



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Programação Linear Um Manual para o Professor

Versão definitiva após defesa pública

Emílio Capamba Evaristo

**Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática para Professores
(2º ciclo de estudos)**

**Orientador: Prof. Doutor Silvério Rosa
Co-orientador: Prof. Doutor Pedro Patrício**

Covilhã, Fevereiro de 2020

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família! À minha esposa Esmeralda Evaristo, aos meus filhos, Benedito Evaristo, Cipriana Evaristo e Augusto Evaristo.

Aos meus pais Pedro Evaristo e Domingas Navio, pelo incentivo nos momentos difíceis.

Agradecimentos

A Deus que me concedeu saúde, fé e força para que pudesse concluir mais uma etapa da minha carreira profissional.

Aos meus orientadores, Professores Silvério Rosa e Pedro Patrício, pela compreensão, dedicação apoio e incentivo, pelas suas sugestões sempre pertinentes que muito ajudaram na elaboração deste trabalho.

Aos meus Padrinhos, Efraim Calenga, Edith Calenga, Agostinho Dias Sumbelelo, Angelina Sumbelelo! Pelo incentivo.

Aos Professores Rui Pacheco e Hélder Vilarinho, pelo apoio, disponibilidade e sugestões.

Aos Professores Jorge Gama, Pedro Morais, Henrique Cruz, Ilda Inácio, Rogério Serôdio, Nuno Correia, César Silva, Fernando Pereira, Célia Nunes, pela sabedoria e conhecimentos compartilhados durante o curso.

Aos meus amigos, Edú Ricardo Mavila, Wilson de Jesus, Jurandir Elias Martins, João Baptista, Marco Figueiredo, Jéssica Fonseca Rodrigues, Joana Raquel Farias, Alice Gomes, Marta Cachinho, Etelvina Diogo, João Diogo, Cláudia Diogo, Bruno Fonseca, Célia André, Paulo Afonso, Hélder Vicente, Paulo Sérgio Maia, Eny da Costa, Salú João Lusinama, Félix Neto, Sadionel Lourenço, Estevão, Alegria Kuluneta, pela amizade e pelo carinho.

Aos meus familiares, Luiz Armando, André Evaristo Nguli, Elias Faustino, Madalena Evaristo, Romão Mulanguí, Orlando Evaristo, Evaristo Das Mangas, Manuel Bule Das Mangas, Oscar Sandambongo, Ismael Mbungululu, Pedro Faria Lussequé, Rosa Nginga, Victorino Tchio, Bárbara Esperança, Armando Lima, Cipriano Avelino Molongonga, Paulina Bira Molongonga, Olinda Nacachenhe, João Vunda, Cipriana Da Glória, Benedito Paulo Jamba, Paulo Domingos António, Conceição Maria, Albano Jamba.

Aos colegas do curso, Evaristo José Das Mangas, Elias Chiwaia, Fonseca André, José Chimpanzo, pelo companheirismo, amizade e sugestões.

Aos Professores Augusto Moura Rasga, Boaventura Nolasco Beleza, Francisco Chimuco, Bento Cahamba, Lopo de Nascimento, Teófilo Chihaluca, Guida Nóbrega.

Ao Governo Provincial da Huila, ao Gabinete Provincial da Educação da Huila. À Direcção do Colégio N° 286 Quilemba-Lubango, ao Coordenador Comunal Cipriano Mussungo, Manuel Fernandes, aos Professores Pedro Ezequiel, António Rasga, Alberto Sessa, Tomé Lourenço, Filomena, Lúcia Chimuco e à todos os colegas.

À Reitoria e à todos funcionários da UBI. Estou honrado de estar aqui!

À Cruz Vermelha e ao Refood da Covilhã!

Todos que directa ou indirectamente contribuíram para o meu sucesso!

Resumo

A Programação Linear (PL) é uma área da Investigação Operacional que lida com problemas de optimização de uma função linear definida sobre um conjunto de restrições lineares.

O objetivo deste trabalho consiste em fornecer material de apoio ao professor de PL, de forma a consolidar conteúdos, relacionado com: modelo de PL, Algoritmo Simplex Primal, Problema Dual e problemas de Programação Linear Multiobjectivo.

Neste trabalho abordamos diferentes modelos de Programação Linear com uma, ou com p funções lineares, acompanhados da respectiva resolução gráfica, quando possível, para que haja maior compreensão por parte do leitor.

Começamos por apresentar um programa de PL que designaremos por Primal. Depois apresentamos o Problema Dual, as suas propriedades e finalizamos com a Programação Linear Multiobjectivo, contribuindo assim para uma visão ampla da PL.

Tratamos alguns pormenores fundamentais tais como pressupostos, teoremas e definições, que servirão como suporte do estudo de PL. Cada um destes conteúdos ajudará o professor no processo ensino-aprendizagem.

São apresentados alguns programas informáticos que enriquecem a aprendizagem (Geogebra, Excel e Lingo) e que permitem facilmente resolver qualquer problema de PL.

Palavras-chave

Programação Linear, Algoritmo Simplex, Dualidade, Programação Linear Multiobjectivo

Abstract

Linear Programming (LP) is an area of Operational Research that deals with problems of optimization of a linear function subject to linear constraints.

The objective of this work is to provide the Teacher with teaching material, in order to consolidate contents related to: LP model, Primal Simplex Algorithm, Duality and Multiobjective Linear Programming problems.

In this work we tackle several Linear Programming models with one or more linear functions, accompanied by graphic resolution, when possible, so that there is greater understanding on the part of the reader.

We start by presenting a LP problem that we will designate Primal. Then we introduce the Dual Problem, some properties and conclude with the Multiobjective Linear Problem, thus contributing to a considerable insight into the nature of LP.

We deal with some fundamental details such as assumptions, theorems and definitions that will support the study of LP. Each of these contents can help the Teacher in the teaching-learning process.

Some computer programs are presented that enrich the learning process (Geogebra Excel and Lingo) and that easily solve any LP problem.

Keywords

Linear Programming, Simplex Algorithm, Duality, Multiobjective Linear Programming

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Programação Linear	3
2.1	História	3
2.2	O Modelo de Programação Linear	4
2.2.1	Formulação	4
2.2.2	Pressupostos	8
2.3	Definições e Propriedades Fundamentais	8
2.4	Resolução de um Problema de Programação Linear	15
2.4.1	Método Gráfico	15
2.4.2	Algoritmo Simplex Primal	18
2.4.3	Bases Artificiais	23
2.4.4	Utilização de Computador	26
3	Teoria da Dualidade	33
3.1	Formulação do problema Dual	33
3.1.1	Propriedades Fundamentais da Dualidade	35
3.2	Algoritmo Simplex Dual	38
3.2.1	Valor das variáveis Duais	40
3.3	Interpretação económica da Dualidade	41
4	Introdução à Programação Linear Multiobjectivo	43
4.1	Introdução	43
4.2	Programação Linear Multiobjectivo	43
4.3	Resolução de Problemas Multiobjectivo	44
	Bibliografia	51

Lista de Figuras

2.1	Conjunto convexo S_1	10
2.2	Conjunto não convexo S_2	10
2.3	Representação de restrições no plano	16
2.4	Solução óptima única	16
2.5	Soluções Óptimas Alternativas	17
2.6	Solução Ilimitada	17
2.7	Solução Impossível	18
2.8	Modelo de PL na janela do Excel	27
2.9	1ª janela do Excel	28
2.10	2ª janela do Excel	28
2.11	Janela final com valor óptimo do Excel	29
2.12	Introdução de dados no Lingo	30
2.13	Janela com o “Solver Status” apos efectuar resolução	31
2.14	Janela com solução final	31
4.1	Conjunto das soluções não dominadas $S_D = \overline{ED}$	45

Lista de Acrónimos

PL	Programação Linear
FO	Função Objectivo
TD	Teoria da Dualidade
PLM	Programação Linear Multiobjectivo
VB	Variável Básica
VNB	Variável Não Básica
SA	Solução Admissível
SBA	Solução Básica Admissível
SBND	Solução Básica Não Degenerada
SBD	Solução Básica Degenerada

Capítulo 1

Introdução

A Programação Linear (PL) compreende a otimização de uma função linear definida sobre um conjunto de restrições lineares. Teve o seu maior desenvolvimento na II Guerra Mundial, quando os aliados se confrontaram com problemas complexos relativamente ao planeamento de produção, distribuição e alocação de recursos, otimização de transportes e de escalonamento. Nessa fase, foram criados grupos multidisciplinares de cientistas, incluindo matemáticos, físicos e engenheiros, que desenvolveram métodos científicos para responder às necessidades impostas. Com o fim da guerra, os pesquisadores sentiram-se motivados na busca de diversas formas que permitissem usar a PL para resolver problemas relacionados com a otimização de recursos.

Em 1947, George B. Dantzig, enquanto trabalhava como consultor matemático no Departamento da Força Aérea dos Estados Unidos da América, desenvolveu o Algoritmo Simplex para a obtenção de soluções óptimas de problemas de PL que ainda está entre os algoritmos mais bem sucedidos de todos os tempos [Cipra, 2000].

Com o desenvolvimento da informática, tornou-se cada vez mais fácil resolver problemas de PL reais (grandes dimensões). A eficiência hoje conseguida na sua resolução permite-nos resolver problemas mais difíceis, por exemplo PL com variáveis inteiras.

Quanto ao presente trabalho, no capítulo II aborda-se primeiramente a história da PL, dando-se ênfase ao modelo de PL. Determina-se depois a solução óptima do modelo, que é aquela que maximiza/minimiza o valor da função objetivo satisfazendo as restrições lineares impostas, através da resolução gráfica, utilização do Algoritmo Simplex através de programas informáticos.

No capítulo III, dedicado à Teoria da Dualidade, apresenta-se a formulação do problema Dual, Algoritmo Simplex Dual assim como a interpretação económica do Dual.

No capítulo IV apresenta-se o problema de Programação Linear Multiobjectivo, e a sua resolução com a generalização do Algoritmo Simplex Primal, apresentado no capítulo II.

Na elaboração deste trabalho usaram-se as seguintes referências: [Barrico,], [Bazaraa, 2010], [Luenberger, 2008], [Alves, 2003], [Pereira, 2019],[Hillier, 2015], [Ramalhete, 1985].

Capítulo 2

Programação Linear

2.1 História

A Programação Linear (PL) é um dos ramos da Investigação Operacional (IO) constituída por um conjunto de técnicas de optimização, que trata de problemas onde, como já foi referido, tanto a função objectivo como as restrições são lineares. Genericamente, tem como principal objectivo o planeamento de actividades que permitam obter um resultado óptimo dado um conjunto de condições.

Na antiguidade a pesquisa do óptimo já preocupava o Homem na tentativa de encontrar soluções dos problemas do quotidiano. No sec. III A.C. Euclides no seu livro III procurava determinar a distância máxima e mínima de um ponto a uma circunferência, posteriormente no seu IV livro descreveu a forma simples de obter a área do paralelogramo com um dado perímetro [Ramalhete, 1985].

Com o desenvolvimento do cálculo, permitiu resolver problemas propostos por Euclides e problemas de optimização, como por exemplo, problemas de extremos condicionados com restrições de igualdade. Os contributos dados por Newton, Leibniz, Lagrange e Bernoulli naquela altura baseavam-se aos estudos e problemas relacionados com a Geometria, Dinâmica e Física.

Mais tarde, em 1939, o economista soviético L.V. Kantorovich formulou e resolveu de forma rigorosa problemas ligados à optimização na administração das organizações e planeamento da produção. O seu trabalho manteve-se desconhecido até 1959.

Von Neumann, Harold W. Kuhn e A.W. Tucker, entre 1939 e 1951, lançaram as bases da Programação Não Linear e a sua fundamentação teórica, ampliando os resultados de Lagrange aos sistemas de inequações.

O grande salto da PL deu-se na Segunda Guerra Mundial com a necessidade de resolver problemas relacionados com a actividade militar, num trabalho do projecto SCOP, coordenado por George B. Dantzig, entre outros. Em 1947, Dantzig desenvolveu o Algoritmo Simplex.

Nos dias de hoje, a PL tem aplicação na distribuição de recursos por diversas actividades, em problemas de transporte e planeamento da produção, em problemas de custo-benefício, bem como noutros problemas que surgem no contexto da actividade de inúmeras empresas em que a redução de custos e maior eficiência de produção são genericamente as duas áreas de maior aplicação.

2.2 O Modelo de Programação Linear

Um problema de PL consiste em determinar os valores das variáveis de decisão que satisfaçam um conjunto de restrições lineares e que otimizem (minimizem ou maximizem) uma dada função linear dessas variáveis.

2.2.1 Formulação

O modelo de PL é constituído pelas seguintes componentes:

- **As variáveis de decisão**, que correspondem às quantidades associadas às atividades a serem desenvolvidas: $x_j (j = 1, 2, \dots, p)$
- **A função objetivo**, que é expressa por uma função linear das variáveis de decisão e que se pretende maximizar (ou minimizar):

$$Z = \sum_{j=1}^p c_j x_j$$

Z representa a medida de desempenho, onde cada coeficiente c_j , designado coeficiente de custo, representa o “peso” da variável x_j , com $j = 1, \dots, p$.

- **As restrições**, que correspondem às limitações impostas aos valores das variáveis de decisão, que matematicamente são expressas por equações ou inequações:

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{pmatrix} b_i, (i = 1, \dots, m),$$

onde b_i é o termo independente e a_{ij} é o coeficiente da variável x_j na i -ésima restrição, com $i = 1, \dots, m$. Além destas restrições genéricas, temos ainda as chamadas restrições de não negatividade que impõem que $x_j \geq 0, j = 1, \dots, p$.

A forma geral de um problema de Programação Linear é a seguinte:

$$\begin{aligned} & \text{Max/Min } Z = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_p x_p \\ \text{s.a. } & a_{11} x_1 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1p} x_p \{ \leq, =, \geq \} b_1 \\ & a_{21} x_1 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2p} x_p \{ \leq, =, \geq \} b_2 \\ & \vdots \\ & a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{ip} x_p \{ \leq, =, \geq \} b_i \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mp} x_p \{ \leq, =, \geq \} b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_p \geq 0 \end{aligned}$$

Um problema de PL com todas as restrições do mesmo tipo também pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{aligned} & \text{Max/Min } Z = \mathbf{c} \mathbf{x} \\ \text{s.a. } & \mathbf{A} \mathbf{x} \{ \leq, =, \geq \} \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Onde:

Programação Linear, Um Manual para o Professor

- $c = (c_1 \quad \dots \quad c_j \quad \dots \quad c_p)$ é a matriz linha de p colunas formada pelos coeficientes de custo;

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ é a matriz coluna de p linhas formada pelas variáveis de decisão;

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}$ é a matriz de m linhas e p colunas formada pelos coeficientes tecnológicos;

- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ é a matriz coluna de m linhas formada pelos termos independentes ou segundos membros;

- $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ é a matriz coluna de p linhas formada por zeros:

No passo seguinte vamos apresentar os procedimentos a ter em conta ao escrever o problema na forma canónica e na forma padrão.

