



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

Caracterização em Tempo Real de Trajetórias Orbitais de Mísseis Balísticos

António José Rosendo Moreira

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Aeronáutica
(Ciclo de Estudos Integrado)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

Covilhã, Outubro de 2014

Dedicatória

Dedico este trabalho à Cátia, pelo seu inesgotável apoio e aos meus pais, que tudo deram por mim e pela minha formação.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Kouamana Bousson, meu orientador, por ter acreditado em mim, por ser uma fonte de inspiração e um exemplo, que levarei para o resto da vida.

À Cátia Moreira, que me fez sempre acreditar que tudo é possível.

A toda a minha família, especialmente aos meus pais Eugénio Ferreira Moreira e Alda Rosendo Moreira e irmã Eugénia Moreira, pois fui e sou sempre a sua prioridade.

Ao Jorge Moreira e à Isabel Moreira, por toda a ajuda, disponibilidade, carinho e compreensão.

Ao Carlos Vieira, Diogo Martins, Henrique Mendes e Simão Lopes, com quem cresci e partilhei os últimos cinco anos.

À Tuna-MUs, eterna fonte de sabedoria e bons momentos, com especial destaque do Pedro Oliveira e do José Marona.

Resumo

Os mísseis balísticos são uma ameaça em crescimento para populações, territórios e forças militares destacadas em todo o planeta. Mais de trinta países possuem, ou estão a adquirir tecnologia balística que, poderá, eventualmente, ser utilizada não só para o transporte de ogivas convencionais, mas também de armas de destruição maciça. A proliferação deste tipo de capacidade incentiva que este problema seja, cada vez mais, tido em conta no planeamento de um programa de Defesa. Neste sentido, surge a necessidade de desenvolver métodos que, de algum modo, permitam combater esta ameaça, como é exemplo a caracterização em tempo real de trajetórias orbitais de mísseis balísticos descrita no presente trabalho. Através da implementação do algoritmo de Butcher é simulada a propagação do estado de um míssil em voo exo-atmosférico, o qual é detetado através de um sensor cuja localização é bem conhecida. As medições, compostas por uma distância e dois ângulos, são introduzidas no filtro de Kalman, por forma a atenuar os efeitos das perturbações existentes. Através da resolução de um problema de valores próprios é determinada a equação do plano no qual se encontra a órbita, i.e., plano orbital. Utilizando as coordenadas da nuvem de pontos obtida através do filtro de Kalman, em relação a um referencial pertencente ao plano orbital, a equação da curva cónica correspondente à trajetória do míssil é determinada. Equacionando este problema como uma otimização não linear através do comando FMINCON, é possível restringir o resultado a uma elipse. Admitindo um conjunto de condições iniciais (posição e velocidade) e, realizando a parametrização da equação geral de uma superfície cónica, foi possível obter uma órbita elítica com um válido conjunto de características, incluindo os semieixos maior e menor, coordenadas Cartesianas do centro, inclinação do plano orbital, excentricidade, entre outras. O míssil balístico é detetado pela primeira vez sobre Portugal e, possui como zona de impacto o Pólo Norte. Embora o conhecimento deste tipo de informação não seja suficiente num teatro de Defesa de mísseis balísticos, o modelo apresentado abre a possibilidade da sua implementação na previsão de trajetórias orbitais e na determinação do ponto de lançamento de mísseis balísticos.

Palavras-chave

Mísseis Balísticos, Caracterização de Órbita, Filtro de Kalman, Cónica, Otimização Não-Linear.

Abstract

Ballistic missiles pose an increasing threat to populations, territories and military forces deployed overseas. Over thirty nations have or are acquiring ballistic technology which can be eventually used to carry not only conventional warheads but also weapons of mass destruction. The proliferation of these capabilities encourages governments and organizations to take into account this kind of problem in their defence programs. Therefore, arises the necessity to develop methods such as the real time characterization of ballistic missiles orbital trajectories which allows us to fight this threat. Using Butcher's algorithm for state propagation, the presence of an exo-atmospheric ballistic missile was simulated and detected by a sensor whose location is well known. The measurements, comprising a range and two angles, are processed in the Kalman filter in order to reduce noise perturbations. Solving a classic eigenvalue problem, the orbital plane is determined. Then, with the cloud of points from the Kalman filter output, relative to a coordinate system within the orbital plane, the conic surface equation corresponding to the missile trajectory is extrapolated. Using FMINCON function, the conic determination problem is solved as a nonlinear optimization which allows restricting the result to an ellipse. Admitting a set of initial conditions (position and velocity) and parameterizing the general equation of a conic surface, it was possible to determine an ellipse with a valid set of characteristics, including the semi axes, centre coordinates, orbital plane inclination, eccentricity, among others. The ballistic missile is detected over Portugal and impacts in the North Pole. Although this geometric information is not enough in a real life threat, the present work can be further used in the location of the launching area.

Keywords

Ballistic Missile, Orbit Characterization, Kalman Filter, Conic, Nonlinear Optimization.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Contexto	1
1.2	Mísseis Balísticos	2
1.3	Objetivos da Dissertação	4
1.4	Organização da Dissertação	5
2	Dinâmica Orbital do Míssil Balístico	6
2.1	Mecânica Orbital de Dois Corpos	6
2.1.1	Constantes de Movimento	7
2.1.1.1	Conservação da Energia Mecânica	7
2.1.1.2	Conservação da Quantidade de Movimento Angular	8
2.2	Trajetórias de Mísseis Balísticos	8
2.2.1	Fase de Queima	9
2.2.2	Fase Balística	9
2.2.3	Fase de Reentrada Atmosférica	11
3	Modelação da Caracterização Orbital	12
3.1	Modelação da Dinâmica do Ponto de Massa	12
3.2	Algoritmo de Simulação de Sistemas Dinâmicos	14
3.3	Plano Orbital	16
3.4	Secções Cónicas	17
3.4.1	Elipse	17
3.4.1.1	Parâmetros Orbitais	17
3.4.2	Determinação da Expressão da Cónica/Elipse	18
3.4.2.1	Formulação do Problema de Otimização	19
3.4.2.2	Função FMINCON	19
4	Simulações	21
5	Conclusão e Trabalhos Futuros	30
5.1	Conclusão	30
5.2	Trabalhos Futuros	31
	Referências Bibliográficas	32
	Anexo I - Cálculo do Produto Vetorial	36
	Anexo II - Valores dos Coeficientes de Potencial	37
	Anexo III - Covariância	38
	Anexo IV - Função Trigonométrica $\arctan2(\cdot)$	39
	Anexo V - Algoritmo de Butcher para a Simulação de Sistemas Dinâmicos	40
	Anexo VI - Parametrização da Equação da Cónica	41
	Anexo VII - Artigo: <i>Real-Time Characterization of Ballistic Missiles Orbital Trajectories</i>	42

Lista de Figuras

Figura 1 – Movimento relativo de dois corpos [10]

Figura 2 – Trajetória de mísseis balísticos [14]

Figura 3 – Representação da aquisição de dados: $\rho \equiv$ alcance, $\theta \equiv$ ângulo de azimute, $\phi \equiv$ ângulo de elevação [18]

Figura 4 – Ilustração dos elementos orbitais de uma órbita elítica [28]

Figura 5 – Órbita completa de um míssil balístico (Butcher vs. Kalman)

Figura 6 – Órbita completa de um míssil balístico (Medições vs. Kalman)

Figura 7 – Evolução da covariância do erro de estimação (norma de Frobenius)

Figura 8 – Trajetória de um míssil balístico

Figura 9 – Organigrama do processo de tratamento de dados

Figura 10 – Plano orbital (cinzento); trajetória (vermelho)

Figura 11 – Órbita do míssil balístico no plano orbital

Figura 11 – Parametrização e caracterização da órbita/elipse; $a \equiv$ semieixo maior, $b \equiv$ semieixo menor

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Parâmetros de caracterização da elipse

Lista de Acrónimos

MB	Mísseis Balísticos
LDV	Linha-De-Vista
PV	Posição-Velocidade
RK	Runge-Kutta
NATO	North Atlantic Treaty Organization

Lista de Símbolos

Símbolo	Definição
$\alpha(t)$	Magnitude do vetor aceleração em função do tempo
$\varphi(t)$	Orientação do vetor aceleração em função do tempo
μ	Parâmetro gravitacional da Terra
t_0	Tempo de lançamento
t_f	Tempo de final de queima
t_k	Tempo no instante k
\mathcal{P}	Modelo de curvas de perfis de tração
ω	Velocidade angular da Terra
M	Massa do corpo grande
m	Massa do corpo pequeno
\mathbf{r}	Vetor posição em relação ao centro da Terra
r	Norma euclidiana de \mathbf{r}
\mathbf{v}	Vetor velocidade
v	Norma euclidiana de \mathbf{v}
G	Constante gravitacional
E	Energia mecânica específica
\mathbb{h}	Quantidade de movimento angular por unidade de massa
J_2	Constante de Jeffrey
a_G	Aceleração gravítica
\mathcal{V}	Potencial
r_e	Raio da Terra
J_n	Coefficientes de potencial
P_n	Polinómios de Legendre
L	Latitude geocêntrica
g	Aceleração da gravidade
X_k	Vetor de estado
u_k	Vetor de <i>input</i>
Φ_k	Matriz de transição de estado
B_k	Matriz de controlo de <i>input</i>
w_k	Vetor de ruído de processo
Q	Matriz de covariância do ruído de processo
σ	Desvio padrão
Z_k	Vetor de medições
H_k	Matriz de transição de estado
v_k	Vetor de ruído das medições
R	Matriz de covariância do ruído das medições
ρ	Distancia entre o sensor e o míssil
θ	Ângulo de azimute
ϕ	Ângulo de elevação
\hat{X}_k	Estado estimado
P_k	Matriz de covariância
K_k	Ganho de Kalman
$[\alpha \beta \gamma]$	Coefficientes da equação do plano
$\{A, B, C, D, E, F\}$	Coefficientes da equação da cónica
a	Semieixo maior
b	Semieixo menor
e	Excentricidade
M	Anomalia verdadeira
i	Inclinação do plano orbital
Ω	Ascensão direita do nó ascendente
ω	Argumento do perigeu
<i>Mach</i>	Número de Mach
$[x \ y \ z]$	Coordenadas Cartesianas do míssil
$[x_R \ y_R \ z_R]$	Coordenadas Cartesianas do sensor

Capítulo 1 - Introdução

1.1. Contexto

Desde os primórdios da sua existência que o Homem tem procurado formas de exercer a sua vontade de dominar o mundo. Assim, de modo a cumprir este desejo, foi necessário desenvolver meios de dissuadir e deter ações agressivas de outros homens e animais e, melhorar tanto capacidades ofensivas como defensivas.

Um destes meios consiste na utilização de mísseis balísticos (MB), os quais, tal como o nome indica, possuem uma trajetória balística e, permitem atingir alvos pré-determinados com uma ou mais ogivas. O primeiro míssil balístico foi desenvolvido pela Alemanha nazi, num projeto de máxima prioridade e de grandes investimentos iniciado nos anos 30, tendo ocorrido o primeiro lançamento com êxito a 4 de Outubro de 1942. No entanto, a sua operacionalidade data de 6 de Setembro de 1944, o que leva a acreditar que o desenrolar da Segunda Guerra Mundial poderia ter sido tragicamente diferente, caso este (o míssil) estivesse operacional mais precocemente. O míssil V2, *Vergeltungswaffe* - arma de vingança 2 - foi desenvolvido por uma equipa de engenheiros liderada por *Wernher von Braun*, o qual foi capturado pelo governo Norte-Americano que, tal como a URSS, utilizou a tecnologia do V2 como base para a corrida espacial, a qual culminou na primeira missão do programa espacial Soviético *Vostok I* e nos foguetes *Saturn*, os quais impulsionaram a missão *Apollo* até à Lua [1].

Atualmente, 31 países, nos quais Portugal não está incluído, possuem tecnologia balística que pode ser, eventualmente, utilizada, não só para transportar ogivas convencionais, mas também armas de destruição maciça. Então, dada a proliferação destas capacidades, os líderes da NATO decidiram, em 2010, desenvolver uma capacidade de defesa de mísseis balísticos, a qual permitisse acompanhar a sua principal tarefa de defesa coletiva.

1.2. Mísseis Balísticos

Também num teatro de defesa de mísseis balísticos, a informação é um bem muito precioso. Por exemplo, apenas conhecendo a trajetória/órbita de um MB é possível agir em conformidade, com a interseção do mesmo e/ou, em resposta, atacando o local de lançamento, impedindo ataques futuros.

Em 1999, Yicong Li et al. [2] propuseram um método capaz de estimar a trajetória e o ponto de lançamento de um míssil balístico através de medições da linha-de-vista (LDV), realizadas por um ou mais sensores passivos, durante a primeira fase de voo do míssil, i.e., fase de queima. Assume-se que a trajetória do MB permanece aproximadamente num único plano (plano orbital) e, tendo em conta o efeito da gravidade, o modelo de movimento é dado pela expressão $\ddot{\mathbf{p}} = \left[\alpha(t) \cos \varphi(t) - \frac{\mu}{\|\mathbf{p}\|^2} \right] \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} + \alpha(t) \sin \varphi(t) \frac{\mathbf{l}_n}{\|\mathbf{l}_n\|}$, onde o par de vetores $\left(\frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}, \frac{\mathbf{l}_n}{\|\mathbf{l}_n\|} \right)$ fornece uma base ortonormal para este plano e, determina, respetivamente, as duas direções vertical e horizontal; $\alpha(t)$ e $\varphi(t)$ representam a magnitude e orientação do vetor aceleração em função do tempo e μ é a constante gravitacional da Terra. O conhecimento de $\alpha(t)$ e $\varphi(t)$ é uma suposição crítica para este modelo, pelo que, é definido um perfil de tração como um par de curvas $\mathcal{P} = \{(\alpha(t), \varphi(t)): t_0 \leq t \leq t_f\}$, onde t_0 e t_f representam respetivamente os tempos de lançamento e de final de queima. As maiores limitações identificadas incluem problemas na estimação do estado devido a condições de fraca observabilidade do movimento do míssil, a estimação do instante de lançamento e, a utilização de perfis de tração imprecisos para a modelação da dinâmica durante a fase de queima. Foram obtidos resultados sólidos mesmo no pior dos cenários, onde existe uma falha da deteção durante os instantes iniciais devido a más condições meteorológicas, o instante de lançamento é desconhecido e, os parâmetros do perfil de tração (instantes de final de queima e de entrada no alcance de um radar de aquisição na zona de impacto) necessitam de ser estimados. No entanto, não foi tido em conta que o modelo das curvas \mathcal{P} pode não ser hiperbólico para $\alpha(t)$ e linear para $\varphi(t)$, o que alteraria substancialmente os resultados. Na prática, o perfil exato de um MB não é conhecido, podendo mesmo não existir no conjunto de perfis disponíveis.

A estimação da trajetória durante a fase de reentrada com base em informação *a priori* proveniente de um satélite de infravermelhos (posição de lançamento e tempos de lançamento e de final de queima) ou, em informação acerca de características do míssil (massa inicial, taxa de queima de combustível) foi desenvolvida em [3]. O problema foi formulado como uma otimização não linear e, a informação conhecida *a priori* foi explorada em termos de limitações de igualdade e/ou desigualdade das variáveis de estado a serem estimadas, assim como na escolha de valores iniciais para a procura ótima. Neste caso, a probabilidade de deteção foi considerada sempre igual a um, ou seja, não prevê situações nas quais existe um défice de medições. Além disso, embora o modelo tenha em conta incertezas nos parâmetros do míssil, assume sempre que o tipo de alvo é corretamente identificado, o que pode ser falso.

Juntamente com um modelo cinemático da fase de queima, a utilização de informações armazenadas numa base de dados de MB é adotada em [4]. De forma a encontrar o míssil correto

dentro dos que dispunha listados na base de dados, foi utilizado um estimador de máxima verossimilhança de modelo múltiplo, o qual mostra maior fiabilidade em trajetórias mais extensas, ou seja, com fases de queima maiores (superiores a 80 segundos). O tipo e quantidade de informação da qual depende o estimador coloca um entrave muito elevado neste método, pois requer o conhecimento de pormenores classificados tais como restrições do MB em altitude, velocidade e aceleração, coeficiente de arrasto, impulso específico, massa, valores admissíveis do tempo de queima, entre outros.

Em 2008 [5], foi descrito um algoritmo para a estimação de trajetórias de mísseis balísticos cujos parâmetros dinâmicos não são previamente conhecidos. Motivado pela necessidade de melhorar as estimativas de estado nas transições de fase dos MB, o algoritmo realiza uma estimação em tempo real através de um filtro de Kalman com três modelos, cada um baseado na dinâmica de cada fase de voo. O primeiro filtro utiliza um modelo de força axial constante para as dinâmicas das fases de queima e de reentrada. O segundo filtro utiliza um modelo de aceleração balística que incorpora as forças gravitacional, *Coriolis* e centrípeta. Por último, o terceiro filtro de Kalman utiliza um modelo de aceleração auto correlacionado, o qual acomoda a transição entre fases e a possibilidade de uma reentrada desordenada. De forma semelhante ao que acontece na presente dissertação, Farrell [5] utiliza um modelo balístico baseado na dinâmica exo-atmosférica, tipicamente utilizado na deteção de satélites, o qual possui a vantagem de reduzir o vetor de estado às componentes de posição e velocidade, aumentando, assim, a precisão do estado estimado. Contudo, as equações de movimento são descritas num referencial não inercial, obrigando a uma modificação da segunda lei de Newton através do teorema de *Coriolis*: $\mathbf{F}_{gravidade} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}$. Esta opção obriga o conhecimento da massa do MB - m (que na realidade é $m(t)$, ou seja, em função do tempo) e da velocidade angular - $\boldsymbol{\omega}$, a qual varia entre modelos Terrestres, funcionando como mais uma fonte de erros.

