UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

Matrizes e Grafos

Versão definitiva após defesa pública

Elias Tchivembe

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática Para Professores
(2.º Ciclo de Estudos)

Orientadora: Professora Doutora Ana Catarina Santos Carapito
Coorientadora: Professora Doutora Ilda Inácio

Covilhã, julho de 2018

Dedicatória

À minha esposa Cecília e aos nossos filhos, Regina, Etiandro, Edmárcio, Edmilson e Sachiela, cujo apoio, encorajamento e orações a meu favor, tornaram este sonho uma realidade.

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar pelo dom da vida e por permitir que se cumpra mais uma etapa na minha carreira académica.

Aos meus pais que não pouparam esforços em apostar na minha formação e mesmo nas dificuldades sempre acreditaram que poderia ir mais longe.

Agradeço de igual modo aos meus irmãos, aos meus afilhados Pedro Andito e Elisa Andito, aos meus amigos, colegas e a família cristã por todo suporte material, moral e espiritual.

Faço um agradecimento especial à minha esposa Cecília Kanhãnga que me ajudou nesta empreitada dando incentivos à distância todos os dias e sempre compreendeu a minha ausência no convívio familiar. Todo mérito para ela, pois soube liderar o nosso lar na minha ausência.

Manifesto a minha gratidão às minhas orientadoras, Professora Doutora Ana Catarina Santos Carapito e Ilda Carla Inácio pelo rigor científico e por me ajudarem a melhorar as minhas debilidades.

Finalmente agradeço ao governo angolano pela oportunidade da formação, a qual me dará com certeza a possibilidade de poder contribuir para a melhoria da qualidade do ensino em Angola.

Resumo

No seguimento do trabalho desenvolvido nas Unidades Curriculares dos Projetos de Ensino do 2.º Ciclo em Matemática para Professores, nas áreas de Teoria de Matrizes e Grafos, aprofundamos os conceitos e resultados envolvidos e, ao mesmo tempo, estabelecemos uma ligação ao ensino apresentando uma abordagem adequada à leccionação daqueles ao ensino secundário.
A importância da Teoria de Matrizes e Grafos é amplamente reconhecida em diversas áreas, nomeadamente na Engenharia, Física e Ciências da Computação. Como tal, apresentamos neste trabalho algumas aplicações com o intuito de realçar o alcance da Teoria de Matrizes e Grafos na vida quotidiana e, com isto, contribuir para o enriquecimento do ensino destes conceitos no ensino ao optar por apresentá-las em contexto de sala de aula.
Não menos importante que a aplicabilidade da Teoria de Matrizes e Grafos, é o respetivo enquadramento histórico que contemplamos neste trabalho.

Palavras-chave

Matrizes, Transformações Lineares, Grafos, Matriz de Adjacência, Matriz de Incidência.

Abstract

Following the work developed in the Curricular Units of Teaching Projects of the 2nd Cycle in Mathematics for Teachers, in the areas of Theory of Matrices and Graphs, we deepen the concepts and results involved and at the same time, we have established a connection to teaching by presenting an appropriate approach to the teaching of those to secondary education.

The importance of Theory of Matrices and Graphs is widely recognized in several areas, namely in Engineering, Physics and Computer Science. As such, we present in this work some applications in order to highlight the reach of Matrix Theory and Graphs in daily life and with this, to contribute to the enrichment of the teaching of these concepts in the teaching when choosing to present them in context of classroom.

No less important than the applicability of Theory of Matrices and Graphs, is the respective historical framework that we contemplate in this work.

Keywords

Matrices, Linear Transformations, Graphs, Adjacency Matrix , Incidence Matrix.

Conteúdos

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Nesta secção aprestaremos em síntese a história das matrizes e grafos. Para tal usamos as referências [7], [8] e [12].

1.1 Breve historial das matrizes

A história da matemática retrata que o estudo das matrizes vem de tempos muito antigos da humanidade. Elas estão presentes em textos chineses, por volta do século II a.c, aplicadas em problemas de resolução de equações lineares. O livro chinês "Nove Capítulos da Arte matemática" em seu capítulo VII, traz 20 problemas com exceção de apenas um deles, que apresentam o método das matrizes para resolver equações lineares através da regra chamada "dupla falsa posição". Vejamos um exemplo:*"A idade da Joana, somada de outro tanto com ela, somada com a sua metade, com a sua terça parte e com a sua quarta parte, dá o resultado 148. Qual a idade da Joana?"* Para resolver este problema, escolhe-se o número "falso" e supõe-se que 12 é a idade da Joana. Então facilmente se conclui que 37 seria a idade da Joana (resultado de 12+12+6+4+3). Esquematizando o mesmo problema através de um quadro ou matriz:

	Número(idade)	Resultado
Falso	12	37
Verdadeiro	x	148

Tabela 1.1: Esquematização do problema em tabela

Concluímos que recorrendo à proporção

$$\frac{12}{x} = \frac{37}{148}$$

a Joana tem 48 anos de idade.

Outro tipo de problema abordado no livro chinês "Nove capítulos da arte matemática" no capítulo VIII tem que ver com a resolução de sistemas de equações com 2 e 3 incógnitas por meio de tabelas e processos que lembram as resoluções matriciais, tal como se pode constatar no exemplo que apresentamos:*Cinco contentores grandes e um contentor pequeno têm, no conjunto, uma capacidade de 3hu, enquanto que um contentor grande e cinco contentores pequenos têm a capacidade de 2hu. Determine a capacidade de cada um dos contentores. Considere 1hu=10tou*[1].

A resolução passa por alguns passos, cabendo ao primeiro a organização da informação: numa tabela com três linhas e duas colunas, do tipo daquelas que hoje identificamos como uma matriz, a primeira linha era reservada para o número de contentores grandes, a segunda linha para o número de contentores pequenos e a terceira para a capacidade conjunta.

[1] 1tou=10 litros

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Através de operações elementares (combinações lineares) sobre colunas, anulavam alguns elementos e liam as soluções; assim, da matriz *infra* concluíam que a capacidade do contentor pequeno era $\frac{7}{24}hu$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 24 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

O método de resolução de sistemas de equações lineares apresentado constitui um dos maiores empreendimentos algébricos da obra *Nove Capítulos* e é considerado uma invenção chinesa.

Nas obras Matemáticas chinesas, percebe-se, ainda, o quanto eles gostavam de diagramas de formato quadrado: os quadrados mágicos.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Matematicamente um "quadrado mágico elementar" representa uma matriz quadrada(mesmo número de linhas e colunas) de ordem n (n linhas e n colunas), cujos elementos (números naturais) variam sucessivamente de 1 até $n, 2$ que são arrumados de modo que a soma de cada linha, cada uma das suas diagonais principais ou de cada coluna seja sempre uma constante. O quadrado mágico foi supostamente trazido para os homens por uma tartaruga do Rio Lo nos dias do lendário Imperador Yii, considerado um engenheiro hidráulico. A preocupação com tais diagramas levou o autor dos *Nove capítulos* a resolver o sistema de equações lineares simultâneas

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

É portanto um facto que a aplicação das matrizes possui uma forte componente histórica na resolução de equações lineares.

Ao longo dos tempos, surgiram muitos matemáticos que desenvolveram métodos de resolução de equações lineares baseadas em tabelas numéricas que deram origem ao que hoje chamamos matrizes, que além de serem aplicadas ao estudo de sistemas lineares, possibilitam o desenvolvimento de novos ramos da matemática.

Atualmente as matrizes são aplicadas em inúmeras áreas tais como na Economia, na Criptografia, na Pesquisa Operacional para resolução dos problemas de alocação de tarefas, na engenharia e muitas outras áreas.

1.2 Breve historial dos Grafos

A teoria dos grafos é relativamente recente, tendo origem no século XVIII com o conhecido **problema das pontes de Königsberg**, talvez o mais conhecido exemplo na teoria de grafos. Este problema foi resolvido pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783) em 1736. Parte da cidade de Königsberg (a então capital de Prussia e hoje Kaliningrad) , localizava-se em duas ilhas do rio Pregel as quais estavam ligadas às margens e uma à outra através de sete pontes, conforme ilustra a figura 1.1 [6] página 22:

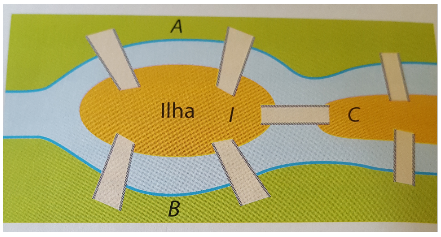


Figura 1.1: Problema das pontes de Königsberg

Pôs-se então a questão a saber, se de algum modo, seria possível passear através da cidade atravessando todas as pontes exatamente uma vez e regressar ao ponto de partida. Ninguém conseguiu encontrar um caminho que satisfizesse o problema, nem tão pouco justificar a sua impossibilidade, até ao ano de 1736. Foi neste ano que o matemático Leonhard Euler solucionou o problema e apresentou uma justificação da não possibilidade de existência de um caminho nas condições impostas.

Para tal Euler recorreu à construção do grafo associado ao mapa da cidade, considerando as áreas da terra assinaladas por A, B, C e $ILHA$ como vértices do grafo e as pontes como as respetivas arestas conforme ilustra a figura 1.2 [6] Página 22.

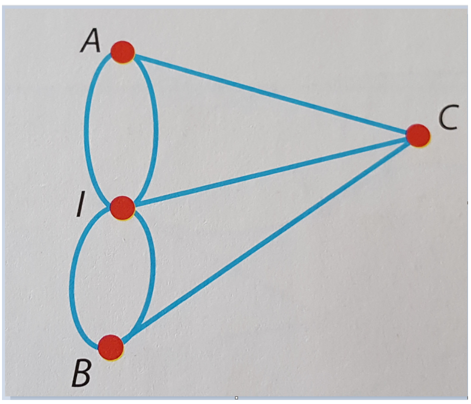


Figura 1.2: Grafo do problema das pontes de Königsberg.

Desde esta data surgiram muitos outros problemas, alguns de caráter lúdico, contudo, tornaram-se célebres dada a sua aplicabilidade na resolução de problemas do quotidiano. No entanto, o grande desenvolvimento da teoria dos grafos só veio a notar-se no século XX, tanto ao nível da

matemática como das suas aplicações nos diversos campos do conhecimento.
A teoria dos grafos é uma ”ferramenta” fundamental na resolução de problemas em diversas áreas da matemática, da informática, da engenharia, da química, da psicologia, da economia e da indústria;
Em termos práticos, tendo em conta vários campos profissionais, a teoria dos grafos permite-nos, por exemplo, representar um mapa de estradas, usar algoritmos específicos para determinar o caminho mais curto ou o mais económico entre dois pontos, estudar e compreender a interação social, entre outros.

Capítulo 2

Matrizes

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos da Teoria de Matrizes e apresentamos as notações que irão ser usadas ao longo deste trabalho. Para o efeito, recorremos a referências bibliográficas comumente conhecidas, tais como [?], [4] e [5].

2.1 Definições e Generalidades

Definição 2.1.1. *Chama-se Matriz do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) a todo quadro que se obtém dispondo mn números - elementos/entradas da matriz- segundo m linhas e n colunas.*
Uma matriz diz-se real ou complexa consoante os seus elementos sejam números reais ou complexos.
O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ representa-se por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Usamos a notação $\mathbb{R}^n$ para $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.1.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 8 \end{bmatrix} \textit{ e } \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

são matrizes reais do tipo 2×3, 3×3 e 3×1, respetivamente. A primeira pertence a $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, a segunda a $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e a terceira a $\mathbb{R}^3$.

Usam-se letras romanas maiúsculas para designar matrizes. Numa matriz abstrata é comum designar os elementos por uma letra minúscula com dois índices, indicando o primeiro a linha da matriz em que o elemento se encontra e o segundo a coluna.

Deste modo, se A for uma matriz do tipo $m \times n$, então a_{ij} é o elemento de A situado na linha i e coluna j, com $i \in \{1, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, \cdots, n\}$. Tal elemento é também referido como elemento de A na posição (i, j) ou apenas por elemento (i, j) de A.

Assim, uma matriz abstrata do tipo $m \times n$ é habitualmente apresentada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

que também pode ser apresenta por $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ou simplesmente $A = [a_{ij}]$, se o tipo da matriz for conhecido a partir do contexto ou não comprometer o entendimento da abordagem.

Na definição seguinte registamos terminologias e notações básicas relativas a matrizes.

