

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Origami e Construções Geométricas
A resolução do problema da duplicação do cubo e a
trisseção de um ângulo

Gilson Francisco Contreiras Diogo
Versão final após a defesa

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática para Professores
(2º ciclo de estudos)

Orientador Científico: Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco

Covilhã, 26 de Junho de 2018

Dedicatória

"COVILHÃ-PORTUGAL"

Covilhã, foi descoberta sobre o olhar das estrelas e foi referendada pelo frio crescendo sobre a luz do sol e desenvolveu-se sobre a magnitude dos Astros (O Distrito de Castelo Branco).

Hoooo Covilhã!!!!

Já me acostumei com a tua voz, me da vontade de choramingar... Com teu rosto e teu olhar guardando horizontes, seu frio um dia me pode matar, mais não te posso acoimar, seus feitos tornam-te como uma das cidades refulgentes;

Pode ser que um dia deixemos de nos comunicar... Mais, enquanto houver amizade entre nós, faremos as pazes para cá um dia eu regressar;

Pode ser que um dia me vou embora e o tempo passar... Mais, se a nossa amizade permanecer como hoje, em todos momentos hei-de me lembrar;

Pode ser que um dia nos afastemos de verdade... Mais, se formos amigos de estima, a nossa amizade nos aproximará a longevidade;

Pode ser que um dia já não subsistirei... Mais, se ainda sobrar amizade um para com outro, fustigar e debicar o meu esqueleto e tão logo ressurgirei;

Pode ser que um dia tudo acabe para sempre... Mais, quando desejamos que uma lembrança fique gravado em nossa memória, devemos associar-lhe alguma espécie de satisfação ou gozo pessoal, que juntos viveremos e nos lembraremos para sempre.
"Covilhã a Cidade da Neve."

Gilson Contreiras (2018)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a DEUS por ter me dado forças, saúde e disposição para nunca esmorecer e aos meus pais João Diogo e Teresa Vidal Contreiras, pelo incentivo, confiança e pela educação prestada;

Aos meus filhos: Marioneth Contreiras da Costa Diogo, Sílvio Contreiras da Costa Diogo, Cláudia Contreiras Malheiro Diogo e Idalina Valércia Malheiro. Desde já, o Papá pede as sinceras desculpas pelo tempo que tive que ficar distante de vocês fisicamente, ainda assim sempre senti o vosso calor. Sem esquecer a minha esposa Edgardelina Pedro Malheiro, muito obrigado pela paciência, força e coragem que sempre tiveste em aguentar a casa nos bons e maus momentos da vida enquanto durou está formação;

Aos meus irmãos, Maria da Conceição Contreiras Diogo, Maria Helena Contreiras Diogo, Sete Vidal Contreiras Diogo, Nelay Contreiras Diogo, Felisbina Contreiras Diogo e Marionete Contreiras Diogo. O meu muito obrigado manos, a pesar que nalgumas vezes foram muito chatos comigo;

Aos meus amigos, João Leandro, Dinis Paulo, Angelina Canjengo, Emanuel Black, My Lovy, Mestre Lovy, André Egdar, Father, Sécio, Igor, Luís, Papá Ngulo, Wilson, Islândio, Filipe Bondo, João Lourenço, Guedes, Budi, Mack, ZB, 50 Dedos, Paníco, Vino, Anareth, Magalhães, Emília Buta, Vivalda, Gelson, Mbala, Chefe Nangute, Zélia, Gonsalves, Jones Bernardo, Puto Delfim, Mariza entre outros, agradeço pela boa vontade que sempre tiveram, aguentando todas as minhas chatices, insultos e sempre estenderão os seus braços em momentos mas difíceis desta caminhada.

Sou eternamente agradecido as escolas Kudielela, Jardim do Éden e Escola Superior Politécnica de Malanje na pessoa do professor Infeliz Coxe, Manuel Osório, Rogério Barroso, Tomásia Morais, Ana Bela, Aidne Aires, Filipe Cose, Pedro Chioia, Luisa Chioia, Dolores Vera Vera, Evalina Jacinto, Donalde Melo, Cristóvão Manuel, Benísio Baião, José Machado, Alcides Martins, João Mambuco e André Joaquim, agradeço pelo carinho demonstrado enquanto estudante e professor da vossa instituição.

Estendo os meus agradecimentos de forma particular, ao meu cunhado António José da Fonseca Machado (Grandfather);

Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior (UBI);

Ao Exímio orientador Prof. Doutor Rui Miguel Nobre Martins Pacheco, a pessoa que conduziu a minha trajetória e quem tem dado todo seu apoio em aquinhoar seus conhecimentos;

Aos autores que não conheço pessoalmente, como Huzita Hatori, Carl Louis Ferdinand, Pierri Laurent e tantos outros desenvolvedores ao redor do mundo, anónimos ou não, que dedicaram parte do seu tempo a desenvolverem as construções fundamentais elementares, os axiomas de Huzita-Hatore bem como as propriedades de origami.

O MEU MUITO OBRIGADO!

Resumo

Os chineses inventaram o papel e, na idade média, no Japão, começou a ser desenvolvido um conjunto de técnicas de dobragens de papel, designado por *Origami*. Já no século XX, estas técnicas despertaram o interesse de diversos matemáticos. H. Huzita, K. Hatori e R. Lang fixaram o sistema axiomático para as construções com dobragens. Na presente dissertação, apresenta-se este sistema axiomático e a resolução dos problemas clássicos da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo com Origami. Além disso, estuda-se a teoria dos números construtíveis com Origami em comparação com a teoria dos números construtíveis com régua e compasso.

Palavras-chave Origami, axiomas de Huzita-Hatori, régua e compasso, duplicação do cubo, trissecção do ângulo, números construtíveis.

Abstract

The Chinese invented the paper and, in the middle ages, in Japan, a set of folding techniques began to emerge: the *Origami*. Recently, in 20th century, these techniques attracted the attention of several mathematicians. H. Huzita, K. Hatori and R. Lang established an axiomatic system for Origami constructions. In the present dissertation, we present this axiomatic system and the resolution of the classic problems of doubling the cube and angle trisection with Origami. Besides that, we study the theory of Origami's constructible numbers in comparison with the theory of constructible numbers with non-graduated ruler and compass.

Keywords Origami, Huzita-Hotari axioms, ruler and compass, doubling the cube, angle trisection, constructible numbers.

Conteúdo

Introdução	1
1 Construções com régua e compasso	3
1.1 Construções geométricas elementares	3
1.1.1 Paralela a uma reta dada que passa por um ponto fora da reta	3
1.1.2 Construção da perpendicular a uma reta dada que passa por um dado ponto	4
1.1.3 Mediatriz de um segmento de reta	5
1.2 Números construtíveis e corpos numéricos	5
1.2.1 Os números $a + b$ e $a - b$ são construtíveis	6
1.2.2 Os números ab e $\frac{a}{b}$ são construtíveis	6
1.2.3 O número \sqrt{a} é construtível	8
1.2.4 Pontos construtíveis	8
1.2.5 Corpo dos números construtíveis	9
1.2.6 Caracterização dos números construtíveis	10
1.3 Um teorema sobre equações cúbicas	14
1.4 Construções impossíveis	16
1.4.1 Problema da duplicação do cubo	16
1.4.2 Problema da trisseção do ângulo	17
1.4.3 Problema da quadratura do círculo	18
2 Definições e os axiomas do Origami	19
2.1 Desenvolvimento axiomático do origami	19
2.2 Os axiomas de Huzita-Hatori	19
3 Resolução de equações cúbicas com origami	25
3.1 Problemas clássicos: origem e aspetos históricos	25
3.2 Resolução do problema da duplicação do cubo	25
3.3 Raiz cúbica com dobragem	30
3.4 Solução de equações cúbicas gerais	31
3.5 Resolução do problema da trisseção do ângulo	33
4 Números construtíveis com origami	37
4.1 Os números $a + b$ e $a - b$ são construtíveis com origami	37
4.2 Multiplicação de números complexos com origami	38
4.3 Divisão de números complexos com origami	39
4.4 O número \sqrt{a} é construtível com origami.	40
4.5 Caracterização da teoria de corpo com origami	40
Conclusão	45
Apêndice I: Estudo da Parábola	47

Apêndice II: Estruturas algébricas	49
4.6 Grupos	49
4.7 Anéis	50
4.8 Corpos	51
4.9 Espaço vetorial	51
4.10 Extensão de Corpos	52
4.11 O corpo de decomposição	52
4.12 Grupo de Galois	53
4.13 Extensões ciclotômicas	54
Bibliografia	55

Lista de Figuras

1.1	Paralela a uma reta dada que passa por um ponto fora da reta	4
1.2	Perpendicular por um ponto a uma reta dada	4
1.3	Mediatriz de um segmento de reta	5
1.4	Os números $a + b$ e $a - b$ são construtíveis	6
1.5	O número ab é construtível	7
1.6	O número $\frac{a}{b}$ é construtível	7
1.7	O número \sqrt{a} é construtível	8
1.8	Duplicação do cubo com régua não graduada e compasso.	17
1.9	Quadratura de um círculo com régua não graduada e compasso.	18
2.1	Pássaro sagrado do Japão (Tsuru).	19
2.2	Axioma 1	20
2.3	Axioma 2	20
2.4	Axioma 3	20
2.5	Axioma 4	21
2.6	Axioma 5	21
2.7	Interpretação do axioma 5	21
2.8	Axioma 6	22
2.9	Axioma 7	22
2.10	reta L e um ponto P fora dela.	23
2.11	reta perpendicular a L que passa pelo ponto P	23
2.12	incidir o ponto que está sobre a reta L até ao ponto P	23
3.1	Folha quadrada de papel	26
3.2	Ponto médio da margem direita	26
3.3	Reta do ponto médio ao canto inferior esquerdo	26
3.4	Diagonal da folha	27
3.5	Folha dividida em três partes iguais	27
3.6	Resolução do problema da duplicação do cubo	27
3.7	Folha após passo 5	28
3.8	Pontos médios de dobragem	29
3.9	Dobragem de tangente comum de duas parábolas	30
3.10	Dobragem da tangente comum a duas parábolas	32
3.11	Folha quadrada do papel.	34
3.12	Dobragem de um ângulo agudo.	34
3.13	Dobragem de uma reta paralela.	34
3.14	Dobragem de pontos médios dos segmentos BF e CG ,	35
3.15	Dobragem de triângulos congruentes.	35
4.1	Marcação do ponto imaginário e dos eixos	37
4.2	Adição de números complexos com origami	38
4.3	Multiplicação por um número real com origami	39
4.4	Divisão por um número real com origami	39
4.5	A extração da raízes quadradas de um número complexo com origami	40

4.6	Parábola de foco F e a diretriz $c = -p$	48
4.7	Tangente da parábola.	48

Lista de Acrónimos

UBI	Universidade da Beira Interior
AAA	Ângulo-Ângulo-Ângulo
LAL	Lado-Ângulo-Lado
A.C.	Antes de Cristo
INAGBE	Instituto Nacional de Gestão de Bolsas de Estudo-Angola

Alfabeto Grego

α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
ζ	Zeta
θ	Theta
μ	Mu
δ	Delta
ϕ	Phi
π	Pi
ν	Nu
σ	Sigma
λ	Lambda
π	Pi

Introdução

As construções geométricas com régua e compasso são familiares no ensino secundário em Portugal e ensino médio em Angola. Estas construções ampliam as fronteiras de conhecimento dos estudantes, facilitam a compreensão dos conceitos e das propriedades geométricas e são uma fonte muito rica de problemas estimulantes. Para os antigos gregos e egípcios eram ferramentas úteis. Na Grécia antiga, berço da geometria enquanto ciência dedutiva, os sábios gregos depararam-se com enigmas que incidiam na busca da resolução de certos problemas com régua e compasso. Entre estes, ressaltamos os problemas da duplicação do cubo, trissecção de um ângulo e quadratura do círculo, cuja impossibilidade de resolução só foi provada no século XIX.

Os chineses inventaram o papel e, na idade média, no Japão, começou a ser desenvolvido um conjunto de técnicas de dobragens de papel, designado por *Origami*, que permitiam a construção de figuras com uma grande beleza estética. Já no século XX, estas técnicas despertaram o interesse de diversos matemáticos. H. Huzita, K. Hatori e R. Lang fixaram o sistema axiomático para as construções com dobragens. Do ponto de vista matemático, muito do interesse pelo Origami deve-se ao facto de ele possibilitar, através das sete operações básicas – os axiomas de Huzita–Hatori [9, 10]–, a resolução dos problemas clássicos da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo [15]. Mais geralmente, a álgebra (extensão de corpos e teoria de Galois) dá-nos critérios para decidir que números são construtíveis com Origami [13].

O primeiro capítulo desta dissertação incide sobre construções com régua e compasso. Em particular, recordam-se algumas construções geométricas elementares, constrói-se o corpo dos números construtíveis e apresenta-se o teorema sobre equações cúbicas que permite provar a impossibilidade de resolver os três problemas clássicos da antiga Grécia com régua não graduada e compasso. Neste capítulo utilizam-se diversos conceitos algébricos que podem ser consultados em diversas referências (ver, por exemplo, [5, 6, 7, 17]). No Apêndice II, fazemos um breve resumo dos resultados necessários.

No segundo capítulo, apresenta-se o desenvolvimento axiomático do Origami: os sete axiomas de Huzita-Hatori. Dois desses axiomas permitem a construção de retas tangentes a parábolas cujos focos e diretrizes são dados. No apêndice I, apresentamos um estudo sobre a geometria da parábola de modo a permitir a melhor compreensão destes axiomas.

No terceiro capítulo, estuda-se a resolução do problema da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo com Origami. Algebricamente, estes problemas correspondem a resolver equações cúbicas relacionadas com a tangente comum a duas parábolas. Prova-se mais geralmente que é possível construir uma solução de qualquer equação cúbica com Origami [15].

Finalmente, no capítulo quatro, estudamos de forma detalhada o corpo dos números construtíveis com Origami. Apresentamos uma caracterização algébrica destes números construtíveis e estuda-se a possibilidade da construção de polígonos regulares com Origami [13].

Capítulo 1

Construções com régua e compasso

Este capítulo incide sobre construções com régua e compasso. Em particular, recordam-se algumas construções geométricas elementares, constrói-se o corpo dos números construtíveis e apresenta-se o teorema sobre equações cúbicas (Teorema 10) que permite provar a impossibilidade de resolver os três problemas clássicos da antiga Grécia com régua não graduada e compasso.

1.1 Construções geométricas elementares

Toda a construção com régua (não graduada) e compasso consiste de uma sequência de passos do seguinte tipo:

1. traçar uma reta determinada por dois pontos distintos;
2. dados três pontos A , B e P , traçar a circunferência com centro em P e raio AB ;
3. com pontos dados previamente, obter novos pontos que surgem como a interseção de duas retas ou de duas circunferências, ou de uma reta e uma circunferência.

Nesta seção descrevemos algumas construções geométricas básicas, utilizando somente os instrumentos referidos. Estas são bem conhecidas e vão ser utilizadas no capítulo seguinte.