Forma Canónica

Para escrever um problema de maximização (minimização) na **forma canónica** é necessário transformá-lo num problema de PL com todas as restrições do tipo “ \leq ” (“ \geq ”), exceptuando as restrições de não negatividade. Para tal conseguir, poderemos recorrer às seguintes propriedades:

- $Min Z \Leftrightarrow Max (-Z)$.
- Uma desigualdade do tipo “ \geq ” (“ \leq ”) pode ser convertida numa desigualdade do tipo “ \leq ” (“ \geq ”) mediante a multiplicação por (-1):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p \geq b_i \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{ip}x_p \leq -b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p \leq b_i \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{ip}x_p \geq -b_i.$$

- Uma igualdade pode ser convertida em duas restrições: “ \leq ” e (“ \geq ”).

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p \geq b_i \end{cases}$$

Assim, recorrendo à notação matricial, um problema de PL diz-se na forma canónica se puder ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } Z = cx & \text{Min } Z = cx \\ \text{s.a } Ax \leq b & \text{s.a } Ax \geq b \\ x \geq 0 & x \geq 0. \end{array} \quad \text{ou}$$

Forma Padrão

Veremos mais à frente que a forma padrão é o passo inicial para resolver um problema de PL usando o Algoritmo Simplex. Consiste em transformar as restrições de desigualdade em igualdades equivalentes. Este processo é feito com a introdução de novas variáveis não negativas, designadas por variáveis de folga.

Conversão de restrições de “ \leq ” em restrições de “ $=$ ”

Para converter uma restrição do tipo “ \leq ” em “ $=$ ” é necessário introduzir uma variável de folga x_{p+i} não negativa capaz de igualar ambos os membros da desigualdade, tomando a seguinte forma:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p + x_{p+i} = b_i, \quad x_{p+i} \geq 0.$$

Conversão de restrições de “ \geq ” em restrições de “ $=$ ”

Ao converter uma restrição do tipo “ \geq ” em “ $=$ ”, procede-se de modo análogo introduzindo uma variável de folga não negativa com coeficiente negativo ($-x_{p+i}$). A restrição tomará a forma:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p - x_{p+i} = b_i, \quad x_{p+i} \geq 0.$$

Em suma, um problema de PL está na forma padrão se apresenta todas as restrições sob a forma de igualdades. Daqui em diante, denota-se por n o número total de variáveis (de decisão e de folga).

Seja um problema de PL escrito na forma padrão com n variáveis e m restrições funcionais:

$$\begin{array}{l} \text{Max/Min } Z = cx \\ \text{s.a } Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Apresentamos a seguir um exemplo de formulação de um problema de PL

Exemplo 1. [Pereira, 2019] Determinado investidor dispõe de um montante que pretende investir em produtos financeiros, tendo à sua disposição: Obrigações (1), Títulos Dívida Pública (2), Depósitos Bancários (3) e Acções (4). Os rendimentos anuais obtidos através de cada uma das hipóteses anteriores foram no último ano de 7%, 6%, 5.5% e 13%, respectivamente.

- O investidor não aceita um rendimento anual inferior a 9.5%.
- Por razões de segurança, o investimento em acções não deverá ser superior a 20% do total.

Programação Linear, Um Manual para o Professor

- Pelo menos 40% do investimento deverá ser feito em Títulos Dívida Pública e Obrigações.
- Restrições legais impedem um só investidor de adquirir Títulos Dívida Pública num montante superior a 50 milhares de euros.

Formule o problema em Programação Linear de forma a maximizar o rendimento.

Resolução:

Objectivo

Pretende-se obter o maior rendimento anual possível com as 4 hipóteses,

	Obrigações (1)	Tot. Div. Púb (2)	Dep. Banc. (3)	Acções (4)
Rend. anuais	7%	6%	5,5%	13%

Restrições

Condições apresentadas no enunciado.

Questões

- De que é que depende o rendimento ?
- De que é que depende o capital a investir em cada uma das hipóteses apresentadas?

O rendimento e o capital a investir dependem dos montantes, em euros, aplicados em Obrigações, Total dívida pública, Depósitos Bancários e Acções

Ao formular um problema de PL, definem-se inicialmente as variáveis do problema. Sendo assim vamos associar a cada actividade uma variável de decisão.

x_i = variável que representam a quantia em euros investido no produto de tipo i , $i = 1, \dots, 4$.

Com o capital investido nos diferentes produtos financeiros obtém -se um rendimento de $0,07x_1 + 0,06x_2 + 0,055x_3 + 0,13x_4$ euros.

Obtém-se o modelo:

$$\text{Max } z = 0,07x_1 + 0,06x_2 + 0,055x_3 + 0,13x_4$$

$$\text{s.a } 0,07x_1 + 0,06x_2 + 0,055x_3 + 0,13x_4 \geq 0,095(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (i)$$

$$x_4 \leq 0,2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (ii)$$

$$x_1 + x_2 \geq 0,4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (iii)$$

$$x_2 \leq 50.000 \quad (iv)$$

$$x_i \geq 0, (i = 1, \dots, 4) \quad (v)$$

- A restrição (i) assegura que o rendimento anual deverá ser maior que 9,5% do valor investido.

- A restrição (ii) representa o valor investido em Acções, que não deverá ultrapassar 20% do total investido.
- Já a restrição (iii) pressupõe que 40% do investimento deverá ser feito em Títulos Dívida Pública e Obrigações.
- A restrição (iv) diz respeito ao montante de 50 mil euros de investimento máximo que um investidor pode fazer em Títulos Dívida Pública.
- Para além destas restrições, tem-se ainda as condições de não negatividade (v), pois não fazem sentido investimentos negativos.

2.2.2 Pressupostos

A aplicação do modelo de PL está condicionada pela verificação de alguns pressupostos que apresentamos a seguir. [Hillier, 2015]

- **Proporcionalidade**
A proporcionalidade é uma suposição sobre a contribuição de cada atividade para o valor da função objetivo e membros esquerdos das restrições, que é proporcional ao nível da atividade x_j , representada por $c_j x_j$ na função objetivo e $a_{ij} x_j$ na restrição i , com $i = 1, \dots, m$.
- **Divisibilidade e não negatividade**
O nível de uma atividade pode assumir qualquer valor não negativo de um dado intervalo o que equivale a supor que as variáveis são infinitamente divisíveis, isto é, são susceptíveis de variar em quantidades infinitesimais.
- **Aditividade**
Toda a função em um modelo de Programação Linear (seja a função objetivo ou o membro esquerdo de uma restrição funcional) é a soma das contribuições individuais das atividades.
- **Determinístico**
O valor atribuído a cada parâmetro c_j e a_{ij} de um modelo de Programação Linear assume-se como sendo uma constante conhecida. Em aplicações reais, esta suposição de certeza raramente é satisfeita. Os valores dos parâmetros utilizados são geralmente baseados na previsão de condições futuras, inevitavelmente introduz algum grau de incerteza.

As hipóteses traduzem a linearidade das actividades, pese embora algumas possam parecer reduzir consideravelmente o campo de aplicação da PL, a experiência tem revelado que inúmeras situações reais podem ser adequadamente descritas por modelos lineares. [Ramalhete, 1985]

2.3 Definições e Propriedades Fundamentais

Nesta secção apresentamos algumas definições e conceitos fundamentais em PL. Sem perda de generalidade, no que se segue consideramos um problema de PL de maximização na forma padrão.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= cx \\ \text{s.a } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Programação Linear, Um Manual para o Professor

- Uma **solução** resulta de qualquer especificação de valores para as variáveis $x_j, j = 1, \dots, n$.
- Quando esses valores verificam todas as restrições do problema (as restrições propriamente ditas e as de não negatividade) obtemos uma **solução admissível**.
- O conjunto de todas as soluções admissíveis $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ designa-se por **conjunto de soluções admissíveis** ou **região admissível**.
- Uma **solução ótima** é uma solução admissível que maximiza (minimiza) a função objetivo.
Car(A) = m.

Se uma submatriz $B_{m \times m}$ da matriz A é não singular, designa-se por **base** ou **matriz básica**. Sem perda de generalidade, suponha que a base B é composta pelas m primeiras colunas de A, i.e., $B = [A_1 A_2 \dots A_m]$.

Uma **Solução Básica** obtém-se atribuindo o valor zero às variáveis $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, as variáveis não básicas, x_N , e determinando, depois, uma solução para as restantes m variáveis x_1, x_2, \dots, x_m , variáveis básicas, onde $x_B = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ é a única solução do sistema de equações $Bx_B = b$.

Suponhamos que as colunas de A se encontram subdivididas em dois blocos tais que $A = [B|N]$ onde N é a submatriz formada pelas colunas de A que não estão na base B. Da mesma forma, se pode particionar o vector x em $x = [x_B|x_N]$, e o vector c em $c = [c_B|c_N]$. Portanto, o problema pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max/Min} \quad Z &= [c_B|c_N] \times \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \\ \text{s.a} \quad [B|N] \times \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} &= b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Uma solução básica que verifica as restrições de não negatividade chama-se **Solução Básica Admissível (SBA)**.

Se todas as variáveis básicas x_1, x_2, \dots, x_m são não nulas, a solução básica designa-se por **Solução Básica Não Degenerada**.

Se alguma variável básica for igual a zero a solução básica designa-se por **Solução Básica Degenerada**.

Um vector b em \mathbb{R}^n é uma **Combinação linear** de x_1, \dots, x_k em \mathbb{R}^n se $b = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são números reais.

Seja um conjunto de pontos $x_i, (i = 1, \dots, k)$, diz-se que X é **Combinação linear convexa** dos pontos x_i se $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k$, com os coeficientes escalares $0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, k$.

Conjunto convexo : Um conjunto S designa-se convexo se contém todas as combinações lineares convexas de quaisquer dois pontos desse conjunto, ou seja, para quaisquer $x_1, x_2 \in S$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ se tem $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$.

O conjunto S_1 da figura 2.1 é convexo pois $\overline{AB} \subseteq S_1$ para todos pontos $A, B \in S_1$, já o conjunto S_2 da figura 2.2 é não convexo pois existem dois pontos $C, D \in S_2$ tal que $\overline{CD} \not\subseteq S_2$.

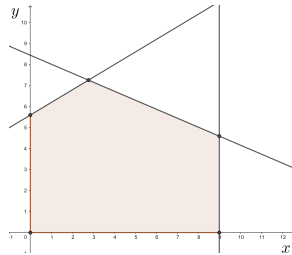


Figura 2.1: Conjunto convexo S_1

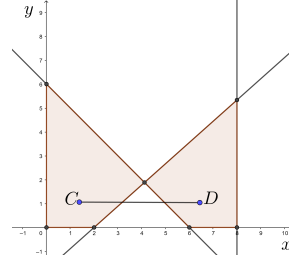


Figura 2.2: Conjunto não convexo S_2

Ponto extremo de um conjunto convexo S : é um ponto que não pode ser escrito como combinação linear convexa de outros pontos de S .

Seguem-se alguns teoremas [Luenberger, 2008], [Ramalhete, 1985].

Teorema 2.1. *Se existe uma solução admissível para o problema de PL, então existe uma SBA, e se existe uma solução ótima então existe uma SBA ótima.*

Demonstração. Dado o modelo de Programação Linear na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= cx \\ \text{s.a } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde A é uma matriz $(m \times n)$ de m linhas.

1. *Se existe uma solução admissível, então existe uma solução básica admissível*

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n as colunas da matriz A e suponha que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma solução admissível. Então, esta solução satisfaz:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = b \quad (2.1)$$

Vamos supor que p variáveis de x são maiores do que zero, e por conveniência, estas são as p primeiras variáveis. Então podemos reescrever (2.1) como

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_p A_p = b \quad (2.2)$$

Temos então que considerar dois casos: os vectores A_1, A_2, \dots, A_p são linearmente independentes ou não.

Caso 1: Suponha que A_1, A_2, \dots, A_p são linearmente independentes.

Então $p \leq m$. Se $p = m$, a solução é básica. Se $p < m$, então podemos seleccionar $m - p$ colunas entre os $n - p$ restantes tal que o conjunto dos m vectores formados por A_1, A_2, \dots, A_p

e os $m - p$ escolhidos são linearmente independentes o que nos garante a existência das $m - p$ colunas entre as $n - p$ restantes tal que a linha de A é m . Atribuindo o valor zero às $m - p$ variáveis correspondentes, obtemos uma solução básica admissível (degenerada neste caso).

Caso 2: Suponha que A_1, A_2, \dots, A_p são linearmente dependentes.

Então, por definição de linearmente dependentes, existe uma combinação não trivial destes vectores que é nula. Isto é, existem constantes y_1, y_2, \dots, y_p , com pelo menos uma delas diferente de zero, tal que:

$$y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots + y_p A_p = 0 \quad (2.3)$$

Multiplicando a expressão (2.3) por um escalar λ e em simultâneo subtraindo a (2.2) obtemos:

$$(x_1 - \lambda y_1) A_1 + (x_2 - \lambda y_2) A_2 + \dots + (x_p - \lambda y_p) A_p = b \quad (2.4)$$

A expressão (2.4) é válida para qualquer λ e, para cada λ , as componentes $x_i - \lambda y_i$ correspondem a uma solução de (2.4), embora a restrição $x_i - \lambda y_i \geq 0$ possa ser violada.

Fazendo $y = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$ vemos que, para qualquer λ , uma solução de (2.4) é

$$x^* = x - \lambda y \quad (2.5)$$

Para $\lambda = 0$, x é a solução básica admissível. Quando λ cresce, as componentes de x podem aumentar, diminuir, ou permanecerem as mesmas, dependendo se os valores correspondentes de y_i são negativos, positivos ou nulos. Como estamos supondo que pelo menos um dos valores de y_i é positivo, pelo menos uma das componentes diminui quando λ aumenta. Vamos aumentar λ até que uma ou mais das componentes se tornam nula, isto é, vamos considerar o seguinte valor de λ :

$$\lambda = \min \left\{ \frac{x_i}{y_i}; y_i > 0 \right\}$$

Para este valor de λ , a solução dada por (2.5) é admissível e possui no máximo $p-1$ variáveis positivas. Repetindo este processo, se necessário, podemos eliminar as variáveis positivas até que se tenha uma solução admissível com as colunas correspondentes linearmente independentes, situação onde o caso 1 se aplica.

