



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Engenharia

Modelo Modificado de Treliça Espacial com Ângulo Variável

Avaliação da Lei constitutiva do Betão à Tração para a Fissuração de Vigas de Betão Armado sujeitas à Torção

Stéphanie dos Santos Nobre

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Civil

(Ciclo de Estudos Integrado)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo

Covilhã, junho de 2014

Agradecimentos

A realização desta Dissertação só foi possível graças à colaboração e ao contributo, de forma direta ou indireta, de várias pessoas, às quais gostaria de manifestar algumas palavras de agradecimento e reconhecimento, nomeadamente:

Ao Professor Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, orientador desta dissertação, queria agradecer a sua colaboração, partilha de saberes e as valiosas contribuições para o trabalho. A sua colaboração foi essencial para a realização desta dissertação, auxiliando o meu progresso profissional.

Ao Professor Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade pela sua disponibilidade e colaboração na implementação do modelo teórico no software e sua respetiva utilização.

Aos meus pais e à minha irmã, pelo apoio e compreensão não só ao longo desta dissertação, mas sim ao longo de todo o meu percurso académico, a eles deixo o meu profundo agradecimento.

Ao Michel, um agradecimento muito especial pelo seu carinho, amizade e paciência incondicionais que sempre demonstrou.

Aos meus amigos, sobretudo à Família Pinto, que sempre me auxiliou e apoiou em praticamente toda a fase de formatura da minha vida.

Por fim, mas não menos importante, aos meus familiares mais próximos, especialmente a minha avó.

Resumo

Neste presente trabalho analisa-se o comportamento de vigas de betão armado (com secção retangular cheia) sujeitas à torção para baixos níveis de carregamento, designadamente na zona comportamental correspondente à transição entre o estado não fissurado e fissurado. O trabalho realizado tem como objetivo elaborar um estudo comparativo por forma a avaliar, de entre várias propostas de autores, qual a lei constitutiva para o betão à tração que permite calcular a melhor previsão para o momento torsor de fissuração e respetiva rotação. Para tal, é utilizada a Generalização do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (GSVATM) na forma de um aplicativo computacional (Torque 2.0) que permite, de uma forma automática, o cálculo do comportamento teórico global em vigas de betão armado sujeitas à torção, designadamente através do traçado da curva de comportamento $T - \theta$. Para realizar o estudo comparativo, as várias leis constitutivas para o betão à tração utilizadas foram implementadas no referido aplicativo computacional através da linguagem de programação DELPHI.

Para realizar o estudo comparativo, foram selecionados os resultados experimentais de numerosas vigas de referência encontradas na literatura. A partir desta análise, foi possível encontrar uma lei constitutiva para o betão à tração, designadamente a lei proposta por Berlarbi e Hsu em 1994, que permite, através do GSVATM, prever adequadamente o momento torsor de fissuração e a respetiva rotação.

Com vista a melhorar a previsão do comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção na fase inicial pós-fissuração, foi ainda apresentada uma base de trabalho futuro. Tal base de trabalho consiste na introdução de uma modificação na lei constitutiva do betão à tração, cuja calibração deverá ser alvo de um trabalho futuro.

Palavras-chave

Betão armado, Vigas, Torção, Secção retangular cheia, GSVATM, Relações constitutivas

Abstract

In this present work is analyzed the behavior of reinforced concrete beams (with rectangular full section) under torsion for low levels of loading, particularly in the behavioral zone associated to transition between the non-cracked and cracked state. The work realized aims at develop a comparative work in order to evaluate, between others authors proposes, which constitutive law of the tensile concrete allows calculate the best prediction of fissuring torsion moment and associated rotation. For that, is used Generalized Softened Variable Angle Truss-Model (GSVATM) as a computer application (Torque 2.0) that allows, automatically, the calculus of global theoretical behavior on reinforced concrete beams under torsion, particularly by the curve delineation of behavior torque - twist. For realize the comparative study, the various constitutive laws for the tensile concrete that are used was deployed on computer application namely before with the programing language DELPHI.

For realize the comparative study, was selected experimental results of many referential beams found on literature. From this analysis, was possible find one constitutive law for the tensile concrete, particularly the law that Berlarbi and Hsu proposes in 1994, that allows, by GSVATM, predict appropriately the fissuring torsion moment and associated rotation.

With intent to improve the prediction of reinforced concrete beams under torsion behavior on initial post-fissuring phase, was also presented a future base work. That future base work consists on introduction of a modification in the constitutive law of the tensile concrete, for witch calibration should be target of future work too.

Keywords

Reinforced Concrete, Beams, Torsion, Rectangular Full Section, GSVATM, Constitutive Relations

Índice

Capítulo 1. Enquadramento do tema	1
1.1. Introdução	1
1.1.1. Ocorrências históricas	1
1.1.2. Classificação segundo os efeitos da torção	4
1.1.3. Casos de estruturas sujeitas à torção	6
1.1.4. Comportamento de uma viga de betão armado à torção	10
1.2. Objetivos e justificação do tema	12
Capítulo 2. Generalização do Modelo de Treliza Espacial com Ângulo Variável	21
2.1. Introdução	21
2.2. Formulação do GSVATM para vigas de betão armado	21
2.2.1. Vigas sujeitas ao Esforço Transverso	21
2.2.2. Vigas sujeitas à torção	27
2.2.3. Flexão das escoras e dos tirantes de betão	31
2.2.4. Espessura efetiva da parede	38
2.3. Equações para o cálculo da curva teórica $T - \theta$	39
2.3.1. Equações de equilíbrio	39
2.3.2. Equações de compatibilidade	42
2.3.3. Relações $\sigma - \varepsilon$ para os materiais	45
2.4. Conclusões	45
Capítulo 3. Relação Tensão-Extensão para o betão à tração	47
3.1. Introdução	47
3.2. Relações constitutivas	47
3.3. Notas finais	57
Capítulo 4. Estudo comparativo	59
4.1. Introdução	59
4.2. Modelo teórico baseado no GSVATM	59
4.2.1. Implementação do GSVATM	62
4.3. Descrição da Utilização do Aplicativo Computacional Torque 2.0	65
4.4. Caracterização da curva $T - \theta$	68

4.5. Análise comparativa das Curvas $T - \theta$ Teóricas e Experimentais com Base em Vigas de Referência	69
4.6. Notas finais	78
Capítulo 5. Base de trabalho para uma nova lei constitutiva para o betão tracionado	79
5.1. Introdução	79
5.2. Estruturação da nova relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração	79
5.3. Conclusões	85
Capítulo 6. Considerações finais	87
6.1. Introdução	87
6.2. Conclusões	87
6.3. Trabalhos futuros propostos	88
Referências	89
Anexos	93
Anexo I. Vigas de referência	95
Anexo II. Resultados obtidos	99
II.1 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Cervenka (1985) [15]	99
II.2 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Vecchio e Collins (1986) [38]	102
II.3 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Hsu (1991) [22]	105
II.4 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994) [5]	108
II.5 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Collins <i>et al.</i> (1996) [17]	111
II.6 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Vecchio (2000) [39]	114
II.7 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Bentz (2005) [7]	117
II.8 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Stramandinoli e Rovere (2008) [34]	120
Anexo III. Análise gráfica	123
Anexo IV. Resultados obtidos para a nova lei	145

IV.1	Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a versão 2 da lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu [5].....	145
IV.2	Análise de uma amostra de gráficos para a versão 2 da lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994).....	148

Lista de Figuras

Figura 1.1. Interior do Royal Festival Hall (a) e caixão triangular que suporta a laje em consola (b), [27] [3]	2
Figura 1.2. Ponte Waterloo (a) e respetiva secção transversal (b), [25] [3]	3
Figura 1.3. Fissura helicoidal devido à torção [9].....	3
Figura 1.4. Pórtico com torção de compatibilidade (a) e pórtico sem torção de compatibilidade (b) [3]	4
Figura 1.5. Pórtico com torção de equilíbrio (a) e pórtico sem torção de equilíbrio (b) [3]	5
Figura 1.6. Torção de St. Venant (a) e Torção com empenamento (b), [35]	5
Figura 1.7. Pormenor de uma laje de cobertura em consola contínua [26].....	6
Figura 1.8. Laje de cobertura em consola isolada [4].....	7
Figura 1.9. Viga com desenvolvimento curvo em planta [3]	7
Figura 1.10. Viga com mudança de direção ao longo do eixo longitudinal [4]	7
Figura 1.11. Viga de suporte com consolas curtas [3].....	8
Figura 1.12. Viga de suporte com consola curta [3]	8
Figura 1.13. Vigas com apoios indiretos [4]	8
Figura 1.14. Viga de apoio de uma laje inclinada [3]	9
Figura 1.15. Laje de pavimento com apoios de extremidade (a) e de continuidade (b) [9]	9
Figura 1.16. Simplificação dos modelos de cálculo para a viga de extremidade e de continuidade [9]	10
Figura 1.17. Curva típica $T - \theta$ para uma viga de betão armado sujeita à torção pura	11
Figura 1.18. Curvas $T - \theta$ teórica e experimental para a Viga M2 [21]	13
Figura 1.19. Curvas $T - \theta$ segundo o modelo de Bernardo e Lopes [10].....	14
Figura 1.20. Curvas $T - \theta$ calculadas por diferentes modelos e por via experimental [11]	15
Figura 1.21. Curvas $T - \theta$ segundo o Jeng e Hsu [28]	16
Figura 1.22. Curvas $T - \theta$ segundo o GSVATM e Hsu [13].....	17
Figura 2.1. Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana [13]	22
Figura 2.2. Equilíbrio do elemento A [13]	22
Figura 2.3. Equilíbrio de um corpo livre retangular ($\alpha + \beta \leq 90^\circ$)	24
Figura 2.4. Equilíbrio do elemento A quando $\alpha + \beta > 90^\circ$ [13].....	26
Figura 2.5. Equilíbrio de um corpo livre retangular ($\alpha + \beta > 90^\circ$) [13]	27
Figura 2.6. Viga com secção retangular vazada sujeita à torção [35].....	28
Figura 2.7. Flexão de uma escora e tirante de betão na parede de uma viga em caixão sujeita à torção [13].....	32
Figura 2.8. Distribuição das extensões e tensões na escora e no tirante de betão [13]	33
Figura 2.9. Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido tendo em conta o <i>softening effect</i> [37] ...	34

Figura 2.10. Processo de integração da Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras [13]	36
Figura 2.11. Curva $\sigma - \varepsilon$ proposta por Hsu em 1991, para o betão tracionado [22]	37
Figura 2.12. Relação $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras tracionadas [3]	38
Figura 2.13. Círculo de Mohr para o estado de deformação de uma placa sujeita ao corte [37]	42
Figura 3.1. Lei constitutiva do betão à tração segundo Belarbi e Hsu [5] [28]	49
Figura 3.2. Lei constitutiva do betão à tração segundo Cervenka [15]	50
Figura 3.3. Lei constitutiva do betão à tração segundo Vecchio e Collins [38]	51
Figura 3.4. Lei constitutiva do betão à tração segundo Hsu [22]	51
Figura 3.5. Lei constitutiva do betão à tração segundo Collins <i>et al.</i> [17]	52
Figura 3.6. Lei constitutiva do betão à tração para o <i>tension softening</i> , segundo Vecchio [39]	53
Figura 3.7. Lei constitutiva do betão à tração para o <i>tension stiffening</i> , segundo Vecchio [39]	54
Figura 3.8. Lei constitutiva do betão à tração segundo Vecchio [39]	54
Figura 3.9. Secção utilizada para o cálculo da lei constitutiva do betão tracionado segundo Bentz [7]	55
Figura 3.10. Lei constitutiva do betão à tração segundo Bentz [7]	55
Figura 3.11. Lei constitutiva do betão à tração segundo Stramandinoli e Rovere [34]	56
Figura 3.12. Síntese de todas as leis constitutivas do betão à tração corrigidas	57
Figura 4.1. Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo dos pontos da curva $T - \theta$	63
Figura 4.2. Documento de texto com as características da viga a calcular	65
Figura 4.3. Menu do aplicativo Torque 2.0	66
Figura 4.4. Abrir o ficheiro de dados da viga a calcular	66
Figura 4.5. Janela do aplicativo Torque 2.0 com os modelos selecionados	67
Figura 4.6. Janela do aplicativo Torque 2.0	67
Figura 4.7. Quadro Resumo do Excel correspondente aos resultados	68
Figura 4.8. Folha de resultados para a viga B3 no Excel, segundo o modelo <i>bt8</i>	68
Figura 4.9. Curva $T - \theta$ teórica para vigas de betão armado sujeitas à torção	69
Figura 4.10. Curva teórica $T - \theta$ para a viga N-12-12, segundo a lei constitutiva de betão tracionado de Cervenka [15]	72
Figura 4.11. Curva teórica $T - \theta$ para a viga H-06-12 à esquerda e para a viga C6 à direita, segundo a lei constitutiva do betão à tração de Cervenka [15]	72
Figura 4.12. Média (\bar{x}) e coeficiente de variação (cv) da relação $T_{crexp}T_{crth}$ para cada modelo teórico	75
Figura 4.13. Média (\bar{x}) e coeficiente de variação (cv) da relação $\theta_{crI} exp\theta_{crI} th$ para cada modelo teórico	76
Figura 5.1. Versão 2 da lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu em 1994 [5]	80

Figura 5.2. Comparação da curva $T - \theta$ para diferentes valores da variável n , na viga de referência B4	81
Figura 5.3. Visualização do ponto de fissuração numa curva $T - \theta$ e na relação $\sigma - \varepsilon$ original de Belarbi e Hsu [5]	82
Figura 5.4. Versão 3 da lei constitutiva para o betão tracionado de Belarbi e Hsu [5]	83

Lista de Tabelas

Tabela 4.1. Leis constitutivas para o betão sujeito à tração	61
Tabela 4.2. Resultados obtidos com base no Torque 2.0	75

Simbologia

Alfabeto Latino

A_c	- Área da secção efetiva de betão tracionado
A_o	- Área limitada pela linha média do fluxo de corte / Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão
A_{sl}	- Área de armadura longitudinal
A_{st}	- Área de um varão de armadura transversal
C	- Força de compressão que atua nas escoras de betão
E_c	- Módulo de elasticidade do betão
E_{cm}	- Valor médio do módulo de elasticidade do betão
E_s	- Módulo de elasticidade do aço
F_H	- Força horizontal
F_V	- Força vertical
G	- Módulo de distorção
G_f	- Energia de fracturação
GJ^I	- Rigidez elástica à torção no Estado I
GJ^{II}	- Rigidez elástica à torção no Estado II (pós-fissuração)
L_r	- Comprimento característico
M	- Momento fletor / Parâmetro de ligação
M_T	- Momento torsor
\bar{N}	- Força absorvida pela armadura longitudinal
N_b	- Força na corda inferior da treliça plana
N_t	- Força na corda superior da treliça plana
R	- Resultante das forças de compressão e tração
T	- Força de tração que atua nos tirantes de betão / Momento torsor
T_{cr}	- Momento torsor de fissuração
T_{cr}^{exp}	- Valor experimental do momento torsor de fissuração

T_{cr}^{th}	- Valor teórico do momento torsor de fissuração
$T_{máx}$	- Momento torsor máximo
T_o	- Ordenada na origem da Curva $T - \theta$ no Estado II
T_o^{exp}	- Valor experimental da ordenada na origem da Curva $T - \theta$ no Estado II
T_o^{th}	- Valor teórico da ordenada na origem da Curva $T - \theta$ no Estado II
T_u	- Momento torsor resistente
T_u^{exp}	- Valor experimental do momento torsor resistente
T_u^{th}	- Valor teórico do momento torsor resistente
T_y	- Momento torsor de cedência
V	- Esforço transversal
c	- Extensão na qual o esforço principal de tração se reduz a zero
c_t	- Coeficiente do <i>tension stiffening</i>
cv	- Coeficiente de variação
d_{b_i}	- Diâmetro da armadura
d_v	- Distância entre a corda superior e inferior do modelo de treliça plana
f'_c	- Resistência à compressão uniaxial do betão
f_{ck}	- Valor característico da resistência à compressão do betão
f_{cm}	- Resistência média à compressão do betão
f_{cr}	- Tensão de fissuração
f_{ctm}	- Resistência média à tração do betão
f_{c1}	- Tensão de tração
f_{c1}^a	- Tensão de tração para o <i>tension softening</i>
f_{c1}^b	- Tensão de tração para o <i>tension stiffening</i>
f_{ly}	- Tensão média de cedência da armadura longitudinal
f_p	- Tensão máxima no betão tendo em conta o <i>softening effect</i>
f_s	- Tensão de tração nas armaduras ordinárias
f_{sl}	- Tensão na armadura longitudinal
f_{st}	- Tensão na armadura transversal
f_{sy}	- Tensão de cedência na armadura ordinária

f_{ty}	- Tensão média de cedência da armadura transversal
h_{ef}	- Espessura efetiva de betão tracionado
k_2	- Parâmetro que traduz a curvatura
k_1^c	- Quociente entre a tensão média e o pico de tensão no tirante de betão
k_2^c	- Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão
l_q	- Comprimento da porção reta da linha média de fluxo de corte
n	- Quociente entre o módulo de elasticidade do aço e do betão / Número de valores da amostragem
n_v	- Força na armadura transversal por unidade de comprimento
p_c	- Perímetro exterior da secção transversal de betão
p_o	- Perímetro da linha média de fluxo de corte
q	- Tensão de corte / Fluxo de corte
s	- Espaçamento longitudinal da armadura transversal / Desvio padrão
t	- Espessura da parede / Espessura da escora de betão / Espessura do tirante de betão
t_c	- Espessura da escora diagonal de betão
t_t	- Espessura do tirante diagonal de betão
w	- Deslocamento
x	- Menor dimensão exterior de uma secção transversal retangular
\bar{x}	- Valor médio
x_1	- Largura das cintas a partir do eixo dos varões
y	- Altura arbitrária da viga / Maior dimensão exterior de uma secção transversal retangular
y_1	- Altura das cintas a partir do eixo dos varões

Alfabeto Grego

α	- Ângulo de inclinação de uma fissura / Ângulo de inclinação das escoras / Parâmetro de decadência exponencial para o <i>tension stiffening</i>
β	- Ângulo entre a resultante R e a força de compressão C

γ	- Ângulo entre a resultante R e o eixo longitudinal da viga / Distorção
ΔN	- Força total nas barras longitudinais
ε	- Extensão
ε_{cr}	- Extensão de fissuração
ε_{cu}	- Valor convencional da extensão última para o betão à compressão
ε_{c1}	- Extensão de tração
ε_d	- Extensão na escora diagonal de betão
ε_{lu}	- Valor convencional da extensão última para a armadura longitudinal
ε_o	- Extensão correspondente ao pico de tensão f'_c
ε_p	- Extensão correspondente ao pico de tensão f_p
ε_s	- Extensão de tração nas armaduras ordinárias
ε_{sl}	- Extensão na armadura longitudinal
ε_{st}	- Extensão na armadura transversal
ε_{su}	- Valor convencional da extensão última para a armadura
ε_{sy}	- Extensão correspondente à tensão de cedência f_{sy}
ε_{ts}	- Extensão terminal
ε_{tu}	- Valor convencional da extensão última para a armadura transversal
ε_1^c	- Extensão média de tração
ε_{1s}^c	- Extensão máxima de tração
ε_2^c	- Extensão média de compressão
ε_{2s}^c	- Extensão máxima de compressão
η	- Fator de redução
θ	- Rotação transversal da secção / Rotação por unidade de comprimento
θ_{cr}^I	- Rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado I
$\theta_{cr}^{I exp}$	- Valor experimental da rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado I
$\theta_{cr}^{I th}$	- Valor teórico da rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado I
θ_{cr}^{II}	- Rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado II
$\theta_{cr}^{II exp}$	- Valor experimental da rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado II
$\theta_{cr}^{II th}$	- Valor teórico da rotação de torção correspondente a T_{cr} no Estado II

$\theta_{m\acute{a}x}$	- Rotação de torção correspondente a $T_{m\acute{a}x}$
θ_n	- Direção das armaduras
θ_u	- Rotação de torção correspondente a T_u
θ_u^{exp}	- Valor experimental da rotação de torção correspondente a T_u
θ_u^{th}	- Valor teórico da rotação de torção correspondente a T_u
θ_y	- Rotação de torção correspondente a T_y
λ	- Coeficiente de redução para ter em conta o <i>softening effect</i>
ξ	- Fator de redução
ξ_ϵ	- Fator de redução para as extensões
ξ_σ	- Fator de redução para as tensões
ρ	- Taxa de armadura
ρ_l	- Taxa de armadura longitudinal
ρ_t	- Taxa de armadura transversal
ρ_{tot}	- Taxa de armadura total
σ	- Tensão
σ_1^c	- Tensão de tração no tirante de betão
σ_2^c	- Tensão de compressão na escora de betão
ϕ	- Diâmetro dos varões de armadura longitudinal
φ	- Curvatura do tirante de betão
ψ	- Curvatura da escora de betão

Lista de Acrónimos

ACI	- American Concrete Institute
CEB	-Comité Européen du Béton
EC2	- Eurocode 2
GSVATM	- Generalized Softened Variable Angle Truss-Model
MC	- Model Code
MVATM	- Modified Variable Angle Truss-Model
SI	- Sistema Internacional
SMM	- Softened Membrane Model
SMMT	- Softened Membrane Model of Torsion
VATM	- Variable Angle Truss-Model

Capítulo 1. Enquadramento do tema

1.1. Introdução

1.1.1. Ocorrências históricas

Até à década de 60, o dimensionamento de vigas de betão armado sujeitas à torção foi desprezado, considerando-se que esse tipo de esforço era absorvido através da redistribuição de esforços e da reserva de resistência oferecida pelos fatores de segurança.

No início do século XX, mais precisamente em 1904, Mörsh dirigiu os primeiros ensaios à torção em vigas de betão armado cilíndricas, maciças e ocas, com o objetivo de examinar o seu comportamento, tendo aprofundado o seu estudo em 1921 [20].

O dimensionamento à torção continuou a ser desprezado até 1958, ano no qual a DIN-1045 apresentou pela primeira vez indicações sobre a torção, baseadas na tese de doutoramento de Ernest Bausch, onde sugeriu um modelo designado por Analogia da Treliça Espacial, com diagonais comprimidas a 45°. Dando seguimento, em 1959 na antiga União Soviética, foi apresentado um modelo de análise para a torção em vigas de betão armado, concebido por Lessig baseado em equações de equilíbrio e tendo em conta os modos de rutura da viga à torção [20].

O ano de 1960 foi no qual surgiu o repentino interesse pelo estudo da torção em vigas de betão armado, pois até à data não se dava a devida importância ao esforço que a torção desempenhava, havendo por isso pouca informação sobre o assunto. Foi desde então que se realizaram vários ensaios e trabalhos teóricos até que em 1968 surgiu a publicação “*Torsion of Structural Concrete SP-18*” do American Concrete Institute (ACI) [2]. Esta mesma organização publicou na América em 1971, o primeiro documento normativo que incorporava cláusulas específicas para o dimensionamento de vigas à torção, conhecido por código ACI 318-71 [1]. Ao longo da década de 70 surgiram diversas normas sobre o assunto em diferentes países, das quais se distingue o código europeu MC 78 [14], resultado de uma investigação de 5 anos pela Comité Européen du Béton (CEB) sobre os procedimentos do dimensionamento à torção.

Este súbito interesse pelo dimensionamento à torção surgiu com a necessidade de otimizar os métodos de cálculo para acompanhar a evolução da arquitetura, pois as estruturas passaram a ser irregulares, arrojadas e com cálculos mais trabalhosos, deste modo deixou de ser aceitável desprezar os efeitos da torção. Além disso, outro aspeto importante foi a diminuição de custos que derivou da redução dos fatores de segurança, pois já não era necessário uma reserva de segurança tão grande para o efeito da torção.

Ainda antes de ser aplicado qualquer tipo de documento normativo quanto à torção já tinham surgido casos em que era indispensável considerar o seu dimensionamento. Como o caso das estacas de betão pré-fabricado, em que a sua cravação se efetuava através de uma força vertical e um momento torsor, ou seja, esforços de compressão e torção em simultâneo. Para resistir a estes esforços, as estacas eram dotadas de uma armadura transversal em forma helicoidal quantificada através de ensaios experimentais e da escassa bibliografia disponível [33].

Além das estacas também surgiram dois projetos onde o esforço de torção foi previsto no dimensionamento, o Royal Festival Hall e a Ponte de Waterloo.

O Royal Festival Hall foi desenhado pelo arquiteto Hugh Casson com auxílio de jovens projetistas, tendo marcado a diferença pela sua estrutura absolutamente modernista. Este projeto está diretamente ligado à problemática do dimensionamento da torção através do caixão triangular que suporta a laje em consola das bancadas, pois este tolera elevados momentos torsores (Figura 1.1).

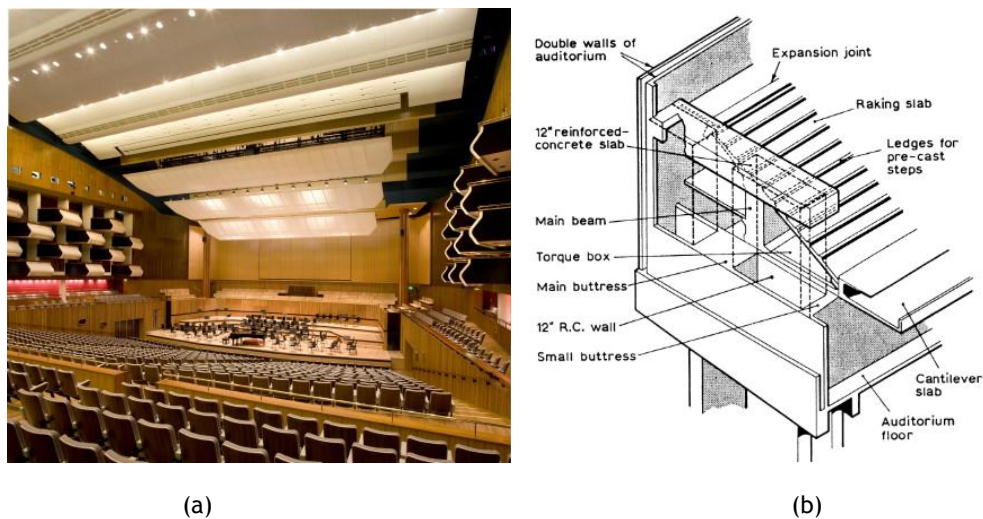
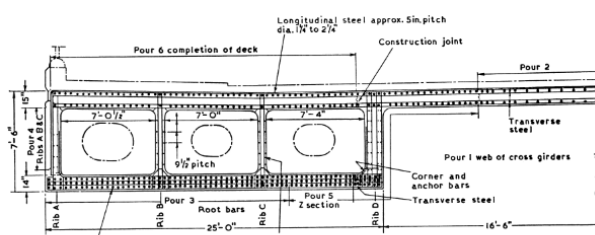


Figura 1.1. Interior do Royal Festival Hall (a) e caixão triangular que suporta a laje em consola (b), [27]
[3]

No rio Tâmissa encontra-se a ponte de Waterloo, projetada por Cuerel em 1948, estruturada por um tabuleiro com duas vigas em caixão, que por sua vez constituem três células cada. O facto das vigas em caixão se localizarem nas extremidades do tabuleiro dirige até elas cargas excêntricas provocando elevados momentos torsores (Figura 1.2), os quais foram analisados com recurso a ensaios experimentais tendo por base modelos reduzidos das vigas em caixão.



(a)



(b)

Figura 1.2. Ponte Waterloo (a) e respetiva secção transversal (b), [25] [3]

Nos casos mencionados a torção foi pensada antes da sua construção, mas nem sempre foi assim, pois ainda antes de existirem regulamentos que incluíam a torção houve situações que alertaram a necessidade do seu estudo. Em 1964 foi apresentado um caso de rotura com fissuração helicoidal numa viga (Figura 1.3) de um parque de estacionamento na Flórida, nos Estados Unidos da América, a qual resulta da insuficiência de armadura que resista à torção [23]. Outro caso referido nas bibliografias é a fissuração de vigas de apoio de varandas muito pesadas [23].



Figura 1.3. Fissura helicoidal devido à torção [9]

Ao longo dos anos foram-se desenvolvendo procedimentos de dimensionamento de estruturas de betão armado que assistiram a evolução da arquitetura, o que levou à redução dos coeficientes de segurança, minorando a reserva de resistência prevista para os esforços de torção. Em Portugal, foi em 1996 que entrou em vigor o Regulamento de Estruturas de Betão Armado com o novo método de dimensionamento.

Este progresso dos métodos de dimensionamento foi acompanhado pelo avanço de programas de análise computacional, o qual facilitou o estudo estrutural e concedeu aos engenheiros uma visão mais realista do comportamento das estruturas.

Apesar de todos os estudos já efetuados a torção ainda continua a ser um tema atual, pois além das estruturas ao qual estamos acostumados surgiram outros tipos de materiais estruturais que as vieram complementar, nomeadamente o pré-esforço das armaduras, os betões de alta resistência, os betões leves e os betões com fibras.

1.1.2. Classificação segundo os efeitos da torção

Ao longo desta secção serão expostas diferentes classificações segundo a forma como a torção surge e de como esta é absorvida pela secção transversal.

A Figura 1.4 (a) ilustra o caso de Torção de compatibilidade, em que as vigas sofrem torção devido a compatibilidades de deformação, as quais surgem naturalmente em pórticos correntes com ligações monolíticas entre elementos estruturais. O equilíbrio da estrutura não depende do seu dimensionamento à torção, porque apesar de se concentrarem esforços de torção que levam à fissuração e deformação da estrutura, esta não colapsa em virtude da redundância de ligações existentes. Deste modo considera-se que a torção surge como efeito secundário, sendo desprezado o seu dimensionamento, o que na prática significa considerar a rigidez de torção da viga nula. Apesar de ser desprezada, é necessário garantir as quantidades mínimas de armaduras de controlo da fissuração indicadas pelas disposições normativas. O facto de a estrutura não colapsar não é a principal causa para o desprezo do dimensionamento à torção, mas sim porque a rigidez de torção da viga no Estado II (fase de fissuração) reduz drasticamente, diminuindo os esforços de torção de tal forma que não se justifica considerá-los na fase em que o betão está fissurado [35].

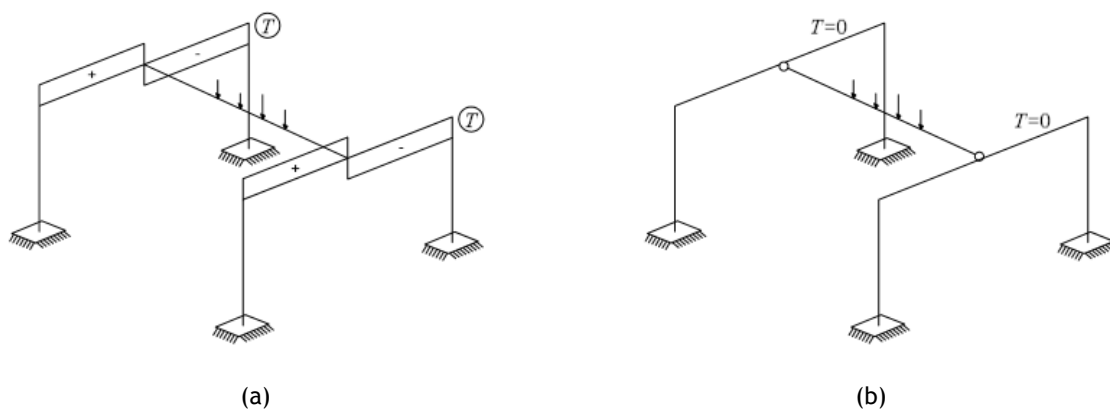


Figura 1.4. Pórtico com torção de compatibilidade (a) e pórtico sem torção de compatibilidade (b) [3]

Quando a estabilidade global ou parcial da estrutura depende da rigidez de torção da viga de apoio considera-se que é um caso de torção de equilíbrio, para o qual não é possível ser desprezado o dimensionamento da viga à torção. Ou seja, caso se despreze a resistência da torção na estrutura esta torna-se instável, tal como se ilustra na Figura 1.5 (b), em que parte da estrutura colapsa.

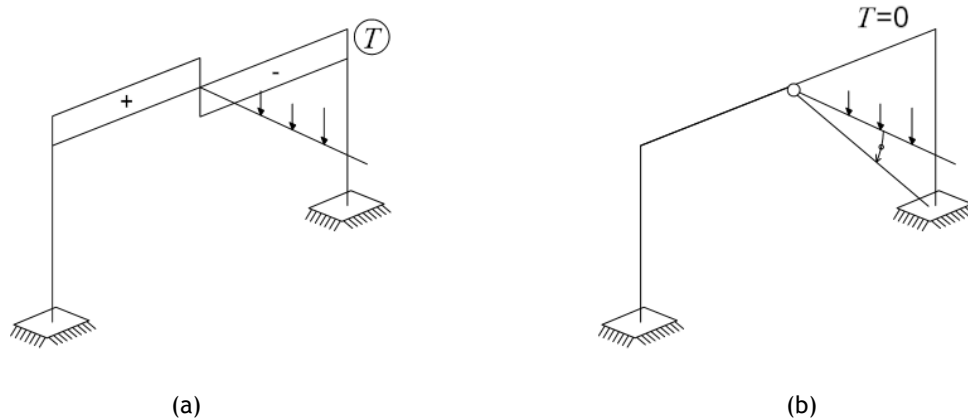


Figura 1.5. Pórtico com torção de equilíbrio (a) e pórtico sem torção de equilíbrio (b) [3]

Uma viga absorve os esforços de torção por diversos mecanismos, dependendo da sua secção transversal, pelo que surge outra classificação da torção em função da geometria da secção da viga. Quando se tem uma secção cheia ou oca, a absorção do momento torsor é realizada através do fluxo de tensões tangenciais (Figura 1.6 (a)), a qual se nomeia por Torção de St. Venant ou Torção circulatoria. Quando a secção é aberta os esforços de torção são resistidos por momentos adicionais (Figura 1.6 (b)), que representa a Torção com empenamento.

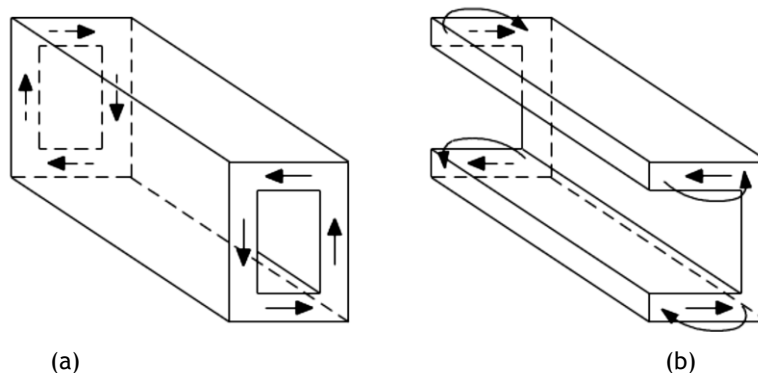


Figura 1.6. Torção de St. Venant (a) e Torção com empenamento (b), [35]

São livres de empenamento as secções circulares e as que têm determinadas propriedades de configuração, como as secções simétricas. Para além destas todas as restantes apresentam empenamento, sendo muito reduzido nas secções cheias ou ocas nos casos em que não há restrição ao empenamento. Além disso as secções de paredes espessas sofrem maior empenamento do que as de paredes finas.

As secções mais prejudicadas pelo empenamento são as constituídas por três paredes, como por exemplo secções em “I” ou “U”, pois nestas geram-se esforços de flexão secundários que não devem ser desprezados. Em secções até duas paredes, como por exemplo em “L”, o empenamento não interfere na resistência da viga, pois apenas gera pequenos acréscimos de tensões que geralmente podem ser desprezados no cálculo.

Uma secção sofre empenamento quando nela atuam diferentes alongamentos longitudinais das fibras, vulgarmente variáveis ao longo do desenvolvimento da viga. Habitualmente esta ocorrência deve-se a uma distribuição não homogénea do momento torsor e a restrições que não possibilitam deformações longitudinais. Nos locais das restrições aparecem tensões longitudinais de tração e compressão máximas acompanhadas pela redução das tensões tangenciais. Os efeitos que a restrição provoca no empenamento são desprezados pois as tensões longitudinais diminuem consideravelmente com a passagem para o Estado II, devido ao alívio que as fissuras proporcionam à restrição e, além disso, as secções de betão armado são frequentemente retangulares cheias ou ocas [35].

1.1.3. Casos de estruturas sujeitas à torção

A torção é um esforço importante em determinados tipos de estruturas, pois intervém na sua análise estrutural. Para clarificar este assunto apresentam-se nesta secção alguns casos em que é corrente o seu dimensionamento como esforço principal ou secundário. Quando a torção representa um esforço principal a estrutura tem de ser apta a resistir à torção através de armadura específica, mas quando representa um esforço secundário é suficiente capacitar a viga com armadura mínima através de varões longitudinais e transversais com uma disposição adequada.

No primeiro caso ilustrado na Figura 1.7, a viga que apoia a laje de cobertura sofre esforços de torção, pois existem zonas mais rígidas que apoiam a viga junto aos pilares impedindo a deformação, mas em contrapartida as zonas menos rígidas como a meio da viga permitem uma maior deformação. Mas apesar destes diferentes níveis de deformação, como a laje possui continuidade ajuda a atenuar o efeito da torção.

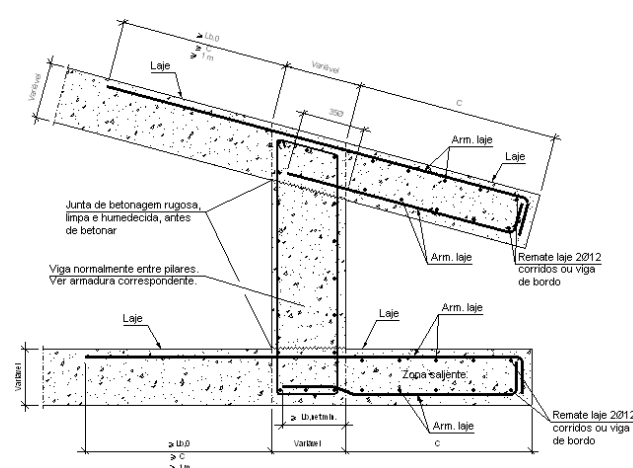


Figura 1.7. Pormenor de uma laje de cobertura em consola contínua [26]

Em comparação com o caso anterior, a Figura 1.8 demonstra um caso semelhante, mas com esforços de torção mais gravosos produzidos pelo peso da consola [35].

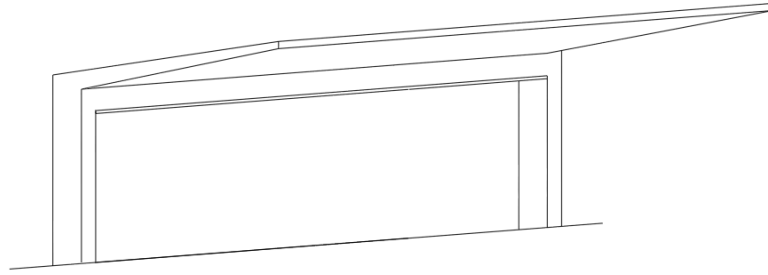


Figura 1.8. Laje de cobertura em consola isolada [4]

Com o desenvolvimento da arquitetura surgiram as vigas com desenvolvimento curvo em planta. Estas manifestam um importante efeito da torção, pois mesmo que a carga seja aplicada simetricamente no eixo da viga, surge torção, porque as extremidades estão geralmente restringidas transversalmente por apoios (Figura 1.9). Para resolver este tipo de situações constroem-se vigas de bordadura, as quais são dimensionadas tendo em conta a torção de equilíbrio resultante da reação da laje.



Figura 1.9. Viga com desenvolvimento curvo em planta [3]

Quando uma viga muda de direção ao longo do eixo longitudinal, como se ilustra na Figura 1.10, o dimensionamento do esforço de torção deve ter-se em conta, pois a carga aplicada num alinhamento reto produz torção no alinhamento adjacente do mesmo tramo.

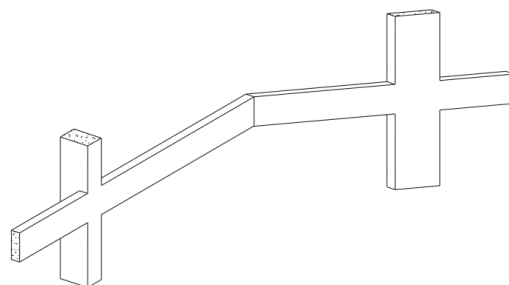


Figura 1.10. Viga com mudança de direção ao longo do eixo longitudinal [4]

Na Figura 1.11 apresenta-se outro caso com efeitos da torção, trata-se de uma viga de apoio pré-fabricada com consolas curtas, pelas quais as cargas F_1 e F_2 são transmitidas por excentricidade. Estas cargas são transmitidas para a parte superior da viga de apoio através de armadura transversal para que os esforços sejam distribuídos normalmente, mas caso as forças F_1 e F_2 sejam diferentes surge torção na viga de apoio.

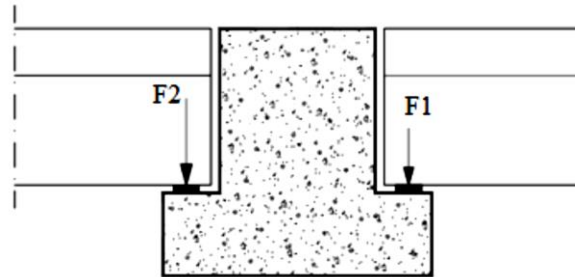


Figura 1.11. Viga de suporte com consolas curtas [3]

Outro caso muito semelhante ao anterior é o da Figura 1.12, na qual se tem uma viga de apoio apenas com uma consola curta onde descarrega uma parede de alvenaria de forma excêntrica, induzindo um momento torsor na viga.

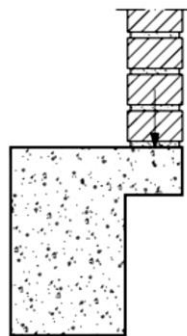


Figura 1.12. Viga de suporte com consola curta [3]

Com uma estrutura em “H”, o exemplo da Figura 1.13 esquematiza o caso em que a viga de apoio é um apoio indireto e sofre torção provocada a partir da viga nela apoiada. Este tipo de torção aparece devido à compatibilidade de deformações, já mencionado na subsecção anterior.

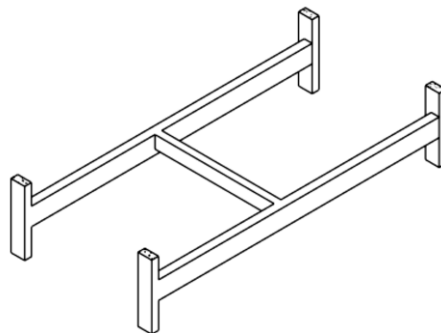


Figura 1.13. Vigas com apoios indiretos [4]

A viga que apoia uma laje inclinada, geralmente laje de cobertura, sofre o efeito de torção que tem origem no esforço axial distribuído pela laje e chega à viga como uma carga excêntrica, tal como se ilustra na Figura 1.14.

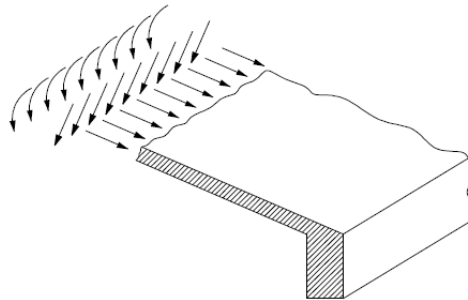


Figura 1.14. Viga de apoio de uma laje inclinada [3]

Na Figura 1.15 estão esquematizadas duas situações com uma laje de pavimento carregada uniformemente, uma com apoios de extremidade e outra com apoios de continuidade. No primeiro caso, ilustrado na Figura 1.15 (a), a laje apresenta um momento negativo junto à viga devido à restrição provocada na deformação da laje, o qual é equilibrado pela rigidez à torção da viga, provocando nela momentos torsores. Esta rigidez é responsável pela restrição que a viga de bordadura e a ligação dos pilares conferem à viga de apoio, constituindo momentos torsores hiperstáticos. Na viga de apoio de continuidade intermédia, indicada na Figura 1.15 (b), existe uma diferença de momentos fletores à esquerda e à direita da viga designada por “ Δm ”, a qual se deve à assimetria das lajes de pavimentos quanto ao carregamento e aos vãos. Esta diferença de momentos fletores é transmitida à viga de apoio como torção e absorvida pela sua rigidez.

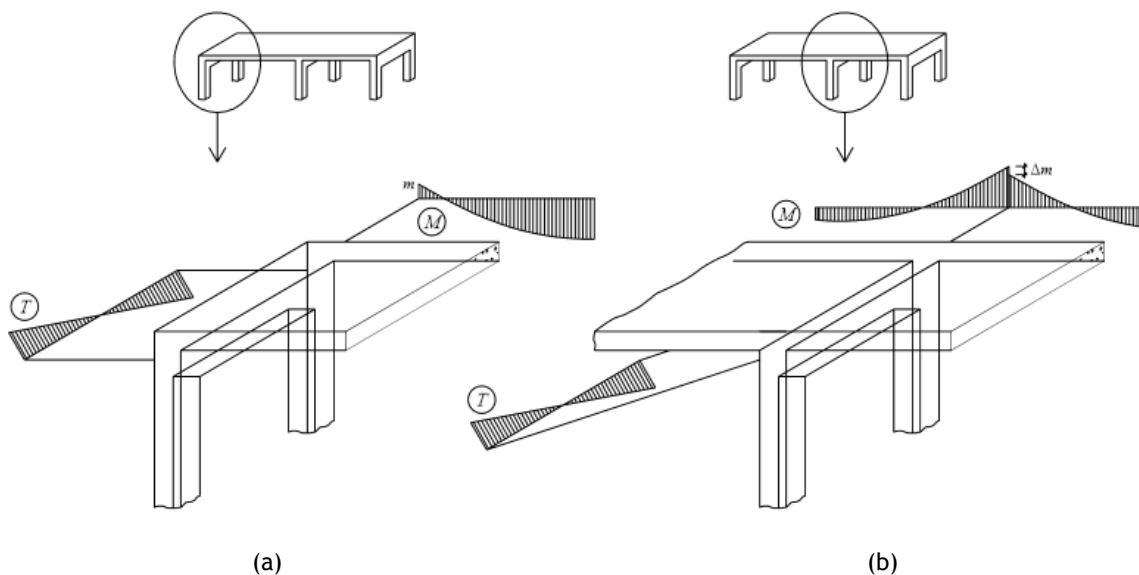


Figura 1.15. Laje de pavimento com apoios de extremidade (a) e de continuidade (b) [9]

Neste caso o dimensionamento à torção é considerado secundário, ou seja, as vigas de apoio não requerem uma armadura específica de torção para os Estados Limites Últimos, o que facilita muito os cálculos dos momentos fletores e o dimensionamento das vigas. A Figura 1.16 apresenta essa simplificação utilizando os dois casos de vigas de apoio indicados, em que a mola representa o momento torsor.

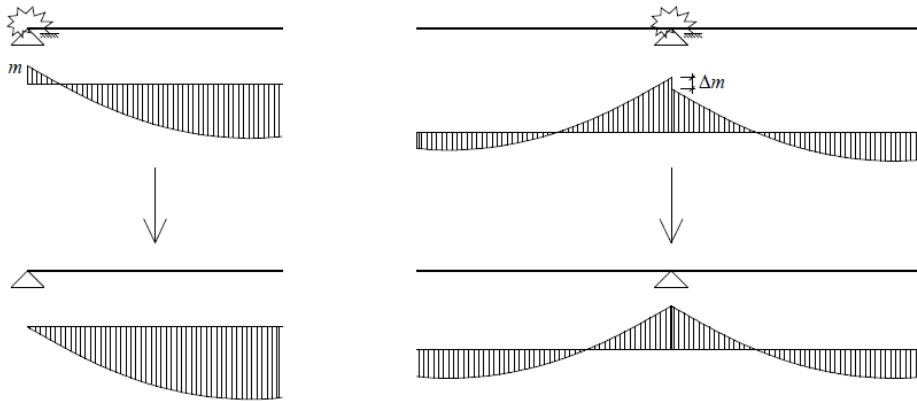


Figura 1.16. Simplificação dos modelos de cálculo para a viga de extremidade e de continuidade [9]

1.1.4. Comportamento de uma viga de betão armado à torção

O comportamento das vigas de betão armado ao esforço da torção tem vindo a ser estudado ao longo dos anos através de ensaios experimentais, a partir dos quais é possível obter uma curva que relaciona o momento torsor (T) com a rotação transversal da secção (θ). Esta curva demonstra o comportamento que a viga tem ao longo do acréscimo de carga até ao momento da rotura.

Através dos ensaios experimentais à torção pura presentes na literatura é possível admitir uma curva típica $T - \theta$, para vigas de referência com taxas de armadura correntes. Essa curva está apresentada na Figura 1.17 e é delineada por três zonas, diferenciadas pelo comportamento da viga, a Zona 1, 2 e 3.

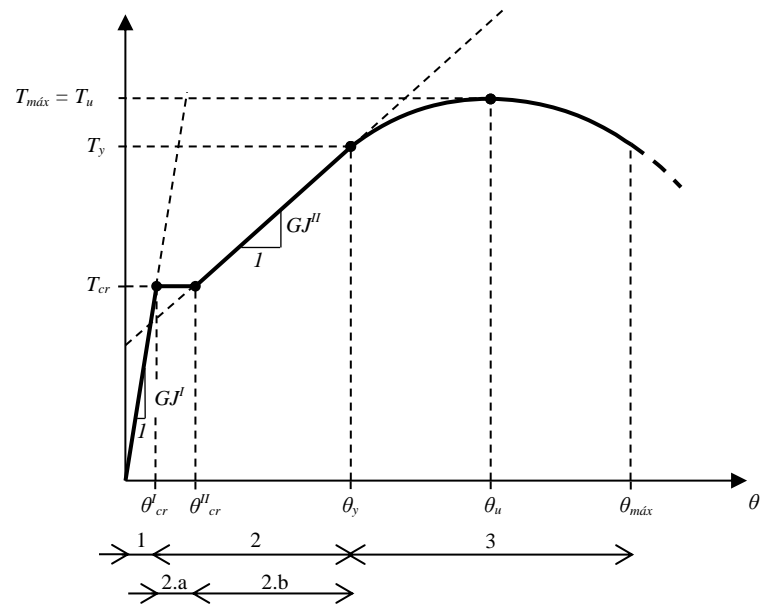


Figura 1.17. Curva típica $T - \theta$ para uma viga de betão armado sujeita à torção pura

A Zona 1 vai desde o início do ensaio até ao instante em que é alcançado o momento torsor de fissuração (T_{cr}) e representa a viga no estado não fissurado (Estado I). Esta fase é composta por uma reta com declive constante, o qual representa a rigidez elástica à torção (GJ^I), a reta pode ser calculada pela Teoria de St. Venant. Esta zona é constituída por uma reta por simplificação, pois através do estudo dos ensaios experimentais verifica-se uma ligeira diminuição da rigidez no instante antes de ser alcançado o momento torsor de fissuração. Esta redução deve-se às microfissurações desenvolvidas no betão, mas a simplificação é bastante aceite, porque as rotações presentes são muito pequenas nesta fase sendo admissível o cálculo da rigidez de torção com base num comportamento elástico-linear. Nesta fase a armadura de torção não é muito revelante para a rigidez da viga, pois a sua principal função é aumentar o momento torsor de fissuração, adiando ligeiramente o aparecimento das fissuras [3].

Quando o momento torsor de fissuração é alcançado a curva $T - \theta$ sofre um notável aumento de rotação, podendo este comportamento ser ilustrado por uma reta de declive nulo. Esta passagem caracteriza o início da fissuração e a entrada na Zona 2, que representa o estado fissurado (Estado II). Esta zona é composta por duas partes, a 2.a que representa o brusco aumento da rotação mencionado e a 2.b que corresponde a uma reta com declive, o qual corresponde à rigidez de torção pós-fissuração (GJ^{II}).

O aumento brusco da rotação na Zona 2.a com momento torsor constante (T_{cr}) é explicado por diversos autores como uma deformação angular necessária para que a viga se ajuste às novas condições de equilíbrio devido à fissuração. Esta explicação não é aceite por diversos autores, pois quando se analisa uma curva $T - \theta$ de uma viga com secção vazada de parede fina esta Zona 2.a não costuma ser experimentalmente observada, ou seja, não existe esta zona de transição reta com declive nulo ou quando aparece é muito mais suave. Esta

situação tem uma possível justificação quando comparada a uma viga de secção cheia, pois esta possui um núcleo central de betão o qual permite uma redistribuição das tensões tangenciais após a fissuração, que associada à diminuição de rigidez provocada pela fissuração origina o brusco aumento da rotação com momento torsor constante. Em contrapartida as secções vazadas de paredes finas não possuem espessura suficiente nas paredes para que ocorra a redistribuição das tensões na direção transversal, e consequentemente passa da Zona 1 para a Zona 2.b de forma instantânea ou em certos casos possui uma Zona 2.a muito ligeira. A Zona 2.b é caracterizada por um comportamento elástico-linear da viga em regime fissurado o qual é viável ser analisado pelo modelo de treliça espacial com ângulo constante de 45° e comportamento elástico-linear dos materiais, tal modelo é geralmente aceite para caracterizar esta fase comportamental [35].

A partir de certa altura a curva $T - \theta$ deixa de ter um comportamento linear, o que representa a entrada na Zona 3, a qual pode ocorrer por duas formas distintas. A mais frequente caracteriza-se pela cedência de pelo menos uma das armaduras de torção, longitudinal ou transversal. Outra forma sucede quando o betão comprimido das escoras está sujeito a elevadas tensões, deixando de ocorrer uma resposta linear por parte dos materiais. Esta segunda situação geralmente ocorre quando existem grandes taxas de armaduras de torção. Para a caracterização de ambas as situações é adequado utilizar um modelo comportamental não linear, como por exemplo o modelo de treliça espacial com ângulo variável (VATM).

1.2. Objetivos e justificação do tema

O modelo da Analogia da Treliça Espacial oferece uma simulação do comportamento de vigas sujeitas à torção ao longo do historial de carga. Este modelo tem vindo a ser desenvolvido principalmente desde do fim da década de 60 e é hoje em dia um dos modelos base mais utilizado em diversos documentos normativos. Considerado um dos melhores simuladores do comportamento das vigas à torção, o modelo deixa de ser rigoroso para graus de carregamentos baixos, pois assume que a viga se encontra totalmente fissurada desde o início do carregamento.

A Figura 1.18 ilustra as curvas $T - \theta$ para uma viga de referência M2, em que a curva teórica foi calculada por Hsu e Mo [21] através de um algoritmo de cálculo fundamentado no modelo de treliça espacial com ângulo variável (VATM) e comparada com os resultados experimentais da mesma viga obtidos pela American Concrete Institute. A viga de referência M2 possui uma secção retangular cheia com betão armado de resistência normal, em que as suas dimensões, taxas de armadura e resistência média do betão à compressão se encontram indicados na Figura 1.18.

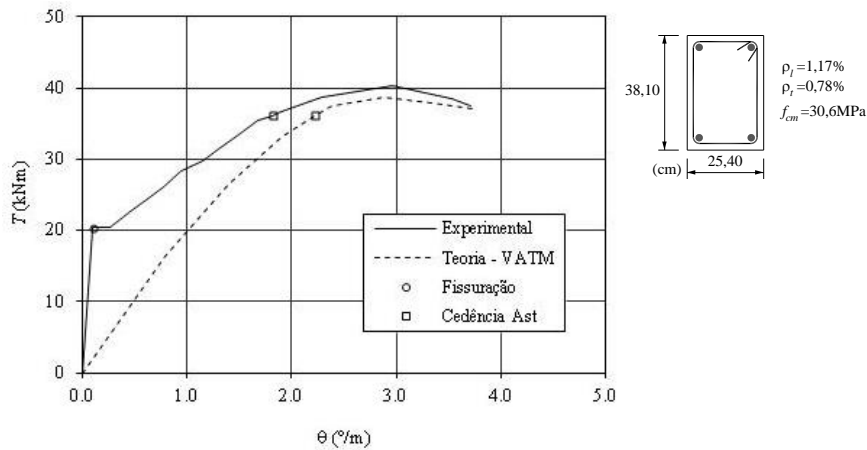


Figura 1.18. Curvas $T - \theta$ teórica e experimental para a Viga M2 [21]

Ao analisar as curvas $T - \theta$ da Figura 1.18, verifica-se que a curva teórica se aproxima da experimental para valores últimos do momento torsor, mas quando o momento torsor possui valores baixos a curva teórica encontra-se muito abaixo da experimental. Esta discrepância entre curvas é essencialmente explicada pelo nível de fissuração assumido pelo VATM, pois este modelo assume uma viga extensivamente fissurada desde o início do ensaio. Este aspeto é válido quando os momentos torsores são elevados mas irrealista quando são baixos, porque nesta fase a viga não se encontra extensivamente fissurada ou nem um pouco fissurada. Assim sendo, pode considerar-se que o VATM apenas é válido para elevados níveis de carregamento.

Numa primeira tentativa de superar o problema referido anteriormente, em 2008, Bernardo e Lopes [10] desenvolveram o primeiro modelo que traduz o comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção pura. Esse modelo agrupa diversas teorias, de entre as quais o VATM para a parte última, de forma a prever as diferentes fases comportamentais da viga. Além disso, o referido modelo inclui a análise de vigas de betão armado de alta resistência, as quais apresentam propriedades mecânicas do betão muito distintas do betão de resistência normal.

Na Figura 1.19 está representada a comparação da curva $T - \theta$ experimental com a teórica segundo o modelo de Bernardo e Lopes, para diferentes vigas de betão armado de resistência normal e de alta resistência sujeitas à torção pura.

