11º ANO		
DESENVOLVIMENTO	Nº AULAS (90 Min.)	**SUGESTÕES METODOLÓGICAS**
3.11 Paralelismo de rectas e de planos	2	Sugere-se que, através da simulação das situações espaciais no modelo, o aluno infira os teoremas de paralelismo de rectas e de planos.
3.12 Perpendicularidade de rectas e de planos	5	Deve salientar-se o facto de que duas rectas perpendiculares se projectam em ângulo recto num plano de projecção desde que pelo menos uma delas seja paralela a esse plano. Na perpendicularidade de recta e plano deve ser verificado o teorema anterior relativamente a rectas horizontais e frontais do plano.
3.13 Métodos geométricos auxiliares II (3.13.1 Mudança de diedros de projecção)	4	Nesta fase de estudo propõe-se a resolução dos seguintes problemas-tipo: Transformar - uma recta oblíqua numa recta vertical, de topo ou fronto-horizontal. - um plano oblíquo num plano horizontal ou frontal. Na sequência destes exercícios podem revisitar-se as intersecções de planos propondo este método como alternativa ao denominado "método geral da intersecção de planos", já que ele nos dá a possibilidade de transformar um plano qualquer em projectante. Nesta fase de estudo propõe-se a resolução dos seguintes problemas-tipo: transformar - uma recta oblíqua numa recta vertical, de topo ou fronto-horizontal - um plano oblíquo num plano horizontal ou frontal Para tratar o rebatimento de planos e concretamente do plano oblíquo, sera conveniente recorrer ao *modelo M*, onde se podem observar as rectas notáveis do plano, e o plano projectante que é perpendicular ao plano dado para ilustrar espacialmente o método do triângulo do rebatimento. O mesmo modelo, agora sem o plano projectante auxiliar, poderá servir para exemplificar o processo que utiliza as horizontais, frontais ou outras rectas do plano, no rebatimento. Mais uma vez, o aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo a escolha orientar-se segundo o princípio de economia de meios.
3.13 Métodos geométricos auxiliares II (3.13.2 Rotações)	8	
3.14 Problemas métricos (3.14.1 Distancias)	4	Na resolução de problemas métricos será vantajoso que o aluno resolva um mesmo problema utilizando diferentes métodos auxiliares e que, a partir daí, conclua as vantagens de um relativamente aos outros. Quanto aos problemas de determinação da verdadeira grandeza de ângulos, deverá ser dada especial atenção às definições da geometria euclidiana relativas ao "ângulo de uma recta com um plano" e ao "ângulo de dois planos".
3.14 Problemas métricos (3.14.1 Distancias)	6	
3.15 Figuras planas III	4	Para a resolução deste tipo de problemas poderá

		salientar-se que o método dos rebatimentos é, em geral, o mais adequado, sobretudo por permitir a aplicação do Teorema de Désargues utilizando a charneira do rebatimento como eixo de afinidade. Além disso, simplificará muito os problemas, a realização do rebatimento para um plano que contenha, pelo menos, um vértice da figura.
3.16 Sólidos	7	Mais uma vez se recomenda o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo.
3.17 Secções	15	Sugere-se que os alunos analisem e concluam a gradual complexidade das secções em pirâmides, preconizando-se a seguinte sequência de situações: - Secção de pirâmide intersectando apenas a superfície lateral: • Sem aresta(s) de perfil • Com aresta(s) de perfil; - Secção de pirâmide intersectando a superfície lateral e a base: • Sem aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção • Com aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção. Propõe-se que o professor leve os alunos a concluir os diferentes tipos de secção plana produzida num cone. Para tal poderá recorrer a um candeeiro com um quebra-luz de boca circular e apreciar a mancha de luz projectada na parede, funcionando esta como plano secante do cone luminoso. A deslocação do ponto de luz permitirá observar as diversas cónicas produzidas na parede. Em relação ao prisma e ao cilindro, os alunos deverão concluir que um plano pode seccioná-los intersectando só a superfície lateral, a superfície lateral e uma das bases ou a superfície lateral e as duas bases. Quanto à esfera poder-se-á verificar que a secção produzida por qualquer tipo de plano é sempre um círculo, podendo variar desde um círculo máximo até ao ponto, no caso de tangencia. Poder-se-á utilizar o Teorema de Désargues para determinação das secções planas de sólidos (ou, pelo menos, fazer a sua verificação) dada a relação homologa existente entre a figura da secção e a figura da base do sólido, notando que o centro homologa será o vértice (próprio ou impróprio) do sólido, o eixo, a recta deintersecção do plano da secção com o plano da base e os raios, as suas arestas ou geratrizes. Na resolução de problemas, que envolvam o traçado da elipse, sera conveniente que os alunos determinem as projecções dos seus eixos sendo os demais pontos da elipse obtidos, quer por recurso a planos auxiliares, quer por recurso a construções já conhecidas (por exemplo: processo da régua de papel ou construção por afinidade). Será do maior interesse para concluir esta unidade e como aplicação dos conceitos apreendidos (particularmente do método das rotações) realizar planificações de sólidos (cones e cilindros) e de sólidos truncados. Poderse-á propor, seguidamente, a

