



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Engenharia

**Modelação e Controlo Robusto da Dinâmica da
Atitude de Quadrotores
(versão final após defesa)**

Adriano Jorge Brum

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Aeronáutica
(Ciclo de Estudos Integrado)

Orientador: Prof. Doutor Kouamana Bousson

Covilhã, dezembro de 2018

”Nunca andes pelo caminho traçado, pois ele conduz somente aonde outros já foram.”

Alexander Graham Bell

Agradecimentos

Com a conclusão desta dissertação, apenas me resta agradecer a todas as pessoas a quem têm esse direito. Sendo assim, quero agradecer em primeiro lugar ao meu orientador científico Professor Doutor Kouamana Bousson, por todo o seu apoio e contribuição neste trabalho. Em segundo lugar, quero também agradecer ao Engenheiro Gomes Mota por me ter dado a oportunidade de trabalhar mutuamente com a empresa Albatroz Engenharia® e por toda confiança no trabalho a que já estava sendo desenvolvido.

Quero igualmente agradecer aos meus pais, irmã, avó, tios e primos por todo o apoio incondicional, paciência e crença nas minhas capacidades para a conclusão desta dissertação. Agradeço também por todo o carinho e dedicação que me forneceram ao longo da minha vida e por me terem tornado na pessoa a que hoje sou. Quero deixar o meu muito obrigado aos meus amigos que sempre me acompanharam nesta vida académica nos bons e maus momentos, acreditando e apoiando-me de modo a permitir alcançar os meus objetivos. Agradecendo ao meus colegas de laboratório António Costa e Pedro Barros por todo o apoio e companheirismo durante o desenvolvimento desta dissertação. Não esqueço também aos meus amigos da banda Filarmónica União Ribeirense por terem sempre transmitido um apoio emocional, psicológico e de amizade, e por acreditarem sempre nas minhas capacidades tanto a nível profissional como pessoal.

Para finalizar, não poderia deixar de agradecer à minha namorada por ter estado sempre presente nos momentos mais complicados desta vida académica, pela paciência, confiança e amor durante estes últimos anos.

A todos o meu muito obrigado do coração...

Resumo

A inspeção de linhas elétricas é uma atividade essencial para o bom funcionamento e fornecimento de energia aos seus consumidores. Esta inspeção é efetuada por veículos aéreos tripulados, sobretudo helicópteros mas tem como desvantagens estes serem veículos de custo elevado na sua aquisição e operação. Os motores dos veículos não tripulados atuais do tipo *quadrotor* são maioritariamente controlados por controladores rudimentares, essencialmente PID. Com um controlador robusto designado para este tipo de veículos será possível obter um incremento na performance da aquisição de dados durante a inspeção de linhas elétricas.

Esta dissertação tem foco num controlador robusto das atitudes de arfagem, rolamento e guiada de um *quadrotor* com o objetivo de este ser utilizado no ramo da inspeção de linhas elétricas de alta e média tensão. Foram considerados variados tipos de controladores para esta dissertação, mas sendo esta apenas focada no controlo mais favorável para este tipo de veículo. Para ilustração do problema de controlo foram usadas duas missões provenientes de voos físicos de modo a simular o sistema de controlo e o comparar com o atualmente instalado.

Variadas simulações são apresentadas neste trabalho, como simulações baseadas num vetor de referência de um voo físico e por referência estipulada de modo a garantir a estabilidade do sistema de controlo durante a missão de inspeção das linhas. O controlador projetado neste trabalho tem a particularidade de ter matrizes de definição do vetor de estado dependentes desse vetor, e não constantes como é mais habitual, criando assim uma situação de modelação de controlo constante ao longo do tempo de operação.

Foram efetuados estudos alternativos para tratamento de dados, filtragem de Kalman-Bucy, suavização das curvas de referência dos voos físicos e iteração das diagonais das matrizes Q e R com base no método de Bryson Modificado de modo a garantir o máximo desempenho de controlo considerando todos as limitações estruturais e dinâmicas do veículo.

Palavras-chave

Atitude, Controlo, Filtragem, Kalman-Bucy, LQR, Quadrotor Robusto, UAV

Abstract

Electric lines inspection is an essential activity for their proper operation and energy supply to consumers. This inspection is made by helicopters but with disadvantages associated, namely being expensive vehicles in their acquisition and operation. The implementation of unmanned aerial vehicles to the electric lines inspections avoid the latest referred implications, due to the low cost of equipment acquisition and operation, being these vehicles able to be operated remotely or autonomously.

Nowadays, the unmanned aerial vehicles quadrotor are essentially controlled by rudimentary controllers as PID. The implementation of a robust controller in this type of vehicle allows an increase of the data acquisition performance during the electric lines inspection.

The proposed work is focused on the implementation of a robust controller in a quadrotor, with the objective to be used in the inspection of electric lines of high and medium voltage. Multiple types of controllers were considered for this work, but there were just mentioned the most favourable ones for this type of vehicle. To show the controller problem, there were used two physical missions to simulate the controller and to compare with the one installed on the quadrotor control equipment.

Multiple simulations are presented in this work, such as simulations based on a physical flight reference vector and also a stipulated reference, to ensure the control system stability during the inspection missions. The controller designed in this work has the particularity that the state vector definition matrices are not constant during the flight time and depend on this same vector thus creating a situation of constant control modulation over time.

Several additional studies were made for data processing such as Kalman-Bucy filtration, reference curve smoothing from the physical flights and matrices Q and R diagonals iteration based on Modified Bryson method to ensure the maximum performance of control considering all the structural and dynamics limitations of the vehicle.

Keywords

Attitude, Control, Filtration, Kalman-Bucy, LQR, Quadrotor, Robust, UAV

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Teoria do Controlo	2
1.1.1	Controlo Proporcional Integral Derivativo	2
1.1.2	Controlador Regulador Linear Quadrático	4
1.1.3	Controlador <i>Sliding Mode</i>	7
1.1.4	Controlador H_∞	10
1.1.5	Análise Crítica do Estado de Arte	11
1.2	Objetivos	12
1.3	Estrutura do Trabalho	13
2	Modelação do Sistema	15
2.1	Funcionamento Geral	15
2.2	Modelação Matemática	17
2.2.1	Modelação da dinâmica e cinemática do <i>quadrotor</i>	17
2.2.2	Conversão de quatérnios para ângulos de Euler	21
2.2.3	Dinâmica do sistema Motor/Hélice	23
2.2.4	Momentos de Inércia	24
2.3	Generalização do Equipamento	25
2.3.1	Equipamento Constituinte do Veículo	25
2.3.2	<i>Firmware</i> Base de Controlo	26
3	Aquisição e Processamento de Dados	29
3.1	Aquisição e Modelação dos Dados	29
3.1.1	Dados Utilizados	29
3.2	Identificação da Plataforma de Voo	32
3.2.1	Momentos de Inércia	32
3.3	Filtragem Kalman-Bucy	34
3.3.1	Modelação do Filtro Kalman-Bucy	34
4	Modelação do Controlo e Simulação	39
4.1	Modelo Geral	39
4.2	Identificação do Modelo de Controlo	42
4.3	Tratamento dos Dados de Referência	43
4.4	Simulação com Referências Físicas	45
4.5	Simulação de Referência Estipulada	52
5	Conclusão e Discussão	59
5.1	Contribuições	59
5.2	Trabalhos Futuros	60
	Bibliografia	63
A	Algoritmos Matemáticos Auxiliares	67
A.1	Algoritmo de Butcher	67
A.2	Algoritmo de Euler Modificado	67

B Tratamento da Referência	69
C Simulação do Voo Físico Completo	71
D Simulação do Segundo Voo Físico	77

Lista de Figuras

1.1	Quadrotor Hummingbird [1].	1
1.2	Comparação da atuação de dois tipos de controlo: robusto a linha contínua e não robusto a traço interrompido.	2
1.3	Diagrama do funcionamento de um controlador PID. $x(t)$ designa o estado objetivo e $y(t)$ o estado real.	3
1.4	Configuração Geral de um Sistema com Realimentação [2].	10
2.1	Diagrama do movimento vertical do equipamento e da variação da rotação dos motores [3].	16
2.2	Diagrama do movimento translação do equipamento e da variação da rotação dos motores paralelos à direção do movimento [3].	16
2.3	Diagrama do movimento de rotação do equipamento e do défice de rotação entre os motores [3].	16
2.4	Diagrama do referencial de corpo rígido, inercial do equipamento e a referência terrestre.	17
2.5	Diagrama do referencial inercial do veículo.	18
2.6	Diagrama de corpo rígido do equipamento.	18
2.7	Motor T-Motor U8 170Kv. [4]	26
3.1	Arfagem do primeiro voo do quadrotor Spyro - 02/06/2017	30
3.2	Rolamento do primeiro voo do quadrotor Spyro - 02/06/2017	30
3.3	Guinada do primeiro voo do quadrotor Spyro - 02/06/2017	30
3.4	Arfagem do segundo voo do quadrotor Spyro - 02/06/2017	31
3.5	Rolamento do segundo voo do quadrotor Spyro - 02/06/2017	31
3.6	Guinada do segundo voo do quadrotor Spyro - 02/06/2017	31
3.7	Diagrama demonstrativo da distância entre o atuador e o CG da estrutura.	32
3.8	Diagrama representativo do funcionamento base do algoritmo do Filtro de Kalman-Bucy com controlo LQR Robusto.	34
3.9	Gráfico de comparação da atitude de Arfagem do veículo filtrada e não filtrada.	36
3.10	Gráfico de comparação da atitude de Rolamento do veículo filtrada e não filtrada.	37
3.11	Gráfico de comparação da atitude de Guinada do veículo filtrada e não filtrada.	37
4.1	Configuração da disposição dos motores e do sentido de rotação dos motores.	40
4.2	Diagrama de blocos da implementação do pré filtro no sistema de controlo.	44
4.3	Gráfico em função do tempo, representando a comparação entre a referência bruta do voo físico e a referência tratada.	44
4.4	Atitude de Rolamento simulada com referência de um voo físico.	45
4.5	Sinal de controlo da atitude de Rolamento do veículo.	46
4.6	Comparação entre a atitude de Rolamento simulada e a do voo físico.	46
4.7	Taxa de Arfagem simulada com referência de um voo físico.	47
4.8	Comparação da taxa de atitude de Rolamento do quadrotor do voo simulado e do voo físico.	47
4.9	Atitude de Arfagem Simulada com referência de um voo físico.	47
4.10	Sinal de controlo da Atitude de Arfagem do veículo.	48

4.11	Comparação entre o Rolamento simulado e o do voo físico.	48
4.12	Taxa de Pranchamento simulada com referência de um voo físico.	49
4.13	Comparação da taxa de atitude de Arfagem do <i>quadrotor</i> do voo simulado e do voo físico.	49
4.14	Guinada Simulada com referência de um voo físico.	49
4.15	Sinal de controlo da Guinada do veículo.	50
4.16	Comparação entre a Guinada simulada e a do voo físico.	50
4.17	Taxa de Guinada simulada com referência de um voo físico.	51
4.18	Comparação da taxa de atitude de Guinada do <i>quadrotor</i> do voo simulado e do voo físico.	51
4.19	Gráfico em função do tempo com a atitude de Arfagem filtrada e sua referência.	52
4.20	Gráfico em função do tempo com a atitude de Rolamento filtrado e sua referência.	53
4.21	Gráfico em função do tempo com a atitude de Guinada filtrada e sua referência.	53
4.22	Gráfico de controlo da atitude de Arfagem em função do tempo.	53
4.23	Gráfico de controlo da atitude de Rolamento em função do tempo.	54
4.24	Gráfico de controlo da atitude de Guinada em função do tempo.	54
4.25	Gráfico da taxa da atitude de Arfagem em função do tempo.	54
4.26	Gráfico da taxa da atitude de Rolamento em função do tempo.	55
4.27	Gráfico da taxa da atitude de Guinada em função do tempo.	55
4.28	Gráfico da atitude da Arfagem com referência no intervalo de tempo [9, 16]s.	56
4.29	Gráfico da atitude de Rolamento com referência no intervalo de tempo [60, 220]s.	56
4.30	Gráfico da atitude de Guinada com referência no intervalo de tempo [130, 210]s.	57
B.1	Gráfico em função do tempo, representando a comparação entre a referência bruta da atitude de Rolamento física e a referência tratada.	69
B.2	Gráfico em função do tempo, representando a comparação entre a referência bruta da atitude de Arfagem físico e a referência tratada.	69
B.3	Gráfico em função do tempo, representando a comparação entre a referência bruta da Guinada física e a referência tratada.	70
C.1	Atitude de Rolamento Simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.	71
C.2	Sinal de controlo da atitude de Rolamento do veículo de uma simulação com duração de 300s.	71
C.3	Comparação entre a atitude de Rolamento simulada e a do voo físico completo com duração de 300s.	72
C.4	Taxa de Pranchamento simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.	72
C.5	Comparação da taxa de Pranchamento do <i>quadrotor</i> do voo simulado e do voo físico completo com duração de 300s.	73
C.6	Atitude de Arfagem Simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.	73
C.7	Sinal de controlo da atitude de Arfagem do veículo de uma simulação com duração de 300s.	73
C.8	Comparação entre a atitude de Arfagem simulada e o do voo físico com duração de 300s.	74
C.9	Taxa de Arfagem simulada com referência de um voo físico com duração e 300s.	74

C.10	Comparação da taxa de Arfagem do <i>quadrotor</i> do voo simulado e do voo físico com duração de 300s.	74
C.11	Guinada Simulada com referência de um voo físico com duração de 300s.	75
C.12	Sinal de controlo da Guinada do veículo de uma simulação com duração de 300s.	75
C.13	Comparação entre a Guinada simulada e a do voo físico com duração de 300s.	75
C.14	Taxa de Guinada simulada com referência de um voo físico com duração de 300s.	76
C.15	Comparação da taxa de atitude de Guinada do <i>quadrotor</i> do voo simulado e do voo físico com duração de 300s.	76
D.1	Atitude de Rolamento Simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.	77
D.2	Sinal de controlo da atitude de Rolamento do veículo de uma simulação com duração de 300s.	77
D.3	Comparação entre a atitude de Rolamento simulada e a do voo físico completo com duração de 300s.	78
D.4	Taxa de Pranchamento simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.	78
D.5	Comparação da taxa de Pranchamento do <i>quadrotor</i> do voo simulado e do voo físico completo com duração de 300s.	79
D.6	Atitude de Arfagem Simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.	79
D.7	Sinal de controlo da atitude de Arfagem do veículo de uma simulação com duração de 300s.	79
D.8	Comparação entre a atitude de Arfagem simulada e o do voo físico com duração de 300s.	80
D.9	Taxa de Arfagem simulada com referência de um voo físico com duração e 300s.	80
D.10	Comparação da taxa de Arfagem do <i>quadrotor</i> do voo simulado e do voo físico com duração de 300s.	80
D.11	Guinada Simulada com referência de um voo físico com duração de 300s.	81
D.12	Sinal de controlo da Guinada do veículo de uma simulação com duração de 300s.	81
D.13	Comparação entre a Guinada simulada e a do voo físico com duração de 300s.	81
D.14	Taxa de Guinada simulada com referência de um voo físico com duração de 300s.	82
D.15	Comparação da taxa de atitude de Guinada do <i>quadrotor</i> do voo simulado e do voo físico com duração de 300s.	82

Lista de Tabelas

2.1	Especificações técnicas da plataforma de estudo deste trabalho.	25
3.1	Características do <i>quadrotor</i>	32

Lista de Acrónimos

AHRS	Attitude and Heading Reference System
CG	Centro de Gravidade
CPU	Central Processing Unit
EKF	Extended Kalman Filter
ESC	Eletronic Speed Controller
IMU	Inertial measurement unit
LiDAR	Laser Imaging Detection and Ranging
LiPo	Lithium Polymer Battery
LQ	Linear-Quadratic
LQG	Linear-Quadratic Gaussian
LQR	Linear-Quadratic Regulator
LTR	Loop Transfer Recovery
MIMO	Múltiplas Entradas e Saídas
PD	Proportional-Derivative
PID	Proportional-Integral-Derivative
PWM	Pulse Width Modulation
SMC	Sliding Mode Control
UAV	Unmanned Aerial Vehicle

Nomenclatura

K_p	Ganho Proporcional
K_i	Ganho Integral
K_d	Ganho Derivativo
m	Massa do equipamento
W	Peso do equipamento
θ	Ângulo de arfagem
ϕ	Ângulo de pranchamento
ψ	Ângulo de guinada
τ	Binário do motor
ρ	Massa específica do ar
$\dot{\theta}$	Taxa de arfagem
$\dot{\phi}$	Taxa de pranchamento
$\dot{\psi}$	Taxa de guinada
η_i	Quaterniões ($i = 1, \dots, 4$)
p, q, r	Taxas angulares
δ	Varição de acelerador
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	Momentos de inércia do equipamento no referente eixo
J_r	Momento de inércia do motor
F_i	Força de sustentação produzida por cada motor $i = (1, \dots, 4)$
C_P	Coefficiente de Potência
C_T	Coefficiente de Tração
ω	Velocidade angular do rotor
J	Razão de avanço do disco propulsivo
\dot{x}	Modelo de Estado
x	Vetor de Estado
A	Matriz de Estado
B	Matriz de Controle
u	Vetor de Controle
K	Matriz de Ganho de Controle

Capítulo 1

Introdução

Aeronaves não tripuladas são equipamentos de pequenas dimensões e com variadas competências nos tempos atuais. Estes equipamentos tem a capacidade de substituir algumas funções das aeronaves tripuladas, como aplicações na segurança, inspeção de infra-estruturas, fotografia, reconstrução 3D e agricultura. Devido à grande procura deste tipo de veículo e à sua integração no espaço aéreo, é necessário certificar que estes são operados em segurança. Variados trabalhos tem sido desenvolvidos, como a aplicação de sistemas anti-colisão em UAV permitindo assim um incremento no desempenho da gestão e segurança no espaço aéreo partilhado por aeronaves tripuladas [5].



Figura 1.1: *Quadrotor* Hummingbird [1].

Neste trabalho serão abordados equipamentos denominados de *quadrotor*. Estes equipamentos são sistemas aerodinâmicos com múltiplas entradas e saídas de controlo (MIMO) com uma dinâmica de seis graus de liberdade (três de translação e três de rotação) e quatro motores. *Quadrotor* é um helicóptero com quatro rotores igualmente distanciados, normalmente encontrados nos vértices de uma estrutura quadrada. Com os quatro motores independentes, é desnecessário o uso dos mecanismos do prato coletivo e cíclico para a mudança de atitude presentes nas aeronaves de asa rotativa. As entradas de sinal do sistema consistem no controlo da velocidade angular dos motores (atuadores), com o controlo da tensão de alimentação dos mesmos [6]. Até muito recentemente, o desenvolvimento destes equipamentos tem estado parado devido ao controlo de quatro atuadores independentes se ter demonstrado excessivamente complexo e de impossível operação sem assistência eletrónica. Atualmente, o desenvolvimento e operação destes equipamentos têm tido um crescimento acentuado tirando partido do decréscimo do custo dos microprocessadores modernos.

O controlo destes equipamentos é um problema fundamentalmente difícil e interessante. Com seis graus de liberdade, a dinâmica de controlo deste equipamento é fortemente não linear, influenciada essencialmente pelos complexos efeitos aerodinâmicos [6]. A atitude do equipamento é representada através dos ângulos de Euler (ϕ , θ e ψ), cada ângulo pode ser alterado através dos diferenciais de rotação dos motores [7].

Considerando todos estes fatores, temos em mãos um sistema bastante interessante e complexo para a aplicação do controlador Regulador Linear Quadrático.

1.1 Teoria do Controlo

Todos os equipamentos que dependem de valores fornecidos por sensores e geram movimento autónomo necessitam de meios de controlo de forma a garantir a sua estabilidade e desempenho. Considerando o caso das aeronaves, as suas aplicações podem ser processadas e tratadas por sistemas controladores constituintes dos aviónicos [2].

Atualmente existe uma variedade de controladores como PID (subsecção 1.1.1), LQR (subsecção 1.1.2), SMC (subsecção 1.1.3) e H_∞ (subsecção 1.1.4). O controlador com uma maior incidência de utilização é o PID devido à sua baixa complexidade, custo de aplicação e processamento.

O controlo robusto, atualmente, é uma área de investigação muito popular. Este tem a finalidade de ser aplicado num sistema que é explicitamente constituído num modelo de sistema impreciso [8], ou seja, podemos definir o controlo robusto como sendo um ramo da teoria de controlo que lida com as incertezas entre o modelo real e o modelo nominal usados para o projeto de sistemas de controlo. Um sistema para com um controlador robusto aplicado tem de cumprir as seguintes condições:

1. O sistema resiste às perturbações impostas à atitude retornando ao seu ponto de equilíbrio;
2. O sistema estabiliza mesmo em caso de perturbações;
3. Considerando o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, mas devido ao ambiente perturbador $\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u$, onde $\|A - \tilde{A}\| \leq \eta_1$ e $\|B - \tilde{B}\| \leq \eta_2$, o sistema será robusto se este conseguir controlar o sistema mesmo sem ter o modelo exato ou preciso do sistema. Isto é, mesmo que faltem parâmetros ou variáveis o sistema tem a capacidade de retomar o seu caminho.

Na Figura 1.2, a partir do tempo após a perturbação (t^*), pode-se verificar que o sistema baseado num controlo robusto consegue retornar à sua origem, tornando-se estável na sua posição de referência. Num sistema baseado em controlo não robusto, o sistema retoma a sua estabilidade, mas a uma posição fora da origem [2].

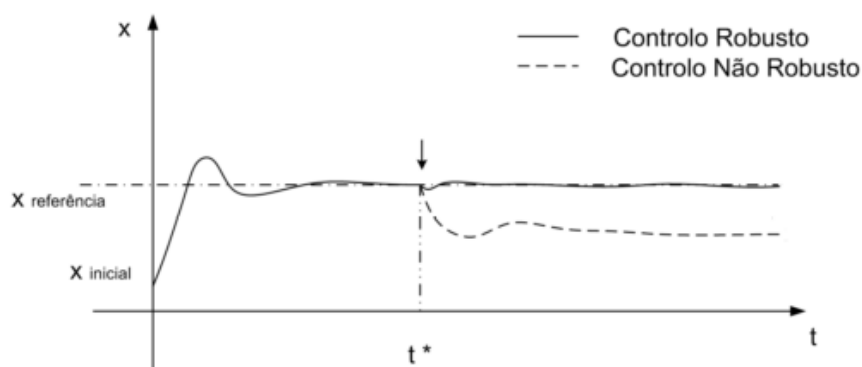


Figura 1.2: Comparação da atuação de dois tipos de controlo: robusto a linha contínua e não robusto a traço interrompido.

1.1.1 Controlo Proporcional Integral Derivativo

Antes da introdução do controlador PID, é relevante demonstrar o controlo PD. De acordo com [6], o controlo PD é bastante básico e consiste na componente proporcional do erro entre a trajetória desejada e a observada, e na componente proporcional da derivada desse mesmo erro.

Os controladores PD são bastante simples e de fácil implementação, mas estes são inadequados para a maioria dos sistemas mecânicos de controlo, especialmente na presença de ruído e perturbações, estes controladores irão tender para um erro de estado na estabilização dinâmica do sistema.

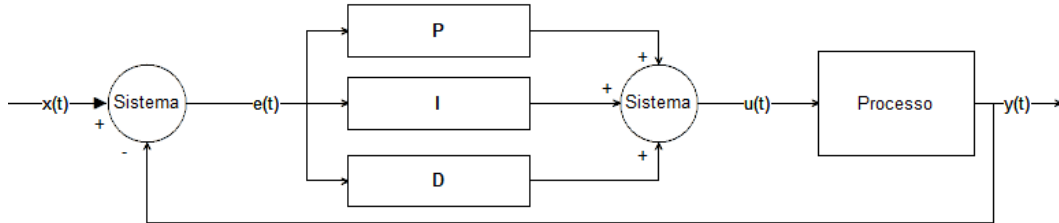


Figura 1.3: Diagrama do funcionamento de um controlador PID. $x(t)$ designa o estado objetivo e $y(t)$ o estado real.

Introduzindo os controladores PID, e baseando no trabalho efetuado em [6], estes são derivados dos controladores PD, mas com a adição de um termo que é proporcional ao integral da variável do processo. Adicionando um termo integral ao sistema, este ganha a capacidade de alterar o sinal com a presença de qualquer erro no vetor de estado estabilizado, e implementando uma mudança nesse mesmo estado. O controlador PID tem a capacidade de acompanhar a trajetória com um erro reduzido no vetor de estado estabilizado, sendo os erros das atitudes do veículo determinadas através das equações:

$$e_\phi = K_d \dot{\phi} + K_d \int_0^T \dot{\phi} dt + K_i \int_0^T \int_0^T \dot{\phi} dt dt \quad (1.1)$$

$$e_\theta = K_d \dot{\theta} + K_d \int_0^T \dot{\theta} dt + K_i \int_0^T \int_0^T \dot{\theta} dt dt \quad (1.2)$$

$$e_\psi = K_d \dot{\psi} + K_d \int_0^T \dot{\psi} dt + K_i \int_0^T \int_0^T \dot{\psi} dt dt \quad (1.3)$$

Este controlador tem algumas falhas, sendo a mais comum conhecida pelo termo *integral windup* tendo origem na presença de grandes perturbações no processo de controlo do sistema, estas perturbações são integradas durante o tempo tornando-se num sinal de controlo de elevada amplitude (devido ao termo integral). Mesmo que o sistema estabilize, a componente integral é elevada, causando um efeito de sobre-elevação na curva de sinal do controlo. Esse efeito é o início de um comportamento com excursões entre máximos e mínimos irregulares, tornando o sistema instável ou, simplesmente, tomando um tempo extremamente longo para alcançar um vetor de estado estabilizado.

Neste controlador o desempenho do sistema é essencialmente dependente de três parâmetros sendo necessário especificá-los como o ganho proporcional K_p , o ganho integral K_i , e o ganho derivativo K_d . Estes ganhos são determinados pelo operador ou engenheiro de projeto, sendo uma tarefa complexa. Como as proporções desses ganhos é tão importante quanto a magnitude dos parâmetros em si, o ajuste destes parâmetros requer um conhecimento detalhado do sistema e das condições do ambiente em que o controlador será operado. Este método de ajuste é claramente indesejado, não só por ser complexo e intensivo (em alguns casos impossível), mas também porque o resultado dos ganhos não serão os ideais para obtenção do melhor desempe-

nho.

Através de simulação computacional, ou mesmo durante ensaios de voo, é possível a utilização do método de ajuste automático denominado por *extremum seeking* [9]. Existindo variados métodos, sendo apenas evidenciado o método utilizado em [6]. Este método consiste na definição aproximada dos ganhos ótimos do vetor de parâmetros $\theta = (K_p, k_i, K_d)$ que minimiza o custo de uma função $J(\theta)$. De acordo com [6], uma possível função de custo seria dada por:

$$J(\theta) = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} e(t, \theta)^2 dt \quad (1.4)$$

Na Equação 1.4 têm-se o parâmetro $e(t, \theta)$ definido como o erro dinâmico no seguimento de uma referência da trajetória com uma perturbação inicial usando parâmetros θ aleatórios.

Sabendo $J(\theta)$ é possível aproximar a derivada em relação a qualquer um dos ganhos numéricos:

$$\frac{\partial}{\partial K} J(\theta) \approx \frac{J(\theta + \delta \cdot \hat{u}_k) - J(\theta - \delta \cdot \hat{u}_k)}{2\delta} \quad (1.5)$$

A variável \hat{u}_k , na Equação 1.5, é o vetor unitário da direção K . Com $\delta \rightarrow 0$, esta aproximação da função de custo do desempenho aproxima-se do ponto ótimo de controlo. Usando esta aproximação é possível minimizar a função de custo de desempenho e alcançar os parâmetros de controlo ideais localmente. Este método consiste na atribuição aleatória de ganhos positivos, perturbar o sistema de um modo definido, avaliar a função de custo de desempenho, $J(\theta)$, simulando o sistema para diferentes parâmetros de controlo, e simular o gradiente da função. Portanto, usando o método da minimização de gradiente [10], é possível iterativamente otimizar os ganhos até obter uma convergência aceitável pelo operador. Esse método contém variados problemas. Um dos problemas resulta do ótimo encontrado ser um mínimo local, que apenas garante um bom desempenho de operação em condições muito específicas de funcionamento na vizinhança das condições de perturbação. Um outro problema, é o da definição aleatória dos parâmetros iniciais do controlador, provocando diferentes resultados sempre que é executada uma otimização. Também são efetuadas variadas otimizações para vários géneros de perturbações, sendo aplicados os ganhos médios de todas as otimizações efetuadas.

Este método de otimização automática dos parâmetros do controlador demonstra uma melhoria significativa no desempenho global. Essas melhorias incluem variações significativamente reduzidas, sobre-elevações reduzidas, e uma convergência ao vetor de estado objetivo mais instantânea. Contudo, o erro demora um tempo superior a convergir para um valor nulo com a otimização automática em comparação com a afinação manual do controlador, mas os parâmetros antecedentes da otimização são de melhor qualidade através do método da minimização da função gradiente (Equação 1.5).

1.1.2 Controlador Regulador Linear Quadrático

A evolução da teoria do controlo ótimo levou ao surgimento do Regulador Linear Quadrático que consiste na realimentação multi-variável do controlo, o que minimiza a variação do vetor de estado de um sistema com um esforço energético de controlo menor, aprimorando o desempenho do sistema. O LQR tem variadas aplicações tais como controlo de mísseis, controlo de aeronaves, controlo de veículos terrestres autónomos, sistema ABS e otimização da calibração

de controladores PID [11].

Nesta secção serão verificados, respetivamente, o LQR Clássico e Robusto.

Considerando um sistema dinâmico linear contínuo dado pelo modelo de estado e saída:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.6)$$

Na Equação 1.6 a sua nomenclatura é definida por [12]:

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Para a aplicação do controlador é necessário definir cuidadosamente um critério de desempenho ou custo de processamento, J , garantindo que o sistema se comporte do modo mais eficiente. A minimização do critério de desempenho é determinado através do vetor de controlo $u(t)$, sendo o critério de custo definido de variadas formas dependendo se o regime temporal é discreto ou contínuo. Para uma referência nula e de um intervalo de tempo semi-infinito, onde a função de custo tem matrizes de ponderação (matrizes Q e R) constantes, temos como equação de custo mínimo [13]:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru]dt \quad (1.7)$$

Nos reguladores lineares quadráticos interessa parametrizar o vetor de controlo como uma função linear do vetor de estado:

$$u = -Kx \quad (1.8)$$

Na Equação 1.8, K é uma matriz com m linhas e n colunas, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Para determinação do vetor de controlo u , é necessário conhecer a matriz de ganho da variável de controlo K de modo a minimizar o critério de desempenho J através da resolução da equação de *Riccati* (no caso estacionário) [14]:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (1.9)$$

Na Equação 1.9, a matriz Q é uma matriz real simétrica quadrática ($n \times n$) e positivamente semi-definida, sendo a matriz ponderação do vetor de estado. A matriz R é uma matriz real simétrica quadrática ($r \times r$) positivamente definida, sendo a matriz ponderação do vetor de controlo [12] [11]. A definição das matrizes referidas não é uma tarefa trivial. O problema de definição destas matrizes tem sido definido por variados métodos. Em geral, estas matrizes são determinadas por profissionais através de métodos de tentativa-erro, redefinindo os parâmetros até o sistema se encontrar na performance desejada. Os métodos tentativa-erro são funcionais para sistemas simples, mas não eficazes para qualquer sistema, seja simples ou multidimensional. O método de *Bryson* sugere que cada termo da diagonal das matrizes, Q e R , é o quadrado do inverso do valor máximo esperado para a variável (estado ou controlo) durante o tempo de simulação,

como indicado na Equação 1.10 [15].

$$Q = \text{diag}(Q_i) \Rightarrow Q_i = \frac{1}{x_{i_{max}}^2}; R = \text{diag}(R_i) \Rightarrow R_i = \frac{1}{u_{i_{max}}^2} \quad (1.10)$$

Nesta dissertação será abordado o método de Bryson Modificado, que é definido por:

$$Q = \text{diag}(Q_i) \Rightarrow Q_i = \frac{\eta_i}{x_{i_{max}}^2}; R = \text{diag}(R_i) \Rightarrow R_i = \frac{\xi_i}{u_{i_{max}}^2} \quad (1.11)$$

Sendo, na Equação 1.11, as variáveis η e ξ definidas:

$$\begin{aligned} 0 < \xi_i &\leq u_{i_{max}}^2 \\ \eta_i &> x_{i_{max}}^2 \end{aligned}$$

Sendo P uma matriz simétrica positivamente definida, esta é obtida através da solução da Equação 1.9.