Mais recentemente [6], foi proposto um método não baseado em perfis de tração, para a estimação do ponto de lançamento de um MB com duas fases de queima separadas por uma fase de voo livre. As medições são obtidas através de dois ou mais sensores passivos, os quais medem os ângulos de azimute e de elevação apenas durante as duas fases de queima, o que permite saber com precisão os instantes em que ocorrem as mudanças de fase. O método propõe a estimação dos estados no final de queima e no local de lançamento. No primeiro caso, a estimação é obtida através de uma filtragem preditiva com seleção de modelo adaptativa baseado nas alterações entre as fases de queima; no segundo caso, a estimação do local de lançamento é obtida através de um alisamento seguido de uma retro previsão. O âmbito deste método incide maioritariamente na perceção de como varia a localização dos pontos de final de queima e de lançamento, comparando diferentes métodos e situações. A trajetória do míssil é baseada em dados reais e as medições são simuladas, aspeto exclusivo quando comparado com os outros trabalhos.

É de notar a persistente utilização do filtro de Kalman em muitos dos trabalhos desenvolvidos no âmbito de deteção/estimação de trajetórias de mísseis balísticos. Este filtro, utiliza o

modelo dinâmico de um sistema (neste caso, as leis de movimento), saídas do controlador (caso estas existam) e um conjunto de medições sequenciais (obtido através de sensores) para realizar uma estimativa de quantidades variáveis que descrevem o estado do sistema. Desenvolvido por Rudolf E. Kalman [7], o filtro é, teoricamente, um estimador para o problema linear quadrático, o qual consiste na estimativa de um estado instantâneo de um sistema dinâmico linear perturbado por ruído branco, através da utilização de medições linearmente relacionadas com o estado, também estas corrompidas com ruído branco [8]. Uma vez que a maioria dos sistemas de engenharia é não linear, rapidamente este método de filtragem foi desenvolvido e adaptado, culminando no filtro de Kalman estendido [9]. Na prática, este filtro é uma das maiores descobertas do séc. XX, tornando-se, desde logo, indispensável em aplicações de controlo de sistemas dinâmicos muito complexos, tais como aeronaves, veículos espaciais, entre outros. O filtro de Kalman é revolucionário na medida em que, quando não é possível ou desejável medir cada variável, este fornece um meio de deduzir a informação em falta, através de medições indiretas com ruído - dados com perturbações, aproximações em equações que descrevem o comportamento de um sistema e fatores externos. Através de um processo de “pesagem”, o filtro de Kalman combina a previsão do estado do sistema com novas medições. Os “pesos” são calculados através de covariâncias, as quais funcionam como medida da incerteza estimada na previsão do estado. Uma vez que este processo é repetido em cada passo, o filtro é recursivo, pois apenas necessita da última previsão e não de todo o historial, para calcular o novo estado. Muitas vezes, a confiança nas medições é difícil de medir precisamente, pelo que, o comportamento do filtro é discutido em termos de ganho. O ganho de Kalman é uma função que exprime a confiança relativa das medições e da mais recente estimativa do estado. Com um ganho elevado, o filtro coloca mais “peso” nas medições, ignorando a estimativa do estado. Caso contrário, se o ganho for igual a zero, as medições são ignoradas. A sua popularidade deve-se aos bons resultados práticos, à sua forma conveniente para o processamento de dados em tempo real, à facilidade de formulação e implementação e, às suas elegantes propriedades recursivas já mencionadas.

1.3. Objetivos da Dissertação

Neste trabalho, é proposto um método capaz de determinar em tempo real um conjunto de parâmetros característicos de órbitas de mísseis balísticos, de modo a poder reconstruir as trajetórias correspondentes. Para tal, foi estabelecido o seguinte conjunto de objetivos:

- Modelar a dinâmica de um MB através das suas equações de movimento;
- Simular medições realizadas por um sensor ativo, cuja localização é conhecida;
- Processar a informação obtida nas medições através do filtro de Kalman;
- Determinar o plano orbital no qual se encontra a trajetória;
- Extrapolar a equação da curva cónica a partir dos dados da trajetória através de uma otimização não linear.

1.4. Organização da Dissertação

Para cumprir os objetivos supramencionados, a dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 é introduzida a dinâmica orbital do míssil balístico, onde são abordados alguns conceitos de Astrodinâmica, particularmente a mecânica orbital de dois corpos e constantes de movimento; é feita ainda uma descrição das fases de queima, balística e reentrada, características de trajetórias de mísseis balísticos.

No Capítulo 3 é apresentada a modelação da caracterização orbital, na qual estão incluídos a dinâmica do ponto de massa, o algoritmo de simulação de sistemas dinâmicos, o plano orbital, as secções cónicas, em particular a elipse e, a formulação do problema de determinação da expressão da cónica.

No Capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados obtidos em simulação computacional. Por último, o Capítulo 5 é constituído pela conclusão da dissertação, onde é feito um ponto de situação de todo o trabalho desenvolvido e, são sugeridos alguns desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2 - Dinâmica Orbital do Míssil Balístico

2.1. Mecânica Orbital de Dois Corpos

Na mecânica clássica, o problema de dois corpos consiste em determinar o movimento de duas partículas que interagem entre si, tal como é o caso de um míssil balístico lançado da Terra. Considere-se o sistema de dois corpos de massas M e m ilustrados na Figura 1 [10]:

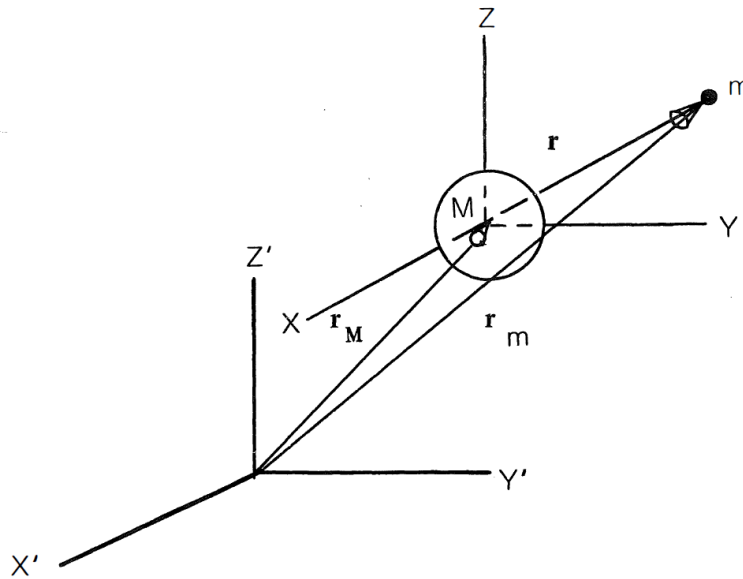


Figura 1- Movimento relativo de dois corpos [10]

Os vetores posição dos corpos M e m , relativamente ao sistema de coordenadas Cartesianas inercial (i.e., sem aceleração e não rotativo) (X', Y', Z') ilustrado na Figura 1 são, respetivamente, r_M e r_m . Considerando $r = r_m - r_M$ e $r = \|r\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana, é possível aplicar as leis de Newton ao referencial inercial de forma a obter [10]:

$$m\ddot{r}_m = -\frac{GMm}{r^2} \frac{r}{r} \tag{1}$$

e

$$M\ddot{r}_M = \frac{GMm}{r^2} \frac{r}{r} \tag{2}$$

As equações (1) e (2) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\ddot{r}_m = -\frac{GM}{r^3} r \tag{3}$$

e

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} \quad (4)$$

Subtraindo a equação (4) à equação (3) obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3} \mathbf{r} \quad (5)$$

a qual representa o movimento relativo para o problema de dois corpos; $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ é a constante gravitacional.

No caso dos mísseis balísticos, uma vez que a sua massa é muito inferior à da Terra, é possível fazer a aproximação: $G(M+m) \sim GM$. Devido a questões de precisão, torna-se útil definir o parâmetro gravitacional μ , representado pela equação (6):

$$\mu = GM \quad (6)$$

Utilizando este parâmetro, obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (7)$$

2.1.1. Constantes do Movimento

Antes de apresentar a equação de movimento de um míssil balístico, será explicitada alguma informação útil sobre a natureza do seu movimento orbital.

A física e a mecânica ensinam que um campo gravitacional é conservativo, ou seja, um objeto em movimento apenas sob a influência da gravidade, não perde ou ganha energia. Este objeto troca uma forma de energia: cinética, por outra: potencial. Sabe-se ainda que, uma vez que a força gravitacional possui uma direção radial, a quantidade de movimento angular do míssil, em relação ao centro do referencial, não se altera.

2.1.1.1. Conservação da Energia Mecânica

A constante designada por energia mecânica específica é representada pela expressão (8) [10]:

$$E = \frac{V^2}{2} + \left(c - \frac{\mu}{r} \right) \quad (8)$$

O primeiro termo da expressão representa a energia cinética por unidade de massa, enquanto o segundo termo representa a energia potencial, também este por unidade de massa. A constante c , presente no termo da energia potencial, depende do referencial da mesma. Ou seja, depende da distância a que a energia potencial é considerada igual a zero. Uma vez que esta constante é aleatória, é possível considerá-la nula, o que representa escolher o infinito

como início do referencial, i.e., a energia potencial será sempre negativa. Desta forma, a energia mecânica específica, E , consiste na soma das energias cinética e potencial, mantendo-se constante ao longo da fase de voo livre do míssil.

$$E = \frac{V^2}{2} + -\frac{\mu}{r} = \text{constante} \quad (9)$$

2.1.1.2. Conservação da Quantidade de Movimento Angular

A quantidade de movimento angular específica (i.e., por unidade de massa) de um míssil, \mathbb{h} , permanece constante e é definida pela seguinte equação [10]:

$$\mathbb{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (10)$$

onde " \times " é o produto vetorial, definido no Anexo I. Uma vez que \mathbb{h} é um vetor constante, \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$ devem manter-se sempre no mesmo plano, o que leva a concluir que o movimento exo-atmosférico do míssil permanece no mesmo plano fixo no espaço, o qual é referido como plano orbital.

2.2. Trajetórias de Mísseis Balísticos

A trajetória de um míssil balístico pode ser dividida em três fases: queima, balística e reentrada [11], as quais estão ilustradas na Figura 2. A dinâmica de cada uma destas fases é consideravelmente diferente e extensa, pelo que, ao leitor mais interessado é aconselhada a consulta de [11], [12] e [13] para descrições mais detalhadas de cada uma das fases. No âmbito do presente trabalho, será realizada uma breve descrição de cada fase, com especial foco na fase balística.

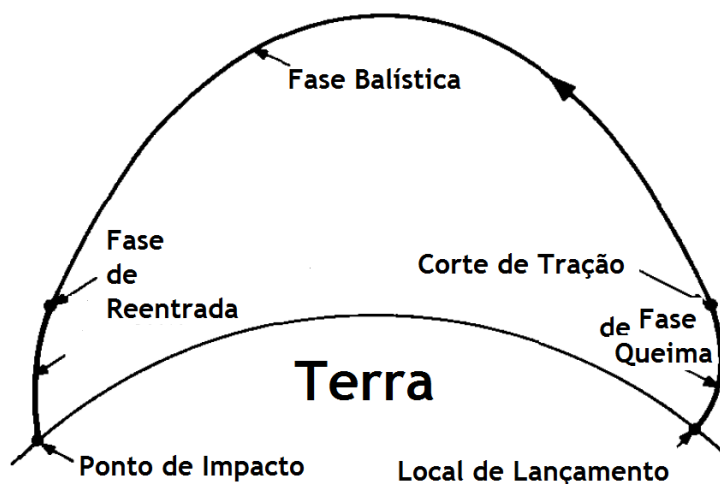


Figura 2 - Trajetória de mísseis balísticos [14]

2.2.1. Fase de Queima

Um míssil balístico encontra-se na fase de queima desde o seu lançamento até à última etapa de final de queima. Durante esta fase, a qual é primordialmente endo-atmosférica, o míssil encontra-se sob o efeito de uma elevada aceleração de tração, arrasto atmosférico e força gravítica Terrestre. Os perfis de tração, caracterizados principalmente pela magnitude e direção da aceleração, variam substancialmente entre diferentes tipos de mísseis. Na verdade, enquanto alguns MB mantêm uma aceleração aproximadamente constante, outros, em particular os mísseis de múltiplas fases, possuem uma variação de tração abrupta. Os MB mais avançados são capazes de variar a tração mesmo na fase final de voo, de forma a corrigir a zona de impacto, por exemplo.

Nesta fase inicial, a janela de interceção do míssil varia entre 1 a 5 minutos, o que torna muito complicada a tarefa da defesa. Embora o míssil seja mais facilmente detetado na fase de queima, devido à exaustão e calor emitidos, tanto os sensores como os mísseis interceptores devem estar muito próximos do local de lançamento, para que a interceção tenha sucesso.

2.2.2. Fase Balística

Após o final de queima, abandonando a atmosfera terrestre, o míssil inicia a porção de voo livre da sua trajetória, na qual não é aplicada qualquer força de tração. Considera-se que o arrasto é nulo e que a única força que governa o seu movimento é a gravidade. Esta fase tem uma longa duração (em geral, até 20 minutos), acabando por criar várias oportunidades para destruir o míssil no exterior da atmosfera Terrestre. Quaisquer detritos remanescentes depois da interceção acabam por se desintegrar ao atravessarem a atmosfera. Admitindo que a obtenção das medições é efetuada durante esta fase de voo intermédia, é necessário conhecer qual o modelo dinâmico que a caracteriza.

A escolha de um modelo gravítico influencia a exatidão de resultados e, quanto maior a sua complexidade, mais realista este se torna. O modelo mais básico assume que a Terra é plana, ignorando a sua elipticidade e a existência de velocidade de rotação. O modelo esférico da Terra considera desprezáveis as forças gravitacionais da Lua e de outras estrelas e, uma vez que o míssil tem massa muito inferior à da Terra, a solução para a aceleração do problema de dois corpos, é representada pela equação (7). Substituindo o modelo esférico por um modelo elipsoidal, pode ser obtida uma aproximação mais precisa da aceleração da gravidade. Este modelo tem em conta fatores como o achatamento da Terra, representado através da inclusão da constante de *Jeffrey*, J_2 , a qual representa a diferença entre os momentos de inércia polar e equatorial [11] [12].

Num sistema de coordenadas Cartesiano inercial, a posição e a velocidade do míssil são representadas, respetivamente, pelos vetores $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$. O modelo de um míssil balístico que possui o vetor de estado $\mathbf{X} = [\mathbf{r}^T \ \dot{\mathbf{r}}^T]^T$ é, então, representado por [12]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} r \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_G(r) \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde \mathbf{a}_G representa a aceleração gravitacional.

O potencial gravitacional da Terra simplificado, μ/r , assume um corpo esfericamente simétrico, o que resulta em órbitas cónicas. Contudo, a Terra não é um corpo esfericamente simétrico, mas sim achatado nos pólos, alargado no equador, e assimétrico na generalidade. Conhecendo a função do potencial, \mathcal{V} , a aceleração pode ser determinada a partir da expressão:

$$\mathbf{a}_G = \nabla \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (12)$$

De acordo com Vinti [15], a função de potencial vem da forma:

$$\mathcal{V} = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_e}{r} \right)^n P_n \sin L \right] \quad (13)$$

onde r_e representa o raio equatorial da Terra, J_n representa os coeficientes de potencial determinados experimentalmente, P_n são polinómios de Legendre e L é a latitude. Note-se que $n = 1$ pode ser eliminado em (13), considerando que a origem do referencial se situa no centro de massa. Tendo em conta os seis primeiros termos da expressão (13) e que, $\sin L = \frac{z}{r}$, são obtidas as derivadas parciais de \mathcal{V} [10]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = & -\frac{\mu x}{r^3} \left[1 - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) + J_3 \frac{5}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \left(3 \frac{z}{r} - 7 \frac{z^3}{r^3} \right) \right. \\ & - J_4 \frac{5}{8} \left(\frac{r_e}{r} \right)^4 \left(3 - 42 \frac{z^2}{r^2} + 63 \frac{z^4}{r^4} \right) \\ & - J_5 \frac{3}{8} \left(\frac{r_e}{r} \right)^5 \left(35 \frac{z}{r} - 210 \frac{z^3}{r^3} + 231 \frac{z^5}{r^5} \right) \\ & \left. + J_6 \frac{1}{16} \left(\frac{r_e}{r} \right)^6 \left(35 - 945 \frac{z^2}{r^2} + 3465 \frac{z^4}{r^4} - 3003 \frac{z^6}{r^6} \right) \right] \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = \frac{y}{x} \dot{x} \quad (14b)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{z} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = & -\frac{\mu z}{r^3} \left[1 + J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \left(3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) + J_3 \frac{3}{2} \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 \left(10 \frac{z}{r} - \frac{35 z^3}{3 r^3} - \frac{r}{z} \right) \right. \\
& - J_4 \frac{5}{8} \left(\frac{r_e}{r} \right)^4 \left(15 - 70 \frac{z^2}{r^2} + 63 \frac{z^4}{r^4} \right) \\
& - J_5 \frac{1}{8} \left(\frac{r_e}{r} \right)^5 \left(315 \frac{z}{r} - 945 \frac{z^3}{r^3} + 693 \frac{z^5}{r^5} - 15 \frac{r}{z} \right) \\
& \left. + J_6 \frac{1}{16} \left(\frac{r_e}{r} \right)^6 \left(315 - 2205 \frac{z^2}{r^2} + 4851 \frac{z^4}{r^4} - 3003 \frac{z^6}{r^6} \right) \right]
\end{aligned} \tag{14c}$$

O primeiro termo em $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ representa a aceleração dos dois corpos (míssil e planeta Terra) e, os restantes termos representam as perturbações de aceleração causadas pela não esfericidade da Terra. Embora existam várias determinações dos coeficientes J_1, J_2, \dots, J_6 , foi utilizado um conjunto de valores representativo definido em [10] (cf. Anexo II).