2. *Se existe uma solução óptima, então existe uma solução básica admissível óptima.*

Suponha que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma solução óptima e, como já foi explicado no ponto acima, suponha que somente p variáveis, x_1, x_2, \dots, x_p , sejam positivas. Temos, de novo, dois casos.

Caso 1: corresponde ao caso em que colunas são linearmente independente e é tratado exatamente da mesma forma como nos parágrafos anteriores.

Caso 2: corresponde à solução linearmente dependente e também é tratado da mesma forma que anteriormente, mas neste caso temos que mostrar que λ na solução (2.5) é

óptimo. Para isso, sabemos que o valor da função objetivo para a solução $x - \lambda y$ é:

$$c^T x - \lambda c^T y \quad (2.6)$$

Para λ suficientemente pequeno, $x - \lambda y$ é uma solução admissível para valores positivos e negativos de λ . Podemos então concluir que $c^T y = 0$ pois se $c^T y \neq 0$, um valor pequeno de λ com um sinal apropriado poderia ser encontrado para fazer (2.6) menor que $c^T x$, mantendo a admissibilidade, o que contraria a hipótese que x^* é uma solução óptima. Portanto $c^T y = 0$. Portanto, com isso obtém-se uma nova solução admissível com um número menor de componentes positivas.

□

Teorema 2.2. *O conjunto das soluções admissíveis, $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, de um problema de PL é um conjunto convexo fechado.*

Demonstração. Num problema de PL qualquer restrição define um conjunto convexo fechado. Como o conjunto das soluções admissíveis, X , de um problema de PL é a intersecção dos conjuntos definidos por todas as restrições do problema e como a intersecção de convexos é ainda um convexo e a intersecção de fechados é ainda um fechado, X é um conjunto convexo fechado.

Alternativamente, a convexidade de X pode ser demonstrada mais diretamente provando que qualquer combinação linear convexa de duas soluções admissíveis é ainda uma solução admissível.

Suponha-se que existem pelo menos duas soluções admissíveis, sejam $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$:

Tem-se então $Ax_1 = b$ e $Ax_2 = b$.

Seja $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0 \leq \lambda \leq 1$, uma combinação linear convexa de x_1 e x_2 . Resulta então que

$$Ax = A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] = \lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 = \lambda b + (1 - \lambda)b = b$$

o que prova que x é também uma solução admissível.

□

A resolução de um problema de PL consiste em escolher de entre as soluções admissíveis, aquela que optimiza a função objectivo. O Algoritmo Simplex procede apenas à escolha de soluções básicas admissíveis, que são em número finito, conforme se mostrará no Teorema 2.4.

Hiperplano : É um conjunto da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$, com $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$.

Um **Poliedro** $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem um conjunto finito de desigualdades, ou seja, $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$, para alguma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um vector $b \in \mathbb{R}^m$.

Polítopo convexo S é um conjunto limitado, obtido pela intersecção de semiplanos ($S \subseteq \mathbb{R}^n$), isto é, o conjunto de pontos (x_1, \dots, x_n) , que verifica um número finito de desigualdades do tipo $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \{ \leq, \geq \} b$.

Ou seja, um poliedro limitado designa-se por **Polítopo**.

O conjunto das soluções admissíveis, X , de um problema de PL resulta da intersecção de um número finito dos hiperplanos. Três situações, mutuamente exclusivas, podem ocorrer:

- X é vazio, caso em que o problema não tem solução;
- X é não vazio e não limitado, caso em que o problema tem solução, mas em que o valor óptimo da FO pode não ser finito, dizendo-se, caso aconteça, que o problema é ilimitado;
- X é não vazio e limitado, caso em que X é um polítopo convexo e em que o problema tem solução com óptimo finito para a FO.

Dado que o Algoritmo Simplex, como se verá mais adiante, permite detectar se $X = \emptyset$ e, também, se o óptimo para a FO não é finito, admita-se que o conjunto das soluções admissíveis, X , é um polítopo convexo.

Teorema 2.3. *Uma função linear sobre um polítopo X atinge o óptimo num ponto extremo (vértice) de X .*

Demonstração. Seja o problema de PL

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = f(x) &= c'x \\ \text{s.a } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Como por hipótese X é um poliedro, os seus pontos extremos são em número finito. Designem-se tais pontos por x_1, x_2, \dots, x_p e a solução óptima (maximizante) por x^* . Tem-se, por definição, que

$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in X$. Se x^* for um ponto extremo de X , o teorema está demonstrado. Se x^* não for um ponto extremo, então pode ser obtido como combinação linear convexa dos pontos extremos de X , isto é, $x^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$, com $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$. Ora, atendendo a que a FO é uma função linear, tem-se:

$$f(x^*) = f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i f(x_i).$$

Seja x_M o ponto extremo que satisfaz $f(x_M) = \max_{1 \leq i \leq p} \{f(x_i)\}$ pode fazer-se a majoração

$$f(x^*) = \sum_i \lambda_i f(x_i) \leq \sum_i \lambda_i f(x_M) = f(x_M) \sum_i \lambda_i = f(x_M)$$

Como por hipótese x^* é solução óptima, tem-se a dupla desigualdade

$$f(x_M) \leq f(x^*) \leq f(x_M), \text{ onde se conclui que } f(x^*) = f(x_M).$$

□

Teorema 2.4. *Um ponto $x \in X$ é ponto extremo (vértice) se e só se constituir uma SBA do problema de PL.*

Demonstração. Se x é ponto extremo de X , supondo que as componentes positivas são as m primeiras ($m \leq n$),. Sem perda de generalidade, tem-se:

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_m B_m = B_0 \tag{2.7}$$

Basta provar que B_1, B_2, \dots, B_m são vectores linearmente independentes para se poder concluir que x é SBA. Admita-se que são linearmente dependentes, isto é,

$$h_1 B_1 + h_2 B_2 + \dots + h_m B_m = 0 \tag{2.8}$$

com algum $h_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$
 Escolhe-se um escalar $\lambda > 0$ tal que

$$x_i + \lambda h_i \leq 0 \text{ e } x_i - \lambda h_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.9)$$

multiplica-se (2.8) por λ e, em seguida, some-se e subtrai-se a (2.7) o resultado obtido.
 Tem-se pois:

$$\sum_{i=1}^m x_i B_i + \lambda \sum_{i=1}^m h_i B_i = B_0 \text{ e } \sum_{i=1}^m x_i B_i - \lambda \sum_{i=1}^m h_i B_i = B_0 \quad (2.10)$$

ou, o que é equivalente,

$$\sum_{i=1}^m (x_i + \lambda h_i) B_i = B_0 \text{ e } \sum_{i=1}^m (x_i - \lambda h_i) B_i = B_0 \quad (2.11)$$

Atendendo a (2.9) e (2.11), os pontos $y = x + \lambda h$ e $z = x - \lambda h$ constituem também soluções admissíveis do problema de PL, sendo $h = [h_1, h_2, \dots, h_m]$.

Como por outro lado, $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, o ponto x pode ser obtido como combinação linear convexa de y e z , concluindo-se que x não é um ponto extremo de X , o que contradiz a hipótese. O absurdo resulta de se ter admitido que os vectores B_1, B_2, \dots, B_m serem linearmente dependentes, pelo que os vectores são linearmente independentes e, consequentemente, x é SBA do problema de PL.

A condição é suficiente, suponha-se que $x = [x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0]$ é uma SBA. Tem-se então $x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_m B_m = B_0 (x_j \geq 0)$ com B_1, B_2, \dots, B_m vectores linearmente independentes. Admita-se também que x não é um ponto extremo de X , então x pode ser obtido como combinação linear convexa de outros dois pontos de X , isto é,

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z \quad 0 < \lambda < 1, \quad y \neq z, \quad y, z \in X.$$

Como $y \geq 0, z \geq 0$ as últimas componentes de x_i são nulas, resulta imediatamente que

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_m, 0, \dots, 0] \text{ e } z = [z_1, z_2, \dots, z_m, 0, \dots, 0], \text{ tendo-se}$$

$$y_1 B_1 + y_2 B_2 + \dots + y_m B_m = B_0 \text{ e } z_1 B_1 + z_2 B_2 + \dots + z_m B_m = B_0 \text{ ou ainda, subtraindo ordenadamente,}$$

$$(y_1 - z_1)B_1 + (y_2 - z_2)B_2 + \dots + (y_m - z_m)B_m = 0$$

Atendendo a que B_1, B_2, \dots, B_m são vectores linearmente independentes, a relação anterior verifica-se se e só se

$$\begin{cases} y_1 - z_1 = 0 \\ y_2 - z_2 = 0 \\ \vdots \\ y_m - z_m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \\ \vdots \\ y_m = z_m \end{cases} \Leftrightarrow y = z$$

o que contradiz a hipótese. O absurdo resultou de se ter admitido que x podia ser obtido como combinação linear convexa de outros dois pontos distintos de X isto é, de x não ser um ponto extremo de X ; x é então um ponto extremo de X . \square

2.4 Resolução de um Problema de Programação Linear

Uma vez realizada a formulação de um problema em PL, o passo a seguir consiste na aplicação de métodos e algoritmos desenvolvidos para a resolução do mesmo.

Em PL não existe um único método para resolver todos os problemas de Programação Linear que eventualmente podem surgir. A natureza do método de resolução depende da complexidade do modelo em causa. Neste trabalho, apresentamos o método gráfico e o Algoritmo Simplex, com auxílio de alguns programas informáticos.

2.4.1 Método Gráfico

Sob o ponto de vista prático, só utilizaremos o método gráfico caso um problema de PL tenha 2 ou 3 variáveis de decisão.

Ao representar graficamente a região admissível, começa-se por construir um sistema de eixos cartesianos, onde cada restrição define um semiplano. No nosso caso vamos utilizar o software Geogebra, um dos aplicativos bastante acessível para o efeito e que é muito utilizado no Ensino da Matemática e cuja aplicação favorece a compreensão de conceitos e relações geométricas e outras ferramentas adequadas ao cálculo.

A resolução gráfica dos problemas de PL com duas variáveis segue os seguintes passos:

- Construir um sistema de eixos cartesianos x_1, x_2 ;
- Identificar o conjunto dos valores de x_1 e x_2 que satisfaçam todas as restrições;
- Traça-se a recta que representa $z = 0$ (recta de nível 0) e traça-se o gradiente da FO na origem dos eixos, que será perpendicular à recta $z = 0$;
- Finalmente, traça-se uma recta de nível sobre a região admissível (paralela à recta $z = 0$) e se o problema é de maximização (minimização), desloca-se a recta de nível, paralelamente, no sentido do gradiente (no sentido oposto ao do gradiente);
- O(s) último(s) ponto(s) de intercepção da recta de nível com a região admissível, corresponde(m) à(s) solução(ões) óptima(s).

Segue-se um exemplo.

Exemplo 2. Resolva graficamente o seguinte problema em Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a } x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 26 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolução

Fazendo a representação de cada uma das restrições no plano cartesiano tem-se:

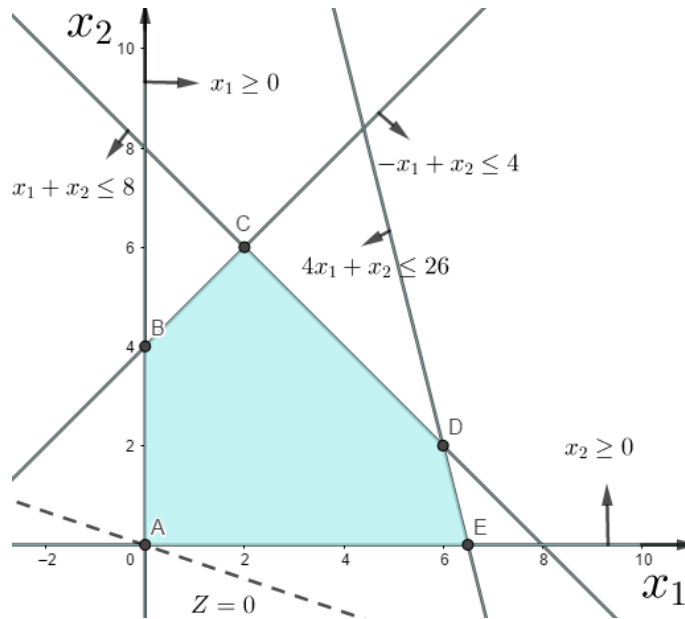


Figura 2.3: Representação de restrições no plano

No gráfico (fig. 2.3) estão representados as restrições do modelo, que limitam a região admissível (que satisfaz todas restrições) pelos semiplanos $x_1 + x_2 \leq 8$, $4x_1 + x_2 \leq 26$, $-x_1 + x_2 \leq 4$ e as suas respectivas condições de não negatividade $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

Após a identificação da região admissível (parte a sombreada), temos de encontrar o(s) ponto(s) dessa região que maximiza a FO $z = x_1 + 3x_2$.

Traçamos no gráfico algumas rectas de nível correspondentes aos diferentes valores que z pode tomar (conforme fig. 2.4 abaixo). Sabendo que o vector gradiente aponta no sentido crescente da FO e pretendendo maximizar a mesma função, deslocamos uma recta de nível, por exemplo $z = 0$, até atingir o último ponto (intersecção das rectas $x_1 + x_2 = 8$ e $-x_1 + x_2 = 4$) do polítopo (maior valor de z é 20).

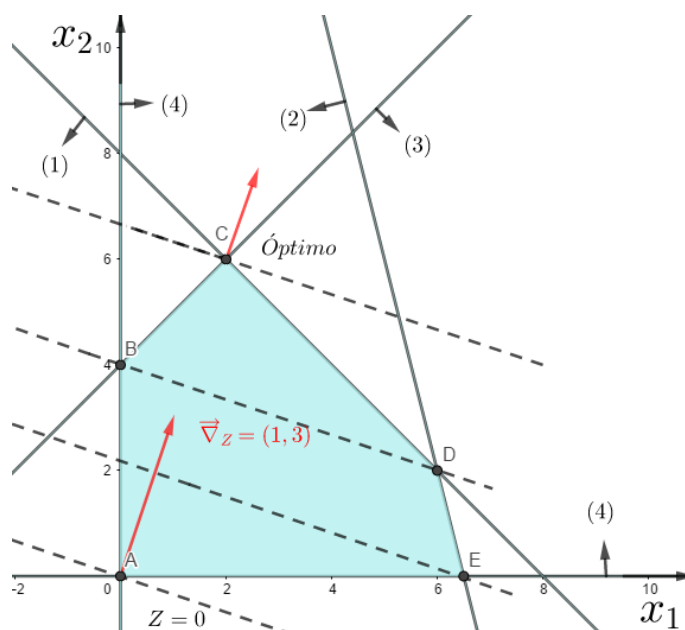


Figura 2.4: Solução ótima única

Programação Linear, Um Manual para o Professor

Assim, a solução óptima do problema é o ponto C, ou seja, $x^* = (2; 6)$, com $Z^* = 20$

Um problema de PL poderá ter **solução óptima única**, **soluções óptimas alternativas**, **solução óptima ilimitada** ou **solução impossível**.

