



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Engenharia

# **Proposta de Refinamento da Lei Constitutiva Média do Betão à Tração para o GSVATM**

**Michel Gonçalves Pinto**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

**Engenharia Civil**

(Ciclo de Estudos Integrado)

Orientador: Prof. Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo

Covilhã, junho de 2015



# Agradecimentos

A elaboração deste trabalho só foi possível com o auxílio e contributo, diretamente ou indiretamente, de várias pessoas. A estas pessoas gostaria de manifestar o meu agradecimento e reconhecimento, nomeadamente:

Ao Professor Doutor Luís Filipe Almeida Bernardo, orientador desta dissertação, queria agradecer a sua orientação, colaboração, estímulos e as valiosas contribuições para o trabalho. Quero também agradecer a forma como sempre partilhou os seus saberes em todo o meu percurso académico.

Ao Professor Doutor Jorge Miguel de Almeida Andrade pela sua disponibilidade, paciência e colaboração na implementação das modificações necessárias no *software* Torque.

Aos meus pais e aos meus irmãos, pelo apoio, compreensão, educação e por todos os esforços que passaram para tornar a minha formação possível, a eles deixo o meu profundo agradecimento.

À Stephanie, um agradecimento muito especial pelo seu carinho, amizade e paciência incondicionais que sempre demonstrou, especialmente durante esta dissertação, além de toda a coragem demonstrada por ir em busca do nosso futuro para fora do país sozinha.

Aos meus amigos e especialmente a toda a equipa de estudo pela camaradagem tanto nas épocas de exames como nas horas de convívio.



## Resumo

Ao longo da presente dissertação é feita uma análise do comportamento de vigas de betão armado (de secção retangular cheia) sujeitas à torção. Numa primeira fase, este trabalho tem por objetivo avaliar a proposta de alteração de Nobre em 2014 para a lei constitutiva do betão à tração, originalmente proposta por Belarbi e Hsu em 1994, com vista a simular adequadamente o comportamento das vigas imediatamente após a fissuração. Para tal, é utilizada a Generalização do Modelo de Treliza Espacial com Ângulo Variável (GSVATM) na forma de um aplicativo computacional (Torque) que permite, de uma forma automática, o cálculo do comportamento teórico global de vigas de betão armado sujeitas à torção, designadamente através do traçado da curva de comportamento  $T - \theta$ .

Numa segunda fase, e tendo por base os resultados obtidos na primeira parte, são propostas e avaliadas 3 novas alterações à lei constitutiva do betão à tração, de Belarbi e Hsu em 1994. Tais alterações foram implementadas no aplicativo computacional Torque. Para avaliar as referidas alterações, foram simuladas várias vigas de betão armado com secção retangular cheia existentes na literatura. A partir do estudo comparativo realizado, foi possível observar que um dos três modelos propostos mostrou-se adequado para os objetivos deste trabalho.

## Palavras-chave

Betão Armado, Vigas, Torção, Secção Retangular Cheia, GSVATM, Curva  $T - \theta$ , Relação  $\sigma - \varepsilon$  para o Betão à Tração



# Abstract

Throughout this dissertation, the behavior of reinforced concrete beams (with plain rectangular section) under torsion is analyzed. In the first part, this work aims to evaluate the proposal by Nobre in 2014 to modify the constitutive relationship for the tensile concrete, originally proposed by Belarbi and Hsu in 1994, in order to properly simulate the behavior of the beams immediately after cracking. For this purpose, the Generalized Softened Variable Angle Truss-Model (GSVATM) is used through a computing application (Torque) that allows, in an automatic way, the calculation of the global theoretical behavior of reinforced concrete beams under torsion, namely through the calculation of the  $T - \theta$  behavioral curve.

In the second part, and based on the results obtained in the first part, three new proposals to modify the constitutive law for the tensile concrete from Belarbi and Hsu in 1994 are proposed and evaluated. Those proposals were implemented into the Torque software. To assess these proposals, several reinforced concrete beams under torsion with plain rectangular section existing in the literature were simulated. From the performed comparative study, it was possible to observe that one of the three proposed models was shown to be adequate for the objectives of this work.

# Keywords

Reinforced Concrete, Beams, Torsion, Rectangular Full Section, GSVATM,  $T - \theta$  Curve, Relation  $\sigma - \varepsilon$  for Tensile Concrete.



# Índice

Capítulo 1. Enquadramento do tema .....	1
1.1. Introdução .....	1
1.1.1. Análise histórica .....	1
1.1.2. Tipos de torção.....	4
1.1.3. Exemplos de elementos estruturais sujeitos à torção.....	6
1.1.4. Comportamento de uma viga em betão armado sujeita à torção pura .....	11
1.2. Justificação do tema.....	13
Capítulo 2. Generalização do Modelo de Treliza Espacial com Ângulo Variável.....	25
2.1. Introdução .....	25
2.2. Formulação do GSVATM para vigas de betão armado .....	25
2.2.1. Vigas sujeitas à torção com secção oca .....	25
2.2.2. Flexão dos tirantes e das escoras de betão .....	30
2.2.3. Espessura Efetiva da Parede .....	31
2.2.4. Equações para o cálculo da curva $T - \theta$ .....	32
2.2.4.1 Equações de equilíbrio .....	33
2.2.4.2 Equações de compatibilidade .....	34
2.2.5. Leis constitutivas para os materiais .....	36
2.2.6. Algoritmo de cálculo do GSVATM .....	39
2.3. Observações finais.....	42
Capítulo 3. Proposta de alteração e avaliação da lei constitutiva para o betão à tração .....	43
3.1. Introdução .....	43
3.2. Anterior proposta de alteração da relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração .....	43
3.3. Nova proposta de alteração da relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração .....	46
3.4. Verificação do modelo Bt11 para diversas vigas de referência .....	50
3.5. Considerações finais .....	54
Capítulo 4. Conclusões finais .....	55
4.1. Introdução .....	55
4.2. Conclusões .....	55
4.3. Trabalhos futuros.....	57

Referências .....	59
Anexos .....	61
Anexo I.    Vigas de referência .....	63
Anexo II.   Análise gráfica .....	65

# Lista de Figuras

Figura 1.1 - Vista em corte da viga caixão triangular que suporta a laje da bancada em consola do Royal Festival Hall [19].	2
Figura 1.2 - Corte transversal do tabuleiro da Ponte Waterloo [3].	3
Figura 1.3 - Rotura frágil de uma viga à torção através da formação de uma fenda helicoidal [10].	3
Figura 1.4 - Exemplo de torção de compatibilidade em pórticos [3].	4
Figura 1.5 - Exemplo de torção de equilíbrio em pórticos [3].	5
Figura 1.6 - Torção de St. Venant (a) e Torção de empenamento (b) [25].	5
Figura 1.7 - Corte pormenorizado de uma laje de cobertura em consola com continuidade [18].	7
Figura 1.8 - Laje de cobertura em consola isolada [4].	7
Figura 1.9 - Viga com alinhamento curvilíneo [3].	8
Figura 1.10 - Viga com mudança de direção ao longo do eixo longitudinal [4].	8
Figura 1.11 - Viga de suporte com consolas curtas inferiores [3].	8
Figura 1.12 - Viga de suporte com consola curta superior [3].	9
Figura 1.13 - Viga com apoios indiretos [4].	9
Figura 1.14 - Viga de apoio de uma laje de cobertura inclinada [3].	10
Figura 1.15 - Laje de pavimento com apoios de extremidade e/ou de continuidade [10].	10
Figura 1.16 - Simplificações dos modelos de cálculo para a viga de extremidade e de continuidade [10].	11
Figura 1.17 - Curva típica $T - \theta$ de uma viga de betão armado sujeita à torção pura [23].	11
Figura 1.18 - Curvas $T - \theta$ segundo Hsu e Mo para a viga de referência M2 [15].	14
Figura 1.19 - Curvas $T - \theta$ utilizando o modelo de Bernardo e Lopes [11].	14
Figura 1.20 - Curvas $T - \theta$ segundo o MVATM [7].	16
Figura 1.21 - Curvas $T - \theta$ segundo o SMMT [20].	17
Figura 1.22 - Curvas $T - \theta$ segundo o GSVATM [9].	18
Figura 1.23 - Gráfico de comparação das leis constitutivas para o betão à tração [23].	19
Figura 1.24 - Exemplo da redução do momento torsor após o momento de fissuração da viga [23].	21
Figura 1.25 - Traçado comparativo entre a lei proposta para o betão tracionado Versão 2 e a original de Belarbi e Hsu (1994) [5].	22
Figura 1.26 - Comparação da curva $T - \theta$ para os diferentes valores da varável $n$ , para a viga de referência B4 [23].	22
Figura 1.27 - Visualização do ponto de fissuração efetivo numa curva $T - \theta$ e na relação $\sigma - \varepsilon$ original de Belarbi e Hsu (1994) [5].	23
Figura 2.1 - Viga de secção retangular oca sujeita a torção pura [25].	25

Figura 2.2 - Modelo treliça plana para análise de uma viga de betão armado [9] .....	27
Figura 2.3 - Ilustração do equilíbrio do elemento A [9].....	27
Figura 2.4 - Equilíbrio do corpo livre retangular para $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ e $\alpha + \beta > 90^\circ$ [9]. .....	29
Figura 2.5 - Distribuição das extensões na escora e no tirante de betão [9]. .....	30
Figura 2.6 - Círculo de Mohr para o estado de deformação de uma placa sujeita ao corte [26]. .....	35
Figura 2.7 - Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão tracionado [9]. .....	37
Figura 2.8 - Curva $\sigma - \varepsilon$ para o betão comprimido [9].....	37
Figura 2.9 - Curva $\sigma - \varepsilon$ para as armaduras ordinárias tracionadas [9]. .....	38
Figura 2.10 - Fluxograma do algoritmo de cálculo do GSVATM para o cálculo da curva $T - \theta$ . .....	40
Figura 3.1 - Proposta de alteração da lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994) [5].....	44
Figura 3.2 - Comparação das curvas $T - \theta$ para diferentes valores de $n$ e para a viga de referência B4. ....	45
Figura 3.3 - Primeira alteração implementada na lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994). ....	47
Figura 3.4 - Segunda alteração implementada na lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994). ....	48
Figura 3.5 - Terceira alteração implementada na lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994). ....	48
Figura 3.6 - Comparação das curvas $T - \theta$ entre os modelos propostos e o modelo original para a viga de referência B4. ....	49
Figura 3.7 - Proposta para a recalibração do modelo bt11 correspondente a 1ª alteração do modelo bt4.....	53

# Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Vigas de referência selecionadas.....	51
--	----



# Simbologia

## Alfabeto Latino

$A_c$	- Área da secção efetiva de betão tracionado
$A_o$	- Área limitada pela linha média do fluxo de corte / Área limitada pelo perímetro exterior de uma secção transversal de betão
$A_{sl}$	- Área de armadura longitudinal
$A_{st}$	- Área de um varão de armadura transversal
$C$	- Força de compressão que atua nas escoras de betão
$E_c$	- Módulo de elasticidade do betão
$E_s$	- Módulo de elasticidade do aço
$F_H$	- Força horizontal
$F_V$	- Força vertical
$G$	- Módulo de distorção
$GJ^I$	- Rigidez elástica à torção no Estado I
$GJ^{II}$	- Rigidez elástica à torção no Estado II (pós-fissuração)
$M$	- Momento fletor / Parâmetro de ligação
$M_T$	- Momento torsor
$\bar{N}$	- Força absorvida pela armadura longitudinal
$R$	- Resultante das forças de compressão e tração
$T$	- Força de tração que atua nos tirantes de betão / Momento torsor
$T_{cr}$	- Momento torsor de fissuração
$T_{máx}$	- Momento torsor máximo
$T_u$	- Momento torsor resistente
$T_u^{exp}$	- Valor experimental do momento torsor resistente
$T_u^{th}$	- Valor teórico do momento torsor resistente
$T_y$	- Momento torsor de cedência
$V$	- Esforço transversal
$d_v$	- Distância entre a corda superior e inferior do modelo de treliça plana

$f'_c$	- Resistência à compressão uniaxial do betão
$f_{ck}$	- Valor característico da resistência à compressão do betão
$f_{cm}$	- Resistência média à compressão do betão
$f_{cr}$	- Tensão de fissuração
$f_{ctm}$	- Resistência média à tração do betão
$f_{c1}$	- Tensão de tração
$f_s$	- Tensão de tração nas armaduras ordinárias
$f_{sl}$	- Tensão na armadura longitudinal
$f_{st}$	- Tensão na armadura transversal
$f_{sy}$	- Tensão de cedência na armadura ordinária
$f_{T_{cr}}$	- Tensão de tração no betão correspondente ao momento torsor de fissuração
$f_{T_u}$	- Tensão de tração no betão correspondente ao momento torsor resistente
$k$	- Parâmetro redutor da extensão última
$k_2$	- Parâmetro que traduz a curvatura
$k_1^c$	- Quociente entre a tensão média e o pico de tensão no tirante de betão
$k_2^c$	- Quociente entre a tensão média e o pico de tensão na escora de betão
$l_q$	- Comprimento da porção reta da linha média de fluxo de corte
$n$	- Comprimento o patamar a considerar na Lei nova Versão 3 de Nobre
$p_c$	- Perímetro exterior da secção transversal de betão
$p_o$	- Perímetro da linha média de fluxo de corte
$q$	- Tensão de corte / Fluxo de corte
$s$	- Espaçamento longitudinal da armadura transversal / Desvio padrão
$t$	- Espessura da parede / Espessura da escora de betão / Espessura do tirante de betão
$t_c$	- Espessura da escora diagonal de betão
$t_t$	- Espessura do tirante diagonal de betão
$x$	- Menor dimensão exterior de uma secção transversal retangular
$y$	- Altura arbitrária da viga / Maior dimensão exterior de uma secção transversal retangular

## Alfabeto Grego

$\alpha$	- Ângulo de inclinação de uma fissura / Ângulo de inclinação das escoras / Parâmetro de decadência exponencial para o <i>tension stiffening</i>
$\beta$	- Ângulo entre a resultante $R$ e a força de compressão $C$
$\gamma$	- Ângulo entre a resultante $R$ e o eixo longitudinal da viga / Distorção
$\varepsilon$	- Extensão
$\varepsilon_{cr}$	- Extensão de fissuração
$\varepsilon_{cu}$	- Valor convencional da extensão última para o betão à compressão
$\varepsilon_{c1}$	- Extensão de tração
$\varepsilon_o$	- Extensão correspondente ao pico de tensão $f'_c$
$\varepsilon_s$	- Extensão de tração nas armaduras ordinárias
$\varepsilon_{sl}$	- Extensão na armadura longitudinal
$\varepsilon_{st}$	- Extensão na armadura transversal
$\varepsilon_{su}$	- Valor convencional da extensão última para a armadura
$\varepsilon_{T_{cr}}$	- Extensão correspondente a $f_{T_{cr}}$
$\varepsilon_{T_u}$	- Extensão correspondente a $f_{T_u}$
$\varepsilon_1^c$	- Extensão média de tração
$\varepsilon_{1s}^c$	- Extensão máxima de tração
$\varepsilon_2^c$	- Extensão média de compressão
$\varepsilon_{2s}^c$	- Extensão máxima de compressão
$\eta$	- Fator de redução
$\theta$	- Rotação transversal da secção / Rotação por unidade de comprimento
$\theta_{cr}^I$	- Rotação de torção correspondente a $T_{cr}$ no Estado I
$\theta_{cr}^{II}$	- Rotação de torção correspondente a $T_{cr}$ no Estado II
$\theta_{m\acute{a}x}$	- Rotação de torção correspondente a $T_{m\acute{a}x}$
$\theta_u$	- Rotação de torção correspondente a $T_u$
$\theta_y$	- Rotação de torção correspondente a $T_y$
$\lambda$	- Coeficiente de redução para ter em conta o <i>softening effect</i>
$\xi$	- Fator de redução
$\rho$	- Taxa de armadura

$\rho_l$	- Taxa de armadura longitudinal
$\rho_t$	- Taxa de armadura transversal
$\rho_{tot}$	- Taxa de armadura total
$\sigma$	- Tensão
$\sigma_1^c$	- Tensão de tração no tirante de betão
$\sigma_2^c$	- Tensão de compressão na escora de betão
$\phi$	- Diâmetro dos varões de armadura longitudinal
$\varphi$	- Curvatura do tirante de betão
$\psi$	- Curvatura da escora de betão

# Lista de Acrónimos

- ACI - American Concrete Institute
- EC2 - Eurocode 2
- GSVATM - Generalized Softened Variable Angle Truss-Model
- MC - Model Code
- MVATM - Modified Variable Angle Truss-Model
- SMM - Softened Membrane Model
- SMMT - Softened Membrane Model of Torsion
- VATM - Variable Angle Truss-Model



# Capítulo 1. Enquadramento do tema

## 1.1. Introdução

### 1.1.1. Análise histórica

A temática da torção nem sempre foi considerada um assunto importante para efeitos de dimensionamento de estruturas em betão armado. Antes da década de 60 do século passado a comunidade técnica assumia que este esforço era absorvido através de uma redistribuição interna de esforços e pelos fatores de segurança utilizados no dimensionamento para garantir alguma reserva de resistência. Foi então na década de 60 que se começou a perceber a importância desta ação nos elementos de betão armado, apercebendo-se assim da escassa informação existente sobre o tema.

No ano de 1904, princípios do século XX, Mörsh, professor na Universidade de Stuttgart, liderou os primeiros ensaios em vigas de betão armado cilíndricas (maciças e ocas) aplicando torção para avaliar o comportamento destes elementos estruturais, já em 1921 Mörsch empenhou-se em evoluir o seu estudo [14].

Contudo, o dimensionamento de estruturas contabilizando a torção continuou a ser menosprezado até 1958. Foi então que apareceram pela primeira vez indicações sobre o dimensionamento à torção na DIN-1045 (documento normativo alemão), estas indicações foram baseadas na tese de doutoramento de Ernest Bausch, que sugeriu um modelo de cálculo que supunha a existência de diagonais comprimidas a 45° denominado por Analogia da Treliça Espacial. Esta via foi então seguida pela União Soviética que, em 1959, apresentou também um modelo para análise de torção em vigas de betão armado, modelo esse que foi formulado por Lessig. O modelo proposto por este autor apoiava-se em equações de equilíbrio que contabilizavam os modos de rotura de uma viga sujeita à torção [14]. No ano de 1960 surge o interesse da comunidade internacional pela torção em vigas de betão armado. O American Concrete Institute (ACI) financiou um programa de ensaios experimentais e trabalhos teóricos, liderados por Thomas Hsu, que conduziu em 1968 à primeira publicação científica do ACI sobre torção, “*Torsion of Structural Concrete SP-18*” [2]. Em 1971, o ACI publica o primeiro documento normativo o código ACI 318-71, que compreendia cláusulas específicas sobre o dimensionamento de vigas de betão armado à torção [1]. Durante a década de 70 surgiram em vários países diversas normas que incluíram o dimensionamento à torção, das quais se destaca o código europeu MC 78 [14], que resultou de uma investigação do Comité Européen du Béton (CEB) durante 5 anos esclarecendo os procedimentos para o dimensionamento de vigas de betão armado à torção.

Este interesse repentino pelo dimensionamento à torção aparece pela necessidade de aprimorar as metodologias de cálculo para poder responder às exigências do desenvolvimento

arquitetónico após a 2ª guerra mundial. Este desenvolvimento originou estruturas arrojadas e irregulares, para as quais passou a ser necessário a consideração dos efeitos da torção. Outro aspeto a notar foi a sucessiva redução dos fatores de segurança por parte dos documentos normativos, fatores estes que permitiam “cobrir” os efeitos da torção sem cálculos específicos.

Deve ser referido que, mesmo antes do surgimento de documentos normativos que incorporavam disposições para a torção, já tinham surgido alguns casos reais em que tinha sido considerado fundamental a consideração dos efeitos torsionais como é o exemplo das “estacas-parafuso” (*screw piles*), cuja cravação era executada aplicando simultaneamente uma carga vertical e uma ação rotativa, resultando portanto em esforço axial de compressão e torção. Essas estacas já possuíam uma armadura transversal helicoidal pré-determinada com base em alguma bibliografia especializada disponível na altura. Além disso eram também realizados ensaios experimentais para avaliar a capacidade resistente destes elementos estruturais [24].

Surgiram também dois projetos, apontados por Armstrong em 1956 [10], onde o esforço torsional foi considerado no dimensionamento, são eles o Royal Festival Hall e a Ponte de Waterloo, ambos construídos em Londres.

O Royal Festival Hall foi esboçado pelo arquiteto Hugh Casson com a ajuda de jovens projetistas, mas foram Measor e New que em 1951 [10] descreveram o seu dimensionamento, dando especial atenção à “caixa de torção” triangular que suporta a laje em consola da bancada superior. Esta viga tem como função suportar elevados momentos torsões sendo por isso o esforço condicionante. Esta construção foi marcante pela sua estrutura totalmente modernista (Figura 1.1).

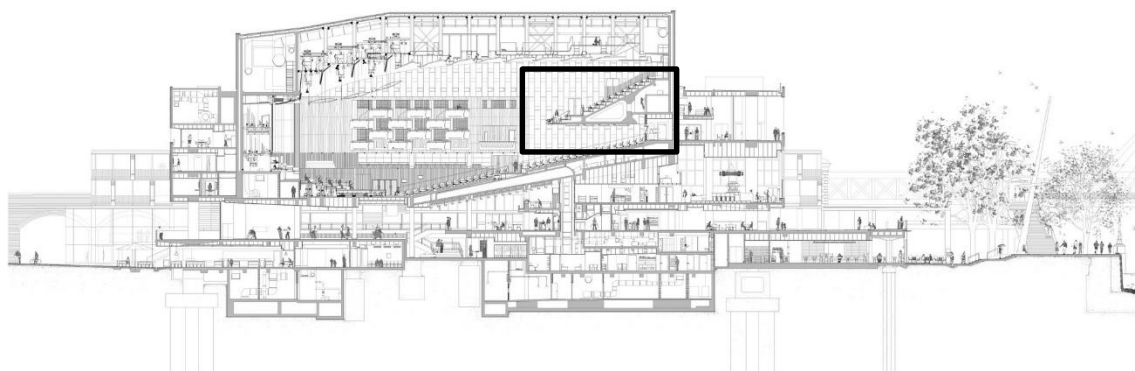


Figura 1.1 - Vista em corte da viga caixão triangular que suporta a laje da bancada em consola do Royal Festival Hall [19].

Projetada por Cuerel em 1948, encontra-se construída sobre o rio Tâmbisa a ponte de Waterloo, composta por um tabuleiro com duas vigas em caixão, cada viga com três células. Estas vigas estão transversalmente localizadas nas extremidades do tabuleiro, resultando momentos torsões elevados devido às cargas excêntricas (Figura 1.2). O dimensionamento das referidas vigas foi auxiliado tendo por base o recurso a ensaios experimentais de vigas modelo que permitiram avaliar a sua capacidade resistente [10].

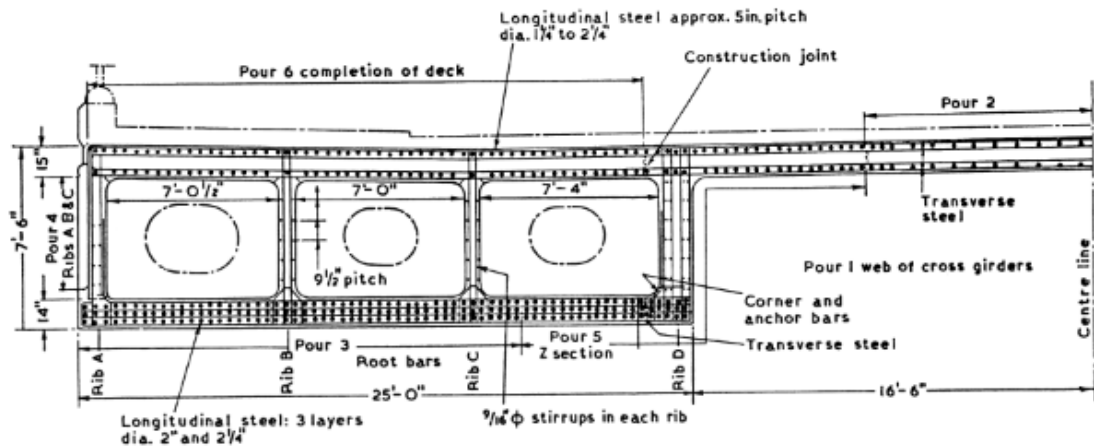


Figura 1.2 - Corte transversal do tabuleiro da Ponte Waterloo [3].

Nos casos anteriormente mencionados, a torção foi ponderada antes da construção, mas já tinha sido referido anteriormente, não era comum esta abordagem e, como consequência, antes de existirem documentos normativos que incluíssem o dimensionamento à torção, houve situações que alertaram para a necessidade do estudo dos efeitos torsionais. Refere-se o caso de rotura com fissuração helicoidal visível numa viga em 1964 (Figura 1.3) num parque de estacionamento na Flórida, Estados Unidos da América, resultante da insuficiente capacidade de resistência à torção por falta de armadura específica [16]. Outro caso também muito referido nas bibliografias é o da fissuração de vigas de apoio de varandas pesadas [16].



Figura 1.3 - Rotura frágil de uma viga à torção através da formação de uma fenda helicoidal [10].

Com o passar dos anos, foram sendo aperfeiçoados os procedimentos de cálculo para o dimensionamento de estruturas de betão armado para que estas se adaptassem à evolução da arquitetura. Como já referido anteriormente tal permitiu reduzir progressivamente os fatores de segurança, traduzindo-se também numa redução da reserva de resistência prevista para os esforços de torção. Em Portugal, foi em 1996 que entrou em vigor o Regulamento de Estruturas

de Betão Armado com o novo método de dimensionamento implementado que incluía artigos para o dimensionamento à torção.

Esta evolução dos métodos de dimensionamento foi paralela com o avanço dos programas de análise computacional, o que facilitou o estudo estrutural e concebeu aos engenheiros uma visão geral do comportamento das estruturas e mais realista. Além disso, o cálculo dos efeitos torsionais nos diversos elementos estruturais passou a ser facilitado.

Mesmo assim, após décadas de desenvolvimento, a torção continua a ser um tema atual. Com o desenvolvimento das soluções estruturais e dos materiais (por exemplo, betões leves, betões de alta resistência, betões com fibras) vai surgindo a necessidade de aprimorar os atuais modelos de cálculo para a torção.

### 1.1.2. Tipos de torção

Neste subcapítulo serão descritos os tipos de torção dependentes da sua origem e da forma como os seus efeitos se distribuem pela secção transversal do elemento resistente.

No caso de torção de compatibilidade, como o próprio nome indica, o esforço que se gera nos elementos de viga provém da compatibilidade de deformação, resultante das ligações monolíticas muito correntes em pórticos, formando assim um efeito de segunda ordem. Este tipo de torção pode ser exemplificado pela Figura 1.4 onde se pode observar que o esforço induzido é gerado por deformação de um elemento secundário, podendo ser desprezado na fase de dimensionamento pois este esforço verificado não compromete o equilíbrio da estrutura. De facto, pode ocorrer fissuração na zona onde se instala o esforço de torção mas isso não implica o colapso da estrutura devido à redistribuição interna de esforços decorrente. No entanto, para o controlo da fissuração devem ser verificadas as quantidades mínimas de e devem ser adotadas disposições construtivas adequadas. A torção exemplificada na Figura 1.4 pode ser desprezada pelo facto da rigidez de torção da viga, na passagem ao Estado II (estado fissurado) se reduzir drasticamente, o que diminui os esforços torsionais, equivalendo a considerar a viga sem esforços de torção [25].

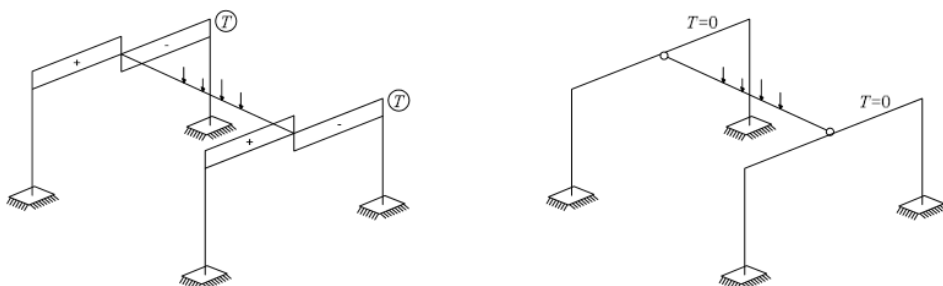


Figura 1.4 - Exemplo de torção de compatibilidade em pórticos [3].

Quando se refere a torção de equilíbrio, quer dizer que o esforço de torção surge necessariamente por condições de equilíbrio. Tal equilíbrio passa a depender da rigidez de

torção da viga de apoio, tal como se apresenta na Figura 1.5, o que obriga à adoção de armadura específica de torção, ou seja, ao dimensionamento da mesma. Neste caso não é possível realizar o dimensionamento das vigas sem considerar o esforço de torção instalado, sob pena da estrutura se tornar instável conduzindo a um mecanismo parcial ou global.

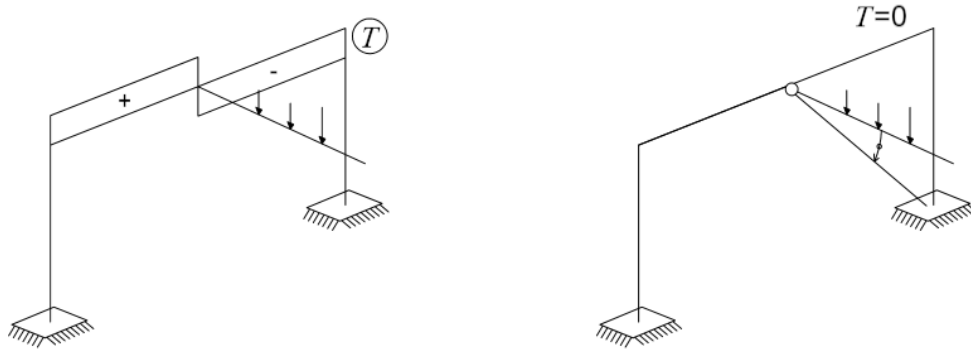


Figura 1.5 - Exemplo de torção de equilíbrio em pórticos [3].

Os esforços de torção em elementos estruturais podem ser absorvidos de várias formas, dependendo da geometria da sua secção transversal. Tal facto origina mais uma classificação para a torção. A absorção do momento torsor instalado ocorre através de um fluxo circulatório de tensões tangenciais quando as secções são fechadas cheias ou ocas, tal como ilustrado na Figura 1.6 (a). Neste caso trata-se de Torção de St. Venant ou Torção Circulatória. Já para as secções abertas, como é o exemplo da Figura 1.6 (b), surgem momentos transversais adicionais, necessários para a resistência ao momento torsor. Este tipo de torção designa-se por Torção com Empenamento.

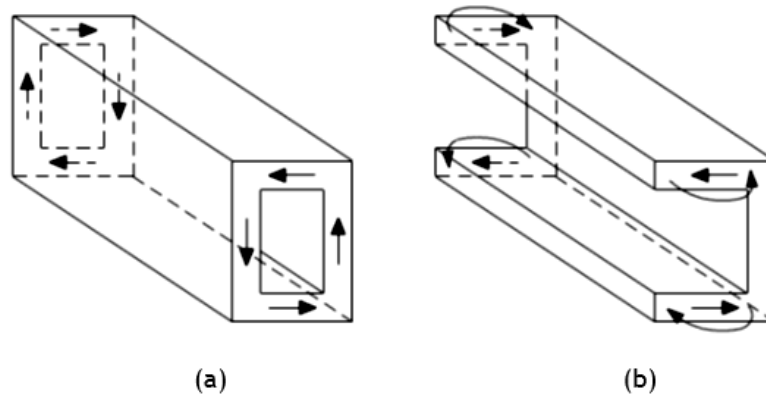


Figura 1.6 - Torção de St. Venant (a) e Torção de empenamento (b) [25].

Quando as secções são do tipo circular e outras com determinadas propriedades ou configurações particulares, por exemplo simetria, as mesmas estão isentas de empenamento. Além destas secções, todas as restantes não se encontram livres do empenamento, contudo para as secções fechadas cheias ou ocas esse empenamento é mínimo quando não existe restrição ao mesmo [25]. O empenamento é mais prejudicial para secções abertas compostas

por, pelo menos, três paredes finas, por exemplo secções em “U” ou “I”, porque estas produzem esforços suplementares importantes que condicionam o dimensionamento à torção. O mesmo não acontece no caso de secções compostas por duas paredes finas, por exemplo secções “L”. Nestas secções a resistência da viga não é afetada pelo empenamento, isto porque apenas se geram pequenos acréscimos de tensões, podendo estes ser desprezados.

Quando numa secção ocorrem alongamentos longitudinais desiguais das fibras, então diz-se que existe empenamento, normalmente esses alongamentos são variáveis devido à distribuição heterogénea do momento torsor e a restrições que impossibilitam as deformações longitudinais. Nas zonas onde se localizam as restrições surgem tensões longitudinais máximas de tração e compressão, acompanhadas pela redução das tensões tangenciais. As restrições provocam no empenamento efeitos desprezáveis uma vez que as tensões longitudinais reduzem significativamente com a passagem ao Estado II, devido ao “efeito de libertação” que as fissuras proporcionam e também pelo facto que geralmente as secções de betão armado são retangulares cheias ou ocas.