2.2.3. Fase de Reentrada Atmosférica

Durante a fase de reentrada, as principais forças a atuar no míssil são a gravidade Terrestre e o arrasto atmosférico. No caso de existência de alguma manobra, deve ser considerada uma terceira força: a sustentação aerodinâmica. Durante a reentrada, as forças aerodinâmicas são geralmente muito mais elevadas do que a gravidade. Forças de arrasto superiores a $20g$ podem estar presentes em grande parte da trajetória abaixo dos 30 km de altitude, podendo mesmo atingir os $100g$; a sustentação e outras cargas transversais podem facilmente exceder os $10g$. Esta é a última e menos desejável oportunidade para realizar uma interceção antes que a ogiva atinja o seu alvo. Além de não existir qualquer margem para erro, a explosão de uma ogiva será sempre, de certo modo, perto do alvo.

Capítulo 3 - Modelação da Caracterização Orbital

3.1. Modelação da Dinâmica do Ponto de Massa

O modelo discreto de um sistema linear está descrito de acordo com a seguinte equação [8]:

$$X_k = \Phi_{k-1}X_{k-1} + B_k u_k + w_{k-1} \quad (15)$$

onde X_k é o vetor de estado, contendo os parâmetros de interesse no instante t_k ; u_k é o vetor que contém os *inputs* de controlo (não existente, neste caso); Φ_k é a matriz de transição de estado, responsável pela aplicação do efeito de cada parâmetro do estado do sistema no instante t_{k-1} no instante t_k ; B_k representa a matriz de controlo de *input* e w_k é o vetor que contém o ruído de processo para cada parâmetro do vetor de estado. O ruído de processo é assumido como ruído branco Gaussiano, com média zero e matriz de covariância Q_k (cf. Anexo III) ($w_k \sim N(0, Q_k)$).

Para um modelo posição-velocidade (PV), a matriz de transição de estado da dinâmica do ponto de massa vem da forma [16]:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$dt = 0.01s \equiv \text{passo da simulação}$$

A matriz de covariância do ruído de processo tem em conta fatores do sistema não modelados, os quais são tratados como ruído e, neste caso, toma a forma [17]:

$$Q = \sigma_Q \begin{bmatrix} \frac{1}{3}dt^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}dt^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}dt^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2 \\ \frac{1}{2}dt^2 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}dt^2 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2 & 0 & 0 & dt \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde $\sigma_Q = 3 \text{ m}^2/\text{s}^3$ é o desvio padrão do ruído introduzido.

As medições do sistema são modeladas através da expressão (18) [8]:

$$Z_k = H_k X_k + v_k \quad (18)$$

onde Z_k é o vetor das medições, H_k é a matriz de transformação e v_k é o vetor que contém o ruído das medições para cada parâmetro observado. Tal como o ruído de processo, v_k é assumido como ruído branco Gaussiano com média zero e matriz de covariância R_k ($v_k \sim N(0, R_k)$).

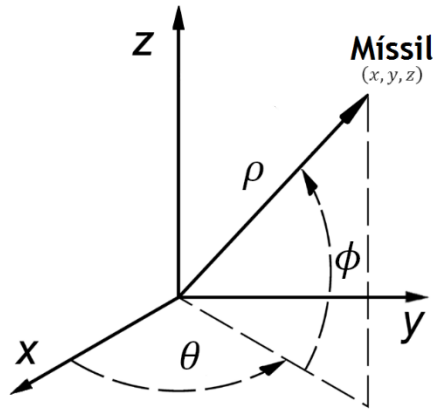


Figura 3 - Representação da aquisição de dados: $\rho \equiv$ alcance, $\theta \equiv$ ângulo de azimute, $\phi \equiv$ ângulo de elevação [18]

Uma vez que o radar mede o alcance, ρ , e os ângulos de azimute, θ , e de elevação, ϕ , tal como ilustra a Figura 3, o modelo de medição é descrito pela equação não linear:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + v_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k - x_R)^2 + (y_k - y_R)^2 + (z_k - z_R)^2} \\ \arctan2(y_k - y_R, x_k - x_R) \\ \arcsin\left(\frac{z_k - z_R}{\rho_k}\right) \end{bmatrix} + v_k \quad (19)$$

onde $\mathbf{X}_k = (x_k, y_k, z_k)$ são as coordenadas Cartesianas do míssil obtidas em cada instante através do algoritmo de Butcher e (x_R, y_R, z_R) representa a posição do sensor. Para evitar erros de mudança de quadrantes, é utilizada a função $\arctan2(\cdot)$ (cf. Anexo IV) em vez do convencional $\arctan(\cdot)$.

O recíproco de (19) pode ser observado nas expressões:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_k \cos \theta_k \cos \phi_k + x_R \\ \rho_k \sin \theta_k \cos \phi_k + y_R \\ \rho_k \sin \phi_k + z_R \end{bmatrix} \quad (20)$$

Uma vez que o modelo de medição é não linear, a matriz de transformação H_k da equação (18) será aproximada sob a forma [19]:

$$H_k = \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_k} \quad (21)$$

o que representa o Jacobiano de $\mathbf{h}(\cdot)$ em função do vetor de estado Cartesiano $\mathbf{X}_k = (x_k, y_k, z_k)^T$.

A matriz de covariância do erro das medições é uma matriz diagonal, contendo os desvios padrão dos três parâmetros medidos:

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\phi^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde $\sigma_\rho = 10 \text{ m}$, $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 10 \mu\text{rad}$

3.2. Algoritmo de Simulação de Sistemas Dinâmicos

Grande parte dos problemas com que nos deparamos na vida real são fenômenos muito complexos e não lineares, o que torna impraticável a utilização de métodos analíticos para a sua resolução. De modo a contrariar este problema, são utilizados métodos numéricos que permitem obter soluções aproximadas de um sistema.

Em geral, o modelo matemático não traduz exatamente a realidade pelo que, é necessário impor certas restrições, as quais refletem a existência de erros inerentes a este processo.

Com os métodos convencionais, - o método de Euler, a série de Taylor, entre outros - por forma a obter uma solução estável, o passo iterativo está restrito a um valor muito reduzido, o que, naturalmente, requer um tempo e um custo computacional mais elevado [20].

Os métodos de Runge-Kutta (RK) permitem utilizar soluções numéricas para problemas modelados como problemas de condições iniciais envolvendo equações diferenciais e, uma vez que não utilizam informação de passos anteriores, requerem um *input* muito reduzido, o que torna a sua implementação muito simples. Butcher [21] juntou o melhor do trabalho desenvolvido à volta dos métodos de RK e adicionou-lhe uma estimativa do erro, criando, assim, o algoritmo de Butcher, o qual será apresentado de seguida.

Considere-se que o modelo de um sistema é descrito por:

$$\dot{\eta} = f(\tau, \eta(\tau)) \quad (23)$$

onde $\dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\tau}$, τ representa a variável independente (variável tempo) e η representa a variável dependente. $f(\cdot)$ representa uma equação diferencial e será retratada pelas equações (14), tendo em conta que $\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ e $\mathbf{a}_G(\mathbf{r}) = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]$. Porém, apenas um sistema de equações diferenciais não é suficiente para gerar uma solução única, sendo, por isso, necessário adicionar à formulação do problema um conjunto de condições iniciais:

$$\eta(\tau_0) = \eta_0 \quad (24)$$

De acordo com o algoritmo de Butcher, assumindo um estado inicial (24), os estados do sistema, nos instantes de tempo t_1, t_2, \dots, t_k , são determinados por:

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (25)$$

A determinação dos coeficientes k_1, k_2, \dots, k_6 é apresentada no Anexo V.

Uma vez que o verdadeiro estado de um sistema, X_k , não pode ser diretamente observado, o filtro de Kalman fornece um algoritmo que combina os modelos do sistema e de medição com ruído, obtendo assim uma estimativa do estado, representada por \hat{X}_k .

O filtro baseia-se em funções densidade de probabilidade Gaussianas, cujas variâncias e covariâncias armazenadas numa matriz P_k é necessário conhecer, para que as primeiras possam ser descritas. Enquanto as variâncias da diagonal principal de P_k são associadas aos termos correspondentes ao vetor de estado, os termos fora da diagonal principal fornecem as covariâncias entre os termos constituintes do vetor de estado [22]. Para informação mais detalhada sobre a probabilidade e estimativa estocástica, na qual o filtro se baseia, o leitor deve consultar [8], [23], [24].

Tendo em conta que, no primeiro ciclo, a estimativa do estado *a priori* é obtida através da expressão:

$$\hat{X}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{X}_{k-1}(+) \quad (26)$$

o algoritmo do procedimento computacional para a implementação do filtro de Kalman é constituído pelos seguintes passos:

1. Calcular a covariância do erro

$$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (27)$$

2. Calcular a matriz de ganho de Kalman:

$$K_k = P_k(-)H_k^T [H_k P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1} \quad (28)$$

3. Calcular a atualização da covariância do erro:

$$P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-) \quad (29)$$

4. Calcular a estimativa do estado:

$$\hat{X}_k(+) = \hat{X}_k(-) + K_k [Z_k - H_k \hat{X}_k(-)] \quad (30)$$

Note-se que os símbolos (-) e (+) representam, respetivamente, valores antes e depois da atualização do estado.

3.3. Plano Orbital

O movimento de um míssil balístico está confinado a um plano fixo no espaço, designado por plano orbital. Conhecendo a equação que define este plano, é possível fazer a projeção da trajetória no mesmo, o que permite trabalhar em 2D, através da formulação de um novo referencial.

A equação Cartesiana de um plano que atravessa a coordenada (0,0,0), ou seja, o centro da Terra, é representada por [25]:

$$P(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad (31)$$

Dado um conjunto de n pontos (x_i, y_i, z_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, o método dos mínimos quadrados permite minimizar a distância $D(x_i, y_i, z_i)$ entre a nuvem de amostras e a equação (31). A função objetivo torna-se:

$$F = \sum_{i=1}^n D^2(x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2 \quad (32)$$

De forma a satisfazer a equação (32), são determinados os pontos estacionários a partir das derivadas $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0$, de onde resulta o sistema de equações [26]:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i z_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ \sum_{i=1}^n x_i z_i & \sum_{i=1}^n y_i z_i & \sum_{i=1}^n z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n z_i \end{bmatrix} \quad (33)$$

Determinando o valor próprio mais baixo e o respetivo vetor próprio da matriz quadrada em (33), é possível determinar a solução de $[\alpha \beta \gamma]$ que melhor aproxima o plano aos pontos.

3.4. Secções Cónicas

Uma (secção) cónica consiste numa curva plana obtida através da interseção de um cone com um plano que não atravessa o vértice do cone [25]. Dependendo da posição relativa entre o cone e o plano, a sua interseção pode representar uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. A fórmula geral de uma secção cónica pode ser escrita da seguinte forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (34)$$

3.4.1. Elipse

Na presente dissertação, será dada especial atenção ao caso das elipses, uma vez que, de acordo com as Leis de Kepler, é esse o formato da trajetória de um míssil balístico em voo exo-atmosférico [27]. De forma a garantir que a cónica representa, de facto, uma elipse, é aplicada a limitação:

$$B^2 - 4AC < 0 \quad (35)$$

3.4.1.1. Parâmetros Orbitais

A posição de qualquer objeto em órbita é definido através de um conjunto de parâmetros orbitais, também conhecidos como elementos Keplerianos, os quais podem ser divididos em dois grupos: elementos dimensionais e elementos de orientação (ver Figura 4).

Elementos dimensionais:

- $[a]$ Semieixo Maior: especifica a dimensão da órbita.
- $[e]$ Excentricidade: especifica a forma da órbita.
- $[M]$ Anomalia Verdadeira: relaciona a posição na órbita em função do tempo.

Elementos de orientação:

- [i] Inclinação do plano orbital em relação ao plano de referência, ou seja, plano equatorial; ($0 \leq i \leq \pi$).
- [Ω] Ascensão direita do nó ascendente; medido no sentido anti horário no plano equatorial, entre a direção do ponto vernal até ao ponto no qual o míssil atravessa a linha do equador.
- [ω] Argumento do perigeu; medido no plano orbital na direção de movimento, entre o nó ascendente até ao perigeu; $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

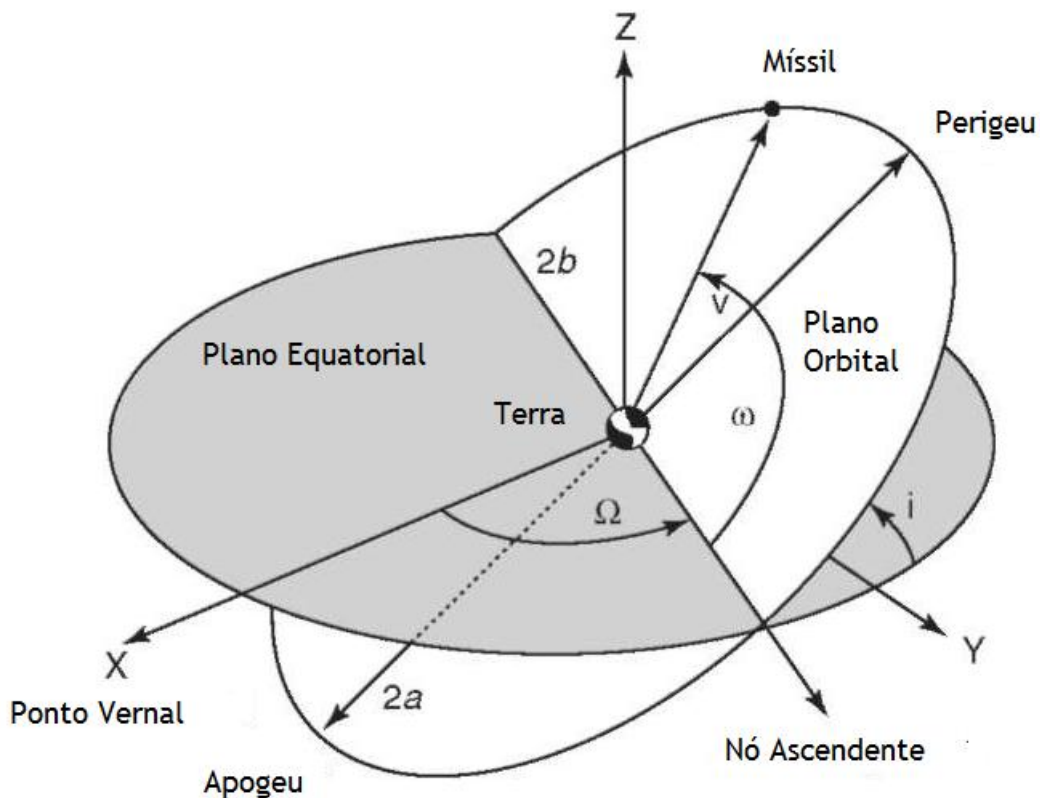


Figura 4- Ilustração dos elementos orbitais de uma órbita elítica [28]

3.4.2. Determinação da Expressão da Cônica/Elipse

A *optimization toolbox* é uma ferramenta do Matlab que contém vários algoritmos de otimização, os quais permitem, entre outras coisas, encaixar modelos em nuvens de informação [29]. Através da exploração desta ferramenta computacional, foi possível formular uma solução para o problema de determinação da cônica.

3.4.2.1. Formulação do Problema de Otimização

Considerando o conjunto de pontos definido na secção 3.3 como \wp e, a equação da cónica (34) como \mathbb{C} , a distância entre \wp e \mathbb{C} é fornecida pela expressão (36a):

$$f(X) = \text{dist}(\wp, \mathbb{C}) = \sum_{i=1}^n (Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)^2 \quad (36a)$$

$$\text{rest} = B^2 - 4AC \quad (36b)$$

Utilizando a função FMINCON disponível na *optimization toolbox* do Matlab, o problema de determinação da elipse é formulado como uma otimização não linear. As variáveis a determinar são $\{A, B, C, D, E, F\}$, a função objetivo a ser minimizada é $\text{dist}(\wp, \mathbb{C})$ com a restrição apresentada em (36b). O valor inicial foi determinado através de um algoritmo não iterativo numericamente estável, de encaixe de elipses num conjunto de pontos. Este algoritmo baseia-se numa minimização de mínimos quadrados e, revelou robustez e fácil implementação, razões pelas quais foi escolhido para esta função [30].

