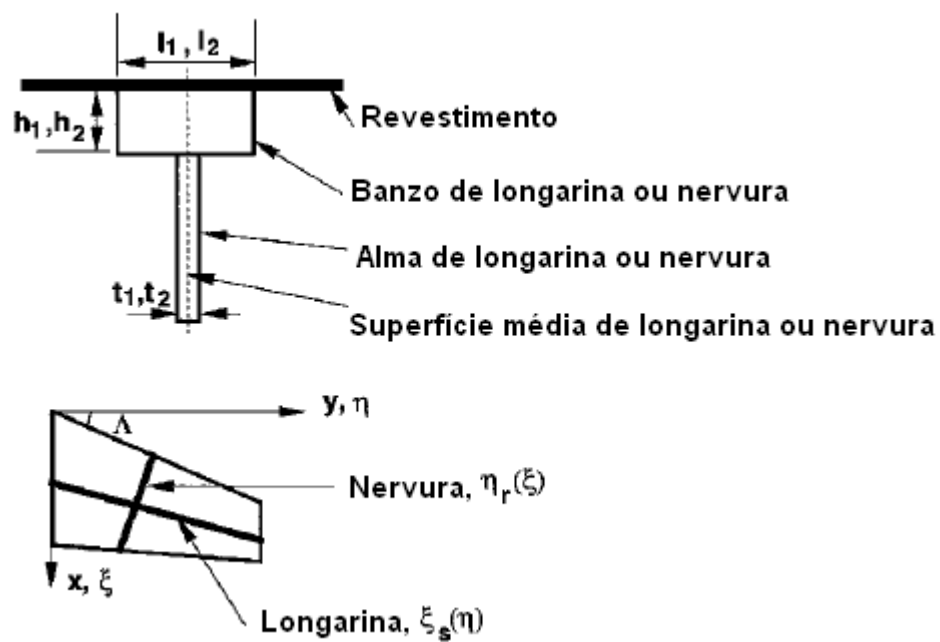


Figura 3.3 Longarina ou Nervura da asa

Então, para a mesa da longarina, temos

$$\begin{aligned}
 \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 d\eta \int_{\zeta_s(\eta) - \frac{l_1}{c}}^{\zeta_s(\eta) + \frac{l_1}{c}} d\zeta \left(\int_{z_L + \frac{1}{2}t_L}^{z_L + \frac{1}{2}t_L + h_1} + \int_{z_U - \frac{1}{2}t_U}^{z_U - \frac{1}{2}t_U - h_1} \right) F[x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta), z] \cdot |J| dz \\
 &= \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 \left(\frac{l_1}{c} \right) d\zeta \left(\int_{z_L + \frac{1}{2}t_L}^{z_L + \frac{1}{2}t_L + h_1} + \int_{z_U - \frac{1}{2}t_U}^{z_U - \frac{1}{2}t_U - h_1} \right) \times F \left\{ x \left(\left(\frac{l_1}{c} \right) \zeta + \zeta_s(\eta), \eta \right), y \left(\left(\frac{l_1}{c} \right) \zeta + \zeta_s(\eta), \eta \right), z \right\} \cdot |J| dz
 \end{aligned}$$

Eq. 3.32

onde c é o comprimento da corda na coordenada η , podendo ser calculado por:

$$c = \frac{1}{2} c_0 (1 - \eta) + \frac{1}{2} c_1 (1 + \eta)$$

sendo c_0 o comprimento da corda na raiz da asa, c_1 o comprimento da corda na ponta e $\zeta_s(\eta)$ a função da posição da longarina. A equação Eq. 3.32 pode ser então calculada numericamente usando a equação Eq. 3.30.

Para a alma da longarina temos:

$$\begin{aligned}
 \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\zeta_s(\eta) - \frac{t_1}{c}}^{\zeta_s(\eta) + \frac{t_1}{c}} \int_{-1}^1 \int_{z_L + \frac{1}{2}t_L + h_1}^{z_U - \frac{1}{2}t_U - h_1} \times F[x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta), z] \cdot |J| d\zeta d\eta dz \\
 &= \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 \left(\frac{t_1}{c} \right) d\zeta \int_{z_L + \frac{1}{2}t_L + h_1}^{z_U - \frac{1}{2}t_U - h_1} F \left\{ x \left(\left(\frac{t_1}{c} \right) \zeta + \zeta_s(\eta), \eta \right), y \left(\left(\frac{t_1}{c} \right) \zeta + \zeta_s(\eta), \eta \right), z \right\} \cdot |J| dz
 \end{aligned}$$

Eq. 3.33

3) Nervuras

O contributo das nervuras para a matriz de rigidez e de massa podem ser calculadas de uma maneira semelhante à usada para as longarinas. As dimensões de uma nervura são também ilustradas na Figura 3.3.

$$\begin{aligned} \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 \int_{\eta_r - \frac{l_2}{s}}^{\eta_r + \frac{l_2}{s}} \left(\int_{z_L + \frac{1}{2}t_L}^{z_L + \frac{1}{2}t_L + h_2} + \int_{z_U - \frac{1}{2}t_U}^{z_U - \frac{1}{2}t_U - h_2} \right) F[x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta), z] \cdot |J| d\zeta d\eta dz \\ &= \int_{-1}^1 d\zeta \int_{-1}^1 \left(\frac{l_2}{s} \right) d\eta \left(\int_{z_L + \frac{1}{2}t_L}^{z_L + \frac{1}{2}t_L + h_2} + \int_{z_U - \frac{1}{2}t_U}^{z_U - \frac{1}{2}t_U - h_2} \right) \times F \left\{ x \left(\zeta, \left(\frac{l_2}{s} \right) \eta + \eta_r(\zeta) \right), y \left(\zeta, \left(\frac{l_2}{s} \right) \eta + \eta_r(\zeta) \right), z \right\} \cdot |J| dz \end{aligned}$$

Eq. 3.34

em que s é metade da envergadura e $\eta_r(\zeta)$ é a função da posição da nervura. Para a alma da nervura temos:

$$\begin{aligned} \iiint_V F(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 \int_{\eta_r - \frac{t_2}{s}}^{\eta_r + \frac{t_2}{s}} \int_{z_L + \frac{1}{2}t_L + h_2}^{z_U - \frac{1}{2}t_U - h_2} \times F[x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta), z] \cdot |J| d\zeta d\eta dz \\ &= \int_{-1}^1 d\zeta \int_{-1}^1 \left(\frac{t_2}{s} \right) d\eta \int_{z_L + \frac{1}{2}t_L + h_2}^{z_U - \frac{1}{2}t_U - h_2} F \left\{ x \left(\zeta, \left(\frac{t_2}{s} \right) \eta + \eta_r(\zeta) \right), y \left(\zeta, \left(\frac{t_2}{s} \right) \eta + \eta_r(\zeta) \right), z \right\} \cdot |J| dz \end{aligned}$$

Eq. 3.35

Tal como para as longarinas, o resultado da integração das nervuras pode ser obtido somando o contributo de cada uma das nervuras.

3.5 Condições de fronteira e convergência

As condições de fronteira podem ser aproximadas usando molas nas extremidades da placa. Recorrendo a molas lineares com um valor elevado de rigidez podemos simular as condições de fronteira para o caso de apoios simples. Para as situações de constrangimentos usam-se molas lineares e rotacionais extremamente rígidas.

Para o caso em estudo neste trabalho, em que a asa se assume como encastrada na raiz, as molas serão distribuídas na extremidade 1-2 (consultar Figura 3.1). Serão

usadas molas com coeficientes de rigidez constantes, $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_{\phi_x}, \alpha_{\phi_y}$, que são responsáveis pelos deslocamentos u_0, v_0, z_0, ϕ_x e ϕ_y , respectivamente.

A energia de deformação das molas pode ser calculada através a Eq. 3.36.

$$U_{mola} = \frac{1}{4} c_r \int_{-1}^1 (\alpha_x u_0^2 + \alpha_y v_0^2 + \alpha_z w_0^2 + \alpha_{\phi_x} \phi_x^2 + \alpha_{\phi_y} \phi_y^2) d\zeta \quad \text{Eq. 3.36}$$

onde c_r representa o comprimento da corda na raiz.

Através das Eq. 3.6 e Eq. 3.8 e comparando a Eq. 3.36 com $U_{mola} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_{mola}] \{q\}$, obtemos a matriz de rigidez para as molas da seguinte forma:

$$[K_{mola}] = \text{diag}([K_{\alpha_x}], [K_{\alpha_y}], [K_{\alpha_z}], [K_{\alpha_{\phi_x}}], [K_{\alpha_{\phi_y}}]) \quad \text{Eq. 3.37}$$

onde,

$$\begin{aligned} [K_{\alpha_x}] &= \frac{1}{2} c_r \alpha_x \int_{-1}^1 \{B_{IJ}(\zeta, -1)\} \{B_{IJ}(\zeta, -1)\}^T d\zeta \\ [K_{\alpha_y}] &= \frac{1}{2} c_r \alpha_y \int_{-1}^1 \{B_{KL}(\zeta, -1)\} \{B_{KL}(\zeta, -1)\}^T d\zeta \\ [K_{\alpha_z}] &= \frac{1}{2} c_r \alpha_z \int_{-1}^1 \{B_{MN}(\zeta, -1)\} \{B_{MN}(\zeta, -1)\}^T d\zeta \\ [K_{\alpha_{\phi_x}}] &= \frac{1}{2} c_r \alpha_{\phi_x} \int_{-1}^1 \{B_{PQ}(\zeta, -1)\} \{B_{PQ}(\zeta, -1)\}^T d\zeta \\ [K_{\alpha_{\phi_y}}] &= \frac{1}{2} c_r \alpha_{\phi_y} \int_{-1}^1 \{B_{RS}(\zeta, -1)\} \{B_{RS}(\zeta, -1)\}^T d\zeta \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.38}$$

Relativamente à convergência dos resultados, este trabalho assenta na análise realizado por Liu em [16]. Esse estudo revela os valores dos coeficientes de rigidez para os quais os resultados convergem. Com base nessa informação, vamos assumir um valor de 10^{11} para os coeficientes de rigidez quando são usados polinómios de Legendre com 9 nós. A razão pela qual é utilizado este número de nós é explicada no capítulo 5.

3.6 Formulação para análise de vibração da asa

Partindo do princípio de que a asa é um sistema conservativo, as equações de Lagrange para a vibração livre, são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{Eq. 3.39}$$

$$j = 1, \dots, \mu \nu \quad \mu \nu = IJ, KL, MN, PQ, RS$$

Como o Lagrangeano para a asa é:

$$L = T - V = T - U \quad \text{Eq. 3.40}$$

em que V é a energia potencial, e usando as equações Eq. 3.19, Eq. 3.26 e Eq. 3.39 podem calcular-se as frequências naturais e as formas dos modos de vibração para a vibração livre resolvendo o seguinte problema de valores próprios:

$$[K - \lambda M] \{x\} = 0 \quad \text{Eq. 3.41}$$

sendo $\lambda = \omega^2$ um dos valores próprios dos sistema de equações, ω a frequência correspondente em radianos por segundo e $\{x\}$ o vector próprio correspondente.

3.7 Solução para o problema estático

Assumindo que uma carga externa, distribuída com as componentes $P_x(x,y,t)$, $P_y(x,y,t)$, $P_z(x,y,t)$ é aplicada à estrutura da asa, então o trabalho virtual realizado pela carga numa área infinitesimal $dx \cdot dy$ é igual a:

$$\delta Q = \delta Q_x + \delta Q_y + \delta Q_z \quad \text{Eq. 3.42}$$

onde

$$\begin{aligned} \delta Q_x &= P_x(x, y, t) \cdot \delta u(x, y, z, t) \cdot dx \cdot dy \\ \delta Q_y &= P_y(x, y, t) \cdot \delta v(x, y, z, t) \cdot dx \cdot dy \\ \delta Q_z &= P_z(x, y, t) \cdot \delta w(x, y, z, t) \cdot dx \cdot dy \end{aligned} \quad \text{Eq. 3.43}$$

Usando a Eq. 3.1, obtém-se:

$$\begin{aligned}\delta Q_x &= P_x \cdot (\delta u_0 + z \cdot \delta \phi_x) \cdot dx \cdot dy \\ \delta Q_y &= P_y \cdot (\delta v_0 + z \cdot \delta \phi_y) \cdot dx \cdot dy \\ \delta Q_z &= P_z \cdot \delta w_0 \cdot dx \cdot dy\end{aligned}\tag{Eq. 3.44}$$

Usando a Eq. 3.6, ou seja, aproximando os deslocamentos $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$, em termos das funções de Ritz, o trabalho total realizado pelas forças externas em toda a superfície da asa é dado por:

$$\begin{aligned}\delta Q &= \iint \left[P_x \{B_{IJ}\}^T \{\delta q_U\} + P_y \{B_{KL}\}^T \{\delta q_V\} + P_z \{B_{MN}\}^T \{\delta q_W\} + z P_x \{B_{PQ}\}^T \{\delta \phi_x\} + z P_y \{B_{RS}\}^T \{\delta \phi_y\} \right] \\ &\times dx dy = \{P\}^T \{\delta q\}\end{aligned}\tag{Eq. 3.45}$$

onde $\{P\}$ é o vector de carga generalizado,

$$\{P\} = \{ \{P_1\} \quad \{P_2\} \quad \{P_3\} \quad \{P_4\} \quad \{P_5\} \}^T\tag{Eq. 3.46}$$

Sendo

$$\begin{aligned}\{P_{1,2,3}\} &= \iint P_{x,y,z}(x, y, t) \{B_{IJ,KL,MN}\}^T dx dy \\ \{P_{4,5}\} &= z \iint P_{x,y}(x, y, t) \{B_{PQ,RS}\}^T dx dy\end{aligned}\tag{Eq. 3.47}$$

No caso da força ser concentrada, a derivação apresentada anteriormente pode ser simplificada. Por exemplo, para a primeira componente do vector de carga generalizado temos

$$P_1 = P_x [x(\zeta_a, \eta_a), y(\zeta_a, \eta_a), t] \{B_{IJ}(\zeta_a, \eta_a)\}^T\tag{Eq. 3.48}$$

sendo (ζ_a, η_a) as coordenadas transformadas do ponto onde é aplicada a carga.

Usando o princípio do trabalho virtual temos, para o caso estático, a seguinte relação entre o vector de deslocamento generalizado $\{q\}$ e o vector de carga generalizado $\{P\}$,

$$[K]\{q\} = \{P\}\tag{Eq. 3.49}$$

3.8 Geometria da asa

A asa em estudo neste trabalho é totalmente fabricada em alumínio e é composta por revestimento, 4 longarinas e 11 nervuras. O perfil usado para a asa é um *Kármán-Trefftz* e as longarinas e nervuras possuem um perfil em I. Os dados relativos às dimensões dos componentes da asa estão apresentados na Tabela 3.1. A Figura 3.4 representa a asa e a disposição dos seus elementos internos.

Tabela 3.1 Dados relativos à geometria dos componentes da asa.