O problema tem uma **solução óptima única** quando o valor da função objectivo se encontra num único ponto. (conforme fig. 2.4)

Soluções óptimas alternativas: A função objectivo pode assumir o mesmo valor óptimo em mais de um ponto. (conforme fig. 2.5)

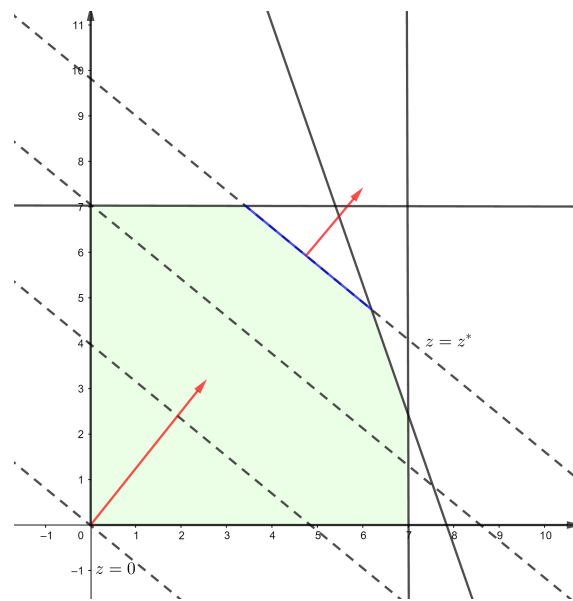


Figura 2.5: Soluções Óptimas Alternativas

Solução Ilimitada: Neste caso, a função objectivo pode crescer ou decrescer indefinidamente. (conforme fig. 2.6)

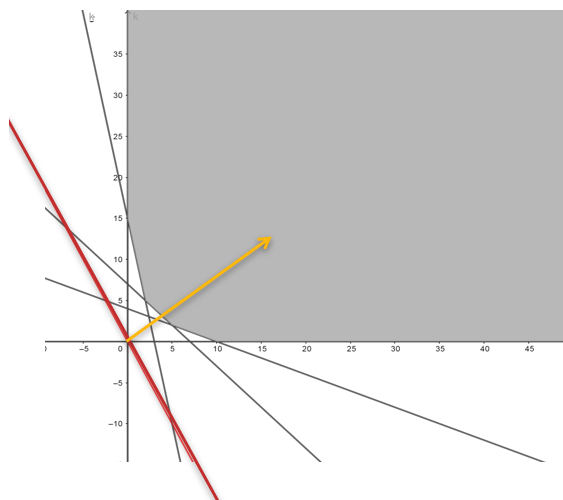


Figura 2.6: Solução Ilimitada

Solução Impossível : Um problema de PL, com restrições inconsistentes, região admissível vazia,

não tem nenhuma solução. (conforme fig. 2.7)

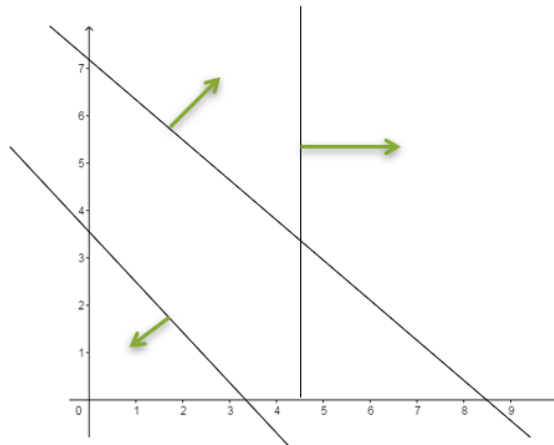


Figura 2.7: Solução Impossível

2.4.2 Algoritmo Simplex Primal

O Algoritmo Simplex é um procedimento algébrico iterativo concebido para resolver problemas de PL. O algoritmo parte de uma SBA inicial e procura, em cada iteração, uma nova SBA (adjacente) com melhor valor na função objectivo. O processo repete-se até que a solução óptima seja atingida.

Desde o seu desenvolvimento, o Simplex atraiu considerável interesse. Isso se deve principalmente pela sua eficiência em resolver problemas de PL.

Atualmente com a tecnologia moderna de computadores, o Simplex melhorou significativamente a capacidade de resolução de problemas de grande dimensão que anteriormente eram tidos como impossíveis de resolver em tempo útil.

Este Algoritmo é aplicado quando o problema de PL está escrito na forma padrão e tem como finalidade a obtenção de soluções básicas admissíveis, caso existam, até à obtenção da solução óptima.

O Algoritmo Simplex é composto por três etapas: **inicialização**, **condição de paragem** e **tratamento iterativo**.

Inicialização: Para inicializar o algoritmo torna-se necessário encontrar uma solução básica admissível inicial.

Condição de Paragem: Caso haja uma possibilidade de melhorar o valor da função objectivo, então continua-se com o mesmo procedimento, caso contrário, o algoritmo termina com uma SBA óptima ou com a conclusão que o problema é ilimitado.

Tratamento Iterativo: Consiste na passagem de um ponto extremo para outro ponto extremo adjacente, possibilitando a mudança de base no problema de PL. Este processo realiza-se através da escolha de uma variável que entra na nova base, entre as variáveis não básicas, optando-se

Programação Linear, Um Manual para o Professor

por aquela que melhora unitariamente mais o valor da função objectivo quando é incrementada. Em seguida, determina-se a variável básica que sai da base e o processo repete-se até encontrar a solução óptima.

Chave do algoritmo Simplex

Uma das formas de perceber o algoritmo Simplex, está nos procedimentos que conduzem a soluções básicas admissíveis.

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s.a } \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1)$$

Seja $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ uma solução básica admissível, sendo $z_0 = \mathbf{c}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}) = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N)(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}) = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$ o valor da função objectivo. ($\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$)

Resolvendo o sistema em função de \mathbf{x}_N :

$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in R} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j x_j$, onde R denota o conjunto dos índices das variáveis não básicas.

Substituindo na função objectivo obtém-se:

$$Z = \mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B \left(\bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in R} \bar{\mathbf{A}}_j x_j \right) + \sum_{j \in R} \mathbf{c}_j x_j = z_0 - \sum_{j \in R} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) x_j, \text{ onde } \bar{\mathbf{A}}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j,$$

$z_0 = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$, sendo $(\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j)$ designado por custo reduzido da variável x_j , onde $\mathbf{z}_j = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{A}}_j$.

Logo o problema (1) pode ser reescrito como se segue:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= z_0 - \sum_{j \in R} (\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j) x_j \\ \text{s.a } \sum_{j \in R} \bar{\mathbf{A}}_j x_j + \mathbf{x}_B &= \bar{\mathbf{b}} \\ x_j &\geq 0, j \in R \text{ e } \mathbf{x}_B \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Da expressão (2) podemos concluir que diante de problemas de maximização procuramos o valor mínimo de $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j$ (ao passo que nos casos de minimização procuramos o máximo de $\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j$). Além disso, se $\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k = \min\{\mathbf{z}_j - \mathbf{c}_j : j \in R\} \geq 0$, então o algoritmo termina com uma solução óptima.

Caso $\mathbf{z}_k - \mathbf{c}_k < 0$, então teremos interesse em fazer x_k aumentar de valor pelo que esta variável terá que se tornar VB. Dizemos então que x_k entrada para a base. Mantendo $x_j = 0$ para $j \in R \setminus \{k\}$, de (2) obtemos:

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k,$$

$$\text{onde } \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{rk} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mr} \end{pmatrix} x_k$$

O valor máximo com que x_k pode entrar para a base determina a variável que sai da base, x_r (primeira VB que se anula com o crescimento da VNB que entra)

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\}$$

Sabendo que $z = z_0 - (z_k - c_k)x_k$, sendo z_0 o valor da solução actual, e passa pela solução diferente que tem um valor de $z > z_0$, como $z_k - c_k < 0$ (a solução não é óptima, para um problema de maximização), determina-se o menor dos quocientes $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$ que faz com que x_k entra para base, porque vai permitir aumentar o valor da função objectivo.

Se $\bar{a}_{ik} \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ então o problema é ilimitado.

Em situações de não degenerescência, podemos afirmar que: $z_j - c_j > 0$ (< 0) para todo $j \in R$ é uma condição necessária e suficiente para que a solução seja óptima e única para um problema de maximização/(minimização).

Caso haja algumas variáveis fora da base para os quais $z_j - c_j = 0$, ao introduzir essas variáveis na base não se verifica melhoria do valor de Z , obtendo-se assim soluções óptimas alternativas para algum $j \in R$.

O Algoritmo

Na resolução de um problema através do algoritmo Simplex, recorre-se ao chamado quadro Simplex.

Supondo que as variáveis básicas são as primeiras m , $x_B = (x_1, \dots, x_m)$, e as não básicas são as seguintes $x_N = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, o quadro Simplex padrão assume o seguinte aspecto:

x_B	x_B	x_N	\bar{b}
	I_m	$\bar{A} = B^{-1}N$	$x_B = \bar{B}^{-1}b$
$z_j - c_j$	0	$c_B \bar{A} - c_N$	$Z_B = c_B \bar{b}$

Passo inicial:

Construir o quadro Simplex inicial considerando a solução básica admissível inicial:

x_B	x_1	...	x_p	x_{p+1}	...	x_n	\bar{b}
x_{p+1}	a_{11}	...	a_{1p}	1	...	0	b_1
...
x_n	a_{m1}	...	a_{mp}	0	...	1	b_m
$z_j - c_j$	$-c_1$		$-c_p$	0	...	0	0

Passo principal: Considerar o quadro Simplex

Programação Linear, Um Manual para o Professor

1. Seja $z_k - c_k = \min\{z_j - c_j : j \in R\}$, onde R é o conjunto dos índices das variáveis não básicas (candidatas a entrar na base). Se $z_k - c_k \geq 0$ então a **solução básica admissível** actual é óptima, caso contrário passar ao passo seguinte.
2. Examinar a coluna k do quadro \bar{A}_k . Se $\bar{a}_{ik} \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ então o problema é ilimitado, caso contrário continuar.
3. A variável x_k entra na base, substituindo x_r , sendo $r = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$ é o valor máximo com que x_k pode entrar na base determinados pela seguinte expressão:

$$x_r = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}, \bar{a}_{ik} > 0 \right\}. \text{ Se existir mais do que uma variável nestas condições, qualquer uma pode ser usada (conduz a soluções degeneradas).}$$

4. Actualizar o quadro simplex, sendo o “pivot” o valor de \bar{a}_{rk} , utilizando o método de eliminação de Gauss, de forma que o quadro apresente as seguintes alterações:
 - Sob a variável x_k uma coluna de zeros, excepto na linha do “pivot” onde aparece 1.

Teorema 2.5. (Critério de óptimo) *Se para alguma SBA de um problema de maximização se verificar $c_j - z_j \geq 0$ para todos $j = 1, 2, \dots, n$, então essa SBA é solução óptima.*

Exemplo 3. :

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 9x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a } 2x_1 + x_2 &\leq 400 \\ x_1 + x_2 &\leq 320 \\ x_1 &\leq 120 \\ x_2 &\leq 280 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Usando o Algoritmo Simplex, começamos por transformar as desigualdades em igualdades através da introdução de variáveis de folga, ou seja, escrevendo o problema na forma padrão. As variáveis de folga são as variáveis básicas iniciais

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 9x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a } 2x_1 + x_2 + x_3 &= 400 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 320 \\ x_1 + x_5 &= 120 \\ x_1 + x_2 + x_6 &= 280 \\ x_i &\geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

A tabela abaixo representa o quadro simplex inicial.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_3	2	1	1	0	0	0	400
x_4	1	1	0	1	0	0	320
x_5	1	0	0	0	1	0	120
x_6	0	1	0	0	0	1	280
$z_j - c_j$	-9	-6	0	0	0	0	0

Na primeira iteração, procuramos identificar o menor valor da linha $z_j - c_j$, das variáveis não básicas. Assim sendo $\min\{-9, -6\} = z_1 - c_1 = -9 \leq 0$. Logo a SBA não é óptima. Então x_1 é a variável que vai entrar na base. Sai da base a variável onde se atinge o menor dos quocientes $\{\frac{400}{2}, \frac{320}{1}, \frac{120}{1}\} = \frac{120}{1} \geq 0$. Logo, sai a variável x_5 . e $a_{31} = 1$ é o pivot.

Operações: Uma vez que já foi identificado o elemento pivot, o passo seguinte consiste em transformar a coluna do pivot na 3ª coluna da matriz identidade. Para tal, devem efectuar-se as operações pivotais.

$$L_1 = L_1 - 2L_3. \quad [2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] - 2 \times [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \ 0],$$

$$L_2 = L_2 - L_3. \quad [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] - [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0],$$

$$z_j - c_j = 9 \times [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] + [-9 \ -6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = [0 \ -6 \ 0 \ 0 \ 9 \ 0].$$

Constrói-se a tabela que se apresenta a seguir.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_3	0	1	1	0	-2	0	160
x_4	0	1	0	1	-1	0	200
x_1	1	0	0	0	1	0	120
x_6	0	1	0	0	0	1	280
$z_j - c_j$	0	-6	0	0	9	0	1080

Avaliar se vai haver na segunda iteração outro elemento pivot, com base no menor valor da linha $z_j - c_j$. Assim sendo $z_2 - c_2 = -6 \leq 0$. Logo a SBA não é óptima. Então x_2 é candidata a entrar na base. Sai da base a variável onde se atinge o menor dos quocientes $\{\frac{160}{1}, \frac{200}{1}, \frac{280}{1}\} = \frac{160}{1} \geq 0$.