### 1.1.3. Exemplos de elementos estruturais sujeitos à torção

Nesta secção serão apresentados alguns casos de estruturas correntes onde o esforço de torção pode ser principal ou secundário. Caso o esforço seja principal é necessária a existência de armadura própria capaz de resistir a tal esforço, mas se o esforço for de origem secundária, as armaduras mínimas longitudinais e transversais dispostas adequadamente serão suficientes para controlar a possível fissuração resultante do facto de não ter sido realizado um dimensionamento explícito à torção.

Na Figura 1.7 apresenta-se o exemplo de uma laje de cobertura em consola assente numa viga, esta por sua vez está ligada a dois pilares. Estas zonas de ligação são mais rígidas impossibilitando uma grande deformação da viga mas ao longo do vão da viga, onde as deformações são mais acentuadas, instalam-se esforços de torção. Contudo como a laje em consola apresenta continuidade, em geral os esforços de torção induzidos na viga serão reduzidos. Este exemplo representa um caso de torção de compatibilidade.

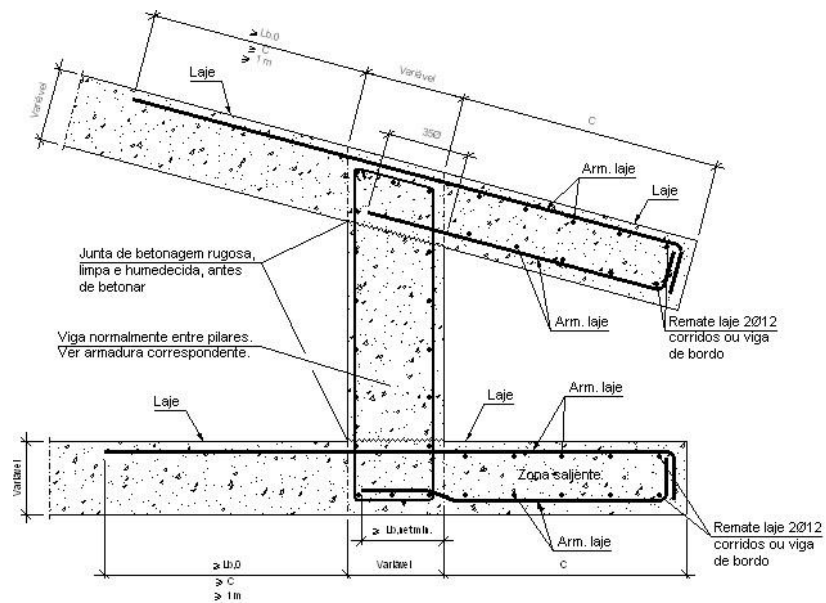


Figura 1.7 - Corte pormenorizado de uma laje de cobertura em consola com continuidade [18].

Contrariamente ao exemplo anterior, este exemplo trata-se de torção de equilíbrio. Na Figura 1.8 já não existe uma continuidade da laje em consola. Tal traduz-se em esforços de torção mais importantes, mesmo que sejam apenas resultantes do peso próprio da laje [25].

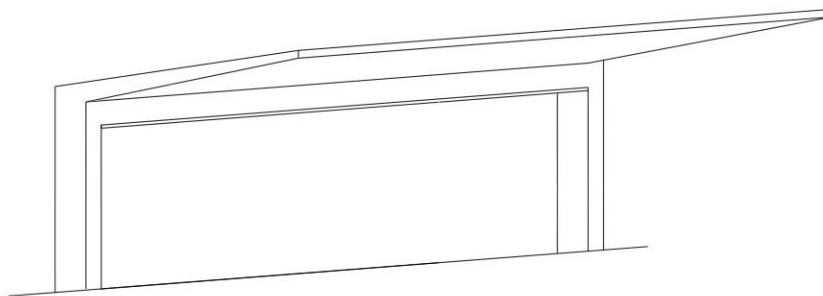


Figura 1.8 - Laje de cobertura em consola isolada [4].

Outra situação onde a torção é importante é nas vigas que se desenvolvem em trajetórias curvilíneas. Neste caso, mesmo se o carregamento for aplicado sobre o eixo da viga, ocorrem esforços de torção resultantes da excentricidade da carga em relação aos apoios. Tal situação ocorre nas vigas de bordadura exemplificadas na Figura 1.9 e corresponde a um caso de torção de equilíbrio.



Figura 1.9 - Viga com alinhamento curvilíneo [3].

Se o eixo longitudinal reto de uma viga mudar de direção ao longo do vão, como ilustrado na Figura 1.10, surge torção em virtude da excentricidade das cargas em relação aos apoios à semelhança do caso ilustrado na Figura 1.9, também no presente caso é necessário proceder ao dimensionamento da viga contabilizando o esforço de torção, tratando-se assim de torção por equilíbrio.

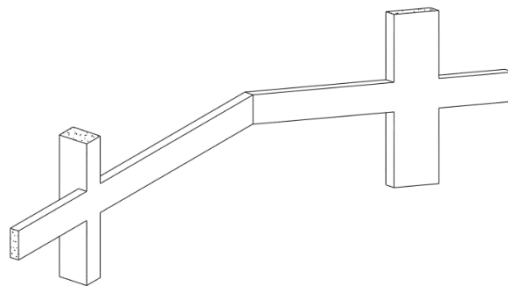


Figura 1.10 - Viga com mudança de direção ao longo do eixo longitudinal [4].

Outro caso em que pode aparecer torção de equilíbrio é nas vigas pré-fabricadas com um banzo inferior para apoio de vigas ou lajes. Tais vigas ficam sujeitas a forças excêntricas provenientes em resultado do apoio dos outros elementos estruturais. As forças  $F_1$  e  $F_2$ , ilustradas na Figura 1.11, são transferidas para a zona superior da viga por intermédio de armadura transversal para que posteriormente sejam distribuídas normalmente na secção da viga. A torção é gerada na circunstância de desigualdade das forças  $F_1$  e  $F_2$ .

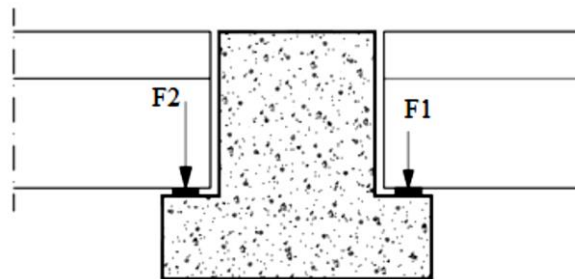


Figura 1.11 - Viga de suporte com consolas curtas inferiores [3].

Outra situação idêntica à anterior e com torção de equilíbrio, é a de uma viga com banzo superior para suporte de uma parede de alvenaria de um piso superior, esquematizada na Figura 1.12, em que a carga é transmitida excêntrica ao eixo da viga traduzindo-se por isso em momento torsor.

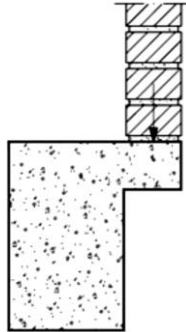


Figura 1.12 - Viga de suporte com consola curta superior [3].

O caso em que uma viga se apoia noutras vigas, e não em pilares ou paredes, denomina-se por apoio indireto, como é o caso de estruturas em “H” ilustrada na Figura 1.13. Nesta situação a torção é gerada nas vigas que servem de apoio em virtude da ligação rígida existente entre estas e a viga apoiada. Quando esta última, em virtude da ação das cargas, sofre uma deformação, a compatibilidade de deformações entre vigas impõe momentos torsores nas vigas de apoio e, sendo assim, este caso é de torção de compatibilidade.

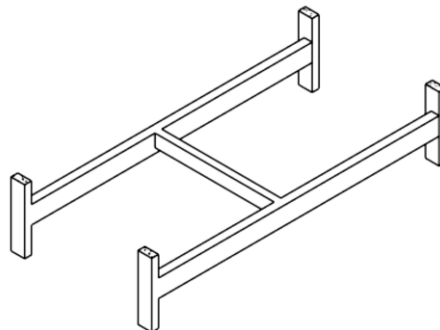


Figura 1.13 - Viga com apoios indiretos [4].

Uma laje de cobertura inclinada ligada rigidamente a uma viga de bordadura transmite esforços transversos, axiais e momentos distribuídos no topo da viga. A excentricidade dos esforços axiais provoca momentos torsores na viga da Figura 1.14 e devido a essa excentricidade estamos perante um exemplo de torção de equilíbrio.

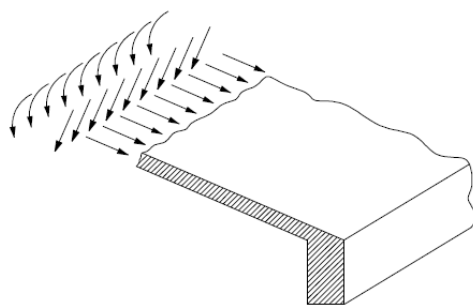


Figura 1.14 - Viga de apoio de uma laje de cobertura inclinada [3].

Para o caso da situação corrente de lajes de pavimento, apresentam-se os exemplos ilustrados na Figura 1.15, onde a laje se encontra sujeita a um carregamento uniforme. Considerem-se as duas zonas de apoio da laje ilustradas, apoio de extremidade e o apoio de continuidade. Na primeira situação de apoio de extremidade aparece um momento fletor negativo provocado pela restrição que a viga induz na laje contrariando a sua rotação nessa zona. Esta restrição é imposta pela rigidez de torção da viga e pela rigidez do pórtico. Em virtude dessa restrição, surgem momentos torsores na viga de apoio. No caso da viga de apoio intermédio, a diferença de momentos fletores negativos “ $\Delta m$ ” sobre o apoio entre o tramo esquerdo e direito da laje, resultante de condições de assimetria das lajes à esquerda e direita da viga (assimetria de rigidez e/ou de carregamento) e também da rigidez de torção da viga de apoio é transferida para a viga na forma de momentos torsores.

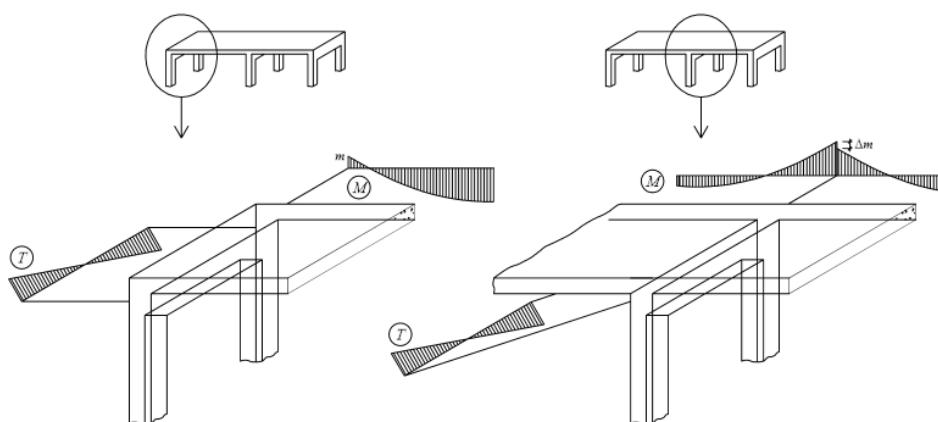


Figura 1.15 - Laje de pavimento com apoios de extremidade e/ou de continuidade [10].

Contudo, para o tipo de torção ilustrado na Figura 1.15, não é requerido um dimensionamento específico ao mesmo pois é considerado secundário (torção de compatibilidade). Desta forma, para efeitos de modelos de cálculo podem ser assumidas as simplificações ilustradas na Figura 1.16, onde as molas de rotação representam a rigidez de torção das vigas de apoio.

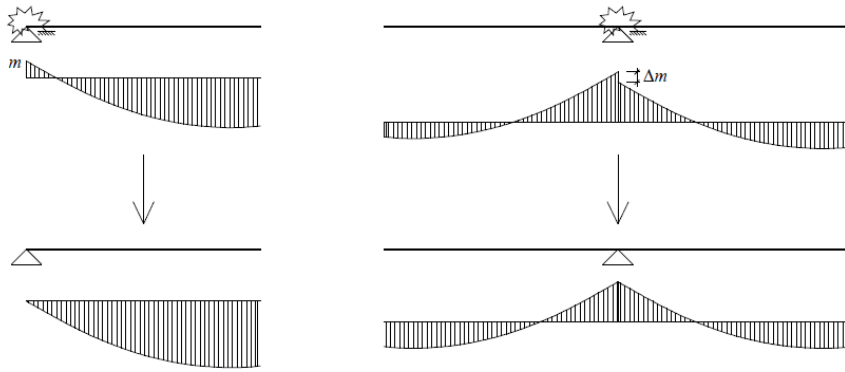


Figura 1.16 - Simplificações dos modelos de cálculo para a viga de extremidade e de continuidade [10].

#### 1.1.4. Comportamento de uma viga em betão armado sujeita à torção pura

Ao longo dos anos, através de numerosos ensaios experimentais, tem-se desenvolvido um bom conhecimento sobre o comportamento das vigas de betão armado sujeitas ao esforço de torção. Tais ensaios permitem, em geral, desenhar uma curva típica que representa a relação entre o momento torsor ( $T$ ) e a rotação transversal da secção ( $\theta$ ), ao longo de todo o intervalo de carregamento, até ao momento de rotura. Para vigas de referência com taxas de armadura de torção correntes, a Figura 1.17 desenha a curva típica  $T - \theta$ . A curva ilustrada na Figura 1.17 pode ser dividida em três zonas, conforme a zona comportamental da viga, designadamente nas zonas 1, 2 e 3, sendo a zona 2 ainda subdividida nas subzonas 2a e 2b.

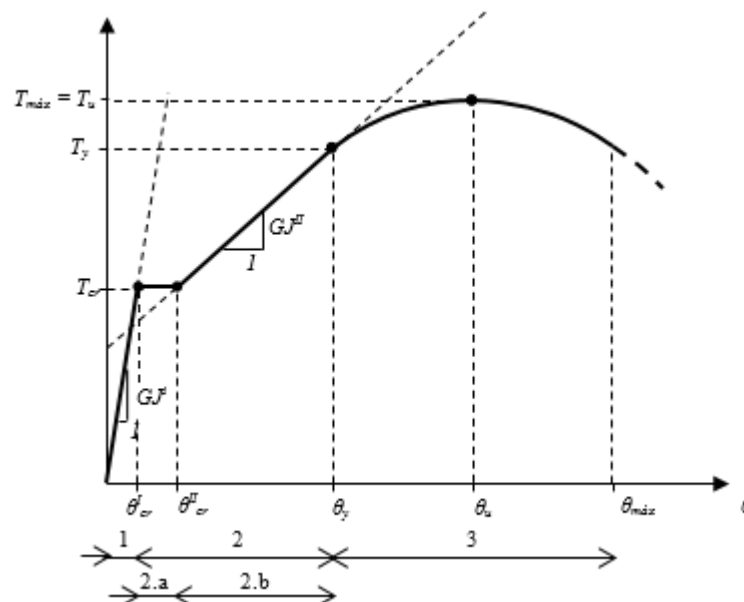


Figura 1.17 - Curva típica  $T - \theta$  de uma viga de betão armado sujeita à torção pura [23].

A zona 1 inclui o intervalo desde o início do ensaio até se atingir o momento torsor de fissuração ( $T_{cr}$ ) e representa a viga no Estado I (estado não fissurado). Esta fase pode ser

representada com uma reta de declive constante que pode ser calculada pela Teoria de St. Venant. Este declive reflete a rigidez elástica à torção ( $GJ'$ ) no Estado I. Na realidade esta reta constitui uma simplificação pois verifica-se, através de ensaios experimentais, que existe uma ligeira redução da rigidez nos instantes antecedentes ao momento torsor de fissuração efetivo. Esta redução resulta do aparecimento de microfissuras que se desenvolvem no betão. Contudo, a simplificação admitida é bastante válida porque as rotações existentes nesta fase são muito pequenas, podendo por isso a rigidez de torção ser calculada assumindo um comportamento elástico-linear.

Na fase comportamental correspondente à zona 1, a principal contribuição da armadura de torção é aumentar o momento torsor de fissuração.

Ao atingir o momento torsor de fissuração a curva  $T - \theta$  sofre um aumento de rotação notável, sendo este comportamento representado por uma reta de declive nulo. Este comportamento caracteriza o início da fissuração, ou seja, a chegada à zona 2 que representa o Estado II (estado fissurado). Esta zona decompõe-se em duas subzonas, a zona 2.a que ilustra o aumento repentino da rotação, anteriormente referido e a zona 2.b ilustrada na curva por uma reta com declive, que representa a rigidez de torção pós-fissuração ( $GJ''$ ).

Diversos autores defendem que o momento torsor constante ( $T_{cr}$ ) representado pelo aumento repentino da rotação na secção da viga, correspondente à zona 2.a, resulta de uma deformação angular necessária para que a viga se adapte às novas condições de equilíbrio após a fissuração. No entanto, outros autores não concordam com esta explicação e contestam-na notando que ao analisar uma curva  $T - \theta$  de uma viga com secção oca, esta zona 2.a não é visível experimentalmente. Esta última observação pode ser justificada, quando comparado o comportamento com uma viga de secção cheia. Esta última possui um núcleo de betão para onde podem redistribuir as tensões tangenciais após a fissuração. É sabido que processos internos de redistribuição de tensões implicam um incremento do estado de deformação. Desta forma, a redistribuição de tensões tangenciais resultante da fissuração pode o aumento brusco da rotação observado para as vigas com secção cheia mantendo constante o momento torsor. Este fenómeno não é perceptível nas secções vazadas de parede fina, pois em geral a espessura da parede, muito pequena quando comparada com as dimensões gerais da secção, não é suficiente para que a redistribuição de tensões seja relevante e, portanto, a passagem da zona 1 para a 2.b é quase instantânea, sendo a zona 2.a inexistente ou pouco visível. A zona 2.b caracteriza um comportamento elástico-linear da viga em estado fissurado. Nesta fase, o comportamento pode ser analisado adequadamente pelo modelo de treliça espacial, assumindo um ângulo de 45° constante para as escoras e um comportamento elástico-linear para os materiais [25].

O início da zona 3 começa assim que a curva  $T - \theta$  deixa de evidenciar um comportamento linear podendo tal acontecer de duas formas diferentes. O caso mais frequente ocorre com a cedência de pelo menos uma das armaduras de torção, longitudinal ou transversal. O outro caso é quando o betão comprimido nas escoras é sujeito a tensões elevadas, deixando

de haver uma resposta linear do betão devido à ocorrência de microfissuras. Este segundo caso ocorre geralmente associado a elevadas taxas de armadura de torção. O comportamento na zona 3, incluindo ambas as situações são caracterizadas anteriormente, podendo ser utilizado um modelo de comportamento não linear, por exemplo o modelo de treliça espacial com ângulo variável (VATM).

## 1.2. Justificação do tema

O modelo da Analogia da Treliça Espacial é capaz de simular o comportamento de vigas sujeitas à torção ao longo de um historial de carregamento. Este modelo tem-se desenvolvido essencialmente a partir do fim da década de 60, sendo atualmente um dos modelos mais utilizados e que serve de base para diversos documentos normativos. Apesar de se verificar ser um modelo que simula adequadamente o comportamento último das vigas sujeitas à torção, ou seja para elevados níveis de carregamento, o modelo deixa de ser preciso para graus de baixo carregamento, pois assume uma viga totalmente fissurada desde o início da aplicação de carga.

Na Figura 1.18 encontram-se ilustradas curvas  $T - \theta$  para uma viga de referência M2. Nesta figura a curva teórica foi calculada por Hsu e Mo [15] através de um algoritmo de cálculo estabelecido para o Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (VATM). A mesma figura compara a curva teórica com o resultado experimental da mesma viga apresentado pela American Concrete Institute. Esta viga M2 possui uma secção retangular cheia em betão armado de resistência normal com as dimensões ilustradas na Figura 1.18, bem como taxas correntes de armadura de torção e uma resistência normal do betão à compressão.

Ao analisar as curvas  $T - \theta$  da Figura 1.18, observa-se que a curva experimental se aproxima da curva teórica para elevados níveis de carregamento, ou seja, para a fase última do momento torsor. Tal precisão, já não se verifica para baixos níveis de carregamento. Neste caso a curva teórica encontra-se substancialmente abaixo da experimental. Esta observação pode ser explicada pelo facto do VATM que a viga se encontra extensivamente fissurada desde o início do ensaio. Tal só é verdade para valores elevados do momento torsor. Na fase inicial do ensaio, a viga não se encontra extensivamente fissurada, ou mesmo não fissurada, como assumido pelo modelo. Valida-se assim o VATM apenas para elevados níveis de carregamento.

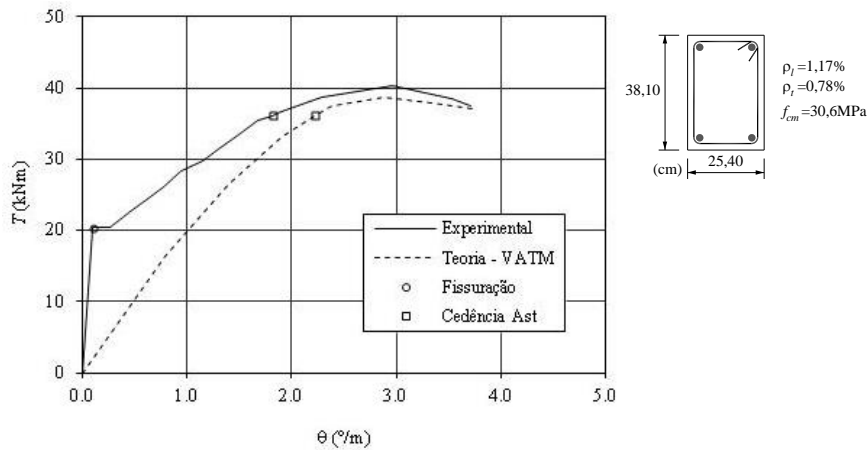


Figura 1.18 - Curvas  $T - \theta$  segundo Hsu e Mo para a viga de referência M2 [15].

Em 2008, Bernardo e Lopes [11], numa primeira tentativa para superar o problema anteriormente mencionado, desenvolveram um modelo alternativo capaz de traduzir o comportamento geral de vigas de betão armado sujeitas à torção pura, incluindo para baixos níveis de carregamento. Este modelo reúne diversas teorias, de entre as quais o VATM para a fase última, de modo a prever as diferentes fases de comportamento da viga. O referido modelo inclui também a possibilidade de analisar vigas de betão armado de alta resistência através da incorporação de uma adequada lei constitutiva para o betão.

Na Figura 1.19 representa-se uma comparação entre curvas  $T - \theta$  experimentais e teóricas, estas últimas obtidas através do modelo de Bernardo e Lopes, para diferentes vigas de betão armado de referência (incluindo de alta resistência) sujeitas à torção pura.

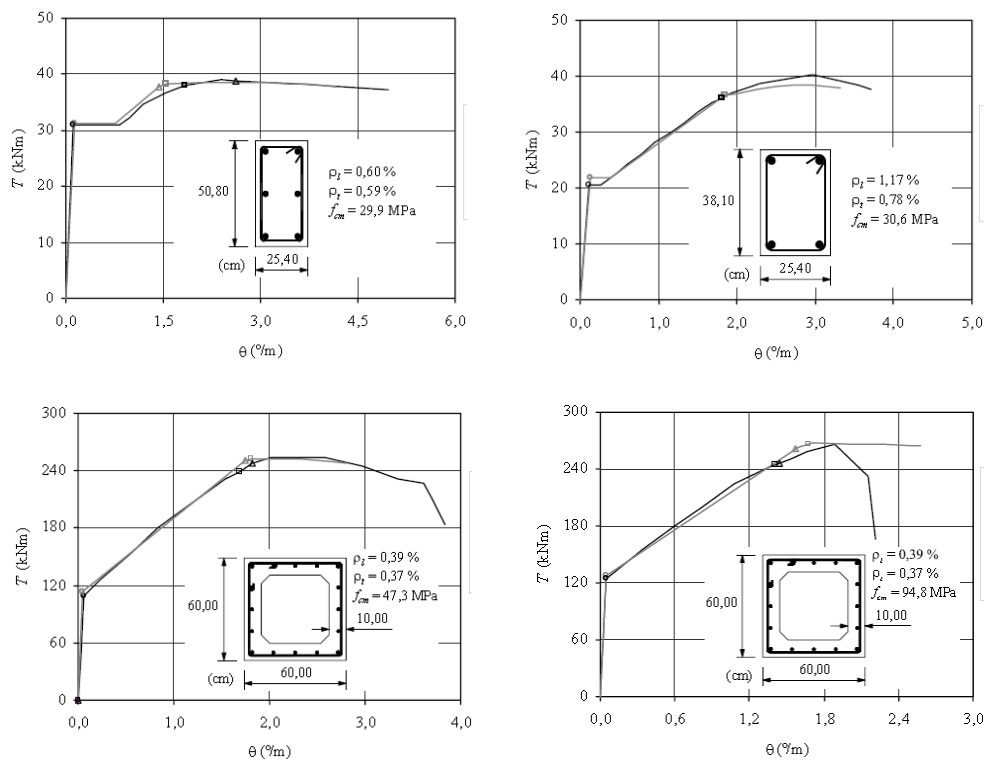


Figura 1.19 - Curvas  $T - \theta$  utilizando o modelo de Bernardo e Lopes [11].

Depois de examinar as curvas  $T - \theta$  exemplificadas na Figura 1.19, conclui-se que existe uma muito boa aproximação entre as curvas experimentais e teóricas propostas por Bernardo e Lopes, o que certifica a viabilidade do modelo proposto. Contudo, este modelo não é teoricamente satisfatório, facto reconhecido pelos próprios autores, devido à necessidade do modelo incorporar critérios semi-empíricos para estabelecer a transição entre as fases comportamentais e também pelo facto do modelo não fornecer informações detalhadas sobre o estado interno de tensões e extensões, designadamente para baixos níveis de carregamento (aspeto importante para os estados limites de serviço).

Para ultrapassar os aspetos menos positivos do modelo de Bernardo e Lopes, em 2012 foi desenvolvido por Bernardo et al. [7], um modelo alternativo denominado Modelo da Trelíça com Ângulo Variável Modificado (MVATM). Este modelo baseia-se no modelo original de Hsu e Mo, o VATM [15], incorporando modificações para a fase de baixos níveis de carregamento (relacionadas com a participação do betão à tração nesta fase), assim como uma atualização das relações constitutivas do betão à compressão e do aço à tração, contabilizando o Softening effect e o Stiffening effect. O objetivo deste modelo era obter o comportamento global de vigas à torção através de uma teoria apenas, a fim de suprimir os critérios de transição entre as fases de comportamento que o modelo de Bernardo e Lopes incorporava.

Com base neste novo modelo proposto, Bernardo et al. obtiveram resultados próximos aos obtidos por Bernardo e Lopes, com a vantagem de apenas utilizarem uma única teoria para as três fases de comportamentais da viga. Na Figura 1.20 encontra-se exemplificada a comparação das curvas teóricas resultantes do MVATM com os resultados experimentais, partir das quais se confirmam os bons resultados obtidos pelo MVATM.

Refere-se no entanto que, no MVATM permanece o problema relacionado com a determinação rigorosa do estado interno de tensões e deformações da viga na fase pós-fissuração, bem como o de ter sido ainda necessário incorporar um critério semi-empírico de ajustamento da curva  $T - \theta$  na referida fase comportamental para corrigir as rotações. Além disso, o MVATM não prevê por si só o momento torsor de fissuração, sendo tal parâmetro obtido “externamente” tendo por base a aplicação da teoria de Bredt.

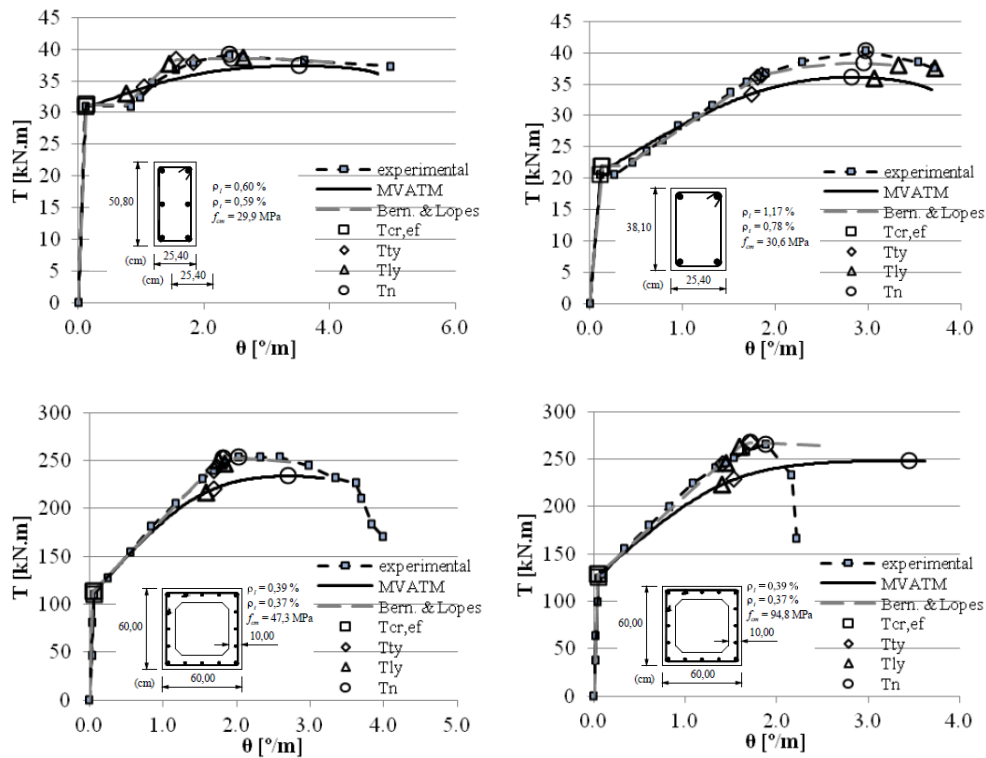


Figura 1.20 - Curvas  $T - \theta$  segundo o MVATM [7].

Em 2009, foi proposto por Hsu e Jeng [20] outro modelo teórico designado *Softened Membrane Model of Torsion* (SMMT). Este modelo surge também do desenvolvimento de um outro pré-existente, o *Softened Membrane Model* (SMM) que representa um modelo de membrana concebido para placas de betão armado sujeitas ao corte e, por isso, não pode ser considerado como uma variante do modelo de treliça espacial. O SMMT constitui uma adaptação do SMM para vigas sujeitas à torção recorrendo, à teoria de Bredt e ao caminho do fluxo de tensões de corte previsto por esta teoria para equilibrar o momento torsor externo aplicado na secção. O SMMT constitui um modelo que simula o comportamento global da viga à torção. Este modelo integra também na sua formulação uma relação constitutiva para o betão à tração de forma a contabilizar a contribuição do betão à tração na direção perpendicular à escora, principalmente para baixos níveis de carregamento.

Na Figura 1.21 encontra-se ilustrado uma comparação das curvas  $T - \theta$  experimentais (em linha contínua) com as teóricas resultantes do SMMT (em linha tracejada) para várias vigas de referência.

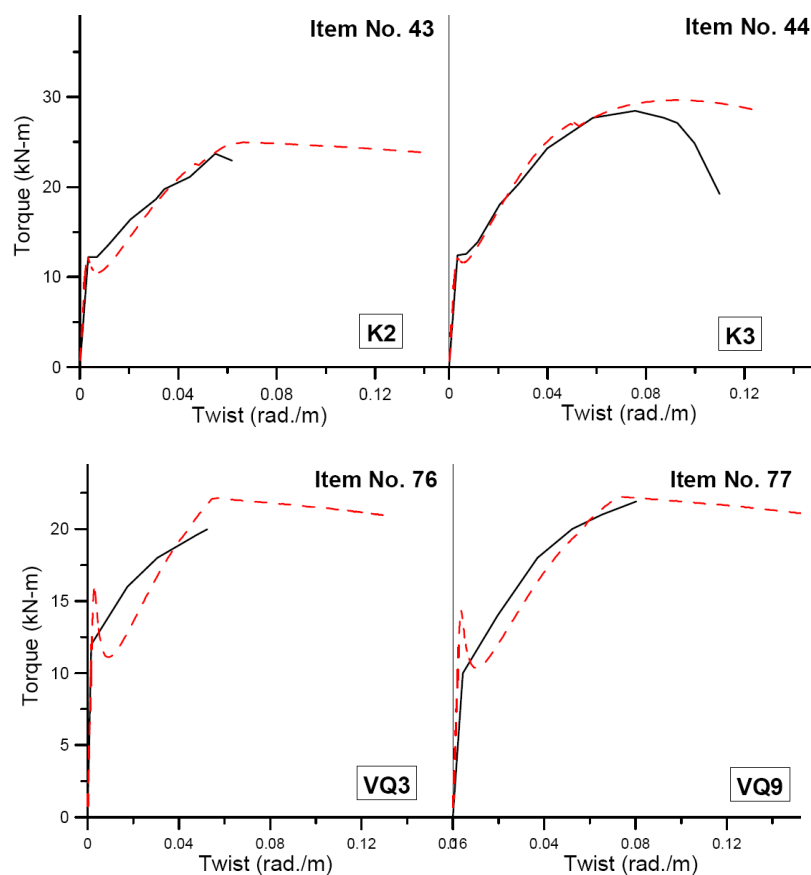


Figura 1.21 - Curvas  $T - \theta$  segundo o SMMT [20].

Os resultados obtidos pelo SMMT são em geral muito satisfatórios, contudo a curva teórica apresenta uma redução acentuada do momento torsor na curva  $T - \theta$  no ponto de passagem do estado não fissurado para o fissurado, situação esta que não se verifica nos ensaios experimentais. Este aspeto não permite uma previsão rigorosa da rigidez pós-fissuração.