1.1.1 Paralela a uma reta dada que passa por um ponto fora da reta

Seja P um ponto exterior à reta r . Podemos ter A e B dois pontos sobre r . Podemos construir a reta paralela a r que passa pelo ponto P :

1. com centro em P traçar uma circunferência que intersecta a reta r num ponto A ;
2. com centro em A traçar uma circunferência com o mesmo raio que intersecta a reta r num ponto B ;
3. com centro em B traçar uma circunferência com o mesmo raio que intersecta a primeira circunferência em Q .
4. traçar a reta que passa pelos pontos P e Q , que é a reta paralela a reta dada.

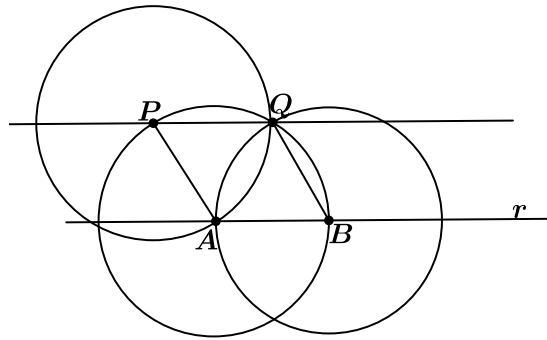


Figura 1.1: Paralela a uma reta dada que passa por um ponto fora da reta

Para justificar, observe que, pelas construções efetuadas, $PABQ$ é um losango e, portanto seus lados opostos são paralelos.

1.1.2 Construção da perpendicular a uma reta dada que passa por um dado ponto

Dada uma reta r e um ponto P , podemos construir a reta perpendicular a r que passa pelo ponto P :

1. traçamos uma circunferência com centro em P que intersekte a reta r em dois pontos distintos A e B ;
2. traçamos duas circunferências, uma com o centro em A e raio AB e a outra com o centro em B e raio BA ;
3. ao traçar a reta que passa pelos pontos de interseção das duas últimas circunferências, estamos a traçar a perpendicular desejada.

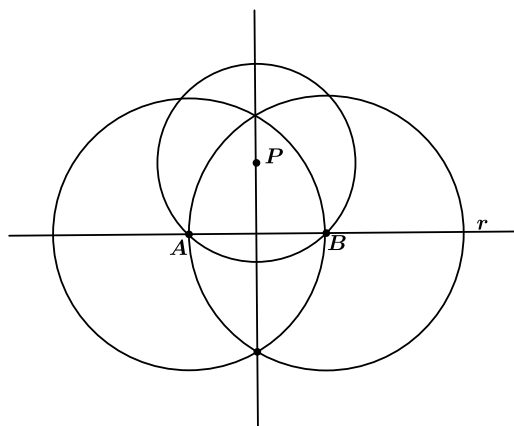


Figura 1.2: Perpendicular por um ponto a uma reta dada

Origami e Construções Geométricas

1.1.3 Mediatriz de um segmento de reta

Dado um segmento de reta AB , podemos construir a mediatriz desse segmento (ou seja, a reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio desse segmento), da seguinte maneira:

1. traçamos duas circunferências, a primeira com o centro em A e raio AB e a segunda com o centro em B e raio BA ;
2. construímos agora a reta determinada pelos dois pontos de interseção das duas circunferências; esta é a mediatriz.

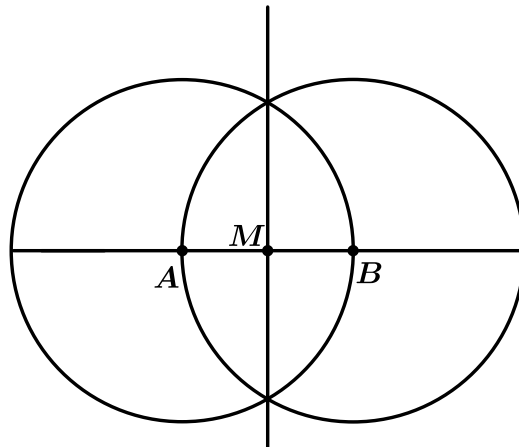


Figura 1.3: Mediatriz de um segmento de reta

1.2 Números construtíveis e corpos numéricos

O objetivo principal desta secção é a apresentação de um teorema que é central nos estudos da impossibilidade de certas construções geométricas (Teorema 3). Para tal, precisamos de primeiro definir os conceitos de número real construtível e de corpo numérico. A noção de número construtível será também estendida à noção de ponto construtível.

Suponha-se fixado um segmento de reta. Definimos a unidade como sendo o comprimento desse segmento como sendo igual a uma unidade. Um número real α diz-se *construtível* se for possível construir, com uso exclusivo de régua (não graduada) e compasso, um segmento de comprimento $|\alpha|$.

As operações algébricas racionais (adição, subtração, multiplicação e divisão) correspondem a construções geométricas elementares. De facto, vamos mostrar que, dados dois segmentos de comprimentos a e b (medidos segundo a unidade de comprimento dada), então é fácil construir segmentos de comprimentos $a + b$, $a - b$, ab e $\frac{a}{b}$ com ($b \neq 0$), utilizando régua não graduada e compasso.

No que segue vamos supor que a e b são números reais construtíveis e, sem perda de generalidade, vamos também supor que eles são positivos. Dados os pontos A e B , o comprimento do segmento AB será designado por $|AB|$.

1.2.1 Os números $a + b$ e $a - b$ são construtíveis

As construções de $a + b$ e $a - b$ podem ser realizadas conforme indicado abaixo (para simplificar a exposição, assumimos que $a > b > 0$):

1. fixado um ponto O , marcar um ponto A sobre a circunferência de centro O e raio a ;
2. traçar com centro em A a circunferência de raio b , que intersecta a reta OA em dois pontos, P_1 e P_2 , um dos quais, digamos P_1 , está entre O e A ;
3. então $|OP_1| = a - b$ e $|OP_2| = a + b$.

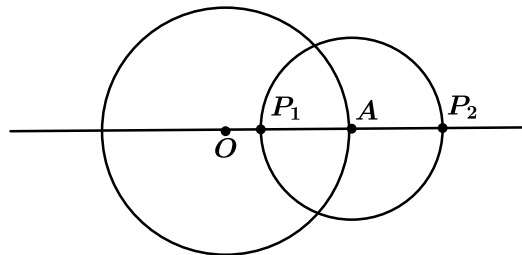


Figura 1.4: Os números $a + b$ e $a - b$ são construtíveis

1.2.2 Os números ab e $\frac{a}{b}$ são construtíveis

De forma simplificada, as construções de ab e $\frac{a}{b}$ são possíveis pelo traçado de triângulos semelhantes, cujas razões entre os lados correspondentes determinam os comprimentos requeridos. Mais precisamente, o segmento de comprimento ab pode construir-se da seguinte maneira:

1. dada uma reta s que contém pontos O e P tais que $|OP| = 1$, tomemos o ponto A , sobre a semireta OP , tal que $|OA| = a$;
2. traçamos uma semireta com origem em O que forme um ângulo agudo com a semireta OP , e sobre ela indicamos o ponto B tal que $|OB| = b$;
3. construimos o segmento BP e por A um segmento paralelo a BP , que intersecta OB no ponto C , então $|OC| = ab$.

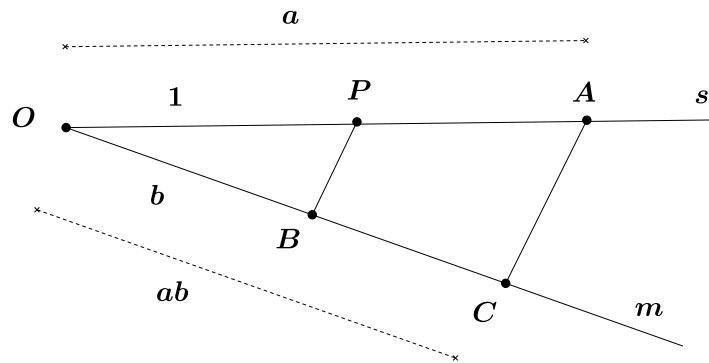


Figura 1.5: O número ab é construtível

Pelo critério AA, sabemos que os triângulos OPB e OAC são semelhantes. Temos assim que

$$\frac{|OP|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OC|},$$

ou seja,

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{|OC|}.$$

Logo,

$$|OC| = ab.$$

Procedemos de forma similar para a construção de $\frac{a}{b}$:

1. dada uma reta m que contém pontos O e P tais que $|OP| = 1$, marcamos um ponto B sobre a semireta OP tal que $|OB| = b$;
2. traçamos uma semireta com origem em O que forme um ângulo agudo com a semireta OP , e marcamos o ponto A tal que $|OA| = a$;
3. construímos o segmento AB e por P um segmento paralelo a AB , que intersesta OA no ponto C , então $|OC| = \frac{a}{b}$.

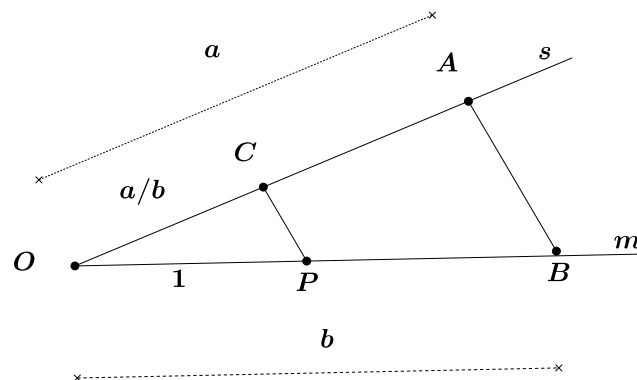


Figura 1.6: O número $\frac{a}{b}$ é construtível

Na figura acima, o triângulo OAB é semelhante ao triângulo OCP , pelo que

$$\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OP|}{|OB|},$$

donde

$$|OC| = \frac{a}{b}.$$

1.2.3 O número \sqrt{a} é construtível

Uma construção decisiva é a extração da raiz quadrada. Se um segmento de comprimento a é dado, então um segmento de comprimento \sqrt{a} também pode ser construído, da seguinte maneira:

1. dada uma reta r , sobre ela marcamos os pontos O e A tais que $|OA| = a$;
2. a partir de A , indicamos na reta r o ponto B tal que $|AB| = 1$, com A entre O e B ;
3. de seguida, traçamos uma semicircunferência com centro no ponto médio de OB ;
4. por A , traçamos um segmento de reta perpendicular a OB , o qual intersecta a semicircunferência no ponto C , para qual $|AC| = \sqrt{a}$.

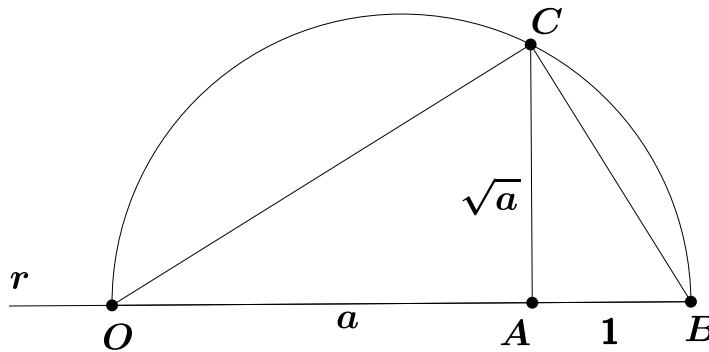


Figura 1.7: O número \sqrt{a} é construtível

Pelo critério AA, os triângulos OAC e CAB são semelhantes, logo

$$\frac{|AC|}{|OA|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

donde $|AC|^2 = |OA||AB|$, ou seja, $|AC|^2 = a$. Assim,

$$|AC| = \sqrt{a}.$$

1.2.4 Pontos construtíveis

Dado um segmento, podemos munir o plano de um referencial cartesiano usando o comprimento desse segmento como unidade de medida. Então, um ponto P de coordenadas (a, b) é construtível se, e só se, a e b são números construtíveis. De facto, dados números construtíveis a e b , os pontos de coordenadas $(a, 0)$ e $(0, b)$ são construtíveis, num só passo; depois, o ponto de coordenadas (a, b) é construtível como o ponto de interseção de duas circunferências, uma com o centro $(0, b)$ e raio $|a|$, e a outra com o centro $(a, 0)$ e raio $|b|$.

Reciprocamente, retas que passam por P , de coordenadas (a, b) , podemos construir duas retas que passam por p e são perpendiculares, respetivamente, a cada eixo do referencial; os pontos de interseção destas retas com os eixos têm coordenadas $(a, 0)$ e $(0, b)$.

Origami e Construções Geométricas

1.2.5 Corpo dos números contrutíveis

É bem conhecido que o conjunto dos números racionais contém os elementos 1 e 0 e é fechado em relação às operações racionais; isto é, a soma, diferença, produto ou quociente de quaisquer dois números racionais (excluindo divisão por 0) é ainda um número racional.

Qualquer conjunto de números que contenha os elementos 1 e 0 e seja fechado em relação às quatro operações racionais designa-se por corpo numérico. É claro que todo o corpo numérico contém os números racionais. A definição de corpo encontra-se no Apêndice II.

Do que foi visto na secção anterior, começando com um segmento unitário, podemos construir todos os números racionais e, portanto, todos os pontos racionais. Usando o compasso, podemos construir números irracionais, como por exemplo $\sqrt{2}$, que não é um número racional. Tendo construído $\sqrt{2}$, podemos, através de construções racionais, obter todos os números da forma

$$a + b\sqrt{2}$$

onde a e b são números racionais.

De modo idêntico podemos construir todos os números da forma:

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}. \quad (1.1)$$

Observe-se que

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - d^2} + \frac{bc - da}{c^2 - d^2}\sqrt{2},$$

onde a , b , c e d são racionais. Assim, os números da forma (1.1) também podem escrever-se na forma $x + y\sqrt{2}$, onde x e y são números racionais.

De um modo geral, começando com o corpo racional $\mathbb{Q} = F_0$ e tomando um número positivo k_0 de F_0 tal que $\sqrt{k_0}$ não pertence a F_0 , podemos definir a extensão (ver Apêndice II)

$$F_1 = F_0(\sqrt{k_0})$$

de todos os números da forma

$$a_0 + b_0\sqrt{k_0},$$

onde a_0 e b_0 pertencem a F_0 .

De seguida, tomando um número positivo k_1 de F_1 tal que $\sqrt{k_1}$ não pertence a F_1 , podemos definir a extensão

$$F_2 = F_1(\sqrt{k_1})$$

de todos os números da forma

$$a_1 + b_1\sqrt{k_1},$$

onde a_1 e b_1 pertencem a F_1 .

Continuando este processo, alcançamos um corpo

$$F_n = F_{n-1}(\sqrt{k_{n-1}}),$$

depois de n adjunções de raízes quadradas. Este último consiste de todos os números da forma

$$a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{k_{n-1}},$$

com a_{n-1} e b_{n-1} números em F_{n-1} , sendo k_{n-1} um certo número positivo (fixo) de F_{n-1} tal que $\sqrt{k_{n-1}}$ não pertence a F_{n-1} .

Proposição 1. F_0, F_1, \dots, F_n são corpos de números construtíveis e $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$.