Espessura do perfil na raiz [%]	15
Espessura do perfil na ponta [%]	10
Razão Curvatura-Corda do perfil na raiz [%]	1,8
Razão Curvatura-Corda do perfil na ponta [%]	1,038
Espessura do revestimento [mm]	3
Espessura da alma nas longarinas/nervuras, t_1, t_2 [mm]	1,47
Altura dos banzos nas longarinas/nervuras, h_1, h_2 [mm]	5
Largura dos banzos nas longarinas/nervuras l_1, l_2 [mm]	9,47
Corda na raiz [mm]	1830
Corda na ponta [mm]	914
Envergadura [mm]	4880
Ângulo de enflechamento (bordo de ataque) [°]	30
Massa específica do alumínio, ρ [kg/m³]	2700
Módulo de Young, E [GPa]	70,7
Coefficiente de Poisson, ν	0,3

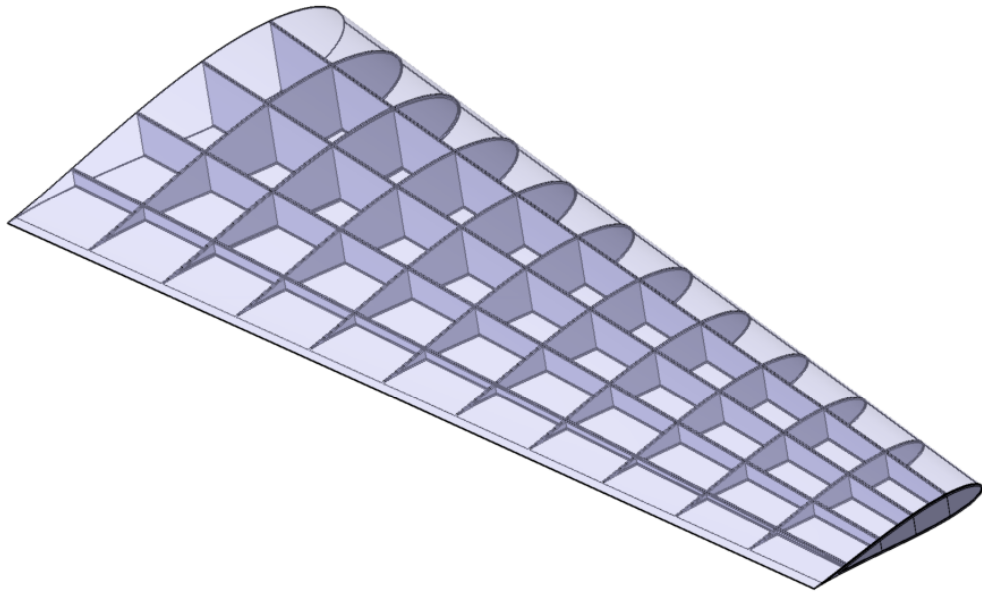


Figura 3.4 **Distribuição dos componentes internos da asa em estudo.**

4 Implementação Numérica

Este capítulo aborda os subprogramas desenvolvidos neste trabalho e que compõem a aplicação principal. Pretende explicar-se de uma forma clara e o mais sucinta possível, a estrutura base dos mesmos, para que o leitor obtenha uma ideia geral do seu funcionamento. São usados fluxogramas para permitir uma compreensão mais fácil dos principais passos que formam o programa.

O programa de análise é baseado no modelo matemático descrito no capítulo 3. Já o programa de optimização assenta numa sub-rotina desenvolvida pelos autores de [17].

4.1 Programa de análise

O desenvolvimento do programa de análise tem como finalidade a criação de uma ferramenta numérica que possibilita a análise estrutural de uma asa. Essa análise contempla a obtenção das frequências naturais, dos modos de vibração, dos deslocamentos, das extensões e ainda das tensões.

Dependendo das necessidades do utilizador, o programa computacional de análise permite, através da alteração dos ficheiros que contêm os dados de entrada, que se escolha o tipo de cálculo pretendido. Assim, a aplicação não tem que executar todas as análises, desta forma o tempo de processamento é diminuído. Foi, no entanto, introduzida uma opção que permite ao utilizador, quando necessário, realizar todos os cálculos.

A Figura 4.1 apresenta um fluxograma que permite compreender melhor o programa em causa. O leitor pode verificar que a “Opção 1” permite efectuar todos os

cálculos, tal como foi referido anteriormente, ao passo que cada uma das outras opções apenas torna possível a execução de alguns desses mesmos cálculos. Por essa razão é escolhida a “Opção 1” para uma explicação mais pormenorizada acerca de cada um dos principais passos que a compõem.

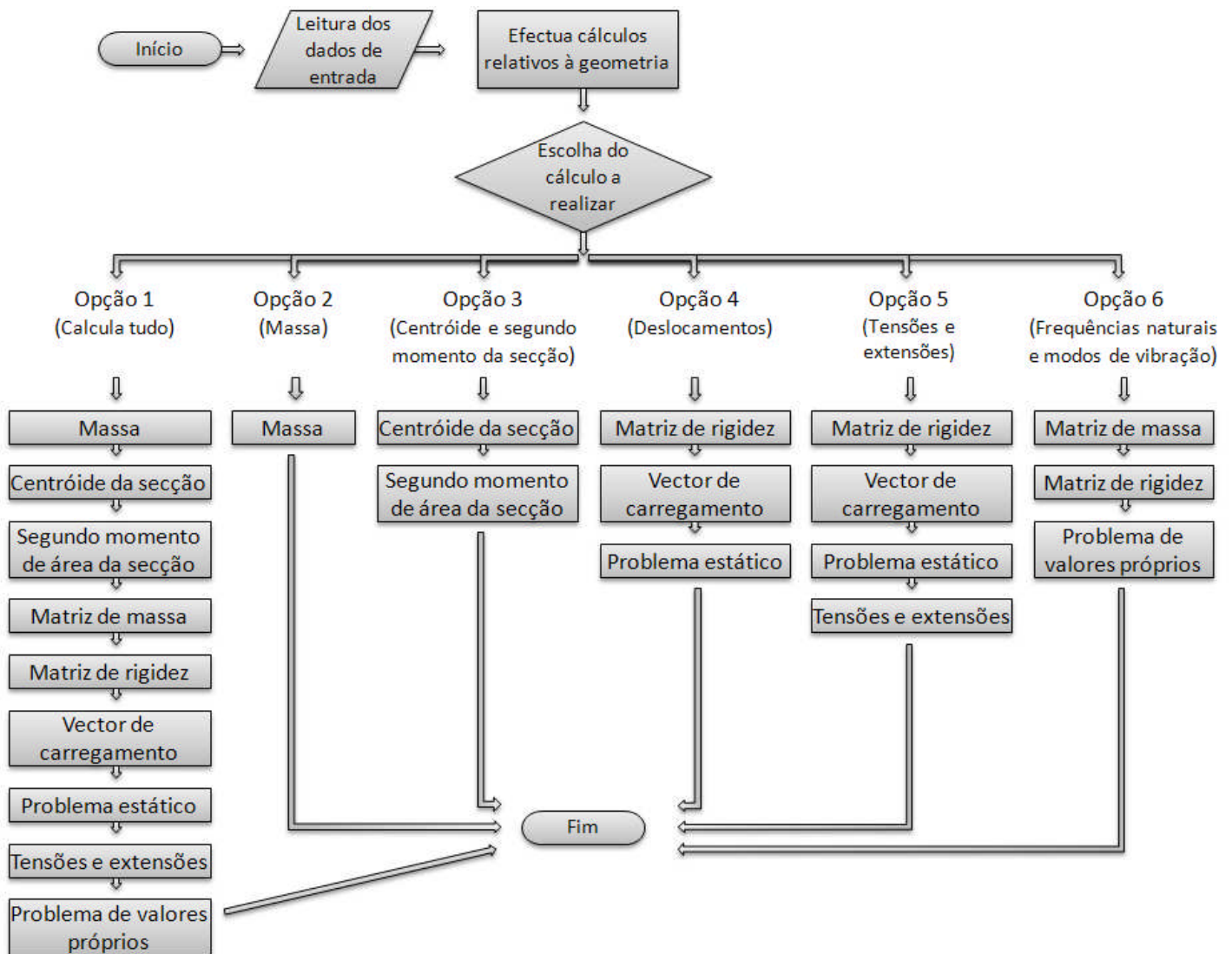


Figura 4.1 Fluxograma do programa de análise

Seguem-se as explicações acerca de cada um dos principais passos desta aplicação:

Leitura dos dados de entrada

- O programa lê, dos ficheiros texto, dados que correspondem a opções introduzidas pelo utilizador.

Efectua cálculos relativos à geometria

- Neste ponto do programa, são realizados alguns cálculos relativos à geometria, tais como, o ângulo de enflechamento e a variação da corda ao longo da envergadura, entre outros.

Escolha do cálculo a realizar

- O programa analisa os dados introduzidos pelo utilizador através dos ficheiros de texto e define o cálculo a realizar.

Massa

- Calcula a massa da asa, recorrendo à quadratura de Gauss para fazer a integração.

Centróide da secção

- Calcula o centróide da secção recorrendo ao primeiro momento de área da secção e à área dessa mesma secção.

Segundo momento de área da secção

- Esta sub-rotina determina o segundo momento de área da secção, fazendo uso da quadratura de Gauss para a integração numérica.

Matriz de massa

- Determina a matriz de massa recorrendo aos polinómios de Legendre e, mais uma vez, à quadratura de Gauss para a integração.

Matriz de rigidez

- Calcula a matriz de rigidez através dos polinómios de Legendre e da quadratura de Gauss.

Vector de carregamento

- Acha o vector de carregamento usando os polinómios de Legendre.

Problema estático

- Resolve o sistema de equações $[K] \cdot \{q\} = \{p\}$ com recurso à biblioteca IMSL¹. Este é um processo iterativo pois, à medida que se obtêm valores para o vector de deslocamento generalizado, $\{q\}$, é necessário colocar o vector de carregamento na nova posição e resolver novamente o sistema de equações. Este processo só termina quando o erro entre dois valores consecutivos de $\{q\}$ for inferior a uma grandeza previamente definida.

- Seguidamente são calculados os deslocamentos usando $\{q\}$.

Tensões e extensões

- Esta sub-rotina permite obter as extensões através dos polinómios de Legendre e do vector de deslocamento generalizado, $\{q\}$, obtido anteriormente.

- Após obtidas as extensões são determinadas as tensões através da lei de Hooke, $\sigma = E \varepsilon$.

Problema de valores próprios

- Esta parte do programa calcula as frequências naturais e a forma dos modos de vibração através da resolução do problema de valores próprios, $[K - \lambda M] \{x\} = 0$. O cálculo é feito recorrendo à biblioteca IMSL.

¹ A biblioteca matemática IMSL (*International Mathematics and Statistics Library*) é um conjunto de sub-rotinas matemáticas, escritas em FORTRAN, que foram desenvolvidas para serem utilizadas em pesquisa e análise matemática.

4.2 Programa de optimização

Como foi já referido o programa de optimização utilizado neste trabalho tem como base a sub-rotina FFSQP.

FFSQP (FORTRAN Feasible Sequential Quadratic Programming) é um conjunto de sub-rotinas, escritas em linguagem FORTRAN, que têm como finalidade minimizar o máximo das funções objectivo sujeitas a constrangimentos. Estes constrangimentos podem ser lineares de igualdade ou desigualdade ou não lineares de igualdade e desigualdade. No caso de não haver uma função objectivo, a meta reside em encontrar um ponto que satisfaça os constrangimentos. Quando os valores de partida introduzidos pelo utilizador não permitem de maneira alguma cumprir os constrangimentos, a sub-rotina FFSQP gera um ponto que respeite esses mesmos constrangimentos, fazendo com que todas as iterações seguintes geradas pela FFSQP satisfaçam os constrangimentos. Os constrangimentos não lineares de igualdade são transformados em constrangimentos de desigualdade e o máximo da função objectivo é substituído por uma função de penalidade exacta que prejudica as violações de constrangimentos de igualdade. O utilizador pode escolher entre requerer que a função objectivo modificada diminua em cada iteração, depois de ser garantida a exequibilidade para os constrangimentos lineares e não lineares (*monotone line search*), ou requerer uma diminuição em quatro iterações no máximo (*non-monotone line search*).

O utilizador terá que fornecer sub-rotinas para o cálculo da função objectivo e seus constrangimentos, e ainda sub-rotinas que determinem os gradientes dessas funções quando não se pretende que sejam determinados pela FFSQP.

A FFSQP integra dois algoritmos baseados na Programação Quadrática Sequencial (SQP). No primeiro é usada uma procura em arco do tipo Armijo. Já no segundo o mesmo efeito é atingido através de uma procura ao longo de uma linha recta. A função de mérito, usada em ambos os casos, é o máximo da função objectivo quando não existem constrangimentos não lineares de desigualdade. Os algoritmos são descritos com mais detalhe em [17]. Para a solução dos subproblemas de

programação quadrática, a FFSQP chama a sub-rotina QLD, que é fornecida juntamente com a FFSQP.

Neste trabalho definiu-se como função objectivo a função que determina a massa da asa. Pretende-se, desta forma, diminuir o peso da estrutura variando as dimensões dos diferentes componentes que constituem a asa. Relativamente aos constrangimentos, pensou-se inicialmente em incluir os valores das tensões máximas, extensões máximas, deformada máxima e frequências naturais. No entanto, nesta fase do projecto, o programa apenas está preparado para usar como constrangimento as tensões máximas.

Foram escritas sub-rotinas capazes de calcular a função objectivo, os gradientes da função objectivo, os constrangimentos e os seus gradientes. A Figura 4.2 mostra o fluxograma que explica de uma forma simplificada o funcionamento do programa de optimização.