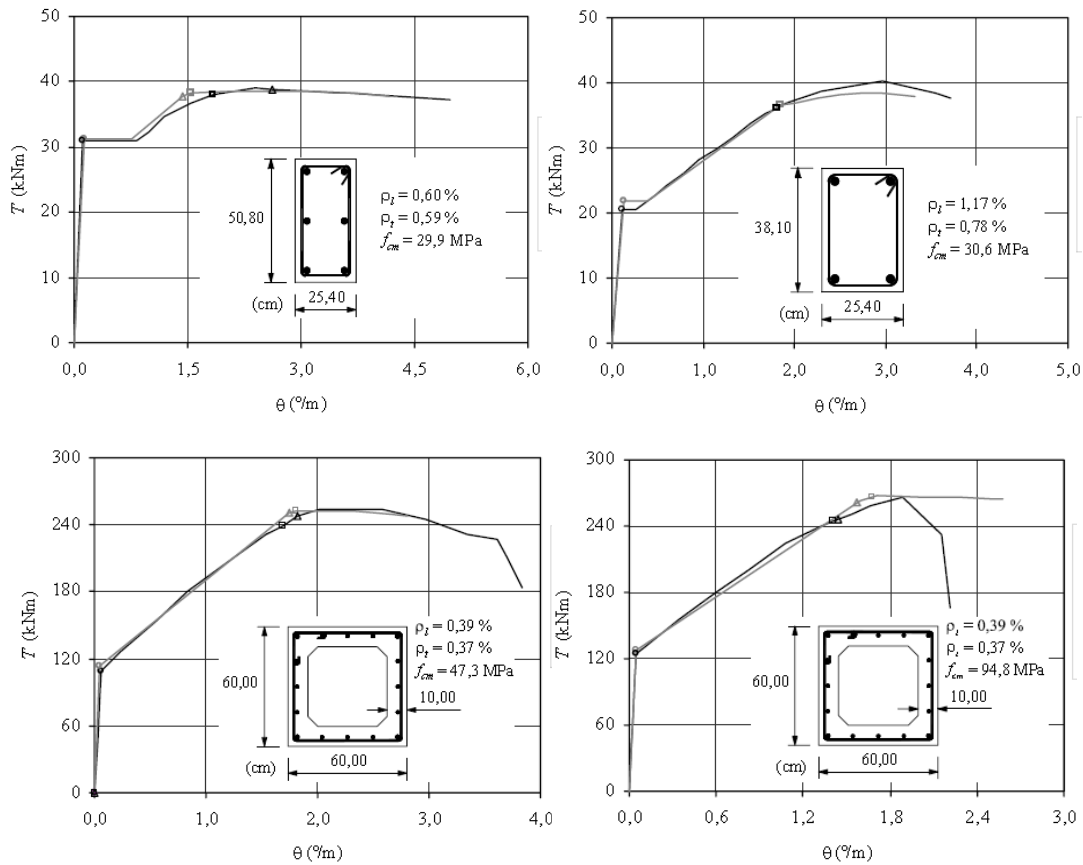


Figura 1.19. Curvas $T - \theta$ segundo o modelo de Bernardo e Lopes [10]

Após a observação das curvas $T - \theta$, pode concluir-se que a curva teórica se aproxima bastante da experimental, o que viabiliza o modelo desenvolvido por Bernardo e Lopes. No entanto, este modelo não é teoricamente satisfatório, o que foi reconhecido pelos próprios autores, devido à transição das fases comportamentais e ao facto de não ser possível obter, a partir do modelo, informações sobre o estado interno de tensões e extensões para baixos níveis de carregamento.

A curva $T - \theta$ tem por base três fases comportamentais, deste modo foram utilizadas três teorias distintas para as definir, o que solicitou aos autores o estabelecimento de critérios semi-empíricos para a transição das fases.

Após o cálculo separado das três fases comportamentais, os critérios de transição utilizados no modelo requerem um ligeiro ajuste da curva $T - \theta$ no eixo das rotações. Além disso, o modelo não permite obter de forma rigorosa o estado interno de tensões e deformações da viga, nomeadamente nas armaduras. Este aspeto é importante, pois para garantir o bom desempenho em serviço de uma estrutura e a sua durabilidade é muito importante a verificação da segurança dos Estados Limites de Serviço pelos documentos normativos, o que em geral requer o conhecimento das tensões e deformações internas nos materiais.

De modo a aperfeiçoar o modelo, Bernardo *et al.* [11], desenvolveram em 2012 um novo modelo designado por Modelo da Treliza com Ângulo Variável Modificado (MVATM). Este modelo tem por base o VATM original de Hsu e Mo [21], e incorpora correções para os níveis baixos de carregamentos, bem como as relações constitutivas atualizadas para o betão à compressão e para o aço à tração, tendo em conta o *softening effect* e o *stiffening effect*, respetivamente. O principal objetivo deste modelo foi obter o comportamento global de vigas à torção através de apenas uma teoria, de modo a eliminar a utilização de critérios de transição entre as várias fases comportamentais.

O MVATM foi concebido com sucesso pois os resultados obtidos são muito próximos aos do modelo de Bernardo e Lopes, com a vantagem de utilizar apenas uma teoria para as três fases de comportamento global de uma viga. A Figura 1.20 apresenta a comparação das curvas obtidas pelo MVATM, pelo modelo de Bernardo e Lopes e por via experimental, a partir das quais se confirma os bons resultados associados ao MVATM.

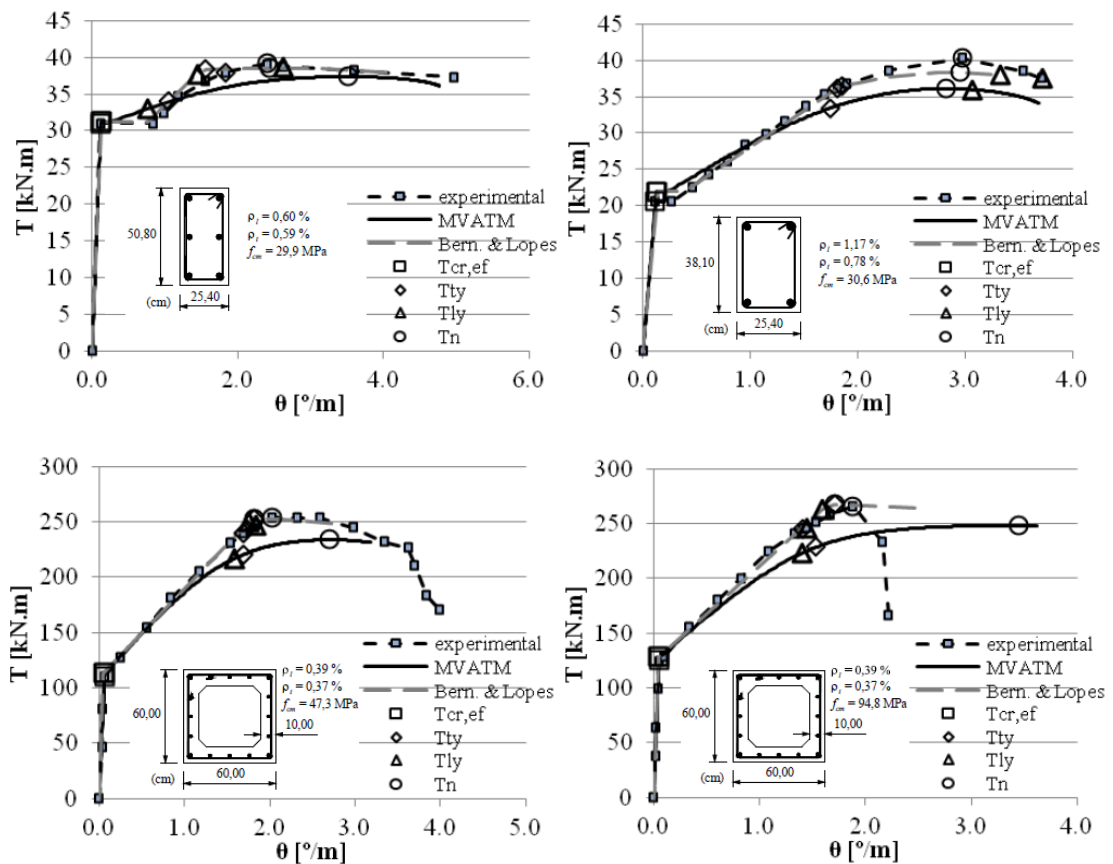


Figura 1.20. Curvas T - θ calculadas por diferentes modelos e por via experimental [11]

Refere-se no entanto, que o problema associado à indeterminação rigorosa do estado interno de tensão e deformação da viga para a fase pós-fissuração no MVATM permanece, o que se deve à necessidade de continuar a incorporar um critério semi-empírico de ajustamento da curva T - θ para a referida fase comportamental.

Em síntese, o MVATM representa um avanço no estudo de um modelo único e global baseado no VATM para caracterizar todas as fases comportamentais de uma viga sujeita à torção, apesar da necessidade de corrigir as rotações após a fissuração e do modelo, por si só, não conseguir prever o momento torsor de fissuração.

Em 2009, Hsu e Jeng [28], propuseram um novo modelo teórico designado por *Softened Membrane Model of Torsion (SMMT)*. Este modelo surgiu do desenvolvimento de um já existente, o *Softened Membrane Model (SMM)* que consiste num modelo de membrana desenvolvido para placas de betão armado sujeitas ao corte, o qual não pode ser considerado uma variante do modelo de treliça espacial. Para adaptar este modelo a vigas sujeitas à torção, Jeng e Hsu relacionaram, através da Teoria de Bredt, o fluxo de tensões de corte previsto pelo modelo da membrana com o momento torsor externo aplicado na secção, o que permitiu obter um modelo que simula o comportamento global da viga à torção. Além disso, este modelo integra na sua formulação uma relação constitutiva para o betão à tração de modo a contabilizar a contribuição do betão à tração na direção perpendicular à escora.

A Figura 1.21 ilustra a comparação das curvas $T - \theta$ experimentais (representada com linha contínua) com as teóricas obtidas pelo SMMT (representada a tracejada).

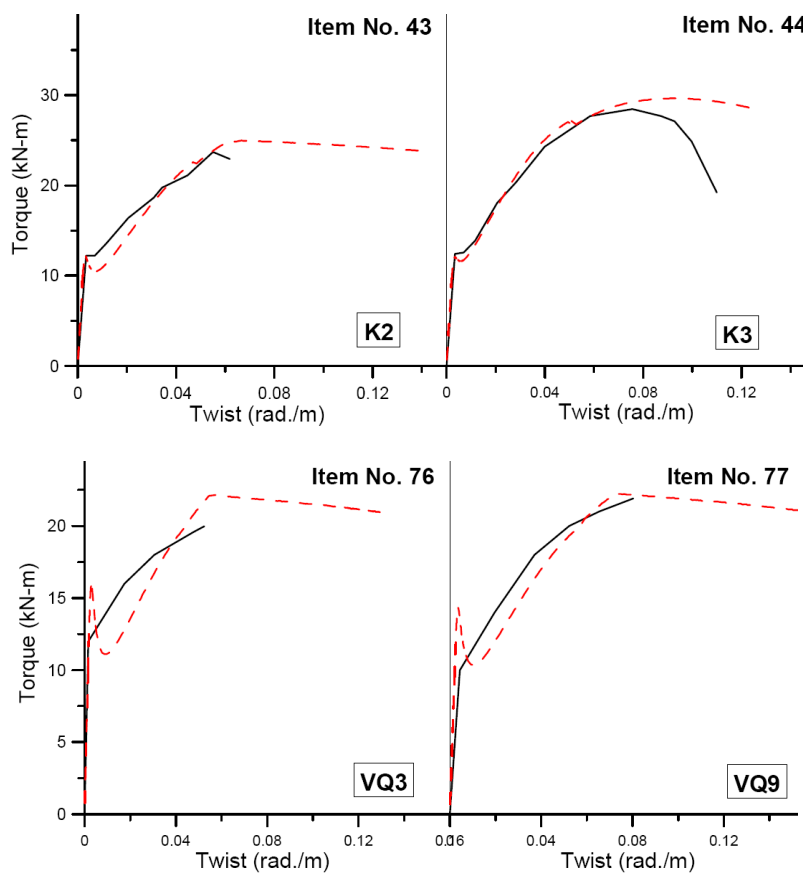


Figura 1.21. Curvas $T - \theta$ segundo o Jeng e Hsu [28]

Os resultados obtidos pelo SMMT são bastante consistentes no geral, mas apresentam uma diminuição acentuada do momento torsor na curva $T - \theta$ na passagem da fase não fissurada para a fase fissurada, que não se observa nos ensaios experimentais, o que provoca uma previsão pouco rigorosa da rigidez pós-fissuração. Além desta situação, em comparação com o VATM e o MVATM, o SMMT possui uma formulação matemática mais complexa e com critérios de convergência mais difíceis de implementar computacionalmente, o que não permite uma leitura simples do comportamento de uma viga à torção após a fissuração.

Aproveitando um dos princípios básicos do SMMT, designadamente a consideração da contribuição do betão à tração na direção perpendicular às escoras, Bernardo *et al.* [13], reformularam o VATM original e propuseram um novo modelo que incorpora um “tirante” adicional na direção referida. O novo modelo, designado por *Generalized Softened Variable Angle Truss-Model* (GSVATM), tal como o SMMT, constitui um modelo global para o qual o VATM é um caso particular quando não se considera a contribuição do betão à tração na direção perpendicular às escoras.

As curvas $T - \theta$ obtidas pelo GSVATM são comparadas na Figura 1.22 com as que Hsu obteve nos ensaios experimentais de vigas de betão armado sujeitas à torção.

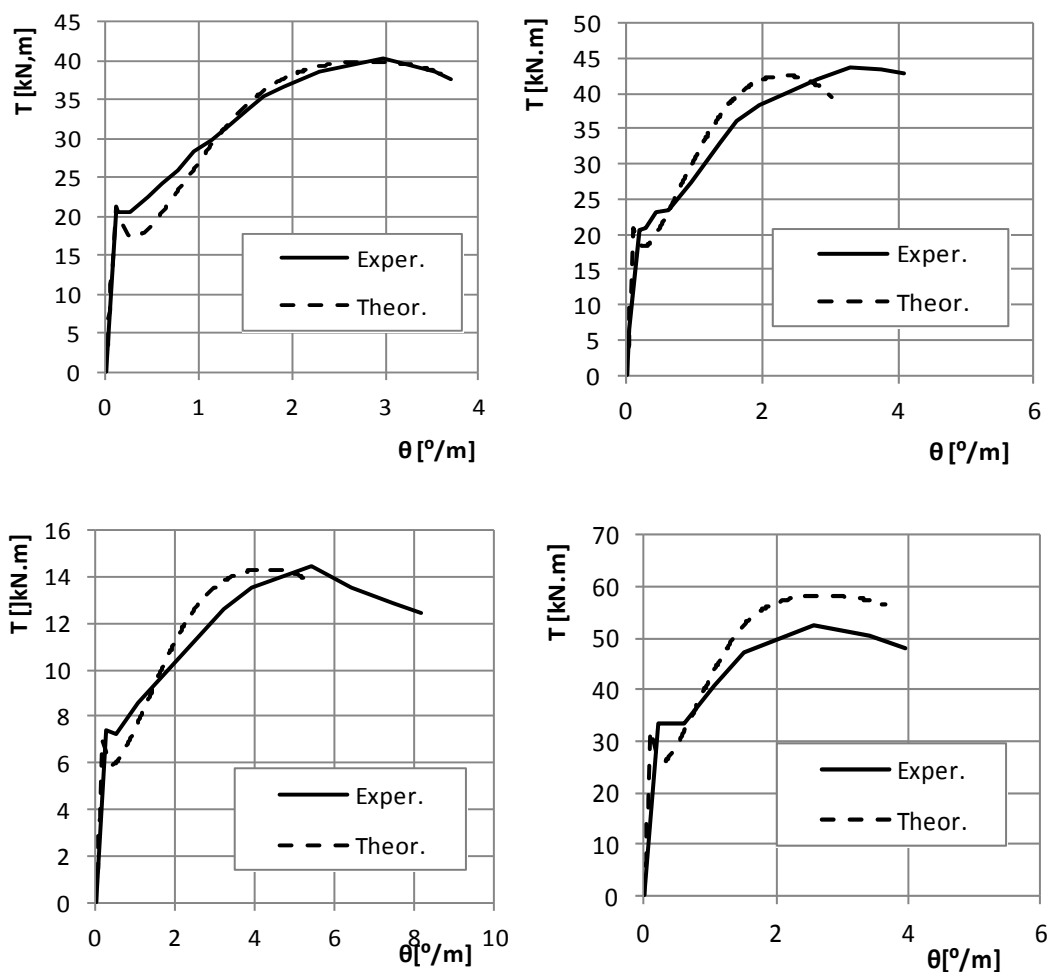


Figura 1.22. Curvas $T - \theta$ segundo o GSVATM e Hsu [13]

A comparação dos resultados teóricos do GSVATM com os experimentais é bastante satisfatória, mas tal como no SMMT, volta a observar-se a brusca descida acentuada do momento torsor imediatamente após a fissuração da viga. Bernardo *et al.*, suspeitam que o referido comportamento se deve à “forma” da curva correspondente à lei constitutiva do betão à tração usada no modelo, que apresenta uma brusca diminuição da participação do betão à tração depois do pico de tensão.

Conclui-se que o GSVATM permite obter resultados semelhantes ao SMMT. No entanto, em comparação ao SMMT, o GSVATM possui uma formulação mais simples, mais fácil de implementar computacionalmente e permite uma leitura mais simples do comportamento de vigas sujeitas à torção ao longo de todo o historial de carga. Além disso, tal como no SMMT, é possível obter o estado de tensão e extensão da viga.

Tanto no GSVATM como no SMMT, foi apenas incorporada uma única lei constitutiva para o betão à tração, designadamente a lei proposta por Belarbi e Hsu [5]. Na literatura científica existem propostas de outros autores de diferentes formulações para a lei constitutiva para o betão à tração. A resposta de qualquer modelo teórico que incorpore leis constitutivas para os materiais, depende fortemente da escolha dessas mesmas leis. Tal dependência foi recentemente verificada por Bernardo *et al.* [12] ao verificarem que a resposta última de vigas de betão armado sujeitas à torção e analisadas com base no VATM, é fortemente dependente da lei constitutiva considerada para o betão à compressão e para as armaduras à tração. Refere-se que os resultados deste estudo foram importantes para os autores do GSVATM escolherem qual a lei constitutiva a utilizar para o betão à compressão e para as armaduras à tração.

Tendo por base o exposto anteriormente, espera-se que a resposta por parte do GSVATM e do SMMT, principalmente para baixos níveis de carregamento, seja fortemente dependente da lei constitutiva escolhida para o betão à tração.

O principal objetivo deste trabalho é em primeiro lugar, realizar uma pesquisa bibliográfica no sentido de coletar várias propostas de diferentes autores para a lei constitutiva do betão à tração que possam ser utilizadas em modelos comportamentais para vigas à torção baseados na analogia da treliça espacial, designadamente no GSVATM. Em segundo lugar, implementar tais leis no GSVATM e avaliar qual dessas leis permite obter a melhor previsão comportamental teórica de vigas de referência de betão armado sujeitas à torção, vigas estas cujos resultados experimentais podem ser encontrados na literatura. Em particular, será estudada a curva $T - \theta$ das vigas na zona de transição do estado não fissurado para o estado fissurado. Finalmente, avaliar a necessidade da melhor lei encontrada necessitar uma calibração adicional e propor o formato para essa mesma calibração.

Este trabalho é essencial para garantir que as previsões do GSVATM, no âmbito do comportamento em serviço de vigas de betão armado à torção pura, sejam consideradas suficientemente fiáveis de modo a que possam ser utilizadas nas verificações de segurança, nomeadamente para o controlo da fissuração e da deformação.

Capítulo 2. Generalização do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável

2.1. Introdução

Este capítulo destina-se à apresentação detalhada da Generalização do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (GSVATM), o qual constitui o modelo base na presente dissertação. Este é um modelo analítico baseado numa generalização do VATM, desenvolvido para prever a curva $T - \theta$ para vigas de betão armado sujeitas à torção em todas as fases comportamentais. A principal diferença entre o GSVATM em relação ao VATM consiste na introdução da lei constitutiva tensão-extensão para o betão à tração na formulação. Para tal é adicionado um “tirante” perpendicular à escora de betão, o qual traduz o comportamento do betão à tração nessa mesma direção, tal como já foi referido no Capítulo 1. O GSVATM foi desenvolvido por Bernardo *et al.* em 2013 [13].

As seguintes secções do presente capítulo apresentam a formulação e o procedimento de cálculo do GSVATM para a previsão da curva $T - \theta$ para vigas de betão armado sujeitas à torção. Começa-se por apresentar o formalismo para vigas de betão armado sujeitas ao esforço transversal e à flexão, o qual é depois estendido para o caso de vigas sujeitas à torção pura. Segue-se a apresentação das equações de equilíbrio e de compatibilidade necessárias para a elaboração da curva teórica $T - \theta$.

2.2. Formulação do GSVATM para vigas de betão armado

2.2.1. Vigas sujeitas ao Esforço Transversal

Para o estudo de vigas de betão armado de alma fina sujeitas ao esforço transversal considera-se um modelo de treliça plana, a fim de determinar posteriormente as equações de equilíbrio para o caso da torção. Deste modo, admite-se o equilíbrio de uma viga de betão armado simplesmente apoiada de alma fina com espessura t e com uma carga concentrada a meio vão, a qual origina esforços transversos (V) e momentos fletores (M). O modelo de treliça que traduz a viga descrita é apresentado na Figura 2.1. Assume-se que a armadura longitudinal se concentra na corda superior e inferior da viga e que a distância entre estas, designada por d_v , é equivalente ao comprimento das barras verticais (armadura transversal).

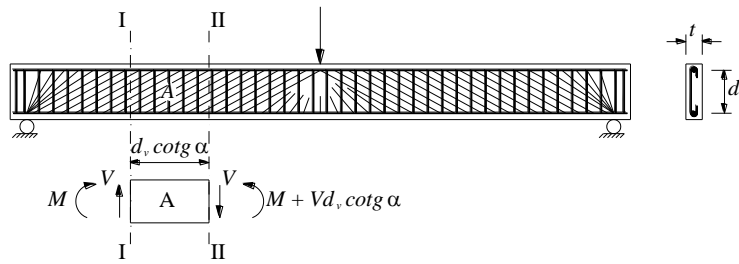


Figura 2.1. Análise de uma viga com base no modelo de treliça plana [13]

Na viga da Figura 2.1 estão representados dois cortes: a secção I – I e a secção II – II. Entre as referidas secções é considerado um elemento de viga designado por A com comprimento, $d_v \cot \alpha$ o qual corresponde à projeção horizontal de uma fissura com ângulo α em relação ao eixo longitudinal da viga. Este elemento A está sujeito a um esforço transverso constante V e a um momento fletor variável, igual a M na face esquerda e $M + V d_v \cot \alpha$ na face direita. A Figura 2.2 ilustra o equilíbrio do referido elemento A.

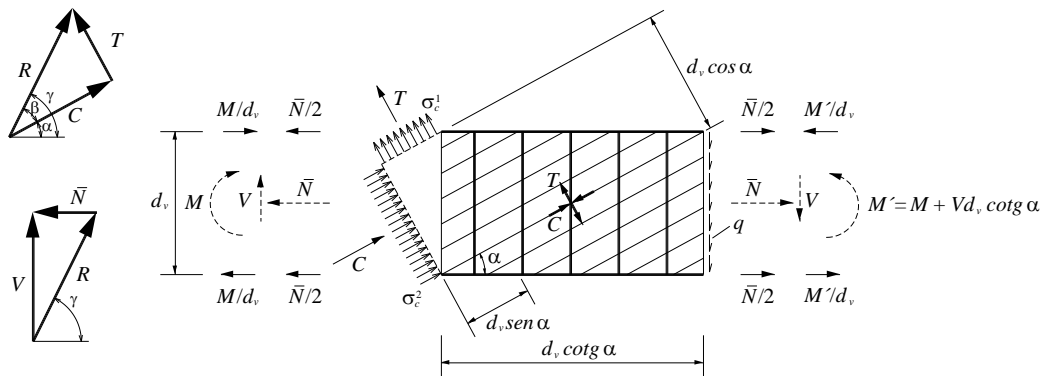


Figura 2.2. Equilíbrio do elemento A [13]

As tensões de corte q localizadas na face direita do elemento A são induzidas pelo esforço transverso V e admitem-se uniformes ao longo da altura da secção. Desta forma, tais tensões de corte podem ser calculadas por:

$$q = \frac{V}{d_v} \quad (2.1)$$

De seguida descrevem-se as forças internas do betão que se encontram ilustradas na face esquerda do elemento A. Primeiramente, a força de compressão C que atua nas escoras diagonais de betão, as quais fazem um ângulo α com a direção longitudinal da viga. Seguidamente, a força de tração T , a qual se considera que atua nos tirantes diagonais de betão, perpendiculares às escoras diagonais. Esta força de tração representa o “tirante” suplementar, o qual diferencia este modelo do VATM original. A tensão de compressão σ_2^c (a letra c superior à linha representa o material betão, c - “concrete”, e o número 2 inferior à linha representa a direção principal de compressão), associada à força de compressão C , atua na secção transversal das escoras com largura t e altura $d_v \cos \alpha$. A tensão de tração σ_1^c (o

número 1 inferior à linha representa a direção principal de tração), associada à força de tração T , atua na secção transversal dos tirantes com largura t e altura $d_v \sin \alpha$. A força longitudinal \bar{N} é absorvida igualmente pelas armaduras longitudinais na secção I – I.

A resultante R das forças de compressão C e de tração T está representada no triângulo de forças superior da Figura 2.2 e calcula-se do seguinte modo:

$$R = \sqrt{C^2 + T^2} \quad (2.2)$$

O ângulo β e γ que a resultante faz, respetivamente, com a força de compressão C e o eixo longitudinal da viga são determinados por:

$$\beta = \arctg\left(\frac{T}{C}\right) \quad (2.3)$$

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (2.4)$$

O modelo da Figura 2.2 admite que $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, porém após algumas simulações realizadas com o GSVATM, os autores do modelo verificaram que, para momentos torsores inferiores a pouco mais do que o momento de fissuração, prevalecia $\alpha + \beta > 90^\circ$. Deste modo, a condição $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ perde a relevância para níveis de momentos torsores superiores ao momento de fissuração.

Segue-se um resumo das derivações para a formulação do GSVATM, de acordo com o apresentado por Bernardo *et al.* [13]. Para tal, distinguem-se as situações $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$.

Para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, tal como ilustrado na Figura 2.2, é apresentada a decomposição da força de corte V no triângulo de forças inferior. Esta força é decomposta nas forças \bar{N} e R que se calculam pelas seguintes equações:

$$\bar{N} = V \cot \gamma \quad (2.5)$$

$$R = \frac{V}{\sin \gamma} \quad (2.6)$$

A tensão aplicada nas escoras de betão σ_2^c advém da força de compressão C , que atua numa secção com uma área transversal de t por $d_v \cos \alpha$ (Figura 2.2):

$$\sigma_2^c = \frac{C}{td_v \cos \alpha} \quad (2.7)$$

Do mesmo modo, a tensão aplicada nos tirantes diagonais de betão σ_1^c resulta da força de tração T que atua numa secção com uma área de t por $d_v \sin \alpha$ (Figura 2.2):

$$\sigma_1^c = \frac{T}{td_v \sin \alpha} \quad (2.8)$$

A armadura longitudinal inferior e superior absorve a força \bar{N} que tem origem na força de corte V . No entanto, para além da força \bar{N} existe também a força originada pelo momento atuante em cada face. Assim sendo, na face esquerda do elemento A (Figura 2.2) tem-se metade da força \bar{N} , que pode ser substituída pela Equação 2.5, e o acréscimo de força devido ao momento $\pm M/d_v$, a partir do qual resultam as forças na corda superior e inferior N_t e N_b , respetivamente:

$$N_t^{esq} = -\frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma \quad (2.9)$$

$$N_b^{esq} = \frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma \quad (2.10)$$

De forma semelhante, na face direita do elemento A (Figura 2.2) tem-se metade da força \bar{N} somada à força originada pelo momento $\pm(M + Vd_v \cot \alpha)/d_v$, vindo:

$$N_t^{dir} = -\frac{M + Vd_v \cot \alpha}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} - V \cot \alpha + \frac{V}{2} \cot \gamma = -\frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} - \cot \alpha \right) \quad (2.11)$$

$$N_b^{dir} = \frac{M + Vd_v \cot \alpha}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + V \cot \alpha + \frac{V}{2} \cot \gamma = \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} + \cot \alpha \right) \quad (2.12)$$

Para determinar a força que atua na armadura transversal é necessário efetuar um corte horizontal no elemento A com uma altura arbitrária y medida a partir da face inferior, obtendo-se um corpo livre retangular tal como ilustrado na Figura 2.3.

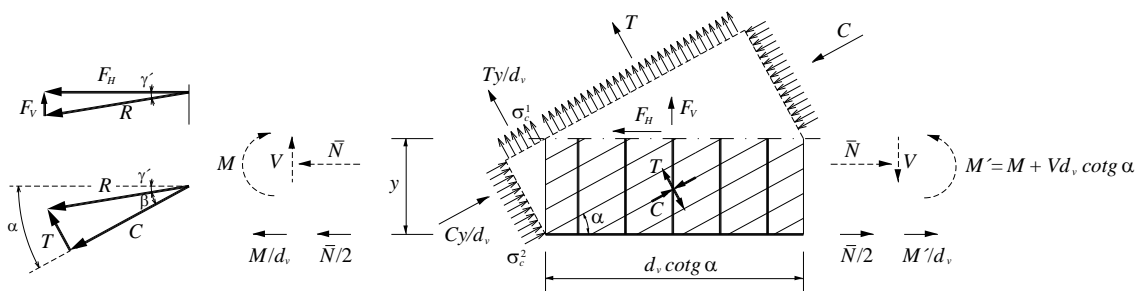


Figura 2.3. Equilíbrio de um corpo livre retangular ($\alpha + \beta \leq 90^\circ$)

Na superfície de corte horizontal atuam duas forças para assegurar o equilíbrio, a força horizontal F_H e a força vertical F_V .

A força horizontal F_H é obtida através de equilíbrio com as forças que atuam na armadura horizontal inferior (Figura 2.3):

$$F_H + \left(\frac{M}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} \right) - \left(\frac{M'}{d_v} + \frac{\bar{N}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow F_H = -\frac{M}{d_v} - \frac{V}{2} \cot \gamma + \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} + \cot \alpha \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_H = V \cot \alpha \quad (2.13)$$

A força vertical F_V na superfície de corte horizontal resulta da força que atua na armadura transversal ao longo do comprimento $d_v \cot \alpha$ (comprimento do elemento A):

$$F_V = n_v d_v \cot \alpha \quad (2.14)$$

Em que n_v é a força na armadura transversal por unidade de comprimento:

$$n_v = \frac{A_{st} f_{st}}{s} \quad (2.15)$$

Onde A_{st} é a área de um varão de armadura transversal, f_{st} é a tensão na armadura transversal e s é o espaçamento longitudinal da armadura transversal.

No triângulo de forças inferior da Figura 2.3 está representada a resultante R das forças de compressão C e de tração T , bem como os respetivos ângulos com o eixo longitudinal da viga. A partir deste triângulo obtém-se o ângulo γ' que a resultante R faz com o eixo longitudinal da viga:

$$\gamma' = \alpha - \beta = \gamma - 2\beta \quad (2.16)$$

A resultante R das forças que atuam na superfície de corte do elemento A está representada no triângulo de forças superior da Figura 2.3, a partir do qual, conjuntamente com as Equações 2.13 e 2.14, resulta:

$$\cot \gamma' = \frac{F_H}{F_V} = \frac{V \cot \alpha}{n_v d_v \cot \alpha} \Leftrightarrow n_v d_v = V \tan \gamma' \quad (2.17)$$

Ao substituir a equação anterior na Equação 2.15 obtém-se:

$$A_{st} f_{st} = \frac{Vs \tan \gamma'}{d_v} \quad (2.18)$$

Na Figura 2.4 apresenta-se o elemento A em equilíbrio quando $\alpha + \beta > 90^\circ$ e, seguidamente, as alterações a realizar nas equações apresentadas anteriormente.

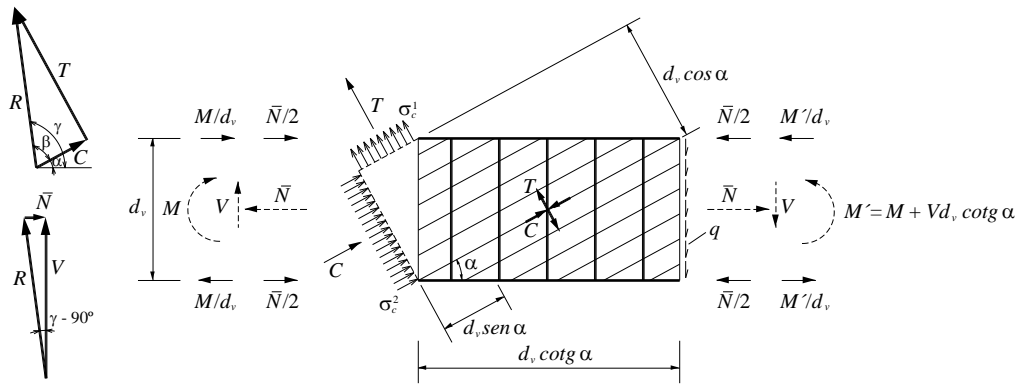


Figura 2.4. Equilíbrio do elemento A quando $\alpha + \beta > 90^\circ$ [13]

A Figura 2.4 tem de estar em concordância com a Figura 2.2, isto é, a equação vetorial que relaciona as forças V , \bar{N} e R tem de se manter para ambas as situações ($\vec{V} = \vec{R} + \vec{N}$). Esta concordância implica que a força longitudinal \bar{N} esteja orientada para o elemento A. Deste modo, é previsto que as armaduras longitudinais possam estar sujeitas à compressão. No entanto, lembre-se que esta situação só é prevista ocorrer para carregamentos muito baixos, pelo que aparentemente anormal do ponto de vista físico, não é muito relevante.

As tensões de corte q , a resultante R das forças de compressão e de tração e o ângulo γ que esta resultante faz com o eixo horizontal da viga mantêm-se inalterados para $\alpha + \beta > 90^\circ$. A força longitudinal \bar{N} passa a ser obtida a partir do triângulo de forças inferior da Figura 2.4:

$$\tan(\gamma - 90^\circ) = \frac{\bar{N}}{V} \Leftrightarrow \bar{N} = -\tan(90^\circ - \gamma)V \Leftrightarrow \bar{N} = -V \cot \gamma \quad (2.19)$$

Uma vez que o ângulo γ passou a ser $\gamma - 90^\circ$, a resultante R das forças de compressão e de tração obtidas a partir do triângulo de forças alterou, sendo representado pelo triângulo superior da Figura 2.4 e dada por:

$$\cos(\gamma - 90^\circ) = \frac{V}{R} \Leftrightarrow R = \frac{V}{\cos(90^\circ - \gamma)} \Leftrightarrow R = \frac{V}{\sin \gamma} \quad (2.20)$$

Apesar do triângulo de forças ter alterado, a Equação 2.20 é igual à Equação 2.6.

As tensões nas escoras e nos tirantes diagonais de betão, σ_2^c e σ_1^c respetivamente, também se mantêm inalteradas.

O cálculo das forças nas armaduras longitudinais é efetuado tal como para a situação $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, mas é dependente de \bar{N} , o qual passou a ser negativo (Equação 2.19). Assim sendo, as forças na corda superior e inferior, N_t e N_b respetivamente, para a face esquerda e direita são dadas por:

$$N_t^{esq} = -\frac{M}{d_v} - \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma \quad (2.21)$$

$$N_b^{esq} = \frac{M}{d_v} - \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + \frac{V}{2} \cot \gamma \quad (2.22)$$

$$N_t^{dir} = -\frac{M'}{d_v} - \frac{\bar{N}}{2} = -\frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} - \cot \alpha \right) \quad (2.23)$$

$$N_b^{dir} = \frac{M}{d_v} - \frac{\bar{N}}{2} = \frac{M}{d_v} + V \left(\frac{\cot \gamma}{2} + \cot \alpha \right) \quad (2.24)$$

O corpo livre retangular para $\alpha + \beta > 90^\circ$ encontra-se ilustrado na Figura 2.5, com a nova relação vetorial entre as forças C e T .

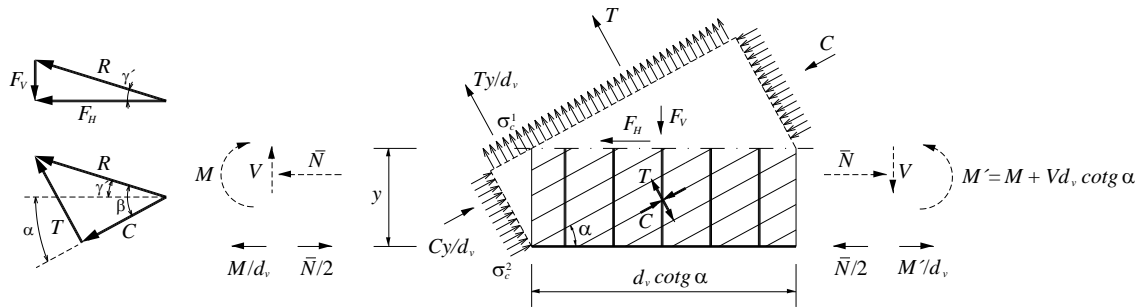


Figura 2.5. Equilíbrio de um corpo livre retangular ($\alpha + \beta > 90^\circ$) [13]

Tal como foi imposto para a Figura 2.4, a Figura 2.5 também tem de estar em concordância com a Figura 2.3. Para isso, a soma vetorial que relaciona as forças F_H , F_V e R tem de se manter ($\vec{F}_H = \vec{R} + \vec{F}_V$), o que implica que a força F_V fique virada para baixo, e conseqüentemente, as armaduras transversais estejam em compressão.

Apesar da troca de sinais da força F_V , as Equações 2.13 à 2.18 mantêm-se inalteradas, com exclusão da equação 2.16 que passa a ter por base o triângulo de forças inferior da Figura 2.5:

$$\gamma' = \beta - \alpha = 2\beta - \gamma \quad (2.25)$$

2.2.2. Vigas sujeitas à torção

A Figura 2.6 representa o tipo de viga idealizada e utilizada para a formulação do GSVATM. À semelhança do considerado no VATM, é também considerada para o GSVATM uma viga com secção retangular vazada, armada na direção longitudinal com um varão em cada canto e na direção transversal com cintas espaçadas uniformemente. O modelo da referida viga incorpora também escoras inclinadas com um ângulo α em relação ao eixo longitudinal da viga. O conjunto de forças existentes nas armaduras e nas escoras constitui uma treliça espacial de ângulo variável (VATM).

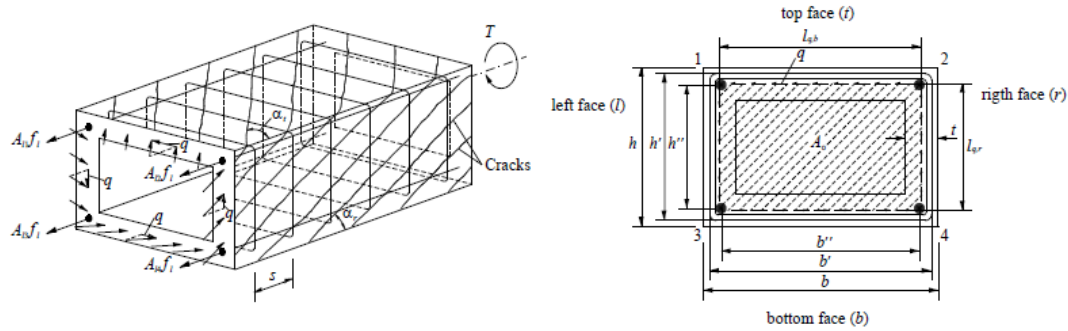


Figura 2.6. Viga com secção retangular vazada sujeita à torção [35]

Ao observar a secção transversal da viga na Figura 2.6 verifica-se a existência de dois tipos de forças, as forças nas barras longitudinais de canto e as forças nas escoras inclinadas de betão com ângulo α em relação ao eixo longitudinal da viga. A resultante destas duas forças constitui o fluxo de corte q no plano da secção transversal. Tal como já foi referido anteriormente, o GSVATM incorpora também tirantes diagonais perpendiculares às escoras, os quais também contribuem com uma força adicional para o equilíbrio. Deste modo, é necessário calcular previamente a resultante entre as forças nas escoras e nos tirantes, que combinada com as forças das barras longitudinais vai originar o fluxo de corte q no plano da secção transversal.

A viga da Figura 2.6 pode ser equiparada a um tubo de parede fina, o qual pode ser caracterizado a partir da Teoria de Bredt para tubos de parede fina. Segundo esta teoria, o fluxo constante circulatório de corte q nas paredes da secção em função do momento torsor (M_T) aplicado, é dado por:

$$q = \frac{M_T}{2A_o} \quad (2.26)$$

Em que A_o é a área limitada pela linha média de fluxo de corte (Figura 2.6), assumindo-se que esta coincide com a linha média das paredes com espessura t .

A força de corte que atua numa secção cheia de alma fina é idêntica à força de corte que atua numa parede reta de uma viga com secção vazada. Isto é, a força de corte representada na Figura 2.5 é idêntica à que atua numa das paredes retas da viga da Figura 2.6, com uma altura l_q , sendo este comprimento correspondente à linha média do fluxo de corte q . Sendo assim, a força de corte na parede reta V é a resultante do fluxo de corte ao longo da altura da parede:

$$V = ql_q \quad (2.27)$$

Na subsecção anterior, a formulação das vigas sujeitas ao esforço transversal é feita para duas situações, uma quando $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e outra quando $\alpha + \beta > 90^\circ$. Para as vigas sujeitas à torção esta distinção também deve ser considerada. Apresenta-se de seguida e em primeiro lugar a formulação do GSVATM para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$.

A força longitudinal na armadura da parede \bar{N} pode ser calculada através da substituição da Equação 2.27 na Equação 2.5:

$$\bar{N} = ql_q \cot \gamma \quad (2.28)$$

Ao substituir o fluxo constante circulatório de corte q obtido pela Equação 2.26 na equação anterior, pode obter-se a força longitudinal na armadura da parede \bar{N} em função do momento torsor M_T :

$$\bar{N} = \frac{M_T l_q}{2A_o} \cot \gamma \quad (2.29)$$

Definindo que $p_o = \sum l_q$, o que representa o perímetro da linha média de fluxo de corte e que $\Delta N = A_{sl} f_{sl}$ é a força total nas barras longitudinais da secção, onde A_{sl} é a área total de armadura longitudinal e f_{sl} a sua respetiva tensão, pode obter-se:

$$\Delta N = \sum \bar{N} = \frac{M_T}{2A_o} \sum l_q \cot \gamma = \frac{M_T p_o}{2A_o} \cot \gamma \Leftrightarrow A_{sl} f_{sl} = \frac{M_T p_o}{2A_o} \cot \gamma \quad (2.30)$$

A força distribuída na armadura transversal da parede é calculada através da Equação 2.18, na qual se substitui a força de corte V dada pela Equação 2.1 e, seguidamente, substitui-se o fluxo de corte q pela Equação 2.26:

$$A_{st} f_{st} = \frac{Vs \tan \gamma'}{d_v} = \frac{qd_v s \tan \gamma'}{d_v} = \frac{M_T s}{2A_o} \tan \gamma' \quad (2.31)$$

Onde A_{st} é a área de uma barra transversal e f_{st} a sua respetiva tensão.

As tensões na escora e no tirante diagonal de betão são calculadas através da resultante R entre as forças de compressão C e de tração T . Para isso, em primeiro lugar substitui-se a Equação 2.26 na Equação 2.1 e resolve-se em ordem à força de corte V :

$$V = \frac{M_T d_v}{2A_o} \quad (2.32)$$

Substituindo a equação anterior na Equação 2.6, obtém-se a resultante R em função do momento torsor M_T :

$$R = \frac{M_T d_v}{2A_o \sin \gamma} \quad (2.33)$$

A partir do triângulo de forças superior da Figura 2.2 e da Equação 2.33, pode-se calcular a força de compressão na escora diagonal C e a força de tração no tirante diagonal T :

$$C = R \cos \beta = \frac{M_T d_v \cos \beta}{2A_o \sin \gamma} \quad (2.34)$$

$$T = R \sin \beta = \frac{M_T d_v \sin \beta}{2A_o \sin \gamma} \quad (2.35)$$

A tensão na escora diagonal e no tirante diagonal de betão é obtida pela substituição das Equações 2.34 e 2.35 nas Equações 2.7 e 2.8, respetivamente:

$$\sigma_2^c = \frac{M_T}{2A_o t_c} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.36)$$

$$\sigma_1^c = \frac{M_T}{2A_o t_t} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.37)$$

Em que t_c representa a espessura da escora diagonal de betão e t_t a espessura do tirante diagonal de betão.

De seguida, apresenta-se a formulação do GSVATM para vigas sujeitas à torção quando $\alpha + \beta > 90^\circ$.

A força longitudinal na armadura da parede \bar{N} resulta da substituição da força de corte da parede reta V dada pela Equação 2.27 na Equação 2.19:

$$\bar{N} = -q l_q \cot \gamma \quad (2.38)$$

Para obter a força \bar{N} em função do momento torsor M_T substitui-se o fluxo constante circulatório de corte q (Equação 2.26) na equação anterior:

$$\bar{N} = -\frac{M_T l_q}{2A_o} \cot \gamma \quad (2.39)$$

Redefinindo $p_o = \sum l_q$ e $\Delta N = A_{sl} f_{sl}$, e aplicando estas igualdades na Equação 2.39, obtém-se a força total na armadura longitudinal:

$$\Delta N = -\frac{M_T p_o}{2A_o} \cot \gamma \Leftrightarrow A_{sl} f_{sl} = -\frac{M_T p_o}{2A_o} \cot \gamma \quad (2.40)$$

A Equação 2.31, que define a força distribuída na armadura transversal da parede, mantém-se inalterada para $\alpha + \beta > 90^\circ$. O mesmo acontece com as Equações 2.33 a 2.37, que definem a resultante R , as forças C e T e respetivas tensões σ_2^c e σ_1^c .

De seguida, apresentam-se as cinco equações que constituem as equações básicas de equilíbrio para a torção no GSVATM reformulado.

$$q = \frac{M_T}{2A_o} \quad (2.26)$$

$$A_{sl} f_{sl} = \frac{M_T p_o}{2A_o} \cot \gamma \quad (2.30)$$

$$A_{st}f_{st} = \frac{M_T s}{2A_o} \tan \gamma' \quad (2.31)$$

$$T = \frac{M_T d_v \sin \beta}{2A_o \sin \gamma} \quad (2.35)$$

$$\sigma_1^c = \frac{M_T}{2A_o t_t} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.37)$$

Quando a armadura transversal e longitudinal estiverem ambas em cedência, ou seja, $f_{sl} = f_{ly}$ e $f_{st} = f_{ty}$, as Equações 2.30 e 2.31 passam a definir o equilíbrio da treliça para o momento torsor resistente último.

As equações anteriormente referidas, além de válidas para secções de betão armado retangulares vazadas, são também válidas para as secções cheias. Este aspeto foi aceite por diversos autores, uma vez que Hsu em 1968 [24] observou em ensaios experimentais, que a resistência última de uma viga com secção cheia era idêntica à de uma viga com secção vazada com as mesmas características (dimensões exteriores, material, quantidade e disposição da armadura). Deste modo, conclui-se que o núcleo de betão central não é efetivo quando a rotura está eminente, pois o momento torsor externo é essencialmente suportado pela “casca” exterior da secção da viga.

2.2.3. Flexão das escoras e dos tirantes de betão

Uma viga de betão armado, quando sujeita à torção, sofre uma deformação que se traduz por uma curvatura das superfícies da viga. Isto é, as superfícies da viga que inicialmente se encontram planas, após a deformação passam a apresentar-se com uma superfície hiperbólica. Assim sendo, verifica-se que a escora diagonal de betão, além de estar sujeita à compressão, também se encontra sujeita ao efeito da flexão, resultado da deformação imposta pela torção. A análise da flexão das escoras de betão armado devido à deformação por torção da viga pode ser realizada pela sobreposição das tensões e extensões induzidas pela flexão e pelo esforço axial. Tal abordagem foi realizada no VATM [21].

O GSVATM incorpora um tirante na direção perpendicular à escora de betão diagonal, o qual também fica sujeito ao efeito da flexão. A Figura 2.7 ilustra a curvatura que a parede superior de uma viga sofre com conseqüente flexão da escora e do tirante de betão, para uma viga em caixão sujeita à torção. A viga possui um comprimento $l_q \cot g \alpha$, o qual corresponde ao comprimento segundo a direção longitudinal da viga de uma escora de betão OB com um ângulo de inclinação α , também em relação à direção longitudinal. A superfície plana da parede superior OABC está localizada ao nível médio do fluxo de corte q , a qual incorpora uma escora de betão OB e um tirante de betão AC.

Atribui-se um sistema de coordenadas imposto, com o eixo x na direção longitudinal e o eixo y na direção transversal.

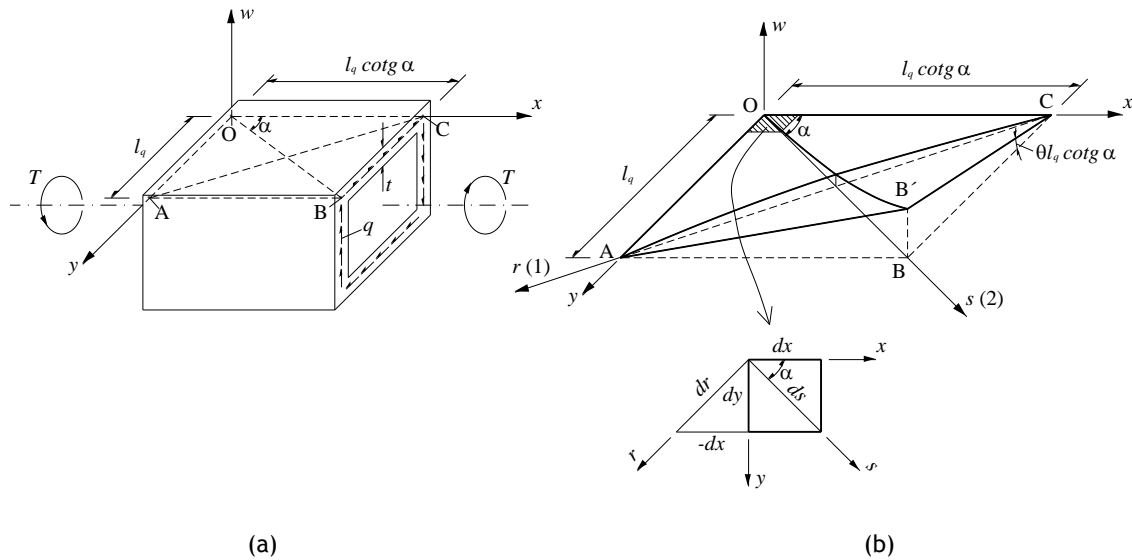


Figura 2.7. Flexão de uma escora e tirante de betão na parede de uma viga em caixão sujeita à torção [13]

Quando a viga é sujeita a um ângulo de torção θ por unidade de comprimento, é imposta uma deformação à superfície OABC, em que a linha BC roda para a posição B'C e a escora OB' e o tirante AC passam a ser curvos. Deste modo, a superfície passa a ser um parabolóide hiperbólico OAB'C, onde o deslocamento w perpendicular ao plano $x - y$ é dado por:

$$w = \theta xy \quad (2.41)$$

A inclinação da escora de betão é obtida pela derivação da Equação 2.41 em relação ao eixo coordenado s , o qual tem a mesma direção que a escora de betão (Figura 2.7 (b)). Após a derivação e com base no elemento infinitesimal ilustrado na Figura 2.7 (b) obtém-se:

$$w' = \frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{ds} = (\theta y) \cos \alpha + (\theta x) \sin \alpha \quad (2.42)$$

A curvatura da escora de betão (ψ) é a segunda derivada de w em relação ao eixo coordenado s :

$$\psi = \frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{dy}{ds} = (\theta \sin \alpha) \cos \alpha + (\theta \cos \alpha) \sin \alpha = \theta \sin(2\alpha) \quad (2.43)$$

Do mesmo modo, para determinar a inclinação do tirante de betão deriva-se a Equação 2.41, mas em relação ao eixo coordenado r , definido na mesma direção do tirante. Tal como anteriormente, depois da derivação e com base no elemento infinitesimal da Figura 2.7 (b) vem:

$$w' = \frac{dw}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dr} = -(\theta y) \sin \alpha + (\theta x) \cos \alpha \quad (2.44)$$

A curvatura do tirante de betão (φ), é também a segunda derivada em relação ao eixo coordenado r :

$$\varphi = \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{dy}{dr} = (\theta \cos \alpha)(-\sin \alpha) + (-\theta \sin \alpha) \cos \alpha = -\theta \sin(2\alpha) \quad (2.45)$$

Verifica-se que a curvatura do tirante de betão é igual à da escora de betão, mas com sinal contrário, ou seja, são simétricas.

Considere-se um elemento de parede e de largura unitária retirado da parede da viga com espessura t (Figura 2.8 (a)). As faces do elemento que se encontram perpendiculares ao eixo coordenado 2 (direção principal de compressão) correspondem à secção transversal da escora de betão. Por sua vez, as faces perpendiculares ao eixo coordenado 1 (direção principal de tração) correspondem à secção transversal do tirante de betão. O referido elemento encontra-se sujeito a um estado biaxial de tensão plano com flexão, responsável pela formação de uma superfície parabolóide hiperbólica, ilustrada na Figura 2.8 (a).

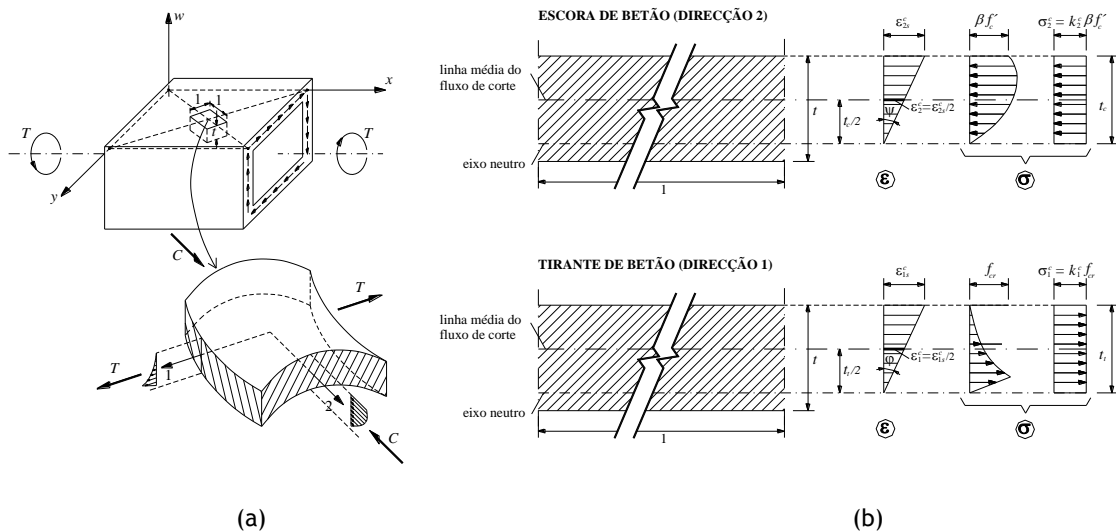


Figura 2.8. Distribuição das extensões e tensões na escora e no tirante de betão [13]

De seguida analisa-se a formulação da escora de betão e posteriormente procede-se à análise do tirante de betão.

Na Figura 2.8 (b) verifica-se que devido à flexão das escoras de betão, existe uma pequena porção de secção transversal junto à face inferior que pode estar à tração. Essa porção de área tracionada é desprezada no cálculo, tanto para níveis de carregamento altos como baixos. Para este último caso, espera-se que a área de secção tracionada seja muito pequena quando comparada com a área da secção comprimida ou mesmo inexistente. Assim, apenas a área de compressão que se prolonga por uma profundidade t_c é considerada efetiva.

Deve referir-se que na realidade, a linha média do fluxo de corte não coincide com a resultante das tensões de compressão. No entanto, foi assumido por simplificação que esta passa a meio da profundidade efetiva t_c .

Assumindo que a distribuição das extensões na profundidade efetiva t_c é linear, é possível calcular, a partir da curvatura ψ da escora de betão, a extensão máxima de compressão ε_{2s}^c , localizada na superfície superior:

$$\varepsilon_{2s}^c = \psi t_c \quad (2.46)$$

Como foi assumido que a linha média do fluxo de corte se encontra a meio da profundidade t_c , a extensão média de compressão ε_2^c é metade da extensão máxima de compressão ε_{2s}^c :

$$\varepsilon_2^c = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \quad (2.47)$$

As Equações 2.43 e 2.46 constituem as duas equações básicas de compatibilidade para a flexão das escoras de betão em vigas sujeitas à torção.

O diagrama de tensões da escora de betão ao longo da profundidade t_c está representado na Figura 2.8 (b), o qual é calculado com base numa curva tensão σ - extensão ε para o betão comprimido na direção principal de compressão tendo em conta o *softening effect*. A Figura 2.9 apresenta um exemplo de uma curva $\sigma - \varepsilon$ proposta por Vecchio e Collins em 1981 [37], para betões de resistência normal. Tal curva foi proposta a partir de ensaios experimentais ao corte em placas de betão armado de resistência normal. Esta curva é utilizada aqui como exemplo para demonstrar qual o procedimento a usar para incorporar a curva $\sigma - \varepsilon$ do betão no GSVATM.

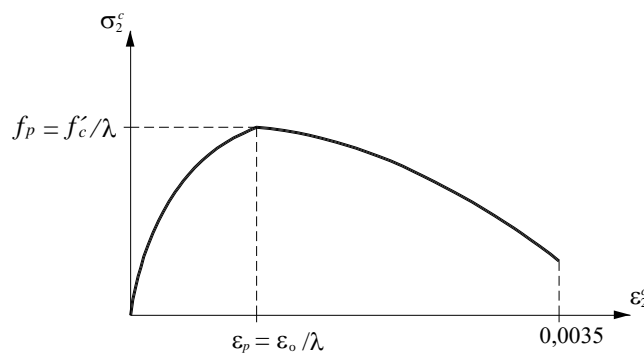


Figura 2.9. Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido tendo em conta o *softening effect* [37]

A curva $\sigma - \varepsilon$ da Figura 2.9 é expressa através das seguintes equações:

$$\sigma_2^c = f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_o} \right) - \lambda \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_o} \right)^2 \right] \text{ se } \varepsilon_2^c \leq \varepsilon_p \quad (2.48)$$

$$\sigma_2^c = f_p (1 - \eta^2) \text{ se } \varepsilon_2^c > \varepsilon_p \quad (2.49)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\varepsilon_t + \varepsilon_d}}{\sqrt{\varepsilon_d} \cos \alpha} \quad (2.50)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_p}{2\varepsilon_o - \varepsilon_p} \quad (2.51)$$

Em que:

f'_c : é a resistência à compressão uniaxial do betão obtida em provetes cilíndricos padrão;

ε_o : é a extensão correspondente ao pico de tensão f'_c ;

ε_t : é a extensão na direção diagonal a 45° da placa.

O coeficiente empírico $1/\lambda$, equivalente ao coeficiente ξ apresentado na Figura 2.8 (b), é designado de fator ou coeficiente de redução (*softening parameter*) e traduz o efeito de fissuração diagonal que reduz a resistência do betão comprimido nas escoras a partir do valor padrão f'_c . Admitindo que o coeficiente de redução é igual para as tensões e para as extensões, vem que $\sigma_p = f'_c/\lambda$ ou $\sigma_p = \xi f'_c$, bem como $\varepsilon_p = \varepsilon_o/\lambda$ ou $\varepsilon_p = \xi \varepsilon_o$ (Figura 2.8 (b)).

O coeficiente k_2^c representa o quociente entre a tensão média e o pico de tensão, tal como apresentado na Figura 2.8 (b). Tal coeficiente permite calcular a tensão média do diagrama retangular equivalente das tensões de compressão na escora e a sua resultante C . Para calcular o coeficiente k_2^c integram-se as Equações 2.48 e 2.49, em que $\varepsilon_p = \varepsilon_o/\lambda$, obtendo-se:

$$k_2^c = \lambda \frac{\varepsilon_{2s}^c}{\varepsilon_o} - \frac{\lambda^2}{3} \left(\frac{\varepsilon_{2s}^c}{\varepsilon_o} \right)^2 \text{ para } \varepsilon_{2s}^c \leq \frac{\varepsilon_o}{\lambda} \quad (2.52)$$

$$k_2^c = \left(1 - \frac{1}{(2\lambda - 1)^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{2s}^c} \right) + \frac{1}{(2\lambda - 1)^2} \frac{\varepsilon_{2s}^c}{\varepsilon_p} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_{2s}^c}{\varepsilon_p} \right) \text{ para } \varepsilon_{2s}^c > \frac{\varepsilon_o}{\lambda} \quad (2.53)$$

Na Figura 2.10 apresenta-se graficamente, para uma Curva $\sigma - \varepsilon$ genérica, o processo de integração para a obtenção do coeficiente k_2^c para um dado valor de ε_{2s}^c , para a parte ascendente (a) e descendente (b) da curva.