Demonstração. Vamos utilizar o método de indução. Como foi visto anteriormente, os números racionais são construtíveis. Assim, $\mathbb{Q} = F_0$ é um corpo de números construtíveis. Se F_i para $(i = 0, \dots, n-1)$ é um corpo de números construtíveis, então qualquer número da forma $a_i + b_i\sqrt{k_i}$ onde $a_i, b_i, k_i \in F_i$, com $k_i > 0$ é um número construtível (por ser construído a partir da soma, produto e raiz quadrada de números construtíveis), pelo que F_{i+1} é um corpo de números construtíveis. Além disso, F_i está propriamente contido em F_{i+1} . De facto, se $x \in F_i$, então

$$x = x + 0\sqrt{k_i} \in F_i(\sqrt{k_i}) = F_{i+1}$$

e $\sqrt{k_i}$ pertence a F_{i+1} mas não pertence a F_i . □

1.2.6 Caracterização dos números construtíveis

Pretendemos, de seguida, caracterizar os números reais construtíveis, o que permitirá mostrar a impossibilidade de certas construções geométricas. Para tal, precisamos de apresentar alguns resultados auxiliares.

Lema 1. *Seja F um corpo numérico.*

1. Se uma reta contém dois pontos cujas coordenadas pertencem a F , então a reta tem uma equação da forma

$$ax + by + c = 0$$

com $a, b, c \in F$.

2. Se uma circunferência tem raio em F e centro num ponto cujas coordenadas pertencem a F , então a circunferência tem uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

com $d, e, f \in F$.

Demonstração. 1. Consideremos a reta que contém os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , onde x_1, x_2, y_1, y_2 pertencem a F . Se $x_1 \neq x_2$, então uma equação dessa reta é dada por

$$\frac{(y - y_1)}{(x - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}.$$

Claramente, podemos escrever esta equação na forma $ax + by + c = 0$, com cada um dos coeficientes em F . Por outro lado, se $x_1 = x_2$, então uma equação da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por $x - x_1 = 0$, que também se pode escrever na forma $ax + by + c = 0$, com cada um dos coeficientes em F .

2. Uma equação da circunferência com raio r e centro (x_1, y_1) , onde $r, x_1, y_1 \in F$, é dada por

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2,$$

Origami e Construções Geométricas

que se pode escrever na forma

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

com $d, e, f \in F$.

□

Chamamos a uma reta que passa por dois pontos cujas coordenadas pertencem a F uma reta em F . Do mesmo modo, a uma circunferência que tem raio em F e centro num ponto cujas coordenadas pertencem a F chamamos circunferência em F .

Suponhamos que é possível construir todos os números de um certo corpo numérico F . O resultado seguinte mostra que a utilização exclusiva de uma régua, numa construção geométrica, não nos leva para além do corpo F , e que só através da utilização do compasso é que podemos obter novos números, ou seja, números que não pertencem a F .

Lema 2. *Seja F um corpo numérico.*

1. *O ponto de interseção de duas retas não paralelas em F tem coordenadas em F ;*
2. *Os pontos de interseção de uma reta em F e uma circunferência em F têm coordenadas que pertencem a F ou a uma extensão da forma $F_1 = F\sqrt{k_0}$;*
3. *Os pontos de interseção de duas circunferências em F têm coordenadas numa das extensões $F_1 = F\sqrt{k_0}$.*

Demonstração. 1. Sejam

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$

equações de duas retas com coeficientes em F . As coordenadas do ponto de interseção, que se obtêm através da resolução simultânea destas equações, são:

$$x = \frac{(c_1b_2 - b_1c_2)}{(a_1b_2 - b_1a_2)}, \quad y = -\frac{(a_1c_2 - c_1a_2)}{(a_1b_2 - b_1a_2)}.$$

Uma vez que estas coordenadas são obtidas através de soma, multiplicação e divisão de números em F , elas estão também em F .

2. Sejam

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0, \end{cases}$$

equações de uma reta e de uma circunferência, respetivamente, com coeficientes em F . Eliminando y do sistema formado pelas duas equações, obtemos uma equação

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

para x , com coeficientes $A = a^2 + b^2$, $B = b^2d + 2ca - eab$, $C = fb^2 + c^2 - ecb$ em F , cuja solução é

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

que é da forma

$$p + q\sqrt{k} \in F(\sqrt{k})$$

onde p, q e $k \in F$. De modo idêntico, eliminando x das equações simultâneas, obtemos que y também é dessa forma.

3. Se

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + d_1x + c_1y + f_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + d_2x + c_2y + f_2 = 0, \end{cases}$$

são equações de duas circunferências com coeficientes em F , então subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$(d_1 - d_2)x + (c_1 - c_2)y + (f_1 - f_2) = 0,$$

que pode ser resolvida simultaneamente com a primeira equação, como na alínea b). Em qualquer dos casos, a construção produz as coordenadas x, y da forma $p + q\sqrt{k}$. □

Teorema 3. *Um número real α é construtível se e só se existir uma sequência*

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$$

de subcorpos do corpo real tal que $\alpha \in F_n$, onde

$$F_j = F_{j-1}(\sqrt{k_{j-1}}),$$

para $j = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Se α é construtível, então é possível construir α com régua e compasso num número finito de passos, começando com a unidade (que está em \mathbb{Q}). Por outro lado, de acordo com o Lema 2, cada um desses passos corresponde a tomar uma extensão $F_{j+1} = F_j(\sqrt{k_j})$.

Reciprocamente, suponhamos que α pertence a F_n . Então, pela Proposição 1, α é construtível. □

Para o próximo corolário, recorda-se que um número algébrico sobre um corpo F é um número que a raiz de um polinómio com coeficientes em F . O conjunto dos polinómios com coeficientes em F será denotado por $F[x]$.

Corolário 4. *Qualquer número construtível é um número algébrico (sobre \mathbb{Q}).*

Demonstração. Se a é um número construtível, temos $a \in F_j = F_{j-1}(\sqrt{k_{j-1}})$ para algum j . Considera-se o polinómio $P_j(x) = x - a$, com $P_j \in F_j[x]$. Então, pondo $a = \alpha + \beta\sqrt{k_{j-1}}$, com $\alpha, \beta \in F_{j-1}$, temos

$$P_j(x) = (x - \alpha) - \beta\sqrt{k_{j-1}}.$$

Fazemos $Q_j(x) = x - \alpha$ e $R_j(x) = -\beta$. Temos $Q_j, R_j \in F_{j-1}[x]$ e

$$P_j = Q_j + R_j\sqrt{k_{j-1}}.$$

Se $R_j = 0$, então

$$P_j = Q_j \in F_{j-1}[x],$$

isto é, a é raiz de um polinómio com coeficientes em F_{j-1} . Caso contrário ($R_j \neq 0$) temos:

$$\begin{cases} P_j^2 = Q_j^2 + R_j^2k_{j-1} + 2Q_jR_j\sqrt{k_{j-1}} \\ \sqrt{k_{j-1}} = \frac{P_j^2 - Q_j^2}{2R_j} \end{cases}$$

Origami e Construções Geométricas

Logo

$$P_j^2 = -Q_j^2 + R_j^2 k_{j-1} + 2P_j Q_j.$$

Como $P_j(a) = 0$, temos da igualdade que

$$(-Q_j^2 + R_j^2 k_j - 1)(a) = 0.$$

Definimos

$$P_{j-1} = -Q_j^2 + R_j^2 k_{j-1} \in F_{j-1}[x].$$

Temos então que o número construtível é raiz do polinómio $P_{j-1} \in F_{j-1}[x]$ com coeficientes em F_{j-1} . O procedimento anterior pode ser repetido de forma a concluirmos que a é raiz de polinómios

$$P_{j-2} \in F_{j-2}[x], P_{j-3} \in F_{j-3}[x], \dots, P_0 \in F_0[x],$$

com $F_0 = \mathbb{Q}$. Logo a , sendo raiz de um polinómio $P_0 \in \mathbb{Q}$, é um número algébrico. \square

Exemplo 1. *Consideremos o número*

$$x = \sqrt{6} + \sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5.$$

Seja $F_0 = \mathbb{Q}$ o corpo racional. Fazendo $k_0 = 2$, obtemos o corpo $F_1 = F_0(\sqrt{2})$, que contém o número $1 + \sqrt{2}$. Agora tomemos $k_1 = 1 + \sqrt{2} \in F_1$. O corpo

$$F_2 = F_1(\sqrt{1 + \sqrt{2}})$$

contém obviamente o número $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. De seguida, fazemos $k_2 = 3 \in F_1$. O corpo $F_3 = F_2(\sqrt{3})$ contém o número

$$k_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}.$$

Então,

$$F_4 = F_3\left(\sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}}\right)$$

contém o número

$$k_4 = \sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5.$$

Finalmente, o corpo

$$F_5 = F_4\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5}\right)$$

contém o número x . De facto: uma vez que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ estão claramente em F_5 , $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$ também está em F_5 ; por outro lado,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5} \in F_5;$$

logo, uma vez que x é a soma destes números, x também está em F_5 .

1.3 Um teorema sobre equações cúbicas

O objetivo principal desta secção é a demonstração de um teorema relativo a equações cúbicas, cuja importância será patente na próxima secção. Começamos por relembrar algumas noções relativas a conceitos básicos sobre polinómios.

Teorema 5. *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinómio com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$. Se $\frac{r}{s}$ é uma raiz racional de $p(x)$, onde r e s são primos entre si, então s divide a_n e r divide a_0 .*

Demonstração. Uma vez que $\frac{r}{s}$ é raiz de $p(x)$, temos

$$a_n \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1} \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0;$$

daqui obtemos

$$-a_n r^n = a_{n-1} s r^{n-1} + \dots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n, \quad (1.2)$$

donde, colocando s em evidência no segundo membro,

$$-a_n r^n = s[a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1}].$$

Uma vez que r e s não têm divisores comuns distintos da unidade, concluímos desta igualdade que s divide a_n . De modo análogo, colocando r em evidência no segundo membro da equação (1.2), vemos que r divide a_0 . \square

Recordemos agora o algoritmo de divisão para polinómios (ver [7]).

Teorema 6. *Dados dois polinómios $p(x)$ e $m(x) \neq 0$, com coeficientes reais, existem polinómios únicos $q(x)$ e $r(x)$ com coeficientes reais tais que*

1. $p(x) = m(x)q(x) + r(x)$;
2. o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $m(x)$ ou $r(x) = 0$.

Dados polinómios $p(x)$ e $m(x)$ de coeficientes reais, recorde-se também que $m(x)$ divide $p(x)$, e escrevemos $\frac{p(x)}{m(x)}$, se $p(x) = m(x)q(x)$ para algum polinómio $q(x)$ de coeficientes reais. O seguinte corolário fornece-nos um critério simples, baseado na noção de raiz, para a determinação dos fatores de um polinómio.

Corolário 7. *Se $p(x)$ é um polinómio de coeficientes reais e α é um número real, então $x - \alpha$ divide $p(x)$ se e só se $p(\alpha) = 0$.*

Demonstração. Se $x - \alpha$ divide $p(x)$, então

$$p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

para algum polinómio $q(x)$ de coeficiente reais. Fazendo $x = \alpha$ obtemos

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que $p(\alpha) = 0$. Pelo algoritmo de divisão, temos

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x),$$

Origami e Construções Geométricas

em que o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $x - \alpha$. Então $r(x) = r$ para alguma constante r . Logo

$$0 = p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r = r.$$

Portanto $r(x) = 0$ e

$$p(x) = (x - \alpha)q(x),$$

donde $x - \alpha$ divide $p(x)$. □

Lema 8. *Se γ_1, γ_2 e γ_3 são as raízes do polinómio*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

com coeficientes reais e $a \neq 0$, então

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{-b}{a}, \quad \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3 = \frac{c}{a}, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \frac{d}{a}.$$

Demonstração. Pelo corolário anterior, vamos ter

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - \gamma_1)(x - \gamma_2)(x - \gamma_3) \\ &= ax^3 - a(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)x^2 + a(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3)x - a(\gamma_1\gamma_2\gamma_3). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes em x^0 , x e x^2 , obtemos as igualdades do enunciado. □

Lema 9. *Seja F um subcorpo do corpo real. Se um polinómio de terceiro grau*

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

com coeficientes em F , tem uma raiz da forma $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in F$, $\gamma > 0$ e $\sqrt{\gamma}$ não pertence a F , então $\alpha - \beta\sqrt{\gamma}$ também é uma raiz de $p(x)$.

Demonstração. Vamos supor que $\beta \neq 0$, caso contrário o teorema é trivialmente verdadeiro. Sabemos que $x - (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})$ divide $p(x)$, pelo Corolário 7. Basta agora estabelecer que $x - (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})$ também divide $p(x)$. Para isso, vamos mostrar que,

$$[x - (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})][x - (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})] = [(x - \alpha) + \beta\sqrt{\gamma}][(x - \alpha) - \beta\sqrt{\gamma}] = (x - \alpha)^2 - (\beta\sqrt{\gamma})^2$$

divide $p(x)$.

Como $(x - \alpha)^2 - (\beta\sqrt{\gamma})^2$ é um polinómio de coeficientes reais, temos, pelo algoritmo de divisão, que existem polinómios únicos $q(x)$ e $r(x)$, com coeficientes reais, tais que

$$p(x) = [(x - \alpha)^2 - (\beta\sqrt{\gamma})^2]q(x) + r(x),$$

com o grau de $r(x)$ menor que 2 ou $r(x) = 0$. Se $r(x) \neq 0$, então $r(x) = \mu + \nu x$ para certos números reais μ, ν . Então para $x = \alpha + \beta\sqrt{\gamma}$, temos

$$0 = p(\alpha + \beta\sqrt{\gamma}) = r(\alpha + \beta\sqrt{\gamma}) = \mu + \nu(\alpha + \beta\sqrt{\gamma}) = (\mu + \nu\alpha) + \nu\beta\sqrt{\gamma}.$$

Mas então

$$\mu + \nu\alpha = 0, \quad \nu\beta = 0.$$

Logo, podemos concluir que $\mu = \nu = 0$. Portanto, $r(x) = 0$ e

$$[(x - (\alpha + \beta\sqrt{\gamma}))][(x - (\alpha - \beta\sqrt{\gamma}))]$$

divide $p(x)$, pelo que $(x - (\alpha - \beta\sqrt{\gamma}))$ também divide $p(x)$. \square

Teorema 10. *Se uma equação de terceiro grau com coeficientes racionais não possui nenhuma raiz racional, então nenhuma das suas raízes é construtível.*

Demonstração. Seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinómio com coeficientes racionais que não possui uma raiz racional e que possui uma raiz construtível μ . Suponhamos que μ foi escolhida de tal modo que o corpo correspondente $F_n = F_{n-1}(\sqrt{k})$ satisfaz a condição de n ser mínimo com respeito à condição de conter uma tal raiz. Então, $k \neq 0$ porque μ não é racional. Logo, $\mu = \alpha + \beta\sqrt{k}$ para certos $\alpha, \beta, k \in F_{n-1}$.

Pelo Lema 9, $\alpha - \beta\sqrt{k}$ também é uma raiz de $p(x)$. Pelo Lema 8, a soma das raízes de $p(x)$ é $-\frac{b}{a}$. Deste modo, se ν é a terceira raiz de $p(x)$, então

$$\frac{-b}{a} = \nu + (\alpha + \beta\sqrt{k}) + (\alpha - \beta\sqrt{k})$$

e portanto

$$\nu = \frac{-b}{a} - 2\alpha.$$

Mas $a, b, \alpha \in F_{n-1}$, donde $\nu \in F_{n-1}$, o que contradiz a minimalidade de n . \square

1.4 Construções impossíveis

Com estes resultados, estamos agora em condições de investigar os três problemas clássicos da geometria grega, referidos na introdução desta dissertação. Veremos, em particular, que cada um dos problemas originais se traduz num problema de determinar se é possível construir um segmento cujo comprimento é um certo múltiplo de um dado comprimento.