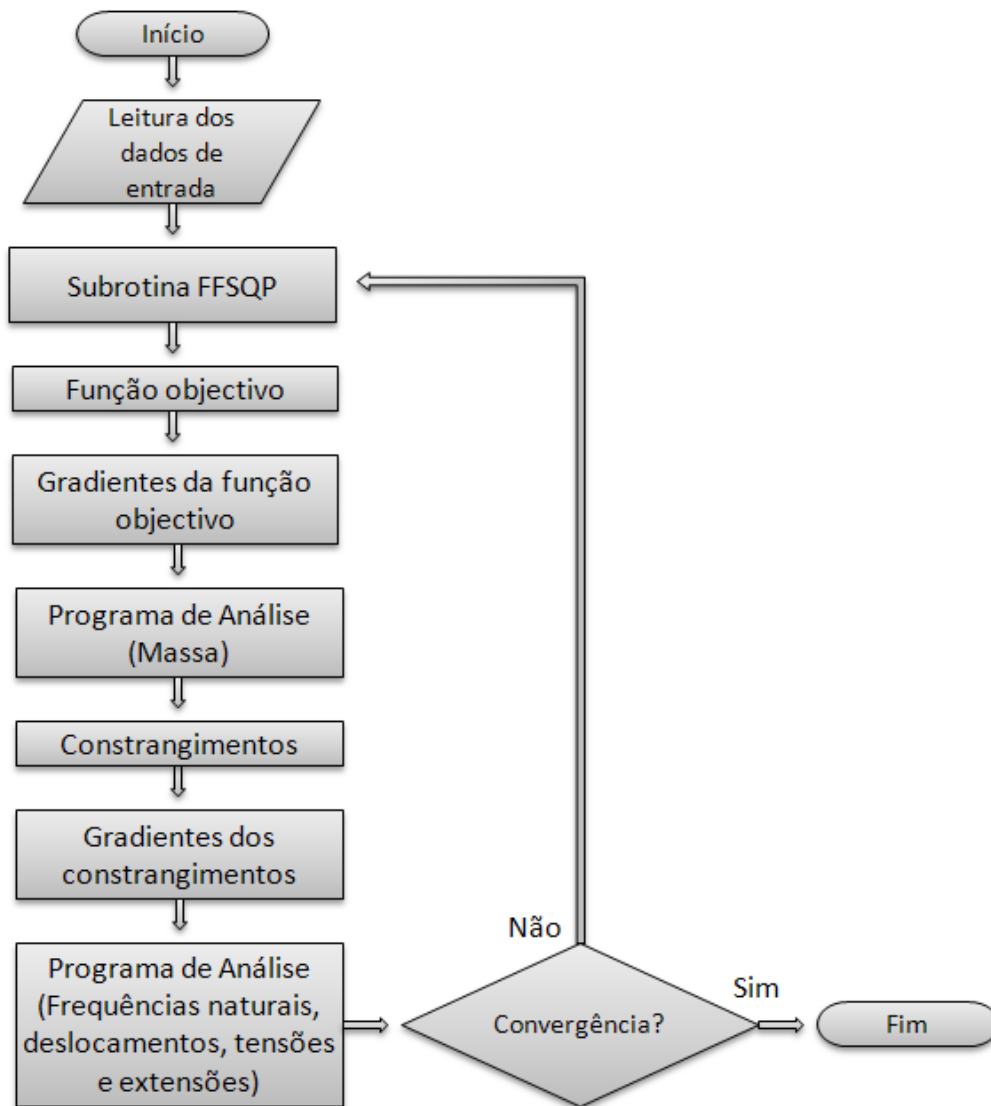
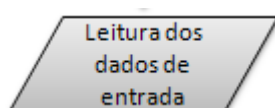


Figura 4.2 Fluxograma do programa de optimização

Segue-se uma explicação de cada passo do programa:



- O programa lê, dos ficheiros de texto, dados que correspondem a opções introduzidas pelo utilizador, constrangimentos e aos valores máximos e mínimos que as variáveis de projecto podem assumir.

Subrotina FFSQP

- Esta sub-rotina foi descrita no início deste capítulo e é a principal responsável pela optimização do problema.

Função objectivo

- Executa a função objectivo sempre que a sub-rotina FFSQP o determinar. Neste caso a execução da função objectivo consiste em determinar a massa da asa.

Gradientes da função
objectivo

- Determina os gradientes da função objectivo usando o método das diferenças finitas. A sub-rotina FFSQP define quando esta sub-rotina deve ser chamada. Também aqui é usado o programa de análise para determinar a massa da asa.

Programa de Análise
(Massa)

- Tal como foi explicado nos dois pontos anteriores, o programa de análise é chamado, tanto pela função objectivo como pela sub-rotina dos gradientes da função objectivo, de forma a obter-se a massa da estrutura.

Constrangimentos

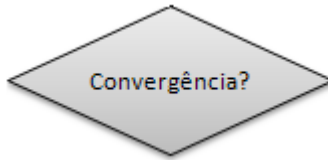
- Neste ponto é chamada, através da sub-rotina FFSQP, a sub-rotina que calcula os constrangimentos. Note-se que, por enquanto, o programa apenas admite constrangimentos para as tensões máximas de *von Mises*. Para o cálculo das tensões de *von Mises* é utilizado o programa de análise.

Gradientes dos
constrangimentos

- Também esta sub-rotina é executada quando a FFSQP assim o determinar. Os gradientes são calculados através do método das diferenças finitas e as tensões de *von Mises* são calculadas através do programa de análise.

Programa de Análise
(Frequências naturais,
deslocamentos, tensões
e extensões)

- Como referido nos dois pontos anteriores, o programa de análise é chamado para calcular os constrangimentos e os seus gradientes.



conseguida.

- Enquanto o resultado não convergir, será executada a FFSQP. No caso de o programa atingir um valor de iterações, previamente definido, e não convergir, então o programa é terminado sem a optimização ter sido

4.3 Programa final

Explicadas as duas aplicações que constituem o programa principal, resta-nos apenas analisar este último. A Figura 4.3 mostra o fluxograma que explica de uma forma simplificada o funcionamento do programa principal.

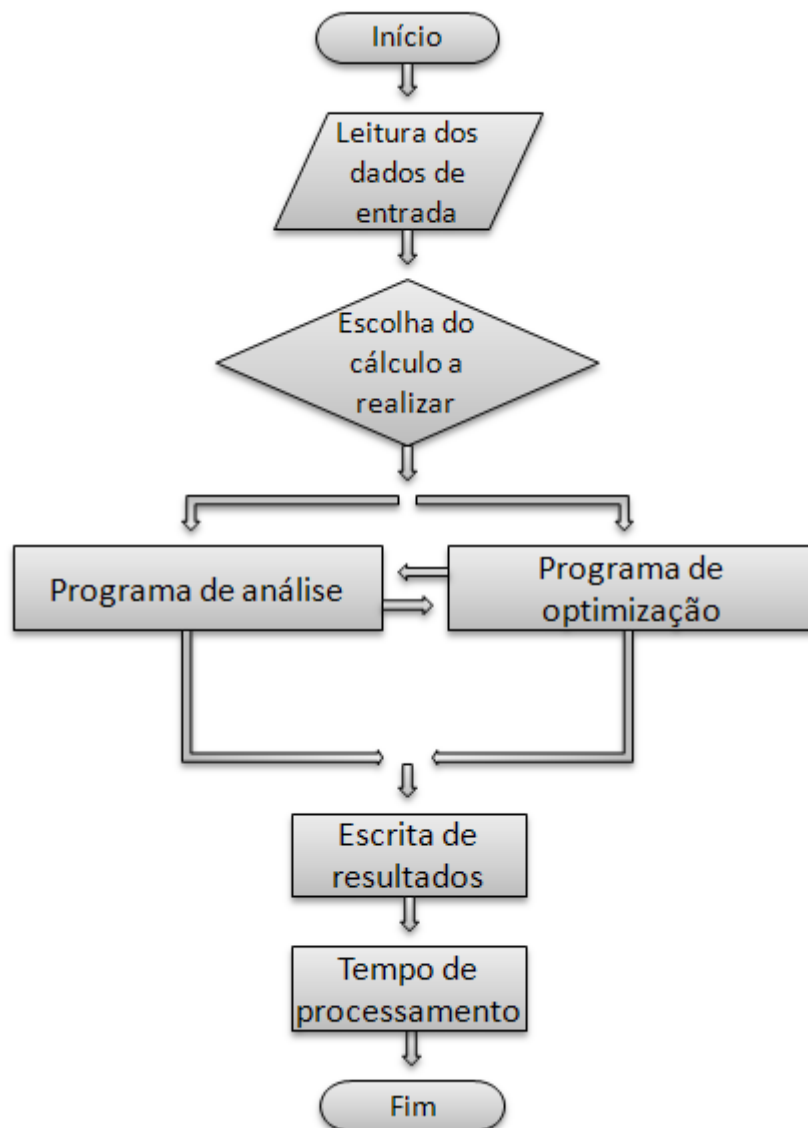
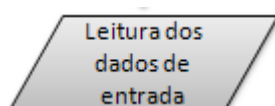
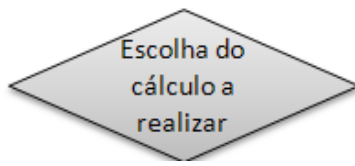


Figura 4.3 Fluxograma do programa de principal

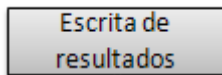
Seguem-se as explicações acerca de cada passo do programa:



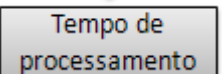
- O programa lê, dos ficheiros de texto, dados que correspondem a opções introduzidas pelo utilizador. Pode optar-se por correr o programa de optimização em simultâneo com a aplicação de análise ou pode também escolher-se correr apenas o programa de análise.



- Pode optar-se por correr o programa de optimização em simultâneo com a aplicação de análise ou pode então escolher-se correr apenas o programa de análise.



- Depois de realizados os cálculos pretendidos os resultados são escritos em ficheiros de texto. Podem depois ser carregados em programas como o TECPLOT, de forma a permitir uma melhor análise dos dados obtidos.



- Nesta sub-rotina é determinado o tempo que o computador necessitou para correr a aplicação.

5 Discussão de Resultados

Neste capítulo são analisados os resultados obtidos pelos programas de análise e otimização desenvolvidos. Faz-se, assim, a discussão dos resultados provenientes das análises de vibração, estática e da otimização.

Na análise de vibração são examinados os modos de vibração, as respectivas frequências naturais e é ainda realizado um estudo de convergência. Na análise estática analisam-se as deformações e as tensões. O carregamento utilizado consiste em duas forças de 1000N, segundo o eixo z, com sentidos opostos. A primeira força, com sentido positivo, é aplicada na ponta da asa na zona da longarina mais próxima do bordo de ataque. A segunda força, com sentido negativo, é também aplicada na ponta da asa, mas na zona da longarina mais próxima do bordo de fuga. De forma a validar o programa de análise desenvolvido, baseado no método da placa equivalente, e a demonstrar a precisão dos resultados obtidos, procedeu-se à comparação dos mesmos com aqueles provenientes do programa comercial de elementos finitos MSC NASTRAN.

Relativamente ao programa de otimização são analisados dois casos com diferentes valores de estrangimentos de tensões. Para este caso utiliza-se o mesmo carregamento que no caso da análise estática.

5.1 *Análise de Vibração*

O estudo é iniciado comparando-se os resultados das frequências naturais obtidos através dos dois métodos utilizados. Para o método da placa-equivalente variou-se o número de nós entre sete e onze, tornando possível, posteriormente, a realização de um estudo de convergência dos resultados. A Tabela 5.1 mostra os valores obtidos para a frequência.

Tabela 5.1 Valores das frequências em [rad/s] obtidos com o método da placa-equivalente para diferentes números de nós.

Modos de	Número de nós				
	7	8	9	10	11
1º modo	46,627	46,605	46,601	46,424	46,453
2º modo	193,930	193,991	194,108	193,674	193,787
3º modo	273,665	274,374	273,441	272,447	272,396
4º modo	341,937	345,197	352,285	354,464	354,716
5º modo	447,395	448,927	449,715	449,276	449,544
6º modo	704,568	710,102	722,767	726,030	726,608

Na Figura 5.1 estão representados os valores das frequências, sob forma de gráfico, de forma a possibilitar uma melhor visualização da convergência dos resultados.

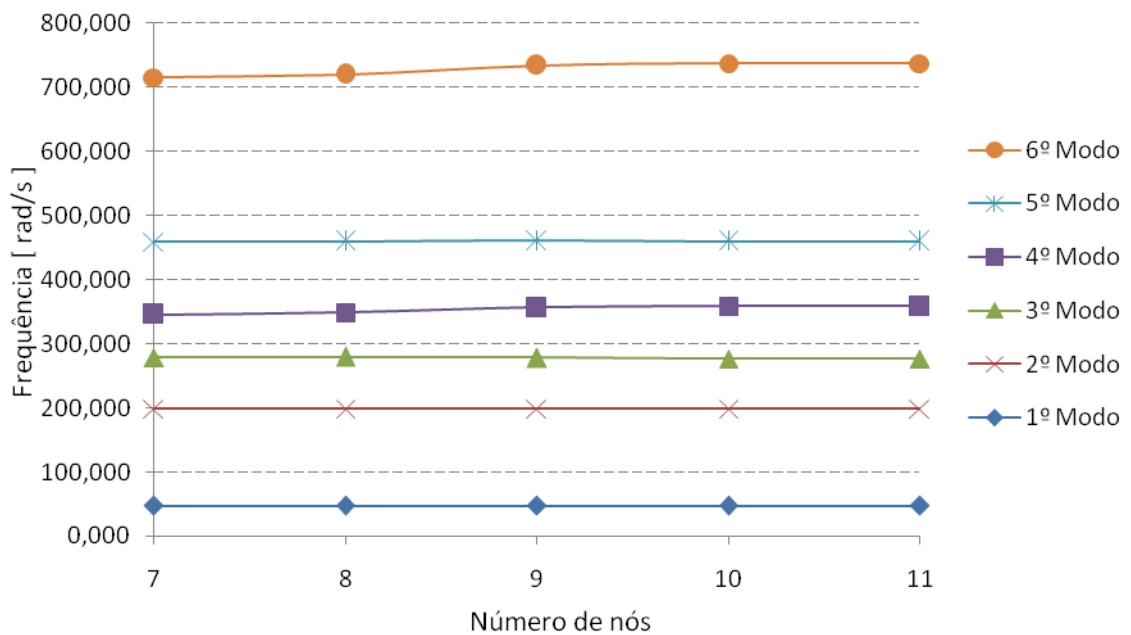


Figura 5.1 Representação gráfica das frequências em [rad/s] obtidas para o método da placa- equivalente para diferentes números de nós.

Pela Figura 5.1 podemos assumir que a estabilidade é atingida para os nove nós. São usados então nove nós, pois conseguimos, assim, uma boa razão entre precisão e tempo de processamento.

Para o caso da análise do modelo de elementos finitos procedeu-se de forma semelhante, fazendo-se variar o número de nós. Partiu-se de uma malha pouco refinada, com 4845 nós, e aumentou-se progressivamente este valor de forma a obter-se uma conclusão acerca dos dados obtidos. A Tabela 5.2 mostra os resultados das frequências.

Tabela 5.2 Valores das frequências em [rad/s] obtidos com o método dos elementos finitos para diferentes números de nós utilizados no cálculo.

Modos de	Número de nós				
	4845	12137	18941	26467	40963
1º modo	50,341	50,014	49,956	49,927	49,907
2º modo	212,918	211,045	210,731	210,574	210,474
3º modo	297,408	297,156	297,144	297,156	297,156
4º modo	383,820	383,048	382,853	382,865	382,972
5º modo	489,453	484,879	484,125	483,786	483,572
6º modo	773,962	770,821	770,130	770,130	770,067

Também para este caso se analisou a convergência dos resultados recorrendo a um gráfico, ilustrado na Figura 5.2.