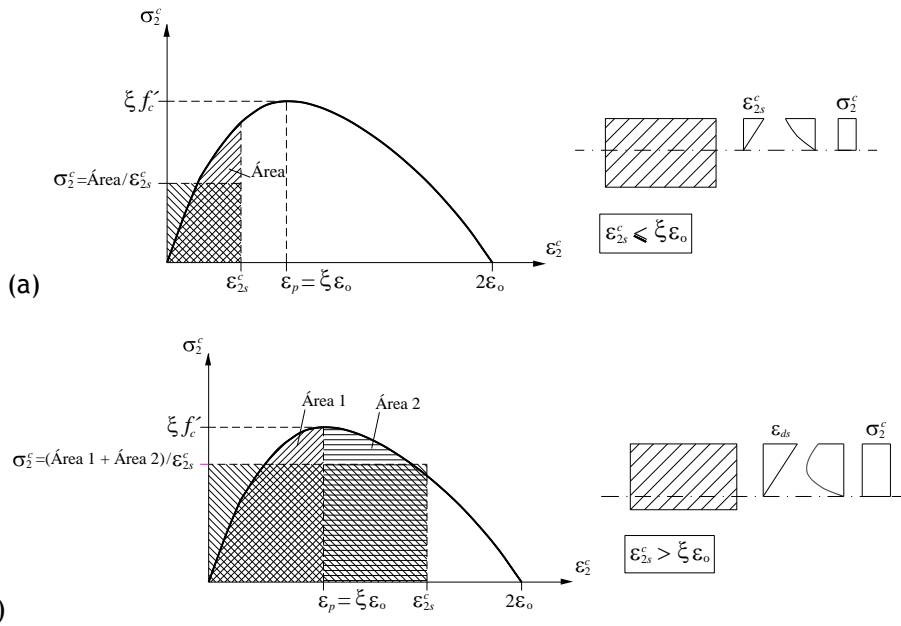


Figura 2.10. Processo de integração da Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras [13]

A tensão na escora de betão correspondente ao diagrama retangular equivalente, representado na Figura 2.8 (b), com base no processo de integração e para um dado valor de ε_{2s}^c , é dada pela seguinte equação:

$$\sigma_2^c = k_2^c \xi f'_c \quad (2.54)$$

Passando agora para a análise do tirante de betão, verifica-se que, à semelhança da escora de betão, o tirante possui uma pequena porção de área da secção transversal comprimida junto à face inferior, que se deve à flexão (Figura 2.8 (b)). Quando os níveis de carregamento são elevados, o efeito do tirante de betão deixa de ser relevante, tal como se pode verificar na Figura 2.11 que ilustra uma curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração, desta forma despreza-se a referida área comprimida. De facto, para níveis de carregamento baixos prevê-se que a área de secção transversal comprimida do tirante seja muito reduzida quando comparada com a área tracionada ou mesmo inexistente, de modo que se despreza a sua consideração no cálculo.

Assim, apenas a área que se encontra tracionada é considerada efetiva, para a qual se considera uma profundidade efetiva t_t . Assumindo que a distribuição de extensões na profundidade efetiva t_t é linear, a extensão máxima de tração ε_{1s}^c , situada na superfície superior, pode ser calculada com base na curvatura φ do tirante de betão:

$$\varepsilon_{1s}^c = \varphi t_t \quad (2.55)$$

Assumindo que a linha média do fluxo de corte se encontra a meio da profundidade t_t , a extensão média de tração ε_1^c é igual a metade da extensão máxima de tração ε_{1s}^c :

$$\varepsilon_1^c = \frac{\varepsilon_{1s}^c}{2} \quad (2.56)$$

As Equações 2.45 e 2.55 constituem as duas equações básicas de compatibilidade para a flexão dos tirantes de betão devido à torção.

Tal como acontece para as escoras de betão, também o diagrama de tensões do tirante de betão ao longo da profundidade efetiva t_t (Figura 2.8 (b)) deve ter por base uma curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão tracionado na direção principal de tração. Como exemplo, apresenta-se a curva $\sigma - \varepsilon$ da Figura 2.11. O procedimento de cálculo a utilizar para incorporar a referida curva é muito semelhante ao exemplificado anteriormente para o betão à compressão, pelo que não será aqui exposto.

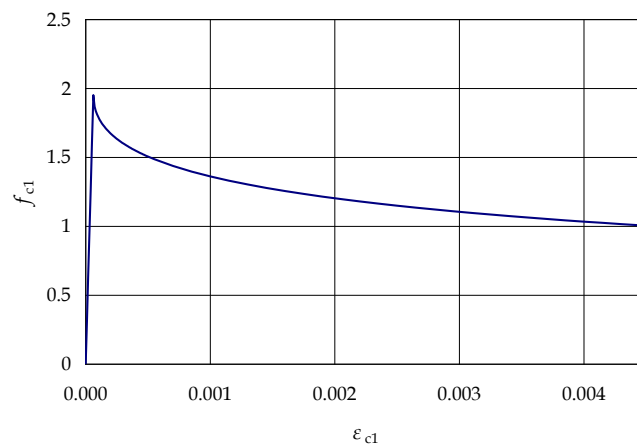


Figura 2.11. Curva $\sigma - \varepsilon$ proposta por Hsu em 1991, para o betão tracionado [22]

No desenvolvimento deste trabalho, no Capítulo 3 serão apresentadas curvas $\sigma - \varepsilon$ propostas por vários autores, bem como a sua formulação de cálculo. Assim sendo, apresenta-se apenas a tensão no tirante de betão correspondente ao diagrama retangular equivalente, ilustrado na Figura 2.8 (b), para um dado valor de ε_{1s}^c :

$$\sigma_1^c = k_1^c f_{cr} \quad (2.57)$$

Em que f_{cr} é a resistência à tração do betão obtida em ensaios de tração uniaxial.

No que diz respeito às armaduras ordinárias tracionadas, à semelhança do que ocorre para o betão à compressão, a sua resposta teórica pode também ser obtida a partir de diversas relações $\sigma - \varepsilon$. A título exemplificativo, a Figura 2.12 ilustra a lei constitutiva das armaduras simplificada segundo o EC2 [18] e expressa por um diagrama bilinear.

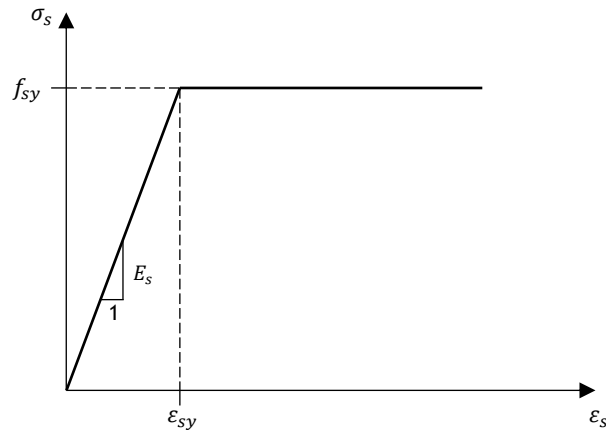


Figura 2.12. Relação $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras tracionadas [3]

Na lei ilustrada na Figura 2.12, é assumido que o aço possui um comportamento elástico-linear, com declive igual ao módulo de elasticidade do aço (E_s), até à tensão de cedência f_{sy} , seguindo-se um patamar de cedência horizontal. Esta relação $\sigma - \varepsilon$ é dada pela seguinte expressão matemática:

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \\ f_{sy} & \text{para } \varepsilon_s > \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (2.58)$$

2.2.4. Espessura efetiva da parede

As espessuras efetivas t_c e t_t devem ser calculadas com base nas condições de equilíbrio e nas propriedades dos blocos retangulares equivalentes das tensões de compressão (nas escoras) e de tração (nos tirantes), (Figura 2.8). Desta forma é possível que t_c e t_t resultem valores diferentes.

No modelo de membrana de Jeng e Hsu [28], apresentado na secção 1.2 e designado por *Softened Membrane Model of Torsion (SMMT)*, os autores assumiram que a profundidade da área de secção transversal à compressão na escora é igual à profundidade da área de secção transversal à tração no tirante, ou seja, $t_c = t_t$. Esta simplificação teve como objetivo reduzir a quantidade de cálculos a efetuar, visto apenas se introduzir no modelo uma espessura efetiva como parâmetro variável e não duas. Além disso, os referidos autores pretenderam também evitar confusões que poderiam surgir devido à introdução de duas espessuras diferentes. Por exemplo, ao se admitir que a linha média de fluxo de corte está posicionada a meio da espessura efetiva, resultariam posicionamentos diferentes para a escora e para o tirante para essa mesma linha média.

Jeng e Hsu verificaram que a simplificação era bastante aceitável. Por isso, uma vez que tanto o SMMT como o GSVATM têm em comum o problema de considerar espessuras efetivas associadas às escoras e aos tirantes, o GSVATM assume a mesma simplificação. Deste modo, como $t_c = t_t$, substitui-se em todas as equações t_t por t_c .

Tendo em conta a simplificação referida anteriormente e as tensões instaladas na escora de betão, é possível calcular t_c a partir da substituição da Equação 2.54 na Equação 2.36:

$$k_c^2 \xi f'_c = \frac{M_T}{2A_o t_c} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \Leftrightarrow t_c = \frac{M_T}{2A_o k_c^2 \xi f'_c} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.59)$$

Conforme foi referido na subsecção anterior considera-se que a linha média de fluxo de corte se localiza a meio da profundidade efetiva t_c . Portanto, o perímetro da linha média de fluxo de corte p_o e a área limitada pela mesma linha A_o são dados por:

$$p_o = 2(x - t_c) + 2(y - t_c) = p_c - 4t_c \quad (2.60)$$

$$A_o = (x - t_c)(y - t_c) = A_c - \left(\frac{t_c}{2}\right) p_c \quad (2.61)$$

Onde:

x - é a menor dimensão exterior da secção transversal retangular;

y - é a maior dimensão exterior da secção transversal retangular;

p_c - é o perímetro exterior da secção transversal de betão ($2x + 2y$);

A_o - é a área da secção transversal limitada pelo perímetro exterior de betão (xy).

Com o exposto nesta secção, é possível reordenar as Equações 2.7 e 2.8 correspondentes à força de compressão C e à força de tração T :

$$C = \sigma_2^c t_c d_v \cos \alpha \quad (2.62)$$

$$T = \sigma_1^c t_c d_v \sin \alpha \quad (2.63)$$

2.3. Equações para o cálculo da curva teórica $T - \theta$

O GSVATM é um modelo que requer um procedimento iterativo de cálculo, o que se deve ao caráter não linear do modelo e à existência de variáveis interdependentes e inicialmente desconhecidas.

Nesta secção apresenta-se a construção da curva teórica $T - \theta$ com base nas equações de equilíbrio, nas equações de compatibilidade e nas relações constitutivas dos materiais.

2.3.1. Equações de equilíbrio

O cálculo da curva teórica $T - \theta$ tendo por base o GSVATM requer três equações de equilíbrio para determinar o momento torsor M_T , a espessura efetiva t_c e o ângulo α das

escoras de betão. Determinando o ângulo α fica também conhecida a orientação dos tirantes de betão, visto que estes são ortogonais às escoras de betão.

Resolvendo a Equação 2.36 em ordem ao momento torsor M_T , é possível obter este parâmetro em função da tensão na escora de betão:

$$M_T = 2A_o t_c \sigma_2^c \frac{\sin \gamma \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (2.64)$$

Em alternativa, também se pode expressar o momento torsor M_T em função da resultante R entre a força de compressão C e de tração T , resolvendo em ordem a M_T a Equação 2.33:

$$M_T = \frac{2A_o R \sin \gamma}{d_v} \quad (2.65)$$

As Equações 2.62 e 2.63 são válidas tanto para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ como para $\alpha + \beta > 90^\circ$.

É possível calcular a espessura efetiva t_c relacionando-a com a força instalada na armadura longitudinal ou com a força instalada na armadura transversal, tendo-se optado pela primeira. Para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$, obtém-se a espessura efetiva t_c em função da força na armadura longitudinal, substituindo a Equação 2.64 na Equação 2.30 e resolvendo-a em ordem a t_c :

$$A_{sl} f_{sl} = \frac{2A_o t_c \sigma_2^c p_o}{2A_o} \frac{\sin \gamma \cos \alpha}{\cos \beta} \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \Leftrightarrow t_c = \frac{A_{sl} f_{sl}}{\sigma_2^c p_o} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} \quad (2.66)$$

Para $\alpha + \beta > 90^\circ$, substitui-se a Equação 2.64 na Equação 2.40 e resolve-se a mesma em ordem a t_c :

$$t_c = - \frac{A_{sl} f_i}{\sigma_2^c p_o} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} \quad (2.67)$$

Para determinar o ângulo α , é necessário obter-se em primeiro lugar uma equação que relacione este parâmetro com as forças instaladas nas armaduras longitudinais e transversais.

O procedimento que se apresenta de seguida refere-se à situação em que $\alpha + \beta \leq 90^\circ$.

Substituindo a Equação 2.64 na Equação 2.30 e resolvendo em ordem a $\cos \alpha$, obtém-se uma expressão com α em função da armadura longitudinal:

$$\cos \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl}}{t_c p_o \sigma_2^c} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \quad (2.68)$$

Substituindo agora a Equação 2.64 na Equação 2.31 e resolvendo também em ordem a $\cos \alpha$, obtém-se uma expressão com α em função da armadura transversal:

$$A_{sl}f_{sl} = \frac{2A_o t_c \sigma_2^c s}{2A_o} \frac{\sin \gamma \cos \alpha}{\cos \beta} \tan \gamma' \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{A_{sl}f_{sl} \cos \beta}{t_c \sigma_2^c s} \frac{1}{\sin \gamma \tan \gamma'} \quad (2.69)$$

Igualando as Equações 2.68 e 2.69 e simplificando obtém-se:

$$\frac{A_{sl}f_{sl}}{p_o \cos \gamma} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'} \quad (2.70)$$

O ângulo α desapareceu da equação anterior, mas os ângulos γ e γ' podem ser expressos em função de α e β através das Equações 2.4 e 2.16 expostas anteriormente:

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (2.4)$$

$$\gamma' = \alpha - \beta = \gamma - 2\beta \quad (2.16)$$

Introduzindo estas duas equações na Equação 2.70 vem:

$$\frac{A_{sl}f_{sl}}{p_o \cos(\alpha + \beta)} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \sin(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)} \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta) = \frac{A_{st}f_{st} p_o}{A_{sl}f_{sl} s} = F \quad (2.71)$$

Com o auxílio do *software* MATLAB, a Equação 2.71 foi resolvida em ordem a α , resultando:

$$\alpha = \pm \arctan \left(\frac{\sqrt{F^2 (\tan \beta)^2 + F (\tan \beta)^4 + F + (\tan \beta)^2}}{F (\tan \beta)^2 + 1} \right) \quad (2.72)$$

Para o problema em estudo apenas interessa o valor positivo de α dado pela equação anterior.

Segue-se agora um procedimento semelhante para o cálculo de α quando $\alpha + \beta > 90^\circ$.

Substituindo a Equação 2.64 na Equação 2.40 e resolvendo em ordem a $\cos \alpha$, obtém-se uma expressão com α em função da armadura longitudinal:

$$\cos \alpha = -\frac{A_{sl}f_{sl} \cos \beta}{t_c p_o \sigma_2^c \cos \gamma} \quad (2.73)$$

A Equação 2.69 mantém-se inalterada para esta relação de ângulos em estudo.

Igualando as Equações 2.73 e 2.69 e simplificando obtém-se:

$$-\frac{A_{sl}f_{sl}}{p_o \cos \gamma} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'} \quad (2.74)$$

Tal como no caso anterior ($\alpha + \beta \leq 90^\circ$), o ângulo α desapareceu da Equação 2.74, mas os ângulos γ e γ' podem ser expressos através das equações 2.4 e 2.25 expostas anteriormente:

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (2.4)$$

$$\gamma' = \beta - \alpha = 2\beta - \gamma \quad (2.25)$$

Introduzindo estas duas equações na Equação 2.74 vem:

$$-\frac{A_{sl} f_{sl}}{p_o \cos(\alpha + \beta)} = \frac{A_{st} f_{st}}{s \sin(\alpha + \beta) \tan(\beta - \alpha)} \Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) \tan(\beta - \alpha) = -\frac{A_{st} f_{st} p_o}{A_{sl} f_{sl} s} = -F \quad (2.75)$$

Introduzindo a equação anterior no *software* MATLAB para resolver em ordem a α , verifica-se que a solução obtida é igual à Equação 2.72.

As Equações 2.65, 2.66 e 2.72 estabelecem as três equações de equilíbrio para o GSVATM.

2.3.2. Equações de compatibilidade

O cálculo da curva $T - \theta$ para o GSVATM também requer três equações de compatibilidade para determinar as extensões na armadura transversal (ϵ_{st}) e na armadura longitudinal (ϵ_{sl}), bem como o ângulo de torção (θ) por unidade de comprimento.

A Figura 2.13 representa o Círculo de Mohr para o estado de deformação de um elemento de uma placa sujeita ao corte, como apresentado por Vecchio e Collins em 1981 [37]. A partir da Figura 2.13 é possível derivar as equações de compatibilidade para o GSVATM.

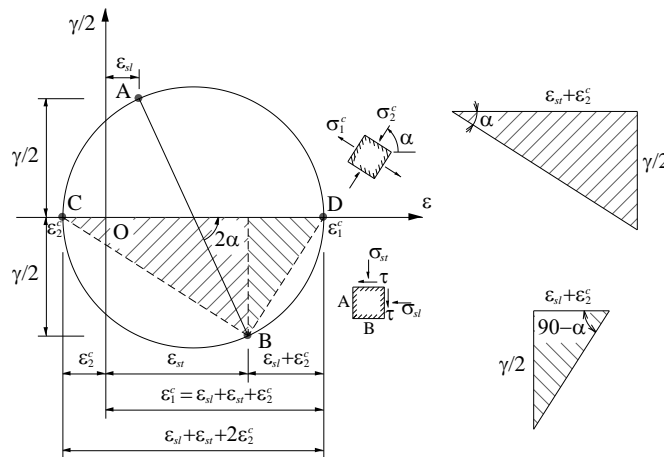


Figura 2.13. Círculo de Mohr para o estado de deformação de uma placa sujeita ao corte [37]

O Círculo de Mohr da Figura 2.13 traduz o estado genérico de deformação para uma placa no estado fendilhado, com as tensões associadas normais às faces A e B, as quais são absorvidas pelas armaduras longitudinais e transversais, respetivamente. Os pontos A e B têm como coordenadas $(\epsilon_{sl}; \gamma/2)$ e $(\epsilon_{st}; -\gamma/2)$ respetivamente, onde γ é a distorção, e representam o estado de deformação nas faces. Os pontos C e D correspondem à extensão na escora e à extensão no tirante, respetivamente, segundo as direções principais, com as

coordenadas $(-\varepsilon_2^c; 0)$ e $(\varepsilon_1^c; 0)$. O ângulo α corresponde ao ângulo da direção principal do estado de tensão.

Analisando a Figura 2.13, é possível obter com base nos triângulos inferior e superior, respetivamente, as seguintes equações:

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\frac{\gamma}{2}}{\varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c) \cot \alpha \quad (2.76)$$

$$\frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c) \tan \alpha \quad (2.77)$$

A teoria do tubo fino de Bredt estabelece a seguinte relação:

$$\oint \tau ds = 2G\theta A \quad (2.78)$$

Em que G é o módulo de distorção, $p_o = \oint ds$ é o perímetro da linha média de fluxo de corte e $A = A_o$ é a área limitada pela linha média de fluxo de corte.

Aplicando a relação $\gamma = \tau/G$ à Equação 2.78, vem:

$$\theta = \frac{P_o}{2A_o} \gamma \quad (2.79)$$

Substituindo a Equação 2.77 na equação anterior obtém-se:

$$\theta = \frac{P_o}{A_o} (\varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c) \tan \alpha \quad (2.80)$$

Substituindo a equação anterior na Equação 2.43, vem:

$$\psi = \theta \sin(2\alpha) = \frac{P_o}{A_o} (\varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c) \tan \alpha (2 \sin \alpha \cos \alpha) \quad (2.81)$$

Substituindo esta última na Equação 2.46, obtém-se:

$$\varepsilon_{2s}^c = \psi t_c = \frac{2P_o t_c}{A_o} (\varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c) \tan \alpha \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.82)$$

Substituindo a Equação 2.59 na Equação 2.82, tendo em conta a Equação 2.47 e resolvendo em ordem à extensão na armadura transversal ε_{st} , vem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2s}^c &= \frac{2P_o}{A_o} \frac{M_T}{2A_o k_2^c \xi f_c' \sin \gamma \cos \alpha} \frac{\cos \beta}{\sigma_2^c} \left(\varepsilon_{st} + \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \right) \tan \alpha \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \varepsilon_{st} = \left(\frac{A_o^2 \sigma_2^c \sin \gamma}{p_o M_T \cos \beta \tan \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \end{aligned} \quad (2.83)$$

Para calcular a extensão na armadura longitudinal ε_{sl} , utiliza-se um procedimento semelhante ao anterior.

Substituindo a Equação 2.76 na Equação 2.79 obtém-se:

$$\theta = \frac{P_o}{A_o} (\varepsilon_{sl} + \varepsilon_2^c) \cot \alpha \quad (2.84)$$

Substituindo a equação anterior na Equação 2.43, vem:

$$\psi = \theta \sin(2\alpha) = \frac{P_o}{A_o} (\varepsilon_{sl} + \varepsilon_2^c) \cot \alpha (2 \sin \alpha \cos \alpha) \quad (2.85)$$

Substituindo esta última na Equação 2.46, obtém-se:

$$\varepsilon_{2s}^c = \psi t_c = \frac{2P_o t_c}{A_o} (\varepsilon_{sl} + \varepsilon_2^c) \cot \alpha \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.86)$$

Substituindo a Equação 2.59 na Equação 2.86, tendo novamente em conta a Equação 2.47 e resolvendo em ordem à extensão na armadura longitudinal ε_{sl} , vem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2s}^c &= \frac{2P_o}{A_o} \frac{M_T}{2A_o k_2^c \xi f_c'} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \left(\varepsilon_{sl} + \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \right) \cot \alpha \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \varepsilon_{sl} = \left(\frac{A_o^2 \sigma_2^c \sin \gamma}{P_o M_T \cos \beta \cot \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \end{aligned} \quad (2.87)$$

Por fim, o ângulo de torção θ obtém-se substituindo a Equação 2.46 resolvida em ordem à curvatura ψ na Equação 2.43, eliminando desta forma ψ obtém-se:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2t_c \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2.88)$$

As Equações 2.83, 2.87 e 2.88 constituem as três equações de compatibilidade para o GSVATM.

Ainda a partir da Figura 2.13 é possível obter uma relação para calcular a extensão de tração no tirante ε_{1s}^c com base nas extensões obtidas anteriormente, a qual será utilizada na implementação do modelo como algoritmo de cálculo:

$$\varepsilon_1^c = \varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c = \varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \Rightarrow \varepsilon_{1s}^c = 2\varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c \quad (2.89)$$

Todas as equações apresentadas ao longo desta subsecção são válidas tanto para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ como para $\alpha + \beta > 90^\circ$.

2.3.3. Relações $\sigma - \varepsilon$ para os materiais

Na subsecção anterior observou-se que as Equações 2.54 e 2.57 definem as tensões nas escoras e nos tirantes diagonais de betão, respetivamente, com base nos coeficientes k_2^c e k_1^c . Estes coeficientes representam respetivamente, o quociente entre a tensão média e o pico de tensão do diagrama de tensões na escora e no tirante de betão. Calculados para cada extensão ε_{2s}^c e ε_{1s}^c , com base na integração de equações, os coeficientes definem a Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido nas escoras e tracionado nos tirantes, conforme apresentado na subsecção 2.2.3.

Existem diversas Curvas $\sigma - \varepsilon$ propostas por vários autores, as quais constituem relações médias $\sigma - \varepsilon$ calibradas com base em ensaios experimentais, em que as extensões e as tensões são medidas ao longo de uma largura suficientemente grande para incluir várias fissuras. Têm sido propostas relações constitutivas para o betão à compressão, o betão à tração e para as armaduras ordinárias. Para este trabalho, destaca-se a relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração, sendo objetivo dos próximos capítulos apresentar uma pesquisa das relações propostas por vários autores. Com base na pesquisa irá realizar-se um estudo paramétrico para a zona de transição do estado não fissurado para o estado fissurado, com vista a averiguar qual (ou quais) a(s) melhor(es) relação(ões) $\sigma - \varepsilon$ a considerar para o betão tracionado para vigas de betão armado sujeitas à torção.

Um estudo comparativo de várias leis constitutivas para o betão à compressão e para as armaduras ordinárias tracionadas tendo por base o VATM, foi já apresentado por Bernardo *et al.* em 2012 [11]. Uma vez que tal estudo foca essencialmente o estado último comportamental das vigas de betão armado à torção, considera-se que os resultados obtidos são também válidos para o GSVATM, visto que nesse estado a “participação” dos tirantes é residual.

2.4. Conclusões

O modelo GSVATM apresentado ao longo deste capítulo é capaz de prever toda a curva $T - \theta$ para vigas de betão armado sujeitas à torção, incluindo as fases associadas a carregamentos baixos e a resposta à pré e pós-fissuração.

Este modelo constitui uma generalização do VATM original, de tal modo que ao considerar a força de tração do tirante nula no GSVATM, as equações resultantes coincidem com as equações do VATM. Este resultado prova a consistência do GSVATM.

Neste trabalho, o GSVATM servirá de modelo base para os estudos comparativos a realizar tendo por base o cálculo de curvas teóricas $T - \theta$ de vigas de betão armado sujeitas à torção e sua comparação com resultados experimentais encontrados na literatura.

Capítulo 3. Relação Tensão-Extensão para o betão à tração

3.1. Introdução

Este capítulo destina-se à apresentação das relações constitutivas (relações médias entre a tensão e a extensão) para o betão solicitado por tração. Tais relações constitutivas foram propostas por vários autores e destinam-se a serem incorporadas em modelos comportamentais do betão estrutural (simples ou armado), de modo a incluir a contribuição média do betão à tração para a rigidez e a resistência do elemento estrutural em estudo. O termo “médio” refere-se ao facto das relações terem sido estabelecidas para uma zona suficientemente larga do elemento de betão por forma a englobar diversas fissuras.

A resistência à tração no betão é uma propriedade mecânica que influencia diversos fenómenos, tal como a formação de fissuras, a aderência entre o betão e o aço, a rigidez da estrutura, a resistência a esforços internos (flexão, corte, torção, etc.), entre outros. As leis constitutivas médias do betão à tração descrevem o comportamento mecânico deste material que pode geralmente ser dividido em duas etapas: um troço inicial ascendente com comportamento elástico e linear, até ao momento em que é atingida a resistência à tração f_{cr} ou a correspondente extensão ε_{cr} , seguido por uma relação geralmente não linear onde a tensão de tração vai reduzindo com o aumento da extensão. Este último comportamento é descrito na bibliografia como amolecimento da tensão de tração (*tension-softening* na literatura anglo-saxónica).

Todas as relações constitutivas apresentadas na secção seguinte serão utilizadas no Capítulo 4 no âmbito de uma análise comparativa com as mesmas implementadas no GSVATM.

3.2. Relações constitutivas

Ao longo desta secção, apresenta-se o resultado proveniente de uma pesquisa bibliográfica referente à lei constitutiva do betão tracionado. Dessa pesquisa, resulta um conjunto de 8 leis, descritas e ilustradas nesta secção.

Caso não haja referências em contrário, f'_c representa a tensão resistente à compressão do betão, obtida a partir de ensaios de compressão uniaxial com provetes cilíndricos com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura. O parâmetro ε_0 representa a extensão correspondente a f'_c . Ambos os valores são negativos e é usual considerar-se para betões com classe de resistência normal que $\varepsilon_0 = -0,002$.

Todas as ilustrações correspondentes ao andamento da relação $\sigma - \varepsilon$ apresentadas ao longo deste capítulo, para objetivo de ilustração, foram aplicadas numa secção de betão armado com classe de resistência C20 e para um aço com uma tensão de cedência de 400 MPa (S400).

Para cada lei constitutiva apresentam-se dois tipos de gráficos, um correspondente à lei original apresentada pelo autor e outro correspondente à lei original do autor com o troço inicial corrigido, tal como proposto por Jeng e Hsu em 2009 [28] e posteriormente adotado por Bernardo *et al.* [13].

Uma vez que as leis constitutivas propostas pelos vários autores são em geral calibradas para placas de betão armado submetidas a um estado de corte, Jeng e Hsu [28] verificaram que as mesmas, quando implementadas em modelos teóricos para prever o comportamento global de vigas de betão armado sujeitas à torção, davam origem a desvios notáveis entre o comportamento teórico previsto e experimental para baixos níveis de carregamento. Para corrigir este problema, os referidos autores, baseados num extenso estudo comparativo, propuseram uma correção para o troço inicial da relação constitutiva do betão à tração, designadamente para a inclinação do referido troço (incrementando em 45% o módulo de elasticidade do betão) e para o limite superior do mesmo (incrementando em 45% a extensão correspondente à tensão resistente do betão à tração). Originalmente, Jeng e Hsu apenas propuseram alterar a lei constitutiva proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [5], única relação constitutiva utilizada por Jeng e Hsu.

No presente trabalho, a correção de Jeng e Hsu será implementada em todas as leis constitutivas apresentadas ao longo desta secção. Esta medida pode ser considerada válida, visto que os gráficos de todas as leis constitutivas coincidem no troço inicial, divergindo apenas no troço pós-fissuração, após o betão ter alcançado a sua resistência à tração. Tal uniformização foi conseguida porque neste trabalho foi adotado um critério uniforme para o cálculo da tensão resistente do betão à tração e do módulo de elasticidade. Tais parâmetros são calculados através das expressões de correlação com a resistência à compressão do betão propostas por Belarbi e Hsu em 1994 (Equações 3.1 e 3.2) e corrigidas por Jeng e Hsu em 2009 (Equações 3.4). A versão corrigida da lei constitutiva terá a mesma designação da lei original, acrescentando-se apenas o termo “corrigido” à frente do nome original.

Em 1994, Belarbi e Hsu [5] apresentaram uma relação entre a tensão e a extensão para o betão à tração que se traduz pelas Equações 3.1 a 3.3, e que constitui uma das leis mais utilizadas por diversos autores no estudo do comportamento do betão estrutural. Os autores assumiram que, até ocorrer a fissuração, o betão tem um comportamento elástico e linear, e que a fissuração ocorre para a extensão média de tração $\varepsilon_{cr} = 0,00008$.

$$f_{cr} = 3,75\sqrt{f'_c(\text{psi})} = 0,31\sqrt{f'_c(\text{MPa})} \quad (3.1)$$

$$E_c = 47000\sqrt{f'_c(\text{psi})} = 3875\sqrt{f'_c(\text{MPa})} = \frac{f_{cr}}{\varepsilon_{cr}} \quad (3.2)$$

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0,4} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.3)$$

Nas equações anteriores, os parâmetros f_{cr} e ε_{cr} representam, respetivamente, a tensão e a extensão de tração no betão correspondentes ao instante em que a fissuração ocorre, e E_c corresponde ao módulo de elasticidade inicial do betão.

A tensão média de tração no betão após a fissuração é obtida com base em considerações de equilíbrio do campo de tensões aplicado às placas de betão armado, considerando separadamente as tensões médias nas armaduras e as tensões médias no betão.

Conforme foi anteriormente referido, Jeng e Hsu [28] propuseram a correção do troço inicial da lei constitutiva traduzida pelas Equações 3.1 a 3.3. Para tal, os referidos autores incrementaram em 45% a extensão correspondente à tensão resistente do betão à tração, resultando $\varepsilon_{cr} = 0,000116$, e incrementaram igualmente em 45 % o módulo de elasticidade do betão, modificando assim a anterior Equação 3.2 para a Equação 3.4. A estrutura da Equação 3.3 permanece inalterada.

$$E_c = 5620\sqrt{f'_c(\text{MPa})} = \frac{f_{cr}}{\varepsilon_{cr}} \quad (3.4)$$

A Figura 3.1 ilustra a relação tensão (σ) - extensão (ε) de Belarbi e Hsu [5] traduzida pela Equação 3.3, na sua versão original e corrigida para o caso da torção, conforme proposto por Jeng e Hsu em 2009 [28].

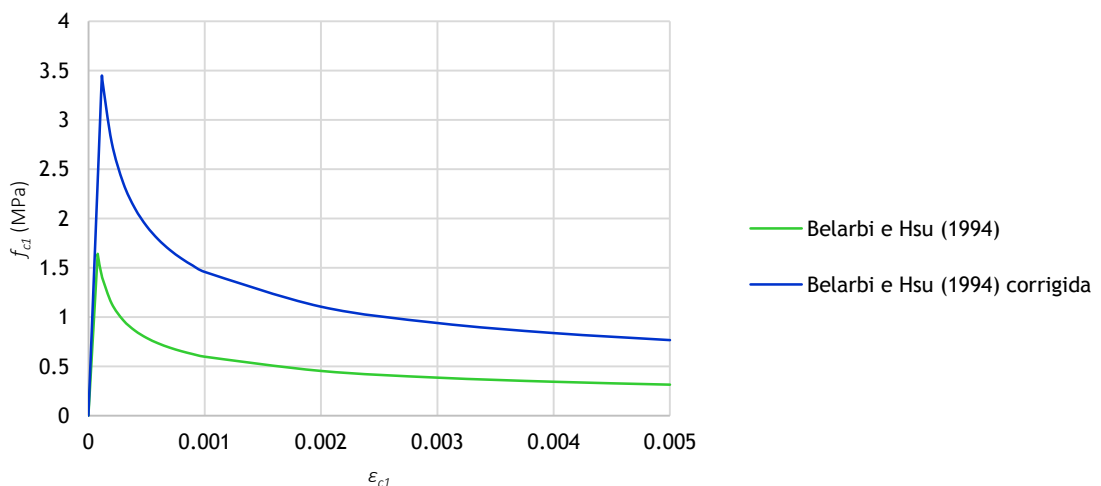


Figura 3.1. Lei constitutiva do betão à tração segundo Belarbi e Hsu [5] [28]

Cervenka em 1985 [15], propôs a seguinte equação para descrever o comportamento do betão tracionado:

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_{c1}}{c} \right)^{k_2} \right] & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.5)$$

Em que c corresponde à extensão na qual o esforço principal de tração se reduz a zero, que varia entre 0,004 a 0,005 e k_2 traduz a curvatura do troço descendente da curva, tendo-se adotado $k_2=0,5$ (valor indicado pelos autores). Refere-se que, na equação original proposta por Cervenka [15], a tensão f_{cr} era denotada por f_t .

Foi considerado que $\varepsilon_{cr} = 0,000116$ e que o módulo de elasticidade do betão E_c é dado pela Equação 3.4. A partir da Equação 3.5 resulta o gráfico ilustrado na Figura 3.2, a qual inclui também o gráfico corrigido dos autores para vigas à torção.

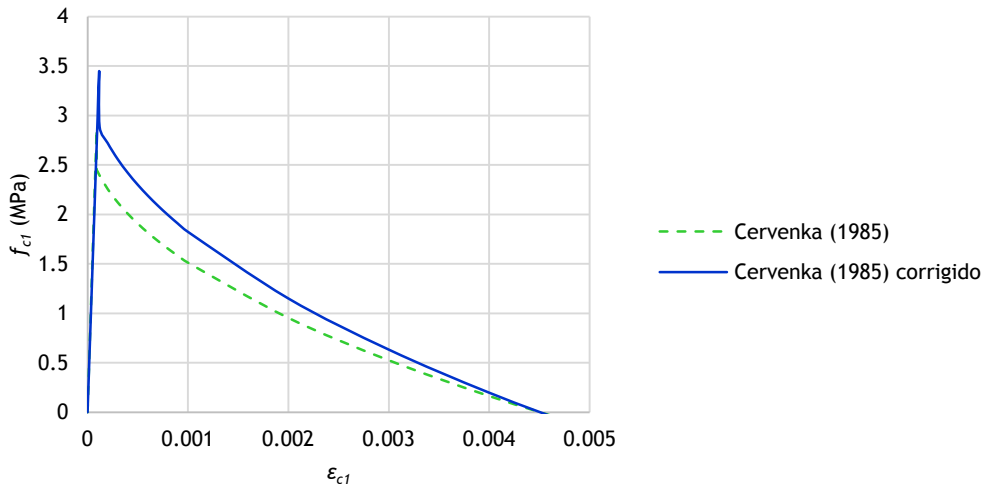


Figura 3.2. Lei constitutiva do betão à tração segundo Cervenka [15]

Em 1986, Vecchio e Collins [38] propuseram a relação entre a tensão e a extensão do betão tracionado traduzida pelas seguintes equações:

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{200\varepsilon_{c1}}} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.6)$$

A Figura 3.3 apresenta o gráfico da lei constitutiva traduzida pela Equação 3.6, bem como a versão corrigida da mesma.

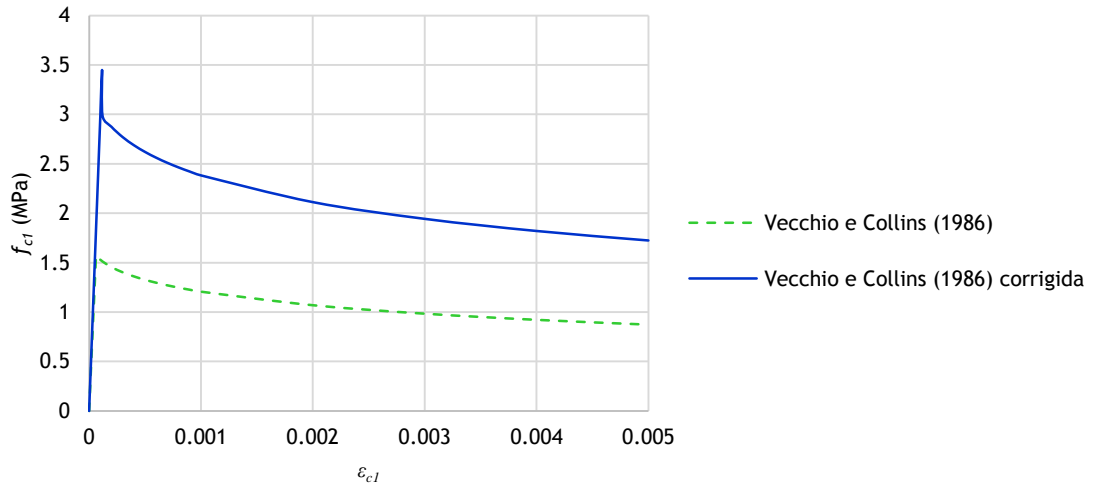


Figura 3.3. Lei constitutiva do betão à tração segundo Vecchio e Collins [38]

Em 1991, Hsu [22] propôs a Equação 3.7 para a relação constitutiva do betão à tração.

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{cr}}{0,005}}} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.7)$$

A partir da Equação 3.7 resulta o gráfico ilustrado na Figura 3.4, o qual inclui a versão corrigida para vigas sujeitas à torção.

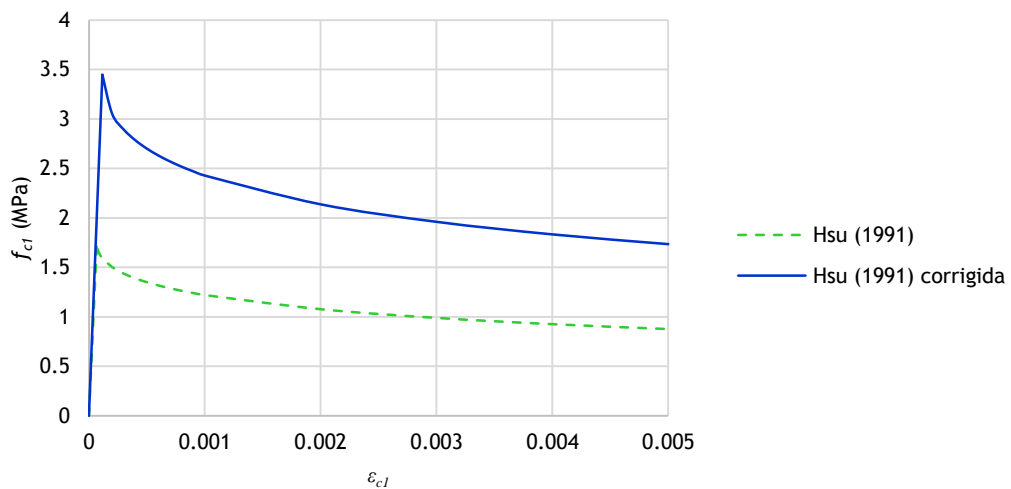


Figura 3.4. Lei constitutiva do betão à tração segundo Hsu [22]

Collins *et al.* [17], apresentaram em 1996 uma equação muito semelhante à Equação 3.6 apresentada por Vecchio e Collins [38], mudando apenas a constante de 200 por 500:

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_{c1}}} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.8)$$

Tendo em conta a Equação 3.8 e a correção aplicada para vigas sujeitas à torção, resulta o gráfico ilustrado na Figura 3.5.

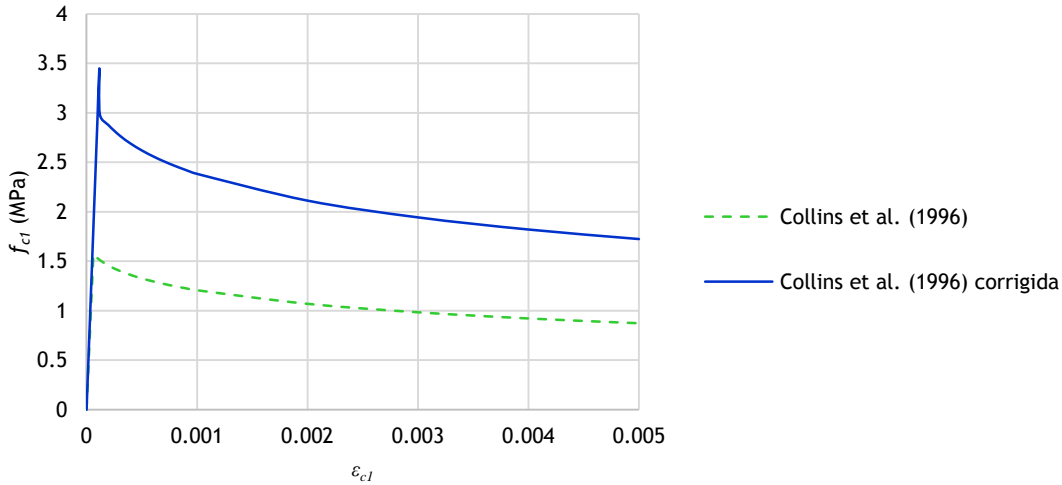


Figura 3.5. Lei constitutiva do betão à tração segundo Collins *et al.* [17]

Em 2000, Vecchio [39] apresentou uma lei constitutiva para o betão à tração totalmente diferente das anteriores, com exceção do troço antecedente à fissuração.

Este autor declara que após ser atingida a fissuração, o betão pode continuar a resistir a trações devido a dois mecanismos: o amolecimento da tensão de tração (*tension softening*) e a capacidade de retenção da tensão de tração (*tension stiffening*).

O *tension softening* está associado a mecanismos de fratura do betão, sendo significativo para estruturas de betão com pouca ou nenhuma armadura. Para esta situação a tensão do betão após a fissuração f_{c1}^a é dada pela Equação 3.9.

$$f_{c1}^a = f_{cr} \left(1 - \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{ts} - \varepsilon_{cr}} \right) \quad (3.9)$$

Em que ε_{ts} é a extensão terminal, calculada pela Equação 3.10, com base na energia de fracturação G_f e no comprimento característico L_r .

$$\varepsilon_{ts} = 2,0 \frac{G_f}{f_{cr} L_r} \quad (3.10)$$

Segundo este autor, pode assumir-se G_f como um valor constante de 75 N/m, sendo este valor aceitável para a maioria dos casos. O parâmetro L_r , em metros, é considerado igual a metade do espaçamento entre fissuras. A partir da Equação 3.9 obtém-se o gráfico ilustrado na Figura 3.6:

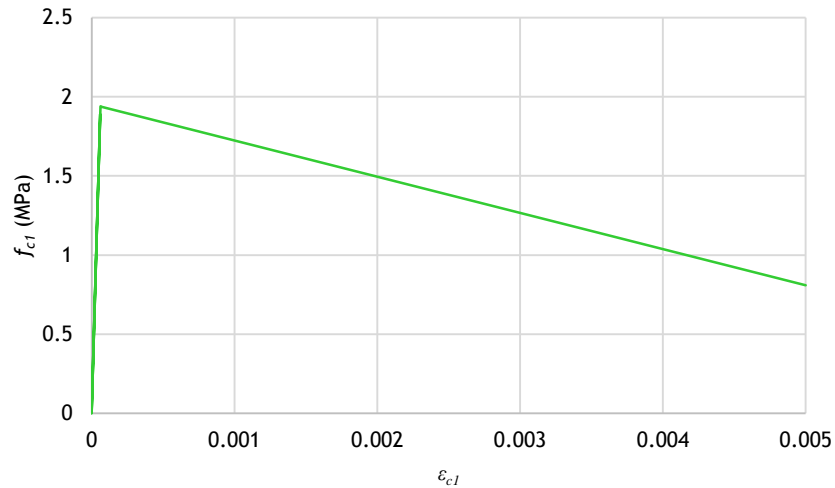


Figura 3.6. Lei constitutiva do betão à tração para o *tension softening*, segundo Vecchio [39]

O *tension stiffening* assume relevância quando existe interação entre as armaduras e o betão. Neste caso, nas zonas entre as fissuras a carga é transferida das armaduras para o betão através das tensões de aderência, provocando elevados níveis de tensão de tração média no betão. Para este caso a tensão de tração no betão calcula-se pela seguinte expressão:

$$f_{c1}^b = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{c_t \epsilon_{c1}}} \quad (3.11)$$

Onde c_t é um coeficiente considerado igual a 200 para elementos relativamente pequenos ou para elementos com uma malha muito apertada de armaduras, e igual a 500 para elementos de grandes dimensões. Bentz [8], mostrou que este coeficiente depende da taxa de armadura ρ e do diâmetro da armadura d_{bi} . A partir destas verificações, Vecchio [39] modificou a equação de Bentz, de modo a contabilizar o comportamento do betão tracionado tendo em conta a direção das armaduras θ_n , resultando as Equações 3.12 e 3.13.

$$c_t = 2,2m \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4\rho_i}{d_{bi}} |\cos \theta_{ni}| \quad (3.13)$$

A partir da Equação 3.11 obtém-se o gráfico ilustrado na Figura 3.7.

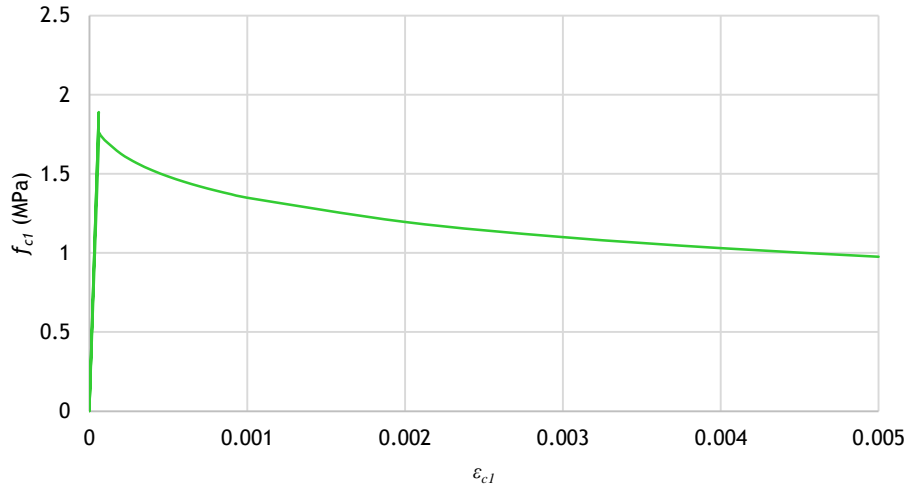


Figura 3.7. Lei constitutiva do betão à tração para o *tension stiffening*, segundo Vecchio [39]

Em conclusão, o comportamento do betão tracionado na direção principal de tração, segundo Vecchio [39], é traduzido pela seguinte equação:

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \text{máx}(f_{c1}^a, f_{c1}^b) & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.14)$$

A Equação 3.14 resulta o gráfico ilustrado na Figura 3.8, a qual inclui a correção para vigas sujeitas à torção.

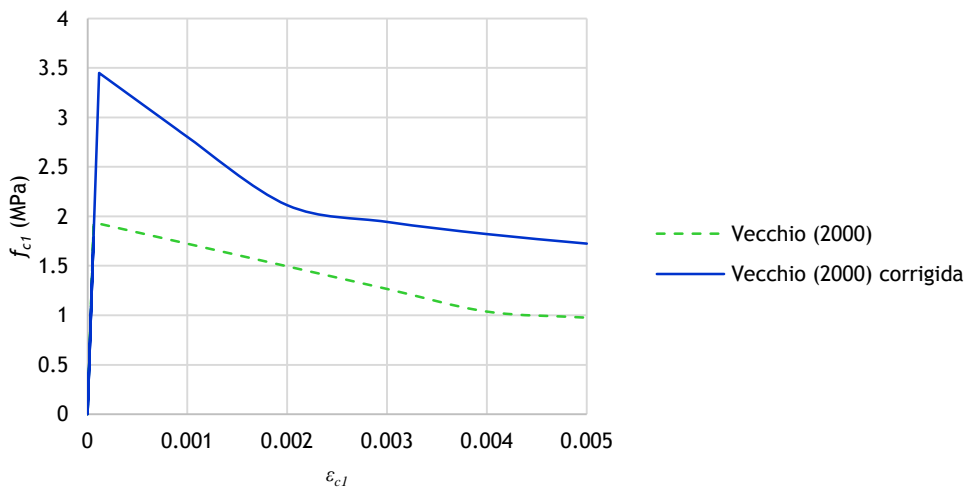


Figura 3.8. Lei constitutiva do betão à tração segundo Vecchio [39]

Bentz em 2005 [7], apresentou a seguinte relação constitutiva para o betão à tração:

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{3,6M} \varepsilon_{c1}} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$M = \frac{A_c}{\sum \phi \pi} \quad (3.16)$$

Em que M é o parâmetro de ligação que entra na Equação 3.15 em milímetros, A_c é a área da secção efetiva de betão tracionado que envolve as armaduras e ϕ o diâmetro do(s) varão(ões) da armadura longitudinal utilizada. A área efetiva de betão tracionado calcula-se a partir da espessura efetiva do betão tracionado h_{ef} que envolve as armaduras. Neste trabalho por simplificação assume-se que tal espessura coincide com a espessura do tirante de betão no GSVATM, que por sua vez se considera igual à espessura efetiva do betão comprimido nas escoras t_c (secção 2.2.4), ou seja:

$$h_{ef} = t_c \quad (3.17)$$

Para exemplificação da aplicação da lei constitutiva traduzida pela equação 3.15 assume-se a secção de betão armado ilustrada na Figura 3.9.

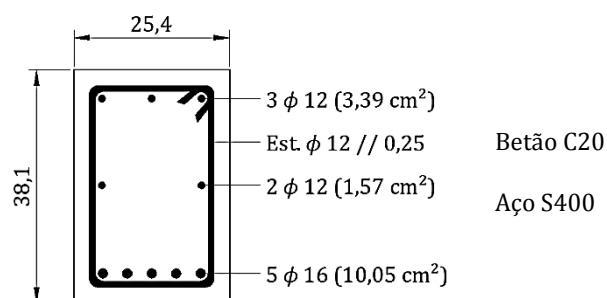


Figura 3.9. Secção utilizada para o cálculo da lei constitutiva do betão tracionado segundo Bentz [7]

A Equação 3.15 segundo o autor e segundo as correções para vigas sujeitas à torção resulta o gráfico ilustrado na Figura 3.10:

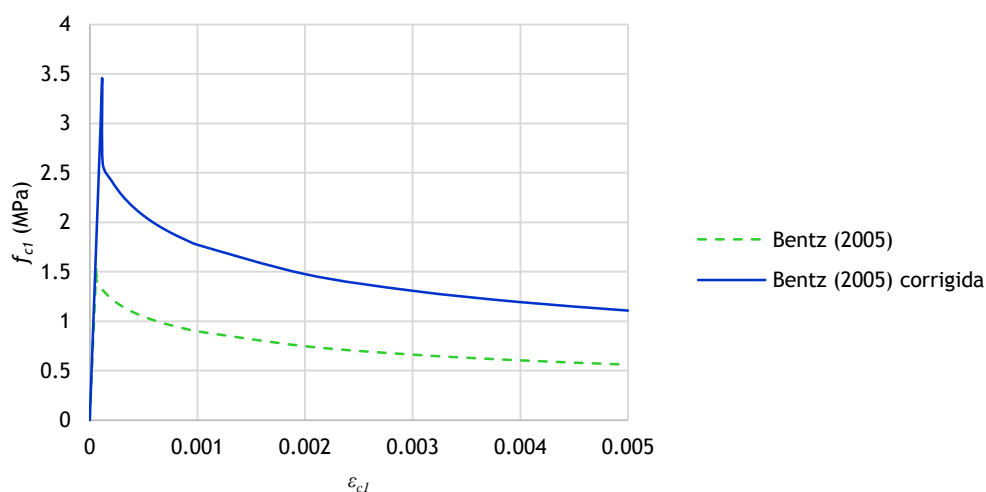


Figura 3.10. Lei constitutiva do betão à tração segundo Bentz [7]

Em 2008, Stramandinoli e Rovere [34] também propuseram uma relação entre a tensão e a extensão para o betão à tração. Tal relação tem por base a percentagem de armadura longitudinal da secção de betão armado. Além disso, após a fissuração a curva é expressa por uma equação exponencial.

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (3.18)$$

$$\alpha = 0,017 + 0,255(n\rho) - 0,106(n\rho)^2 + 0,016(n\rho)^3 \quad (3.19)$$

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} e^{-\alpha \left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cr}} \right)} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.20)$$

Em que E_s é o módulo de elasticidade do aço e ρ a taxa de armadura longitudinal. Visto esta lei constitutiva depender da percentagem de armadura longitudinal, de modo a ilustrar a mesma, foram utilizadas três taxas correntes de modo a compreender a sua influência. Tal como acontece na lei constitutiva de Cervenka [15], Stramandinoli e Rovera nomearam a tensão de fissuração f_{cr} pela tensão f_t na Equação 3.20.

O gráfico ilustrado na Figura 3.11 apresenta a tracejado a Equação 3.20 com as variáveis segundo Stramandinoli e Rovere [34] e com traçado contínuo a Equação 3.20 segundo as correções para vigas sujeitas à torção.

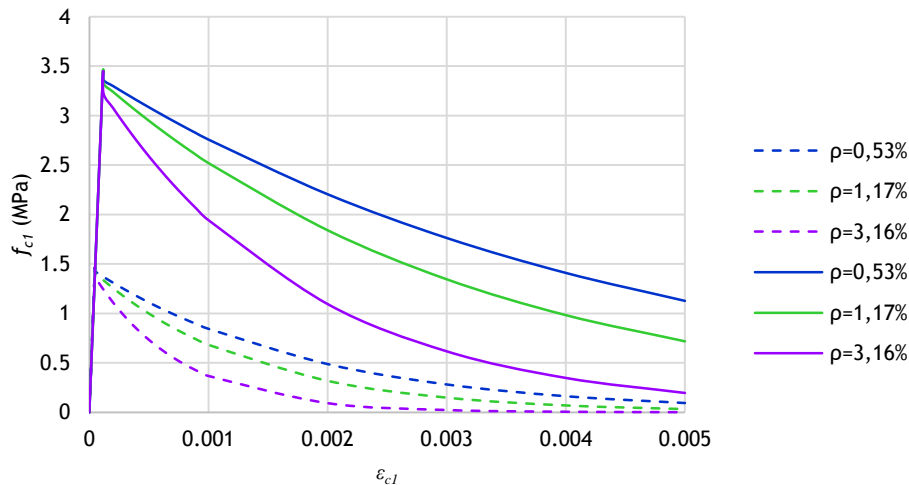


Figura 3.11. Lei constitutiva do betão à tração segundo Stramandinoli e Rovere [34]

A Figura anterior mostra a forte dependência do ramo descendente da lei constitutiva de Stramandinoli e Rovere em relação à taxa de armadura longitudinal.

3.3. Notas finais

Neste capítulo foi apresentado um levantamento de expressões matemáticas propostas por diversos autores, ao longo de vários anos, para delinear o comportamento médio do betão à tração em termos de relação tensão-extensão. Este levantamento tem como objetivo o estudo do comportamento do betão à tração, antes e após a fissuração, pois esta é a principal fase de transição que vai ser estudada no âmbito do GSVATM apresentado no Capítulo 2.

É necessário ter em atenção que algumas das relações constitutivas do betão à tração, nomeadamente a de Bentz [7] e a de Stramandinoli e Rovere [34], estão totalmente dependentes da secção da viga de betão armado em estudo. As restantes leis apresentadas apenas dependem da classe de resistência do betão que constitui a viga.

Ao analisar os gráficos apresentados ao longo da secção 3.2 pode verificar-se que ao introduzir as correções propostas por Jeng e Hsu [28], existe uma ligeira alteração da inclinação do primeiro troço em relação ao traçado original (apenas visualizada a uma escala maior), e além disso, o ponto de fissuração possui uma extensão e respetiva tensão superior à original (a fendilhação do betão é “atrasada”), afetando também o traçado inicial do segundo troço.

A Figura 3.12 apresenta no mesmo gráfico todas as leis constitutivas para o betão à tração propostas anteriormente neste capítulo, com a correção proposta por Jeng e Hsu [28] para vigas sujeitas à torção.