Quando comparado com o VATM e o MVATM, a formulação do SMMT possui um carácter mais complexo e com critérios de convergência mais difíceis de implementar computacionalmente.

Uma das principais inovações do SMMT é a consideração direta na formulação da contribuição do betão à tração na direção perpendicular às escoras, através da implementação de uma relação constitutiva apropriada para o betão à tração. Tendo por base esta ideia, Bernardo et al. [9] modificaram o VATM original propondo um novo modelo que considera um tirante na direção perpendicular às escoras. Tal modelo foi designado de *Generalized Softened Variable Angle Truss-Model (GSVATM)* e, à semelhança do SMMT, é também capaz de prever o comportamento global de vigas à torção para todo o intervalo de carregamento. Além disso, constitui uma generalização do VATM uma vez que a formulação do GSVATM se reduz à formulação do VATM quando é desprezada a contribuição do betão à tração na direção perpendicular das escoras.

A Figura 1.22 apresenta alguns resultados de curvas  $T - \theta$  obtidas pelo GSVATM, para algumas vigas de referência de Hsu.

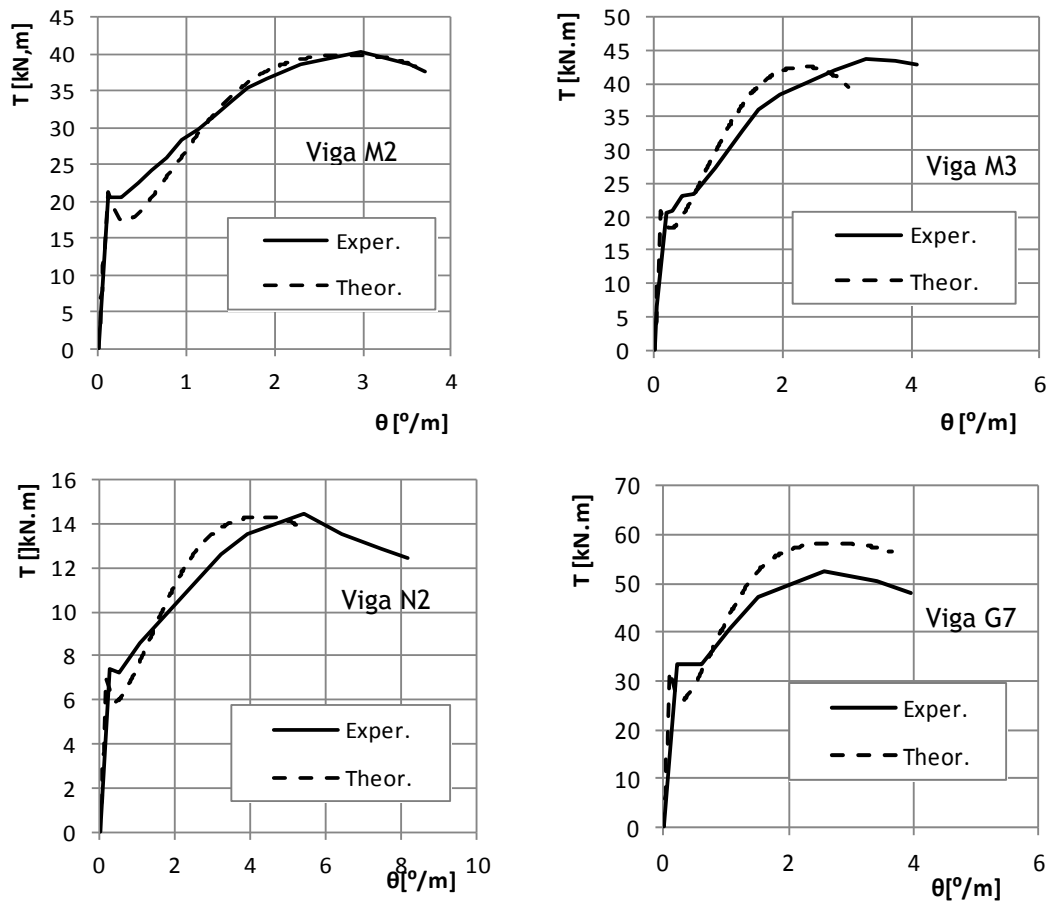


Figura 1.22 - Curvas  $T - \theta$  segundo o GSVATM [9].

Os resultados obtidos pelo modelo GSVATM são bastante satisfatórios e muito semelhantes aos obtidos pelo SMMT. Contudo, à semelhança do observado para o SMMT, torna-se a verificar uma diminuição acentuada do momento torsor logo após ocorrer a fissuração do elemento. Bernardo et al. desconfiaram que este comportamento reflete a “forma” da curva correspondente à lei constitutiva do betão à tração utilizada no modelo, curva essa que apresenta grande diminuição da participação do betão à tração depois do pico de tensão ser atingido.

Assim, em modos de conclusão, o GSVATM permite obter resultados idênticos ao SMMT contudo, o GSVATM possui uma formulação mais simples que o SMMT, mais fácil de implementar computacionalmente e permite também uma “leitura” mais simples do comportamento de uma viga de betão armado sujeita à torção. Tal como no SMMT, também através do GSVATM é possível obter o estado interno de tensão e extensão da viga em todas as fases comportamentais.

Como já foi referido anteriormente, o GSVATM incorpora uma lei constitutiva para o betão à tração, essa lei foi a proposta por Belarbi e Hsu [5]. Na literatura científica aparecem

propostas de outros autores com diferentes formulações para a lei constitutiva do betão à tração. A escolha da lei é deveras importante, uma vez que a resposta do modelo teórico dependerá da lei incorporada, designadamente para baixos níveis de carregamento onde a participação do betão à tração é importante.

A dependência do VATM em relação às leis constitutivas dos materiais tinha já sido investigada por Bernardo et al. [8]. Os referidos autores verificaram que a resposta última de vigas em betão armado à torção, analisadas com recurso ao VATM, é a mais afetada pela lei constitutiva considerada para o betão à compressão e para as armaduras à tração. É importante referir que os resultados desta investigação foram importantes para os autores do GSVATM selecionarem as leis constitutivas de referência para o betão à compressão e para as armaduras à tração. Para o betão à compressão foi definida a lei de Belarbi e Hsu (1991) [6] e a lei de Hsu e Zhang (1998) [27], já para as armaduras ordinárias foi selecionada a lei de Belarbi e Hsu (1994) [5]. A lei para o betão à tração não foi alvo de estudo uma vez que o VATM não considera a participação do betão à tração.

Posto isto, acredita-se que a resposta do GSVATM e do SMMT, para baixos carregamentos, seja extremamente dependente da lei constitutiva escolhida para o betão à tração.

Em 2014 Nobre [23], desenvolveu um estudo comparativo entre as várias leis constitutivas  $\sigma - \varepsilon$  (tensão - extensão) para o betão à tração existentes na literatura, que podiam ser utilizadas em modelos comportamentais baseados na analogia da treliça espacial para vigas à torção. O objetivo era, de entre as leis estudadas, selecionar a que permitia obter uma melhor previsão do comportamento teórico de vigas em betão armado sujeitas à torção, particularmente na zona de transição do estado não fissurado para o fissurado. Para tal foram utilizados os resultados experimentais de vigas de referência disponíveis na literatura. As leis encontradas e comparadas por Nobre [23] em 2014 são as que se apresentam na Figura 1.23 para um betão de classe de resistência normal:

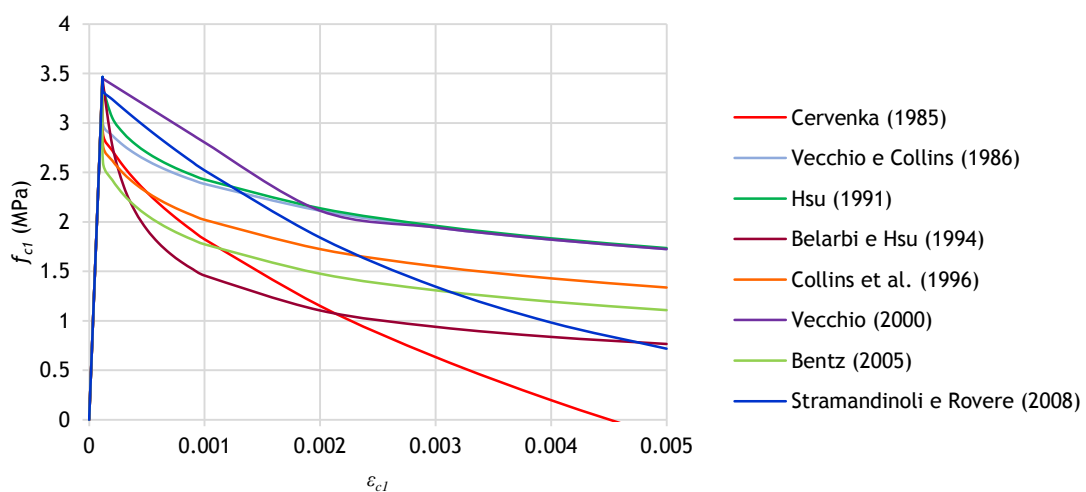


Figura 1.23 - Gráfico de comparação das leis constitutivas para o betão à tração [23].

A escolha da lei mais adequada exigiu um processo de implementação de todas as 8 leis ilustradas na Figura 1.23 no GSVATM, através de um *software* designado “Torque”, seguida da avaliação da curva  $T - \theta$  das diversas vigas de referência na zona de passagem do estado não fissurado para o fissurado.

Na análise anteriormente referida, foi apenas realizada uma análise comparativa entre os valores experimentais e teóricos para o momento torsor de fissuração ( $T_{cr}$ ) e respetiva rotação de torção ( $\theta_{cr}$ ).

A partir das análises comparativas realizadas, Nobre [23] conclui que o modelo que melhor aproxima o ponto de fissuração na curva  $T - \theta$  é o modelo que incorpora a lei constitutiva para o betão à tração proposta por Belarbi e Hsu (1994) [5], traduzida pela expressão matemática abaixo e cujo gráfico já foi representado na Figura 1.23.

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0,4} & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (1.1)$$

Onde  $f_{c1}$  é a tensão de tração,  $f_{cr}$  é a tensão de fissuração,  $E_c$  é o módulo de elasticidade do betão,  $\varepsilon_{c1}$  é a extensão de tração e  $\varepsilon_{cr}$  é a extensão de fissuração.

Deve referir-se que a lei constitutiva para o betão à tração traduzida pela Eq. (1.1) tinha sido a escolhida tanto por Jeng e Hsu [20] para o SMMT como por Bernardo et al [9] para o GSVATM, embora sem justificação especial. Por isso mesmo, o problema anteriormente referido acerca da redução acentuada do momento torsor na curva  $T - \theta$ , no ponto de passagem do estado não fissurado para o fissurado, continuou a verificar-se.

Conforme explicado por Bernardo et al [9], as relações constitutivas para o betão à tração propostas na literatura resultaram do ensaio de prismas de betão armado sujeitos à tração, onde se observa que as fissuras são tendencialmente ortogonais às armaduras longitudinais. Nas peças com disposições correntes de armaduras sujeitas ao corte, as fissuras são inclinadas em relação às armaduras, pelo que o comportamento do betão à tração entre fendas será certamente diferente do observado nos prismas à tração. Este aspeto, segundo Bernardo et al [9] poderá explicar o comportamento das curvas  $T - \theta$  imediatamente após a fissuração.

Não existem relações constitutivas para o betão à tração obtidas diretamente a partir do ensaio de peças ao corte.

Desta forma, Nobre [23] tentou avaliar a possibilidade de calibrar a lei proposta por Belarbi e Hsu (1994) [5] com vista a corrigir a situação anteriormente referida.

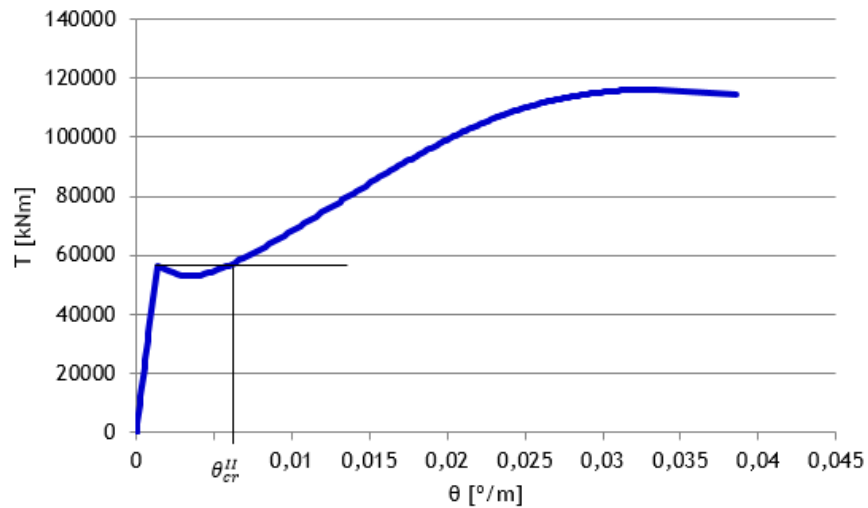


Figura 1.24 - Exemplo da redução do momento torsor após o momento de fissuração da viga [23].

Para tal, Nobre [23], tentou alterar empiricamente a forma da relação  $\sigma - \varepsilon$  do betão à tração, introduzindo um patamar horizontal no pico de tensão conforme ilustrado na Figura 1.25. O objetivo era incrementar a participação do betão à tração imediatamente após a fissuração da viga à torção por forma a “repor” o momento torsor na curva  $T - \theta$ . Assim, Nobre [23] propôs a equação 1.2 para substituir a anterior equação 1.1 correspondente à lei original de Belarbi e Hsu (1994).

$$f_{cl} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{cl} & se \ \varepsilon_{cl} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} & se \ \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{cl} \leq n \cdot \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cl} - (n \cdot \varepsilon_{cr} - \varepsilon_{cr})} \right)^{0,4} & se \ \varepsilon_{cl} > n \cdot \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (1.2)$$

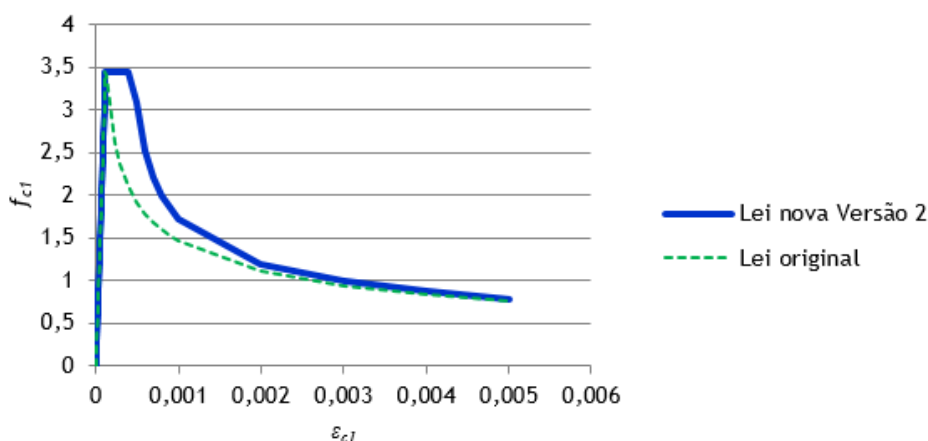


Figura 1.25 - Traçado comparativo entre a lei proposta para o betão tracionado Versão 2 e a original de Belarbi e Hsu (1994) [5]

Na Equação (1.2), o parâmetro  $n$  representa o comprimento do patamar a ser considerado.

Após a implementação da lei na forma da Equação (1.2) no aplicativo Torque, para vários valores atribuídos ao parâmetro  $n$ , Nobre [23] obteve as várias curvas  $T-\theta$  ilustradas na Figura 1.26 para uma viga de referência. A Figura 1.26 mostra que a introdução do patamar horizontal na lei constitutiva do betão à tração, na forma ilustrada na figura 1.25, altera de facto a curva  $T-\theta$  após a fissuração do betão, como era desejado. No entanto, a Figura 1.26 mostra que também o momento torsor de fissuração assim como o momento torsor último eram alterados, situação esta que não era pretendida. Desta forma, não pode ser considerada válida a proposta de correção da lei constitutiva para o betão à tração na forma anteriormente descrita.

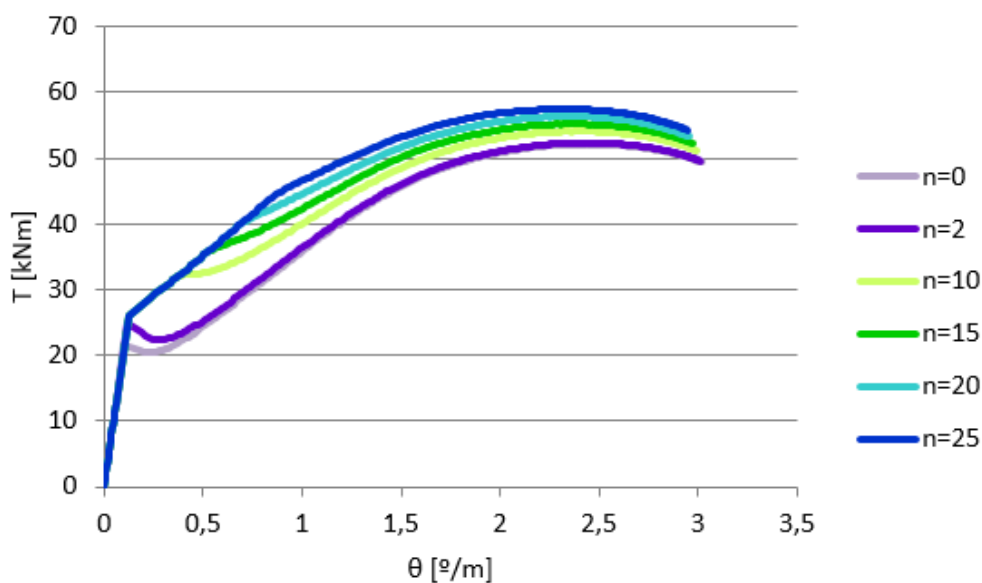


Figura 1.26 - Comparação da curva  $T-\theta$  para os diferentes valores da varável  $n$ , para a viga de referência B4 [23].

Após uma análise detalhada do procedimento de cálculo do GSVATM, que assume diagramas médios de tensões de tração ao longo da espessura do tirante, Nobre [23] observou que o ponto efetivo de fissuração na curva  $T - \theta$  não corresponde ao pico de tensão na lei constitutiva do betão à tração, encontrando-se antes deslocado para a direita e, portanto, localizado no ramo descendente da curva. Tal encontra-se ilustrado na Figura 1.27. Desta forma, Nobre [23] concluiu que o patamar horizontal anteriormente proposto para corrigir a lei constitutiva deve ser “deslocado” para a direita, tendo início no ponto efetivo de fissuração, conforme ilustrado na Figura 1.28, onde  $f_{T_{cr}}$  é a tensão de tração no betão correspondente ao momento torsor de fissuração,  $\varepsilon_{T_{cr}}$  é a extensão correspondente a  $f_{T_{cr}}$  e  $\varepsilon_{T_u}$  é a extensão correspondente ao momento torsor último ( $f_{T_u}$ ).

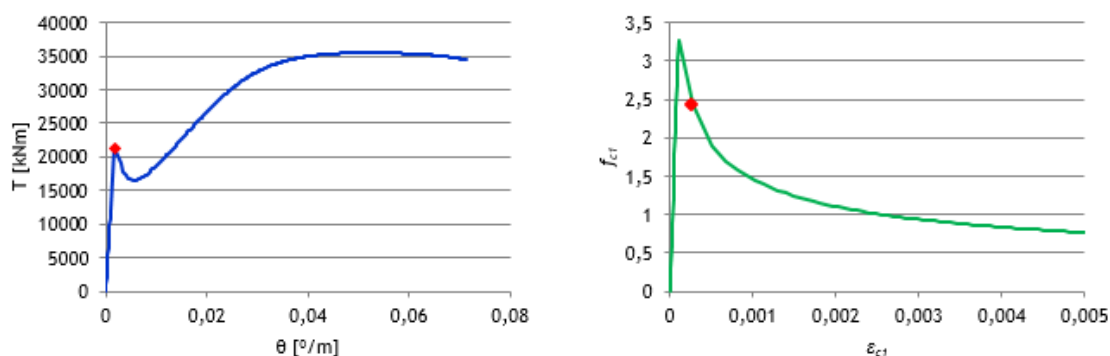


Figura 1.27 - Visualização do ponto de fissuração efetivo numa curva  $T - \theta$  e na relação  $\sigma - \varepsilon$  original de Belarbi e Hsu (1994) [5].

A nova lei constitutiva corrigida de acordo com o referido anteriormente será expressa mais adiante no capítulo 3, onde serão posteriormente apresentados os resultados da sua implementação no aplicativo computacional Torque.

O presente trabalho pretende continuar o trabalho anteriormente desenvolvido por Nobre [23] com vista a propor e validar uma correção empírica para a lei constitutiva do betão à tração de Belarbi e Hsu (1994) [5] de modo a corrigir a previsão do GSVATM para a curva  $T - \theta$  imediatamente após a fissuração. Tal trabalho será baseado numa extensa análise comparativa com os resultados experimentais de numerosas vigas de referência encontradas na literatura, tendo também em conta algumas variáveis importantes para o comportamento das vigas à torção, designadamente: a taxa de armadura de torção, a resistência do betão e a geometria da secção transversal. Serão consideradas apenas vigas de betão armado com secção retangular sujeitas à torção pura.

Este trabalho torna-se importante para que o GSVATM possa prever adequadamente o comportamento em serviço (baixos níveis de carregamento) de vigas de betão armado sujeitas à torção, designadamente a rigidez pós-fissuração bem como as tensões nos materiais. Tais parâmetros são essenciais para as verificações no âmbito do Estados Limites de Serviço.



# Capítulo 2. Generalização do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável

## 2.1. Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar a Generalização do Modelo de Treliça Espacial com Ângulo Variável (GSVATM), modelo este que será utilizado para o presente trabalho. Como já foi referido anteriormente (subsecção 1.2), este modelo é resultante de uma generalização do modelo original VATM, desenvolvido para prever as três fases comportamentais da curva  $T - \theta$  para vigas de betão armado sujeitas à torção. Em relação ao VATM original o GSVATM desenvolvido por Bernardo et al. [9], distingue-se pela introdução na sua formulação de uma lei constitutiva tensão-extensão para o betão à tração. Esta particularidade é simulada pela introdução de um “tirante” perpendicular à escora de betão.

Ao longo do presente capítulo é apresentada de forma sucinta a formulação e o procedimento de cálculo que o modelo GSVATM de Bernardo et al. [9] incorpora para o cálculo da previsão das curvas  $T - \theta$  para vigas de betão armado sujeitas à torção, para secções retangulares cheias ou ocas.

## 2.2. Formulação do GSVATM para vigas de betão armado

### 2.2.1. Vigas sujeitas à torção com secção oca

À semelhança do modelo VATM, também no GSVATM foi considerada uma viga de secção retangular oca como se ilustra na Figura 2.1. Esta viga é armada longitudinalmente apenas com um varão em cada canto e na transversalmente com cintas uniformemente espaçadas. No modelo desta viga é também assumida a existência de escoras diagonais com ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo longitudinal da mesma. A premissa do modelo de treliça espacial com ângulo variável (VATM) considera as forças presentes nas armaduras e nas escoras.

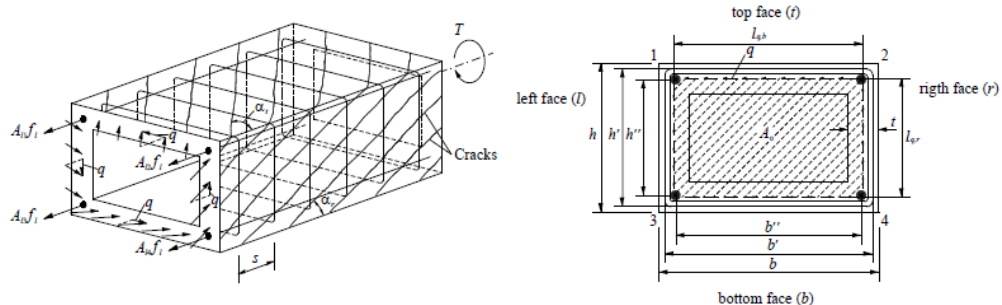


Figura 2.1 - Viga de secção retangular oca sujeita a torção pura [25].

Na Figura 2.1 pode notar-se a presença de dois tipos de forças, as forças nas escoras de betão inclinadas com ângulo  $\alpha$  relativamente ao eixo longitudinal e as forças nas armaduras longitudinais. A combinação resultante destas duas forças traduz o fluxo de corte  $q$  no plano da secção transversal da Figura 2.1. Tal como referido no início deste capítulo, os “tirantes” perpendiculares às escoras, que o GSVATM incorpora, também contribuem com uma força suplementar para o equilíbrio do modelo. A resultante entre esta força dos tirantes e a das escoras é depois combinada com a força das armaduras longitudinais para originar o fluxo de corte  $q$ .

Analisando a viga apresentada na Figura 2.1, pode-se comparar a mesma a um tubo de parede fina. Sendo assim, esta pode ser caracterizada pela Teoria de Bredt. Nesta teoria o fluxo de corte é fornecido por:

$$q = \frac{M_T}{2A_0} \quad (2.1)$$

Onde  $M_T$  corresponde ao momento torsor aplicado e  $A_0$  é a área interior limitada pela linha média de fluxo de corte. É assumido que esta linha média coincide com a linha média da espessura  $t$  das paredes da secção.

A força total existente nas barras da armadura longitudinal da secção é obtida pela equação que se segue:

$$A_{sl}f_{sl} \begin{cases} \frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma & \text{para } \alpha + \beta \leq 90^\circ \\ -\frac{M_T p_0}{2A_0} \cot \gamma & \text{para } \alpha + \beta > 90^\circ \end{cases} \quad (2.2)$$

Nesta equação  $A_{sl}$  representa a área total de armadura longitudinal existente na secção e  $f_{sl}$  a respetiva tensão,  $p_0$  é o perímetro da linha média do fluxo de corte e por fim  $\gamma$  corresponde ao ângulo que a resultante ( $R$ ), entre as forças de tração ( $T$ ) e compressão ( $C$ ), faz com o eixo longitudinal do elemento viga, tal como se encontra ilustrado na Figura 2.3.

Já a força distribuída pela armadura transversal da parede obtém-se da equação seguinte:

$$A_{st}f_{st} = \frac{M_T s}{2A_0} \tan \gamma' \quad (2.3)$$

Onde  $A_{st}$  corresponde à área de uma das barras que compõe a armadura transversal e  $f_{st}$  a tensão transversal na respetiva armadura,  $s$  representa o espaçamento longitudinal da

armadura transversal e  $\gamma'$  corresponde ao ângulo que a resultante ( $R$ ) faz com o eixo longitudinal do elemento viga como se ilustra na Figura 2.4. Este ângulo  $\gamma'$  é obtido considerando um modelo de treliça espacial plana de uma viga de betão armado simplesmente apoiada com secção de alma fina com espessura  $t$ , estando sobre ela aplicada a meio vão uma carga concentrada que origina esforço transverso e momento fletor como exemplificado na Figura 2.2. Nessa viga considera-se um elemento parcial designado por A, este elemento de viga sofre a ação de um esforço transverso constante  $V$  e de um momento fletor variável que corresponde a  $M$  na face esquerda e  $M + Vd_v \cot \alpha$  na face direita como se representa na Figura 2.3. Nesta figura é também ilustrado o equilíbrio do elemento em causa. Assim, para saber o ângulo que a resultante  $R$  faz com o eixo longitudinal da viga, é necessário efetuar um corte horizontal no elemento A, a uma altura  $y$  arbitrada e medida a partir da base resultando no corpo livre retangular ilustrado na Figura 2.4.

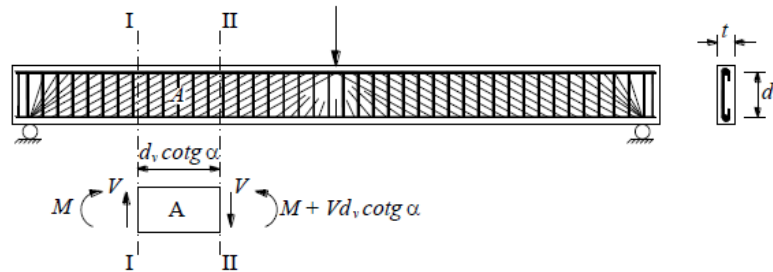


Figura 2.2 - Modelo treliça plana para análise de uma viga de betão armado [9]

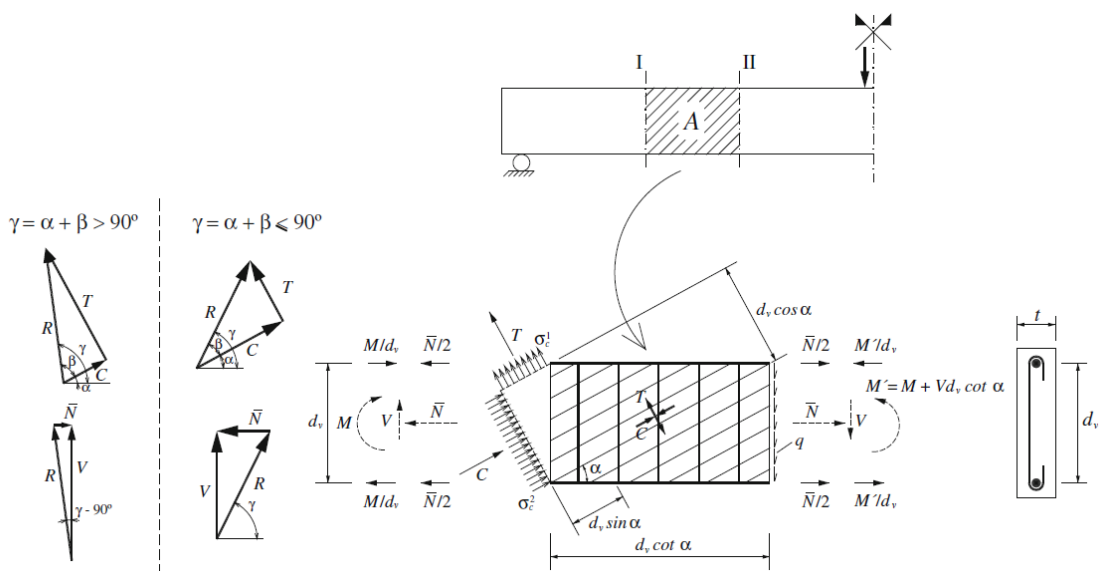


Figura 2.3 - Ilustração do equilíbrio do elemento A [9].

A tensão nos tirantes diagonais de betão  $\sigma_1^c$ , obtém-se a partir da força de tração  $T$  que atua numa secção do tirante com uma área de  $t$  por  $d_v \sin \alpha$ .

$$\sigma_1^c = \frac{T}{td_v \sin \alpha} \quad (2.4)$$

Já a tensão aplicada, nas escoras de betão  $\sigma_2^c$ , resulta da força de compressão  $C$  que atua na secção da escora com uma área transversal de  $t$  por  $d_v \cos \alpha$ .

$$\sigma_2^c = \frac{C}{td_v \cos \alpha} \quad (2.5)$$

Onde  $\alpha$  é o ângulo entre a força de compressão  $C$  e o eixo longitudinal da viga,  $d_v$  corresponde à distância que separa as armaduras longitudinais concentradas na corda superior e inferior da viga como representado na Figura 2.3.

A resultante  $R$  das forças de compressão  $C$  e de tração  $T$  encontra-se esquematizada também na Figura 2.3, no triângulo de forças superior, e obtém-se da seguinte forma:

$$R = \sqrt{C^2 + T^2} \quad (2.6)$$

Onde as forças  $R$ ,  $C$  e  $T$ , resultam das seguintes equações:

$$R = \frac{M_T d_v}{2A_0 \sin \gamma} \quad (2.7)$$

$$C = R \cos \beta = \frac{M_T d_v \cos \beta}{2A_0 \sin \gamma} \quad (2.8)$$

$$T = R \sin \beta = \frac{M_T d_v \sin \beta}{2A_0 \sin \gamma} \quad (2.9)$$

Sendo que  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos que a resultante  $R$  faz com a força de compressão  $C$  e o eixo longitudinal da viga, respetivamente.

Tais ângulos são determinados do seguinte modo:

$$\beta = \arctan\left(\frac{T}{C}\right) \quad (2.10)$$

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (2.11)$$

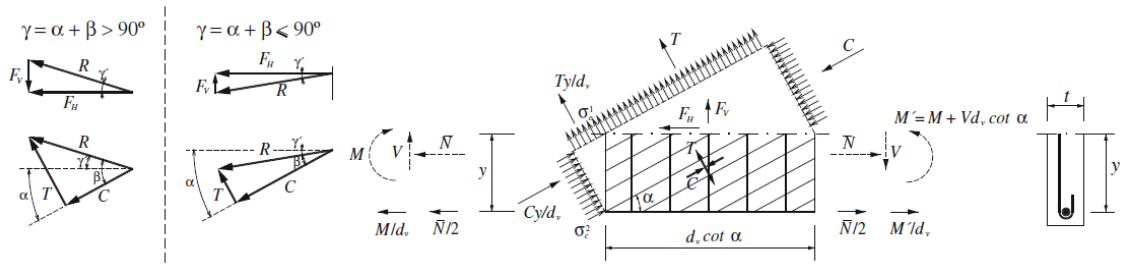


Figura 2.4 - Equilíbrio do corpo livre retangular para  $\alpha + \beta \leq 90^\circ$  e  $\alpha + \beta > 90^\circ$  [9].