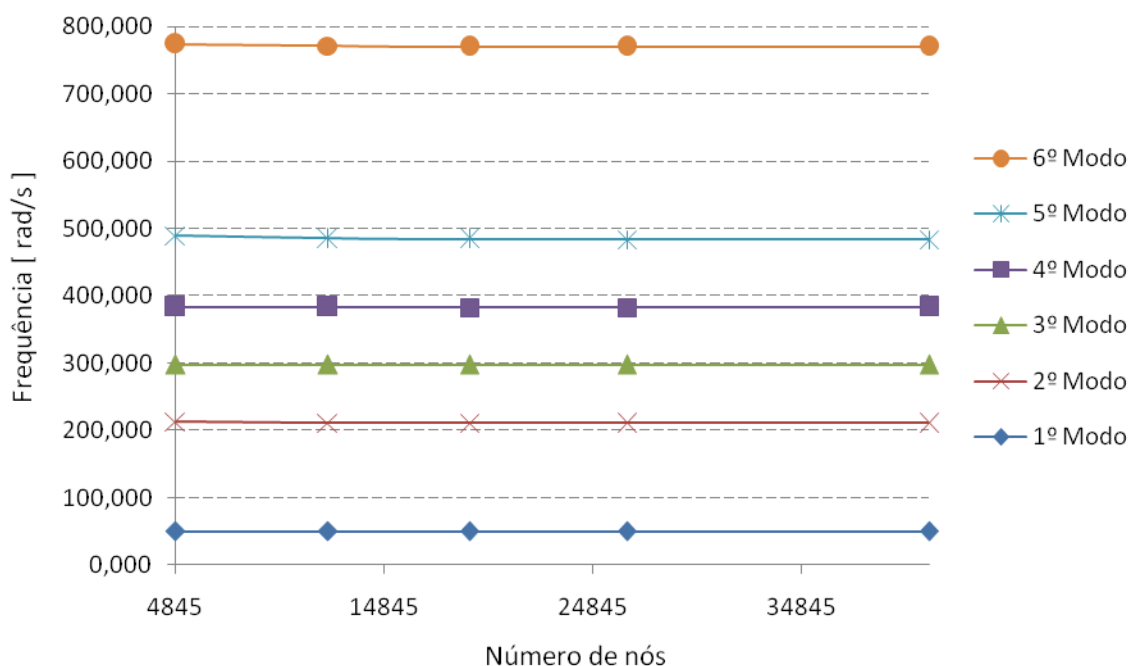


Figura 5.2 Representação gráfica das frequências em [rad/s] obtidas para o método dos elementos finitos para diferentes números de nós.

Para este caso podemos verificar que a estabilidade é atingida para os 18941 nós. Assim, nas análises seguintes, serão adoptados os nove nós, no caso do método da placa-equivalente, e 18941 nós, para o método dos elementos finitos.

Segue-se um estudo dos erros relativos entre os valores obtidos através dos dois métodos. Na Tabela 5.3 são apresentados os resultados.

Tabela 5.3 Comparação dos resultados obtidos através dos dois métodos.

Frequências naturais em rad/s		
18941 nós (elementos finitos)	9 nós (placa-equivalente)	Erro relativo em %
49,956	46,601	6,72
210,731	194,108	7,89
297,144	273,441	7,98
382,853	352,285	7,98

484,125	449,715	7,10
770,130	722,767	6,15

Podemos verificar que o erro relativo máximo, para o modelo da placa-equivalente se apresenta para o 3º e 4º modo e é de apenas cerca de 8%. Este valor é um bom resultado tendo em conta a simplicidade do método usado.

É ainda realizado um estudo relativamente ao tempo de utilização da CPU, para a obtenção dos resultados da análise de vibração com ambos os métodos. A Tabela 5.4 e a Tabela 5.5 mostram os valores alcançados.

Tabela 5.4 Tempo de utilização da CPU, para o cálculo das frequências naturais, com o método dos elementos finitos.

Diferentes casos	Tempo [min seg]
4845 nós	0min 34seg
12137 nós	1min 18seg
18941 nós	2min 13seg
26467 nós	4min 25seg
40963 nós	14min 31seg

Tabela 5.5 Tempo de utilização da CPU, para o cálculo das frequências naturais, com o método da placa-equivalente.

Diferentes casos	Tempo [min seg]
7 nós	0min 16seg
8 nós	0min 19seg
9 nós	0min 23seg
10 nós	0min 28seg
11 nós	0min 33seg

Comparando os dados anteriores pode confirma-se uma das grandes vantagens deste método da placa-equivalente, o tempo. Se para o caso mais simples, do método dos elementos finitos, o programa utiliza durante 34 segundos a unidade de processamento central, já no caso mais “pesado”, com 40963 nós, são necessários mais de 14 minutos para que este termine os cálculos. O método da placa-equivalente apenas ultrapassa o meio minuto no último caso em que se tem 11 nós.

Na comparação das formas dos modos de vibração são estudados os resultados obtidos pelo programa desenvolvido neste trabalho, com aqueles provenientes do modelo criado com o software de elementos finitos NASTRAN. A comparação é ilustrada na Figura 5.3.

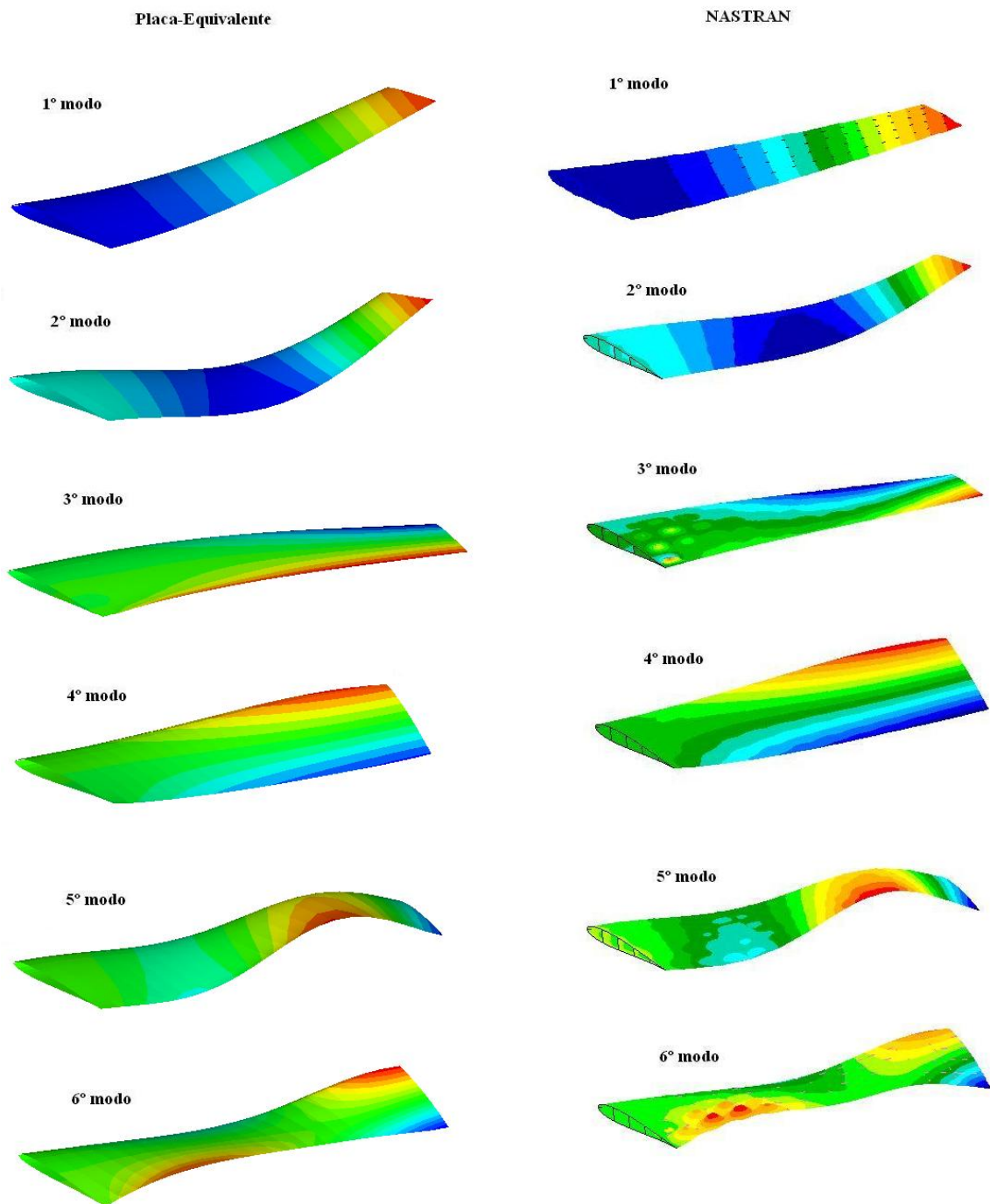


Figura 5.3 Comparação das formas dos modos de vibração entre o método da placa-equivalente e o método dos elementos finitos.

Através da comparação realizada, podemos concluir que todos os modos de vibração são muito idênticos. Podemos verificar que no 1° e 2° modo a semelhança é

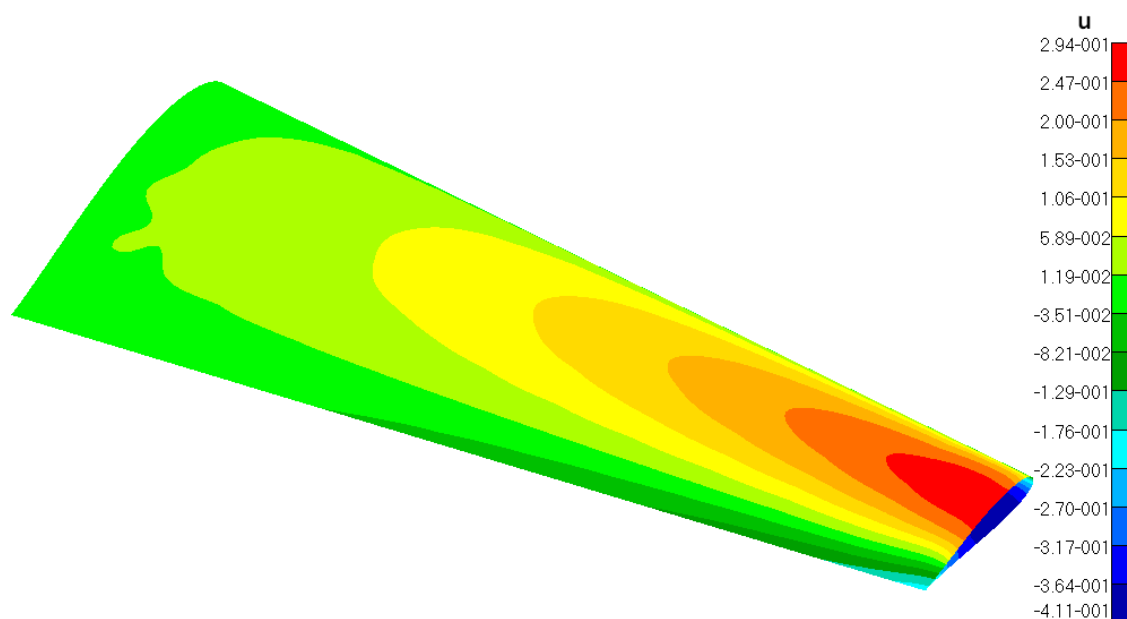
quase total, enquanto no 3º modo existe alguma discrepância entre os dois métodos. No 4º e 5º os resultados são mais uma vez extremamente semelhantes, demonstrando novamente as capacidades do método da placa-equivalente. Relativamente ao 6º modo verificam-se ligeiras diferenças entre os dois métodos junto ao bordo de fuga próximo da ponta da asa. No entanto o balanço final desta análise é bastante positivo.

5.2 *Análise de deslocamentos*

Os deslocamentos assumem, também, uma enorme importância na análise estrutural, razão pela qual são também estudados.

Na Figura 5.4, Figura 5.5 e Figura 5.6 estão representados os resultados relativos aos deslocamentos, segundo as direcções x, y e z, respectivamente. Já a Tabela 5.6, Tabela 5.7 e Tabela 5.8 apresentam os valores máximos e mínimos dos deslocamentos, segundo as mesmas direcções. A análise é feita comparando os dados provenientes dos métodos da placa-equivalente e elementos finitos.

5.2.1 *Deslocamentos segundo X*



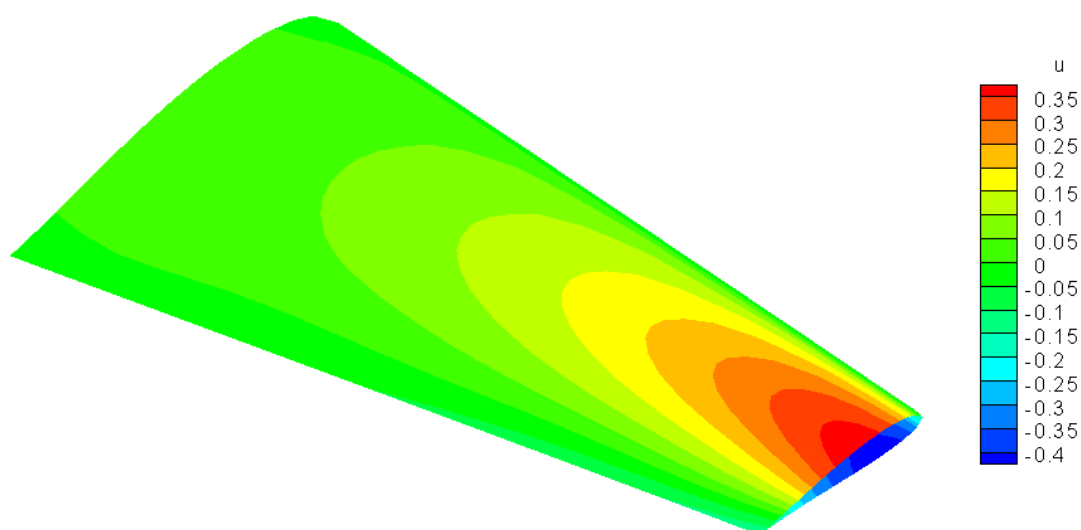


Figura 5.4 Comparação dos deslocamentos, segundo x , obtidos com os métodos dos elementos finitos (em cima) e placa-equivalente (em baixo).

Tabela 5.6 Valores máximos, mínimos e erro relativo dos deslocamentos, segundo x , obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [mm]	-0,43	-0,41	4,8
Máximo [mm]	0,38	0,30	26

Podemos verificar que a distribuição dos deslocamentos é praticamente igual em ambos os casos. Relativamente aos valores numéricos, estes são da mesma ordem de grandeza. O erro relativo para o valor mínimo é de apenas 5% enquanto que para o máximo atinge um valor de 26%. Em resumo pode-se concluir que os resultados são muito satisfatórios.

