UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

# Representações de Números Reais
## Versão Final Após Defesa

**José António Lelo Chimpanzo**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
**Matemática para Professores**
(2º ciclo de estudos)

Orientador: Prof. Doutor Henrique José Freitas da Cruz

**janeiro de 2021**

# Agradecimentos

Uma dissertação é uma longa viagem, que inclui uma trajetória permeada por inúmeros desafios, tristezas, incertezas, alegrias e muitos percalços pelo caminho, mas apesar do processo solitário a que qualquer investigador está destinado, reúne contributos de várias pessoas, indispensáveis para encontrar o melhor rumo em cada momento da caminhada. Trilhar este caminho só foi possível com ajuda de Deus, na qual eu rendo o meu primeiro e especial agradecimento. Estendo os meus agradecimentos ao meu orientador, Professor Doutor Henrique José Freitas da Cruz, que sempre acreditou em mim, agradeço a orientação exemplar pautada por um elevado e rigoroso nível científico, um interesse permanente e fecundo, uma visão crítica e oportuna, um empenho inexcedível e saudavelmente exigente, os quais contribuíram para enriquecer, com grande dedicação, passo por passo, todas as etapas subjacentes ao trabalho realizado. Aos meus pais espirituais, Reverendo Pastor Cláudio Alfredo Guimarães Zinga e a Pastora Madalena Francisca Balo Zinga, pelo amor e apoio incondicional. À minha família biológica, a minha mãe, os meus irmãos e as minhas irmãs e aos meus sobrinhos e as minhas sobrinhas, pelo amor e apoio incondicional. Aos meus amigos e as minhas amigas, em especial à minha amiga de sempre, Elsa Sungo de Albuquerque Lourenço, agradeço o apoio e motivação incondicional. Estou grata pela nossa amizade. À minha esposa, Marília da Silva dos Reis Joaquim Chimpanzo, pelo amor, partilha, companheirismo e apoio incondicional, agradeço a enorme compreensão, generosidade e alegria com que me brindou constantemente, contribuindo para chegar ao fim deste percurso. Sem ela, nem sempre a nossa filha, Taíza Beatriz dos Reis Joaquim Chimpanzo me deixaria pensar. E claro, a minha querida filha, Taíza Beatriz dos Reis Joaquim Chimpanzo, que amo incondicionalmente e que veio dar um novo colorido à minha vida, espero doravante compensá-la das horas de atenção e brincadeira. Foi ela o meu grande estímulo nesta caminhada.

Esta dissertação é dedicada a Deus, causa primordial de todas as coisas.

# Resumo


Todas as sociedades humanas, desdes as mais rudimentares às mais sofisticadas necessitam do conceito de número e de alguma forma de contagem. De acordo com muitos estudiosos (ver [6]), todas as sociedade humanas tem uma designação para os primeiros números naturais, embora em tribos mais primitivas essa nomenclatura não ultrapasse 2 ou 3.
Relativamente aos processos de contagem, parece que os seres humanos sempre usaram os dedos como forma mais conveniente de fazer a contagem de números naturais. No entanto, embora os dedos das mãos permitam fazer cálculos simples, a necessidade de contar um vasto número de objetos, sejam cabeças de gado, amigos, dias ou anos, levou a uma sistematização do processo de contagem. Um primeiro passo neste sentido consistiu na criação de grupos de números, a partir dos quais os restantes seriam construídos. O leitor estará provavelmente mais familiarizado com os 10 primeiros números inteiros para esse grupo de números, a partir dos quais são construídos os restantes números naturais e depois todos os números reais. A preponderância da base 10 deve-se ao facto da contagem ser habitualmente feita com os dedos das mãos. No entanto, outras bases foram também bastante usadas ao longo da história por outras civilizações, como a base 5, onde a contagem é feitas usando os dedos de uma única mão, ou a base 20, esta bastante comum, e que corresponde ao uso dos dedos das mãos e dos pés. Este sistema de base 20 foi bastante usado nas civilizações pré-Colombianas da América como os Maias, mas o seu uso parece ter-se entendido bem para além da América Central. Na Europa é possível encontrar vestígios da utilização desse antigo sistema de base 20. Por exemplo em francês, oitenta diz-se "*quatre-vingt*", um resquício desse antigo sistema de contagem.
Este trabalho debruça-se sobre diferentes formas de representar números reais. Iremos apresentar e estudar dois modos distintos de representar números reais. Assim, iniciamos este trabalho com um capítulo onde estudaremos sucessões e séries. Estes assuntos são necessários aos capítulos seguintes uma vez que a resolução de vários problemas que nos aparecem dependem do estudo da convergência de certas sucessões e séries.
No Capítulo II, a representação de um número real numa base $g$, sendo $g$ um inteiro maior do que 1. Iremos provar várias propriedades dos números reais, propriedades essas bem conhecidas, estando os números representados numa base $g$.
No Capítulo III iremos estudar outra forma de representar números reais, através das frações contínuas. A principal questão que vamos abordar é saber se qualquer fração contínua representa sempre um número real. Se bem que para frações contínuas finitas este problema é facilmente resolúvel, quando se trata de frações contínuas infinitas o problema torna-se bastante mais complexo. Iremos resolvê-lo para uma classe particular de frações contínuas infinitas, chamadas simples.



**Palavras chave:** Representação, base, números reais, fração contínua.

# Abstract

All human societies, from the most rudimentary to the most sophisticated, need the concept of number and some form of counting. According to many scholars (see cite Ore), all human societies have a designation for the first natural numbers, although in more primitive tribes this nomenclature does not exceed 2 or 3.
With regard to counting processes, it seems that humans have always used fingers as the most convenient way of counting natural numbers. However, although the fingers allow simple calculations to be made, the need to count a vast number of objects, be they cattle, friends, days or years, has led to a systematization of the counting process. A first step in this direction was the creation of groups of numbers, from which the rest would be built. The reader will probably be more familiar with the first 10 integer numbers for that group, from which the remaining natural numbers and all real numbers are constructed. The preponderance of the base 10 is due to the fact that the count is usually done with the fingers. However, other bases have also been used throughout history by other civilizations, such as the 5 base, where the counting is done using the fingers of a single hand, or the 20 base, which is quite common, and which corresponds to the use fingers and toes. This 20 base system was widely used in pre-Colombian civilizations in America such as the Mayans, but its use seems to have been well understood beyond Central America. In Europe it is possible to find traces of the use of this old base system 20. For example in French, eighty is called " it quatre-vingt ", a remnant of that old counting system.
This work focuses on different ways of representing real numbers. We will present and study two different ways of representing real numbers. Thus, we begin this work with an introductory chapter where we will study successions and series. These issues are necessary for the following chapters since the resolution of several problems that appear to us depends on the study of the convergence of certain successions and series.
In Chapter II, the representation of a real number on a $g$ basis, $g$ being an integer greater than 1. We will prove several properties of real numbers, properties that are well known, the numbers being represented on a $g$ basis.
In Chapter III we will study another way of representing real numbers, using continuous fractions. The main question we are going to address is to know if any fraction continued fraction always represent a real number. Although for finite continuous fractions this problem is easily solved, when it comes to infinite continuous fractions the problem becomes much more complex. We will solve it for a particular class of infinite continuous fractions, called simple.

**Keywords:** Representation, base, real numbers, continuous fraction.

# Notações

- $\mathbb{N}$ Conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{N}_0$ Conjunto dos números inteiros não negativos;
- $\mathbb{Z}$ Conjunto dos números inteiros relativos;
- $\mathbb{Q}$ Conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}^+$ Conjunto dos números reais positivos;
- $\mathbb{R}_0^+$ Conjunto dos números reais não negativos;
- $[x]$ Parte inteira do número real $x$;
- $|x|$ Módulo do número real $x$;
- $a|b$ $a$ divide $b$.

# Conteúdo

# Capítulo 1

## Introdução

A Teoria de Números, tal como outras áreas da Matemática, necessita para sua compreensão e desenvolvimento de conhecimentos provenientes das mais diversas fontes, nomeadamente da Análise Matemática e da Combinatória. Tendo presente este facto e com o objectivo de tornar a expressão o mais possível autocontida, iniciamos o nosso trabalho com um capítulo preliminar, onde é apresentado os resultados ligados a sucessões, séries e produtos infinitos. O objetivo é apresentar diversos resultados conhecidos, os quais são utilizados diversas vezes ao longo do texto. Os resultados presentes neste capítulo podem ser encontrados em qualquer livro de Matemática elementar. No entanto para a elaboração deste capítulo consultámos essencialmente [3], [5] e [6].

### 1.1 Sucessões

Nesta secção, após apresentarmos a definição de sucessão, abordaremos as noções de subsucessão, sucessão monótona, sucessão limitada e limite de uma sucessão. Algumas propriedades fundamentais sobre estes conceitos serão também apresentadas.

**Definição 1.1.** Uma sucessão de números reais é toda a aplicação de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}_0$) em $\mathbb{R}$, habitualmente representada por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ .

Aos elementos do contradomínio de uma sucessão damos o nome de termos da sucessão.

Uma sucessão pode ser descrita por um termo genérico $u_n$ a que se dá o nome de termo geral da sucessão.

**Exemplo 1.1.** Consideramos a seguinte sucessão de termo genérico $u_n = \frac{1}{n}$. Então

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, para obter o sétimo termo desta sucessão substitui-se, no termo geral, $n$ por 7:

$$u_7 = \frac{1}{7}.$$

Uma sucessão de números reais definida pelo **termo geral** está completamente definida, visto que o domínio e o conjunto de chegada são conhecidos: $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, respetivamente.
Uma sucessão de números reais pode também ser definida **por um processo de recorrência**, onde cada termo da sucessão é calculado a partir de termos anteriores já conhecidos.

**Exemplo 1.2.** Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em que:

- $u_1 = 3$;
- Qualquer termo diferente do primeiro obtém-se do termo anterior somando-lhe 4 unidades.

Abreviadamente escrevemos

$$u_n = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad n = 1 \\ u_{n-1} + 4 & \text{se} \quad n > 1 \end{cases} .$$

Então, como $u_{n+1} = u_n + 4$ vem

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + 4 = 3 + 4 = 7 \\ u_3 &= u_2 + 4 = 7 + 4 = 11 \\ u_4 &= u_3 + 4 = 11 + 4 = 15 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vamos em seguida definir o que entendemos por subsucessão de uma sucessão de números reais.

**Definição 1.2.** Uma **subsucessão** da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é qualquer sucessão que resulte da supressão de alguns termos de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exemplo 1.3.** Uma subsucessão da sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$,

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{6}, \ \ldots, \ \frac{1}{n}, \ \ldots$$

é, por exemplo a sucessão

$$\frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{1}{6}, \ \ldots .$$

Para definirmos sucessão monótona, devemos primeiro saber o que são sucessões crescentes e sucessões decrescentes.

**Definição 1.3.** Uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita crescente (ou crescente em sentido lato) se, e só se

$$u_{n+1} \geq u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, numa sucessão crescente, cada termo é menor ou igual do que o termo seguinte. Então,

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots .$$

Uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **estritamente crescente** se, e só se

$$u_{n+1} > u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$u_{n+1} - u_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que quer dizer

$$u_1 \, < \, u_2 < \, u_3 < \cdots < \, u_n \, < \, u_{n+1} \, < \cdots .$$

**Exemplo 1.4.** A sucessão dos números pares, isto é, a sucessão de termo geral $u_n = 2n$,

$$2, \; 4, \; 6, \; \cdots , \; 2n, \cdots$$

é uma sucessão estritamente crescente.
Com efeito,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) - 2n \\ &= 2n + 2 - 2n \\ &= 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$u_{n+1} - u_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Os conceitos de sucessão decrescente (ou decrescente em sentido lato) e de sucessão estritamente decrescente são definidos de modo análogo.

**Exemplo 1.5.** A sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$,

$$1, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{5}, \; \frac{1}{6}, \; \cdots , \; \frac{1}{n}, , \cdots$$

é uma sucessão decrescente.
Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{n-n-1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n^2+n} < 0, \, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Definição 1.4.** Uma **sucessão monótona** é toda sucessão crescente ou decrescente em sentido estrito ou lato.

**Exemplo 1.6.** A sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$,

$$-1, \; 1, \; -1, \; 1, \; 1 \; -1 \; 1, \cdots$$

não é nem crescente e nem decrescente e logo, não é uma sucessão monótona.

De seguida iremos apresentar o conceito de sucessão limitada. Antes mesmo de o definirmos, vamos primeiro apresentar as noções de majorante e de minorante de um conjunto. Com estas noções apresentaremos também o conceito de conjunto limitado.