Tendo por base o equilíbrio do corpo livre retangular apresentado na Figura 2.4 é possível obter o valor de  $\gamma'$ :

$$\gamma' = \begin{cases} \alpha - \beta = \gamma - 2\beta & \text{para } \alpha + \beta \leq 90^\circ \\ \beta - \alpha = 2\beta - \gamma & \text{para } \alpha + \beta > 90^\circ \end{cases} \quad (2.12)$$

A tensão na escora e no tirante diagonais de betão pode ser obtida através da substituição das Equações 2.8 e 2.9 nas Equações 2.5 e 2.4, respetivamente, obtendo as seguintes equações:

$$\sigma_1^c = \frac{M_T}{2 A_0 t_t} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.13)$$

$$\sigma_2^c = \frac{M_T}{2 A_0 t_c} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.14)$$

Onde  $t_c$  é a espessura da escora diagonal de betão e  $t_t$  é a espessura do “tirante” diagonal de betão.

As 5 equações básicas de equilíbrio para a torção no GSVATM são constituídas pelas equações 2.1, 2.2, 2.3, 2.9 e 2.13, expostas anteriormente. Para além de serem válidas para secções de betão armado retangulares ocas, são também válidas para secções cheias tendo por base as conclusões obtidas por Hsu em 1968 [17], designadamente através de ensaios experimentais. Nestes ensaios, o referido autor observou que a resistência última de uma viga de secção cheia era semelhante à de uma viga de secção oca com as mesmas características. Assim, o autor chegou a conclusão que o núcleo central de betão não condiciona a resistência de uma viga na proximidade da fase de rotura. Tal pode justificar-se pelo facto do momento torsor atuante ser resistido essencialmente pela envolvente exterior da viga, ou seja a “casca”. No momento em que as armaduras são solicitadas e entram em cedência, o equilíbrio da treliça espacial para o momento torsor último passa a ser definido pelas equações 2.2 e 2.3.

## 2.2.2. Flexão dos tirantes e das escoras de betão

Quando uma viga de betão armado é sujeita a uma ação torsional, esta sofre deformações globais traduzidas pela curvatura das superfícies da viga, inicialmente planas. Isto porque se verifica efeito de flexão nos tirantes e também nas escoras diagonais de betão além de compressão. Esta análise pode ser exemplificada pela Figura 2.5, onde se considera um elemento de parede com largura unitária, pertencente à parede de uma viga de betão armado de secção oca com espessura  $t$ . Na Figura 2.5 os eixos exibidos 1 e 2 representam, respetivamente, a direção principal de tração e de compressão. Assim sendo, as faces perpendiculares ao eixo 1 são as secções transversais do tirante de betão e as perpendiculares ao eixo 2 são as secções transversais da escora de betão. Este elemento está submetido a um estado biaxial de tensão plano com flexão.

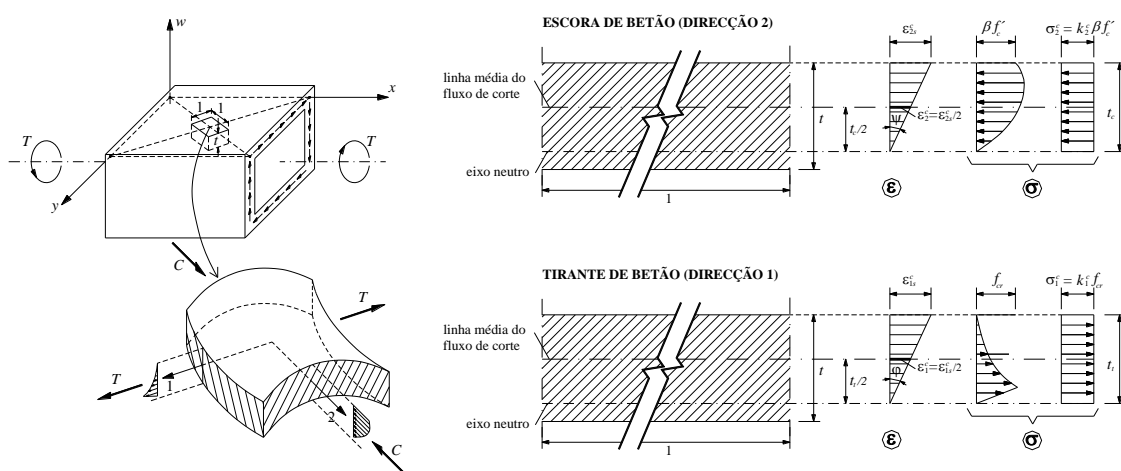


Figura 2.5 - Distribuição das extensões na escora e no tirante de betão [9].

Na Figura 2.5 nota-se a existência de uma pequena área tracionada na secção transversal, próximo da fibra inferior, resultante da flexão nas escoras de betão. Contudo esta área reduzida tracionada é desprezada tanto para os elevados como para os baixos níveis de carregamento. No caso dos baixos níveis de carregamento espera-se que a área da secção transversal tracionada da escora seja insignificante ou mesmo inexistente em comparação com a área comprimida da mesma escora. Logo, a área que corresponde à espessura das escoras de betão é a área de compressão que se estende pela profundidade  $t_c$ . Atendendo a uma distribuição das extensões linear, a extensão máxima de compressão na superfície,  $\varepsilon_{2s}^c$ , pode ser obtida com base na curvatura da escora de betão  $\psi$  pelas seguintes formulações.

$$\varepsilon_2^c = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{2s}^c = \psi t_c \quad (2.16)$$

$$\psi = \theta \sin(2\alpha) \quad (2.17)$$

O mesmo acontece no caso dos tirantes de betão em que também está presente uma pequena área junto à fibra inferior que pode estar em compressão. Também esta área é desprezada, uma vez que para elevados níveis de carregamento a contribuição dos tirantes deixa de ser relevante e para os baixos níveis de carregamento espera-se que a área de compressão seja muito pequena comparativamente à área de tração. Tal como na escora apenas a área tracionada ao longo da profundidade  $t_t$  se considera efetiva. Atendendo também a uma distribuição de extensões linear, a extensão máxima de tração na superfície  $\varepsilon_{1s}^c$  pode ser obtida pelas seguintes expressões matemáticas uma delas em função da curvatura do tirante de betão  $\varphi$ . Tanto a curvatura no tirante como a curvatura na escora são de igual valor apenas têm sinal contrário.

$$\varepsilon_1^c = \frac{\varepsilon_{1s}^c}{2} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{1s}^c = \varphi t_t \quad (2.19)$$

As tensões existentes no tirante e na escora de betão foram implementadas no GSVATM por Bernardo et al. [9] através das equações seguintes.

A tensão no tirante de betão  $\sigma_1^c$  é obtida por:

$$\sigma_1^c = k_1^c f_{cr} \quad (2.20)$$

A tensão na escora diagonal de betão  $\sigma_2^c$  é obtida por:

$$\sigma_2^c = k_2^c \xi f_c' \quad (2.21)$$

Onde a tensão média nas escoras e nos tirantes está representada por  $k_2^c$  e  $k_1^c$  respetivamente e  $\xi$  é um coeficiente de redução da tensão de compressão que tem em conta o *softening effect*,  $f_{cr}$  é a resistência à tração do betão observada em ensaios de tração uniaxial e  $f_c'$  representa a resistência à compressão uniaxial do betão obtida em provetes cilíndricos padronizados. Estes parâmetros serão descritos adiante na secção 2.2.5.

### 2.2.3. Espessura Efetiva da Parede

No primeiro capítulo foi referido o SMMT (*Softened Membrane Model of Torsion*), modelo este em que Jeng e Hsu [20] assumiram uma profundidade da área de secção transversal do tirante à tração igual à profundidade da área de secção transversal da escora à compressão,

ou seja  $t_c = t_t$ . Assim, com a adoção desta simplificação, tornam-se os cálculos mais fáceis sendo apenas uma variável a introduzir, a espessura efetiva  $t_c$ .

Também Bernardo et al. [9] assumiram a mesma simplificação no GSVATM, uma vez que este modelo também incorpora uma escora e um tirante de betão, por isso todos os parâmetros  $t_t$  ficam iguais a  $t_c$  em todas as formulas matemáticas anteriores. A espessura  $t_c$  é obtida a partir dada substituição da equação 2.21 na equação 2.14.

$$t_c = \frac{M_T}{2 A_0 k_2^c \xi f_c'} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} \quad (2.22)$$

Se se considerar que a linha média do fluxo de corte se encontra a meio da profundidade efetiva  $t_c$ , então o perímetro dessa linha ( $p_o$ ) e a área delimitada pela mesma ( $A_o$ ) são dados pelas seguintes expressões matemáticas.

$$p_o = 2(x - t_c) + 2(y - t_c) = p_c - 4t_c \quad (2.23)$$

$$A_o = (x - t_c)(y - t_c) = A_c - \left(\frac{t_c}{2}\right)p_c \quad (2.24)$$

Onde  $x$  e  $y$  são, respetivamente, a menor e maior dimensão exterior da secção transversal retangular,  $p_c$  é o perímetro exterior da secção transversal de betão e  $A_c$  é a área delimitada pelo perímetro exterior da secção transversal de betão.

Em seguimento deste raciocínio, as equações 2.4 e 2.5 inerentes à força de tração e compressão, são reescritas resultando nas seguintes equações.

$$T = \sigma_2^c t_c d_v \sin \alpha \quad (2.25)$$

$$C = \sigma_2^c t_c d_v \cos \alpha \quad (2.26)$$

#### 2.2.4. Equações para o cálculo da curva $T - \theta$

O modelo GSVATM recorre a um procedimento de cálculo iterativo para obter a curva  $T - \theta$  das vigas de betão armado à torção para todo o historial de carga. Tal ocorre pelo facto do modelo apresentar um carácter não linear e também devido à existência de variáveis interdependentes inicialmente desconhecidas.

Para obter a curva  $T - \theta$  global o GSVATM requer equações de equilíbrio, equações de compatibilidade e relações constitutivas para os materiais.

### 2.2.4.1 Equações de equilíbrio

São três as equações de equilíbrio que servem de base ao GSVATM para obter a curva  $T - \theta$ , uma para calcular o momento torsor  $M_t$ , outra para a espessura efetiva  $t_c$  e mais uma para o ângulo  $\alpha$  das escoras de betão. Esta última fornece também informação sobre a orientação dos tirantes uma vez que estes são ortogonais às escoras.

O momento torsor  $M_T$  é obtido reescrever a equação 2.14 em função da tensão do momento torsor.

$$M_T = 2A_0 t_c \sigma_2^c \frac{\sin \gamma \cos \alpha}{\cos \beta} \quad (2.27)$$

Outra hipótese para obter o  $M_T$  é reescrever em função do momento torsor a equação 2.7.

$$M_T = \frac{2A_0 R \sin \gamma}{d_v} \quad (2.28)$$

A espessura  $t_c$  relaciona-se com a força instalada nas armaduras longitudinais. Substituindo a equação 2.27 na equação 2.2 e resolvendo em função de  $t_c$  vem:

$$t_c = \begin{cases} \frac{A_{sl} f_{sl}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} & \text{para } \alpha + \beta \leq 90^\circ \\ -\frac{A_{sl} f_{sl}}{\sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \gamma} & \text{para } \alpha + \beta > 90^\circ \end{cases} \quad (2.29)$$

No caso do ângulo  $\alpha$ , é preciso encontrar uma equação que relaciona esse mesmo ângulo com as forças presentes nas armaduras longitudinais e transversais, sendo assim para o caso de  $\alpha + \beta \leq 90^\circ$  substituindo a equação 2.27 na equação 2.2 e resolvendo em ordem a  $\cos \alpha$  resulta a seguinte equação em que  $\alpha$  aparece em função da armadura longitudinal.

$$\cos \alpha = \frac{A_{sl} f_{sl}}{t \sigma_2^c p_0} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \quad (2.30)$$

Utilizando novamente a equação 2.27 para substituir agora na equação 2.3 e resolvendo novamente em ordem a  $\cos \alpha$  obtém-se a equação seguinte, mas agora com  $\alpha$  relacionado com a armadura transversal.

$$\cos \alpha = \frac{A_{st} f_{st}}{t_c \sigma_2^c s} \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \tan \gamma'} \quad (2.31)$$

Igualando as equações 2.30 e 2.31 depois de simplificada obtém-se:

$$\frac{A_{sl}f_{sl}}{p_0 \cos \gamma} = \frac{A_{st}f_{st}}{s \sin \gamma \tan \gamma'} \quad (2.32)$$

Na equação anterior  $\alpha$  desapareceu, mas os ângulos  $\gamma$  e  $\gamma'$  podem ser definidos em função de  $\alpha$  e  $\beta$  como já foi referido anteriormente nas equações 2.11 e 2.12:

Substituindo estas, as equações 2.11 e 2.12 na equação 2.32 resulta:

$$\tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta) = \frac{A_{st}f_{st}p_0}{A_{sl}f_{sl}s} = F \quad (2.33)$$

Assim e com o auxílio do *software* MATLAB, resulta a equação 2.34 em ordem ao ângulo em  $\alpha$ , válida tanto para  $\alpha + \beta \leq 90^\circ$  como  $\alpha + \beta > 90^\circ$ .

$$\alpha = \pm \arctan\left(\frac{\sqrt{F^2(\tan \beta)^2 + F(\tan \beta)^4 + F + (\tan \beta)^2}}{F(\tan \beta)^2 + 1}\right) \quad (2.34)$$

#### 2.2.4.2 Equações de compatibilidade

São também requeridas pelo GSVATM três equações de compatibilidade para o cálculo da curva  $T - \theta$  e também para obter as extensões na armadura transversal ( $\varepsilon_{st}$ ), na armadura longitudinal ( $\varepsilon_{sl}$ ) e o ângulo de rotação ( $\theta$ ) por unidade de comprimento.

Com o auxílio do Círculo de Mohr apresentado por Vecchio e Collins em 1981, para um estado de deformação de um elemento de uma placa sujeita ao corte como se pode visualizar na Figura 2.6, é possível chegar às equações de compatibilidade implementadas no GSVATM.

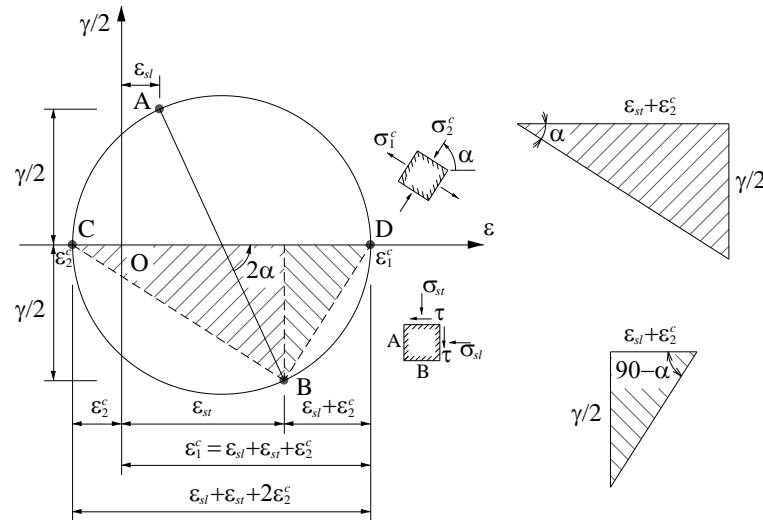


Figura 2.6 - Círculo de Mohr para o estado de deformação de uma placa sujeita ao corte [26].

O Círculo de Mohr ilustrado na Figura 2.6 representa o estado de deformação num elemento de uma placa no estado fendilhado, sendo também visíveis as tensões normais associadas às faces A e B de um elemento. Estas tensões serão absorvidas respetivamente, pelas armaduras longitudinais e transversais. Os pontos A e B representados no Círculo de Mohr traduzem o estado de deformação das faces A e B e têm as respetivas coordenadas  $(\varepsilon_{sl}; \gamma/2)$  e  $(\varepsilon_{st}; -\gamma/2)$ , em que  $\gamma$  representa a distorção. Por outro lado os pontos assinalados como C e D com as respetivas coordenadas  $(-\varepsilon_2^c; 0)$  e  $(\varepsilon_1^c; 0)$ , traduzem a extensão na escora e no tirante respetivamente, para as direções principais, e por fim o ângulo  $\alpha$  traduz a direção principal do estado de tensão.

Concluindo, as três equações de compatibilidade do GSVATM derivam da Figura 2.6 e são as apresentadas a seguir.

A extensão na armadura transversal  $\varepsilon_{st}$  é calculada através da seguinte equação:

$$\varepsilon_{st} = \left( \frac{A_0^2 \sigma_2^c \sin \gamma}{p_0 M_T \cos \beta \tan \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \quad (2.35)$$

A extensão na armadura longitudinal  $\varepsilon_{sl}$  é calculada através da seguinte equação:

$$\varepsilon_{sl} = \left( \frac{A_0^2 \sigma_2^c \sin \gamma}{p_0 M_T \cos \beta \cot \alpha \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_{2s}^c \quad (2.36)$$

Por fim o ângulo de torção  $\theta$  é calculado através da seguinte equação:

$$\theta = \frac{\varepsilon_{2s}^c}{2t_c \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2.37)$$

Estas três equações de compatibilidade do GSVATM são válidas para  $\alpha + \beta \leq 90$  e para  $\alpha + \beta > 90$  (Figura 2.4).

É possível também com o auxílio do Círculo de Mohr calcular a extensão de tração do tirante  $\varepsilon_{1s}^c$  a partir das extensões apresentadas anteriormente.

$$\varepsilon_{1s}^c = 2\varepsilon_{sl} + \varepsilon_{st} + \varepsilon_2^c \quad (2.38)$$

Nas equações anteriormente apresentadas, os parâmetros  $\varepsilon_2^c$  e  $\varepsilon_{2s}^c$  representam a extensão média e máxima de compressão, respetivamente.

### 2.2.5. Leis constitutivas para os materiais

Tal como já foi referido anteriormente, a ideia base do modelo GSVATM é a consideração de um tirante perpendicular à escora para simular a contribuição do betão à tração, de forma a aperfeiçoar a simulação do comportamento das vigas à torção calculadas através deste modelo. Para caracterizar o comportamento do betão à compressão e à tração neste modelo, assim como das armaduras ordinárias à tração, Bernardo et al. [8] em 2012 avaliaram, de entre as várias opções, qual a melhor relação  $\sigma - \varepsilon$  (relações constitutivas) para o betão à compressão. Tal processo foi repetido para as armaduras à tração. Esta análise foi fundamentada por várias simulações com a formulação do VATM, de modo a ser calculado o comportamento na fase última de vigas de betão armado sujeitas à torção. O referidos autores concluíram que o modelo teórico que melhor se adapta aos resultados experimentais é o que incorpora a relação  $\sigma - \varepsilon$  para o betão à compressão proposta por Belarbi e Hsu em 1991 [6], este modelo, que inclui os fatores de redução propostos por Hsu e Zhang [27], relação esta que contabiliza o *softening effect*. Para as armaduras ordinárias à tração, Bernardo et al. [8] concluíram que a lei proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [5] era a que mais de adequava.

Já em 2014, Nobre [23] desenvolveu um estudo comparativo para várias relações  $\sigma - \varepsilon$  para o betão à tração propostas por vários autores, baseando-se no GSVATM. Na análise comparativa realizada, a referida autora focou o momento torsor de fissuração e a sua respetiva rotação de torção, comparando os valores obtidos pelo modelo com os valores experimentais de várias vigas de betão armado sujeitas à torção pura existentes na literatura. A autora concluiu que a relação  $\sigma - \varepsilon$  proposta por Belarbi e Hsu em 1994 [5] e modificada por Jeng and Hsu em 2009 [20] para o SMMT era a que apresentava melhores resultados.

As relações  $\sigma - \varepsilon$  para o betão à tração e à compressão referidas anteriormente são apresentadas respetivamente pelas seguintes Equações 2.39 e 2.40, acompanhadas pelas ilustrações correspondentes Figura 2.7 e Figura 2.8.

$$\sigma_1^c = \begin{cases} E_c \varepsilon_1^c & \text{se } \varepsilon_1^c \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_1^c} \right)^{0.4} & \text{se } \varepsilon_1^c > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (2.39)$$

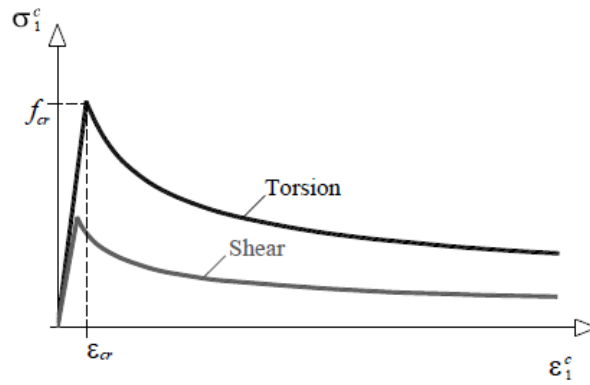


Figura 2.7 - Curva  $\sigma - \varepsilon$  para o betão tracionado [9].

$$\sigma_2^c = \begin{cases} \xi f'_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2^c}{\xi \varepsilon_0} \right)^2 \right] & \text{se } \varepsilon_2^c \leq \xi \varepsilon_0 \\ \xi f'_c \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_2^c - \xi \varepsilon_0}{2 \varepsilon_0 - \xi \varepsilon_0} \right)^2 \right] & \text{se } \varepsilon_2^c > \xi \varepsilon_0 \end{cases}$$

(2.40)

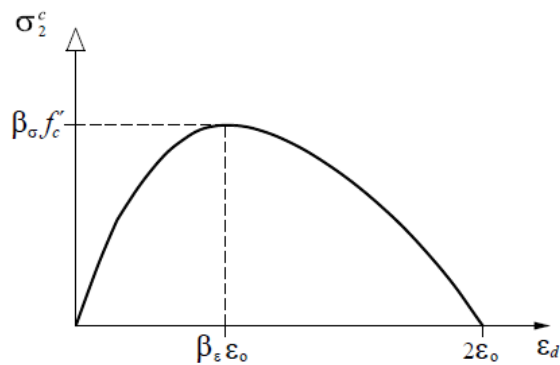


Figura 2.8 - Curva  $\sigma - \varepsilon$  para o betão comprimido [9].

Nestas expressões anteriores os fatores de redução são resultantes das seguintes equações.

$$\xi = \frac{R(f'_c)}{\sqrt{1 + \frac{400 \varepsilon_1^c}{\eta'}}$$

(2.41)

Onde:

$$R(f'_c) = \frac{5.8}{\sqrt{f'_c(\text{MPa})}} \leq 0.9$$

(2.42)

$$\eta' = \begin{cases} \eta & \text{se } \eta \leq 1 \\ \frac{1}{\eta} & \text{se } \eta > 1 \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\eta = \frac{\rho_l f_{sl}}{\rho_t f_{st}} \quad (2.44)$$

Os parâmetros  $k_1^c$  e  $k_2^c$  que estão respectivamente presentes nas equações 2.20 e 2.21, e que resultam da integração das Equações 2.35 e 2.36, são obtidos a partir das seguintes equações.

$$k_1^c = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1^c}{2\varepsilon_{cr}} & \text{para } \varepsilon_1^c \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{\varepsilon_{cr}}{2\varepsilon_1^c} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0.4}}{0.6\varepsilon_1^c} [(\varepsilon_1^c)^{0.6} - (\varepsilon_{cr})^{0.6}] & \text{para } \varepsilon_1^c > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (2.45)$$

$$k_2^c = \begin{cases} \frac{\varepsilon_2^c}{\xi\varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_2^c}{3\xi\varepsilon_0}\right) & \text{para } \varepsilon_2^c \leq \xi\varepsilon_0 \\ 1 - \frac{\xi\varepsilon_0}{3\varepsilon_2^c} - \frac{(\varepsilon_2^c - \xi\varepsilon_0)^3}{3\varepsilon_2^c(2\varepsilon_0 - \xi\varepsilon_0)^2} & \text{para } \varepsilon_2^c > \xi\varepsilon_0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Tal como já tinha sido referido anteriormente, Bernardo et al. [8] concluíram que a melhor relação constitutiva para as armaduras ordinárias à tração é a proposta por Belarbi e Hsu de 1994 [5]. Tal relação  $\sigma - \varepsilon$  encontra-se graficamente representada na Figura 2.9.

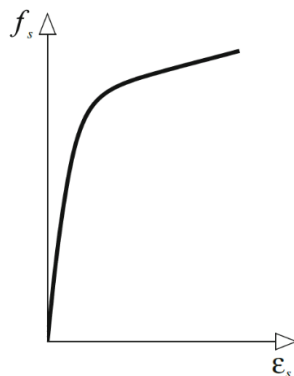


Figura 2.9 - Curva  $\sigma - \varepsilon$  para as armaduras ordinárias tracionadas [9].

A curva ilustrada na figura anterior é obtida pela seguinte equação:

$$f_s = \frac{0.975E_s\varepsilon_s}{\left[1 + \left(\frac{1.1E_s\varepsilon_s}{f_{sy}}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}} + 0.025E_s \quad (2.47)$$

Na equação anterior:

$$m = \frac{1}{9B - 0.2} \leq 25 \quad (2.48)$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_{sy}}\right)^{1.5} \quad (2.49)$$

### 2.2.6. Algoritmo de cálculo do GSVATM

Para calcular a curva teórica  $T - \theta$  com base no GSVATM é necessário recorrer a um procedimento de cálculo computacional uma vez que, tal como já foi referido anteriormente, algumas das variáveis são desconhecidas inicialmente e interdependentes, o que envolve o recurso a um procedimento de cálculo iterativo, e também pelo facto de o GSVATM ser um modelo de carácter não linear. O fluxograma do algoritmo de cálculo é apresentado na Figura 2.10 tendo por base as equações apresentadas ao longo deste capítulo. Os parâmetros  $\xi$ ,  $\alpha$ ,  $t_c$ ,  $\varepsilon_{2s}^c$  e  $\varepsilon_{1s}^c$  constituem as variáveis a ser assumidas inicialmente. Posteriormente todos os valores assumidos para as variáveis são verificados relativamente à proximidade em relação à série de valores calculados para as variáveis em questão, em concordância com as equações do GSVATM.

A curva  $T - \theta$  termina ao atingir os valores convencionais de rotura para a extensão máxima de compressão na superfície das escoras de betão ( $\varepsilon_{2s}^c$ ) ou para a extensão de tração nas armaduras de torção ( $\varepsilon_{sl}$  ou  $\varepsilon_{st}$ ). Tais valores estão referidos no Eurocódigo 2 [12], designadamente  $\varepsilon_{cu}$ , referente à extensão última de compressão na superfície das escoras de betão ( $\varepsilon_{2s}^c$ ) e  $\varepsilon_{su} = 0,01$  referente à extensão de tração nas armaduras de torção ( $\varepsilon_{sl}$  ou  $\varepsilon_{st}$ ).

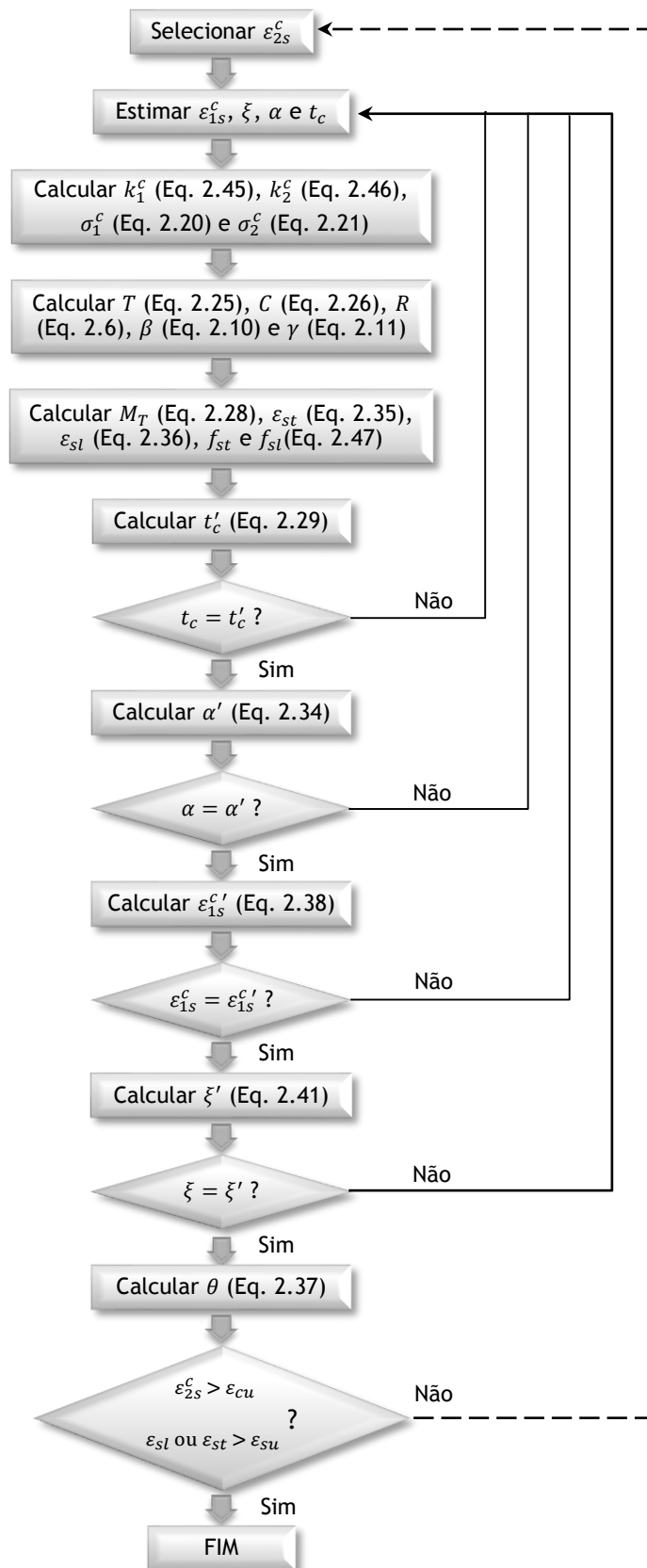


Figura 2.10 - Fluxograma do algoritmo de cálculo do GSVATM para o cálculo da curva  $T - \theta$ .

O fluxograma apresentado na Figura 2.10 ilustra, de uma forma resumida e simplificada, o procedimento de cálculo iterativo do GSVATM. Tal procedimento pode ainda ser apresentados de acordo com os seguintes passos de cálculo:

1. Selecionar  $\varepsilon_{2s}^c$ ;
2. Adotar valores para  $\varepsilon_{1s}^c$ ,  $\xi$ ,  $t_c$  e  $\alpha$  ;
3. Calcular  $k_1^c$ ,  $k_2^c$ ,  $\sigma_1^c$  e  $\sigma_2^c$  pelas equações 2.45, 2.46, 2.20 e 2.21, respetivamente;
4. Calcular  $T$  e  $C$  a partir das equações 2.25 e 2.26, respetivamente. A resultante  $R$  é calculada com base na equação 2.6 e os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  pelas equações 2.10. e 2.11, respetivamente;
5. Determinar  $M_T$  a partir da equação 2.28. As extensões  $\varepsilon_{st}$  e  $\varepsilon_{sl}$  são calculadas, respetivamente, pelas equações 2.35 e 2.36. Com base nas extensões  $\varepsilon_{st}$  e  $\varepsilon_{sl}$  e na equação 2.47 são obtidas as tensões  $f_{st}$  e  $f_{sl}$ ;
6. Verificar  $t'_c$ ,  $\alpha'$ ,  $\varepsilon_{1s}^{c'}$ , e  $\xi'$ , respetivamente, pelas equações 2.29, 2.34, 2.38 e 2.41;
7. Se:
  - 7.1. Os parâmetros calculados no passo anterior não forem suficientemente próximos dos valores assumidos no segundo passo, então devem repetir-se os passos de 2 a 6 até que estes se aproximem dos valores assumidos;
  - 7.2. Os valores calculados no passo 6 forem suficientemente próximos dos valores assumidos no passo 2, então prossegue-se para o passo 8;
8. Calcular a rotação  $\theta$  a partir da equação 2.37. Neste passo obtém-se um ponto de coordenadas  $(T, \theta)$  o qual pertence à curva teórica  $T - \theta$ ;
9. Selecionar outros valores para  $\varepsilon_{2s}^c$  e repetir o procedimento de forma a obter vários pontos  $(T, \theta)$  para o traçado da curva  $T - \theta$ .

A curva  $T - \theta$  termina quando a rotura convencional é alcançada, a qual é definida pelas extensões convencionais de rotura definidas no Eurocódigo 2, tal como anteriormente referido.

### 2.3. Observações finais

Ao longo do presente capítulo foi apresentada a formulação do GAVATM bem como descrito o procedimento de cálculo do GSVATM para o cálculo da curva  $T - \theta$  teórica para vigas de betão armado sujeitas à torção.

O modelo GSVATM consiste numa generalização do modelo VATM, incorporando um tirante perpendicularmente à escora de betão com o intuito de considerar diretamente a contribuição do betão à tração. Ao desprezar a força de tração no tirante no GSVATM, as equações resultantes coincidem com as do modelo VATM.

O modelo GSVATM constitui a ferramenta base para este trabalho, designadamente para a realização dos estudos comparativos a realizar nesta dissertação ao nível do cálculo de curvas  $T - \theta$ , com o objetivo de se tentar calibrar a forma da lei constitutiva do betão à tração para simular o comportamento do tirante.