5.2.2 Deslocamentos segundo Y

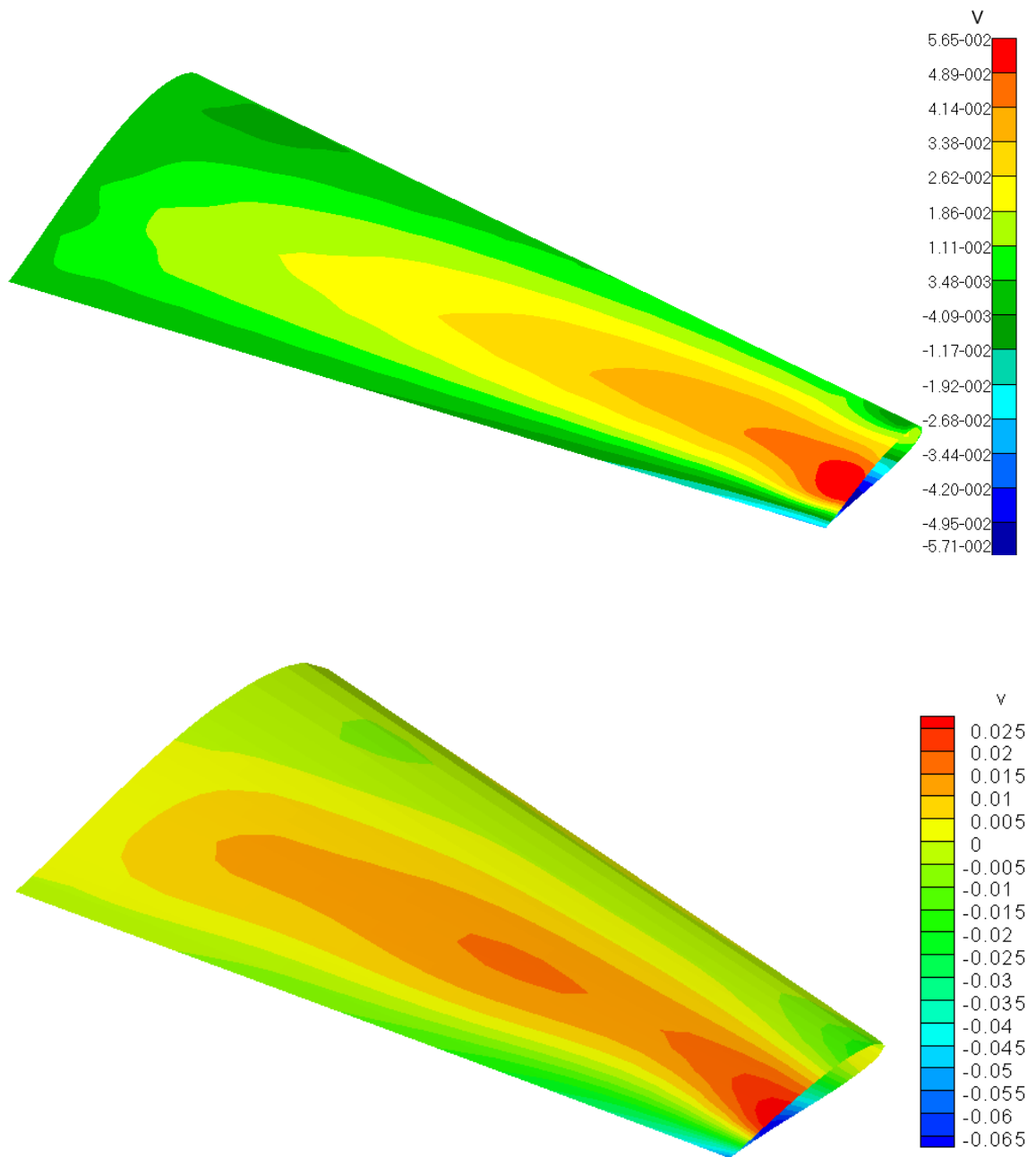


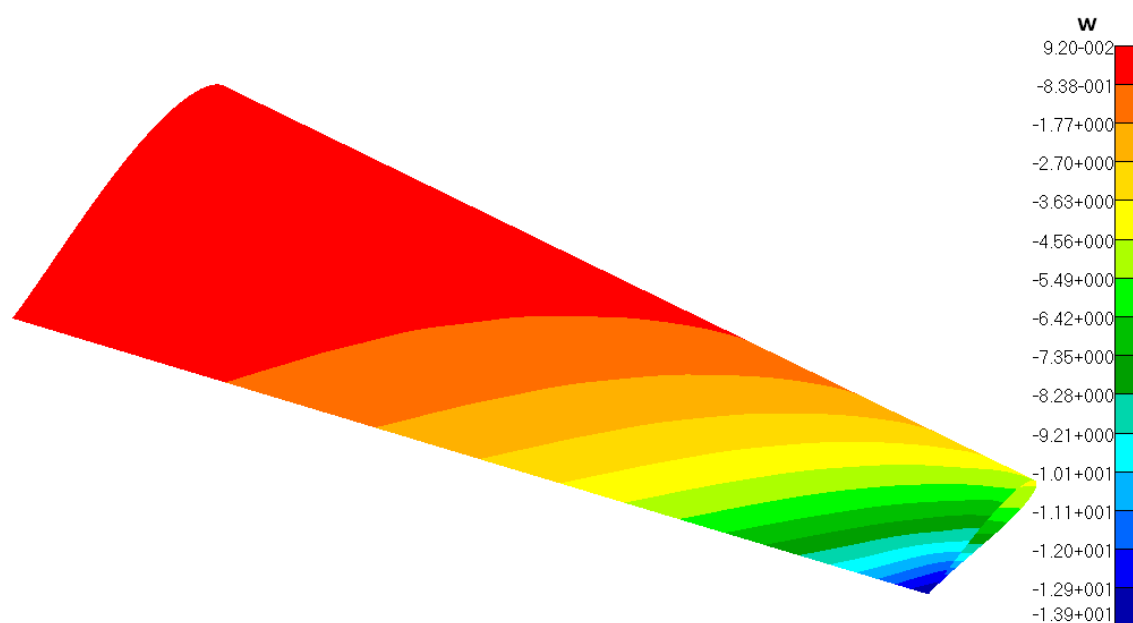
Figura 5.5 Comparação dos deslocamentos, segundo y, obtidos com os métodos dos elementos finitos (em cima) e placa-equivalente (em baixo).

Tabela 5.7 Valores máximos, mínimos e erro relativo dos deslocamentos, segundo y , obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [mm]	-0,069	-0,057	21
Máximo [mm]	0,031	0,056	44

A distribuição dos deslocamentos é, mais uma vez, extremamente semelhante em ambas as situações. Os valores numéricos são também da mesma ordem de grandeza. Já o erro relativo para o valor mínimo é de apenas 21% e para o máximo atinge um valor de 44%. Apesar dos erros serem maiores do que no caso anterior, pode-se concluir que os resultados são satisfatórios.

5.2.3 Deslocamentos segundo Z



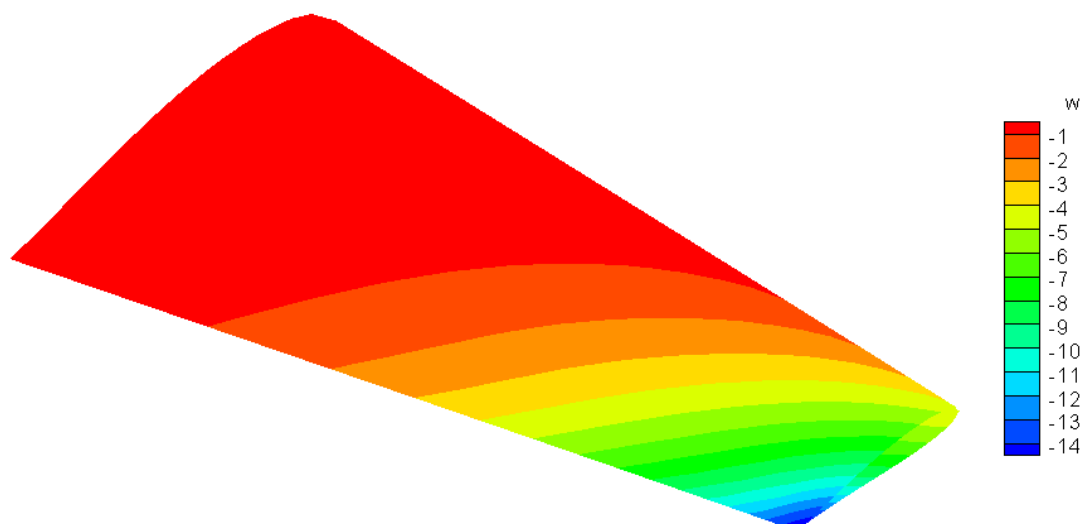


Figura 5.6 Comparação dos deslocamentos, segundo z , obtidos com os métodos dos elementos finitos (em cima) e placa-equivalente (em baixo).

Tabela 5.8 Valores máximos, mínimos e erro relativo dos deslocamentos, segundo z , obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [mm]	-15,0	-13,9	7,9
Máximo [mm]	0,160	0,092	73

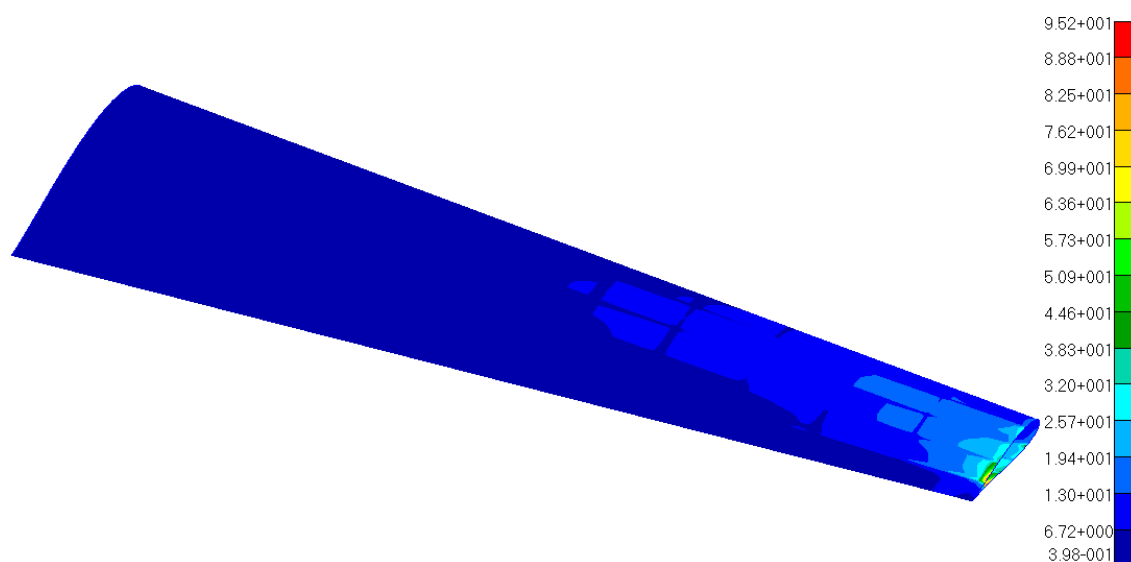
Através da observação da Figura 5.6 podemos assumir que a distribuição é, mais uma vez, praticamente igual em ambos os casos. Os valores numéricos continuam a ser da mesma ordem de grandeza. O erro relativo para o valor mínimo é de apenas 8%, sendo este valor de extrema importância por se tratar do erro da deformada na ponta da asa. Já o máximo atinge um valor de 73%, permanecendo ainda assim próximo de zero, como seria de esperar. Apesar deste último erro ser maior do que todos os outros, os resultados são de uma forma geral muito satisfatórios.

5.3 *Análise de tensões*

Neste subcapítulo são analisados os resultados das tensões de *von Mises* obtidas pelo programa numérico desenvolvido neste trabalho para os diferentes elementos que constituem a asa. Mais uma vez a validação dos mesmos é efectuada com o recurso aos dados provenientes do modelo de elementos finitos do software comercial NASTRAN.

5.3.1 *Revestimento*

A Figura 5.7 mostra a distribuição, ao longo do revestimento, das tensões de *von Mises*.



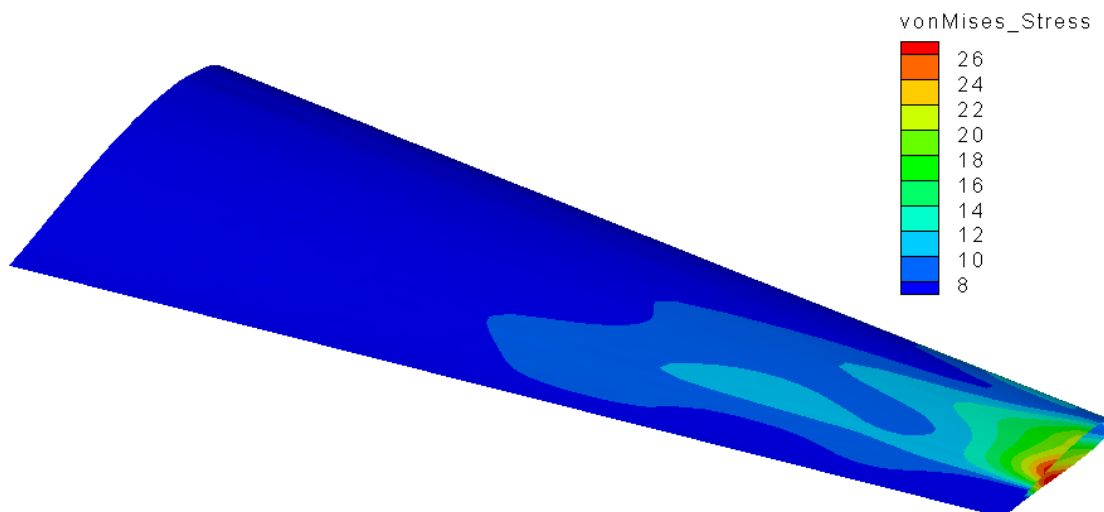


Figura 5.7 Distribuição, ao longo do revestimento, das tensões de *von Mises*. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.

Tabela 5.9 Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de *von Mises*, ao longo do revestimento, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [MPa]	0,45	0,40	13
Máximo [MPa]	28,22	95,20	70

Através da análise da Figura 5.7 pode afirmar-se que a distribuição das tensões do método da placa-equivalente se assemelha muito com os resultados dos elementos finitos. Apesar da semelhança não ser total o método da placa-equivalente prevê as zonas críticas. Já no que diz respeito aos valores numéricos, estes são da mesma ordem de grandeza, no entanto, os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos são muito superiores. Tal poderá dever-se ao facto dos modelos contínuos, como o da placa-equivalente, não serem capazes de fornecer valores muito precisos nas zonas onde os gradientes de tensão são elevados.

5.3.2 Longarinas

Os resultados das tensões de *von Mises*, ao longo das almas das longarinas, são ilustrados na Figura 5.8.