Definição 2.1.2. 1. *Duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ são **iguais** se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo o $i = 1, \cdots, m$ e para todo o $j = 1, \cdots, n$.*

2. *$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ diz-se **quadrada de ordem** n se $m = n$, e **retangular** se $m \neq n$.*

3. *Os **elementos diagonais** de $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ são $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$. A sequência ordenada constituída por estes elementos diz-se **diagonal principal** de A.*

4. *Seja $A = [a_{ij}]$ quadrada. A diz-se **triangular superior** se $a_{ij=0}$ quando $i > j$, **triangular inferior** se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$, e **diagonal** se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$.*

5. *A **matriz identidade** de ordem n,I_n, é a matriz diagonal, de ordem n, com os elementos diagonais iguais a 1.*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Se a ordem da matriz tiver clara a partir do contexto, usamos simplesmente I.

6. *A **matriz nula** $m\times n$ é a matriz $m\times n$ cujos elementos são todos iguais a zero. Representa-se por $0_{m\times n}$ ou simplesmente por 0 se o tipo da matriz tiver claro a partir do contexto.*

7. *Sendo $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, define-se $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.*

8. *Sendo A uma matriz, uma **submatriz** de A é uma matriz que se obtém por supressão de linhas e/ou colunas de A.*

Exemplo 2.1.2. *As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & 2 & 7 \\ -5 & b & 8 \end{bmatrix}$ são iguais se $a = 1$ e $b = 3$. Estas duas matrizes são retangulares, enquanto a matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ 8 & 2 & 3 \\ 15 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 3. Os elementos diagonais de A são $10, 2, 5$ e a sua diagonal principal é $(10, 2, 5)$.*

As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ são, respetivamente, triangular superior, triangular inferior e diagonal.

As matrizes $\begin{bmatrix} 10 & -7 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ são exemplos de submatrizes de $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ 8 & 2 & 3 \\ 15 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Neste trabalho precisamos da igualdade de duas matrizes do mesmo tamanho, mas numa abordagem de congruência módulo k. Ou seja, considerando duas matrizes arbitrárias $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dizemos que A e B são **iguais módulo** k se $a_{ij} \equiv b_{ij}\,(mod\,k)$, para todo o $i = 1, \cdots, m$ e para todo o $j = 1, \cdots, n$. Denotamos $A = B(mod\,k)$.

2.2 Operações com matrizes

Definição 2.2.1. *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chamamos **matriz soma** da matriz A com a matriz B, e denotamos por $A+B$, à matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ cuja entrada (i,j) é $A_{ij}+B_{ij}$, isto é,*

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n.$$

Exemplo 2.2.1. *1. sendo $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ tem-se*

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades 1. *Sejam A,B e C matrizes arbitrárias em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então verifica-se:*

1. $A+B = B+A$ *(Comutatividade da adição).*
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ *(Associatividade da adição).*
3. $A+0_{m\times n} = 0_{m\times n}+A = A$ *(A matriz nula é o elemento neutro da adição).*
4. $A+(-A) = (-A)+A = 0_{m\times n}$ *($-A$ é o elemento simétrico ou oposto de A).*

Definição 2.2.2. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chamamos **matriz produto do escalar α pela matriz** A, e denotamos por αA.*

Exemplo 2.2.2. *Dado o número real $\alpha = \frac{2}{3}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$, tem-se:*

$$\alpha.A = \frac{2}{3}.A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -2 & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{15} \end{bmatrix}$$

Propriedades 2. *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e α , $\beta \in \mathbb{R}$. Tem-se:*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
4. $1.A = A$
5. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$ *e, em particular,* $(-1)A = -A$.
6. *Se* $\alpha A = 0_{m\times n}$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $A = 0_{m\times n}$

Definição 2.2.3. *Sendo $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B = [b_{ij}] \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, define-se AB como sendo a matriz do tipo $m \times p$ cujo elemento (i,j) é*

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Assim,

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.\right]_{m \times p}.$$

Depreende-se da definição que o produto AB da matriz A pela matriz B, apenas está definido se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Neste caso o número de linhas da matriz AB é igual ao número de linhas de A e o número de de colunas é igual ao de B. O elemento de AB situado na linha i e coluna j obtém-se a partir da linha i de A e da coluna j de B:

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + & \cdots & +a_{in}b_{nj} & \cdots \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \end{bmatrix}.$$

Vemos assim que, para cada $i = 1, \cdots, m$, a linha i de AB se obtém multiplicando a linha i de A pela matriz B, e que, para cada $j = 1, \cdots, p$, a coluna j de AB se obtém multiplicando a matriz A pela coluna j de B.

Ilustremos com um exemplo prático o produto de duas matrizes.

Exemplo 2.2.3. *Durante a 1.ª fase do Europeu de Futebol* 2004*, o grupo de Portugal era formado também pela Grécia, Espanha e Rússia, os resultados registados apresentam-se na tabela seguinte:*

País/Resultado	*Vitória*	*Empate*	*Derrota*
Portugal	*2*	*0*	*1*
Grécia	*1*	*1*	*1*
Espanha	*1*	*1*	*1*
Rússia	*1*	*0*	*2*

.

Para apurar a pontuação obtida por cada equipa consideremos, a partir dos dados apresentados, a matriz (4×3) *que representa os resultados de cada equipa:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consideremos ainda a pontuação obtida em cada jogo de acordo com a seguinte tabela

	Número de pontos
Vitória	*3*
Empate	*1*
Derrota	*0*

,

à qual está associada a matriz, 3×1*,*

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, terminada a 1.ª fase, a pontuação obtida por cada país é dada por:

$$\textit{Portugal: } 2.3+0.1+1.0=6$$
$$\textit{Grécia : } 1.3+1.1+1.0=4$$
$$\textit{Espanha: } 1.3+1.1+1.0=4$$
$$\textit{Rússia:} 1.3+0.1+2.0=3.$$

Em termos matriciais, a pontuação pode ser dada pela matriz AB: $AB=\begin{bmatrix}6\\4\\4\\3\end{bmatrix}$.

Exemplo 2.2.4 (Outros exemplos). *1. Sejam* $A=\begin{bmatrix}1&2&7\\9&3&8\end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix}5&4&3\\8&0&6\\1&2&9\end{bmatrix}$. *Então* $AB=\begin{bmatrix}28&18&78\\77&52&117\end{bmatrix}$.

Note-se que neste caso o produto BA não está definido, visto o número de colunas de B ser diferente do número de linhas de A.

2. *Sejam* $A=\begin{bmatrix}3&1&5\end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix}2\\7\\4\end{bmatrix}$. *Então*

$$AB=\begin{bmatrix}3\times 2+1\times 7+5\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}33\end{bmatrix} \text{ e } BA=\begin{bmatrix}6&2&10\\21&7&35\\12&4&20\end{bmatrix}.$$

3. *Sejam* $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ *e* $B=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&7&0\\0&0&9\end{bmatrix}$. *Então* $AB=BA=\begin{bmatrix}15&0&0\\0&35&0\\0&0&9\end{bmatrix}$

4. *Sendo* $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix}$ *e* $B=\begin{bmatrix}4&-6\\-2&3\end{bmatrix}$, *tem-se*

$$AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \text{ e } BA=\begin{bmatrix}10&20\\-5&-10\end{bmatrix}.$$

Como pode ser observado nestes exemplos, a multiplicação de matrizes comporta-se de modo diferente da multiplicação de números. Dadas as matrizes A e B, pode acontecer estar o produto AB definido, mas o produto BA não estar. Estando AB e BA definidos, nada implica que AB seja igual a BA. Se $AB=BA$, dizemos que as duas matrizes **comutam**.
De realçar ainda que o produto de duas matrizes pode ser nulo sem que nenhuma delas o seja (conforme 4.).

Propriedades 3. *Sejam $A,A'\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B,B'\in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C\in M_{p\times p}(\mathbb{R})$, matrizes arbitrárias e $\alpha\in\mathbb{R}$. Então tem-se:*

1. $A0_{n\times p}=0_{m\times p}$, $0_{r\times m}A=0_{r\times n}$, $AI_n=I_mA=A$.
2. $(AB)C=A(BC)$*(Associativa da multiplicação).*

3. $A(B+B') = AB + AB'$, $(A+A')B = AB + A'B$ *(distributividades do produto em relação à adição).*

4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

5. $AB = 0 \not\Rightarrow$*(*$A = 0$ *ou* $B = 0$*).*

6. $(AB = AB'$ **e** $A \neq 0) \not\Rightarrow B = B'$, *e também* $(AB = A'B$ **e** $B \neq 0) \not\Rightarrow A = A'$.

7. *A multiplicação de matrizes não é comutativa.*

Através do resultado que se segue, apresentamos um conceito muito importante da Álgebra Linear - o de *combinação linear*.

Teorema 2.2.1. *Seja* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *e designe-se* v_j *a coluna* j *de* A, $j = 1, \cdots, n$. *Dada a matriz coluna*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

tem-se $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$. *Dizemos então que* Ax *é uma* ***combinação linear*** *das colunas de* A.

Demonstração: Atendendo à definição de produto de matrizes, tem-se

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n. \end{aligned}$$

□

Note-se que, uma vez que AB se obtém multiplicando A pelas colunas de B, podemos concluir deste teorema que as colunas de AB são combinações lineares das colunas de A.

2.3 Inversa de uma matriz quadrada

Definição 2.3.1. *Seja* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.*Dizemos que* A *é* ***invertível****, ou que* A *tem inversa, se existir uma matriz* $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

Teorema 2.3.1. *Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = I_n = BA$.*

Demonstração: Suponhamos que $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ são tais que

$$AB = I_n = B \text{ e } AC = I_n = CA$$

e demonstremos que $B = C$. De facto, tem-se

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

□

Definição 2.3.2. *Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível, à única matriz B tal que $AB = I_n = BA$ chamamos **inversa** de A e representamos por A^{-1}.*

Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível tem-se, pois,

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Teorema 2.3.2. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.*

1. *Se $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $AB = I_n$ então $B = A^{-1}$.*
2. *Se $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $BA = I_n$ então $B = A^{-1}$.*

Demonstração:

1. *Como A é invertível, A^{-1} existe (e é única). Da igualdade*

   $$AB = I_n$$

   resulta, multiplicando ambos os membros, à esquerda, por A^{-1}(isto é, $A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n$):

   $$(A^{-1}A)B = A^{-1}$$

   o que é equivalente a

   $$I_nB = A^{-1},$$

   isto é,

   $$B = A^{-1}.$$

2. *Demonstração análoga à anterior: partindo da igualdade $BA = I_n$ e seguidamente multiplicando ambos os membros, à direita, por A^{-1}.*

□

Exemplo 2.3.1.

1. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. *Como* $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ = I_2 *e* $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ =I_2 *concluímos que* A *é invertível e que* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

2. I_n *é invertível e* $(I_n)^{-1} = I_n$ *pois*

$$I_n I_n = I_n = I_n I_n.$$

3. *Se* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tem uma linha nula, então* A *é não invertível pois,para qualquer matriz* $B \in M_{n\times n}(R)$, AB *tem uma linha nula e, portanto,* $AB \neq I_n$.

4. *Se* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tem linhas* i *e* j *iguais, com* $i \neq j$, *então* A *não é invertível pois, para qualquer matriz* $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, AB *tem as linhas* i *e* j *iguais pelo que* $AB \neq I_n$.

Terminamos esta secção apresentando algumas propriedades das matrizes invertíveis.

Propriedades 4. *As matrizes invertíveis gozam das seguintes propriedades*

1. *Se* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *é invertível, então* A^{-1} *é invertível e*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2. *Se* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *e* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *é invertível então* αA*é invertível e*

$$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}.$$

3. *Se* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *são invertíveis então* AB *é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4. *Mais geralmente, se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $A_1, \cdots, A_k \in \mathbb{R}$ *são invertíveis então* $A_1 \cdots A_k$ *é invertível e*

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

5. *Se* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *é invertível então, para qualquer* $k \in \mathbb{N}$, A^k *é invertível e*

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

Observações:

- $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$;
- Se uma matriz quadrada admite inversa diz-se uma **matriz regular**;
- Se uma matriz quadrada não admite inversa, diz-se uma **matriz singular**;

2.4 Transposição de Matrizes

Definição 2.4.1. *Dada uma matriz do tipo* $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

define-se a ***transposta*** *de* A *como sendo* $n \times m$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ou seja: o elemento (i, j) *de* A^T *é* a_{ij}*, para* $i = 1, \cdots, n$ *,* $j = 1, \cdots, m$*.*
A matriz A *diz-se* ***simétrica*** *se* $A = A^T$*.*

Como se vê pela definição, os elementos da coluna j de A^T são da linha j de A, para $j = 1, \cdots, m$. Vemos também que uma matriz é simétrica se e só se for quadrada e forem iguais os elementos situados em posições simétricas relativamente à diagonal principal.