# Capítulo 3. Proposta de alteração e avaliação da lei constitutiva para o betão à tração

## 3.1. Introdução

Este capítulo destina-se à avaliação de uma proposta de alteração para a relação constitutiva  $\sigma - \varepsilon$  para o betão à tração. Tal proposta é feita a partir de uma prévia proposta de alteração da lei constitutiva original de Belarbi e Hsu de 1994 [5] realizada anteriormente por Nobre em 2014 [23]. A partir de estudos comparativos, Nobre em 2014 [23] mostrou que esta lei, de entre outras, mostrou-se ser a mais adequada para prever o momento torsor de fissuração de vigas de betão armado com secção retangular cheia sujeitas à torção. No entanto a resposta das vigas imediatamente após a fissuração não era convenientemente simulada, como já tinha sido discutido na Secção 1.2 do Cap. 1. Os estudos comparativos tiveram por base a implementação da lei constitutiva original de Belarbi e Hsu, como da sua alteração, no programa Torque baseado do GSVATM.

Para avaliar a viabilidade da nova alteração proposta para a lei constitutiva do betão à tração, procede-se também à sua implementação no aplicativo computacional de cálculo Torque. Este programa, baseado no GSVATM, simula o comportamento de vigas de betão armado sujeitas à torção, designadamente através do cálculo da curva  $T - \theta$  para a viga calculada. O objetivo da proposta de alteração é que a curva  $T - \theta$  se aproxime da curva real obtida experimentalmente na fase comportamental imediatamente após a fissuração.

## 3.2. Anterior proposta de alteração da relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração

Continuando o trabalho realizado por Nobre em 2014 [23], foi inicialmente retomada a sua proposta de alteração da lei constitutiva para o betão à tração, a partir da lei original de Belarbi e Hsu de 1994 [5], tendo sido implementada no aplicativo computacional. Essa lei é traduzida pela Equação 3.1 apresentada de seguida, e encontra-se ilustrada na Figura 3.1.

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & \text{se } \varepsilon_{cr} \geq \varepsilon_{c1} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0.4} & \text{se } \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{T_{cr}} \\ f_{T_{cr}} & \text{se } \varepsilon_{T_{cr}} < \varepsilon_{c1} \leq n \cdot \varepsilon_{T_{cr}} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{T_{cr}} (n-1) \left( \frac{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \right)} \right)^{0.4} & \text{se } \varepsilon_{c1} > n \cdot \varepsilon_{T_{cr}} \end{cases} \quad (3.1)$$

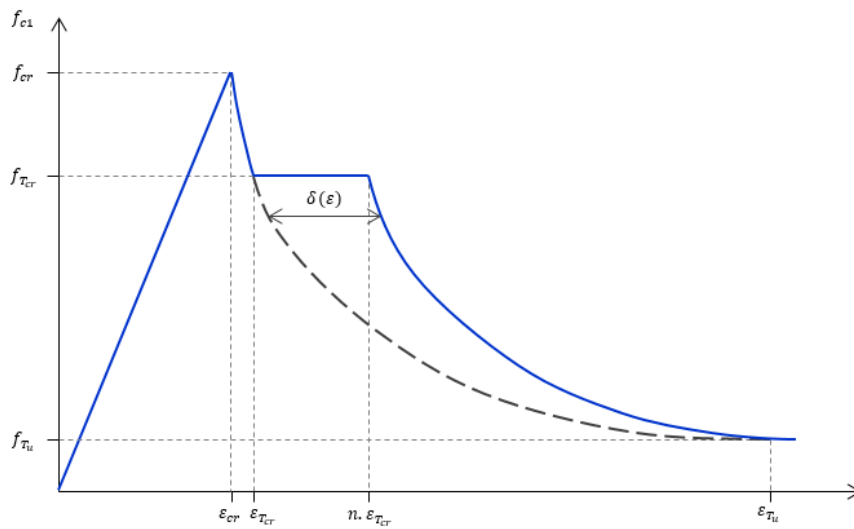


Figura 3.1 - Proposta de alteração da lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994) [5].

A Equação (3.1), cujo gráfico se encontra ilustrado na Figura 3.1, e que constitui uma correção da lei constitutiva original de Belarbi e Hsu (1994) [5], constitui segundo Nobre [23] uma nova base de trabalho futuro para se tentar corrigir a curva  $T - \theta$  imediatamente após a fissuração.

Após implementar este novo modelo, designado por Nobre de *Versão 3*, no aplicativo computacional anteriormente referido, foi simulado o comportamento da viga B4 de Hsu [17], a mesma viga utilizada por Nobre para a avaliação da sua *Versão 2*, para diferentes comprimentos do patamar horizontal, traduzidos pelo parâmetro  $n$ . Os resultados obtidos encontram-se ilustrados na Figura 3.2. As características geométricas e mecânicas das vigas de referência B4 podem ser consultadas em Nobre [23].

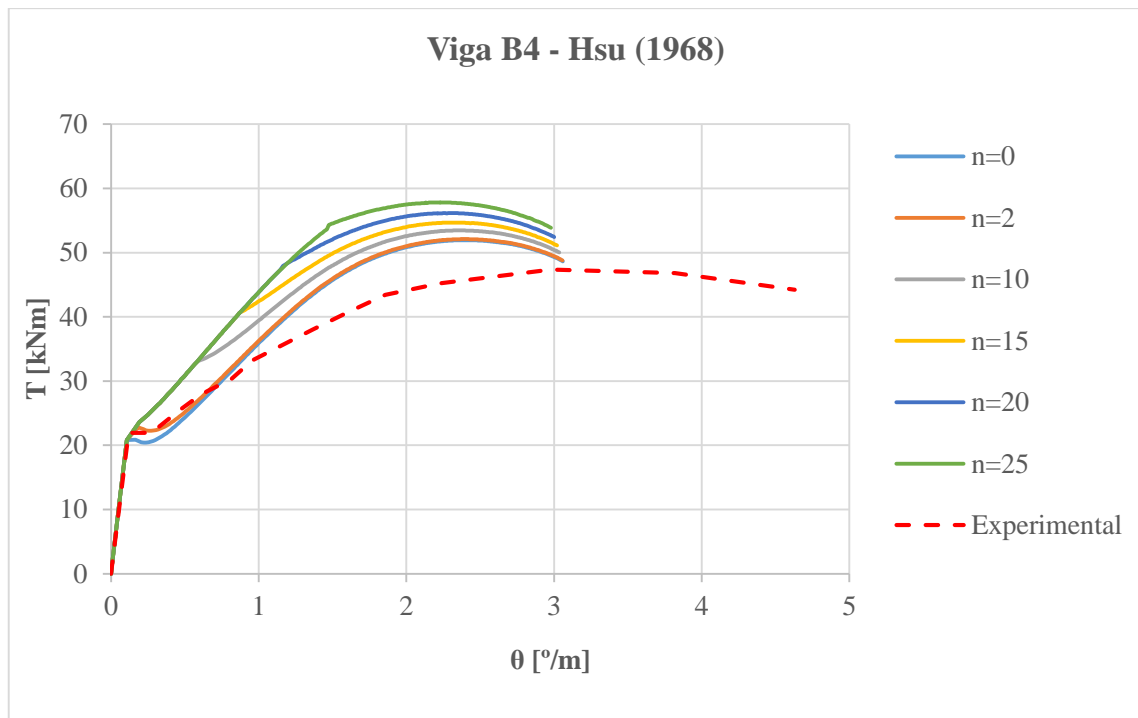


Figura 3.2 - Comparação das curvas  $T - \theta$  para diferentes valores de  $n$  e para a viga de referência B4.

Ao analisar a Figura 3.1 verifica-se que, com o incremento da variável  $n$ , o momento torsor de fissuração permanece invariável como é desejável. Imediatamente após o momento torsor de fissuração, observa-se que a redução do momento torsor também se vai atenuando após o incremento da variável  $n$ , situação esta que também se pretendia resolver. No entanto, os resultados da Figura 3.2 mostram também que aparentemente surge uma nova fase comportamental após a fissuração, relacionada com o patamar horizontal da curva 3.1. A extensão dessa nova fase comportamental, correspondente a um troço reto que liga o ponto de fissuração com a curva  $T - \theta$  normal do estado fissurado, é proporcional ao valor do parâmetro  $n$ . Tal zona comportamental não é observada na curva experimental. Outro aspeto relevante é o aumento do momento torsor resistente em relação à curva experimental, à medida que o parâmetro  $n$  aumenta. Tal aumento não era desejável visto que o GSVATM já se encontrava calibrado para o estado último comportamental. Tal aumento deve-se também provavelmente ao facto da área limitada pela lei constitutiva do betão à tração alterada (Figura 3.1) aumentar em relação à original de Belarbi e Hsu, implicando uma participação maior e irrealista do betão à tração na fase última.

Com base na análise da Figura 3.1 e exposta no parágrafo anterior, conclui-se então que a alteração da lei constitutiva do betão à tração expressa pela Equação 3.1, apresentada anteriormente, resolve alguns problemas mas não responde a todas as exigências pretendidas. Posto isto será necessário proceder a um novo estudo, para tentar melhorar a forma da lei constitutiva do betão à tração a implementar e em alternativa da lei constitutiva do betão à tração original de Belarbi e Hsu de 1994 [5].

A partir dos resultados da Figura 3.2, percebe-se que o patamar horizontal implementado curva  $\sigma - \varepsilon$  após o ponto correspondente ao momento torsor de fissuração não provoca alterações na fase não fissurada da viga. No entanto, como foi referido anteriormente, para a fase fissurada este patamar conduz a uma nova fase comportamental suplementar na forma de um alinhamento reto oblíquo crescente na Figura 3.2, situação esta não observada na realidade. Sendo assim, conclui-se que a adoção do patamar horizontal não constitui a melhor solução. O referido patamar tem como efeito incrementar apreciavelmente a participação do betão tracionado para a resistência à torção da viga, com o conseqüente aumento do momento torsor resistente.

Assim sendo e estando resolvida a questão do momento torsor de fissuração falta agora afinar a forma da lei constitutiva de modo a atenuar a queda do momento torsor após fissuração do elemento viga, sem aumentar a capacidade resistente última da mesma e sem criar zonas comportamentais adicionais.

Posto isto, e sabendo que a energia de fratura do betão à tração está relacionada com a área abaixo da curva  $\sigma - \varepsilon$ , se a área aumenta também aumenta a capacidade resistente do material em causa. Tal corrobora as observações realizadas a partir da Figura 3.2, visto que como se pode verificar na Figura 3.1, o patamar desenvolve-se acima da curva original da lei do betão à tração. Quanto maior o comprimento do patamar, maior é o incremento da área limitada pela curva. Assim, qualquer aumento de área, resultante da alteração da forma da curva, terá de ser compensada na curva.

### **3.3. Nova proposta de alteração da relação $\sigma - \varepsilon$ para o betão à tração**

Para perceber de que modo estão relacionadas as variações da área abaixo do traçado da lei constitutiva do betão à tração no comportamento da viga na curva  $T - \theta$ , foram implementados 3 traçados distintos após o ponto correspondente ao momento torsor de fissuração da viga. A primeira alteração traduz-se por um alinhamento reto desde esse mesmo ponto até ao instante em que é atingida a extensão correspondente ao momento torsor último, mantendo a tensão correspondente desse ponto inalterada. Esta nova curva é traduzida pela equação 3.2 e encontra-se ilustrada na Figura 3.3. Nesta alteração existe um pequeno incremento da área debaixo da curva que não é compensada. A segunda alteração, expressa pela equação 3.3, tem por objetivo perceber quais as conseqüências de, no ponto final do alinhamento reto em que é atingida a extensão correspondente ao momento torsor último, se considerar agora uma tensão nula. Esta nova curva encontra-se ilustrada da Figura 3.4. Nesta alteração o aumento de área debaixo da curva é compensada na parte final. Para avaliar o nível de compensação da área, é considerada uma terceira alteração, em que o alinhamento reto, partindo do mesmo ponto inicial, vai finalizar no ponto equivalente a metade da extensão última com tensão nula, a qual permanece nula para extensões maiores. Esta terceira alteração é traduzida pela equação 3.4 e a curva resultante encontra-se ilustrada na Figura 3.5.

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & , \quad se \ \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0.4} & , \quad se \ \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{Tcr} \\ \frac{f_{T_u} - f_{T_{cr}}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \varepsilon_{c1} + f_{T_{cr}} - \frac{f_{T_u} - f_{T_{cr}}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \varepsilon_{T_{cr}} & , \quad se \ \varepsilon_{T_{cr}} < \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{T_u} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0.4} & , \quad se \ \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{T_u} \end{cases} \quad (3.2)$$

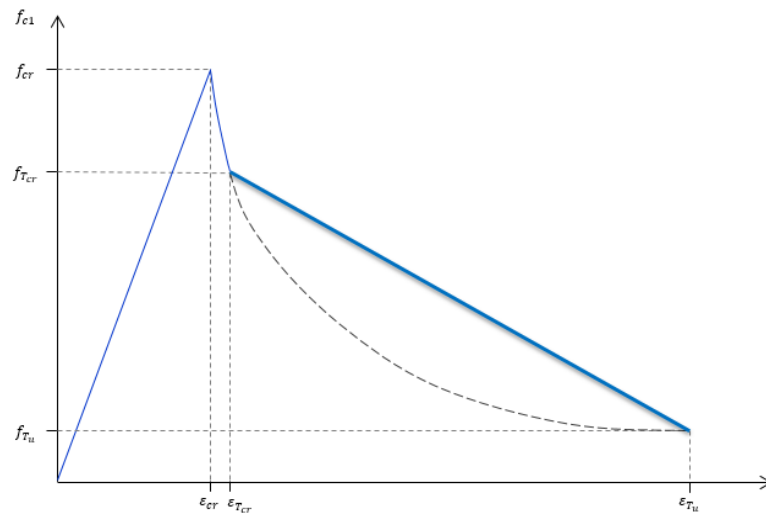


Figura 3.3 - Primeira alteração implementada na lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994).

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & , \quad se \ \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0.4} & , \quad se \ \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{T_{cr}} \\ \frac{-f_{T_{cr}}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \varepsilon_{c1} + f_{T_{cr}} + \frac{f_{T_{cr}}}{\varepsilon_{T_u} - \varepsilon_{T_{cr}}} \varepsilon_{T_{cr}} & , \quad se \ \varepsilon_{T_{cr}} < \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{T_u} \\ 0 & , \quad se \ \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{T_u} \end{cases} \quad (3.3)$$

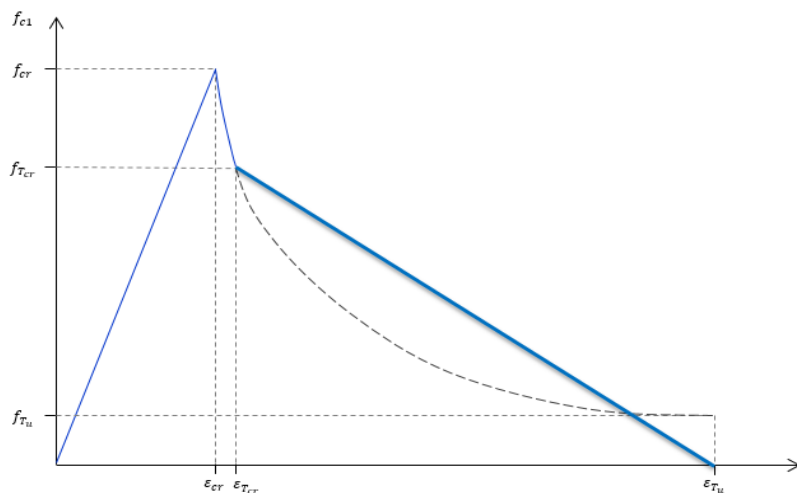


Figura 3.4 - Segunda alteração implementada na lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994).

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \epsilon_{c1} & , \quad \text{se } \epsilon_{c1} \leq \epsilon_{cr} \\ f_{cr} \left( \frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{c1}} \right)^{0.4} & , \quad \text{se } \epsilon_{cr} < \epsilon_{c1} \leq \epsilon_{Tcr} \\ \frac{-f_{Tcr}}{\epsilon_{Tu}/2 - \epsilon_{Tcr}} \epsilon_{c1} + f_{Tcr} + \frac{f_{Tcr}}{\epsilon_{Tu}/2 - \epsilon_{Tcr}} \epsilon_{Tcr} & , \quad \text{se } \epsilon_{Tcr} < \epsilon_{c1} \leq \epsilon_{Tu}/2 \\ 0 & , \quad \text{se } \epsilon_{c1} > \epsilon_{Tu}/2 \end{cases}$$

(3.4)

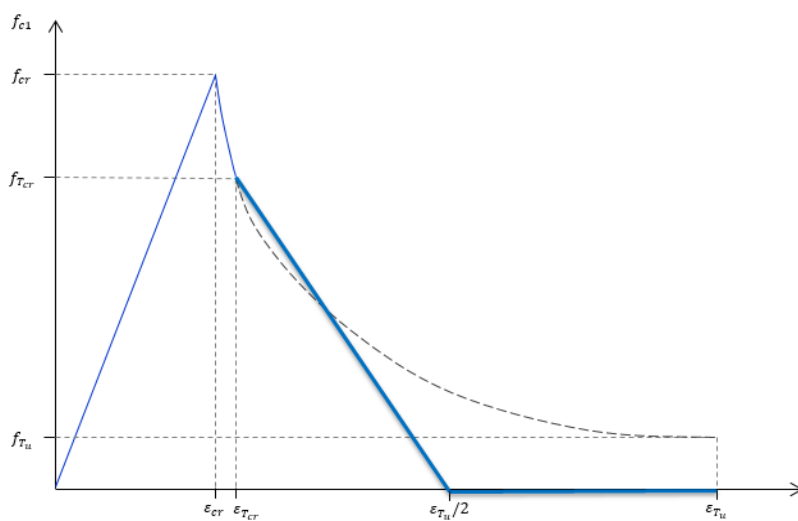


Figura 3.5 - Terceira alteração implementada na lei constitutiva do betão tracionado de Belarbi e Hsu (1994).

Depois de serem introduzidas estas novas versões da lei constitutiva do betão à tração no aplicativo computacional Torque, procedeu-se então à comparação das três novas versões com a versão original de Belarbi e Hsu (1994), e para isso utilizou-se também a viga de referência B4 de Hsu [17], para a qual se conseguiram os resultados ilustrados na Figura 3.6. Nesta figura estão também ilustrados os modelos referentes às leis utilizadas para caracterizar o comportamento dos materiais, nomeadamente para o betão à compressão o modelo b14 é relativo à lei de Belarbi e Hsu (1991) [6] juntamente com Hsu e Zhang (1998) [27], para as armaduras ordinárias longitudinal e transversal adotou-se a lei de Belarbi e Hsu (1994) [5] correspondente aos modelos alo3 e ato3 que traduzem o comportamento das armaduras longitudinais e transversais, respetivamente. A diferença entre os modelos que deram origem às curvas da Figura 3.6 reside nos modelos que caracterizam o comportamento do betão à tração, em que o modelo bt4 corresponde a lei original de Belarbi e Hsu (1994) [5] que foi comprovado por Nobre em 2014 [23] como sendo a lei que fornece as melhores previsões para o momento torsor de fissuração, comparativamente aos valores obtidos experimentalmente em vigas sujeitas à torção. As novas alterações propostas para a lei constitutiva do betão à tração, designadamente a primeira, segunda e terceira, estão referenciadas como bt11, bt12 e bt13, respetivamente.

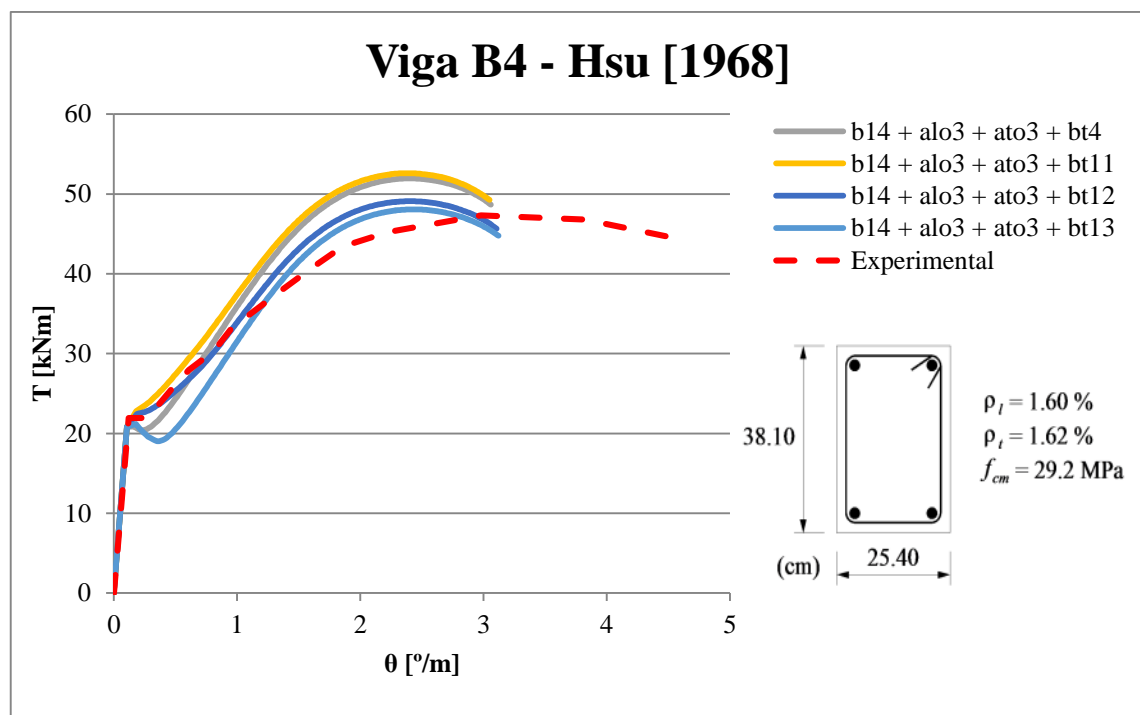


Figura 3.6 - Comparação das curvas  $T - \theta$  entre os modelos propostos e o modelo original para a viga de referência B4.

A Figura 3.6 mostra que o modelo original bt4, representado a cinza, apresenta uma redução do momento torsor imediatamente após o instante de fissuração, correspondendo portanto à situação principal que se pretende resolver. Observa-se que tanto o modelo bt11 a amarelo como o modelo bt12 a azul-escuro conseguem resolver a referida situação. No entanto, observa-se que o modelo que mais se aproxima do modelo bt4 na fase final, no que respeita à

capacidade resistente da viga, ou seja, o momento torsor último, é o modelo bt11 traçado a amarelo. Note-se que se adotou o critério de ajustar o momento torsor resistente com o da curva teórica do GSVATM com o modelo original e não com a curva experimental. Tal justifica-se pelo facto de Bernardo et al. [7] terem verificado que, em termos estatísticos e para uma elevada gama de resultados experimentais, o GSVATM fornece bons resultados para o momento torsor resistente.

A Figura 3.6 mostra também que o modelo bt13 é o que apresenta piores resultados, tanto ao nível da redução dos momentos torsores após a fissuração, num nível superior ao modelo original, como relativamente ao afastamento em relação ao momento torsor resistente e em relação ao modelo original. O primeiro aspeto é explicável pelo facto de se observar na Figura 3.5 que a “queda” da tensão de tração do betão após o pico no modelo proposto é superior ao do modelo original. Assim, conclui-se que, de entre os 3 modelos propostos, e para a Viga B4 estudada, o modelo bt11 é o melhor. Para melhor comprovar esta evidência torna-se necessário expandir o estudo para um maior número de vigas de referência encontradas na literatura, designadamente vigas de betão armado com secção retangular cheia (tipo de vigas para as quais o GSVATM se encontra calibrado).

### **3.4. Verificação do modelo Bt11 para diversas vigas de referência**

Para fazer uma seleção de quais as vigas de referência a serem estudadas (de entre as utilizadas por Bernardo et al. [7] para calibrar o GSVATM), foi imposta a condição de que o momento último experimental e teórico, obtido a partir do GSVATM com o modelo original para o betão à tração (bt4), das vigas teriam de ser próximos. Para tal, adotou-se que apenas seriam estudadas as vigas com um desvio inferior a 10% do momento último experimental.

As vigas de referência selecionadas encontram-se apresentadas na Tabela 3.1, onde estão também indicados os momentos resistentes experimentais e teóricos, sendo estes últimos os obtidos a partir do modelo original bt4 para o betão à tração. Foram selecionadas as vigas para as quais o quociente entre o momento resistente experimental e o respetivo valor teórico estava compreendido entre 0.90 e 1.10. Estas são as vigas selecionadas para avaliar a viabilidade das modificações propostas para o modelo original bt4. As características geométricas e mecânicas das vigas de referência podem ser consultadas no Anexo I, Tabela I.1 e Tabela I.2, respetivamente.

Tabela 3.1 - Vigas de referência selecionadas

Viga	$T_{u,exp}$ (kNm)	$T_{u,th}$ (kNm)	$\frac{T_{u,exp}}{T_{u,th}}$
B4 [17]	47.30	51.95	0.910
B5 [17]	56.11	58.55	0.958
B6 [17]	61.64	58.80	1.048
B7 [17]	26.87	28.63	0.939
B9 [17]	29.80	28.98	1.028
C5 [17]	29.69	31.27	0.949
G3 [17]	49.56	52.53	0.943
G4 [17]	64.80	64.21	1.009
G5 [17]	71.91	72.18	0.996
G7 [17]	52.61	56.00	0.939
G8 [17]	73.38	68.03	1.079
I3 [17]	45.61	42.55	1.072
I4 [17]	58.02	60.94	0.952
I5 [17]	70.67	71.51	0.988
I6 [17]	76.65	79.68	0.962
J1 [17]	21.45	21.45	1.000
J2 [17]	29.13	26.85	1.085
J3 [17]	35.22	34.20	1.030
K2 [17]	23.71	24.50	0.968
K3 [17]	28.45	29.64	0.960
K4 [17]	35.00	32.88	1.064
M1 [17]	30.37	29.55	1.028
M2 [17]	40.53	38.49	1.053
M3 [17]	43.80	41.13	1.065
M4 [17]	49.56	46.27	1.071
N1a [17]	8.99	9.12	0.985
N2 [17]	14.45	13.89	1.040
N2a [17]	13.21	13.62	0.970
N3 [17]	12.19	12.10	1.007
N4 [17]	15.69	15.16	1.035
VB2 [21]	42.11	41.78	1.008
VB3 [21]	46.40	49.48	0.938
VB4 [21]	48.54	51.51	0.942
VM2 [21]	39.17	39.69	0.987
VM3 [21]	100.80	101.51	0.993
VQ3 [21]	19.98	21.73	0.919
VQ9 [21]	21.90	21.44	1.021
VS3 [21]	28.56	29.54	0.967
VS4, VQ5 [21]	34.32	33.88	1.013
VU1 [21]	23.93	24.40	0.981
VU2 [21]	30.37	29.75	1.021
VU3 [21]	31.04	28.94	1.073
A3 [22]	27.77	29.75	0.933
A4 [22]	34.43	36.32	0.948
B3 [22]	25.29	27.27	0.927
B4 [22]	31.72	32.74	0.969
H-06-12 [13]	115.10	107.87	1.067
H-12-12 [13]	155.30	155.19	1.001
H-14-10 [13]	135.20	150.08	0.901
N-06-12 [13]	95.20	95.12	1.001
N-14-10 [13]	125.00	127.34	0.982

Tendo por base a Tabela 3.1, foram selecionadas um total de 51vigas.

Estas 51 vigas foram simuladas no aplicativo computacional Torque, para o modelo original Bt4 e também para os modelos alterados, de onde resultaram os gráficos apresentados no Anexo II.

Nestes gráficos é possível concluir tendo por base uma análise global e qualitativa que, em geral, o modelo que aparenta melhor se adequar aos objetivos deste trabalho é o bt11 representado pela cor amarelo. No entanto, existe alguma variabilidade de desvios entre vigas entre os modelos teóricos e as curvas experimentais. De facto, algumas vigas apresentam resultados não totalmente satisfatórios.

Tendo por base uma análise comparativa, pode concluir-se que em vigas de secção igual, com a mesma classe de betão mas com taxas de armadura diferentes, as vigas que têm taxas de armadura mais baixas aparentam ser as que apresentam maiores desvios, como no

caso das vigas N3 e N4 (ver Anexo II, Gráfico II.29 e II.30) de Hsu (1968) [17]. Tal mostra que a variável correspondente à taxa de armadura de torção tem uma grande influência na resposta da viga após a fissuração.

Também é possível constatar que em vigas com a mesma secção e as mesmas taxas de armaduras, mas com betões de resistência diferente, as vigas com betão de resistências mais altas aparentam ser as que apresentam maiores desvios, como é notável nas vigas VB2 e VB4 (ver Anexo II, Gráfico II.31 e II.33) de Leonhardt e Schelling (1974) [21]. Este facto pode estar relacionado com a maior fragilidade do betão à rotura à medida que a sua resistência aumenta, ou seja, um betão de alta resistência sofre um processo de fissuração mais frágil e súbito. Esta conclusão é fundamentada pelo facto de no caso de haver um certo “equilíbrio” entre as taxas de armadura e a classe de resistência dos betões as vigas proporcionam melhores resultados, como se pode reparar na viga J2 ou J3 (ver Anexo II, Gráfico II.17 e II.18) de Hsu (1968) [17].

Outra conclusão possível de se notar é que em todas as vigas e independentemente da sua geometria, taxas de armadura ou classes de betão, o acréscimo de momento último é muito pequeno, situação que, ainda assim, não dispensa uma recalibração do modelo bt11.

Para que as modificações na lei do betão à tração promovam resultados satisfatórios em fase última na curva  $T-\theta$  relativa ao comportamento das vigas, essas modificações devem ser feitas também nas fases últimas da própria lei. Assim sendo, pensa-se que bastará apenas um pequeno ajustamento na localização do ponto último do troço reto do modelo bt11, mantendo a tensão última constante. Tal ajustamento pode ser incorporado na equação 3.5, cuja curva se encontra ilustrada na Figura 3.6, e onde o parâmetro  $k$  tem uma função redutora da extensão última com o objetivo de recuar o troço reto para compensar melhor a área limitada pela curva e, assim, reduzir o momento torsor resistente na curva  $T-\theta$ .

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & , \quad se \ \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{c1}} \right)^{0.4} & , \quad se \ \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_{Tcr} \\ \frac{f_{Tu} - f_{Tcr}}{k \ \varepsilon_{Tu} - \varepsilon_{Tcr}} \varepsilon_{c1} + f_{Tcr} - \frac{f_{Tu} - f_{Tcr}}{k \ \varepsilon_{Tu} - \varepsilon_{Tcr}} \varepsilon_{Tcr} & , \quad se \ \varepsilon_{Tcr} < \varepsilon_{c1} \leq k \ \varepsilon_{Tu} \\ f_{Tu} & , \quad se \ \varepsilon_{c1} > k \ \varepsilon_{Tu} \end{cases} \quad (3.5)$$

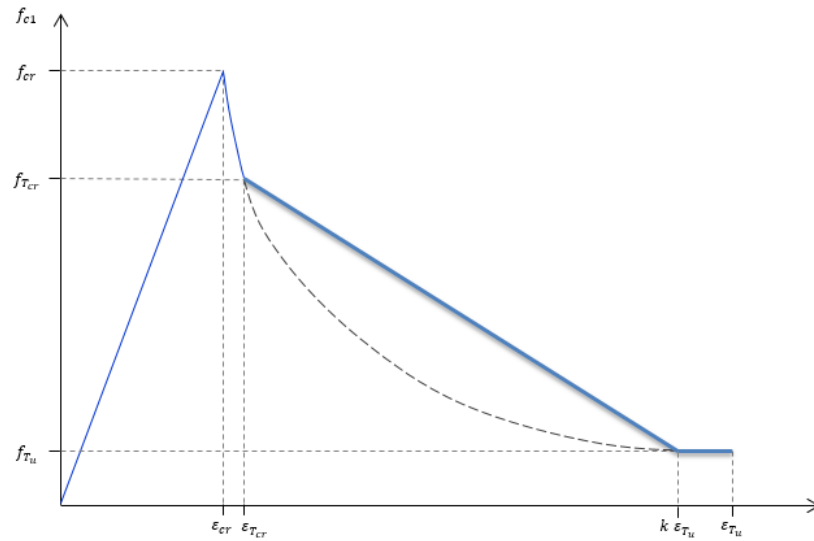


Figura 3.7 - Proposta para a recalibração do modelo bt11 correspondente a 1ª alteração do modelo bt4

Após a implementação desta modificação no aplicativo computacional Torque será necessário proceder a um novo estudo comparativo de forma a aproximar o melhor possível o valor  $k$  ideal para obter o momento torsor resistente dado pelo modelo original bt4 de Belarbi e Hsu (1994). Tal estudo deverá ser baseado numa análise quantitativa dos parâmetros considerados mais importantes para caracterizar as curvas  $T - \theta$  imediatamente após a fissuração da viga.

### 3.5. Considerações finais

Ao longo deste capítulo, tentou-se, com algumas modificações, calibrar a lei constitutiva do betão à tração original de Belarbi e Hsu (1994) [5]. A calibração desta lei já foi alvo de estudo por Nobre em 2014 [23], no qual a autora procedeu a algumas tentativas e tendo proposto numa fase final do seu estudo uma nova geometria para a lei em estudo. Tal proposta constituiu o ponto de partida deste estudo, tendo-se verificado que os resultados eram insatisfatórios no que respeitava à não alteração do momento torsor resistente com o aumento do patamar proposto na Versão 3 da lei pela autora e também à manutenção das fases comportamentais observadas experimentalmente após a fissuração das vigas. No entanto verificou-se que a fixação, na lei do betão à tração, do ponto correspondente ao momento torsor de fissuração da curva  $T - \theta$  conduziu a bons resultados permitindo a manutenção do momento torsor de fissuração do modelo teórico.