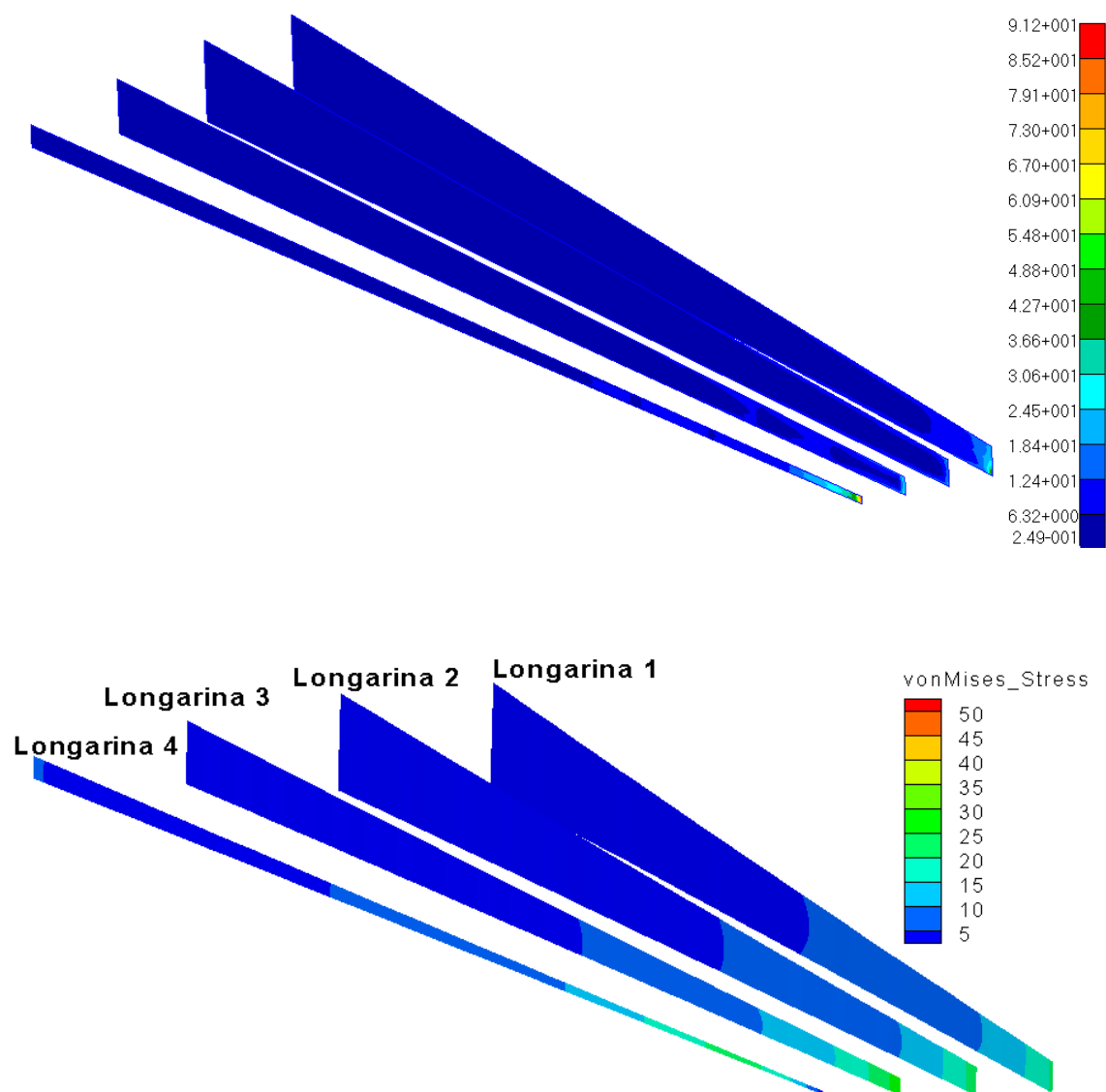


Figura 5.8 Distribuição das tensões de von Mises nas almas das longarinas. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.

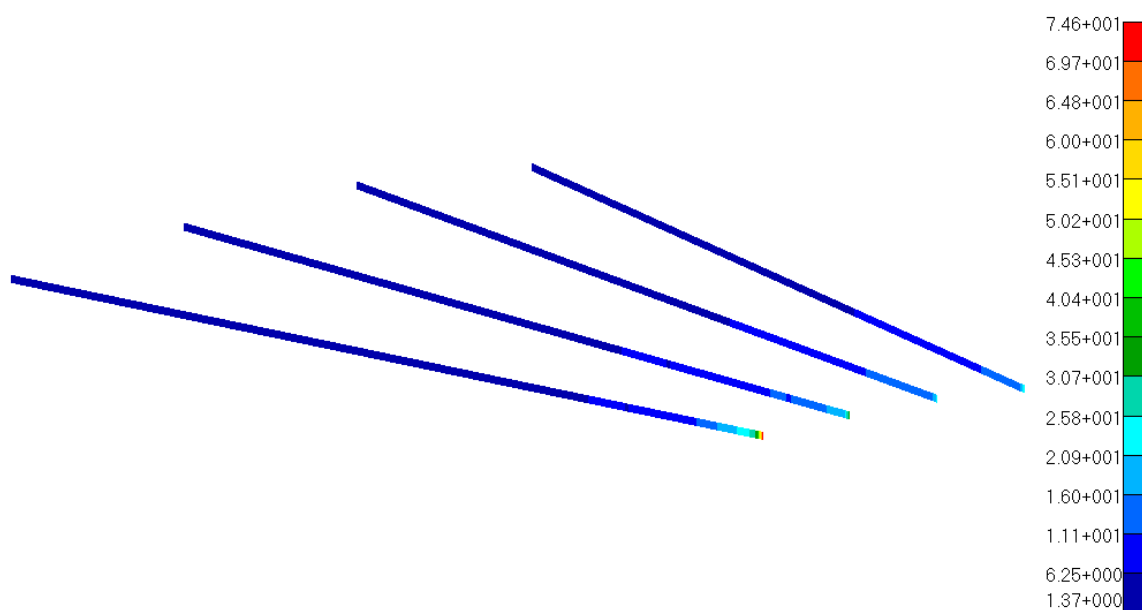
Tabela 5.10 Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de *von Mises*, ao longo das almas das longarinas, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [MPa]	0,08	0,25	68
Máximo [MPa]	28,20	91,20	69

A Figura 5.8 permite verificar que a distribuição das tensões provenientes do método da placa-equivalente é muito idêntica aos resultados dos elementos finitos para as longarinas 1, 2 e 3. No caso da longarina 4 o método da placa-equivalente não consegue prever de uma forma correcta o aumento das tensões na ponta do componente.

Relativamente aos valores numéricos, estes continuam a ser da mesma ordem de grandeza, no entanto, os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos são muito superiores. Como referido no caso anterior, a razão poderá dever-se à incapacidade dos modelos contínuos, em fornecer valores muito precisos nas zonas onde os gradientes de tensão são elevados.

A Figura 5.9 mostra os resultados das tensões de *von Mises*, ao longo dos banzos superiores das longarinas.



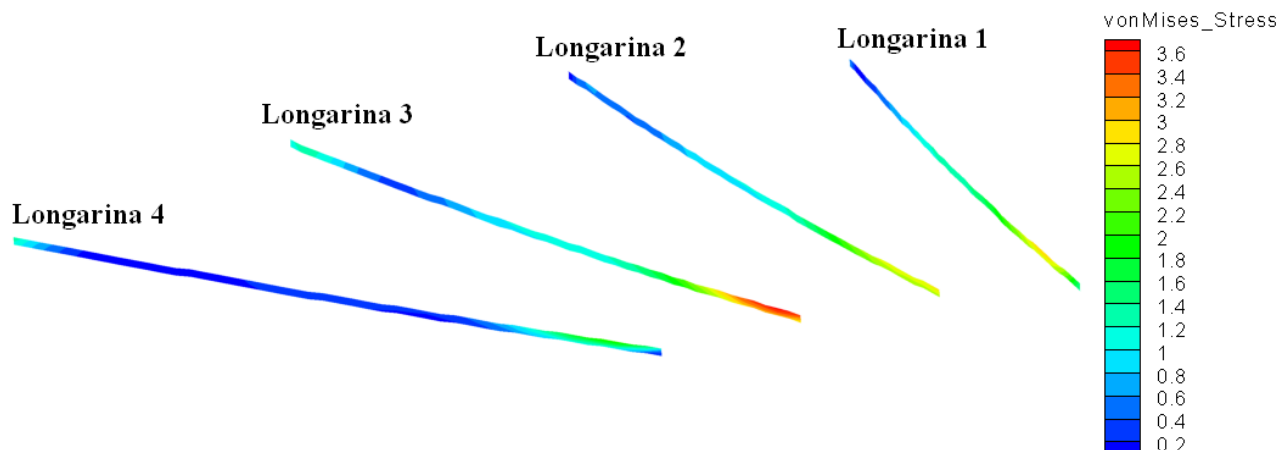


Figura 5.9 Distribuição das tensões de *von Mises* nos banzos superiores das longarinas. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.

Tabela 5.11 Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de *von Mises*, ao longo dos banzos superiores das longarinas, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [MPa]	0,00	1,37	100
Máximo [MPa]	3,7	74,6	95

A Figura 5.9 mostra alguma semelhança na distribuição das tensões de ambos os casos. Apesar de a igualdade não ser total, o método da placa-equivalente permite demonstrar um aumento das tensões junto à ponta dos banzos das longarinas 1, 2 e 3. Na longarina 4 os resultados não são tão satisfatórios. Pela análise da Tabela 5.11 verifica-se que os valores extremos atingem erros elevadíssimos, o que indica que para este caso o método da placa-equivalente não fornece dados aceitáveis.

A análise das tensões de *von Mises*, ao longo dos banzos inferiores das longarinas é mostrada na Figura 5.9.

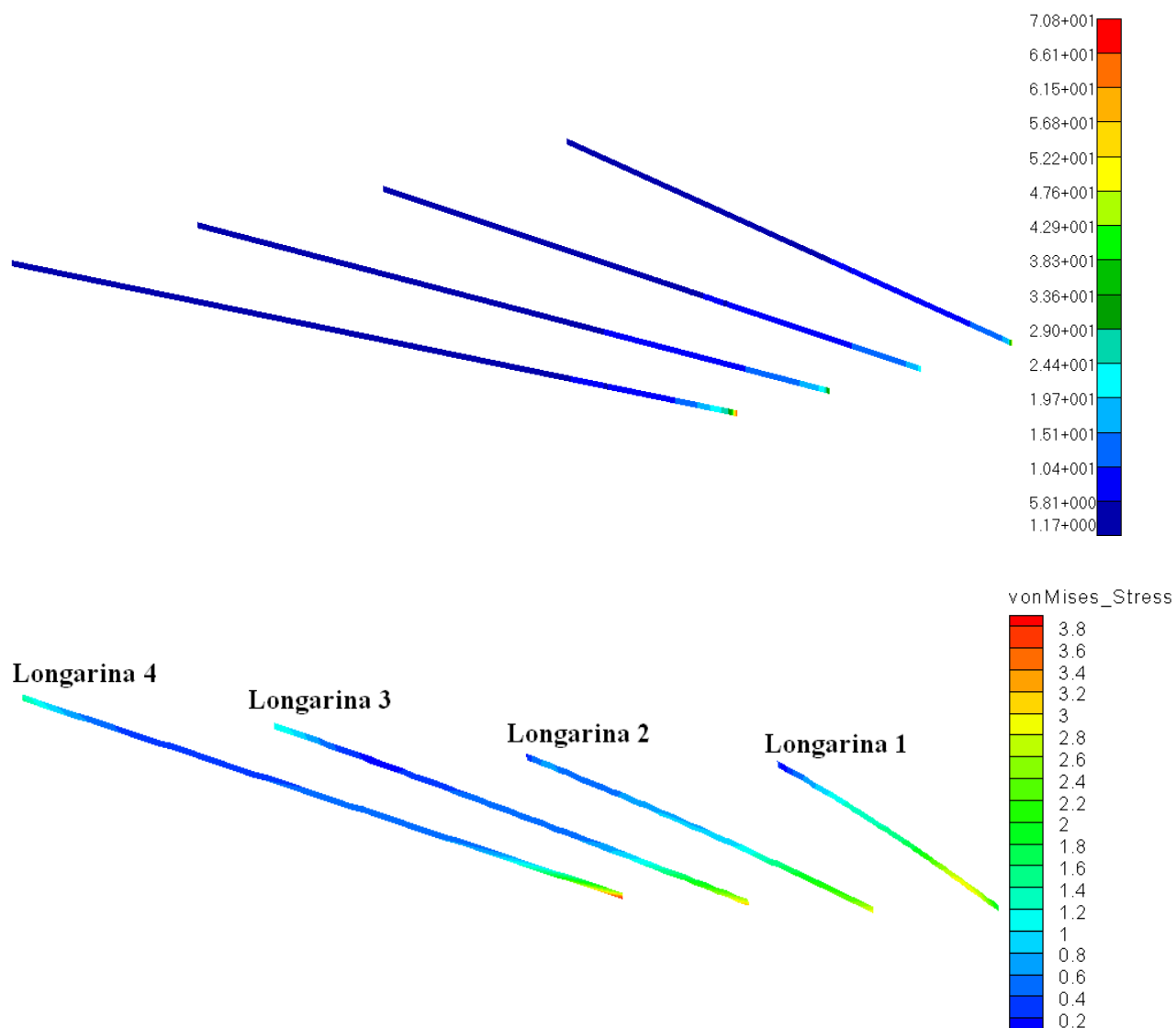


Figura 5.10 Distribuição das tensões de von Mises nos banzos inferiores das longarinas. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.

Tabela 5.12 Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de *von Mises*, ao longo dos banzos inferiores das longarinas, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [MPa]	0,03	1,17	97
Máximo [MPa]	3,93	70,8	94

Apesar de neste caso a distribuição poder ser considerada aceitável, os erros relativos são muito elevados, como é possível observar na Tabela 5.12.

5.3.3 Nervuras

Os resultados das tensões de *von Mises*, ao longo das almas das nervuras, são exibidos na Figura 5.11.