**Definição 1.5.** O **majorante** de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é um número real $L$ tal que

$$\forall x \in A, \quad x \leq L.$$

Um conjunto que admite um majorante diz-se **limitado superiormente** ou **majorado**.

**Exemplo 1.7.** Se $A = \{3, 5, 7, 9\}$, podemos afirmar que 10 é um majorante de $A$, e portanto $A$ é um conjunto limitado superiormente.

Com efeito, são verdadeiras as proposições

$$3 \leq 10; \quad 5 \leq 10; \quad 7 \leq 10; \quad 9 \leq 10.$$

É também majorante de $A$ qualquer outro número real maior ou igual a 9.

**Definição 1.6.** Seja $A$ um conjunto limitado superiormente. Ao elemento mínimo do conjunto de todos os majorantes de $A$ chamamos **supremo** do conjunto $A$.

**Exemplo 1.8.** Se $A = [-3, 5[$, o conjunto dos majorantes de $A$ é $[5, +\infty[$ e o supremo do conjunto é o número 5.

**Axioma do supremo**: Todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que seja limitado superiormente tem supremo.
O supremo de um conjunto $A$ será denotado por $sup(A)$.

**Definição 1.7.** O **minorante** de um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é um número real $m$ tal que

$$\forall x \in B, \ \ m \leq x.$$

**Exemplo 1.9.** Se B=$\{4, 5, 6, 7\}$, podemos afirmar que 3 é um minorante de $B$.

Com efeito, são verdadeiras as proposições

$$4 \geq 3; \ 5 \geq 3; \ 6 \geq 3; \ 7 \geq 3.$$

São também minorantes de $B$ qualquer número real menor ou igual do que 4.

**Definição 1.8.** Um conjunto diz-se **minorado** ou **limitado inferiormente** se tem minorantes. Ao elemento máximo do conjunto dos minorantes chamamos **ínfimo** do conjunto.

O ínfimo de um conjunto $A$ será denotado por $inf(A)$.

**Exemplo 1.10.** Se $B = [-3, 6[$, o conjunto dos minorantes de $B$ é $]-\infty, -3]$ e o ínfimo de $B$ é o número $-3$.

**Lema 1.1.** Seja $A$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente. Então, o conjunto $-A = \{-x : x \in A\}$ é limitado superiormente e $-sup(-A) = inf(A)$.

**Demonstração:** Como $A$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente, existe um número real $c$ tal que $c \leq a$, para todo $a \in A$. Então $-a \leq -c$, para todo $a \in A$ e portanto $-A$ é limitado superiormente. Pelo axioma do supremo, $-A$ tem supremo que denotamos por $b$. Para concluir a demonstração basta mostrar que $-b$ é o ínfimo de $A$. Como $b$ é o supremo de $-A$ temos $-a \leq b$, para todo $a \in A$. Então $-b \leq a$ e portanto $-b$ é um minorante do conjunto $A$. Seja $b'$ outro minorante de $A$. Então $b' \leq a$, para todo $a \in A$, e então $-a \leq -b'$, para todo $a \in A$. Concluímos assim que $-b'$ é um majorante de $-A$ e atendendo à definição de supremo vem $b \leq -b'$. Então $b' \leq -b$ e portanto $-b$ é o elemento máximo do conjunto dos minorantes de $A$. $\square$

Deste lema concluímos o resultado seguinte:

**Teorema 1.1.** *Todo o subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que seja limitado inferiormente tem ínfimo.*

**Definição 1.9.** Um conjunto diz-se **limitado** se e só se for majorado e minorado.

Em outras palavras, podemos escrever:

O conjunto $C$ é limitado se e só se

$$\exists L > 0 \ \forall x \in C, \ \ |x| \leq L.$$

Com efeito, como

$$|x| \leq L \Leftrightarrow -L \leq x \leq L,$$

$-L$ seria um minorante e $L$ um majorante do conjunto $C$.

**Exemplo 1.11.** Se $C = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, então $-4$ é um minorante de $C$, visto que todos os elementos de $C$ são superiores a $-4$, e o conjunto de todos os minorantes de $C$ é

$$]-\infty, -3] \, .$$

Neste caso, $-3$ é o ínfimo.

Como, por outro lado, o número 1 é um majorante do conjunto $C$, então o conjunto $C$ é limitado. Tendo em conta a definição de conjunto limitado, $L$ poderia ser qualquer valor superior ou igual a 3.

**Definição 1.10.** Uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se **limitada**, se o conjunto dos seus termos é um conjunto limitado. Portanto, uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se **limitada**, se o conjunto dos seus termos admite um majorante e um minorante. Isto é, existem dois números reais $M$ e $N$, tais que

$$N \leq u_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo 1.12.** A sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$ é limitada, pois o conjunto dos seus termos é o conjunto $\{-1, 1\}$ que é limitado.

Passemos de seguida ao conceito de limite de uma sucessão. A definição de limite de uma sucessão pode ser visto como um caso particular da definição de limite, segundo Cauchy, para funções com domínio $\mathbb{N}$, quando o argumento tende para $+\infty$. Antes mesmo de o definirmos e apresentarmos as suas propriedades, importa-nos primeiro abordar as noções de erro de um valor aproximado e de vizinhança.

**Definição 1.11.** Seja $a$ um número real qualquer e $\epsilon$ um número real positivo. Chama-se **valor aproximado de** $a$ **com erro inferior a** $\epsilon$ (também se diz a menos de $\epsilon$) a todo o número real $x$, tal que

$$|x-a|<\epsilon.$$

Ao número real $|x-a|$ damos o nome de erro de $x$ em relação a $a$.

**Exemplo 1.13.** 3,14 é o valor aproximado de $\pi$ com erro inferior a $0,01$.
Com efeito,

$$|3,14-\pi|<0,01.$$

**Definição 1.12.** A **vizinhança de** $a$ **de raio** $\epsilon$ é o conjunto de todos os valores aproximados de $a$ com erro inferior a $\epsilon$ e representa-se por $V_\epsilon(a)$ ou $V(a,\epsilon)$. Abreviadamente escreve-se:

$$V_\epsilon(a) = \left]a-\epsilon, a+\epsilon\right[.$$

**Exemplo 1.14.** O conjunto de todos os valores aproximados de 2 com erro inferior a $0,01$ é

$$\begin{aligned} V_{0,01}(2) &= \left]2-0,01, 2+0,01\right[ \\ &= \left]1,99; 2,01\right[. \end{aligned}$$

**Definição 1.13.** Dizemos que o número real $a$ é o **limite de uma sucessão** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se para qualquer $\epsilon>0$, existe $M>0$ tal que, para qualquer $n\in\mathbb{N}$, se $n>M$, então $|u_n-a|<\epsilon$. Isto é,

$$\forall_{\epsilon>0}\ \ \exists_{M>0}:\ \ n>M \implies |u_n-a|<\epsilon.$$

Neste caso, diz-se que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** para $a$, ou tende para $a$. Abreviadamente escreve-se:

$$\lim u_n = a,$$

ou

$$u_n \to a.$$

Se uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma sucessão convergente então dizemos que a sucessão é **divergente**.

**Exemplo 1.15.** Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.
Vamos mostrar que

$$\lim u_n = 2,$$

isto é,

$$\forall_{\epsilon>0}\ \ \exists_{M>0}:\ n>M \implies \left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\epsilon.$$

Seja $\epsilon>0$. Observamos que

$$\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\epsilon \ \ \Leftrightarrow\ \ \left|\frac{3}{n+1}\right|<\epsilon,$$

e

$$\frac{3}{n+1} < \epsilon \ \Leftrightarrow \ n > \frac{3}{\epsilon} - 1.$$

Seja $M = \frac{3}{\epsilon} - 1 > 0$. Então, se $n > \frac{3}{\epsilon} - 1$ vem $\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \epsilon$, logo

$$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{M=\frac{3}{\epsilon}-1>0}: \ n > M \Longrightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \epsilon.$$

Vejamos agora algumas propriedades do conceito de limite:

**Teorema 1.2.** ***(Teorema da unicidade do limite)*** *O limite de uma sucessão convergente é único.*

**Demostração:** Fazemos a demonstração por redução ao absurdo. Admitamos que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende para dois limites diferentes $a$ e $b$.
Suponhamos que $b > a$ e seja $\epsilon < \frac{b-a}{2}$.
Então, como $u_n \to a$ temos

$$\exists_{M_1>0} : n > M_1 \Longrightarrow u_n \in V_\epsilon(a).$$

Analogamente, como $u_n \to b$,

$$\exists_{M_2>0} : n > M_2 \Longrightarrow u_n \in V_\epsilon(b).$$

Seja $M$ o maior dos números $M_1$ e $M_2$. Então, podemos concluir que se $n > M$,

$$u_n \in V_\epsilon(a) \quad \text{e} \quad u_n \in V_\epsilon(b),$$

o que é impossível, pois

$$V_\epsilon(a) \cap V_\epsilon(b) = \varnothing.$$

Então, a suposição que fizemos não é verdadeira e $a = b$. Portanto, uma sucessão convergente não pode ter mais do que um limite. □

**Teorema 1.3.** *Toda sucessão constante é convergente e tem por limite a própria constante.*

**Demostração:** Com efeito, a sucessão de termo geral

$$u_n = k, \qquad k \in \mathbb{R},$$

é uma sucessão constante e tem por limite $k$, pois qualquer que seja $\epsilon$ positivo,

$$|u_k - k| = |k - k| = 0 < \epsilon.$$

□

**Teorema 1.4.** *Toda a subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente e tende para o mesmo limite.*

**Demostração:** Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente para um número real $a$ e seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Sendo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para $a$, tem-se

$$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{M>0}: \ n > M \Longrightarrow |u_n - a| < \epsilon,$$

facto suficiente para garantir que, também,

$$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{N>0}: \ n > N \Longrightarrow |v_n - a| < \epsilon,$$

pois $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é, todos os termos de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são elementos do conjunto dos termos de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

**Teorema 1.5.** *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

**Demostração:** Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão que vamos supor ser crescente e limitada. A hipótese de ser limitada significa que ela é limitada superiormente, ou seja, seu conjunto de termos possui supremo que denotamos por $S$. Vamos mostrar que $\lim\ u_n = S$.
Com efeito, dado qualquer $\epsilon > 0$, como $S-\epsilon < S$, atendendo à definição de supremo, o número $S - \epsilon$ não é majorante do conjunto dos termos da sucessão. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S - \epsilon < u_{n_0}$. Como a sucessão é monótona crescente,

$$n > n_0 \Longrightarrow u_{n_0} \leq u_n$$

e, portanto,

$$S - \epsilon < u_n.$$

Como $u_n \leq S$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que

$$n > n_0 \Longrightarrow S - \epsilon < u_n < S + \epsilon.$$

Portanto,

$$u_n \longrightarrow S.$$

De modo análogo mostramos que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão decrescente e limitada e se $s$ é o ínfimo do conjunto dos seus termos, então

$$u_n \longrightarrow s.$$

Assim completamos a demonstração. □

**Teorema 1.6.** *Se a sucessão* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e se* $\lim\ u_n = a$*, então a sucessão* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *também é convergente e* $\lim\ |u_n| = |a|$.

**Demonstração:** Seja $\epsilon$ um número positivo. Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente para $a$, existe um número natural $p$ tal que

$$n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \epsilon.$$

Mas, de acordo com [5], página 56, tem-se

$$|u_n - a| \geq ||u_n| - |a||$$

e, portanto, tem-se:

$$n > p \Longrightarrow ||u_n| - |a|| < \epsilon.$$

Como $\epsilon$ é um qualquer número real positivo, é verdadeira a proposição

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists_{p \in \mathbb{N}} \ n > p \Longrightarrow ||u_n| - |a|| < \epsilon,$$

isto é,

$$|u_n| \longrightarrow |a| \, .$$

$\square$

**Teorema 1.7.** *Se a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, e se a partir de certa ordem todos os termos são não negativos, então* $\lim u_n \ \geq 0$.

**Demonstração:** Suponhamos, com vista a obter um absurdo que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, que a partir de certa ordem todos os termos são não negativos, mas $\lim \ u_n = a$, com $a < 0$.
Seja $\epsilon$ um número real positivo tal que $\epsilon < |a|$.
Como a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para $a$, existe um número natural $p_1$ tal que

$$n > p_1 \Longrightarrow a - \epsilon < u_n < a + \epsilon. \quad (1.1)$$

Mas, por hipótese, existe um número natural $p_2$ tal que

$$n > p_2 \Longrightarrow u_n \geq 0. \quad (1.2)$$

Da conjunção (1.1) e (1.2) resulta que, representando por $p$ o maior dos inteiros $p_1$ e $p_2$,

$$n > p \Longrightarrow u_n \geq 0 \wedge u_n < a + \epsilon,$$

o que é impossível pelo facto de ser $a + \epsilon < 0$, uma vez que $a$ é negativo e $|a| > \epsilon$.
Portanto, concluímos que

$$\lim \ u_n \geq 0.$$

**Teorema 1.8.** *Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sucessões convergentes e, a partir de uma certa ordem se tem $u_n \leq v_n$, então* $\lim \ u_n \leq \lim \ v_n$.