1.4.1 Problema da duplicação do cubo

Corolário 11. *Não é possível duplicar o cubo com régua e compasso*

Demonstração. Consideremos, em primeiro lugar, o problema da duplicação do cubo. Supondo que o cubo dado tem aresta de comprimento unitário, então o seu volume será uma unidade cúbica. Um cubo cujo volume é de 2 unidades cúbicas terá um lado de comprimento x tal que $x^3 = 2$. Assim, o problema da duplicação do cubo pode ser formulado como se segue: dado um segmento de comprimento igual a 1, construir um segmento de comprimento x tal que

$$x^3 = 2.$$

Deste modo, a questão que se coloca é se o polinómio $x^3 - 2$ tem uma raiz construtível. Pelo lema 9, o polinómio $x^3 - 2$ não tem raízes racionais e, portanto, atendendo ao Teorema 10, $x^3 - 2$ não tem raízes construtíveis. Assim, $x = \sqrt[3]{2}$ não é um número construtível, pelo que é impossível a duplicação do cubo recorrendo apenas à régua não graduada e compasso. \square

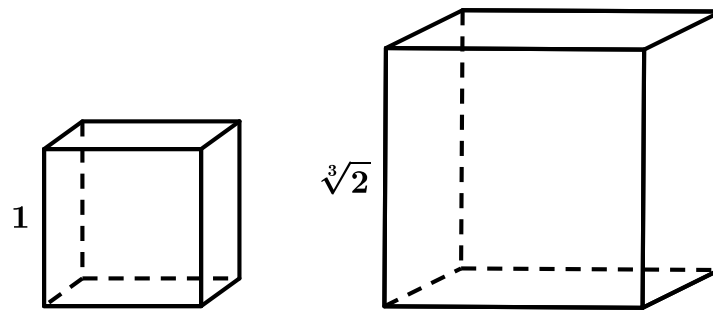


Figura 1.8: Duplicação do cubo com régua não graduada e compasso.

1.4.2 Problema da trissecção do ângulo

Mostremos agora que a trissecção do ângulo por utilização exclusiva de régua não graduada e compasso é impossível em geral. É claro que certos ângulos, tais como os ângulos de 90° e 180° , são trissectáveis, mas isto não é válido para todos os ângulos. Vamos restringir a nossa atenção ao ângulo de 60° .

Corolário 12. *É impossível a trissecção de um ângulo de amplitude de 60°*

Demonstração. É fácil mostrar que um ângulo θ é construtível se e só se $\cos(\theta)$ é construtível a partir de um segmento unitário. Com efeito, se θ é construtível então podemos construir um triângulo rectângulo de hipotenusa 1 e um dos ângulos igual a θ : o cateto adjacente deste ângulo tem medida $\cos(\theta)$. Reciprocamente, se o $\cos(\theta)$ é construtível, então o $\sin(\theta)$ também é, uma vez que $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$ é construtível; construindo um triângulo rectângulo com estes catetos, ficamos com o ângulo θ .

Da trigonometria elementar sabemos que

$$\cos(\theta) = 4 \cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3 \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

Tomando $\theta = 60^\circ$ e pondo

$$x = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right),$$

obtemos a equação

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Assim, o problema da trissecção do ângulo pode ser formulado como se segue: dado um segmento unitário, construir um segmento de comprimento x tal que $8x^3 - 6x - 1 = 0$. As possíveis raízes racionais deste polinómio são

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}.$$

No entanto, facilmente se vê que nenhum destes números é raiz. Logo, de acordo com o Teorema 10, ele não tem raízes construtíveis. Podemos por isso afirmar que x não é construtível.

1.4.3 Problema da quadratura do círculo

Corolário 13. *É impossível a quadratura de um círculo com régua e compasso.*

Demonstração. O problema da quadratura do círculo. Vamos supor que o raio do círculo dado tem comprimento igual a uma unidade. Então a área do círculo é de π unidades quadradas, e o problema consiste em construir um quadrado com área igual a π

O problema da quadratura do círculo pode então ser formulado da seguinte maneira: dado um segmento de comprimento igual a 1, construir um segmento de comprimento x tal que

$$x^2 = \pi.$$

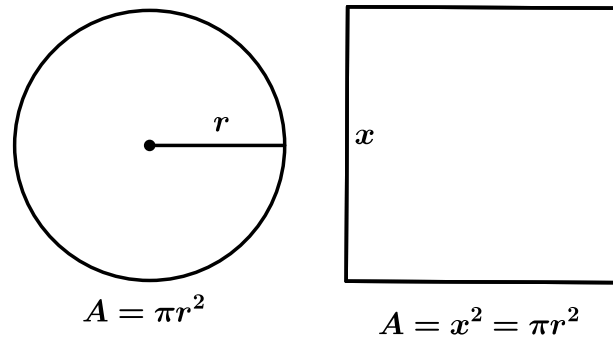


Figura 1.9: Quadratura de um círculo com régua não graduada e compasso.

Pelo corolário 4, qualquer número construtível é um número algébrico. A impossibilidade da quadratura do círculo resulta do facto de $\sqrt{\pi}$ não ser um número algébrico, o que foi provado pelo matemático alemão C.L.F. Lindemann, em 1882. \square

Capítulo 2

Definições e os axiomas do Origami

A palavra Origami surge da junção das palavras *ori* (dobrar) e *kami* (papel). Durante muito tempo, os métodos de construção eram transmitidos oralmente. Em 1787, foi publicado um livro (*Hiden Senbazuru Orikata*) que continha, pela primeira vez, instruções escritas para a dobragem de um pássaro sagrado do Japão.

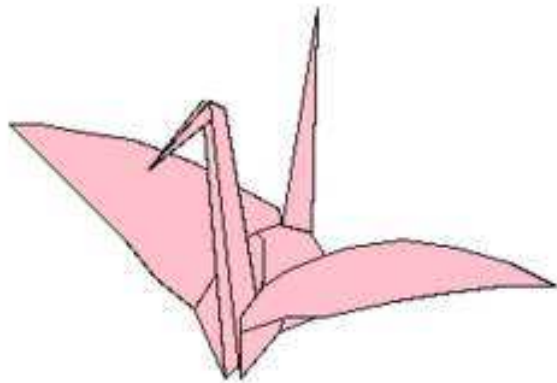


Figura 2.1: Pássaro sagrado do Japão (Tsuru).

O origami tem muitas variações. Na versão mais comum, começa-se com uma folha de papel quadrada não marcada. É permitido apenas dobrar sem corte. O objetivo com a construção de origami consiste em localizar precisamente um ou mais pontos no papel, nas bordas da folha ou no seu interior. Esses pontos de referência são usados para definir as dobragens remanescentes que dão forma ao objeto final. O processo de dobrar o modelo cria uma sequência de pontos auxiliares ao longo da sua execução, que são gerados como interseções de retas.

2.1 Desenvolvimento axiomático do origami

De seguida apresentam-se os sete axiomas de Huzita-Hatori, que vieram dar sustentabilidade à teoria matemática do Origami. Em 2003, o físico americano Robert Lang [11] afirmou que não são necessários mais axiomas e publica, numa das suas páginas da internet, um estudo onde justifica a sua convicção de que os sete axiomas de Huzita-Hatori definem o que é possível construir com dobragens.

2.2 Os axiomas de Huzita-Hatori

1. **Axioma 1:** dados dois pontos, P_1 e P_2 , há uma dobragem que passa pelos dois pontos.

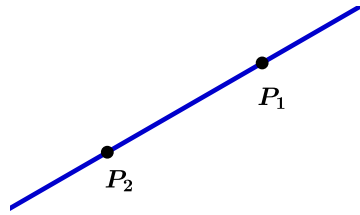


Figura 2.2: Axioma 1

Interpretação: Corresponde a traçar uma reta por dois pontos dados.

2. **Axioma 2:** dados dois pontos, P_1 e P_2 , há uma dobragem que os torna coincidentes.

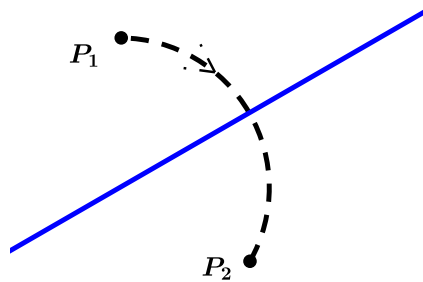


Figura 2.3: Axioma 2

Interpretação: Corresponde a traçar a mediatriz de um seguimento dado.

3. **Axioma 3:** dadas duas retas, L_1 e L_2 , há uma dobragem que as torna coincidentes.

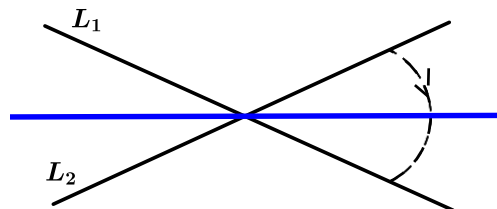


Figura 2.4: Axioma 3

Interpretação: Corresponde a traçar a bissetriz do ângulo formado pelas duas retas.

Origami e Construções Geométricas

4. **Axioma 4:** dados um ponto P e uma reta L , há uma dobragem perpendicular a L que passa por P .

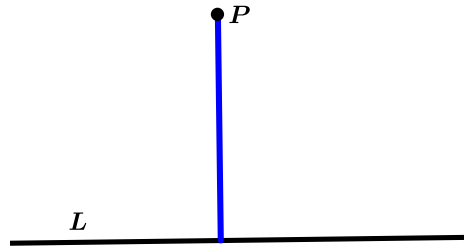


Figura 2.5: Axioma 4

Interpretação: Corresponde a traçar a única reta perpendicular a L que passa pelo ponto P .

5. **Axioma 5:** dados dois pontos, P_1 e P_2 , e uma reta, L , se a distância de P_1 a P_2 for igual ou superior à distância de P_2 a L , há uma dobragem que faz incidir P_1 em L e que passa por P_2 .

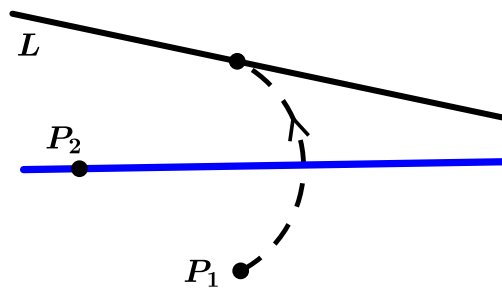


Figura 2.6: Axioma 5

Interpretação: Corresponde a marcar sobre a reta L o ponto I de intersecção entre a circunferência de centro em P_2 e raio $|P_1P_2|$ e a reta L .

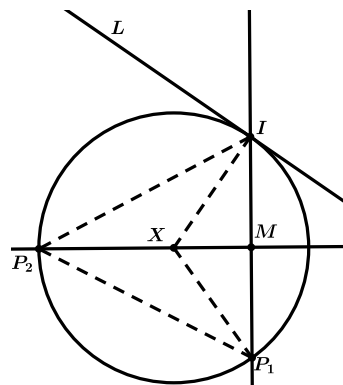


Figura 2.7: Interpretação do axioma 5

Por outro lado, a reta de dobragem é a reta tangente à parábola \mathcal{P} de foco P_1 e diretriz L pelo ponto X obtido da seguinte forma: considera-se a perpendicular à reta L pelo ponto

I e seja X o ponto de intersecção entre esta reta e a reta da dobragem; uma vez que a reta da dobragem é a mediatriz do segmento IP_1 e passa por X , pelo critério LAL , os triângulos XIM e XP_1M são congruentes. Logo $|XI| = |XP_1|$, isto é, X pertence à parábola \mathcal{P} e, tendo em conta os resultados do Apêndice I, a reta da dobragem é tangente a \mathcal{P} no ponto X .

6. **Axioma 6:** dados dois pontos, P_1 e P_2 , e duas retas, L_1 e L_2 , existe uma dobragem que faz incidir P_1 em L_1 e P_2 em L_2 .

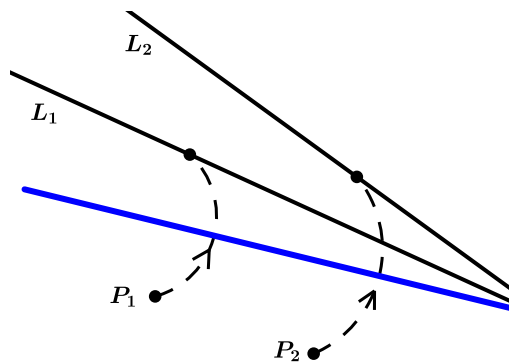


Figura 2.8: Axioma 6

Interpretação: A reta de dobragem é, simultaneamente, tangente à parábola \mathcal{P}_1 de foco em P_1 e diretriz L_1 e tangente à parábola \mathcal{P}_2 de foco em P_2 e diretriz L_2 . Tal pode ser facilmente compreendido a partir da observação do axioma 5.

7. **Axioma 7:** Dado um ponto P e duas retas L_1 e L_2 se as retas não forem paralelas, há uma dobragem que faz incidir P em L_1 e é perpendicular a L_2 .

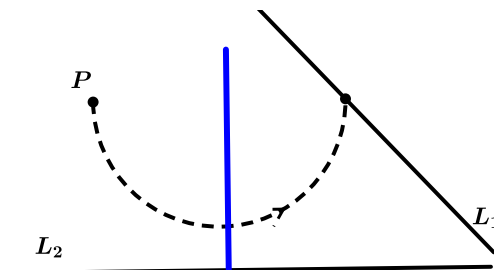


Figura 2.9: Axioma 7

Interpretação: Corresponde a marcar um ponto X de intersecção entre a reta L_1 , e a reta paralela L_2 pelo ponto P . A reta de dobragem é precisamente a mediatriz do seguimento PX .

Origami e Construções Geométricas

De seguida, mostramos como aplicar os axiomas para construir uma paralela a uma reta dada que passa por um ponto dado fora da reta.

1. dada uma reta L e um ponto P fora dela;

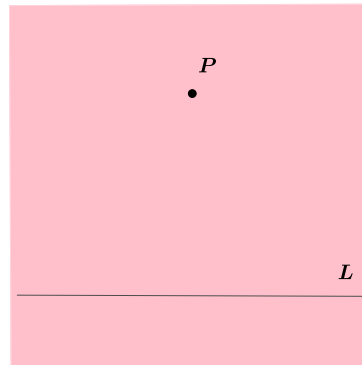


Figura 2.10: reta L e um ponto P fora dela.

2. traçar a perpendicular a L que passa pelo ponto P , pelo axioma 4;

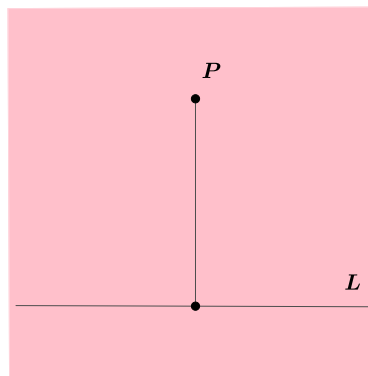


Figura 2.11: reta perpendicular a L que passa pelo ponto P

3. considerar a perpendicular a L por P e traçar a perpendicular a esta reta por P , novamente pelo axioma 4.