Exemplo 2.4.1.

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ é simétrica, mas a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ já não é, uma vez que os elementos $(1, 2)$ e $(2, 1)$ não são iguais.

Propriedades 5. *A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:*

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(AB)^T = B^T A^T$.
4. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$*, qualquer que seja o número* α.
5. $(A^k)^T = (A^T)^k$*, para qualquer que seja o número natural* k.
6. *Se* A *é invertível então* A^T *é invertível e*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.5 Sistemas de Equações Lineares

Um dos principais tópicos da Álgebra Linear é o estudo de equações lineares devido a sua importância em Matemática Aplicada. Muitos problemas, por exemplo nas engenharias conduzem à necessidade de resolver sistemas de equações lineares. Alguns sistemas por possuírem um número elevado de equações e de tipos especiais a sua resolução insere-se no campo computacional e na Análise Numérica.
Nesta secção iremos apresentar de forma sucinta os conceitos e resultados de maior ênfase usando a linguagem matricial.

Definição 2.5.1. *Uma **equação linear** nas incógnitas $x_1, \cdots, x_n$ é uma equação do tipo*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d,$$

*onde $a_1, \cdots, a_n$ e d são números. A d costuma chamar-se **segundo membro** ou **termo independente** da equação.*
*Um **sistema de equações lineares** é uma colecção finita ordenada de equações lineares(todas nas mesmas incógnitas) consideradas em conjunto.*

Um sistema genérico com m equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

apresenta-se abreviadamente na forma $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1-n} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn-1} & a_{mn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

*A é a **matriz do sistema, ou dos coeficientes**, X é a matriz coluna das incógnitas e B é a matriz coluna dos segundos membros ou, abreviadamente, o segundo membro do sistema.*

*Chamamos **matriz ampliada** do sistema à matriz de $M_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$ cuja coluna i, para $i = 1, \cdots, n$, é igual à coluna i da matriz A e cuja coluna $n+1$ é igual à coluna (única) de B. Tal matriz é denotada por*

$$[A|B].$$

O grande objetivo perante um sistema de equações lineares é resolvê-lo, isto é, achar as soluções.

Definição 2.5.2. *Uma **solução** de um sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, \cdots, x_n$ é uma matriz-coluna $n \times 1$*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

de números tais que as substituições $x_i = \alpha_i$, $i = 1, \cdots, n$, transformam todas as equações do sistema em identidades verdadeiras. Resolver um sistema de equações é determinar todas as suas soluções ou provar que não existe nenhuma.
*Um sistema de equações lineares que tenha pelo menos uma solução diz-se **possível**: se só tiver uma solução, é **possível determinado**; se tiver mais do que uma, é **possível indeterminado**. Um sistema de equações lineares que não tenha nenhuma solução diz-se **impossível**.*

Exemplo 2.5.1. *Consideremos o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3 \\ 4x_1 + 9x_2 = 7 \end{cases}.$$

A matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, enquanto que $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, são, respectivamente as matrizes-coluna das incógnitas e dos termos independentes. A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}$.
Este sistema é possível e determinado, sendo $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ a sua solução.

Definição 2.5.3. *Um sistema em que os segundos membros das equações são todos iguais a 0 diz-se **homogéneo**.*

Note-se que um sistema homogéneo é sempre possível: possui sempre, pelo menos, a solução $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, chamada **solução trivial**.

Definição 2.5.4. *Dois sistemas com o mesmo número de equações e de incógnitas dizem-se **equivalentes** se tiverem exatamente as mesmas soluções.*

Teorema 2.5.1. *Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares com $A_{m\times n}$. Seja E uma matriz $m \times m$ invertível. Então o sistema $EAX = EB$ é equivalente ao sistema $AX = B$.*

Demonstração: Claramente, qualquer solução do sistema $AX = B$ é também solução do sistema $EAX = EB$. Reciprocamente, seja U uma solução do sistema $EAX = EB$, isto é, tem-se $EAU = EB$. Multiplicando à esquerda ambos os membros desta igualdade por E^{-1}, obtemos $AU = B$, isto é, U é solução do sistema $AX = B$.

□

2.5.1 Matrizes elementares

As matrizes elementares aparecem no estudo dos sistemas de equações lineares. Para definirmos esta classe de matrizes é útil conhecer certo tipo de operações que se podem efetuar sobre as linhas de uma matriz, ditas **operações elementares**:

1. Troca entre sí de duas linhas da matriz;
2. Multiplicação de uma linha por um número diferente de zero.
3. Substituição de uma linha da matriz pela sua soma com um múltiplo de outra.

Definição 2.5.5. *Chama-se **matriz elementar** de ordem n a toda matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma operação elementar às suas linhas.*

Exemplo 2.5.2. *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} x + 3y = 21 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}.$$

Utilizando operações elementares transformemos a matriz dos coeficientes na matriz identidade:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 + (-2)l_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}l_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \rightarrow \xrightarrow{l_1 + (-3)l_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Donde se conclui que o sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$, *pelo que é um sistema possível e determinado.*

Antes de terminar esta secção podemos concluir que através de operações elementares é possível transformar um sistema dado num sistema muito fácil de resolver. Este novo sistema, digamos $UX = C$, equivalente ao sistema original e cuja matriz U, que é ainda $m \times n$, tem uma forma especial, a que se costuma chamar **matriz escada**.

Definição 2.5.6. *Uma matriz diz-se uma **matriz em escada** se satisfizer as seguintes condições:*

- *Se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos.*
- *Se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.*

*O primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz em escada chama-se **pivot** da matriz.*

Exemplo 2.5.3.

1. *Representando por $\bullet$ os pivós da matriz e por $*$ as entradas da matriz que podem tomar qualquer valor, estão em forma de escada, por exemplo as matrizes da forma*

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \end{bmatrix}$$

2. *As matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

   não estão em forma de escada.

Definição 2.5.7. *A **característica** de A, abreviadamente $car(A)$, é o número de pivots que aparecem quando se aplica a A o método de eliminação. Equivalentemente, $car(A)$ é o número de linhas não nulas da matriz U produzida pelo algorítmo de eliminação aplicado a A. (Se A for uma matriz nula, tem-se $car(A) = 0$).*
*Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ diz-se **não-singular** se tiver característica n. Se $car(A) < n$, a matriz A diz-se **singular**.*

Exemplo 2.5.4. *Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$. Recorrendo a operações elementares, obtemos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-1)l_1;\, l_3+(-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-3)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A matriz resultante do processo de transformação anterior é a matriz escada $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, pelo que $car(A) = 3$.

2.6 Determinante de uma Matriz Quadrada

Como vimos anteriormente, uma matriz quadrada é invertível quando a característica dessa matriz é igual à ordem dessa matriz.
Nesta secção iremos ver que podemos associar a cada matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ um elemento de $\mathbb{R}$ que, tal como a característica, também nos vai permitir decidir sobre a invertibilidade de A. Mais especificamente, iremos ver que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos associar a cada matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ um elemento $\mathbb{R}$, a que chamaremos "determinante" de A e que A é invertível se, e só se, esse elemento for não nulo.

Nota 2.6.1. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$. Dado $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, representamos por*

$$A(i|j)$$

a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j. Assim

$$A(i|j) \in M_{n-1\times n-1}(\mathbb{R})$$

Definição 2.6.1. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Chamamos **determinante** de A, e representamos por $\det A$ ou $|A|$, ao elemento de $\mathbb{R}$ definido, por recorrência, da seguinte forma:*

Se $n = 1$, então $\det A = a_{11}$.

Se $n > 1$, então

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\det A(1|n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}\det A(1|k). \end{aligned}$$

Notemos que, pela definição anterior, para

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

resulta que

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) \\ &= a_{11}\det[A_{22}] - a_{12}\det[A_{21}] \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Utilizando a definição, o determinante de uma matriz A, de ordem $n = 3$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) + a_{13}(-1)^{1+3}\det A(1|3) \\ &= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Assim, para $n = 3$, a expressão de $\det A$ tem 6 parcelas que podem ser escritas como uma diferença em que o aditivo tem 3 parcelas e o subtrativo outras 3 parcelas.
No caso geral, de $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ a expressão de $detA$ tem $n!$ parcelas, como se pode demonstrar usando o método de indução em n.

A partir do conceito que apresentamos na definição que se segue, é possível calcular de forma mais expedita o determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem.

Definição 2.6.2. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$. Designamos por **complemento algébrico** da posição (i,j) de A, e representamos por $\hat{a}_{ij}$, o escalar*

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} det A(i|j),$$

em que $A(i|j)$ é a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j.

Notemos que $\hat{a}_{ij}$ não depende do elemento da posição (i,j) de A pois esse elemento não figura na matriz $A(i|j)$.

De acordo com a definição $2.6.1$, se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $n \geq 2$, então o determinante de A é igual à soma dos produtos dos elementos da linha 1 pelos complementares algébricos das respetivas posições, isto é,

$$\det A = a_{11}\hat{a}_{11} + \cdots + a_{1n}\hat{a}_{1n}.$$

Exemplo 2.6.1. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. *Então, tendo em conta que*

$$\begin{aligned} \hat{a}_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \\ \hat{a}_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 14 \\ \hat{a}_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -7, \end{aligned}$$

e $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$ *e* $a_{13} = 3$, *concluímos que* $\det A = 1.0 + 0.14 + 3.(-7) = -21$.

O resultado seguinte, cuja demonstração deixamos que o leitor consulte a referência **[?]** páginas 162 e 163, afirma que se procedermos de forma análoga para uma qualquer linha ou uma qualquer coluna de A, obtemos ainda o determinante de A.

Teorema 2.6.1. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$,com $n \geq 2$. O determinante de A é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos de uma qualquer linha de A pelos complementos algébricos das respetivas posições, isto é,*

$$\det A = a_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{in} \quad \textit{para qualquer linha i de A.} \qquad (2.1)$$

O mesmo resultado é válido se substituirmos "linha" por "coluna", isto é,

$$\det A = a_{1j}\hat{a}_{1j} + \cdots + a_{nj}\hat{a}_{nj} \quad \textit{para qualquer coluna j de A.} \qquad (2.2)$$

Este resultado é conhecido como Teorema de Laplace.

À expressão (2.1) chamamos o desenvolvimento do determinante de A segundo a linha i ou dizemos que é a expressão resultante da **aplicação do Teorema de Laplace à linha** i **de** A. Analogamente, dizemos que (2.2) é a expressão resultante da **aplicação do Teorema de Laplace à coluna** j **de** A.

Propriedades 6. *Como consequência imediata do Teorema de Laplace tem-se:*

1. *Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem uma linha nula, então*

$$\det A = 0.$$

2. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$. Se A tem a linha i igual à linha j, com $i \neq j$, então*

$$\det A = 0.$$

3. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Tem-se*

$$\det A = \det A^T$$

   isto é, uma matriz e a sua transposta têm o mesmo determinante.

4. *Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz triangular superior(superior ou inferior), então o determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de A.*

5. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se os elementos da linha i de A são da forma $A_{ik} = B_{ik} + C_{ik}$, com $k = 1, \cdots, n$, então*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2.7 Transformações Lineares

Nesta secção abordaremos muito brevemente os conceitos e alguns resultados fundamentais das Transformações Lineares, funções entre dois espaços vetoriais definidos sobre o mesmo corpo que respeitam as operações de adição de vetores e multiplicação de escalares por vetores consideradas nos dois espaços. Muitos resultados já apresentados são válidos para as transformações lineares tal é o caso do conceito de combinação linear já apresentado e demonstrado no teorema 2.2.1. Estes conceitos serão utilizados principalmente no capítulo 4 deste trabalho.