**Demonstração:** Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões convergentes tais que, a partir de certa ordem, se tem $u_n \leq v_n$ e suponhamos, com vista a obter um absurdo que $\lim \ u_n > \lim \ v_n$.
Façamos $\lim \ u_n = a$ e $\lim \ v_n = b$, e seja $\epsilon$ um número real positivo menor que $\frac{a-b}{2}$.
Atendendo à Definição 1.13, existem os números naturais $p_1$ e $p_2$ tais que

$$n > p_1 \Longrightarrow u_n \in V_\epsilon(a),$$

e

$$n > p_2 \Longrightarrow v_n \in V_\epsilon(b).$$

Mas, por hipótese, existe um número natural $p_3$ tal que

$$n > p_3 \Longrightarrow u_n \leq v_n.$$

Representando por $p$ o maior dos números naturais $p_1$, $p_2$ e $p_3$, tem-se:

$$n > p \Longrightarrow u_n \in V_\epsilon(a) \wedge v_n \in V_\epsilon(b) \wedge u_n \leq v_n,$$

o que é impossível, pois qualquer elemento de $V_\epsilon(a)$ é maior que todos os elementos de $V_\epsilon(b)$. $\square$

**Teorema 1.9.** ***(Teorema das sucessões enquadradas)*** *Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões convergentes e com o mesmo limite $a$, e seja $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão tal que a partir de certa ordem se tem $u_n \leq w_n \leq v_n$. Então $\lim\, w_n = a$.*

**Demonstração:** Sendo $\lim\ u_n = a$ e $\lim\ v_n = a$, então $\lim\,(v_n - u_n) = 0$.
Ora, de $u_n \leq w_n \leq v_n$, conclui-se que $0 \leq w_n - u_n \leq v_n - u_n$.
Como, para todo $\epsilon > 0$, existe uma ordem $p$ tal que

$$n > p \Longrightarrow |v_n - u_n| < \epsilon,$$

também, para todo $\epsilon > 0$, tem-se:

$$n > p \Longrightarrow |w_n - u_n| < \epsilon.$$

Podendo concluir-se que $\lim\ w_n = \lim\ u_n$ e, portanto, $\lim\ w_n = a$. □
Vamos em seguida apresentar alguns aspectos sobre infinitamente grandes.

**Definição 1.14.** Diz-se que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande positivo** e escreve-se

$$u_n \longrightarrow +\infty,$$

se e só se qualquer que seja o número $L$ positivo, existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores que $L$. Abreviadamente escreve-se:

$$(u_n \to +\infty) \Leftrightarrow \left(\forall_{L>0} \quad \exists_{p\in\mathbb{N}}: \ \ n > p \implies \ u_n > L\right).$$

**Exemplo 1.16.** A sucessão dos números naturais

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots,$$

é um infinitamente grande positivo.
Com efeito, para qualquer $L \in \mathbb{R}^+$,

$$n > L \Longrightarrow u_n > L.$$

É portanto verdadeira a proposição

$$\forall_{L>0} \quad \exists_{p\in\mathbb{N}}: \ \ n > p \implies \ u_n > L.$$

Neste caso, $p$ é qualquer número natural superior ou igual a $L$.

**Definição 1.15.** Diz-se que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande negativo** e escreve-se

$$u_n \longrightarrow -\infty,$$

se e só se a sucessão $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um infinitamente grande positivo. Abreviadamente escreve-se:

$$(u_n \longrightarrow -\infty) \ \Leftrightarrow \ (-u_n \longrightarrow +\infty)$$

ou

$$(u_n \longrightarrow -\infty) \ \Leftrightarrow \ \left(\forall_{L>0} \quad \exists_{p\in\mathbb{N}}: \ \ n > p \implies \ -u_n > L\right).$$

**Exemplo 1.17.** A sucessão de termo geral $u_n = 1 - 2n$ é um infinitamente grande negativo. Com efeito, para qualquer $L \in \mathbb{R}^+$,

$$n > \frac{L+1}{2} \Longrightarrow -u_n > L.$$

É portanto verdadeira a proposição

$$\forall_{L>0} \quad \exists_{p\in\mathbb{N}} : \quad n > p \Longrightarrow \quad -u_n > L.$$

Neste caso, $p$ é qualquer número natural superior ou igual a $\frac{L+1}{2}$.

**Definição 1.16.** Diz-se que uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande** ou **infinitamente grande em módulo** e escreve-se

$$u_n \longrightarrow \infty,$$

se e só se a sucessão $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é um infinitamente grande positivo.

**Observação 1.1.** *Se a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é infinitamente grande em módulo e não é infinitamente grande positivo ou negativo, então não existe* $\lim u_n$.

Desta definição resulta imediatamente que todos os infinitamente grandes positivos e todos infinitamente grandes negativos são infinitamente grandes em módulo.
Já vimos que se uma sucessão tem por limite um número real se chama convergente. Os infinitamente grandes não são sucessões convergentes, são sucessões divergentes. Se uma sucessão tende para $+\infty$ ou $-\infty$ diz-se que a sucessão é **propriamente divergente**; as sucessões divergentes que não são propriamente divergentes dizem-se **sucessões oscilantes**.

**Exemplo 1.18.** São sucessões convergentes as sucessões de termo geral:

$$u_n = \frac{n+1}{n} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{3}{n}.$$

De facto, $u_n \longrightarrow 1$ e $v_n \longrightarrow 0$.
São propriamente divergentes as sucessões de termo geral:

$$w_n = 3n + 5 \quad \text{e} \quad z_n = 5 - 7n.$$

De facto, $w_n \longrightarrow +\infty$ e $z_n \longrightarrow -\infty$.
São oscilantes as sucessões de termo geral

$$p_n = (-1)^n(9n - 5) \quad \text{e} \quad q_n = (-1)^n \times 7.$$

## 1.2 Séries

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Nesta secção pretendemos dar significado a uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (1.3)$$

Com este objetivo definimos o conceito de $n$-ésima soma parcial.

**Definição 1.17.** Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos a $n$**-ésima soma parcial** da série (1.3) ao número real $s_n$ definido

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Assim, dada uma expressão da forma (1.3), podemos definir a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das somas parciais. É esta sucessão que nos permite dar um significado à expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,.$$

Assim, se a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente, então dizemos que a série (1.3) é convergente. Nesse caso, definimos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ como sendo $\lim\ s_n$, isto é, se $\lim\ s_n = a$, então dizemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a.$$

Se a sequência das somas parciais não é convergente, então dizemos que (1.3) é uma série divergente.

**Exemplo 1.19.** Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Vamos mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Para isso temos de mostrar que a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)},$$

é uma sucessão convergente e $\lim\ s_n = 1$.
Como

$$s_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)},$$

e como para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

vem

$$\begin{aligned} s_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Então,

$$\lim\, s_n = 1,$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Existe um teste simples para decidir se uma série é ou não convergente.

**Teorema 1.10.** *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de números reais. Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente, então* $\lim\, u_n = 0$*. Por outras palavras, se* $\lim\, u_n \neq 0$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é uma série divergente.*

**Demonstração:** Suponhamos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente. Então a sucessão das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente.
Seja

$$s = \lim\, s_n.$$

Então, a sucessão $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$s'_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = 1 \\ s_{n-1} & \text{se} \quad n > 1 \end{cases},$$

é uma sucessão convergente e $\lim\, s'_n = s$. Então, $\lim\,(s_n - s'_n) = 0$.
Mas

$$s_n - s'_n = u_n,$$

logo

$$\lim\, u_n = 0.$$

□

Atendendo a este teorema, concluímos que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

são divergentes, pois $\lim\, n = +\infty$ e $\lim\,(-1)^n$ não existe.
A afirmação recíproca do teorema anterior não é válida, isto é, dada uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\lim\, u_n = 0$, pode acontecer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ seja divergente.

**Exemplo 1.20.** Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

conhecida como série harmónica.

É evidente que lim $\frac{1}{n} = 0$. No entanto, a série é divergente. Para mostrar este facto observemos que

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} + s_n.
\end{aligned}$$

Então,

$$s_{2n} \geq \frac{1}{2} + s_n.$$

Se a série harmónica fosse convergente para um número real $s$, então

$$\lim\, s_n = \lim\, s_{2n} = s.$$

Mas $s_{2n} \geq \frac{1}{2} + s_n$, logo $s \geq \frac{1}{2} + s$, ou seja, $0 \geq \frac{1}{2}$. Impossível. Então a série harmónica é uma série divergente.

No caso de séries de números reais não negativos, podemos apresentar mais um critério para a convergência.

**Teorema 1.11.** *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais não negativos. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente se e só se a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das somas parciais é uma sucessão limitada.*

**Demonstração:** Uma vez que $u_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, vem $s_n \leq s_{n+1}$. Concluímos assim que a sucessão das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão monótona crescente e portanto $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente se, e só se é limitada. □

**Exemplo 1.21.** Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2\times 2} + \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{4\times 4} + \cdots + \frac{1}{n\times n} \\
&\leq 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}.
\end{aligned}$$

Atendendo que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

vem

$$\begin{aligned} s_n &\leq 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \\ &= 1+1-\frac{1}{n} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Mostramos assim que a sucessão das somas parciais é monótona e limitada, logo a série é convergente.

Saber para que número real esta série converge é um problema difícil. Em [5] o leitor poderá encontrar nove demonstrações diferentes para a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Definição 1.18.** Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

onde $u_n = v_n - v_{n+1}$ é chamada de **série telescópica**.

Em geral é difícil saber o valor de séries convergentes. No entanto, em séries telescópicas é fácil determinar esse valor.

**Teorema 1.12.** *Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma sucessão de números reais e seja $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ a correspondente série telescópica. A série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ é uma série convergente se e só se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é uma sucessão convergente. Neste caso,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = v_0 - \lim\ v_n.$$

**Demonstração:** Uma vez que

$$\begin{aligned} s_n &= (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + (v_n - v_{n+1}) \\ &= v_0 - v_{n+1}, \end{aligned}$$

se $\lim\ v_n$ existe, e se este limite é igual a $v$, então a sucessão $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, onde $v'_n = v_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$ também é convergente e portanto $\lim\ v'_n = \lim\ v_{n+1}$ existe e é igual a $v$. Assim,

$$\lim\ s_n = v_0 - v,$$

logo a série é convergente.
Reciprocamente, suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ é convergente, e seja $s = \lim\ s_n$. Como $v_{n+1} = v_0 - s_n$ concluímos que a sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ também é convergente. □

**Teorema 1.13.** *Seja $u$ um número real não nulo e $k \in \mathbb{Z}$. A série $\sum_{n=k}^{\infty} u^n$ converge se e só se $|u| < 1$ e neste caso*

$$\sum_{n=k}^{\infty} u^n = \frac{u^k}{1-u}.$$

**Demonstração:** Se $|u| \geq 1$ então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|u|^n \geq 1$, logo $\lim u^n \neq 0$ e portanto, pelo Teorema 1.10, a série é divergente.
Suponhamos que $|u| < 1$. Uma vez que

$$u^n = \frac{1}{1-u}\left(u^n - u^{n+1}\right)$$

vem

$$u^n = v_n - v_{n+1},$$

onde

$$v_n = \frac{u^n}{1-u}.$$

Como $|u| < 1$ vem $\lim \frac{u^n}{1-u} = 0$. Pelo Teorema anterior vem

$$\sum_{n=k}^{\infty} u^n = v_k - 0 = \frac{u^k}{1-u}.$$

□

## 1.3 Produto infinito

Nesta secção, de certa forma análoga a secção anterior, pretendemos dar significado a uma expressão da forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot ...,$$

sendo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais.

**Definição 1.19.** Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. O produto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot ...$$

é dito **convergente** se existir $m \in \mathbb{N}$ tal que os $u_n$'s são diferentes de zero para todo $n \geq m$, e a sucessão dos produtos parciais

$$p_n = \prod_{k=m}^{n} u_k, \quad n \geq k,$$

é uma sucessão convergente para um número real não nulo. Neste caso, se $\lim p_n = p$, $p \neq 0$, definimos

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_k = u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_{m-1} \cdot p.$$

Esta definição é, obviamente, independente do valor $m$ escolhido, de modo que $u_n$'s sejam diferentes de zero para todo $n \geq m$.