Verificadas as vantagens e desvantagens da alteração proposta por Nobre em 2014, tentou-se chegar a uma nova modificação que promovesse melhores resultados para os objetivos iniciais, ou seja, a não alteração do momento torsor de fissuração nem do momento torsor resistente e anular a redução do momento torsor imediatamente após a fissuração. Foram implementadas 3 novas e distintas modificações, descritas neste capítulo, as quais foram alvo de um estudo comparativo qualitativo a partir do qual se concluiu que o modelo bt11 correspondente à primeira modificação é o modelo que, em geral, melhores resultados apresenta para o conjunto das vigas estudadas. Depois desta conclusão, percebeu-se também que este modelo está muito próximo de cumprir os objetivos fixados mas necessita ainda de algumas recalibrações tal como a que foi proposta também no término da subsecção anterior.

A recalibração proposta não foi implementada nem abordada pelo facto de ter pela frente um novo estudo comparativo quantitativo bastante extenso, envolvendo uma maior gama de vigas de referência.

# Capítulo 4. Conclusões finais

## 4.1. Introdução

Neste capítulo final, será apresentado um sumário das principais conclusões obtidas ao longo da presente dissertação, assim como uma proposta de estudos a serem desenvolvidos futuramente em seguimento deste tema.

O modelo teórico utilizado (GSVATM) e o aplicativo computacional que incorpora este modelo (Torque), foram uma ferramenta crucial para o desenvolvimento deste estudo, tendo facilitado a implementação das propostas de alteração na lei constitutiva do betão à tração e também a obtenção dos gráficos comportamentais necessários para o estudo realizado.

## 4.2. Conclusões

Numa primeira fase deste trabalho foi implementada, no aplicativo computacional Torque baseado no GSVATM, a proposta de Nobre em 2014 [23] para a alteração da lei constitutiva do betão à tração em vigas de betão armado sujeitas à torção. Após análise dos resultados obtidos com base nesta proposta, designadamente a análise das curvas  $T-\theta$  obtidas, concluiu-se que, apesar da resolução do problema associado à redução do momento torsor após a fissuração, tal alteração aumentava notavelmente os valores de momento torsor resistente. Esta situação era inaceitável uma vez que o modelo GSVATM com a lei constitutiva original para o betão tracionado se encontrava já calibrado para a fase última. Para além disso, observou-se também o aparecimento de uma nova fase comportamental retilínea crescente a partir do momento torsor de fissuração, fase esta não observada teoricamente utilizando o modelo GSVATM original ou mesmo experimentalmente tendo por base resultados de vigas de referência. Desta forma, concluiu-se que o patamar horizontal incorporado na formulação da lei proposta por Nobre era inadequado, apesar do critério utilizado para a localização desse patamar no ponto da curva  $\sigma - \varepsilon$  definido como a extensão correspondente ao momento torsor de fissuração ser válido, uma vez que o momento torsor de fissuração permanece inalterável na simulação da curva  $T - \theta$  independentemente das alterações implementadas na lei constitutiva do betão à tração.

Tendo por base as conclusões obtidas da análise anterior, desenvolveu-se um novo estudo para uma nova proposta de alteração da lei do betão à tração, com o critério de implementar essas modificações somente após o ponto da curva  $\sigma - \varepsilon$  correspondente ao momento torsor de fissuração. O primeiro objetivo foi perceber qual o novo comportamento da curva  $T - \theta$  recorrendo a três alterações distintas da curva  $\sigma - \varepsilon$  para o betão tracionado, alterações estas designadas de modelos bt11, bt12 e bt13. Após a implementação dessas

alterações e análise gráfica de resultados preliminares obtidos, o modelo bt11 mostrou-se bastante satisfatório para a resolução das problemáticas que se pretendiam corrigir. Assim sendo, realizou-se um estudo comparativo exaustivo para diversas vigas de referência de betão armado com secção cheia, cujos resultados experimentais são existentes na literatura e que também tinham sido utilizadas por Nobre em 2014 [23]. Essas vigas foram selecionadas de acordo com o critério da proximidade entre os momentos resistentes teóricos obtidos pelo GSVATM original e os correspondentes experimentais, tendo-se aceitado um máximo de 10% de desvio. A partir deste critério, escolheram-se 51 vigas para serem simuladas pelo aplicativo computacional Torque implementando os três modelos bt11, bt12 e bt13 relativos às alterações implementadas para a  $\sigma - \varepsilon$  para o betão à tração. No total foram realizadas 316 simulações com o *software* Torque em vigas de diferentes características geométricas e mecânicas.

A partir dos resultados obtidos com as 51 vigas de referência, o modelo bt11 destacou-se sempre como sendo, no geral, o que proporcionou os melhores resultados pretendidos. Com este modelo é possível garantir uma grande proximidade com os momentos torsores resistentes calculados pelo GSVATM original e também reduzir apreciavelmente ou mesmo anular a redução do momento torsor após a fissuração da viga. Após uma análise gráfica e qualitativa das curvas  $T - \theta$  resultantes das simulações realizadas com o Torque, comparativamente às curvas  $T - \theta$  experimentais das vigas correspondentes, tendo em conta as características das mesmas, nomeadamente a taxa de armadura de torção e a resistência do betão foi possível obter algumas conclusões. As vigas que apresentam um certo “equilíbrio” entre as duas variáveis anteriormente referidas, ou seja as vigas com elevadas taxas de armaduras e com betão de elevada resistência, ou as vigas com baixas taxas de armadura e com betão de resistência menor, apresentam bons resultados para o modelo bt11.

Contudo foi também verificado em todas as vigas simuladas pelo Torque que o modelo bt11 induzia, ainda assim, um aumento ligeiro do momento torsor resistente e por isso foi ainda proposta uma ligeira modificação no modelo bt11 na fase próxima da extensão última. Para tal, foi introduzido um fator corretor  $k$  para deslocar ligeiramente para a esquerda o ponto terminal do alinhamento reto descendente proposto na lei do betão à tração, alterando para tal a extensão última mas mantendo a tensão última constante. Acredita-se que esta alteração permitirá aproximar ainda mais os momentos torsor resistentes comparativamente aos obtidos pelo GSAVATM original.

### 4.3. Trabalhos futuros

No seguimento do trabalho apresentado, considera-se importante o desenvolvimento dos seguintes estudos:

- Confirmação da adequação do modelo proposto bt11 neste trabalho para a lei constitutiva do betão à tração, tendo por base uma análise quantitativa envolvendo as variáveis de estudo (taxa de armadura de torção e resistência do betão) e os parâmetros considerados mais importantes para caracterizar as zonas de interesse das curvas  $T - \theta$  das vigas de referência, designadamente a resistência última e a rigidez à torção no estado fissurado;

- Parametrizar o valor ótimo do fator de correção  $k$  a utilizar em função das características geométricas e mecânicas das vigas;

- Estender os estudos anteriores a um maior número de vigas de referência, incluindo vigas com secção vazada.



# Referências

1. ACI Committee 318, “Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)”, American Concrete Institute, Detroit, 1971
2. ACI, “Torsion of Structural Concrete (SP-18), American Concrete Institute, Detroit, Janeiro, 1968
3. Andrade, J.M.A., “Modelação do Comportamento Global de Vigas Sujeitas à Torção” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2010
4. Bastos, P.S.S., “Torção em Vigas de Concreto Armado”, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2005
5. Belarbi, A. and Hsu, T.T.C., “Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete”, *Structural Journal of American Concrete Institute*, Vol. 91(4), 1994, pp. 465-474
6. Belarbi, A. and Hsu, T.T.C., “Constitutive Laws of Softened Concrete Biaxial Tension-Compression” Research Report UHCEE, Vol. 91(2), 1991
7. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Lopes, S.M.R., “Modified Variable Angle Truss-Model for Torsion in Reinforced Concrete Beams”, *Materials and Structures*, Vol. 45, 2012, pp. 1877-1902
8. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Lopes, S.M.R., “Softened Truss Model for Reinforced NSC and HSC Beams under Torsion: a Comparative Study”, *Engineering Structures*, Vol. 42, 2012, pp.278-296
9. Bernardo, L.F.A., Andrade, J.M.A. and Nunes, N.C.G., “Generalized Softened Variable Angle Truss-Model for Reinforced Concrete Beams under Torsion”, *Materials and Structures* 2014, DOI: 10.1617/s11527-014-0301-z
10. Bernardo, L.F.A., “Torção em Vigas em Caixão de Betão de Alta Resistência” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003
11. Bernardo, L.F.A., and Lopes, S.M.R., “Behaviour of Concrete Beams under Torsion - NSC Plain and Hollow Beams”, *Materials and Structures*, RILEM, Springer, Netherlands, Vol. 41, No. 6, Junho 2008, pp.1143-1167
12. EN 1992-1-1, “Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão - Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios”, Comité Europeu de Normalização, Bruxelas, Abril, 2004
13. Fang, I.K. and Shiau, J.K., “Torsional Behavior of Normal- and High-Strength Concrete Beams”, *ACI Structural Journal*, Vol. 101(3), 2004, pp.304-313

14. Filho, J.J.H.S., “Reforço à Torção de Vigas de Concreto Armado com Compósitos de Fibras de Carbono”, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007
15. Hsu, T.T.C. and Mo, Y.L., “Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests”, *Journal of the American Concrete Institute*, 1985, Vol. 82, No. 4, pp. 443-452
16. Hsu, T.T.C., “Torsion of Reinforced Concrete”, Van Nostrand Reinhold Company, 1984
17. Hsu, T.T.C., “Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members” Torsion of Structural Concrete SP-18, American Concrete Institute, Detroit, 1968, pp. 261-306
18. <[http://pormenoresconstrutivos.cype.pt/FIG012\\_A.html](http://pormenoresconstrutivos.cype.pt/FIG012_A.html)>, acessado em 01/10/2013
19. <<http://openbuildings.com/buildings/royal-festival-hall-southbank-centre-profile-3515/media#!buildings-media/39>>, acessado em 10/02/2015
20. Jeng, C. H. and Hsu, T.T.C., “A Softened Membrane Model for Torsion in Reinforced Concrete Members”, *Engineering Structures*, Vol. 31, 2009, pp. 1944-1954
21. Leonhardt, F. and Schelling, G., “Torsionsversuche an Stahl Betonbalken”, Deutscher Ausschuss fur Stahlbeton, Bulletin No. 239, 1974
22. McMullen, A.E. and Rangan, B.V., “Pure Torsion in Rectangular Sections - A Re-examination”, *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 75(10), 1978, pp. 511-519
23. Nobre, S.S., “Avaliação da Lei Constitutiva do Betão à Tração para a Fissuração de Vigas de Betão Armado Sujeitas à Torção” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2014
24. Rodrigues, J.A.T.F., “Modelação Teórica de Vigas de Betão Armado com Pré-esforço Longitudinal à Torção com base no SMMT” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã
25. Taborda, C.S.B., “Efeito do Confinamento Axial no Comportamento de Vigas de Betão Estrutural sujeitas à Troção” PhD Thesis, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2012
26. Vecchio, F.J. and Collins, M.P., “Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear”, *IABSE Colloquium, Advanced Mechanics of Reinforced Concrete*, Delft, Final Report. 1981, pp. 211-225
27. Zangh, H.T.C. and Hsu, T.C., “Behavior and Analysis of 100 MPa Concrete Membrane Elements”, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 124, 1998, pp. 24-34

# Anexos



## Anexo I. Vigas de referência

Tabela I.1. Características geométricas das vigas de referência

Viga	$x$ (cm)	$y$ (cm)	$x_1$ (cm)	$y_1$ (cm)	$A_{st}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{st}/s$ (cm <sup>2</sup> /m)	$\rho_l$ (%)	$\rho_t$ (%)	$\rho_{total}$ (%)
B4 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	15.484	14.014	1.600	1.618	3.218
B5 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	20.387	18.473	2.107	2.133	4.240
B6 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	25.806	22.578	2.667	2.607	5.274
B7 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	5.161	10.160	0.533	1.173	1.707
B9 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	4.657	1.173	0.538	1.711
C5 [17]	25.4	25.4	21.59	21.59	15.484	17.670	2.400	2.365	4.765
G3 [17]	25.4	50.8	21.59	46.99	11.355	8.294	0.880	0.882	1.762
G4 [17]	25.4	50.8	21.59	46.99	15.484	11.289	1.200	1.200	2.400
G5 [17]	25.4	50.8	21.59	46.99	20.387	15.052	1.580	1.600	3.180
G7 [17]	25.4	50.8	21.59	46.99	12.000	8.835	0.930	0.939	1.869
G8 [17]	25.4	50.8	21.59	46.99	17.032	12.315	1.320	1.309	2.629
I3 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	10.160	1.173	1.173	2.347
I4 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	15.484	14.014	1.600	1.618	3.218
I5 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	20.387	18.473	2.107	2.133	4.240
I6 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	25.806	22.578	2.667	2.607	5.274
J1 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	5.161	4.657	0.533	0.538	1.071
J2 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	8.000	7.210	0.827	0.833	1.659
J3 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	10.160	1.173	1.173	2.347
K2 [17]	15.24	49.53	11.43	45.72	7.742	6.773	1.026	1.026	2.051
K3 [17]	15.24	49.53	11.43	45.72	12.000	10.421	1.590	1.578	3.168
K4 [17]	15.24	49.53	11.43	45.72	17.032	15.052	2.256	2.279	4.536
M1 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	8.000	4.756	0.827	0.549	1.376
M2 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	11.355	6.773	1.173	0.782	1.956
M3 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	15.484	9.236	1.600	1.067	2.667
M4 [17]	25.4	38.1	21.59	34.29	20.387	12.315	2.107	1.422	3.529
N1a [17]	15.24	30.48	13.03	28.27	2.839	3.503	0.611	0.623	1.234
N2 [17]	15.24	30.48	13.03	28.27	5.161	6.350	1.111	1.129	2.240
N2a [17]	15.24	30.48	13.03	28.27	5.161	6.209	1.111	1.104	2.215
N3 [17]	15.24	30.48	13.03	28.27	4.258	5.080	0.917	0.903	1.820
N4 [17]	15.24	30.48	13.03	28.27	6.581	7.983	1.417	1.420	2.836
VB2 [21]	44	24	42	22	7.008	5.840	0.664	0.708	1.372
VB3 [21]	44	24	42	22	7.008	5.840	0.664	0.708	1.372
VB4 [21]	44	24	42	22	7.008	5.840	0.664	0.708	1.372
VM2 [21]	44	24	42	22	6.600	5.321	0.625	0.645	1.270
VM3 [21]	58.7	32	56.1	29.4	12.840	7.143	0.684	0.650	1.334
VQ3 [21]	58	18.6	56	16.6	4.270	3.050	0.396	0.411	0.806
VQ9 [21]	80.6	14	78.6	12	5.076	2.820	0.450	0.453	0.903
VS3 [21]	44	24	42	22	5.490	4.552	0.520	0.552	1.072
VS4, VQ5 [21]	44	24	42	22	7.320	6.100	0.693	0.739	1.433
VS10, VB1 [21]	44	24	42	22	6.960	5.800	0.659	0.703	1.362
VU1 [21]	44	24	42	22	3.360	5.600	0.318	0.679	0.997
VU2 [21]	44	24	42	22	5.040	5.600	0.477	0.679	1.156
VU3 [21]	44	24	42	22	6.720	4.179	0.636	0.507	1.143
A3 [22]	25.4	25.4	21.92	21.92	8.000	8.941	1.240	1.215	2.455
A4 [22]	25.4	25.4	21.92	21.92	11.355	12.418	1.760	1.688	3.448
B3 [22]	17.78	35.56	14.3	32.08	8.000	8.597	1.265	1.261	2.527
B4 [22]	17.78	35.56	14.3	32.08	11.355	11.764	1.796	1.726	3.522
H-06-12 [13]	35	50	30	45	20.645	7.097	1.180	0.608	1.788
H-12-12 [13]	35	50	30	45	20.645	14.194	1.180	1.217	2.396
H-14-10 [13]	35	50	30	45	17.032	16.129	0.973	1.382	2.356
N-06-12 [13]	35	50	30	45	20.645	7.097	1.180	0.608	1.788
N-14-10 [13]	35	50	30	45	17.032	16.129	0.973	1.382	2.356

Tabela I.2. Características mecânicas das vigas de referência

Viga	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{ctm}$ (MPa)	$f_{lym}$ (MPa)	$f_{tym}$ (MPa)	$E_c$ (GPa)	$E_s$ (GPa)	$\varepsilon_o$ (%)	$\varepsilon_{cu}$ (%)	$\varepsilon_{lu}$ (%)	$\varepsilon_{tu}$ (%)	$L_r$ (mm)
B4 [24]	29.17	2.30	320.00	323.45	30.3	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.047
B5 [24]	30.55	2.39	332.41	321.38	30.8	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.043
B6 [24]	28.83	2.27	331.72	322.76	30.2	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.041
B7 [24]	26.00	2.06	320.00	318.62	29.3	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.061
B9 [24]	28.83	2.27	319.31	342.76	30.2	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.067
C5 [24]	27.24	2.15	328.28	328.97	29.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.025
G3 [24]	26.83	2.12	338.62	327.59	29.6	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.051
G4 [24]	28.28	2.23	325.52	321.38	30.1	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.056
G5 [24]	26.90	2.13	331.03	327.59	29.6	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.043
G7 [24]	30.97	2.42	319.31	322.76	30.9	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.041
G8 [24]	28.34	2.24	322.07	328.97	30.1	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.038
I3 [24]	44.76	3.32	343.45	333.79	34.5	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.043
I4 [24]	44.97	3.33	315.17	326.21	45.0	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.032
I5 [24]	45.03	3.33	310.34	325.52	34.6	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.030
I6 [24]	45.79	3.38	325.52	328.97	34.7	200	0.0023	0.0035	0.01	0.01	0.024
J1 [24]	14.34	1.13	327.59	346.21	25.0	200	0.0016	0.0035	0.01	0.01	0.061
J2 [24]	14.55	1.05	320.00	340.69	24.6	200	0.0016	0.0035	0.01	0.01	0.041
J3 [24]	16.90	1.29	338.62	337.24	25.8	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.032
K2 [24]	30.62	2.40	335.86	337.93	30.8	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.033
K3 [24]	29.03	2.29	315.86	320.69	30.3	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.034
K4 [24]	28.62	2.26	344.14	340.00	30.2	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.030
M1 [24]	29.86	2.35	326.21	353.10	30.6	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.067
M2 [24]	30.55	2.39	328.97	357.24	30.8	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.036
M3 [24]	26.76	2.12	322.07	326.21	29.6	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.051
M4 [24]	26.55	2.10	318.62	326.90	29.5	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.038
N1a [24]	28.69	2.26	346.21	344.83	30.2	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.051
N2 [24]	30.41	2.38	331.03	337.93	30.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.030
N2a [24]	28.41	2.24	333.10	360.69	30.1	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.042
N3 [24]	27.31	2.16	351.72	351.72	29.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.036
N4 [24]	27.31	2.16	340.92	355.86	29.7	200	0.0020	0.0035	0.01	0.01	0.028
VB2 [30]	26.40	2.09	541.45	541.45	29.4	200	0.0019	0.0035	0.01	0.01	0.065
VB3 [30]	39.10	2.97	541.45	541.45	33.1	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.065
VB4 [30]	49.80	3.61	541.45	541.45	35.6	200	0.0024	0.0035	0.01	0.01	0.065
VM2 [30]	36.10	2.77	431.59	436.49	32.3	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.065
VM3 [30]	40.00	3.02	461.01	442.38	33.4	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.065
VQ3 [30]	17.60	1.36	432.57	432.57	26.1	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.061
VQ9 [30]	19.50	1.53	441.40	441.40	26.7	200	0.0018	0.0035	0.01	0.01	0.061
VS3 [30]	19.50	1.53	432.57	432.57	26.7	200	0.0018	0.0035	0.01	0.01	0.061
VS4, VQ5 [30]	19.00	1.48	432.57	432.57	26.7	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.065
VU1 [30]	19.50	1.53	441.40	441.40	26.9	200	0.0018	0.0035	0.01	0.01	0.061
VU2 [30]	19.50	1.53	441.40	441.40	26.9	200	0.0018	0.0035	0.01	0.01	0.061
VU3 [30]	18.50	1.44	441.40	441.40	26.5	200	0.0017	0.0035	0.01	0.01	0.065
A3 [31]	39.38	2.98	352.41	360.00	33.2	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.056
A4 [31]	39.17	2.97	351.00	360.00	33.1	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.036
B3 [31]	38.62	2.94	352.41	360.00	33.0	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.056
B4 [31]	38.48	2.93	351.03	360.00	32.9	200	0.0022	0.0035	0.01	0.01	0.036
H-06-12 [19]	78.50	4.62	410.00	440.00	40.8	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.067
H-12-12 [19]	78.50	4.62	410.00	440.00	40.8	200	0.0027	0.0035	0.01	0.01	0.056
H-14-10 [19]	68.40	4.37	500.00	360.00	39.2	200	0.0026	0.0035	0.01	0.01	0.032
N-06-12 [19]	35.50	2.73	410.00	440.00	32.2	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.067
N-14-10 [19]	33.50	2.60	500.00	360.00	31.6	200	0.0021	0.0035	0.01	0.01	0.032