Substituindo a expressão da variável de controle, Equação 1.8, nas equações 1.6 e 1.7, obtém-se respectivamente:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (1.12)$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T(Q + K^T RK)x) dt \quad (1.13)$$

A função de *Lyapunov* V é importante para a determinação da matriz K . Esta função é definida na forma $V(x) = x^T Px$ sendo P uma matriz simétrica positivamente definida. Neste caso, a derivada no tempo desta função de *Lyapunov* deve ser igual à oposta da função a ser integrada na Equação 1.13, tendo a equação:

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^T Px) = -x^T(Q + K^T RK)x \quad (1.14)$$

Tendo no primeiro ramo da equação:

$$\frac{d}{dt}(x^T Px) = -\dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} \quad (1.15)$$

Tendo então:

$$x[(A - BK)^T P + P(A - BK)]x = -x^T(Q + K^T RK)x \quad (1.16)$$

Para que esta equação diferencial seja estável é preciso que a matriz K satisfaça a seguinte equação de *Lyapunov*:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (1.17)$$

Na Equação 1.8, a matriz K é denominada como a matriz de ganho da variável de controlo, sendo esta definida por [11] [2]:

$$K = R^{-1} B^T P \quad (1.18)$$

Finalizando, substituindo a matriz K na Equação 1.8, tem-se a variável de controlo definida:

$$u = -R^{-1} B^T P x \quad (1.19)$$

Substituindo a variável P na Equação 1.19, tendo a Equação 1.7 do critério de desempenho minimizada, é possível achar o controlo ótimo que regule o sistema.

Para o trabalho desta dissertação, o método LQR clássico não será aplicado. O LQR clássico tem a particularidade de apenas se estabilizar no ponto de equilíbrio. Para um sistema dinâmico que opera num ambiente perturbador é necessário recorrer ao método de Arstein [16] para que o sistema consiga se estabilizar fora do ponto de equilíbrio, num x_{ref} não necessariamente nulo. Neste método temos como vetor de controlo:

$$u = -R^{-1} B^T (P(x - x_{ref}(t)) + r) \quad (1.20)$$

Onde r e z são definidos:

$$r = -(A^T - P B R^{-1})^{-1} P z \quad (1.21)$$

$$z = -A x_{ref}(t) \quad (1.22)$$

No LQR robusto, através da Equação 1.20, é constatado que qualquer sinal de entrada sai do sistema controlado e estabilizado, independentemente da sua característica.

1.1.3 Controlador *Sliding Mode*

Irregularidades de modelação de sistemas têm fortes efeitos adversos em sistemas de controlo não lineares. Assim sendo, qualquer projeto prático de controlo deve abordá-los explicitamente. As duas grandes abordagens para lidar com estes modelos incertos são o controlo robusto ou o controlo adaptativo, que são complementares. A estrutura típica de um controlador robusto é composta por uma parte nominal, semelhante a um *feedback* linearizado ou ao inverso da lei de controlo, e à adição de termos programados para lidar com a incerteza do modelo. A estrutura de um controlador adaptativo é semelhante, com a adicional do modelo estar em constante atualização durante a operação do sistema, baseando-se no vetor de estado proveniente da performance do sistema.

Uma simples abordagem ao controlo robusto é denominada de *sliding control methodology*. Esta é baseada na observação de que é mais fácil de controlar um sistema de primeira ordem, sendo ele não linear ou incerto, que controlar um sistema de ordem n . Adequadamente, uma simplificação notacional é introduzida, que permite sistemas de ordem n serem substituídos por sistemas de primeira ordem. Com essa substituição, em princípio o desempenho "perfeito" do sistema pode ser alcançado na presença de incertezas nos parâmetros, performance essa, contudo, é obtida com um custo de processamento de controlo bastante elevado. Devido a esse custo é necessário uma modificação nas leis do controlo que visa atingir uma troca efetiva entre o desempenho da monitorização e da incerteza paramétrica.

Para a classe de sistemas que este controlador é aplicado, este fornece uma abordagem sistemática para o problema de manter a estabilidade e o desempenho consistente com face nas imprecisões de modelação. Além disso, ao permitir a troca entre a modelação e o desempenho para ser qualificado numa simples forma, este pode esclarecer todo o processo de projecção do sistema [17].

Em resumo, de acordo com [18], este controlador tem a capacidade de ser instalados em sistemas com incertezas nos parâmetros e de dinâmicas não modeladas. Este controlador consegue providenciar a estabilidade do sistema com uma performance consistente com base nas imprecisões da modelação. O *sliding mode control* utiliza uma superfície especial, denominada de *sliding surface*, que é usada como superfície de referência para manter o sistema estável durante a sua trajetória.

Considerando o sistema de multi-entrada não linear:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (1.23)$$

Na Equação 1.23, o vetor u corresponde à entrada do controlo, x corresponde ao vetor de estado e a matriz B a uma matriz de ganho.

Num sistema onde é aplicado este controlador, é desejado obter uma lei de controlo para o vetor de estado x de forma a ser respeitado com tempo variável x_d na presença de um modelo impreciso na função dinâmica do sistema, $f(x)$.

Na Equação 1.24, tendo o vetor correspondente ao erro, $\tilde{x} = x - x_d$, é determinado o vetor de superfície s com a variação do tempo:

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x} = 0 \quad (1.24)$$

Têm-se λ como vetor que representa a largura de banda de controlo, e os seus valores são positivos e constantes.

Do teorema de estabilidade de *Lyapunov's*, é possível encontrar o vetor de controlo u que força o sistema a satisfazer a condição de *sliding* [19]:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [s^T s] \leq -\eta |s| \quad (1.25)$$

Para um sistema de segunda ordem, é considerado um sistema de segunda ordem não linear:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + B(x, \dot{x})u \quad (1.26)$$

Num sistema dinâmico, $f(x, \dot{x})$, é impossível determinar a incerteza exata do sistema, por consequência é necessário estimar, $\hat{f}(x, \dot{x})$, sendo esta estimativa calculada da seguinte forma:

$$\left| \hat{f}(x, \dot{x}) - f(x, \dot{x}) \right| \leq F \quad (1.27)$$

O objetivo neste controlador é o de tornar a derivada do vetor s aproximadamente nula. Através da resolução das equações do vetor de controlo de entrada do sinal, é obtido uma aproximação das leis de controlo contínuo:

$$\hat{u} = \hat{B}^{-1}(-\hat{f}(x, \dot{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{x}) \quad (1.28)$$

Onde \hat{B} corresponde à aproximação da matriz do ganho de controlo.

Em caso da incerteza dinâmica do modelo estar presente, é adicionado um termo de descontinuidade ao vetor de controlo u através da superfície $s = 0$ em ordem a satisfazer as condições da Equação 1.25:

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sgn}(s) \quad (1.29)$$

Em que se tem $k \equiv F + \eta$, e sgn é definida como:

$$\operatorname{sgn}(k) = \begin{cases} +1 & \text{se } k > 0 \\ -1 & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Como a implementação associada à transição de controlo é necessariamente imperfeita, este remete para o fenómeno de comutação de alta frequência (*chattering*). Numa fase inicial, este era o principal problema para o desenvolvimento e implementação deste tipo de controlador, sendo um fenómeno prejudicial porque conduz a baixas previsões de controlo, grande desgaste de componentes mecânicos e a grandes perdas de energia na forma de calor nos componentes eletrónicos [20], sendo apenas aceitável esse efeito para além da faixa de frequência de dinâmica não modelada relevante [17]. De acordo com [18] é introduzido camada de controlo para as transições de superfície:

$$|s(x, t)| \leq \Lambda, \quad \Lambda > 0 \quad (1.31)$$

Onde Λ é o vetor da espessura da camada limite. esta razão a extensão Podendo assim reescrever a equação de controlo como:

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sgn}\left(\frac{s}{\Lambda}\right) \quad (1.32)$$

O controlador *sliding mode* teve variadas aplicações de sucesso, como em veículos submarinos, transmissões de automóveis e motores e sistemas de energia [17].

1.1.4 Controlador H_∞

A motivação inicial da projeção do controlo H_∞ foi a de tentar obter dados essenciais para o controlo do sistema através das medidas obtidas através de configurações baseadas em controladores ótimos [21].

O termo matemático H_∞ denota um espaço de Banach, conhecido como *Espaço de Hardy* H_∞ em que consiste de todas as funções analíticas de uma variável complexa limitadas no semi-plano aberto complexo, composto por números com partes reais positivas [22]. De acordo com a bibliografia em [23], os espaços de *Hardy* são certos espaços de distribuições lineares, que são condições de fronteira das funções holomorfas do espaço *Hardy* completo, e estão relacionadas com espaços L^p de análises de funções.

A norma H_∞ é definida como sendo uma norma de aplicação a matrizes de transferência e a sua noção não é generalizada diretamente para sistemas não lineares. No entanto, quando traduzida para o domínio do tempo, a norma de H_∞ é a norma de L_2 (a partir da entrada das funções-tempo até às saídas das funções-tempo para o estado inicial zero). Esta norma é adequada para sistemas não lineares, sendo L_2 denominada de ganho do sistema não linear [24].

A investigação presente em [24] foi baseada num trabalho relacionado com a análise do ganho L_2 sistemas não lineares e estados de realimentação, como o da Figura 1.4, e controlo H_∞ não lineares.

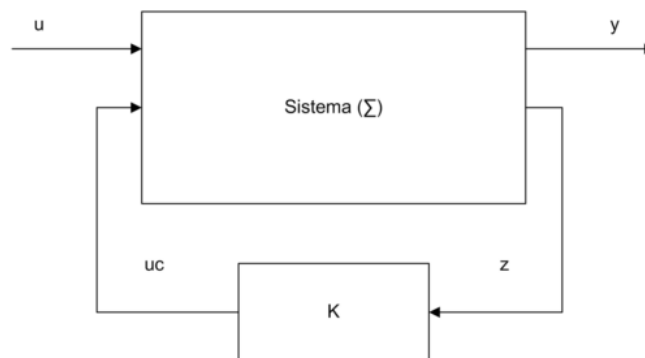


Figura 1.4: Configuração Geral de um Sistema com Realimentação [2].

Considerando um sistema não linear pertencente a C^∞ [24]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.33)$$

No controlo H_∞ não linear, também aparece a desigualdade de *Hamilton-Jacobi* da mesma forma que a equação de *Riccati* aparece para os problemas de controlo ótimo linear. É de salientar que a norma-2, para sistemas não lineares, induzida existe mas não é igual à norma H_∞ , porque essa norma não existe para operadores não lineares. Devido a esta razão, a extensão não linear do problema de controlo H_∞ , por outras palavras, o problema da minimização do ganho L_2 , na literatura é referido como controlo H_∞ não linear [22].

A maior dificuldade deste tipo de controlador é na determinação das leis para o controlo H_∞ não linear, como encontrar o domínio válido. Atualmente, as soluções das equações de *Hamilton-Jacobi* já podem ser obtidas de forma a determinar a distância entre um modelo não linear e a sua aproximação linear no plano de uma aproximação L_2 [25], mas ainda se encontra em

estudo todo o processo de validação do seu domínio de estabilidade. É de entender que quando mencionado domínio válido de um controlador, significa que este abrange o intervalo do vetor de estados do sistema, onde se requer que sejam mantidas a estabilidade e o desempenho do mesmo.

O controlo robusto para problemas de controlo H_∞ tem variados problemas. As leis de controlo que se consideram incertas são designadas como leis de controlo robusto. Usando o teorema do ganho pequeno é possível formular e resolver estes problemas. Este método foi formado por (G. Zames, 1996), com o intuito de analisar a estabilidade de sistema de controlo MIMO, na presença de perturbações aleatórias.

O controlo de H_∞ também pode ser utilizado para controlo ótimo com *state-feedback*. Essa abordagem está documentada em [26], onde o sistema linear com variação do tempo é definido como:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ z(t) = Ex(t) \end{cases} \quad (1.34)$$

Em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ como o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ como vetor de controlo de entrada, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ sendo a perturbação do sistema, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ sendo a saída de controlo para o sistema, e A, B, C, D, E matrizes dependentes dos parâmetros do sistema, com dimensões apropriadas. O controlo considerado neste sistema pode ser com realimentação estático ou dinâmico. O caso estático é definido como:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (1.35)$$

Onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e no caso dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{v} = Fv(t) + Gx(t) \\ u(t) = Hv(t) + Jx(t) \end{cases} \quad (1.36)$$

Esta é a abordagem geral de um problema de controlo H_∞ ótimo. A formulação do problema é equivalente para os casos mais gerais com duas considerações, a medida obtida da saída do sistema é o vetor de estado $x(t)$ e não existe transmissão direta entre o vetor $w(t)$ e $u(t)$ para $z(t)$, isto é, a transferência de funções de u e w para a saída do controlo z são estritamente apropriadas.

1.1.5 Análise Crítica do Estado de Arte

Com uma ideia de alguns controladores capazes de efetuar o controlo de um veículo *quadrotor* é necessário efetuar uma análise crítica com base no mais adequado para este tipo de veículo. Num equipamento como o *quadrotor* o principal objetivo de um engenheiro na fase de projeto do controlador é a de utilizar o controlo mais eficiente permitindo obter o máximo de autonomia e que garanta robustez durante a sua operação.

Começando pelo controlador PID, este é o mais utilizado atualmente no mercado sendo de fácil instalação, fácil calibração por parte do operador, baixo custo de processamento o que não necessita de microprocessadores de grande capacidade. Este tipo de controlador tem uma rápida resposta de atuação mas peca por não ser um controlador robusto, o que muitas vezes causa o

efeito de sobre-elevação do sinal de controle [27].

O controlador *Sliding Mode* poderia ser aplicado no equipamento, como efetuado na bibliografia [28] [29] [30] [31], pois em comparação com o controlador PID, este controle garante robustez mas apenas para casos em que as perturbações provêm do sinal de entrada, enquanto que o sistema dinâmico do *quadrotor* é influenciado por dois tipos de perturbação, a proveniente do sinal de entrada e das variações paramétricas internas [31] o que o torna não robusto a perturbações externas que alterem as forças de dinâmica de deslocamento do sistema. Uma outra desvantagem deste controlador seria a existência do fenômeno de comutação de alta frequência que provoca grandes perdas de energia nos atuadores, o que diminuiria a autonomia do veículo.

O controlador H_∞ é um controlador robusto com realimentação capaz de garantir a robustez em sistemas não lineares, caso seja o *quadrotor* pois está presente por variadas perturbações durante a sua operação. O controlador em questão conseguiria garantir a estabilidade do sistema, mas com o risco de saturação dos atuadores o que provocaria uma dissipação de energia na forma de calor e um menor desempenho na operação do veículo. Este controlador também requer uma grande capacidade de processamento em comparação aos outros mencionados neste trabalho.

Neste trabalho, a aplicação de um controlador LQR num sistema de *quadrotor* garante uma atitude dinâmica, robusta para sistemas lineares [32], uma redução das ocorrências de sobre-elevação [33] e um incremento na performance em comparação com o PID, garantindo também a sua aplicabilidade para sistema não lineares de quarta ordem ou superior.

1.2 Objetivos

Os *quadrotors*, nos tempos atuais, tem ganho uma popularidade devido ao seu baixo custo, flexibilidade na sua operação, manobrabilidade e capacidade de serem utilizados tanto para fins civis ou militares. Estes equipamentos têm a particularidade de não terem uma atitude espontânea, sendo necessário sistemas de controle de voo eficientes para lidar com a estabilização e controle de trajetória.

Os controladores PID são os mais utilizados nas tecnologias dos últimos anos, mas mostram pouca eficiência na filtração das incertezas do modelo do sistema, das imprecisões dos atuadores dinâmicos e sensores, e nas perturbações do ambiente exterior ao equipamento.

A Albatroz Engenharia® é uma empresa que presta serviços de inspeção de linhas elétricas de média e alta tensão tendo como projeto efetuar essas inspeções em veículos não tripulados, neste caso em *quadrotors*. Para a realização das operações é necessário alguma robustez, capacidade essa que não é obtida com os controladores atuais, sendo necessário a projeção de um controlador robusto que garanta uma atitude constante e que permita uma aquisição de dados com qualidade de modo a garantir a segurança e fornecimento de energia ao consumidor.

O presente trabalho aborda a projeção de um controlador robusto de atitude dinâmica para *quadrotors* que reduz significativamente os problemas relacionados com o tipo de controlador atualmente comercializado, que consistirá numa tarefa preliminar de previsão de parâmetros envolvidos na estabilidade dinâmica, de modo a fortalecer a robustez da lei de controle.

Devido à simetria e distribuição de massa do veículo, uma dissociação da lei de controle multivariado deve ser considerada de forma a aliviar a estrutura do sistema de controle geral.

O controlador LQR desenvolvido para este trabalho terá como função garantir a robustez do sistema tendo em consideração a matriz A dependente das taxas de atitude do veículo e a filtragem Kalman-Bucy.

Este trabalho tem o objetivo principal de comprovar a eficácia do LQR Robusto para este tipo de veículos e projetar o controlo computacional e simulações de modo a garantir a continuidade deste trabalho num ensaio físico.

1.3 Estrutura do Trabalho

Capítulo 1 - Introdução - Neste capítulo é mostrada a diferença entre o controlo ótimo e robusto, além de uma introdução teórica em relação aos controladores atualmente em desenvolvimento e suas vantagens. É feita uma crítica ao estado de arte de modo a refletir sobre o tipo de controlador mais eficiente para um sistema *quadrotor*.

Capítulo 2 - Modelação do Sistema - Neste capítulo é demonstrado todo o funcionamento e dinâmicas do *quadrotor*. A modelação matemática da dinâmica do *quadrotor* é apresentada. A caracterização do veículo a estudar neste trabalho é apresentado com todos os detalhes desde os hélices aos componentes eletrónicos e seu *software*.

Capítulo 3 - Aquisição e Processamento de Dados - Este capítulo inicia-se pelos processos utilizados para a aquisição dos dados gravados durante um voo físico. Toda a modelação do tratamento dos dados é também aqui a apresentada como a filtragem de Kalman-Bucy e seus resultados a demonstrar a sua eficiência perante o problema apresentado. São apresentados os momentos de inércia do veículo e as suas dimensões.

Capítulo 4 - Modelação do Controlo e Simulação - Neste capítulo é apresentado o modelo geral do controlador projetado para este trabalho como a identificação de todas as variáveis e matrizes necessárias. É também demonstrado o tratamento realizado à curva de referência através de um pré filtro. Todos os resultados provenientes das simulações são apresentados neste capítulo tanto as simulações com base na referência de um voo físico como as simulações baseadas numa missão fictícia projetada para este trabalho.

Capítulo 5 - Conclusão e Discussão - Neste capítulo final são apresentadas todas as conclusões retiradas deste trabalho como também os procedimentos e limitações encontradas ao longo do mesmo. São ainda apresentadas sugestões para futuros trabalhos nesta área de investigação.

Capítulo 2

Modelação do Sistema

2.1 Funcionamento Geral

O veículo de estudo deste trabalho foi um *quadrotor*, sendo um sistema aerodinâmico de múltiplas entradas e saídas (MIMO), fortemente acoplado e subjugado [7].

Estes equipamentos são constituídos por quatro motores com configuração em cruz, e acoplados por hélices de passo fixo [29].

Com seis graus de liberdade (três de translação e três de rotação) e com apenas quatro rotores independentes, estes veículos são severamente complexos de controlar sem o auxílio de sistemas eletrónicos. A resultante da dinâmica destes equipamento é não linear, especialmente tendo em consideração as forças de fricção provenientes do ambiente de operação [6].

Nas Figuras 2.1, 2.2, 2.3 estão representadas as variadas atitudes do veículo [3]. Num *quadrotor* temos como atitude:

1. *Throttle* - Sendo a aceleração dos motores e influência a velocidade, altitude e reação do equipamento.
2. Arfagem e Rolamento - A inclinação do *quadrotor* é aproveitada para mudar a direção de empuxo do veículo, resultando num movimento horizontal na direção de desequilíbrio o que leva a uma perda na sustentação vertical. Este comportamento pode ser compensado com um aumento do *throttle*.
3. Guinada - É o movimento rotacional com referência no eixo vertical do veículo.

Tendo a rotação dos motores/atuadores em em sentidos opostos, toda a dinâmica é efetuada pelos diferenciais de velocidade angular entre os pares de motores sendo desnecessário o rotor de cauda. Na imagem 2.1, o movimento vertical é efetuado com a variação de binário, em proporção com o movimento vertical do sistema, aplicado em todos os atuadores, tendo essa variação como referência o binário necessário para manter uma altitude fixa. A translação, movimento proveniente do rolamento e/ou arfagem, é efetuada com o diferencial de binário entre os motores do equipamento, com a redução da velocidade angular do rotor mais próximo da direção de translação e com o aumento da mesma do rotor oposto, Figura 2.2. Na Figura 2.3 tem o caso de variação do ângulo de guinada através do aumento da rotação dos rotores com sentido de rotação contrário ao efetuado pelo equipamento e da redução de rotação dos motores com rotação de sentido oposto, movimento esse denominado de guinada, permitindo assim uma variação de rotação sem a perda de altitude, não provocando acelerações com componentes vertical. É de salientar que esta mudança do ângulo de guinada é efetuada sem a perda de altitude, através do equilíbrio entre as forças exercidas entre os rotores, não provocando assim nenhuma força com componente vertical.

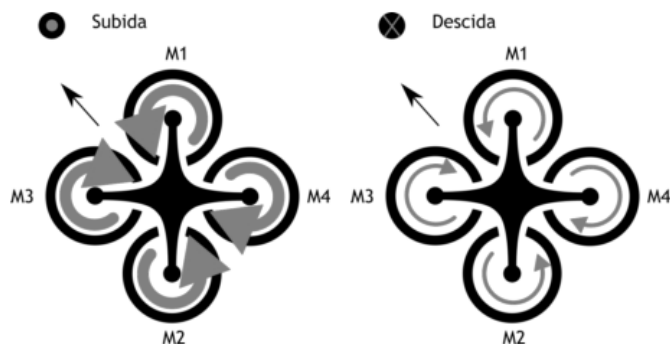


Figura 2.1: Diagrama do movimento vertical do equipamento e da variação da rotação dos motores [3].

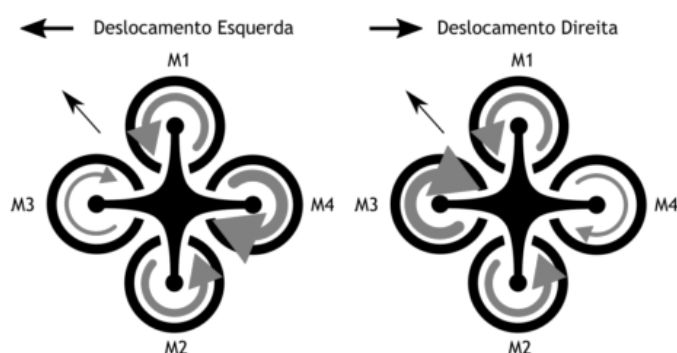


Figura 2.2: Diagrama do movimento de translação do equipamento e da variação da rotação dos motores paralelos à direção do movimento [3].

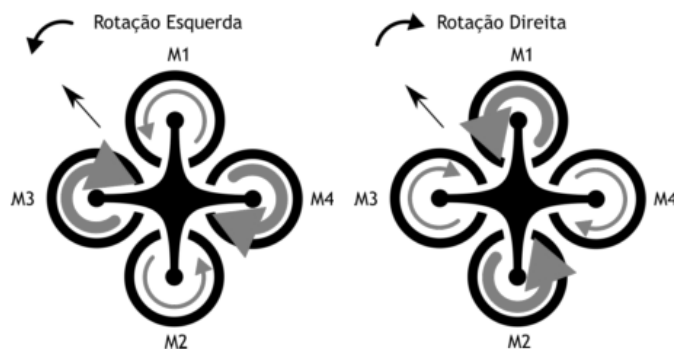


Figura 2.3: Diagrama do movimento de rotação do equipamento e do défice de rotação entre os motores [3].

Os quatro rotores deste equipamento permitem uma maior capacidade de *payload* e um movimento mais simplista, pois não necessita de mecanismos complexos para mudar a sua atitude, mas tornando-se um sistema dinamicamente instável e bastante penalizador em termos de eficiência devido ao diâmetro reduzido dos hélices [29].

O controlo destes veículos é efetuado através da programação de *waypoints* ou por rádio-controlo. O sistema eletrónico é composto no mínimo por um módulo controlador, quatro controladores eletrónicos de velocidade (ESCs) e respetivos motores (atuadores), recetor de rádio-controlo e uma fonte de energia.

O módulo controlador, na maioria dos casos um micro-controlador com um designado *firmware* instalado, permite o controlo e estabilização do equipamento. Estes módulos são sistemas com a capacidade de medição da inércia do veículo (IMU), constituídos por processadores, giroscópios, acelerómetros, magnetómetros e barómetros [34].

Os motores, na maioria dos UAVs, são do tipo *brushless* de três fases, o que necessita de um controlador para regular a velocidade desses motores através da oscilação da frequência da corrente elétrica. Os componentes responsáveis por essa regulação da velocidade são os ESCs, que recebendo um sinal PWM proveniente do módulo de controlo e conseguem regular a frequência da corrente do motor, podendo esta ser sinusoidal ou trapezoidal, e indiretamente a velocidade de rotação [35].

A fonte de energia destes equipamentos são, na sua maioria, baterias Lítio-Polímero (LiPo). Um sistema com quatro motores em funcionamento constante tem correntes de descargas enormes, sendo essa a principal razão das baterias LiPo, pois estas tem a capacidade de suportar grandes descargas elétricas superiores à sua capacidade nominal. Estas baterias não se restringem à alimentação dos motores, mas também à alimentação elétrica de todo o sistema, podendo adicionar uma bateria externa na existência de *payloads* que necessitem de uma fonte de energia.

2.2 Modelação Matemática

2.2.1 Modelação da dinâmica e cinemática do *quadrotor*

Toda a movimentação realizada pelo *quadrotor* é totalmente dependente do binário provocado pelos motores. Em cada rotor do equipamento, no disco propulsivo gerado pelo hélice é composto por variadas componentes físicas, como a força da sustentação, o binário e a força de resistência provocada pela passagem do ar. Os rotores tem, obrigatoriamente, ter sentidos de rotação opostos aos adjacentes, como representado na Figura 2.4.

Toda a variação de atitude do veículo é definida pela variação conjunta dos rotores. A combinação velocidade de rotação e o perfil do hélice traduz-se numa geração de propulsão que permite a sustentação do equipamento, forças essas representadas na Figura 2.4 como F_1 , F_2 , F_3 e F_4 [36].

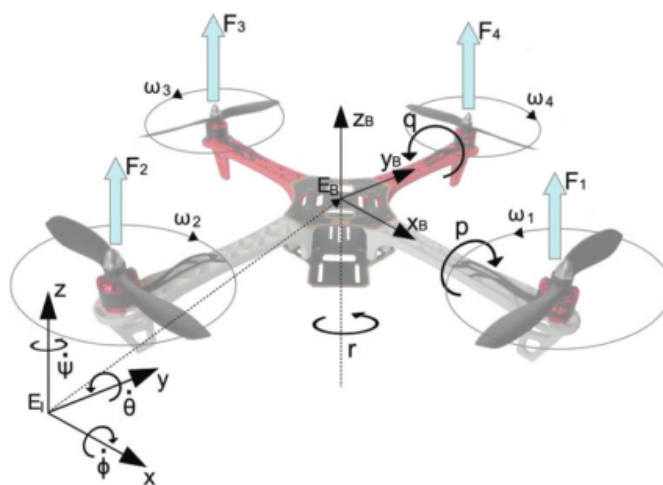


Figura 2.4: Diagrama do referencial de corpo rígido, inercial do equipamento e a referência terrestre.

Toda a modelação do sistema deste trabalho foi realizada tendo em conta as seguintes considerações [29]:

- A estrutura é rígida e simétrica;
- O centro de gravidade (CG) do equipamento e a origem do referencial do corpo rígido são coincidentes;
- Os hélices são rígidas;
- As força de tração e de resistência do ar são proporcionais ao quadrado da velocidade dos hélices.

Antes da modelação matemática do sistema é necessário referir os referenciais a utilizar na modelação do sistema, sendo estes o inercial, da terra e do corpo rígido, demonstrados na Figura 2.4. É de salientar que o referencial terrestre é constante, desprezável para a dinâmica do equipamento e não será considerado na modelação da atitude do sistema, sendo apenas utilizados o referencial inercial e o do corpo rígido. O referencial inercial é fixo, diretamente dependente do referencial terrestre *East-North-Up* (ENU) e tem como origem o ponto na superfície terrestre do início do voo, como representado na Figura 2.5 [1].

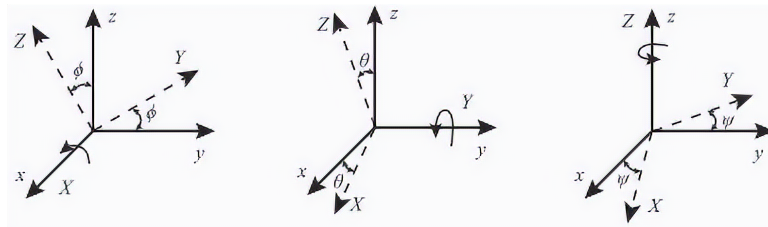


Figura 2.5: Diagrama do referencial inercial do veículo.

O referencial do corpo é dependente do corpo rígido do equipamento com origem coincidente ao centro de gravidade do veículo, como representado na Figura 2.6. [1]

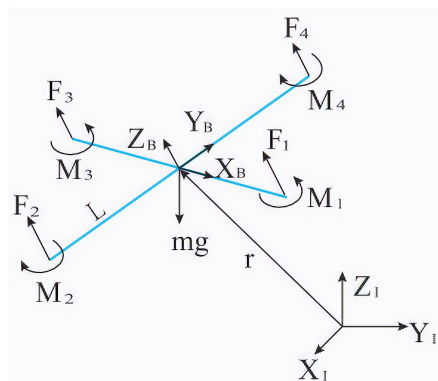


Figura 2.6: Diagrama de corpo rígido do equipamento.

É importante determinar a força total produzida pelos motores, pois toda a atitude depende dos mesmos. A força de sustentação produzida pelo *quadrotor*, de acordo com as imagens 2.4 e 2.6, é dada por:

$$F_{total} = \sum_{i=1}^4 F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (2.1)$$

A dinâmica do *quadrotor* é constituída por seis graus de liberdade que se definem por doze estados. Seis desses estados controlam a atitude do sistema sendo definido através do ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ) e suas taxas angulares (p, q, r) . Os restantes seis estados permitem controlar a posição relativa ao centro de gravidade do equipamento (x, y, z) como também a velocidade linear (u, v, w) em termos do referencial terrestre.

De acordo com [6], o binário, correspondente às atitudes de rolamento e arfagem, são derivados dos mecanismos padrões do equipamento. Os motores 1 e 3 são escolhidos aleatoriamente, mas neste trabalho serão definidos de acordo com a Figura 2.4, sendo binário responsável pela atitude de rolamento determinado:

$$\tau_\phi = \sum r \times F = l(F_1 - F_3) \quad (2.2)$$

Na Equação 2.2, temos o vetor r como o conjunto de distâncias entre o centro dos motores e o centro de gravidade, F como o vetor de tração de cada rotor, l a distância entre o centro do motor e o centro de gravidade (sendo este constante, pois todos os motores estão igualmente distanciados do centro), e F como força de sustentação produzida pelo motor i . Seguindo o mesmo raciocínio é possível determinar o binário responsável pela atitude de arfagem:

$$\tau_\theta = l(F_2 - F_4) \quad (2.3)$$

A guinada do equipamento é efetuada através da diferença de binários entre os pares de motores com rotações opostas. Esta atitude possui uma direção oposta à direção do movimento do rotor. Sendo assim, o binário total do equipamento é dado por:

$$\tau_{total} = \tau_\psi = \tau_1 + \tau_3 - \tau_2 - \tau_4 \quad (2.4)$$

A velocidade de rotação do motor é assumida como diretamente proporcional ao comando PWM de entrada no ESC, com isso é possível considerar que a força produzida e o binário são linearmente proporcionais ao acelerador:

$$F_i = K_1 \delta_i \quad (2.5)$$

$$\tau_i = K_2 \delta_i \quad (2.6)$$

Sendo i o número do motor, K_1 e K_2 constantes e δ a fração de acelerador cedida ao motor. A dinâmica do sistema é estudada a partir de variadas abordagens, neste trabalho será baseado de acordo com a literatura [29].

A matriz de rotação tem o objetivo de relacionar os dois referenciais do equipamento [6] [1], o inercial e o do corpo rígido. A matriz de rotação (R) é parametrizada de acordo com vários métodos como os ângulos de Euler, Quaterniões e ângulos de Tait-Bryan [29], sendo a matriz descrita para os três eixos (x, y, z) presentes no nosso sistema, como,

- $R(x, \phi)$ - matriz rotação em torno do eixo x .