Definição 2.7.1. *Seja V um conjunto não vazio e seja $\mathbb{K}$ um corpo. Diz-se que V é um* ***espaço vetorial sobre*** *$\mathbb{K}$ se estiverem definidas duas operações, uma* ***adição de elementos de*** *V, denotada pelo símbolo +,e uma* ***multiplicação de elementos de*** *$\mathbb{K}$* ***por elementos de*** *V, denotada pelo símbolo ., ou por simples justaposição (operações em ambos os casos produzindo elementos de V), que satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $\forall_{u,v,w\in V} \quad (u+v)+w = u+(v+w);$

2. $\forall_{u,v\in V} \quad u+v=v+u;$

3. $\exists_{z\in V} \quad \forall_{v\in V} \quad v+z=v;$

4. $\forall_{v\in V} \quad \exists_{v'\in V} \quad v+v'=z;$

5. $\forall_{u,v\in V} \quad \forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad \alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v;$

6. $\forall_{u\in V} \quad \forall_{\alpha\beta\in\mathbb{K}} \quad (\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v;$

7. $\forall_{u\in V} \quad \forall_{\alpha\beta\in\mathbb{K}} \quad (\alpha\beta)v=\alpha(\beta v);$

8. $\forall_{\alpha\in V} \quad 1_{\mathbb{K}}v=v.$

Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, diz-se que se tem um espaço vetorial *real*. Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ diz-se que se tem um espaço vetorial *complexo*.
Aos elementos de um espaço vetorial V chamamos genericamente *vetores*, e aos elementos do corpo $\mathbb{K}$ *escalares*.

Exemplo 2.7.1. *O conjunto dos números reais, com soma e produto usuais é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.7.2. *O conjunto das matrizes quadradas de ordem 2, com entradas reais, denotado por* M_2,

$$M_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} : a,b,c,\, d\in\mathbb{R}\right\},$$

com adição de matrizes e multiplicação por escalar, forma um espaço vetorial.

Definição 2.7.2. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto W de V diz-se um* ***subspaço*** *de V se for ele próprio um subspaço vetorial para as operações nele naturalmente definidas (por ser um subconjunto de V).*

Teorema 2.7.1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e W um suconjunto de V. W é um subspaço de V se e só se satisfizer as seguintes condições:*

1. *$W\neq\emptyset$;*

2. *W é fechado para a adição, isto é, $u,v\in W\Rightarrow u+v\in W$;*

3. *W é fechado para a multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$, isto é, $\alpha\in\mathbb{K}$, $v\in W\Rightarrow \alpha v\in W$.*

Demonstração: A condição necessária é evidente, dada a definição de espaço vetorial. Vejamos a condição suficiente. As propriedades $1,2,5,6,7$ e 8 da definição de espaço vetorial são satisfeitas em W porque o são em V, e W está contido em V. Em seguida, o zero de V pertence necessariamente a W, porque sendo v um vetor qualquer de W(existe pelo menos um porque $W\neq\emptyset$), a terceira condição do teorema obriga a que $0_{\mathbb{K}}v=0_V\in W$. Finalmente, sendo $v\in W$, e sabemos que $-v=(-1)v$ e, portanto, pelo facto de ser fechado para a multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$, $-v\in W$.

□

Exemplo 2.7.3. *Se V=M_2,*

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \quad e \quad \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

então W é um subespaço de V .

Definição 2.7.3. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam ,$v_1, v_2 \cdots v_n$ elementos de V. Dizemos que $v \in V$ é* ***combinação linear*** *dos vectores $v_1, \cdots, v_n$ se existirem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Aos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, chamamos os ***coeficientes*** *da combinação linear e a $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ a* ***sequência dos coeficientes*** *da combinação linear.*

Definição 2.7.4. *Sejam $v_1, v_2 \cdots v_n$, elementos de um espaço vetorial V. chamamos* ***Subspaço (de V)gerado*** *pela sequência ($v_1, v_2 \cdots v_n$) ou pelos vectores $v_1, v_2 \cdots v_n$ ao conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $v_1, v_2 \cdots v_n$. Tal subspaço é frequentemente denotado por $\langle v_1, v_2 \cdots v_n \rangle$, isto é,*

$$\langle v_1, v_2 \cdots v_n \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

Se $W = \langle v_1, v_2 \cdots v_n \rangle$ dizemos, ainda, que $v_1, v_2 \cdots v_n$ ***geram*** *W, que $v_1, v_2 \cdots v_n$, são* ***geradores*** *de W ou que a sequência $(v_1, v_2 \cdots v_n)$ é* ***geradora*** *de W.*

No exemplo anterior $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ geram o subespaço W.
Portanto,

$$W = \langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definição 2.7.5. *Seja V um espaço vetorial . Seja $v_1, \cdots, v_n \in V$ (com $n \geq 2$) .Os vetores $v_1, \cdots, v_n$ dizem-se* ***linearmente independente (LI)*** *se nenhum deles for igual a uma combinação linear dos outros $n-1$. Um vetor v_1 é linearmente independente se $v_1 \neq 0$. Se $v_1, \cdots, v_n$ não forem linearmente independentes, dizem-se* ***linearmente dependentes****(LD).*

Exemplo 2.7.4. *As matrizes de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes. Para o mostrar, escreva-se a matriz nula como combinação linear destas matrizes, com coeficientes a determinar:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então tem-se

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o que implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Definição 2.7.6. *Seja V um espaço vetorial e $(v_1, \cdots, v_n)$, uma sequência de vetores de V. Dizemos que $(v_1, \cdots, v_n)$ é uma **base** de V se é uma sequência geradora de V e é linearmente independente.*
Convencionamos que se $V = 0_V$ então a sequência vazia é base de V.

Definição 2.7.7. *Seja V um espaço vetorial que admite uma base com n elementos, com $n \in \mathbb{N}$. Dizemos então que V tem dimensão n e escrevemos $\dim V = n$.*

Exemplo 2.7.5. *Consideremos $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$. Tendo em conta a definição anterior, se conhecermos uma base, então temos também a dimensão de V, por isso concentremo-nos em encontrar uma base para V. Precisamos de uma sequência de geradores que sejam LI. Ora, $z = x + y$ e, portanto, V pode ser definido como*

$$V = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall_{x,y \in \mathbb{R}}\}.$$

Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Mas, $(1, 0,)$ e $(0, 1, 1)$ são linearmente independentes. Na verdade, temos

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & |0 \\ 0 & 1 & |0 \\ 1 & 0 & |0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & |0 \\ 0 & 1 & |0 \\ 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}.$$

Logo uma base de V é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, e V tem dimensão 2.

Definição 2.7.8. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : V \to W$, que satisfazendo as condições:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$,
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$,

*para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, diz-se **transformação linear**.*

Para ilustrarmos uma transformação linear basta pensarmos numa equação matricial $Av = B$ em que a matriz A multiplicada com o vetor v produz um novo vetor B. Assim, dizemos que a multiplicação por A transforma v em B.

Por exemplo, seja A uma matriz $m \times n$. A transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por $T(v) = Av$ para cada $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, é linear.

Propriedades 7. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear.Então tem-se:*

1. $T(0_V) = 0_W$.
2. $T(-v) = -T(v)$, *para qualquer* $v \in V$.
3. $T(u - v) = T(u) - T(v)$, *para quaisquer* $u, v \in V$.
4. $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$, *para qualquer natural n e quaisquer* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $v_1, \cdots, v_n \in V$.

As transformações lineares estão associadas a dois importantes subspaços que a seguir passamos a definir.

Definição 2.7.9. *(**Núcleo e imagem**)Sendo $T : V \to W$ uma transformação linear, o **núcleo** de T é o conjunto $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$. A **imagem** de T é o conjunto im$(T) = \{T(v) : v \in V\}$.*

Proposição 2.7.1. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então $\ker(T)$ é um subespaço de V e im(T) é um subespaço de W.*

Demonstração: Mostraremos que $\ker(T)$ é um subspaço de V. Note-se, em primeiro lugar, que $0_V \in \ker(T)$, uma vez que $T(0_V) = 0_W$. Dados u e v elementos arbitrários de $\ker(T)$(isto é $T(u) = T(v) = 0_W$) e um escalar α, tem-se, pela linearidade de T,

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0_W + 0_W = 0_W \text{ e } T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha 0_W = 0_W.$$

Assim, $u + v$ e αu pertencem a $\ker(T)$, o que termina a prova de que $\ker(T)$ é um subspaço de V.
Consideremos agora im(T). Claramente este conjunto é não vazio, pois $0_W = T(0_V) \in im(T)$. Dados $w, z \in im(T)$, existem $x, y \in V$ tais que $w = T(x)$ e $z = T(y)$. Então, pela linearidade de T,

$$w + z = T(x) + T(y) = T(x + y) \in im(T) \text{ e } \alpha T(x) = T(\alpha x) \in im(T),$$

uma vez que, pelo facto de V ser um espaço vetorial, $x + y$ e $\alpha x \in V$. Concluímos assim que $im(T)$ é um subspaço de W. □

No caso de $im(T)$ ter dimensão finita, chamamos a essa dimensão a **característica** da transformação linear T. Usamos a notação $car(T)$ para este número, ou seja, $car(T) = \dim(T)$.

Existe uma relação muito simples entre as dimensões de $im(T)$ e $\ker(T)$, cujo resultado apresentamos a seguir.

Teorema 2.7.2. *Sejam V e W espaços vetorial, com V de dimensão finita, e seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então tem-se*

$$\textit{car}(T) = \dim V - \dim \ker(T).$$

Demonstração: Seja $\dim V = n$. Suponhamos que $\ker(T) \neq \{0\}$ e seja $\{v_1, \cdots, v_k\}$ uma base de

$ker(T)$. (Se $\ker(T) = \{0\}$, o raciocínio decorre de modo análogo, tomando $k = 0$ no resto da demonstração). Acrescentemos a estes k vetores $n - k$ vetores $v_{k+1}, \cdots, v_n$ de forma a obter uma base de V.
Vamos ver que os $n - k$ vetores $T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)$ constituem uma base de $im(T)$. Isso provará o teorema.
Primeiro mostremos que $T(v_{k+1}, \cdots, T(v_n)$ são linearmente independentes. Se

$$\alpha_1 T(v_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-k} T(v_n) = 0,$$

vem

$$T(\alpha_1 v_{k+1} + \cdots + \alpha_{n-k} v_n) = 0,$$

e tem-se

$$\alpha_1 v_{k+1} + \cdots, \alpha_{n-k} v_n \in \ker(T)$$

Então, como $\{v_1, \cdots, v_k\}$ é uma base de $\ker(T)$, tem-se

$$\alpha_1 v_{k+1} + \cdots, \alpha_{n-k} v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k,$$

para certos escalares $\beta_1, \cdots, \beta_k$, o que é mesmo que

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k - \alpha_1 v_{k+1} - \cdots - \alpha n - k v_n = 0.$$

Agora mostremos que $T(v_{k+1}, \cdots, T(v_n)$ geram im(T). Seja w um vetor qualquer de im(T). Então, $w = T(v)$ para algum $v \in V$ e, como $v_1, \cdots, v_n$ constituem uma base de V, tem-se

$$v = \gamma v_1 + \cdots + \gamma_n v_n,$$

para certos escalares $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$. Então, como $v_1, \cdots, v_k \in \ker(T)$, tem-se

$$T(v) = \gamma_{k+1} T(v_{k+1} + \cdots + \gamma_n T(v_n)$$

e w é uma combinação linear de $T(v_{k+1}, \cdots, T(v_n)$.

$\square$

2.7.1 Subspaços Fundamentais de uma matriz

Definição 2.7.10. *O **espaço nulo** de uma matriz $A_{m\times n}$, escrita como $NulA$, é o conjunto de todas soluções da equação homogénea $AX = 0$. Denotamos por*

$$NulA = \{X : X \in \mathbb{R}^n | AX = 0\}$$

Exemplo 2.7.6. *Sejam as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $X = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$. *Como*

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-9+4 \\ -25+27-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

concluímos que X *está no espaço nulo de* A.