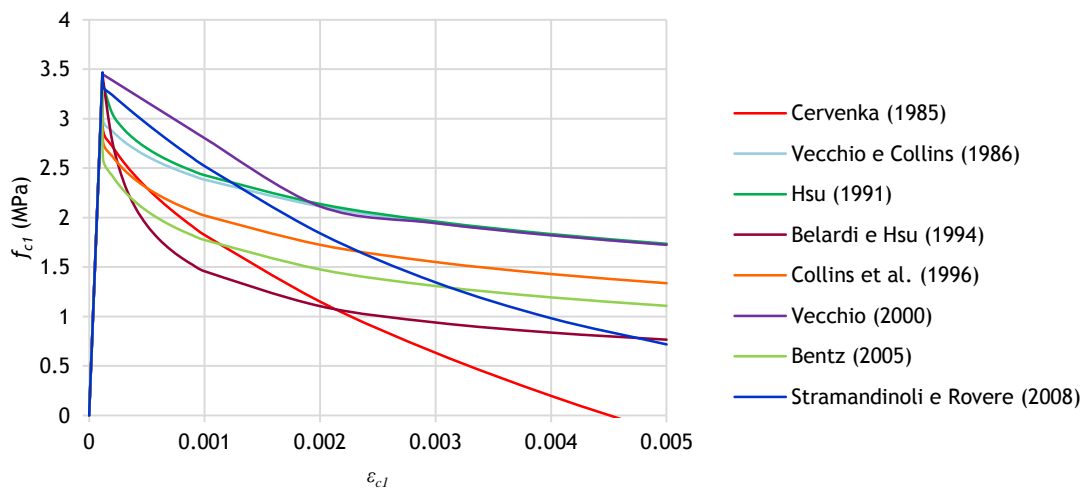


Figura 3.12. Síntese de todas as leis constitutivas do betão à tração corrigidas

Ao analisar a figura anterior pode verificar-se que o objetivo de igualar o primeiro troço e o ponto de fissuração para todas as leis constitutivas apresentadas foi bem-sucedido, pois para além de essa imposição ter lógica, permite restringir a análise do comportamento de cada lei somente a partir da fissuração do betão à tração. Conclui-se também que no troço

descendente as leis constitutivas apresentam uma dispersão notável. No próximo capítulo será estudada a influência que as leis constitutivas analisadas na secção 3.2 têm na curva teórica $T - \theta$ de vigas de betão armado sujeitas à torção, calculada com base no GSVATM. Este estudo terá por objetivo avaliar, através de uma exaustiva análise comparativa, qual a lei constitutiva para o betão à tração que permite obter melhores resultados em termos de curva $T - \theta$ para baixos níveis de carregamento.

Capítulo 4. Estudo comparativo

4.1. Introdução

Neste capítulo é apresentada uma análise comparativa utilizando a Generalização do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (GSVATM) e tendo por base a incorporação das relações constitutivas $\sigma - \varepsilon$ para o betão tracionado apresentadas no Capítulo 3. O objetivo é avaliar qual, ou quais, as leis constitutivas que permitem obter melhores resultados para vigas de betão armado sujeitas à torção, em particular para a zona comportamental de transição entre o estado não fissurado e fissurado. Para tal, as referidas leis são implementadas no GSVATM e são utilizados, para a análise comparativa, os resultados experimentais de diversas vigas de referência encontradas na literatura, designadamente as curvas experimentais $T - \theta$.

Para calcular as curvas teóricas $T - \theta$ para as vigas de referência consideradas neste estudo, é necessário implementar computacionalmente as novas leis constitutivas para o betão à tração. Tal implementação é realizada através de linguagem de programação DELPHI, que constitui a linguagem base em que foi implementado o GSVATM e que deu origem ao software Torque 2.0.

4.2. Modelo teórico baseado no GSVATM

No Capítulo 2, foi apresentado detalhadamente o modelo teórico do GSVATM que, na sua formulação, introduz um “tirante” perpendicular à escora de betão por forma a incorporar o comportamento do betão à tração. Este vai ser o modelo teórico utilizado para calcular as curvas $T - \theta$ teóricas em vigas de referência de betão armado sujeitas à torção e analisar a influência da lei constitutiva $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração, na resposta da viga para baixos níveis de carregamento.

Nesta fase, existe a necessidade de pré-definir as restantes leis constitutivas dos materiais a serem utilizadas no modelo, designadamente para o betão à compressão nas escoras e também para as armaduras ordinárias à tração. Em 2012 Bernardo *et al.* [12], avaliaram, de entre várias, qual a melhor relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à compressão e para as armaduras ordinárias à tração para o VATM, por forma a prever adequadamente o comportamento último de vigas de betão armado à torção, designadamente a resistência à torção. Os referidos autores concluíram que o modelo teórico mais adequado era aquele que incorporava a relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à compressão proposta por Belarbi e Hsu em 1991 [6], com os fatores de redução propostos por Hsu e Zhang em 1998 [40]. A relação $\sigma - \varepsilon$ anteriormente referida traduz-se pela seguinte equação:

$$\sigma_2^c = \begin{cases} \xi f_c' \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_o} \right)^2 \right] & \varepsilon_2^c \leq \xi \varepsilon_o \\ \xi f_c' \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_2^c - \xi \varepsilon_o}{2 \varepsilon_o - \xi \varepsilon_o} \right)^2 \right] & \varepsilon_2^c > \xi \varepsilon_o \end{cases} \quad (4.1)$$

Onde os fatores de redução são dados pelas seguintes equações:

$$\xi = \xi_\varepsilon = \xi_\sigma = \frac{R(f_c')}{\sqrt{1 + \frac{400 \varepsilon_1^c}{\eta'}}} \quad (4.2)$$

$$R(f_c') = \frac{5,8}{\sqrt{f_c'(MPa)}} \leq 0,9 \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \eta' = \eta & \text{se } \eta \leq 1 \\ \eta' = 1/\eta & \text{se } \eta > 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\eta = \frac{\rho_l f_{sl}}{\rho_t f_{st}} \quad (4.5)$$

Para incorporar este conjunto de equações no Torque 2.0 é necessário determinar o parâmetro k_2^c incluído na Equação 2.54, o qual se obtém por integração da Equação 4.1.

$$k_2^c = \frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_o} \left(1 - \frac{\varepsilon_2^c}{3 \xi \varepsilon_o} \right) \quad \text{para } \varepsilon_2^c \leq \xi \varepsilon_o \quad (4.6)$$

$$k_2^c = \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\xi \varepsilon_o}{\varepsilon_2^c} \right) \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{2}{\xi} - 1 \right)^2} \right) + \frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_o} \frac{1}{\left(\frac{2}{\xi} - 1 \right)^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_o} \right) \quad \text{para } \varepsilon_2^c > \xi \varepsilon_o \quad (4.7)$$

Para a lei constitutiva das armaduras ordinárias à tração, Bernardo *et al.* [12] concluíram que a relação constitutiva que melhor se adequava era a proposta por Belarbi e Hsu (1994) [5], expressa pelas seguintes equações:

$$f_s = \frac{0,975 E_s \varepsilon_s}{\left[1 + \left(\frac{1,1 E_s \varepsilon_s}{f_{sy}} \right)^m \right]^{\frac{1}{m}}} + 0,025 E_s \varepsilon_s \quad (4.8)$$

$$m = \frac{1}{9B - 0,2} \leq 25 \quad (4.9)$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}} \right)^{1,5} \quad (4.10)$$

As relações $\sigma - \varepsilon$ anteriores serão utilizadas no âmbito das análises a realizar com o GSVATM.

Relembre-se que a lei constitutiva do betão à tração é o objetivo do estudo comparativo a realizar neste trabalho, pretendendo-se definir qual a relação $\sigma - \varepsilon$ que melhor se adequa para o estudo da torção em vigas de betão armado.

Na Tabela 4.1 apresenta-se uma síntese das expressões matemáticas de todas as leis constitutivas do betão a tração apresentadas na secção 3.2 e propostas por diversos autores. Tais leis serão as testadas neste capítulo.

Tabela 4.1. Leis constitutivas para o betão sujeito à tração

Modelo	Relação $\sigma - \varepsilon$ do betão tracionado
<i>bt1</i>	<p>Cervenka (1985) [15] Equação 3.5 e Figura 3.2</p> $f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_{c1}}{c} \right)^{k_2} \right] & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$
<i>bt2</i>	<p>Vecchio e Collins (1986) [38] Equação 3.6 e Figura 3.3</p> $f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{200\varepsilon_{c1}}} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$
<i>bt3</i>	<p>Hsu (1991) [22] Equação 3.7 e Figura 3.4</p> $f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{cr}}{0,005}}} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$
<i>bt4</i>	<p>Berlarbi e Hsu (1994) [5] Equação 3.3 e Figura 3.1</p> $f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0,4} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$
<i>bt5</i>	<p>Collins <i>et al.</i> (1996) [17] Equação 3.8 e Figura 3.5</p> $f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_{c1}}} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$
<i>bt6</i>	<p>Vecchio (2000) [39] Equação 3.9, 3.11 e 3.14 e Figura 3.8</p> $f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \max(f_{c1}^a, f_{c1}^b) & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$ $f_{c1}^a = f_{cr} \left(1 - \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{ts} - \varepsilon_{cr}} \right)$ $f_{c1}^b = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{c_t \varepsilon_{c1}}}$
<i>bt7</i>	<p>Bentz (2005) [7] Equação 3.15 e Figura 3.10</p> $f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{3,6M \varepsilon_{c1}}} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$
<i>bt8</i>	<p>Stramandinoli e Rovere (2008) [34] Equação 3.20 e Figura 3.11</p> $f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} e^{-\alpha \left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cr}} \right)} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases}$

Para todas as leis constitutivas apresentadas na tabela anterior, a extensão no momento torsor de fissuração ε_{cr} , a sua respetiva tensão f_{cr} e o módulo de elasticidade E_c são calculados pelas seguintes equações:

$$\varepsilon_{cr} = 0,000116 \quad (4.11)$$

$$E_c = 5618,75\sqrt{f'_c(MPa)} \quad (4.12)$$

$$f_{cr} = E_c \varepsilon_{cr} \quad (4.13)$$

Na secção 3.3 foi possível concluir que estas 8 leis constitutivas do betão à tração apresentadas por vários autores apresentam uma notável dispersão quando comparadas graficamente, tornando-se necessário realizar um estudo detalhado para concluir sobre qual a mais adequada. Nesse estudo é necessário analisar as curvas propostas e comparar as suas previsões com resultados experimentais presentes na literatura, pois só assim é possível obter conclusões consistentes sobre qual ou quais dos modelos mais se adequa ao problema em questão.

4.2.1. Implementação do GSVATM

O procedimento de cálculo tendo por base o GSVATM possui um carácter não linear e iterativo, o que obrigou à sua implementação computacional para o cálculo da curva teórica $T - \theta$. Essa implementação foi efetuada com base nas equações apresentadas ao longo do Capítulo 2, mais precisamente nas secções 2.2 e 2.3, a partir das quais é possível formular um método iterativo, na forma de algoritmo simples, para calcular a curva teórica $T - \theta$ passo a passo.

O algoritmo de cálculo referido é apresentado de uma forma simplificada e resumida através do diagrama de fluxo da Figura 4.1. No fluxograma é necessário assumir inicialmente os valores das variáveis ε_{2s}^c , ε_{1s}^c , t_c , α e ξ , e verificar posteriormente se a proximidade da série de valores calculados para essas mesmas variáveis é suficiente relativamente aos valores assumidos.

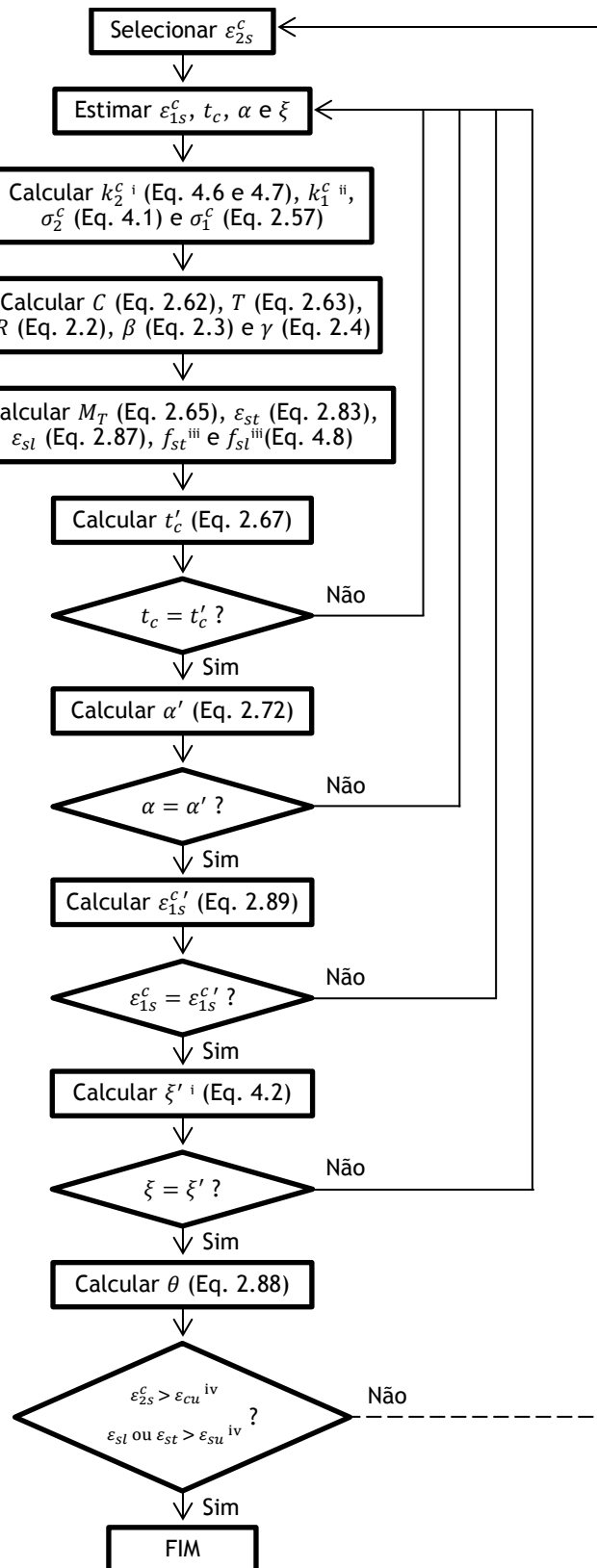


Figura 4.1. Diagrama de fluxo do algoritmo de cálculo dos pontos da curva $T - \theta$

ⁱ Variáveis calculadas a partir das expressões matemáticas que definem a curva $\sigma - \varepsilon$ do betão à compressão

ⁱⁱ Variáveis calculadas a partir das expressões matemáticas que definem a curva $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração

ⁱⁱⁱ Variáveis calculadas a partir das expressões matemáticas que definem a curva $\sigma - \varepsilon$ das armaduras solicitadas por tração

^{iv} Valores convencionais de rotura, vindo segundo o EC2 [18], $\varepsilon_{cu} = 0,0035$ e $\varepsilon_{su} = 0,01$.

O diagrama de fluxo da Figura 4.1 é um resumo simplificado do procedimento de cálculo iterativo necessário para o cálculo da curva teórica $T - \theta$, apresentado nos seguintes passos:

1. Selecionar ε_{2s}^c e assumir valores para ε_{1s}^c , t_c , α e ξ (para o modelo utilizado $\xi_\sigma = \xi_\varepsilon = \xi$).
2. Obter k_2^c através das Equações 4.6 e 4.7 e σ_2^c a partir da Equação 4.1.
3. Determinar k_1^c por integração numérica a partir da expressão matemática que define a curva $\sigma - \varepsilon$ do betão tracionado nos tirantes, segundo a lei constitutiva escolhida, e calcular σ_1^c pela Equação 2.57.
4. Calcular C e T a partir das Equações 2.62 e 2.63, respetivamente.
5. Calcular a resultante R através da Equação 2.2 e calcular os ângulos β e γ pelas Equações 2.3 e 2.4, respetivamente.
6. Determinar M_T a partir da Equação 2.65.
7. Calcular as extensões ε_{st} e ε_{sl} através das equações 2.83 e 2.87, respetivamente, e com base nas extensões e na Equação 4.8 calcular as tensões f_{st} e f_{sl} .
8. Verificar t'_c e α' a partir das Equações 2.67 e 2.72, respetivamente.
9. Verificar $\varepsilon_{1s}^{c'}$ e ξ' através das Equações 2.89 e 4.2, respetivamente.
10. Se:
 - 10.1. Os parâmetros calculados nos passos 8 e 9 não estão suficientemente próximos dos valores assumidos no passo 1, então deve repetir-se os passos 1 a 9 até que estes convirjam.
 - 10.2. Os valores calculados nos passos 8 e 9 forem suficientemente próximos dos valores assumidos no passo 1, pode proceder-se ao próximo passo.
11. Calcular a rotação θ pela Equação 2.88. A partir deste passo obtém-se um ponto de coordenadas (T, θ) pertencente à curva teórica $T - \theta$.
12. Selecionar outros valores para ε_{2s}^c e repetir de novo os passos 2 a 7 de modo a obter vários pontos (T, θ) que permitam traçar a previsão da curva $T - \theta$.

A curva $T - \theta$ termina quando a rotura teórica é alcançada, a qual é definida pelas extensões convencionais de rotura. Tendo por base o disposto no Eurocódigo 2 [18], define-se que ocorre uma rotura convencional da viga quando a extensão máxima de compressão à superfície das escoras de betão (ε_{2s}^c) atinge o seu valor convencional de rotura, $\varepsilon_{cu} = 0,0035$, ou quando a extensão de tração nas armaduras de torção (ε_{sl} ou ε_{st}) alcança o seu valor convencional de rotura, $\varepsilon_{su} = 0,01$.

4.3. Descrição da Utilização do Aplicativo Computacional Torque 2.0

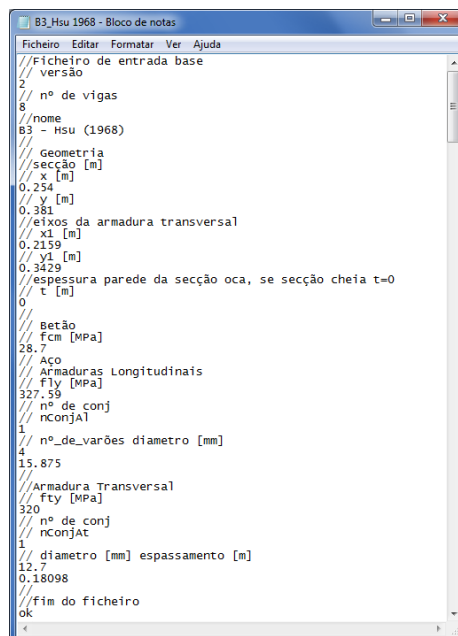
Esta secção tem como objetivo a apresentação resumida do funcionamento do aplicativo computacional Torque 2.0.

Este aplicativo computacional foi implementado por Bernardo *et al.* em 2013 [13], através de linguagem Delphi, com o objetivo de calcular o comportamento global de vigas de betão armado com secção cheia sujeitas à torção pura. Tendo por base o modelo de cálculo apresentado detalhadamente no Capítulo 2, o aplicativo calcula e fornece a evolução dos parâmetros mecânicos que traduzem o comportamento de vigas de betão armado à torção, designadamente através do traçado da curva $T - \theta$. Para tal, incorpora as leis constitutivas que caracterizam o comportamento dos materiais (betão à compressão e à tração e armaduras ordinárias à tração).

O aplicativo Torque 2.0 realiza de forma automática o cálculo iterativo apresentado na secção 4.2 para vigas de betão armado.

Trabalhar com o aplicativo é simples, pelo que se apresenta de seguida a descrição do modo de utilização do aplicativo, com o auxílio de imagens, para calcular a curva $T - \theta$ para a viga de referência B3 de Hsu [24].

O primeiro passo é criar um ficheiro de dados (txt) (Figura 4.2) com as características geométricas e mecânicas da secção a calcular, segundo as regras estabelecidas no manual de utilizador.



```
// Ficheiro de entrada base
// versão
2
// n° de vigas
8
// nome
B3 - Hsu (1968)
// Geometria
// secção [m]
// x [m]
0,254
// y [m]
0,381
// eixos da armadura transversal
// x1 [m]
0,2159
// y1 [m]
0,3429
// espessura parede da secção oca, se secção cheia t=0
t [m]
0
// Betão
Fcm [MPa]
28,7
// Aço
// Armaduras Longitudinais
Fty [MPa]
327,59
// n° de conj
nconjAL
1
// n°_de_varões diametro [mm]
4
15,875
// Armadura Transversal
Fty [MPa]
320
// n° de conj
nconjAT
1
// diametro [mm] espessamento [m]
12,7
0,18098
// fim do ficheiro
ok
```

Figura 4.2.Documento de texto com as características da viga a calcular

No aplicativo Torque 2.0 deve abrir-se o Ficheiro de dados criado, em “Ficheiro” e “Abrir secção” (Figura 4.3). Posteriormente selecciona-se a viga desejada para o cálculo (Figura 4.4).

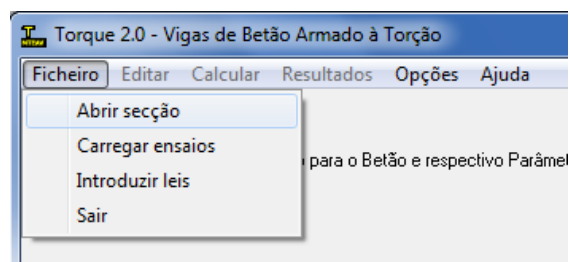


Figura 4.3. Menu do aplicativo Torque 2.0

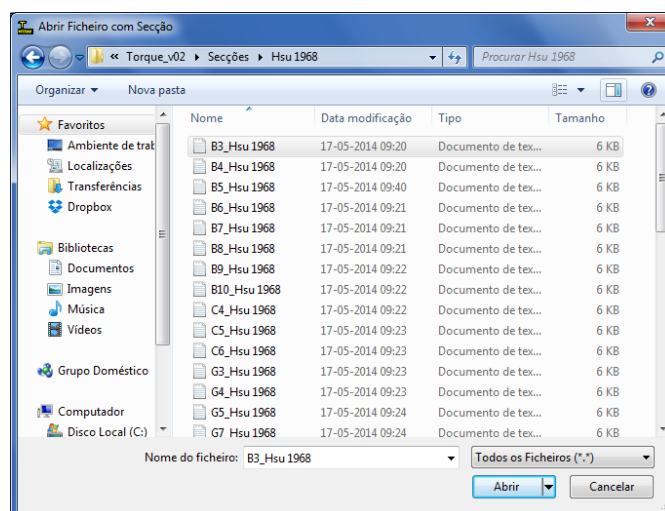


Figura 4.4. Abrir o ficheiro de dados da viga a calcular

De seguida, é necessário escolher quais os modelos pretendidos para definir o comportamento do betão à compressão e à tração e das armaduras ordinárias. No presente trabalho foi definido que o modelo utilizado para caracterizar o comportamento do betão à compressão é a lei de “Belarbi e Hsu (1991) [6], e Hsu e Zhang (1998) [40]” e para as armaduras ordinárias a lei de “Belarbi e Hsu (1994) [5]”. A lei constitutiva do betão à tração é o alvo de estudo pelo que serão utilizados os 8 modelos apresentados no Capítulo 3, tal como se apresenta na Figura 4.5.

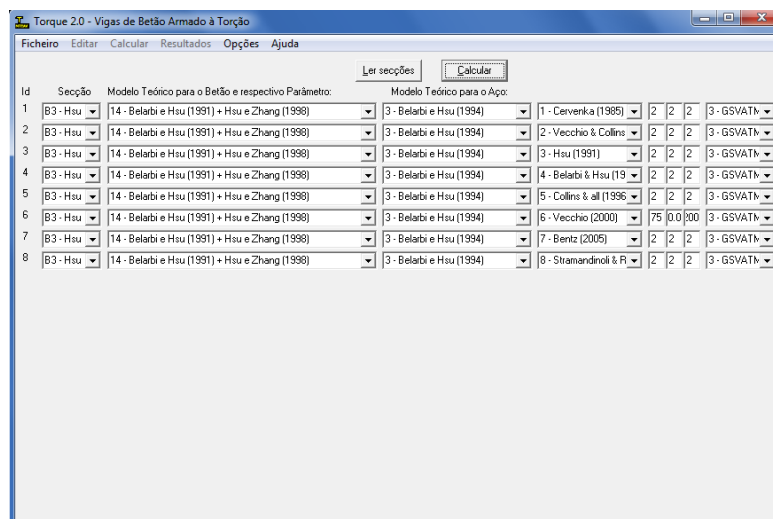


Figura 4.5. Janela do aplicativo Torque 2.0 com os modelos selecionados

À frente de cada lei constitutiva do betão à tração encontram-se três números, definidos por defeito como “2”. Esses números apenas servem para a lei constitutiva do betão à tração de Vecchio (2000) [39], sendo inúteis para as restantes leis. Estes números são valores a serem inseridos pelo utilizador, o primeiro refere-se à energia de fracturação G_f , o segundo representa metade do espaçamento expectável entre fissuras L_r e o terceiro é o coeficiente c_t , apresentados na secção 3.2.

Nesta fase o aplicativo encontra-se pronto para realizar o cálculo da viga selecionada, pelo que basta clicar no “Calcular” e o aplicativo inicia o cálculo (Figura 4.6).

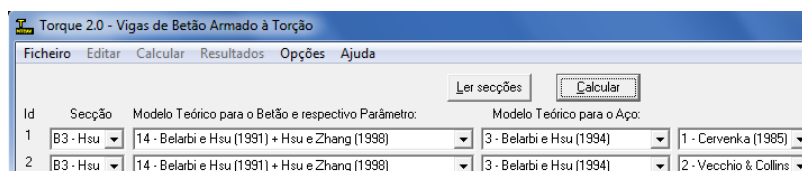


Figura 4.6. Janela do aplicativo Torque 2.0

Após o cálculo, o aplicativo cria um ficheiro de Excel, localizado na pasta onde se encontra o ficheiro de dados, e no qual são apresentados os resultados do cálculo realizado automaticamente.

O ficheiro de Excel contém na primeira folha um quadro resumo, onde estão indicados os pontos característicos da curva $T - \theta$ (ponto de fissuração, ponto máximo e ponto de cedência das armaduras) para cada lei constitutiva do betão à tração (Figura 4.7). Para além disso, apresentam-se os valores das diversas variáveis, em conjunto com o gráfico da curva $T - \theta$ para cada lei constitutiva do betão à tração em estudo (Figura 4.8).

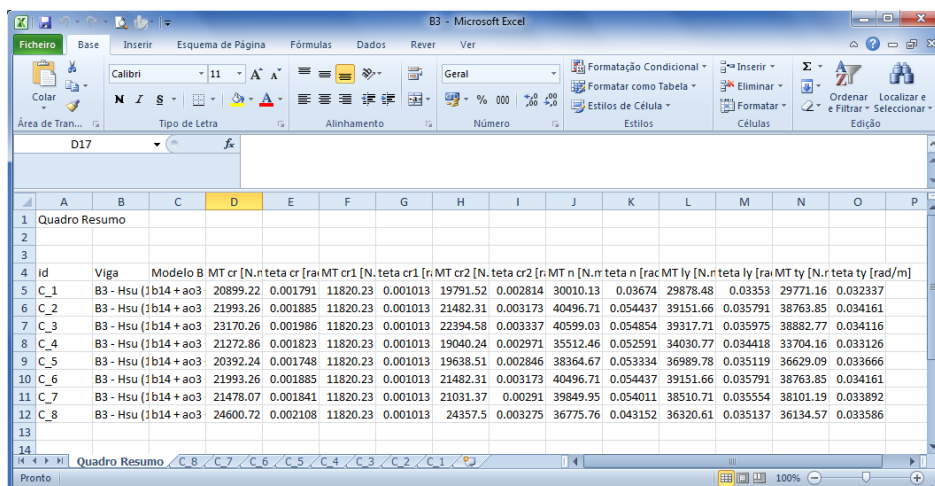


Figura 4.7. Quadro Resumo do Excel correspondente aos resultados

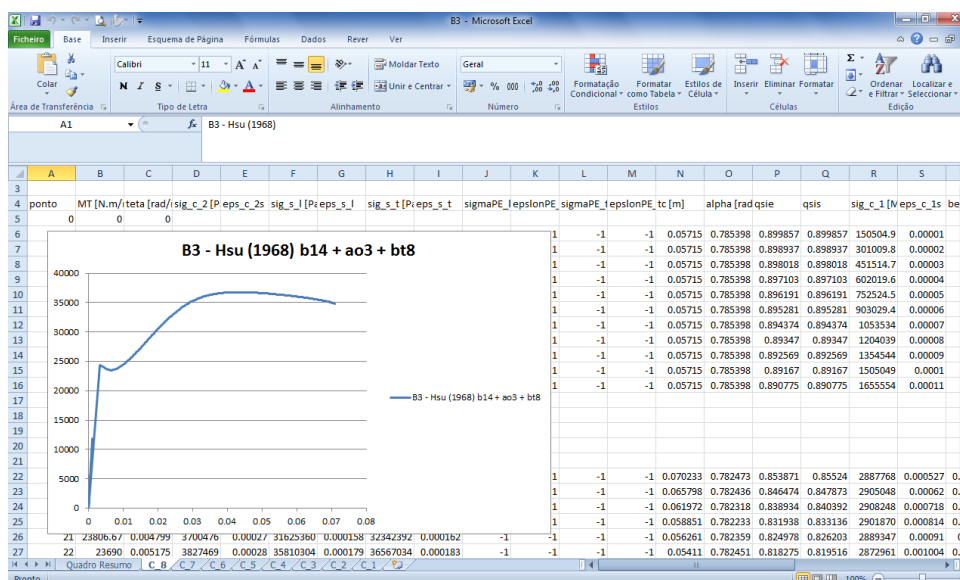


Figura 4.8. Folha de resultados para a viga B3 no Excel, segundo o modelo bt8

Este aplicativo computacional é importante no presente trabalho pois permite calcular de forma rápida o que manualmente seria demasiado complexo e moroso, impossibilitando obter resultados tao precisos e para tantas vigas de referência.

4.4. Caracterização da curva $T - \theta$

Na subsecção 1.1.4 já foi descrito o comportamento típico de uma viga de betão armado sujeita à torção através da análise da sua curva $T - \theta$. Por isso, nesta subsecção salientam-se apenas os pontos característicos da referida curva, sobre os quais a análise comparativa a realizar neste capítulo incidirá.

Uma vez que um dos objetivos deste trabalho é testar as várias leis $\sigma - \varepsilon$ para o betão tracionado, opta-se por analisar comparativamente parte das curvas $T - \theta$ teóricas e

experimentais associadas a baixos níveis de carregamento, visto que para elevados níveis de carregamento a contribuição do betão à tração é desprezável. Deste modo procede-se a uma análise dos pontos da curva $T - \theta$ correspondentes à Zona 2.

Os pontos característicos da Zona 2 são representados pelas coordenadas $(\theta; T)$ no referencial ortonormado onde está desenhada a curva $T - \theta$ e são relativos às seguintes coordenadas:

- T_{cr} : momento torsor de fissuração;
- θ_{cr} : rotação correspondente a T_{cr} ;
- T_0 : momento torsor que resulta do prolongamento inferior da reta que corresponde ao comportamento elástico e linear em regime fissurado (Figura 4.9);

Também é objetivo analisar a rigidez de torção em Estado II (GJ^{II}).

A Figura 4.9 ilustra os pontos escolhidos para caracterizar a curva teórica $T - \theta$.

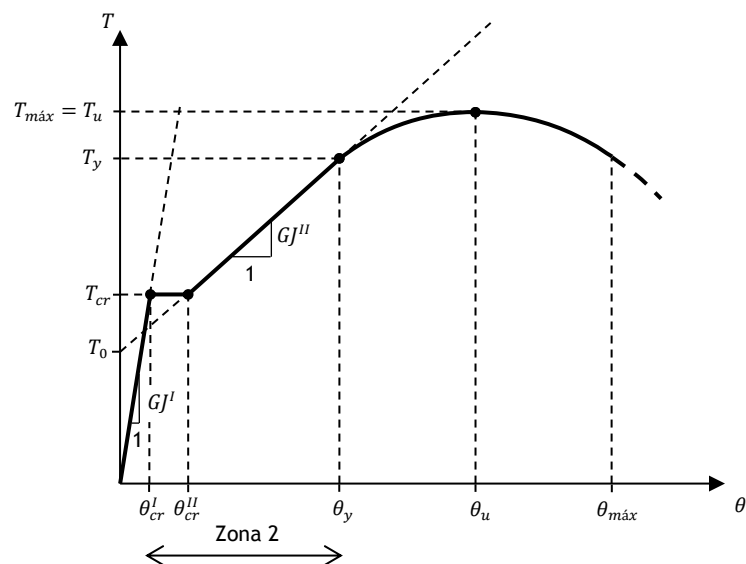


Figura 4.9. Curva $T - \theta$ teórica para vigas de betão armado sujeitas à torção

4.5. Análise comparativa das Curvas $T - \theta$ Teóricas e Experimentais com Base em Vigas de Referência

Com base no procedimento de cálculo do GSVATM apresentado no Capítulo 2, e nas leis constitutivas do betão à tração apresentadas no Capítulo 3, foi desenvolvida uma nova versão de um aplicativo computacional em linguagem DELPHI para o cálculo teórico da curva $T - \theta$, para vigas de betão armado com secção retangular cheia sujeitas à torção. O aplicativo computacional, designado por Torque 2.0, permite calcular automaticamente a resposta global de uma viga de betão armado sujeita à torção, designadamente a curva teórica $T - \theta$.

Tendo por base os resultados experimentais de diversas vigas encontrados na literatura, Jeng e Hsu em 2009 [28], elaboraram uma lista de vigas de referência, as quais os autores consideraram fidedignas para serem usadas numa análise comparativa. Neste trabalho, foi efetuada uma pesquisa adicional com o objetivo de verificar a existência de vigas de referência para além das apresentadas por Jeng e Hsu [28], da qual resultaram 12 vigas a acrescentar. Ao todo apresentam-se 88 vigas em betão armado de secção retangular cheia, apresentadas por diversos autores na literatura, nomeadamente Hsu [24] (B, C, G, I, J, K, M e N), Leonhardt e Schelling [30] (VB, VM, VQ, VS e VU), McMullen e Rangan [31] (A e B), Fang e Shiau [19] (H e N), Peng e Wong [32] (SW), Chiu, Fang, Young e Shiau [16] (NBS) e Koutchoukali e Belarbi [29] (BxUR). As vigas encontram-se identificadas de acordo com a designação original do autor. A Tabela I.1 do Anexo I, apresenta resumidamente as principais características geométricas das vigas de referência, nomeadamente a largura (x) e altura (y) da secção e as dimensões x_1 e y_1 referentes à largura e altura das cintas medidas a partir do eixo dos varões, respetivamente. Além disso, apresenta-se também as características mecânicas de cada secção, designadamente a área de armadura longitudinal (A_{sl}), a área distribuída de um ramo da armadura transversal (A_{st}/s , sendo s o espaçamento entre os varões transversais na direção longitudinal), a taxa de armadura longitudinal (ρ_l - Equação 4.14), a taxa de armadura transversal (ρ_t - Equação 4.15) e a taxa de armadura total (ρ_{tot} - Equação 4.16).

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{A_c} \quad (4.14)$$

$$\rho_t = \frac{A_{st}u}{A_c s} \quad (4.15)$$

$$\rho_{tot} = \rho_l + \rho_t \quad (4.16)$$

Nas equações anteriores, A_c é a área da secção limitada pelo perímetro exterior e u é o perímetro da linha média das cintas.

Na Tabela I.2 do Anexo I, apresentam-se as características dos materiais das vigas de referência, nomeadamente a resistência média à compressão (f_{cm}) e à tração (f_{ctm}) do betão, a tensão média de cedência da armadura longitudinal (f_{lym}) e transversal (f_{tym}), o módulo de elasticidade do betão (E_c) e do aço (E_s), a extensão correspondente ao pico de tensão (ε_o) e ao valor último convencional (ε_{cu}) para o betão comprimido, e as extensões últimas convencionais para a armadura longitudinal (ε_{lu}) e transversal (ε_{tu}). Além das características dos materiais, apresenta-se também o valor de metade do espaçamento expectável entre fissuras (L_r) para cada secção. Alguns dos parâmetros mencionados não são fornecidos pelo autor, nomeadamente f_{ctm} , E_c e ε_o , daí a necessidade de efetuar o seu cálculo segundo o Eurocódigo 2 [18] (Equações 4.17, 4.18 e 4.19, respetivamente). Para as extensões dos materiais ε_{cu} , ε_{lu} e ε_{tu} , quando omissos, admitiu-se valores convencionais geralmente aceites ou valores segundo o Eurocódigo 2 [18], nomeadamente $\varepsilon_{cu} = 0,0035$ e $\varepsilon_{lu} = \varepsilon_{tu} = 0,01$.

$$f_{cm} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (4.17)$$

$$E_c = E_{cm} = 22 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3} \quad (4.18)$$

$$\varepsilon_o = 0,7 f_{cm}^{0,31} < 2,8 \quad (4.19)$$

O valor de L_r foi definido a partir de um estudo experimental de Hsu em 1968 [24], que inclui as vigas de referência B3 a N4. Para as restantes vigas analisa-se qual das vigas de referência de Hsu tem características geométricas e mecânicas mais próximas e admite-se o mesmo valor para L_r .

As unidades dos parâmetros apresentados encontram-se segundo o Sistema Internacional (SI), para o qual foi necessário efetuar a conversão de unidades dos parâmetros em estudo que não se encontravam como tal.

Através do aplicativo computacional Torque 2.0 e com base nos dados das Tabelas I.1 e I.2, do Anexo I, foram calculadas as curvas teóricas $T - \theta$ para todas as leis constitutivas do betão à tração de referência (modelos *bt1* a *bt8*), apresentadas na Tabela 4.1. No Anexo II e III apresentam-se os resultados obtidos para cada viga de referência e para cada modelo testado no que se refere à relação $\sigma - \varepsilon$ utilizada para o betão tracionado. Tais resultados são apresentados por um conjunto de tabelas de valores, gráficos de barras e gráficos de linhas para as Curvas $T - \theta$.

Os resultados obtidos são referentes a uma análise comparativa efetuada ao início do Estado II da Curva $T - \theta$. Como tal, são indicados nas Tabelas do Anexo II os valores teóricos do momento torsor de fissuração (T_{cr}^{th}). Além deste parâmetro são também indicados os valores teóricos das rotações correspondentes ao momento torsor de fissuração no Estado I ($\theta_{cr}^{I,th}$, ver Figura 4.9). Após a análise dos primeiros resultados obtidos, verificaram-se grandes desvios entre os valores teóricos e experimentais da ordenada na origem da Curva $T - \theta$ no início do Estado II (T_0) bem como da rigidez de torção em Estado II (GJ^{II}). Devido à observação destes grandes desvios, que serão comentados mais à frente, optou-se por não apresentar numericamente os resultados da análise comparativa relativa aos parâmetros anteriormente referidos. No que se refere à rotação de fissuração em Estado II ($\theta_{cr}^{II,th}$, ver Figura 4.9), verificou-se uma grande dificuldade em determinar corretamente o seu valor teórico a partir das curvas $T - \theta$. De facto, as curvas teóricas $T - \theta$ não apresentam um patamar horizontal na transição do Estado I para o Estado II, patamar este geralmente observado nas curvas experimentais para vigas de secção cheia. Ainda assim, numa tentativa de determinar $\theta_{cr}^{II,th}$, adotou-se o critério de traçar uma linha reta horizontal a passar pelo ponto correspondente ao momento torsor crítico, e admitiu-se que a rotação correspondente ao Estado II se localizava na interceção dessa reta com a curva $T - \theta$ já em Estado II, tal como se ilustra na Figura 4.10.

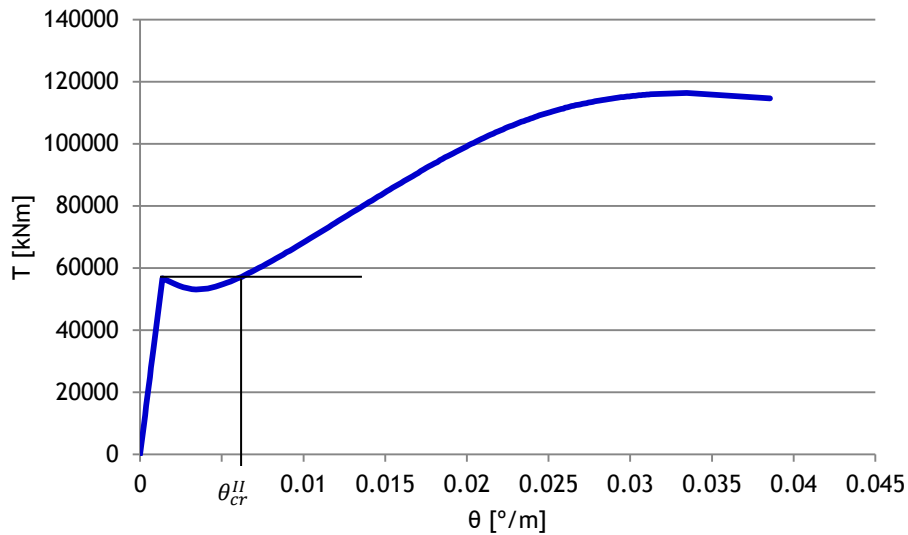


Figura 4.10. Curva teórica $T - \theta$ para a viga N-12-12, segundo a lei constitutiva de betão tracionado de Cervenka [15]

Após a determinação da rotação correspondente à fissuração no Estado II de diversas vigas, segundo o critério ilustrado na Figura 4.10, verificou-se que este método além de impreciso era incoerente em determinadas vigas. Isto é, em algumas vigas a rotação localizava-se muito após a fissuração ter ocorrido, em certos caso próxima do momento torsor máximo, e em outros nem era possível efetuar a interceção da reta com a curva, tal como se apresenta na Figura 4.11.

Deste modo, este método foi invalidado, pelo que optou-se por não apresentar os resultados numéricos referentes à análise comparativa entre os valores teóricos e experimentais da rotação correspondente ao momento de fissuração no Estado II.

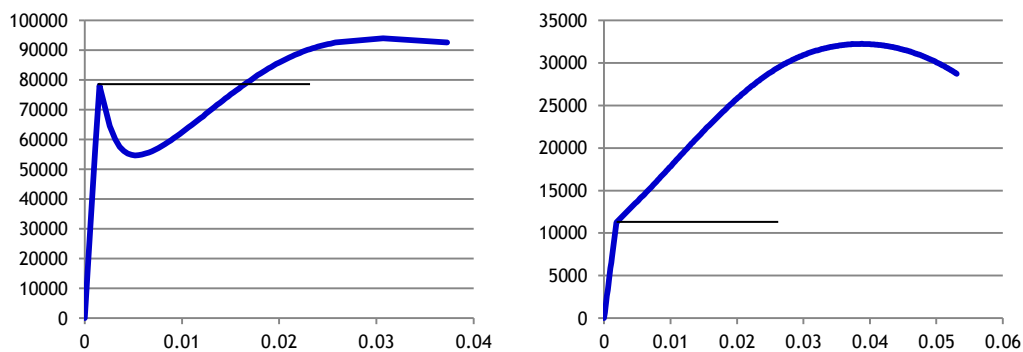


Figura 4.11. Curva teórica $T - \theta$ para a viga H-06-12 à esquerda e para a viga C6 à direita, segundo a lei constitutiva do betão à tração de Cervenka [15]

Para a realização das análises comparativas para os parâmetros T_{cr} e θ_{cr}^I são também apresentados nas Tabelas do Anexo II, os valores experimentais de cada viga de referência para os parâmetros mencionados (T_{cr}^{exp} e $\theta_{cr}^{I,exp}$). Por fim, as referidas Tabelas apresentam a

relação entre os valores experimentais e teóricos para os parâmetros citados (T_{cr}^{exp}/T_{cr}^{th} e $\theta_{cr}^{I exp}/\theta_{cr}^{I th}$).

Para cada modelo (lei constitutiva do betão à tração) é calculado o valor médio \bar{x} (Equação 4.20) de cada conjunto de valores obtidos da relação entre os valores experimentais e teóricos de todas as vigas de referência. O valor médio não é em geral suficiente para obter conclusões precisas, pelo que também é calculado o desvio padrão (s) e o coeficiente de variação (cv), pelas Equações 4.21 e 4.22 respetivamente, para os valores obtidos para a relação entre os valores experimentais e teóricos.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.20)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.21)$$

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\% \quad (4.22)$$

Onde n representa o número de valores da amostragem, neste caso o número de vigas de referência.

O desvio padrão mostra a dispersão usada com a média, isto é, mede a variabilidade que os valores possuem em relação à média. Por sua vez, o coeficiente de variação mede o grau de dispersão em relação à média, sendo esta útil em análises comparativas.

O coeficiente de variação vai ser o principal alvo de estudo para analisar os resultados, sendo apresentado em percentagem, é considerado que quando está acima dos 10% começa a apresentar uma elevada dispersão [3].

Além das tabelas apresentadas com os resultados obtidos, são também apresentados gráficos de barras com as relações T_{cr}^{exp}/T_{cr}^{th} e $\theta_{cr}^{I exp}/\theta_{cr}^{I th}$ referentes a cada viga de referência. Através destes gráficos é possível analisar visualmente o grau de dispersão dos resultados, considerando-se que a situação ótima se encontra quando $T_{cr}^{exp}/T_{cr}^{th} = 1$ e $\theta_{cr}^{I exp}/\theta_{cr}^{I th} = 1$. Além disso também permite analisar o grau de segurança dos resultados previstos. De facto, para valores acima ou abaixo de 1 corresponde uma maior ou menor segurança, respetivamente.

Depois de preencher todas as tabelas referentes a cada modelo, verificou-se que os coeficientes de variação eram muito elevados, entre os 20% e os 60%. Para perceber esta situação analisou-se quais as vigas que provocavam maior discrepância nos resultados. Concluiu-se que o grupo de vigas de referência de Leonhardt e Schelling [30] (VB, VM, VQ, VS e VU), de Chiu, Fang, Young e Shiau [16] (NBS), de Peng e Wong [32] (SW) e uma viga de Koutchoukali e Belarbi [29] (B7UR1) tinham resultados incoerentes em comparação com os valores experimentais. Para a maioria dessas vigas, os valores experimentais para os

parâmetros T_{cr} e θ_{cr}^I não foram indicados numericamente pelos autores, desta forma os mesmos foram obtidos manualmente a partir das curvas experimentais $T - \theta$, o que possivelmente causou os grandes desvios observados em relação aos valores correspondentes teóricos. Deste modo este conjunto de vigas mencionadas foi removido do estudo comparativo, restando 66 vigas de referência. Refere-se que a maioria das vigas removidas não foram consideradas no estudo realizado por Jeng e Hsu em 2009 [28], provavelmente por razões semelhantes.

Por fim, no Anexo III apresentam-se também gráficos de linhas com todas as curvas teóricas $T - \theta$ calculadas para cada viga de referência bem como a curva experimental. Isto permite visualizar o grau de dispersão obtido entre as curvas para cada modelo e comparar a proximidade do andamento das curvas teóricas com as curvas experimentais. A partir de uma análise global destas curvas, confirma-se que o troço teórico correspondente ao início do Estado II (parametrizado através dos parâmetros T_0 e GJ^II) sofre bastantes desvios comparativamente ao observado na curva experimental. Tais desvios aparentam ser maiores para vigas com menores taxas de armaduras. Esta observação confirma as conclusões anteriormente referidas e baseadas nos valores numéricos obtidos para as análises comparativas e justificam o facto de não se ter considerado os referidos parâmetros para as análises comparativas.

Uma avaliação geral dos resultados obtidos e apresentados nos Anexos II e III, permitem estabelecer algumas conclusões.

Uma análise comparativa global entre os valores obtidos para o momento torsor de fissuração teórico (T_{cr}^{th}) e experimental (T_{cr}^{exp}) para as vigas de referência analisadas, permite concluir que o grau de dispersão dos resultados entre os diversos modelos (modelos *bt1* a *bt8*) testados é notável. Os diagramas de barras também indicam que para cada modelo teórico testado a dispersão observada é notável, pois o intervalo observado em redor do valor ótimo $T_{cr}^{exp}/T_{cr}^{th} = 1$ é apreciável. Para as rotações correspondentes ao momento torsor crítico (θ_{cr}^I), verifica-se que o grau de dispersão dos resultados é particularmente elevado e maior.

Através das conclusões gerais expostas nos parágrafos anteriores e visto a grande quantidade de resultados obtidos em cada modelo testado, torna-se necessário resumir os resultados obtidos e analisá-los de forma faseada e objetiva. Para tal, a Tabela 4.2 resume os resultados obtidos referentes aos parâmetros estatísticos \bar{x} e cv (média e coeficiente de variação) para as relações T_{cr}^{exp}/T_{cr}^{th} e $\theta_{cr}^{I,exp}/\theta_{cr}^{I,th}$. Cada linha da Tabela 4.2 é referente aos resultados obtidos para cada modelo teórico *bt1* a *bt8* testado.

Tabela 4.2. Resultados obtidos com base no Torque 2.0

Modelo		T_{cr}	θ_{cr}^I
bt1. Cervenka (1985) [15]	$\bar{x} =$	1.010	1.188
	$cv =$	12.318	24.829
bt2. Vecchio e Collins (1986) [38]	$\bar{x} =$	0.961	1.133
	$cv =$	12.554	25.207
bt3. Hsu (1991) [22]	$\bar{x} =$	0.912	1.072
	$cv =$	12.553	25.156
bt4. Belarbi e Hsu (1994) [5]	$\bar{x} =$	0.999	1.178
	$cv =$	11.638	23.726
bt5. Collins <i>et al.</i> (1996) [17]	$\bar{x} =$	1.035	1.217
	$cv =$	12.487	25.094
bt6. Vecchio (2000) [39]	$\bar{x} =$	0.962	1.133
	$cv =$	12.305	24.907
bt7. Bentz (2005) [7]	$\bar{x} =$	0.946	1.120
	$cv =$	12.184	24.671
bt8. Stramandinoli e Rovere (2008) [34]	$\bar{x} =$	0.853	1.019
	$cv =$	13.319	26.025

Ao analisar a Tabela 4.2 verifica-se que para o parâmetro T_{cr} os valores da média \bar{x} se encontram num intervalo entre 0,8 e 1,1. Enquanto que para a respetiva rotação θ_{cr}^I a média \bar{x} varia entre 1 e 1,2. O que permite afirmar que no geral os valores são adequados.

Visto que o objetivo desta análise comparativa é estudar o início do Estado II da curva $T - \theta$, verificando qual a relação $\sigma - \varepsilon$ do betão tracionado que permita obter os melhores resultados, interessa analisar com mais detalhe os resultados relativos ao momento torsor crítico T_{cr} . Do ponto de vista prático, este é o parâmetro mais importante. Para tal, a Figura 4.12 apresenta os resultados da média e do coeficiente de variação para a relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ para todas as vigas de referência, referentes a cada modelo teórico analisado (bt1 a bt8).

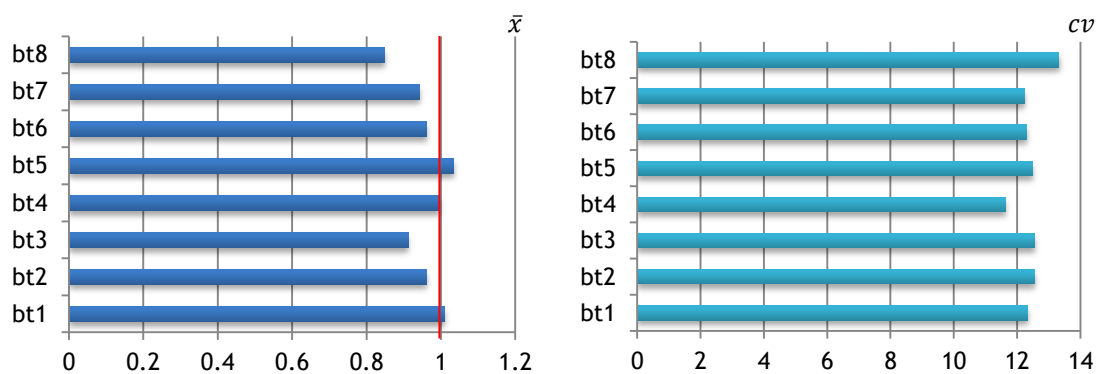


Figura 4.12. Média (\bar{x}) e coeficiente de variação (cv) da relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ para cada modelo teórico

A partir da Figura 4.12 ressalta que os modelos *bt1*, *bt2*, *bt4*, *bt5* e *bt6* são aqueles que apresentam valores médios para a relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ mais próximos de 1 (entre 0,95 e 1,1), em particular os modelos *bt1*, *bt4* e *bt5* com valores muito próximos, entre 0,99 e 1,1.

Para obter uma conclusão mais objetiva sobre qual o melhor modelo teórico testado é necessário analisar outros parâmetros para além da média, pois dificilmente se consegue

analisar o grau de dispersão de uma amostra de vigas de referência se se tiver em conta os resultados em termos de valores médios. Por exemplo, caso cerca de metade das vigas apresentarem resultados sobrestimados e a restante metade resultados subestimados, obtém-se um valor médio muito próximo de 1. Deste modo, opta-se pela análise do coeficiente de variação (cv), conjuntamente com a média. No que se refere ao coeficiente de variação verifica-se, a partir da Tabela 4.2, que todos os modelos teóricos apresentam valores ligeiramente acima dos 10%, o que indica um grau de dispersão aceitável. Verifica-se que o modelo teórico que apresenta um coeficiente de variação mais baixo é o *bt4*, com precisamente 11,64%.

Tendo em conta análise dos resultados da Tabela 4.2 e da Figura 4.12, o melhor modelo teórico encontrado para o cálculo do momento torsor de fissuração de vigas de betão armado sujeitas à torção, é o modelo *bt4*, da autoria de Belarbi e Hsu (1994) [5].

De seguida, analisam-se também os resultados para a relação entre os valores experimentais e teóricos da rotação correspondente ao momento torsor de fissuração $\theta_{cr}^{I\,exp}/\theta_{cr}^{I\,th}$. Para realizar uma análise mais objetiva, a Figura 4.13 apresenta em gráficos de barras os valores da média e do coeficiente de variação da relação $\theta_{cr}^{I\,exp}/\theta_{cr}^{I\,th}$ para todas as vigas de referência e para os modelos teóricos analisados.

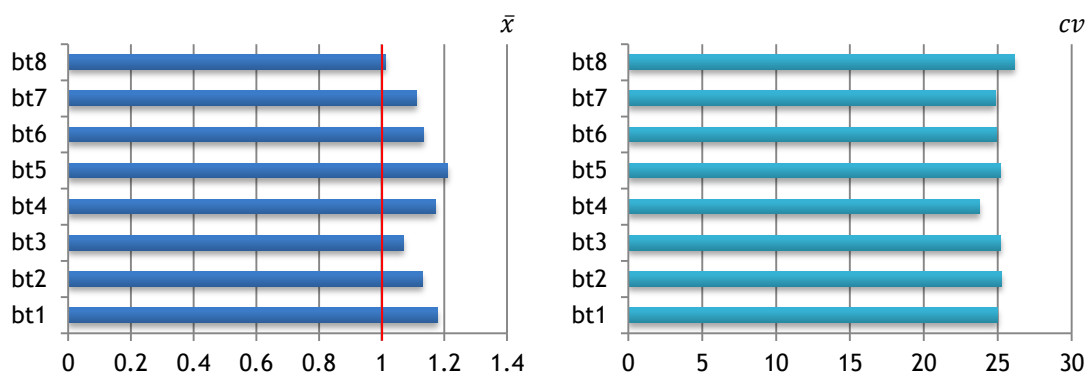


Figura 4.13. Média (\bar{x}) e coeficiente de variação (cv) da relação $\theta_{cr}^{I\,exp}/\theta_{cr}^{I\,th}$ para cada modelo teórico

De um modo geral, a partir da Figura 4.13 verifica-se que para a rotação θ_{cr}^I , os valores correspondentes à média variam de forma bastante diferente em comparação com os valores dos momentos torsores. Pode verificar-se que apenas os modelos *bt3*, *bt7* e *bt8* se aproximam do valor ótimo. Deste modo, torna-se novamente necessário analisar o coeficiente de variação, que por sua vez apresenta resultados muito elevados, superiores a 23% (Ver Tabela 4.2). Estes resultados vêm confirmar que os modelos teóricos aparentam uma maior dificuldade em estimar a rotação das vigas de referência para níveis de carregamento muito baixos. Esta dificuldade tem uma possível explicação, pois as rotações correspondentes aos momentos torsores de fissuração são valores muito baixos, de forma que é possível existirem maiores erros das medições experimentais realizadas pelos autores, devido à limitação da precisão que os transdutores de deslocamento geralmente apresentam. Além disso, o

ajustamento inicial dos modelos experimentais pode também conduzir a uma maior dispersão nas leituras das rotações experimentais

Para o modelo da lei constitutiva *bt4*, tendo sido considerada anteriormente como sendo a que apresenta melhores resultados quanto aos momentos torsores de fissuração, verifica-se que também é o modelo com um coeficiente de variação mais baixo (23,73%) para as rotações correspondentes. No que se refere à média, verifica-se que o modelo com valores mais próximos de 1 é o *bt8*, que analisando o conjunto da variação observada, demonstra ser um caso exemplificativo em que parte das vigas estão sobrestimadas e as restantes subestimadas. Tal pode ser verificado através da análise Figura II.8 do Anexo II.

Dada a maior dispersão dos resultados em relação às rotações θ_{cr}^I , opta-se, ainda assim, por não atribuir muita importância a este aspeto para a escolha do modelo de cálculo teórico mais apropriado. Deste modo, dar-se-á maior importância aos resultados referentes aos momentos torsores de fissuração (T_{cr}).

Na secção II.4 do Anexo II encontram-se todos os resultados obtidos referentes ao modelo teórico *bt4*, nomeadamente a tabela referente às relações entre os valores experimentais e teóricos dos parâmetros característicos analisados e o gráfico de barras para as referidas relações.

No Anexo III apresentam-se os gráficos de linhas para cada viga de referência, com as curvas $T - \theta$ experimentais, bem como as calculadas teoricamente a partir do aplicativo computacional (Torque 2.0) para os vários modelos de betão *bt* (Tabela 4.1). Cada gráfico apresenta uma “mancha” de curvas, das quais se encontra salientada a curva $T - \theta$ referente ao modelo *bt4*, para conferir os resultados obtidos anteriormente. A partir dos gráficos presentes no Anexo III é possível confirmar a notável dispersão das curvas teóricas $T - \theta$ calculadas pelos vários modelos testados para o betão tracionado. Uma análise global das curvas referentes ao modelo *bt4* permite verificar que na maioria dos casos o momento torsor de fissuração teórico se encontra abaixo do experimental.

Tendo em conta a análise de resultados efetuada ao longo desta secção, conclui-se que o modelo que melhor aproxima a curva $T - \theta$ teórica da experimental, na transição do estado não fissurado para o estado fissurado, é o modelo que incorpora a lei constitutiva para o betão à tração proposta por Belarbi e Hsu (1994) [5], cujas expressões matemáticas podem ser consultadas na Tabela 4.1.

4.6. Notas finais

Inicialmente neste capítulo, diversas vigas de referência foram testadas tendo por base o GSVATM que incorporou diversas propostas de leis constitutivas para o betão tracionado, com o objetivo de calcular o comportamento das vigas de betão armado sujeitas à torção, especialmente na zona de transição entre o estado não fissurado e fissurado. Para calcular automaticamente a curva teórica $T - \theta$ foi utilizado um aplicativo computacional, designado Torque 2.0, cuja implementação e modo de funcionamento foram descritos na secção 4.2.

Com base nos ensaios experimentais das vigas de referência presentes na literatura foi possível testar as relações $\sigma - \varepsilon$ dos materiais, particularmente para o betão tracionado. Através dos resultados obtidos foi possível encontrar um modelo que permite calcular boas previsões da curva $T - \theta$ para baixos níveis de carregamento, designadamente na zona de transição entre o estado não fissurado e fissurado. Tal modelo é o que incorpora a lei constitutiva para o betão à tração proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [5].