- $R(y, \theta)$ - matriz rotação em torno do eixo y .
- $R(z, \psi)$ - matriz rotação em torno do eixo z .

Sendo estes definidos por:

$$R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$R(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A matriz de rotação completa é o produto das matrizes de rotação sobre os três eixos:

$$R(\phi, \theta, \psi) = R(x, \theta)R(y, \theta)R(z, \psi) \quad (2.10)$$

Tendo como matriz de rotação do sistema final [1] desenvolvida na Equação 2.10:

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

As taxas angulares são diferentes das taxas angulares da estrutura do equipamento (p, q, r) que são definidas através do giroscópio. Para determinação das taxas angulares necessário efetuar o produto entre $[p \ q \ r]^T$ e $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ dado por [29]:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

O método *Lagrangiano*, denominado por $L = T - V$, tendo T a energia cinética e V a energia potencial do sistema, sendo definidos, respetivamente, por:

$$T = \frac{1}{2}I_{xx}(\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}I_{yy}(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta)^2 + \frac{1}{2}I_{zz}(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi) \quad (2.13)$$

$$V = \int -g \sin \theta x \, dm(x) + \int g \sin \phi \cos \theta y \, dm(y) + \int g \cos \phi \cos \theta z \, dm(z) \quad (2.14)$$

Efetuada todas as simplificações presentes na literatura [29], temos os momentos atuantes nos eixos x , y e z , sendo definidos por:

$$\tau_x = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) + J_r\omega_y(\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \quad (2.15)$$

$$\tau_y = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + J_r\omega_x(-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4) \quad (2.16)$$

$$\tau_z = d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \quad (2.17)$$

Tem-se b como um coeficiente de tração, d como um coeficiente de resistência do ar, J_r a inercia provocada pelo motor e l o comprimento do braço entre o centro do motor ao centro da estrutura do equipamento.

De acordo com a referência [29], as segundas derivadas da atitude são descritas pelo modelo dinâmico do veículo considerando que a sua atitude é influenciada por diversos efeitos do giroscópio do equipamento, como o efeito da rotação da estrutura, o efeito provocado pela rotação dos hélices acopladas à estrutura e por fim os efeitos provocados pelos atuadores. As segundas derivadas das atitudes podem ser definidas como:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{J_r\dot{\theta}(\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)}{I_{xx}} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}\dot{\psi}\dot{\theta} + \frac{bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)}{I_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \frac{J_r\dot{\phi}(-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4)}{I_{yy}} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\dot{\psi}\dot{\phi} + \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \frac{d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)}{I_{zz}} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}\dot{\theta}\dot{\phi} \end{cases} \quad (2.18)$$

Como a influência dos efeitos derivados dos atuadores no giroscópio são praticamente desprezáveis para a modelação do sistema, tem-se a equação das segundas derivadas das atitudes descrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{1}{I_{xx}}(\dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}) + \tau_x) \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_{yy}}(\dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx}) + \tau_y) \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}}(\dot{\theta}\dot{\phi}(I_{xx} - I_{yy}) + \tau_z) \end{cases} \quad (2.19)$$

Por outro lado, os binários provenientes da diferença de sustentação por parte dos motores são determinados por:

$$\begin{cases} \tau_x = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ \tau_y = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ \tau_z = d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{cases} \quad (2.20)$$

2.2.2 Conversão de quaterniões para ângulos de Euler

Devido ao facto de que os erros crescem ao longo do tempo, a integração do sistema diferencial dá bons resultados só para valores relativamente pequenos de θ . Para um ângulo $\theta = \pm 90^\circ$ a sua tangente tende para valores infinitos, consequentemente a taxa de pranchamento tenderá para um valor infinito. É necessário contornar esse problema de restrições no que respeita ao ângulo de arfagem. Através de uma elaboração de Hamilton, documentada em [37], a atitude

da aeronave é definida através dos quatro parâmetros simétricos de Euler.

Os quaterniões são elementos de um vetor num espaço de quatro dimensões que oferecem uma notação matemática que permite a representação de rotações de objetos a três dimensões. Estes evitam o problema da perda de graus de liberdade, e ao mesmo tempo são numericamente mais eficientes e estáveis quando comparados com as matrizes de rotação tradicionais baseadas nos ângulos de Euler.

Um conjunto de eixos pode ser movido para qualquer configuração desejada, utilizando apenas uma rotação em torno de um eixo convenientemente posicionado. Os quaterniões podem ser definidos pelos seguintes quatro parâmetros:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \\ \eta_1 &= \sigma_1 \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \\ \eta_2 &= \sigma_2 \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \\ \eta_3 &= \sigma_3 \sin\left(\frac{\mu}{2}\right)\end{aligned}\quad (2.21)$$

Sendo as variáveis σ_1 , σ_2 e σ_3 os ângulos definidos com respeito aos eixos inerciais do veículo e o parâmetro μ como o ângulo de rotação única de transferência entre os referenciais inercial e do corpo rígido.

A atitude da aeronave pode ser descrita com respeito ao referencial inercial com os elementos do vetor de quaterniões $\eta = (\eta_0 \ \eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3)^T$. Como apenas se utilizam quatro parâmetros enquanto só três são necessários, é imposta a seguinte restrição:

$$\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1 \quad (2.22)$$

Tendo cada parâmetro a variar no intervalo $[-1, 1]$.

Pode-se assim determinar os ângulos da atitude através das equações:

$$\phi = \arctan2\left(2(\eta_0\eta_1 + \eta_2\eta_3), 1 - 2(\eta_1^2 + \eta_2^2)\right) \quad (2.23)$$

$$\theta = \arcsin(2(\eta_0\eta_2 - \eta_3\eta_1)) \quad (2.24)$$

$$\psi = \arctan2\left(2(\eta_0\eta_3 + \eta_1\eta_2), 1 - 2(\eta_2^2 + \eta_3^2)\right) \quad (2.25)$$

A transformação dos ângulos de Euler para os quaterniões efetua-se pelas equações:

$$\eta_0 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (2.26)$$

$$\eta_1 = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (2.27)$$

$$\eta_2 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (2.28)$$

$$\eta_3 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (2.29)$$

Como representação matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_0 \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & \eta_0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & \eta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

As vantagens do sistema diferencial da Equação 2.30 e da Equação de restrição 2.22 perante os três ângulos de Euler são que os quaterniões aplicam-se a qualquer atitude, os erros de posicionamento são limitados e cada quaternião está no intervalo $[-1, 1]$.

2.2.3 Dinâmica do sistema Motor/Hélice

O controlo total da atitude do *quadrotor* é efetuada através da rotação dos hélices, sendo de extrema importância a escolha do conjunto motor/hélice. A eficiência do veículo está associada ao desempenho do acoplamento do motor e do hélice. Com a medição da tensão aplicada em cada motor, é possível aproximar um valor da tração, binário real e sua velocidade de rotação. Os motores presentes no sistema deste trabalho são característicos nos UAVs, designados por motores sem escovas (*brushless*). Estes motores em comparação aos de escovas tem variadas vantagens como melhores características de velocidade versus binário, eficiência superior, uma resposta dinâmica mais instantânea, tempo de operação superior, funcionamento menos ruidoso durante grandes velocidades de rotação, requerimento de pouca manutenção e um aumento da fiabilidade [38]. Os motores elétricos, apesar de serem todos muitos idênticos, nem sempre funcionam do mesmo modo, devido a variadas características como a resistência interna, número de polos e do controlador da velocidade (ESC).

Devido à dinâmica do *quadrotor* ser inteiramente controlada pelos motores é necessário quantificar a tração efetuada para cada motor dependente do movimento que se pretende efetuar. A tração do sistema motor/hélice é dado por:

$$F = \frac{4\rho r^4}{\pi^2} \omega^2 C_T \quad (2.31)$$

Na Equação 2.31 temos como variáveis o ρ como a massa específica do ar, C_T como o coeficiente de tração, r sendo o raio do hélice e ω como velocidade angular do rotor. O binário produzido pelo motor é definido por:

$$\tau = C_P \frac{4\rho r^5}{\pi^3} \omega^2 \quad (2.32)$$

Onde tem C_P definido como coeficiente de potência.

Como enunciado na subcapítulo 2.2.1, a tração do *quadrotor* é proporcional ao quadrado da velocidade dos hélices, sendo assim simplificada a Equação 2.31:

$$F = k_f \omega^2 \quad (2.33)$$

Sendo k_f uma constante dos parâmetros característicos da constituição do *quadrotor*.

A velocidade de rotação pode ser determinada através dos dados característicos do motor fornecidos pelo fabricante. O parâmetro K_V determina a rotação (RPMs) do motor de acordo com a tensão efetiva. No equipamento ao medir a corrente fornecida ao motor e a sua tensão é possível determinar a sua velocidade de rotação, sendo esta calculada do seguinte modo:

$$U_{eff} = U - R_m I \quad (2.34)$$

$$N = K_V U_{eff} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi K_V U_{eff}}{60} \quad (2.35)$$

Na Equação 2.34, a variável U_{eff} é referente à tensão utilizada para a produção de binário no motor, a variável U é a tensão de entrada no motor, R a resistência interna com o motor sem carga e I a corrente fornecida a este através da fonte de energia.

De acordo com [29], a modelação do motor pode ser definida através do sistema:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = u - R_m i - k_e \omega_m \\ J_m \frac{d\omega_m}{dt} = \tau_m - \tau_d \end{cases} \quad (2.36)$$

Onde L é definida como a indutância do motor, u a tensão de entrada, R_m a resistência interna do motor, i a corrente consumida, k_e como constante *Back-EMF* [1], ω_m a velocidade angular do motor, J_m o momento de inércia do motor, τ_m o binário provocado pelo motor e τ_d o binário residual do motor.

Sendo o motor de pequenas dimensões, este terá uma indutância praticamente nula, sendo então o sistema 2.36 de segunda ordem, aproximado por:

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = -\frac{k_m^2}{R_{mot}} \omega_m - \tau_d + \frac{k_m}{R_{mot}} u \quad (2.37)$$

Para modelação do hélice é necessário considerar três parâmetros característicos, C_T , C_P , e o r , sendo os dois primeiros dependentes do passo e do raio do hélice. Os mesmos parâmetro são obtidos experimentalmente podendo ser consultados com base em tabelas características do hélice e em função da razão de avanço (J).

2.2.4 Momentos de Inércia

Para a modelação do controlo do *quadrotor* será necessário determinar os momentos de inércia para aplicação nas matrizes do controlador LQR. Os momentos de inércia provocados pela estrutura serão calculados assumindo que cada braço da estrutura é um paralelepípedo, dando um valor aproximado e facilitando a sua determinação, sendo apenas necessário a massa dos atuadores e a distância dos mesmos ao CG.

Os momentos de inércia do equipamento são determinados conhecendo a massa do rotor m_m , os comprimentos do motor no eixos x , y e z , sendo dados por x_m , y_m e z_m , respetivamente e a distância do motor ao centro de gravidade é dada por d_{CG} . O momento de inércia em volta do eixo x é dado por:

$$\begin{cases} I_{x1} = I_{x3} = \frac{1}{12}m_m(y_m^2 + z_m^2) \\ I_{x2} = I_{x4} = \frac{1}{12}m_m(y_m^2 + z_m^2) + m_m d_{CG}^2 \end{cases} \quad (2.38)$$

$$I_{xx} = 2I_{x1} + 2I_{x2} \quad (2.39)$$

O cálculo do momento de inércia em torno do eixo y é dado por:

$$\begin{cases} I_{y1} = I_{y3} = \frac{1}{12}m_m(x_m^2 + z_m^2) + m_m d_{CG}^2 \\ I_{y2} = I_{y4} = \frac{1}{12}m_m(x_m^2 + z_m^2) \end{cases} \quad (2.40)$$

$$I_{yy} = 2I_{y1} + 2I_{y2} \quad (2.41)$$

Finalizando, o momento de inércia em torno do eixo z é determinado da seguinte forma:

$$\begin{cases} I_{z1} = I_{z3} = \frac{1}{12}m_m(x_m^2 + z_m^2) + m_m d_{CG}^2 \\ I_{z2} = I_{z4} = \frac{1}{12}m_m(x_m^2 + z_m^2) + m_m d_{CG}^2 \end{cases} \quad (2.42)$$

$$I_{zz} = 2I_{z1} + 2I_{z2} \quad (2.43)$$

2.3 Generalização do Equipamento

A empresa Albatroz Engenharia® tem em sua posse variados veículos do tipo *quadrotor*, sendo este trabalho focado no *Spyro* fabricado pela *UAVision*®. É seguida uma descrição técnica do *quadrotor* utilizado neste trabalho. Na Tabela 2.1 estão descritas algumas especificações generalizadas do veículo.

Tabela 2.1: Especificações técnicas da plataforma de estudo deste trabalho.

UAVision Spyro	
MTOW	12.00 kg
Massa s/ Payload	5.00 kg
Hélice	28" x 9.2"
Tempo de voo	30 min
Estrutura	Monocoque em carbono
Motores	4x T-Motor U8 170Kv

2.3.1 Equipamento Constituinte do Veículo

O funcionamento de um *quadrotor* é idêntico para todos, devido à sua atitude ser apenas controlada por quatro motores fixos, como referenciado na secção 2.1, sendo apenas distinguidos do modo de controlo. O modo de controlo depende do *firmware* instalado no módulo de controlo, sendo isso explícito na subsecção 2.3.2.

Para o controlo destes equipamentos ser cumprido de acordo com os requisitos de operação e segurança do voo, tanto para o equipamento como para terceiros, é necessário possuir a bordo equipamentos mecânicos e eletrónicos que permitam voar de acordo com o comando do operador, em voo misto (controlo determinado pelo operador mas assistido eletronicamente) e em voo autónomo. Esta secção tem o objetivo de identificar alguns desses equipamentos presentes no veículo.

Analisando o *quadrotor* deste trabalho, toda a sua estrutura monocoque é fabricada em fibra de carbono. Todos os motores são interligados com ESCs com o módulo de controlo.



Figura 2.7: Motor T-Motor U8 170Kv. [4]

Os motores constituintes têm de respeitar uma igualdade de modo a fornecer o mesmo binário entre mudanças de atitude. Os motores presentes no equipamento em estudo são os T-Motor U8 170Kv [4] funcionando com uma bateria de seis células em série, com uma tensão nominal de 22.2 Volt, uma velocidade de rotação de 170 rpm/V, uma potência máxima de 528W/180s, uma capacidade de corrente máxima de 23.8A/180s e dimensões de 86.8 x 26.5mm.

Os hélices utilizadas neste veículo têm um diâmetro de 28 polegadas e um passo de 9.2 polegadas, cada uma tem uma massa de 100 gramas. Estes hélices são dimensionadas para motores lentos e veículos de grande massa, pois devido ao grande diâmetro estas facilmente atingem a velocidade crítica na ponta, condição essa a evitar.

Os emissores e recetores são essenciais para o controlo do veículo, pois permitem ao operador controlar de forma remota toda a atitude do veículo. Devido a sigilo empresarial, não foi possível determinar os equipamentos especificados.

O módulo de controlo do *quadrotor* utilizado neste trabalho foi uma *Pixhawk*. Este módulo tem um *firmware* de código aberto, *ArduPilot* que será aprofundado na subsecção 2.3.2, e permite o controlo autónomo, semi-autónomo e manual no *quadrotor* por parte de um operador. Este módulo na sua constituição contém variados sensores, como acelerómetros, giroscópios, magnetómetros e barómetros, permitindo assim a capacidade de medição da inércia do veículo por parte do IMU que por sua vez constituem o *Attitude and Heading Reference System* (AHRS). A *Pixhawk* possui um processador avançado a nível tecnológico com um sensor *ST Microelectronics*®. Este módulo oferece ao operador uma excelente performance, flexibilidade e fiabilidade de controlo nos veículos autónomos.

2.3.2 *Firmware* Base de Controlo

O *quadrotor* utilizado neste trabalho tem como *firmware* o *ArduPilot*. O *ArduPilot* é um projeto que pode ser descrito como um piloto automático para veículos não tripulados. Como sendo um

projeto de código aberto, este encontra-se em constante evolução e desenvolvimento tanto pela equipa de desenvolvimento como pelo público em geral interessado. O *ArduPilot* pode ser dividido em variadas secções, como o *Copter*, *Plane*, *Rover*, *Sub* e o *Antenna Tracker*.

O veículo de estudo deste trabalho tem instalado o *ArduPilot Copter*, designado especialmente para veículos multi-rotor.

O controlo do *quadrotor* é efetuado por um controlador PID, que através de um controlador Proporcional com as atitudes de referência estipuladas pelo operador, determina a taxa de atitude de referência. O sistema de controlo projetado neste trabalho aproveitará esse vetor de referência. Todas as atitudes e dados provenientes dos sensores do módulo de controlo, neste caso a *Pixhawk*, são tratados e filtrados por um EKF (*Extended Kalman Filter*) e seus ângulos de Euler calculados através do método dos quatérnios.

O *ArduPilot* quando instalado no *Pixhawk* tem uma frequência de comando $400Hz$ e uma frequência de gravação de parâmetros de $10Hz$. Variados parâmetros são gravados durante o voo do *quadrotor*, como leituras do IMU, atitudes, atitude de referência, sinal de saída para os atuadores, trajetória, qualidade de sinal, entre muitos outros não relevantes para este trabalho.

Capítulo 3

Aquisição e Processamento de Dados

Este capítulo destina-se à abordagem das simulações obtidas numa fase preliminar à simulação do sistema de controlo. Os resultados que serão apresentados neste trabalho foram obtidos por um algoritmo realizado em concreto para este trabalho com recurso à linguagem *Python*, que consistiu na aplicação do controlo, de um algoritmo de *Butcher*, e um algoritmo de *Euler Modificado*, com as suas formulações apresentadas nas secções A.1 e A.2, respetivamente, no apêndice A.

3.1 Aquisição e Modelação dos Dados

Os dados gravados durante o voo de veículo são armazenados na memória física do sistema controlador que pode ser processada e transferida após a realização do voo. De acordo com a documentação apresentada em [39] no *ArduPilot Copter*, a gravação dos dados é iniciada após a armação dos motores.

Todos os dados foram gravados com um intervalo de tempo $\Delta t = 0.1$ segundos. O intervalo de tempo definido para a gravação dos parâmetros do voo não é possível a realização da simulação devido à falta de precisão, como solução foi projetado um algoritmo em *Python*, com objetivo de analisar os dados gravados durante o voo os dispondo de um modo mais simplista de interpretar. Através desses dados o algoritmo inicia uma interpolação de *Spline* cúbica de modo a criar vetores de estado com intervalos de tempo $\Delta t = 0.01$ segundos, permitindo assim a simulação e modelação mais robusta do sistema de controlo.

3.1.1 Dados Utilizados

Durante o voo o sistema efetua o registo de variados parâmetros, mas apenas são utilizados os referentes à informação retirada do IMU, como as atitudes e respetivas taxas, necessárias para a criação do vetor de estado $x = [\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]$ sendo estas usadas no controlo após a filtração efetuada por um filtro de Kalman Estendido. As unidades dos dados retirados do sistema físico para a atitude e suas taxas, respetivamente, são graus e graus/segundo.

Para as simulações com base nos dados retirados do voo os dados necessários são os dados de referência do sistema. A referência x_{ref} , ou por outras palavras a atitude objetivo do voo, é determinada através do sinal de *input* derivado do comando do operador ou então pelo controlo de trajetória do sistema, e as suas taxas determinadas através de um controlador proporcional (Controlador Proporcional) que com o diferencial entre a taxa atual e a desejada obtém o valor desejado. Sendo o vetor referência aplicado ao LQR Robusto, tendo como resposta os resultados apresentados no capítulo 4.

Através dos dados cedidos pela Albatroz Engenharia® de dois voos distintos, com atitudes apresentadas nos gráficos 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, a modelação do sistema preliminar efetuada de modo a melhorar as matrizes Q e R obtidas através do método de *Bryson Modificado*. As modelações e resultados comparativos entre a simulação e um caso real são apresentados na subsecção 4.4.

Arfagem do Voo Real

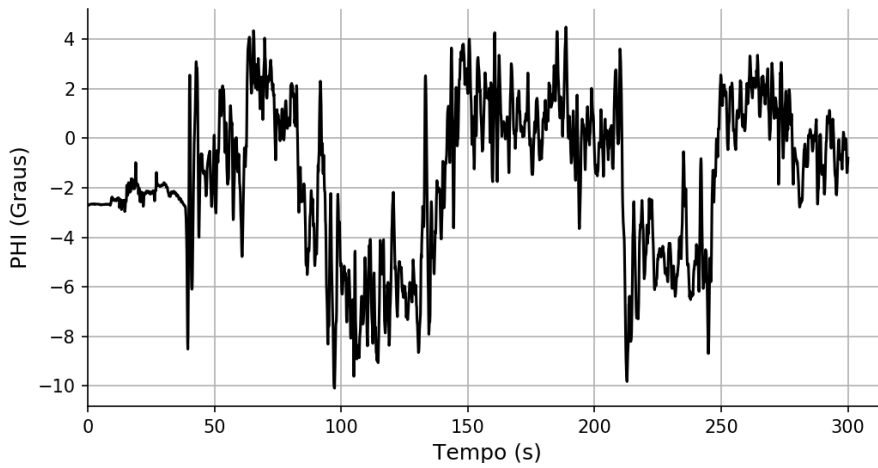


Figura 3.1: Arfagem do primeiro voo do *quadrotor* Spyro - 02/06/2017

Rolamento do Voo Real

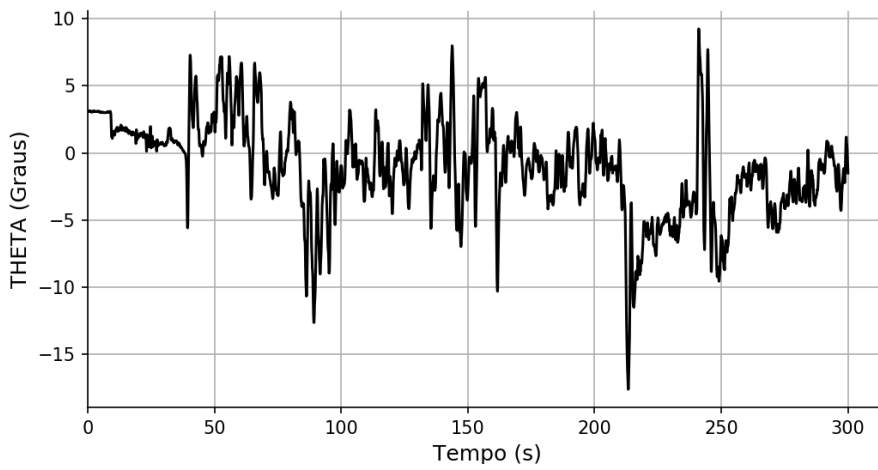


Figura 3.2: Rolamento do primeiro voo do *quadrotor* Spyro - 02/06/2017

Guinada do Voo Real

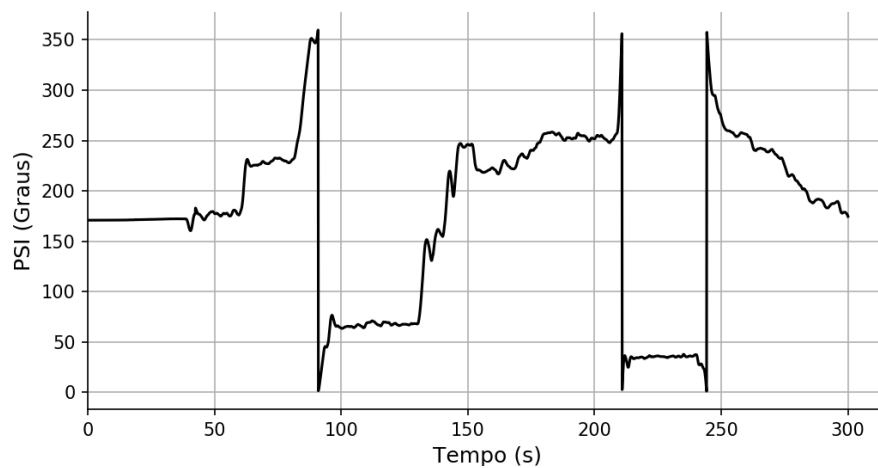


Figura 3.3: Guinada do primeiro voo do *quadrotor* Spyro - 02/06/2017

Arfagem do Voo Real

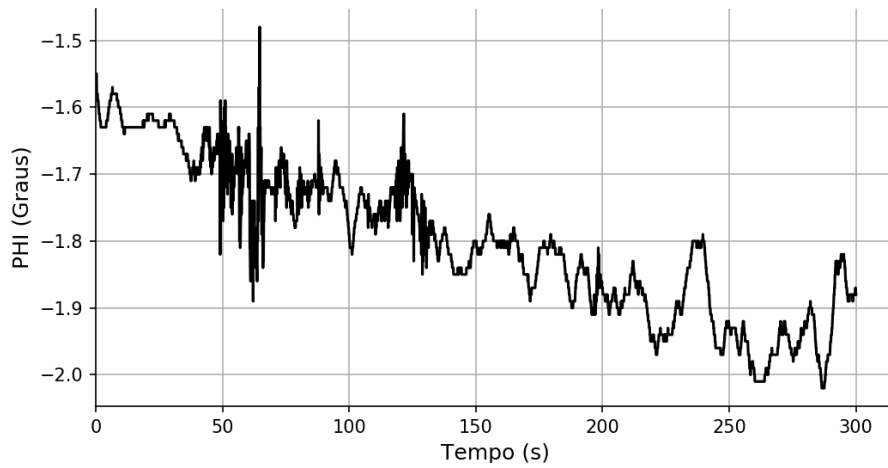


Figura 3.4: Arfagem do segundo voo do *quadrotor* Spyro - 02/06/2017

Rolamento do Voo Real

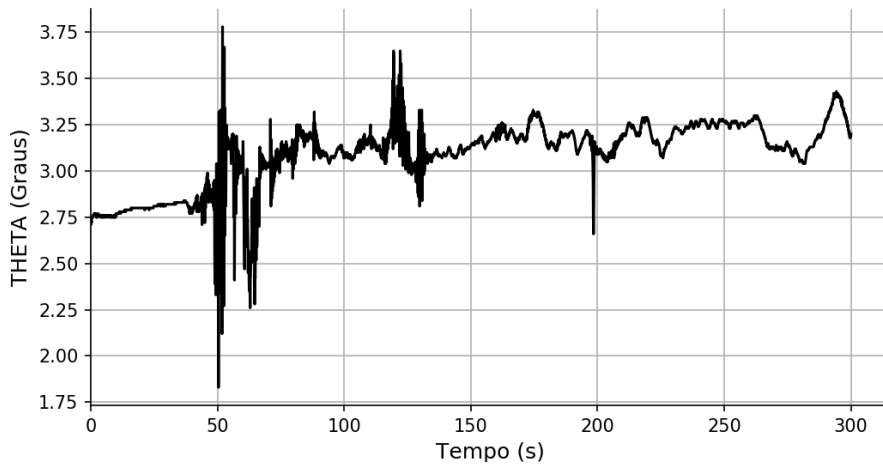


Figura 3.5: Rolamento do segundo voo do *quadrotor* Spyro - 02/06/2017

Guinada do Voo Real

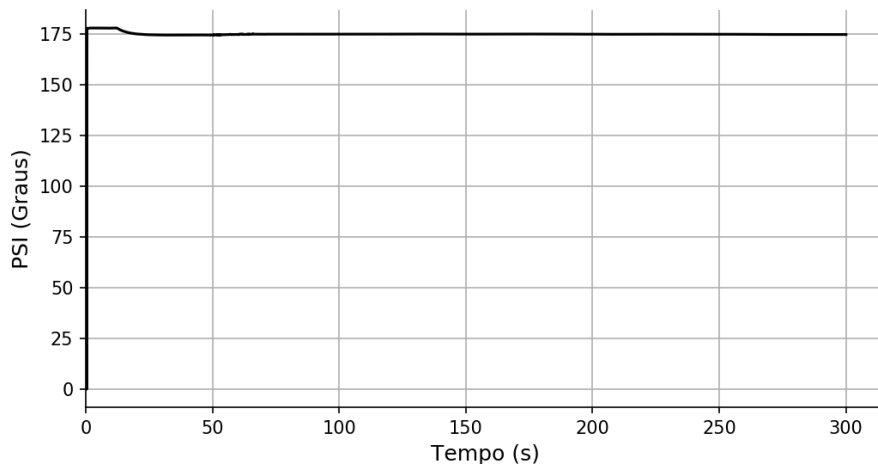


Figura 3.6: Guinada do segundo voo do *quadrotor* Spyro - 02/06/2017

3.2 Identificação da Plataforma de Voo

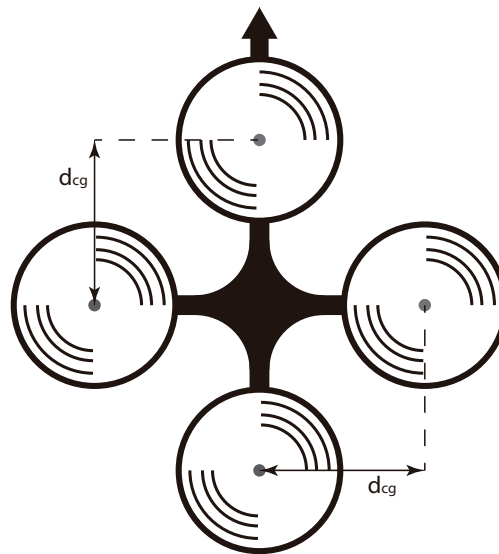


Figura 3.7: Diagrama demonstrativo da distância entre o atuador e o CG da estrutura.

Para modelação do sistema de controlo com base no LQR Robusto é necessário conhecer variadas características físicas da plataforma de voo, considerando uma estrutura quadrada é necessário conhecer a distância entre os atuadores e o CG (Centro de Gravidade) e seus momentos de inércia. Considerando a Equação 1.6 do sistema dinâmico, a matriz A dependente dos momentos de inércia e das taxas da atitude, e B dependente dos momentos de inércia e da distância entre os atuadores e o CG da estrutura, é necessário conhecer as características da plataforma de voo essenciais para a modelação apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Características do quadrotor.

Parâmetro	Descrição	Valor
m_m	Massa do motor/atuador	0.240 kg
y_m	Distância do centro do motor ao eixo y	0.0868/2 m
x_m	Distância do centro do motor ao eixo x	0.0868/2 m
d_{CG}	Distância dos atuadores ao CG da estrutura	0.566 m

3.2.1 Momentos de Inércia

O cálculo dos momentos de inércia essenciais para a modelação do controlo já foram enunciados na subsecção 2.2.4, sendo numericamente definidos por I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} . Os momentos de inércia I_{xi} , I_{yi} e I_{zi} definem o respetivo momentos de inercia do atuador i em que $i \in [1, 2, 3, 4]$. Para o momento de inércia I_{xx} o cálculo é demonstrado nas equações 3.1 e 3.2.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{x1} = I_{x3} = \\ \quad = \frac{1}{12} m_m (y_m^2 + z_m^2) = \\ \quad = \frac{1}{12} \times 0.240 \times (0.0434^2 + 0.0265^2) = 0.0000517 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]} \\ I_{x2} = I_{x4} = \\ \quad = \frac{1}{12} m_m (y_m^2 + z_m^2) + m_m d_{CG}^2 = \\ \quad = \frac{1}{12} \times 0.240 \times (0.0434^2 + 0.0265^2) + 0.240 \times 0.566^2 = 0.0769 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$I_{xx} = xI_{x1} + 2I_{x2} = 2 \times 0.0000517 + 2 \times 0.0769 = 0.1539 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]} \quad (3.2)$$

Devido à simetria da estrutura é considerado que os valores de I_{xx} e I_{yy} são idênticos, sendo assim tem-se como valores:

$$I_{xx} = I_{yy} = 0.0769 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]} \quad (3.3)$$

Para o cálculo do momento de inércia I_{zz} o seu valor é determinado através do cálculo das equações 3.4 e 3.5.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{z1} = I_{z3} = \\ \quad = \frac{1}{12} m_m (x_m^2 + z_m^2) + m_m d_{CG}^2 = \\ \quad = \frac{1}{12} \times 0.240 \times (0.0434^2 + 0.0265^2) + 0.240 \times 0.566^2 = 0.0769 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]} \\ I_{z2} = I_{z4} = \\ \quad = \frac{1}{12} m_m (x_m^2 + z_m^2) + m_m d_{CG}^2 = \\ \quad = \frac{1}{12} \times 0.240 \times (0.0434^2 + 0.0265^2) + 0.240 \times 0.566^2 = 0.0769 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$$I_{zz} = 2I_{z1} + 2I_{z3} = 2 \times 0.0769 + 2 \times 0.0769 = 0.308 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]} \quad (3.5)$$

Com todos os dados adquiridos é então definida a matriz inercial:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1539 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1539 & 0 \\ 0 & 0 & 0.308 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.3 Filtragem Kalman-Bucy

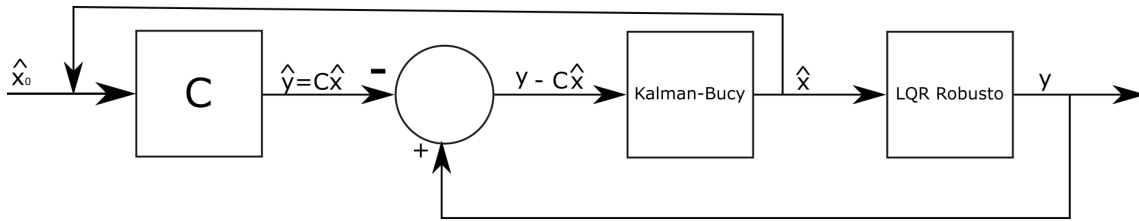


Figura 3.8: Diagrama representativo do funcionamento base do algoritmo do Filtro de Kalman-Bucy com controle LQR Robusto.