Teorema 2.7.3. *O espaço nulo de uma matriz* A $m \times n$ *é um subspaço de* $\mathbb{R}^n$. *Equivalentemente, o conjunto de todas soluções do sistema* $AX = 0$ *de* m *equações lineares homogéneas em* n *incógnitas é um subspaço de* $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Certamente $NulA$ é um subspaço de $\mathbb{R}^n$ porque A possui n colunas. Devemos provar que $NulA$ satisfaz as três propriedades de um subspaço. É claro que zero está em $NulA$. Seguidamente sejam u e v dois vetores em $NulA$. Assim, $Au = 0$ e $Av = 0$.
Para provar que $u + v$ está em $NulA$, devemos mostrar que $A(u + v) = 0$. Usando a propriedade da multiplicação de matrizes, vem

$$A(u + v) = Au + Av = 0 + 0 = 0.$$

Portanto, $u + v$ está em $NulA$ e $NulA$ é fechado para a adição de vetores. Finalmente, se α é um escalar qualquer, vem

$$A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha(0) = 0,$$

o que mostra que αu está no espaço nulo de A. Portanto $NulA$ é um subspaço de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Definição 2.7.11. *O* ***espaço coluna*** *de uma matriz* A $m \times n$, *denotado por* $ColA$, *é o conjunto de todas as combinações lineares das colunas de* A.

$$ColA = \{b : b = AX; X \in \mathbb{R}^n\}$$

Exemplo 2.7.7. *Consideremos o conjunto*

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 6a - b \\ a + b \\ -7a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podemos escrever W *em que cada um dos seus elementos é combinação linear de outros elementos* $\Big($neste caso, de $\begin{bmatrix}[ccc]6 & 1 & -7\end{bmatrix}^T$ e de $\begin{bmatrix}[ccc]-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\Big)$:

$$W = \left\{ a \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

O conjunto W *também pode ser escrito usando os vetores do conjunto gerador como colunas de uma matriz* A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o espaço coluna de uma matriz A $m \times n$ é um subspaço de $\mathbb{R}^m$.

O espaço nulo e o espaço coluna estão relacionados. Para ilustrarmos melhor esta ideia, consideremos uma matriz genérica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Um vetor X tal que AX está definido, deve ter quatro entradas, assim o espaço nulo é um subspaço de $\mathbb{R}^4$. Por outro lado, cada coluna de A possui três entradas, assim $ColA$ é um subspaço de $\mathbb{R}^3$.

Se A é uma matriz $m \times n$ então é possível definir ainda outros dois espaços vetoriais associados com matrizes:

- **Espaço nulo de A^T ou espaço nulo esquerdo de A**: é um subspaço de $\mathbb{R}^n$.
- **Espaço coluna de A^T ou espaço linha de A**: espaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores linha de A.

As matrizes fundamentais estão relacionadas com o teorema do Núcleo e imagem de uma transformação linear. Vejamos um exemplo que nos levará a esta conclusão.

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

que representa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Determinemos a característica de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-1)l1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $car(A) = 2$.

Determinemos agora o Núcleo de T. Considerando a matriz ampliada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e reduzindo-a à sua forma em escada obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

donde,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_4 = x_2 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_2 - 13x_3 \\ x_4 = x_2 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Portanto, os elementos do Núcleo são da forma

$$\begin{bmatrix} -7x_2 - 13x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, a dimensão de $N(A)$ é 2.
A Imagem de T é constituído por vetores da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Mas, como a $car(A) = 2$, das colunas consideradas só duas são linearmente independentes. Portanto a característica da Imagem é 2.
Do exemplo apresentado, concluímos que

$$dimN(A) + dimIm(A) = dimV,$$

ou seja,

$$Nul(A) + car(A) = \text{Número de colunas}.$$

2.7.2 Matriz de uma transformação linear

Usando matrizes podemos representar as transformações lineares entre espaços de dimensão finita com dim $V = n \geq 1$ e dim $W = m \geq 1$.

A transformação $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por $T(x) = Ax$ é uma transformação linear.
Assim, se conhecermos os valores que tomam os vetores de uma base de um determinado espaço vetorial de dimensão finita a transformação linear fica conhecida.

Definição 2.7.12. *Seja $T : V \to V'$ uma transformação linear. Sejam $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ uma base de V e $B' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_m)$ uma base de V'.*
Designamos por matriz de T em relação às bases B e B' (por essa ordem) e representamos por

$$M(T:B,B')=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{cases} T(e_1)=a_{11}e'_1+a_{12}e'_2+\cdots+a_{m1}e'_m \\ T(e_2)=a_{12}e'_1+a_{22}e'_2+\cdots+a_{m2}e'_m \\ \hfill\vdots \\ T(e_n)=a_{1n}e'_1+a_{2n}e'_2+\cdots+a_{mn}e'_m \end{cases}$$

Exemplo 2.7.8. *A transformação $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $T((x,y))=(2x,x-y,3y)$ é linear. Então vamos determinar a matriz de T em relação às bases $B=(1,0),(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ e $B'=(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Sabemos de antemão que $\dim V=2$ e $\dim V'=3$. A matriz T em relação as bases será da forma*

$$M(T:B,B')=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Mais,

$$T(e_1)=T(1,0)=(2,1,0)=a_{11}(1,0,1)+a_{21}(1,1,0)+a_{31}(0,0,1)=(1,0,1)+(1,1,0)-(0,0,1)$$

$$T(e_2)=T(1,1)=(2,0,3)=a_{12}(1,0,1)+a_{22}(1,1,0)+a_{32}(0,0,1)=2(1,0,1)+0(1,1,0)+(0,0,1).$$

Consequentemente,

$$M(T:B,B')=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que, se T é uma transformação linear e A é a matriz T em relação a certas bases, então $\dim im(T)=car(A)$.

Capítulo 3

Algumas Aplicações de Matrizes

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações da Teoria de Matrizes que realçam a utilidade desta nas diversas áreas, nomeadamente na Economia, Química, Criptografia e outras. Os exemplos que a seguir se apresentam têm como pré-requisitos os conceitos já estudados no capítulo 2 e ilustram, embora de forma rudimentar, a utilidade do cálculo matricial no estudo de conceitos de outras áreas do saber.

3.1 Aplicação à Economia: Modelo Fechado [de Input-Output] de Leontief

Este exemplo foi retirado de [2] (páginas 411-412).
O modelo Fechado [de Input-Output] de Leontief, usa a teoria de matrizes para calcular certos parâmetros que descrevem as inter-relações entre as indústrias, tais como os preços e os níveis de produção, para a satisfação de um objetivo económico desejado.Os sistemas de equações lineares e as matrizes, são os pré-requisitos necessários para esta aplicação.

Exemplo 3.1.1. *Três proprietários de casas, um Pedreiro, um Eletricista e um Hidráulico, pretendem fazer concertos em suas três casas. Eles concordam trabalhar um total de 10 dias cada de acordo com a seguinte tabela:*

	T_1	T_2	T_3
D_1	2	1	6
D_2	4	5	6
D_3	4	4	3

Tabela 3.1: Distribuição dos concertos por casas.

Donde,

T_1 *é o trabalho executado pelo Pedreiro;*
T_2 *é o trabalho executado pelo Eletricista*
T_3 *é o trabalho executado pelo Hidráulico*
D_1 *são os dias de trabalho na casa do Pedreiro;*
D_2 *são os dias de trabalho na casa do Eletricista;*
D_3 *são os dias de trabalho do Hidráulico.*

Para efeitos de impostos, eles devem declarar e pagar um ao outro um salário diário razoável, mesmo para o trabalho que cada um faz em sua própria casa. Seus salários diários normais são cerca de 100 Euros, mas eles concordam em ajustar seus respetivos salários diários de tal *modo que saiam empatados, ou seja, de tal modo que o total pago por cada um é igual ao total recebido. Nós podemos colocar*

p_1*=salário diário do Pedreiro;*

P_2*=salário diário do Eletricista;*

p_3*=salário diário do Hidráulico.*

Para satisfazer a condição de equilíbrio de que saiam empatados, nós exigimos que

total dos gastos=total do recebido

para cada um dos proprietários pelo período de dez dias. por exemplo, o pedreiro paga um total de $2p_1 + p_2 + 6p_3$ *pelos concertos em sua própria casa e recebe um total de* $10p_1$ *pelos concertos que faz nas três casas. Igualando estas expressões nos dá a primeira das três equações seguintes:*

$$2p_1 + p_2 + 6p_3 = 10p_1$$

$$4p_1 + 5p_2 + p_3 = 10p_2$$

$$4p_1 + 4p_2 + 3p_3 = 10p_3$$

Sendo que a segunda e a terceira equação correspondem ás equações de equilíbrio do Eletricista e do Hidráulico. Dividindo estas equações por 10 e reescrevendo-as em formato matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Subtraindo o lado esquerdo do direito, podemos reescrever a equação matricial como um sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a solução do sistema homogêneo é

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

onde s *é uma constante arbitrária. Esta constante é um fator de escala, que os proprietários podem escolher de acordo com a sua conveniência. por exemplo, eles podem colocar* $s = 3$, *de modo que os correspondentes salários diários, a saber 93 Euros, 96 Euros e 108 euros, são aproximadamente 100 Euros.*

3.2 Aplicação à Química (Equilibrando equações)

Esta aplicação foi retirada de [11], Páginas 89-91.
Dizemos que uma reação química está *equilibrada* se aparece o mesmo número de átomos em cada lado da seta para cada tipo de átomo na reação.

Exemplo 3.2.1. *Dada a equação*

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O,$$

a versão equilibrada desta equação química é

$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$$

com a qual queremos indicar que combinamos uma molécula de metano com duas de oxigénio estável para produzir uma molécula de gás carbónico e duas moléculas de água. Poderíamos perfeitamente multiplicar toda a equação por qualquer inteiro positivo. Por exemplo, multiplicando todos os termos por 2 obtém-se a equação química equilibrada

$$2CH_4 + 4O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 4H_2O.$$

Contudo, é convenção padrão utilizar os menores inteiros positivos que equilibram a equação. A equação acima é suficientemente simples para ser equilibrada por tentativa e erro, mas equações químicas mais complicadas requerem um método mais sistemático. Existem vários métodos que podem ser usados, mas apresentamos aqui um que usa sistemas de equações lineares. Examinemos a equação ora apresentada. Para equilibrar a equação precisamos de encontrar inteiros x_1, x_2, x_3 e x_4, tais que

$$x_1(CH_4) + x_2(O_2) \longrightarrow x_3(CO_2) + x_4(H_2O).$$

Contudo, para cada um dos átomos da equação, o número de átomos á esquerda deve ser igual ao número de átomos á direita. Expresso em formato tabular, temos

	Lado esquerdo		***Lado direito***
Carbono	x_1	=	x_3
Hidrogénio	$4x_1$	=	$2x_4$
Oxigénio	$2x_2$	=	$2x_3 + x_4$

de onde obtemos o sistema linear homogéneo

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

A matriz aumentada/ampliada deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e a forma escalonada reduzida por linhas desta matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo que a solução geral do sistema é

$$x_1 = \frac{t}{2}, x_2 = t, x_3 = \frac{t}{2}, x_4 = t,$$

onde t é arbitrário. Os menores valores inteiros positivos para as incógnitas ocorrem quando tomamos $t = 2$, de modo que podemos equilibrar a equação tomando $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,$x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Tal vai ao encontro da conclusão acima, pois substituindo esses valores na equação obtemos

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 2H_2O.$$

Vejamos um outro exemplo:

Exemplo 3.2.2. *Equilibre a equação química*

$HCL + Na_3PO_4 \Longrightarrow H_3PO_4 + NaCL$

[Ácido Clorídrico]+[Fosfato de Sódio]⟹[Ácido Fosfórico]+[Cloreto de Sódio]
Solução:

Sejam x_1,x_2, x_3 e x_4, inteiros positivos que equilibram a equação

$x_1(HCL) + x_2(Na_3PO_4) \Longrightarrow x_3(H_3PO_4) + x_4(NaCL)$

Igualando o número de átomos de cada tipo de ambos lados, resulta

$1x_1$=$3x_3$	*Hidrogénio (H)*
$1x_1$=$1x_4$	*Cloro*
$3x_2$=$1x_4$	*Sódio (Na)*
$1x_2$=$1x_3$	*Fósforo (P)*
$4x_2$=$4x_3$	*Oxigénio (O)*

Do que obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Do sistema linear homogêneo, obtemos a matriz aumentada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deixamos a cargo do leitor mostrar que a forma escalonada reduzida da matriz aumentada deste sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da qual concluímos que a solução geral desse sistema é

$x_1 = t$, $x_2 = \frac{t}{3}$, $x_3 = \frac{t}{3}$,$x_4 = t$

onde t é arbitrário. Para obter os menores valores inteiros positivos que equilibram a equação, tomamos $t = 3$ e resulta $x_1 = 3$,$x_2 = 1$,$x_3 = 1$ e $x_4 = 3$. Substituindo esses valores na equação dada temos

$3HCL + Na_3PO_4 \Longrightarrow H_3PO_4 + 3NaCL$

3.3 O problema de Alocação de Tarefas

O problema de alocação de tarefas é um conjunto de procedimentos que visam encontrar uma alocação ótima em uma dada matriz-custo. Na prática esta aplicação é utilizada nas empresas para encontrar a melhor distribuição de trabalhadores, jogadores em posições no campo, máquinas em locais de construção e em muitas outras áreas. Referenciamos para este tema a consulta de [2].