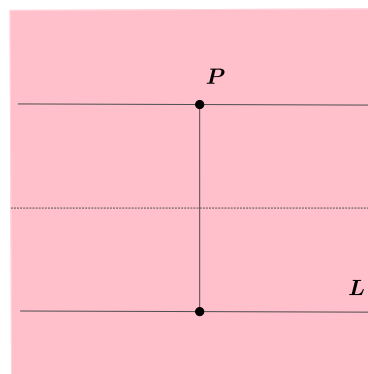


Figura 2.12: incidir o ponto que está sobre a reta L até ao ponto P

Capítulo 3

Resolução de equações cúbicas com origami

Estuda-se a resolução do problema da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo com Origami. Algebricamente, estes problemas correspondem a resolver equações cúbicas relacionadas com a tangente comum a duas parábolas. Prova-se mais geralmente que é possível construir uma solução de qualquer equação cúbica com Origami [15].

3.1 Problemas clássicos: origem e aspetos históricos

O problema da duplicação do cubo consiste em construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro de um cubo dado e o problema da trissecção de um ângulo consiste em dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais. São dois dos três problemas clássicos da matemática grega que têm sido um motivo de inspiração dos matemáticos desde os tempos de Hippias de Elis (século V a.C.) até aos dias atuais. O mundo origamístico também tem a sua participação nestes dois problemas.

Segundo revelam os documentos antigos, as primeiras alusões ao surgimento destes problemas remetem a cerca de 429 a.C., quando uma peste exterminou um quarto da população de Atenas. No propósito de cessar a peste, os atenienses, desesperados, enviaram uma delegação para perguntar ao oráculo de Apolo, em Delos, de que maneira se poderia acabar com a peste. Em resposta, o oráculo terá respondido que, se duplicassem o altar cúbico de Apolo, o problema seria sanado. Os atenienses dobraram a aresta do altar, pensando que tinham satisfeito a vontade de Deus, mas de facto multiplicaram o seu volume por oito.

A prova da impossibilidade da construção por régua não graduada e compasso só surgiu no século XIX. O argumento final foi colocado pelo matemático francês Pierre Laurent, em 1837. No entanto, como vamos ver neste capítulo, é possível construir a solução para o problema da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo através do Origami.

3.2 Resolução do problema da duplicação do cubo

Conforme Lucero [12], a solução seguinte foi feita pela primeira vez por Peter Messer.

1. partimos de uma folha quadrada de papel de dimensão arbitrária:

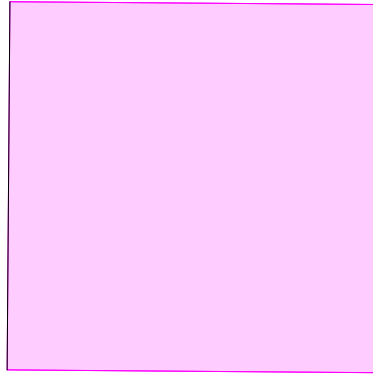


Figura 3.1: Folha quadrada de papel

2. marcar o ponto médio da margem direita da folha quadrada do papel (axioma 2).

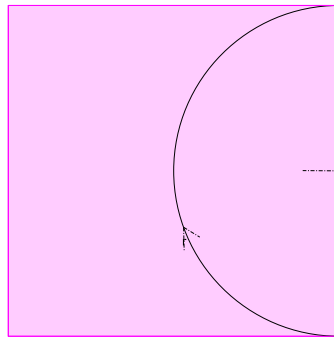


Figura 3.2: Ponto médio da margem direita

3. a partir do ponto médio da margem direita da folha quadrada do papel, traçar uma reta até ao canto inferior esquerdo (axioma 1).

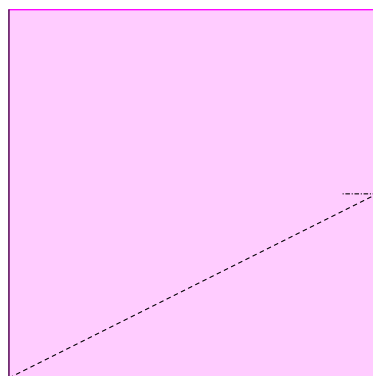


Figura 3.3: Reta do ponto médio ao canto inferior esquerdo

4. traçar uma diagonal a partir do canto superior esquerdo até ao inferior direito (axioma 1).

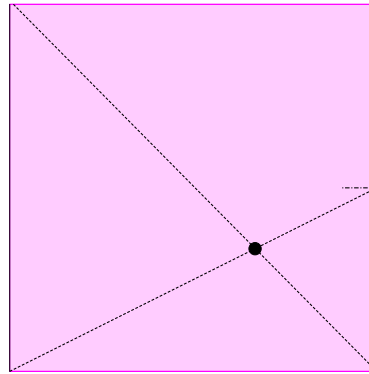


Figura 3.4: Diagonal da folha

5. traçar uma reta perpendicular a margem direita a passar pelo ponto de intersecção C (axioma 4). Fazer a margem superior coincidir com está reta perpendicular (axioma 3); as linhas dobradas horizontais dividem a folha em três partes iguais.

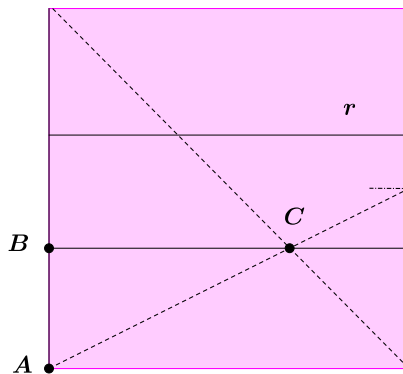


Figura 3.5: Folha dividida em três partes iguais

6. dobrar de forma que o ponto A fique sobre a margem direita, ponto A' , e o ponto B sobre a linha horizontal r , ponto B' (axioma 6). O ponto A' divide a margem direita na razão de 1 para $\sqrt[3]{2}$, como de seguida passaremos a demonstrar na figura a baixo.

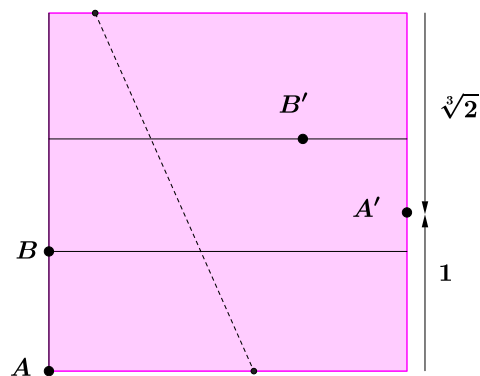


Figura 3.6: Resolução do problema da duplicação do cubo

Primeiro demonstraremos que a sequência de passos de 1 a 5 divide a folha de papel em três

partes iguais. O seguinte diagrama reproduz o resultado após o passo 5. Temos colocado um par de eixos cartesianos x e y , com a origem no canto inferior esquerdo. O comprimento dos lados da folha é l (ver figura 3.7).

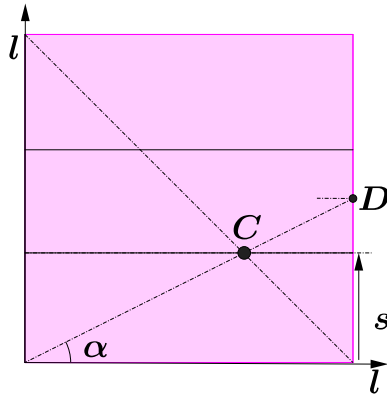


Figura 3.7: Folha após passo 5

O ponto C está à mesma distância das margens inferiores e da margem direita, uma vez que ele se encontra sobre a diagonal do quadrado. Designaremos esta distância por s . Portanto, as coordenadas de C são dadas por

$$(x_C, y_C) = (l - s, s).$$

As coordenadas do ponto médio D da margem direita são

$$(x_D, y_D) = \left(l, \frac{l}{2}\right).$$

Podemos então dizer que

$$\tan(\alpha) = \frac{y_C}{x_C} = \frac{s}{l - s}, \quad \tan(\alpha) = \frac{y_D}{x_D} = \frac{1}{2}.$$

Igualando as equações, teremos

$$\frac{s}{l - s} = \frac{1}{2},$$

logo, isolando s obteremos

$$s = \frac{l}{3}.$$

Isto significa que as duas retas horizontais dividem a folha em três retângulos iguais.

Agora demonstraremos que a dobragem do passo 6 determina o comprimento $\sqrt[3]{2}$ sobre a margem direita da folha. Para isso, colocamos novamente um par de eixos cartesianos x e y , com a origem no canto inferior esquerdo da folha. Os pontos A e B (ver figura 3.6) têm coordenadas

$$(x_A, y_A) = (0, 0), \quad (x_B, y_B) = \left(0, \frac{l}{3}\right),$$

respetivamente. Fixamos a unidade de comprimento de modo a que as coordenadas de A' e B' sejam dadas por

Origami e Construções Geométricas

$$(x_{A'}, y_{A'}) = (l, 1), \quad (x_{B'}, y_{B'}) = \left(a, \frac{2l}{3}\right),$$

onde a designa a abscissa do ponto B' , por enquanto desconhecida.

Os pontos A'' e B'' sobre a linha m de dobragem (ver figura 3.8), são os pontos médios dos segmentos AA' e BB' , respetivamente, e têm coordenadas

$$(x_{A''}, y_{A''}) = \left(\frac{l}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (x_{B''}, y_{B''}) = \left(\frac{a}{2}, \frac{l}{2}\right).$$

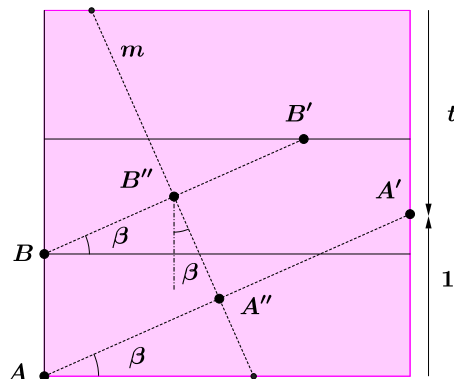


Figura 3.8: Pontos médios de dobragem

Pela geometria da figura, os três ângulos indicados, com vértices em A , B e B'' , são iguais. Designamos a medida desse ângulo por β . Podemos expressar o valor de $\tan(\beta)$ em três formas distintas:

$$\tan(\beta) = \frac{y'_{A'} - y_A}{x'_{A'} - x_A} = \frac{1 - 0}{l - 0} = \frac{1}{l} \quad (3.1)$$

$$\tan(\beta) = \frac{y'_{B'} - y_B}{x'_{B'} - x_B} = \frac{\frac{2l}{3} - \frac{l}{3}}{a - 0} = \frac{l}{3a} \quad (3.2)$$

$$\tan(\beta) = \frac{x''_{A'} - x''_{B'}}{y''_{B'} - y''_{A'}} = \frac{\frac{l}{2} - \frac{a}{2}}{\frac{l}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{l - a}{l - 1} \quad (3.3)$$

Igualando as duas equações (3.1) e (3.2), teremos

$$\frac{1}{l} = \frac{l}{3a} \implies a = \frac{l^2}{3}.$$

Da mesma forma, igualando as equações (3.1) e (3.3), e tomando o valor de a desta última equação, resulta que

$$\frac{1}{l} = \frac{l - \frac{l^2}{3}}{l - 1} \implies l - 1 = \frac{3l^2 - l^3}{3},$$

logo

$$l^3 - 3l^2 + 3l - 3 = 0$$

Esta equação cúbica pode também ser escrita na forma

$$(l - 1)^3 - 2 = 0,$$

logo, substituindo $t = (l - 1)$, obtemos $t^3 - 2 = 0$, ou seja,

$$t = \sqrt[3]{2}.$$

O que prova a solução do problema da duplicação do cubo com Origami [12].

3.3 Raiz cúbica com dobragem

Nesta secção, mostramos como achar a raiz cúbica de um comprimento fixado com dobragens[15].

Consideremos duas parábolas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 com equações $y^2 = 2ax$ e $x^2 = 2y$, respetivamente, e focos em

$$F_1 = \left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad F_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Neste caso, as parábolas intersectam-se em dois pontos com coordenadas reais. Seja \mathcal{T} a reta tangente comum às duas parábolas, com equação $y = cx + d$.

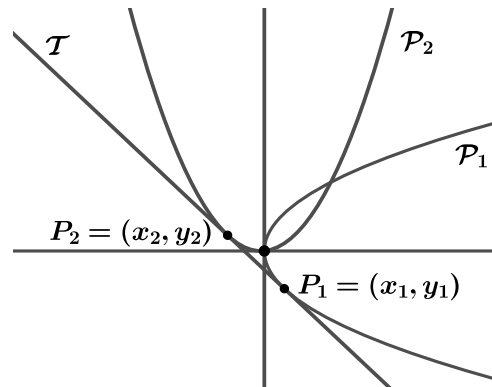


Figura 3.9: Dobragem de tangente comum de duas parábolas

Vamos supor que $P_1 = (x_1, y_1)$ é o ponto em que \mathcal{T} é tangente a \mathcal{P}_1 . Como

$$y^2 = 2ax \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2a},$$

derivando a expressão com relação a y , temos $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a}$. Logo, o declive da reta tangente \mathcal{T} é dado por

$$c = \frac{a}{y_1}.$$

Como $P_1 \in \mathcal{T}$, temos.

$$y_1 = \frac{a}{y_1}x_1 + d \Leftrightarrow d = y_1 - \frac{a}{y_1}x_1.$$

Substituindo na equação $y = cx + d$ da tangente, temos

$$y = \frac{a}{y_1}x + y_1 - \frac{a}{y_1}x_1 \Leftrightarrow yy_1 = ax + y_1^2 - ax_1.$$

Como $y_1^2 = 2ax_1$ temos

$$yy_1 = ax + 2ax_1 - ax_1.$$

Logo a tangente \mathcal{T} tem a equação

$$yy_1 = ax + ax_1.$$

Origami e Construções Geométricas

Sendo assim,

$$c = \frac{a}{y_1}, d = \frac{ax_1}{y_1} \Leftrightarrow y_1 = \frac{a}{c}, x_1 = \frac{d}{c}$$

De $y_1^2 = 2ax_1$, temos

$$\frac{a^2}{c^2} = 2a \frac{d}{c},$$

e portanto

$$a = 2cd \tag{3.4}$$

Procedemos de forma similar para $x^2 = 2y$. Assumindo que $P_2 = (x_2, y_2)$ é o ponto em que \mathcal{T} é tangente a \mathcal{P}_2 , deduzimos que \mathcal{T} tem equação

$$y = x_2x - y_2,$$

Logo $c = x_2$ e $d = -y_2$. Sabendo que $x_2^2 = 2y_2$, resulta a equação

$$c^2 = -2d \tag{3.5}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (3.4) e (3.5), temos

$$\begin{cases} a = 2cd \\ c^2 = -2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{a}{2c} \\ c^2 = -2d \end{cases}$$

Logo $c^2 = -\frac{a}{c}$, pelo que

$$c = -\sqrt[3]{a}$$

Dado um comprimento a , para encontrar a sua raiz cúbica, podemos então proceder da seguinte forma:

1. dobrar um ângulo reto, com vértice em algum ponto, a fim de representar os eixos das parábolas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 ;
2. marcar os focos F_1 e F_2 e dobrar as diretrizes L_1 e L_2 das parábolas;
3. dobrar a tangente comum às parábolas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , pelo (axioma 6) de Huzita-Hatori (\mathcal{P}_2 incide com L_2 e \mathcal{P}_1 incide com L_1);
4. A inclinação desta reta é precisamente $-\sqrt[3]{a}$.