Um *quadrotor* especificado para missões de inspeção de linhas elétricas é necessário ter uma precisão considerável para manter a sua atitude de operação de modo a permitir a obtenção dos dados necessários. Um veículo deste tipo durante a sua operação é sujeito a variadas fontes de ruído e imprecisão, como ruído eletromagnético proveniente dos quatro motores, o meio de operação não ser um fluido perfeito e não estando estático, como também o ruído proveniente dos sensores.

O *software* do *ArduCopter* já tem na sua integração um filtro EKF, mas para o caso de estudo da referência estipulada (Secção 4.5), será necessário simular um ruído e a sua filtração. Neste trabalho a escolha recai sobre o filtro de Kalman-Bucy por revelar uma elevada precisão e um tempo de processamento reduzido.

A filtragem de Kalman é utilizada para casos que não se podem desprezar as incertezas ou ruídos do sistema, ou seja, $\eta \neq 0$ e $\xi \neq 0$. Também foi desejado que a matriz de covariância instantânea não fosse considerada, permitindo a filtragem para casos de ruído não dependentes do modelo anterior. Sendo assim foi desenvolvido um filtro que não tivesse em conta as incertezas e que utilizasse valores de ruído com modelos de distribuição incertos, permitindo assim a filtragem para qualquer tipo de perturbação durante o voo do *quadrotor*, sendo o filtro de Kalman-Bucy o ideal para este caso [40] [41].

Para efeitos de simulação é necessário considerar o sistema anteriormente identificado 1.6 com a adição de incerteza associadas:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \eta(t) \\ y = Cx + \xi(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

É necessário referir que o vetor de *output* y é conhecido, num caso contrário o vetor de estado x não é conhecido. Para a modelação da simulação deste filtro é necessário identificar as matrizes Q e R , sendo, respetivamente, identificadas por:

$$\begin{aligned} Q &= E(\eta\eta^T) \\ R &= E(\xi\xi^T) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3.1 Modelação do Filtro Kalman-Bucy

Na simulação da filtragem de Kalman-Bucy é necessário identificar o sistema dinâmico a ser aplicado no modelo sendo definido por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \omega \\ y = Cx + \vartheta \end{cases} \quad (3.9)$$

Em que x é o respectivo vetor a um tipo de atitude que é definido como em 3.11, e y como vetor de saída do filtro, tendo também ω e ϑ variáveis representativas dos ruídos reais que são brancos e apresentam uma distribuição gaussiana, definidos em 3.10.

$$\begin{aligned} \omega &\approx N(0, Q) \\ \vartheta &\approx N(0, R) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x_v + \varepsilon \\ \dot{x}_v = x_a + \varepsilon \\ \dot{x}_a = x_j \end{cases} \quad (3.11)$$

No sistema apresentado em 3.11 é necessário identificar a variável x_j como o *jerk* da atitude em estudo.

De acordo com a bibliografia [41] é necessário determinar a matriz L , sendo esta constante e representante do ganho da filtragem.

$$L = PC^T R^{-1} \quad (3.12)$$

Sendo a variável P solução da equação de *Riccati* da equação definida por:

$$A^T P + PA - PCR^{-1}C^T P + Q = 0 \quad (3.13)$$

Tendo as matrizes A , C , Q e R definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Não conhecendo o vetor de estado da atitude em estudo, é necessário considerar a ordem do sistema para a sua obtenção. De acordo com [3] será considerada uma ordem de $n = 5$, obtendo uma estimativa do vetor x através da equação:

$$\hat{x}_{k+1} = F_d \hat{x}_k + L_d y_k \quad (3.18)$$

Sendo as matrizes relativas ao sistema de ordem $n = 5$ definidas pelo sistema:

$$\begin{cases} F_d = I + F\Delta t + \frac{(F\Delta t)^2}{2!} + \frac{(F\Delta t)^3}{3!} + \frac{(F\Delta t)^4}{4!} + \frac{(F\Delta t)^5}{5!} \\ L_d = \left(I\Delta t + \frac{F\Delta t^2}{2!} + \frac{F^2\Delta t^3}{3!} + \frac{F^3\Delta t^4}{4!} + \frac{F^4\Delta t^5}{5!} + \frac{F^5\Delta t^6}{6!} \right) L \end{cases} \quad (3.19)$$

Onde a matriz F é representado por:

$$F = A - LC \quad (3.20)$$

Tendo o vetor de estado referente à atitude, sendo $[\phi \ \theta \ \psi]^T$, através da Equação 3.18, este vetor tem como solução $[\hat{x} \ \hat{\dot{x}} \ \hat{\ddot{x}}]^T$. Sendo o vetor de estado filtrado composto por $[\hat{\phi} \ \hat{\dot{\phi}} \ \hat{\theta} \ \hat{\dot{\theta}} \ \hat{\psi} \ \hat{\dot{\psi}}]^T$. Com a definição do vetor de estado filtrado, este atua como entrada ao LQR Robusto, permitindo assim ter o controlador a operar num ambiente aproximado e não exato.

As Figuras 3.9, 3.10 e 3.11 demonstram os resultados derivados da filtragem deste trabalho e é retirada a conclusão de que o sistema tem uma grande capacidade de filtração, conseguindo filtrar a maioria do ruído gerado em torno da curva de atitude do *quadrotor*. É de salientar as discrepâncias presentes durante a fase de de estabilização serem provenientes da matriz A depender das taxas da atitude.

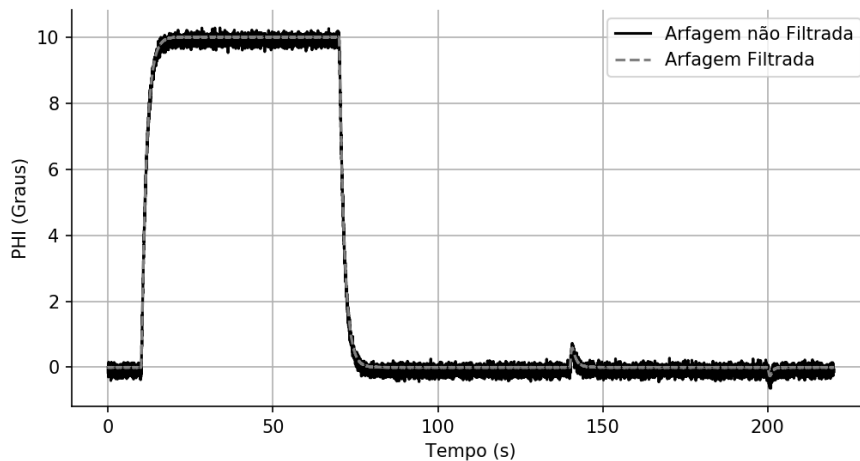


Figura 3.9: Gráfico de comparação da atitude de Arfagem do veículo filtrada e não filtrada.

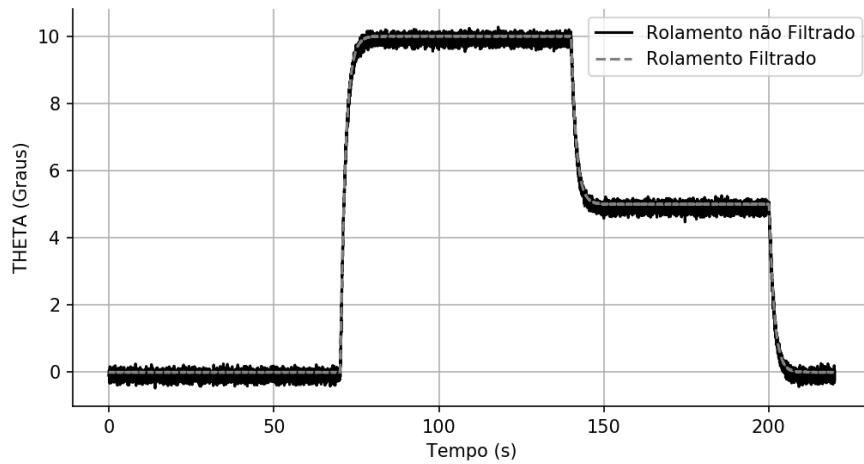


Figura 3.10: Gráfico de comparação da atitude de Rolamento do veículo filtrada e não filtrada.

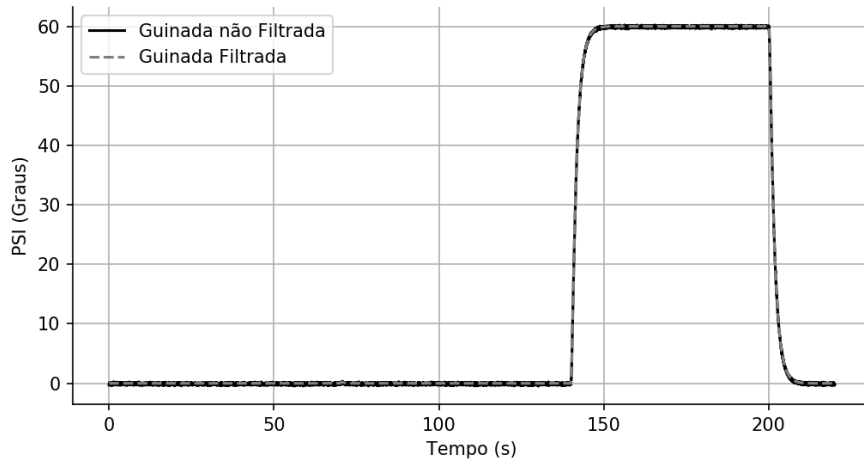


Figura 3.11: Gráfico de comparação da atitude de Guinada do veículo filtrada e não filtrada.

Em síntese, comprova-se a eficácia deste filtro perante um sistema linear de quarta ordem rico em ruído de variadas fontes como ambiente de operação, ruído eletromagnético ou branco, sendo um método satisfatório de filtragem e estimação de atitudes para *quadrotors*.

É de salientar o acoplamento entre o vetor de estado filtrado por Kalman-Bucy e o controlador LQR Robusto. Inicialmente esse acoplamento era efetuado através da definição de vetor de estado ser efetuada através do Kalman-Bucy e assim integrado num controlador LQR Simples o que garantia uma robusta modelação de controlo. Integração essa refutada pela bibliografia [42]. De acordo com [42] o problema dos observadores é que eles levam a erros, ou seja, se observadores ou filtros de Kalman são usados na implementação, então não é garantida a robustez do sistema. Sendo assim os sistemas compostos por filtros e observadores necessitam de ser avaliados separadamente para cada projeto. Uma reinterpretação do clássico LQG foi primeiramente proposta na bibliografia [43], mas essa projeção do clássico LQ tinha algumas limitações, tipicamente uma taxa de atenuação relativamente lenta dos valores singulares da matriz de transferência de malha aberta, que pode restringir os desempenhos nominais e a robustez do sistema de circuito fechado. Como solução a essas limitações foi sugerido o LQG/LTR [44] de modo a criar robustez sobre a modelação da filtragem de Kalman-Bucy e do controlo

LQR Simples.

No desenvolvimento deste trabalho foi utilizado uma abordagem diferente, foi efetuada uma realimentação do sistema de controlo utilizando assim o controlo LQR/Arstein com vetor de estado proveniente da saída do filtro de Kalman-Bucy e deste modo obteve-se um sistema com necessidade inferior de processamento e com a garantia de um sistema de controlo robusto.

Capítulo 4

Modelação do Controlo e Simulação

4.1 Modelo Geral

O modelo de estado para um *quadrotor* é representado como um sistema físico com entradas, saídas e variáveis de estado provenientes das equações não lineares do veículo. É necessário simplificar a projeção do modelo de controlo em ordem a cumprir com as restrições em tempo real de um *loop* de controlo. Consequentemente, as forças da estrutura, os momentos de rolamento, os efeitos do giroscópio são assumidos como constantes [7] [45].

A modelação do controlo deste trabalho será adaptada da referência [29], onde será focado apenas na atitude do veículo e não no controlo da sua trajetória.

O vetor de estado do sistema dinâmico pode ser definido na forma $\dot{x} = f(x, u)$ com u sendo o vetor de controlo e x o vetor de estado de seis variáveis. O vetor de estado é definido:

$$x = [\phi \quad \dot{\phi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi}]^T \quad (4.1)$$

Onde pode ser definido por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{\phi} \\ x_3 &= \theta \\ x_4 &= \dot{x}_3 = \dot{\theta} \\ x_5 &= \psi \\ x_6 &= \dot{x}_5 = \dot{\psi} \end{aligned} \quad (4.2)$$

O vetor de controlo (U) do sistema será composto por três variáveis, U_ϕ corresponde ao sinal de controlo de rolamento, U_θ corresponde ao sinal de controlo da arfagem e U_ψ ao sinal de controlo de guinada.

$$u = [U_\phi \quad U_\theta \quad U_\psi]^T \quad (4.3)$$

Onde as variáveis de controlo são definidas com base na velocidade angular dos motores e com a configuração de motores representada na Figura 4.1:

$$\begin{cases} U_\phi = b(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ U_\theta = b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ U_\psi = d(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{cases} \quad (4.4)$$

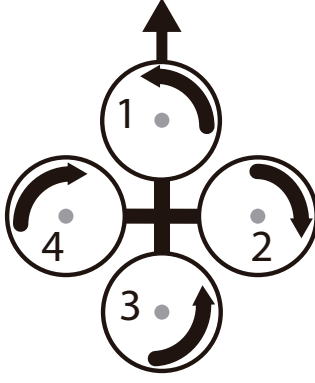


Figura 4.1: Configuração da disposição dos motores e do sentido de rotação dos motores.

No sistema 4.4 a variável b define um fator de tração do veículo e d um fator de atrito proveniente no ar. Todos os fatores são determinados por métodos experimentais. É de salientar que as variáveis presentes dependem diretamente do diferencial de velocidades angulares dos motores, mas na prática o controle terá de controlar os binários provocados pelos motores, de modo a obter as devidas atitudes.

A transformação da matriz entre a taxa de variação e os ângulos definidos para a orientação $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ e as velocidades angulares do corpo (p, q, r) podem ser consideradas como uma matriz única se as perturbações relativas à arfagem e rolamento forem de pequenas dimensões. Sendo assim assume-se que $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx (p, q, r)$ onde simulações realizadas na referência [29] comprovam que esta simplificação é razoável. Assim tendo a equação simplificada:

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\psi a_1 + b_1 U_\phi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\psi a_2 - b_2 U_\theta \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta}\phi a_3 + b_3 U_\psi \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Os coeficientes a e b são determinados do seguinte modo:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \\ a_2 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \\ a_3 = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \\ b_1 = \frac{l}{I_{xx}} \\ b_2 = \frac{l}{I_{yy}} \\ b_3 = \frac{1}{I_{zz}} \end{cases} \quad (4.6)$$

No sistema de equações as variáveis I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} definem os momentos de inércia do veículo, e l a distância dos atuadores ao centro de gravidade.

De acordo com o subcapítulo 1.1.2, este trabalho consistirá num controlador Linear Quadrático Robusto, sendo o sistema geral de equações definido com a função de estado (1.6), função de custo (1.7) e a função de controle (1.8) num sistema pseudo-linearizado:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + Bu \\ J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (4.7) \\ u = -K(x)x \end{cases}$$

Em que as matrizes Q e R são determinadas através do método de *Bryson* Modificado especificado nas equações 1.11.

Com a solução da Equação 1.9 de *Riccati* é determinado a matriz $P(x)$. A matriz $P(x)$ é determinada a cada ciclo do algoritmo de controlo devido à matriz de estado $A(x)$ não ser uma matriz constante e depender do estado do veículo.

$$A(x)^T P(x) + P(x)A(x) - P(x)BR^{-1}B^T P(x) + Q = 0 \quad (4.8)$$

Para determinação da matriz K são utilizadas as soluções obtidas do método de *Bryson* e de *Riccati* através da Equação 1.18.

$$K(x) = R^{-1}B^T P(x) \quad (4.9)$$

Podendo definir a Equação 1.19 de controlo:

$$u = -R^{-1}B^T P(x)x \quad (4.10)$$

Para o caso robusto é necessário recorrer ao método de *Arstein*, onde o vetor de controlo se define (1.20):

$$u = -R^{-1}B^T (P(x)(x - x_{ref}(t)) + r) \quad (4.11)$$

Onde r e z se definem, respetivamente, de acordo com as equações 1.21 e 1.22.

Para aplicação do LQR é necessário a linearização do sistema para $\dot{X} = AX(x) + BU$. A linearização em volta do ponto de equilíbrio vai causar com que o modelo seja irrealista, especialmente para grandes variações de atitude, devido a todos os acoplamentos serem negligenciados. De modo a permitir a otimização do sistema para um envelope de voo maior, pode-se linearizar o sistema em torno de cada estado. Cada termo acoplado é representado duas vezes para corrigir e variar um estado por cada instante de tempo. Isto remete para a linearização do estado do sistema.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \dot{\theta} & \ddot{\theta} & \dot{\psi} & \ddot{\psi} \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

Através da função dinâmica do sistema representada na Equação 4.5, são determinadas as matrizes A e B , sendo respetivamente, a definição da matriz de estado e da matriz de controlo do veículo.

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{yy}-I_{zz}}{2I_{xx}}\dot{\psi} & 0 & \frac{I_{yy}-I_{zz}}{2I_{xx}}\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{zz}-I_{xx}}{2I_{yy}}\dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{zz}-I_{xx}}{2I_{yy}}\dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2I_{zz}}\dot{\theta} & 0 & \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2I_{zz}}\dot{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

4.2 Identificação do Modelo de Controlo

Para a modelação do sistema de controlo é necessário previamente determinar as matrizes essenciais para a função de custo e de estado da plataforma de voo.

A função de estado $\dot{x} = Ax + Bu$ é diretamente dependente das matrizes A e B . Em comparação a sistemas de controlo idênticos, neste trabalho a matriz A tem a particularidade de não ser constante, devido a esta depender das taxas de atitude do *quadrotor*. A matriz B é dependente dos momentos de inércia e da distância dos atuadores ao centro de gravidade da estrutura sendo essa dimensão constante, tornando assim a matriz inalterada. As matrizes A e B , respetivamente, tomam valores:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{yy}-I_{xx}}{2I_{xx}}\dot{\psi} & 0 & \frac{I_{yy}-I_{xx}}{2I_{xx}}\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{zz}-I_{xx}}{2I_{yy}}\dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{zz}-I_{xx}}{2I_{yy}}\dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2I_{zz}}\dot{\theta} & 0 & \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2I_{zz}}\dot{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05\dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & 0.05\dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.678 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.678 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.247 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

O controlo Regulador Linear Quadrático tem como objetivo a minimização da função de custo $J(u)$, Equação 4.17, dependente da matriz R e Q .

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u dt \quad (4.17)$$

As matrizes Q e R são matrizes de ganho do controle. Estas matrizes inicialmente foram determinadas através do método de *Bryson Modificado* apenas para noção dos valores a iniciar. Com base nos voos realizados pela Albatroz Engenharia®, as diagonais das matrizes foram ajustadas de modo à curva proveniente da simulação de controle encontrar os valores mais próximos da curva de referência. As matrizes são definidas de acordo com a lógica de que escolhendo valores de grandes dimensões para a diagonal da matriz R o sistema tentará estabilizar com um menor custo de energia, por outro lado, escolhendo valores de pequenas dimensões para a diagonal da matriz R o sinal de controle será menos penalizado. Seguindo uma lógica semelhante para a matriz Q , alterando-a com valores de grandes dimensões a resposta do sistema será para estabilizar o controle com o mínimo de mudanças de estado possíveis, sendo o ideal para sistemas com grandes variações de sinal.

Após a utilização do método de *Bryson Modificado* e análise das curvas de atitude simuladas, procede-se à alteração das diagonais das matrizes Q e R . Nas primeiras simulações com o método de *Bryson Modificado* foram obtidos resultados com um controle muito saturado devido às imperfeições do sinal devido às taxas de atitude provenientes do IMU, desse modo foi então procedido com um algoritmo a iteração dos valores da diagonal da matriz Q de modo a que as taxas de atitude não tivessem um fator de dependência tão acentuado no controle do *quadrotor* permitindo a atitude ser o mais idêntico com a referência sem desprezar as suas taxas.

As matrizes Q e R estão representadas, respetivamente, por 4.18 e 4.19.

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{50^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{50^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{47^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{100^2} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{90^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{90^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180^2} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

4.3 Tratamento dos Dados de Referência

A referência utilizada no controle deste trabalho é essencialmente determinada por um controlador do tipo P (Proporcional), tendo algumas discrepâncias no seu resultado. O controlador LQR Robusto é um controlador que tenta seguir ao máximo a sua referência, devido às discrepâncias no seu vetor de referência era necessário limitar os valores do sinal de controle. De modo a não efetuar a limitação do sinal de controle para valores constantes, foi projetado um pré filtro que tem como função a suavização da curva de referência, criando assim uma resposta mais suave e dentro dos parâmetros do sistema dinâmico do veículo.

O pré filtro para este trabalho foi aplicado entre a entrada da referência e a referência retirada

dos logs do *ArduCopter* (Figura 4.2) aplicando a Equação 4.20, sendo a sua integração efetuada através do algoritmo de Euler Modificado, referido no Apêndice A.2.

$$\tau y_{ref}^* + y_{ref}^* = y_{ref} \quad (4.20)$$

A equação anterior tem como variáveis o y_{ref}^* sendo o vetor de referência filtrado, o y_{ref} o vetor de referência determinado pelo equipamento de controlo durante o voo e τ como o ganho do filtro. Referente à variável τ é definida com base na resposta do controlo do sistema e com a condição $\tau \gg 1$, sendo um parâmetro definido por um processo iterativo, tendo uma relação inversa com a rapidez de estabilidade do controlo do sistema e o ganho do filtro.

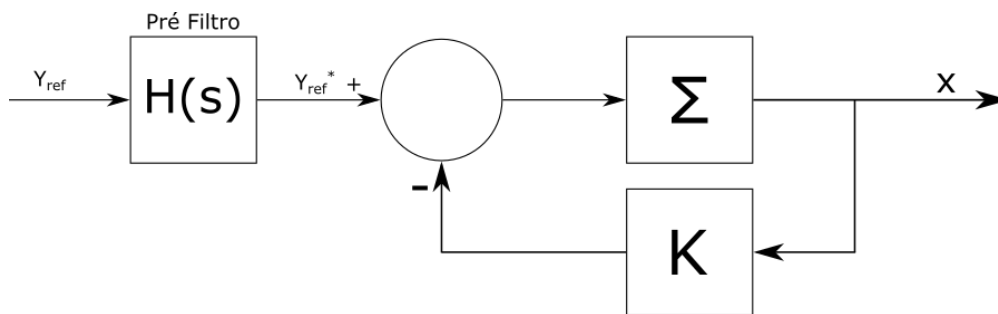


Figura 4.2: Diagrama de blocos da implementação do pré filtro no sistema de controlo.

Na Figura 4.2 o sistema $H(s)$ é definido por $H(s) = \frac{1}{1+\tau s}$.

No gráfico representado na Figura 4.3 e no Apêndice B é possível verificar a comparação entre os dois tipos de referência. Ao analisar o gráfico apresentado na Figura 4.3 é concluído que o pré filtro funciona e suaviza a curva, podendo ser observado pelas mudanças abruptas da curva de referência e após o tratamento da mesma esta suaviza e não atinge a amplitude máxima dos picos de sinal.

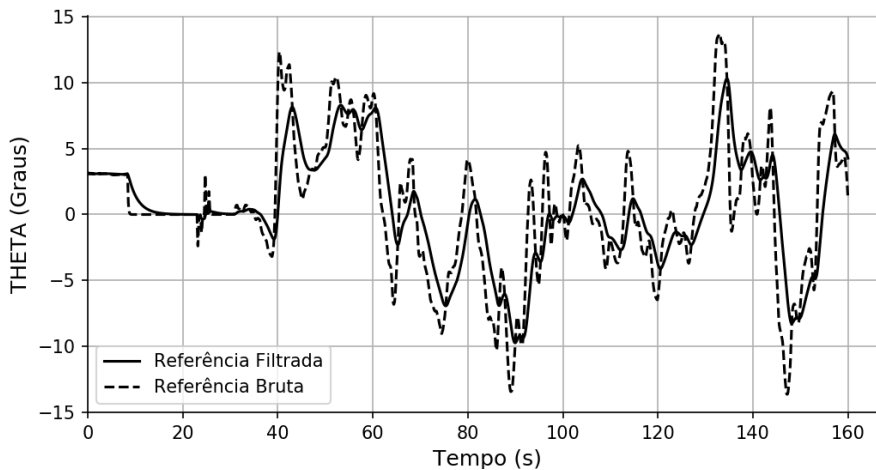


Figura 4.3: Gráfico em função do tempo, representando a comparação entre a referência bruta do voo físico e a referência tratada.

4.4 Simulação com Referências Físicas

Obtendo todos os dados necessários para a modelação do controlo é necessário validar os dados com comparação a dados reais. De acordo com voos efetuados fisicamente com o equipamento, e com o *software* do *ArduPilot* com controlo efetuado por um controlador PID, foi possível efetuar uma comparação entre os dois tipos de controlo.

Com a obtenção de dados enunciada na secção 3.1 foram obtidos todos os dados necessários para a modelação do sistema de controlo, o vetor de referência e dados físicos para fins comparativos. Foi simulado um voo com uma duração de 300 segundos mas para este trabalho apenas serão analisados os primeiros 160 segundos, tendo os gráficos da simulação completo demonstrados no Apêndice C. Um segundo voo, com uma atitude mais suave, também foi estudado neste trabalho mas devido à baixa variação da atitude este apenas será apresentado no Apêndice D. Com a análise realizada ao gráfico 4.4 é apercebido que o controlador tem uma grande capacidade de seguir o vetor de referência ao longo do tempo e com uma maior performance a níveis energéticos, tendo apenas uma pequena saturação no intervalo de tempo inicial, no intervalo $[0, 40]$ segundos na curva do sinal de controlo mas com uma pequena intensidade, como demonstrado na Figura 4.5. É de salientar que no intervalo de tempo $[140, 160]$ segundos existe uma discrepância entre as duas curvas, sendo essencialmente provocada pela taxa da respetiva atitude.

O gráfico 4.6 serve de comparação entre a simulação realizada e o voo físico do equipamento, permitindo verificar o aumento de eficiência de um controlo com LQR Robusto e com uma maior performance, pois a curva do sinal de controlo contém menos efeitos de sobre-elevação e uma curva mais suavizada.

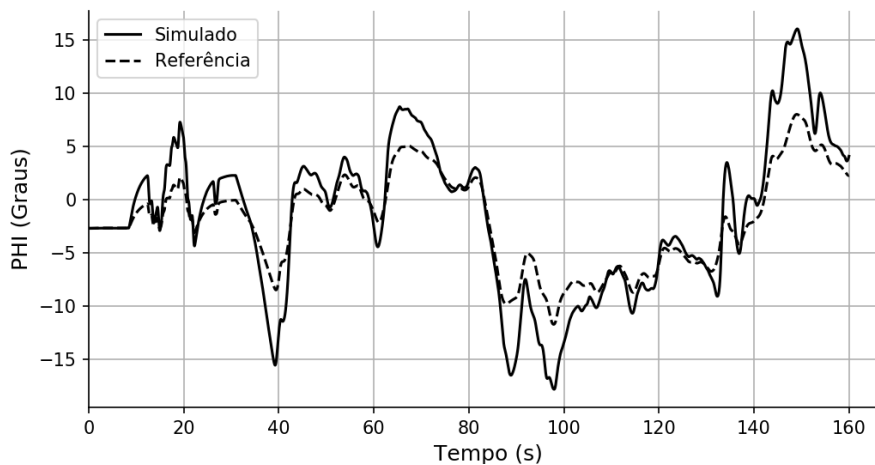


Figura 4.4: Atitude de Rolamento simulada com referência de um voo físico.

Para o mesmo intervalo de tempo, como referido na secção 4.2, as taxas de atitude provenientes do sistema da dinâmica do *quadrotor* têm um grande peso na modelação do sistema, o que na matriz Q foi diminuída o seu peso no controlo do sistema. Nos gráficos 4.7 e 4.8, respetivamente, demonstram o comportamento das taxas de atitude do *quadrotor* simuladas com a referência do voo físico e a comparação do voo simulado com o voo físico. Com a análise aos gráficos 4.7 e 4.8 é de notar que a taxa de arfagem do sinal de saída do controlador não se aproxima da sua referência, detalhe esse projetado para não colocar os atuadores em saturação devido às discrepâncias do controlador Proporcional que determina essa mesma referência.

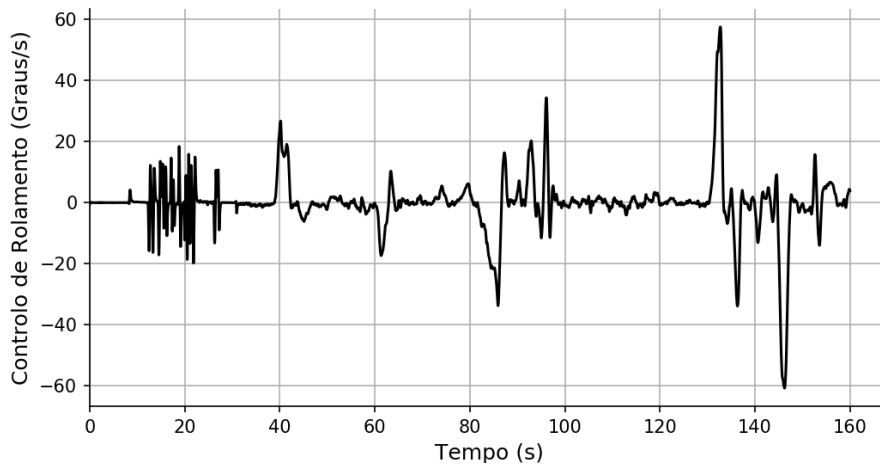


Figura 4.5: Sinal de controlo da atitude de Rolamento do veículo.

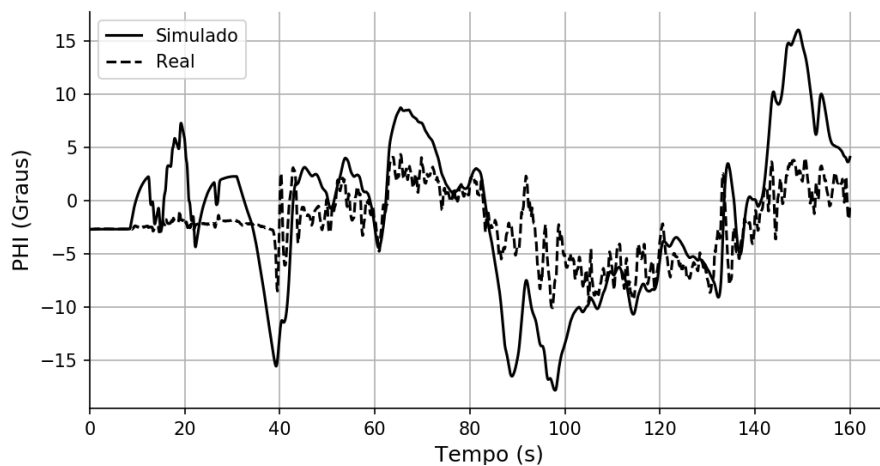


Figura 4.6: Comparação entre a atitude de Rolamento simulada e a do voo físico.

Por análise aos gráficos 4.8 e 4.6, pode-se concluir que a performance em termos de atitude, o controlador LQR Robusto tem uma performance superior dado que demonstra atitudes mais diretas em relação ao seu vetor de referência em comparação com o controlador implementado no *ArduPilot* que limita bastante o controlo do veículo e assim não permite obter a atitude desejada pelo sistema de controlo de referência, podendo este ser determinado pelo operador ou por um sistema de controlo de trajetória. Em síntese, conclui-se que ambos os controladores atingem o seu objetivo, sendo o controlador LQR Robusto mais convenientemente para a missão com uma performance superior.