3.4.2.2. Função FMINCON

A função FMINCON determina o mínimo de um problema especificado por:

$$\min f(x) \text{ tal que } \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ \text{ceq}(x) = 0 \\ A \cdot x \leq b \\ A_{\text{eq}} \cdot x = \text{beq} \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \quad (37)$$

onde x, b, beq, lb, ub são vetores, A, A_{eq} são matrizes, $c(x), \text{ceq}(x)$ são funções que devolvem vetores e $f(x)$ é uma função que devolve um escalar. A função inicializa a partir de um valor inicial e, tenta encontrar um mínimo restrito de uma função escalar com várias variáveis [29]. A sintaxe para o problema de minimização através da função FMINCON vem da forma:

$$[x] = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{\text{eq}}, \text{beq}, lb, ub, \text{nonlcon}, \text{options}) \quad (38)$$

Onde as variáveis possuem o seguinte significado:

- **fun**: função objetivo a ser minimizada, ou seja, equação (36a)
- **x₀**: valor inicial, calculado através do método dos mínimos quadrados [30]
- **A, b**: desigualdade linear a que a função possa estar sujeita; no presente caso, uma vez que esta condição é inexistente: $A = b = [\]$
- **A_{eq}, beq**: igualdade linear a que a função possa estar sujeita; $A_{\text{eq}} = \text{beq} = [\]$
- **lb, ub**: define um conjunto de limites superior e inferior à variável x ; $lb = ub = [\]$

- **nonlcon**: submete a minimização a desigualdades $c(x)$ ou igualdades $ceq(x)$ não lineares; de forma a garantir a formação de uma elipse, e não uma hipérbole ou parábola, é aqui imposta a condição definida pela equação (36b) em $c(x)$; $ceq(x) =$
[]

Uma descrição mais detalhada da função FMINCON e de todas as suas opções pode ser encontrada na documentação de apoio do Matlab em [29].

Capítulo 4 - Simulações

Nesta secção, serão apresentados os resultados obtidos através de simulação computacional em Matlab.

Considera-se a existência de um sensor hipoteticamente localizado no topo da Serra da Estrela com as seguintes coordenadas:

Latitude Sensor: 40° 19' 19" N
Longitude Sensor: 7° 36' 46" W
Altitude Sensor: 2000 m

A presença do míssil balístico é detetada aproximadamente a partir do momento em que este inicia o seu voo exo-atmosférico, nas coordenadas:

Latitude Detecção MB: 38° 9' 57.3" N
Longitude Detecção MB: 7° 53' 30.3" W
Altitude Detecção MB: 100×10^3 m

Nas transformações de coordenadas geodéticas para geocêntricas, é considerado um modelo elipsoidal da Terra, denominado *WGS84 - World Geodetic System* - desenvolvido em 1984 e utilizado em equipamentos de GPS, o qual tem em conta o relevo do solo. A velocidade do MB no instante de deteção é de $Mach = 18 \sim 6100$ m/s.

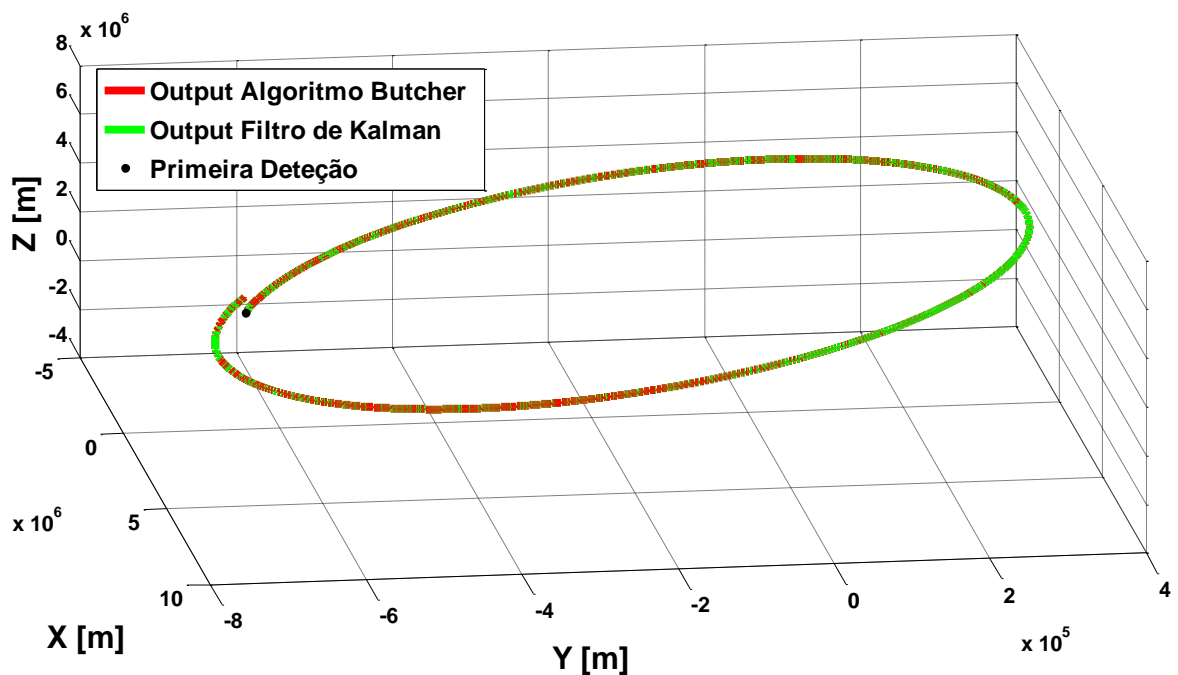


Figura 5 - Órbita completa de um míssil balístico (Butcher vs. Kalman)

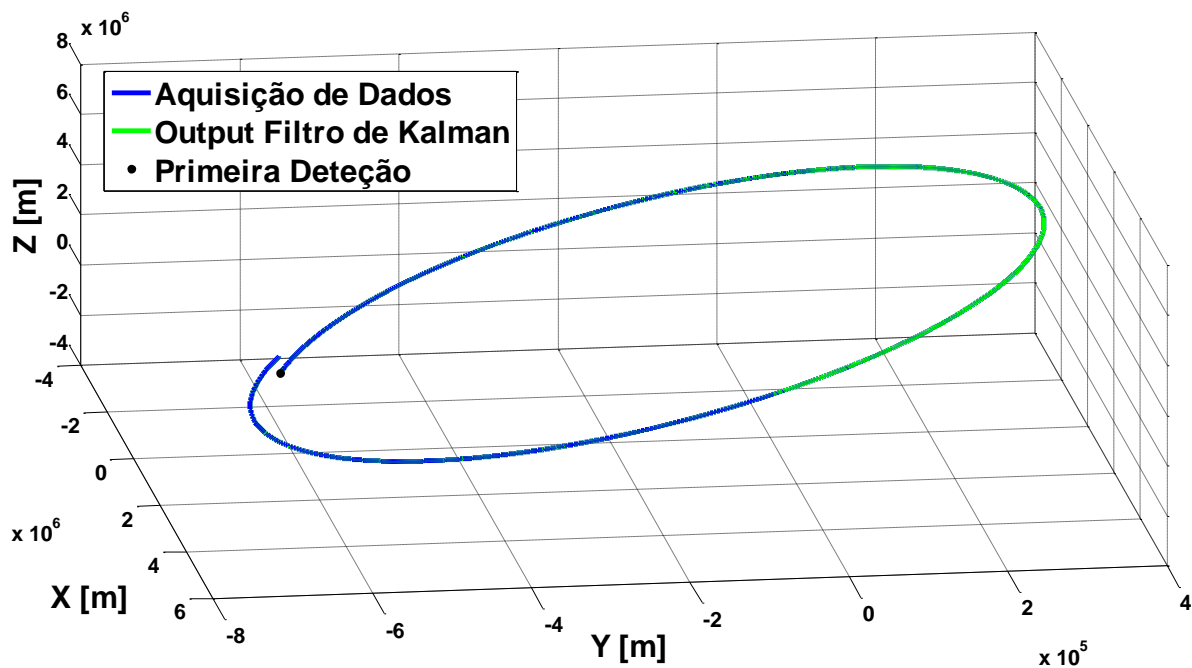


Figura 6 - Órbita completa de um míssil balístico (Medições vs. Kalman)

As Figuras 5 e 6 exibem a órbita de um míssil balístico que possui as condições iniciais indicadas no início do presente capítulo. Devido à inviabilidade de utilização de dados reais, foi utilizado o algoritmo de Butcher, representado a vermelho, para simular a presença de um MB. As medições obtidas por sensor, transformadas em coordenadas geocêntricas, estão representadas a azul, enquanto a previsão do filtro de Kalman está representada a verde. Em ambas as figuras, o filtro de Kalman revela uma boa aproximação e correção dos ruídos inseridos, o que pode ser comprovado através da análise da Figura 7, onde é possível perceber que as normas das covariâncias do erro *a priori* (linha preta a tracejado) e *a posteriori* (linha verde contínua), ou seja, antes e depois da atualização do estado do sistema, tal como seria de esperar, convergem ao fim de aproximadamente dois pontos três segundos para um valor de cerca de oito metros.

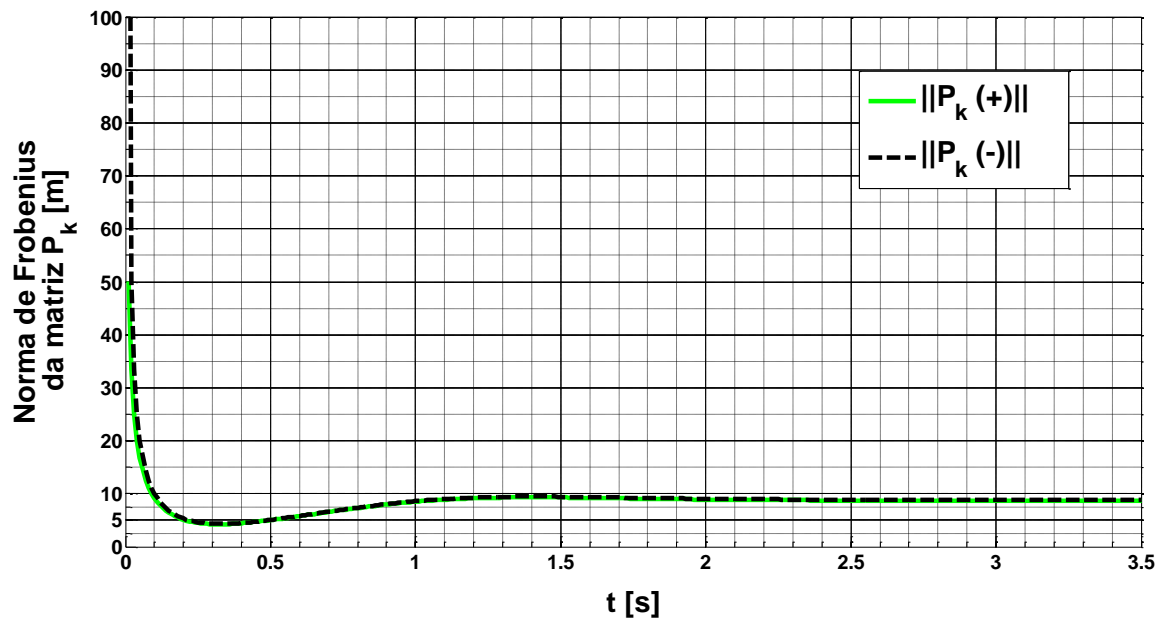


Figura 7 - Evolução da covariância do erro de estimação (norma de Frobenius)

Contudo, na prática, a componente da órbita correspondente ao interior do planeta não é válida. Na realidade, apenas possuímos um excerto da órbita, correspondente à trajetória representada na Figura 8. É considerado um lançamento com origem na vila de Cuba, em Portugal, com impacto controlado no Pólo Norte.

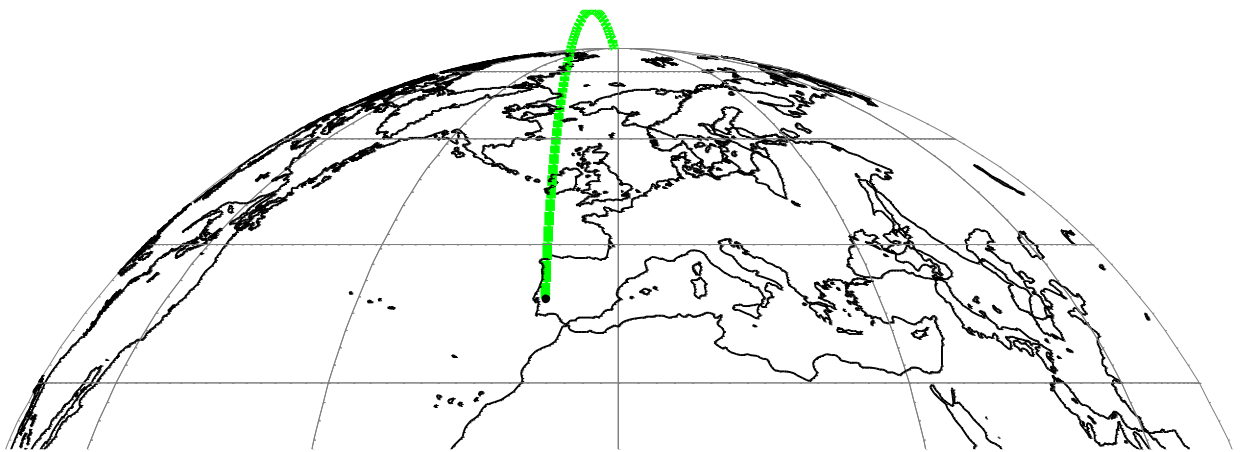


Figura 8 - Trajetória de um míssil balístico

De seguida, será apresentado o conjunto de passos, organizados num organigrama apresentado na Figura 9, os quais permitem a utilização da informação gerada para a concretização do objetivo final, que consiste na caracterização da órbita elítica.

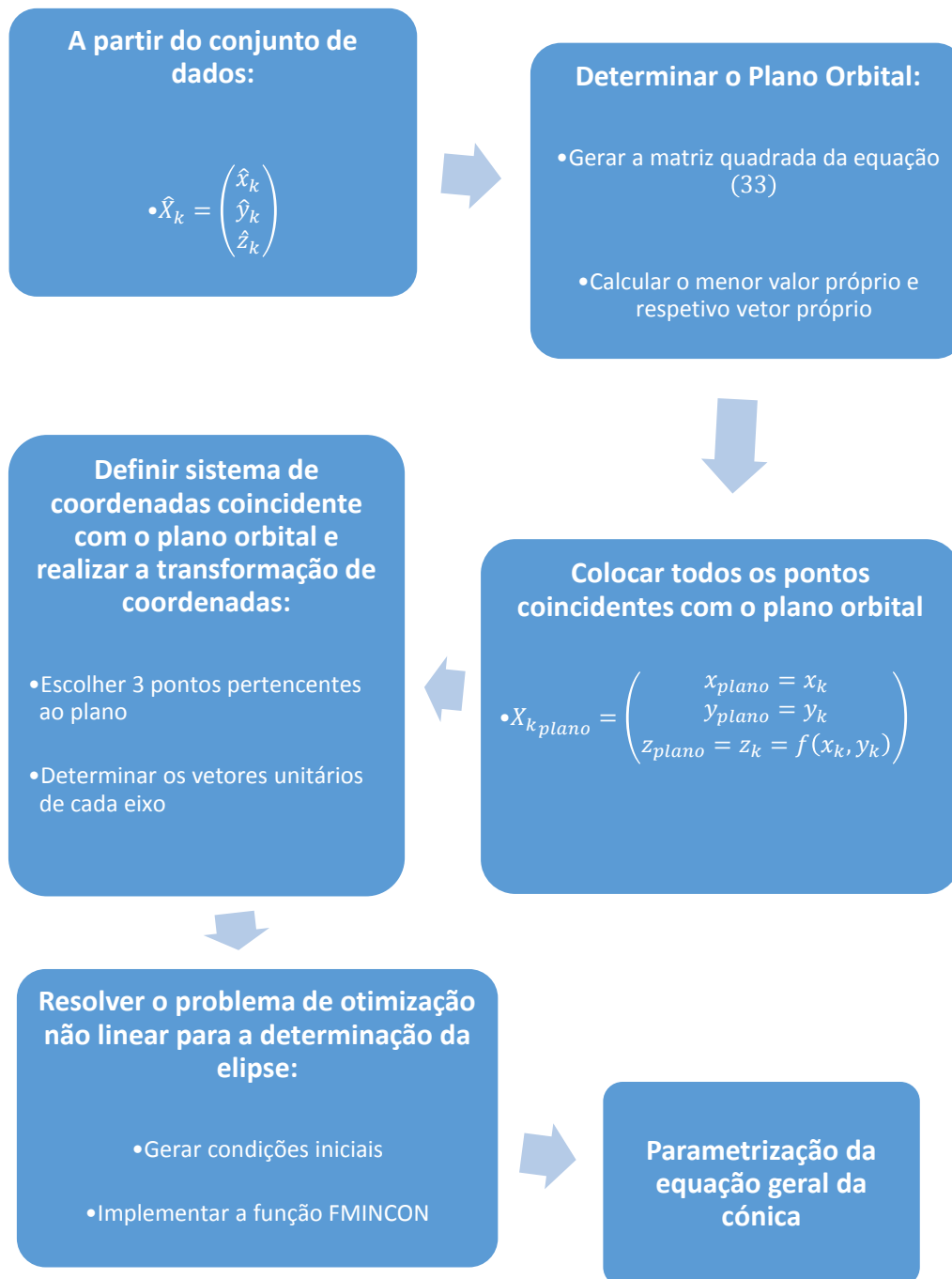


Figura 9 - Organograma do processo de tratamento de dados

A partir do conjunto de dados adquiridos, é possível, em primeiro lugar, determinar o plano orbital através do método descrito na secção 3.3. Os coeficientes $[\alpha \beta \gamma]$ (eq. (40)) são:

$$\alpha \approx 0.1333 \quad (39a)$$

$$\beta \approx 0.9911 \quad (39b)$$

$$\gamma \approx 0.0045 \quad (39c)$$

permitindo formar a equação do plano (40) representado na Figura 10.