3.4 Solução de equações cúbicas gerais

Uma pequena generalização do método apresentado na secção anterior, permite-nos resolver equações cúbicas gerais. Vejamos as parábolas [15]

\mathcal{P}_1 , de equação $(y - n)^2 = 2a(x - m)$, e \mathcal{P}_2 , de equação $x^2 = 2by$. Seja $y = cx + d$ a equação que descreve a tangente comum de \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 . Devemos encontrar as coordenadas do foco e da diretriz em função de m , n e a . Novamente, a tangente comum \mathcal{T} não pode ser paralela a qualquer eixo. Denotando por $P_1 = (x_1, y_1)$ o ponto em que \mathcal{T} é tangente a \mathcal{P}_1 , temos que \mathcal{T} é representada pela equação:

$$(y - n)(y_1 - n) = a(x - m) + a(x_1 - m).$$

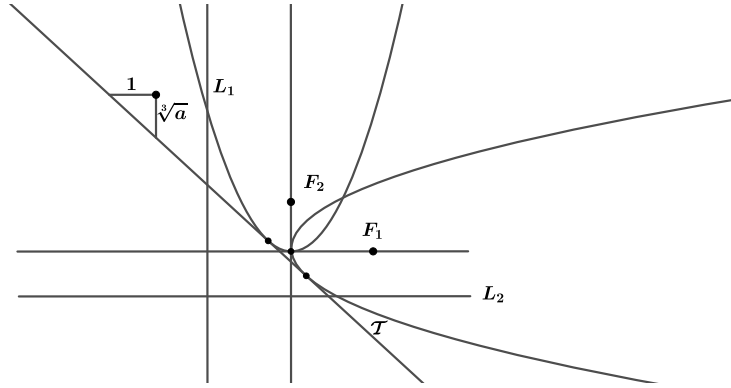


Figura 3.10: Dobragem da tangente comum a duas parábolas

Ou seja,

$$c = \frac{a}{(y_1 - n)}, \quad d = n + \frac{ax_1 - 2am}{(y_1 - n)}.$$

Isto implica que

$$x_1 = \frac{d - n}{c} + 2m, \quad y_1 = \frac{a + nc}{c}$$

Sendo assim, uma vez que $P_1 = (x_1, y_1)$ satisfaz $(y_1 - n)^2 = 2a(x_1 - m)$, vamos ter

$$\frac{a^2}{c^2} = 2a\left(\frac{d - n}{c} + m\right).$$

e portanto

$$a = 2c(d - n + cm). \tag{3.6}$$

Procedemos de forma similar para $x^2 = 2by$, assumindo que $P_2 = (x_2, y_2)$ é o ponto em que \mathcal{T} é tangente a P_2 . A reta tangente pode agora ser escrita na forma:

$$y = \frac{x_2}{b}x - y_2,$$

com

$$c = \frac{x_2}{b}, \quad d = -y_2$$

Logo

$$x_2 = bc, \quad y_2 = -d.$$

Sendo assim, uma vez que $P_2 = (x_2, y_2)$ satisfaz $x^2 = 2by$, temos

$$b^2c^2 = -2bd,$$

e portanto

$$d = -\frac{bc^2}{2}. \tag{3.7}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (3.6) e (3.7), obtemos

$$a = -\frac{2bc^3}{2} - 2nc + 2mc^2,$$

Origami e Construções Geométricas

pelo que

$$c^3 - \frac{2m}{b}c^2 + \frac{2n}{b}c + \frac{a}{b} = 0,$$

ou seja, o declive c da tangente comum é raiz de uma equação cúbica.

Suponhamos agora que temos uma equação cúbica

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

onde p , q e r são dados. Queremos encontrar uma raiz por dobragens.

Podemos supôr que o parâmetro $b = 1$. Assim, temos

$$p = 2m, \quad q = 2n, \quad r = a$$

ou seja,

$$m = -\frac{p}{2}, \quad n = \frac{q}{2}, \quad a = r.$$

Logo a equação da parábola \mathcal{P}_1 é

$$\left(y - \frac{q}{2}\right)^2 = 2r\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

e a parábola \mathcal{P}_2 tem equação $x^2 = 2y$. Os respetivos focos são

$$F_1 = \left(-\frac{p}{2} + \frac{r}{2}, \frac{q}{2}\right), \quad F_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (3.8)$$

e as respetivas diretrizes L_1 e L_2 são dadas por

$$x = -\frac{p}{2} - \frac{r}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}.$$

Então, para encontrar uma raiz da equação cúbica podemos proceder do seguinte modo:

1. dobrar um sistema de eixos perpendiculares;
2. marcar os focos F_1 e F_2 dados por (3.8) e as diretrizes das parábolas \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 ;
3. pelo axioma 6, dobrar a tangente comum às duas parábolas;
4. o declive desta reta tangente é uma raiz da equação.

3.5 Resolução do problema da trissecção do ângulo

Segue abaixo a demonstração da trissecção do ângulo, partimos de uma folha quadrada de papel de dimensão arbitrária e efectuamos os seguintes passos[16]:

1. partimos de uma folha quadrada de papel $ABCD$;

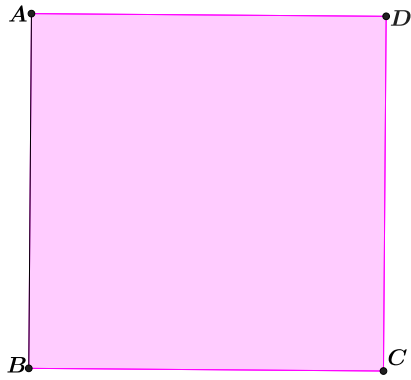


Figura 3.11: Folha quadrada do papel.

2. marcamos um ponto E na borda superior AD do quadrado, traçamos o segmento de reta BE pelo (Axioma 1) e consideremos o ângulo agudo $\angle EBC > 45^\circ$, o qual queremos trissectar;

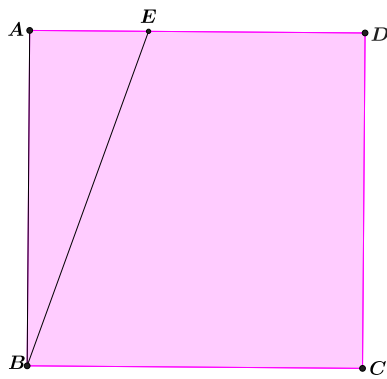


Figura 3.12: Dobragem de um ângulo agudo.

3. traçamos uma reta paralela FG a AD (Axioma 4);

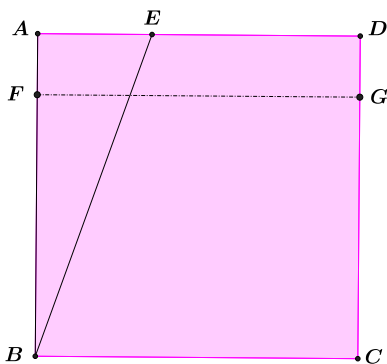


Figura 3.13: Dobragem de uma reta paralela.

Origami e Construções Geométricas

4. traçamos uma reta paralela HI a FG , onde H e I são os pontos médios dos segmentos de retas BF e CG , respetivamente (Axioma 3);

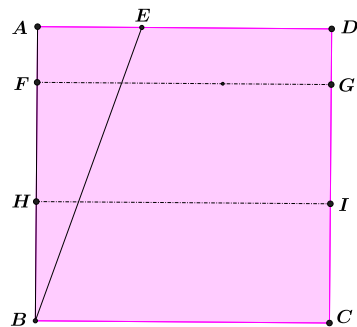


Figura 3.14: Dobragem de pontos médios dos segmentos BF e CG , .

5. realizamos uma dobragem levando o ponto F ao segmento de reta BE e o ponto B ao segmento de reta HI (Axioma 6) e marcamos os pontos B' , F' e H' que são as reflexões dos pontos B , F e H relativamente à reta de dobragem L ;
6. as retas BH' e BB' dividem o ângulo $\angle EBC$ em três partes iguais, como se irá justificar de seguida.

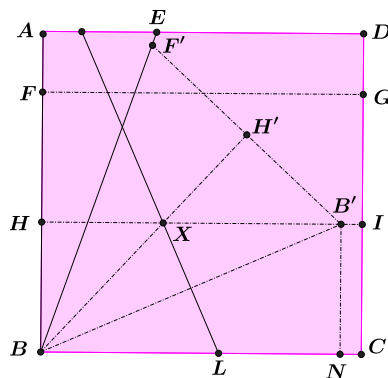


Figura 3.15: Dobragem de triângulos congruentes.

Como uma reflexão é uma isometria e, por construção, $|BH| = |HF|$, temos

$$|BH| = |B'H'| = |H'F'|.$$

O ponto X de interseção das diagonais do quadrilátero $BB'H'H$ está necessariamente sobre a reta L , que é mediatriz dos segmentos BB' e HH' . Então, pelo critério LAL, os triângulos BHX e $B'H'X$ são congruentes. Logo $\angle BH'B' = 90^\circ$.

Seja N a projeção ortogonal de B' sobre o lado BC . Pelo critério LAL, vemos que os triângulos BNB' , $BH'B'$ e $BH'F'$ são congruentes. Em particular, os três ângulos em B são iguais, como queríamos justificar.

Capítulo 4

Números construtíveis com origami

Estudamos de forma detalhada o corpo dos números construtíveis com Origami. Apresentamos uma caracterização algébrica destes números construtíveis e estuda-se a possibilidade da construção de polígonos regulares com Origami [13].

Suponhamos fixados dois pontos A e B . Designamos a distância de A a B por 1, a unidade.

Vamos identificar a folha de papel com os números complexos do seguinte modo:

1. se aplicarmos o axioma 1 aos dois pontos, obtemos o eixo real;
2. se aplicarmos o axioma 4 ao ponto A e ao eixo real, obtemos o eixo imaginário;
3. o ponto A é a origem, ou seja, o zero dos números complexos, e o ponto B é a unidade dos números complexos;
4. pelo axioma 5, podemos levar B para um ponto sobre o eixo imaginário através de uma dobragem por A – o ponto assim obtido é o imaginário puro i .

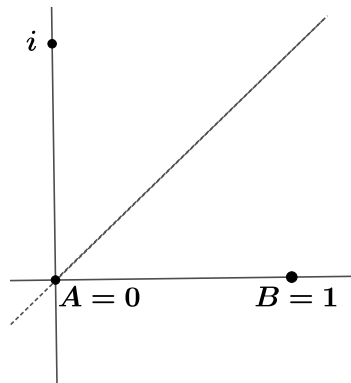


Figura 4.1: Marcação do ponto imaginário e dos eixos

4.1 Os números $a + b$ e $a - b$ são construtíveis com origami

Seja O a origem do referencial fixado e consideremos dois pontos a e b . Para encontrar a soma $a + b$ podemos proceder da seguinte forma:

1. dobramos as retas Oa e Ob ;
2. dobramos as paralelas de Oa e Ob por b e a , respetivamente;
3. a interseção destas retas é o ponto $c = a + b$.

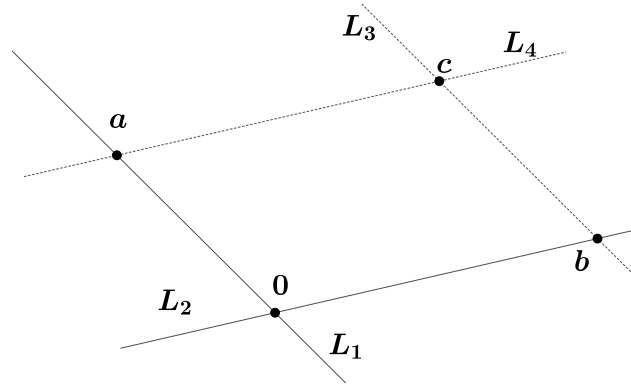


Figura 4.2: Adição de números complexos com origami

Para marcar o ponto $a - b$, começamos por dobrar a reta Ob e marcamos sobre ela o ponto $-b$ (axioma 3). Repetimos o procedimento anterior para obter $a - b$.

4.2 Multiplicação de números complexos com origami

Sejam $a + bi$ e $c + di$ dois números complexos. Temos

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Daqui, vemos que para multiplicar números complexos com origami basta sabermos como adicionar complexos e multiplicar por números reais.

Já vimos como realizar a adição com dobragens. Tomemos agora um número real r e um número qualquer a . Para encontrar ra , podemos proceder da seguinte forma:

1. no eixo dos reais, marcamos os pontos 1 e r ;
2. dobramos a reta L_1 por O e a ;
3. dobramos a reta L_2 por 1 e a ;
4. dobramos a reta L_3 paralela a L_2 por r ;
5. pelos critérios de semelhança de triângulos, o ponto b de intersecção de L_1 e L_3 é precisamente ra .

Observemos que este método não funciona diretamente se a for um número real. No entanto, podemos marcar no eixo imaginário os pontos i e ir (axioma 3), e depois aplicar o mesmo procedimento anterior para obter ra .

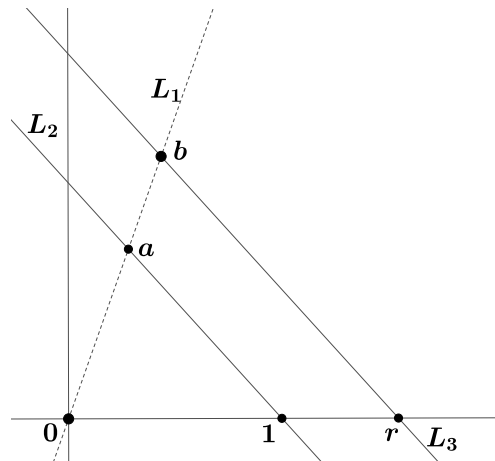


Figura 4.3: Multiplicação por um número real com origami

4.3 Divisão de números complexos com origami

Sabemos que o inverso de um número complexo $z = a + bi$ é dado por

$$z^{-1} = \frac{(a - bi)}{(a^2 + b^2)}.$$

Daqui vemos que para construir o inverso temos simplesmente de saber como dividir por números reais, uma vez que já sabemos adicionar, subtrair e multiplicar. A justificação do processo que usamos para a divisão assenta na semelhança de triângulos.