Por outro lado, o produto infinito $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ **diverge** se satisfazer uma das seguintes condições:

- A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem um número infinito de termos iguais a zero;
- A sucessão $\left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right)_{n\geq m}$ diverge;
- A sucessão $\left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right)_{n\geq m}$ converge para zero.

Neste último caso, dizemos que o produto infinito diverge para zero. Assim como as sequências e séries podem começar em qualquer número inteiro, o produto também pode começar em qualquer número inteiro, com modificações diretas da definição.

**Exemplo 1.22.** O **produto harmónico** $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ diverge para zero, porque

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}\to 0$$

Por outro lado, o produto infinito $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge para $\frac{1}{2}$, porque

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} &= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\\ &= \frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Observe que o produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ também converge, mas nesse caso,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1-\frac{1}{1^2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

**Teorema 1.14.** *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais não negativos. O produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_i)$ é convergente se, e só se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ é convergente.*

**Demonstração:** Consideremos as sucessões $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$p_n=\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\quad\text{e}\quad s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de números reais não negativos, as sucessões $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são crescentes, logo estas sucessões são convergentes se e só se são limitadas. Uma vez que

$$1 \leq 1 + x \leq e^x,$$

para todo número real não negativo $x$ (ver [5], página 301), vem

$$1 \leq p_n = \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \leq \prod_{i=1}^{n} e^{a_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} a_i} = e^{s_n}.$$

Concluímos assim que se $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada, então $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é também limitada.

Suponhamos agora que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada. Como

$$\begin{aligned} p_n &= (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \\ &\geq 1 + a_1 + \cdots + a_n \\ &= 1 + s_n, \end{aligned}$$

concluímos que se a sucessão $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então a sucessão $(1+s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada e portanto, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada. $\square$

# Capítulo 2

## Representação de Números Reais numa Base $g$

Neste capítulo abordamos de maneira clara a representação de um número real numa base genérica que denotamos de $g$. Assim, ao longo deste capítulo, $g$ é um inteiro positivo, maior do que 1 e arbitrariamente fixado. Este capítulo é todo baseado, com as devidas adaptações, em [1].

### 2.1 Representação de um número natural na base $g$

**Definição 2.1.** Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma representação de $n$ na base $g$ é uma expressão

$$n = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \cdots + c_1 g + c_0,$$

onde, para cada $i = 0, 1, \cdots, m$,

$$0 \leq c_i \leq g - 1 \quad \text{e} \quad c_m \neq 0.$$

Se

$$c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \cdots + c_1 g + c_0$$

é uma representação na base $g$ de um número natural $n$, então $n$ pode ser abreviadamente representado por

$$n = (c_m c_{m-1} \cdots c_1 c_0)_g.$$

Os números inteiros $\{0, 1, \cdots g - 1\}$ são chamados de algarismos do sistema de base $g$.

**Teorema 2.1.** *Qualquer número natural admite uma única representação na base $g$.*

**Demonstração:** Comecemos por demonstrar que qualquer número natural tem pelo menos uma representação na base $g$. Segundo o algoritmo da divisão, ao dividir $n$ por $g$ sabemos que existem inteiros não negativos $q_1$ e $c_0$ tais que $n = gq_1 + c_0$ e $0 \leq c_0 \leq g - 1$. Dividindo $q_1$ por $g$ obtemos o quociente que representamos por $q_2$ e o resto $c_1$. Sabemos que $q_1 = gq_2 + c_1$, onde $0 \leq c_1 \leq g - 1$ e $q_2 \geq 0$, e

$$q_2 \leq \frac{q_1}{g}.$$

Continuando este procedimento, é claro que os quocientes obtidos consecutivamente, são números positivos cada vez mais pequenos, porque $q_{t+1} \leq \frac{q_t}{g}$, $t \geq 1$. Então existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $q_k = 0$. Seja $m$ o maior inteiro para o qual $q_m \neq 0$. Este procedimento termina então no passo $m+1$, e obtemos a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} n &= c_0 + gq_1 \\ q_1 &= c_1 + gq_2 \\ &\vdots \\ q_{m-1} &= c_{m-1} + gq_m \\ q_m &= c_m, \end{aligned}$$

onde, $0 \leq c_i \leq g-1$ e $c_m \neq 0$, para todo $i = 0, 1, \cdots, m$. Assim, fazendo substituições sucessivas obtemos a seguinte representação de $n$ na base $g$:

$$n = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \cdots + c_1 g + c_0.$$

Demonstremos agora que esta representação de $n$ na base $g$ é única. Para isso vamos mostrar que se

$$n = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \cdots + c_1 g + c_0,$$

então os inteiros $m$ e $c_i$, $i = 0, 1, \cdots, m$, são unicamente determinados por $n$.
Seja $t \in \{0, 1, \cdots m-1\}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{n}{g^t} &= \frac{c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \cdots + c_t g^t + c_{t-1} g^{t-1} + c_{t-2} g^{t-2} + \cdots + c_0}{g^t} \\ &= c_m g^{m-t} + c_{m-1} g^{m-t-1} + \cdots + c_t + \frac{c_{t-1}}{g} + \frac{c_{t-2}}{g^2} + \cdots + \frac{c_0}{g^t} \end{aligned}$$

e

$$0 \leq \frac{c_{t-1}}{g} + \frac{c_{t-2}}{g^2} + \cdots + \frac{c_0}{g^t} \leq \frac{g-1}{g} + \frac{g-1}{g^2} + \cdots + \frac{g-1}{g^t}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{g-1}{g} + \frac{g-1}{g^2} + \ldots + \frac{g-1}{g^t} &= \frac{(g-1) \times g^{t-1} + (g-1) \times g^{t-2} + \cdots + (g-1) \times 1}{g^t} \\ &= \frac{(g-1)(g^{t-1} + g^{t-2} + \cdots + 1)}{g^t} \\ &= \frac{g^t + g^{t-1} + g^{t-2} + \cdots + g - g^{t-1} - g^{t-2} - \cdots - 1}{g^t} \\ &= \frac{g^t - 1}{g^t} = 1 - \frac{1}{g^t} < 1, \end{aligned}$$

concluímos

$$\left[\frac{n}{g^t}\right] = c_m g^{m-t} + c_{m-1} g^{m-t-1} + \cdots + c_{t+1} g + c_t.$$

Analogamente,

$$\left[\frac{n}{g^{t+1}}\right] = c_m g^{m-t-1} + \ldots + c_{t+1},$$

e então

$$c_t = \left[\frac{n}{g^t}\right] - g\left[\frac{n}{g^{t+1}}\right],$$

logo, $c_t$ é unicamente determinado por $n$.
Do mesmo modo, dividindo $n$ por $g^m$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{n}{g^m} &= \frac{c_m g^m + c_{m-1}g^{m-1} + \cdots + c_1 g + c_0}{g^m}\\ &= c_m + \frac{c_{m-1}}{g} + \cdots + \frac{c_1}{g^{m-1}} + \frac{c_0}{g^m},\end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{c_{m-1}}{g} + \cdots + \frac{c_0}{g^m} \leq \frac{g-1}{g} + \frac{g-1}{g^2} + \cdots + \frac{g-1}{g^m} &= \frac{g^m-1}{g^m}\\ &= 1 - \frac{1}{g^m}\\ &< 1,\end{aligned}$$

obtemos

$$c_m = \left[\frac{n}{g^m}\right].$$

Além disso, como $0 \leq c_i \leq g-1,\ \ i = 0, 1, \cdots, m\ \ e\ \ c_m \neq 0$, temos:

$$g^m \leq n \leq (g-1)(g^m + g^{m-1} + \cdots + g + 1) < g^{m+1}.$$

Assim, $m \leq log_g(n) < m+1$. Isso significa que

$$m = [log_g(n)].$$

□

A fim de estender a Definição 2.1 para todos os números inteiros, temos de notar que o número inteiro zero tem uma única representação na base $g$; 0. Observe-se que 0 é um algarismo da base $g$. Quanto aos números inteiros negativos, estes podem ser representados na base $g$, usando a representação do seu simétrico. Assim, dado um inteiro negativo $m$, pelo Teorema 2.1, existem os inteiros $s$ e $c_i$, onde $0 \leq c_i \leq g-1$, para todo $i = 0, \ldots, s$ tais que

$$-m = c_s g^s + c_{s-1}g^{s-1} + \cdots + c_1 g + c_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}m &= -(c_s g^s + c_{s-1}g^{s-1} + \cdots + c_1 g + c_0)\\ &= (-c_s)g^s + (-c_{s-1})g^{s-1} + \cdots + (-c_1)g + (-c_0),\end{aligned}$$

que habitualmente é representado por

$$m = -(c_s c_{s-1} \ldots c_0)_g.$$

## 2.2 Representação de um número real na base $g$

**Definição 2.2.** Dizemos que um número real $x$ está representado na base $g$ se

$$x = a_s g^s + a_{s-1} g^{s-1} + \cdots + a_1 g + a_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots ,$$

onde:

(a) $s$ é um número inteiro não negativo;

(b) Para todo $i = 0, 1, \cdots, s$ e todo $j \in \mathbb{N}$, $a_i$ e $c_j$ são números inteiros tais que $0 \leq a_i, c_i \leq g - 1$, e se $s \geq 1$, então $a_s \neq 0$;

(c) $a_s g^s + a_{s-1} g^{s-1} + \cdots + a_1 g + a_0 = [x]$.

Se

$$x = a_s g^s + a_{s-1} g^{s-1} + \cdots + a_1 g + a_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots$$

é uma representação de um número real não negativo $x$ na base $g$, então $x$ também é denotado por

$$x = (a_s a_{s-1} \cdots a_0, c_1 c_2 \cdots)_g.$$

**Teorema 2.2.** *Todo número real não negativo tem uma representação na base $g$.*

**Demonstração:** Seja $x \geq 0$ um número real e $[x]$ a sua parte inteira. Assim,

$$x = [x] + x_1, \quad \text{onde} \quad x_1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad 0 \leq x_1 < 1.$$

Como $[x]$ é um número inteiro não negativo, pelo Teorema 2.1, existe um inteiro não negativo $s$ e os inteiros $a_i$, $i = 0, 1, \cdots s$, com a propriedade $0 \leq a_i \leq g - 1$, tais que

$$[x] = a_s g^s + a_{s-1} g^{s-1} + \cdots + a_1 g + a_0,$$

com a ressalva que no caso em que $s \geq 1$, então $a_s \neq 0$.
Consideremos a sucessão $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde

$$\begin{array}{lclcl}
x_1 & = & x - [x] , & & 0 \leq x_1 < 1 \\
x_2 & = & g x_1 - [g x_1] , & & 0 \leq x_2 < 1 \\
x_3 & = & g x_2 - [g x_2] , & & 0 \leq x_3 < 1 \\
 & \vdots & & &
\end{array}$$

ou equivalente,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x - [x] , \\ x_{n+1} & = & g x_n - [g x_n] \end{array} \right. \qquad n > 1.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n < 1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ os inteiros $[gx_n]$ são inteiros não negativos e são algarismos na base $g$. Denotamo-los por $c_n, n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{c_1 + x_2}{g}, \\
x_2 &= \frac{c_2 + x_3}{g}, \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{c_n + x_{n+1}}{g} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
x &= [x] + x_1 = [x] + \frac{c_1 + x_2}{g} = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{x_2}{g} = \\
&= \cdots = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{c_n}{g^n} + \frac{x_{n+1}}{g^n}.
\end{aligned}$$

Como $0 \leq x_{n+1} < 1$, temos $0 \leq \frac{x_{n+1}}{g^n} < \frac{1}{g^n}$, e pelo Teorema 1.9,

$$\lim \frac{x_{n+1}}{g^n} = 0.$$

Deste modo, obtemos a seguinte série infinita que é uma representação de $x$:

$$x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots ,$$

onde $c_i$, $i = 1, 2, \cdots$ são inteiros com a propriedade $0 \leq c_i \leq g - 1$. $\square$

Neste instante, surge a necessidade de nos interrogarmos, se toda a sequência de algarismos representa um número real e se cada um deles pode ser expresso de maneira única usando os $g - 1$ algarismos da base $g$.