Logo, sai a variável x_3 , e $a_{12} = 1$ é o pivot. Seguem-se as operações pivotais

$$L_1 = 2L_2 - L_1 = 2 \times [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0] - [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \ 0] = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \ 0],$$

$$L_2 = L_2 - L_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0] - [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \ 0] = [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0],$$

$$L_4 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] - [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \ 0] = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ 1],$$

$$\text{e } \{z_j - c_j\} = [0 \ 0 \ 6 \ 0 \ -3 \ 0] + 6 \times [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0] = [0 \ 0 \ 6 \ 0 \ -3 \ 0].$$

3º Quadro Simplex

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_2	0	1	1	0	-2	0	160
x_4	0	0	-1	1	1	0	40
x_1	1	0	0	0	1	0	120
x_6	0	0	-1	0	2	1	120
$z_j - c_j$	0	0	6	0	-3	0	2040

Na terceira iteração, procede-se de modo análogo. O elemento pivot situa-se na intersecção entre a variável de entrada e saída do menor valor da linha $\{z_j - c_j\}$. Assim sendo $\{z_1 - c_1\} = -3 \leq 0$. Logo a SBA não é ótima. Então x_5 é candidata a entra na base. Sai da base a variável onde se atinge o menor dos quocientes $\left\{\frac{40}{1}, \frac{120}{1}, \frac{120}{2}\right\} = \frac{40}{1} \geq 0$. Logo, sai a variável x_4 , e $a_{25} = 1$ é o pivot. Seguem-se as operações pivotais

$$L_1 = L_1 + 2 \times L_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -2 \ 0] + 2 \times [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0] = [0 \ 1 \ -1 \ 2 \ 0 \ 0],$$

$$L_3 = L_3 - L_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] - [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0] = [1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0],$$

$$L_4 = L_4 - 2L_2 = [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ 1] - 2 \times [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0] = [0 \ 0 \ 1 \ -2 \ 0 \ 1],$$

$$e \ \{z_j - c_j\} = [0 \ 0 \ 30 \ 0 \ -15 \ 0] + 15 \times [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0] = [0 \ 0 \ 3 \ 3 \ 0 \ 0].$$

Quando Simplex ótimo

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_2	0	1	-1	2	0	0	240
x_5	0	0	-1	1	1	0	40
x_1	1	0	1	-1	0	0	80
x_6	0	0	1	-2	0	1	40
$z_j - c_j$	0	0	3	3	0	0	2160

Como os elementos da linha $\{z_j - c_j\}$ das variáveis não básicas são não negativos, o quadro actual é ótimo e a solução é:

$$x^* = [80 \ 240 \ 0 \ 0 \ 40 \ 40] \quad e \quad Z^* = 2160$$

2.4.3 Bases Artificiais

Até agora a aplicação do Algoritmo Simplex incidiu apenas sobre problemas de PL em que a identificação de uma SBA inicial era imediata. Pode acontecer que a matriz A não contenha todas as colunas da matriz identidade, pelo que a determinação de uma SBA inicial não é tão imediata.

Nesta secção, veremos que com a introdução de variáveis artificiais conseguimos obter uma SBA de partida (quando o problema não é impossível, o que é aliás identificável como veremos à frente). No entanto, a introdução de tais variáveis obriga-nos a utilizar, como por exemplo o método do M Grande.

Refira-se ainda que as variáveis artificiais, ao contrário das variáveis de folga, não têm significado de natureza económica, sendo apenas um mero artifício matemático, com objectivo de anular as variáveis artificiais, pois só desta forma será possível obter uma solução do problema

inicial.

Método do M Grande

Neste método, as variáveis artificiais são fortemente penalizadas na função objectivo, de modo a provocar o seu anulamento. O Algoritmo Simplex, tenderá naturalmente a eliminar da base as variáveis artificiais, como se pretende, dado que aquelas estão penalizadas com coeficientes grandes : $(-M)$ na maximização e $(+M)$ na minimização, em que $M \gg 0$.

Considere-se um problema de PL na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.a } a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

O método do M grande, passa-se ao seguinte problema aumentado:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \dots - Mx_{n+m} \\ \text{s.a } a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\ x_i &\geq 0, \quad (i = 1, \dots, n + m) \end{aligned}$$

Assumindo que A não contém nenhuma coluna da matriz identidade, introduzimos as variáveis artificiais x_{n+1}, \dots, x_{n+m} e, considerando $M \geq 0$.

Exemplo 4. Determine a solução óptima e o respectivo valor da FO através do Algoritmo Simplex.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a } 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 420 \\ x_1 + x_2 &\geq 160 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 132 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Passar o problema para a sua forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 420 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 160 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 132 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Programação Linear, Um Manual para o Professor

Como não é possível arranjar uma matriz identidade (base inicial), terão que ser introduzidas variáveis artificiais no problema. Desta forma, o problema passará a ter a seguinte forma:

$$\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\text{s.a } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 420$$

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 160$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_7 = 132$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (x_6, x_7 \text{ são variáveis artificiais})$$

Aplicando o algoritmo Simplex a este problema, tem-se:

Passo inicial

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
x_5	2	1	1	0	1	0	0	420
x_6	1	1	0	-1	0	1	0	160
x_7	1	-1	-1	0	0	0	1	132
$z_j - c_j$	-2	-3	-5	0	0	M	M	0

Os valores de $z_j - c_j$, com $j = 6, 7$ são não nulos, e x_6 e x_7 são variáveis básicas, pelo que esses custos realizados devem ser nulos. Assim, é necessário construir uma nova linha para $z_j - c_j$, da seguinte forma:

Linha 4	[-2	-3	-5	0	0	M	M	0]
Linha 2	-M [1	1	0	-1	0	1	0	160]
Linha 3	-M [1	-1	-1	0	0	0	1	132]
Nova linha 4			$-2(M+1)$	-3	$M-5$	M	0	0	0	$-292M$

O primeiro quadro Simplex será o anterior (Quadro inicial), em que a linha $z_j - c_j$ será a (Nova linha 4).

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
x_5	2	1	1	0	1	0	0	420
x_6	1	1	0	-1	0	1	0	160
x_7	①	-1	-1	0	0	0	1	132
$z_j - c_j$	$-2(M+1)$	-3	$M-5$	M	0	0	0	$-292M$

A partir daqui seguem-se os passos do Algoritmo Simplex Primal. Apresentamos a seguir os quadros Simplex que se obtém.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
x_5	0	3	3	0	0	-2	0	156
x_6	0	②	1	-1	1	-1	0	28
x_1	1	-1	-1	0	0	1	1	132
$z_j - c_j$	0	$-2M-5$	$-M-7$	M	0	0	$2(M+1)$	$-28M + 264$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
x_5	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	114
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	14
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	146
$z_j - c_j$	0	0	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{2M+5}{2}$	$M-\frac{1}{2}$	334

As variáveis x_6 e x_7 já são variáveis não básicas, pelo que, o valor de $z = 334$ já não depende de M . Portanto estamos na presença de uma SBA para o problema inicial!

Uma vez que não foi obtida a solução óptima, vamos procurar outro elemento pivot, com base do menor valor da linha $z_j - c_j$. Assim sendo $\{z_1 - c_1\} = -\frac{9}{2} \leq 0$. Logo a variável x_3 é candidata a entrar na base, e sai da base a variável onde se atinge o menor dos quocientes.

$\{114 \div \frac{3}{2}; 14 \div \frac{1}{2}\} = 14 \div \frac{1}{2} \geq 0$. Logo, sai a variável x_2 , e $a_{23} = \frac{1}{2}$ é o pivot. Seguem-se os quadros Simplex que resultam da aplicação do Algoritmo.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
x_5	0	-3	0	3	1	-3	1	72
x_3	0	2	1	-1	0	1	-1	28
x_1	1	1	0	-1	0	1	0	160
$z_j - c_j$	0	9	0	-7	0	$\frac{2M+7}{2}$	$M-5$	460

Quadro Simplex óptimo

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	\bar{b}
x_4	0	-1	0	1	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	24
x_3	0	1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	52
x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	184
$z_j - c_j$	0	2	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2M-7}{2}$	$M-\frac{8}{3}$	628

Como todos os elementos da linha $z_j - c_j$ são não negativos, então a solução presente é óptima: $x^* = (184, 0, 52, 24, 0, 0, 0)$ com $z^* = 628$.

2.4.4 Utilização de Computador

Nos exercícios anteriores com problemas de PL foi possível verificar que quanto maior for o número de variáveis o processo de resolução se torna cada vez mais trabalhoso.

Um problema de PL de maiores dimensões pode ser resolvido de forma eficiente com uso do computador utilizando software apropriado.

Nos pontos que seguem vamos apresentar dois programas informáticos muito populares pelo facto de serem facilmente acessíveis: Excel e o Lingo.

Estes “softwares” são particularmente atraentes para os utilizadores, porque possuem uma linguagem algébrica de moldes simples.

Excel

O Excel é um software popular que pode ser utilizado nesta área da PL, por estar disponível em

Programação Linear, Um Manual para o Professor

quase todos os computadores.

Para resolver um problema de PL, procuramos o comando Solver que se encontra localizado na barra de ferramentas do Excel.

Caso não esteja disponível faz-se a instalação a partir do menu Microsoft Office → Suplementos → seleccionar a opção Solver.

Exemplo 5. Resolva o seguinte problema de programação linear

$$\text{Min } Z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.a } 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$-x_1 - 3x_2 + 5x_3 \geq 8$$

$$2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 4$$

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

O problema de PL é introduzido no Excel da seguinte forma.

	A	B	C	D	E	F
1		Coeficientes das variáveis				
2	Função	x1	x2	x3		
3	Objectivo	2	-4	3		
4						
5	Valores das Variáveis					
6	Z =	0				
7						
8	Restrições	Coeficientes tecnológicos				Constantes
9	nº	x1	x2	x3	MER	MDR
10	1	5	-6	2	0	5
11	2	-1	3	5	0	8
12	3	2	5	-4	0	4
13	4	1	0	0	0	0
14	5	0	1	0	0	0
15	6	0	0	1	0	0

Figura 2.8: Modelo de PL na janela do Excel

Resolução

- Delimitar a área de inserção dos valores da Função Objectivo e respectivas restrições;
- As linhas 2 e 3 cujas colunas são B, C e D correspondem aos valores da Função Objectivo;
- As linhas 10, 11, ..., 15 representam as restrições do problema;
- Os dados da linha 5 e colunas B, C e D correspondem aos valores de cada uma das restrições em função das variáveis x_1 , x_2 e x_3 ;
- O Valor fixado na célula B6 corresponde ao valor da Função Objectivo que pode ser obtido pela fórmula:

$$Z = (B5 * B3) + (C5 * C3) + (D5 * D3)$$

- MER significa Membro Esquerdo da Restrição, conhecidos como constantes (resulta do produto dos coeficientes tecnológicos e de custo), localizados na coluna E que é obtido pela fórmula:

$$MER = (B10 * \$B\$5) + (C10 * \$C\$5) + (D10 * \$D\$5)$$

- MDR significa Membro Direito da Restrição, são as constantes do problema.

Vejamos como se seguem os procedimentos de resolução (conforme fig. 2.9).

	A	B	C	D	E	F
1		Coeficientes das variáveis			= B5*B3+C5*C3+D5*D3	
2	Função	x1	x2	x3		
3	Objectivo	2	-4	3		
4					5 * x ₁ - 6 * x ₂ + 2 * x ₃	
5	Valores das Variáveis					
6	Z =	0			= B10*\$B\$5+C10*\$C\$5+D10*\$D\$5	
7						
8	Restrições	Coeficientes tecnológicos				Constantes
9	nº	x1	x2	x3	MER	MDR
10	1	5	-6	2	0	5
11	2	-1	3	5	0	8
12	3	2	5	-4	0	4
13	4	1	0	0	0	0
14	5	0	1	0	0	0
15	6	0	0	1	0	0

Figura 2.9: 1ª janela do Excel

Para resolver o nosso problema chamamos o comando “Solver” em ferramentas, onde irá aparecer uma janela “Parâmetro Solver”. Inserimos o valor da célula B6 no campo “Definir Objectivo” que corresponde ao valor da função objectivo.

O campo “Alterando as Células de Variável” correspondem aos valores de x_1, x_2 e x_3 . A inserção é feita por intermédio do rato clicando nas correspondentes células conforme indicado na Figura 2.10.

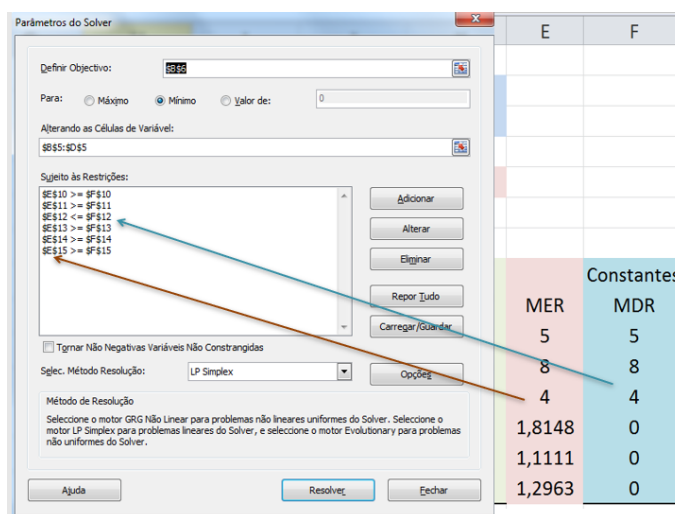


Figura 2.10: 2ª janela do Excel

As restrições são inseridas por passos no campo “Sujeito as Restrições”. Após clicar na caixa “Adicionar” irá aparecer outra janela denominada “Adicionar Restrições”. No campo que diz “Refe-

Programação Linear, Um Manual para o Professor

rencias de célula” deve-se seleccionar as células (\$E\$10,\$E\$11,\$E\$12,\$E\$13,\$E\$14,\$E\$15) e no campo “Restrição” deve-se seleccionar as células (\$F\$10,\$F\$11,\$F\$12,\$F\$13,\$F\$14,\$F\$15) conforme a Figura 2.10.

Após estes procedimentos efetuados selecciona-se as opções “Método de Resolução (Simplex)” e finalmente clica-se na caixa “Resolver”. Obtém-se assim a Figura 2.11 com a solução óptima.

	A	B	C	D	E	F
1		Coeficientes das variáveis				
2	Função	x1	x2	x3		
3	Objectivo	2	-4	3		
4						
5	Valores das Variáveis	1,81481	1,11111	1,2963		
6	Z =	3,07407				
7						
8	Restrições	Coeficientes tecnológicos				Constantes
9	nº	x1	x2	x3	MER	MDR
10	1	5	-6	2	5	5
11	2	-1	3	5	8	8
12	3	2	5	-4	4	4
13	4	1	0	0	1,8148	0
14	5	0	1	0	1,1111	0
15	6	0	0	1	1,2963	0

Figura 2.11: Janela final com valor óptimo do Excel

Estamos diante de uma solução óptima, sendo $Z^* = 3,07407$ e $x_1^* = 1,81481$, $x_2^* = 1,11111$, $x_3^* = 1,2963$.