		realização de maquetas dos sólidos previamente planificados.
3.18 Sombras	23	Para facilitar a aquisição dos conceitos de sombra própria, espacial, projectada, real e virtual, será conveniente a utilização de um foco luminoso (lâmpada ou luz solar) e de formas bi ou tridimensionais que produzirão sombras diversificadas conforme o seu posicionamento. Para melhor compreensão dos pontos de quebra poderá ser vantajoso o estudo comparativo da sombra de um segmento de recta fazendo alterações sucessivas das suas coordenadas de forma a projectar sombra só num plano de projecção, nos dois ou só no outro plano. Poderá ser seguido o mesmo raciocínio para figuras planas. Será de todo o interesse alertar os alunos para a vantagem da determinação prévia da linha separatriz de luz e sombra, para identificar a sombra própria e, a partir desta, induzir a projectada. Nesse sentido, pode-se fazer incidir um foco luminoso nos sólidos em causa para identificar a separatriz de luz e sombra que, no caso de cones e cilindros, corresponde às geratrizes de tangencia dos planos luz/sombra. Considera-se favorável iniciar o estudo da sombra de sólidos pela pirâmide (com base situada num plano de projecção). Sugere-se que, para pirâmides com base igual (e em posição igual) mas de diferentes alturas, se faça o estudo comparativo do número de faces em sombra própria. Fazendo o mesmo estudo comparativo para o cone, os alunos poderão inferir a variação de posição das geratrizes separatrizes luz/sombra. Atendendo a que a sombra projectada de pontos, rectas ou superfícies são entidades representadas por duas projecções e, apesar de ser usual desprezar a projecção situada no eixo X, recomenda-se, pelo menos numa fase inicial de estudo, que cada ponto de sombra seja sempre representado pelas suas duas projecções.
4.1 Introdução à Axonometria 4.2 Axonometrias obliquas ou clinogonais	4	Para ilustrar as diferenças entre as várias axonometrias e entre estas e os sistemas de representação diédrica ou triédrica, sugere-se a utilização de um modelo constituído pelos três eixos de coordenadas e de um paralelepípedo com as suas arestas coincidentes com os eixos, que poderá ser posicionado em relação ao plano de projecção consoante as necessidades. Para dar conta do vasto campo de aplicação das axonometrias, poderão ser apresentados aos alunos imagens de axonometrias de objectos ou peças da construção mecânica, de produções no âmbito do *design* industrial (o que permitirá frisar que é precisamente a revolução industrial que leva à difusão generalizada e uso intensivo deste sistema de representação) e de objectos arquitectónicos (como meio privilegiado para o seu estudo, mas também como ferramenta no trabalho de concepção e criação), salientando a funcionalidade e intencionalidade do uso da axonometria, na descrição dessas formas. No tratamento das axonometrias clinogonais é fundamental estudar a influência do posicionamento

		dos raios projectantes em relação ao plano axonométrico. Nesse sentido, deve fixar- -se um determinado ângulo de inclinação e fazer variar a direcção e, para uma mesma direcção, variar a inclinação dos raios projectantes, para apreciar os efeitos produzidos. Em concreto, pode fazer-se a projecção de um cubo e verificar a maior ou menor possibilidade de reconhecer esse poliedro nas diferentes situações. Poder-se-á verificar que os ângulos de fuga e os coeficientes de redução convencionados obedecem a este princípio de perceptibilidade, mas deverá ser realçada, ao mesmo tempo, a possibilidade de seguir objectivos opostos procurando, deliberadamente, distorções. Seria interessante relacionar as axonometrias clinogonais com as sombras em representação diédrica, previamente estudadas, para assim vislumbrar a relação entre ambos os tipos de projecção.
4.3 Axonometrias ortogonais	4	Para caracterizar as axonometrias ortogonais e determinar os ângulos dos eixos axonométricos em cada tipo de axonometria, é aconselhável utilizar um modelo (*modelo N*) constituído pelo sistema de eixos coordenados, passível de adaptação a cada uma das situações. No modelo poder-se-á evidenciar claramente: - A correspondência biunívoca entre a posição do sistema de eixos no espaço e a sua projecção no plano axonométrico; - Os traços dos eixos de coordenadas no plano de projecção, ou seja, os vértices do triângulo fundamental correspondente à base da pirâmide axonométrica com vértice na origem do sistema de eixos; - A configuração deste triângulo e as suas propriedades em cada axonometria; - A redução das medidas resultante da inclinação dos eixos. Se o modelo permitir rebater as faces da pirâmide axonométrica e/ou o triângulo correspondente à secção produzida na pirâmide por um plano projectante de um eixo, o que seria desejável, poder-se-á ilustrar, espacialmente, o processo conducente à determinação das escalas axonométricas. Neste processo deverá salientar-se: - O teorema da geometria plana que permite a fixação do ponto correspondente ao rebatimento da origem; - Os conhecimentos anteriores relativos ao rebatimento de um plano oblíquo no sistema de representação diédrica e, consequentemente, o recurso ao Teorema de Désargues quando se pretende chegar à projecção de uma figura contida na face da pirâmide axonométrica rebatida Com o intuito de explicitar o relacionamento da representação diédrica com a representação axonométrica, poderá ainda comparar-se a projecção axonométrica de um sólido (um cubo, p.ex.) com a sua projecção diédrica, quando o sólido tem uma das suas faces situada num plano oblíquo.

		Poderá ser igualmente mencionada a possibilidade de operar com axonometrias normalizadas com a utilização de coeficientes de redução convencionais, podendo confrontar-se os resultados obtidos com as axonometrias anteriormente estudadas nas quais se utilizam coeficientes de redução real.
4.4 Representação axonométrica de formas tridimensionais simples ou compostas	13	Deve propor-se ao aluno a realização de axonometrias de formas tridimensionais simples ou compostas, segundo os diferentes métodos de construção. No caso da axonometria ortogonal será de dar especial ênfase ao chamado “método dos cortes” (4.4.3) devido à sua relação directa com a representação diédrica e triédrica.