Os resultados obtidos a partir do estudo comparativo efetuado apenas incidiram no ponto da curva $T - \theta$ correspondente ao momento torsor de fissuração. Para além deste ponto característico da curva $T - \theta$, também o troço inicial no estado fissurado deveria ter sido analisado. No entanto, verificou-se existirem grandes desvios entre os correspondentes troços experimentais e teóricos, independentemente do modelo utilizado. Assim sendo, nenhuma das leis constitutivas para o betão à tração analisadas pode ser considerada perfeitamente adequada para simular a resposta das vigas na fase comportamental referida. No próximo capítulo, é apresentada uma base de trabalho com vista à proposta futura de uma nova lei constitutiva para o betão à tração

Capítulo 5. Base de trabalho para uma nova lei constitutiva para o betão tracionado

5.1. Introdução

Neste pequeno capítulo apresenta-se uma base de trabalho com vista à proposta futura de uma nova relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração baseada numa alteração calibrada do modelo *bt4*, proposto por Belarbi e Hsu (1994) [5]. Com base nos resultados obtidos no capítulo anterior, verificou-se não ser possível prever fiavelmente o troço inicial da curva $T - \theta$ correspondente à fase fissurada. Deste modo, neste capítulo pretende-se apresentar uma proposta de uma nova lei constitutiva que permita resolver os problemas anteriormente apresentados

5.2. Estruturação da nova relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração

Na secção 4.5 concluiu-se que o modelo *bt4* é aquele que mais aproxima a curva teórica $T - \theta$ à curva experimental no que se refere ao ponto de fissuração da viga. Deste modo, optou-se por utilizar como base este modelo, incorporando algumas alterações. Relembre-se que a equação para a lei constitutiva do betão à tração correspondente ao modelo *bt4* (modelo de Belarbi e Hsu [5]) é dada pela seguinte expressão matemática:

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0,4} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (5.1)$$

Ao analisar as curvas teóricas $T - \theta$ referentes ao modelo de Belarbi e Hsu [5], apresentadas no Anexo III, observa-se em geral, e ao longo de um intervalo de deformação, uma redução do momento torsor após a fissuração da viga. Tal comportamento é geralmente mais pronunciado para vigas com menores taxas de armaduras. A consequência deste comportamento foi a observação de grandes desvios entre os valores experimentais e teóricos para os parâmetros T_0 e GJ^{II} (ver Figura 4.9), tendo-se observado que os valores teóricos são em geral inferiores aos correspondentes valores experimentais. Este comportamento encontra-se diretamente ligado à forma da lei constitutiva para o betão à tração, refletindo a queda brusca da tensão de tração após a fissuração do betão (ver Figura 3.1).

Para tentar-se corrigir a observação dos referidos desvios, optou-se por alterar empiricamente a forma da relação $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração, através da introdução de um patamar horizontal no ramo descendente da curva, após a extensão de fissuração. Com este objetivo principal de suavizar a descida da tensão de tração, e por consequência o momento

torsor, após a fissuração, acrescentou-se uma nova condição à equação original, tal como é ilustrado na Equação 5.2.

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \text{se } \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} & \text{se } \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{c1} \leq n \cdot \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1} - (n \cdot \varepsilon_{cr} - \varepsilon_{cr})} \right)^{0,4} & \text{se } \varepsilon_{c1} > n \cdot \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (5.2)$$

Onde n é uma constante a definir pelo utilizador. O intervalo de deformação $n \cdot \varepsilon_{cr} - \varepsilon_{cr}$ corresponde ao “comprimento” do patamar horizontal. O valor da constante n deverá ser calibrado tendo por base uma análise comparativa com os resultados experimentais das vigas de referência para a fase comportamental em estudo.

A Figura 5.1 ilustra a lei constitutiva do betão à tração dada pela Equação 5.2, em comparação com a lei original (Equação 5.1).

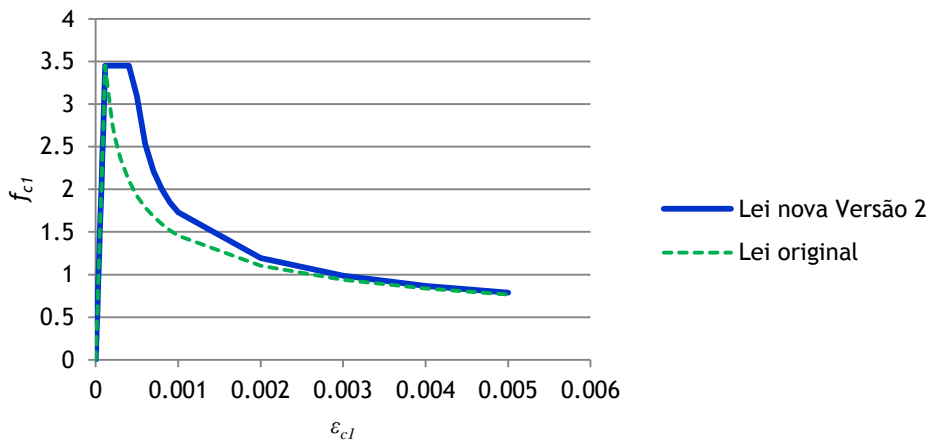


Figura 5.1. Versão 2 da lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu em 1994 [5]

Após implementar este novo modelo designado por *Versão 2* no aplicativo computacional descrito no capítulo anterior, obteve-se os resultados apresentados no Anexo IV.1, para um $n = 2$.

Observando no geral os resultados obtidos, através das tabelas que relacionam os resultados experimentais com os teóricos e também os respetivos gráficos de barras (Anexo IV.1), verifica-se que o novo modelo altera o momento torsor de fissuração e respetiva rotação.

O ponto característico da curva $T - \theta$ mais revelante, como já foi explicado no capítulo anterior, é o momento torsor de fissuração. Em comparação com a lei original, a média dos valores resultantes da relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ não é próxima de 1, nomeadamente 0,89 (em vez de 1, ver Tabela 4.2), e o grau de dispersão apresenta-se ligeiramente mais elevado,

12,01% (em vez de 11,64%, ver Tabela 4.2). Ao observar o gráfico de barras referente à relação T_{cr}^{exp}/T_{cr}^{th} (Figura IV.1) do momento torsor de fissuração verifica-se que o momento torsor das vigas de referência se encontram na sua maioria subestimadas.

Quanto às rotações θ_{cr}^I verifica-se uma melhoria de resultados em comparação com o modelo original. A média referente à relação $\theta_{cr}^{I exp}/\theta_{cr}^{I th}$ aproxima-se de 1, nomeadamente 1,02 (em vez de 1,18, ver Tabela 4.2), e o coeficiente de variação apresenta-se ligeiramente mais baixo, 23,52% (em vez de 23,73%, ver Tabela 4.2). O gráfico de barras correspondente à média referente à relação $\theta_{cr}^{I exp}/\theta_{cr}^{I th}$ das rotações apresentam um número de vigas subestimadas aproximadamente igual ao número de vigas sobrestimadas.

Os resultados anteriores não podem ser considerados satisfatórios uma vez que se considera dever constituir uma premissa básica do novo modelo, não alterar o nível de previsão do momento torsor de fissuração, comparativamente ao modelo não alterado. Para ilustrar graficamente este aspeto, apresentam-se no Anexo IV.1 as curvas $T - \theta$ para algumas das vigas de referência. A partir dos referidos gráficos, é possível observar que, para a maioria das vigas, continua a observar-se a descida do momento torsor após a fissuração da viga e os correspondentes desvios entre o troço experimental e teórico na fase fissurada inicial.

De modo a compreender o comportamento da versão 2 da lei original em função do comprimento do patamar horizontal, traduzido pelo parâmetro n , calculou-se para a viga B4 de Hsu [24], a curva teórica $T - \theta$ para diferentes valores de n (Figura 5.2).

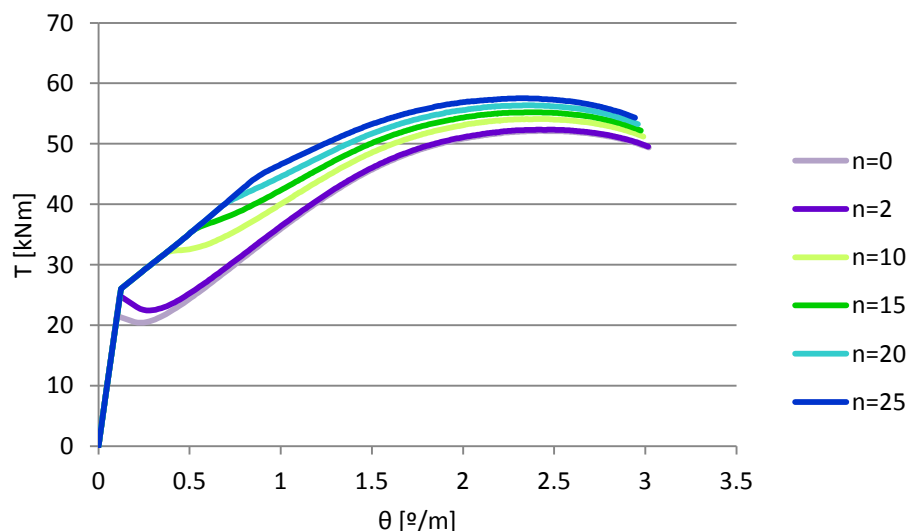


Figura 5.2. Comparação da curva $T - \theta$ para diferentes valores da variável n , na viga de referência B4

Ao analisar a Figura 5.2 verifica-se que à medida que a variável n é incrementada, a redução do momento torsor após a fissuração tende a desaparecer e a inclinação do troço da curva para a fase fissurada inicial tende a aumentar. No entanto, observa-se também uma alteração significativa do momento torsor de fissuração inicial.

Com base no exposto nos parágrafos anteriores, conclui-se que a lei constitutiva do betão à tração expressa pela Equação 5.2 não corresponde aos objetivos pretendidos.

Tendo em conta as observações anteriores, conclui-se que o patamar horizontal incluído na Equação 5.2 deve ser “deslocado” para a direita, isto é, no sentido do aumento das deformações. De facto, uma análise dos dados exportados a partir do aplicativo computacional, mostra que na realidade o momento torsor de fissuração ocorre para uma extensão do betão à tração superior à extensão de fissuração. Tal encontra-se ilustrado na Figura 5.3, onde o “marcador” a vermelho representa o ponto de fissuração da viga. Este aparente “desfasamento” entre o ponto efetivo correspondente à fissuração da viga à torção, quando marcado na curva $T - \theta$ e na curva da lei constitutiva do betão à tração encontra uma explicação simples. No procedimento de cálculo do GSVATM, é calculada uma tensão média ao longo da espessura do tirante de betão (ver Figura 2.8). Tal tensão média é calculada a partir do coeficiente k_1^c (ver equação 2.57), que é obtido, por sua vez, por integração da lei constitutiva do betão à tração. Ao caracterizar a tensão no tirante através de uma tensão de tração média, e não através da tensão de tração à superfície do tirante, a extensão de fissuração efetiva da viga é superior à extensão ε_{cr} da lei constitutiva do betão à tração. Esta explicação justifica a necessidade do patamar horizontal ter de ser deslocado para a direita.

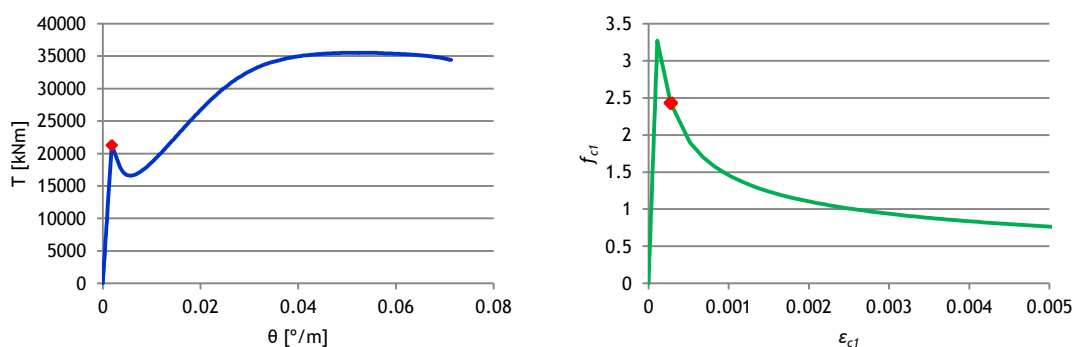


Figura 5.3. Visualização do ponto de fissuração numa curva $T - \theta$ e na relação $\sigma - \varepsilon$ original de Belarbi e Hsu [5]

A partir dos resultados do GSVATM que incorpora a lei constitutiva do betão à tração original (sem o patamar horizontal), é possível saber qual a extensão de tração correspondente ao momento torsor de fissuração da viga. Tal extensão é designada por $\varepsilon_{T_{cr}}$, sendo a sua obtenção feita de forma automática pelo aplicativo.

Após determinar a localização do momento de fissuração na lei constitutiva do betão à tração, conhecendo o valor de $\varepsilon_{T_{cr}}$, é possível introduzir o patamar horizontal na lei constitutiva tal como foi realizado na versão 2.

Nesta fase mais adiantada da correção da lei constitutiva do betão à tração, é também necessário ter em atenção o momento torsor resistente, porque mesmo com a introdução do patamar horizontal é necessário garantir que a extensão de tração

correspondente ao momento torsor resistente não se altere quando comparado com o mesmo ponto da lei original (sem o patamar horizontal).

Tendo por base o exposto anteriormente, resulta uma nova proposta na forma de versão 3 da lei original de Belarbi e Hsu [5], dada pela Equação 5.3 e com o aspeto ilustrado na Figura 5.4.

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \text{se } \varepsilon_{cr} \leq \varepsilon_{c1} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0,4} & \text{se } \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{T_{cr}} \\ f_{T_{cr}} & \text{se } \varepsilon_{T_{cr}} < \varepsilon_{c1} \leq n \cdot \varepsilon_{T_{cr}} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1} - \delta(\varepsilon)} \right)^{0,4} & \text{se } \varepsilon_{c1} < n \cdot \varepsilon_{T_{cr}} \end{cases} \quad (5.3)$$

Onde n é uma constante a definir pelo utilizador.

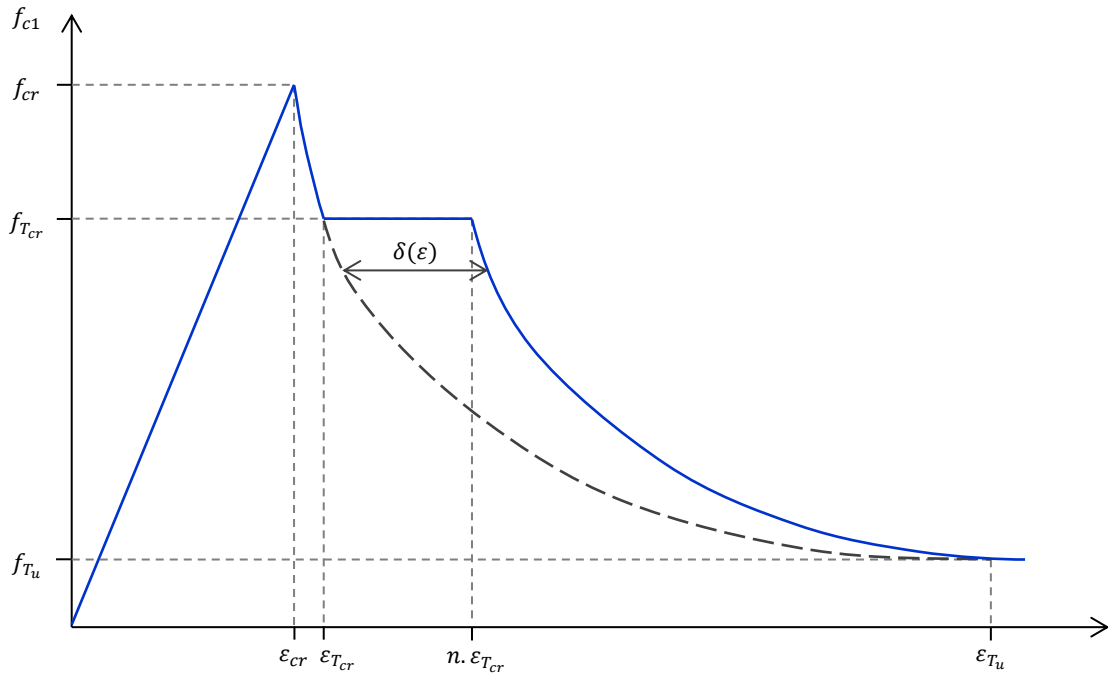


Figura 5.4. Versão 3 da lei constitutiva para o betão tracionado de Belarbi e Hsu [5]

Onde o parâmetro $\delta(\varepsilon)$ resulta do seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c1} = \varepsilon_{T_{cr}} &\rightarrow \delta(\varepsilon) = n \cdot \varepsilon_{T_{cr}} - \varepsilon_{T_{cr}} = \varepsilon_{T_{cr}} (n-1) \\ \varepsilon_{c1} = \varepsilon_{T_u} &\rightarrow \delta(\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Deste modo, tendo por base uma interpolação linear tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{0 - \varepsilon_{T_{cr}}(n-1)}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} &= \frac{\delta - \varepsilon_{T_{cr}}(n-1)}{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{T_{cr}}} \Leftrightarrow \delta = \frac{(-\varepsilon_{T_{cr}}(n-1))(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{T_{cr}})}{(\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}})} + \varepsilon_{T_{cr}}(n-1) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \delta &= \varepsilon_{T_{cr}}(n-1) \left(\frac{\varepsilon_{T_{cr}} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} + 1 \right) \Leftrightarrow \delta = \varepsilon_{T_{cr}}(n-1) \left(\frac{\varepsilon_{T_{cr}} - \varepsilon_{c1} + \varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \right) \Leftrightarrow \quad (5.4) \\
&\Leftrightarrow \delta = \varepsilon_{T_{cr}}(n-1) \left(\frac{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \right)
\end{aligned}$$

Para analisar a validade da Equação 5.4, procede-se às seguintes verificações:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{T_{cr}} &\rightarrow \delta(\varepsilon_{T_{cr}}) = \varepsilon_{T_{cr}}(n-1) \left(\frac{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \right) = \varepsilon_{T_{cr}}(n-1) \\
\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{T_u} &\rightarrow \delta(\varepsilon_{T_u}) = \varepsilon_{T_{cr}}(n-1) \left(\frac{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_u}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \right) = 0
\end{aligned}$$

Desta forma a equação final para a versão 3 da lei constitutiva do betão à tração é dada pela seguinte expressão matemática:

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \text{se } \varepsilon_{cr} \leq \varepsilon_{c1} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0,4} & \text{se } \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{T_{cr}} \\ f_{T_{cr}} & \text{se } \varepsilon_{T_{cr}} < \varepsilon_{c1} \leq n \cdot \varepsilon_{T_{cr}} \\ f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{T_{cr}}(n-1) \left(\frac{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \right)} \right)^{0,4} & \text{se } \varepsilon_{c1} < n \cdot \varepsilon_{T_{cr}} \end{cases} \quad (5.5)$$

Após a implementação computacional desta nova relação $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração é necessário efetuar de novo uma análise comparativa, de modo a analisar os resultados. Lembra-se que na implementação desta versão é necessário ter em conta que a determinação prévia da extensão correspondente ao momento tissor de fissuração na lei constitutiva do betão à tração original (sem o patamar horizontal) tem de ser incluída. O valor final de n deverá ser calibrado tendo por base uma análise comparativa com resultados experimentais associados às vigas de referência.

5.3. Conclusões

Ao longo deste capítulo procedeu-se, por tentativas, à modificação da lei constitutiva do betão à tração proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [5]. Tal lei original inclui as modificações introduzidas por Jeng e Hsu [28], descritas na secção 3.2, para vigas de betão armado sujeitas à torção. O objetivo principal é corrigir a descida brusca do momento torsor logo após a fissuração que se observa, em geral nas curvas $T - \theta$.

As modificações efetuadas originaram 2 versões ligeiramente diferentes da lei original de Belarbi e Hsu [5], a versão 2 e 3. A primeira foi implementada computacionalmente no modelo teórico apresentado no capítulo 2, a partir da qual se obteve os resultados apresentados no Anexo IV. Após a análise de tais resultados verificou-se que as modificações efetuadas na equação original não eram satisfatórias. Perante isto, procedeu-se a novas modificações com base na análise do comportamento da versão 2, surgindo uma nova proposta na forma da versão 3.

A versão 3 da lei original de Belarbi e Hsu [5] não foi implementada computacionalmente, pois apresenta uma complexidade superior em comparação com os outros modelos já apresentados. Visto isto, a equação correspondente à versão 3, requer um estudo mais aprofundado e detalhado, onde deve ser necessário efetuar possíveis calibrações da mesma. Esse estudo é demasiado extenso para ser incorporado neste trabalho.

Capítulo 6. Considerações finais

6.1. Introdução

Neste capítulo, apresenta-se uma síntese das principais conclusões obtidas ao longo do presente trabalho e possíveis trabalhos a elaborar no futuro e referentes ao tema em estudo.

O modelo teórico utilizado (GSVATM) e o respetivo aplicativo computacional (Torque 2.0) permitiram uma grande simplificação do trabalho necessário à realização do estudo apresentado neste trabalho. Pode também considerar-se que o modelo permitiu simular de forma eficaz e adequada o comportamento global das vigas de referência consideradas neste trabalho.

6.2. Conclusões

Na primeira parte deste trabalho apresentou-se a descrição do modelo teórico baseado na generalização do modelo de treliça espacial com ângulo variável (GSVATM). Este modelo teórico permite calcular a previsão do comportamento global, designadamente através do cálculo e traçado da curva comportamental momento torsor (T) - rotação (θ), de vigas de betão armado, com secção retangular cheia, sujeitas à torção pura.

O comportamento do betão à tração nos tirantes perpendiculares às escoras foi tido em conta mediante a incorporação de diversas relações tensão (σ) - extensão (ε) no modelo teórico. As curvas $\sigma - \varepsilon$ testadas neste trabalho resultaram de uma pesquisa bibliográfica, da qual se reteram 8 propostas de diversos autores para caracterizar o comportamento do betão tracionado.

As referidas relações $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração foram implementadas no aplicativo computacional (Torque MTEAVmod) baseado no GSVATM. Tal implementação foi realizada através da linguagem de programação DELPHI. Esta implementação deu origem a uma nova versão do aplicativo designada por Torque 2.0.

Tendo por base os resultados obtidos a partir do aplicativo computacional Torque 2.0, realizou-se uma análise comparativa global entre os valores experimentais teóricos para o momento torsor de fissuração e respetiva rotação. Os valores experimentais são relativos a um conjunto de vigas de referência ensaiadas por vários autores e encontradas na literatura consultada.

A partir dos resultados da análise realizada, foi possível encontrar, de entre as várias leis constitutivas para o betão tracionado testadas, uma que permite obter melhores previsões para o momento torsor de fissuração para as vigas de referência analisadas. Em

relação à rotação associada ao momento torsor de fissuração, apesar dos desvios observados serem maiores que os observados para o momento torsor de fissuração, considera-se que ainda assim os mesmos são aceitáveis dada a pequena magnitude das rotações para a fase comportamental em estudo. A observação de maiores desvios para as rotações pode ser explicada pelo facto de as rotações apresentarem valores baixos, pelo que a probabilidade de existirem erros nas medições experimentais aumenta.

A referida relação $\sigma - \varepsilon$ do betão à tração para a qual se observam melhores resultados é a correspondente ao modelo *bt4*, e foi proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [5].

No que se refere ao comportamento inicial das vigas em estado fissurado, observou-se que nenhuma das leis constitutivas do betão tracionado analisadas se mostrou eficaz para prever adequadamente essa fase comportamental através do cálculo e traçado da curva $T - \theta$. Por isso, foi apresentada uma proposta modificada da lei constitutiva de Belarbi e Hsu [5] para tentar resolver esse problema. Os primeiros resultados obtidos a partir da lei modificada, e tendo por base o GSVATM na qual esta lei foi implementada, mostraram que a proposta apresentada aparenta ser viável. A calibração da lei modificada proposta, que exige uma extensa análise comparativa com resultados experimentais, não foi apresentada neste trabalho.

Pode considerar-se que o trabalho apresentado constitui um avanço na tentativa de simular melhor as vigas de betão armado à torção para baixos níveis de carregamento, designadamente através do GSVATM.

6.3. Trabalhos futuros propostos

No seguimento do trabalho apresentado, considera-se importante o desenvolvimento dos seguintes estudos:

- Realizar um estudo específico com vista à calibração da lei constitutiva modificada e proposta neste trabalho para o betão tracionado nos tirantes;

- Avaliar as leis constitutivas para o betão tracionado para vigas com características diferentes das consideradas no presente trabalho, designadamente: vigas de betão armado com secção vazada, vigas de betão de alta resistência e vigas de betão pré-esforçado;

- Tentar de forma criteriosa, corrigir os resultados das vigas de referência excluídas, por forma a aumentar a lista de vigas de referência e obter conclusões mais consistentes.

Referências

1. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)", American Concrete Institute, Detroit, 1971
2. ACI, "Torsion of Structural Concrete (SP-18), American Concrete Institute, Detroit, Janeiro, 1968
3. Andrade, J.M.A., "Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2010
4. Bastos, P.S.S., "Torção em Vigas de Concreto Armado", Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2005
5. Belarbi, A. and Hsu, T.T.C., "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete", *Structural Journal of American Concrete Institute*, Vol. 91(4), 1994, pp. 465-474
6. Belarbi, A. and Hsu, T.T.C., "Constitutive Laws of Softened Concrete Biaxial Tension-Compression" Research Report UHCEE, Vol. 91(2), 1991
7. Bentz, E.C., "Explaining the riddle of tension stiffening models for shear panel experiments", *ASCE J Struct Eng*, 131(9), 2005, pp. 1422-5
8. Bentz, E.C., "Sectional Analysis of Reinforced Concrete Structures" PhD Thesis, Dept. of Civ. Engrg., University of Toronto, Toronto, 1999
9. Bernardo, L.F.A., "Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003
10. Bernardo, L.F.A., and Lopes, S.M.R., "Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams", *Materials and Structures*, RILEM, Springer, Netherlands, Vol. 41, No. 6, Junho 2008, pp.1143-1167
11. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Lopes, S.M.R., "Modified Variable Angle Truss-Model for Torsion in Reinforced Concrete Beams", *Materials and Structures*, Vol. 45, 2012, pp. 1877-1902
12. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Lopes, S.M.R., "Softened Truss Model for Reinforces NSC and HSC Beams under Torsion: a Comparative Study", *Engineering Structures*, Vol. 42, 2012, pp.278-296

13. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Nunes, N.C.G., "Generalized Softened Variable Angle Truss-Model for Reinforced Concrete Beams under Torsion", *Materials and Structures* (in Press), DOI: 10.1617/s11527-014-0301-z
14. CEB-FIP, "Model Code for Concrete Structures", CEB-FIP International Recommendations, 3rd edition, Paris, 1978, 348 pp.
15. Cervenka, V., "Constitutive model for cracked reinforced concrete", *ACI J*, 82(6), 1985, pp.877-882
16. Chiu, H.J., Fang, I.K., Young, W.T. and Shiau J.K., "Behavior of reinforced concrete beams with minimum torsional reinforcement", *Engineering Structures*, Vol. 29, 2007, pp.2193-2205
17. Collins, M.P., Mitchell, D., Adebar, P. and Vecchio, F.J., "A General Shear Design Method", *Structural Journal of American Concrete Institute*, Vol. 93, 1996, pp. 36-45
18. EN 1992-1-1, "Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios", Comité Europeu de Normalização, Bruxelas, Abril, 2004
19. Fang, I.K. and Shiau, J.K., "Torsional Behavior of Normal- and High-Strength Concrete Beams", *ACI Structural Journal*, Vol. 101(3), 2004, pp.304-313
20. Filho, J.J.H.S., "Reforço à Torção de Vigas de Concreto Armado com Compósitos de Fibras de Carbono", Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007
21. Hsu, T.T.C. and Mo, Y.L., "Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests", *Journal of the American Concrete Institute*, 1985, Vol. 82, No. 4, pp. 443-452
22. Hsu, T.T.C., "Nonlinear Analysis of Concrete Membrane Elements", *Structural Journal of American Concrete Institute*, 1991, Vol. 88(5), pp. 552-561
23. Hsu, T.T.C., "Torsion of Reinforced Concrete", Van Nostrand Reinhold Company, 1984
24. Hsu, T.T.C., "Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members" Torsion of Structural Concrete SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 261-306
25. <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Waterloo_Bridge.jpg>, acessado em 25/09/2013
26. <http://pormenoresconstrutivos.cype.pt/FIG012_A.html>, acessado em 01/10/2013
27. <<http://www.london-se1.co.uk/news/view/4621>>, acessado em 25/09/2013
28. Jeng, C. H. and Hsu, T.T.C., "A Softened Membrane Model for Torsion in Reinforced Concrete Members", *Engineering Structures*, Vol. 31, 2009, pp. 1944-1954
29. Koutchoukali, N.E. and Belarbi, A., "Torsion of High-Strength Reinforced Concrete Beams and Minimum Reinforcement Requirement", *ACI Structural Journal*, 98(4), 2001, pp.462-9

30. Leonhardt, F. and Schelling, G., "Torsionsversuche an Stahl Betonbalken", *Deutscher Ausschuss fur Stahlbeton*, Bulletin No. 239, 1974
31. McMullen, A.E. and Rangan, B.V., "Pure Torsion in Rectangular Sections - A Re-examination", *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 75(10), 1978, pp. 511-519
32. Peng, X.N. and Wong, Y.L., "Behavior of reinforced concrete walls subjected to monotonic pure torsion- An experimental study", *Engineering Structures*, 2011, Vol. 33, pp. 2495-2508
33. Rodrigues, J.A.T.F., "Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã
34. Stramandinoli, R.S.B. and La Rovere, H.L., "An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members", *Engineering Structures*, Vol. 30, 2008, pp.2069-2080
35. Taborda, C.S.B., "Efeito do Confinamento Axial no Comportamento de Vigas de Betão Estrutural sujeitas à Troço" PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2012
36. Taborda, C.S.B., "Programa de Tese de Doutoramento: Generalização da Analogia da Treliza Espacial para a Modelação de Vigas de Betão Estrutural sujeitas à Interação de Esforços", Departamento de Engenharia Civil, Universidade da Beira Interior, 2012
37. Vecchio, F.J. and Collins, M.P., "Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear", *IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced Concrete*, Delft, Final Report. 1981, pp. 211-225
38. Vecchio, F.J. and Collins, M.P., "The Modified Compression- Field Theory for reinforced Concrete Elements Subjected to shear", *Journal of American Concrete Institute*, Vol. 83(2), 1986, pp. 219-231
39. Vecchio, F.J., "Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 126(9), 2000, pp. 1070-1077
40. Zangh, H.T.C. and Hsu, T.C., "Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 124, 1998, pp. 24-34

Anexos

Anexo I. Vigas de referência

Tabela I.1. Características das vigas de referência

Viga	x (cm)	y (cm)	x_1 (cm)	y_1 (cm)	A_{st} (cm ²)	A_{st}/s (cm ² /m)	ρ_l (%)	ρ_t (%)	ρ_{total} (%)
B3 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	10.160	1.173	1.173	2.347
B4 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	15.484	14.014	1.600	1.618	3.218
B5 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	20.387	18.473	2.107	2.133	4.240
B6 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	25.806	22.578	2.667	2.607	5.274
B7 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	5.161	10.160	0.533	1.173	1.707
B8 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	5.161	22.578	0.533	2.607	3.141
B9 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	4.657	1.173	0.538	1.711
C4 [24]	25.4	25.4	21.59	21.59	11.355	13.110	1.760	1.755	3.515
C5 [24]	25.4	25.4	21.59	21.59	15.484	17.670	2.400	2.365	4.765
C6 [24]	25.4	25.4	21.59	21.59	20.387	23.906	3.160	3.200	6.360
G3 [24]	25.4	50.8	21.59	46.99	11.355	8.294	0.880	0.882	1.762
G4 [24]	25.4	50.8	21.59	46.99	15.484	11.289	1.200	1.200	2.400
G5 [24]	25.4	50.8	21.59	46.99	20.387	15.052	1.580	1.600	3.180
G7 [24]	25.4	50.8	21.59	46.99	12.000	8.835	0.930	0.939	1.869
G8 [24]	25.4	50.8	21.59	46.99	17.032	12.315	1.320	1.309	2.629
I3 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	10.160	1.173	1.173	2.347
I4 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	15.484	14.014	1.600	1.618	3.218
I5 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	20.387	18.473	2.107	2.133	4.240
I6 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	25.806	22.578	2.667	2.607	5.274
J1 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	5.161	4.657	0.533	0.538	1.071
J2 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	8.000	7.210	0.827	0.833	1.659
J3 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	10.160	1.173	1.173	2.347
J4 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	15.484	14.014	1.600	1.618	3.218
K2 [24]	15.24	49.53	11.43	45.72	7.742	6.773	1.026	1.026	2.051
K3 [24]	15.24	49.53	11.43	45.72	12.000	10.421	1.590	1.578	3.168
K4 [24]	15.24	49.53	11.43	45.72	17.032	15.052	2.256	2.279	4.536
M1 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	8.000	4.756	0.827	0.549	1.376
M2 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	6.773	1.173	0.782	1.956
M3 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	15.484	9.236	1.600	1.067	2.667
M4 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	20.387	12.315	2.107	1.422	3.529
M5 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	25.806	15.631	2.667	1.805	4.472
M6 [24]	25.4	38.1	21.59	34.29	30.581	15.631	3.160	1.805	4.965
N1 [24]	15.24	30.48	13.03	28.27	2.839	3.503	0.611	0.623	1.234
N1a [24]	15.24	30.48	13.03	28.27	2.839	3.503	0.611	0.623	1.234
N2 [24]	15.24	30.48	13.03	28.27	5.161	6.350	1.111	1.129	2.240
N2a [24]	15.24	30.48	13.03	28.27	5.161	6.209	1.111	1.104	2.215
N3 [24]	15.24	30.48	13.03	28.27	4.258	5.080	0.917	0.903	1.820
N4 [24]	15.24	30.48	13.03	28.27	6.581	7.983	1.417	1.420	2.836
VB2 [30]	44	24	42	22	7.008	5.840	0.664	0.708	1.372
VB3 [30]	44	24	42	22	7.008	5.840	0.664	0.708	1.372
VB4 [30]	44	24	42	22	7.008	5.840	0.664	0.708	1.372
VM1 [30]	29.4	16	28	14.6	3.000	3.629	0.638	0.657	1.295
VM2 [30]	44	24	42	22	6.600	5.321	0.625	0.645	1.270
VM3 [30]	58.7	32	56.1	29.4	12.840	7.143	0.684	0.650	1.334
VQ1 [30]	32.4	32.4	30.4	30.4	3.456	2.880	0.329	0.334	0.663
VQ3 [30]	58	18.6	56	16.6	4.270	3.050	0.396	0.411	0.806
VQ9 [30]	80.6	14	78.6	12	5.076	2.820	0.450	0.453	0.903
VS2, VQ2 [30]	44	24	42	22	3.660	3.050	0.347	0.370	0.716
VS3 [30]	44	24	42	22	5.490	4.552	0.520	0.552	1.072
VS4, VQ5 [30]	44	24	42	22	7.320	6.100	0.693	0.739	1.433
VS9 [30]	44	24	42	22	3.480	2.900	0.330	0.352	0.681
VS10, VB1 [30]	44	24	42	22	6.960	5.800	0.659	0.703	1.362
VU1 [30]	44	24	42	22	3.360	5.600	0.318	0.679	0.997
VU2 [30]	44	24	42	22	5.040	5.600	0.477	0.679	1.156
VU3 [30]	44	24	42	22	6.720	4.179	0.636	0.507	1.143
VU4 [30]	44	24	42	22	6.720	2.800	0.636	0.339	0.976

Tabela I.1 (continuação). Características das vigas de referência

A2 [31]	25.4	25.4	22.2	22.2	5.161	4.128	0.800	1.076	1.876
A3 [31]	25.4	25.4	21.92	21.92	8.000	8.941	1.240	1.215	2.455
A4 [31]	25.4	25.4	21.92	21.92	11.355	12.418	1.760	1.688	3.448
B3 [31]	17.78	35.56	14.3	32.08	8.000	8.597	1.265	1.261	2.527
B4 [31]	17.78	35.56	14.3	32.08	11.355	11.764	1.796	1.726	3.522
H-06-12 [19]	35	50	30	45	20.645	7.097	1.180	0.608	1.788
H-07-10 [19]	35	50	30	45	17.032	7.885	0.973	0.676	1.649
H-07-16 [19]	35	50	30	45	28.387	7.885	1.622	0.676	2.298
H-12-12 [19]	35	50	30	45	20.645	14.194	1.180	1.217	2.396
H-12-16 [19]	35	50	30	45	28.387	14.194	1.622	1.217	2.839
H-14-10 [19]	35	50	30	45	17.032	16.129	0.973	1.382	2.356
H-20-20 [19]	35	50	30	45	34.064	23.460	1.947	2.011	3.957
N-06-06 [19]	35	50	30	45	12.000	7.097	0.686	0.608	1.294
N-06-12 [19]	35	50	30	45	20.645	7.097	1.180	0.608	1.788
N-07-10 [19]	35	50	30	45	17.032	7.885	0.973	0.676	1.649
N-07-16 [19]	35	50	30	45	28.387	7.885	1.622	0.676	2.298
N-12-12 [19]	35	50	30	45	20.645	14.194	1.180	1.217	2.396
N-12-16 [19]	35	50	30	45	28.387	14.194	1.622	1.217	2.839
N-14-10 [19]	35	50	30	45	17.032	16.129	0.973	1.382	2.356
N-20-20 [19]	35	50	30	45	34.064	23.460	1.947	2.011	3.957
SW4-1 [32]	15	45	10	40	7.854	3.927	1.164	0.582	1.745
NBS-43-44 [16]	35	50	30	45	7.601	5.090	0.434	0.436	0.871
NBS-82-13 [16]	35	50	30	45	14.251	1.667	0.814	0.143	0.957
B5UR1 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	5.161	6.563	0.834	0.916	1.749
B7UR1 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	5.161	6.563	0.834	0.916	1.749
B9UR1 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	5.161	6.563	0.834	0.916	1.749
B12UR1 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	5.161	6.563	0.834	0.916	1.749
B14UR1 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	5.161	6.563	0.834	0.916	1.749
B12UR2 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	5.161	6.949	0.834	0.970	1.803
B12UR3 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	6.581	7.461	1.063	1.041	2.104
B12UR4 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	7.742	7.876	1.250	1.099	2.349
B12UR5 [29]	20.3	30.5	16.5	26.7	8.000	10.126	1.292	1.413	2.705

Tabela I.2. Características das vigas de referência

Viga	f_{cm} (MPa)	f_{ctm} (MPa)	f_{tym} (MPa)	f_{tym} (MPa)	E_c (GPa)	E_s (GPa)	ε_o (%)	ε_{cu} (%)	ε_{lu} (%)	ε_{tu} (%)	L_r (mm)
B3 [24]	28.07	2.22	327.59	320.00	30.0	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.067
B4 [24]	29.17	2.30	320.00	323.45	30.3	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.047
B5 [24]	30.55	2.39	332.41	321.38	30.8	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.043
B6 [24]	28.83	2.27	331.72	322.76	30.2	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.041
B7 [24]	26.00	2.06	320.00	318.62	29.3	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.061
B8 [24]	26.76	2.12	322.07	320.00	29.6	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.041
B9 [24]	28.83	2.27	319.31	342.76	30.2	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.067
C4 [24]	27.17	2.15	336.55	327.59	29.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.036
C5 [24]	27.24	2.15	328.28	328.97	29.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.025
C6 [24]	27.59	2.18	315.86	327.59	29.8	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.022
G3 [24]	26.83	2.12	338.62	327.59	29.6	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.051
G4 [24]	28.28	2.23	325.52	321.38	30.1	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.056
G5 [24]	26.90	2.13	331.03	327.59	29.6	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.043
G7 [24]	30.97	2.42	319.31	322.76	30.9	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.041
G8 [24]	28.34	2.24	322.07	328.97	30.1	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.038
I3 [24]	44.76	3.32	343.45	333.79	34.5	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.043
I4 [24]	44.97	3.33	315.17	326.21	45.0	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.032
I5 [24]	45.03	3.33	310.34	325.52	34.6	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.030
I6 [24]	45.79	3.38	325.52	328.97	34.7	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.024
J1 [24]	14.34	1.13	327.59	346.21	25.0	200	0.0016	0.0035	0.01	0.01	0.061
J2 [24]	14.55	1.05	320.00	340.69	24.6	200	0.0016	0.0035	0.01	0.01	0.041
J3 [24]	16.90	1.29	338.62	337.24	25.8	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.032
J4 [24]	16.76	1.27	324.14	331.72	25.7	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.032
K2 [24]	30.62	2.40	335.86	337.93	30.8	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.033
K3 [24]	29.03	2.29	315.86	320.69	30.3	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.034
K4 [24]	28.62	2.26	344.14	340.00	30.2	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.030
M1 [24]	29.86	2.35	326.21	353.10	30.6	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.067
M2 [24]	30.55	2.39	328.97	357.24	30.8	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.036
M3 [24]	26.76	2.12	322.07	326.21	29.6	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.051
M4 [24]	26.55	2.10	318.62	326.90	29.5	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.038
M5 [24]	28.00	2.21	335.17	331.03	30.0	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.030
M6 [24]	29.38	2.31	317.93	340.69	30.4	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.029
N1 [24]	29.52	2.32	352.41	341.38	30.4	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.065
N1a [24]	28.69	2.26	346.21	344.83	30.2	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.051
N2 [24]	30.41	2.38	331.03	337.93	30.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.030
N2a [24]	28.41	2.24	333.10	360.69	30.1	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.042
N3 [24]	27.31	2.16	351.72	351.72	29.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.036
N4 [24]	27.31	2.16	340.92	355.86	29.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.028
VB2 [30]	26.40	2.09	541.45	541.45	29.4	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.065
VB3 [30]	39.10	2.97	541.45	541.45	33.1	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.065
VB4 [30]	49.80	3.61	541.45	541.45	35.6	200	0.0024	0.0035	0.01	0.01	0.065
VM1 [30]	39.10	2.97	442.38	568.91	33.1	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.065
VM2 [30]	36.10	2.77	431.59	436.49	32.3	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.065
VM3 [30]	40.00	3.02	461.01	442.38	33.4	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.065
VQ1 [30]	19.00	1.48	557.14	557.14	26.7	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.061
VQ3 [30]	17.60	1.36	432.57	432.57	26.1	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.061
VQ9 [30]	19.50	1.53	441.40	441.40	26.7	200	0.0018	0.0035	0.01	0.01	0.061
VS2, VQ2 [30]	19.00	1.48	432.57	432.57	26.7	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.061
VS3 [30]	19.50	1.53	432.57	432.57	26.7	200	0.0018	0.0035	0.01	0.01	0.061
VS4, VQ5 [30]	19.00	1.48	432.57	432.57	26.7	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.065
VS9 [30]	17.60	1.48	570.87	570.87	26.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.061
VS10, VB1 [30]	19.00	1.48	570.87	570.87	26.7	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.065
VU1 [30]	19.50	1.53	441.40	441.40	26.9	200	0.0018	0.0035	0.01	0.01	0.061
VU2 [30]	19.50	1.53	441.40	441.40	26.9	200	0.0018	0.0035	0.01	0.01	0.061
VU3 [30]	18.50	1.44	441.40	441.40	26.5	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.065
VU4 [30]	18.50	1.44	441.40	441.40	26.5	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.061
A2 [31]	38.20	2.91	380.00	285.00	32.9	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.041
A3 [31]	39.38	2.98	352.41	360.00	33.2	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.056
A4 [31]	39.17	2.97	351.00	360.00	33.1	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.036

Tabela I.2 (continuação). Características das vigas de referência

B3 [31]	38.62	2.94	352.41	360.00	33.0	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.056
B4 [31]	38.48	2.93	351.03	360.00	32.9	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.036
H-06-12 [19]	78.50	4.62	410.00	440.00	40.8	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.067
H-07-10 [19]	68.40	4.37	500.00	420.00	39.2	200	0.0026	0.0035	0.01	0.01	0.036
H-07-16 [19]	68.40	4.37	500.00	420.00	39.2	200	0.0026	0.0035	0.01	0.01	0.036
H-12-12 [19]	78.50	4.62	410.00	440.00	40.8	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.056
H-12-16 [19]	78.50	4.62	520.00	440.00	40.8	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.028
H-14-10 [19]	68.40	4.37	500.00	360.00	39.2	200	0.0026	0.0035	0.01	0.01	0.032
H-20-20 [19]	78.50	4.62	560.00	440.00	40.8	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.030
N-06-06 [19]	35.50	2.73	440.00	440.00	32.2	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.065
N-06-12 [19]	35.50	2.73	410.00	440.00	32.2	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.067
N-07-10 [19]	33.50	2.60	500.00	420.00	31.6	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.067
N-07-16 [19]	33.50	2.60	500.00	420.00	31.6	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.067
N-12-12 [19]	35.50	2.73	410.00	440.00	32.2	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.056
N-12-16 [19]	35.50	2.73	520.00	440.00	32.2	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.051
N-14-10 [19]	33.50	2.60	500.00	360.00	31.6	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.032
N-20-20 [19]	35.50	2.73	560.00	440.00	32.2	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.030
SW4-1 [32]	44.20	3.28	459.00	459.00	34.4	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.067
NBS-43-44 [16]	35.00	2.70	400.00	385.00	32.0	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.061
NBS-82-13 [16]	35.00	2.70	493.00	600.00	32.0	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.067
B5UR1 [29]	39.60	3.60	386.00	373.00	33.2	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.041
B7UR1 [29]	64.60	4.50	386.00	399.00	38.5	200	0.0025	0.0035	0.01	0.01	0.041
B9UR1 [29]	75.00	4.60	386.00	373.00	40.3	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.041
B12UR1 [29]	80.60	5.30	386.00	399.00	41.1	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.041
B14UR1 [29]	93.90	6.30	386.00	386.00	43.1	200	0.0028	0.0035	0.01	0.01	0.041
B12UR2 [29]	76.20	5.50	386.00	386.00	40.5	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.041
B12UR3 [29]	72.90	5.30	379.50	386.00	39.9	200	0.0026	0.0035	0.01	0.01	0.033
B12UR4 [29]	75.90	5.30	373.00	386.00	40.4	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.067
B12UR5 [29]	76.70	5.50	380.00	386.00	40.5	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.038

Anexo II. Resultados obtidos

II.1 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Cervenka (1985) [15]

Tabela II.1. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	θ_{cr}^{exp} °/m	θ_{cr}^{th} °/m	$\frac{\theta_{cr}^{exp}}{\theta_{cr}^{th}}$
B3 [24]	20.09	20.90	0.961	0.12	0.10	1.208
B4 [24]	21.90	20.95	1.045	0.12	0.10	1.205
B5 [24]	22.58	21.42	1.054	0.14	0.10	1.415
B6 [24]	24.95	20.64	1.209	0.16	0.09	1.751
B7 [24]	20.21	19.98	1.011	0.11	0.10	1.073
B8 [24]	21.79	20.34	1.071	0.13	0.10	1.278
B9 [24]	19.64	20.80	0.944	0.11	0.10	1.045
C4 [24]	11.85	11.25	1.053	0.13	0.11	1.178
C5 [24]	14.00	11.18	1.252	0.17	0.11	1.508
C6 [24]	13.89	11.26	1.234	0.17	0.11	1.609
G3 [24]	27.09	29.48	0.919	0.10	0.09	1.049
G4 [24]	28.67	30.14	0.951	0.12	0.09	1.287
G5 [24]	29.46	29.21	1.008	0.11	0.09	1.298
G7 [24]	33.64	31.67	1.062	0.13	0.09	1.449
G8 [24]	33.64	30.14	1.116	0.12	0.09	1.365
I3 [24]	25.51	25.54	0.999	0.11	0.11	0.970
I4 [24]	28.00	25.70	1.090	0.12	0.11	1.149
I5 [24]	28.11	25.97	1.083	0.15	0.11	1.435
I6 [24]	27.54	26.23	1.050	0.13	0.10	1.220
J1 [24]	14.00	15.27	0.917	0.09	0.09	0.918
J2 [24]	17.05	15.12	1.128	0.12	0.09	1.375
J3 [24]	16.93	15.93	1.063	0.10	0.09	1.076
J4 [24]	17.95	15.58	1.152	0.11	0.09	1.284
K2 [24]	12.19	11.97	1.018	0.18	0.14	1.311
K3 [24]	12.42	11.54	1.076	0.19	0.13	1.494
K4 [24]	13.10	11.05	1.185	0.21	0.12	1.714
M1 [24]	19.19	21.23	0.904	0.11	0.10	1.025
M2 [24]	20.55	21.46	0.957	0.11	0.10	1.077
M3 [24]	20.66	20.01	1.032	0.12	0.10	1.236
M4 [24]	20.66	19.89	1.039	0.13	0.10	1.406
M5 [24]	21.67	20.17	1.074	0.12	0.09	1.299
M6 [24]	22.69	20.66	1.098	0.15	0.09	1.566
N1 [24]	7.59	6.68	1.136	0.13	0.16	0.812
N1a [24]	7.02	6.61	1.062	0.11	0.16	0.688
N2 [24]	7.44	6.77	1.099	0.22	0.15	1.404
N2a [24]	7.50	6.56	1.144	0.21	0.15	1.375
N3 [24]	7.41	6.42	1.154	0.21	0.15	1.393
N4 [24]	7.60	6.39	1.188	0.21	0.15	1.426
A2 [31]	11.29	13.36	0.845	0.12	0.13	0.936
A3 [31]	12.19	13.53	0.901	0.12	0.13	0.977
A4 [31]	12.53	13.53	0.926	0.15	0.12	1.198
B3 [31]	8.81	12.02	0.732	0.15	0.14	1.064
B4 [31]	10.16	12.01	0.846	0.15	0.13	1.089
H-06-12 [19]	75.00	78.00	0.962	0.09	0.09	0.997
H-07-10 [19]	70.50	73.90	0.954	0.09	0.09	1.076
H-07-16 [19]	65.30	73.49	0.889	0.09	0.08	1.027
H-12-12 [19]	77.10	79.70	0.967	0.07	0.09	0.854
H-12-16 [19]	79.30	79.67	0.995	0.09	0.09	1.061
H-14-10 [19]	61.80	75.70	0.816	0.09	0.09	0.997
H-20-20 [19]	76.00	81.78	0.929	0.09	0.09	1.053

Tabela II.1 (continuação). Pontos característicos da curva $T - \theta$

N-06-06 [19]	43.20	56.05	0.771	0.08	0.08	1.018
N-06-12 [19]	51.80	56.09	0.923	0.11	0.08	1.469
N-07-10 [19]	41.60	54.71	0.760	0.11	0.08	1.404
N-07-16 [19]	40.00	54.67	0.732	0.11	0.08	1.426
N-12-12 [19]	49.30	56.68	0.870	0.09	0.08	1.179
N-12-16 [19]	57.10	56.25	1.015	0.12	0.08	1.576
N-14-10 [19]	41.80	55.15	0.758	0.12	0.08	1.562
N-20-20 [19]	55.00	56.60	0.972	0.13	0.08	1.679
B5UR1 [29]	11.60	12.39	0.936	0.09	0.14	0.629
B9UR1 [29]	13.00	16.21	0.802	0.13	0.15	0.912
B12UR1 [29]	16.20	16.75	0.967	0.09	0.15	0.612
B14UR1 [29]	19.30	17.67	1.092	0.12	0.15	0.780
B12UR2 [29]	17.80	16.36	1.088	0.11	0.15	0.753
B12UR3 [29]	16.00	16.05	0.997	0.10	0.15	0.700
B12UR4 [29]	16.90	16.37	1.032	0.14	0.15	0.957
B12UR5 [29]	13.60	16.71	0.814	0.04	0.15	0.241
		$\bar{x} =$	1.010		$\bar{x} =$	1.188
		$s =$	0.124		$s =$	0.295
		$cv =$	12.318		$cv =$	24.829

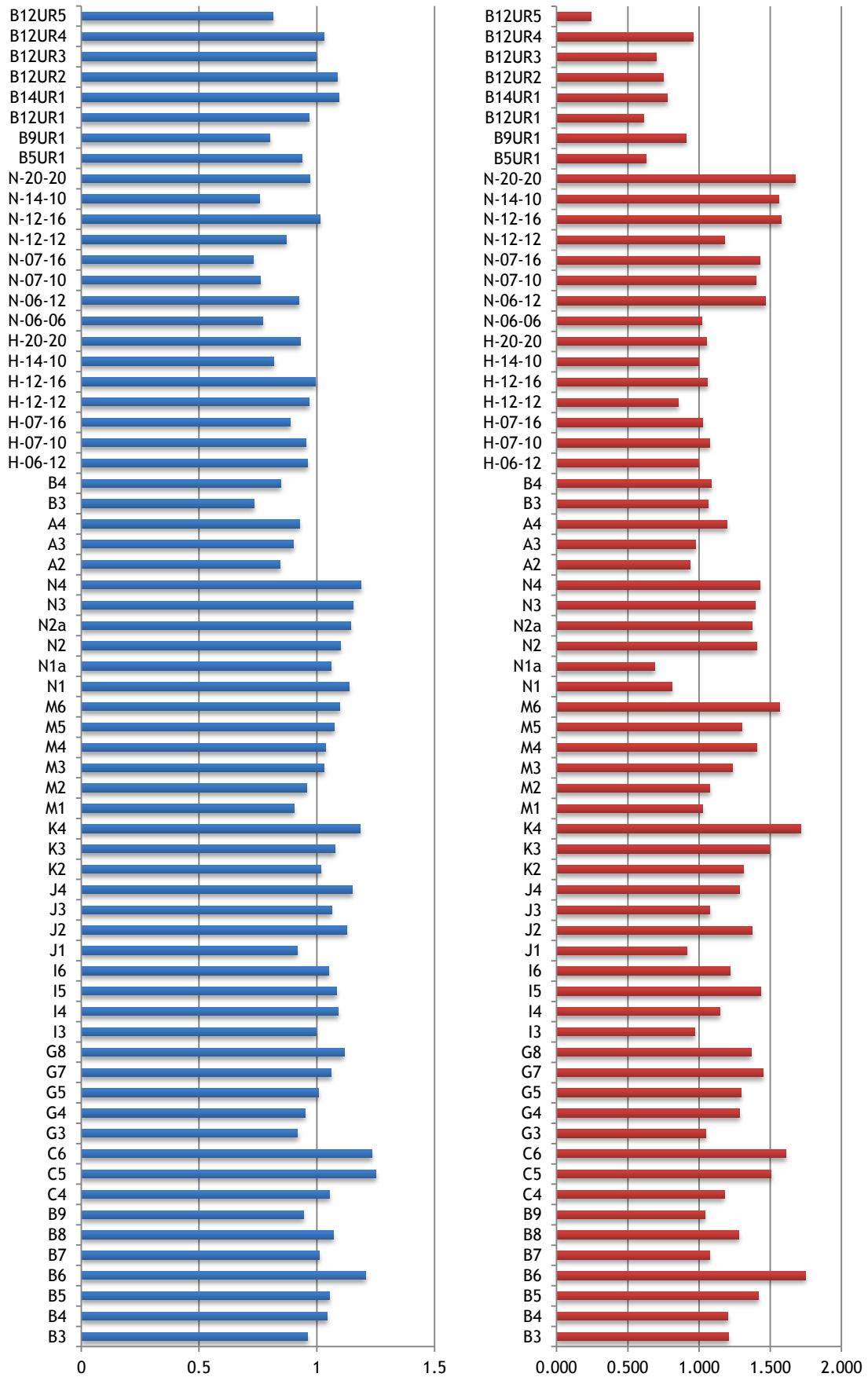


Figura II.1. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{I exp} / \theta_{cr}^{I th}$ à direita

II.2 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Vecchio e Collins (1986) [38]

Tabela II.2. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	$\theta_{cr}^{I exp}$ °/m	$\theta_{cr}^{I th}$ °/m	$\frac{\theta_{cr}^{I exp}}{\theta_{cr}^{I th}}$
B3 [24]	20.09	21.99	0.913	0.12	0.11	1.148
B4 [24]	21.90	22.02	0.995	0.12	0.10	1.146
B5 [24]	22.58	22.24	1.015	0.14	0.10	1.363
B6 [24]	24.95	21.69	1.150	0.16	0.10	1.666
B7 [24]	20.21	20.99	0.963	0.11	0.11	1.022
B8 [24]	21.79	21.35	1.021	0.13	0.10	1.218
B9 [24]	19.64	22.01	0.892	0.11	0.11	0.987
C4 [24]	11.85	11.79	1.005	0.13	0.12	1.124
C5 [24]	14.00	11.92	1.175	0.17	0.12	1.414
C6 [24]	13.89	11.54	1.204	0.17	0.11	1.570
G3 [24]	27.09	30.97	0.875	0.10	0.10	0.999
G4 [24]	28.67	31.61	0.907	0.12	0.10	1.227
G5 [24]	29.46	30.69	0.960	0.11	0.09	1.235
G7 [24]	33.64	33.32	1.010	0.13	0.10	1.377
G8 [24]	33.64	31.64	1.063	0.12	0.09	1.300
I3 [24]	25.51	27.19	0.938	0.11	0.12	0.911
I4 [24]	28.00	27.31	1.025	0.12	0.11	1.081
I5 [24]	28.11	27.44	1.025	0.15	0.11	1.358
I6 [24]	27.54	27.72	0.994	0.13	0.11	1.154
J1 [24]	14.00	15.89	0.881	0.09	0.10	0.882
J2 [24]	17.05	15.70	1.086	0.12	0.09	1.324
J3 [24]	16.93	16.58	1.021	0.10	0.09	1.033
J4 [24]	17.95	16.33	1.099	0.11	0.09	1.225
K2 [24]	12.19	12.34	0.988	0.18	0.14	1.272
K3 [24]	12.42	11.88	1.045	0.19	0.13	1.451
K4 [24]	13.10	11.64	1.125	0.21	0.13	1.627
M1 [24]	19.19	22.46	0.854	0.11	0.11	0.969
M2 [24]	20.55	22.46	0.915	0.11	0.11	1.030
M3 [24]	20.66	21.00	0.984	0.12	0.10	1.178
M4 [24]	20.66	20.84	0.991	0.13	0.10	1.342
M5 [24]	21.67	21.29	1.018	0.12	0.10	1.231
M6 [24]	22.69	21.69	1.046	0.15	0.10	1.491
N1 [24]	7.59	7.04	1.077	0.13	0.17	0.770
N1a [24]	7.02	6.94	1.012	0.11	0.17	0.655
N2 [24]	7.44	7.09	1.049	0.22	0.16	1.339
N2a [24]	7.50	6.87	1.091	0.21	0.16	1.311
N3 [24]	7.41	6.73	1.101	0.21	0.16	1.330
N4 [24]	7.60	6.70	1.133	0.21	0.16	1.360
A2 [31]	11.29	14.00	0.806	0.12	0.13	0.893
A3 [31]	12.19	14.32	0.851	0.12	0.13	0.923
A4 [31]	12.53	14.26	0.878	0.15	0.13	1.136
B3 [31]	8.81	12.65	0.696	0.15	0.14	1.012
B4 [31]	10.16	12.61	0.806	0.15	0.14	1.037
H-06-12 [19]	75.00	83.53	0.898	0.09	0.09	0.931
H-07-10 [19]	70.50	78.95	0.893	0.09	0.09	1.007
H-07-16 [19]	65.30	79.16	0.825	0.09	0.09	0.954
H-12-12 [19]	77.10	84.97	0.907	0.07	0.09	0.801
H-12-16 [19]	79.30	85.26	0.930	0.09	0.09	0.992
H-14-10 [19]	61.80	80.56	0.767	0.09	0.09	0.937
H-20-20 [19]	76.00	87.13	0.872	0.09	0.09	0.988
N-06-06 [19]	43.20	59.29	0.729	0.08	0.08	0.962
N-06-12 [19]	51.80	59.14	0.876	0.11	0.08	1.394
N-07-10 [19]	41.60	57.62	0.722	0.11	0.08	1.333
N-07-16 [19]	40.00	57.50	0.696	0.11	0.08	1.356