Lingo

O Software Lingo foi concebido para otimizar funções lineares e não lineares de PL. A vantagem deste programa é que consegue resolver eficientemente problemas de dimensões maiores quando comparado com o anterior software.

Modo de utilização:

- A introdução dos dados do problema faz-se muito naturalmente escrevendo a formulação do problema, requerendo apenas o cuidado de, ao inserir as expressões da FO e das restrições, se termina sempre com um ponto e vírgula;
- Antes de colocar os comentários deve-se colocar um ponto de exclamação;
- O comando “Solve” resolve o problema utilizando o “Solver” adequado;
- O “output” contém informações sobre a função objectivo e respectivas restrições.

Exemplo 6. Resolva o seguinte problema em programação linear com o Lingo.

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.a } \quad 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 130$$

$$4x_3 + 8x_4 + 7x_5 \leq 175$$

$$14x_1 + 18x_2 + 23x_3 + 12x_4 + 18x_5 \leq 540$$

$$20x_1 + 21x_2 + 35x_3 + 25x_4 + 28x_5 \leq 980$$

$$80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \geq 500$$

$$0,35x_3 + 0,9x_4 + 0,6x_5 \geq 5$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

Resolução

Após a formulação, faz-se a introdução do problema de PL em uma janela do Lingo. Tal como mostra a Figura 2.12,

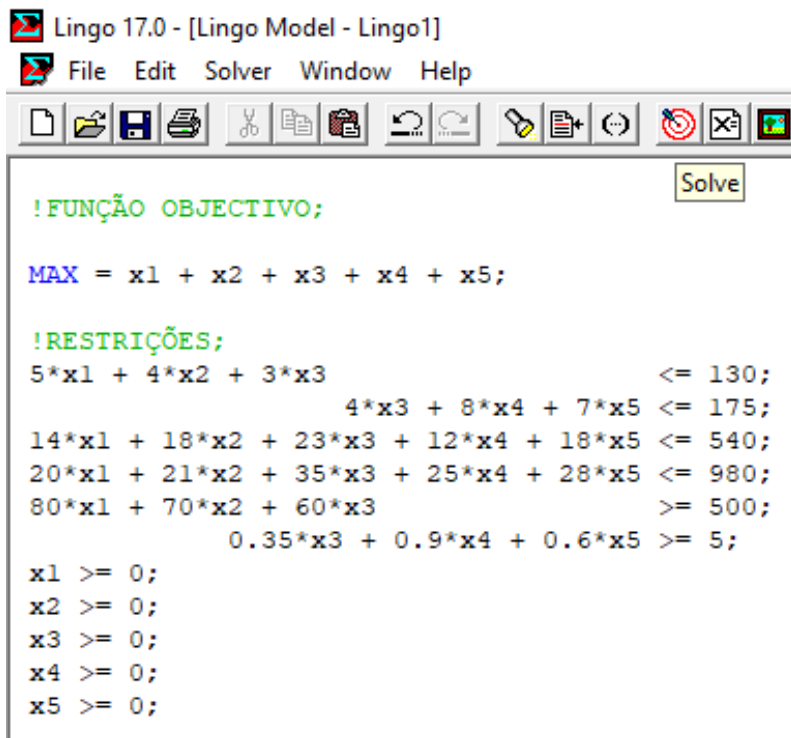


Figura 2.12: Introdução de dados no Lingo

Em seguida clicar na opção “Solver”, que se encontra na parte superior do Lingo, para resolver o problema de PL obtemos então a solução, tal como mostram as Figuras 2.13 e 2.14.

Programação Linear, Um Manual para o Professor

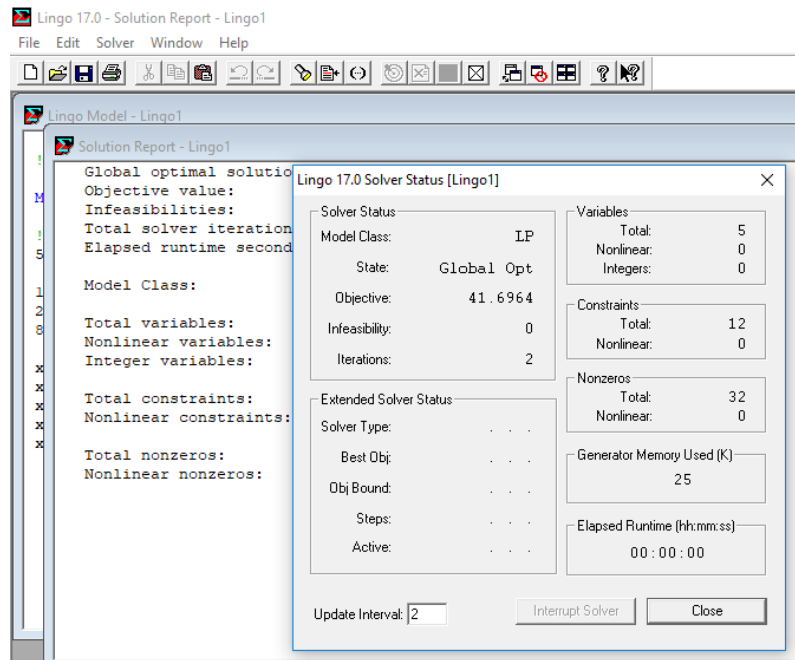


Figura 2.13: Janela com o “Solver Status” após efectuar resolução

Variable	Value	Reduced Cost
X1	19.82143	0.000000
X2	0.000000	0.2857143
X3	0.000000	0.7142857
X4	21.87500	0.000000
X5	0.000000	0.4107143

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	41.69643	1.000000
2	30.89286	0.000000
3	0.000000	0.1785714E-01
4	0.000000	0.7142857E-01
5	36.69643	0.000000
6	1085.714	0.000000
7	14.68750	0.000000
8	19.82143	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	0.000000	0.000000
11	21.87500	0.000000
12	0.000000	0.000000

Figura 2.14: Janela com solução final

Como acabamos de ver o software Lingo resolve os problemas de PL de forma simples. Neste caso a solução óptima é $x^* = (19,82; 0; 0; 21,88; 0; 30,89; 0; 0; 36,7; 1085,71; 14,69)$, $Z^* = 41,6964$.

Capítulo 3

Teoria da Dualidade

Associado a qualquer problema de PL encontra-se outro problema que se designa Dual. Neste contexto, o problema original denomina-se por Primal.

Os problemas Primal e Dual estão relacionados entre si, partilhando os mesmos parâmetros, motivo pelo qual são conhecidos como par de problemas Primal-Dual

O estudo destes problemas e das relações entre si deu origem à Teoria da Dualidade, que permitiu ampliar a interpretação económica dos problemas de PL, desempenhando um papel fundamental nos sistemas de apoio à decisão.

Apesar das características distintas que ambos os problemas apresentam veremos que, em determinadas condições, os problemas têm o mesmo valor óptimo e é possível obter a solução de um deles a partir do outro. Assim, pode ser mais conveniente resolver um problema de Programação Linear a partir do problema Dual.

O Algoritmo Simplex apresentado no capítulo anterior designa-se Algoritmo Simplex Primal. Neste capítulo apresentaremos o Algoritmo Simplex Dual que nos permitirá resolver o Dual usando o quadro Simplex Primal.

3.1 Formulação do problema Dual

O problema Dual obtém-se do problema Primal mediante as regras de transformação que apresentaremos mais a frente.

Vejamos o caso particular de um problema na forma canónica:

$$\begin{aligned} \text{Max}(\text{Min}) \quad Z &= \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s.a} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq (\geq) \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

O problema correspondente Dual consiste em:

$$\begin{aligned} \text{Min}(\text{Max}) \quad W &= \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{s.a} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq (\leq) \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

que também está na forma canónica.

Regras de transformação

As regras de transformação que se aplicam são as seguintes:

- Se o Primal for um problema de maximização (minimização), então o problema Dual será um problema de minimização (maximização).
- Cada variável do Primal está associada a uma restrição no Dual e cada restrição do Primal está associada a uma variável do Dual, conforme a tabela que se segue:

Problema de Maximização	Passagem ao Dual		Problema de Minimização
i -ésima restrição	\leq	≥ 0	i -ésima variável
	\geq	≤ 0	
	$=$	livre	
j -ésima variável	≥ 0	\geq	j -ésima restrição
	≤ 0	\leq	
	livre	$=$	

[Pereira, 2019]

- Os coeficientes de custo da função objectivo do Primal correspondem aos termos independentes das restrições do Dual;
- Os termos independentes das restrições do Primal correspondem aos coeficientes de custo da função objectivo do Dual;
- A transposta da matriz dos coeficientes tecnológicos do Primal é a matriz dos coeficientes tecnológicos do Dual.

Por exemplo, para um problema de maximização com n variáveis e m restrições, o respectivo Dual será um problema de minimização com m variáveis e n restrições.

As regras de transformações enunciadas nos pontos anteriores levam-nos a concluir que o Dual do problema Dual é o problema Primal.

Segue-se um exemplo onde se ilustra a passagem do problema Primal ao Dual

Exemplo 7. Considere o seguinte problema em PL, que designaremos por Primal:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= 5x_1 - 6x_2 + x_4 \\
 \text{(P) s.a. } & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -7 \\
 & 6x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 \geq 14 \\
 & -2.8x_1 - 17x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq -3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \text{ sem sinal}
 \end{aligned}$$

O Dual que se encontra associado a este problema, atendendo às relações Primal-Dual, é:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } z &= -7y_1 + 14y_2 - 3y_3 \\
 \text{(D) s.a. } & y_1 + 6y_2 - 2.8y_3 \geq 5 \\
 & 2y_1 - 3y_2 - 17y_3 \geq -6 \\
 & -y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 0 \\
 & -y_1 + 7y_2 + 2y_3 = 1 \\
 & y_1 \text{ variável livre, } y_2 \leq 0, y_3 \geq 0,
 \end{aligned}$$

3.1.1 Propriedades Fundamentais da Dualidade

Depois de abordar a passagem do Primal ao Dual, vamos em seguida apresentar e demonstrar os principais resultados da Dualidade, baseados em [Ramalhete, 1985].

Considerem-se os problemas Primal e Dual na forma canônica e sejam x_0 e y_0 soluções admissíveis do Primal e do Dual, respectivamente.

Teorema 3.1. (Teorema da Dualidade Fraca) *O valor da FO Z , para qualquer solução admissível $x_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ do problema Primal (Dual) de maximização, não excede o valor da FO W , para qualquer solução admissível $y_0 = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ do problema Dual (Primal) de minimização, ou seja:*

$$z = cx_0 \leq b^T y_0 = w \iff Z = \sum_j c_j x_j \leq \sum_i b_i y_i = W$$

Demonstração. Dado um problema Primal (Dual), onde $x_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ é uma solução admissível, verifica-se:

$$(P) \quad \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.1)$$

Multiplicando a expressão (3.1) por y_i , sendo $y_0 = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ solução admissível do Dual (Primal), temos:

$$y_i \sum_j c_j x_j \leq b_i y_i, \quad (i = 1, \dots, m), \text{ uma vez que } y_i \geq 0 \quad (3.2)$$

Somando todas estas desigualdades, obtemos:

$$\sum_i y_i \sum_j a_{ij} x_j \leq \sum_i b_i y_i = W \quad (3.3)$$

$$\sum_i \sum_j y_i a_{ij} x_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_i b_i y_i$$

de acordo com o problema Dual, verifica-se $\sum_i a_{ij} y_i \geq c_j$. Então:

$$Z = \sum_j c_j x_j \leq \sum_i b_i y_i = W$$

□

Corolário 1: Se $cx_0 = b^T y_0$ e x_0 e y_0 são soluções admissíveis então x_0 e y_0 são soluções ótimas dos problemas a que dizem respeito.

Corolário 2: Se um dos problemas é ilimitado então o outro é impossível.

Obs.: Na prática pode também acontecer que ambos os problemas sejam impossíveis

Lema 1: (Teorema da Dualidade Forte)

Se um dos problemas tem solução óptima, então ambos possuem soluções ótimas e os dois valores ótimos das FO são iguais.

Teorema dos Desvios Complementares: Seja o par de problemas Primal-Dual na forma canónica escritos na forma padrão:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j & \text{Min } w = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 (P) \quad & \text{s.a. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, & (D) \quad & \text{s.a. } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j - y_{m+j} = c_j, \\
 & i = 1, \dots, m & & j = 1, \dots, n \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m+n & & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m+n
 \end{aligned}$$

Sejam x^* e y^* soluções admissíveis quaisquer dos problemas Primal e Dual na forma canónica. Então são soluções ótimas dos respectivos problemas se e só se

$$x_j^* y_{m+j}^* = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad y_i^* x_{n+i}^* = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Demonstração. (I) Admitamos que x^* e y^* são soluções ótimas dos respectivos problemas.

Multiplicando cada restrição do Primal (Dual) pela respectiva variável Dual (Primal) vem:

$$y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* + y_i^* x_{n+i}^* = b_i y_i^*, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

$$x_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j^* - x_j^* y_{m+j}^* = c_j x_j^*, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

Somando as m igualdades (3.4) e e somando as n igualdades (3.5) obtemos:

$$\sum_{i=1}^m \left(y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) + \sum_{i=1}^m y_i^* x_{n+i}^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1}^n \left(x_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j^* \right) - \sum_{j=1}^n x_j^* y_{m+j}^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \quad (3.7)$$

Segundo o Lema 1, como estamos perante soluções ótimas para os respectivos problemas vem:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

Como as primeiras parcelas do 1º membro das expressões (3.6) e (3.7) são iguais, temos que:

$$\sum_{i=1}^m y_i^* x_{n+i}^* + \sum_{j=1}^n x_j^* y_{m+j}^* = 0$$

Programação Linear, Um Manual para o Professor

Sabendo que x^* é óptimo do Primal e y^* óptimo do Dual, essas soluções também são admissíveis, pelo que as igualdades anteriores só se verificam se todos os termos forem nulos, ou seja:

$$y_i^* x_{n+i}^* = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{e} \quad x_j^* y_{m+j}^* = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

(II) Por hipótese, x^* e y^* verificam as propriedades dos desvios complementares, conforme a expressão que se segue:

$$\sum_{i=1}^m y_i^* x_{n+i}^* + \sum_{j=1}^n x_j^* y_{m+j}^* = 0; \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad (3.8)$$

Por outro lado, têm-se as igualdades:

$$\sum_{i=1}^m \left(y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = \sum_{j=1}^n \left(x_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right); \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad (3.9)$$

Adicionando (3.8) a (3.9), vem

$$\sum_{i=1}^m \left(y_i^* \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) + \sum_{i=1}^m y_i^* x_{n+i}^* = \sum_{j=1}^n \left(x_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) - \sum_{j=1}^n x_j^* y_{m+j}^*$$

o que é equivalente a

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* + x_{n+i}^* \right) = \sum_{j=1}^n x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - y_{m+j}^* \right)$$

Como x^* e y^* representam as soluções admissíveis Primal e Dual, verificam-se as respectivas restrições:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* + x_{n+i}^* = b_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - y_{m+j}^* = c_j$$

Substituindo em (3.9) vem:

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*, \quad \text{ou seja os valores das FO coincidem}$$

Pelo *Corolário 1*, podemos concluir que x^* e y^* são as soluções óptimas do Primal e Dual, respectivamente. □

Com base no teorema dos desvios complementares, podemos afirmar que: se uma variável Primal for positiva, então a variável de folga correspondente do Dual é nula e vice-versa. Isto não exclui a possibilidade de ambas as variáveis serem nulas.