## Anexo II. Análise gráfica

### Viga B4 - Hsu [1968]

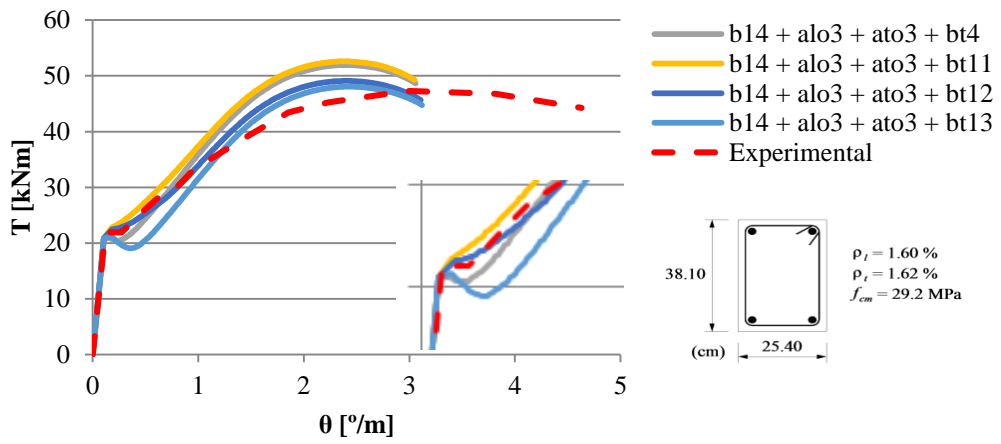


Gráfico II. 1. Curvas  $T-\theta$  para a viga B4

### Viga B5 - Hsu [1968]

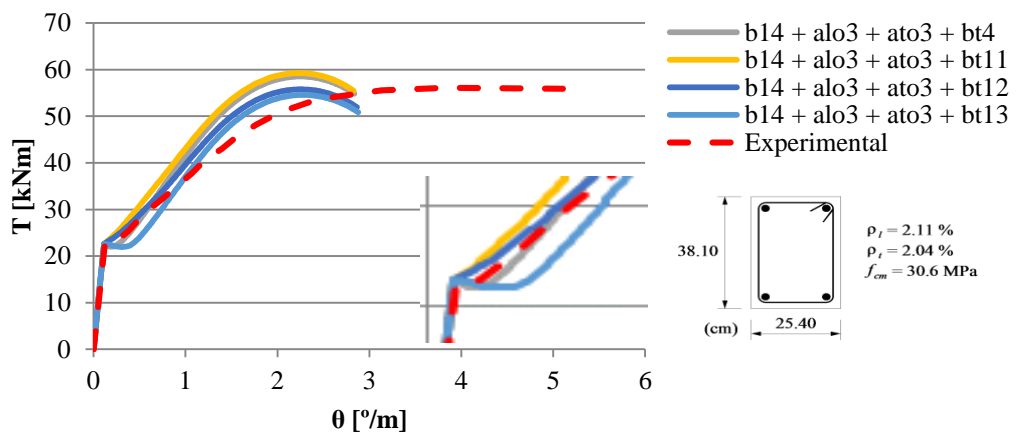


Gráfico II. 2. Curvas  $T-\theta$  para a viga B5

### Viga B6 - Hsu [1968]

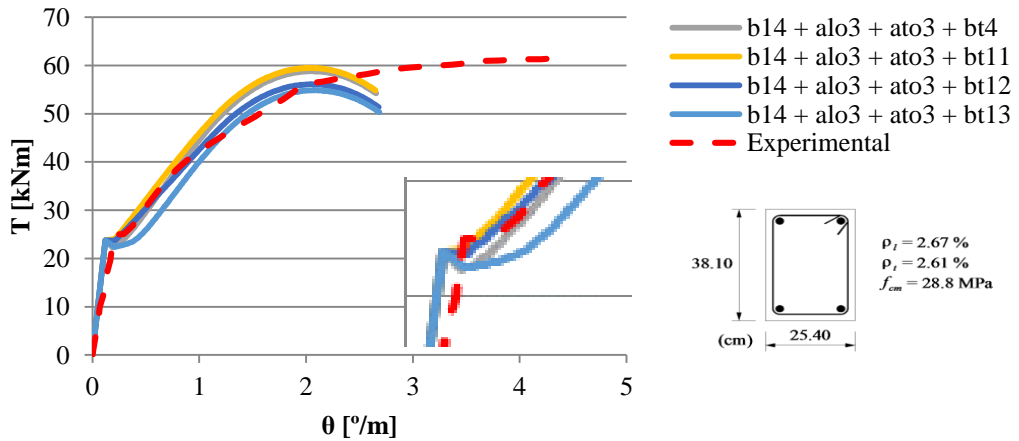


Gráfico II. 3. Curvas  $T-\theta$  para a viga B6

### Viga B7 - Hsu [1968]

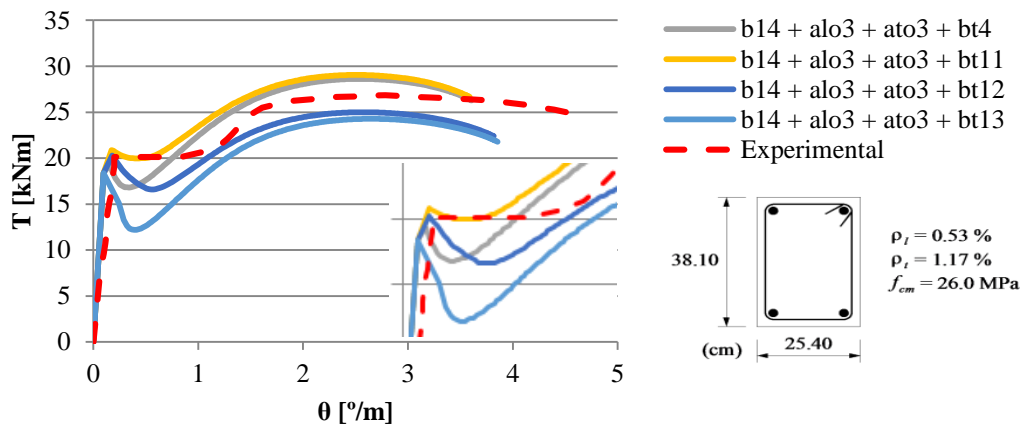


Gráfico II. 4. Curvas  $T-\theta$  para a viga B7

### Viga B9 - Hsu [1968]

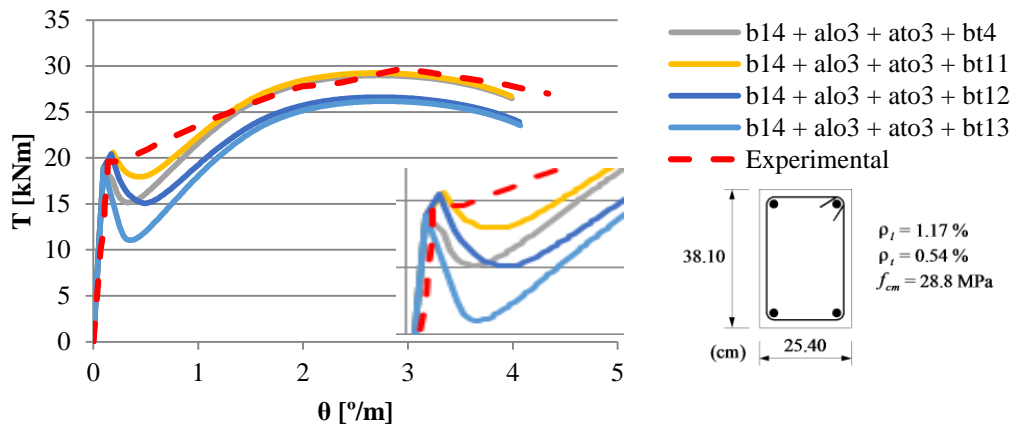


Gráfico II. 5. Curvas  $T-\theta$  para a viga B9

### Viga C5 - Hsu [1968]

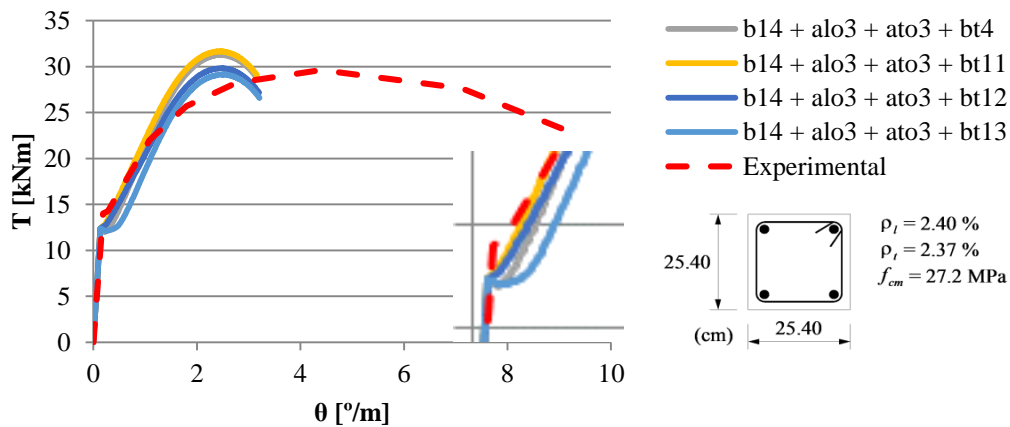


Gráfico II. 6. Curvas  $T-\theta$  para a viga C5

### Viga G3 - Hsu [1968]

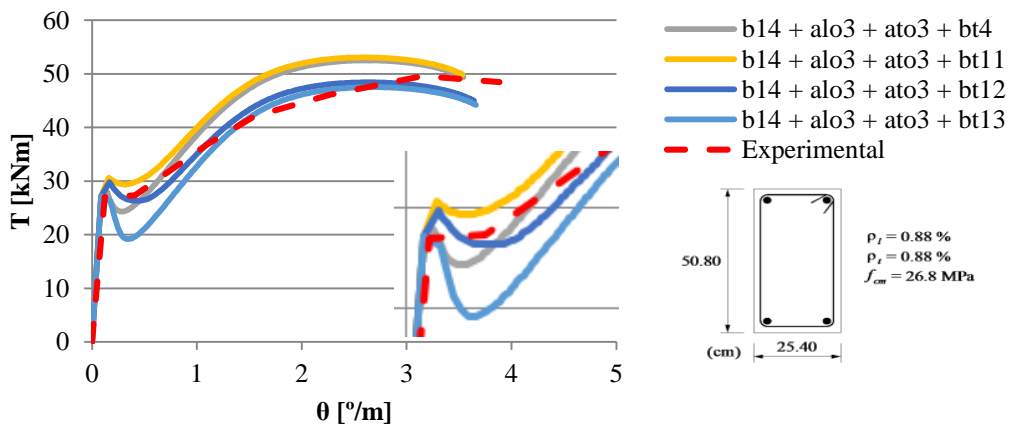


Gráfico II. 7. Curvas T -  $\theta$  para a viga G3

### Viga G4 - Hsu [1968]

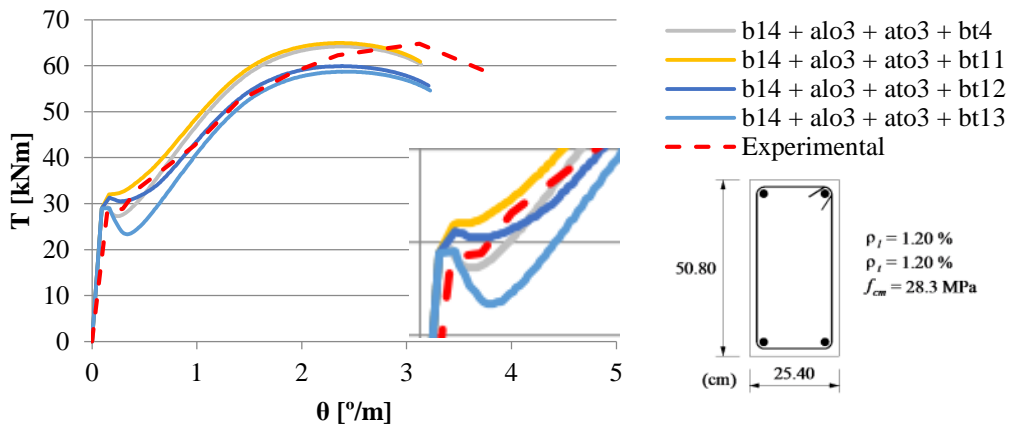


Gráfico II. 8. Curvas T -  $\theta$  para a viga G4

### Viga G5 - Hsu [1968]

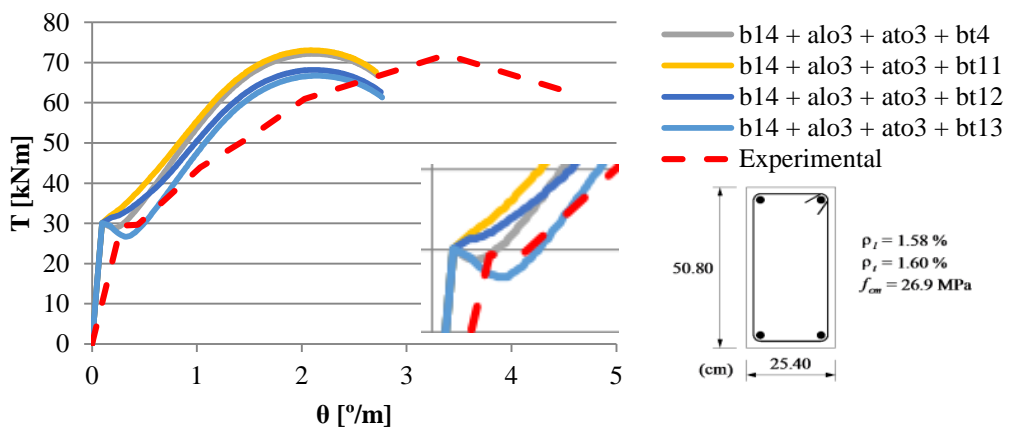


Gráfico II. 9. Curvas T -  $\theta$  para a viga G5

### Viga G7 - Hsu [1968]

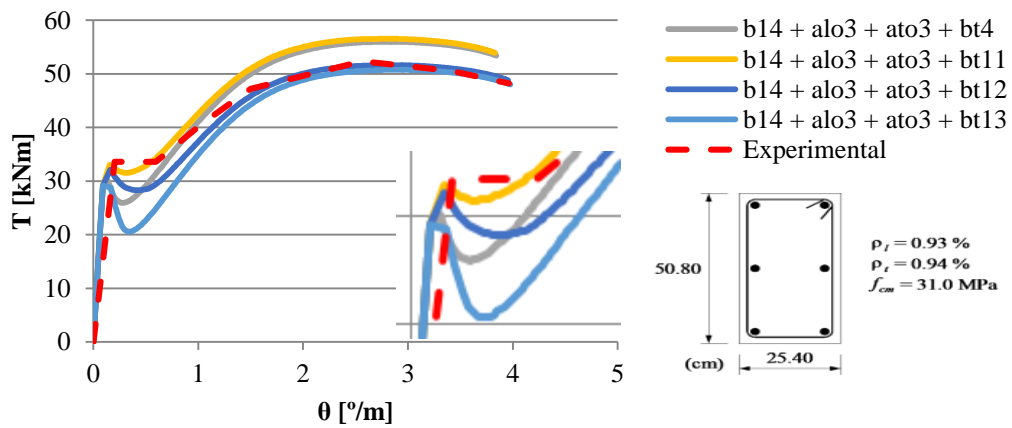


Gráfico II. 10. Curvas T -  $\theta$  para a viga G7

### Viga G8 - Hsu [1968]

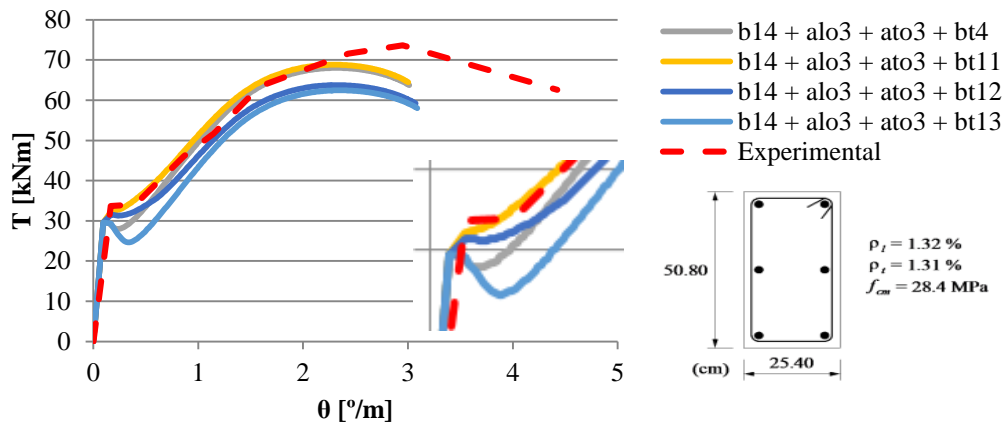


Gráfico II. 11. Curvas T -  $\theta$  para a viga G8

### Viga I3 - Hsu [1968]

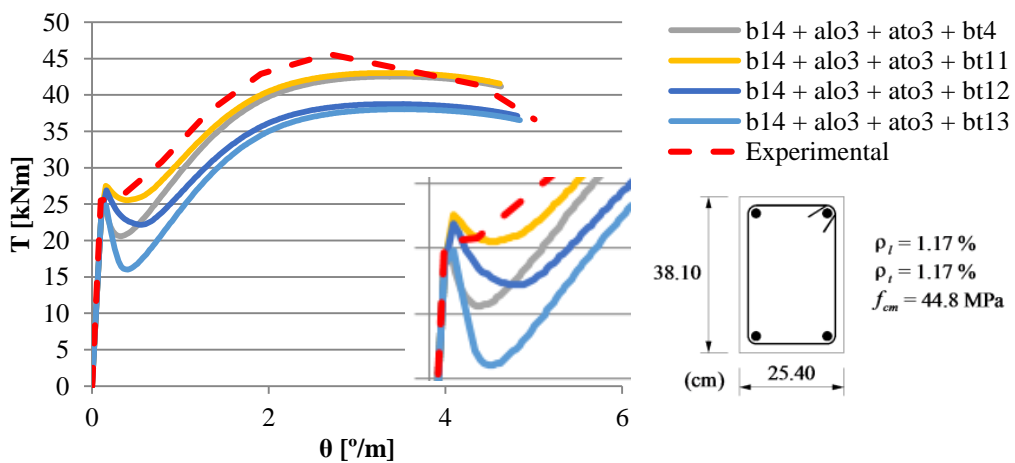


Gráfico II. 12. Curvas T -  $\theta$  para a viga I3

### Viga I4 - Hsu [1968]

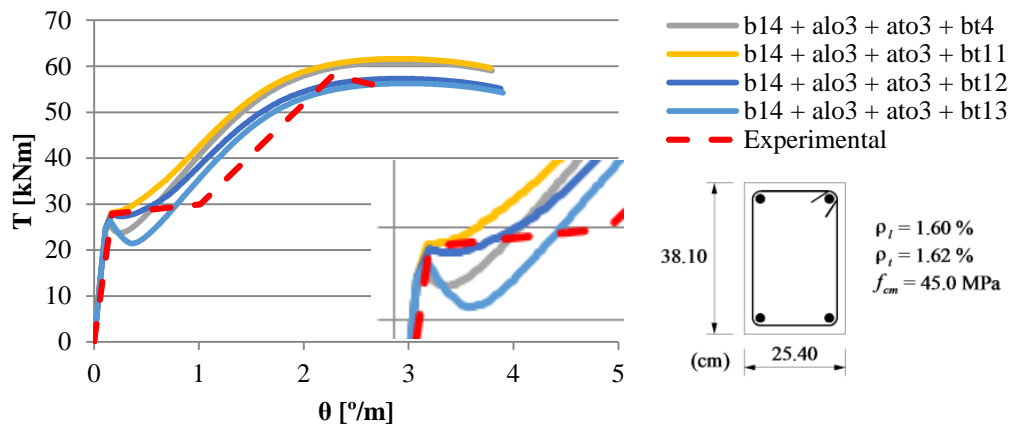


Gráfico II. 13. Curvas T -  $\theta$  para a viga I4

### Viga I5 - Hsu [1968]

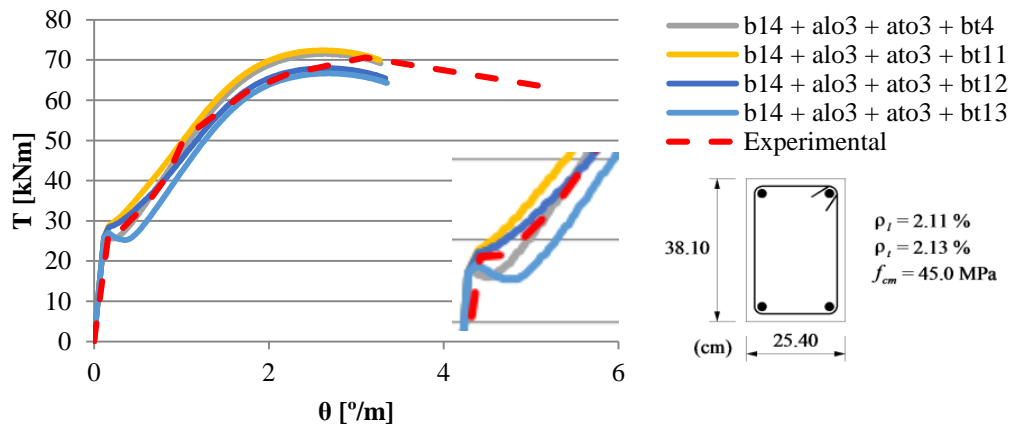


Gráfico II. 14. Curvas T -  $\theta$  para a viga I5

### Viga I6 - Hsu [1968]

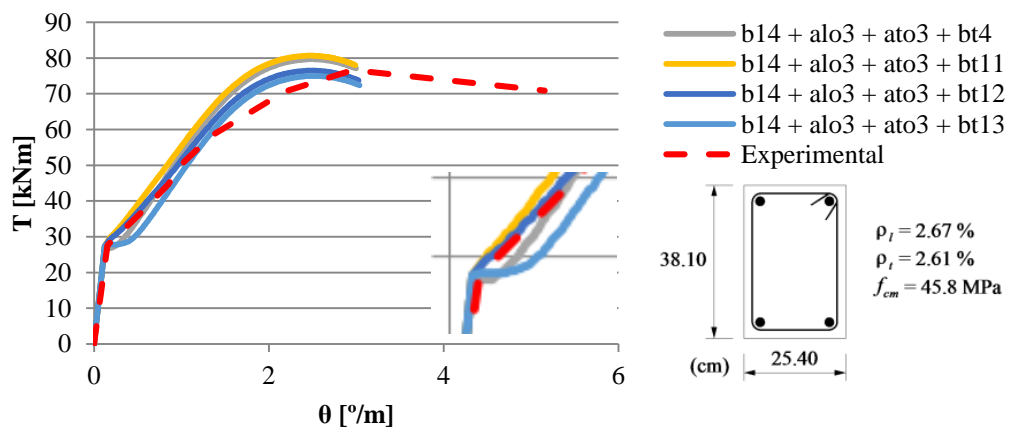


Gráfico II. 15. Curvas T -  $\theta$  para a viga I6

### Viga J1 - Hsu [1968]

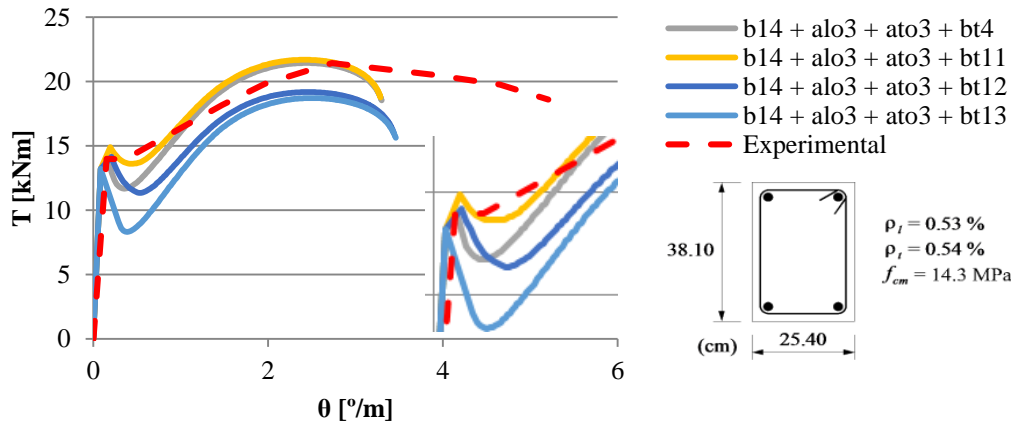


Gráfico II. 16. Curvas  $T-\theta$  para a viga J1

### Viga J2 - Hsu [1968]

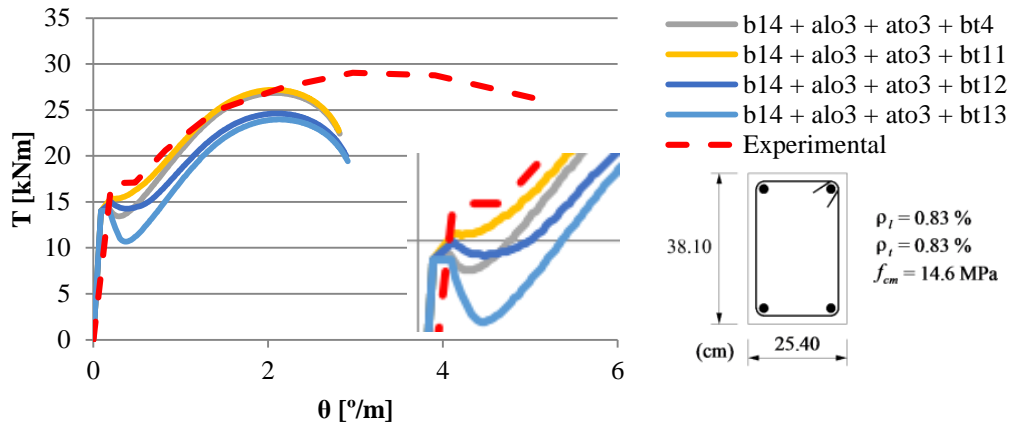


Gráfico II. 17. Curvas  $T-\theta$  para a viga J2

### Viga J3 - Hsu [1968]

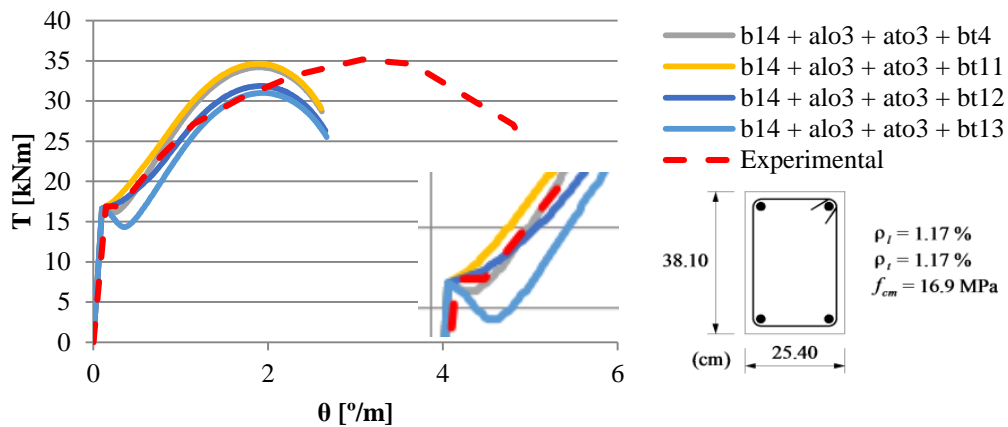


Gráfico II. 18. Curvas  $T-\theta$  para a viga J3

### Viga K2 - Hsu [1968]

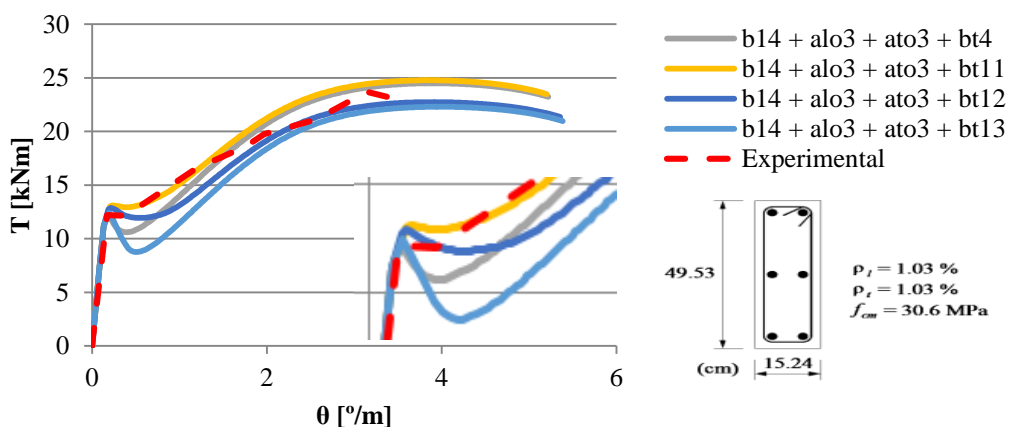


Gráfico II. 19. Curvas T -  $\theta$  para a viga K2

### Viga K3 - Hsu [1968]

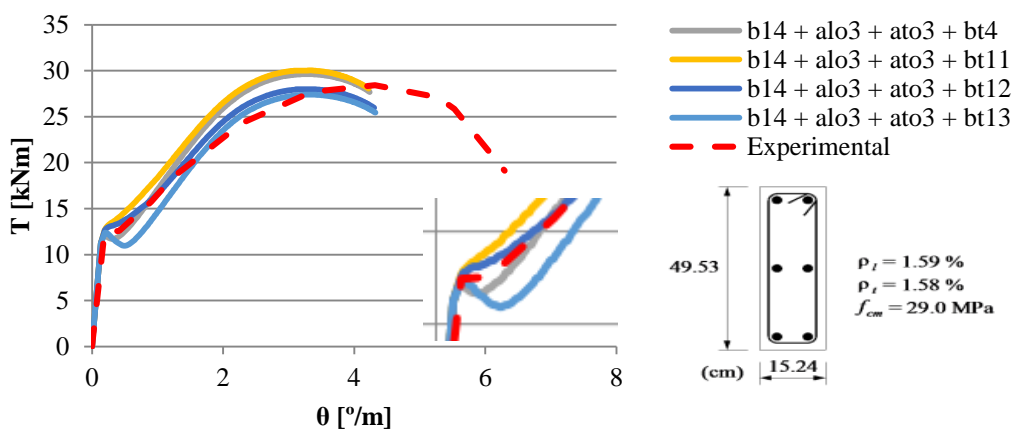


Gráfico II. 20. Curvas T -  $\theta$  para a viga K3

### Viga K4 - Hsu [1968]

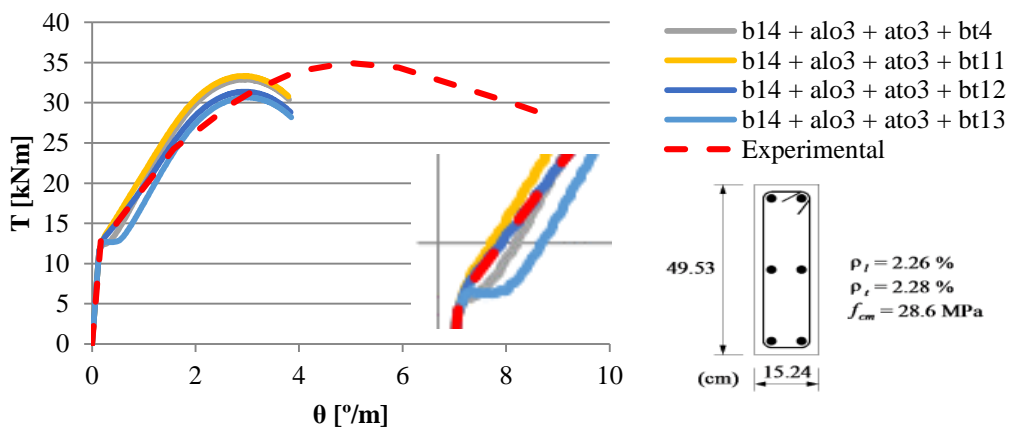


Gráfico II. 21. Curvas T -  $\theta$  para a viga K4

### Viga M1 - Hsu [1968]

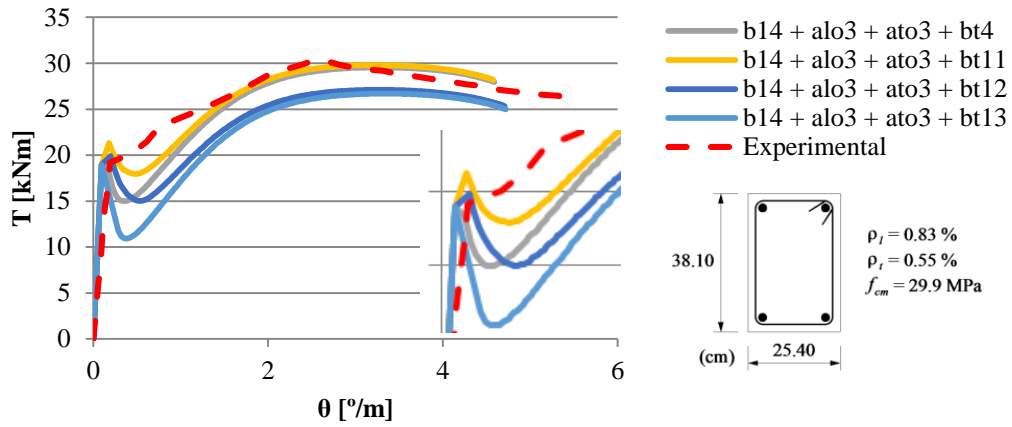


Gráfico II. 22. Curvas T -  $\theta$  para a viga M1

### Viga M2 - Hsu [1968]

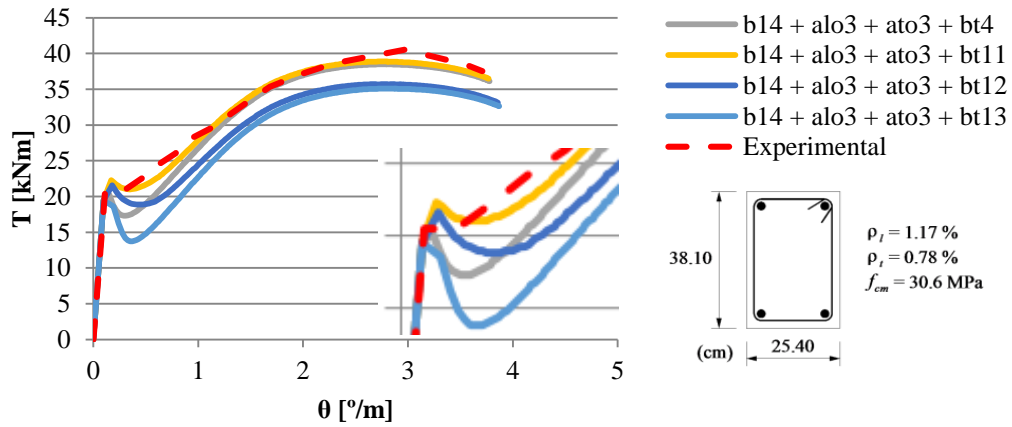


Gráfico II. 23. Curvas T -  $\theta$  para a viga M2

### Viga M3 - Hsu [1968]

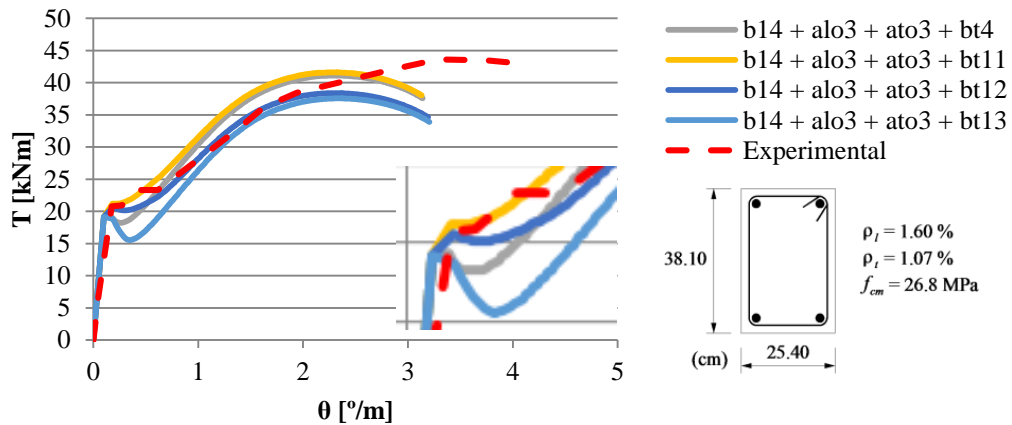


Gráfico II. 24. Curvas T -  $\theta$  para a viga M3

### Viga M4 - Hsu [1968]

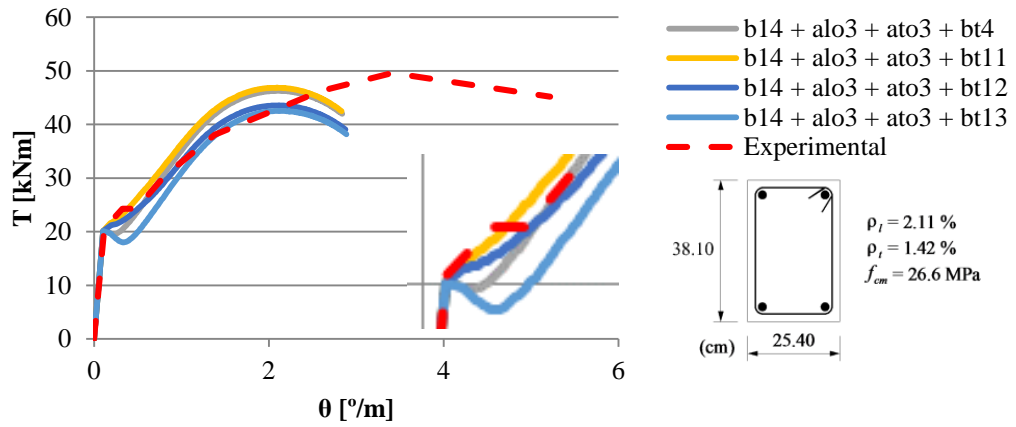


Gráfico II. 25. Curvas T -  $\theta$  para a viga M4

### Viga N1a - Hsu [1968]

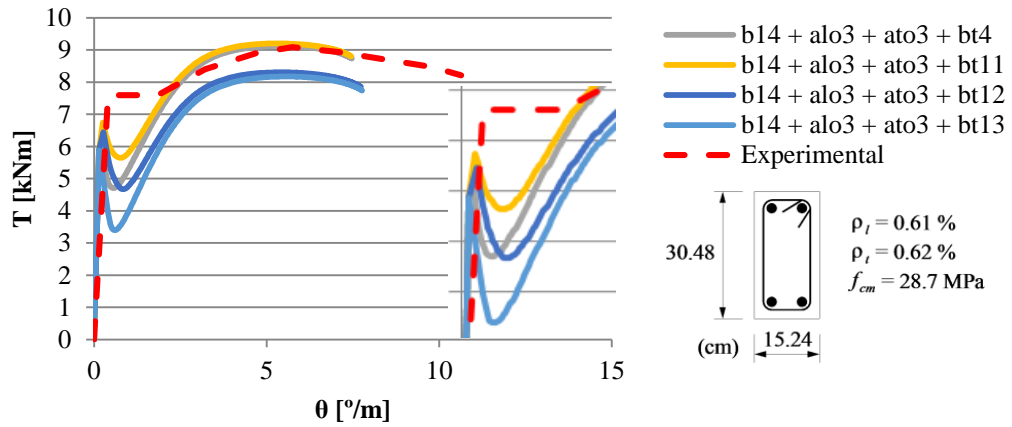


Gráfico II. 26. Curvas T -  $\theta$  para a viga N1a

### Viga N2 - Hsu [1968]

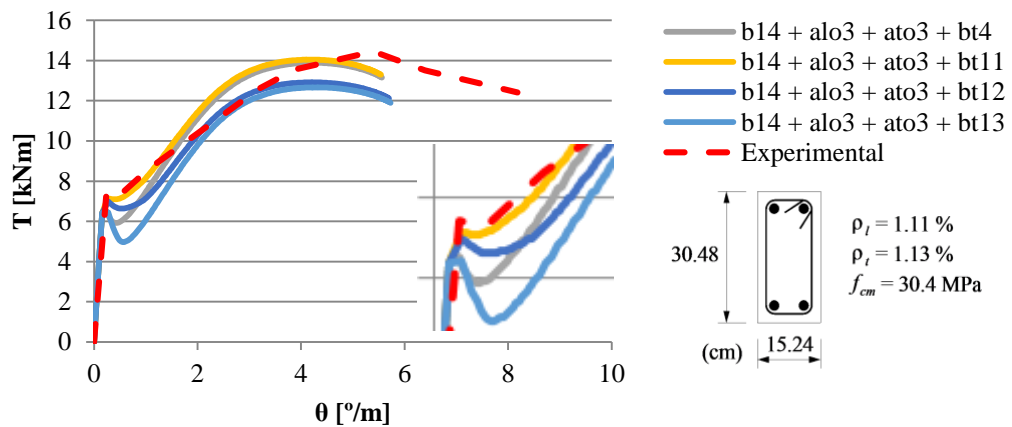


Gráfico II. 27. Curvas T -  $\theta$  para a viga N2