Tabela II.2 (continuação). Pontos característicos da curva $T - \theta$

N-12-12 [19]	49.30	59.17	0.833	0.09	0.08	1.129
N-12-16 [19]	57.10	59.22	0.964	0.12	0.08	1.496
N-14-10 [19]	41.80	57.91	0.722	0.12	0.08	1.487
N-20-20 [19]	55.00	58.87	0.934	0.13	0.08	1.614
B5UR1 [29]	11.60	13.05	0.889	0.09	0.14	0.597
B9UR1 [29]	13.00	17.26	0.753	0.13	0.16	0.856
B12UR1 [29]	16.20	17.84	0.908	0.09	0.16	0.575
B14UR1 [29]	19.30	18.90	1.021	0.12	0.16	0.729
B12UR2 [29]	17.80	17.40	1.023	0.11	0.16	0.708
B12UR3 [29]	16.00	17.25	0.927	0.10	0.16	0.651
B12UR4 [29]	16.90	17.52	0.964	0.14	0.16	0.894
B12UR5 [29]	13.60	17.79	0.765	0.04	0.16	0.226
	$\bar{x} =$	0.961		$\bar{x} =$	1.133	
	$s =$	0.121		$s =$	0.286	
	$cv =$	12.554		$cv =$	25.207	

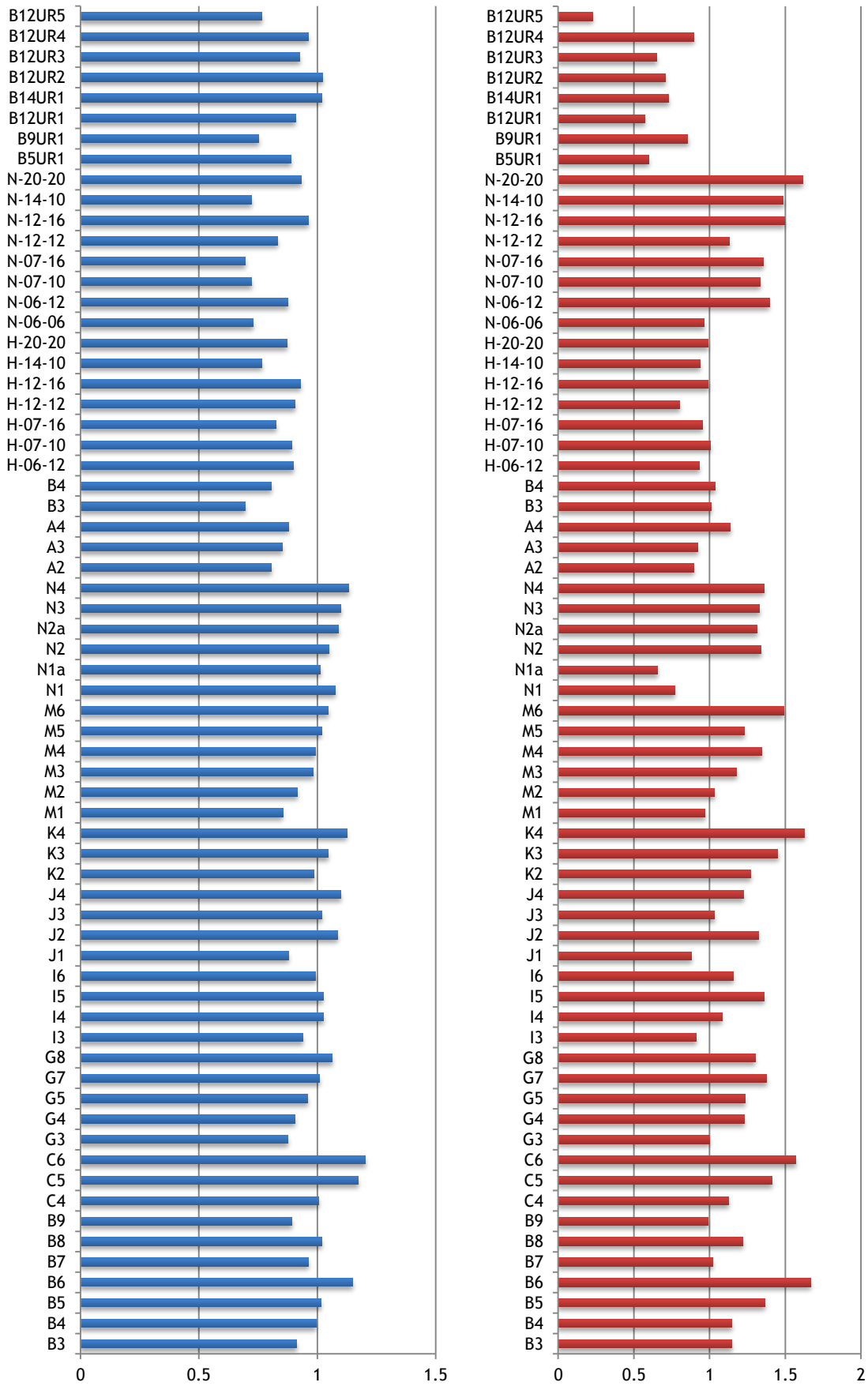


Figura II.2. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{l exp} / \theta_{cr}^{l th}$ à direita

II.3 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Hsu (1991) [22]

Tabela II.3. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	$\theta_{cr}^{I exp}$ °/m	$\theta_{cr}^{I th}$ °/m	$\frac{\theta_{cr}^{I exp}}{\theta_{cr}^{I th}}$
B3 [24]	20.09	23.17	0.867	0.12	0.11	1.090
B4 [24]	21.90	23.12	0.947	0.12	0.11	1.091
B5 [24]	22.58	23.37	0.966	0.14	0.11	1.297
B6 [24]	24.95	22.85	1.092	0.16	0.10	1.582
B7 [24]	20.21	22.14	0.913	0.11	0.11	0.968
B8 [24]	21.79	22.31	0.977	0.13	0.11	1.165
B9 [24]	19.64	23.20	0.847	0.11	0.11	0.937
C4 [24]	11.85	12.40	0.956	0.13	0.13	1.069
C5 [24]	14.00	12.50	1.120	0.17	0.12	1.348
C6 [24]	13.89	12.03	1.155	0.17	0.11	1.506
G3 [24]	27.09	32.71	0.828	0.10	0.10	0.946
G4 [24]	28.67	33.36	0.859	0.12	0.10	1.163
G5 [24]	29.46	32.31	0.912	0.11	0.10	1.173
G7 [24]	33.64	35.10	0.958	0.13	0.10	1.307
G8 [24]	33.64	33.38	1.008	0.12	0.10	1.233
I3 [24]	25.51	28.69	0.889	0.11	0.12	0.863
I4 [24]	28.00	28.80	0.972	0.12	0.12	1.025
I5 [24]	28.11	28.93	0.972	0.15	0.12	1.288
I6 [24]	27.54	29.22	0.943	0.13	0.12	1.095
J1 [24]	14.00	16.50	0.848	0.09	0.10	0.850
J2 [24]	17.05	16.54	1.031	0.12	0.10	1.257
J3 [24]	16.93	17.46	0.969	0.10	0.10	0.981
J4 [24]	17.95	17.10	1.050	0.11	0.09	1.170
K2 [24]	12.19	13.12	0.929	0.18	0.15	1.196
K3 [24]	12.42	12.61	0.985	0.19	0.14	1.367
K4 [24]	13.10	12.36	1.060	0.21	0.13	1.533
M1 [24]	19.19	23.64	0.812	0.11	0.12	0.921
M2 [24]	20.55	23.77	0.865	0.11	0.11	0.973
M3 [24]	20.66	22.17	0.932	0.12	0.11	1.116
M4 [24]	20.66	21.96	0.941	0.13	0.11	1.274
M5 [24]	21.67	22.45	0.965	0.12	0.10	1.168
M6 [24]	22.69	22.82	0.994	0.15	0.10	1.417
N1 [24]	7.59	7.43	1.021	0.13	0.18	0.729
N1a [24]	7.02	7.33	0.958	0.11	0.17	0.621
N2 [24]	7.44	7.49	0.993	0.22	0.17	1.268
N2a [24]	7.50	7.26	1.033	0.21	0.17	1.242
N3 [24]	7.41	7.14	1.038	0.21	0.17	1.254
N4 [24]	7.60	7.07	1.074	0.21	0.16	1.289
A2 [31]	11.29	14.81	0.762	0.12	0.14	0.845
A3 [31]	12.19	15.09	0.808	0.12	0.14	0.876
A4 [31]	12.53	15.06	0.832	0.15	0.14	1.076
B3 [31]	8.81	13.34	0.660	0.15	0.15	0.959
B4 [31]	10.16	13.28	0.765	0.15	0.15	0.984
H-06-12 [19]	75.00	83.53	0.898	0.09	0.09	0.931
H-07-10 [19]	70.50	82.88	0.851	0.09	0.10	0.960
H-07-16 [19]	65.30	83.14	0.785	0.09	0.09	0.908
H-12-12 [19]	77.10	89.45	0.862	0.07	0.10	0.761
H-12-16 [19]	79.30	89.39	0.887	0.09	0.10	0.946
H-14-10 [19]	61.80	84.88	0.728	0.09	0.10	0.889
H-20-20 [19]	76.00	91.64	0.829	0.09	0.10	0.940
N-06-06 [19]	43.20	62.50	0.691	0.08	0.09	0.913
N-06-12 [19]	51.80	62.37	0.831	0.11	0.09	1.322

Tabela II.3 (continuação). Pontos característicos da curva $T - \theta$

N-07-10 [19]	41.60	60.74	0.685	0.11	0.09	1.264
N-07-16 [19]	40.00	60.57	0.660	0.11	0.08	1.287
N-12-12 [19]	49.30	62.52	0.789	0.09	0.09	1.069
N-12-16 [19]	57.10	62.45	0.914	0.12	0.08	1.419
N-14-10 [19]	41.80	61.08	0.684	0.12	0.09	1.410
N-20-20 [19]	55.00	62.39	0.882	0.13	0.08	1.523
B5UR1 [29]	11.60	13.79	0.841	0.09	0.15	0.565
B9UR1 [29]	13.00	18.21	0.714	0.13	0.17	0.812
B12UR1 [29]	16.20	18.79	0.862	0.09	0.17	0.546
B14UR1 [29]	19.30	19.90	0.970	0.12	0.17	0.693
B12UR2 [29]	17.80	18.35	0.970	0.11	0.17	0.671
B12UR3 [29]	16.00	18.02	0.888	0.10	0.16	0.624
B12UR4 [29]	16.90	18.35	0.921	0.14	0.16	0.854
B12UR5 [29]	13.60	18.56	0.733	0.04	0.16	0.217
		$\bar{x} =$	0.912		$\bar{x} =$	1.071
		$s =$	0.115		$s =$	0.270
		$cv =$	12.553		$cv =$	25.156

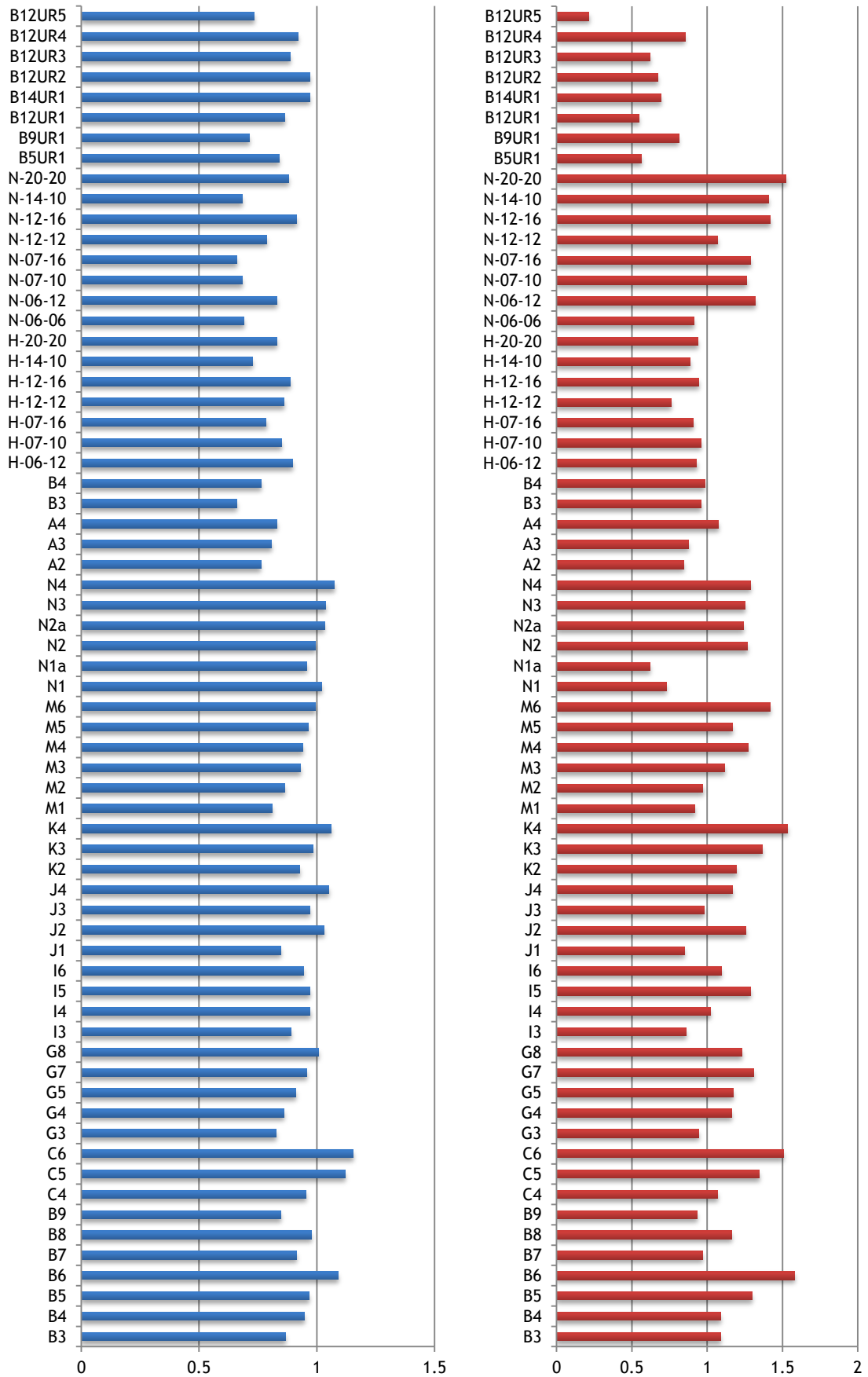


Figura II.3. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{I exp} / \theta_{cr}^{I th}$ à direita

II.4 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994) [5]

Tabela II.4. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	$\theta_{cr}^{I exp}$ °/m	$\theta_{cr}^{I th}$ °/m	$\frac{\theta_{cr}^{I exp}}{\theta_{cr}^{I th}}$
B3 [24]	20.09	21.27	0.944	0.12	0.10	1.187
B4 [24]	21.90	21.52	1.018	0.12	0.10	1.173
B5 [24]	22.58	22.05	1.024	0.14	0.10	1.375
B6 [24]	24.95	20.89	1.194	0.16	0.09	1.730
B7 [24]	20.21	20.67	0.978	0.11	0.10	1.037
B8 [24]	21.79	20.79	1.048	0.13	0.10	1.251
B9 [24]	19.64	19.97	0.983	0.11	0.10	1.088
C4 [24]	11.85	11.57	1.024	0.13	0.12	1.146
C5 [24]	14.00	11.57	1.210	0.17	0.11	1.457
C6 [24]	13.89	11.45	1.213	0.17	0.11	1.582
G3 [24]	27.09	30.55	0.887	0.10	0.09	1.013
G4 [24]	28.67	30.96	0.926	0.12	0.09	1.253
G5 [24]	29.46	29.84	0.987	0.11	0.09	1.271
G7 [24]	33.64	32.82	1.025	0.13	0.10	1.398
G8 [24]	33.64	31.16	1.080	0.12	0.09	1.320
I3 [24]	25.51	26.27	0.971	0.11	0.11	0.942
I4 [24]	28.00	26.51	1.056	0.12	0.11	1.113
I5 [24]	28.11	26.77	1.050	0.15	0.11	1.392
I6 [24]	27.54	26.93	1.023	0.13	0.11	1.188
J1 [24]	14.00	15.23	0.919	0.09	0.09	0.921
J2 [24]	17.05	15.43	1.105	0.12	0.09	1.347
J3 [24]	16.93	16.48	1.027	0.10	0.09	1.039
J4 [24]	17.95	15.82	1.135	0.11	0.09	1.265
K2 [24]	12.19	12.65	0.963	0.18	0.14	1.240
K3 [24]	12.42	12.32	1.008	0.19	0.14	1.400
K4 [24]	13.10	12.14	1.079	0.21	0.13	1.560
M1 [24]	19.19	19.69	0.975	0.11	0.10	1.105
M2 [24]	20.55	21.46	0.958	0.11	0.10	1.078
M3 [24]	20.66	20.72	0.997	0.12	0.10	1.194
M4 [24]	20.66	20.13	1.026	0.13	0.10	1.390
M5 [24]	21.67	20.62	1.051	0.12	0.10	1.271
M6 [24]	22.69	20.98	1.081	0.15	0.09	1.541
N1 [24]	7.59	6.87	1.105	0.13	0.16	0.789
N1a [24]	7.02	6.35	1.105	0.11	0.15	0.716
N2 [24]	7.44	7.01	1.062	0.22	0.16	1.356
N2a [24]	7.50	6.69	1.121	0.21	0.16	1.348
N3 [24]	7.41	6.67	1.111	0.21	0.16	1.342
N4 [24]	7.60	6.56	1.158	0.21	0.15	1.389
A2 [31]	11.29	13.61	0.829	0.12	0.13	0.919
A3 [31]	12.19	13.94	0.874	0.12	0.13	0.948
A4 [31]	12.53	13.97	0.897	0.15	0.13	1.161
B3 [31]	8.81	12.17	0.724	0.15	0.14	1.052
B4 [31]	10.16	12.26	0.829	0.15	0.14	1.066
H-06-12 [19]	75.00	65.20	1.150	0.09	0.07	1.193
H-07-10 [19]	70.50	67.21	1.049	0.09	0.08	1.183
H-07-16 [19]	65.30	69.84	0.935	0.09	0.08	1.081
H-12-12 [19]	77.10	78.90	0.977	0.07	0.09	0.863
H-12-16 [19]	79.30	79.25	1.001	0.09	0.09	1.067
H-14-10 [19]	61.80	76.89	0.804	0.09	0.09	0.981
H-20-20 [19]	76.00	83.46	0.911	0.09	0.09	1.032
N-06-06 [19]	43.20	53.35	0.810	0.08	0.07	1.070
N-06-12 [19]	51.80	54.47	0.951	0.11	0.08	1.513
N-07-10 [19]	41.60	55.22	0.753	0.11	0.08	1.391
N-07-16 [19]	40.00	52.50	0.762	0.11	0.07	1.485

Tabela II.4 (continuação). Pontos característicos da curva $T - \theta$

N-12-12 [19]	49.30	57.54	0.857	0.09	0.08	1.161
N-12-16 [19]	57.10	57.57	0.992	0.12	0.08	1.539
N-14-10 [19]	41.80	56.85	0.735	0.12	0.08	1.515
N-20-20 [19]	55.00	58.51	0.940	0.13	0.08	1.624
B5UR1 [29]	11.60	12.44	0.932	0.09	0.14	0.627
B9UR1 [29]	13.00	16.45	0.790	0.13	0.15	0.899
B12UR1 [29]	16.20	16.87	0.960	0.09	0.15	0.608
B14UR1 [29]	19.30	17.85	1.081	0.12	0.15	0.772
B12UR2 [29]	17.80	16.59	1.073	0.11	0.15	0.742
B12UR3 [29]	16.00	15.89	1.007	0.10	0.14	0.707
B12UR4 [29]	16.90	16.09	1.050	0.14	0.14	0.974
B12UR5 [29]	13.60	16.82	0.808	0.04	0.15	0.239
		$\bar{x} =$	0.999		$\bar{x} =$	1.178
		$s =$	0.116		$s =$	0.279
		$cv =$	11.638		$cv =$	23.726

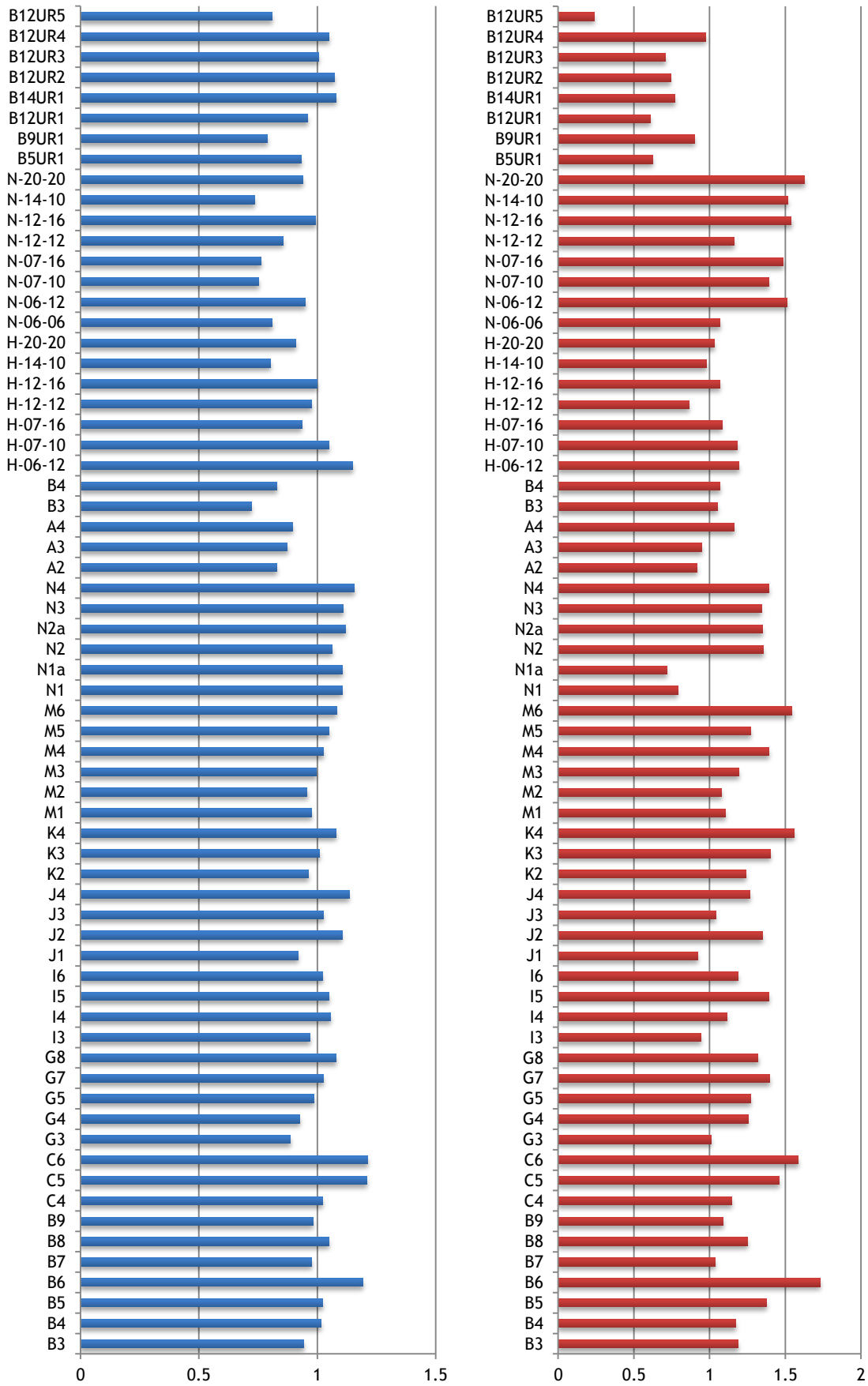


Figura II.4. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{I,exp} / \theta_{cr}^{I,th}$ à direita

II.5 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Collins *et al.* (1996) [17]

Tabela II.5. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	$\theta_{cr}^{I exp}$ °/m	$\theta_{cr}^{I th}$ °/m	$\frac{\theta_{cr}^{I exp}}{\theta_{cr}^{I th}}$
B3 [24]	20.09	20.39	0.985	0.12	0.10	1.238
B4 [24]	21.90	20.42	1.072	0.12	0.10	1.236
B5 [24]	22.58	20.85	1.083	0.14	0.09	1.453
B6 [24]	24.95	20.11	1.241	0.16	0.09	1.797
B7 [24]	20.21	19.47	1.038	0.11	0.10	1.101
B8 [24]	21.79	19.75	1.103	0.13	0.10	1.316
B9 [24]	19.64	20.28	0.968	0.11	0.10	1.071
C4 [24]	11.85	10.95	1.082	0.13	0.11	1.210
C5 [24]	14.00	11.01	1.272	0.17	0.11	1.531
G6 [24]	13.89	10.94	1.269	0.17	0.10	1.655
G3 [24]	27.09	28.67	0.945	0.10	0.09	1.079
G4 [24]	28.67	29.37	0.976	0.12	0.09	1.321
G5 [24]	29.46	28.47	1.035	0.11	0.09	1.331
G7 [24]	33.64	30.88	1.090	0.13	0.09	1.486
G8 [24]	33.64	29.30	1.148	0.12	0.09	1.404
I3 [24]	25.51	25.10	1.016	0.11	0.11	0.987
I4 [24]	28.00	25.18	1.112	0.12	0.11	1.172
I5 [24]	28.11	25.43	1.105	0.15	0.10	1.465
I6 [24]	27.54	25.70	1.072	0.13	0.10	1.245
J1 [24]	14.00	14.76	0.949	0.09	0.09	0.950
J2 [24]	17.05	14.32	1.190	0.12	0.09	1.452
J3 [24]	16.93	15.40	1.099	0.10	0.09	1.112
J4 [24]	17.95	15.07	1.191	0.11	0.08	1.327
K2 [24]	12.19	11.76	1.036	0.18	0.13	1.334
K3 [24]	12.42	11.03	1.126	0.19	0.12	1.564
K4 [24]	13.10	10.85	1.207	0.21	0.12	1.746
M1 [24]	19.19	20.74	0.925	0.11	0.10	1.049
M2 [24]	20.55	20.94	0.982	0.11	0.10	1.105
M3 [24]	20.66	19.54	1.057	0.12	0.10	1.266
M4 [24]	20.66	19.35	1.068	0.13	0.09	1.446
M5 [24]	21.67	19.61	1.105	0.12	0.09	1.337
M6 [24]	22.69	20.01	1.134	0.15	0.09	1.616
N1 [24]	7.59	6.51	1.166	0.13	0.15	0.833
N1a [24]	7.02	6.39	1.099	0.11	0.15	0.712
N2 [24]	7.44	6.54	1.137	0.22	0.15	1.452
N2a [24]	7.50	6.40	1.172	0.21	0.15	1.409
N3 [24]	7.41	6.25	1.185	0.21	0.15	1.431
N4 [24]	7.60	6.23	1.220	0.21	0.14	1.464
A2 [31]	11.29	13.07	0.864	0.12	0.13	0.957
A3 [31]	12.19	13.21	0.922	0.12	0.12	1.000
A4 [31]	12.53	13.23	0.947	0.15	0.12	1.225
B3 [31]	8.81	11.64	0.757	0.15	0.13	1.100
B4 [31]	10.16	11.71	0.867	0.15	0.13	1.116
H-06-12 [19]	75.00	76.52	0.980	0.09	0.08	1.016
H-07-10 [19]	70.50	72.85	0.968	0.09	0.08	1.092
H-07-16 [19]	65.30	73.01	0.894	0.09	0.08	1.034
H-12-12 [19]	77.10	78.63	0.981	0.07	0.09	0.866
H-12-16 [19]	79.30	78.63	1.009	0.09	0.09	1.075
H-14-10 [19]	61.80	74.68	0.828	0.09	0.09	1.010
H-20-20 [19]	76.00	80.59	0.943	0.09	0.09	1.069
N-06-06 [19]	43.20	54.68	0.790	0.08	0.08	1.043
N-06-12 [19]	51.80	54.72	0.947	0.11	0.08	1.506
N-07-10 [19]	41.60	53.46	0.778	0.11	0.08	1.436

Tabela II.5 (continuação).Pontos característicos da curva $T - \theta$

N-07-16 [19]	40.00	53.45	0.748	0.11	0.07	1.459
N-12-12 [19]	49.30	55.37	0.890	0.09	0.08	1.206
N-12-16 [19]	57.10	54.95	1.039	0.12	0.07	1.613
N-14-10 [19]	41.80	53.74	0.778	0.12	0.08	1.603
N-20-20 [19]	55.00	54.56	1.008	0.13	0.07	1.742
B5UR1 [29]	11.60	11.97	0.969	0.09	0.13	0.651
B9UR1 [29]	13.00	15.99	0.813	0.13	0.14	0.924
B12UR1 [29]	16.20	16.48	0.983	0.09	0.15	0.622
B14UR1 [29]	19.30	17.45	1.106	0.12	0.15	0.790
B12UR2 [29]	17.80	16.11	1.105	0.11	0.15	0.764
B12UR3 [29]	16.00	15.85	1.010	0.10	0.14	0.709
B12UR4 [29]	16.90	16.14	1.047	0.14	0.14	0.971
B12UR5 [29]	13.60	16.38	0.830	0.04	0.14	0.246
		$\bar{x} =$	1.035		$\bar{x} =$	1.217
		$s =$	0.129		$s =$	0.306
		$cv =$	12.487		$cv =$	25.094

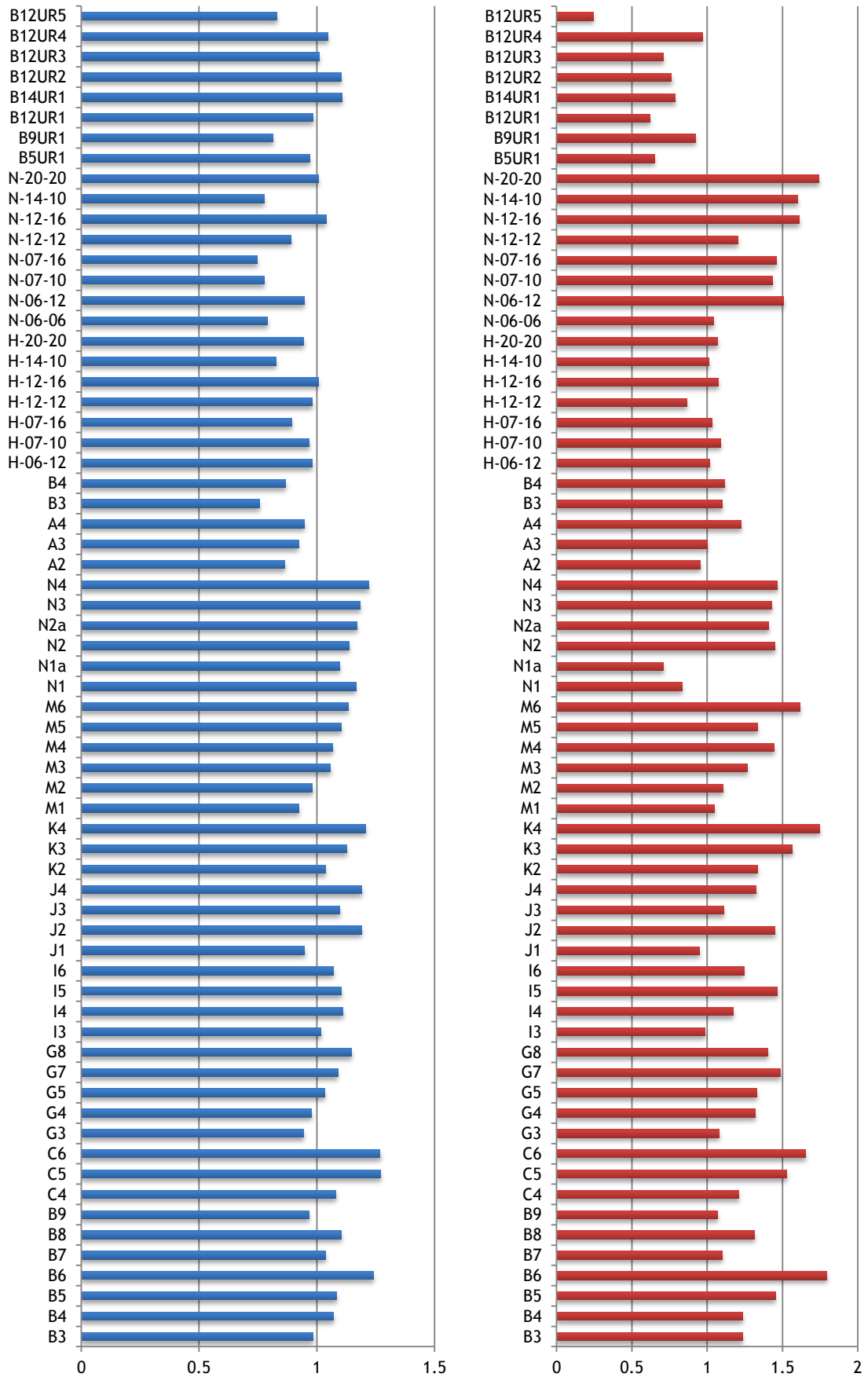


Figura II.5. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{I exp} / \theta_{cr}^{I th}$ à direita

II.6 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Vecchio (2000) [39]

Tabela II.6. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	$\theta_{cr}^{I exp}$ °/m	$\theta_{cr}^{I th}$ °/m	$\frac{\theta_{cr}^{I exp}}{\theta_{cr}^{I th}}$
B3 [24]	20.09	21.99	0.913	0.12	0.11	1.148
B4 [24]	21.90	22.02	0.995	0.12	0.10	1.146
B5 [24]	22.58	22.23	1.016	0.14	0.10	1.363
B6 [24]	24.95	21.69	1.150	0.16	0.10	1.666
B7 [24]	20.21	20.99	0.963	0.11	0.11	1.022
B8 [24]	21.79	21.35	1.021	0.13	0.10	1.218
B9 [24]	19.64	22.01	0.892	0.11	0.11	0.987
C4 [24]	11.85	11.79	1.005	0.13	0.12	1.124
C5 [24]	14.00	11.92	1.175	0.17	0.12	1.414
C6 [24]	13.89	11.99	1.159	0.17	0.11	1.511
G3 [24]	27.09	30.97	0.875	0.10	0.10	0.999
G4 [24]	28.67	31.61	0.907	0.12	0.10	1.227
G5 [24]	29.46	30.65	0.961	0.11	0.09	1.237
G7 [24]	33.64	33.32	1.010	0.13	0.10	1.377
G8 [24]	33.64	31.54	1.066	0.12	0.09	1.304
I3 [24]	25.51	27.19	0.938	0.11	0.12	0.911
I4 [24]	28.00	27.31	1.025	0.12	0.11	1.081
I5 [24]	28.11	27.44	1.025	0.15	0.11	1.358
I6 [24]	27.54	27.72	0.994	0.13	0.11	1.154
J1 [24]	14.00	15.89	0.881	0.09	0.10	0.882
J2 [24]	17.05	15.70	1.086	0.12	0.09	1.324
J3 [24]	16.93	16.58	1.021	0.10	0.09	1.033
J4 [24]	17.95	16.33	1.099	0.11	0.09	1.225
K2 [24]	12.19	12.67	0.962	0.18	0.14	1.239
K3 [24]	12.42	12.15	1.022	0.19	0.14	1.419
K4 [24]	13.10	12.01	1.091	0.21	0.13	1.577
M1 [24]	19.19	22.46	0.854	0.11	0.11	0.969
M2 [24]	20.55	22.45	0.915	0.11	0.11	1.030
M3 [24]	20.66	20.99	0.984	0.12	0.10	1.179
M4 [24]	20.66	20.84	0.991	0.13	0.10	1.342
M5 [24]	21.67	21.29	1.018	0.12	0.10	1.231
M6 [24]	22.69	21.69	1.046	0.15	0.10	1.491
N1 [24]	7.59	7.04	1.077	0.13	0.17	0.770
N1a [24]	7.02	6.94	1.012	0.11	0.17	0.655
N2 [24]	7.44	7.09	1.049	0.22	0.16	1.339
N2a [24]	7.50	6.87	1.091	0.21	0.16	1.311
N3 [24]	7.41	6.73	1.101	0.21	0.16	1.330
N4 [24]	7.60	6.70	1.133	0.21	0.16	1.359
A2 [31]	11.29	14.00	0.806	0.12	0.13	0.893
A3 [31]	12.19	14.32	0.851	0.12	0.13	0.923
A4 [31]	12.53	14.26	0.878	0.15	0.13	1.136
B3 [31]	8.81	12.65	0.696	0.15	0.14	1.012
B4 [31]	10.16	12.61	0.806	0.15	0.14	1.037
H-06-12 [19]	75.00	83.53	0.898	0.09	0.09	0.931
H-07-10 [19]	70.50	78.95	0.893	0.09	0.09	1.007
H-07-16 [19]	65.30	79.16	0.825	0.09	0.09	0.954
H-12-12 [19]	77.10	84.97	0.907	0.07	0.09	0.801
H-12-16 [19]	79.30	85.26	0.930	0.09	0.09	0.992
H-14-10 [19]	61.80	80.56	0.767	0.09	0.09	0.937
H-20-20 [19]	76.00	87.13	0.872	0.09	0.09	0.988
N-06-06 [19]	43.20	59.29	0.729	0.08	0.08	0.962
N-06-12 [19]	51.80	59.14	0.876	0.11	0.08	1.394
N-07-10 [19]	41.60	57.62	0.722	0.11	0.08	1.333
N-07-16 [19]	40.00	57.50	0.696	0.11	0.08	1.356
N-12-12 [19]	49.30	59.17	0.833	0.09	0.08	1.129

Tabela II.6 (continuação). Pontos característicos da curva $T - \theta$

N-12-16 [19]	57.10	59.22	0.964	0.12	0.08	1.496
N-14-10 [19]	41.80	57.91	0.722	0.12	0.08	1.487
N-20-20 [19]	55.00	58.87	0.934	0.13	0.08	1.614
B5UR1 [29]	11.60	13.05	0.889	0.09	0.14	0.597
B9UR1 [29]	13.00	17.26	0.753	0.13	0.16	0.856
B12UR1 [29]	16.20	17.84	0.908	0.09	0.16	0.575
B14UR1 [29]	19.30	18.90	1.021	0.12	0.16	0.729
B12UR2 [29]	17.80	17.40	1.023	0.11	0.16	0.708
B12UR3 [29]	16.00	17.25	0.927	0.10	0.16	0.651
B12UR4 [29]	16.90	17.52	0.964	0.14	0.16	0.894
B12UR5 [29]	13.60	17.79	0.765	0.04	0.16	0.226
		$\bar{x} =$	0.962		$\bar{x} =$	1.133
		$s =$	0.118		$s =$	0.282
		$cv =$	12.305		$cv =$	24.907

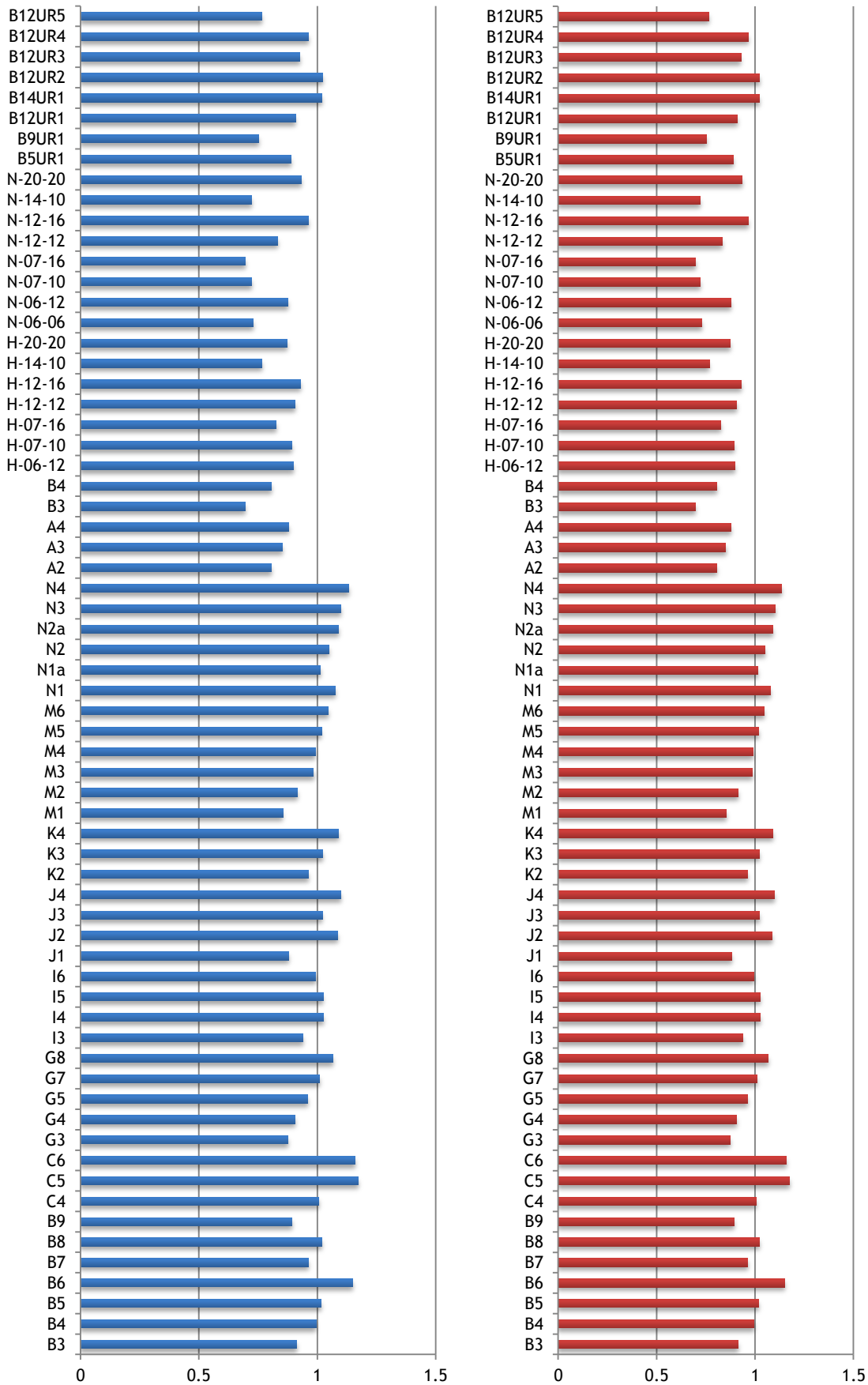


Figura II.6. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{l exp} / \theta_{cr}^{l th}$ à direita

II.7 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Bentz (2005) [7]

Tabela II.7. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	$\theta_{cr}^{I exp}$ °/m	$\theta_{cr}^{I th}$ °/m	$\frac{\theta_{cr}^{I exp}}{\theta_{cr}^{I th}}$
B3 [24]	20.09	21.48	0.935	0.12	0.11	1.176
B4 [24]	21.90	22.05	0.993	0.12	0.10	1.144
B5 [24]	22.58	22.81	0.990	0.14	0.10	1.328
B6 [24]	24.95	21.89	1.140	0.16	0.10	1.651
B7 [24]	20.21	20.22	0.999	0.11	0.10	1.061
B8 [24]	21.79	20.62	1.057	0.13	0.10	1.261
B9 [24]	19.64	21.89	0.897	0.11	0.11	0.993
C4 [24]	11.85	11.93	0.993	0.13	0.12	1.111
C5 [24]	14.00	11.84	1.182	0.17	0.12	1.423
C6 [24]	13.89	11.77	1.180	0.17	0.11	1.539
G3 [24]	27.09	30.48	0.889	0.10	0.09	1.015
G4 [24]	28.67	31.57	0.908	0.12	0.10	1.229
G5 [24]	29.46	30.90	0.953	0.11	0.09	1.227
G7 [24]	33.64	33.15	1.015	0.13	0.10	1.384
G8 [24]	33.64	32.06	1.049	0.12	0.10	1.283
I3 [24]	25.51	27.05	0.943	0.11	0.12	0.916
I4 [24]	28.00	27.42	1.021	0.12	0.11	1.076
I5 [24]	28.11	27.77	1.012	0.15	0.11	1.342
I6 [24]	27.54	28.33	0.972	0.13	0.11	1.129
J1 [24]	14.00	15.26	0.917	0.09	0.09	0.919
J2 [24]	17.05	15.33	1.112	0.12	0.09	1.356
J3 [24]	16.93	16.51	1.026	0.10	0.09	1.038
J4 [24]	17.95	16.40	1.094	0.11	0.09	1.220
K2 [24]	12.19	12.85	0.949	0.18	0.15	1.222
K3 [24]	12.42	12.35	1.006	0.19	0.14	1.396
K4 [24]	13.10	12.19	1.074	0.21	0.13	1.553
M1 [24]	19.19	21.88	0.877	0.11	0.11	0.995
M2 [24]	20.55	22.39	0.918	0.11	0.11	1.033
M3 [24]	20.66	21.12	0.978	0.12	0.10	1.172
M4 [24]	20.66	21.16	0.977	0.13	0.10	1.322
M5 [24]	21.67	21.99	0.985	0.12	0.10	1.192
M6 [24]	22.69	22.57	1.005	0.15	0.10	1.433
N1 [24]	7.59	7.06	1.074	0.13	0.17	0.768
N1a [24]	7.02	6.93	1.013	0.11	0.16	0.657
N2 [24]	7.44	7.31	1.018	0.22	0.17	1.300
N2a [24]	7.50	6.97	1.075	0.21	0.16	1.293
N3 [24]	7.41	6.96	1.064	0.21	0.17	1.285
N4 [24]	7.60	7.03	1.081	0.21	0.16	1.296
A2 [31]	11.29	13.77	0.820	0.12	0.13	0.908
A3 [31]	12.19	14.26	0.855	0.12	0.13	0.927
A4 [31]	12.53	14.36	0.873	0.15	0.13	1.129
B3 [31]	8.81	12.97	0.679	0.15	0.15	0.987
B4 [31]	10.16	12.97	0.783	0.15	0.15	1.008
H-06-12 [19]	75.00	84.97	0.883	0.09	0.09	0.915
H-07-10 [19]	70.50	77.08	0.915	0.09	0.09	1.032
H-07-16 [19]	65.30	80.29	0.813	0.09	0.09	0.940
H-12-12 [19]	77.10	87.04	0.886	0.07	0.10	0.782
H-12-16 [19]	79.30	86.51	0.917	0.09	0.09	0.977
H-14-10 [19]	61.80	78.77	0.785	0.09	0.09	0.958
H-20-20 [19]	76.00	89.68	0.847	0.09	0.10	0.960
N-06-06 [19]	43.20	57.09	0.757	0.08	0.08	1.000
N-06-12 [19]	51.80	60.46	0.857	0.11	0.08	1.363
N-07-10 [19]	41.60	56.27	0.739	0.11	0.08	1.365
N-07-16 [19]	40.00	58.45	0.684	0.11	0.08	1.334

Tabela II.7 (continuação). Pontos característicos da curva $T - \theta$

N-12-12 [19]	49.30	60.52	0.815	0.09	0.08	1.104
N-12-16 [19]	57.10	59.86	0.954	0.12	0.08	1.480
N-14-10 [19]	41.80	56.51	0.740	0.12	0.08	1.524
N-20-20 [19]	55.00	61.15	0.899	0.13	0.08	1.554
B5UR1 [29]	11.60	13.02	0.891	0.09	0.14	0.599
B9UR1 [29]	13.00	17.22	0.755	0.13	0.16	0.859
B12UR1 [29]	16.20	17.78	0.911	0.09	0.16	0.577
B14UR1 [29]	19.30	18.85	1.024	0.12	0.16	0.731
B12UR2 [29]	17.80	17.35	1.026	0.11	0.16	0.710
B12UR3 [29]	16.00	17.54	0.912	0.10	0.16	0.640
B12UR4 [29]	16.90	17.97	0.941	0.14	0.16	0.872
B12UR5 [29]	13.60	18.03	0.754	0.04	0.16	0.223
		$\bar{x} =$	0.946		$\bar{x} =$	1.120
		$s =$	0.115		$s =$	0.276
		$cv =$	12.184		$cv =$	24.671

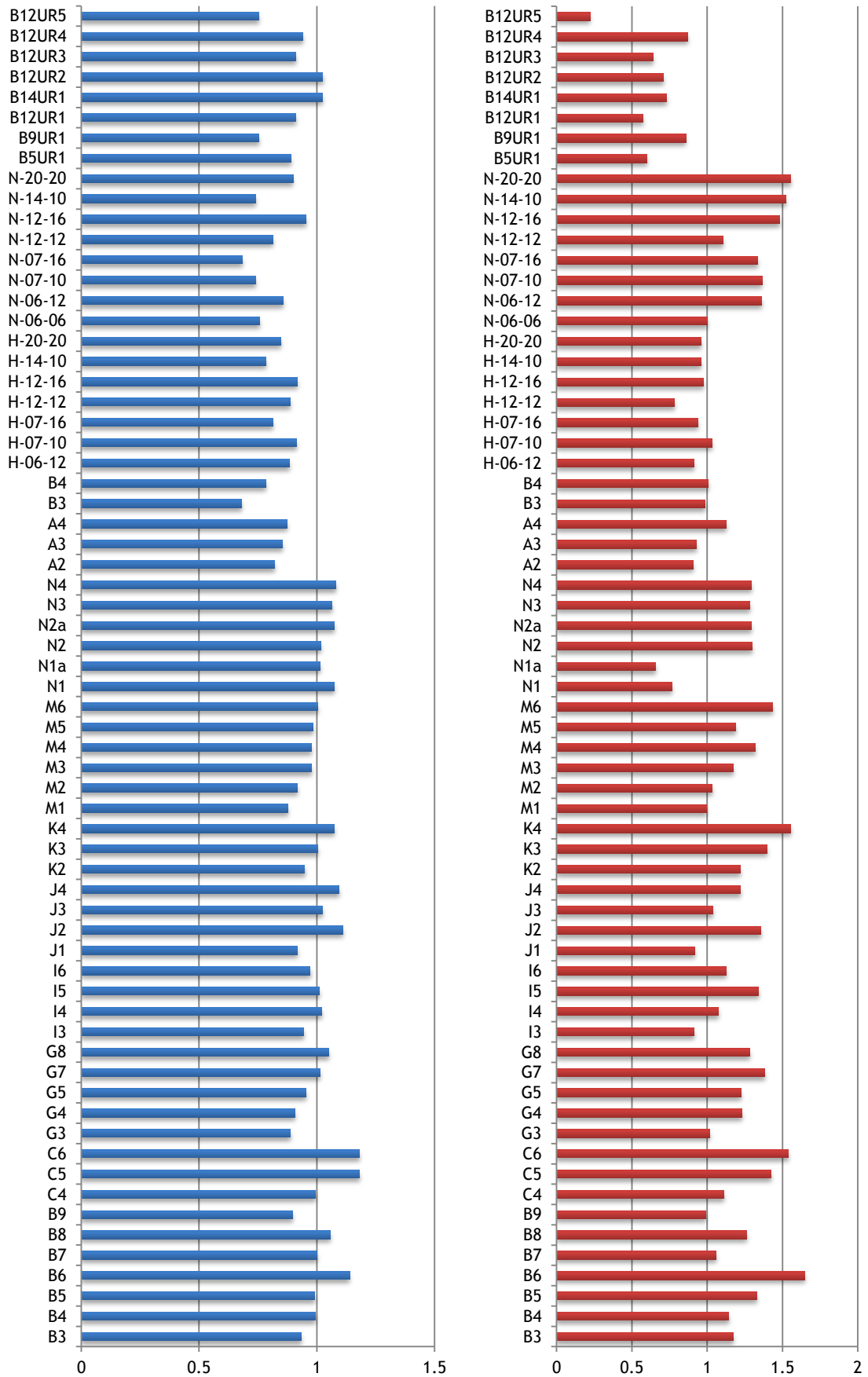


Figura II.7. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{I exp} / \theta_{cr}^{I th}$ à direita

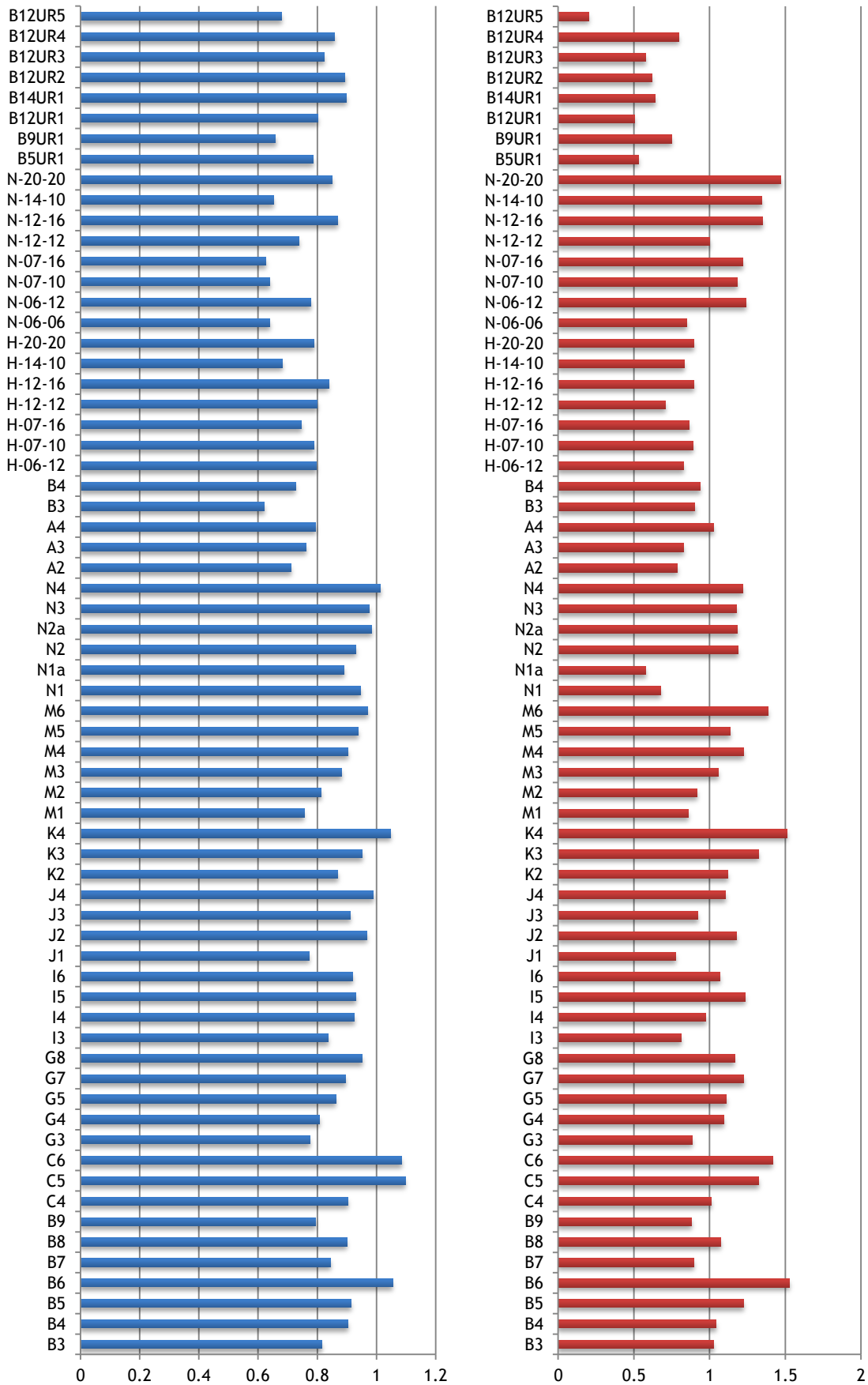
II.8 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a lei constitutiva do betão tracionado de Stramandinoli e Rovere (2008) [34]

Tabela II.8. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	$\theta_{cr}^{l exp}$ °/m	$\theta_{cr}^{l th}$ °/m	$\frac{\theta_{cr}^{l exp}}{\theta_{cr}^{l th}}$
B3 [24]	20.09	24.60	0.817	0.12	0.12	1.027
B4 [24]	21.90	24.25	0.903	0.12	0.11	1.041
B5 [24]	22.58	24.72	0.913	0.14	0.11	1.226
B6 [24]	24.95	23.66	1.055	0.16	0.11	1.528
B7 [24]	20.21	23.94	0.844	0.11	0.12	0.896
B8 [24]	21.79	24.21	0.900	0.13	0.12	1.074
B9 [24]	19.64	24.73	0.794	0.11	0.12	0.879
C4 [24]	11.85	13.11	0.904	0.13	0.13	1.011
C5 [24]	14.00	12.76	1.097	0.17	0.13	1.321
C6 [24]	13.89	12.80	1.085	0.17	0.12	1.415
G3 [24]	27.09	34.97	0.775	0.10	0.11	0.885
G4 [24]	28.67	35.47	0.808	0.12	0.11	1.094
G5 [24]	29.46	34.16	0.862	0.11	0.10	1.110
G7 [24]	33.64	37.51	0.897	0.13	0.11	1.223
G8 [24]	33.64	35.33	0.952	0.12	0.11	1.165
I3 [24]	25.51	30.45	0.838	0.11	0.13	0.813
I4 [24]	28.00	30.28	0.925	0.12	0.13	0.975
I5 [24]	28.11	30.19	0.931	0.15	0.12	1.234
I6 [24]	27.54	29.94	0.920	0.13	0.12	1.068
J1 [24]	14.00	18.10	0.774	0.09	0.11	0.775
J2 [24]	17.05	17.64	0.967	0.12	0.11	1.179
J3 [24]	16.93	18.58	0.911	0.10	0.10	0.922
J4 [24]	17.95	18.14	0.989	0.11	0.10	1.103
K2 [24]	12.19	14.02	0.869	0.18	0.16	1.119
K3 [24]	12.42	13.06	0.951	0.19	0.15	1.321
K4 [24]	13.10	12.52	1.047	0.21	0.14	1.513
M1 [24]	19.19	25.40	0.756	0.11	0.12	0.857
M2 [24]	20.55	25.26	0.813	0.11	0.12	0.916
M3 [24]	20.66	23.43	0.882	0.12	0.11	1.056
M4 [24]	20.66	22.89	0.903	0.13	0.11	1.222
M5 [24]	21.67	23.12	0.937	0.12	0.11	1.134
M6 [24]	22.69	23.36	0.971	0.15	0.11	1.384
N1 [24]	7.59	8.01	0.947	0.13	0.19	0.677
N1a [24]	7.02	7.88	0.891	0.11	0.19	0.577
N2 [24]	7.44	7.99	0.931	0.22	0.18	1.189
N2a [24]	7.50	7.62	0.984	0.21	0.18	1.183
N3 [24]	7.41	7.60	0.975	0.21	0.18	1.177
N4 [24]	7.60	7.49	1.014	0.21	0.17	1.217
A2 [31]	11.29	15.89	0.711	0.12	0.15	0.787
A3 [31]	12.19	15.98	0.763	0.12	0.15	0.827
A4 [31]	12.53	15.78	0.794	0.15	0.15	1.027
B3 [31]	8.81	14.17	0.622	0.15	0.16	0.903
B4 [31]	10.16	13.98	0.727	0.15	0.16	0.935
H-06-12 [19]	75.00	94.20	0.796	0.09	0.10	0.826
H-07-10 [19]	70.50	89.52	0.788	0.09	0.10	0.888
H-07-16 [19]	65.30	87.51	0.746	0.09	0.10	0.863
H-12-12 [19]	77.10	96.28	0.801	0.07	0.11	0.707
H-12-16 [19]	79.30	94.57	0.839	0.09	0.10	0.894
H-14-10 [19]	61.80	90.54	0.683	0.09	0.10	0.833
H-20-20 [19]	76.00	96.23	0.790	0.09	0.10	0.895
N-06-06 [19]	43.20	67.42	0.641	0.08	0.09	0.846
N-06-12 [19]	51.80	66.52	0.779	0.11	0.09	1.239
N-07-10 [19]	41.60	64.94	0.641	0.11	0.09	1.182