3.2 Algoritmo Simplex Dual

O Algoritmo Simplex Primal, apresentado no capítulo anterior, inicia-se com uma SBA para o Primal e vai calculando sucessivas SBAs Primais até obter uma que também seja admissível para o Dual.

A condição de optimalidade para o Primal, $z_j - c_j \geq 0, \forall_j$ (em maximização), corresponde à condição de admissibilidade para o Dual, $y \geq 0$ como veremos mais adiante.

Por outro lado, o Simplex Dual inicia-se com uma SBA para o Dual e vai determinando sucessivas SBAs para o Dual até obter uma que também é admissível para o Primal. Esta última solução é a solução óptima do problema. O Simplex Dual resolve o problema de PL directamente no quadro Primal Simplex. Para tal, cada iteração está associada a uma SBA para o Dual que se pretende melhorar caso ela não seja óptima (não seja admissível para o Primal também).

Seguem-se os passos do algoritmo.

1. Inicialização: encontrar uma base B para o Primal tal que $z_j - c_j = c_B \bar{A}_j - c_j \geq 0, \forall_j$;
2. Se $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$, STOP, a solução actual é óptima. Senão, seja r a linha do pivot com $\bar{b}_r < 0, (\bar{b}_r = \min \bar{b}_i)$;
3. Se $\bar{a}_{rj} \geq 0$ para todo j , STOP: o problema Dual é ilimitado e o Primal impossível. Senão, selecione-se o pivot na coluna k com o teste:

$$\frac{z_k - c_k}{|\bar{a}_{rk}|} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{|\bar{a}_{rj}|} : \bar{a}_{rj} < 0 \right\}$$

4. Pivotar com o elemento \bar{a}_{ik} e voltar ao ponto 2

Segue-se um exemplo onde o Algoritmo é aplicado.

Exemplo 8. Obtenha a solução do seguinte problema com o Algoritmo Dual Simplex.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= -21x_1 - 4x_2 - 9x_3 \\ \text{s.a. } & 7x_1 + x_2 + x_3 \geq 8 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Esse problema poderia ser resolvido pelo método do M Grande, uma vez que as restrições do problema exigiriam a introdução de variáveis artificiais. Mas com isso o problema passaria a ter 7 variáveis.

No entanto vamos utilizar o Algoritmo Simplex Dual que utiliza apenas 5 variáveis e tenderá a necessitar de menos cálculos do que com o processo anterior.

Multiplicando as restrições por (-1) e escrevendo o problema na forma padrão,

Programação Linear, Um Manual para o Professor

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= -21x_1 - 4x_2 - 9x_3 \\ \text{s.a } -7x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -8 \\ -3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 &= -10 \\ x_i &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5) \end{aligned}$$

Note-se que existe uma base inicial formada pelas colunas das variáveis de folga, pelo que o quadro Simplex inicial é:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_4	-7	-1	-1	1	0	-8
x_5	-3	-1	-3	0	1	-10
$z_j - c_j$	21	4	9	0	0	0

Neste quadro inicial não temos admissibilidade Primal ($\bar{b} \not\geq 0$), mas temos admissibilidade Dual pois $z_j - c_j \geq 0, \forall j$, pelo que podemos aplicar o Simplex Dual.

Assim, começamos por determinar a variável que vai sair da base, que será a variável básica associada à linha r : $\bar{b}_r = \min\{-8, -10\} = \bar{b}_2 = -10$, ou seja x_5 sai da base. Entra na base a variável onde se atinge o menor dos quocientes

$$\min \left\{ \frac{21}{|-3|}; \frac{4}{|-1|}; \frac{9}{|-3|} \right\} = \frac{9}{|-3|} = 3.$$

Logo x_3 entra na base e $\bar{a}_{23} = -3$ é o pivot.

Depois de identificado o elemento pivot, o passo seguinte consiste em transformar a coluna do pivot numa coluna da matriz identidade, fazendo uso de procedimentos já vistos anteriormente. Constrói-se assim a tabela 2 que se apresenta a seguir.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_4	-6	-2/3	0	1	-1/3	-14/3
x_3	1	1/3	1	0	-1/3	10/3
$z_j - c_j$	12	1	0	0	3	-30

Nesta tabela ainda existe um elemento negativo no vetor \bar{b} , então devemos aplicar novamente o critério de saída e entrada do Algoritmo Dual. Nesta ocasião só pode sair da base x_4 , já que é a única que apresenta um componente negativo na coluna \bar{b} . Neste caso,

$$\min \left\{ \frac{12}{|-6|}; \frac{1}{|-2/3|}; \frac{3}{|-1/3|} \right\} = \frac{1}{|-2/3|} = \frac{3}{2}$$

e obtém-se a 3ª tabela

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_2	9	1	0	-3/2	1/2	7
x_3	-2	0	1	1/2	-1/2	1
$z_j - c_j$	3	0	0	3/2	5/2	-37

Como os elementos da coluna \bar{b} são não negativos, então existe admissibilidade Primal, pelo que, sendo $b^T y = c x$, pelo corolário 1 temos as soluções óptimas dos problemas Primal e Dual,

ou seja:

$$x^* = (0, 7, 1, 0, 0) \quad e \quad z^* = -37$$

$$y^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, 0, 0\right) \quad e \quad w^* = -37$$

O Algoritmo Simplex Dual também é utilizado na pós-otimização quando se introduz uma nova restrição no problema ou se alteraram os valores dos termos independentes.

3.2.1 Valor das variáveis Duais

Dado um problema de PL Primal e o seu respectivo Dual nas formas canónicas:

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \begin{array}{l} \text{Max } Z = cx \\ \text{s.a } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \\ \text{(D)} & \begin{array}{l} \text{Min } W = b^T y \\ \text{s.a } A^T y \geq c^T \\ y \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Como já vimos, na optimalidade temos o seguinte quadro óptimo:

	x_1	...	x_{n+m}	\bar{b}
x_B	$B^{-1}A'$			$B^{-1}b$
$z_j - c_j$	$c_B B^{-1}A'_j - c_j$			$c_B B^{-1}b$

onde $A' = [A \mid I_m]$.

Logo, para todo x_j , $c_B B^{-1}A'_j - c_j \geq 0 \iff c_B B^{-1}A'_j \geq c_j$. Então, $y = c_B B^{-1}$ constitui uma solução admissível para o Dual, i.e., $(A'_j)^T (c_B B^{-1})^T \geq c_j$ para todo $j (j = 1, \dots, n)$.

Como, para $y = (c_B B^{-1})^T$, o valor da FO Dual coincide com o valor da FO Primal, logo, pelo Corolário 1 do Teorema da Dualidade Fraca,

$$y = (c_B B^{-1})^T, \quad (3.10)$$

é solução óptima do Dual.

Considerando $y = (y_1, \dots, y_m) = (c_B B^{-1})^T$, podemos obter os seus elementos na linha dos custos reduzidos sob as colunas das variáveis básicas iniciais, ou seja, $y_i = z_{n+i} - c_{n+i} = c_B B^{-1}[0 \dots 1 \dots 0]^T$.

Os valores das variáveis de folga duais são $(y_{m+1}, \dots, y_{m+n}) = A^T (y_1, \dots, y_m) - c^T$,

Fazendo $y' = (y_{m+1}, \dots, y_{m+n})$

de acordo com (3.10) tem-se

$$y' = A^T (c_B B^{-1})^T - c^T = (c_B B^{-1}A - c)^T = (z - c)^T.$$

As variáveis de folga do Dual são os elementos $z_j - c_j$ sob as colunas das variáveis principais (variáveis de decisão).

Com base na tabela óptima do Simplex Primal, é possível obter a solução do Dual. Vamos representar de forma clara os procedimentos a ter em conta no quadro óptimo do Exemplo 8. A primeira restrição do Primal tem como variável de folga x_4 sendo y_1 a variável de decisão do Dual associada. O custo reduzido de x_4 é o valor de $y_1^* = \frac{3}{2}$.

Na segunda restrição do Primal temos como variável de folga x_5 sendo y_2 a variável de decisão do Dual associada. O custo reduzido de x_5 é o valor de $y_2^* = \frac{5}{2}$.

Os coeficientes da primeira, segunda e terceira restrição do Dual são os coeficientes tecnológicos das variáveis de decisão do Primal, x_1, x_2 e x_3 , respectivamente.

Deste modo, os custos reduzidos destas variáveis no quadro Primal correspondem aos valores das variáveis de folga do Dual, ou seja,

$$\begin{aligned} y_3 &= z_1 - c_1 = 3, \\ y_4 &= z_2 - c_2 = 0, \\ y_5 &= z_3 - c_3 = 0. \end{aligned}$$

Assim, a solução óptima do Dual é $Y^* = \left[\frac{3}{2} \ \frac{5}{2} \ 3 \ 0 \ 0 \right]$ e $W^* = -37$

Portanto, o Algoritmo Simplex permite determinar as soluções do par de problemas Primal-Dual.

3.3 Interpretação económica da Dualidade

Na presente secção, vai proceder-se ao estudo da interpretação económica da Dualidade. Os valores óptimos de (y_1, \dots, y_m) , i.e. (y_1^*, \dots, y_m^*) dão-nos os “preços sombra”, ou seja, indicam o impacto (variação) no valor da FO do Primal se o termo independente da restrição Primal (b_i), ao qual y_i , $i = 1, \dots, m$ está associado, variar uma unidade.

Seja B a base de um problema Primal com c_B seu custo associado. Vamos supor que x^* é solução óptima não degenerada onde J é o conjunto dos índices das variáveis não básicas, incluindo as de folga ($J \subseteq \{1, \dots, n + m\}$)

$$z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j = w^* - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$$

Suponhamos que o recurso i aumenta uma unidade, ou seja,

$$b' = b + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b + \Delta b.$$

Então, assumindo que $B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$,

$$z^* = c_B B^{-1}(b + \Delta b) = c_B \bar{b} + c_B B^{-1} \Delta b$$

Logo, o impacto na FO é:

$$\Delta z = c_B B^{-1} \Delta b = c_B B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = y_i^*$$

Deste modo a variável principal y_i corresponde à variação da FO face à variação unitária do i -ésimo recurso, mantendo-se óptima a base do problema.

As variáveis auxiliares Duais (var. de folga), representam o decréscimo líquido na FO do Primal por activação unitária da variável principal, do problema Primal que lhe está associado.

Fazendo uma interpretação económica do Exemplo 8, têm-se $Y^* = (\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 3; 0; 0)$. Quando o valor de b_1 aumenta uma unidade o valor de Z aumenta $\frac{3}{2}$. Se por acaso aumentar o recurso b_2 em uma unidade, Z aumenta $\frac{5}{2}$.

Capítulo 4

Introdução à Programação Linear Multiobjectivo

4.1 Introdução

Ao longo do nosso trabalho, até ao presente capítulo, procurámos resolver problemas de Programação Linear com uma única função objectivo. A Programação Linear Multiobjectivo (PLM) consiste em otimizar p funções objectivo em que a região admissível continua a ser definida por um conjunto de restrições lineares.

Alguns autores defendem que os problemas de PL do mundo real são multiobjectivo. De facto, em situações diversas deparamo-nos com variados problemas, que pressupõem escolher entre as alternativas viáveis a solução de melhor compromisso entre os diferentes objectivos.

Por exemplo, uma fábrica de mobiliário pretende determinar o plano de produção mensal para novos modelos de secretárias. Neste caso o problema pode ser formulado com dois objectivos, maximização da margem bruta (lucro) e a minimização de tempo de processamento (despesas).

Quando o problema é multiobjectivo a determinação das suas soluções é mais complexa em termos computacionais. Qualquer solução admissível apresenta determinados valores para as diferentes FO e, por isso, a passagem de uma solução para outra poderá encerrar um compromisso relativamente à optimização de cada FO.

A decisão multiobjectivo constitui uma área que tem atraído enorme atenção dada a sua importância como auxiliar dos decisores na pesquisa da melhor solução de compromisso e dadas as múltiplas aplicações a problemas reais.

4.2 Programação Linear Multiobjectivo

Na presente secção iremos apresentar alguns conceitos e propriedades que utilizaremos ao longo deste capítulo.

Num problema com objectivo único o que se procura é a solução óptima. Nos problemas de optimização multiobjectivo uma solução admissível que optimize um dos objectivos não otimiza necessariamente os restantes objectivos.

O conceito de não dominância que introduziremos de seguida, que encontra as suas raízes no óptimo de Pareto, desempenha na decisão multiobjectivo um papel fundamental (de tal forma como o óptimo nas funções com único objectivo), uma vez que é baseada naquela que seja melhor em relação às p FO, que pode ser obtida num subconjunto do conjunto das soluções admissíveis.

Vejam os então as seguintes definições dos conceitos chave em PLM, assumindo que todas as p funções objetivo (z_1^k, \dots, z_p^k) são de maximização, as m restrições são lineares e as variáveis de decisão são contínuas.

Definição 1. [Ramallete, 1985] Sejam $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ e $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ duas soluções admissíveis dum problema de decisão multiobjectivo. A solução x domina a solução y se e só se $z_k(x_1, \dots, x_n) \geq z_k(y_1, \dots, y_n)$ para qualquer $k = 1, \dots, p$ e $z_k(x_1, \dots, x_n) > z_k(y_1, \dots, y_n)$ para algum k , com $k = 1, \dots, p$.

Definição 2. [Ramallete, 1985] (Não dominância). Seja $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ uma solução admissível dum problema de decisão multiobjectivo. A solução x diz-se não dominada se não existir qualquer outra solução admissível, $y = [y_1, \dots, y_n]^T$, que domine x .