**Proposição 2.1.** *Seja $x$ um número real não negativo, com a representação na base $g$,*

$$[x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots .$$

*Então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $c_i \neq g - 1$.*

**Demonstração:** Se $c_i = g - 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$x = [x] + \frac{g-1}{g} + \frac{g-1}{g^2} + \cdots = [x] + (g-1)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{g^i}\right) - (g-1).$$

Como $\left|\frac{1}{g}\right| < 1$, pelo Teorema 1.13 vem

$$x = [x] + (g-1)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{g}}\right) - (g-1) = [x] + g - (g-1),$$

logo $x = [x] + 1$, o que é impossível. $\square$

**Observação 2.1.** *Da proposição anterior concluímos que, por exemplo, na representação decimal (base* 10*) de um número real, os inteiros* $c_i$*,* $i \geq 1$ *não podem ser todos iguais a* 9*. Assim, apesar de*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = 1,$$

$0,999\ldots$ *não é considerada representação decimal de* 1*.*

De seguida, iremos enunciar dois teoremas que nos dão uma clarificação sobre a unicidade da representação dos números reais numa base $g$. Estes teoremas indicam-nos quais são as condições em que um número racional tem uma única representação numa base $g$ ou quando este admite duas representações.

Vejamos em primeiro lugar algumas notações:

Seja $x$ um número real não negativo, com representação na base $g$,

$$x = A_s A_{s-1} \cdots A_0, c_1 c_2 \cdots .$$

Denotamos

$$\begin{aligned} r_0 &= [x] \\ r_1 &= r_0 + \frac{c_1}{g} \\ r_2 &= r_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} \\ &\vdots \\ r_n &= r_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{c_n}{g^n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$x - r_n = \frac{c_{n+1}}{g^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{g^{n+2}} + \cdots$$

e, atendendo ao Teorema 1.13,

$$0 \leq x - r_n \leq \frac{g-1}{g^{n+1}} + \frac{g-1}{g^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{g^n}.$$

**Teorema 2.3.** *Qualquer número real não negativo que não seja igual a uma fração irredutível cujo denominador é um produto de números primos cada um dos quais é divisor de* $g$*, tem precisamente uma única representação na base* $g$*.*

**Demonstração:** Seja $x$ um número real não negativo. Suponhamos que $x$ é um número irracional ou um número racional diferente de uma fração irredutível cujo denominador é um produto de números primos, cada um dos quais é divisor de $g$. Seja

$$x = a_s g^s + a_{s-1} g^{s-1} + \cdots + a_1 g + a_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots$$

uma representação de $x$ na base $g$. Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq x - r_n \leq \frac{1}{g^n},$$

e suponhamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x - r_n = \frac{1}{g^n}$. Então $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = g-1$. Assim,

$$x = r_n + \frac{1}{g^n} = \frac{[x]\, g^n + c_1 g^{n-1} + \cdots + c_{n-1} g + c_n + 1}{g^n},$$

logo $g^n x$ é um número inteiro, o que é impossível, atendendo a hipótese. Concluímos assim que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{g^n},$$

donde vem $0 \leq g^n x - g^n r_n < 1$. Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, $g^n r_n$ é um número inteiro temos

$$[g^n x] = g^n r_n \quad \text{ e } \quad \left[g^{n-1} x\right] = g^{n-1} r_{n-1}.$$

Assim,

$$[g^n x] - g\left[g^{n-1} x\right] = g^n (r_n - r_{n-1}) = g^n \frac{c_n}{g^n} = c_n,$$

e portanto, todos os algarismos $c_n$, $n \in \mathbb{N}$ são determinados de maneira única. Além disso, da definição de $[x]$, bem como do Teorema 2.1, concluímos que o número real $x$, com $x \geq 0$, tem uma única representação na base $g$. $\square$

**Teorema 2.4.** *Todo o número real que seja igual a uma fração irredutível cujo denominador é um produto de números primos cada um dos quais é divisor de $g$, tem duas representações na base $g$.*

**Demonstração:** Seja $x$ um número real como na hipótese e seja

$$x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots$$

uma representação na base $g$ de $x$. Então existem números naturais $m$ e $l$ tais que $x = \frac{l}{g^m}$. Usando a notação anteriormente definida temos

$$0 \leq x - r_m \leq \frac{1}{g^m},$$

logo,

$$0 \leq l - g^m r_m \leq 1.$$

Como $l$ e $g^m r_m$ são números inteiros concluímos que $l - g^m r_m = 0$ ou $l - g^m r_m = 1$.

Assim, temos dois casos a analisar:

(a) Se $l - g^m r_m = 0$, então $x = \frac{l}{g^m} = r_m$ e assim,

$$x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{c_m}{g^m}.$$

Assim, todos os algarismos $c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots$ devem ser zero.

Seja $m_0$ o menor número natural com essa propriedade. Então,

$$c_{m_0} = c_{m_0+1} = \cdots = 0.$$

Se $m_0 = 1$, então $x = [x]$, o que é impossível, logo $m_0 > 1$ e $c_{m_0-1} \neq 0$. Assim, $\overline{c}_{m_0-1} = c_{m_0-1} - 1$ também é um algarismo da base $g$ e

$$x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{\overline{c}_{m_0-1}}{g^{m_0-1}} + \frac{1}{g^{m_0-1}}.$$

Pelo Teorema 1.13,

$$\sum_{i=m_0}^{\infty} \frac{g-1}{g^i} = \frac{1}{g^{m_0-1}},$$

e consequentemente, como o número real $x$ tem também a representação

$$x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{\overline{c}_{m_0-1}}{g^{m_0-1}} + \frac{(g-1)}{g^{m_0}} + \frac{(g-1)}{g^{m_0+1}} \cdots .$$

(b) Se $l - g^m r_m = 1$, então $x - r_m = \frac{1}{g^m}$, e esta igualdade só ocorre no caso em que

$$c_{m+1} = c_{m+2} = \ldots = g - 1.$$

Seja $m_0$ o menor inteiro tal que $c_{m+1} = c_{m+2} = \ldots = g - 1$. Se $m_0 = 1$, então $x = [x] + 1$, o que é impossível. Então $m_0 > 1$ e $c_{m_0-1} \neq (g-1)$.
Assim, $\overline{c}_{m_0-1} = c_{m_0-1} + 1$ também é um algorismo da base $g$, e assim concluímos que

$$\begin{aligned} x &= [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{\overline{c}_{m_0-1}}{g^{m_0-1}} + \frac{0}{g^{m_0}} + \frac{0}{g^{m_0+1}} + \cdots \\ &= [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots + \frac{c_{m_0-1}}{g^{m_0-1}} + \frac{(g-1)}{g^{m_0}} + \frac{(g-1)}{g^{m_0+1}} + \cdots . \end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 2.1.** Na base 10 o número real $\frac{1}{4}$ pode ser representado por $0,25$ ou $0,249999\cdots$ . Porém, o número real $\frac{1}{3}$ tem apenas uma representação na base 10, $0,3333\cdots$ .

**Teorema 2.5.** *Um número real não negativo $x$ é racional se, e somente se a representação de $x$ na base $g$ é finita ou infinita periódica.*

**Demonstração:** Seja $x$ um número racional representado por uma fração irredutível $\frac{l}{m}$ e seja $x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots$ a sua representação na base $g$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão definida recursivamente por

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & x - [x] \\ x_{n+1} & = & gx_n - [gx_n] \end{array}\right. .$$

Então, $0 \leq x_n < 1,\ \ n \in \mathbb{N}$.

Como $mx_1 = l - m\,[x]$, concluímos que $mx_1$ é um número inteiro. Seja $n > 1$ e admitamos que $mx_n$ é um número inteiro. Então, $mx_{n+1} = gmx_n - m\,[gx_n]$ também é um número inteiro. Pelo Princípio de Indução Matemática, concluímos que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $mx_n$ são números inteiros, e como, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n < 1$ vem $0 \leq mx_n < m$.

Se para algum $n$, temos $x_n = 0$, então $x_j = 0$, para todo $j \geq n$, e assim

$$x = [x] + \frac{[gx_1]}{g} + \frac{[gx_2]}{g^2} + \cdots + \frac{[gx_{n-1}]}{g^{n-1}} + \frac{0}{g^n} + \frac{0}{g^{n+1}} + \cdots,$$

e portanto, $x$ possui uma representação na base $g$ que é finita.

Se $x_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $0 < mx_n < m$. Assim, os números $mx_1, mx_2, \cdots, mx_n$ podem apenas ter $m-1$ diferentes valores, de 1 até $m-1$. Daqui resulta que existem números $h$ e $s$ tais que $h + s \leq m$ e $mx_h = mx_{h+s}$, o que demonstra que $x_n = x_{n+s}$, $n \geq h$ e portanto, $c_n = c_{n+s}$, $n \geq h$. Assim, a representação é infinita periódica.

Reciprocamente, iremos mostrar que, se a sequência de dígitos $c_1, c_2, \cdots$ é periódica, então o número $x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \cdots$ é racional. Na verdade, se existem números naturais $s$ e $h$ tais que $c_{n+s} = c_n$ quando $n \geq h$, temos

$$x = [x] + \frac{c_1}{g} + \cdots + \frac{c_h}{g^h} + \frac{c_{h+1}}{g^{h+1}} + \cdots + \frac{c_h}{g^{h+s}} + \frac{c_{h+1}}{g^{h+s+1}} \cdots .$$

Logo, fazendo $[x] = (d_1 \cdots d_k)_g$ vem

$$g^{h+s-1}x - g^{h-1}x = d_1 \cdots d_k c_1 c_2 \cdots c_{h+s-1}, c_{h+s} \ldots - d_1 \cdots d_k c_1 c_2 \cdots c_{h-1}, c_h \cdots .$$

Portanto,

$$x = \frac{d_1 \cdots d_k c_1 c_2 \cdots c_{h+s-1} - d_1 \cdots d_k c_1 c_2 \cdots c_{h-1}}{g^{h-1}(g^s - 1)},$$

donde concluímos que $x$ é um número racional. $\square$

**Corolário 2.5.1.** *Se o número real não negativo $x$ tem uma representação na base $g$ infinita não periódica, então $x$ é um número irracional.*

Podemos estender para números reais negativos a representação numa base $g$, usando o mesmo procedimento para números inteiros negativos.

Para concluir este capítulo vamos apresentar um resultado, o qual é consequência imediata dos resultados provados anteriormente, e onde se listam as propriedades da representação decimal de números reais, propriedades essas já bem conhecidas.

**Corolário 2.5.2.** *Seja $x$ um número real não negativo. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *O número $x$ tem uma representação na base $10$;*
2. *Em qualquer representação de um número real na base $10$ é impossível ter $c_i = 9$, para todo $i \in \mathbb{N}$;*
3. *Se $x$ é um número racional representado por uma fração irredutível cujo denominador é da forma $2^p.5^q$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, então $x$ tem duas representações na base $10$;*
4. *Se $x$ é um número irracional ou se $x$ é um número racional representado por uma fração irredutível cujo denominador não é da forma $2^p.5^q$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, então $x$ tem uma única representação na base $10$;*
5. *$x$ é um número racional se se só se a sua representação decimal é finita ou infinita periódica.*

# Capítulo 3

# Representação de Números Reais em Fração Contínua

A representação decimal, ou mais geralmente numa base $g$, não é a única forma de representar números reais. Neste capítulo, apresentaremos outro modo de representar números reais: frações contínuas. Para este capítulo usámos [5] como principal referência.

## 3.1 Introdução às frações contínuas

Nesta secção, apresentamos as noções básicas relacionadas com as frações contínuas. Veremos que este conceito surge da divisão usual de inteiros bem como da resolução de equações.

**Exemplo 3.1.** Consideramos a fração $\frac{137}{28}$. Dividindo 137 por 28, temos $137 = 4 \times 28 + 25$, ou seja,

$$\frac{137}{28} = 4 + \frac{25}{28} = 4 + \frac{1}{\frac{28}{25}}.$$

Agora, dividindo 28 por 25 vem $28 = 1 \times 25 + 3$, logo

$$\frac{137}{28} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{3}{25}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{25}{3}}}.$$

Por fim, como $25 = 8 \times 3 + 1$ vem

$$\frac{137}{28} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{3}}}. \tag{3.1}$$

Deste modo, o processo termina.

Portanto

$$4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{3}}}.$$

é a representação do número racional $\frac{137}{28}$ por meio do que vamos chamar de fração contínua.

Mas as frações contínuas também aparecem das soluções de uma equação quadrática. De facto, sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Se $c$ é uma solução positiva da equação

$$x^2 + ax - b = 0,$$

então

$$\begin{aligned} c^2 + ac - b = 0 &\Leftrightarrow c(c+a) = b \\ &\Leftrightarrow c = \frac{b}{a+c}. \end{aligned}$$

Mas uma vez que $c = \frac{b}{a+c}$ vem

$$c = \frac{b}{a + \frac{b}{a+c}}.$$

Repetindo este processo um número finito de vezes vem

$$c = \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a+b}} \ddots \cfrac{}{a + \cfrac{b}{a + \frac{b}{c}}}}.$$

Se o processo for repetido um número infinito de vezes escrevemos também

$$c = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\ddots}}}}}.$$

**Exemplo 3.2.** O número $\sqrt{3} - 1$ é a solução da equação

$$x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Assim, como $a = b = 2$ vem

$$\sqrt{3} - 1 = \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{\ddots}}}}},$$

ou seja,

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{\ddots}}}}}.$$

Consideramos agora a equação

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{3.2}$$

O número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é uma solução da equação 3.2. Este número é designado por número de ouro e é a única solução positiva desta equação.

Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \phi^2 - \phi - 1 = 0 &\Leftrightarrow \phi^2 = \phi + 1 \\ &\Leftrightarrow \phi = 1 + \frac{1}{\phi}. \end{aligned}$$

Substituindo $\phi$ por $1+\frac{1}{\phi}$ no denominador da fração vem

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{\phi}}.$$

Repetindo o processo um número infinito de vezes vem

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}.$$

Nestes exemplos apresentámos outra forma de representar números reais através do que chamamos fração contínua.

## 3.2 Definições básicas sobre frações contínuas

Nesta secção, apresentamos os conceitos básicos que estão à volta das frações contínuas.

**Definição 3.1.** Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais. Uma **fração contínua** é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots\, \cfrac{b_{m-2}}{a_{m-3}+\cfrac{b_{m-1}}{a_{m-2}+\cfrac{b_m}{a_{m-1}+\cfrac{b_m}{\ddots}}}}}}.$$

Obviamente, vamos admitir que todas as frações estão bem definidas, isto é, que não há divisões por zero. Observemos que se $b_m = 0$, para algum $m \in \mathbb{N}$, então

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots\, \cfrac{b_{m-2}}{a_{m-3}+\cfrac{b_{m-1}}{a_{m-2}+\cfrac{b_m}{a_{m-1}+\cfrac{b_m}{\ddots}}}}}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots\, \cfrac{b_{m-2}}{a_{m-3}+\cfrac{b_{m-1}}{a_{m-2}+\cfrac{b_{m-1}}{a_{m-1}}}}}}.$$

Neste caso, a fração contínua diz-se **finita**.
O nosso estudo foca-se em **frações contínuas não negativas**, isto é, em frações contínuas onde $a_n > 0$ e $b_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ ($a_0$ pode ser um número real qualquer), e em particular, nas **frações contínuas simples**. Uma fração contínua não negativa é dita simples se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$ e $a_n$ é um número inteiro. Uma fração contínua simples é portanto uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Estas frações contínuas são também denotadas por

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]. \tag{3.3}$$

As frações contínuas também podem ser representadas da forma:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\cdots\frac{b_3}{a_3+\cdots}.$$

Se uma fração contínua finita representa obviamente um número real, o mesmo problema para frações contínuas infinitas é mais complexo, isto é, será que qualquer fração contínua infinita representa sempre algum número real? A resposta a esta questão é de certa forma similar ao estudo que fizemos sobre séries, e para isso necessitamos de um novo conceito, o conceito de $n$-**ésima convergente**.
Consideremos a fração contínua infinita

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{b_n}{\ddots}}}},$$

e seja $n \in \mathbb{N}$.
Ao número real

$$c_n = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots\, a_{n-2} + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}}},$$

damos o nome de $n$-**ésima convergente** da fração.
Assim, partindo de uma fração contínua infinita

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{b_n}{\ddots}}}}, \quad (3.4)$$

podemos definir a sucessão de números reais $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n$, $c_n$ é a $n$-ésima convergente desta fração. Se esta sucessão é convergente e se $\lim c_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, então dizemos que a fração contínua infinita (3.4) é convergente e é uma representação do número real $c$. Neste caso escrevemos

$$c = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{b_n}{\ddots}}}}. \quad (3.5)$$

O nosso objetivo será o estudo da convergência de frações contínuas infinitas. Iremos provar um resultado que nos permite concluir que toda a fração contínua simples é convergente e portanto, representa um número real. Antes porém, vamos apresentar um resultado simples sobre frações contínuas finitas:

**Teorema 3.1.** *Um número real é racional se, e somente se pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

**Demonstração:** Seja $x = \frac{a}{b}$, onde $a$ e $b$ são inteiros com $b > 0$. De acordo com o algoritmo da divisão, existem inteiros $n_1$ e $r_1$, $0 \leq r_1 < b$ tais que $a = n_1 b + r_1$. Então, podemos escrever

$$\frac{a}{b} = n_1 + u_1,$$

onde

$$u_1 = \frac{a - n_1 b}{b},$$

ou seja,

$$u_1 = \frac{r_1}{b}.$$

Se $u_1 = 0$, então $x$ é um número inteiro.

Se $u_1 \neq 0$, então

$$\frac{1}{u_1} = \frac{b}{r_1} = n_2 + u_2,$$

onde

$$u_2 = \frac{b - n_2 r_1}{r_1}.$$

Assim,

$$u_2 = \frac{r_2}{r_1},$$

onde $r_2$ é o resto da divisão de $b$ por $r_1$.

Logo,

$$\frac{a}{b} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Se $r_2 = 0$, então o processo termina. Logo, temos a representação de $x$ por uma fração contínua finita.

Se $r_2 > 0$, então repetimos o processo.

Como $r_1, r_2, \cdots$ são os restos das sucessivas divisões e $r_1 > r_2 > \cdots$. O processo termina após um número finito de etapas com o aparecimento de um resto zero.

Deste modo, mostramos que se $x$ é um número racional, então a fração contínua simples que o representa é finita.

Reciprocamente, consideremos um número real $x$ que pode ser representado por uma fração contínua simples finita, isto é,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Mostraremos por indução sobre $n$ que $x$ é um número racional.

Se $n = 0$, então $x$ é um número inteiro, logo $x$ é racional.

Seja $n \geq 1$. Suponhamos, por hipótese de indução, que o teorema é verdadeiro para os números reais que podem ser escritos em fração contínua, na forma:

$$[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_n],$$

onde $b_0$ um número inteiro e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$.

Seja

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}]. \tag{3.6}$$

Podemos reescrever a expressão em 3.6 da seguinte maneira:

$$x = a_0 + \frac{1}{y},$$

onde

$$y = [a_1; a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}].$$

Por hipótese de indução $y$ é um número racional. Então

$$x = a_1 + \frac{1}{\frac{p}{q}},$$

ou seja,

$$x = \frac{pa_1 + q}{p}.$$

Uma vez que $a_1, p$ e $q$ são números inteiros, então $x$ é um número racional. Portanto, o teorema é verdadeiro para $n + 1$.
Deste modo, mostramos por indução que se uma fração contínua simples é finita, então representa um número racional. $\square$

## 3.3 As relações de recorrência de Wallis-Euler

Nesta secção, definimos e estudamos as relações de recorrência de Wallis-Euler, com objectivo de estudar a convergência de frações contínuas não negativas. Assim, dadas duas sequências de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $a_n > 0$, $b_n \geq 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ ($a_0$ é um número real arbitrário), vamos definir outras duas sequências $(p_n)$ e $(q_n)$, $n \geq -1$, as quais são centrais no estudo das frações contínuas:

**Definição 3.2.** Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais tais que $a_n > 0$, $b_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Definimos as sequências $(p_n)$ e $(q_n)$, $n \geq -1$, do seguinte modo:

$$\mathrm{p}_n = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = -1 \\ a_0 & \text{se} \quad n = 0 \\ a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2} & \text{se} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$q_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n = -1 \\ 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} & \text{se} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

A estas relações damos o nome relações de recorrência de **Wallis-Euler**.

**Observação 3.1.**

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & a_1 p_0 + b_1 p_{-1} = a_1 a_0 + b_1 \cdot 1 = a_1 a_0 + b_1 \\ q_1 & = & a_1 q_0 + b_1 q_{-1} = a_1. \end{array}$$

**Lema 3.1.** Para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, $q_n \geq 0$.

**Demonstração:** Vamos usar o Segundo Princípio de Indução Matemática. Por definição, $q_0 = 1$ e $q_1 = a_1 > 0$. Seja $n > 1$.
Hipótese de indução: $q_k > 0$ para todo o $k < n$;
Tese de indução: $q_n > 0$.
Atendendo que $b_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, usando a hipótese de indução vem

$$q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} \geq a_n q_{n-1} > 0.$$

□

**Teorema 3.2.** *Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais tais que $a_n > 0$ e $b_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Então, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ e cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{x}}}} = \frac{x p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{x q_{n-1} + b_n q_{n-2}}.$$

**Demonstração:** A demonstração é feita por indução sobre $n$.
Se $n = 1$, como $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $q_{-1} = 0$ e $p_{-1} = 1$,

$$a_0 + \frac{b_1}{x} = \frac{a_0 x + b_1}{x} = \frac{p_0 x + p_{-1} b_1}{q_0 x + q_{-1} b_1}.$$

Admitamos que o resultado é válido para o $n$-ésimo termo.
Atendendo que

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots \, a_2 + \cfrac{}{a_n - 1 + \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{x}}}}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots \, a_2 + \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{y}}}},$$

onde

$$y = a_n + \frac{b_{n+1}}{x} = \frac{x a_n + b_{n+1}}{x},$$

vem, usando a hipótese de indução, e o facto de $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{b_n}{y}}}} &= \frac{yp_{n-1} + b_n p_{n-2}}{yq_{n-1} + b_n q_{n-2}} \\
&= \frac{\left(\frac{xa_n + b_{n+1}}{x}\right) p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{\left(\frac{xa_n + b_{n+1}}{x}\right) q_{n-1} + b_n q_{n-2}} \\
&= \frac{\frac{xa_n p_{n-1} + b_{n+1} p_{n-1} + x b_{n+1} p_{n-2}}{x}}{\frac{xa_n q_{n-1} + b_{n+1} q_{n-1} + x b_n q_{n-2}}{x}} \\
&= \frac{x(a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}) + b_{n+1} p_{n-1}}{x(a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}) + b_{n+1} q_{n-1}} \\
&= \frac{xp_n + b_{n+1} p_{n-1}}{xq_n + b_{n+1} q_{n-1}}.
\end{aligned}$$

□

**Corolário 3.2.1.** *Nas condições do Teorema 3.2, para todo o $n \in \mathbb{N}$,*

$$c_n = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

**Demonstração:** Atendendo que

$$c_n = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{b_n}{x}}}},$$

com $x = a_n$, aplicando o Teorema 3.2 vem

$$c_n = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

□

**Teorema 3.3.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} b_1 b_2 \cdots b_n,$$

*e*

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n b_1 \cdots b_{n-1}.$$

**Demonstração:** A demonstração da primeira igualdade será feita por indução sobre $n$.
Se $n = 1$, atendendo à Observação 3.1 vem

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_1 a_0 + b_1 - a_0 a_1 = b_1 = (-1)^0 b_1.$$

Seja $n > 1$, e admitamos que

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} b_1 \cdots b_n.$$

Então

$$\begin{aligned}
p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} &= (a_{n+1}p_n + b_{n+1}p_{n-1})q_n - p_n(a_{n+1}q_n + b_{n+1}q_{n-1}) \\
&= a_{n+1}p_nq_n + b_{n+1}p_{n-1}q_n - p_na_{n+1}q_n - b_{n+1}p_nq_{n-1} \\
&= -b_{n+1}(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n) \\
&= -b_{n+1}(-1)^{n-1}b_1\cdots b_n \\
&= (-1)^nb_1\cdots b_nb_{n+1}.
\end{aligned}$$

A segunda igualdade é consequência da igualdade que acabámos de provar. De facto,

$$\begin{aligned}
p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_np_{n-1} + b_np_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + b_nq_{n-2}) \\
&= a_np_{n-1}q_{n-2} + b_np_{n-2}q_{n-2} - a_np_{n-2}q_{n-1} - b_np_{n-2}q_{n-2} \\
&= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\
&= a_n(-1)^{n-2}b_1\cdots b_{n-1} \\
&= (-1)^na_nb_1\cdots b_{n-1}.
\end{aligned}$$

□

**Corolário 3.3.1.** *Para todo $n \geq 1$,*

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}b_1\cdots b_n}{q_nq_{n-1}},$$

*e para todo $n \geq 2$,*

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^na_nb_1\cdots b_{n-1}}{q_nq_{n-1}}.$$

**Demonstração:** Com efeito, atendendo ao Corolário 3.2.1 vem

$$\begin{aligned}
c_n - c_{n-1} &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \\
&= \frac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}b_1\cdots b_n}{q_nq_{n-1}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_n - c_{n-2} &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \\
&= \frac{p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n}{q_nq_{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^na_nb_1\cdots b_{n-1}}{q_nq_{n-1}}.
\end{aligned}$$

□

**Corolário 3.3.2.** *Dada uma fração contínua simples, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n$ e $q_n$ são primos entre si e portanto $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ é uma fração irredutível.*

**Demonstração:** Numa fração contínua simples sabemos que a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante igual a 1 e portanto,

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}.$$

Assim, se um inteiro $d$ é um divisor comum $p_n$ e $q_n$, isto é, se $d$ divide $p_n$ e $q_n$, então $d$ também divide $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n$, isto é, $d$ divide $(-1)^n$. Então, $d = \pm 1$. □

## 3.4 Teorema de convergência para frações contínuas

Nesta secção vamos estudar a convergência de frações contínuas infinitas não negativas e provar que toda fração contínua simples é convergente.