Tabela II.8 (continuação). Pontos característicos da curva $T - \theta$

N-07-16 [19]	40.00	63.98	0.625	0.11	0.09	1.219
N-12-12 [19]	49.30	66.83	0.738	0.09	0.09	1.000
N-12-16 [19]	57.10	65.77	0.868	0.12	0.09	1.347
N-14-10 [19]	41.80	64.07	0.652	0.12	0.09	1.344
N-20-20 [19]	55.00	64.75	0.849	0.13	0.09	1.468
B5UR1 [29]	11.60	14.76	0.786	0.09	0.16	0.528
B9UR1 [29]	13.00	19.72	0.659	0.13	0.18	0.750
B12UR1 [29]	16.20	20.22	0.801	0.09	0.18	0.507
B14UR1 [29]	19.30	21.49	0.898	0.12	0.18	0.641
B12UR2 [29]	17.80	19.91	0.894	0.11	0.18	0.619
B12UR3 [29]	16.00	19.45	0.823	0.10	0.18	0.578
B12UR4 [29]	16.90	19.71	0.857	0.14	0.18	0.795
B12UR5 [29]	13.60	20.00	0.680	0.04	0.18	0.201
		$\bar{x} =$	0.853		$\bar{x} =$	1.019
		$s =$	0.114		$s =$	0.265
		$cv =$	13.319		$cv =$	26.025



II.8. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{I exp} / \theta_{cr}^{I th}$ à direita

Anexo III. Análise gráfica

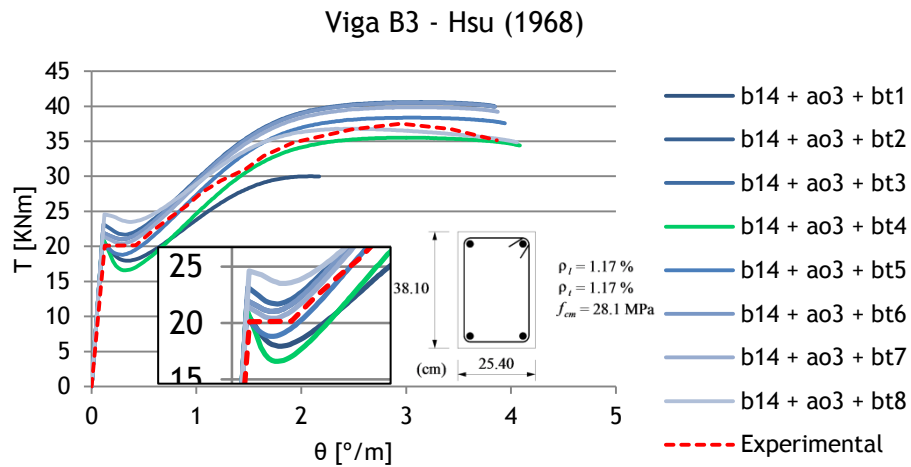


Figura III.1. Curvas $T - \theta$ para a viga B3

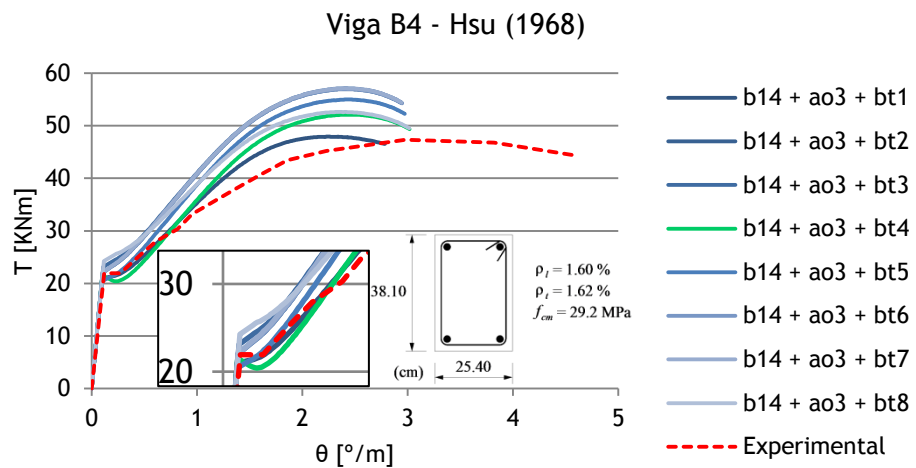


Figura III.2. Curvas $T - \theta$ para a viga B4

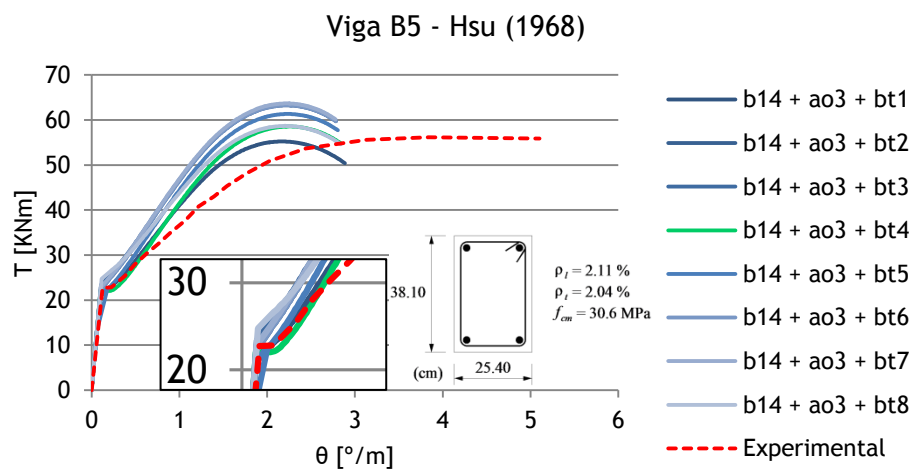


Figura III.3. Curvas $T - \theta$ para a viga B5

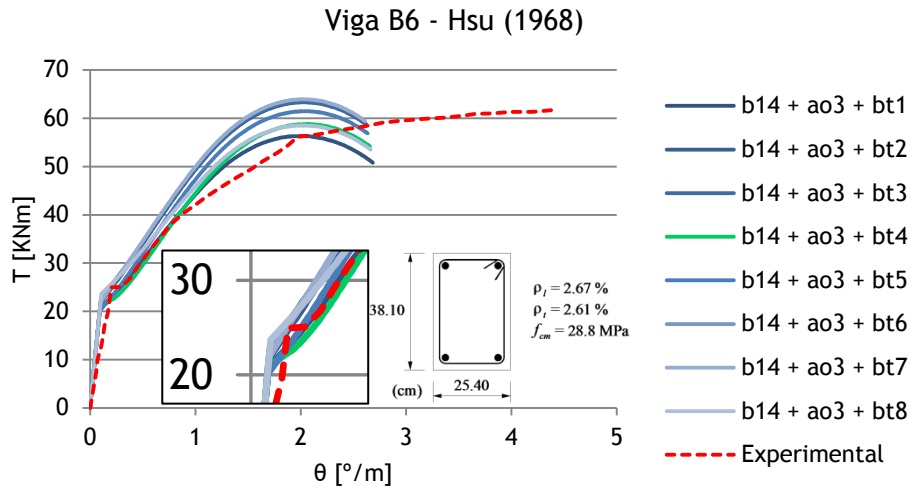


Figura III.4. Curvas $T - \theta$ para a viga B6

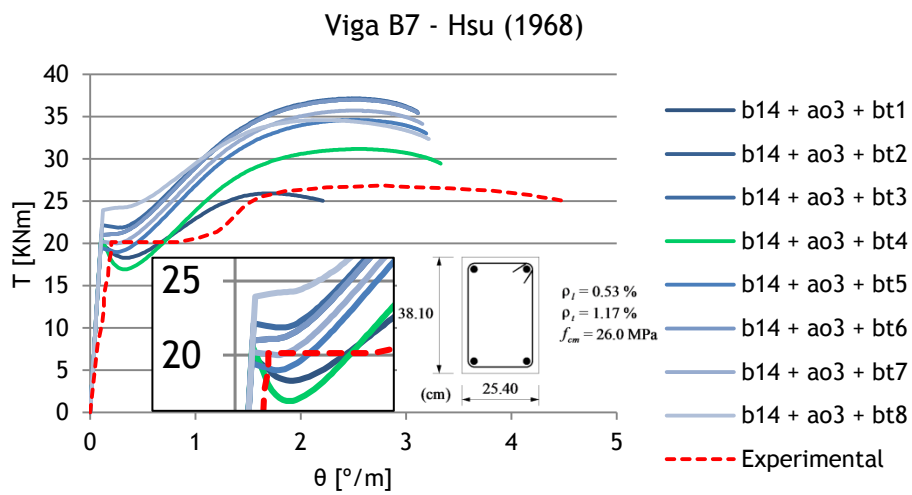


Figura III.5. Curvas $T - \theta$ para a viga B7

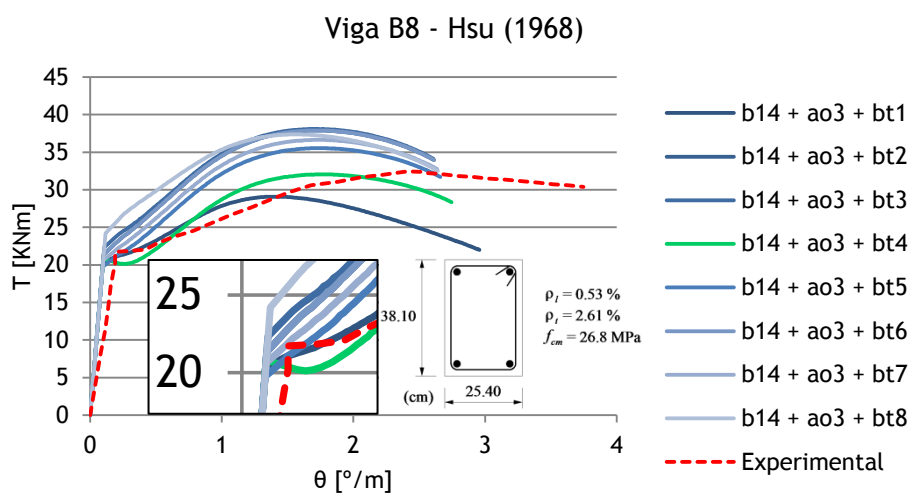


Figura III.6. Curvas $T - \theta$ para a viga B8

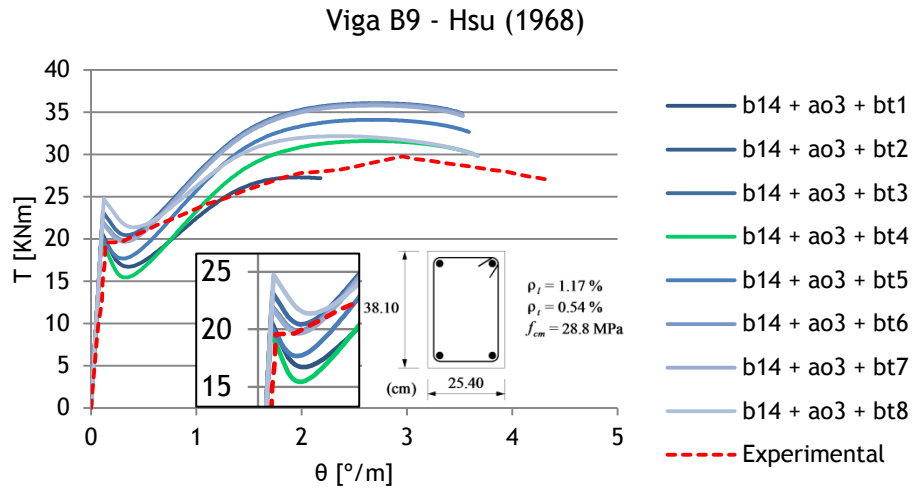


Figura III.7. Curvas $T - \theta$ para a viga B9

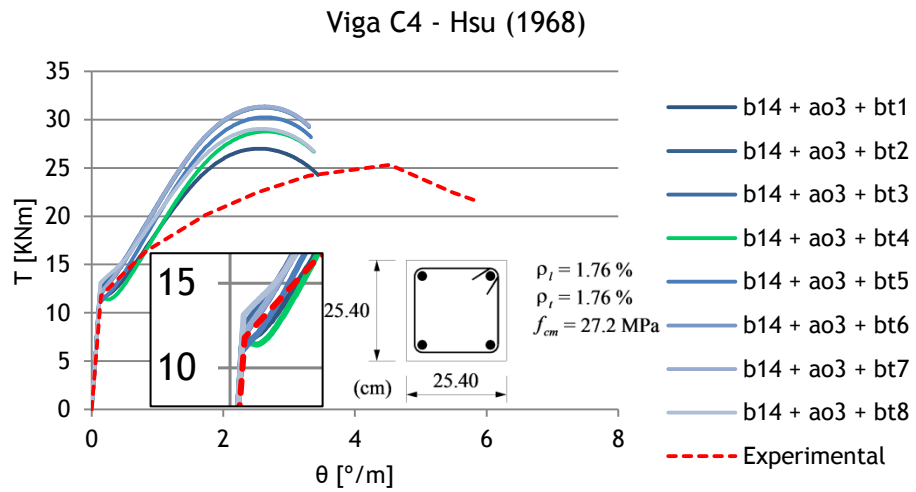


Figura III.8. Curvas $T - \theta$ para a viga C4

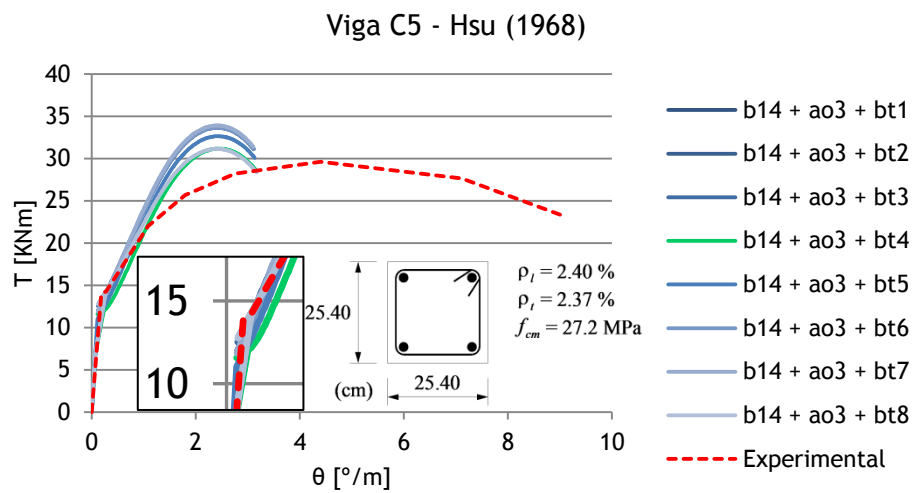


Figura III.9. Curvas $T - \theta$ para a viga C5

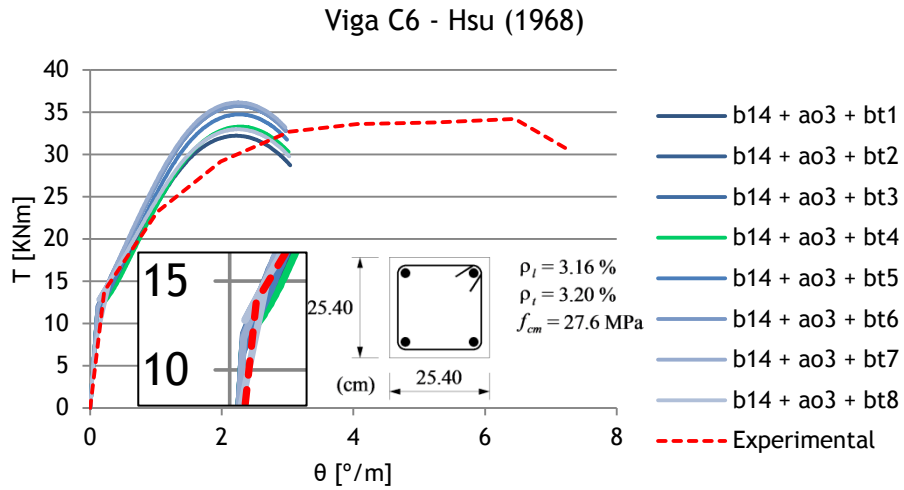


Figura III.10. Curvas $T - \theta$ para a viga C6

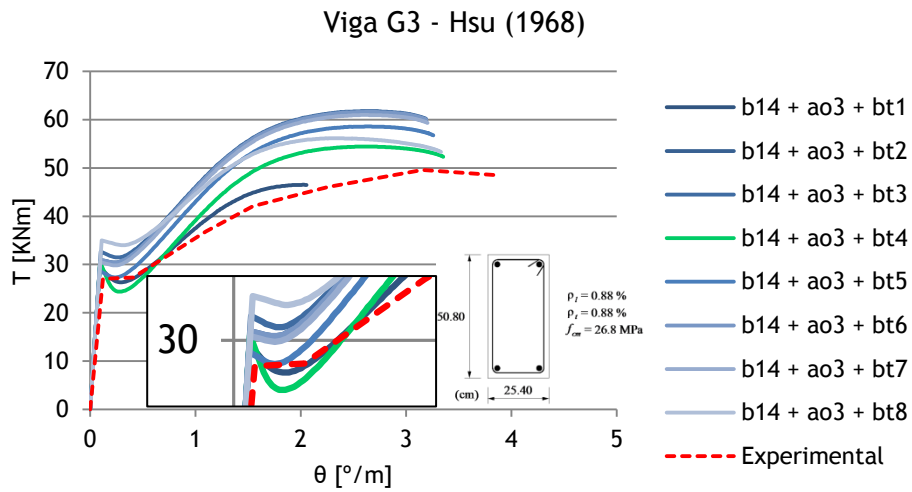


Figura III.11. Curvas $T - \theta$ para a viga G3

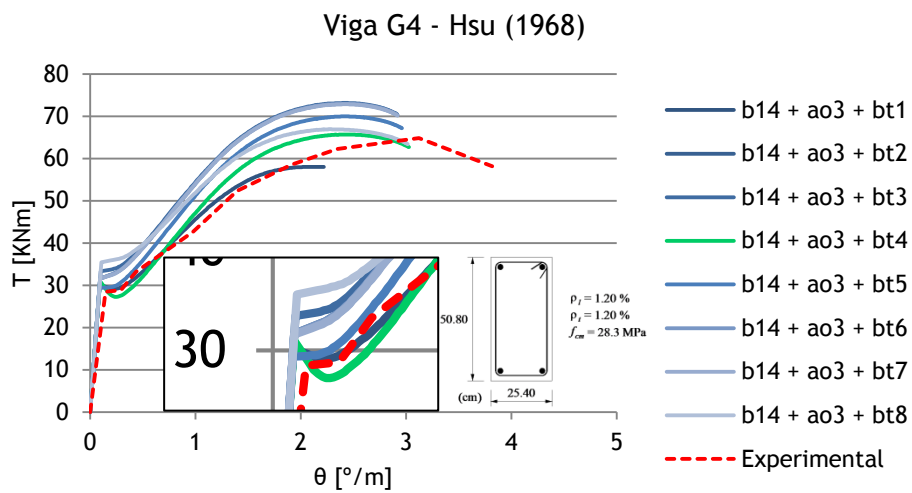


Figura III.12. Curvas $T - \theta$ para a viga G4

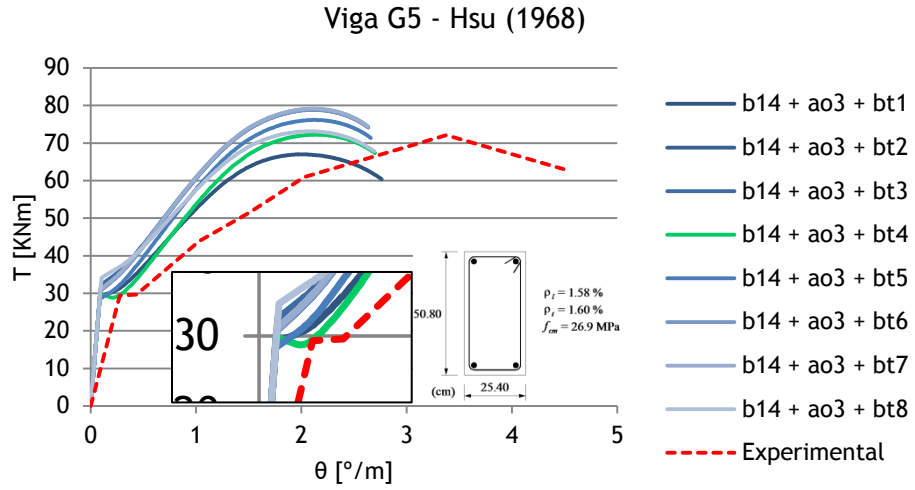


Figura III.13. Curvas $T - \theta$ para a viga G5

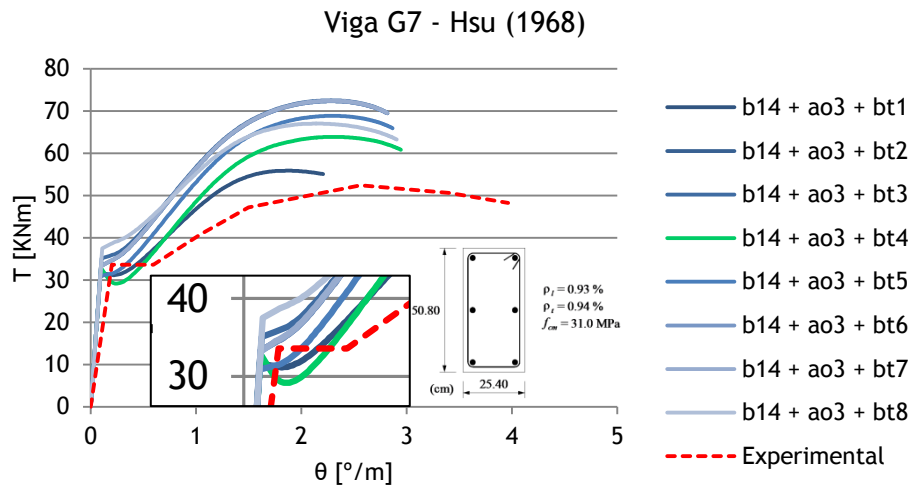


Figura III.14. Curvas $T - \theta$ para a viga G7

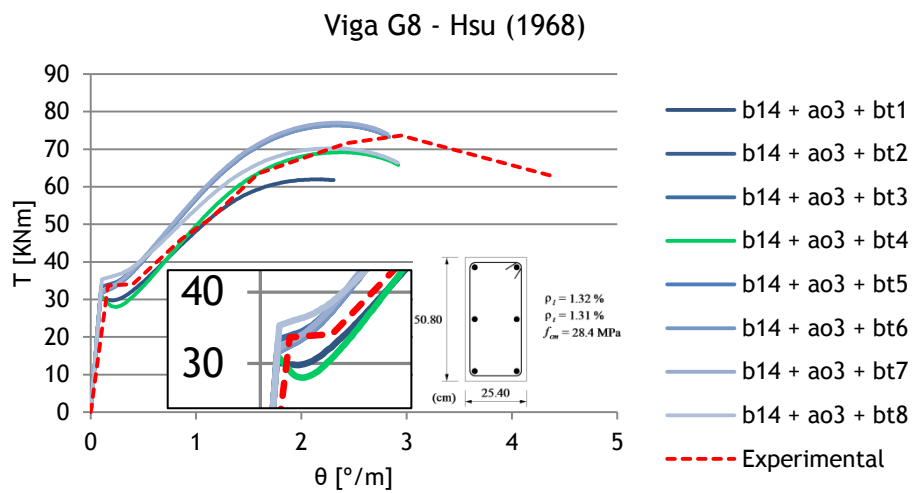


Figura III.15. Curvas $T - \theta$ para a viga G8

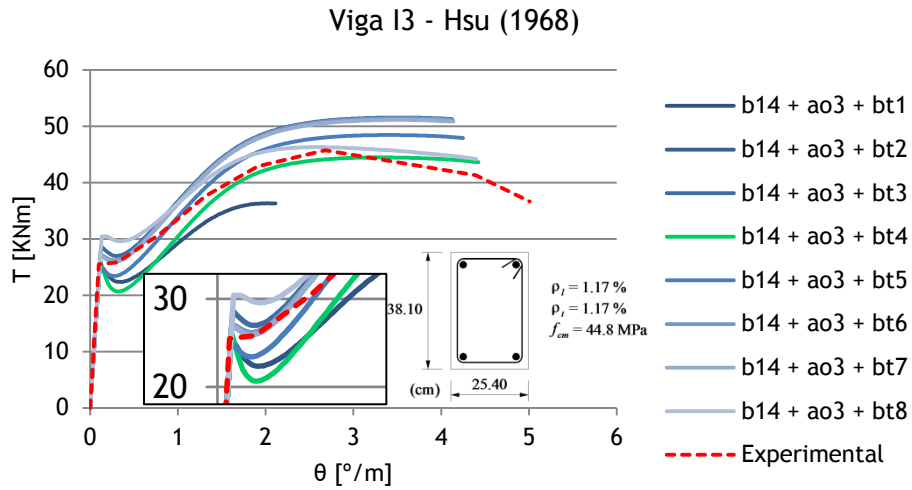


Figura III.16. Curvas $T - \theta$ para a viga I3

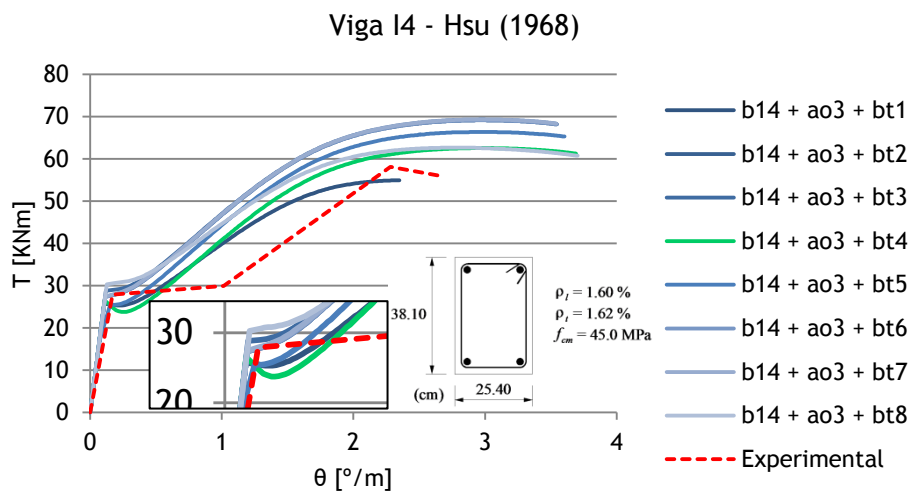


Figura III.17. Curvas $T - \theta$ para a viga I4

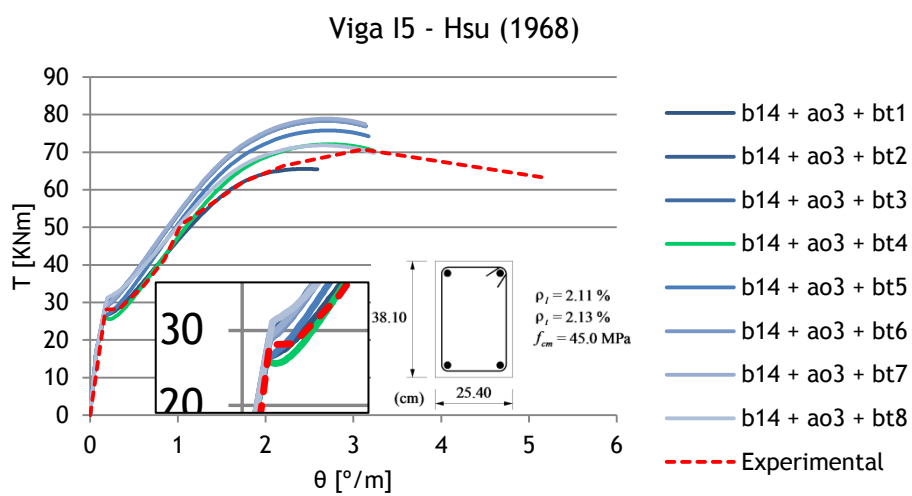


Figura III.18. Curvas $T - \theta$ para a viga I5

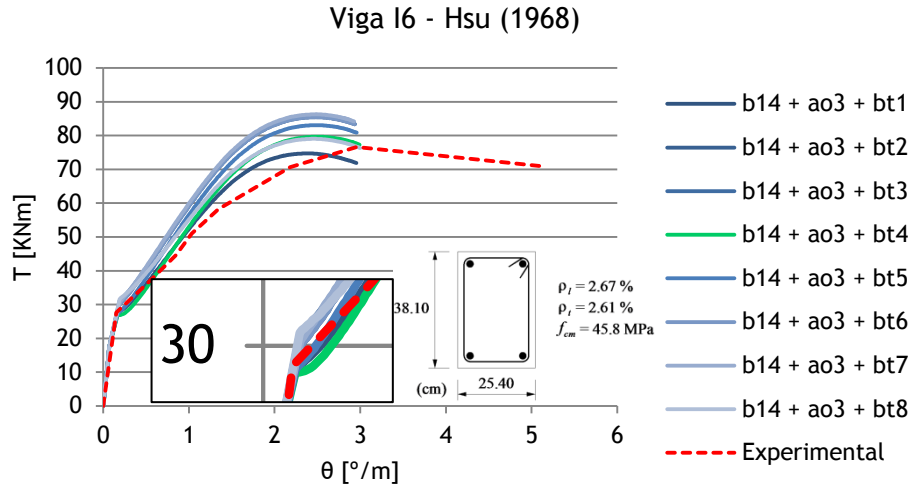


Figura III.19. Curvas $T - \theta$ para a viga I6

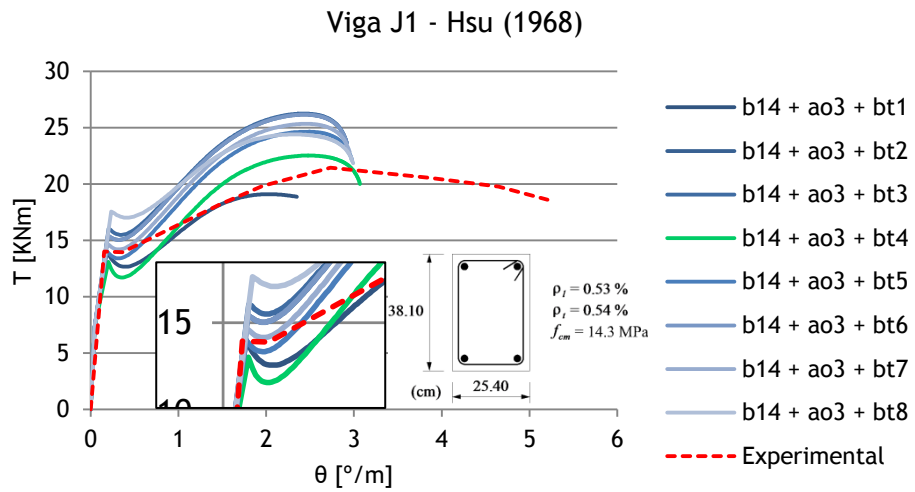


Figura III.20. Curvas $T - \theta$ para a viga J1

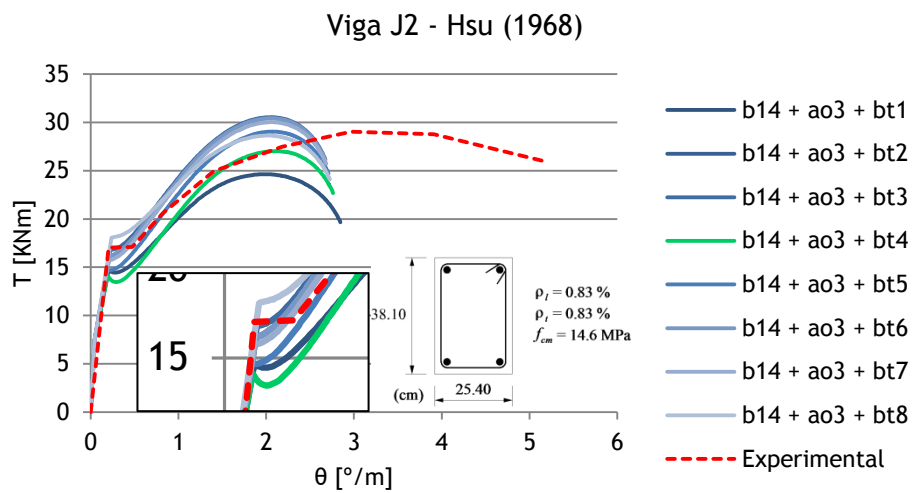


Figura III.21. Curvas $T - \theta$ para a viga J2

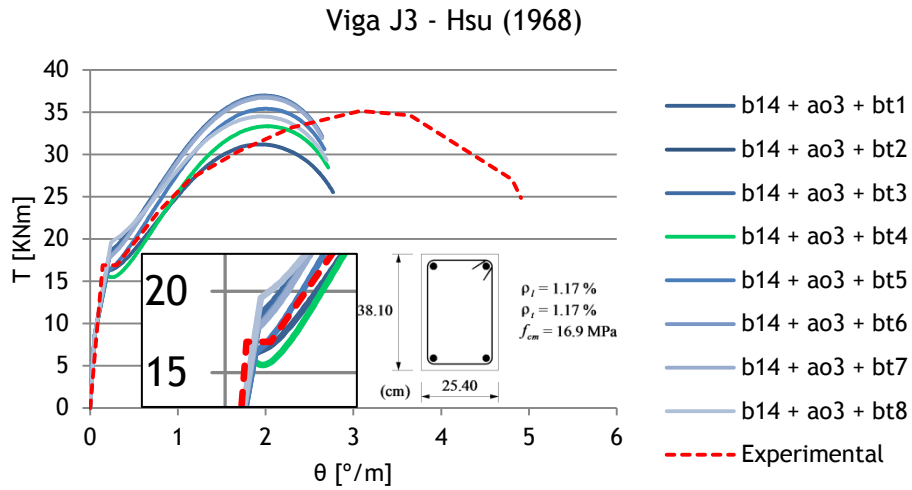


Figura III.22. Curvas $T - \theta$ para a viga J3

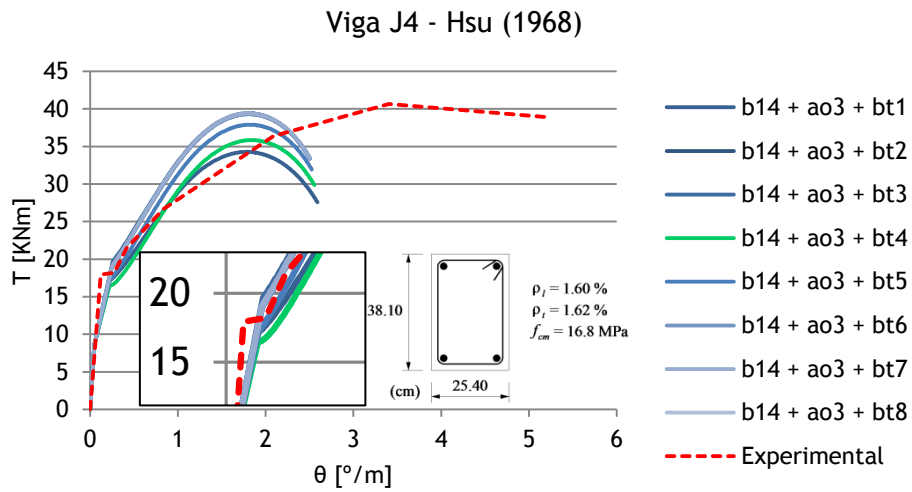


Figura III.23. Curvas $T - \theta$ para a viga J4

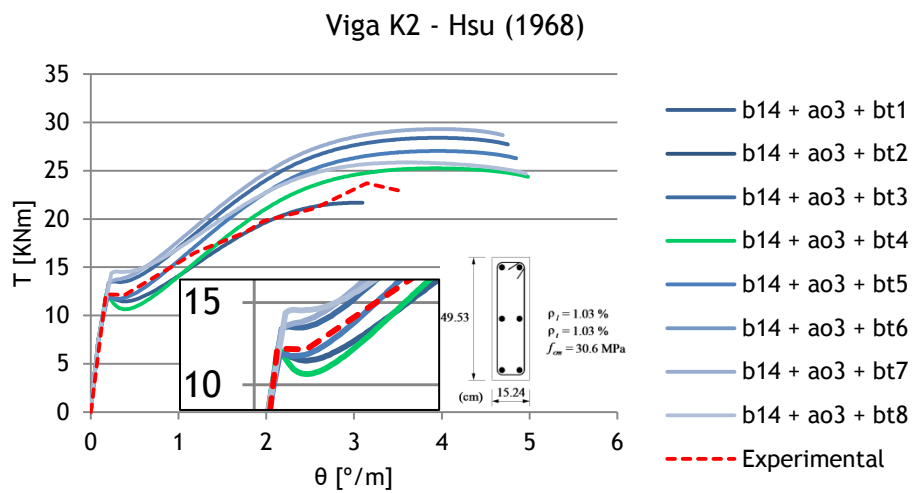


Figura III.24. Curvas $T - \theta$ para a viga K2

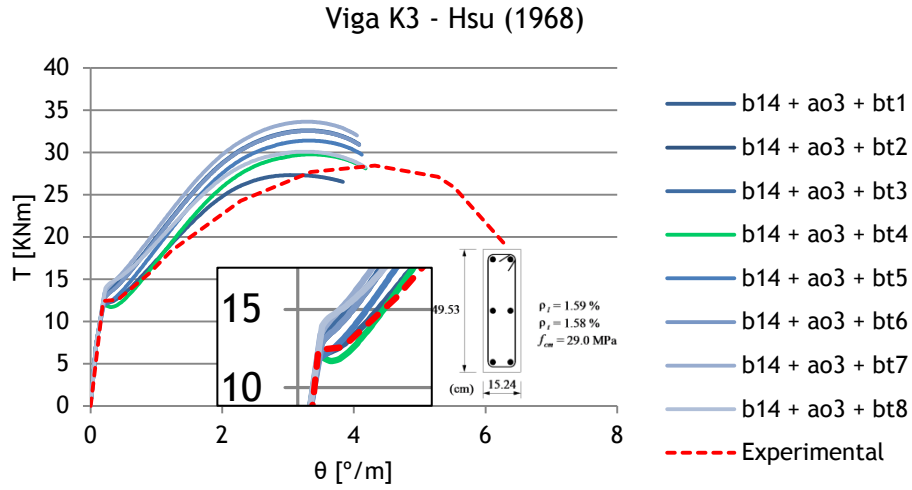


Figura III.25. Curvas $T - \theta$ para a viga K3

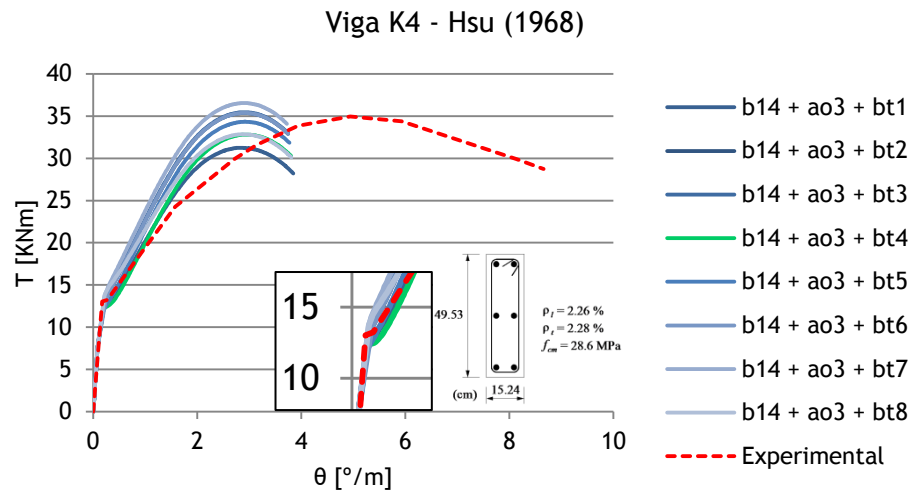


Figura III.26. Curvas $T - \theta$ para a viga K4

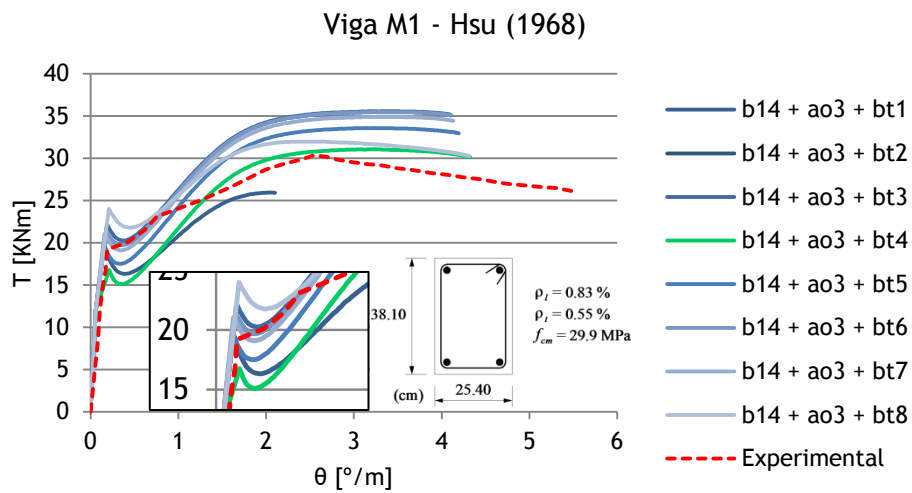


Figura III.27. Curvas $T - \theta$ para a viga M1

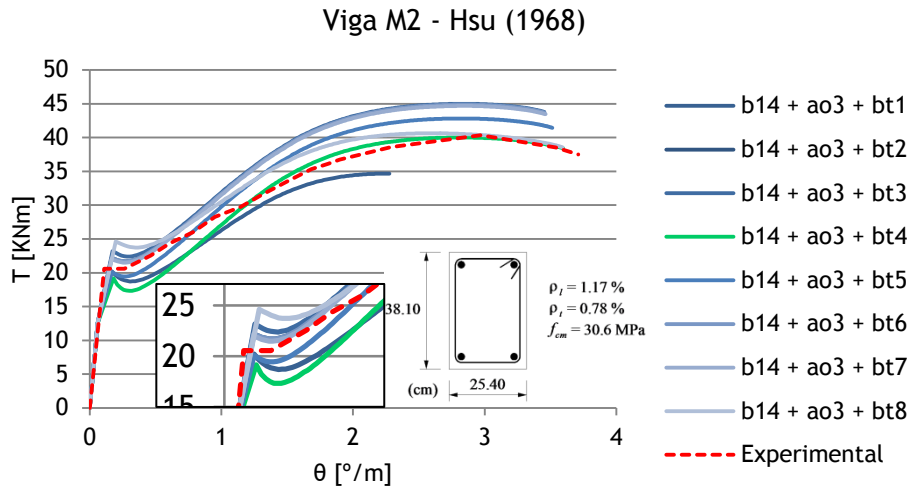


Figura III.28. Curvas $T - \theta$ para a viga M2

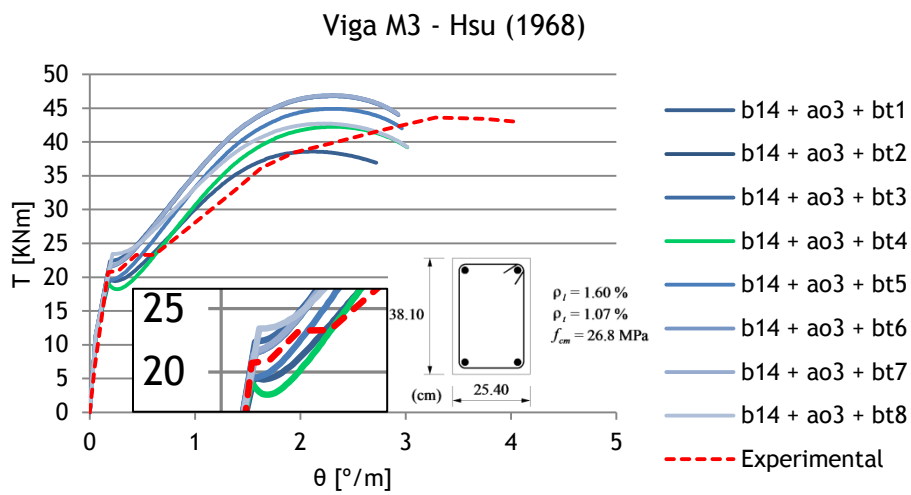


Figura III.29. Curvas $T - \theta$ para a viga M3

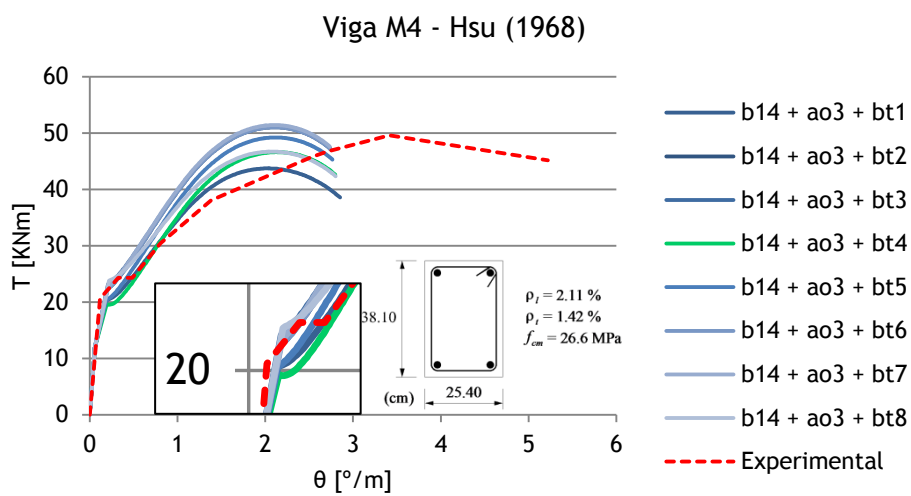


Figura III.30. Curvas $T - \theta$ para a viga M4

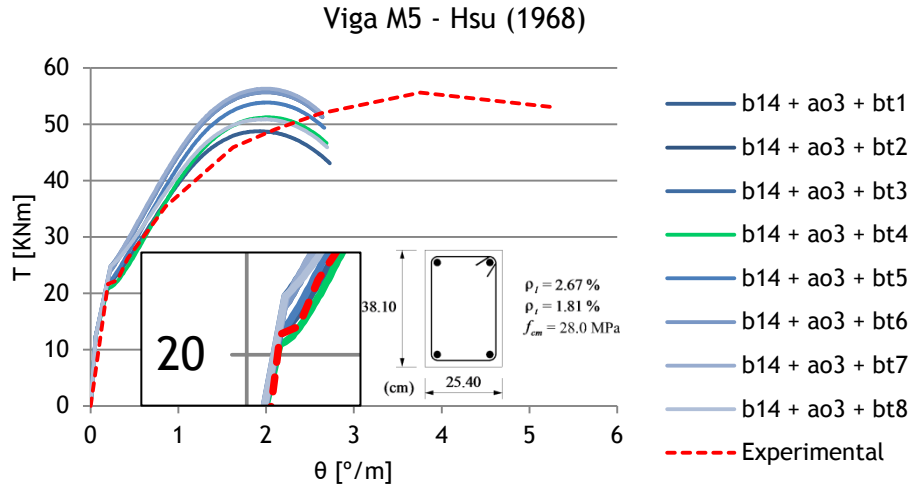


Figura III.31. Curvas $T - \theta$ para a viga M5

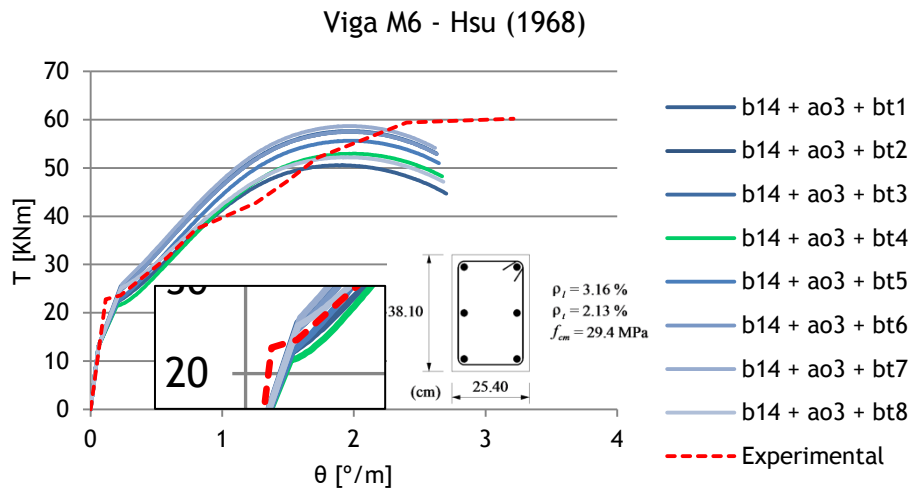


Figura III.32. Curvas $T - \theta$ para a viga M6

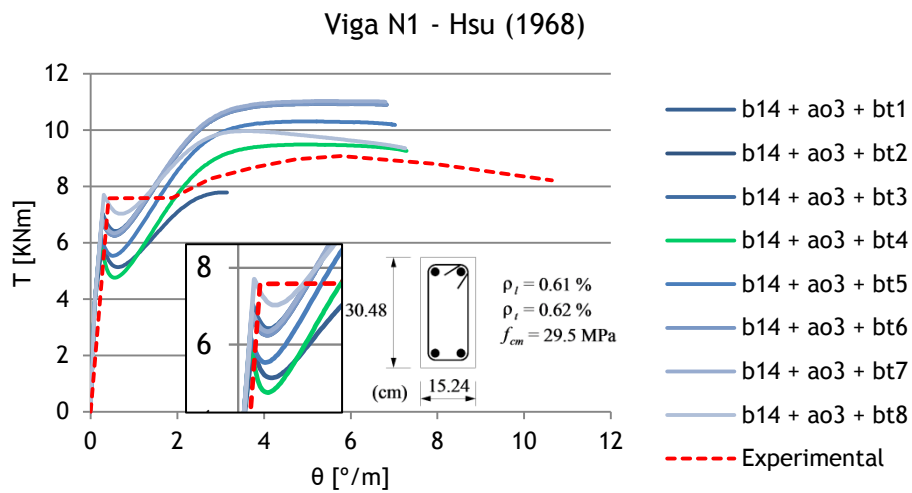


Figura III.33. Curvas $T - \theta$ para a viga N1

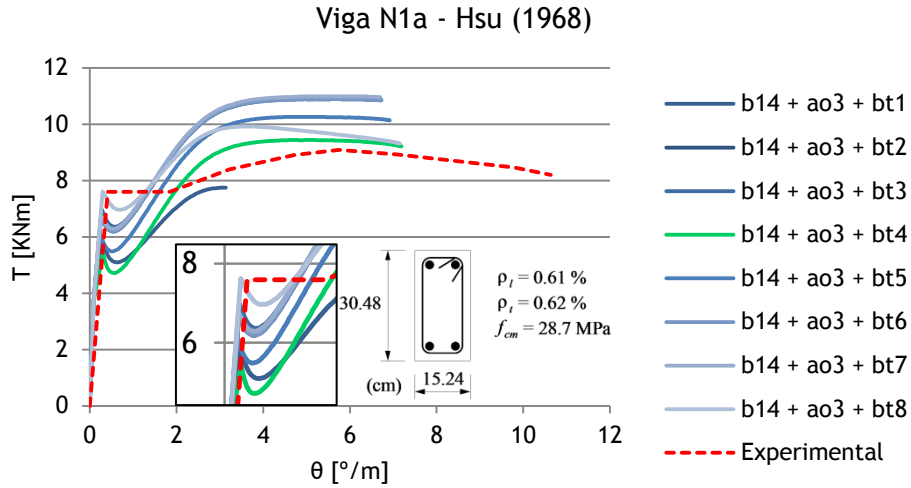


Figura III.34. Curvas $T - \theta$ para a viga N1a

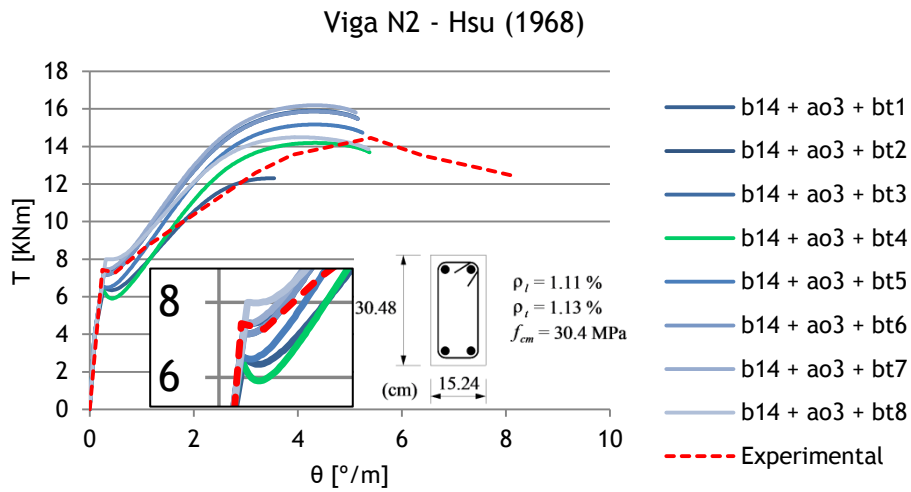


Figura III.35. Curvas $T - \theta$ para a viga N2

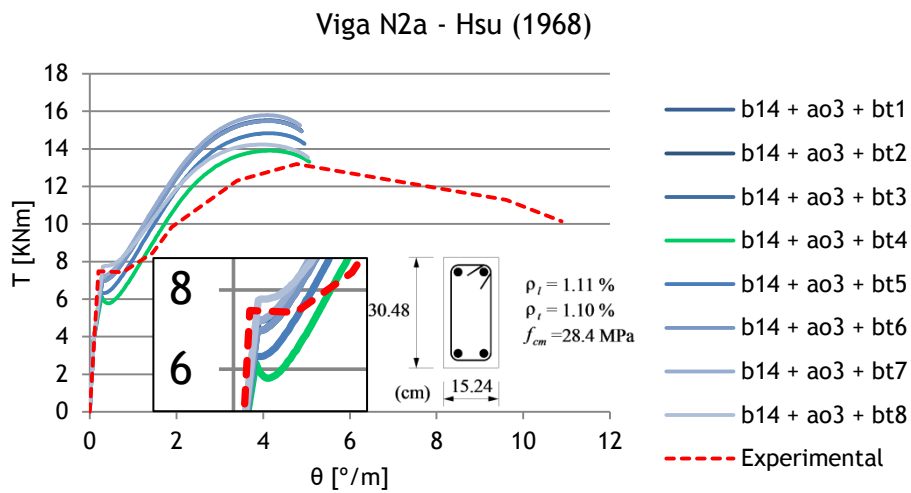


Figura III.36. Curvas $T - \theta$ para a viga N2

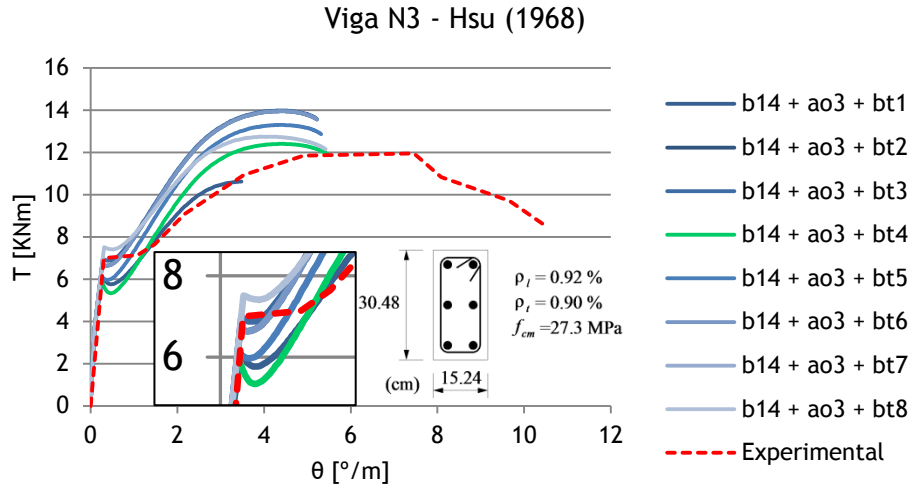


Figura III.37. Curvas $T - \theta$ para a viga N3

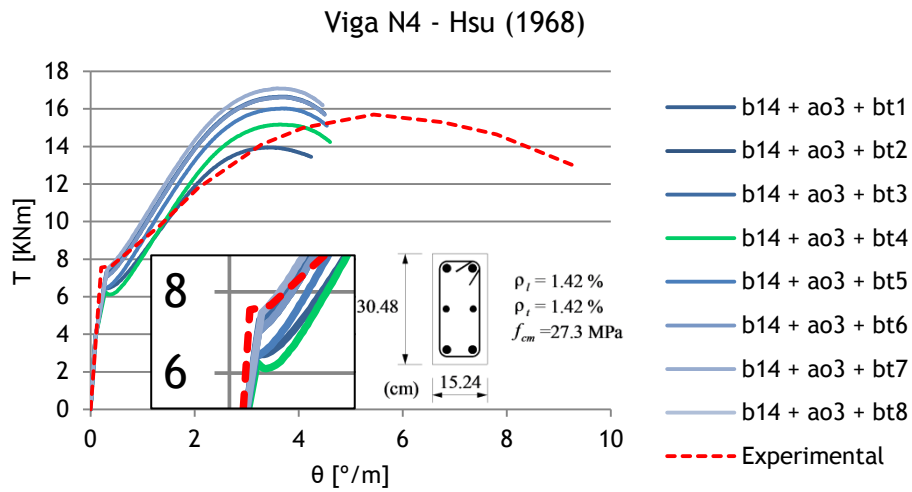


Figura III.38. Curvas $T - \theta$ para a viga N4

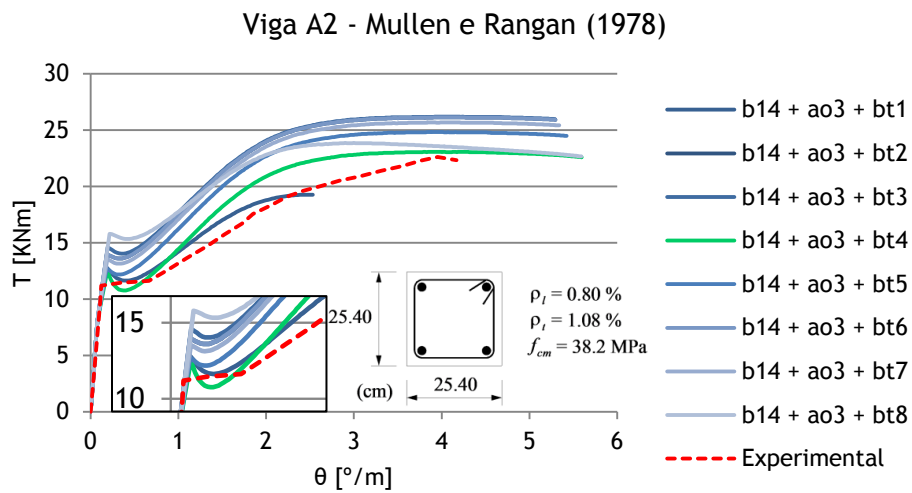


Figura III.39. Curvas $T - \theta$ para a viga A2

Viga A3 - Mullen e Rangan (1978)