Definição 3. [Ramallete, 1985] Sejam $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ e $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ duas soluções admissíveis dum problema de decisão multiobjectivo. As duas soluções dizem-se não comparáveis se não se verificar a dominância de y por x nem a dominância de x por y .

Na resolução dos problemas de Programação Linear Multiobjectivo é sobre o conjunto das soluções não dominadas que deve recair a atenção do analista e do decisor, pois se não existem soluções que as dominem então só conseguimos melhorar um objectivo piorando pelo menos um dos outros.

Formulação do Problema Linear Multiobjectivo

Um modelo linear multiobjectivo tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max(Min)} & z(x_1, \dots, x_n) = [z^1(x_1, \dots, x_n), \dots, z^p(x_1, \dots, x_n)] \\
 \text{s.a} & a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1q}x_q \{ \leq, =, \geq \} b_1 \\
 & a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2q}x_q \{ \leq, =, \geq \} b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{iq}x_q \{ \leq, =, \geq \} b_i \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mq}x_q \{ \leq, =, \geq \} b_m \\
 & x_1, x_2, \dots, x_q \geq 0
 \end{array}$$

Num problema de PLM, o conjunto das soluções não dominadas é representado por S_D . Estas soluções podem ser exploradas utilizando a resolução gráfica se $q \leq 3$ ou através do Algoritmo Simplex Multiobjectivo.

4.3 Resolução de Problemas Multiobjectivo

Nesta secção abordamos o Algoritmo Simplex Multiobjectivo, generalização do método Simplex Primal. Para melhor compreensão do método, começa-se por um exemplo simples com duas variáveis de decisão e duas funções objectivo por forma a possibilitar a representação gráfica.

Exemplo 9. Seja um problema de PLM.

$$\begin{aligned} \text{Max } z(x_1, x_2) &= [5x_1 + 4x_2, \frac{1}{2}x_1 + 4x_2] \\ \text{s.a } & x_1 - x_2 \leq 10 \\ & x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 40 \\ & x_1 + \frac{5}{2}x_2 \leq 120 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Na figura 4.1 z^1 atinge o valor óptimo no ponto extremo $D(20; 40)$ e z^2 no ponto extremo $E(0; 48)$. Considerando o ponto F , onde determinadas curvas de nível das duas funções objectivo se cruzam, qualquer solução admissível da região a sombreado domina a solução associada ao ponto F , pois para qualquer ponto dessa região nenhum dos objectivos piora e pelo menos um melhora em relação aos valores respectivos atingidos no ponto F

O conjunto das soluções não dominadas S_D é a aresta ED , incluindo os pontos extremos E e D .

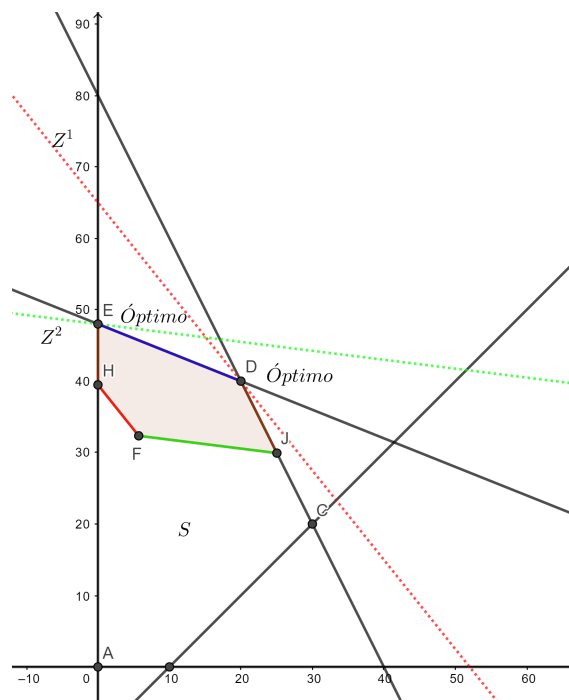


Figura 4.1: Conjunto das soluções não dominadas $S_D = \overline{ED}$

Algoritmo Simplex Multiobjectivo

O algoritmo Simplex Multiobjectivo em estudo, baseia-se nas seguintes propriedades:

Propriedade 1: Qualquer solução não dominada de um problema de PLM pode ser expressa como combinação linear convexa de soluções básicas admissíveis não dominadas.

Propriedade 2: O conjunto das soluções básicas admissíveis não dominadas de um problema de PLM é um conjunto convexo, isto é, qualquer solução pode ser obtida a partir de outra por meio de um número finito de iterações do Simplex.

Nesta secção vamos utilizar o Algoritmo Simplex Primal para resolver problemas Multiobjectivo, visando a identificação de todas as soluções básicas admissíveis não dominadas a partir das solu-

ções óptimas das p funções objectivo. Daqui em diante assumimos que todas as FO do problema são de maximização.

Tal como já foi visto, no passo inicial verificamos se para a FO k se tem $\{z_l^k - c_l^k\} = \min\{z_l^k - c_l^k\} \geq 0$. Em caso afirmativo, o algoritmo termina com uma solução óptima para a função objectivo k . Caso contrário, se $z_l^k - c_l^k < 0$, então x_l entra na base.

O valor máximo com que x_l pode entrar para a base determina a variável que sai da base, x_r , de acordo com o critério:

$$x_l = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rl}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{il}} : \bar{a}_{il} > 0 \right\}$$

Seguem-se três resultados teóricos:

Teorema 4.1. *Dada uma solução básica admissível, x , e admitindo que $\exists A_l \notin B : x_l = 0$, (onde B é a base associada a x)*

- (a) *se $\forall k, z_l^k - c_l^k \leq 0$ e $\exists k : z_l^k - c_l^k < 0$, então $x \notin S_D$ (não piora nenhum dos objectivos e melhora um deles)*
- (b) *se $\forall k, z_l^k - c_l^k \geq 0$ e $\exists k : z_l^k - c_l^k > 0$, então a introdução do vector A_l na base conduzirá a uma solução dominada por x .*

Demonstração. (a) A introdução de A_l na base conduz a uma SBA adjacente, y , onde as funções objectivo tomam os valores

$$z^k = z_0^k - (z_l^k - c_l^k)x_l, \quad k = 1, \dots, p,$$

Como, por hipótese, se verifica que $\forall k, z_l^k - c_l^k \leq 0$ e $\exists k : z_l^k - c_l^k < 0$, então para todo $k, z^k \geq z_0^k$ e existe um k , tal que, $z^k > z_0^k$. Assim a solução y domina a solução x , pelo que $x \notin S_D$

(b) Neste caso, atendendo às hipóteses conclui-se de forma análoga que com a introdução do vector A_l na base se obtém uma solução dominada por x . \square

Com base no teorema apresentado podemos afirmar que a introdução de uma variável na base sem que nenhum dos objectivos piore e pelo menos um melhore, então essa solução básica adjacente domina a solução básica em presença.

Teorema 4.2. *Dada uma solução básica admissível, x , se existirem dois vectores, A_{l1} e A_{l2} , fora da base tais que:*

$$\forall k, x_l^{j1}(z_{l1}^k - c_{l1}^k) \leq x_l^{j2}(z_{l2}^k - c_{l2}^k) < 0 \text{ e}$$

$$\exists k : x_l^{j1}(z_{l1}^k - c_{l1}^k) < x_l^{j2}(z_{l2}^k - c_{l2}^k) < 0$$

então a SBA resultante da entrada de A_{l1} na base domina a SBA resultante de entrada de A_{l2} na base.

Demonstração. Ao introduzir A_{l1} na base conduz a uma SBA adjacente, y_1 , em que

$$z_1^k = z_0^k - x_l^{j1}(z_{l1}^k - c_{l1}^k).$$

A_{l2} entra na base obtemos uma outra SBA adjacente, y_2 , em que

$$z_2^k = z_0^k - x_l^{j2}(z_{l2} - z_2^k)$$

Tendo em conta as hipóteses verifica-se que para todo k , $z_1^k \geq z_2^k$ e existe um k , tal que $z_1^k > z_2^k$. Logo a solução y_1 domina a solução y_2 .

□

O teorema em causa, permite considerar apenas a SBA adjacente que domina a outra, admitindo a possibilidade de explorar sequencialmente as SBA das p objectivo, desde que não seja não dominada.

Teorema 4.3 (Teste de Não Dominância). *Seja o seguinte problema de PL associado ao problema geral de PLM:*

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = \sum_k \varepsilon_k \\ \text{s.a} \quad & \sum_j c_j^k x_j - \varepsilon_k = \sum_j c_j^k x_{j0}, \quad k = 1, \dots, p \\ & \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \varepsilon_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

em que $x_0 = [x_{10}, \dots, x_{n0}]$ representa uma SBA do problema de PLM.

Tem-se:

(a) $x_0 \notin S_D$ se e só se $z^* > 0$

(b) $x_0 \in S_D$ se e só se $z^* = 0$

Demonstração. Considerando x_0 SBA do problema de PLM, Admita-se por hipótese que nenhuma FO atinge o máximo relativamente ao ponto x .

Sabendo que as SBA adjacentes são não comparáveis tem-se:

$\sum c_j^k x_j \geq \sum c_j^k x_{j0}$ (são p restrições adicionais), onde $\sum c_j^k x_j$ (representa valores das p FO no ponto x_0), então

$\sum c_j^k x_j - \sum c_j^k x_{j0} = \varepsilon_k$, sendo ε_k variáveis desvio que permite escrever o problema na forma padrão.

$Ax = b$, ou seja $Ax_0 = b, x_0 \geq 0$

(a) x constitui uma SBA do problema para o sistema $Ax_0 = b$ sendo as p restrições, na forma padrão $\varepsilon_k = 0$.

Logo $x_0 \notin S_D$ (não existe um subconjunto de p FO que pertença a solução de compromisso) se e só se $z^* > 0$ e x_0 pertence ao conjunto das soluções dominadas.

(b) Supondo que x_0 seja uma solução óptima (existe um subconjunto de p FO que pertença a solução de compromisso), isto é $z = 0$, para todos $\varepsilon_k = 0$ (não é possível melhorar nenhuma função objectivo em relação a x_0, z^k).

Logo $x_0 \in S_D$, significa que não existe outra solução admissível que domina x_0 , se e só se $z = 0$

□

O teste de não dominância é aplicado a uma SBA do problema de PLM, quando nenhuma das p funções objectivo atinge o seu máximo e as SBA adjacentes são não comparáveis.

O Algoritmo Simplex, utilizado nos modelos de optimização com p funções objectivos, procede apenas à identificação de todas as SBA não dominadas. Considerando de novo o **Exemplo 9**.

$$\begin{aligned} \text{Max } z(x_1, x_2) &= [5x_1 + 4x_2, \frac{1}{2}x_1 + 4x_2] \\ \text{s.a. } \quad x_1 - x_2 &\leq 10 \\ \quad x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\leq 40 \\ \quad x_1 + \frac{5}{2}x_2 &\leq 120 \\ \quad x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aplicando o algoritmo Simplex em ordem à primeira função objectivo têm-se:

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_3	1	-1	1	0	0	10
x_4	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	40
x_5	1	$\frac{5}{2}$	0	0	1	120
$z_l^1 - c_l^1$	-5	-4	0	0	0	0
$z_l^2 - c_l^2$	$-\frac{1}{2}$	-4	0	0	0	0

As operações pivotais do presente quadro são análogas dos anteriores. Por esse motivo vamos apresentar apenas os quadros ótimos de cada uma das FO

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_1	1	0	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	20
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	40
x_3	0	0	1	$-\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	30
$z_l^1 - c_l^1$	0	0	0	$\frac{17}{4}$	$\frac{3}{4}$	260
$z_l^2 - c_l^2$	0	0	0	$-\frac{11}{8}$	$\frac{15}{8}$	170

Estamos diante de um quadro ótimo para Z^1 . $x^* = [20; 40; 30; 0; 0]^T$ é uma solução não dominada com $Z^1 = 260$, porque não existem soluções ótimas alternativas.

Tendo em conta o quadro anterior, a SBA em presença é não dominada (porque nenhuma das duas SBA's adjacentes a domina) e não comparável com SBA adjacente correspondente à entrada de x_4 na base. Para tal vamos dar sequência aos valores não explorados em ordem à segunda função objectivo.

O menor valor da linha $\{z_l^2 - c_l^2\} = -\frac{11}{8} \not\geq 0$. Não é uma SBA ótima e x_4 é candidata a entrar na base.

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_4	$\frac{4}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	16
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{5}$	48
x_3	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{5}$	58
$z_l^1 - c_l^1$	$-\frac{17}{3}$	0	0	0	$\frac{37}{20}$	192
$z_l^2 - c_l^2$	$\frac{11}{10}$	0	0	0	$\frac{8}{5}$	192

Programação Linear, Um Manual para o Professor

Finalmente o exercício termina com um quadro óptimo para Z^2 .

$x^* = [0; 48; 58; 16; 0]^T$, é uma solução não dominada com $Z^2 = 192$, porque não existe outra solução admissível que seja igual ou melhor nas duas funções objectivo.

No caso de um problema Monobjectivo, é sempre possível determinar uma solução óptima, ou simplesmente provar que não há solução. No entanto, nos problemas de PLM poderá não haver uma solução que optimize as p funções objectivo simultaneamente, pelo que é necessário ter em conta a exposição introdutória feita neste capítulo para poder auxiliar a tomada de decisão.

Bibliografia

- [Alves, 2003] Alves, M.J.G. Antunes, C. H. . C. J. N. (2003). *Programação Linear Multiobjetivo*. Imprensa da Universidade de Coimbra. 1
- [Barrico,] Barrico, M. *Sebenta de Investigação Operacional*. UBI. 1
- [Bazaraa, 2010] Bazaraa, M. S. Jarvis, J. . S. H. (2010). *Linear Programming and Network Flow, Fourth Edition*. John Wiley Sons, Inc. 1
- [Cipra, 2000] Cipra, B. A. (2000). The best of the 20th century: Editors name top 10 algorithms. 33(4):1-2. 1
- [Hillier, 2015] Hillier, F. S. Lieberman, G. J. (2015). *Introduction to Operations Researc, Tenth Edition*. McGraw-Hill Education, New York. 1, 8
- [Luenberger, 2008] Luenberger, D. G. Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming, Third Edition*. Springer Science, New York,. 1, 10
- [Pereira, 2019] Pereira, F. M. T. (2018/2019). *Apontamentos de Investigação Operacional*. UBI. 1, 6, 34
- [Ramalhete, 1985] Ramalhete, M. Magalhães, A. . G. J. (1985). *Programação Linear*, volume I e II. McGraw-Hill de Portugal. 1, 3, 8, 10, 35, 44