Recordemos que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a sequência dos convergentes de uma fração contínua infinita

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots_{a_2 + \frac{\ddots}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}}}}},$$

que ao longo desta secção vamos assumir ser não negativa.

**Proposição 3.1.** *Sejam $k$, $j$ e $l$ inteiros positivos tais que $j$ é par, $k$ ímpar e $l$ é maior que $k$ e maior que $j$. Admitamos que $b_1, b_2, \cdots, b_l$ são números reais positivos. Então*

$$c_0 < c_2 < c_4 < \cdots < c_j < c_k < \cdots < c_5 < c_3 < c_1.$$

**Demonstração:** Seja $n$ um número natural par, $n \leq l+1$. Então, pelo Corolário 3.3.1

$$\begin{aligned} c_n - c_{n-2} &= \frac{(-1)^n a_n b_1 \cdots b_{n-1}}{q_n q_{n-1}} \\ &= \frac{a_n b_1 \cdots b_{n-1}}{q_n q_{n-1}}. \end{aligned}$$

Uma vez que estamos a supor que $a_n > 0$ e $b_1, \cdots, b_{n-1} > 0$ vem

$$c_n - c_{n-2} > 0,$$

ou seja,

$$c_{n-2} < c_n.$$

Concluímos assim que a sequência dos convergentes de ordem par de ordem inferior a $l+1$ é estritamente crescente.
Analogamente, se $n$ é um número natural ímpar e $n \leq l+1$, então

$$\begin{aligned} c_n - c_{n-2} &= \frac{(-1)^n a_n b_1 \cdots b_{n-1}}{q_n q_{n-1}} \\ &= -\frac{a_n b_1 \cdots b_n}{q_n q_{n-1}}, \end{aligned}$$

logo

$$c_n - c_{n-2} < 0,$$

ou seja,

$$c_n < c_{n-2},$$

e portanto, a sequência dos convergentes de ordem ímpar, inferiores a $l+1$ é estritamente decrescente.

Sejam agora $j$ e $k$ inteiros satisfazendo as condições do enunciado. Vamos mostrar que $c_j < c_k$. Para isso vamos considerar dois casos:
**Caso 1:** $j > k$.

Tendo presente o Lema 3.1 e o Corolário 3.3.1 concluímos que

$$\begin{aligned} c_j - c_{j-1} &= \frac{(-1)^{j-1} b_1 \cdots b_j}{q_j q_{j-1}} \\ &= -\frac{b_1 \cdots b_j}{q_j q_{j-1}} < 0, \end{aligned}$$

e então

$$c_j < c_{j-1}.$$

Já vimos que a subsucessão dos convergentes de ordem ímpar é estritamente decrescente logo, como $j-1 \geq k$ vem

$$c_{j-1} \leq c_k,$$

e portanto

$$c_j < c_k.$$

**Caso 2:** $j < k$.
Como $k$ é ímpar, tendo presente o Lema 3.1 e o Corolário 3.3.1 concluímos que

$$c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1} b_1 \cdots b_k}{q_k q_{k-1}} > 0,$$

logo

$$c_k > c_{k-1}.$$

Como $k-1$ é par e $j \leq k-1$ vem $c_j \leq c_{k-1}$, pois já vimos que a sequência dos convergentes de ordem par inferior a $l+1$ é estritamente crescente, logo

$$c_j < c_k,$$

o que conclui a demonstração. □
Assim, tendo presente o Teorema 1.5 concluímos que:

**Corolário 3.3.3.** *Os limites das subsucessões* $(c_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(c_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *existem e*

$$c_0 < c_1 < \cdots < \lim\, c_{2n} \leq \lim\, c_{2n-1} < \cdots < c_5 < c_3 < c_1.$$

Como consequência deste corolário concluímos que $\lim\, c_n$ existe se, e só se $\lim\, c_{2n} = \lim\, c_{2n-1}$, isto é, se, e só se

$$\lim\,(c_{2n} - c_{2n-1}) = \lim\, \frac{-b_1 b_2 \cdots b_{2n}}{q_{2n} q_{2n-1}} = 0.$$

**Teorema 3.4.** *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sucessões de números reais, onde* $a_n > 0$ *e* $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{b_n} = +\infty,$$

*então a fração contínua*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\ddots \atop a_{n-2} + \cfrac{b_n}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n + \ddots}}}}$$

*converge para um número real que chamaremos* $\xi$, *e para quaisquer* $j$ *e* $k$ *tais que* $j$ *é par e* $k$ *é ímpar,*

$$c_0 < c_2 < \cdots < c_j < \ldots < \xi < \ldots < c_k < \cdots < c_3 < c_1.$$

**Demonstração:** Em primeiro lugar observemos que para todo $n \geq 2$, como

$$q_{n-1} = a_{n-1}q_{n-2} + b_{n-1}q_{n-3},$$

e como $b_{n-1}q_{n-3} \geq 0$, ( Lema 3.1) vem

$$q_{n-1} \geq a_{n-1}q_{n-2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} q_n &= a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2} \geq a_n(a_{n-1}q_{n-2}) + b_n q_{n-2} \\ &= (a_n a_{n-1} + b_n)q_{n-2}. \end{aligned}$$

Deste modo, concluímos que

$$\begin{aligned} q_{2n} &\geq (a_{2n}a_{2n-1} + b_{2n})q_{2n-2} \\ &\geq (a_{2n}a_{2n-1} + b_{2n})(a_{2n-2}a_{2n-3} + b_{2n-2})q_{2n-4} \\ &\geq \vdots \\ &\geq (a_{2n}a_{2n-1} + b_{2n})(a_{2n-2}a_{2n-3} + b_{2n-2}) \cdots (a_4a_3 + b_4)(a_2a_1 + b_2)q_0. \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$q_{2n-1} \geq (a_{2n-1}a_{2n-2} + b_{2n-1})(a_{2n-3}a_{2n-4} + b_{2n-3}) \cdots (a_5a_4 + b_5)(a_3a_2 + b_3)q_1.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} q_{2n}q_{2n-1} &\geq (a_{2n}a_{2n-1} + b_{2n})(a_{2n-1}a_{2n-2} + b_{2n-1}) \cdots (a_5a_4 + b_5)(a_4a_3 + b_4)(a_3a_2 + b_3) \\ &\quad (a_2a_1 + b_2)q_0q_1 \\ &= q_0q_1b_2b_3\cdots b_{2n}\left(1 + \frac{a_1a_2}{b_2}\right)\left(1 + \frac{a_2a_3}{b_3}\right)\left(1 + \frac{a_3a_4}{b_4}\right)\left(1 + \frac{a_4a_5}{b_5}\right)\cdots \\ &\quad \left(1 + \frac{a_{2n-1}a_{2n}}{b_{2n}}\right). \end{aligned}$$

Então

$$
\begin{aligned}
b_1 q_{2n} q_{2n-1} \quad \geq \quad & q_0 q_1 b_1 b_2 \cdots b_{2n} \left(1+\tfrac{a_1 a_2}{b_2}\right)\left(1+\tfrac{a_2 a_3}{b_3}\right)\left(1+\tfrac{a_3 a_4}{b_4}\right)\left(1+\tfrac{a_4 a_5}{b_5}\right)\cdots \\
& \left(1+\tfrac{a_{2n-1} a_{2n}}{b_{2n}}\right),
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\frac{b_1 b_2 \cdots b_{2n}}{q_{2n} q_{2n-1}} \leq \frac{b_1}{q_0 q_1} \cdot \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{2n-1}\left(1+\frac{a_i a_{i+1}}{b_{i+1}}\right)}.
$$

□

Pelo Teorema 1.14 sabemos que uma série $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ de números reais positivos converge se, e somente se o produto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$ converge. Como, por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = +\infty$, também temos $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{a_k a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) = +\infty$, e portanto

$$
\lim \frac{b_1}{q_0 q_1} \, \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{2n-1}\left(1+\frac{a_i a_{i+1}}{b_{i+1}}\right)} = 0.
$$

Concluímos assim que

$$
\lim \frac{b_1 b_2 \cdots b_{2n}}{q_{2n} q_{2n-1}} = 0,
$$

ou seja,

$$
\lim(c_{2n} - c_{2n-1}) = 0,
$$

e portanto a fração contínua é convergente.
O facto de que para quaisquer inteiros $j$ e $k$, onde $j$ é par e $k$ é ímpar, temos

$$
c_0 < c_2 < c_4 < \cdots c_j < \ldots < \xi < \ldots < c_k < \cdots < c_5 < c_3 < c_1,
$$

resulta do Corolário 3.3.3, o que completa a nossa demonstração. □

**Exemplo 3.3.** A fração contínua infinita

$$
3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{6}{4 + \ddots}}}},
$$

foi uma das primeiras frações contínuas a ser estudada. O seu estudo foi feito por Rafael Bombelli (1526-1572). Uma vez que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^2}{4} = +\infty,
$$

a fração contínua anterior converge. Seja

$$
\xi = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{\ddots}}}}},
$$

e seja

$$\eta = \xi + 3.$$

Então

$$\eta = 6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{\ddots}}}}} = 6 + \frac{4}{\eta},$$

e portanto

$$\eta = 6 + \frac{4}{\eta} \Leftrightarrow \eta^2 - 6\eta - 4 = 0.$$

Concluímos assim que $\eta$ é a solução positiva da equação quadrática anterior e portanto,

$$\eta = 3 + \sqrt{13}.$$

Como

$$\xi = \eta - 3$$

vem que

$$\xi = \sqrt{13},$$

isto é,

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{\ddots}}}}}.$$

O Teorema 3.4 permite-nos afirmar que toda a fração contínua simples é convergente e portanto representa um número real. De facto dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, onde para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n$ é um número inteiro positivo, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = +\infty,$$

e portanto a fração contínua simples $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ é convergente, isto é representa um número real.

Imediatamente, outra questão se coloca: será que podemos afirmar que todo o número real positivo pode ser representado por uma fração contínua simples?

Seja $x$ um número real. Se $x$ é um número racional, então a resposta a esta questão é afirmativa e foi dada no Teorema 3.1. Se $x$ é um número irracional, então existem dois inteiros sucessivos $n$ e $n+1$ tais que

$$n < x < n + 1.$$

O número real $u = x - n$ satisfaz $0 < u < 1$. Assim, para um dado número irracional $x$ existe uma única decomposição $x = n + u$, onde $n$ é um número inteiro e $u$ é um número real, $0 < u < 1$ .

Vamos utilizar um processo recursivo para representar o número irracional $x$ através de uma fração contínua simples.

Seja $x = n_1 + u_1$, onde $n_1$ é um número inteiro e $0 < u_1 < 1$.

Então $\frac{1}{u_1}$, inverso de $u_1$, satisfaz $\frac{1}{u_1} > 1$. Podemos escrever

$$\frac{1}{u_1} = n_2 + u_2,$$

onde $n_2$ é um número inteiro e $u_2$ satisfaz $0 \leq u_2 < 1$.

Assim,

$$x = n_1 + u_1 = n_1 + \frac{1}{\frac{1}{u_1}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + u_2}.$$

Se $u_2 = 0$, então temos a representação do número irracional $x$ em fração contínua simples finita, o que é impossível. Então, $0 < u_2 < 1$ logo, $\frac{1}{u_2} > 1$ e podemos escrever

$$\frac{1}{u_2} = n_3 + u_3,$$

onde $n_3$ é um número inteiro e $0 \leq u_3 < 1$, e assim,

$$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + u_2} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + u_3}}.$$

Se $u_3 = 0$, então temos a representação do número irracional $x$ em fração contínua simples finita, o que é impossível. Então, $0 < u_3 < 1$ e repetimos o processo. Após, $k$ iterações obtemos

$$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + u_2} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\ddots_{n_{k-1} + \frac{1}{n_k + u_k}}}},$$

onde $0 \leq u_k < 1$. Se $u_k = 0$, então temos a representação do número irracional $x$ em fração contínua simples finita, o que é impossível. Então, $0 < u_k < 1$ e podemos escrever

$$\frac{1}{u_k} = n_{k+1} + u_{k+1},$$

onde $n_{k+1}$ é um número inteiro e $0 \leq u_{k+1} < 1$.