Esta aplicação podia ser muito mais explorada, mas neste trabalho já não nos foi possível. Isto porque este tema envolve conceitos da teoria de matrizes e da teoria de grafos, por exemplo: grafo bipartido, matriz de incidência, árvore de suporte (*conceitos introduzidos no capítulo 4 desta dissertação*).

O Método de Húngaro

O método húngaro, criado pelos húngaros D. König e E. Everváry, é um procedimento de 5 passos que a seguir passamos a descrever. Observamos aqui que em substituição dos traços horizontais e verticais que o procedimento descreve, nós utilizamos cores.

- Subtraia a menor entrada de cada linha de todas as entradas da mesma linha. Dessa forma, cada linha terá pelo menos uma entrada zero e todas as outras entradas são não negativas.

- Subtraia a menor entrada de cada coluna de todas as entradas de mesma coluna. Dessa forma, cada coluna terá pelo menos uma entrada zero e todas as outras entradas são não negativas.

- Risque um traço ao longo de linhas e colunas de tal modo que todas as entradas zero da matriz-custo fiquem riscadas. Para isso, utilize um número mínimo de traços.

- Teste de otimização.

  1. Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é n, então uma alocação ótima de zeros é possível e encerramos o procedimento.
  2. Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é menor do que n, então ainda não é possível uma alocação ótima de zeros. Nesse caso, vá para o passo seguinte.

- Determine a menor entrada não riscada por nenhum traço. Subtraia esta entrada de todas as entradas não riscadas e depois a some a todas as entradas riscadas tanto horizontais quanto verticalmente. Retorne ao passo III.

Exemplo 3.3.1. *Uma construtora tem quatro escavadeiras em quatro garagens diferentes. As escavadeiras devem ser transportadas a quatro diferentes locais de construção. As distâncias entre as escavadeiras e os locais de construção são dadas em km na tabela abaixo:*

	Local1	Local2	Local3	Local4
Escavadeira 1	90	75	75	80
Escavadeira 2	35	85	55	65
Escavadeira 3	125	95	90	105
Escavadeira 4	45	110	95	115

Tabela 3.2: Escavadeiras e as distâncias em relação aos locais de construção

Como devem ser transportadas as escavadeiras para os locais de construção para minimizar a distância total percorrida?

- *Matriz custo:*

$$\begin{bmatrix} 90 & 75 & 75 & 80 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 110 & 95 & 115 \end{bmatrix}$$

- *Subtraímos a menor entrada de cada linha a todas entradas da mesma linha.*

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{bmatrix}$$

- *Subtraímos a menor entrada de cada coluna a todas entradas da mesma coluna.*

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

- *Riscamos as entradas zero com um número mínimo de traços horizontais e verticais.*

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 35 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

- *Como o número de traços é inferior a n, subtraimos a menor entrada não riscada da matriz a cada uma das entradas não riscadas e somamos às entradas riscadas por dois traços.*

$$\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 55 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

- *Ainda não é possível obter uma solução ótima, visto que o número de traços ainda é inferior a n.*

- *Subtraímos a menor entrada não riscada de cada uma das entradas não riscadas e somamos às duas entradas riscadas por dois traços.*

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

- *Como as entradas zero estão riscadas com um número mínimo de 4 traços horizontais, a matriz deve conter uma solução ótima de zeros:*

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

- *Escavadeira 1 na construção 4 (80km)*

  Escavadeira 2 na construção 3 (55 km)

  Escavadeira 3 na construção 2 (95km)

  Escavadeira 4 na construção 1 (45 km)

- *80km+55km+95km+45km=275km é a menor distância percorrida para minimizar os custos.*

3.4 Aplicação à Criptografia

A descrição desta secção, bem como os exemplos que se seguem, foram referenciados de [2], páginas 466-468.

A Criptografia é o estudo de codificação e decodificação de mensagens.
Na linguagem da Criptografia, os códigos são denominados **cifras**, as mensagens não codificadas são **textos comuns** e as mensagens são textos **cifrados** ou **criptogramas**. O processo de converter um texto comum em cifrado é chamado **cifrar** ou **criptografar** e o processo inverso de converter um texto cifrado em comum é chamado **decifrar**.
As cifras mais simples, denominadas **cifras de substituição** são as que substituem cada letra do alfabeto por uma outra letra.
Por exemplo, na cifra de substituição

Comum	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Cifra	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Comum	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Cifra	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Tabela 3.3: Cifras de substituição letra por letra.

a letra de texto A é substituída por D, a letra de texto comum B por E e assim por diante.
Vamos apresentar um exemplo de um sistema poligráfico que consiste em dividir um texto comum em conjunto de n letras, cada um dos quais é substituído por um conjunto de n letras cifradas. Trata-se do sistema poligráfico chamado cifras de Hill que são baseados em transformações matriciais.
Vamos supor que cada letra de texto comum e de texto cifrado, excetuando Z, tem um valor numérico que especifica sua posição no alfabeto padrão como mostra a a tabela.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Tabela 3.4: Cifras de substituição letra por número.

Para transformar pares sucessivos de texto comum em texto cifrado procedemos da seguinte maneira:

1. Escolhemos uma matriz 2×2
   $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, com entradas inteiras para efetuar a codificação.
2. Agrupamos letras sucessivas de texto comum em pares, adicionando uma letra adicional fictícia para completar o último par se o texto comum tem um número ímpar de letras. Substituímos cada letra de texto comum por seu valor numérico.

3. Convertemos cada par sucessivo p_1p_2 de letras de texto comum em um vetor-coluna

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

e formamos o produto AP, o correspondente vetor cifrado.

4. Convertemos cada vetor cifrado em seu equivalente alfabético.

Exemplo 3.4.1.

Vamos usar a matriz
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ para obter a cifra de Hill da mensagem de texto comum (em inglês)

$$IAM \quad HIDING$$

Agrupando o texto em pares temos
$IA \quad MH \quad ID \quad IN \quad GG$. Para completar o último par adicionamos a letra fictícia G. Usando a tabela 3.4 ,este agrupamento é equivalente a
$9 \quad 1 \quad 13 \quad 8 \quad 9 \quad 4 \quad 9 \quad 14 \quad 77$

Codificamos cada par de letras. Sempre que ocorrer um inteiro maior do que 25, ele será substituído pelo resto da divisão deste inteiro por 26.

$IA \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}$ (mod 26)

$MH \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \end{bmatrix} (mod\, 26)$

$ID \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \end{bmatrix}$ (mod 26)

$IN \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 16 \end{bmatrix}$ (mod 26)

$GG \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \end{bmatrix}$ (mod 26)

Estes vetores correspondem aos pares de texto cifrado QL, QP e UU respetivamente. Coletando os pares obtemos a mensagem cifrada completa

$$KC \quad CX \quad QL \quad KP \quad UU$$

que normalmente seria transmitida como uma única cadeia sem espaços:

$$KCCXQLKPUU$$

O processo de decodificação ocorre de maneira inversa. Para decodificar a mensagem usamos a matriz inversa (modulo 26) da matriz codificadora. Vejamos um outro exemplo:

Exemplo 3.4.2.

Decifre a cifra de Hill, que foi criptografada pela matriz
$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$GTNKGKDUSK$$

Pela tabela 3.4, o equivalente numérico pelo texto cifrado é

$$7 \quad 20 \quad 14 \quad 11 \quad 7 \quad 11 \quad 4 \quad 21 \quad 19 \quad 11$$

Para obter os pares de texto comum, nós multiplicamos cada vetor cifrado pela seguinte matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix},$$

que é a matriz igual à matriz A^{-1} módulo 26 (isto é, $A^{-1} = B(mod\,26)$).

Temos,

$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 487 \\ 436 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 20 \end{bmatrix}$ (mod 26)

$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 278 \\ 321 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix}$ (mod 26)

$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271 \\ 265 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$ (mod 26)

$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 508 \\ 431 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 15 \end{bmatrix}$ (mod 26)

$\begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 283 \\ 361 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 23 \end{bmatrix}$ (mod 26)

Pela tabela 3.4, os equivalentes alfabéticos destes vetores são

$$ST \quad RI \quad KE \quad NO \quad WW$$

que fornece a mensagem

$$STRIKE \quad NOW$$

Capítulo 4

Teoria de Grafos

A Teoria de Grafos define grafos como sendo o elemento base do estudo e o grafo é representado por um conjunto de pontos (os nós ou os vértices), ligados por segmentos de retas (as arestas ou os arcos). Esta teoria permite a resolução de problemas em várias áreas como por exemplo a dos transportes, a das telecomunicações e as computacionais.

Neste capítulo, começamos por introduzir conceitos básicos e notações da Teoria de Grafos.

Para um estudo mais aprofundado, podemos consultar as seguintes referências: [12], [1], [9] e [10]. Este trabalho contém informação também daqui retirada.

4.1 Conceitos e resultados fundamentais

Definição 4.1.1. *Designa-se por* ***grafo (não orientado)*** *um terno $G = (V(G), E(G), \psi_G))$, onde $V = V(G)$ é um conjunto não vazio, $E = E(G)$ é um conjunto disjunto de V e ψ_G é uma função tal que, para cada $e \in E$, $\psi_G(e)$ denota um par não ordenado de elementos de V. O conjunto V designa-se por conjunto dos vértices, E por conjunto das arestas e ψ_G por função de incidência do grafo G.*

Se a função de incidência originar, para cada $e \in E$, um par ordenado de elementos de V, o terno tem a seguinte notação $\overrightarrow{G} = (V(\overrightarrow{G}), E(\overrightarrow{G}), \psi_{\overrightarrow{G}})$ e será designado por **grafo orientado** (ou **digrafo**). Aqui, o conjunto E designa-se por conjunto dos *arcos*.

Neste trabalho, temos como objetivo fazer uma abordagem geral à Teoria de Grafos em que apenas usaremos grafos não orientados e vamos referir-nos apenas ao termo grafo.

De seguida, iremos apresentar algumas designações usadas na Teoria de Grafos.

Para cada aresta $e \in E$ de um grafo G, ela resulta da imagem $\psi_G(e) = uv$, onde $u, v \in V$ e uv é um par não ordenado. Neste caso, dizemos que: u e v são vértices *extremos* de e; a aresta e é **incidente** aos seus vértices extremos; u e v são vértices **adjacentes**.

Ao conjunto dos vértices adjacentes a um determinado vértice $w \in V$ chamamos **vizinhança** de w.

Quando duas arestas são incidentes ao mesmo vértice, dizemos que estas arestas são **adjacentes**.

Se duas ou mais arestas têm os mesmos vértices extremos, então dizemos que são arestas **múltiplas** (ou **paralelas**).

A uma aresta e de um grafo G chamamos **lacete** se os vértices extremos coincidem num só vértice, isto é, $\varphi_G(e) = uu$ com $u \in V$

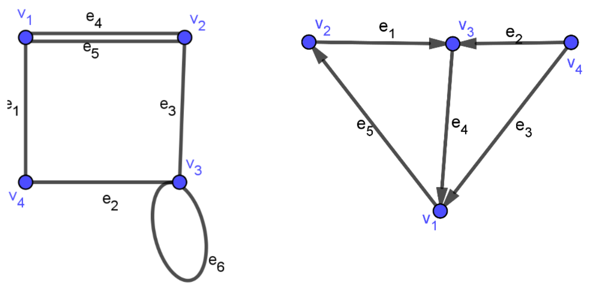


Figura 4.1: O primeiro grafo é **não orientado** e o segundo é **orientado**.

Na figura anterior, no grafo não orientado temos $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Podemos observar neste grafo que: as arestas e_4 e e_5 são múltiplas; a aresta e_6 é um lacete; v_1 e v_4 são os vértices extremos da aresta e_1, estes vértices são adjacentes e a aresta é incidente a eles; as arestas e_1 e e_2 são adjacentes.

Definição 4.1.2. *Um grafo diz-se **simples** se não contém arestas múltiplas nem lacetes.*

Quando um grafo simples possui um único vértice, dizemos que o grafo é **trivial**.