$$0.1333x + 0.9911y + 0.0045z = 0 \quad (40)$$

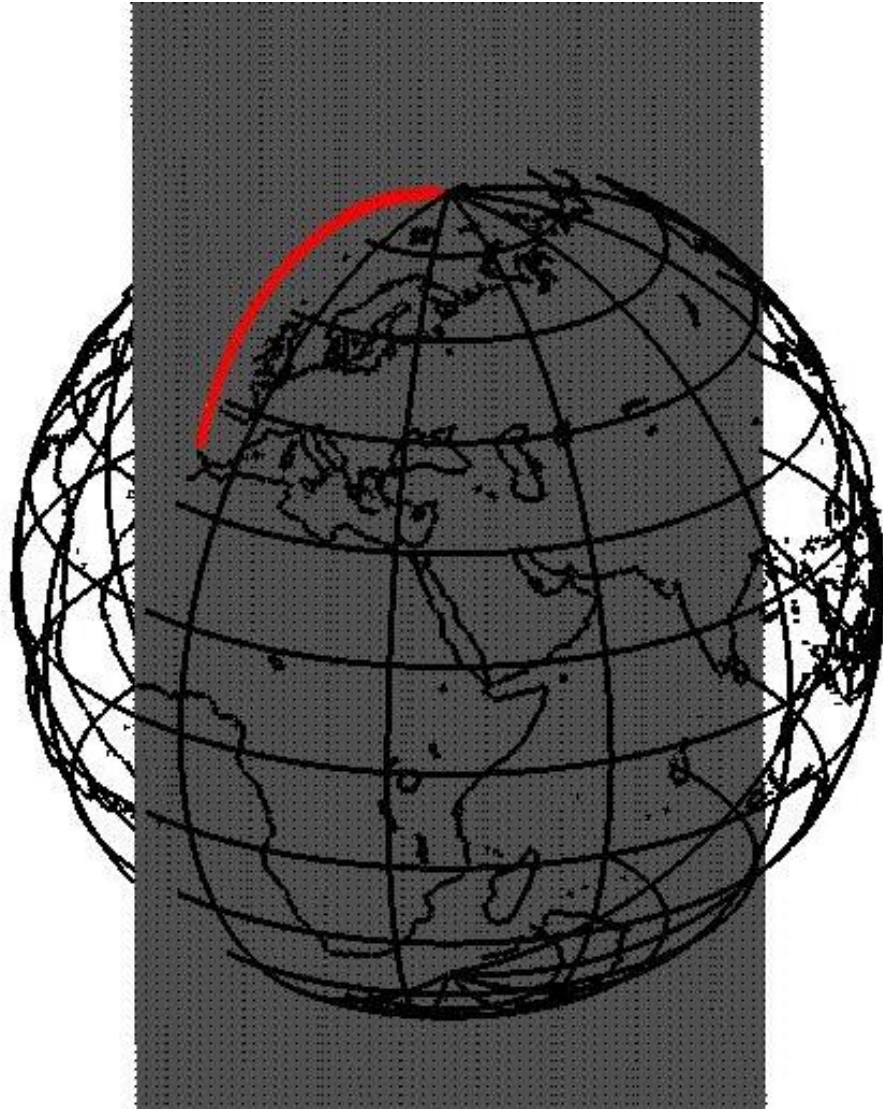


Figura 10 - Plano orbital (cinzento); trajetória (vermelho)

O passo seguinte consiste em colocar todos os pontos da trajetória coincidentes com o plano. Assim, é possível escolher três pontos pertencentes ao plano, a partir dos quais é criado um novo referencial de duas dimensões, inserido no plano orbital. Considere-se que \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} são três pontos pertencentes ao plano orbital. O primeiro eixo do novo referencial é definido diretamente através de:

$$v_1 = \mathcal{B} - \mathcal{A} \quad (41)$$

$$v_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad (42)$$

Através do produto vetorial $v_1 \times (C - A)$, é obtido um vetor perpendicular a v_1 e a $(C - A)$, ou seja, normal ao plano que os contém (plano orbital):

$$v_3 = v_1 \times (C - A) \quad (43)$$

$$v_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} \quad (44)$$

De forma a obter um vetor unitário perpendicular a v_1 , correspondente ao segundo eixo do novo referencial, realiza-se o produto vetorial entre v_3 e v_1 :

$$v_2 = v_3 \times v_1 \quad (45)$$

Conhecendo os vetores unitários que constituem a base ortonormal do novo referencial, é possível realizar a transformação de coordenadas da nuvem de pontos correspondente à trajetória. Para qualquer ponto $\mathcal{P} = [x, y, z]$ a sua transformação (\mathcal{JP}) para o novo sistema de coordenadas vem da forma:

$$\mathcal{JP} = [(\mathcal{P} - \mathcal{A}) \cdot v_1, (\mathcal{P} - \mathcal{A}) \cdot v_2, (\mathcal{P} - \mathcal{A}) \cdot v_3] \quad (46)$$

Desta forma, é possível prosseguir com a determinação da equação da cónica/elipse, através do método explicitado na secção 3.4.2.

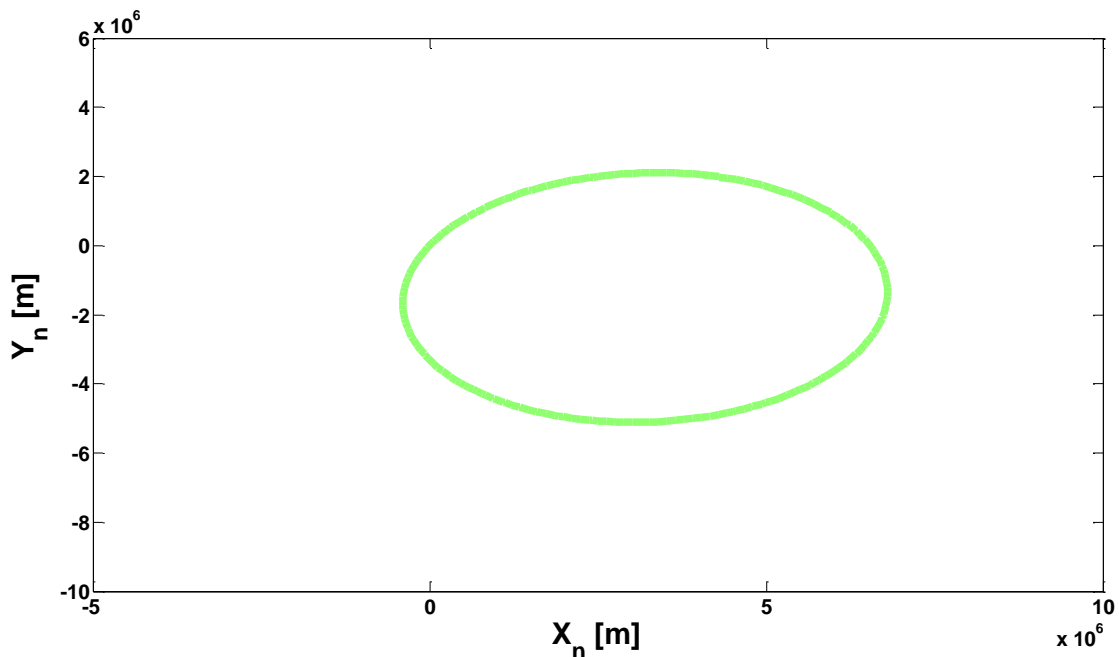


Figura 11 - Órbita do míssil balístico no plano orbital

Na Figura 11 está representada no plano orbital a elipse obtida, a qual possui a seguinte equação:

$$\begin{aligned} -7.0746 \times 10^{-1}x_n^2 + 6.6966 \times 10^{-2}x_ny_n - 7.0350 \times 10^{-1}y_n^2 + 4.6288 \times 10^6x_n \\ - 2.3268 \times 10^6y_n + 7.7323 \times 10^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Através de um processo de parametrização (cf. Anexo VI), é possível transformar a equação anterior na forma geral da elipse:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (48)$$

onde a e b representam, respetivamente, os semieixos maior e menor. Esta formulação torna-se útil, na medida em que simplifica a determinação de alguns dos parâmetros de caracterização da elipse/órbita.

Após um conjunto de transformações, a equação (47) adquire a seguinte forma:

$$\frac{X^2}{3673855^2} + \frac{Y^2}{3663566^2} = 1 \quad (49)$$

Como se observa na equação anterior, os semieixos maior e menor são, respetivamente, $a = 3673855 \text{ m}$ e $b = 3663566 \text{ m}$. A excentricidade da elipse pode ser determinada através destes valores:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cong 0.074788 \quad (50)$$

A distância entre o centro e cada um dos focos da elipse é obtida através de $\pm\sqrt{a^2 - b^2} \cong 274763 \text{ m}$. Sabendo que o centro da elipse (na sua versão não transformada) pode ser determinado a partir dos coeficientes da equação (51):

$$(x_{n_0}, y_{n_0}) = \left(\frac{2BD - CE}{C^2 - 4AB}, \frac{2AE - CD}{C^2 - 4AB} \right) = (3271412 \text{ m}, -1653746 \text{ m}) \quad (51)$$

os focos possuem as coordenadas $(2996649 \text{ m}, -1653746 \text{ m})$ e $(3546175 \text{ m}, -1653746 \text{ m})$.

A área da elipse é de $\pi ab \cong 42283984416238 \text{ m}^2$ e o perímetro é de, aproximadamente, $2a \left[2 + (\pi - 2) \left(\frac{b}{a} \right)^{1.456} \right] \cong 23049330 \text{ m}$.

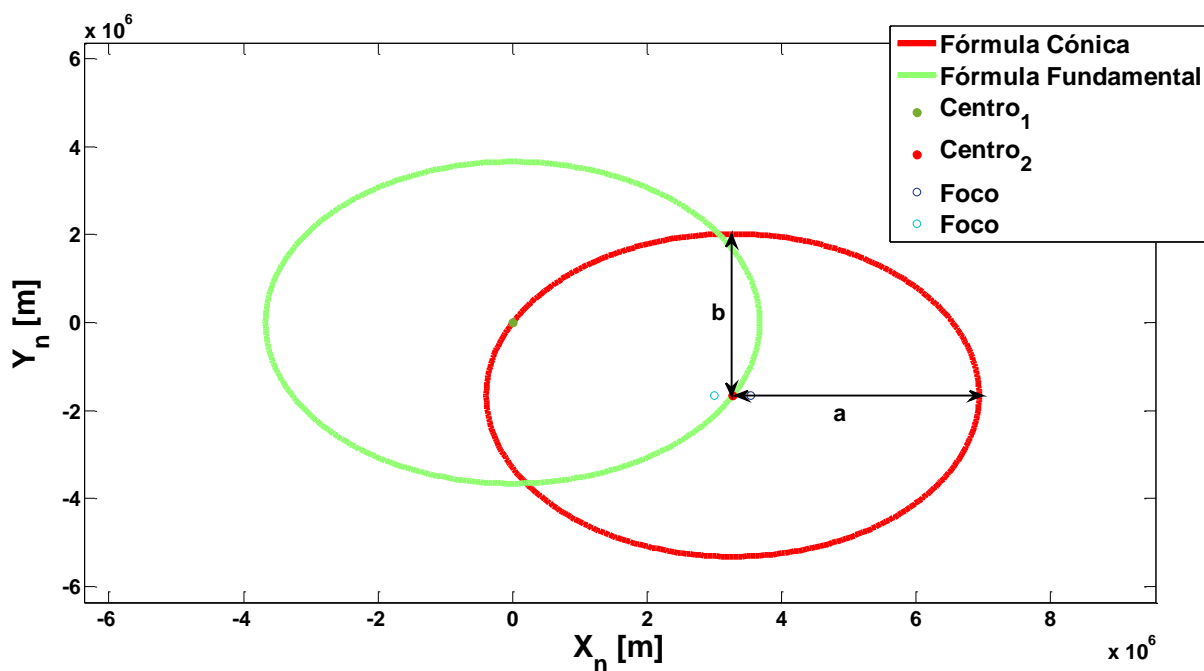


Figura 12 - Parametrização e caracterização da órbita/elipse; $a \equiv$ semieixo maior, $b \equiv$ semieixo menor

A inclinação do plano orbital, i , pode ser obtida através da aplicação da lei do produto escalar entre dois vetores:

$$i = \arccos\left(\frac{s \cdot l}{\|s\| \|l\|}\right) \quad (52)$$

onde s é qualquer vetor da forma $[0, y, 0]$ e l é qualquer vetor da forma $[0, y, z_{plano}]$. No caso do vetor l , o valor da coordenada y deve ser negativo. Através deste raciocínio, foi determinada uma inclinação do plano orbital $i \cong 1.575 \text{ rad} \cong 90.26^\circ$.

Tabela 1 - Parâmetros da caracterização da elipse

Característica	Abreviatura	Valor
Semieixo Maior [m]	a	3673855
Semieixo Menor [m]	b	3663566
Centro [m]	(x_0, y_0)	$(3271412, -1653746)$
Excentricidade	e	0.074788
Inclinação do Plano de Trajetória [°]	i	90.26
Área [m ²]	-	42283984416238
Perímetro [m]	-	23049330

As observações mais imediatas acerca dos resultados obtidos recaem sobre a pequena diferença entre os semieixos a e b , conseqüentemente, na reduzida excentricidade. Isto significa que a elipse é, de facto, muito próxima de uma circunferência. Uma outra prova deste facto encontra-se na Figura 12, onde se pode observar que os focos se encontram muito próximos do centro da elipse. Isto acontece devido à escala do gráfico, achatada no eixo das ordenadas.

O valor da inclinação do plano orbital é ligeiramente superior a 90° , o que seria de esperar, pois a trajetória do míssil encontra-se muito próxima do meridiano de Greenwich.

Capítulo 5 - Conclusão e Trabalhos Futuros

5.1. Conclusão

O objetivo da presente dissertação consistiu no desenvolvimento de um método capaz de caracterizar trajetórias orbitais de mísseis balísticos (MB) em tempo real. Foi simulada a presença de um MB sobre a localidade de Cuba, em Portugal, detetado através de medições efetuadas por um sensor localizado no cimo da Serra da Estrela. Através da informação recolhida, foi possível extrapolar a porção da trajetória disponível para uma elipse, a qual, aproxima a totalidade da órbita.

Considerando que a fase de voo na qual o míssil se encontra no início da aquisição de dados é a fase balística, o seu movimento rege-se de acordo com as mesmas leis aplicadas no movimento orbital de satélites, i.e., Leis de Kepler. De forma a simular a dinâmica não linear de um MB, foi utilizado o algoritmo de Butcher, ao qual foi adicionada uma componente aleatória que representa a existência de ruídos existentes num cenário real. Por isso, foi também implementado o filtro de Kalman, capaz de contrariar e eliminar parte destes ruídos, presentes na leitura do estado do sistema.

Após a leitura dos dados, foi determinado um plano que atravessa o centro da Terra e encaixa a nuvem de pontos adquiridos, correspondentes às coordenadas geocêntricas do míssil - plano orbital. O método utilizado neste passo é baseado nos mínimos quadrados e, revelou uma excelente aproximação. Através da formulação de um referencial pertencente ao plano orbital, foi possível trabalhar em 2D e, conseqüentemente, realizar a aproximação da elipse. Note-se que, caso fossem utilizadas diretamente as coordenadas geocêntricas em 3D, o resultado obtido seria uma superfície, ao revés de uma curva, ou seja, em vez de uma elipse, seria encontrado um elipsoide. Um dos pontos para criar o novo referencial foi, intencionalmente, o centro da Terra, de forma a facilitar a identificação do sentido do movimento do MB, o que poderá ser útil, principalmente, em aplicações futuras provenientes do trabalho.

O conjunto de dados obtidos foi empregue na função FMINCON, parte da *optimization toolbox* do Matlab, capaz de otimizar a determinação da curva cónica correspondente, com a imposição de se tratar, exclusivamente, de uma elipse. Esta função revelou-se sensível a condições iniciais aleatórias, o que foi contrariado através da implementação do método dos mínimos quadrados para este efeito. Como seria de esperar, quanto maior a amostra de pontos disponíveis, melhor a aproximação da elipse. Numa fase mais precoce do trabalho, foi testado um método de encaixe de elipses, no qual se realizava um pré-processamento dos dados originais, através de uma transformação de normalização linear; uma vez que este método necessitava de uma grande porção da órbita para garantir a formulação de uma elipse, foi necessário arranjar uma alternativa para a solução do problema de determinação da elipse, nomeadamente através da formulação de uma otimização não-linear.

De forma a manter a simulação próxima da realidade, considerou-se que a deteção do estado do MB é feita até ao instante em que este possui altitude igual a zero, ou seja, atinge a Terra. Esta hipótese implica ignorar todas as forças, além da força da gravidade, existentes durante a fase de reentrada, tais como o arrasto e, até mesmo a tração, por vezes utilizada na correção do ponto de impacto.