De modo a validar o controlador deste trabalho é necessário analisar as outras atitudes do *quadrotor*. Nos gráficos das Figuras 4.9 e 4.10 são demonstradas, respetivamente, a comparação entre a atitude de arfagem com a referência e o controlo da mesma.

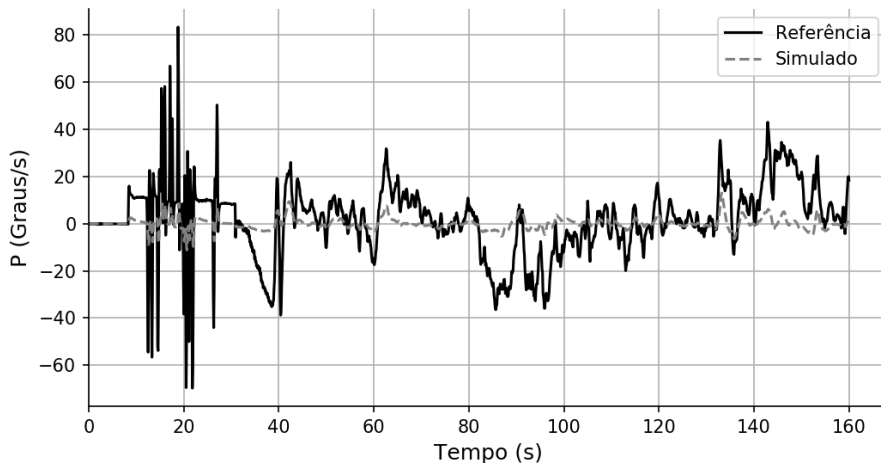


Figura 4.7: Taxa de Arfagem simulada com referência de um voo físico.

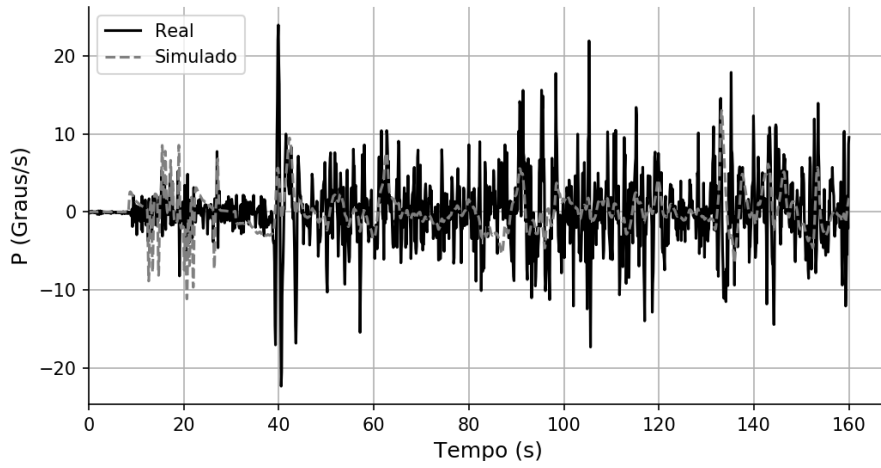


Figura 4.8: Comparação da taxa de atitude de Rolamento do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico.

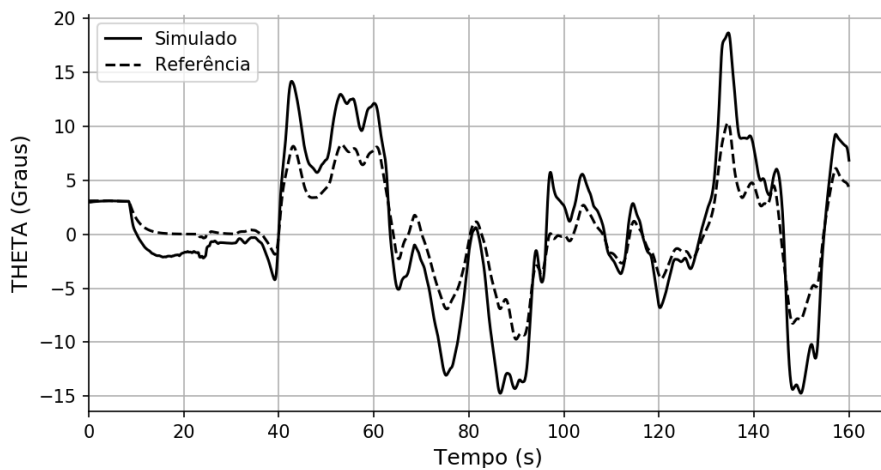


Figura 4.9: Atitude de Arfagem Simulada com referência de um voo físico.

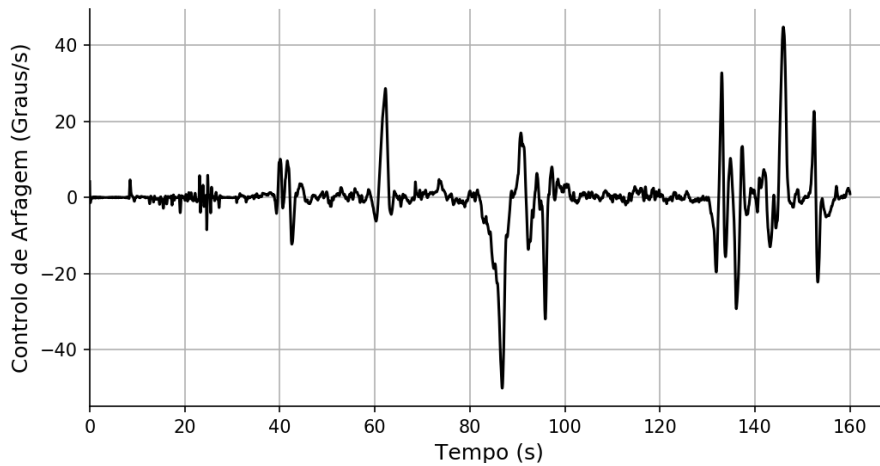


Figura 4.10: Sinal de controlo da Atitude de Arfagem do veículo.

Na Figura 4.11 é demonstrada a comparação entre a atitude de Arfagem do PID físico e do LQR Robusto simulado.

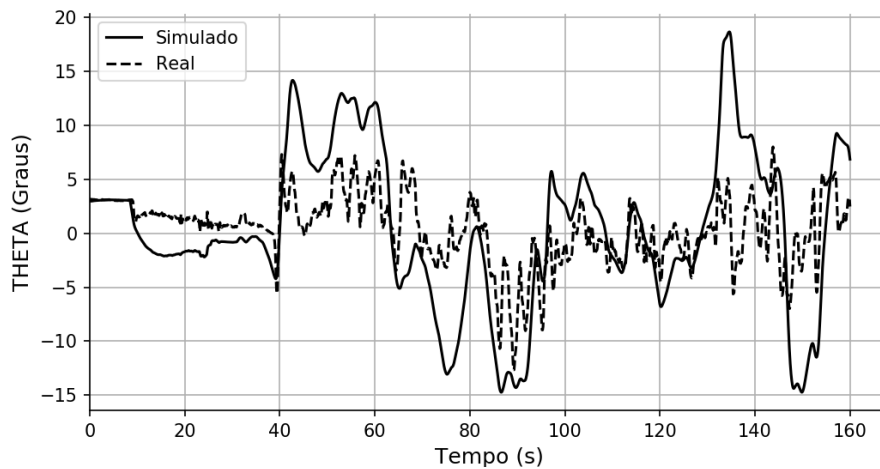


Figura 4.11: Comparação entre o Rolamento simulado e o do voo físico.

Nas Figuras 4.12 e 4.13, respetivamente, são demonstradas a taxa de arfagem em função da referência do voo físico e a comparação da mesma com o voo físico.

Nos gráficos referentes à atitude de arfagem todas as conclusões e análises são semelhantes às anteriormente efetuadas para a atitude de rolamento, tanto como o aumento de performance, a suavização da curva, as discrepâncias da referência e as suas comparações entre o controlo projetado e o PID.

Nos gráficos das Figuras 4.14 e 4.15 são demonstradas, respetivamente, a comparação entre a atitude de guinada com a referência e o controlo da mesma. Na Figura 4.14, a atitude de guinada pode-se afirmar que na maioria da simulação é coincidente com a curva da sua referência e que tem a capacidade de efetuar uma mudança bastante suave ao longo de toda a sua modelação.

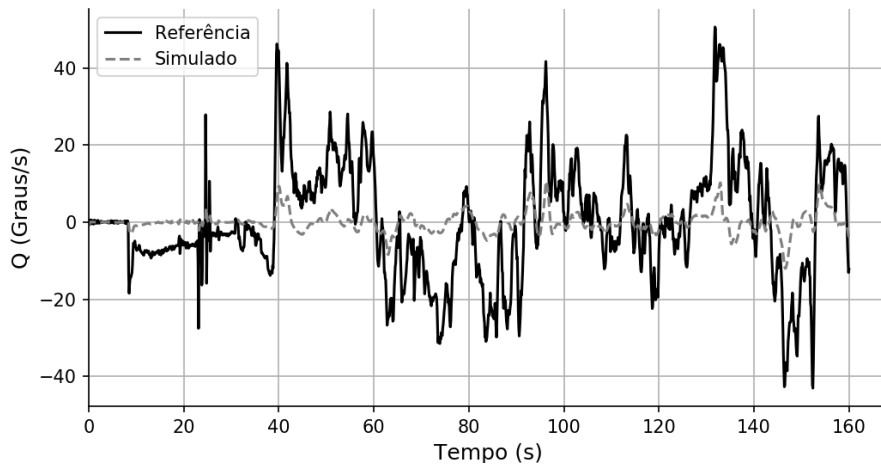


Figura 4.12: Taxa de Pranchamento simulada com referência de um voo físico.

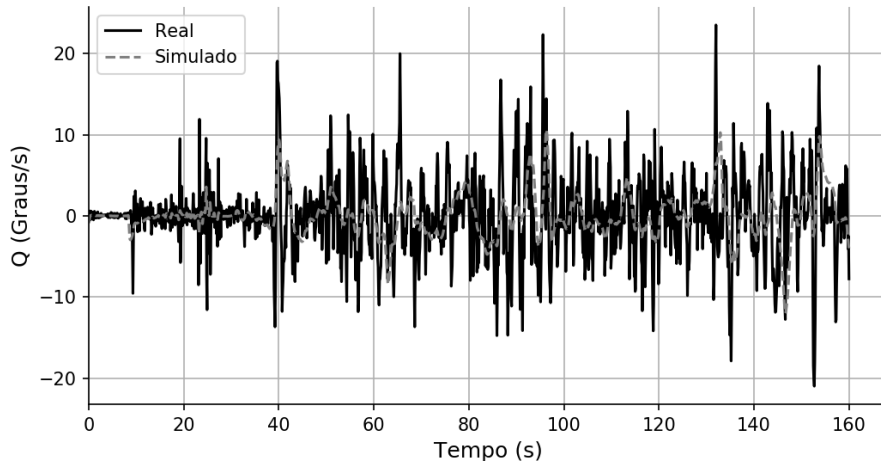


Figura 4.13: Comparação da taxa de atitude de Arfagem do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico.

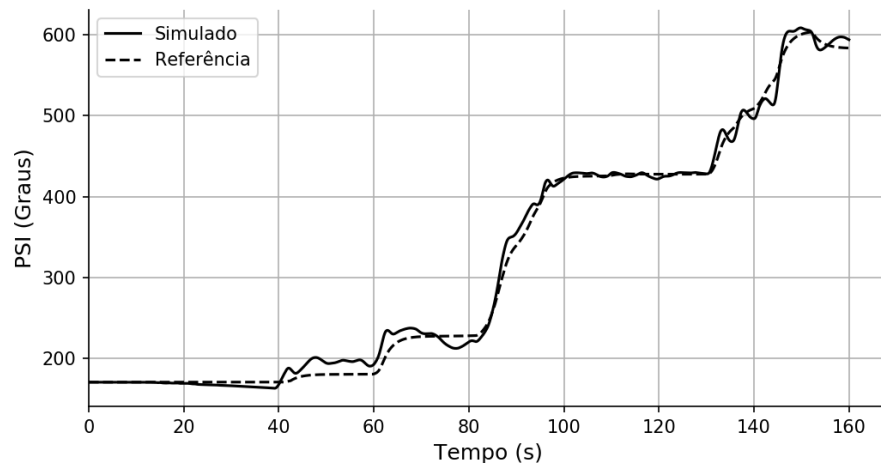


Figura 4.14: Guinada Simulada com referência de um voo físico.

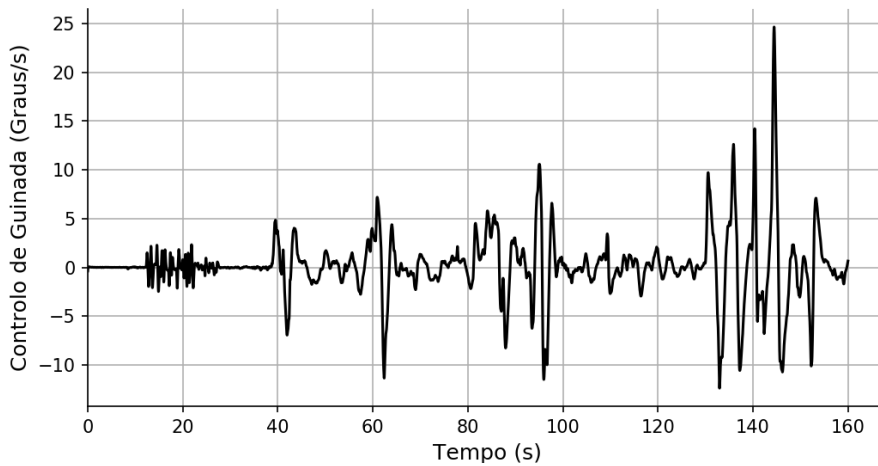


Figura 4.15: Sinal de controle da Guinada do veículo.

Na Figura 4.16 é demonstrada a comparação entre a atitude de Guinada do PID físico e do LQR Robusto simulado. Nessa comparação entre o controlador deste trabalho e o utilizado no voo físico, o LQR Robusto é mais suave e não sofre tanto com o efeito de sobre-elevação, pois a mudança no intervalo de tempo [140, 160] a curva simulada vai direta ao seu objetivo sem grandes oscilações.

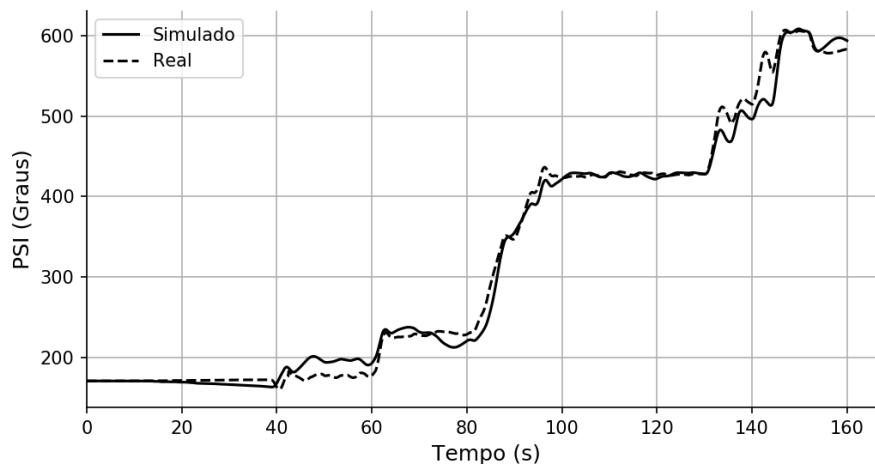


Figura 4.16: Comparação entre a Guinada simulada e a do voo físico.

Nas Figuras 4.17 e 4.18, respectivamente, são demonstradas a taxa de guinada em função da referência do voo físico e a comparação da mesma com o voo físico, concluindo que o controle do LQR Robusto tem uma taxa idêntica ao voo físico mas com uma suavidade superior, permitindo o *quadrotor* efetuar a atitude desejada mas sem os efeitos de sobre-elevação, com uma redução de energia consumida na operação do veículo.

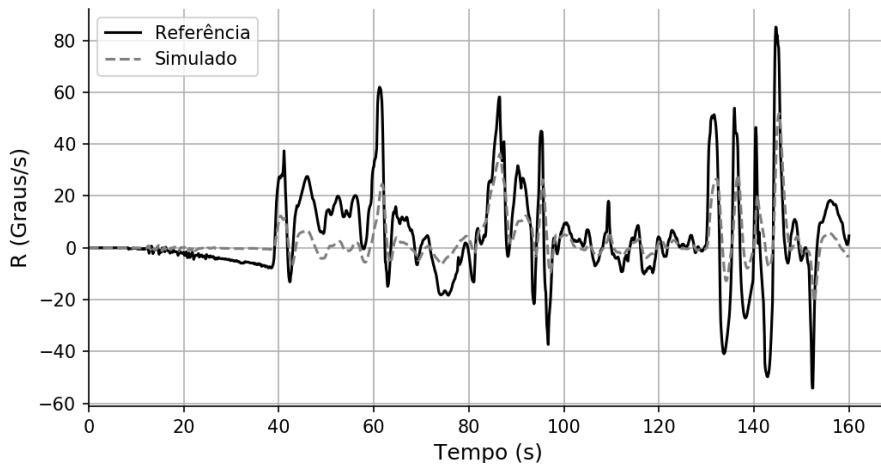


Figura 4.17: Taxa de Guinada simulada com referência de um voo físico.

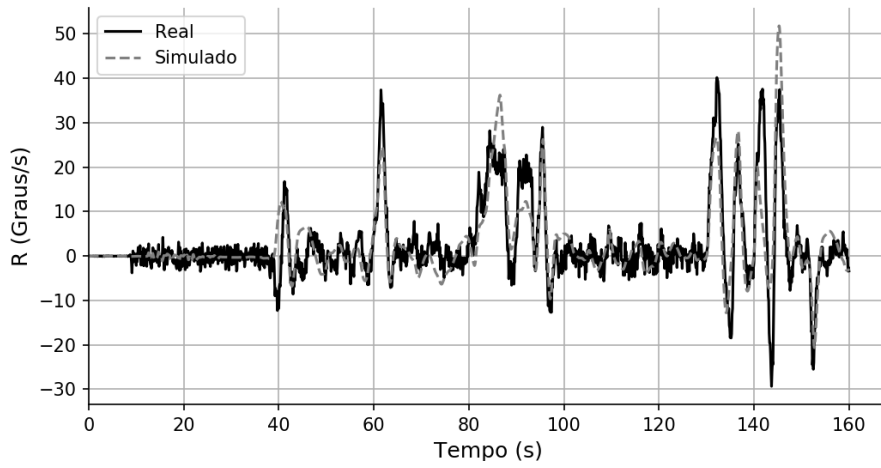


Figura 4.18: Comparação da taxa de atitude de Guinada do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico.

4.5 Simulação de Referência Estipulada

A Albatroz Engenharia® tem como projeto a inspeção de linhas elétricas com veículos tripulados tendo como *Payload* um sistema LiDAR para mapeamento a três dimensões. Este equipamento poderá ser implementado num veículo não tripulado [3] permitindo assim reduzir significativamente os custos de operação.

Neste trabalho foram efetuadas simulações para verificar a aplicabilidade dessa técnica para dois casos distintos, como a inspeção de torres e vãos de linhas elétricas. No primeiro caso este é essencialmente efetuado através da mudança da atitude de guinada e rolamento, e no segundo caso, para um vão de linha elétrica é necessário manter uma atitude de pranchamento/arfagem constante durante a deslocação do *quadrotor*.

Para análise da simulação é necessário ter em consideração os gráficos das atitudes, controlo e suas taxas representas nas Figuras 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27, sendo um voo completo simulado com duração de $t = 220s$ e um vetor de referência variável ao longo do tempo, sendo definido pelo sistema 4.21. Devido à escala temporal dos gráficos e eficácia da filtragem Kalman-Bucy, não é visível a sua pequena oscilação de sinal. Com a análise das taxas de atitude e controlo é possível observar que as mesmas estão dentro de parâmetros aceitáveis para a modelação do veículo, não tendo grandes discrepâncias e garantindo a atitude constante ao longo de todo o intervalo de tempo.

$$\begin{cases} x_{ref} = [10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] & \text{se } 10 \leq t < 70 \\ x_{ref} = [0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0] & \text{se } 70 \leq t < 140 \\ x_{ref} = [0 \ 0 \ 5 \ 0 \ 60 \ 0] & \text{se } 140 \leq t \leq 200 \end{cases} \quad (4.21)$$

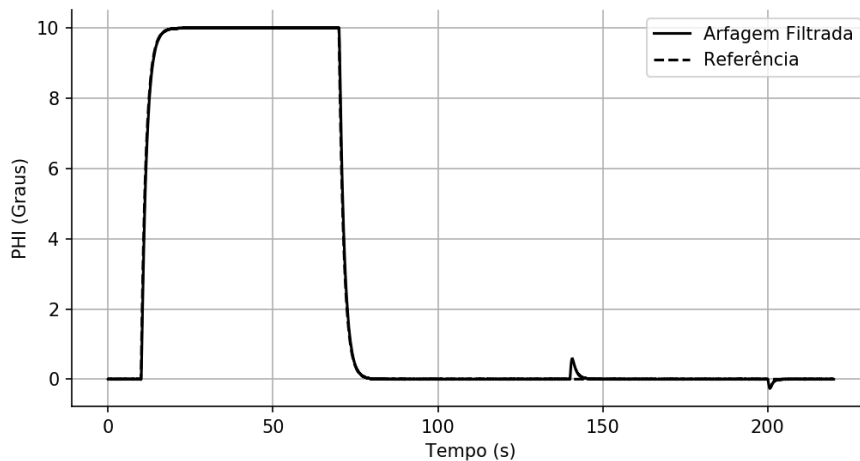


Figura 4.19: Gráfico em função do tempo com a atitude de Arfagem filtrada e sua referência.

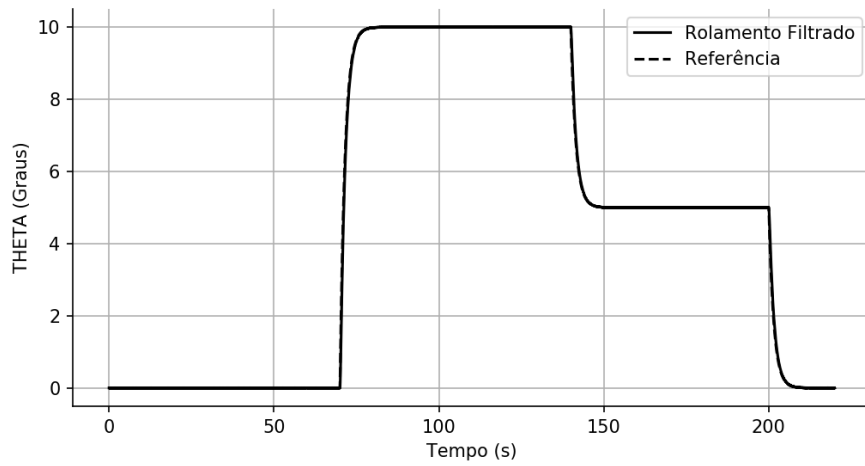


Figura 4.20: Gráfico em função do tempo com a atitude de Rolamento filtrado e sua referência.

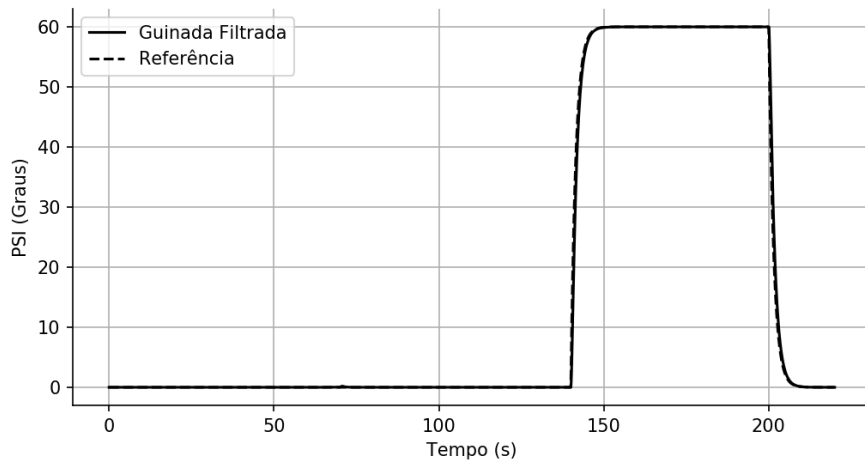


Figura 4.21: Gráfico em função do tempo com a atitude de Guinada filtrada e sua referência.

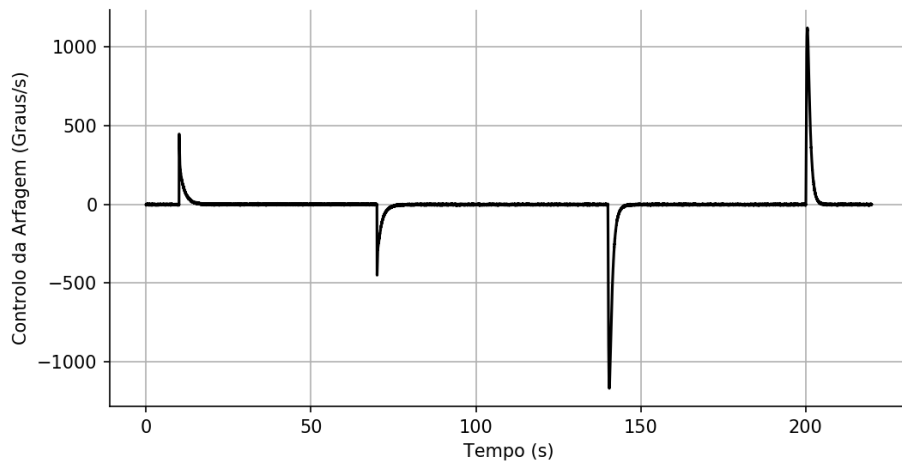


Figura 4.22: Gráfico de controle da atitude de Arfagem em função do tempo.

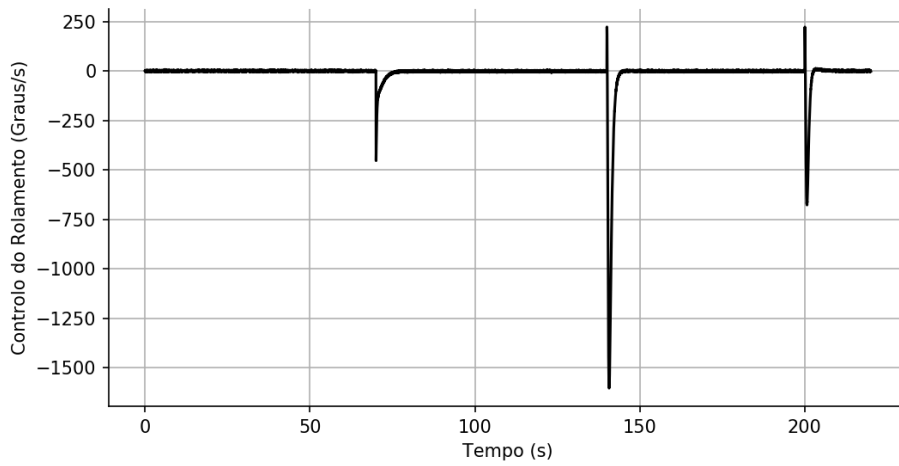


Figura 4.23: Gráfico de controlo da atitude de Rolamento em função do tempo.

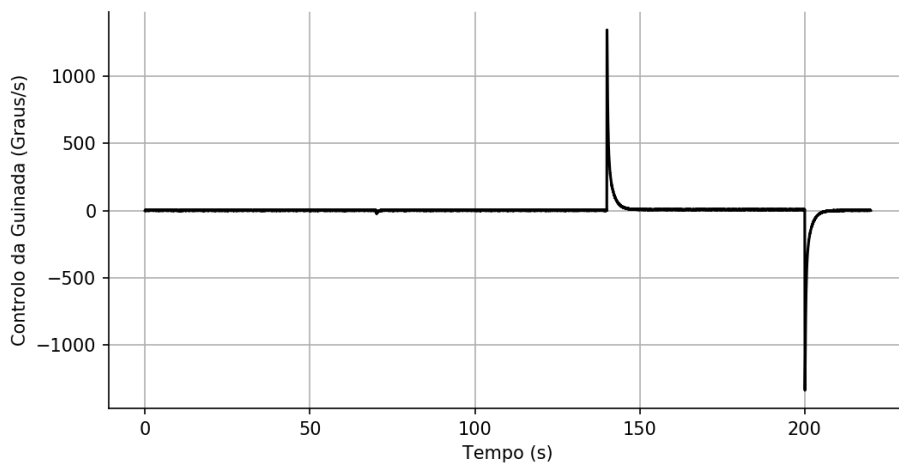


Figura 4.24: Gráfico de controlo da atitude de Guinada em função do tempo.

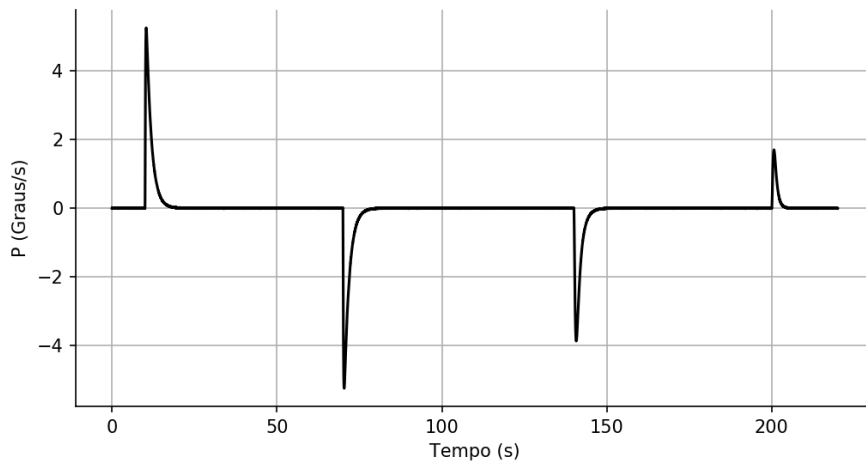


Figura 4.25: Gráfico da taxa da atitude de Arfagem em função do tempo.

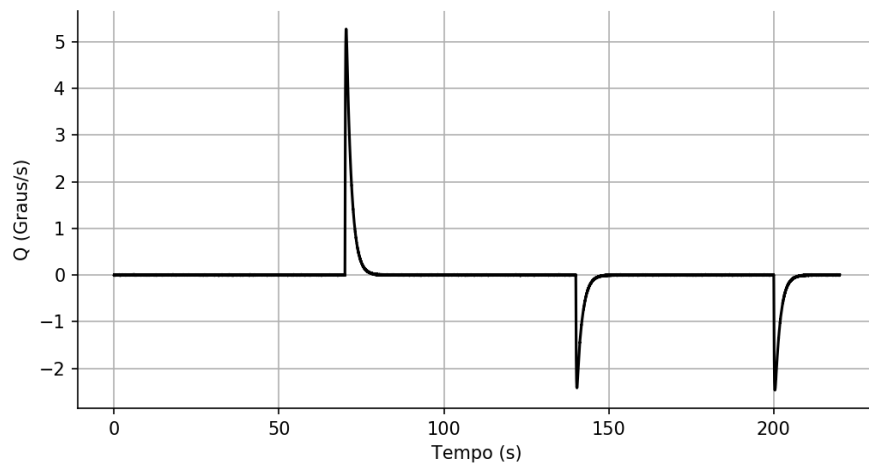


Figura 4.26: Gráfico da taxa da atitude de Rolamento em função do tempo.

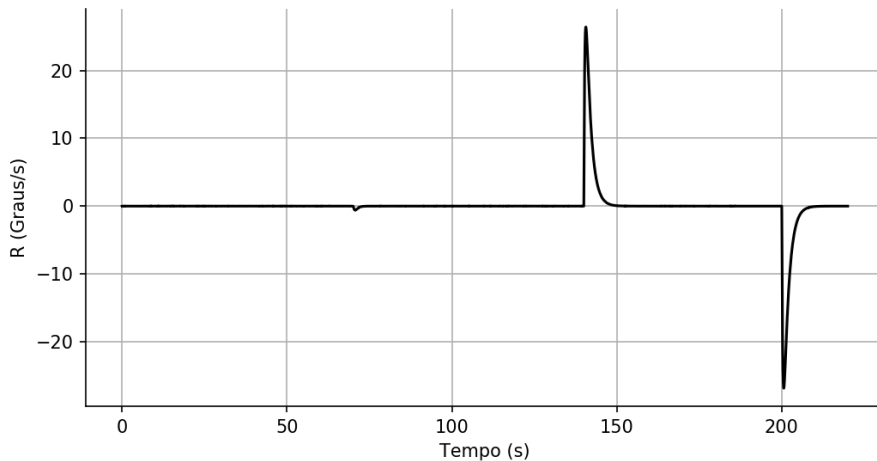


Figura 4.27: Gráfico da taxa da atitude de Guinada em função do tempo.