Assim, dado um número complexo a e um número real r , para encontrar $b = \frac{a}{r}$ basta ter em conta a seguinte figura:

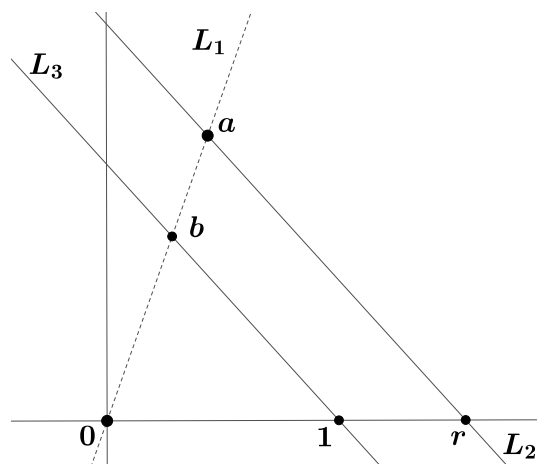


Figura 4.4: Divisão por um número real com origami

É notório que este procedimento não se aplica diretamente quando a é um número real, mas, mais uma vez, podemos marcar no eixo imaginário os pontos i e ir (axioma 3), e depois aplicar o mesmo procedimento anterior para obter $\frac{a}{r}$.

4.4 O número \sqrt{a} é construtível com origami.

Seja $a = re^{i\theta}$ um número complexo escrito na sua forma polar. Temos então

$$\sqrt{a} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Assim, para construir \sqrt{a} basta saber construir a bissetriz de um ângulo (axioma 3) e a raiz de um número real. O procedimento seguinte indica precisamente como construir a raiz de um número real r dado.

Comecemos por observar que

$$(\sqrt{r})^2 + \left(\frac{r-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{r+1}{2}\right)^2.$$

Assim, o ponto de interseção do semieixo positivo real com a circunferência de centro em $(0, \frac{r-1}{2})$ e raio $\frac{r+1}{2}$ é dado por $c = (\sqrt{r}, 0)$. Este ponto pode ser obtido por dobragem, aplicando para tal o axioma 5, fazemos incidir o ponto $P_1 = -i$ sobre o eixo L dos números reais por uma dobragem que passe em $P_2 = i\frac{r-1}{2}$, de acordo com a figura seguinte:

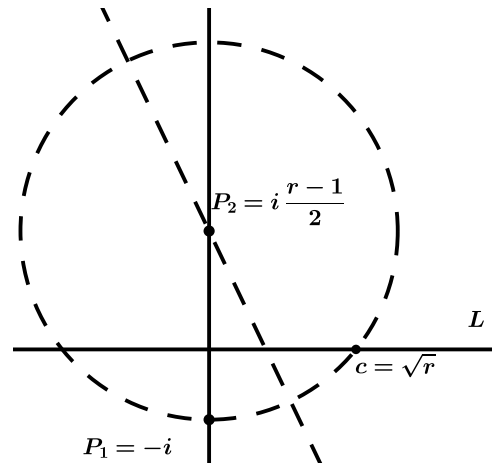


Figura 4.5: A extração da raízes quadradas de um número complexo com origami

4.5 Caracterização da teoria de corpo com origami

Pelas secções anteriores, os números construtíveis com origami formam um subcorpo \mathbb{O} de \mathbb{C} , de onde podemos concluir que

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{O} \subseteq \mathbb{C}.$$

Seja K_0 um subcorpo de \mathbb{O} e K_1 uma extensão de K_0 .

Lema 14. *Se $[K_1 : K_0] = 2$ ou $[K_1 : K_0] = 3$ então $K_1 \subset \mathbb{O}$.*

Demonstração. Se $[K_1 : K_0] = 2$, então $K_1 = K_0(\alpha)$, onde α é a raiz de um polinómio do segundo grau em $K_0[x]$. Logo α é construtível por radicais e, por conseguinte, é construtível com origami. Sendo assim $K_1 = K_0(\alpha) \subset \mathbb{O}$.

Se $[K_1 : K_0] = 3$, então $K_1 = K_0(\alpha, \beta)$, onde α, β são raízes de um polinómio de terceiro grau em $K_0[x]$. Logo α, β são construtíveis por radicais e, por conseguinte, são construtíveis com

Origami e Construções Geométricas

origami. Logo

$$K_1 = K_0(\alpha, \beta) \subset \mathbb{Q}.$$

□

Teorema 15. *Um número complexo α é construtível com origami se, e só se, existir uma sequência de corpos*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n,$$

com $[K_{i+1} : K_i] = 2$ ou $[K_{i+1} : K_i] = 3$ para qualquer i , tal que $\alpha \in K_n$.

Demonstração. Qualquer construção com origami corresponde a uma sequência finita de passos, em que cada um deles corresponde à resolução de uma equação de grau 1, 2 ou 3. O teorema resulta então desta observação e do lema anterior. □

Exemplo 2. *O polinómio $x^5 - 10x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ não é resolúvel por radicais ver. Logo as suas raízes não podem ser construtíveis por origami. [4]*

Teorema 16. *Uma raiz primitiva n -ésima da unidade é construtível com origami se, e só se,*

$$n = 2^a 3^b p_1 \dots p_m,$$

com $p_i = 2^{a_i} 3^{b_i} + 1$. [13]

Demonstração. Para cada $q \in \mathbb{N}$, pomos

$$\zeta_q = e^{\frac{2\pi i}{q}}.$$

Se ζ_q é construtível, então $\zeta_{2^a 3^b q}$ também é construtível porque é obtido por sucessivas raízes quadradas e cúbicas de ζ_q . Temos então de provar que $\zeta_{p_1 \dots p_m}$ é construtível, com $p_i = 2^{a_i} 3^{b_i} + 1$. Consideremos a extensão.

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{p_1 \dots p_m}).$$

O grupo de Galois $\text{Gal}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{p_1 \dots p_m})$ desta extensão ciclotómica é sabido ser

$$\mathbb{Z}_{p_1 \dots p_m}^* \cong \mathbb{Z}_{\phi(p_1 \dots p_m)},$$

onde ϕ é a função de Euler

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Logo

$$\begin{aligned} \phi(p_1 \dots p_m) &= p_1 \dots p_m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \\ &= (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_m - 1) \\ &= 2^{\sum a_i} 3^{\sum b_i}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{Gal}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{p_1 \dots p_m}) = \mathbb{Z}_{2^{\sum a_i} 3^{\sum b_i}}.$$

Se $a_i \neq 0$ para algum i , o grupo \mathbb{Z}_2 é um subgrupo de $\mathbb{Z}_{2^{\sum a_i} 3^{\sum b_i}}$. Logo pela correspondência de Galois, existe um corpo intermediário

$$\mathbb{Q} \subseteq K_1 \subseteq K = \mathbb{Q}(\zeta_{p_1 \dots p_m})$$

tal que

$$[K : K_1] = |\mathbb{Z}_2| = 2$$

e

$$\mathbb{Z}_2 = \text{Gal}_{K_1} K.$$

Temos

$$\begin{aligned} \text{Gal}_{\mathbb{Q}} K_1 &= \frac{\text{Gal}_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}}{\text{Gal}_{K_1} K} \\ &= \frac{\mathbb{Z}_{2^{\sum a_i} 3^{\sum b_i}}}{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Z}_{2^{\sum a_i - 1} 3^{\sum b_i}}. \end{aligned}$$

Se $a_i \neq 0$ para todo i , mas $b_i \neq 0$ para algum i , então, pelo mesmo argumento, vai existir um corpo intermediário

$$\mathbb{Q} \subseteq K_1 \subseteq K = \mathbb{Q}(\zeta_{p_1 \dots p_m})$$

tal que $[K : K_1] = 3$ e

$$\text{Gal}_{\mathbb{Q}} K_1 = \mathbb{Z}_{3^{\sum b_i - 1}}.$$

Podemos então continuar com este procedimento de forma a obtermos uma torre de extensões

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_l \supset \mathbb{Q}$$

tal que cada extensão $K_i \supset K_{i+1}$ tem grau 2 ou 3. Logo $\zeta_{p_1 \dots p_m}$ é construtível com origami.

Se n não é da forma:

$$2^a 3^b p_1 \dots p_m,$$

com $p_i = 2^{a_i} 3^{b_i} + 1$, então, qualquer torre

$$\mathbb{Q}(\zeta_{p_1 \dots p_m}) \supseteq K_1 \supseteq \dots \supseteq \mathbb{Q},$$

tem uma das extensões de grau maior que 3, logo $\zeta_{p_1 \dots p_m}$ não é construtível com origami. \square

Origami e Construções Geométricas

Vejamos alguns exemplos de n -ésimas raízes primitivas construtíveis por origami:

n	a	b	$p_1 \cdots p_m$
2	1	0	1
3	0	1	1
4	2	0	1
5	0	0	$5 = 2^2 3^0 + 1$
6	1	1	1
7	0	0	$7 = 2^1 3^1 + 1$
8	3	0	1
9	0	2	1
10	1	0	$5 = 2^2 3^0 + 1$
12	2	1	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
420	2	1	$35 = (2^1 3^1 + 1)(2^2 3^0 + 1)$

O menor n para o qual a n -ésima raiz primitiva não é construtível por origami é $n = 11$.

Conclusão

Para além do Origami assumir um papel inesperado na resolução de problemas clássicos da geometria grega, onde estes problemas correspondem a resolver equações cúbicas relacionadas com a tangente comum a duas parábolas, ele envolve conteúdos matemáticos muito profundos, desde a sua axiomática, à caracterização do corpo dos números construtíveis.

Permita-nos afirmar que o Origami pode também constituir um importante auxílio metodológico no processo de ensino-aprendizagem da geometria. De facto, ele oferece um contexto que permite elaborar diferentes atividades para a sala de aula, a diversos níveis de ensino, que permitam trabalhar conhecimentos geométricos adquiridos. Nesta dissertação, não nos focámos nesta vertente, mas a matéria teórica desenvolvida é uma base importante para desenvolvimentos futuros.

Apêndice I: Estudo da Parábola

Uma secção cónica é uma curva de intersecção de um plano com um cone reto de duas folhas. Existem três tipos de curvas que são obtidas desta maneira: a parábola, a elipse (incluindo a circunferência como um caso particular) e a hipérbole. O tipo de curva resultante depende da inclinação do eixo do cone em relação ao plano secante. Nesta secção iremos definir uma parábola, deduzir a sua equação e caracterizar as suas retas tangentes.

Definição 1. *Uma parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes a um ponto fixo F , o foco, e uma reta l fixa, a diretriz.*

Admitiremos que F não pertence a l , pois isto resultaria em uma reta. Se P é um ponto do plano e P' é o ponto de l determinado por uma reta por P perpendicular a l , então, por definição, P pertence à parábola se e somente se as distâncias $|PF|$ e $|PP'|$ são iguais. O eixo da parábola é a reta por F perpendicular à diretriz. O vértice da parábola é o ponto V do eixo equidistante de F e l .

Deduzimos agora a equação da parábola \mathcal{P} a partir da definição. Fixemos um sistema de eixos cartesianos. Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico da parábola \mathcal{P} . O foco é o ponto $F = (F_1, F_2)$ e a diretriz l é a reta de equação

$$ax + by = c.$$

Sabemos que a distância de P a l é dada por

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Uma vez que $|PF| = \text{dist}(P, l)$, temos

$$\sqrt{(x - F_1)^2 + (y - F_2)^2} = \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, obtemos

$$(x - F_1)^2 + (y - F_2)^2 = \frac{(ax + by - c)^2}{a^2 + b^2}.$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $a^2 + b^2 = 1$. Logo

$$x^2 - 2xF_1 + F_1^2 + y^2 - 2yF_2 + F_2^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + 2axy - 2bxc.$$

Reordenando

$$(1 - a^2)x^2 + (1 - b^2)y^2 - 2abxy + (2ac - 2F_1)x + (2bc - 2F_2)y + F_1^2 + F_2^2 - c^2 = 0$$

Para o caso específico de $(a, b) = (0, 1)$, $F = (0, p)$ e $y = -p$, substituindo os valores na equação, obtemos

$$y = \frac{x^2}{4p}. \tag{4.1}$$

Teorema 17. *Seja \mathcal{P} uma parábola com foco F e diretriz l . Seja X um ponto de \mathcal{P} e X' a projeção ortogonal de X na reta diretriz l . Então, a tangente a \mathcal{P} no ponto X forma com XF e XX' ângulos iguais.*

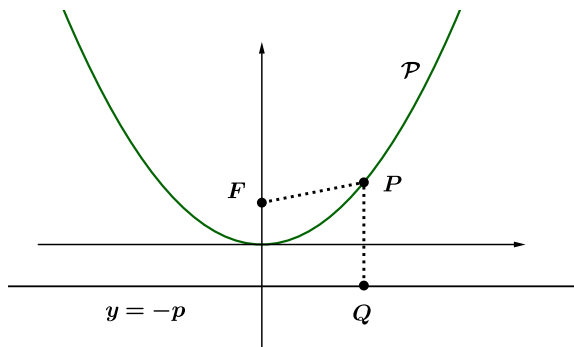


Figura 4.6: Parábola de foco F e a diretriz $c = -p$

Demonstração. Por definição da parábola, $|XF| = |XX'|$, logo o triângulo $\Delta FXX'$ é isósceles. Seja M o ponto médio de FX' . Pela propriedade dos triângulos isósceles, MX é a mediatriz de seguimento FX' e os ângulos $\angle FXM$ e $\angle MXX'$ são congruentes. Vamos de seguida demonstrar que MX é a reta tangente à parábola por X .

A reta MX divide o plano em dois semiplanos: o primeiro cujos pontos são aqueles que se encontram mais próximos de F do que de X' e o segundo semiplano cujos pontos se encontram mais próximos de X' do que de F . Consideremos um ponto Y , distinto de X , sobre a parábola. Seja Y' a sua projeção ortogonal sobre l . Claramente $|YY'| \leq |YX'|$. Por outro lado, como Y está sobre a parábola, $|FY| = |YY'|$. Logo $|FY| \leq |YX'|$. Isto é, Y está mais próximo de F do que de X' . Como Y é um ponto arbitrário distinto de X sobre a parábola, concluimos que, todos os pontos da parábola com exceção de X estão no semiplano limitado pela reta MX cujos pontos estão mais próximos de F do que de X' . Logo MX é a reta tangente à parábola por X .

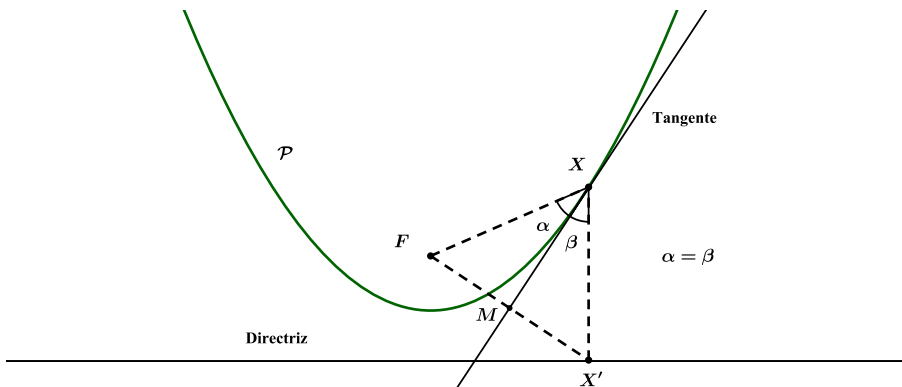


Figura 4.7: Tangente da parábola.

□

Apêndice II: Estruturas algébricas

Neste apêndice recordamos de forma sucinta algumas definições e proposições sobre estruturas algébricas (em particular, grupos, anéis, corpos e espaços vectorial) que direta ou indiretamente foram utilizadas ao longo da dissertação.