Se os conjuntos V e E forem finitos, então dizemos que o grafo é **finito** e denotamos por $\nu(G)$ ou ν o número de vértices e por $\varepsilon(G)$ ou ε o número de arestas de um grafo G. A ν chamamos a ordem de G e a ε chamamos a dimensão de G. Caso contrário, G é um grafo infinito.

Definição 4.1.3. *Dados dois grafos G e H, arbitrários, dizemos que são **iguais** se*

$$V(G) = V(H), \quad E(G) = E(H) \quad e \quad \varphi_G = \varphi_H \,.$$

Neste caso, escrevemos $G = H$.

Definição 4.1.4. *Dados dois grafos G e H, arbitrários, dizemos que H é um **subgrafo** se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é a restrição de ψ_G. Denotamos por $H \subseteq G$. Se $H \subset G$ então H é subgrafo **próprio** de G.*
*O grafo H é um subgrafo **abrangente** (ou **suporte**) do grafo G se $V(H) = V(G)$.*

Definição 4.1.5. *Sejam G um grafo e v um vértice arbitrário de G. O **grau** (ou **valência**) de v é o número de arestas incidentes a v, que denotamos por $d_G(v)$ ou, simplesmente, por $d(v)$. Notemos que os lacetes, caso existam, contam duas vezes.*

Exemplo 4.1.1. *Observando o grafo não orientado da figura 4.1, temos que*

$$d_G(v_1) = 3, \quad d_G(v_2) = 3, \quad d_G(v_3) = 4 \quad e \quad d_G(v_4) = 2\,.$$

Teorema 4.1.1. *Seja G um grafo com ε arestas e ν vértices.*
Designemos os vértices de G por $v_1, \cdots, v_\nu$.
A soma dos graus, de todos os vértices, é o dobro do número de arestas. Ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2\varepsilon$$

Demonstração: Esta demonstração será apresentada mais à frente, na subsecção da Matriz de Incidência porque assim temos um exemplo de aplicação da matriz de incidência na obtenção de resultados acerca da estrutura de um grafo e também por ser uma demonstração simples. □

Tendo em conta o exemplo 4.1.1, podemos verificar que

$$d_G(v_1) + d_G(v_2) + d_G(v_3) + d_G(v_4) \;=\; 3 + 3 + 4 + 2 \;=\; 12 \;=\; 2 \times 6\,.$$

A partir do teorema 4.1.1 obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.2. *O número de vértices de grau ímpar que existe num grafo é sempre par.*

Demonstração: Consideremos separadamente os vértices de grau par e os de grau ímpar. Temos assim

$$\sum_{i=1}^{\nu} d(v_i) = \sum_{d(v_j)\, par} d(v_j) + \sum_{d(v_k)\, mpar} d(v_k)\,. \qquad (4.1)$$

A primeira parcela do segundo membro da equação anterior é sempre um número par. A segunda parcela é um número par se o somatório dos graus ímpares tiver uma quantidade par de parcelas. Ou seja, o número de vértices com grau ímpar tem de ser par. □

Definição 4.1.6. *Seja G um grafo simples. Denotamos por G^c o grafo* ***complementar*** *de G, que é o grafo simples obtido a partir de G cujo conjunto de vértices coincide e no qual quaisquer dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em G.*

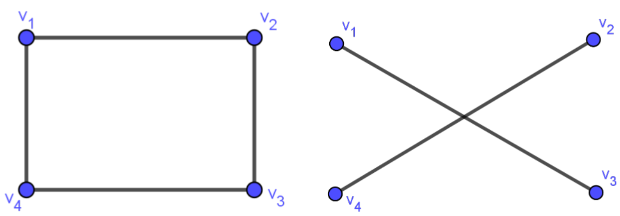


Figura 4.2: Os grafos são complementares.

Definição 4.1.7. *Sejam $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ e $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ dois grafos arbitrários. Dizemos que são isomorfos, e denota-se por $G \cong H$, se existem duas bijeções $\varphi : V(G) \to V(H)$ e $\theta : E(G) \to E(H)$ tais que*

$$\psi_G(e) = uv \text{ se e só se } \psi_H(\theta(e)) = \varphi(u)\varphi(v)\,.$$

No caso de os grafos serem simples, dizemos que são isomorfos se existe uma bijeção $\varphi : V(G) \to V(H)$ tal que

$$uv \in E(G) \text{ se e só se } \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)\,.$$

Se um grafo tem cada vértice adjacente a todos os outros, então o grafo é chamado de grafo **completo** e denota-se por K_n. Por exemplo:

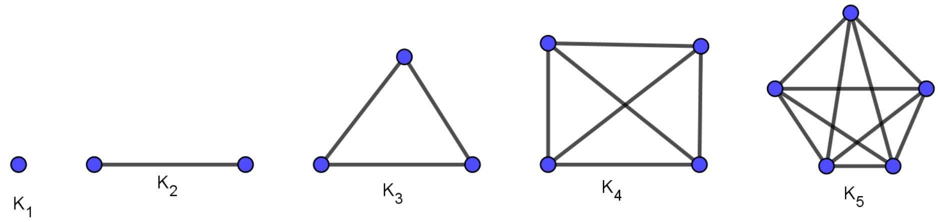


Figura 4.3: Grafos completos $K_1, \cdots, K_5$

Um grafo simples G é chamado de grafo **nulo** quando não tem arestas, ou seja, $E(G) = \emptyset$.

Definição 4.1.8. *Um grafo G diz-se* ***bipartido*** *se existe uma partição do seu conjunto de vértices V em X e Y, tal que cada aresta de G tem um dos vértices extremos em X e o outro vértice extremo em Y. Esta partição do conjunto dos vértices do grafo permite representar o grafo pelo terno $(X, Y, E(G))$.*
Quando quaisquer vértices $x \in X$ e $y \in Y$ são tal que $xy \in E(G)$, dizemos que G é um grafo ***bipartido completo****. Adicionalmente, se temos $d_G(x) = s = \#(Y), \forall x \in X$ e $d_G(y) = t = \#(X), \forall y \in Y$, então o grafo G é denotado por $K_{s,t}$.*

Para ilustrar esta definição, apresentamos os dois exemplos seguintes:

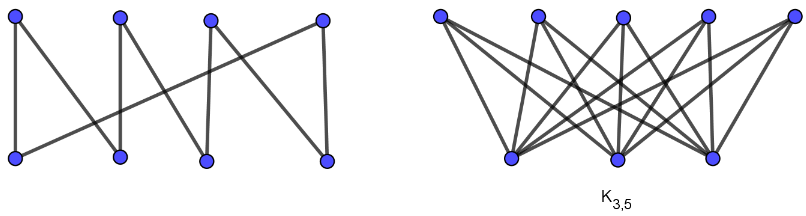


Figura 4.4: Grafos bipartidos.

Definição 4.1.9. *Um* ***passeio*** *num grafo G é toda a sequência não vazia*

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$$

tal que $v_0, v_1, \cdots, v_k \in V(G)$, $e_1, e_2, \cdots, e_k \in E(G)$ e os vértices v_{i-1} e v_i são vértices extremos da aresta e_i, para $i = 1, \cdots, k$. O vértice v_0 designa-se por vértice inicial do passeio P, o vértice v_k designa-se por vértice final do passeio e os vértices $v_1, \cdots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios de P. Podemos também dizer que P é um passeio entre os vértices v_0e v_k.

- *Se num passeio todas as arestas são distintas, então o passeio designa-se por **trajeto**. Adicionalmente, se também todos os vértices são distintos, o passeio designa-se por **caminho**.*

- *Se* $v_0 = v_k \ (k \neq 0)$ *estamos perante um **circuito**.*

- *Um **ciclo** é um passeio com pelo menos uma aresta, onde não se repetem arestas nem vértices (com exceção dos vértices terminais do passeio).*

- *O **comprimento** de um passeio, ou trajeto, ou caminho é igual ao número de arestas que o constitui (com eventual repetição) .*

Exemplo 4.1.2. *Considere o grafo abaixo.*

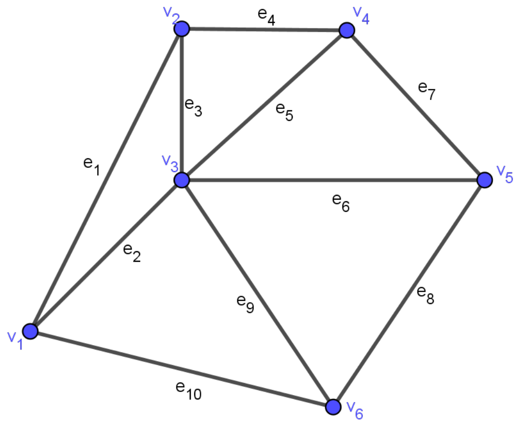


Figura 4.5:

Um passeio é, por exemplo, a sequência $v_1, v_3, v_5, v_6, v_3, v_2, v_1$ *que tem comprimento* 6*. Também é um trajeto porque não há repetição de arestas.*
Um exemplo de caminho é a sequência v_1, v_2, v_3, v_5, v_6*, com comprimento* 4*.*

Definição 4.1.10. *Um grafo diz-se **conexo** se entre cada par de vértices existe um caminho que os une. Caso contrário, o grafo diz-se **desconexo**.*

Observemos que um grafo que possui um único vértice v é conexo, uma vez que podemos considerar a existência de um caminho de comprimento nulo entre v e v.
Sendo o grafo G desconexo, podemos repartir o conjunto dos seus vértices em dois ou mais subconjuntos disjuntos $V_1, V_2, \cdots, V_k$, tais que $\forall u \in V_i$ e $\forall v \in V_j$, com $i \neq j$, u e v não são adjacentes. Portanto, G ficará subdividido em k subgrafos, tal que cada subgrafo é conexo. A estes subgrafos chamamos **componentes conexas** de G.

O grafo da Figura 4.5 é conexo (*visto que entre cada par de vértices existe sempre um caminho que os une*). Na figura seguinte, apresentamos um grafo desconexo:

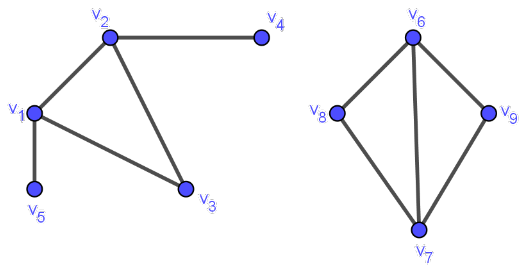


Figura 4.6: Grafo desconexo com duas componentes.

O grafo G é desconexo e facilmente conseguimos reconhecer as suas componentes conexas divididos em dois subconjuntos $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, V_5\}$ e $V_2 = \{v_6, v_7, v_8, v_9\}$. Isto motiva-nos ao teorema que se segue.

Teorema 4.1.3. *Um grafo é desconexo se e só se o seu conjunto de vértices V pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos não vazios V_1 e V_2, tal que não existe aresta em G cujo vértice extremo está no subconjunto V_1 e outro no subconjunto V_2.*

Demonstração: Suponha que a partição de V existe. Consideremos dois vértices arbitrários a e b de G, tal que $a \in V_1$ e $b \in V_2$. Nenhum caminho pode existir entre os vértices a e b; de outra maneira, haveria pelo menos uma aresta com um vértice extremo em V_1 e outro em V_2. Consequentemente, se a partição existe, G não é conexo.