Após obter a equação da elipse sob a forma de uma curva cónica, procedeu-se à parametrização da mesma. Este processo teve como objetivo reescrever a mesma elipse na sua fórmula fundamental, facilitando assim, a análise das suas propriedades geométricas. A parametrização consiste num conjunto de operações de rotação e de redimensionamento, as quais culminam numa elipse cujos eixos de simetria coincidem com os eixos do sistema de coordenadas. Como se constata, a excentricidade e a pequena diferença entre os semieixos maior e menor, revelam uma elipse muito próxima de um círculo. Isto deve-se ao facto de o acompanhamento do MB se ter realizado durante um período relativamente curto, de aproximadamente $t = 1100$ segundos, o que equivale a cerca de um terço do período total da órbita. Embora a secção atmosférica esteja otimizada, o mesmo não acontece na zona da órbita que percorre o interior da Terra, o que resulta numa elipse menos excêntrica do que é na realidade.

5.2. Trabalhos Futuros

Este trabalho abre várias portas em termos de possíveis perspetivas futuras quanto à flexibilidade na determinação em tempo real da elipse orbital. Diferentes métodos poderiam ser elaborados em função da dimensão da amostra de pontos disponível, da porção e/ou fase de órbita, da dimensão dos erros associados à localização do míssil, entre outros.

Uma potencial aplicação do método desenvolvido no teatro de Defesa de mísseis balísticos consiste na determinação do seu local de lançamento. Além da capacidade de previsão da trajetória do míssil, permitindo que este seja eliminado, é essencial que o sistema de Defesa seja capaz de determinar a zona de lançamento do mesmo, para que ações preventivas possam ser tomadas. A necessidade de um método robusto capaz de desempenhar esta função é, cada vez mais, essencial nos dias de hoje, onde as plataformas de lançamento móveis fazem parte do plantel bélico de várias nações e grupos.

Referências Bibliográficas

- [1] "IEEE Global History Network - V1 and V2 Rockets",
http://www.ieeeeghn.org/wiki/index.php/V1_and_V2_Rockets, consultado em 30 de Setembro de 2014.
- [2] Y. Li, T. Kirubarajan e Y. Bar-Shalom, "Trajectory and Launch Point Estimation for Ballistic Missiles from Boost Phase LOS Measurements," na Ata da *7th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Haifa, Israel, 1999, pp. 930-952.
- [3] A. Benavoli, L. Chisci e A. Farina, "Tracking of a Ballistic Missile with A-Priori Information," *Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 43, 2007, pp. 1000-1016.
- [4] A. Farina, L. Timmoneri e D. Vigilante, "Classification and Launch-Impact Point Prediction of Ballistic Target via Multiple Model Maximum Likelihood Estimator," na Ata da *IEEE Radar Conference*, 2006, pp. 802-806.
- [5] W. J. Farrell, "Interacting Multiple Model Filter for Tactical Ballistic Missile Tracking," *IEEE Transactions On Aerospace and Electronic Systems*, vol. 44, 2008, pp. 418-426.
- [6] R. Tharmarasa, T. Kirubarajan, N. Nadarajah, Y. Bar-Shalom e T. Thayaparan, "Profile-Free Launch Point Estimation for Ballistic Targets using Passive Sensors," *Journal of Advances in Information Fusion*, vol. 7, 2012, pp. 1-12.
- [7] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, vol. 82, 1960, pp. 35-45.
- [8] M. S. Grewal e A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, Wiley, 2008.
- [9] L. A. McGee, S. F. Schmidt e G. L. Smith, "Application of Statistical Filter Theory to the Optimal Estimation of Position and Velocity on Board a Circumlunar Vehicle," NASA Technical Reports, Moffett Field, CA, 1962.
- [10] R. R. Bate, D. D. Mueller e J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, New York: Dover Publications, Inc., 1971.
- [11] A. D. Wheelon, "Free Flight of a Ballistic Missile," *ARS Journal*, vol. 29, 1959, pp. 915-926.
- [12] X. R. Li e V. P. Jilkov, "A Survey of Maneuvering Target Tracking - Part II: Ballistic Target Models," na Ata da *Conference on Signal and Data Processing of Small Targets*, San Diego, CA, USA, 2001, pp. 96-119.
- [13] F. J. Regan e S. M. Anandkrishnan, *Dynamics of Atmospheric Re-Entry* AIAA education series, American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1993.

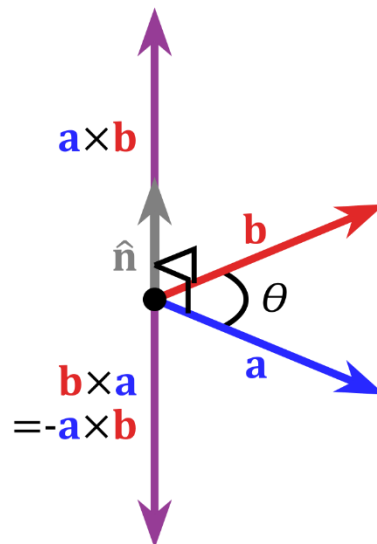
- [14] J. W. Cornelisse, H. F. R. Schöyer e K. F. Wakker, *Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics*, Pitman, 1979.
- [15] J. P. Vinti, "Invariant Properties of the Spheroidal Potential of an Oblate Planet," *Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematics and Mathematical Physics.*, vol. 70B, 1966, pp. 1-16.
- [16] G. Welch, B. D. Allen, A. Ilie, G. Bishop, "Measurement sample time optimization for human motion tracking/capture systems," na Ata da *Workshop on Trends and Issues in Tracking for Virtual Environments at the IEEE Virtual Reality Conference* Charlotte, NC, USA, 2007
- [17] A. Shareef, Y. Zhu, "Localization Using Extended Kalman Filters in Wireless Sensor Networks," em *Kalman Filter Recent Advances and Applications*, InTech, 2009.
- [18] "Representação da Aquisição de Dados", http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_polar_coordinates.png, consultado em 25 de Setembro de 2014.
- [19] S.-T. Park e J. G. Lee, "Improved Kalman Filter Design for Three-Dimensional Radar Tracking," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 37, 2001, pp. 727-739.
- [20] D. J. Evans, K. Murugesan, S. Sekar e H.-M. Kim, "Non-linear singular systems using RK-Butcher algorithms," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 83, 2006, pp. 131-142.
- [21] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, 2008.
- [22] R. Faragher, "Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation," na Ata da *IEEE Signal Processing Magazine*, 2012, pp. 128-132.
- [23] G. Welch e G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, Los Angeles, CA: ACM, Inc., 2001.
- [24] Y. Bar-Shalom, X.-R. Li e T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [25] D. Zwillinger, *Standard Mathematical Tables and Formulae*, Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [26] F. Qian, W. Kan, C. Lailiang e A. Jianfeng, "The application of point cloud data plane fitting in the Guishan Han Tomb modeling," na Ata da *International Conference on Multimedia Technology (ICMT)*, Hangzhou, 2011, pp. 1781-1784.
- [27] V. A. Chobotov, *Orbital Mechanics*, Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2002.
- [28] "Elements of an Elliptical Orbit", <http://what-when-how.com/space-science-and-technology/precision-orbit-determination-for-earth-observation-systems/>, consultado em 10 de Agosto de 2014.
- [29] *Optimization Toolbox For Use with MATLAB*, Natick, MA: The MathWorks, Inc., 2001.

- [30] R. Halír e J. Flusser, “Numerically stable Direct Least Squares fitting of Ellipses,” na Ata da *6th International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization*, 1998, pp. 125-132.

Anexo I - Cálculo do Produto Vetorial

Definição: O produto vetorial de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ com:

- Comprimento $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$, onde θ é o menor ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} e
- Direção $\hat{\mathbf{n}}$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário ortogonal (perpendicular) a ambos os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , de tal forma que $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{n}}\}$ seja orientado pela regra da mão direita.



De uma forma geral, é possível calcular o produto vetorial em forma de componentes do seguinte modo: seja $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Escrevendo esta operação através dos determinantes, uma vez que estes permitem simplificar as fórmulas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k} \\ &= \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle \end{aligned}$$

Anexo II - Valores dos Coeficientes de Potencial

Existem várias tentativas de determinação dos coeficientes J , as quais variam ligeiramente entre si. A partir de [10], é fornecido um conjunto de valores representativos:

$$J_2 = (1082.64 \pm 0.03) \times 10^{-6}$$

$$J_3 = (-2.5 \pm 0.1) \times 10^{-6}$$

$$J_4 = (-1.6 \pm 0.5) \times 10^{-6}$$

$$J_5 = (-0.15 \pm 0.1) \times 10^{-6}$$

$$J_6 = (0.57 \pm 0.1) \times 10^{-6}$$

Anexo III - Covariância

Em probabilidade e estatística, a covariância entre duas variáveis aleatórias é uma medida da natureza da associação entre essas variáveis. Se elevados valores de uma variável X corresponderem a elevados valores de outra variável Y e, o mesmo acontecer para valores reduzidos, i.e., as variáveis tendem a ter um comportamento semelhante, a covariância é positiva. No caso oposto, se elevados valores de X correspondem a pequenos valores de Y , i.e., as variáveis tendem a ter um comportamento oposto, a covariância é negativa. Logo, o sinal da covariância indica se a relação de duas variáveis dependentes aleatórias é positiva ou negativa. Quando X e Y são estatisticamente independentes, a covariância é igual a zero. Contudo, o inverso não é necessariamente verdade, ou seja, duas variáveis podem ter covariância igual a zero e não serem estatisticamente independentes. Uma vez que a covariância apenas descreve uma relação linear entre duas variáveis, caso seja nula (a covariância), as variáveis X e Y podem perfeitamente ter uma relação não linear, não sendo necessariamente independentes.

A matriz de covariância $Q = (\text{cov}(X_i, Y_i))_{i,j}$, também conhecida como matriz variância-covariância, é uma matriz cujos elementos nas posições i, j correspondem à covariância entre o i -ésimo e j -ésimo elementos de um vetor de variáveis aleatórias. Caso a matriz de covariância seja uma matriz diagonal, isso significa que as diferentes variáveis não possuem uma relação linear entre si.

Anexo IV - Função Trigonométrica $\arctan2(\cdot)$

A função $\arctan2(y, x)$, muitas vezes apresentada como $\text{atan2}(y, x)$, representa uma função arco-tangente com dois argumentos, cujo objetivo é a recolha de informação sobre os sinais dos *inputs*, de forma a devolver o ângulo no quadrante correto, o que não é possível de fazer na função de arco-tangente tradicional.

Para qualquer número real, tendo em conta que pelo menos um dos argumentos x e y é diferente de zero, $\arctan2(y, x)$ é o ângulo em radianos entre o eixo positivo das abcissas de um plano e o ponto com as coordenadas (x, y) . O ângulo é positivo no sentido anti-horário e negativo para ângulos no sentido horário.

Nos termos da tradicional função $\arctan(\cdot)$, cujo alcance varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, pode ser expressa como:

$$\arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x} + \pi\right), y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x} - \pi\right), y < 0, x < 0 \\ +\frac{\pi}{2}, y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, y < 0, x = 0 \\ \text{indefinido}, y = 0, x = 0 \end{cases}$$

Anexo V - Algoritmo de Butcher para a Simulação de Sistemas Dinâmicos

O modelo de um sistema é descrito por:

$$\dot{\eta} = f(\tau, \eta(\tau))$$

onde $\tau \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado e $\eta(\tau) \in \mathfrak{R}^m$ o vetor dependente do tempo.

Notações:

$$\eta_k \equiv \eta(t_k)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$t_k = t_{k-1} + dt: \text{ o tempo no } k\text{-ésimo passo};$$

$$\eta_k(\tau) = \eta(\tau_k);$$

$$dt : \text{ o passo da simulação}$$

Algoritmo de Butcher:

Assumindo η_0 dado, os estados do sistema em t_1, t_2, \dots, t_k são determinados por:

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)$$

com:

$$k_1 = dt \cdot f(\eta_k, \tau_k)$$

$$k_2 = dt \cdot f\left(\eta_k + \frac{k_1}{4}, \tau_k\right)$$

$$k_3 = dt \cdot f\left(\eta_k + \frac{k_1}{8} + \frac{k_2}{8}, \tau_k\right)$$

$$k_4 = dt \cdot f\left(\eta_k - \frac{k_2}{2} + k_3, \tau_k\right)$$

$$k_5 = dt \cdot f\left(\eta_k + \frac{3k_1}{16} + \frac{9k_4}{16}, \tau_k\right)$$

$$k_6 = dt \cdot f\left(\eta_k - \frac{3k_1}{7} + \frac{2k_2}{7} + \frac{12k_3}{7} - \frac{12k_4}{7} + \frac{8k_5}{7}, \tau_k\right)$$

Anexo VI - Parametrização da Equação da Cônica

Considere-se que a equação analítica para uma cônica em qualquer posição é dada pela expressão:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

De forma a reduzir esta equação a uma das formas fundamentais (elipse, parábola ou hipérbole), é necessário implementar os seguintes passos (note-se que cada decisão é baseada nos valores dos coeficientes mais recentes, obtidos após cada transformação):

1. Se $C \neq 0$, substituir simultaneamente $x \rightarrow qx + y$ e $y \rightarrow qy - x$, onde

$$q = \sqrt{\left(\frac{B-A}{C}\right)^2 + 1} + \frac{B-A}{C}$$

Este passo permite obter $C = 0$, o que corresponde a uma rotação e redimensionamento em relação à origem.

2. Se $B = 0$, trocar x por y e vice-versa.
3. Se $E \neq 0$, efetuar a substituição $y \rightarrow y - \frac{1}{2}\left(\frac{E}{B}\right)$, o que corresponde a uma transformação no eixo das ordenadas.
4. Se $A = 0$:
 - a. Se $D \neq 0$, efetuar a substituição $x \rightarrow x - \frac{1}{2}\left(\frac{F}{D}\right)$, o que equivale a uma transformação no eixo das abcissas; a cônica é uma parábola.
 - b. Se $D = 0$, a equação representa uma cônica degenerada.
5. Se $A \neq 0$:
 - a. Se $D \neq 0$, efetuar a transformação $x \rightarrow x - \frac{1}{2}\left(\frac{D}{A}\right)$, o que corresponde a uma transformação no eixo das abcissas.
 - b. Se $F \neq 0$, dividir a equação por F , de forma a obter $F = 1$.
 - i. Se A e B são ambos negativos, a cônica é uma hipérbole.
 - ii. Se A e B são ambos positivos, a cônica é uma elipse.
 - iii. Se A e B são ambos negativos, a elipse é imaginária.
 - c. Se $F = 0$, a equação representa uma cônica degenerada.

Anexo VII - Artigo: *Real-Time Characterization of Ballistic Missiles Orbital Trajectories*

Real-Time Characterization of Ballistic Missiles Orbital Trajectories

António J.R. Moreira

Abstract

Ballistic missiles pose an increasing threat to populations, territories and military forces deployed overseas. Over 30 nations have, or are acquiring ballistic technology which can be eventually used to carry not only conventional warheads but also weapons of mass destruction. The proliferation of these capabilities encourages governments and organizations to take into account this kind of problem in their defence programs. Therefore, arises the necessity to develop methods such as the real-time characterization of ballistic missiles trajectories which allows us to fight this threat. Using Butcher's algorithm for state propagation, the presence of an exo-atmospheric ballistic missile was simulated and detected by a sensor whose location is known. The measurements, comprising a range and two angles, are introduced in the Kalman filter in order to reduce noise perturbations. Solving a classic eigenvalue problem, the orbital plane is determined. Then, with the cloud of points from the Kalman filter output, relative to a coordinate system within the orbital plane, the conic surface equation is determined. Setting this problem as a nonlinear optimization with FMINCON, one can restrict the result to an ellipse. Admitting a set of initial conditions (position and velocity) and parameterizing the general equation of a conic surface, it was possible to determine an ellipse with a valid set of parameters, including the semi axes, centre coordinates, orbital plane inclination, eccentricity, among others. The ballistic missile is detected over Portugal and impacts in the North Pole. Although this geometric information is not enough in a real life event, the presented work can be further used in the location of the launching area.

Key-Words

Ballistic Missile, Orbit Characterization, Kalman Filter, Conic, Nonlinear Optimization

1. Introduction

In a Ballistic Missile (BM) defence theatre, information has great value. Knowledge of a BM orbit/trajectory parameters allows the estimation of launch and impact points, which are very important in order to take action against this threat. In 1999, Yicong Li et. al [1] addressed the problem of estimating the trajectory and the launch point of a BM using Line-of-Sight (LOS) measurements from passive sensors during the boost phase. The major limitations include poor observability of the missile motion, the estimation of the unknown launch time and the use of potentially inaccurate thrust profiles for target dynamics modelling. A maximum likelihood estimator based on the Levenberg-Marquardt algorithm was used to provide the state estimate and error covariance.

The estimation of a BM trajectory during re-entry phase based on a priori information from an Infrared (IR) satellite was addressed in [2]. The problem was formulated as a nonlinear optimization. The probability of detection was always considered equal to one, i.e., it doesn't consider the (great) possibility of situations in which there is a measurement deficit.

Along with a boost phase kinematic model, the use of information stored in a BM database is considered in [3]. In order to determine the correct missile within the database, a multiple model maximum likelihood estimator was implemented and revealed a good reliability for boost phases with 80 seconds or more. A major limitation of this method is the type of classified information the estimator requires.

In 2008, Farrell [4] describes an algorithm for the estimation of BM trajectories, whose dynamic parameters are unknown. Motivated by the necessity to improve state estimations between phase transitions, the algorithm performs a real-time estimation with a three model Kalman filter, each one based on the correspondent flight phase. The motion equations are described in a non-inertial reference frame, which requires modifying Newton's second law with the Coriolis theorem. This implies the knowledge of the missile's mass, which is in fact a function of time, and Earth's angular velocity, which varies between different models.