4.6 Grupos

Definição 2. *Seja G um conjunto e \cdot uma operação definida sobre elementos deste conjunto, então (G, \cdot) é um grupo se cumpre com as seguintes propriedades:*

1. (fechamento) se $a, b \in G$ então $a \cdot b \in G$, para todo par $a, b \in G$;
2. (associatividade) temos $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todo $a, b, c \in G$;
3. (elemento neutro) existe um elemento $1 \in G$, tal que $1 \cdot a = a$, para todo $a \in G$;
4. (elemento inverso) para todo $a \in G$, existe um elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Proposição 2. *Em todo grupo (G, \cdot) , o elemento neutro é único e todo elemento possui um único elemento inverso.*

Definição 3. *(G, \cdot) é um grupo abeliano se $a \cdot b = b \cdot a$, para todo $a, b \in G$.*

Definição 4. *Um subgrupo de (G, \cdot) é um subconjunto não vazio D de G que satisfaz as condições de grupo em relação à operação que resulta da restrição a D da operação em G . Denota-se $D \leq G$.*

Proposição 3. *Seja G um grupo e D um subconjunto não vazio de G . (D, \cdot) é um subgrupo de (G, \cdot) se, para todo par $a, b \in D$, $a \cdot b^{-1} \in D$.*

O subgrupo trivial é o subgrupo formado apenas pela identidade de um grupo (G, \cdot) . Vemos que todas as propriedades são satisfeitas: é fechado pois $1 \cdot 1 = 1$; é associativo pois $1 \cdot (1 \cdot 1) = (1 \cdot 1) \cdot 1$; contém obviamente o elemento neutro e vemos 1 é o seu próprio inverso.

Notamos que, quando (G, \cdot) é um grupo, temos obviamente $G \leq G$.

Definição 5. *Definimos ordem de um grupo (G, \cdot) como sendo o cardinal $|G|$, isto é, o número de elementos do conjunto G .*

Se $|G|$ é um número natural, então (G, \cdot) é um grupo finito, mas caso contrário, será um grupo infinito.

Definição 6. *Seja $g \in G$, onde (G, \cdot) é um grupo. Dizemos que n é a ordem de g se n for o menor número natural para o qual $g^n = 1$. Neste caso, denotamos $n = o(g)$.*

Proposição 4. *Seja (G, \cdot) um grupo, S um subconjunto de G e $\langle S \rangle$ a interseção de todos os subgrupos de G que contêm S . Então, $\langle S \rangle$ é um subgrupo que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\langle S \rangle$ contém S ;
2. se H é um outro subgrupo de G que contém S , então $\langle S \rangle \leq H$.

Diz-se neste caso que $\langle S \rangle$ é o subgrupo gerado por S .

Se S é constituído por um único elemento a , temos que $\langle S \rangle$ coincide com o subgrupo

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Diz-se neste caso que $\langle S \rangle$ é um *grupo cíclico*.

Teorema 18 (Teorema de Lagrange). *Se H é um subgrupo de um grupo finito G , a ordem de H é um divisor da ordem de G .*

Definição 7. *Dado um subgrupo H de (G, \cdot) , definimos a relação \sim em G da seguinte forma: $a \sim b$ se $ab^{-1} \in H$.*

Proposição 5. *A relação \sim é uma relação de equivalência. A classe de equivalência $[a]$ que contém o elemento a é dada por*

$$Ha = \{ha : h \in H\}.$$

As classes de equivalência para esta relação são designadas por *classes de equivalência à direita*. O conjunto de todas as classes de equivalência à direita é denotado por G/H .

4.7 Anéis

Definição 8. *Seja R um conjunto munido de duas operações $+$ e $*$, designadas por adição e multiplicação, respetivamente, para as quais:*

1. $(R, +)$ é um grupo abeliano, onde o elemento identidade é denotado por 0 e o inverso de a é denotado por $-a$;
2. a multiplicação é associativa;
3. a multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, para quaisquer $r, x, y \in R$, temos

$$r * (x + y) = r * x + r * y, \quad (x + y) * r = x * r + y * r.$$

Então, $(R, +, *)$ diz-se um anel.

Definição 9. *Um anel $(R, +, *)$ é um anel comutativo se $(R, *)$ possuir a propriedade da comutatividade, ou seja, $x * y = y * x$, para todo $x, y \in R$.*

Definição 10. *Um elemento $a \neq 0$ em R é divisor de zero se existir algum $b \neq 0$ em R tal que $ab = 0$.*

Definição 11. *R é um domínio de integridade se for um anel comutativo que não possua divisores de zero.*

Origami e Construções Geométricas

Exemplo 3. Dado $p \in \mathbb{N}$, recorde-se que dois inteiros a e b dizem-se congruentes módulo p se $p|(a - b)$, isto é, se $a - b$ for divisível por p . A relação de congruência módulo p é uma relação de equivalência. O conjunto das respectivas classes de equivalência é denotado por \mathbb{Z}_p . Em \mathbb{Z}_p podemos definir as operações adição e multiplicação comutativas do seguinte modo:

1. se $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$, temos $[a] + [b] = [a + b]$;
2. se $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$, temos $[a] * [b] = [ab]$.

Em $(\mathbb{Z}_6, +, *)$, por exemplo, temos divisores de zero, já que $[2] * [3] = [6] = 0$, mas em $(\mathbb{Z}_p, +, *)$, com p um número primo, não existem elementos $[a]$ e $[b]$ diferentes de 0 tais que $[a] * [b] = 0$, logo \mathbb{Z}_p é um domínio de integridade.

4.8 Corpos

Definição 12. Dizemos que o domínio de integridade $(F, +, *)$ é um corpo, se $(F, +)$ e $(F^*, *)$ forem grupos abelianos, onde $F^* = F \setminus \{0\}$.

Exemplo 4. $(\mathbb{Q}, +, *)$, $(\mathbb{R}, +, *)$ e $(\mathbb{C}, +, *)$, onde as operações $+$ e $*$ são as operações usuais de soma e produto, são exemplos de corpos.

Exemplo 5. Se p é primo, então \mathbb{Z}_p é um corpo.

4.9 Espaço vetorial

Definição 13. Seja $(F, +, *)$ um corpo. Consideremos um conjunto V munido das seguintes operações:

1. adição: para $v, w \in V$, $v + w \in V$;
2. multiplicação por um escalar: para $\alpha \in F$ e $v \in V$, $\alpha v \in V$.

Suponha-se ainda que estas operações satisfazem as seguintes propriedades:

1. $(V, +)$ é um grupo abeliano;
2. a multiplicação por um escalar é associativa, ou seja, para todo par $a, b \in F$ e para todo $v \in V$, então $(ab)v = a(bv)$;
3. o elemento $1 \in F$ é a identidade, tal que $1v = v$, para todo $v \in V$;
4. distributividade, ou seja,

$$(a + b)v = av + bv, \quad a(v + w) = av + aw,$$

para todo $a, b \in F$ e para todo $v, w \in V$.

Neste caso, dizemos que V é um espaço vetorial sobre F . Os elementos de V designam-se por vetores.

Definição 14. Base de um F espaço vetorial: Seja V um espaço vetorial sobre F e

$$\mathbb{B}_F^V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

um conjunto de vetores linearmente independente, isto é,

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

se e só se os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ forem todos nulos. Diz-se que \mathbb{B}_F^V é uma base para o espaço vetorial V se os elementos de \mathbb{B}_F^V geram V , ou seja, todo elemento v de V pode ser escrito na forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n,$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$.

Nestas condições diremos também que a dimensão de V é n , onde n é o número de vetores que temos na base \mathbb{B}_F^V , e escrevemos $\dim V = n$.

4.10 Extensão de Corpos

Definição 15. Diz-se que o corpo $(K, +, *)$ é uma extensão do corpo $(F, +, *)$, escrevemos K/F , se $F \subset K$. Nestas condições, $(F, +, *)$ é um subcorpo de $(K, +, *)$.

Lema 19. Se K/F é um extensão de corpos, então K é um espaço vetorial sobre F .

Definição 16. Se K/F é uma extensão de corpos, o grau da extensão é a dimensão de K , visto como espaço vetorial sobre F , e escrevemos $[K : F]$. Se o grau for finito, dizemos que a extensão é finita, caso contrário temos uma extensão infinita.

Exemplo 6. 1. $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, logo \mathbb{C}/\mathbb{R} é uma extensão finita.

2. \mathbb{R}/\mathbb{Q} é uma extensão infinita.

4.11 O corpo de decomposição

Definição 17. Seja F/K uma extensão de corpos e $P \in K[x]$ um polinómio com coeficientes em K . Diz-se que P é decomposto em F se é possível factorizar P como um produto de polinómios de primeiro grau com coeficientes em F .

Obviamente, se $P \in K[x]$ é decomposto em F , então $P = c(x - u_1) \dots (x - u_n)$, com $c \in K$ e u_1, \dots, u_n são as raízes de P em F .

Definição 18. Seja F/K uma extensão de corpos e $P \in K[x]$ um polinómio que se decompõe sobre F . O menor subcorpo de F que contém K e sobre o qual P se decompõe é chamado de corpo de decomposição de P em F sobre K .

Se $P \in K[x]$ é decomposto em F e u_1, \dots, u_n são as suas raízes, então o corpo de decomposição de P é denotado por $K(u_1, \dots, u_n)$.

Exemplo 7. Consideremos o polinómio $P = x^2 - 2$. O corpo de decomposição de P em \mathbb{C} é

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Teorema 20. (Existência de corpos de decomposição). Seja K um corpo e $P \in K[x]$ não constante. Então existe um corpo de decomposição de P .

Origami e Construções Geométricas

Definição 19. Diz-se que F/K é uma extensão normal se F for o corpo de decomposição de um polinómio em $K[x]$.

Exemplo 8. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ é normal, já que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ é o corpo de decomposição de

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

Definição 20. Seja K um corpo e $P \in K[x]$ um polinómio irreduzível. Diz-se que P é separável se todas as raízes de P no seu corpo de decomposição forem simples.

Teorema 21. Suponha que E é um corpo e que K é um subcorpo de E . Seja $P \in K[x]$ com derivada $P' \neq 0$. Então temos o seguinte:

1. $a \in E$ é uma raiz múltipla de P se e somente se $P(a) = P'(a) = 0$;
2. se $m.d.c(P, P') = 1$ (P e P' são primos entre si), então P não tem raízes múltiplas em E ;

4.12 Grupo de Galois

Consideramos um corpo K e uma extensão P de K .

Definição 21. Chama-se um automorfismo K de P a um automorfismo ϕ de P tal que

$$\phi(z) = z, \forall z \in K.$$

Teorema 22. Denotamos por $\text{Gal}_P K$ o conjunto de todos os automorfismos K de P . Temos então:

1. $\text{Gal}_P K$ é um grupo, relativamente à operação da composição de aplicações;
2. se K' é um subcorpo de P tal que $K \subseteq K_1 \subseteq P$ (corpo intermediário da extensão $K \subseteq P$), então

$$\text{Gal}_P K_1 \leq \text{Gal}_P K.$$

Definição 22. O grupo $\text{Gal}_P K$ é chamado de Grupo de Galois da extensão $P \subseteq K$. Assim, como uma extensão (e, em particular, um corpo intermediário) corresponde a um grupo, também a um subgrupo do grupo de Galois se pode fazer corresponder a um corpo intermediário.

Assim, como uma extensão (e, em particular, um corpo intermediário) corresponde a um grupo, também a um subgrupo do grupo de Galois se pode fazer corresponder um corpo intermediário.

Teorema 23. Seja $H \subseteq \text{Gal}_P K$, o conjunto

$$C(H) = \{x \in P : \phi(x) = x, \forall \phi \in H\}$$

é um corpo intermediário da extensão $K \subseteq P$, que toma o nome de corpo fixo de H .

Se $H, H' \leq \text{Gal}_P K$ são tais que $H \subseteq H'$, então $C(H') \subseteq C(H)$.

A esta correspondência entre subgrupos do grupo de Galois de uma extensão e corpos intermediários designa-se por *correspondência de Galois*.

4.13 Extensões ciclotômicas

Definição 23. Dizemos que $\zeta \in K$ é uma n -ésima raiz da unidade se $\zeta^n = 1$. A raiz é primitiva se $\zeta^m \neq 1$, para todo m tal que $m < n$.

Se K é o corpo de decomposição do polinômio $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, então as raízes deste polinômio são precisamente as n -ésimas raízes da unidade, isto é, os elementos da forma

$$\zeta_q = e^{\frac{2\pi q}{n}},$$

com $1 \leq q < n$.

Recorde-se que se G é cíclico de ordem n , então $G \cong \mathbb{Z}_n$. Neste caso, G possui exatamente $\phi(n)$ geradores, onde ϕ é a função de Euler.

Teorema 24. Seja ω uma raiz n -ésima primitiva da unidade. Então $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\omega) \cong \mathbb{Z}_n^*$

Definição 24. Se ζ é raiz n -ésima da unidade de F , então a extensão $F \subset F(\zeta)$ é chamada de extensão ciclotômica.

Bibliografia

- [1] R. C. Alperin, A mathematical theory of origami constructions and numbers, New York Journal of Mathematics, 6:119-133, 2000.
- [2] A. Lafetá E. Silva, Teoria dos Números Transcendentes:Do Teorema de Liouville à Conjectura de Schanuel, 1ª edição 2016 Rio de Janeiro, <http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/TEORIA/>
- [3] Associação Brasileira de Difusão do Origami, A História do Origami, www.abdo.kit.net/abdo/historia.html.
- [4] Belechón José, Teoria de Galois, Trabalho de dissertação (2008). 41
- [5] F. Leandro, Polinômios, corpos de decomposição e uma introdução à teoria de Galois, Belo Horizonte-MG (2016). 1
- [6] O. Brison, Teoria de Galois, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa (1997). 1
- [7] J. R. Durbin, Modern Algebra (an introduction), John Wiley & Sons. 1985. 1, 14
- [8] E. W. Swokowski, Cálculo com Geometria Anática, Segunda edição, Editora Afiliada. 1994.
- [9] K. Hatori, Origami construction, <http://www.jade.dti.ne.jp/hatori/library/conste.html> . 1
- [10] H. Huzita, Axiomatic Development of Origami Geometry, Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, Humiaki Huzita, ed., 1989, 143–158. 1
- [11] R. J. Lang, Origami Approximate Geometric Constructions, in Tribute to a Mathematician, Barry Cipra, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Tom Rodgers, eds., A K Peters, 2004. 19
- [12] Jorge C. Lucero, O problema "deliano, Revista do Professor de Matemática 62 (2007), 25–28. 25, 30
- [13] J. King, Origami-Constructible Numbers, <http://www.cs.mcgill.ca/jking/papers/origami.pdf> (2004). 1, 37, 41
- [14] R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. Oxford University Press; 2 edition (July 18, 1996). Editor: I. Stewart.
- [15] R. Geretschlager, Euclidean Constructions and the Geometry of Origami, Mathematics Magazine, Vol. 68, No. 5 (1995), 257–371. 1, 25, 30, 31
- [16] S. Suzuki R. Marques, A geometria do origami, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC (2006). 33
- [17] I. Stewart, Galois Theory, Chapman Hall/CRC Mathematics Series. 2003. 1