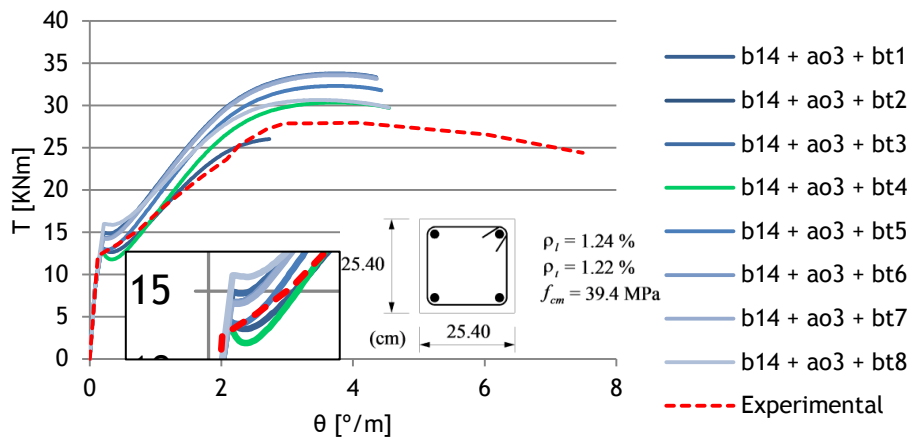


Figura III.40. Curvas $T - \theta$ para a viga A3

Viga A4 - Mullen e Rangan (1978)

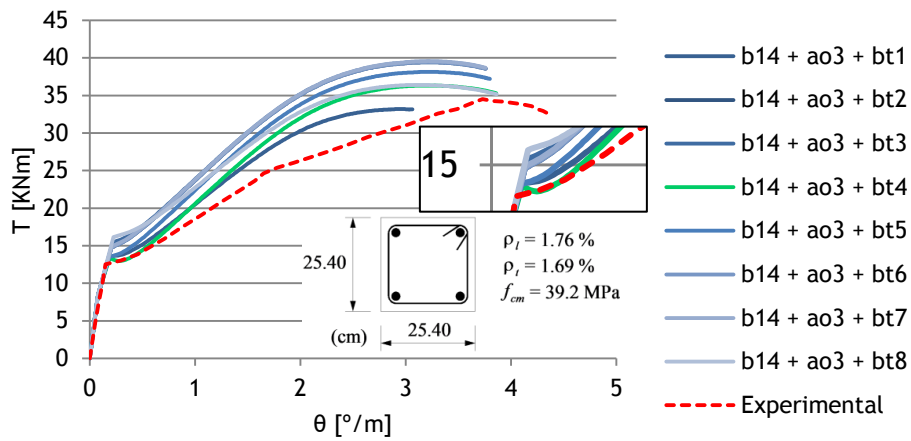


Figura III.41. Curvas $T - \theta$ para a viga A4

Viga B3 - Mullen e Rangan (1978)

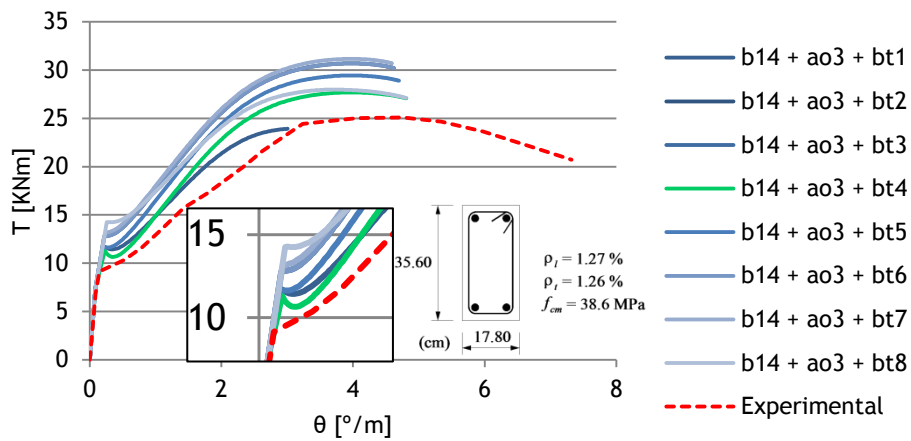


Figura III.42. Curvas $T - \theta$ para a viga B3

Viga B4 - Mullen e Rangan (1978)

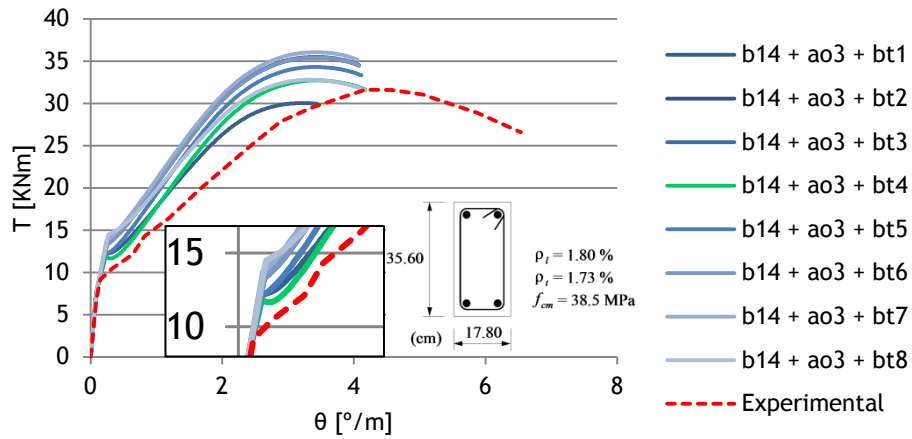


Figura III.43. Curvas $T - \theta$ para a viga B4

Viga H-06-12 - Fang e Shiao (2004)

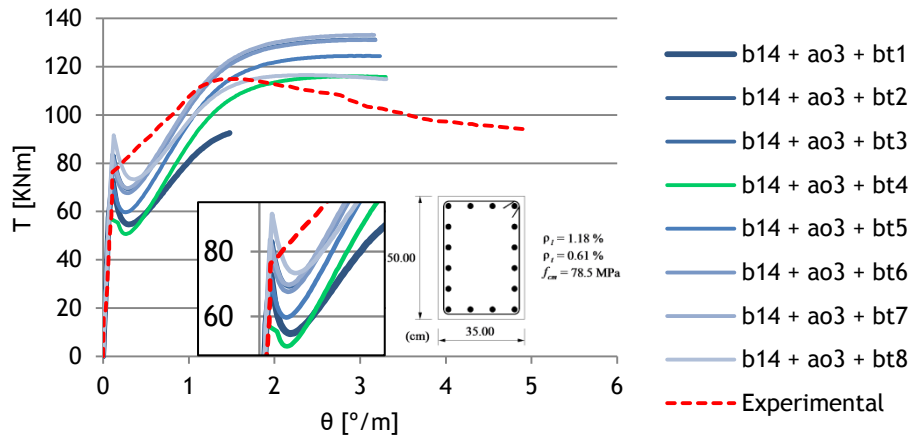


Figura III.44. Curvas $T - \theta$ para a viga H-06-12

Viga H-07-10 - Fang e Shiao (2004)

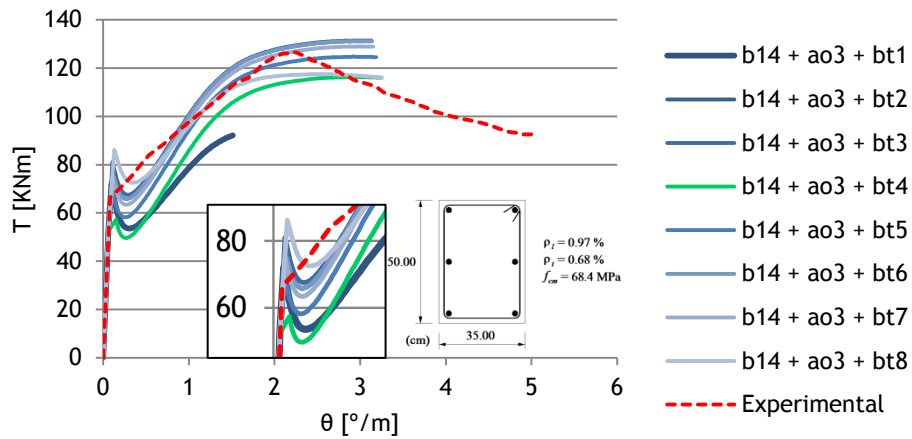


Figura III.45. Curvas $T - \theta$ para a viga H-07-10

Viga H-07-16 - Fang e Shiau (2004)

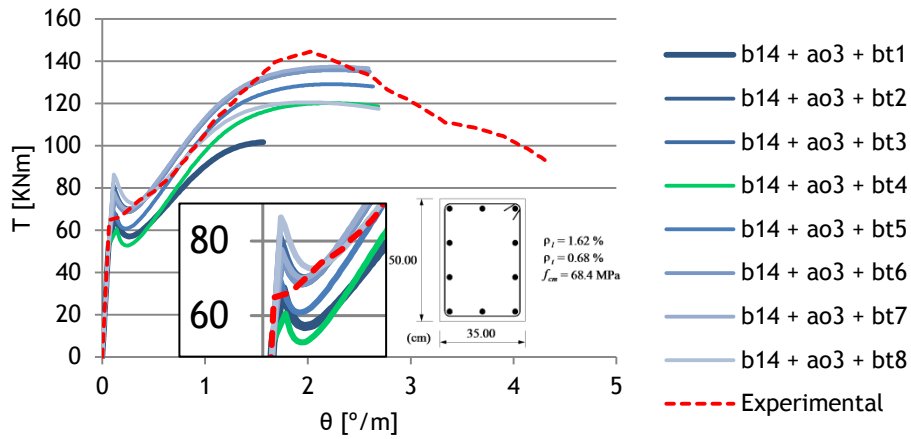


Figura III.46. Curvas $T - \theta$ para a viga H-07-16

Viga H-12-12 - Fang e Shiau (2004)

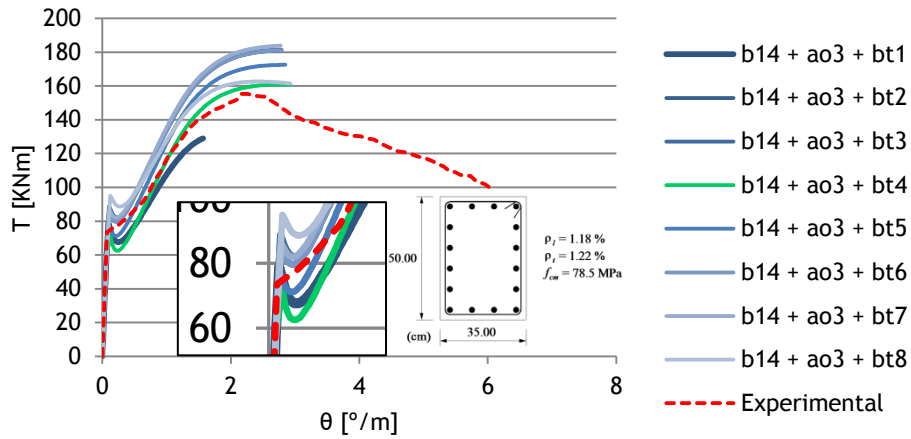


Figura III.47. Curvas $T - \theta$ para a viga H-12-12

Viga H-12-16 - Fang e Shiau (2004)

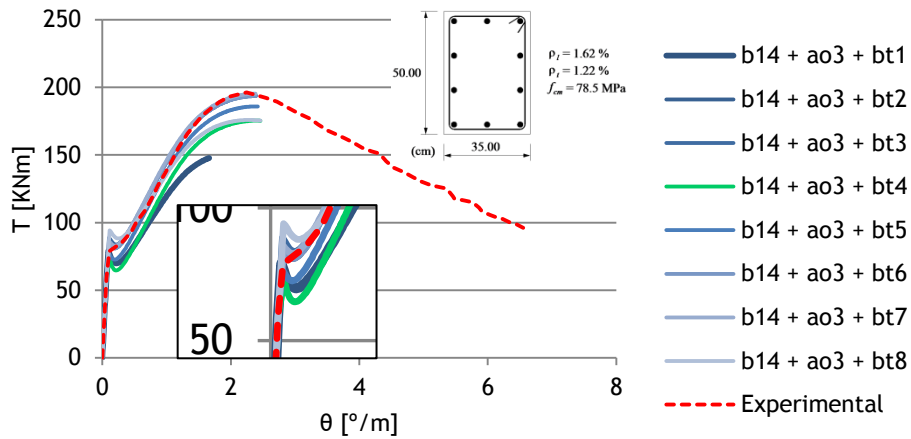


Figura III.48. Curvas $T - \theta$ para a viga H-12-16

Viga H-14-10 - Fang e Shiau (2004)

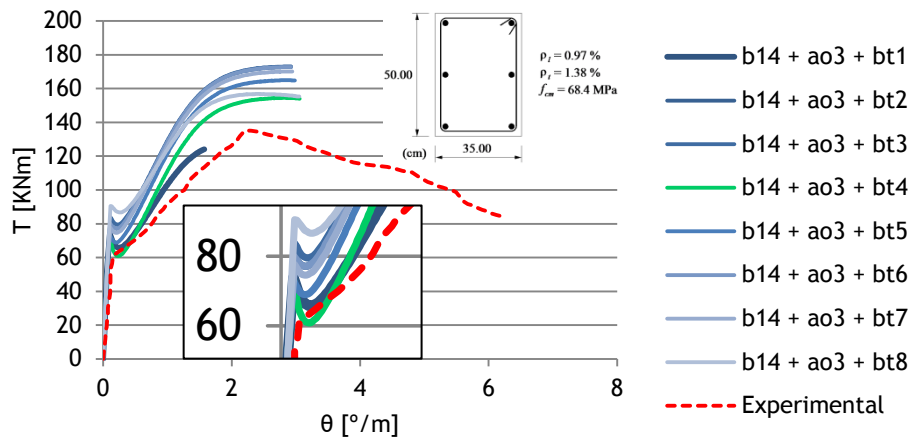


Figura III.49. Curvas $T - \theta$ para a viga H-14-10

Viga H-20-20 - Fang e Shiau (2004)

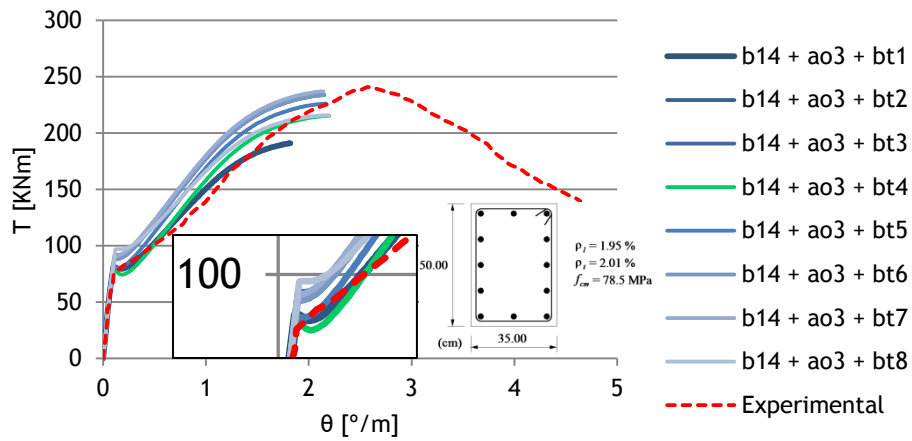


Figura III.50. Curvas $T - \theta$ para a viga H-20-20

Viga N-06-06 - Fang e Shiau (2004)

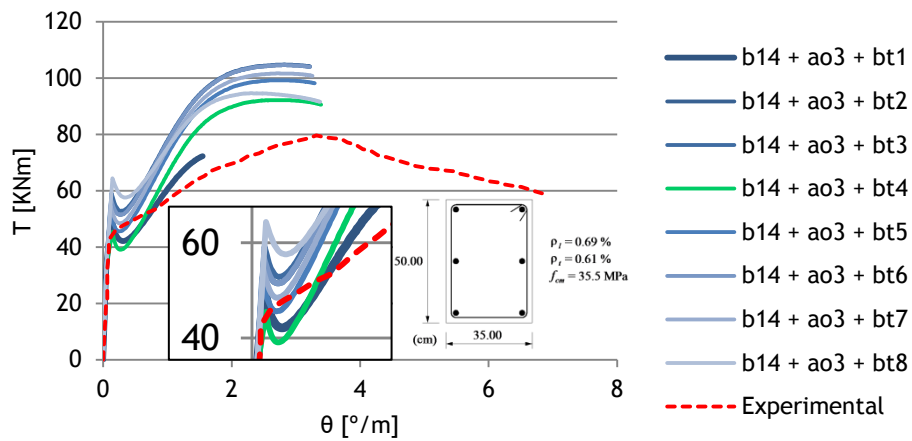


Figura III.51. Curvas $T - \theta$ para a viga N-06-06

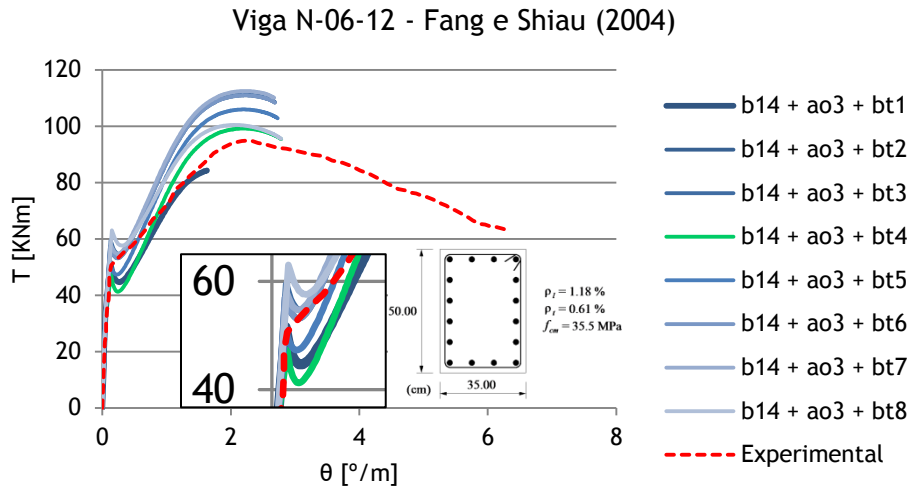


Figura III.52. Curvas $T - \theta$ para a viga N-06-12

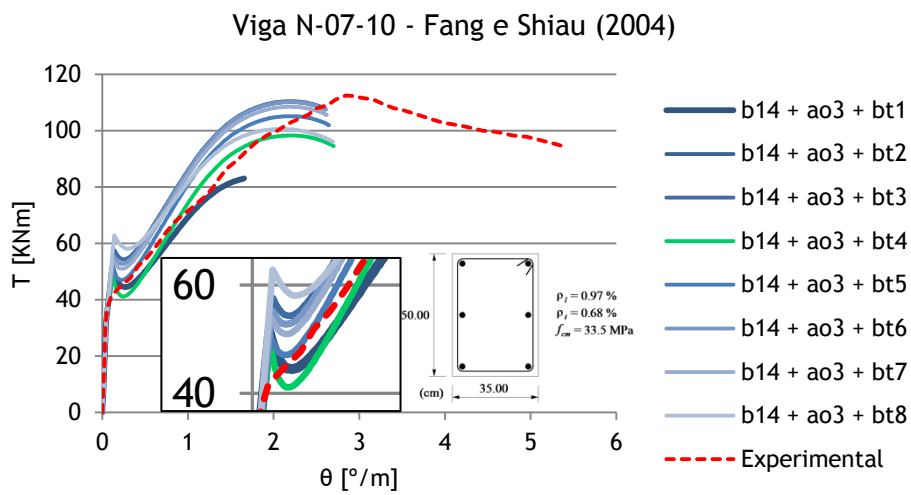


Figura III.53. Curvas $T - \theta$ para a viga N-07-10

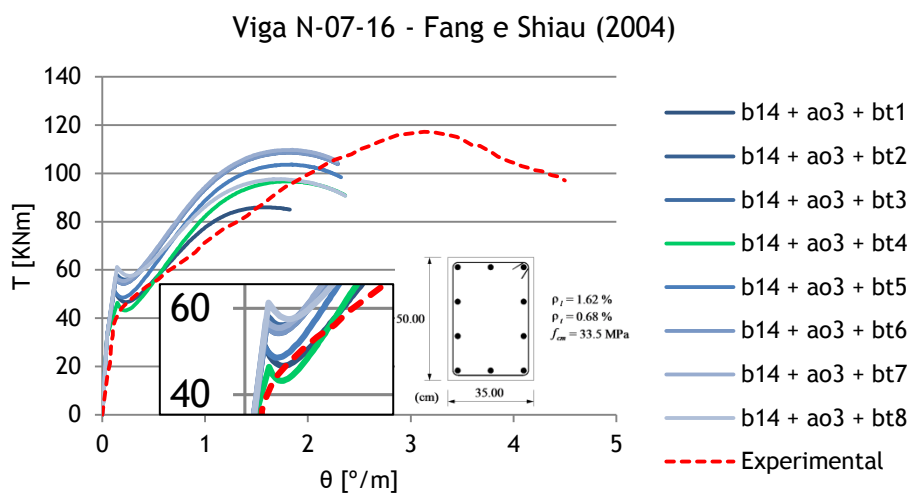


Figura III.54. Curvas $T - \theta$ para a viga N-07-16

Viga N-12-12 - Fang e Shiau (2004)

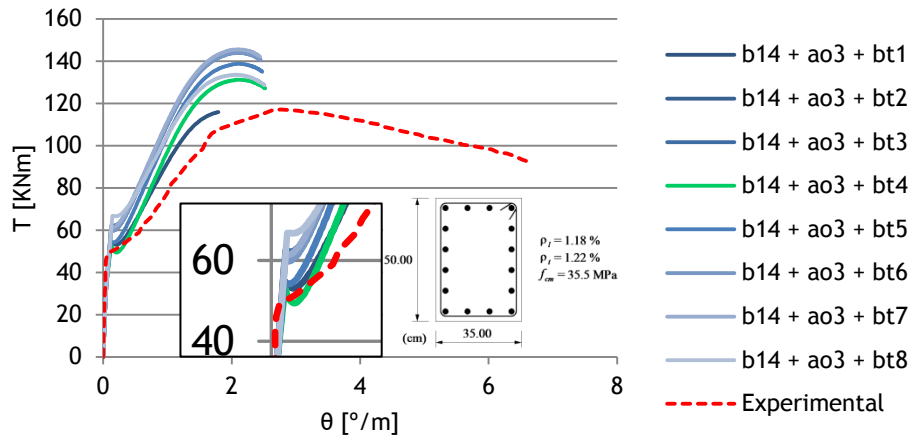


Figura III.55. Curvas $T - \theta$ para a viga N-12-12

Viga N-12-16 - Fang e Shiau (2004)

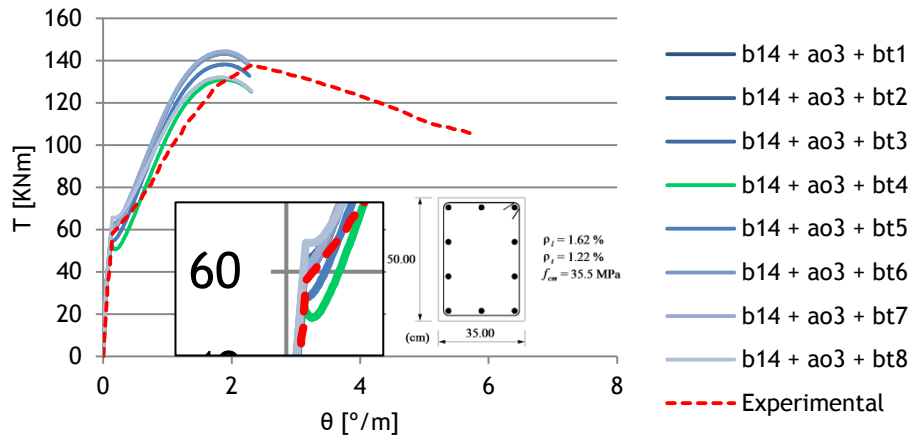


Figura III.56. Curvas $T - \theta$ para a viga N-12-16

Viga N-14-10 - Fang e Shiau (2004)

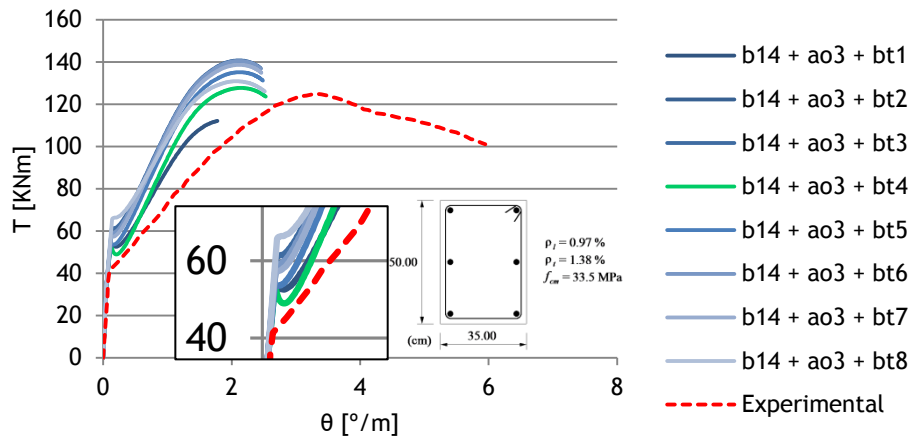


Figura III.57. Curvas $T - \theta$ para a viga N-14-10

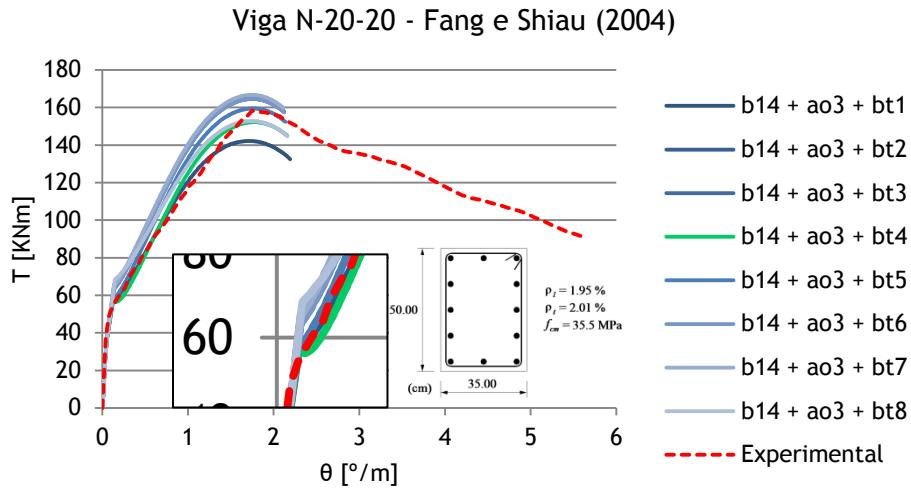


Figura III.58. Curvas $T - \theta$ para a viga N-20-20

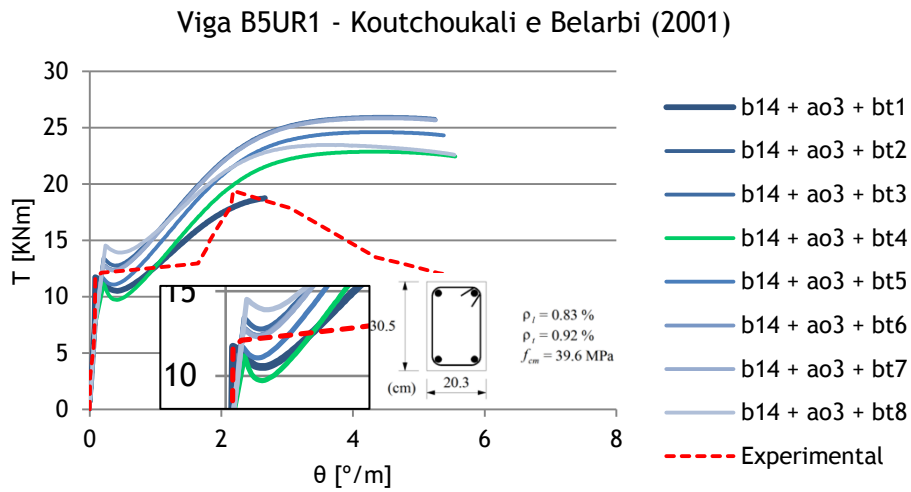


Figura III.59. Curvas $T - \theta$ para a viga B5UR1

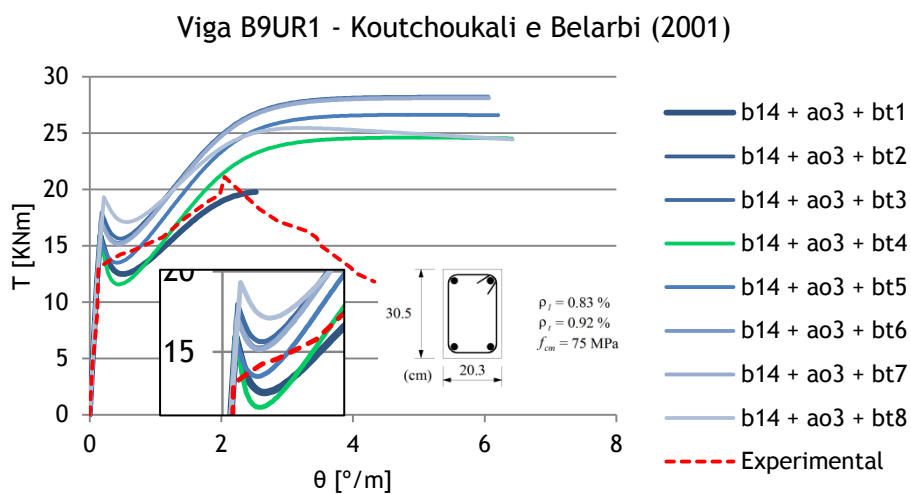


Figura III.60. Curvas $T - \theta$ para a viga B9UR1

Viga B12UR1 - Koutchoukali e Belarbi (2001)

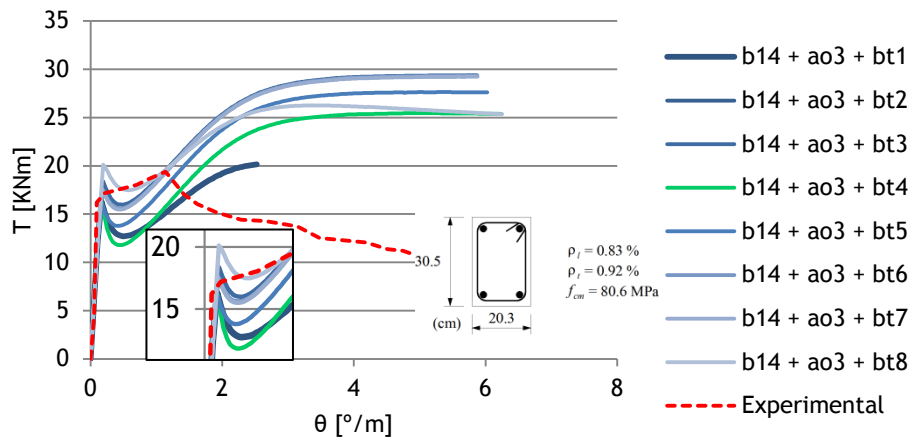


Figura III.61. Curvas $T - \theta$ para a viga B12UR1

Viga B14UR1 - Koutchoukali e Belarbi (2001)

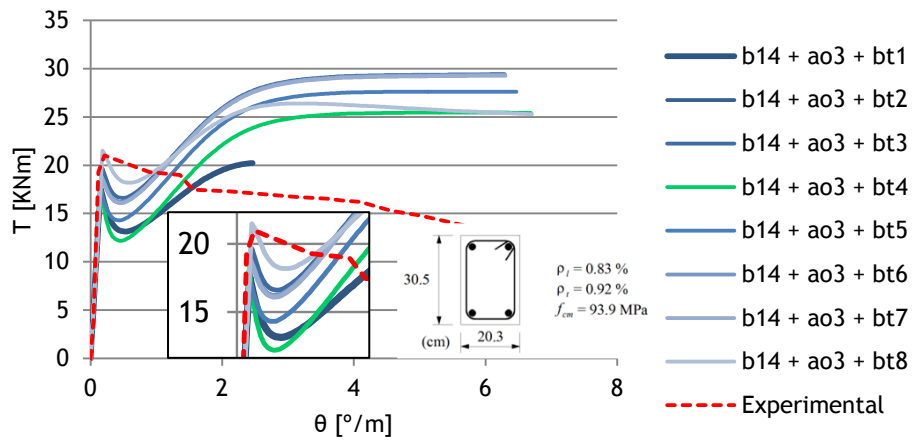


Figura III.62. Curvas $T - \theta$ para a viga B14UR1

Viga B12UR2 - Koutchoukali e Belarbi (2001)

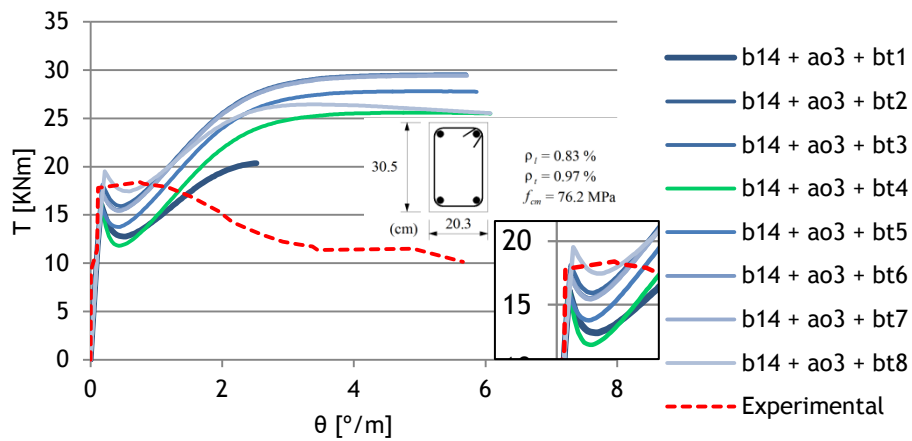


Figura III.63. Curvas $T - \theta$ para a viga B12UR2

Viga B12UR3 - Koutchoukali e Belarbi (2001)

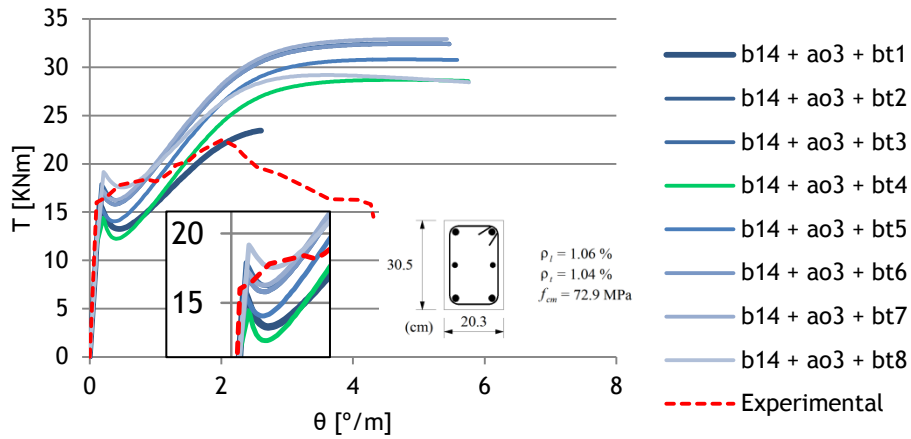


Figura III.64. Curvas $T - \theta$ para a viga B12UR3

Viga B12UR4 - Koutchoukali e Belarbi (2001)

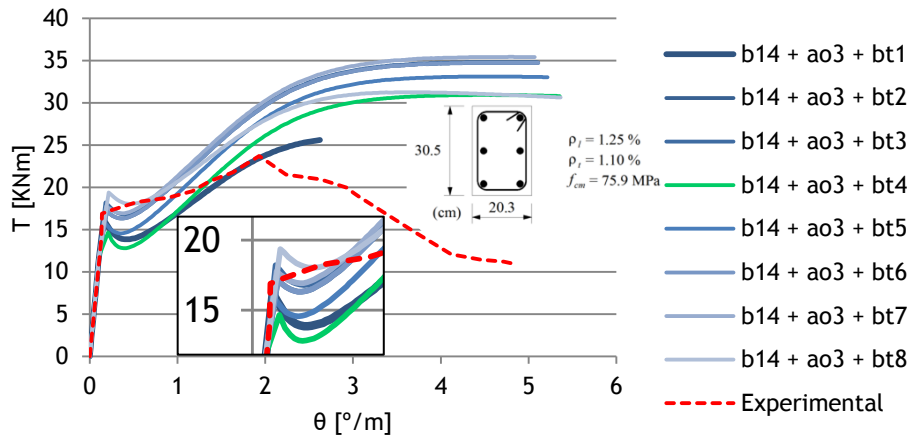


Figura III.65. Curvas $T - \theta$ para a viga B12UR4

Viga B12UR5 - Koutchoukali e Belarbi (2001)

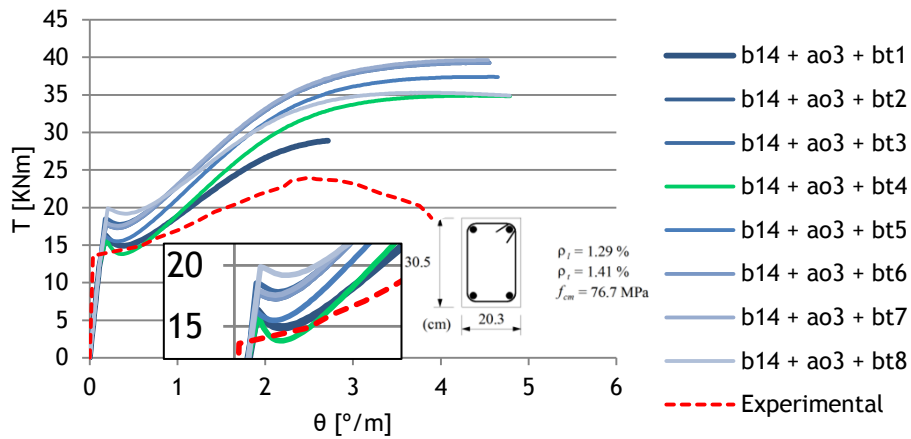


Figura III.66. Curvas $T - \theta$ para a viga B12UR5

Anexo IV. Resultados obtidos para a nova lei

IV.1 Análise comparativa dos pontos característicos da curva $T - \theta$, segundo a versão 2 da lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu [5]

Tabela IV.1. Pontos característicos da curva $T - \theta$

Viga	T_{cr}^{exp} kNm	T_{cr}^{th} kNm	$\frac{T_{cr}^{exp}}{T_{cr}^{th}}$	$\theta_{cr}^{I exp}$ °/m	$\theta_{cr}^{I th}$ °/m	$\frac{\theta_{cr}^{I exp}}{\theta_{cr}^{I th}}$
B3 [24]	20.09	24.75	0.812	0.12	0.12	1.020
B4 [24]	21.90	24.87	0.881	0.12	0.12	1.015
B5 [24]	22.58	25.25	0.894	0.14	0.11	1.200
B6 [24]	24.95	23.83	1.047	0.16	0.11	1.516
B7 [24]	20.21	22.32	0.906	0.11	0.11	0.961
B8 [24]	21.79	22.64	0.962	0.13	0.11	1.148
B9 [24]	19.64	20.94	0.938	0.11	0.10	1.038
C4 [24]	11.85	13.53	0.876	0.13	0.14	0.980
C5 [24]	14.00	13.27	1.055	0.17	0.13	1.270
C6 [24]	13.89	13.07	1.063	0.17	0.12	1.386
G3 [24]	27.09	34.25	0.791	0.10	0.11	0.903
G4 [24]	28.67	34.93	0.821	0.12	0.11	1.111
G5 [24]	29.46	33.86	0.870	0.11	0.10	1.119
G7 [24]	33.64	36.95	0.911	0.13	0.11	1.242
G8 [24]	33.64	35.19	0.956	0.12	0.11	1.169
I3 [24]	25.51	29.44	0.867	0.11	0.13	0.841
I4 [24]	28.00	30.09	0.931	0.12	0.13	0.981
I5 [24]	28.11	30.47	0.922	0.15	0.12	1.222
I6 [24]	27.54	30.50	0.903	0.13	0.12	1.049
J1 [24]	14.00	16.87	0.830	0.09	0.10	0.831
J2 [24]	17.05	17.74	0.961	0.12	0.11	1.172
J3 [24]	16.93	18.96	0.893	0.10	0.11	0.904
J4 [24]	17.95	17.86	1.005	0.11	0.10	1.120
K2 [24]	12.19	14.79	0.824	0.18	0.17	1.061
K3 [24]	12.42	14.36	0.865	0.19	0.16	1.200
K4 [24]	13.10	14.13	0.927	0.21	0.15	1.340
M1 [24]	19.19	22.40	0.857	0.11	0.11	0.972
M2 [24]	20.55	25.05	0.820	0.11	0.12	0.923
M3 [24]	20.66	23.40	0.883	0.12	0.11	1.057
M4 [24]	20.66	23.49	0.880	0.13	0.11	1.191
M5 [24]	21.67	23.47	0.923	0.12	0.11	1.117
M6 [24]	22.69	23.88	0.950	0.15	0.11	1.354
N1 [24]	7.59	7.26	1.044	0.13	0.17	0.746
N1a [24]	7.02	7.30	0.961	0.11	0.17	0.623
N2 [24]	7.44	7.90	0.941	0.22	0.18	1.202
N2a [24]	7.50	7.79	0.962	0.21	0.18	1.157
N3 [24]	7.41	7.45	0.994	0.21	0.18	1.200
N4 [24]	7.60	7.50	1.013	0.21	0.17	1.215
A2 [31]	11.29	15.73	0.718	0.12	0.15	0.795
A3 [31]	12.19	15.69	0.777	0.12	0.15	0.843
A4 [31]	12.53	15.87	0.790	0.15	0.15	1.022
B3 [31]	8.81	14.09	0.625	0.15	0.16	0.908
B4 [31]	10.16	14.20	0.716	0.15	0.16	0.921
H-06-12 [19]	75.00	77.93	0.962	0.09	0.09	0.998
H-07-10 [19]	70.50	72.89	0.967	0.09	0.08	1.091
H-07-16 [19]	65.30	76.50	0.854	0.09	0.09	0.987
H-12-12 [19]	77.10	88.66	0.870	0.07	0.10	0.768
H-12-16 [19]	79.30	89.33	0.888	0.09	0.10	0.946
H-14-10 [19]	61.80	87.95	0.703	0.09	0.10	0.858

Tabela IV.1 (continuação). Pontos característicos da curva $T - \theta$

H-20-20 [19]	76.00	95.07	0.799	0.09	0.10	0.906
N-06-06 [19]	43.20	60.17	0.718	0.08	0.08	0.948
N-06-12 [19]	51.80	56.90	0.910	0.11	0.08	1.448
N-07-10 [19]	41.60	58.36	0.713	0.11	0.08	1.316
N-07-16 [19]	40.00	60.58	0.660	0.11	0.08	1.287
N-12-12 [19]	49.30	66.84	0.738	0.09	0.09	0.999
N-12-16 [19]	57.10	66.81	0.855	0.12	0.09	1.326
N-14-10 [19]	41.80	64.41	0.649	0.12	0.09	1.337
N-20-20 [19]	55.00	66.83	0.823	0.13	0.09	1.422
B5UR1 [29]	11.60	14.32	0.810	0.09	0.16	0.544
B9UR1 [29]	13.00	17.04	0.763	0.13	0.15	0.868
B12UR1 [29]	16.20	17.03	0.951	0.09	0.15	0.604
B14UR1 [29]	19.30	17.80	1.084	0.12	0.15	0.774
B12UR2 [29]	17.80	17.43	1.021	0.11	0.16	0.707
B12UR3 [29]	16.00	17.90	0.894	0.10	0.16	0.628
B12UR4 [29]	16.90	18.10	0.934	0.14	0.16	0.866
B12UR5 [29]	13.60	19.18	0.709	0.04	0.17	0.210
	$\bar{x} =$	0.885		$\bar{x} =$	1.021	
	$s =$	0.106		$s =$	0.240	
	$cv =$	12.012		$cv =$	23.515	

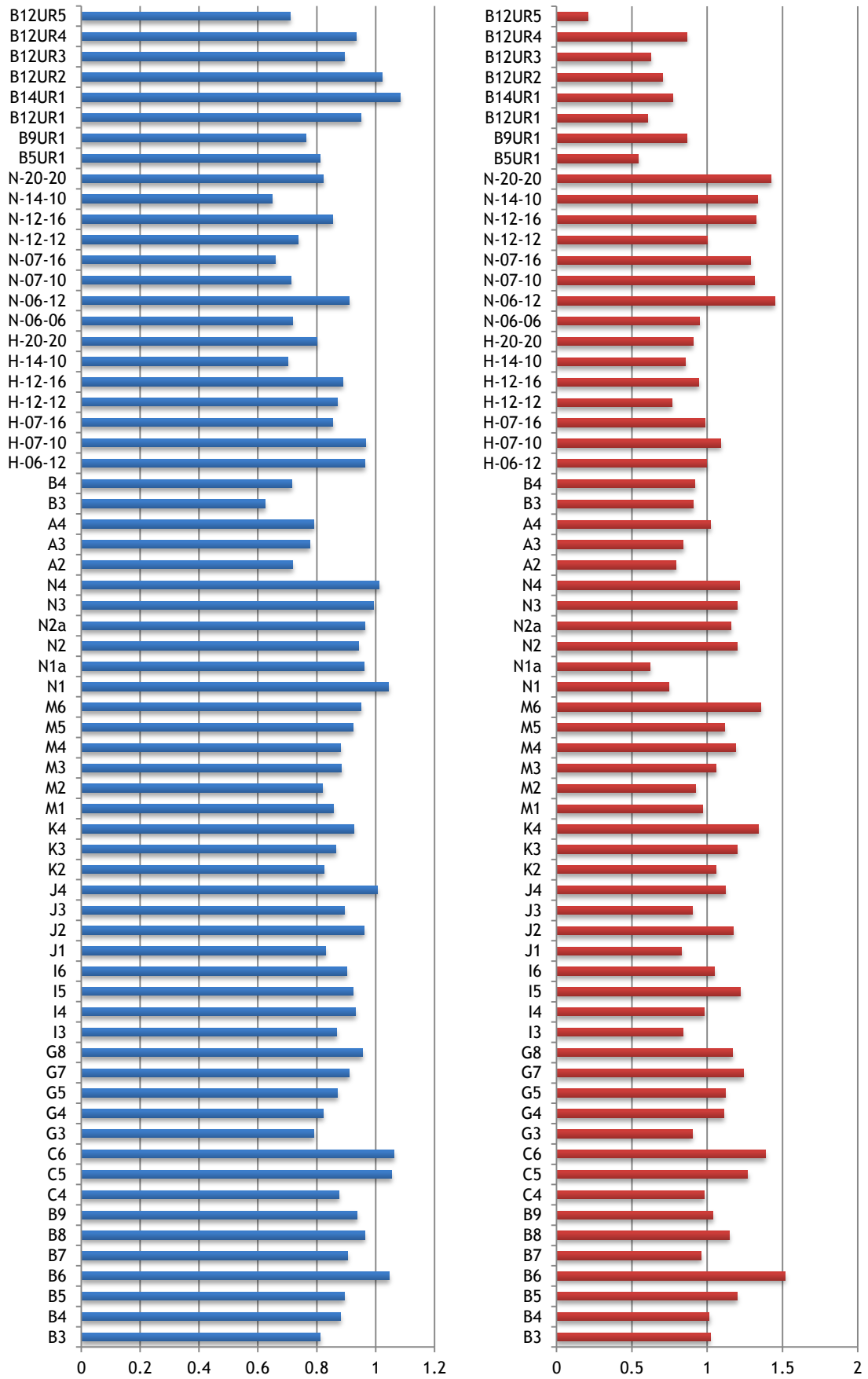


Figura IV.1. Relação $T_{cr}^{exp} / T_{cr}^{th}$ à esquerda e $\theta_{cr}^{l exp} / \theta_{cr}^{l th}$ à direita

IV.2 Análise de uma amostra de gráficos para a versão 2 da lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994)

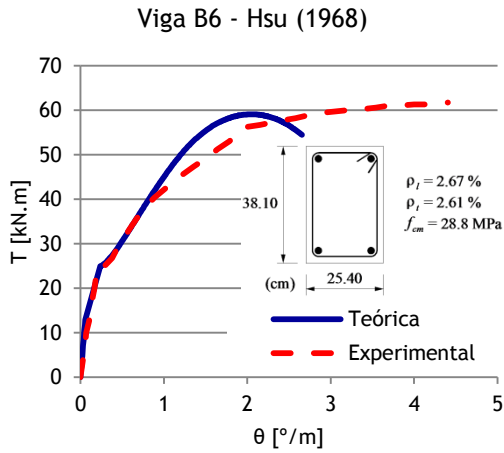


Figura IV.2. Curva $T - \theta$ para a viga B6

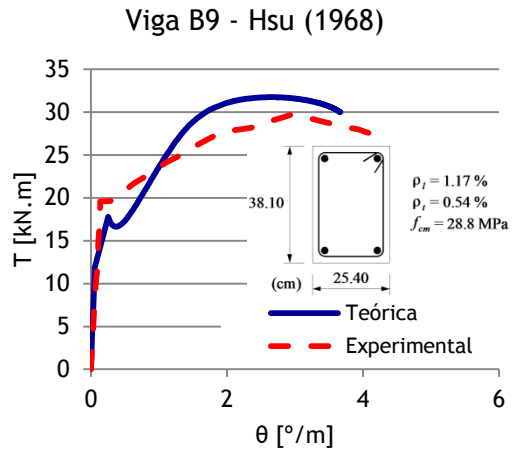


Figura IV.3. Curva $T - \theta$ para a viga B9

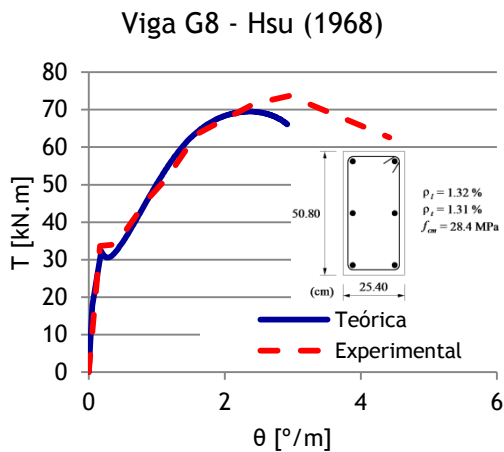


Figura IV.4. Curva $T - \theta$ para a viga G8

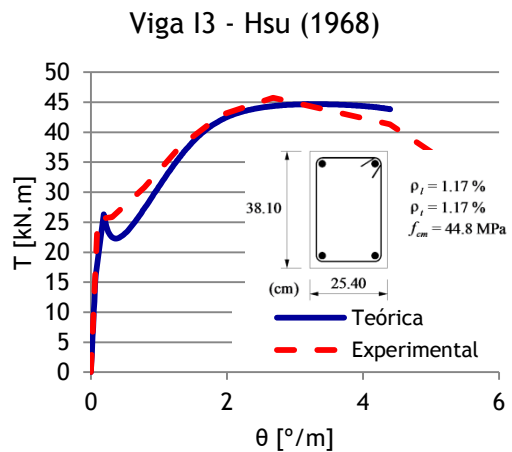


Figura IV.5. Curva $T - \theta$ para a viga I3

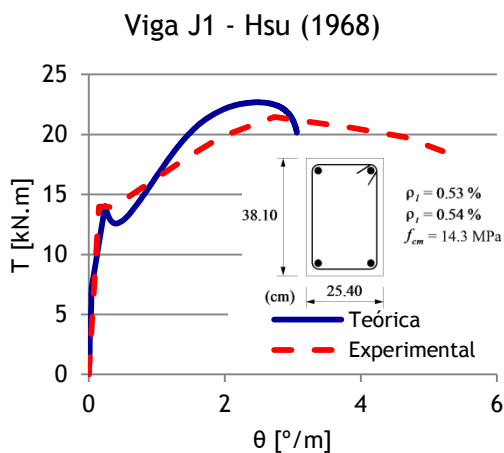


Figura IV.6. Curva $T - \theta$ para a viga J1

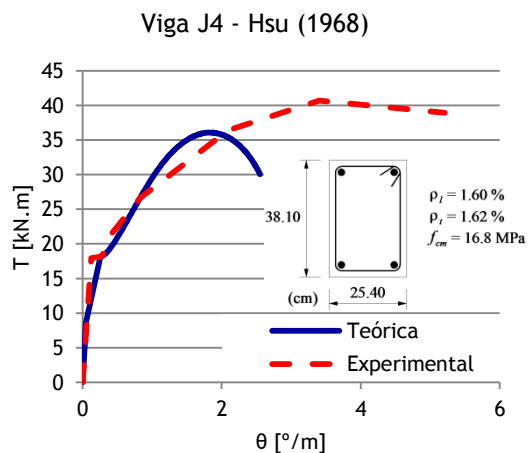


Figura IV.7. Curva $T - \theta$ para a viga J4

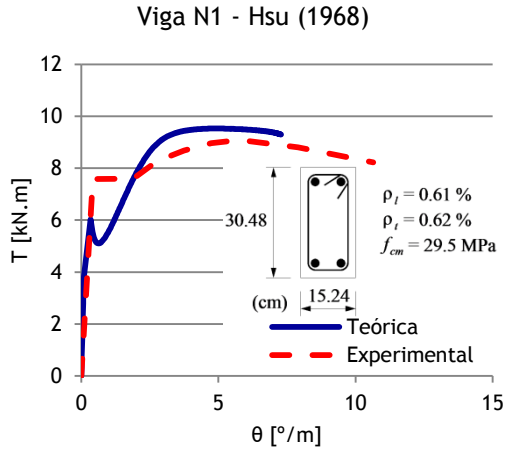


Figura IV.8. Curva $T - \theta$ para a viga N1

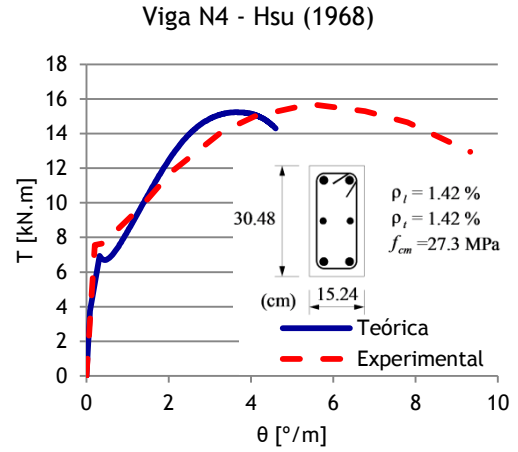


Figura IV.9. Curva $T - \theta$ para a viga N4

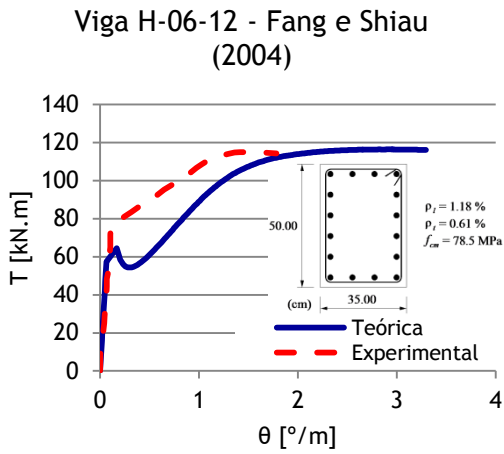


Figura IV.10. Curva $T - \theta$ para a viga H-06-12

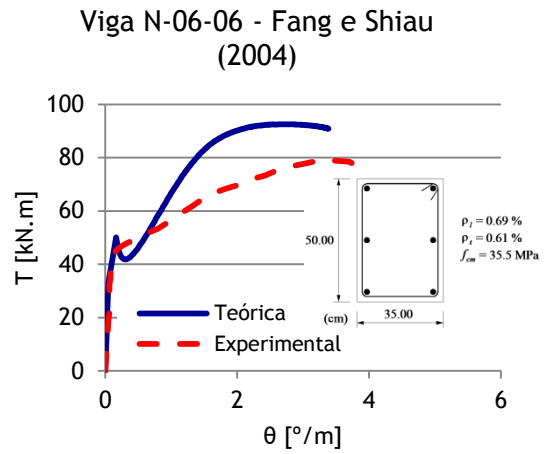


Figura IV.11. Curva $T - \theta$ para a viga N-06-06

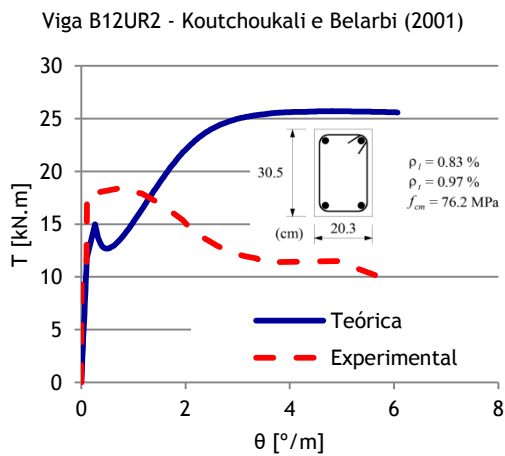


Figura IV.12. Curva $T - \theta$ para a viga B12UR2

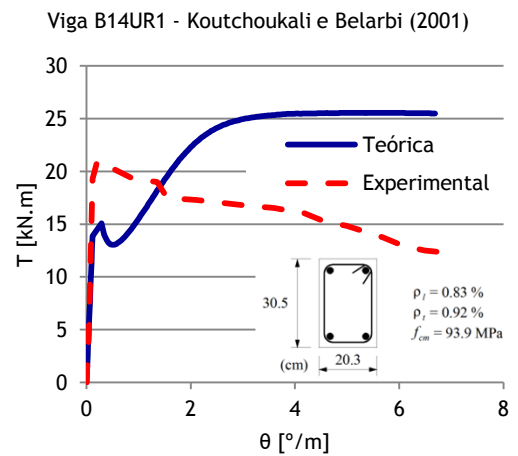


Figura IV.13. Curva $T - \theta$ para a viga B14UR1