More recently [5], a profile-free method which uses data fusion from two or more passive sensors, was considered for both the estimation of a BM state at the burnout and its launch position. The missile is considered to have a two-stage boost phase with a free-flight between. Estimates at the end of burnout are obtained by using a forward filtering; the launch point estimates are obtained using smoothing followed by backward prediction.

In many of the referenced papers, Kalman filter is often mentioned in the BM trajectory estimation. This filter uses the dynamic model of a system, control inputs and sequential measurements to estimate the system's state. Developed by Rudolf E. Kalman [6] the filter is an estimator for the linear quadratic problem and uses a weight process to combine the state estimate with new measurements, whose reliability is difficult to measure. Therefore, the filter's behaviour is discussed in terms of gain. Its popularity is due to good practical results, convenient form for real-time data processing, easy implementation and elegant recursive properties.

The present paper describes a real-time BM orbit characterization method based on Kalman filter data processing, orbital plane and ellipse determination with least squares and nonlinear optimization schemes, respectively.

The paper is organized as follows: section 2 states de problem to be solved; the ballistic missile dynamics and modelling methods are described in section 3; in section 4 the viability of this method is demonstrated; section 5 concludes de paper.

2. Problem Statement

The ballistic missile model of motion can be described in the Cartesian coordinate system by a linear discrete-time equation with additive noise that models unpredictable disturbances [7]:

$$X_k = \Phi_{k-1}X_{k-1} + w_{k-1} \quad (1)$$

where X_k is the state vector; Φ_k is the state transition matrix and w_k is the process noise vector with normal distribution, zero mean and covariance matrix Q_k ($w_k \sim N(0, Q_k)$). The linear measurement model is described by the following expression [7]:

$$Z_k = H_k X_k + v_k \quad (2)$$

where Z_k is the measurements vector, H_k is the transformation matrix and v_k is the measurements noise vector, with normal distribution, zero mean and covariance matrix R_k ($v_k \sim N(0, R_k)$). However, it is assumed that de BM is detected by a sensor that measures range ρ , the azimuth angle θ and the elevation angle ϕ , as shown in Figure 1; the measurement equation is then described by the following nonlinear discrete equation:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + v_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_k - x_R)^2 + (y_k - y_R)^2 + (z_k - z_R)^2} \\ \arctan2(y_k - y_R, x_k - x_R) \\ \arcsin\left(\frac{z_k - z_R}{\rho_k}\right) \end{bmatrix} + v_k \quad (3)$$

where $\mathbf{X}_k = (x_k, y_k, z_k)$ are the missile Cartesian coordinates in each instant and (x_R, y_R, z_R) are the sensor Cartesian coordinates. Once de measurement model is nonlinear, the transformation matrix H_k is approximated by [8]:

$$H_k = \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_k} \quad (4)$$

Equation (4) represents the Jacobian of $\mathbf{h}(\cdot)$ with respect to the Cartesian state vector.

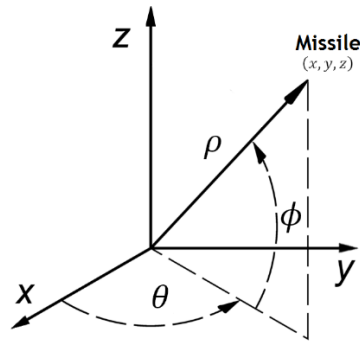


Figure 1 - Data Acquisition Representation: $\rho \equiv$ range, $\theta \equiv$ azimuth angle, $\phi \equiv$ elevation angle [9]

The problem to be solved consists in extrapolating the missile's complete orbit, considering the BM motion respects Kepler's laws and is confined to a single plane - the orbital plane.

3. Proposed Method

3.1. Ballistic Missile Orbital Dynamics

In classical mechanics, the two body problem describes the movement of two interacting particles, such as a missile launch on planet Earth. Ultimately, the equation representing the relative motion between these two particles is given by [10]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{5}$$

where \mathbf{r} is the vector between both particles, μ is the gravitational parameter of Earth and $r = \|\mathbf{r}\|$, where $\|\cdot\|$ represents the euclidian norm.

A BM trajectory is divided in three different phases: boost, ballistic and re-entry. Boost phase comprises an endo-atmospheric flight with a duration of 1-5 minutes, in which the missile is under the effect of thrust, drag and gravity forces. In the ballistic phase, the missile initiates its exo-atmospheric free-flight, which can reach up to 20 minutes or more, and gravity is the only relevant force present. Since the measurements are considered to be made during ballistic phase, this is given special attention during the work. The re-entry begins when atmospheric drag is once again relevant; once more, gravity must be considered [11][12][13].

The choice of a ballistic gravitational model influences the results accuracy and the more complex is the model, more realistic it is. This means that factors such as Earth's oblateness and consequently, gravitational potential variation should be taken into account. In an inertial

Cartesian coordinate system, the missile position and velocity are represented by $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ and $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$, respectively. Therefore, a BM model with state vector $\mathbf{X} = [\mathbf{r}^T \ \dot{\mathbf{r}}^T]^T$ is represented by the following equation [11]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_G(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

where \mathbf{a}_G is the gravitational acceleration, which may be determined from the potential function as follows [10]:

$$\mathbf{a}_G = \nabla \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (7)$$

According to Vinti [14], the potential function is given by:

$$\mathcal{V} = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_e}{r} \right)^n P_n \sin L \right] \quad (8)$$

where r_e is the equatorial radius of Earth, J_n are potential coefficients, P_n are Legendre polynomials and L is the latitude. The first six terms of equation (8) are considered to give a good approximation of the partial derivatives corresponding to \ddot{x} , \ddot{y} and \ddot{z} . However, due to their dimensions, these expressions are not presented in this paper.

3.2. Orbit Characterization Modelling

Most of real life problems are very complex, making obsolete the use of analytical methods for the generation of solutions. As an alternative, there are numerical methods which allow us to obtain reliable solutions for nonlinear systems. Butcher [15], by adding an error estimation, improved the Runge-Kutta (RK) methods, which enable the generation of solutions for numerical problems formulated as initial conditions problems. The system model is described as follows:

$$\dot{\eta} = f(\tau, \eta(\tau)) \quad (9)$$

where $\dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\tau}$, τ and η are the independent and dependent variables, respectively. According to Butcher's algorithm, assuming an initial condition $\eta(\tau_0) = \eta_0$, the system states in the time instants t_1, t_2, \dots, t_k are determined by [16]:

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (10)$$

3.3. Orbital Plane

The Cartesian equation of a plane crossing the centre of the Earth is given by [17]:

$$P(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad (11)$$

Given a set of n points (x_i, y_i, z_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, it is possible to calculate the least squares (LS) fitting plane, minimizing the distance between the cloud data and equation (11). Satisfying the conditions of the objective function, we obtain a system of equations, which can be solved as a classic eigenvalue problem [18]:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i z_i & \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ \sum_{i=1}^n x_i z_i & \sum_{i=1}^n y_i z_i & \sum_{i=1}^n z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n z_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

3.4. Conic Sections

The general formula of a conic section is represented by [17]:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (13)$$

According to Kepler's Laws, the trajectory of a BM during free-flight has the shape of an ellipse. In order to guarantee that the conic actually represents an ellipse, we must apply the following restriction [19]:

$$B^2 - 4AC < 0 \quad (14)$$

3.4.1. Orbital Parameters

The position of any orbiting object is defined through a set of orbital parameters, also known as Keplerian elements:

Dimensional Elements:

- $[a]$ Semi major Axis: defines the orbit dimension.
- $[e]$ Eccentricity: defines the orbit shape.
- $[M]$ True Anomaly: defines the orbital position in function of time.

Orientation Elements:

- $[i]$ Orbital plane inclination (with respect to the equatorial plane); $(0 \leq i \leq \pi)$.
- $[\Omega]$ Right ascension of the ascending node.
- $[\omega]$ Argument of perigee $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

3.4.2. Conic/Ellipse Determination

Considering the set of points mentioned in section 3.3. as \wp and the conic equation (13) as \mathbb{C} , the distance from \wp to \mathbb{C} is given by:

$$dist(\wp, \mathbb{C}) = \sum_{i=1}^n (Ax_i^2 + Bx_iy_i + Cy_i^2 + Dx_i + Ey_i + F)^2 \quad (15)$$

Using FMINCON function available in Matlab's Optimization Toolbox, the ellipse determination problem may be formulated as a nonlinear optimization. The variables to be determined are $\{A, B, C, D, E, F\}$, the objective function to be minimized is $dist(\wp, \mathbb{C})$ and the restriction is given in equation (14). The initial guess was determined with a direct LS method [20].

4. Results

In this section the results obtained from computational analysis via Matlab simulation are presented. Consider the presence of a sensor hypothetically located on the top of Serra da Estrela, Portugal:

Table 1 - Sensor Location

<i>Latitude</i>	<i>Longitude</i>	<i>Altitude</i>
40° 19' 19" N	7° 36' 46" W	2000 m

The tracking of the BM begins approximately in the moment the exo-atmospheric flight initiates:

Table 2 - First Detection Coordinates

<i>Latitude</i>	<i>Longitude</i>	<i>Altitude</i>
38° 9'57.3''N	7° 53'30.3'' W	100 × 10 ³ m

For the purpose of coordinate transformation, WGS84 Earth ellipsoidal model was used.

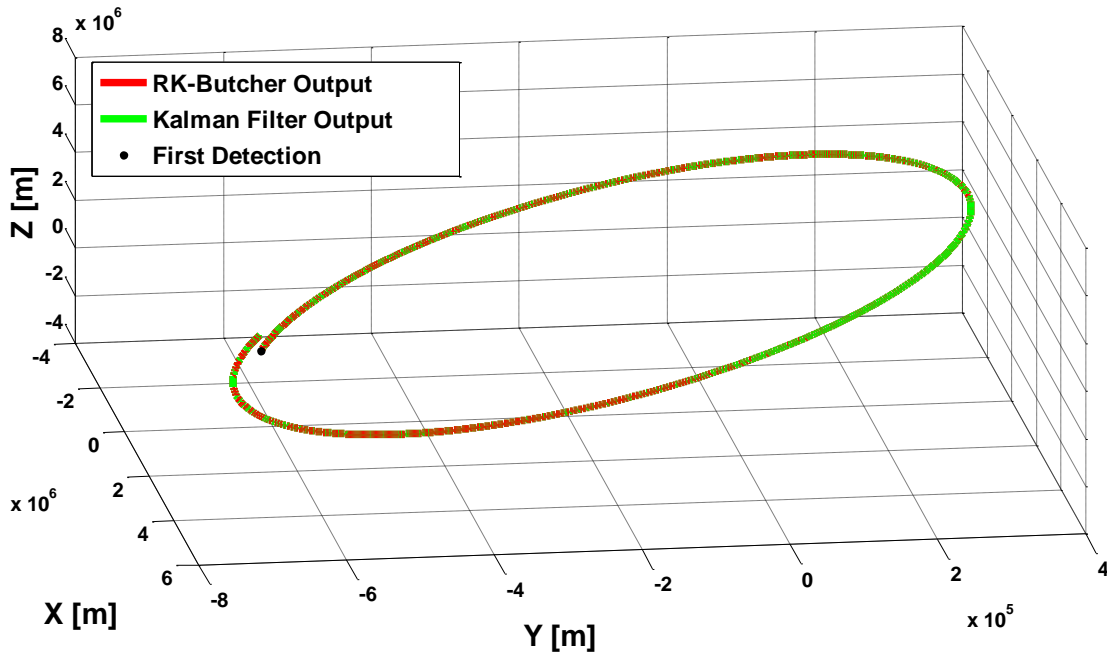


Figure 2 - Ballistic missile complete orbit (Butcher vs. Kalman)

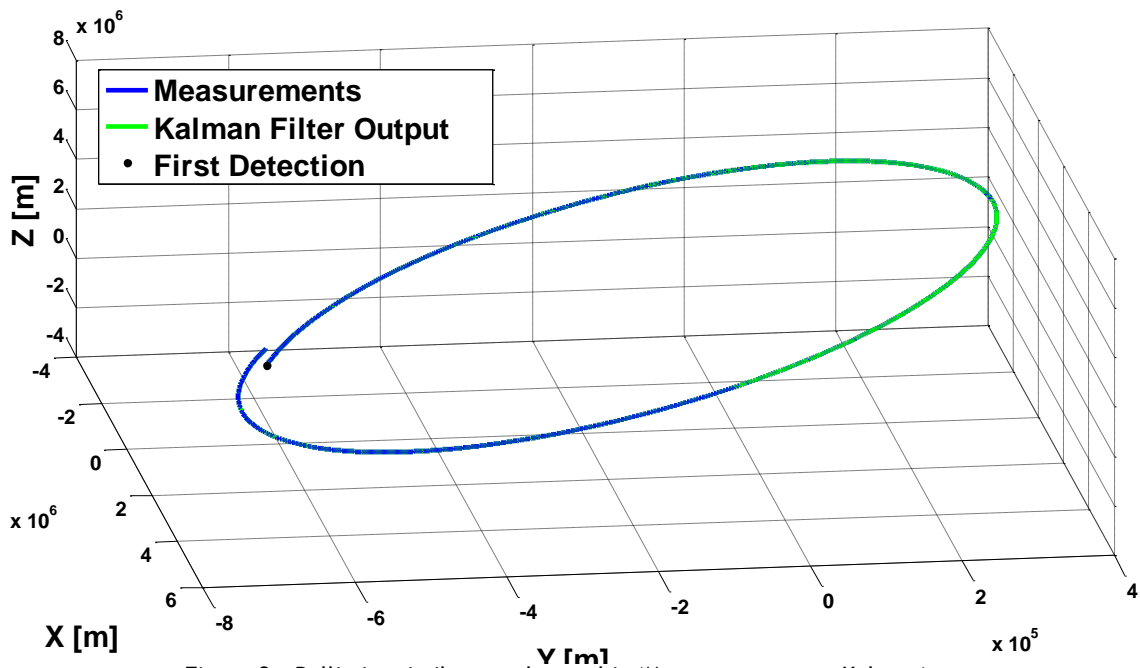


Figure 3 - Ballistic missile complete orbit (Measurements vs. Kalman)

Figures 2 and 3 illustrate the complete orbit of a BM with initial conditions described in the beginning of this section. Due to the impossibility of using actual data, Butcher's algorithm, shown in red, was used to propagate the presence of the missile. The measurements are represented in blue and the Kalman filter previsions are in green. In both illustrations, the Kalman filter reveals a good approximation and noise correction. The Kalman filter good behaviour is confirmed in Figure 4, where it is possible to see that the a priori and a posteriori covariance matrixes norms, converge after 2.3 seconds, for a value of approximately 8 meters.

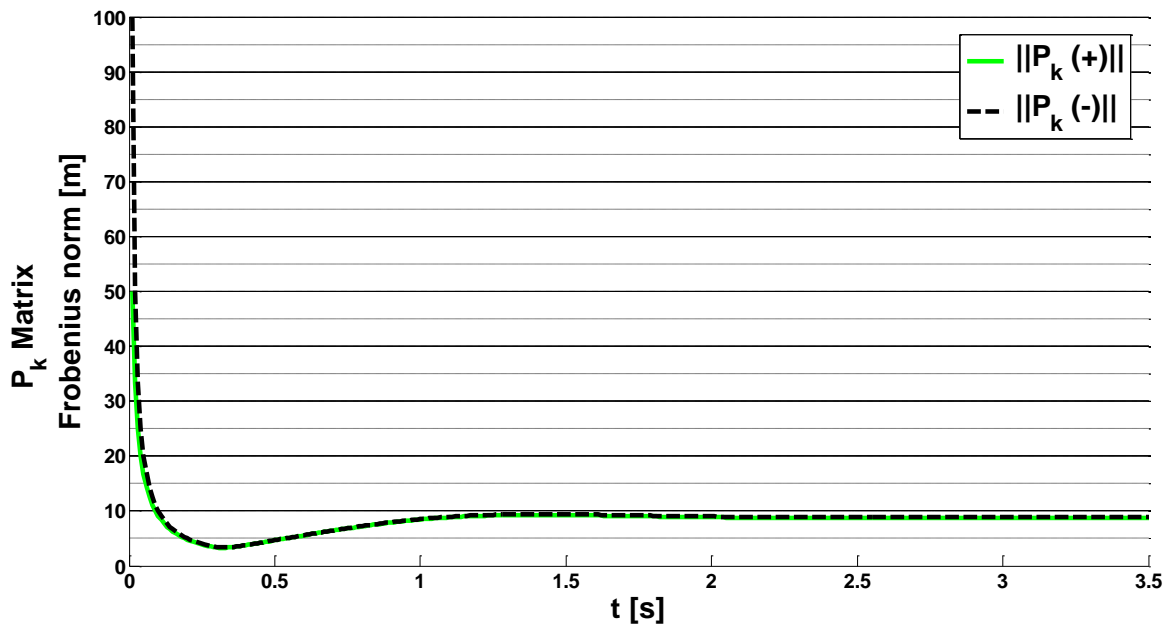


Figure 4 - Error covariance evolution (Frobenius norm)

However, in practice, the real trajectory from Portugal to the North Pole, is represented in Figure 5.