Para análise mais aprofundada dos gráficos é necessário efetuar uma análise por intervalos de tempo específicos para cada tipo de atitude. Como as taxas das atitudes não dependem da referência estas não serão aprofundadas nesta fase.

Garantindo o seguimento da atitude com a sua referência, é necessário analisar os gráficos representados nas Figuras 4.28, 4.29 e 4.30. No gráfico da Figura 4.28 é visível a sua referência e a atitude de arfagem, várias conclusões são retiradas do gráfico, como o tempo de reação ser de aproximadamente 5 segundos e que toda a atitude, sendo filtrada e aproximada, tem a capacidade de seguir a sua referência. Todos os dados foram simulados e filtrados por um filtro Kalman-Bucy e através disso é possível afirmar que o máximo das curvas de controlo, referente aos gráficos anteriores, contêm valores elevados nos sinais de controlo para o tipo de equipamento, mas nada de agravante pois estes são apenas máximos instantâneos. Todo este controlo foi limitado como nas simulações de referência física, através da aplicação de um pré filtro de modo a efetuar uma limitação dinâmica. Na Figura 4.19 existe um detalhe a comentar, as pequenas saliências na curva de sinal no mesmo instante da mudança de atitude de rolamento sendo estas consequência da dependência da matriz A pelas taxas de atitude do veículo. Nos gráficos das Figuras 4.29 e 4.30, o sistema tem a capacidade de seguir e manter, ao longo de

todo o intervalo de tempo a referência estipulada pela simulação. Com esta análise é possível afirmar que o sistema tem a capacidade de efetuar uma inspeção a uma torre elétrica com a sua atitude de rolamento constante num ambiente ruidoso. No entanto não foi efetuada a sua validação num ambiente com presença de perturbações exteriores ao sistema.

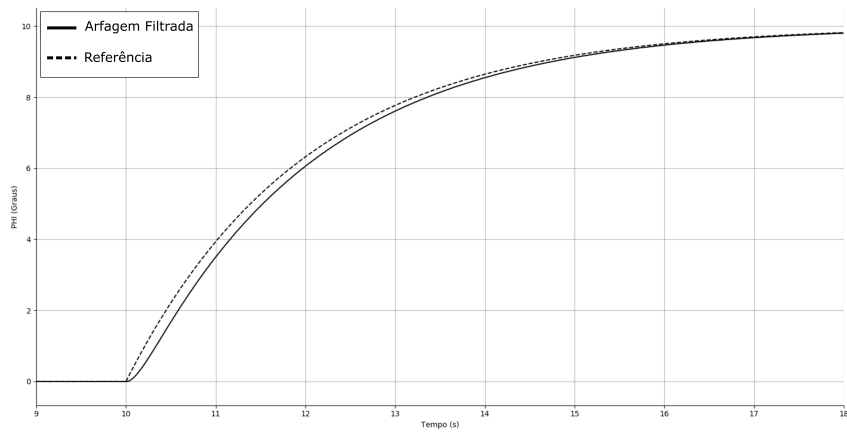


Figura 4.28: Gráfico da atitude da Arfagem com referência no intervalo de tempo [9, 16]s.

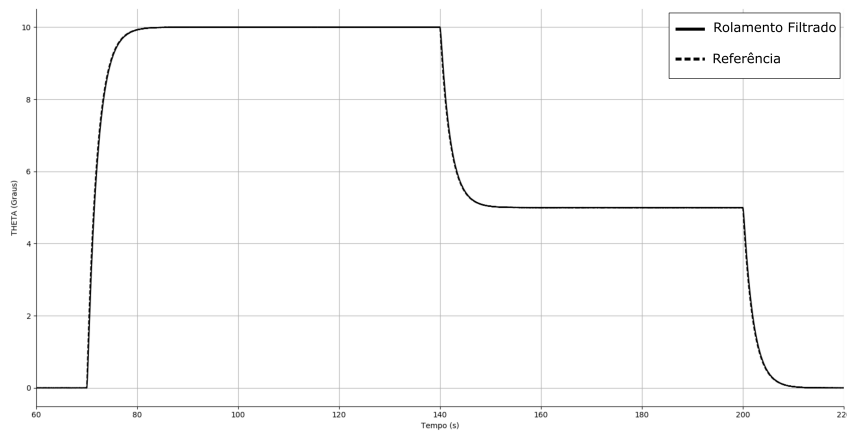


Figura 4.29: Gráfico da atitude de Rolamento com referência no intervalo de tempo [60, 220]s.

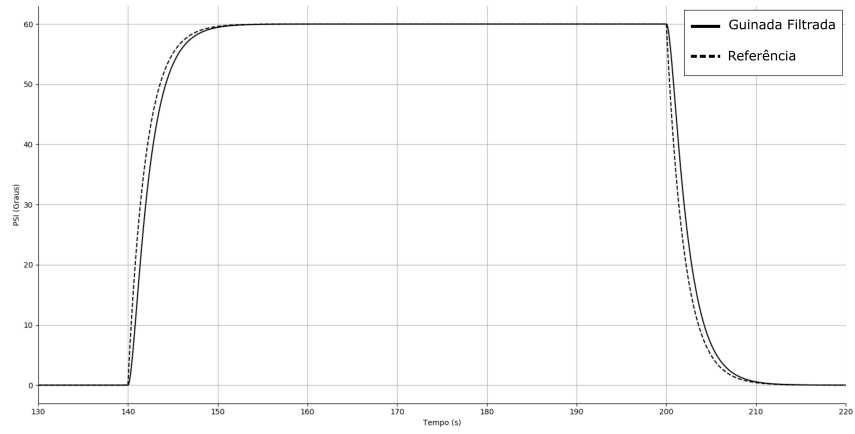


Figura 4.30: Gráfico da atitude de Guinada com referência no intervalo de tempo [130, 210]s.

Capítulo 5

Conclusão e Discussão

5.1 Contribuições

Com a grande procura de veículos não tripulados, especialmente do tipo *quadrotor*, houve também um grande desenvolvimento a nível tecnológico. Devido à particular atenção e impacto que este tipo de tecnologias têm tido nos tempos atuais e também ao grande potencial que se espera que venham a ter no futuro, decidi realizar esta dissertação de forma a desenvolver veículos com características mais inovadoras, nesta que é uma área tão promissora. Muitos destes veículos são controlados por controladores PID, sendo controladores simples e não robustos.

Em parceria com a Albatroz Engenharia® foi possível ter em minha posse um *quadrotor* de grandes dimensões com o objetivo de efetuar a inspeção a linhas elétricas de média e alta tensão, reduzindo assim o preço de aquisição e operação em comparação com um helicóptero, e tendo a capacidade de este poder ser operado autonomamente. Para a realização destas inspeções a linhas elétricas é necessário um controlador robusto para garantir a maior qualidade na aquisição dos dados a analisar.

Este trabalho foi essencialmente baseado nos processos de tratamento de dados para a simulação, na filtragem de Kalman-Bucy e na projeção de um controlador LQR Robusto para a atitude dinâmica de um *quadrotor*, baseado no método de *Arstein*. Dois voos distintos foram cedidos pela Albatroz Engenharia® de modo a obter um vetor de referência para as simulações efetuadas neste trabalho, e de forma a poder também efetuar uma validação dos dados obtidos nas simulações. Estando a lidar com sistemas físicos, existem limitações a níveis estruturais e dinâmicos. Assim, foi aplicado um pré filtro no vetor de referência, para suavizar a curva de sinal do controlo, permitindo assim a sua limitação dinâmica e não constante.

Através de um algoritmo realizado para esta dissertação, foi possível determinar a diagonal das matrizes Q e R , para aproximar o controlador o máximo possível ao seu vetor de referência.

De modo a aumentar a aplicabilidade desta dissertação, foi projetado um filtro Kalman-Bucy para simulações de referência estipulada de modo a simular uma atitude durante uma inspeção de um vão de linha elétrica e de uma torre. Num voo físico este encontra-se constantemente perturbado de modo a ser necessário a aplicação de um sistema de filtragem. Foi gerado um ruído gaussiano e ao perturbar o vetor de estado da simulação, obtiveram-se resultados de atitude filtrados aproximadamente coincidentes à atitude não perturbada.

Com a identificação das matrizes e do modelo de controlo, foi projetado um controlador LQR Robusto para dois casos distintos, um com a referência de um voo físico e outro com uma referência estipulada. O controlador projetado tem a particularidade de necessitar de uma determinação da equação de *Riccati* a cada ciclo da modelação do controlo, devido à sua matriz de estado A não ser constante, e depender das taxas das atitudes. Para o caso particular da referência estipulada, foi projetada uma nova interface entre a filtragem de Kalman-Bucy e o controlador LQR Robusto.

Variados resultados foram obtidos com este trabalho. É inicialmente determinada a curva de referência proveniente do pré filtro, sendo dependente do sinal de controlo e do seu limite. Na filtragem de Kalman-Bucy são obtidos resultados relacionados com a atitude do *quadrotor*

após a sua perturbação com um ruído gaussiano. Na simulação com a referência do voo físico, são obtidos resultados da atitude do *quadrotor* e as suas taxas como também uma comparação (não para fins de validação) entre o controlador já instalado e o projetado nesta dissertação. Na simulação de referência estipulada, são apresentados resultados simulados com as atitudes e taxas filtradas e não filtradas dependente de uma referência proposta para esta dissertação. A filtragem de Kalman-Bucy demonstrou uma grande capacidade de filtração, sendo um grande candidato a filtragem para estes veículos. Após a calibração das matrizes Q e R foram obtidos resultados provenientes do controlador com base na referência do voo físico com uma qualidade aceitável para um *quadrotor*. Este possuiu curvas de atitude mais suaves que o controlador já instalado, sendo assim um controlador com operação de custo inferior, mas sempre com alguns desvios em relação à sua referência. No voo com referência estipulada após os dados serem filtrados demonstraram que o controlador tem a capacidade de seguir uma atitude perante o ruído gaussiano.

Devido à matriz A não ser constante esta proporciona uma limitação no sistema, pois necessita de determinar em todos os ciclos a equação de *Riccati* consumindo uma grande capacidade de processamento.

O controlador LQR Robusto em comparação ao PID é menos reativo, o que significa que necessita de um tempo de resposta superior, o que ainda se agrava mais com a aplicação de um pré filtro de modo a limitar o sinal de controlo, tornando o sistema mais suave. Este défice de reação pode ser prejudicial para missões realizadas em ambientes adversos, como o ambiente de operação na presença rajadas de vento ou locais apertados.

A matriz de controlo B depende do braço e dos momentos de inércia da estrutura da plataforma de voo. Isto limita a modelação do controlo para apenas uma plataforma e, ao contrário do PID, esta não pode ser generalizada para qualquer plataforma.

As matrizes Q e R numa fase inicial são determinadas pelo método de *Bryson Modificado*, o que torna as curvas de atitude do sistema irregulares, sendo necessário o uso de processos iterativos até obter resultados favoráveis ao projeto.

Uma limitação existente no *software ArduCopter* corresponde ao facto de o seu vetor de referência ser determinado por um controlador do tipo P, um controlador bastante básico que determinará a referência para um controlador robusto o que não poderá em alguns casos dar os resultados mais eficientes de operação.

5.2 Trabalhos Futuros

De modo a complementar o controlador robusto de atitude desta dissertação é necessário também o desenvolvimento de um controlador robusto para a trajetória do veículo. Deste modo, este trabalho pode assim aplicar-se a um caso físico e também determinar a qualidade da robustez do sistema de controlo presente num meio rico em ruído proveniente dos atuadores e do ecossistema de operação.

A filtragem de Kalman-Bucy filtrou ruídos baseados numa série de *Gauss*, o que seria necessário comprovar a eficácia e adequabilidade do mesmo perante um sistema com ruídos de fontes exteriores, como por exemplo o vento.

Para o funcionamento do controlador robusto desenvolvido na presente dissertação é necessário uma capacidade de processamento elevada, e também uma modelação do sistema de controlo de modo a que não seja preciso recorrer à determinação do resultado da equação de *Riccati*. Finalizando, as matrizes Q e R foram determinadas através de métodos iterativos, sendo inefi-

ciente perante uma projeção de variados tipos de plataforma de voo, podendo ser então determinado um processo de generalização para as plataformas de voo ou então uma determinação das matrizes mais eficaz para além do método de *Bryson Modificado*.

Bibliografia

- [1] W. Dong, G. Gu, X. Zhu, and H. Ding, "Modeling and Control of a Quadrotor UAV with Aerodynamic Concepts," *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 7, no. 5, 2013, pp. 377-382.
- [2] S. C. R. Antunes, "Controlo Optimo Robusto de Osciladores Caóticos," Dissertação de Mestrado, Universidade da Beira Interior, 2009.
- [3] S. C. R. Antunes, "Controlo Supervisionado de Aeronaves Autónomas," Tese de Doutoramento, Universidade da Beira Interior, 2016.
- [4] T-Motor, "T-Motor U8 170Kv Specifications," 2017, visto em 03-05-2018. [Online]. Disponível: <http://store-en.tmotor.com/goods.php?id=324>
- [5] M. Marques, A. Brum, S. Antunes, and J. Gomes Mota, "Sense and Avoid implementation in a small Unmanned Aerial Vehicle," in *13th APCA International Conference on Control and Soft Computing (CONTROLO 2018)*, Ponta Delgada, 2018.
- [6] A. Gibiansky, "Quadcopter Dynamics, Simulation, and Control Introduction Quadcopter Dynamics," 2012, visto em 01-04-2018. [Online]. Disponível: <http://andrew.gibiansky.com/downloads/pdf/Quadcopter%20Dynamics,%20Simulation,%20and%20Control.pdf>
- [7] A. Torres Gaitan and Y. Bolea, "Modeling and robust attitude control of a quadrotor system," in *2013 10th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*. IEEE, sep 2013, pp. 7-12.
- [8] M. P. Tucci, "Understanding the difference between robust control and optimal control in a linear discrete-time system with time-varying parameters," *Computational Economics*, vol. 27, no. 4, 2006, pp. 533-558.
- [9] N. Killingsworth and M. Krstic, "PID tuning using extremum seeking: online, model-free performance optimization," *IEEE Control Systems*, vol. 26, no. 1, feb 2006, pp. 70-79.
- [10] D. Luenberger and Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*, ser. International Series in Operations Research & Management Science. Boston, MA: Springer US, 2008, vol. 116.
- [11] K. Hassani and W.-S. Lee, "Optimal Tuning of Linear Quadratic Regulators Using Quantum Particle Swarm Optimization," *International Conference on Control, Dynamic Systems and Robotics*, no. 59, 2014, pp. 1-8.
- [12] G. M. Siouris, *An Engineering Approach to Optimal Control and Estimation Theory*. Ohio: Wiley-Interscience, jan 1997, no. 1.
- [13] R. L. W. Li and D. A. Lawrence, *LINEAR STATE-SPACE CONTROL SYSTEMS*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
- [14] M. R. Mokhtarzadeh, M. R. Pournaki, and A. Razani, "A note on periodic solutions of Riccati equations," *Nonlinear Dynamics*, vol. 62, no. 1-2, oct 2010, pp. 119-125.
- [15] P. Tomás and M. Martins, "Flight dynamics and simulation of a generic aircraft for aeroservoelastic design," Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, 2016.

- [16] O. Föllinger, "Regulation Technology," *Hüthig Heidelberg*, 1990.
- [17] J. J. E. Slotine, *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1991.
- [18] J. Park, K. Choi, and S. Lee, "Orbital rendezvous using two-step sliding mode control Jong-Uk," *Science And Technology*, no. 4, 1999, pp. 239-245.
- [19] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulatorst," *International Journal of Control*, vol. 38, no. 2, aug 1983, pp. 465-492.
- [20] V. Utkin and Hoon Lee, "Chattering Problem in Sliding Mode Control Systems," in *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06*. IEEE, 2006, pp. 346-350.
- [21] W. Levine and R. Reichert, "An introduction to H^∞ control system design," in *29th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 1990, pp. 2966-2974 vol.6.
- [22] L. G. S. Longhi, "Solução do Problema de Controle H^∞ não-linear," Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.
- [23] G. H. Hardy, "The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2_14, no. 1, 1915, pp. 269-277.
- [24] A. J. Van der Schaft, "L2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state-feedback H^∞ control," 1992, pp. 770-784.
- [25] D. Kihás and H. J. Marquez, "Computing the distance between a nonlinear model and its linear approximation: an L2 approach," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 28, no. 12, nov 2004, pp. 2659-2666.
- [26] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and M. A. Rotea, " H^∞ Optimal Control with State-Feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 8, 1988, pp. 786-788.
- [27] L. M. Argentim, W. C. Rezende, P. E. Santos, and R. A. Aguiar, "PID, LQR and LQR-PID on a quadcopter platform," *2013 International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2013*, 2013.
- [28] C. T. Tony and W. MacKunis, "Robust attitude tracking control of a quadrotor helicopter in the presence of uncertainty," *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2012, pp. 937-942.
- [29] S. Bouabdallah, "Design and Control of Quadrotors With Application To Autonomous Flying," Tese de Doutorado, À La Faculté des Sciences et Techniques de L'Ingénieur, Suíça, 2007.
- [30] R. Xu and U. Ozguner, "Sliding Mode Control of a Quadrotor Helicopter," in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2006, pp. 4957-4962.
- [31] N. Jamali, S. Amlashi, M. Rezaei, H. Bolandi, and A. K. Sedigh, "Robust Second Order Sliding Mode Control for a Quadrotor Considering Motor Dynamics," *International Journal of Control Theory and Computer Modeling (IJCTCM)*, vol. 4, no. 12, 2014, pp. 9-25.
- [32] S. Khatoon, D. Gupta, and L. K. Das, "PID & LQR control for a quadrotor: Modeling and simulation," in *2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*. IEEE, sep 2014, pp. 796-802.

- [33] R. Dwivedi and D. Dohare, "PID Conventional Controller and LQR Optimal controller for Speed analysis of DC Motor : A Comparative Study," *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, vol. 2, 2015, pp. 508-511.
- [34] H. Lim, J. Park, D. Lee, and H. J. Kim, "Build your own quadrotor: Open-source projects on unmanned aerial vehicles," *IEEE Robotics Automation Magazine*, vol. 19, no. 3, Sept 2012, pp. 33-45.
- [35] K. N. Mogensen, "Motor-control considerations for electronic speed control in drones," *Texas Instruments*, 2016, p. 7.
- [36] A. Chovancová, T. Fico, u. Chovanec, and P. Hubinsk, "Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey)," *Procedia Engineering*, vol. 96, no. December, 2014, pp. 172-181.
- [37] NASA Mission Planning and Analysis Division, "Euler Angles, Quaternions, and Transformation Matrices," 1977, p. 42.
- [38] W. Huazhang, "Design and Implementation of Brushless DC Motor Drive and Control System," *Procedia Engineering*, vol. 29, 2012, pp. 2219-2224.
- [39] A. D. Team, "Dataflash Logs," 2016, visto em 26-04-2018. [Online]. Disponível: <http://ardupilot.org/copter/docs/common-downloading-and-analyzing-data-logs-in-mission-planner.html>
- [40] A. Matasov, "The Kalman-Bucy filter accuracy in the guaranteed parameter estimation problem with uncertain statistics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 3, mar 1994, pp. 635-639.
- [41] N. Maia, "Estimação de Incerteza em Modelos Dinâmicos pelo Método de Filtragem de Kalman-Bucy," Dissertação de Mestrado, Universidade da Beira Interior, 2009.
- [42] J. Doyle and G. Stein, "Robustness with observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, no. 4, aug 1979, pp. 607-611.
- [43] J. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, no. 1, feb 1981, pp. 4-16.
- [44] G. Due and S. Mammari, "Frequency-Shaped LQG/LTR Design: Application to the Robust Stabilization of an Helicopter," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 24, no. 8, sep 1991, pp. 39-44.
- [45] S. Bouabdallah, P. Murrieri, and R. Siegwart, "Design and Control of an Indoor Micro Quadrotor," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2004, pp. 4393-4398 Vol.5.

Apêndice A

Algoritmos Matemáticos Auxiliares

A.1 Algoritmo de Butcher

O algoritmo de Butcher surgiu do método de Range Kutta de ordem seis. Método esse que carece do conhecimento do elemento de estado seguinte, x_{n+1} . Sendo uma aproximação efetuada por um método de sexta ordem, este implica que o método apresente resultados mais precisos. A aplicação do método reside na resolução das seguintes equações diferenciais:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad u \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{A.1})$$

Tendo x como o conjunto dos elementos de estado do sistema e u como o vetor de estado. Assumindo os elementos do estado inicial, x_0 dados, os elementos de estado do sistema em t_1, t_2, \dots, t_k são determinados por:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, u_k) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{k_1}{4}, u_k\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{k_1}{8} + \frac{k_2}{8}, u_k\right) \\ k_4 &= h \cdot f\left(x_k - \frac{k_2}{2} + k_3, u_k\right) \\ k_5 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{3k_1}{16} + \frac{9k_4}{16}, u_k\right) \\ k_6 &= h \cdot f\left(x_k - \frac{3k_1}{7} + \frac{2k_2}{7} + \frac{12k_3}{7} - \frac{12k_4}{7} + \frac{8k_5}{7}, u_k\right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Tendo h como a variação de tempo entre cada passo de integração e deve ser um valor pequeno de modo a assegurar a convergência do método e que instantes em que se calcula cada x_{n+1} é equivalente a $t_{n+1} = t_n + h$. A solução do sistema, ou seja, a próxima integração é determinada por:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (\text{A.3})$$

A.2 Algoritmo de Euler Modificado

O algoritmo de Euler Modificado é outro algoritmo que permite a integração da equação diferencial do estado do sistema. Em comparação ao método de Butcher é um algoritmo bastante mais simples e com um custo de processamento inferior, mas pecando na precisão da integração. Assumindo um vetor de estado x_0 , os estados do sistema em t_1, t_2, \dots, t_k são determinados por:

$$x_{k+1} = x_k \frac{h}{2}(f(x_k, u_k) + f(x_k + h \cdot f(x_k, u_k), u_k)) \quad (\text{A.4})$$

Apêndice B

Tratamento da Referência

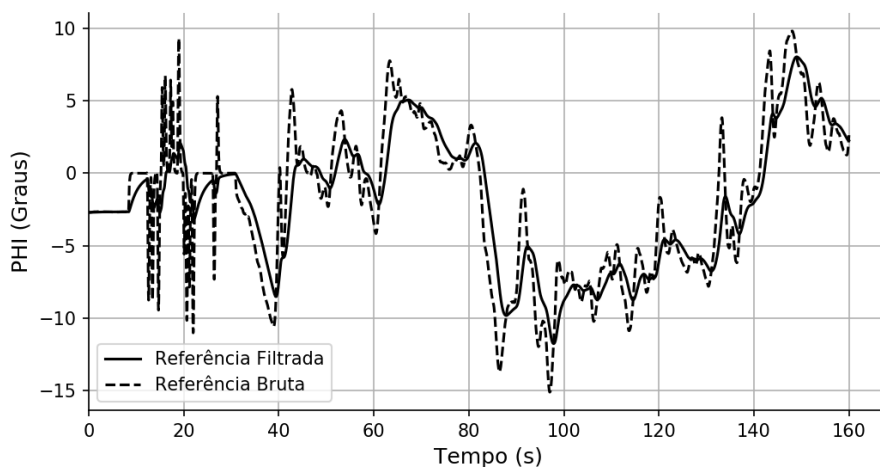


Figura B.1: Gráfico em função do tempo, representando a comparação entre a referência bruta da atitude de Rolamento física e a referência tratada.

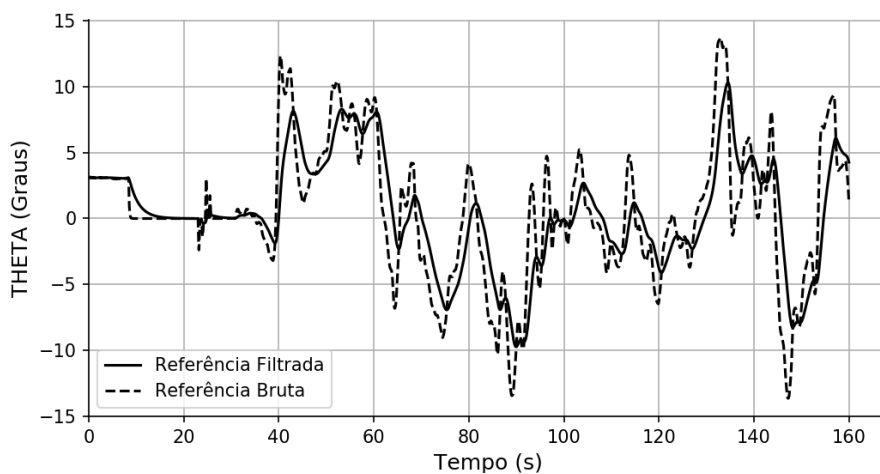


Figura B.2: Gráfico em função do tempo, representando a comparação entre a referência bruta da atitude de Arfagem físico e a referência tratada.

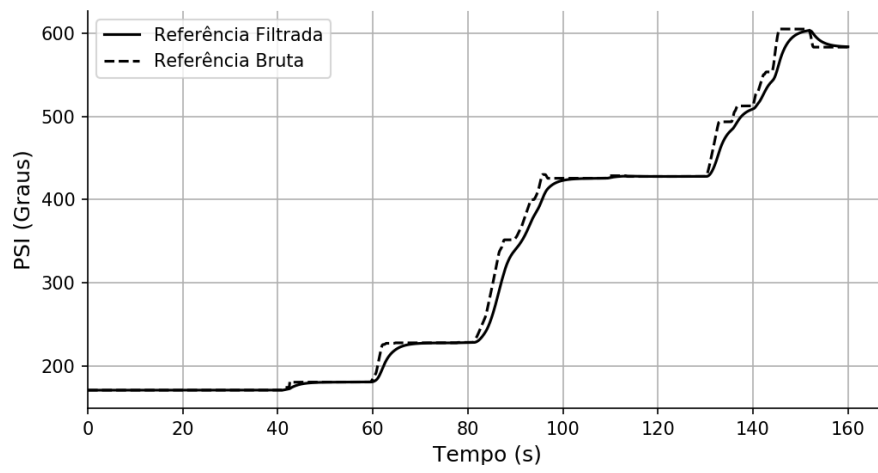


Figura B.3: Gráfico em função do tempo, representando a comparação entre a referência bruta da Guinada física e a referência tratada.

Apêndice C

Simulação do Voo Físico Completo

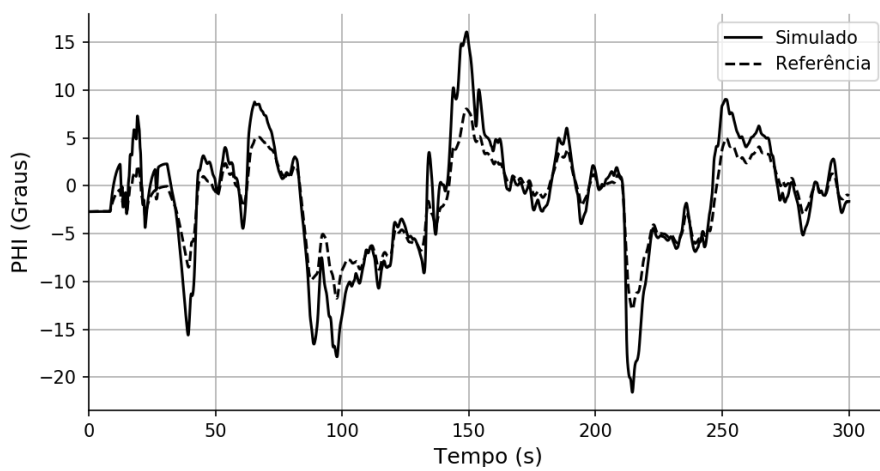


Figura C.1: Atitude de Rolamento Simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.

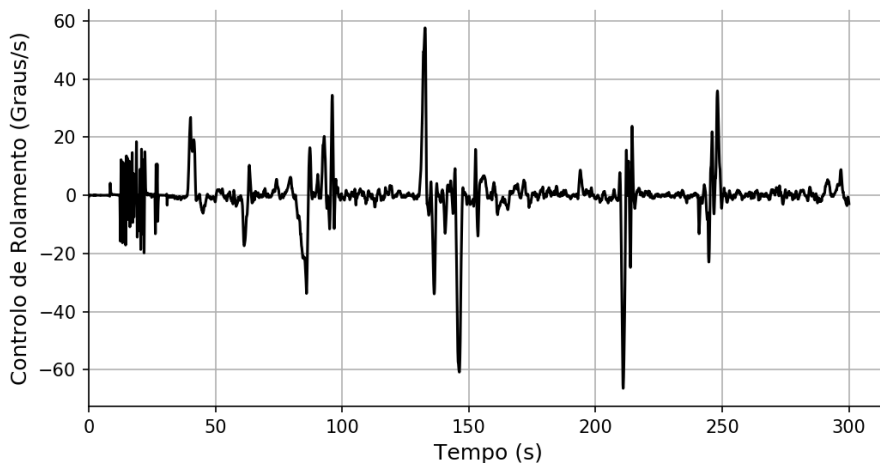


Figura C.2: Sinal de controle da atitude de Rolamento do veículo de uma simulação com duração de 300s.

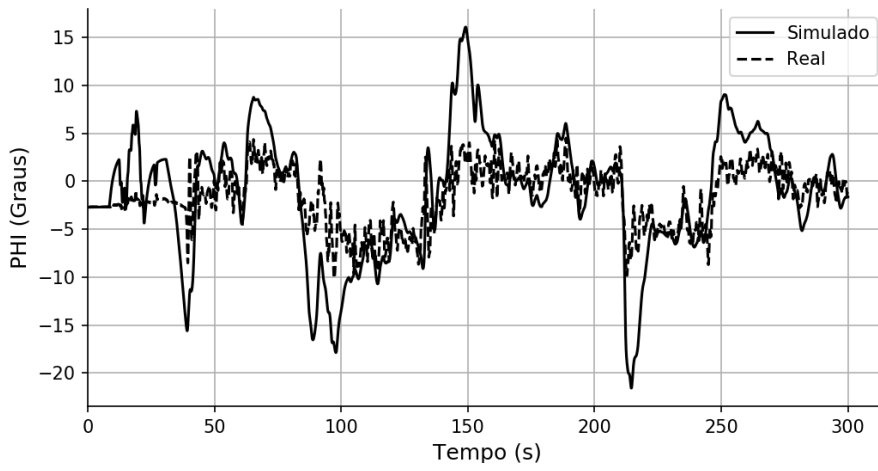


Figura C.3: Comparação entre a atitude de Rolamento simulada e a do voo físico completo com duração de 300s.

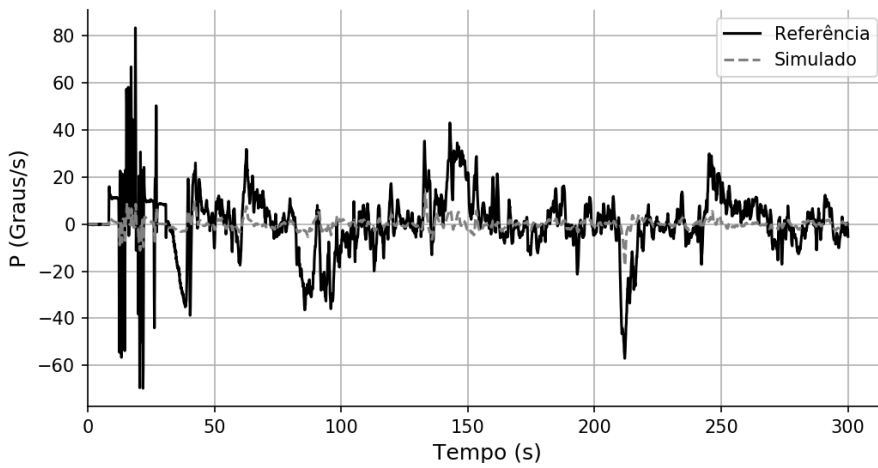


Figura C.4: Taxa de Pranchamento simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.

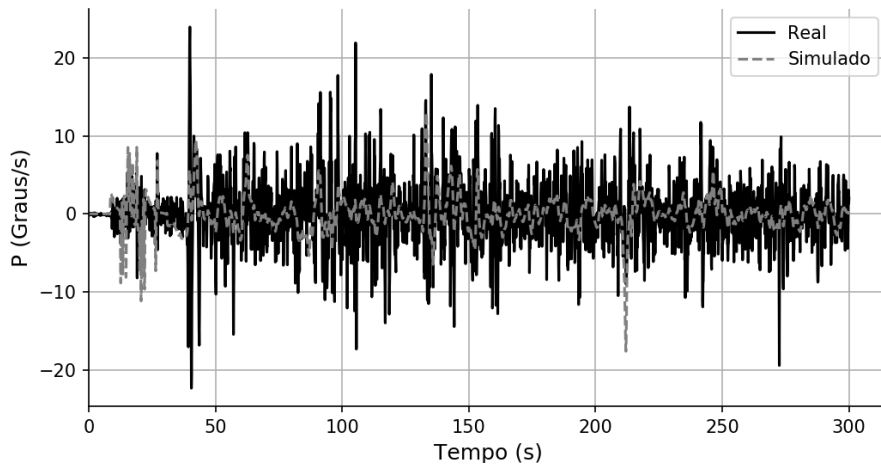


Figura C.5: Comparação da taxa de Pranchamento do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico completo com duração de 300s.