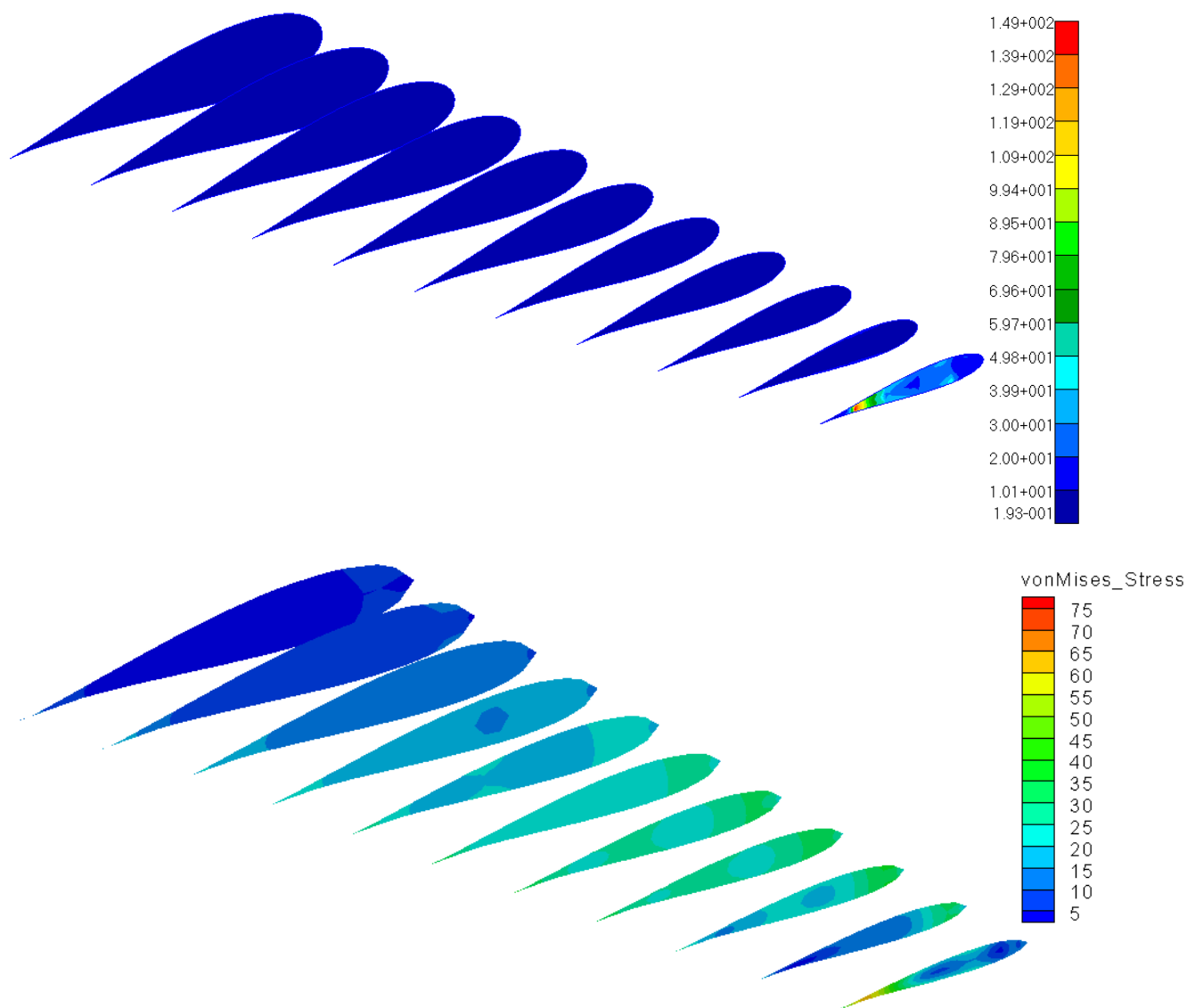


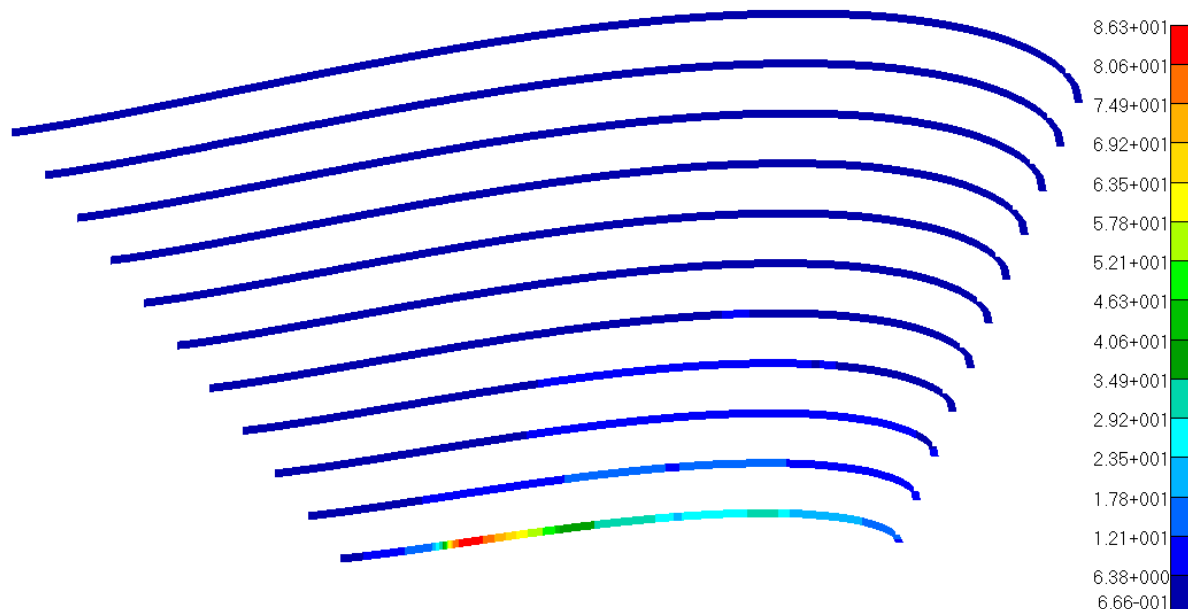
Figura 5.11 Distribuição das tensões de *von Mises* nas almas das nervuras. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.

Tabela 5.13 Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de *von Mises*, ao longo das almas das longarinas, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [MPa]	1,12	0,19	489
Máximo [MPa]	77,70	149	48

A Figura 5.11 exibe uma boa coincidência, na previsão das zonas críticas, entre os dois métodos. Já nos valores máximos e mínimos podemos concluir, pela Tabela 5.13, que, apesar destes serem da mesma ordem de grandeza, o método da placa-equivalente não atinge valores muito satisfatórios.

Na Figura 5.12 são ilustrados os resultados das tensões de *von Mises*, ao longo dos banzos superiores das nervuras.



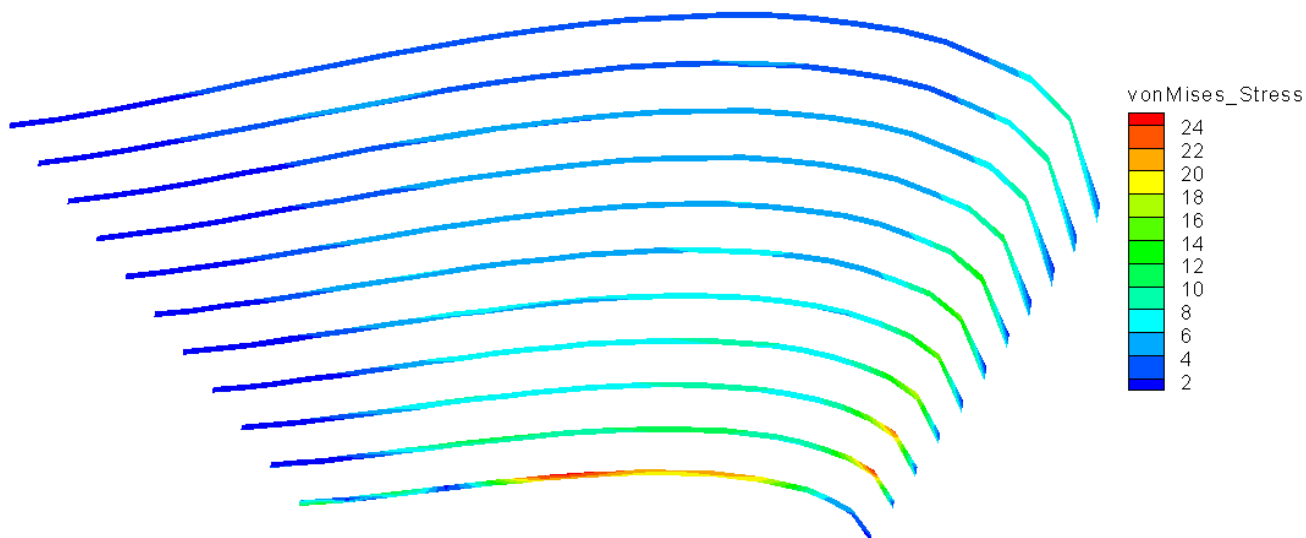


Figura 5.12 Distribuição das tensões de *von Mises* nos banzos superiores das nervuras. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.

Tabela 5.14 Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de *von Mises*, ao longo dos banzos superiores das nervuras, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [MPa]	0,00	0,66	100
Máximo [MPa]	25,45	86,3	71

Pela observação da Figura 5.12 conclui-se que o método da placa equivalente prevê, de uma forma que se pode considerar aceitável, a nervura, e a zona desta, onde se verificam as tensões mais elevadas. Os resultados numéricos, da Tabela 5.14 demonstram que os valores provenientes dos dois métodos são da mesma ordem de grandeza, no entanto o erro para as tensões extremas é bastante elevado.

Os resultados das tensões de *von Mises*, ao longo dos banzos inferiores das nervuras, apresentam-se na Figura 5.13.

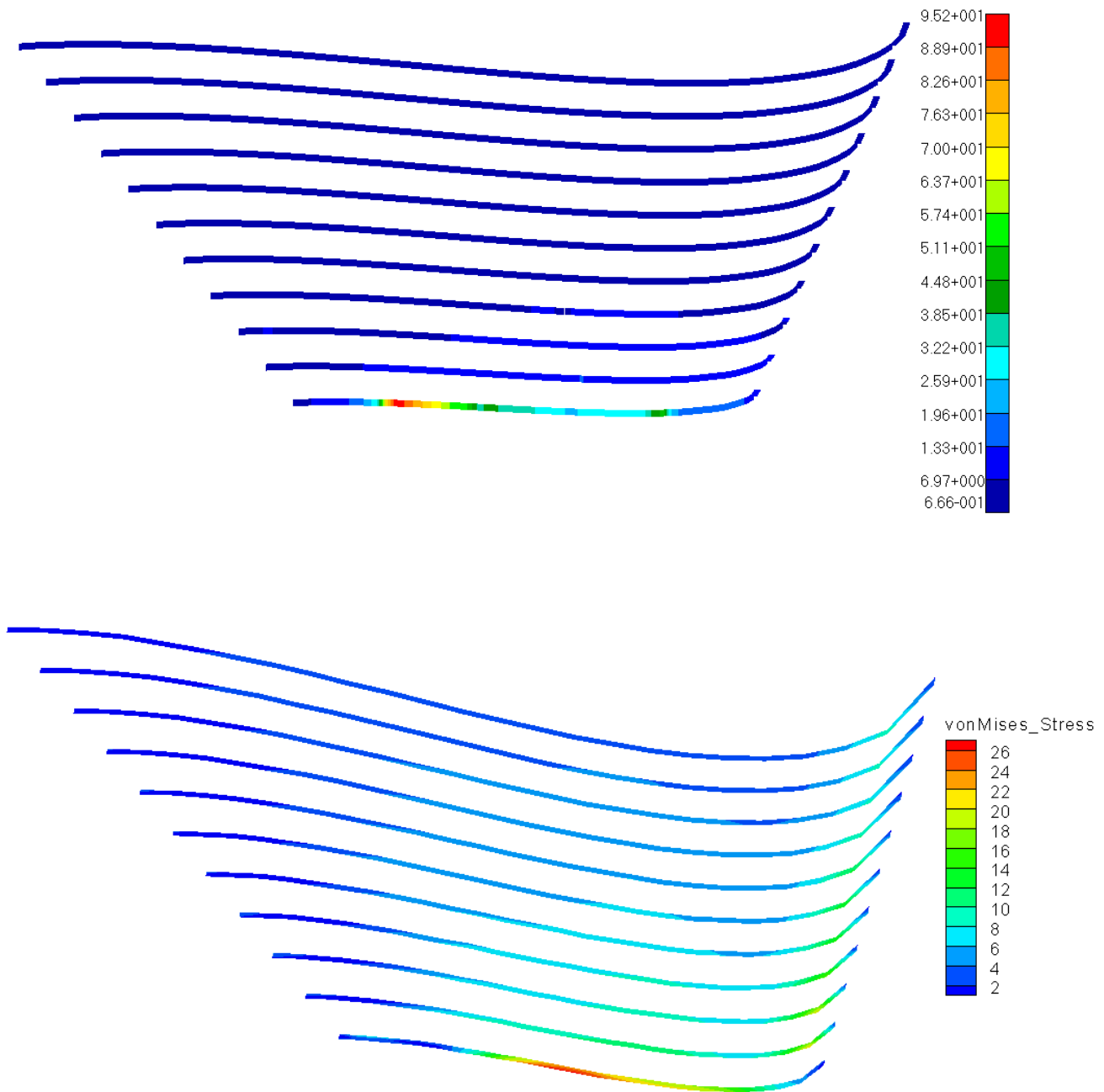


Figura 5.13 Distribuição das tensões de *von Mises* nos banzos inferiores das longarinas. Em cima o resultado obtido com o método dos elementos finitos e em baixo o resultado do método da placa-equivalente.

Tabela 5.15 Valores máximos, mínimos e erro relativo para as tensões de *von Mises*, ao longo dos banzos inferiores das nervuras, obtidos com os métodos dos elementos finitos e placa-equivalente.

Valores extremos	Placa-Equivalente	Elementos Finitos	Erro Relativo [%]
Mínimo [MPa]	0,00	0,67	100
Máximo [MPa]	27,12	95,2	72

Através da Figura 5.13 verifica-se que o método da placa equivalente prevê, também aqui, a nervura e a zona desta onde se verificam as tensões mais elevadas. A Tabela 5.15 mostra que apesar dos resultados serem da mesma ordem de grandeza, o erro relativo é ainda elevadíssimo para os valores extremos das tensões, ultrapassando os 70%.

Relativamente ao estudo de tempo de utilização da CPU para o cálculo de tensões de *von Mises*, os resultados estão apresentados na Tabela 5.16 e Tabela 5.17.

Tabela 5.16 Tempo de utilização da CPU, para o cálculo das tensões de *von Mises*, com o método dos elementos finitos.

Diferentes casos	Tempo [min seg]
4845 nós	0min 17seg
12137 nós	0min 52seg
18941 nós	1min 30seg
26467 nós	4min 08seg
40963 nós	5min 30seg

Tabela 5.17 Tempo de utilização da CPU, para o cálculo das tensões de *von Mises*, com o método da placa-equivalente.

Diferentes casos	Tempo [min seg]
7 nós	0min 16seg
8 nós	0min 19seg
9 nós	0min 22seg
10 nós	0min 25seg
11 nós	0min 29seg

Mais uma vez o método da placa-equivalente revela um dos seus principais trunfos. Para o caso mais simples, do método dos elementos finitos, o programa utiliza a unidade de processamento central durante 17 segundos, já no caso mais “pesado”, com 40963 nós, são necessários 5 minutos e 30 segundos realizar todos os cálculos. O método da placa-equivalente em nenhum dos casos ultrapassa os 30 segundos.

5.4 *Optimização*

Na optimização são estudados dois casos diferentes, de forma a demonstrar o bom funcionamento do programa.

No primeiro caso os constrangimentos das tensões, para os vários tipos de componentes, são superiores aos valores de partida obtidos pelo programa de análise.

No segundo caso os constrangimentos das tensões são inferiores aos valores de partida.

5.4.1 Primeiro Caso

Os constrangimentos usados para este caso estão apresentados na Tabela 5.18.

Tabela 5.18 Constrangimentos usados no primeiro caso

Componente	Constrangimento [MPa]	Valor de Partida [MPa]	Valor Final [MPa]
Revestimento	35,00	28,22	34,58
Longarinas	35,00	28,19	35,00
Nervuras	85,00	77,70	69,42

A Tabela 5.19 mostra os resultados obtidos para esta situação.

Tabela 5.19 Resultados obtidos para a optimização do primeiro caso.