### Viga N2a - Hsu [1968]

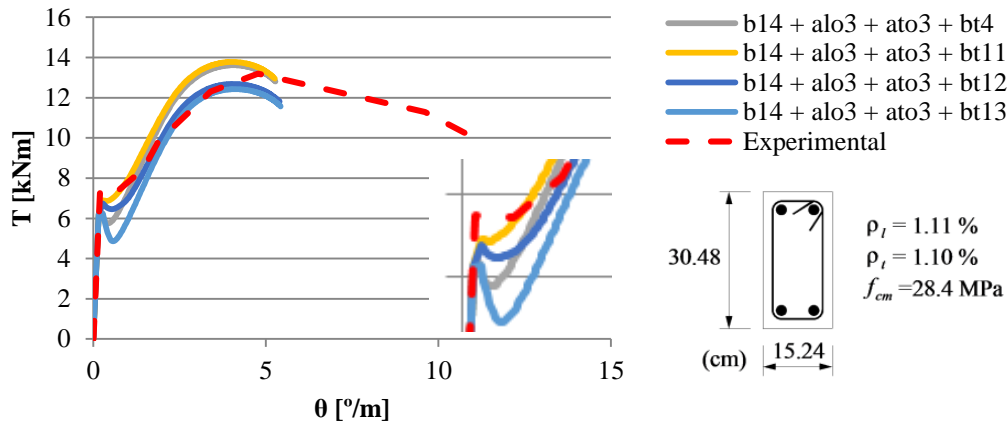


Gráfico II. 28. Curvas T -  $\theta$  para a viga N2a

### Viga N3 - Hsu [1968]

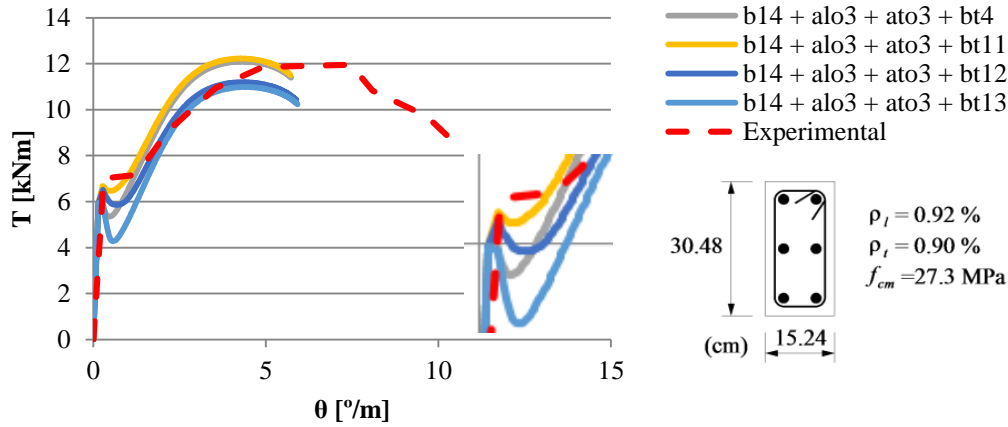


Gráfico II. 29. Curvas T -  $\theta$  para a viga N3

### Viga N4 - Hsu [1968]

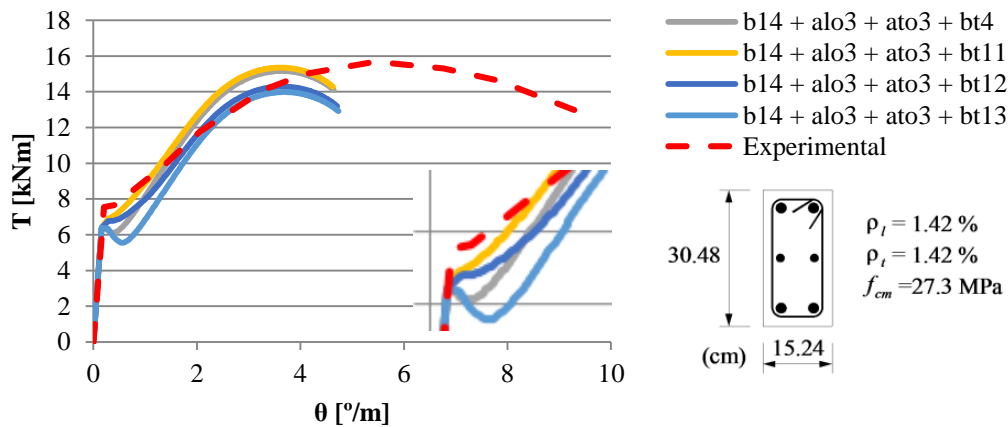


Gráfico II. 30. Curvas T -  $\theta$  para a viga N4

### Viga VB2 - Leonhardt e Schelling [1974]

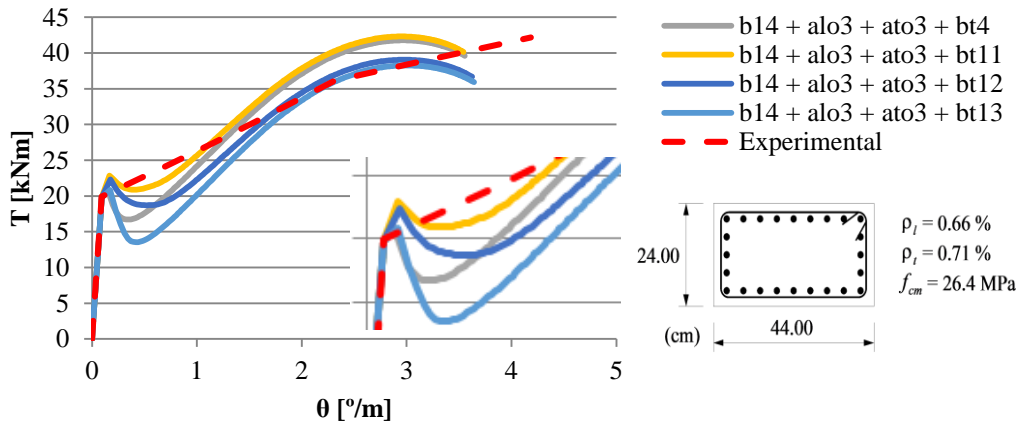


Gráfico II. 31. Curvas T -  $\theta$  para a viga VB2

### Viga VB3 - Leonhardt e Schelling [1974]

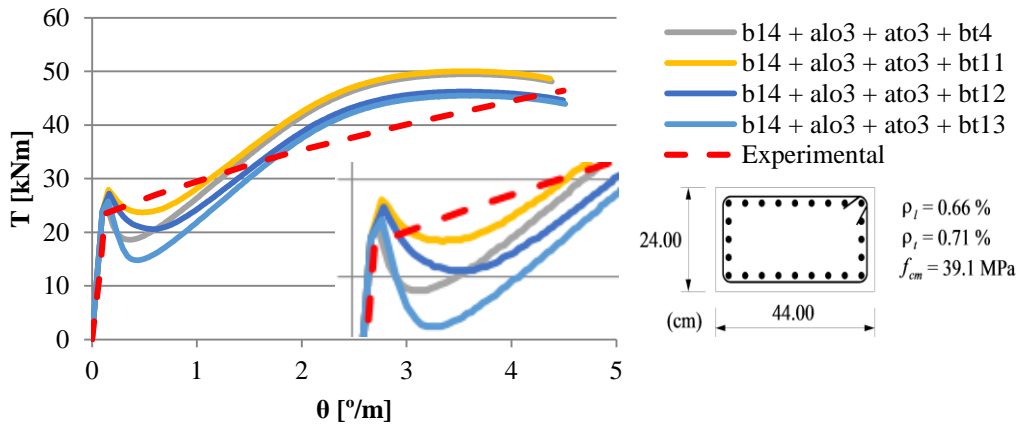


Gráfico II. 32. Curvas T -  $\theta$  para a viga VB3

### Viga VB4 - Leonhardt e Schelling [1974]

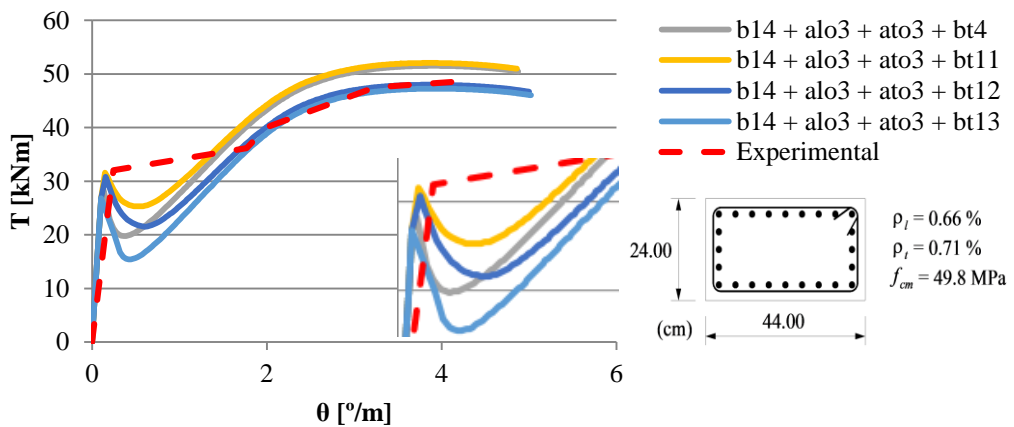


Gráfico II. 33. Curvas T -  $\theta$  para a viga VB4

### Viga VM2 - Leonhardt e Schelling [1974]

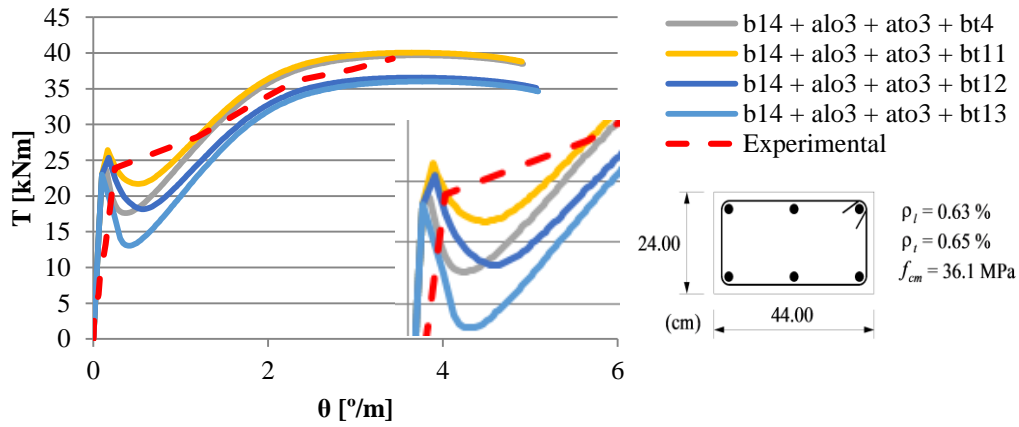


Gráfico II. 34. Curvas T -  $\theta$  para a viga VM2

### Viga VM3 - Leonhardt e Schelling [1974]

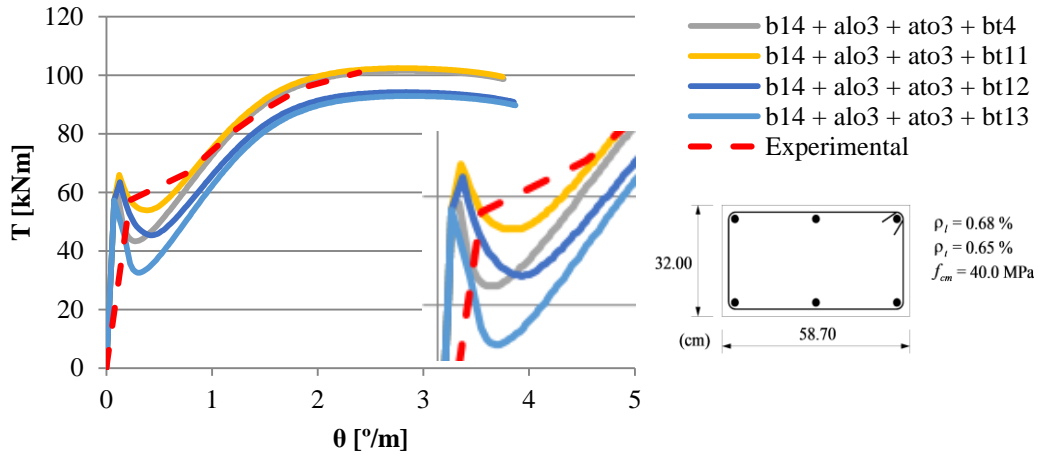


Gráfico II. 35. Curvas T -  $\theta$  para a viga VM3

### Viga VQ3 - Leonhardt e Schelling [1974]

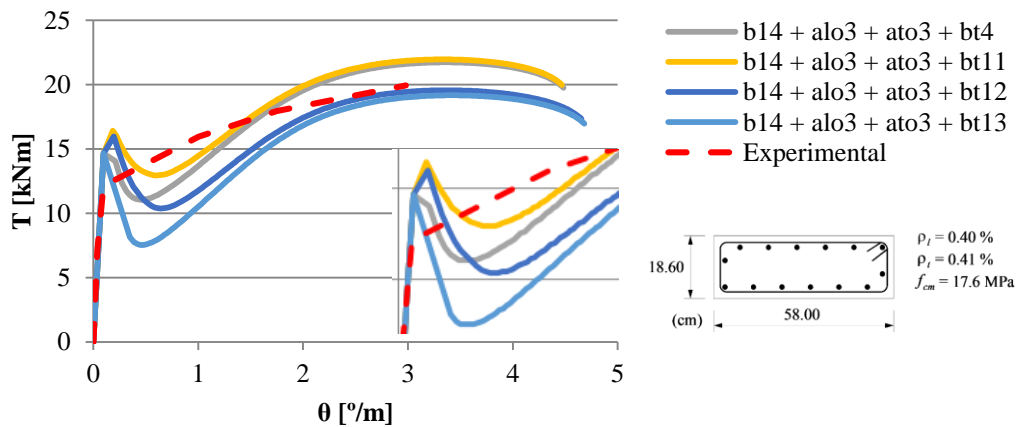


Gráfico II. 36. Curvas T -  $\theta$  para a viga VQ3

### Viga VQ9 - Leonhardt e Schelling [1974]

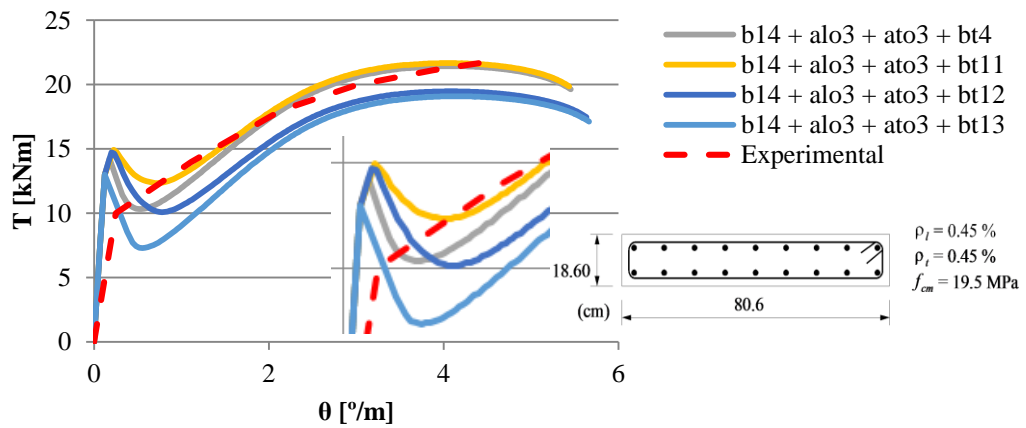


Gráfico II. 37. Curvas T -  $\theta$  para a viga VQ9

### Viga VS3 - Leonhardt e Schelling [1974]

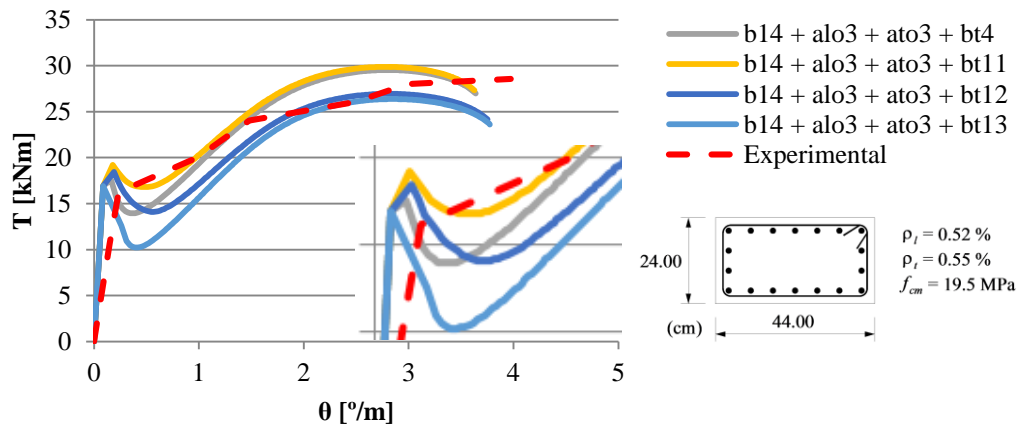


Gráfico II. 38. Curvas T -  $\theta$  para a viga VS3

### Viga VS4-VQ5 - Leonhardt e Schelling [1974]

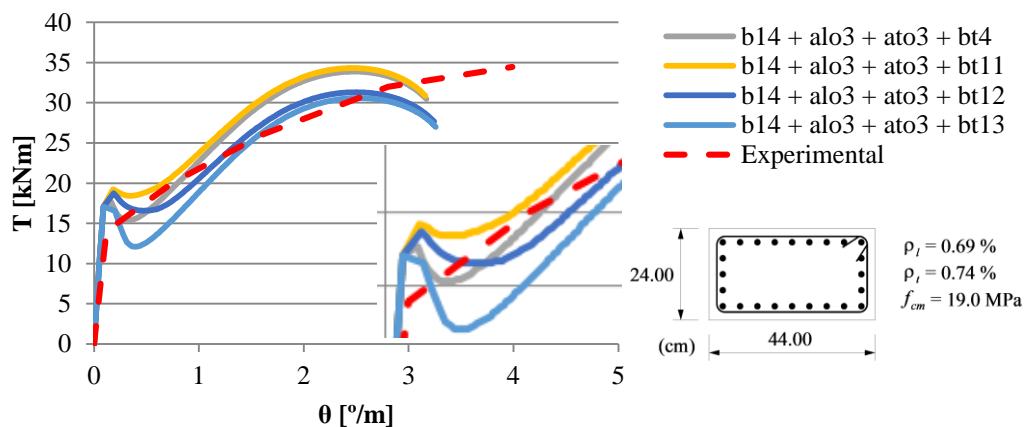


Gráfico II. 39. Curvas T -  $\theta$  para a viga VS4-VQ5

### Viga VU1 - Leonhardt e Schelling [1974]

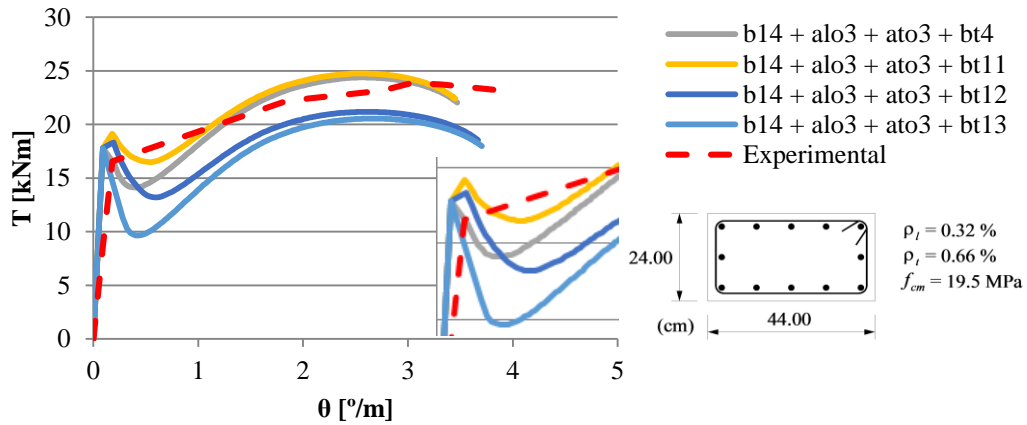


Gráfico II. 40. Curvas T -  $\theta$  para a viga VU1

### Viga VU2 - Leonhardt e Schelling [1974]

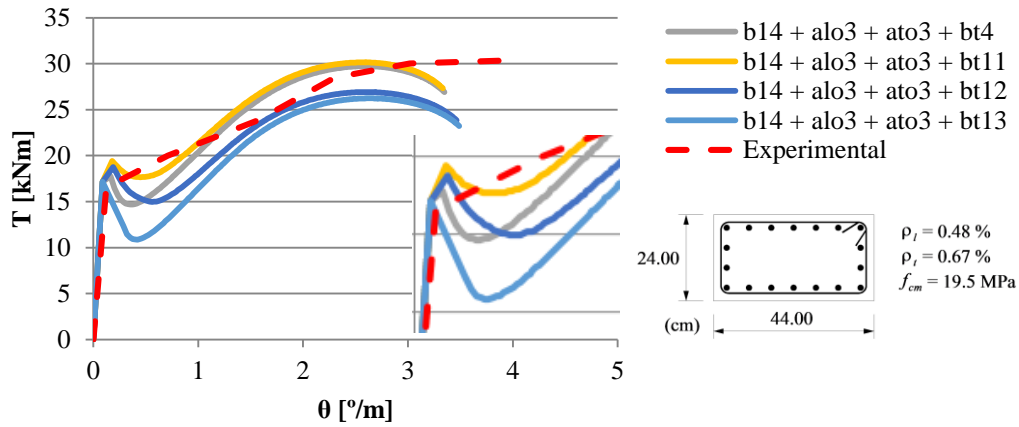


Gráfico II. 41. Curvas T -  $\theta$  para a viga VU2

### Viga VU3 - Leonhardt e Schelling [1974]

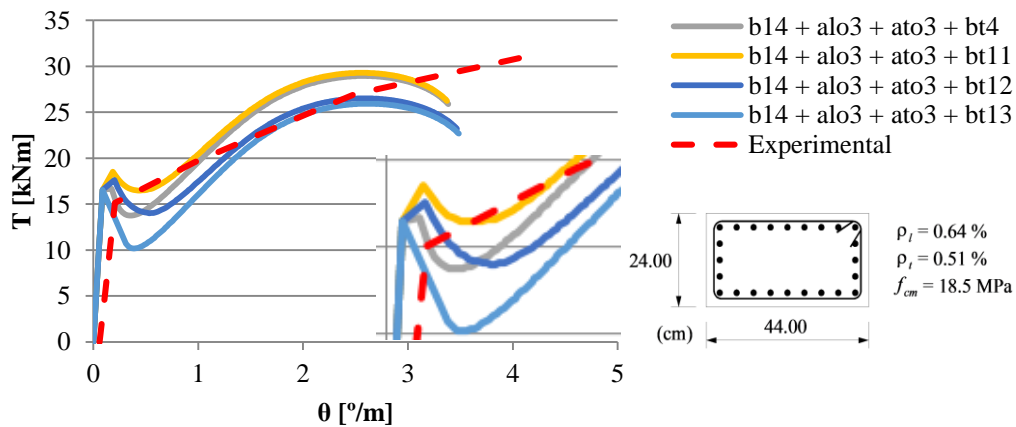


Gráfico II. 42. Curvas T -  $\theta$  para a viga VU3

### Viga A3 - Mullen e Rangan [1978]

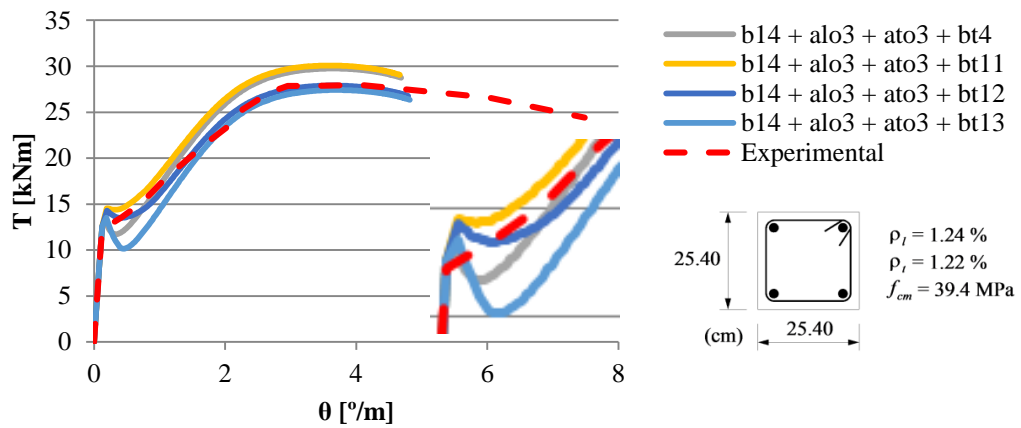


Gráfico II. 43. Curvas T -  $\theta$  para a viga A3

### Viga A4 - Mullen e Rangan [1978]

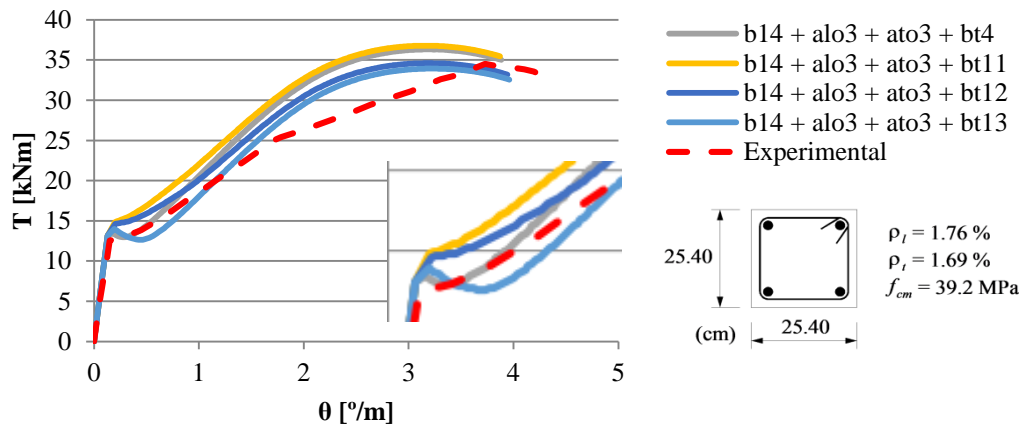


Gráfico II. 44. Curvas T -  $\theta$  para a viga A4

### Viga B3 - Mullen e Rangan [1978]

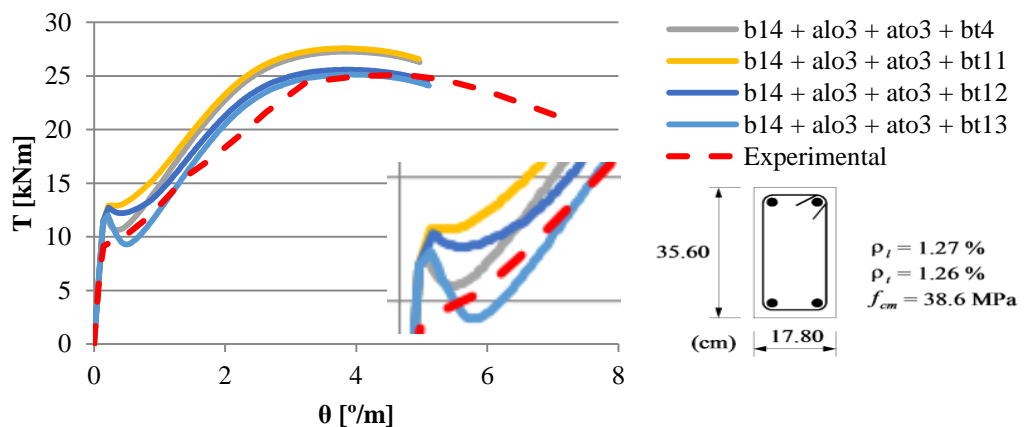


Gráfico II. 45. Curvas T -  $\theta$  para a viga B3

### Viga B4 - Mullen e Rangan [1978]

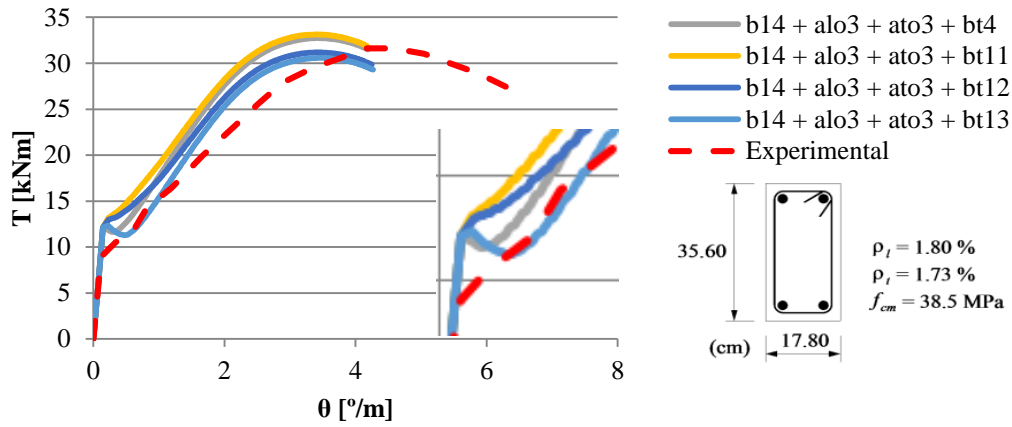


Gráfico II. 46. Curvas T -  $\theta$  para a viga B4

### Viga H-06-12 - Fang e Shiau [2004]

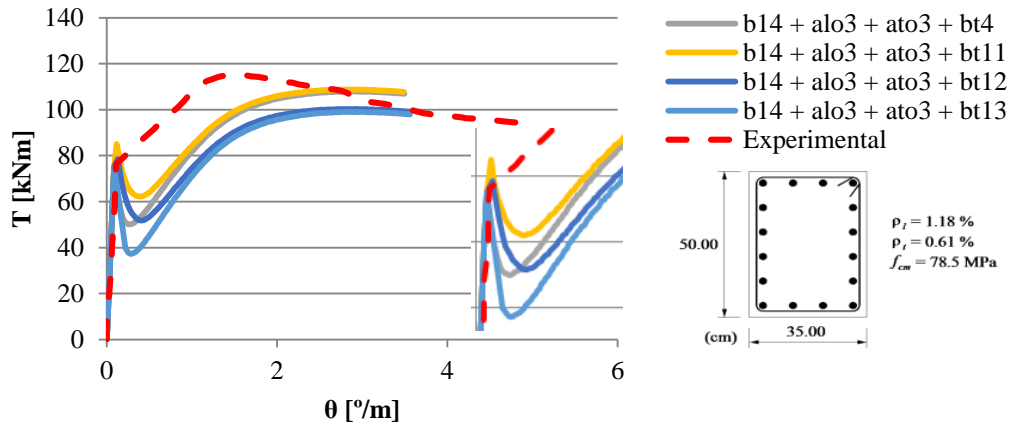


Gráfico II. 47. Curvas T -  $\theta$  para a viga H-06-12

### Viga H-12-12 - Fang e Shiau [2004]

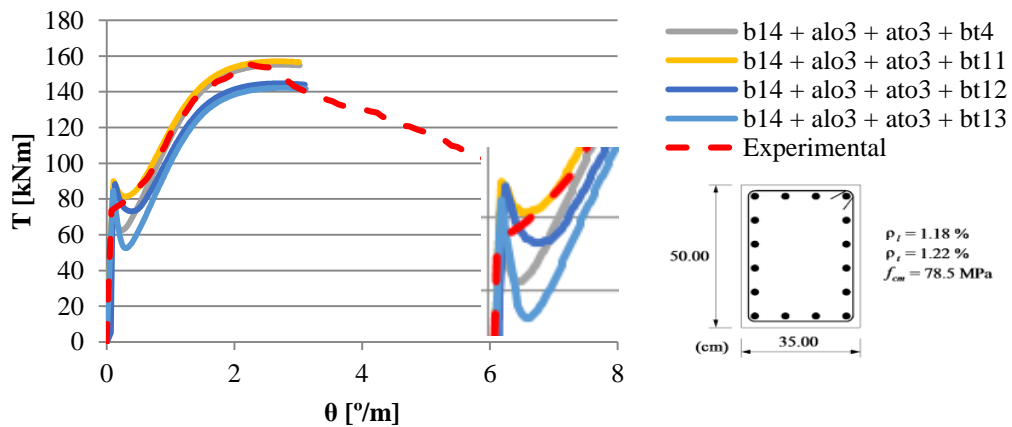


Gráfico II. 48. Curvas T -  $\theta$  para a viga H-12-12

### Viga H-14-10 - Fang e Shiau [2004]

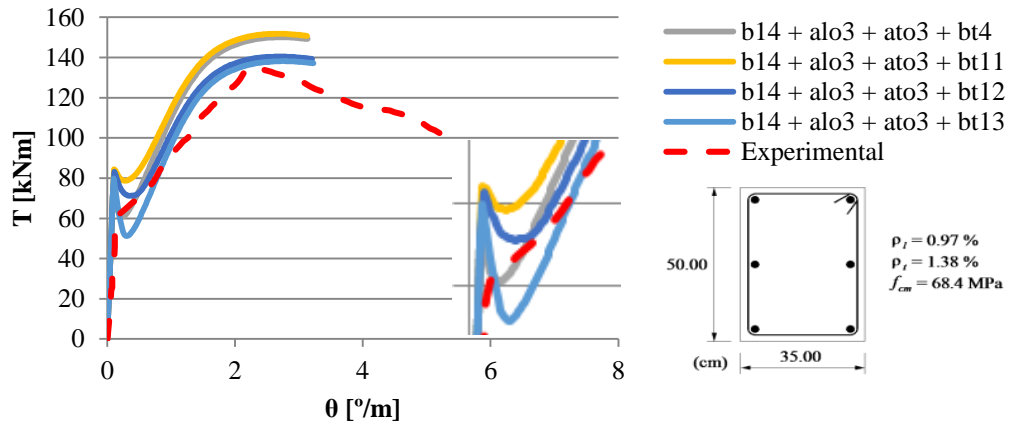


Gráfico II. 49. Curvas T -  $\theta$  para a viga H-14-10

### Viga N-06-12 - Fang e Shiau [2004]

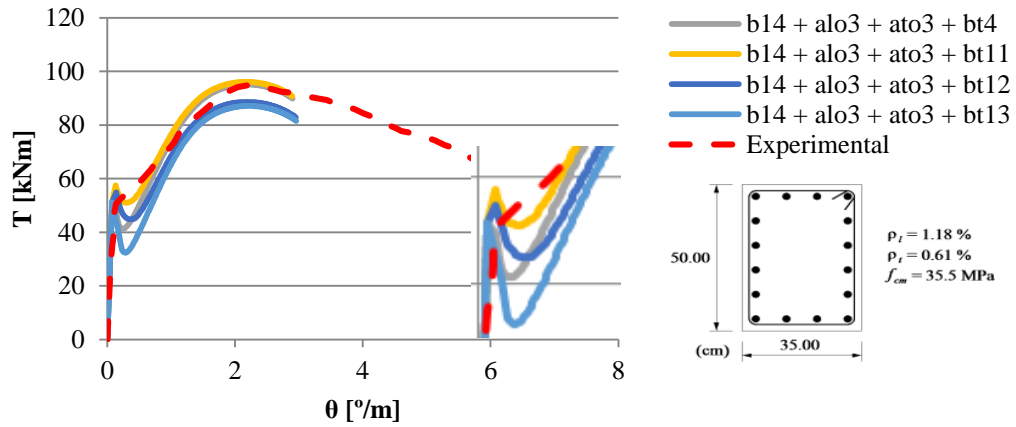


Gráfico II. 50. Curvas T -  $\theta$  para a viga N-06-12

### Viga N-14-10 - Fang e Shiau [2004]

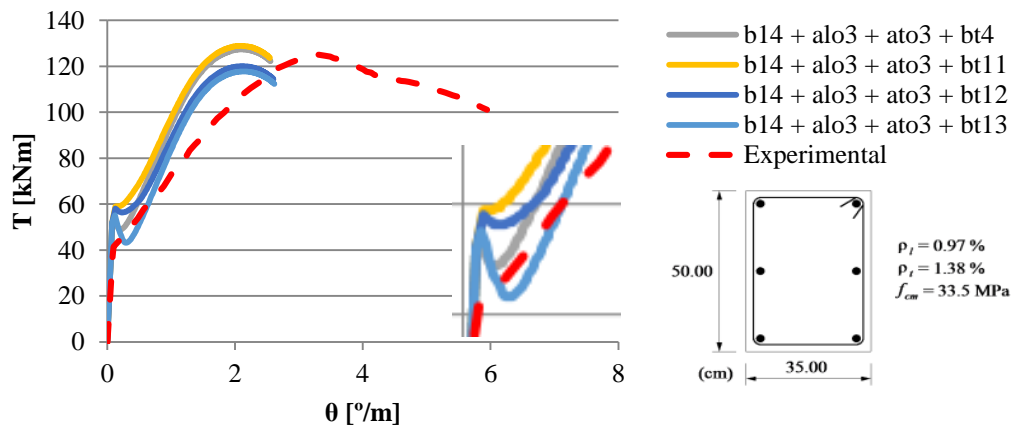


Gráfico II. 51. Curvas T -  $\theta$  para a viga N-14-10