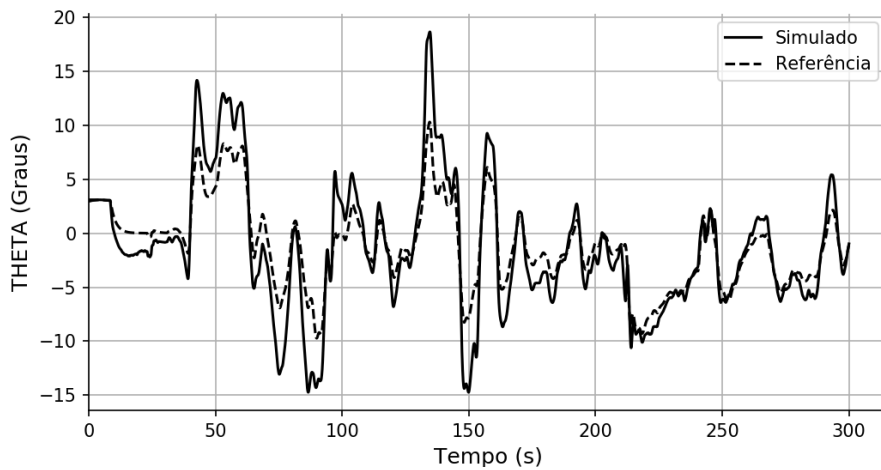


Figura C.6: Atitude de Arfagem Simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.

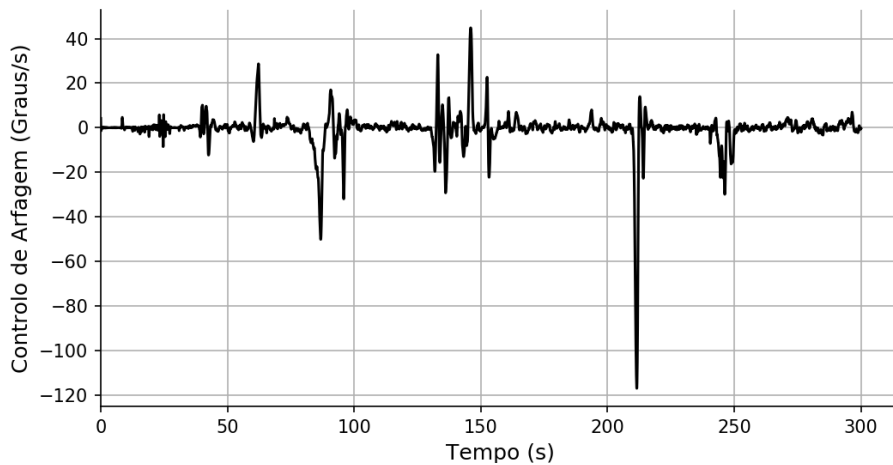


Figura C.7: Sinal de controle da atitude de Arfagem do veículo de uma simulação com duração de 300s.

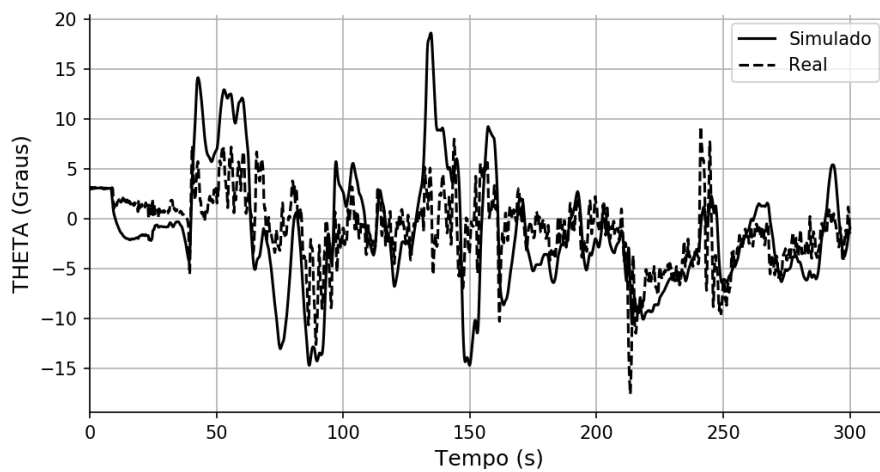


Figura C.8: Comparação entre a atitude de Arfagem simulada e o do voo físico com duração de 300s.

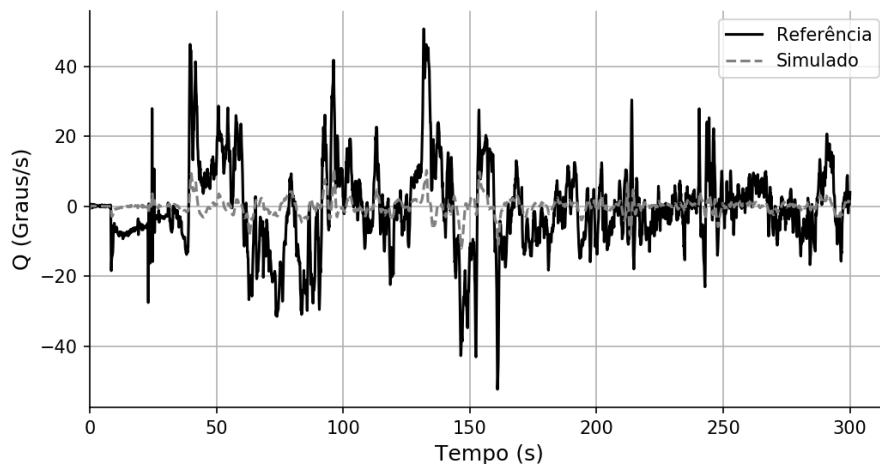


Figura C.9: Taxa de Arfagem simulada com referência de um voo físico com duração e 300s.

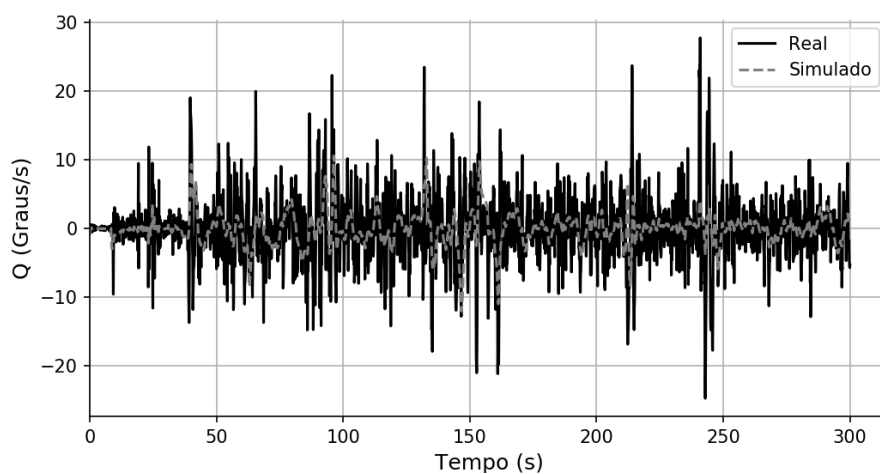


Figura C.10: Comparação da taxa de Arfagem do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico com duração de 300s.

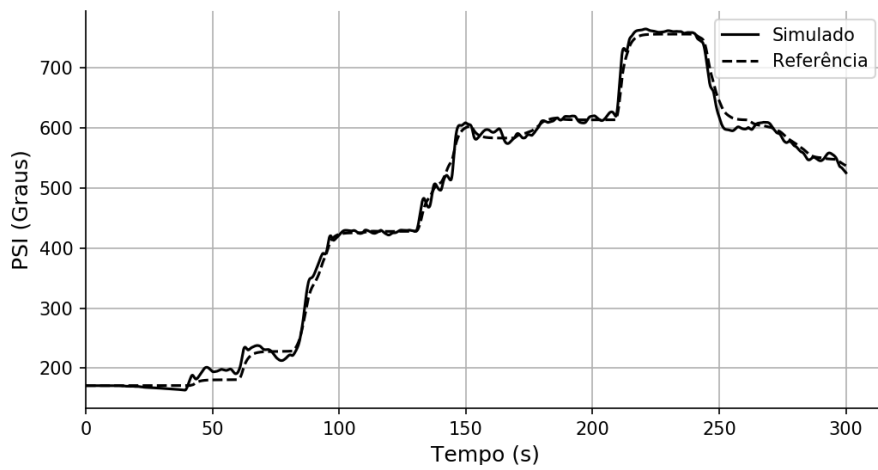


Figura C.11: Guinada Simulada com referência de um voo físico com duração de 300s.

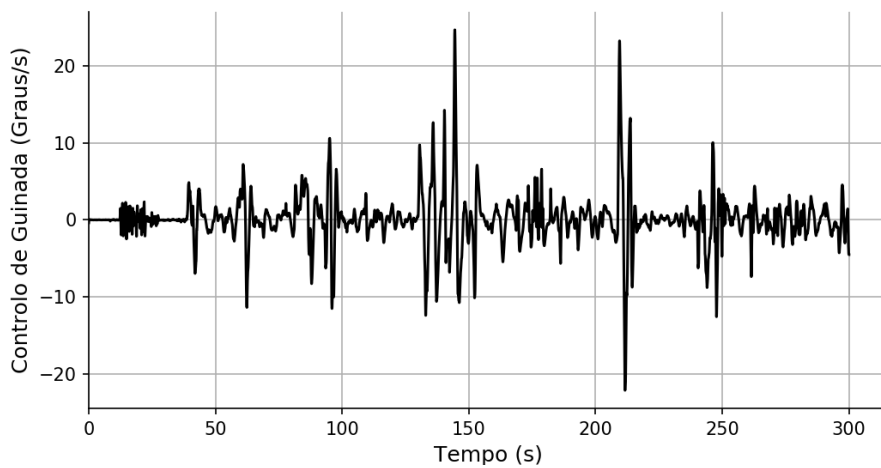


Figura C.12: Sinal de controlo da Guinada do veículo de uma simulação com duração de 300s.

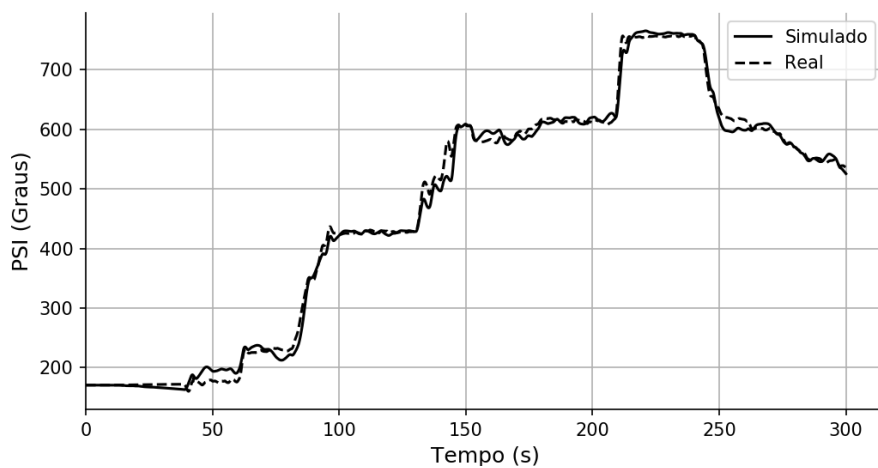


Figura C.13: Comparação entre a Guinada simulada e a do voo físico com duração de 300s.

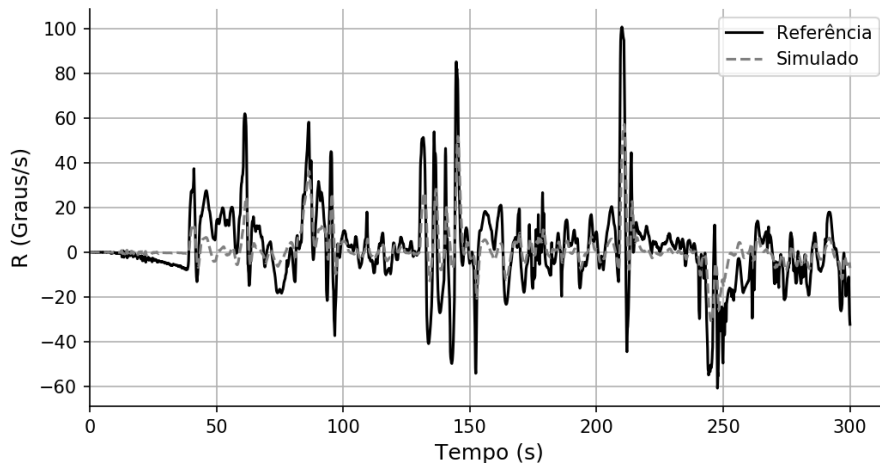


Figura C.14: Taxa de Guinada simulada com referência de um voo físico com duração de 300s.

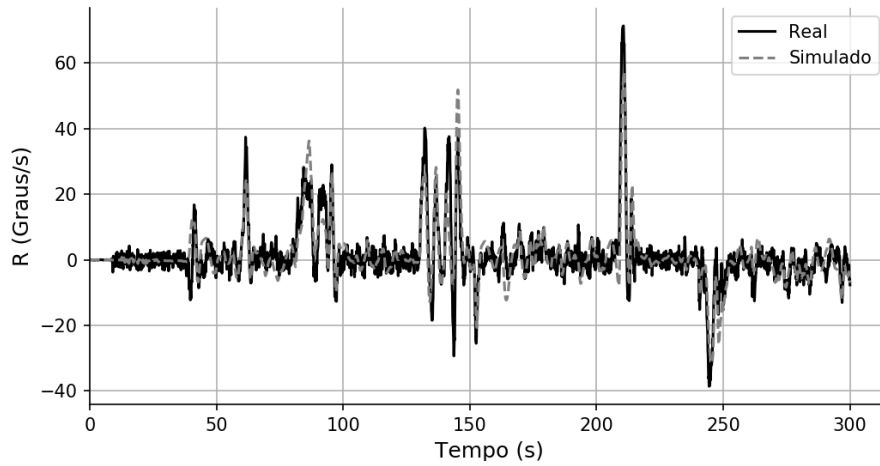


Figura C.15: Comparação da taxa de atitude de Guinada do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico com duração de 300s.

Apêndice D

Simulação do Segundo Voo Físico

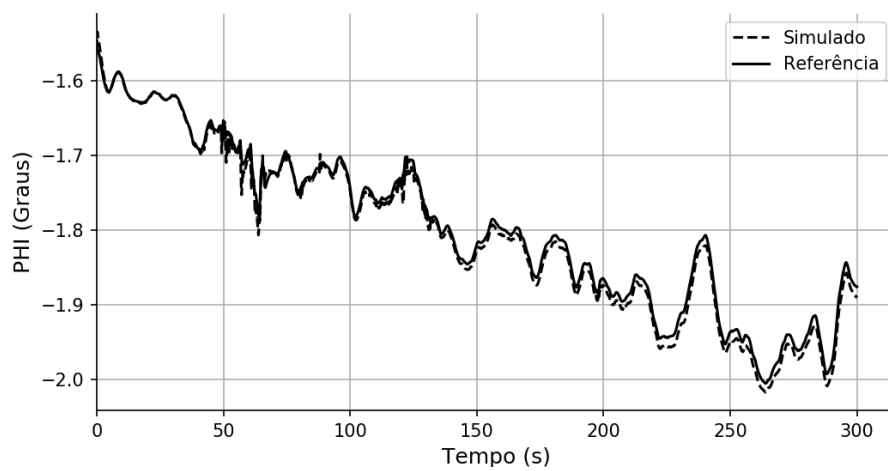


Figura D.1: Atitude de Rolamento Simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.

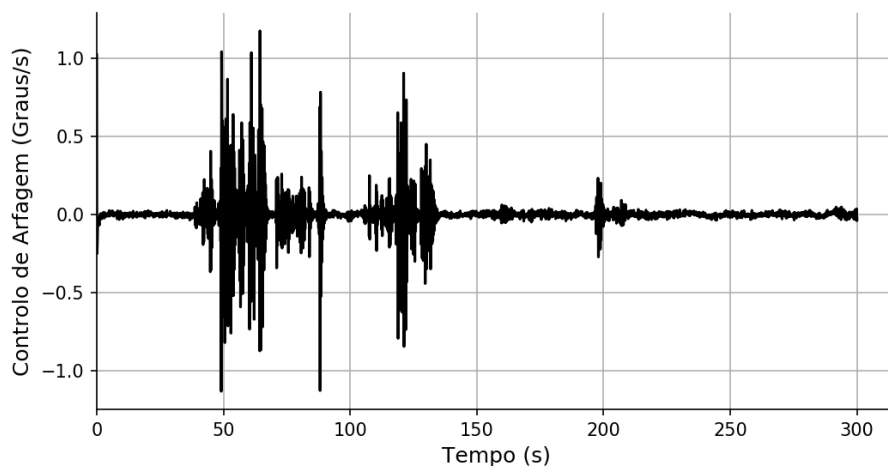


Figura D.2: Sinal de controle da atitude de Rolamento do veículo de uma simulação com duração de 300s.

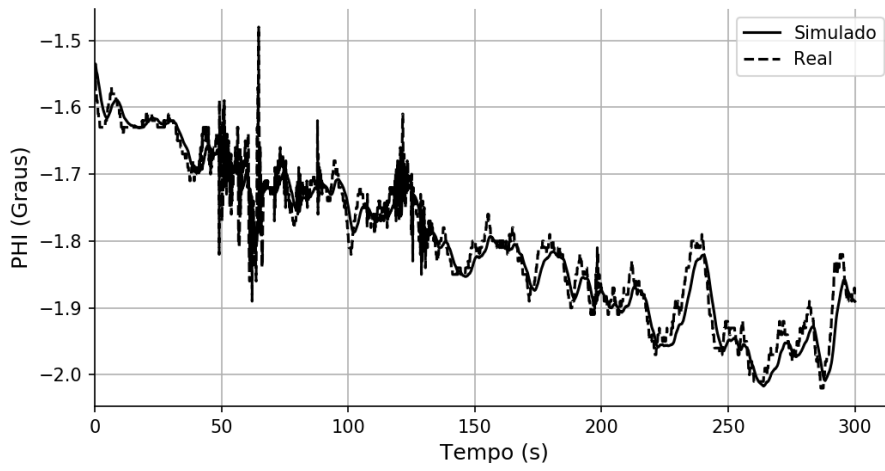


Figura D.3: Comparação entre a atitude de Rolamento simulada e a do voo físico completo com duração de 300s.

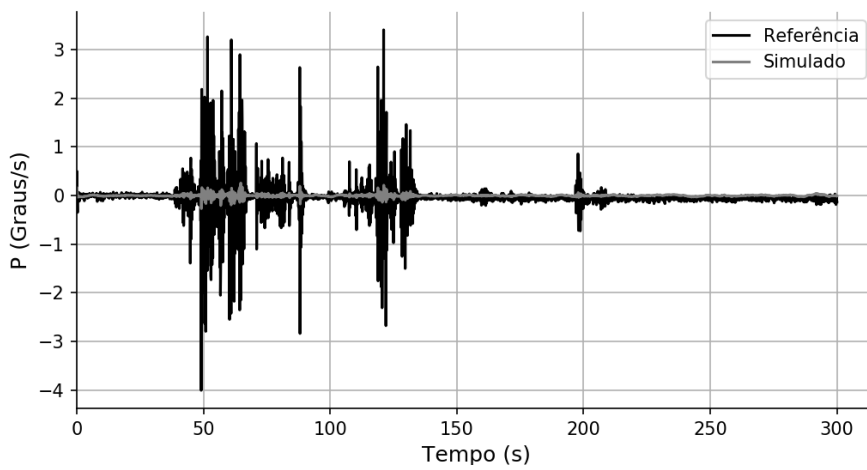


Figura D.4: Taxa de Pranchamento simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.

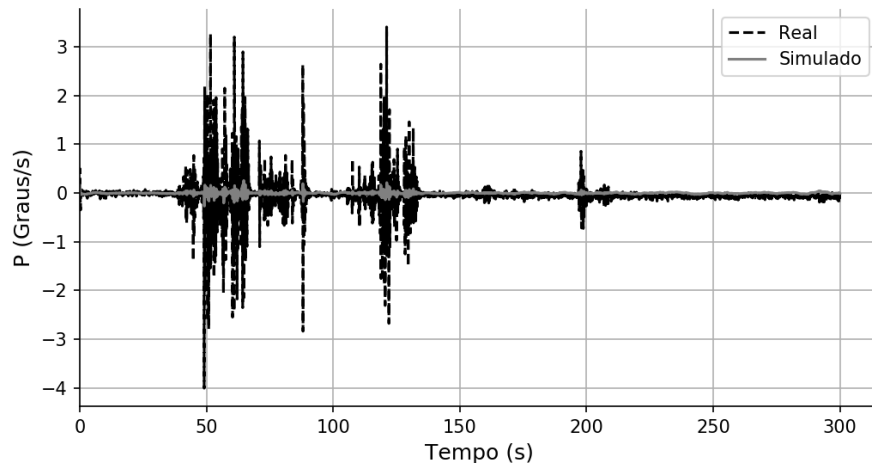


Figura D.5: Comparação da taxa de Pranchamento do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico completo com duração de 300s.

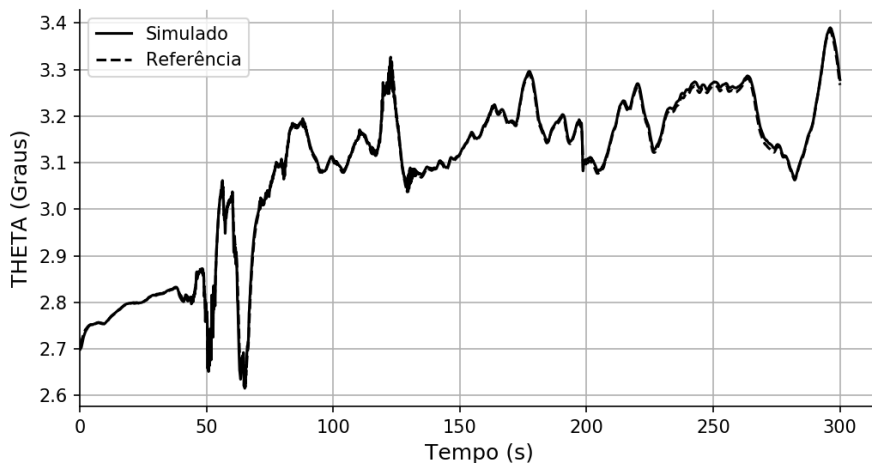


Figura D.6: Atitude de Arfagem Simulada com referência de um voo físico completo com duração de 300s.

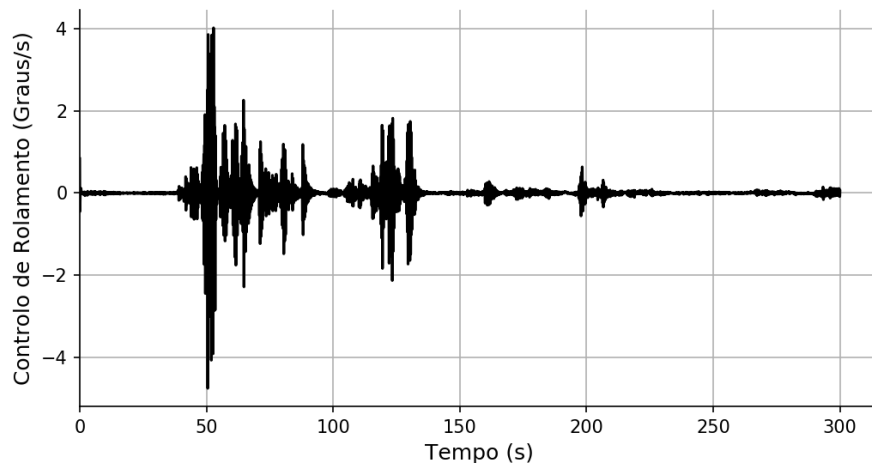


Figura D.7: Sinal de controle da atitude de Arfagem do veículo de uma simulação com duração de 300s.

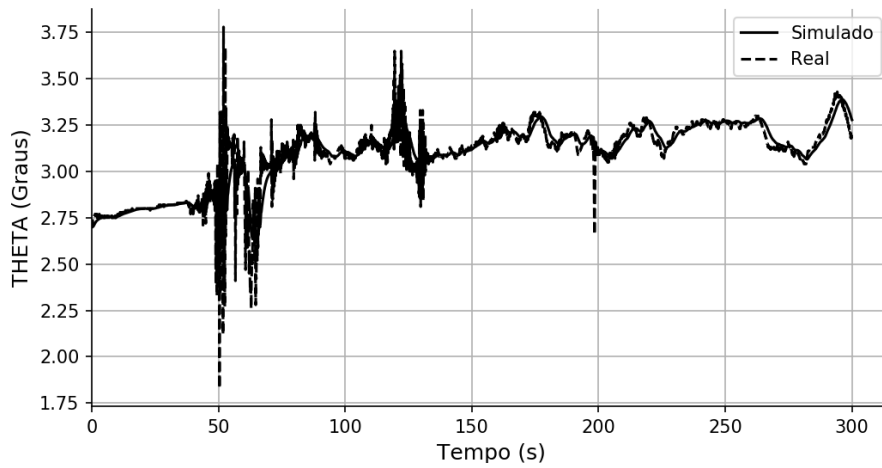


Figura D.8: Comparação entre a atitude de Arfagem simulada e o do voo físico com duração de 300s.

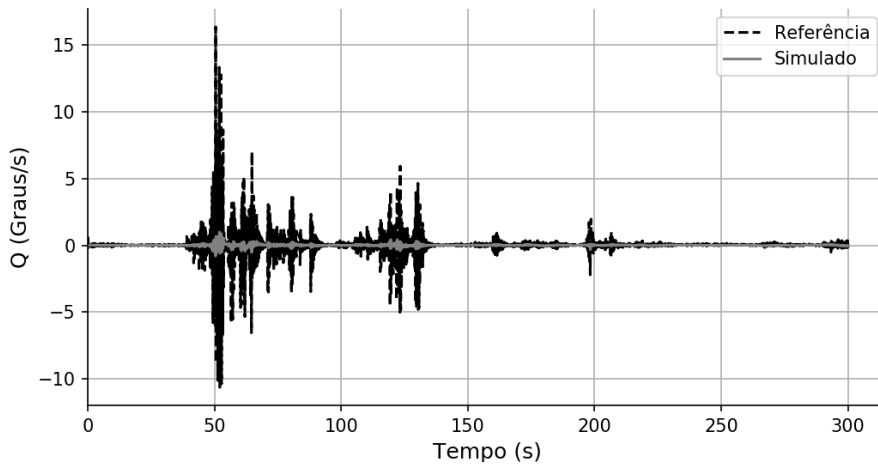


Figura D.9: Taxa de Arfagem simulada com referência de um voo físico com duração e 300s.

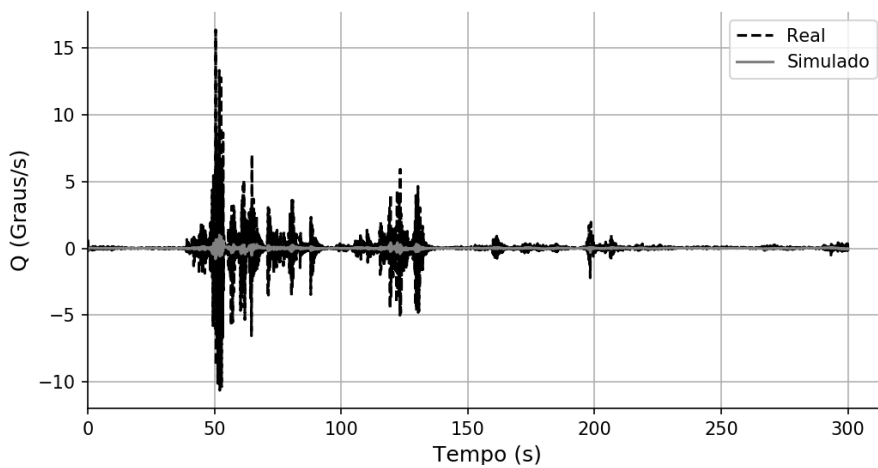


Figura D.10: Comparação da taxa de Arfagem do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico com duração de 300s.

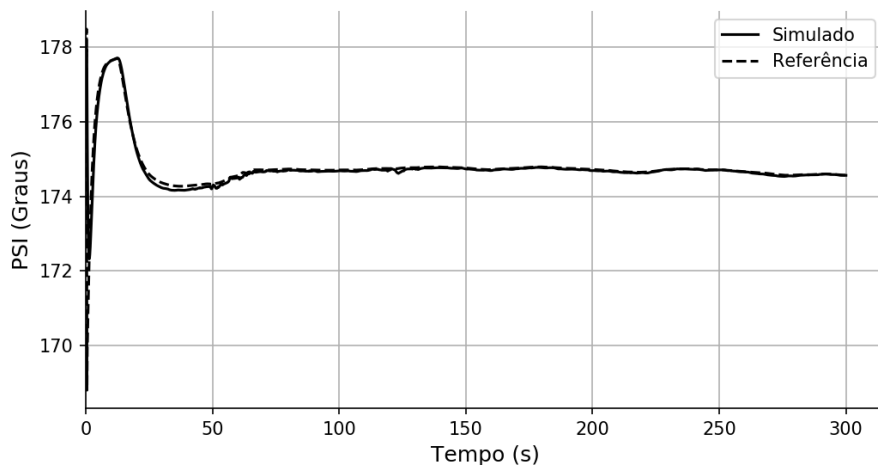


Figura D.11: Guinada Simulada com referência de um voo físico com duração de 300s.

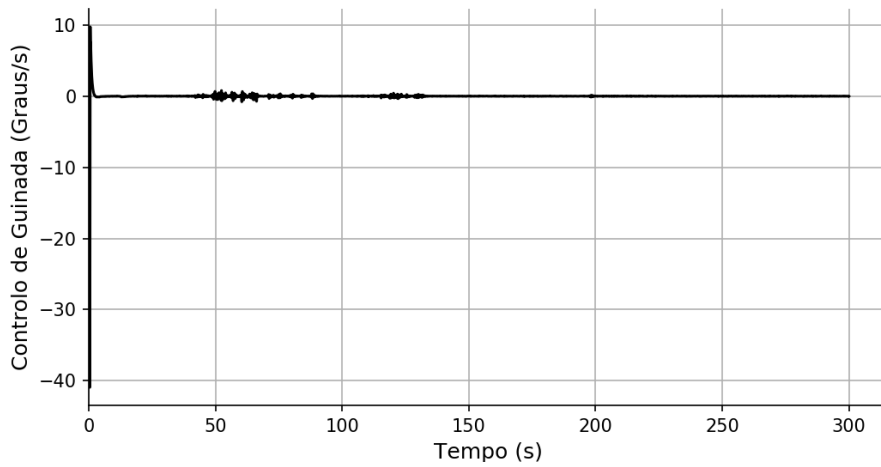


Figura D.12: Sinal de controlo da Guinada do veículo de uma simulação com duração de 300s.

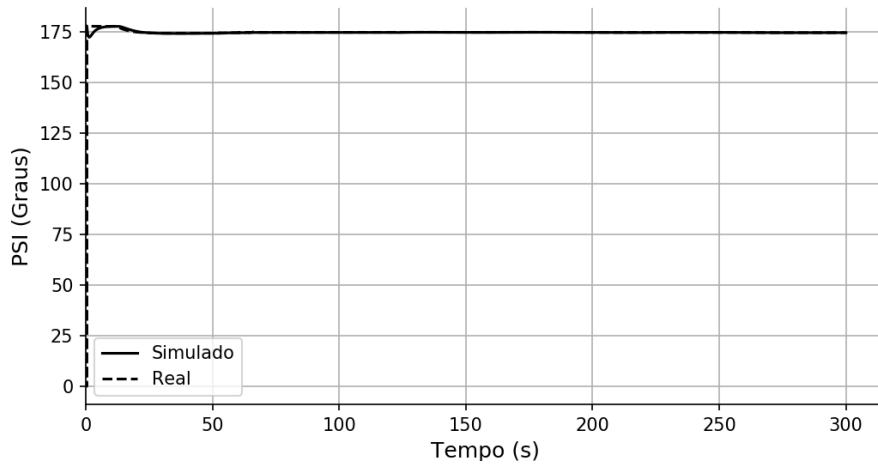


Figura D.13: Comparação entre a Guinada simulada e a do voo físico com duração de 300s.