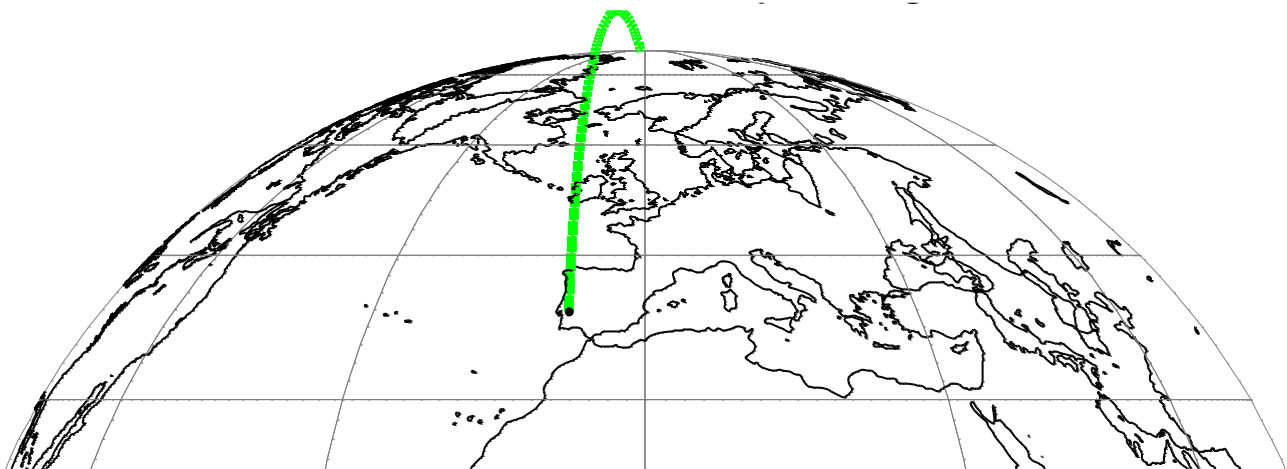


Figure 5 - Exo-atmospheric flight of a ballistic missile

In first place, from the gathered set of points, it is possible to determine the following orbital plane equation through the method described in section 3.3:

$$0.1333x + 0.9911y + 0.0045z = 0 \quad (16)$$

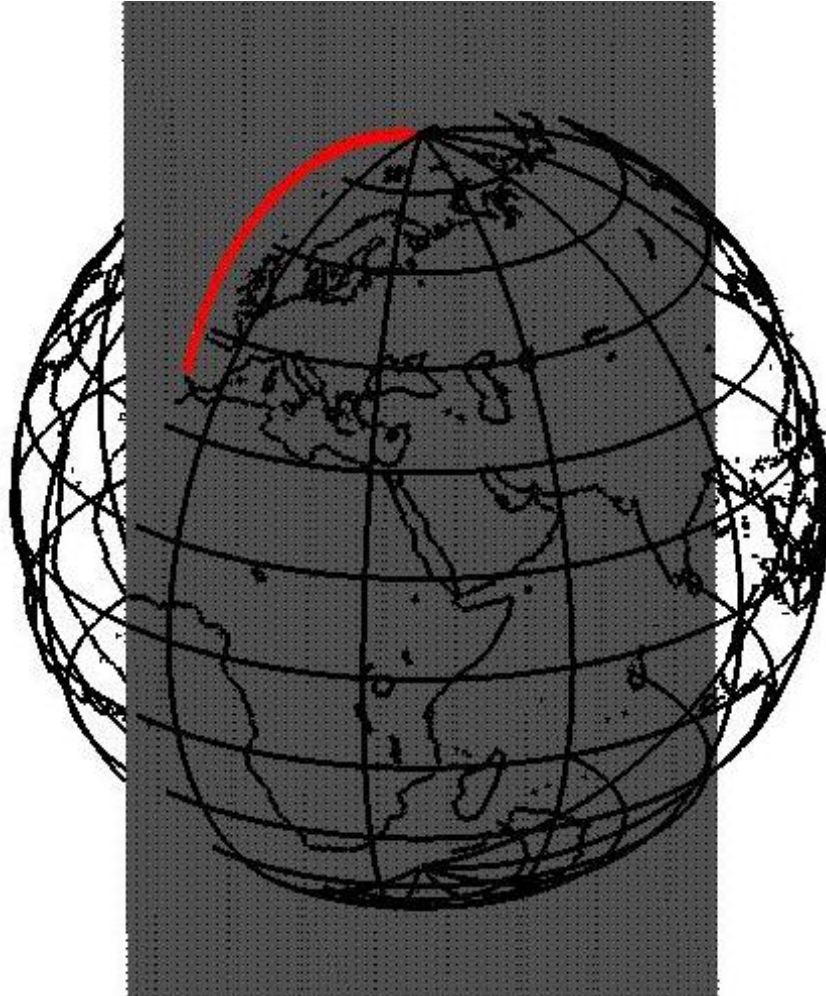


Figure 6 - Orbital plane (grey); trajectory (red)

Secondly, the whole trajectory is placed within the orbital plane. This allows the construction of a new reference frame coincident with the plane. Choosing three different points and implementing simple cross product operations, the new unit vectors v_1 , v_2 and v_3 are obtained. Thus, for any given point $P = [x, y, z]$, its transformation (TP) to the new reference frame has the following form:

$$TP = [(P - A) \cdot v_1, (P - A) \cdot v_2, (P - A) \cdot v_3] \quad (17)$$

Finally, it is possible to proceed with the determination of the conic equation, through the nonlinear programming method previously described in section 3.4.2.

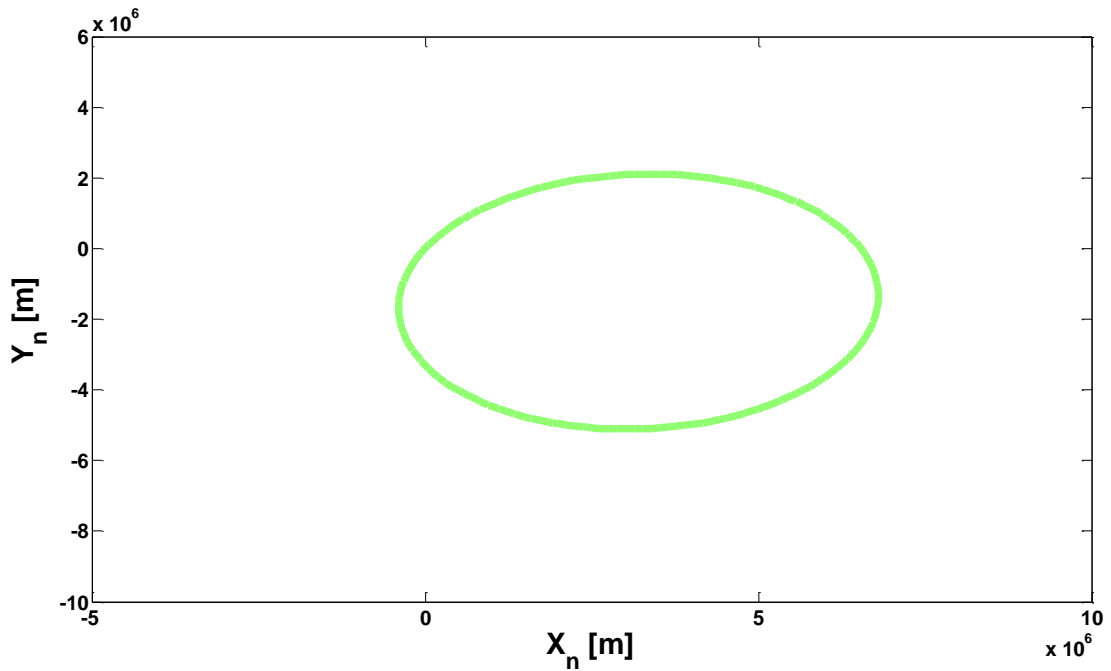


Figure 7 - Ballistic Missile orbit projected on the orbital plane

Figure 7 reveals the obtained ellipse in the orbital plane, which has the following equation:

$$\begin{aligned}
 & -7.0746 \times 10^{-1}x_n^2 + 6.6966 \times 10^{-2}x_ny_n - 7.0350 \times 10^{-1}y_n^2 + 4.6288 \times 10^6x_n \\
 & - 2.3268 \times 10^6y_n + 7.7323 \times 10^{-1} = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Applying a parameterization algorithm, one can transform the previous equation into the general form of an ellipse. This reformulation is very useful in the determination of some orbital geometric parameters. After a series of transformations, equation (18) becomes:

$$\frac{X^2}{3673855^2} + \frac{Y^2}{3663566^2} = 1 \tag{19}$$

The semi-major and semi-minor axis are, respectively, $a = 3673855 \text{ m}$ and $b = 3663566 \text{ m}$. The eccentricity is determined using these values:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cong 0.074788 \tag{20}$$

The distance between the centre and each ellipse's foci is obtained as $\pm\sqrt{a^2 - b^2} \cong 274763 \text{ m}$. Then, the centre of the ellipse is easily obtained from:

$$\left(x_{n_0}, y_{n_0}\right) = \left(\frac{2BD - CE}{C^2 - 4AB}, \frac{2AE - CD}{C^2 - 4AB}\right) = (3271412 \text{ m}, -1653746 \text{ m}) \quad (21)$$

Therefore, the foci positions are $(2996649 \text{ m}, -1653746 \text{ m})$ and $(3546175 \text{ m}, -1653746 \text{ m})$.

The area and perimeter are calculated as $\pi ab \cong 42283984416238 \text{ m}^2$ and $2a \left[2 + (\pi - 2) \left(\frac{b}{a}\right)^{1.456}\right] \cong 23049330 \text{ m}$, respectively.

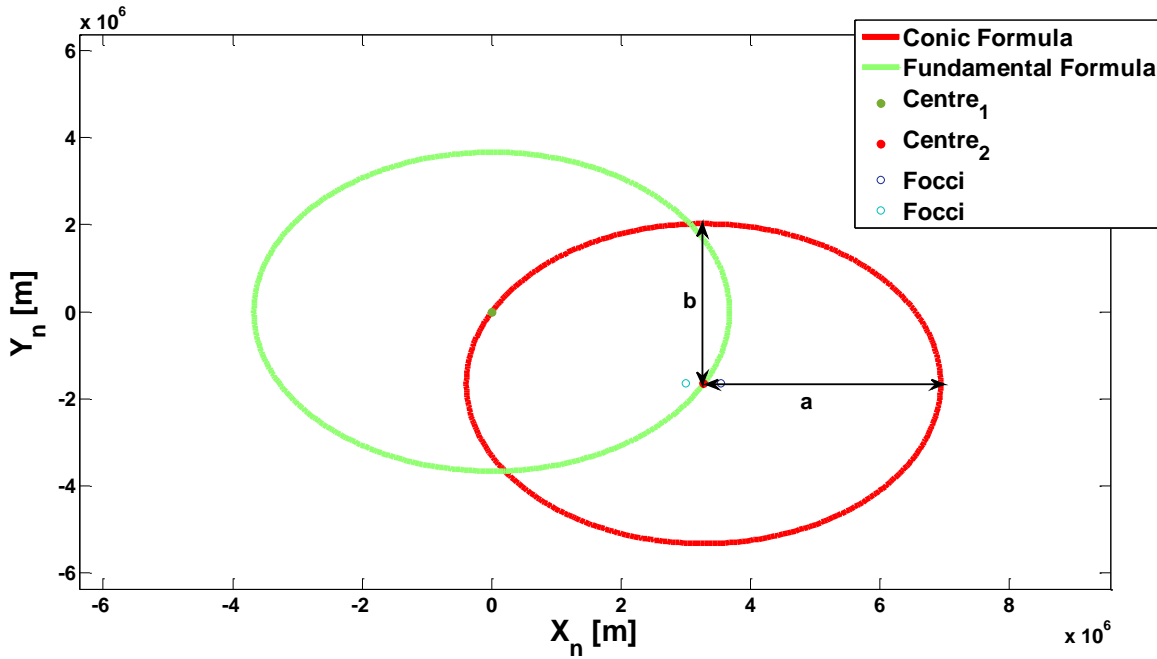


Figure 8 - Ellipse parameterization and characterization

The orbital plane inclination, i , is obtained by applying the dot product law between two vectors:

$$i = \arccos\left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{l}}{\|\mathbf{m}\| \|\mathbf{l}\|}\right) \quad (22)$$

where \mathbf{m} and \mathbf{l} are any vectors of the form $[0, y, 0]$ and $[0, y, z_{plane}]$, respectively. For the vector \mathbf{l} the coordinate y must be negative. Following this logic, the result obtained is $i \cong 1.575 \text{ rad} \cong 90.26^\circ$.

Table 3 - Ellipse parameters

Parameter	Notation	Value
Semi-major Axis [m]	a	3673855
Semi-minor Axis [m]	b	3663566
Centre [m]	(x_0, y_0)	(3271412, -1653746)
Eccentricity	e	0.074788
Orbital Plane inclination [°]	i	90.26
Area [m ²]	-	42283984416238
Perimeter [m]	-	23049330

The most evident observation falls on the small difference between the semi axis and consequently, small eccentricity. This means that the ellipse is, indeed, very close to a circle. Another proof of this fact is present in Figure 8, where it is possible to see how close the foci are. This happens due to the scale of the graph, flattened in the vertical axis. The orbital plane inclination is slightly above 90°, which was expected, since the missile trajectory is so close to the Greenwich meridian.

5. Conclusion

This paper described a method for real-time characterization of ballistic missiles (BM) trajectories. Using the collected information from a sensor, it was possible to extrapolate the full elliptical orbit from a portion of the trajectory. Both Butcher's algorithm and Kalman filter revealed a good behaviour in the nonlinear dynamics simulation and noise reduction. The method for the orbital plane fitting is based on Least Squares (LS) and revealed appropriate results. In the constrained nonlinear optimization process, FMINCON proved to be very dependent on random initial conditions. To overcome this issue, the initial conditions were also obtained from a direct LS method. As expected, the bigger the sample of available trajectory points, the better is the ellipse approximation. In order to keep the simulation close to reality, the trajectory estimation is taken until the missile has zero altitude. This assumption ignores all existing forces, besides gravity, which exist during re-entry. As noted from the results, the reduced eccentricity and small difference between semi-axes reveal an ellipse very close to a circle. This is due to the fact that the BM estimation was performed for a period of approximately $t = 1100$ s, i.e., one third of the total orbit. Although the atmospheric section is optimized, the same is not true in the orbit section running inside the Earth, which results in an eccentricity defaulted ellipse.

Future work can be done in the ellipse optimization problem, since there are various options in the literature addressing ellipse fitting from data. This method can also be used in the ballistic missile launch point estimation problem. Nowadays, the need for a robust method able to perform this task is increasingly bigger, since mobile missile launch platforms are part of various nations arsenal.

References

- [1] Y. Li, T. Kirubarajan e Y. Bar-Shalom, "Trajectory and Launch Point Estimation for Ballistic Missiles from Boost Phase LOS Measurements," na Ata da *7th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Haifa, Israel, 1999, pp. 930-952.
- [2] A. Benavoli, L. Chisci e A. Farina, "Tracking of a Ballistic Missile with A-Priori Information," *Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 43, 2007, pp. 1000-1016.
- [3] A. Farina, L. Timmoneri e D. Vigilante, "Classification and Launch-Impact Point Prediction of Ballistic Target via Multiple Model Maximum Likelihood Estimator," na Ata da *IEEE Radar Conference*, 2006, pp. 802-806.
- [4] W. J. Farrell, "Interacting Multiple Model Filter for Tactical Ballistic Missile Tracking," *IEEE Transactions On Aerospace and Electronic Systems*, vol. 44, 2008, pp. 418-426.
- [5] R. Tharmarasa, T. Kirubarajan, N. Nadarajah, Y. Bar-Shalom e T. Thayaparan, "Profile-Free Launch Point Estimation for Ballistic Targets using Passive Sensors," *Journal of Advances in Information Fusion*, vol. 7, 2012, pp. 1-12.
- [6] R. E. Kalman, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, vol. 82, 1960, pp. 35-45.
- [7] M. S. Grewal e A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, Wiley, 2008.
- [8] S.-T. Park e J. G. Lee, "Improved Kalman Filter Design for Three-Dimensional Radar Tracking," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 37, 2001, pp. 727-739.
- [9] "Representação da Aquisição de Dados", http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_polar_coordinates.png, consultado em Setembro de 2014.
- [10] R. R. Bate, D. D. Mueller e J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, New York: Dover Publications, Inc., 1971.

- [11] X. R. Li e V. P. Jilkov, "A Survey of Maneuvering Target Tracking - Part II: Ballistic Target Models," na Ata da *Conference on Signal and Data Processing of Small Targets*, San Diego, CA, USA, 2001, pp. 96-119.
- [12] A. D. Wheelon, "Free Flight of a Ballistic Missile," *ARS Journal*, vol. 29, 1959, pp. 915-926.
- [13] F. J. Regan e S. M. Anandakrishnan, Dynamics of Atmospheric Re-Entry AIAA education series, American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1993.
- [14] J. P. Vinti, "Invariant Properties of the Spheroidal Potential of an Oblate Planet," *Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematics and Mathematical Physics.*, vol. 70B, 1966, pp. 1-16.
- [15] J. C. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Wiley, 2008.
- [16] D. J. Evans, K. Murugesan, S. Sekar e H.-M. Kim, "Non-linear singular systems using RK-Butcher algorithms," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 83, 2006, pp. 131-142.
- [17] D. Zwillinger, Standard Mathematical Tables and Formulae, Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [18] F. Qian, W. Kan, C. Lailiang e A. Jianfeng, "The application of point cloud data plane fitting in the Guishan Han Tomb modeling," na Ata da *International Conference on Multimedia Technology (ICMT)*, Hangzhou, 2011, pp. 1781-1784.
- [19] V. A. Chobotov, Orbital Mechanics, Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2002.
- [20] R. Halír e J. Flusser, "Numerically stable Direct Least Squares fitting of Ellipses," na Ata da *6th International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization*, 1998, pp. 125-132.