Componente	Dimensões [mm]	
	Antes da Optimização	Depois da Optimização
Espessura do revestimento superior	3,00	1,80
Espessura do revestimento inferior	3,00	1,80
Espessura da alma na longarina 1	1,47	1,20
Espessura da alma na longarina 2	1,47	1,16
Espessura da alma na longarina 3	1,47	1,16
Espessura da alma na longarina 4	1,47	1,30
Altura dos banzos na longarina 1	5,00	2,35
Altura dos banzos na longarina 2	5,00	6,59
Altura dos banzos na longarina 3	5,00	5,28
Altura dos banzos na longarina 4	5,00	8,00
Largura dos banzos na longarina 1	9,47	11,94
Largura dos banzos na longarina 2	9,47	13,80
Largura dos banzos na longarina 3	9,47	3,86
Largura dos banzos na longarina 4	9,47	3,85
Espessura da alma na nervura 1	1,47	1,16
Espessura da alma na nervura 2	1,47	1,16
Espessura da alma na nervura 3	1,47	1,16
Espessura da alma na nervura 4	1,47	1,16

Espessura da alma na nervura 5	1,47	1,18
Espessura da alma na nervura 6	1,47	2,11
Espessura da alma na nervura 7	1,47	1,16
Espessura da alma na nervura 8	1,47	1,16
Espessura da alma na nervura 9	1,47	1,16
Espessura da alma na nervura 10	1,47	2,10
Espessura da alma na nervura 11	1,47	5,73
Altura dos banzos na nervura 1	5,00	2,35
Altura dos banzos na nervura 2	5,00	2,35
Altura dos banzos na nervura 3	5,00	2,35
Altura dos banzos na nervura 4	5,00	2,35
Altura dos banzos na nervura 5	5,00	2,35
Altura dos banzos na nervura 6	5,00	2,35
Altura dos banzos na nervura 7	5,00	6,52
Altura dos banzos na nervura 8	5,00	7,70
Altura dos banzos na nervura 9	5,00	7,70
Altura dos banzos na nervura 10	5,00	2,35
Altura dos banzos na nervura 11	5,00	4,63
Largura dos banzos na nervura 1	9,47	3,85
Largura dos banzos na nervura 2	9,47	3,85
Largura dos banzos na nervura 3	9,47	3,85
Largura dos banzos na nervura 4	9,47	3,85
Largura dos banzos na nervura 5	9,47	3,85
Largura dos banzos na nervura 6	9,47	3,85
Largura dos banzos na nervura 7	9,47	14,84
Largura dos banzos na nervura 8	9,47	14,84
Largura dos banzos na nervura 9	9,47	12,26
Largura dos banzos na nervura 10	9,47	3,85
Largura dos banzos na nervura 11	9,47	29,33
Massa da asa [kg]	131,589	83,697

Como seria de esperar, a massa da asa depois da optimização é inferior à massa inicial. Tal deve-se ao facto de os constrangimentos das tensões serem superiores às tensões de partida. Isto leva a que os componentes, depois da optimização, possam ter dimensões mais reduzidas, diminuindo, desta forma, a sua massa.

5.4.2 Segundo Caso

Para o segundo caso em estudo são usados os constrangimentos da Tabela 5.20.

Tabela 5.20 Constringimentos usados no segundo caso.

Componente	Constringimento [MPa]	Valor de Partida [MPa]	Valor Final [MPa]
Revestimento	20,00	28,22	20,00
Longarinas	20,00	28,19	19,94
Nervuras	70,00	77,70	64,32

Na Tabela 5.21 são apresentados os resultados para esta situação.

Tabela 5.21 Resultados obtidos para a otimização do segundo caso.

Componente	Dimensões [mm]	
	Antes da Otimização	Depois da Otimização
Espessura do revestimento superior	3,00	2,83
Espessura do revestimento inferior	3,00	2,83
Espessura da alma na longarina 1	1,47	3,49
Espessura da alma na longarina 2	1,47	3,49
Espessura da alma na longarina 3	1,47	1,01
Espessura da alma na longarina 4	1,47	2,19
Altura dos banzos na longarina 1	5,00	1,84
Altura dos banzos na longarina 2	5,00	6,53
Altura dos banzos na longarina 3	5,00	8,66
Altura dos banzos na longarina 4	5,00	7,53
Largura dos banzos na longarina 1	9,47	12,15
Largura dos banzos na longarina 2	9,47	12,59
Largura dos banzos na longarina 3	9,47	12,27
Largura dos banzos na longarina 4	9,47	10,37
Espessura da alma na nervura 1	1,47	2,44
Espessura da alma na nervura 2	1,47	3,16
Espessura da alma na nervura 3	1,47	3,49
Espessura da alma na nervura 4	1,47	2,89
Espessura da alma na nervura 5	1,47	2,80
Espessura da alma na nervura 6	1,47	3,16
Espessura da alma na nervura 7	1,47	3,37
Espessura da alma na nervura 8	1,47	1,00
Espessura da alma na nervura 9	1,47	1,00
Espessura da alma na nervura 10	1,47	4,80
Espessura da alma na nervura 11	1,47	10,00
Altura dos banzos na nervura 1	5,00	10,03
Altura dos banzos na nervura 2	5,00	1,06

Altura dos banzos na nervura 3	5,00	5,56
Altura dos banzos na nervura 4	5,00	5,50
Altura dos banzos na nervura 5	5,00	5,50
Altura dos banzos na nervura 6	5,00	7,68
Altura dos banzos na nervura 7	5,00	13,31
Altura dos banzos na nervura 8	5,00	12,45
Altura dos banzos na nervura 9	5,00	19,97
Altura dos banzos na nervura 10	5,00	10,72
Altura dos banzos na nervura 11	5,00	9,28
Largura dos banzos na nervura 1	9,47	2,54
Largura dos banzos na nervura 2	9,47	10,37
Largura dos banzos na nervura 3	9,47	10,37
Largura dos banzos na nervura 4	9,47	10,31
Largura dos banzos na nervura 5	9,47	8,82
Largura dos banzos na nervura 6	9,47	8,82
Largura dos banzos na nervura 7	9,47	13,67
Largura dos banzos na nervura 8	9,47	10,37
Largura dos banzos na nervura 9	9,47	1,00
Largura dos banzos na nervura 10	9,47	1,00
Largura dos banzos na nervura 11	9,47	4,00
Massa da asa [kg]	131,589	142,376

Para este caso, como seria de prever, a massa da asa depois de feita a optimização é superior à massa original. A justificação reside no facto de os constrangimentos das tensões serem inferiores às tensões iniciais. Isto leva a que as dimensões dos componentes tenham que ser aumentadas para respeitar as restrições, o que conduz a uma subida da massa final.

Para o primeiro caso a aplicação necessitou de 31 horas para realizar a optimização, enquanto que para o segundo caso foram necessárias 27 horas. Analisando os resultados destes dois casos estudados pode-se então concluir que o programa funciona correctamente.

6 Conclusões e Recomendações

6.1 Conclusões

Foi desenvolvido um programa numérico capaz de realizar análises estáticas, de vibração e ainda optimização estrutural. Os dados fornecidos pelo método da placa-equivalente foram comparados com os do método dos elementos finitos.

Os testes de análise de vibração e estático demonstraram que os resultados do método da placa equivalente estavam, geralmente, de acordo com aqueles provenientes do método dos elementos finitos. As frequências naturais atingiram um erro máximo de apenas 8% e demonstraram que o modelo da placa-equivalente é menos rígido que aquele baseado nos elementos finitos. Quanto às formas dos modos de vibração os dados obtidos são animadores provando as potencialidades deste método. O estudo de tempo de utilização da CPU para a análise de vibração revela que este método ultrapassa os 30 segundos apenas no caso em que temos 11 nós, chegando aos 38 segundos. O método dos elementos finitos pode chegar aos 14 minutos e 31 segundos quando se trata do caso com mais nós.

Se na previsão dos valores das tensões os resultados alcançados não foram muito positivos, com erros bastante elevados, no caso de detecção de zonas críticas de tensões, os resultados foram bastante aceitáveis. Também aqui o tempo de utilização da CPU foi extremamente baixo nunca chegando a ultrapassar os 30 segundos enquanto que para o método dos elementos finitos o tempo gasto pode chegar aos 5 minutos e 30 segundos, para o caso em que se tem 40963 nós.

Relativamente à optimização, foram estudados dois casos diferentes cuja diversidade residia nos valores dos constrangimentos. Os dados obtidos estavam de acordo com o esperado e demonstraram o bom funcionamento do programa.

6.2 Recomendações para trabalhos futuros

O programa numérico criado neste trabalho pode ser continuado de forma a que outras capacidades sejam adicionadas à aplicação, tornando-a mais poderosa.

Dentro dessas capacidades a incluir temos:

- A aptidão do programa para realizar, também, análises dinâmicas.
- A inclusão de equações constitutivas de materiais ortotrópicos para análise de asas em compósito.
- A ligação desta aplicação a um programa de análise aerodinâmica de forma a criar um software de análise aeroelástica.

Estes três exemplos, descritos anteriormente, irão aumentar as potencialidades do programa, tornando esta ferramenta computacional num utensílio de enorme e inquestionável utilidade.

Bibliografia

- [1] Gern, F. H., Inman, D. J., e Kapania, R. K., “*Structural and Aeroelastic Modeling of General Planform Wings with Morphing Airfoils*”, AIAA Journal vol.40, No.4, April 2002, pp.628-637.
- [2] Kapania, R.K., e Liu, Y., “*Static and Vibration Analysis of General Wing Structures Using Equivalent-Plate Models*”, AIAA Journal vol.38, No.7, July 2000, pp.1269-1277.
- [3] Giles, Gary L., “*Equivalent Plate Analysis of Aircraft Wing Box Structures with General Planform Geometry*”, Journal of Aircraft vol.23, No.11, November 1986, pp.859-864.
- [4] Giles, Gary L., “*Further Generalization of an Equivalent Plate Representation for Aircraft Structural Analysis*”, Journal of Aircraft vol.26, No.1, January 1989, pp.67-74.
- [5] Livne, Eli, “*Equivalent Plate Structural Modeling for Wing Shape Optimization Including Transverse Shear*”, AIAA Journal vol.32, No.6, June 1994, pp.1278-1288.
- [6] Livne, E., e Navarro, I., “*Nonlinear Equivalent Plate Modeling of Wing-Box Structures*”, Journal of Aircraft vol.36, No.5, September-October 1999, pp.851-865.
- [7] Gamboa, P. V., “*Design of Morphing Airfoils for Improved Aeroelastic Control*”, VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade de Évora, Évora, 16 Abril, 2003.
- [8] Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., e Halfman, R. L., “*Aeroelasticity*”, Dover, New York, 1996.
- [9] Ugural, Ansel C., “*Stresses in Plates and Shells*”, 2ª Edição, McGraw-Hill, New York, 1999.

-
- [10] Timoshenko, S, e Woinowsky-Krieger, S “*Theory of Plates and Shells*”, 2ª Edição, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [11] Huang, Hou-Cheng, “*Static and Dynamics Analysis of Plates and Shells*”, 1ª Edição, Springer-Verlag, 1989.
- [12] Pina, Heitor, “*Métodos Numéricos*”, McGraw-Hill, Lisboa, 1995.
- [13] Carnahan, Brice, Luther, H.A. e Wilkes, James O., “*Applied Numerical Methods*”, Wiley, New York, 1969.
- [14] Kamat, Manohar P., “*Structural Optimization: Status and Promise*”, AIAA, Washington, 1993.
- [15] Beer, F. P., Johnston Jr., E. Russell, e DeWolf, J. T., “*Mecânica dos Materiais*”, 3ª Edição, McGraw-Hill, Lisboa, 2003.
- [16] Liu, Y., “*Efficient Methods for Structural Analysis of Build-up Wings*”, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, April 2000.
- [17] Zhou, J. L., Tits, A. L, and Lawrence, C. T., “*User’s Guide for FFSQP Version 3.7 – A FORTRAN Code for Solving Constrained Nonlinear (Minimax) Optimization Problems, Generating Iterates Satisfying All Inequality and Linear Constraints*”, Electrical Engineering Department and Institute for Systems Research, University of Maryland.
- [18] Donaldson, Bruce K., “*Anaysis of Aircraft Structures*”, 2ª Edição, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [19] Gabriel, Rui, “*Development of Equivalent Plate Models for Aircraft Wing Structures*”, Instituto Superior Técnico, October 2007.
- [20] Houaiss, Antônio e Villar, Mauro Salles, “*Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*”, elaborado no Instituto Antônio Houaiss de Lexiografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa S/C Ltda., Rio de Janeiro, Círculo de Leitores, Lisboa, 2002.

Anexo

Construção das Matrizes Constitutivas

A. Rotação em torno do eixo y

Pela Lei de Hooke sabemos que:

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad \text{Eq.A.1}$$

Para obtermos as tensões globais fazemos

$$\{\sigma^*\} = [R(\theta)] \cdot \{\sigma\} \quad \text{Eq.A.2}$$

e para as extensões globais

$$\{\varepsilon^*\} = [r(\theta)] \cdot \{\varepsilon\} \quad \text{Eq.A.3}$$

ou

$$\{\varepsilon\} = [r(-\theta)] \cdot \{\varepsilon^*\} \quad \text{Eq.A.4}$$

em que $[R(\theta)]$ e $[r(\theta)]$ são as matrizes de rotação para as tensões e extensões, respectivamente [18].

As relações entre as matrizes de rotação, $[R(\theta)]$ e $[r(\theta)]$, são demonstradas nas Eq.A.5 e Eq.A.6

$$[R(\theta)] = [r(-\theta)]^T \quad \text{Eq.A.5}$$

$$[r(\theta)] = [R(-\theta)]^T \quad \text{Eq.A.6}$$

Substituindo a Eq.A.5 na Eq.A.4, a Eq.A.4 em Eq.A.1, e a Eq.A.1 na Eq.A.2, obtém-se:

$$\{\sigma^*\} = [R(\theta)] \cdot [D] \cdot [R(\theta)]^T \cdot \{\varepsilon^*\} \quad \text{Eq. A.7}$$

A matriz constitutiva final é, então, dada por:

$$[D^*] = [R(\theta)] \cdot [D] \cdot [R(\theta)]^T \quad \text{Eq. A.8}$$

em que:

$$[R(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

sendo α o ângulo entre a tangente, em cada ponto, ao revestimento, e o eixo x.

Para o revestimento a matriz $[D]$ é dada por:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B. Rotação em torno do eixo z

Para a rotação em torno do eixo z o procedimento é igual ao utilizado anteriormente. Neste caso a matriz $[R(\theta)]$ é igual a:

$$[R(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

em que θ é o ângulo entre a longarina e o eixo y ou o ângulo entre a nervura e o eixo x .

Para as almas das longarinas a matriz $[D]$ é dada por:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e para as almas das nervuras a matriz $[D]$ é igual a:

$$[D] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

Já para os banzos das longarinas a matriz $[D]$ é dada por:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e no caso dos banzos das nervuras, $[D]$ fica:

$$[D] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$