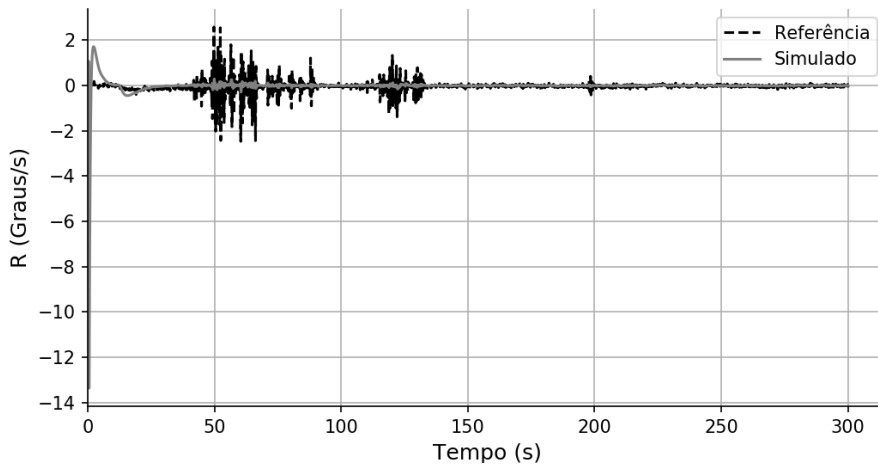


Figura D.14: Taxa de Guinada simulada com referência de um voo físico com duração de 300s.

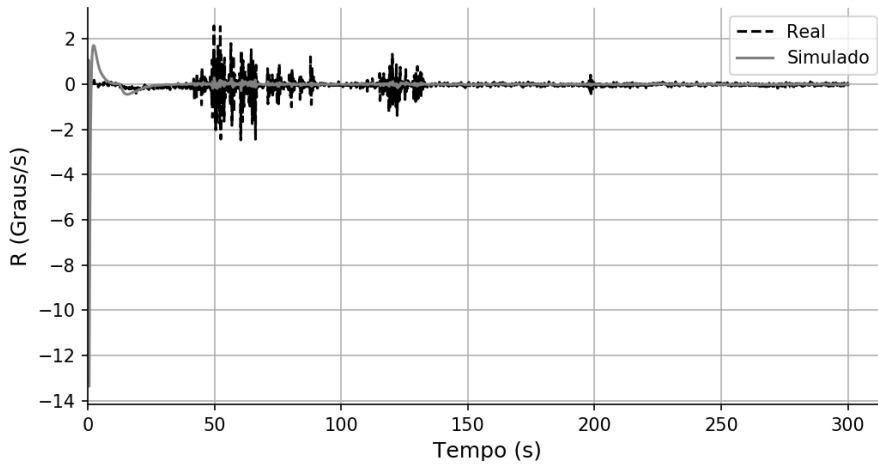


Figura D.15: Comparação da taxa de atitude de Guinada do *quadrotor* do voo simulado e do voo físico com duração de 300s.

Com o desenvolvimento desta dissertação foi elaborado um artigo científico referente à mesma, encontrando-se em fase de submissão para a revista *Archives of Control Sciences*.

Modeling and Robust Control of Quadrotor Helicopter Attitude Dynamics

Adriano J. Brum ^{*}, Sandra C. R. Antunes and K. Bousson [†], João Gomes Mota [‡]

The proposed work is focused on a robust controller to run on a quadrotor designed for the purpose inspection of overhead power lines. Different controllers are mentioned but only the most favorable one for this kind of vehicle and assignment is discussed in detail. Two flights illustrating two kinds of real-life operation are shown, comparing the proposed simulated solution with the actual physical behavior of the PID controller supplied with the quadrotor.

The results compare the actual status, references and controller variables of the physical process recorded during flight with their simulated counterparts replacing the PID controller with the proposed robust version designed for stability and low dynamic effort during the inspection flight.

The proposed controller has time-dependent state vector definition matrices while depending on the same state vector, thus creating a case for constant control modulation over time. Alternatives for real time data processing were studied, including Kalman-Bucy filtration, reference curve soothing from the physical flights and iterations of the Q and R matrices' diagonals based on the Modified Bryson method to ensure maximum performance of control considering all structural and dynamic constraints of the vehicle.

I. Introduction

UNMANNED Aerial Vehicles are small vehicles with the capability to replace some tasks done by aircraft like security, infrastructures inspections, photography, 3D mapping and in agriculture. With the big demand of these vehicles and their integration in the aerial space, it is necessary to certify their operation to make them secure. Quadrotors vehicles are aerodynamic systems with multiple-input and multiple-output (MIMO), with six degrees of freedom and four motors [1]. With the four independent motors, it is not necessary the swashplate mechanism to change the attitude during the flight like on helicopters. The control of these vehicles with six degrees of freedom is strongly not linear and are very dependent on the environment aerodynamics perturbations [2], so it is necessary to use an electronic system to assist during the operation. The attitude is shown with Euler Angles (ϕ , θ and ψ) and each angle can be modified with the differential rotation of the motors [1]. PID controllers are the most used nowadays in quadrotors

^{*}Aeronautical Engineering Student, Aerospace Sciences Department, adribrum@ubi.pt

[†]Associate Professor of Aerospace Sciences, Aerospace Sciences Department, bousson@ubi.pt

[‡]Manager and co-founder of Albatroz Engineering, gomes.mota@albatroz.engineering

because they are easy to install, calibrate and cheap to design but does not give robustness to fourth-order systems or superior and suffer with overshooting effects during his modelation [2]. In this work was designed an LQR Robust controller that ensures a dynamic attitude, robust for linear systems [3], the reduction from the overshooting state [4] and a performance increase compared to a PID controller. The LQR controller has the particularity that the state matrix is not constant and depends on the attitude rate of the vehicle.

II. Obtaining and Processing Data

The data recorded during the vehicle flights were stored in the physical memory of the control module that can be processed and downloaded after the flight. All the data were recorded with a time step of 0.1 seconds. Since is not possible to make a simulation with that timing step, because the large step that makes between each parameter from recorded data, therefore is necessary to interpolate that data. The interpolation was made with a Cubic Spline Interpolation making timing steps of 0.01 seconds, ten times bigger than the recorded data, thus enabling the simulation.

A. Identification of the UAV

To modulate the system with an LQR controller is necessary to know multiple features about the vehicle structure. Considering a square structure is necessary to know the distance between the actuators, CG and inertia moments. The

Table 1 Quadrotor characteristics

Parameter	Description	Value
m_m	Motor/Actuator mass	0.240 kg
y_m	Distance between motor and y axis	0.0868/2 m
x_m	Distance between motor and x axis	0.0868/2 m
d_{CG}	Distance between the actuators and CG	0.566 m

Table 1 show the useful characteristics of the quadrotor to design the controller. With that characteristics it is possible to determine the inertia moments for the matrix A that are represented in Table 2.

Table 2 Inertia Moments of the quadrotor.

Inertia Moment	Value [$kg \cdot m^2$]
I_{xx}	0.1539
I_{yy}	0.1539
I_{zz}	0.3080

B. Kalman-Bucy Filtration

The vehicle needed to have a proper precision to make electric lines inspections and maintain his attitude during the flight, permitting the obtention of the necessary data through LiDAR sensors. A vehicle of this type during his mission

is disturbed by many fonts of noise and inaccuracies like electromagnetic noise from the motors, the unstable and not perfect fluid from the work environment and the imprecisions from the sensors. The software ArduCopter has an EKF Filter, but this work will be focused on the study of Kalman-Bucy Filter because this reveals a greater precision and a smaller time of the processor. This filter was designed to not depend on the uncertainties and was focused on doing the filtration with noise values from uncertain distribution models [5], [6], being this filter good for a quadrotor to operate with every type of perturbation. To simulate the Kalman-Bucy Filter is necessary to identify the dynamic system to be applied to the model. The dynamic system equations are represented by:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \eta(t) \\ y = Cx + \xi(t) \end{cases} \quad (1)$$

Where x is the state vector, y is the output vector and ω e ϑ variable representative of the real whites' noises and represent a Gaussian distribution:

$$\begin{aligned} \omega &\approx N(0, Q) \\ \vartheta &\approx N(0, R) \end{aligned} \quad (2)$$

The state vector definition is made with:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_v + \varepsilon \\ \dot{x}_v = x_a + \varepsilon \\ \dot{x}_a = x_j \end{cases} \quad (3)$$

Where x_j represent the jerk of the attitude in study. With the bibliography in [6] is necessary to determine the matrix L , being this matrix constant and representative of the filtration gain.

$$L = PC^T R^{-1} \quad (4)$$

The variable P are the solution of the Riccati equation, that is defined by:

$$A^T P + PA - PCR^{-1}C^T P + Q = 0 \quad (5)$$

The matrix A , C , Q and R are defined by:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Not recognizing the state vector of the attitude is necessary to consider the system order. According to [7] will be considered an order of $n = 5$, obtained an estimate of the state vector x with the equation:

$$\hat{x}_{k+1} = F_d \hat{x}_k + L_d y_k \quad (10)$$

Being the matrix relatives to the system of order $n = 5$ defined by the system:

$$\begin{cases} F_d = I + F\Delta t + \frac{(F\Delta t)^2}{2!} + \frac{(F\Delta t)^3}{3!} + \frac{(F\Delta t)^4}{4!} + \frac{(F\Delta t)^5}{5!} \\ L_d = \left(I\Delta t + \frac{F\Delta t^2}{2!} + \frac{F^2\Delta t^3}{3!} + \frac{F^3\Delta t^4}{4!} + \frac{F^4\Delta t^5}{5!} + \frac{F^5\Delta t^6}{6!} \right) L \end{cases} \quad (11)$$

Where matrix F is represented by:

$$F = A - LC \quad (12)$$

The Figures 1, 2 and 3 represent the comparison between the filtered and unfiltered data and can be concluded that the Kalman-Bucy filter has a good performance to filter the noise in a quadrotor system.

III. Controller Design

The dynamic model of a quadrotor is represented by a physical system with inputs, outputs and state variables from non-linear vehicle equations. The structural forces, roll moments and IMU effects are assumed to be constant [1] [8].

The controller design will be adapted based on reference [9], where will be just focused on the vehicle attitude.

State vector from the dynamic system is defined by $\dot{X} = f(X, U)$ with U as the control vector and X the state vector with six variables. O state vector is defined by:

$$X = [\phi \quad \dot{\phi} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad \dot{\psi}]^T \quad (13)$$

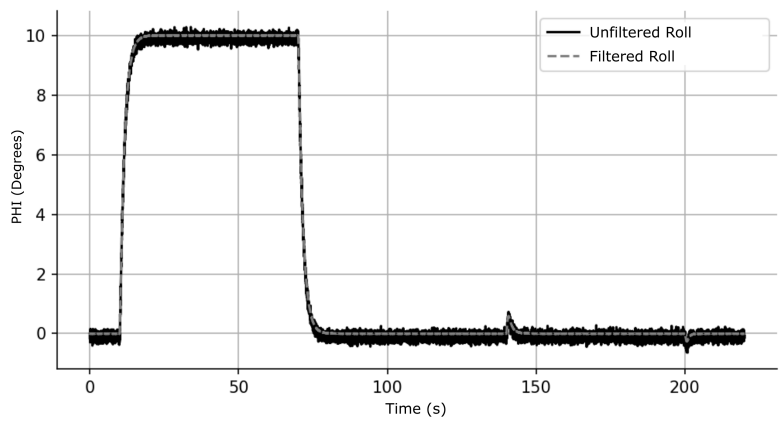


Fig. 1 Comparison between the filtered and unfiltered roll attitude.

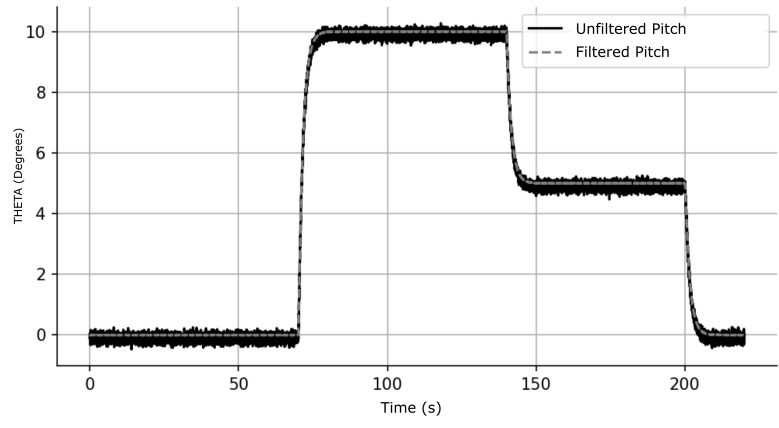


Fig. 2 Comparison between the filtered and unfiltered pitch attitude.

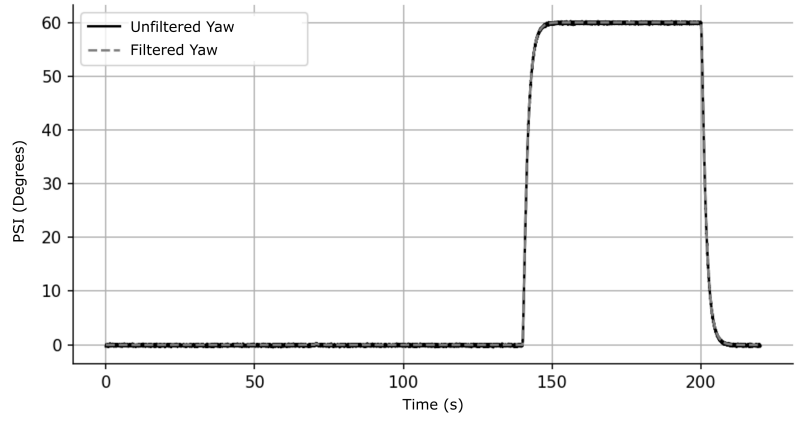


Fig. 3 Comparison between the filtered and unfiltered yaw attitude.

Control vector is defined by three variables, U_ϕ as control signal from the roll attitude, U_θ as control signal from the pitch attitude and U_ψ as control signal from yaw attitude.

$$U = [U_\phi \quad U_\theta \quad U_\psi]^T \quad (14)$$

Where the variables are defined based on angular velocity of the motors, with the motors configuration shown in picture 4:

$$\begin{cases} U_\phi = b(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ U_\theta = b(\omega_1^2 - \omega_3^2) \\ U_\psi = d(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{cases} \quad (15)$$

In system 15 the variable b represent the thrust of the vehicle and d the air friction factor. Every factors were certain

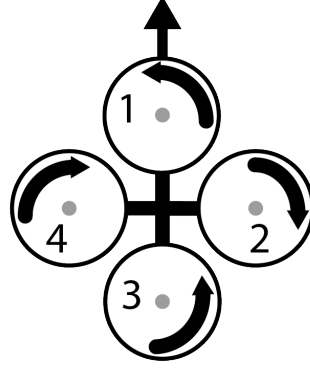


Fig. 4 Motors configuration and direction rotation from the motors.

from experimental methods. The transformation matrix between rate variation and the defined angles for orientation ($\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ and $\dot{\psi}$) and the angular velocities from the body (p , q and r) can be considered as one unique matrix if the relative perturbations to the pitch and roll attitude were small. It can be assumed that $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \approx (p, q, r)$ were the simulations made on reference [9] demonstrate this simplification is reasonable. Thus the simplified equation:

$$f(X, U) = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\dot{\psi}a_1 + b_1U_\phi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\dot{\psi}a_2 - b_2U_\theta \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta}\dot{\phi}a_3 + b_3U_\psi \end{pmatrix} \quad (16)$$

Where the a and b coefficients are define with:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}} \\ a_2 = \frac{I_{zz}-I_{xx}}{I_{yy}} \\ a_3 = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}} \\ b_1 = \frac{1}{I_{xx}} \\ b_2 = \frac{1}{I_{yy}} \\ b_3 = \frac{1}{I_{zz}} \end{cases} \quad (17)$$

To design a LQR Robust is necessary to define the system pseudo-linear with equation from system dynamics, cost function and control function:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x)x + Bu \\ J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \\ u = -K(x)x \end{cases} \quad (18)$$

Where the matrices Q and R are determined by the Modified Bryson Method:

$$Q = \text{diag}(Q_i) \Rightarrow Q_i = \frac{1}{x_{i_{max}}^2}; R = \text{diag}(R_i) \Rightarrow R_i = \frac{1}{u_{i_{max}}^2} \quad (19)$$

The matrix $P(x)$ is calculated at every cycle of the algorithm because matrix $A(x)$ is not constant and depends on the attitude rates. The Riccati equation is defined by:

$$A(x)^T P(x) + P(x)A(x) - P(x)BR^{-1}B^T P(x) + Q = 0 \quad (20)$$

Equation from the control signal is designed by:

$$u = -R^{-1}B^T P(x)x \quad (21)$$

To optimise's the control system to a bigger flight envelope is necessary to linearize the system based on each state. From the equation 16 are determined the matrices A and B , being respectively, the definition of the attitude dynamic

and the control.

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{yy}-I_{zz}}{2I_{xx}}\dot{\psi} & 0 & \frac{I_{yy}-I_{zz}}{2I_{xx}}\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{zz}-I_{xx}}{2I_{yy}}\dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{zz}-I_{xx}}{2I_{yy}}\dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2I_{zz}}\dot{\theta} & 0 & \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2I_{zz}}\dot{\phi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

A. Treatment of Reference Data

The reference gathered from the control module were determined by a P controller, having some discrepancies in its results. The LQR Robust controller is a controller that try to follow their reference, due to those discrepancies in its reference vector was necessary to limit the values of the control signal, that limitation was made with the reference curve smoothing by a filter.

This filter was designed to act between the reference input and the reference gathered from the control module (Figure 5) with the equation 24.

$$\tau y_{ref}^* + y_{ref}^* = y_{ref} \quad (24)$$

The system in Figure 5, the system $H(s)$ is defined by:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (25)$$

The plot showed by the Figure 6 represent the comparison between the two types of reference. When analysing the plot is possible to conclude that the filter works and smooth the signal curve.

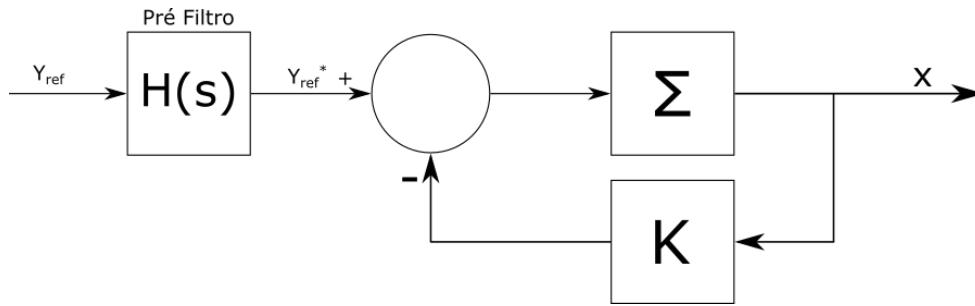


Fig. 5 Block diagram of the filter implementation in the controller system.

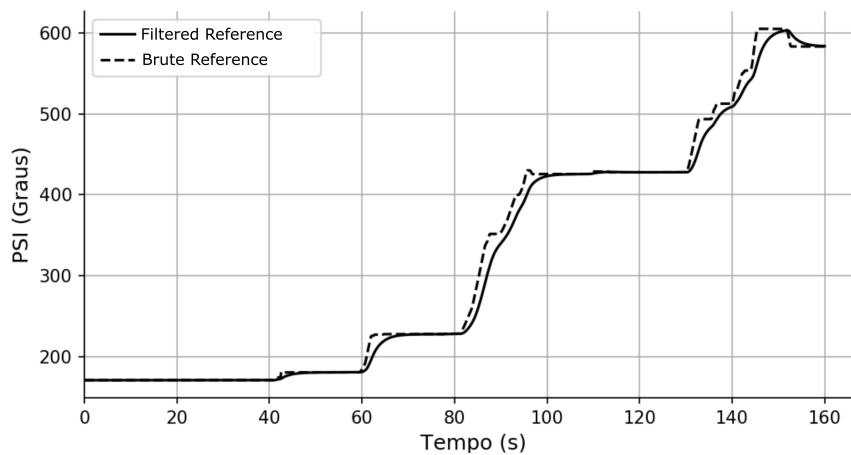


Fig. 6 Plot in function of time, representing the comparison between the real flight reference and the smoothed reference.

B. Simulation with a Flight Reference

With references gathered from real flights made with the quadrotor controlled by a PID controller it is possible to gather a conclusion about the quadrotor attitude with the real reference and the new LQR controller designed for the vehicle.

In this paper will analyse the attitude from one flight with a duration of 160 seconds. With the analysis of plot in Figure 7 and Figure 8, is possible to prove the efficiency of the controller to follow its reference curve, that can conclude the LQR Robust has a better performance with just one discrepancy in time interval [140, 160] because the gap between the two curves being provoked by the respective attitude rate has been determined by a P Controller, a process that was not very accurate to apply in this type of controller. Another conclusion gathered from the plots is that the LQR Robust controller has a spontaneous attitude what is a great feature to prevent the saturation and use less CPU load to reach the desired attitude.

In Figure 9 the plot represent the yaw based on its reference curve and most of the time this curve follow its reference curve concluding the efficiency of the controller.

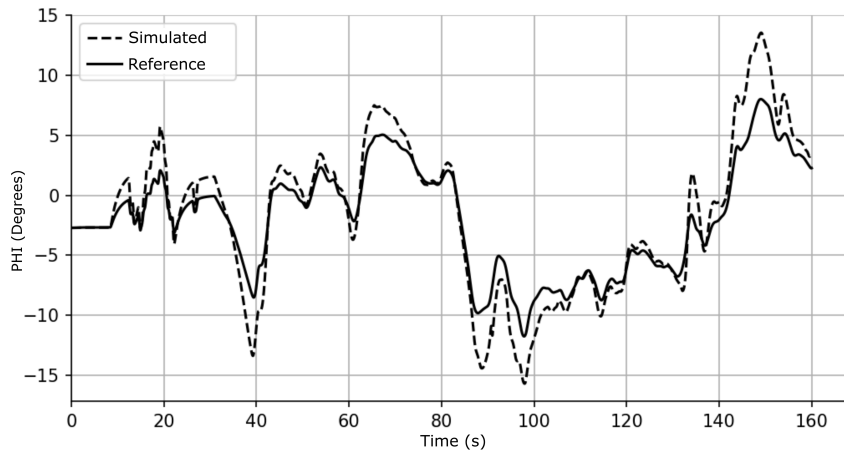


Fig. 7 Simulated Roll based on reference gathered from the real flight.

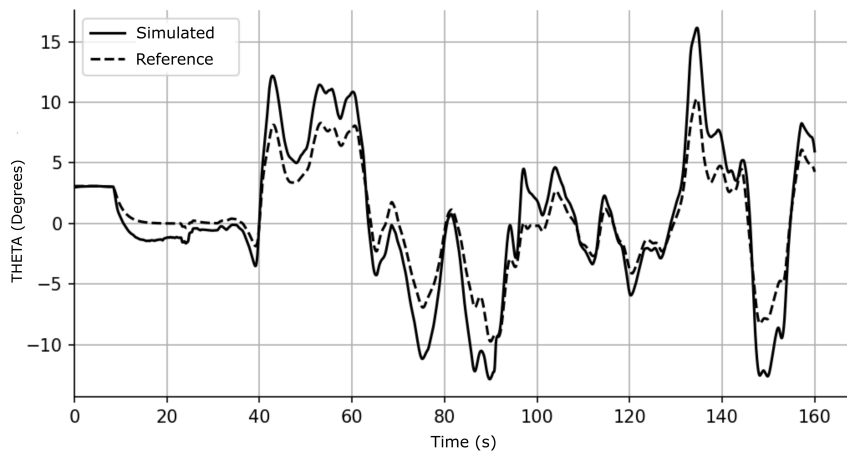


Fig. 8 Simulated Pitch based on reference gathered from the real flight.

C. Simulation with Stipulated Reference

The quadrotor study in this paper was to make inspections of electric lines and was necessary to analyse its efficiency to make that work. Was made two distinct cases, one was essentially designed to make towers inspections with the change in roll and yaw attitude, the other case was designed to make lines inspections maintaining a constant pitch attitude during the quadrotor displacement, this simulations was made respectively, between [75, 200] and [0, 75] seconds. All simulations were made with a flight time of $t = 220s$ and a reference vector defined by 26.

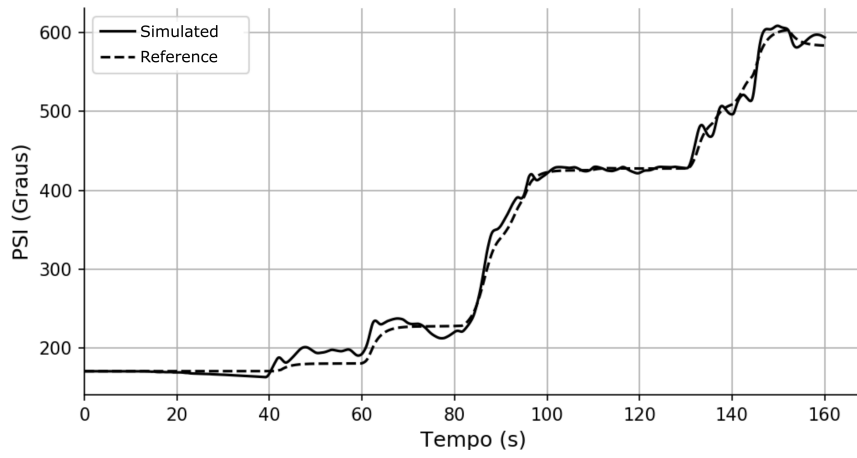


Fig. 9 Simulated Yaw based on reference gathered from the real flight.

$$\begin{cases} x_{ref} = [10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] & \text{if } 10 \leq t < 70 \\ x_{ref} = [0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0] & \text{if } 70 \leq t < 140 \\ x_{ref} = [0 \ 0 \ 5 \ 0 \ 60 \ 0] & \text{if } 140 \leq t \leq 200 \end{cases} \quad (26)$$

An analysis is made with the plots on Figures 10, 11 and 12 it is observable that the reach time at the point of equilibrium is about 5 seconds and its attitude, being filtered, has the capability to reach and maintain the curve coincident with its reference. With the plot analysis can be seen a little irregularity provide from the controller modelling specifically the state matrix, named in this paper as matrix A .

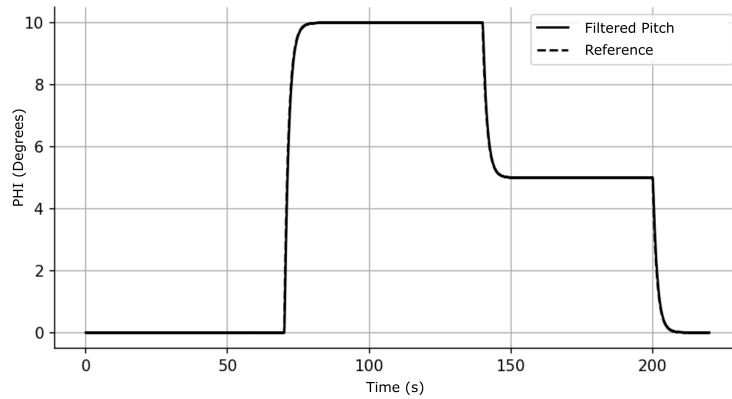


Fig. 10 Filtered Roll attitude and its reference.

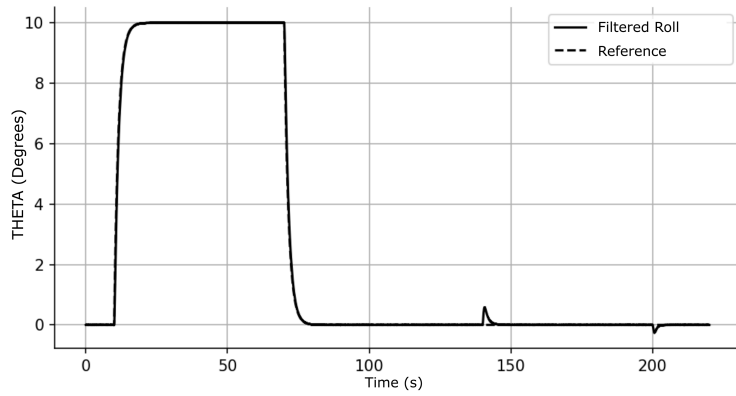


Fig. 11 Filtered Pitch attitude and its reference.

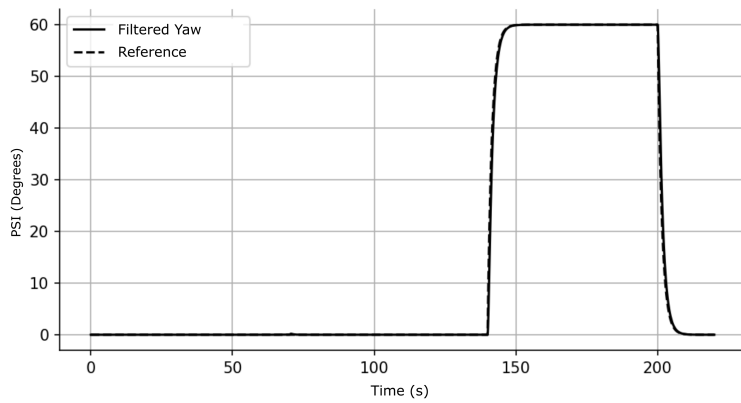


Fig. 12 Filtered Yaw attitude and its reference.

IV. Conclusion

With the big demand for unmanned aerial vehicles, a big development was made. Mostly of this vehicles are controlled by PID Controllers, being simple and not robust controllers. Albatroz Engineering is a company with a project to make electric lines inspections with quadrotors reducing the cost of operation and acquisition of equipment and making them realize full autonomous inspections. To make these inspections is necessary a robust controller to ensure the quality of the gathered data.

This work was focused on data treatment processes, Kalman-Bucy filtration and Robust LQR Controller design for a quadrotor. Being dealing with physical systems, there are limitations at structural and dynamics levels, being designed a filter to smooth the reference curve thus allowing a dynamic limitation of the control signal.

Kalman-Filter filtration has a great filtration capacity, being a big candidate of filtration for this type of vehicles. After the calibration of diagonal matrices, Q and R results obtained from the controller based on the reference with a acceptable quality for a quadrotor. Robust LQR has smoothest attitude curves that the PID controller, is a controller with a smaller electrical cost, for other words, a controller with a bigger performance but sometimes with some gaps between the attitude and reference curve essentially because the weight of the attitudes rates was determined by a P Controller, making them not really trustable.. In flight with stipulated reference after the data was filtered by the Kalman-Bucy Filter, this simulation shows that this controller has the capacity to follow a constant attitude with some Gaussian noise.

References

- [1] Torres Gaitan, A., and Bolea, Y., "Modeling and robust attitude control of a quadrotor system," *2013 10th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, IEEE, 2013, pp. 7–12. doi: 10.1109/ICEEE.2013.6676024.
- [2] Gibiansky, A., "Quadcopter Dynamics , Simulation , and Control Introduction Quadcopter Dynamics," , 2012.
- [3] Khatoon, S., Gupta, D., and Das, L. K., "PID & LQR control for a quadrotor: Modeling and simulation," *2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*, IEEE, 2014, pp. 796–802. doi:10.1109/ICACCI.2014.6968232.
- [4] Dwivedi, R., and Dohare, D., "PID Conventional Controller and LQR Optimal controller for Speed analysis of DC Motor : A Comparative Study," *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 2015, pp. 508–511.
- [5] Matasov, A., "The Kalman-Bucy filter accuracy in the guaranteed parameter estimation problem with uncertain statistics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 3, 1994, pp. 635–639. doi:10.1109/9.280777.
- [6] Maia, N., "Estimação de Incerteza em Modelos Dinâmicos pelo Método de Filtragem de Kalman-Bucy," Ph.D. thesis, Universidade da Beira Interior, 2009.
- [7] Antunes, S. C. R., "Controlo Supervisionado de Aeronaves Autónomas," Ph.D. thesis, Universidade da Beira Interior, 2016.

- [8] Bouabdallah, S., Murrieri, P., and Siegwart, R., "Design and Control of an Indoor Micro Quadrotor," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 2004, pp. 4393–4398 Vol.5. doi:10.1109/ROBOT.2004.1302409.
- [9] Bouabdallah, S., "Design and Control of Quadrotors With Application To Autonomous Flying," *Techniques*, Vol. 3727, No. 3727, 2007, p. 61. doi:10.5075/epfl-thesis-3727.