Após $k + 1$ etapas, podemos escrever o número real como

$$x = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\ddots n_k + \frac{1}{n_{k+1} + u_{k+1}}}},$$

onde $0 < u_{k+1} < 1$ e o processo pode ser repetido.

Então verificamos que todo o número irracional pode ser representado por uma fração contínua simples infinita.

No Teorema 3.1 provámos que uma fração contínua simples infinita representa um número irracional. Podemos generalizar esta conclusão no Teorema seguinte:

**Teorema 3.5.** *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sucessões de números inteiros positivos tais que* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{b_n}=+\infty$*, e existe* $m\in\mathbb{N}$ *tal que* $0<b_n\leq a_n$*, para todo* $n>m$*. Então o número real*

$$\xi = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}},$$

*é um número irracional.*

**Demonstração:** Em primeiro lugar observemos que a fração contínua que define $\xi$ é de facto convergente. Seja $m\in\mathbb{N}$ tal que $0<b_n\leq a_n$, para todo $n>m$. Então a fração contínua

$$a_{m+1} + \cfrac{b_{m+2}}{a_{m+2} + \cfrac{b_{m+3}}{a_{m+3} + \cfrac{b_{m+4}}{\ddots}}}$$

também converge para um número real que denotamos por $\eta$ e $\eta > a_{m+1} > 0$. Podemos também escrever

$$\xi = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots\, a_m + \cfrac{b_{m+1}}{\eta}}}}}$$

e usando o Teorema 3.2 vem

$$\begin{aligned} \xi = \tfrac{\eta p_m + b_{m+1}p_{m-1}}{\eta q_m + b_{m+1}q_{m-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad \eta q_m \xi + \xi b_{m+1} q_{m-1} = \eta p_m + b_{m+1} q_{m-1} \\ &\Leftrightarrow \quad \eta(\xi q_m - p_m) = -\xi b_{m+1} q_{m-1} + b_{m+1} p_{m-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\eta = \frac{\xi b_{m+1} q_m - b_{m+1} p_{m-1}}{p_m - \xi q_m}.$$

Como as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sucessões de números inteiros vem que $\xi$ é irracional se e só se $\eta$ é irracional. Provemos então que $\eta$ é irracional. Como $a_{m+1}$ é um número inteiro, só temos de mostrar que

$$\eta' = \cfrac{b_{m+2}}{a_{m+2} + \cfrac{b_{m+3}}{a_{m+3} + \cfrac{b_{m+4}}{a_{m+4} + \cfrac{b_{m+5}}{\ddots}}}},$$

onde $0<b_n\leq a_n$, para todo $n>m+1$, é um número irracional.
Admitamos que $\eta'$ é um número racional e para cada $n>m+1$, seja

$$\eta'_n = \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \cfrac{b_{n+2}}{\ddots}}}.$$

Então

$$\eta'_n = \frac{b_n}{a_n + \eta'_{n+1}}.$$

Portanto, como estamos a assumir que $\eta$ é um número racional vem que $\eta'_n$ também é um número racional, para todo $n > m+1$. Por definição, $\eta'_n > 0$ e como $0 < b_n \leq a_n$, para todo $n > m$ vem $0 < \eta'_n < 1$. Como $\eta'_n$ é um número racional, podemos escrever

$$\eta'_n = \frac{s_n}{t_n}, \;\; 0 < s_n < t_n,$$

e $s_n$ e $t_n$ são primos entre si, para todo $n > m + 1$.

Assim,

$$\frac{s_n}{t_n} = \frac{b_n}{a_n + \frac{s_{n+1}}{t_{n+1}}} \Leftrightarrow \frac{s_n}{t_n} = \frac{b_n t_{n+1}}{a_n t_{n+1} + s_{n+1}}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad s_n s_{n+1} + s_n a_n t_{n+1} = b_n t_n t_{n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad s_n s_{n+1} = (b_n t_n - a_n s_n) t_{n+1}. \end{aligned}$$

Mostrámos assim que $t_{n+1} \mid s_n s_{n+1}$, mas como $t_{n+1}$ e $s_{n+1}$ são primos entre si vem $t_{n+1} \mid s_n$ (ver [4], página 156). Então $t_{n+1} < s_n$ e como $s_n < t_n$ vem $t_{n+1} < t_n$. Então a sequência de inteiros $(t_i)_{i \geq m}$ satisfaz

$$t_{m+2} > t_{m+3} > \cdots > 0,$$

e assim concluímos que existe um inteiro $l$ tal que $t_l = 0$. Absurdo. $\square$

## 3.5 Frações contínuas periódicas

Nesta seção vamos nos debruçar sobre frações simples que são infinitas periódicas. Uma fração simples infinita

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots],$$

diz-se periódica se existem os inteiros positivos $p$ e $l$ tais que, para todo $n \geq l$, $a_{n+p} = a_n$. Neste caso a fração contínua será representada por

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots a_{l-1}, \overline{a_l, \ldots, a_{l+p-1}}].$$

No primeiro capítulo vimos que os números racionais tinham uma representação numa base $g$, que era finita ou infinita periódica. Nesta secção vamos identificar números reais que podem ser representados por uma fração contínua simples infinita periódica.

Um irracional quadrático é, como o nome indica, um número irracional o qual é raíz de equação quadrática. Um irracional quadrático é então todo o número real que se pode escrever na forma

$$\xi = r + s\sqrt{d}, \quad (3.7)$$

onde $r$ e $s$ são números racionais e $d > 0$ é um número inteiro que não é quadrado perfeito.

Reciprocamente, dado um número real da forma (3.7), podem mostrar que $\xi$ é raíz da equação

$$x^2 - 2rx + (r^2 - s^2 d) = 0.$$

De facto,

$$\begin{aligned}(r + s\sqrt{d})^2 - 2r(r + s\sqrt{d}) + r^2 - s^2 d &= r^2 + 2rs\sqrt{d} + s^2 d - 2r^2 - 2rs\sqrt{d} + r^2 - s^2 d \\ &= 2r^2 - 2r^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Observe-se que, não sendo $d$ um quadrado perfeito, $\sqrt{d}$ é um número irracional (ver [7], página 103).
O objetivo principal desta secção é o de mostrar que uma fração contínua simples infinita periódica é igual a um irracional quadrático.

Seja então $d$ um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito e seja

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \left\{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

**Lema 3.2.** Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Então, $\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha\beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, e se $\alpha \neq 0$, então $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

**Demonstração:** Seja $\alpha = a + b\sqrt{d}$ e $\beta = e + f\sqrt{d}$, onde $a, b, e, f \in \mathbb{Q}$. Então

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a + b\sqrt{d}) + (e + f\sqrt{d}) \\ &= (a + e) + (b + f)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}].\end{aligned}$$

De modo análogo vem $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

Quanto a $\alpha.\beta$ vem

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a + b\sqrt{d})(e + f\sqrt{d}) \\ &= ae + af\sqrt{d} + be\sqrt{d} + bfd \\ &= (ae + bfd) + (af + be)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}].\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{a + b\sqrt{d}} \\ &= \frac{1}{a + b\sqrt{d}} \cdot \frac{a - b\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}} \\ &= \frac{a - b\sqrt{d}}{(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d})} \\ &= \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - ab\sqrt{d} + ab\sqrt{d} - b^2 d} \\ &= \frac{a}{a^2 - b^2 d} + \frac{-b}{a^2 - b^2 d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}].\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.6.** *Se uma fração contínua simples é periódica, então ela é igual a um irracional quadrático.*

**Demonstração:** Seja $\xi = [a_0; a_1, \cdots, a_{l-1}, \overline{a_l, \cdots, a_{l+p-1}}]$, e seja

$$\begin{aligned}\eta &= a_l + \cfrac{1}{a_{l+1} + \cfrac{1}{a_{l+2} + \cfrac{1}{\ddots a_{l+p-1} + \cfrac{1}{\ddots}}}} \\ &= a_l + \cfrac{1}{a_{l+1} + \cfrac{1}{a_{l+2} + \cfrac{1}{\ddots a_{l+p-1} + \frac{1}{\eta}}}}.\end{aligned}$$

Vamos provar que $\eta$ é um irracional quadrático.

Pelo Teorema 3.2,

$$\eta = \frac{\eta s_{l+p-1} + s_{l+p-2}}{\eta t_{l+p-1} + t_{l+p-2}}, \quad (3.8)$$

onde, para cada inteiro positivo $j$, $s_j$ e $t_j$ são tais que $\frac{s_j}{t_j}$ é igual à $j$-ésima convergente de $\eta$.

Multiplicando ambos os membros de (3.8) por $\eta t_{l+p-1} + t_{l+p-2}$ vem

$$\eta^2 t_{l+p-1} + \eta t_{l+p-2} = \eta s_{l+p-1} + s_{l+p-2} \Leftrightarrow t_{l+p-1}\eta^2 + (t_{l+p-2} - s_{l+p-1})\eta - s_{l+p-2} = 0.$$

Mostrámos assim que $\eta$ é um irracional quadrático.

Como

$$\xi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_{l-1} + \frac{1}{\eta}}}},$$

novamente pelo Teorema 3.2 vem

$$\xi = \frac{\eta p_{l-1} + p_{l-2}}{\eta q_{l-1} + q_{l-2}},$$

onde $p_{l-1}, q_{l-2}, p_{l-1}$ e $q_{l-2}$ são calculados de acordo com as relações de recorrência de Wallis-Euler. Como $\eta$ é um irracional quadrático, atendendo ao Lema anterior sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ vem $\xi$ é um irracional quadrático. $\square$

## 3.6 Considerações finais

As ideias envolvidas na elaboração deste trabalho andam em volta da representação dos números reais. Há muitas formas de representar os números reais. Neste trabalho abordamos apenas duas: a representação de números reais numa base $g$, onde $g$ é um inteiro maior do que 1, e a representação de números reais em frações contínuas.

Estas duas formas de representar números reais foram abordadas em dois capítulos separados.
Num primeiro capítulo abordámos representação de números reais numa base $g$. De entre as várias conclusões a que chegámos destacamos o facto de todo número real admite uma representação numa base $g$ qualquer. Porém, há que ter em conta que nem todas as representações são admissíveis. No caso concreto da representação decimal, a sequência 0,999... que não é considerada como a representação decimal de um número real. Outra conclusão importante foi de que muitas daquelas propriedades conhecidas desde o Ensino Secundário, como, por exemplo, todo o número racional tem uma dízima finita ou infinita periódica, não são exclusivas na base 10, visto que elas permanecem válidas em uma base $g$ qualquer.
Num segundo capítulo apresentámos outra forma de representar os números reais, porém menos conhecida e menos trabalhada na Matemática do Ensino Secundário, que é a representação dos números reais em frações contínuas. Neste capítulo verificámos que um número real é racional se e só se pode ser representado em fração contínua finita. Relativamente às frações contínuas infinitas, centrámos o nosso estudo nas frações contínuas não negativas e em particular nas frações contínuas simples. Por meio das relações de recorrência de Wallis-Euler conseguimos mostrar que toda fração contínua simples representa sempre um número real. Não obstante, ficou muita coisa por se desenvolver nas frações contínuas. Nada foi dito sobre frações continuas que não sejam não negativas.
Este trabalho pode ser utilizado por professores, educadores e alunos interessados em explorar um pouco mais os conteúdos contemplados no programa de Matemática do Ensino Secundário. Espera-se que este seja um ponto de partida para um estudo mais profundo e profícuo do tema em análise, e para tal, recomenda-se vivamente a consulta dos vários textos indicados na bibliografia.

# Bibliografia

[1] Kalapodi, A. “The decimal representation of real numbers”, *International Journal of Mathematical Education in Science and technology*, Vol 41, nº 7, 15 October 2010, 889-900. 19

[2] Katz, V. J., (2010), História da Matemática, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkien.

[3] Knopp, K.,(1956), Infinite Sequences and Series, New York: Dover Publications Inc. 1

[4] Koshy, T.,(2002), Elementary Number Theory with Applications, San Diego: Harcourt Academic Press. 45

[5] Loya, Paul, (2017), Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis, New York: Springer. 1, 8, 15, 18, 29

[6] Ore, O., (1988), Number Theory and its History, New York: Dover Publication. vii, 1

[7] Rosen, Kenneth, (2000), Elementary Number Theory and its Applications, Boston: Addison-Wesley. 46