De modo inverso, seja G um grafo desconexo. Considere um vértice a em G. Seja V_1 o conjunto de todos os vértices que estão ligados por caminhos até a. Uma vez que G é desconexo, V_1 não inclui todos vértices de G. Os restantes vértices formaram o conjunto não vazio V_2. Nenhum vértice em V_1 é adjacente a algum em V_2. $\square$

Teorema 4.1.4. *Se um grafo G tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então existe um caminho unindo estes dois vértices.*

Demonstração: Seja G um grafo com todos os vértices de grau par, exceto v_1 e v_2, que são de grau ímpar. O teorema que também é válido para todas as componentes conexas de um grafo desconexo, afirma que nenhum grafo pode ter um número ímpar de vértices de grau ímpar. Portanto, no grafo G,os vértices v_1 e v_2 estão na mesma componente conexa e consequentemente existe um caminho entre eles. $\square$

Definição 4.1.11. *Um grafo simples G diz-se uma* ***floresta*** *se G não contém circuitos.*

Uma floresta conexa designa-se por ***árvore****, ou seja, consideramos que uma árvore é uma componente conexa de uma floresta.*

Por exemplo:

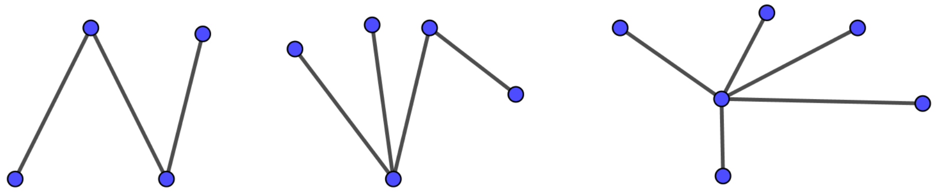


Figura 4.7: Floresta formada por três árvores

Definição 4.1.12. *Designamos por árvore* ***abrangente*** *(ou* ***de suporte****) de um grafo conexo G a todo subgrafo abrangente de G que é uma árvore e contém todos os vértices do grafo.*

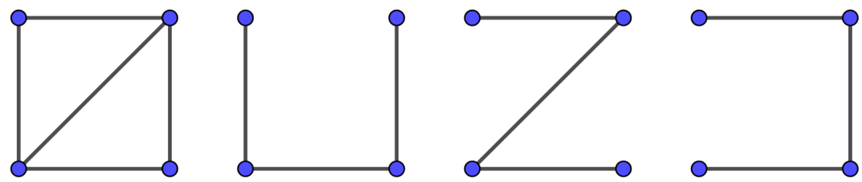


Figura 4.8: Grafo G e três árvores abrangentes de G.

4.2 Grafos e Matrizes

Na secção anterior apresentámos vários conceitos da teoria de grafos onde ilustramos um grafo G na forma pictórica, como um conjunto de pontos ou nós que chamamos vértices e um conjunto de retas que ligam esses pontos que chamamos de arestas. Foi muito conveniente para a visualização, porém não é a única maneira de representarmos um grafo, pois existem informações que um grafo pode conter que não caberiam num papel. As outras representações estão no campo computacional.
Uma matriz é uma maneira conveniente e útil para representar um grafo no computador. As matrizes prestam-se facilmente à manipulação mecânica. Além disso, muitos resultados conhecidos da álgebra matricial podem ser aplicados para o estudo das propriedades estruturais dos grafos.
Em muitas aplicações da teoria de grafos, tais como na análise de um circuito elétrico e Pesquisa Operacional, as matrizes também acabam sendo um caminho natural de expressar o problema.

4.2.1 Matriz de adjacência

Definição 4.2.1. *Dado um grafo G tal que $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$, designa-se por* ***matriz de adjacência*** *dos vértices G, ou simplesmente,* ***matriz de adjacência*** *de G e denota-se por $A_G = (a_{ij})$, a matriz de dimensão $\nu \times \nu$, tal que a_{ij} é igual ao número de arestas entre os vértices v_i e v_j.*
No caso de grafos orientados, a_{ij} é igual ao número de arcos com cauda em v_i e cabeça em v_j.

Exemplo 4.2.1. *Vamos determinar a matriz de adjacência do grafo representado na seguinte figura:*

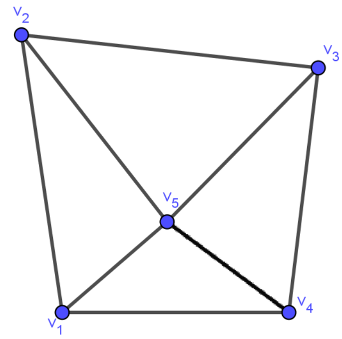


Figura 4.9:

Não existe nenhum lacete, ou seja, uma aresta do tipo uu $(u \in V)$*, consequentemente o elemento da diagonal principal respetivo é zero. Por não existirem arestas múltiplas, a matriz de adjacência só tem zeros e uns.*

$$A(G) = \begin{array}{c|ccccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

Algumas observações importantes podem ser registadas sobre a matriz de adjacência $A(G)$ de um grafo G:

1. A matriz $A(G)$ é simétrica em relação à diagonal principal.

2. As entradas da diagonal principal de $A(G)$ são iguais a zero se e só se o grafo não tem lacetes.

3. Se o grafo não tem lacetes nem arestas múltiplas, o grau de um vértice é igual ao número de $1's$ nas correspondentes linhas e colunas de $A(G)$.

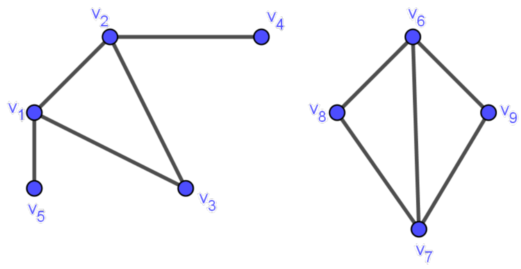
4. Um grafo G é desconexo e está em duas componentes G_1 e G_2 se e só se a sua matriz de adjacência $A(G)$ pode ser representada da seguinte forma (*matriz por blocos*):

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & A(G_2) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.2.2. *Dada a seguinte matriz de adjacência de um grafo:*

$$A(G) = \begin{array}{c|ccccc|cccc|}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Esta matriz corresponde ao seguinte grafo:



A matriz de adjacência é um exemplo prático de quando queremos saber sobre a estrutura de um grafo. O próximo resultado, ilustra esta ideia.

Teorema 4.2.1. *Seja G um grafo simples e $A(G)$ a sua matriz de adjacência. O número de passeios de comprimento K entre os vértices v_i e v_j de G, $P_{ij}(k)$, é igual à entrada a_{ij}^k da matriz $A^k(G)$.*

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por indução sobre k.
Para $k = 1$ o resultado é verdadeiro, na medida em que só existe um único passeio de comprimento 1 entre os vértices v_i e v_j se existir uma aresta que os ligue e neste caso, por definição de matriz de adjacência $a_{ij} = 1 = p_{ij}(1)$.
Admitamos, por hipótese de indução, que para $k > 2$ o número de passeios de comprimento k-1 entre os vértices v_i e v_j em G é igual à entrada a_{ij}^{k-1} da matriz $A^{k-1}(G)$. Vejamos para os passeios de comprimento k.
Ora, $A^k(G) = A^{k-1}(G).A(G)$. Assim, qualquer que sejam $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ vem que

$$a_{ij}^k = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{k-1} a_{rj} = \sum_{r=1}^{n} p_{ir}(k-1) p_{rj}(1) = p_{ij}(k)$$

já que cada passeio de comprimento $k - 1$ entre os vértices i e j acrescentamos uma aresta, obtemos passeios de comprimento k.
Logo $a_{ij}^k = p_{ij}(k)$, para todo o $k \geq 1$. Assim, concluímos a demonstração. $\square$

Exemplo 4.2.3. *Tendo em conta o grafo representado na figura 4.9 e a sua respetiva matriz de adjacência, vamos fazer alguns apontamentos em relação aos passeios deste grafo.*

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2(G) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A entrada $a_{24} = 3$ de $A^2(G)$ dá-nos o número de passeios de comprimento 2 entre os vértices v_2 e v_4. São eles:

$$v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4$$

$$v_2, v_2v_5, v_5v_4, v_4$$

$$v_2, v_2v_1, v_1v_4, v_4$$

Agora com a matriz

$$A^3(G) = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

e observando a entrada a_{24} que é igual a 4, esta dá-nos o número de passeios de comprimento 3 entre os vértices v_2 e v_4. São eles:

$$v_2, v_2v_3, v_3v_5, v_5v_4, v_4$$

$$v_2, v_2v_5, v_5v_3, v_3v_4, v_4$$

$$v_2, v_2v_1, v_1v_5, v_5v_4, v_4$$

$$v_2, v_2v_5, v_5v_1, v_1v_4, v_4$$

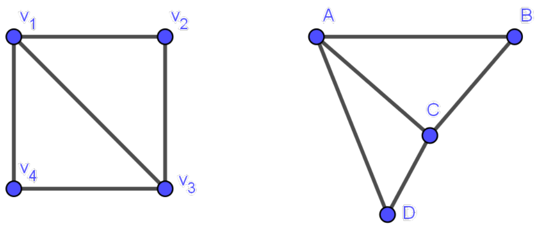
Proposição 4.2.1. *(Teste de isomorfismo) Dizemos que dois grafos arbitrários são isomorfos se é possível ordenar os seus respetivos conjunto de vértices tal que as suas matrizes de adjacência sejam iguais.*

Exemplo 4.2.4. *Os grafos da figura abaixo são isomorfos são isomorfos porque ordenando os vértices v_1, v_2, v_3, v_4 e os vértices A, D, C, B, os grafos têm a mesma matriz de adjacência.*

$$A(G) = \begin{array}{c|cccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

e

$$A(H) = \begin{array}{c|cccc|} & A & D & C & B \\ \hline A & 0 & 1 & 1 & 1 \\ D & 1 & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 1 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



a) Grafo G   b)Grafo H

Figura 4.10:

O resultado que a seguir apresentamos pode ser usado para calcular o número de árvores abrangentes, em qualquer grafo conexo simples.

Teorema 4.2.2. *(Teorema de Kirchhoff ou Teorema da Matriz Árvore). Seja G um grafo simples com o conjunto de vértices $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$ e $M = [m_{ij}]_{\nu\times\nu}$, tal que $m_{ii} = d(v_i)$ e para $i \neq j$ temos $m_{ij} = -1$ se v_i e v_j são adjacentes e $m_{ij} = 0$ se v_i e v_j não são adjacentes.*
Então, o número de árvores abrangentes de G é igual ao complemento algébrico de qualquer elemento de M. (o conceito de complemento algébrico encontra-se no capítulo 2 secção 2.6).

Vamos omitir a demonstração deste teorema porque envolve conceitos que não foram abordados neste trabalho, contudo apresentaremos um exemplo que ilustra este resultado.

Exemplo 4.2.5. *Consideremos o grafo completo K_3:*

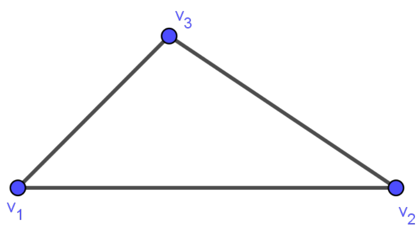


Figura 4.11: Grafo completo K_3.

Temos que $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 2$ *e* $d(v_3) = 2$.
A Matriz Árvore associada ao grafo dado é

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculemos o complemento algébrico $\hat{a}_{ij}$ *de cada um dos elementos* m_{ij} *de* M*:*

$$\hat{a}_{11} = det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \quad \hat{a}_{12} = det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \quad \hat{a}_{13} = det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\hat{a}_{21} = det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \quad \hat{a}_{22} = det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \quad \hat{a}_{23} = det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\hat{a}_{31} = det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 3 \quad \hat{a}_{32} = det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 3 \quad \hat{a}_{33} = det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$

Como todos os complementos são iguais a 3, que é o número das árvores abrangentes, portanto as árvores abrangentes são:

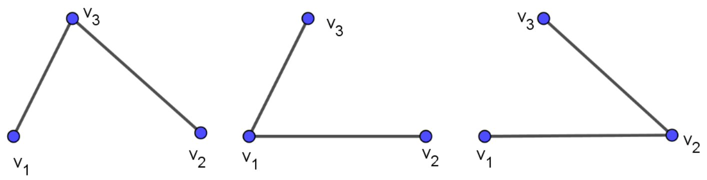


Figura 4.12: Árvores abrangentes do grafo completo k_3.

4.2.2 Matriz de Incidência

Definição 4.2.2. *Dado um grafo* G*, tal que* $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$ *e* $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$*, designa-se por matriz de incidência aresta vértice de* G *ou, simplesmente, matriz de incidência de* G*, a matriz* $M(G) = (a_{ij}), 1 \leq i \leq \nu$*,* $1 \leq j \leq \varepsilon$*, tal que*

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \textit{Se } e_j = v_p v_q, \textit{ com } i \notin \{p, q\}; \\ 1, & \textit{se } e_j = v_i v_k, \textit{ com } k \neq i; \\ 2, & \textit{se } e_j = v_i v_i. \end{cases}$$

No caso de grafos orientados, sem lacetes, as entradas da matriz de incidência $M(\overrightarrow{G}) = (m_{ij})$ são definidas por

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{Se } e_j = v_p v_q, \text{ com } i \in \{p, q\}; \\ -1, & \text{se } e_j = v_k v_i, \text{ para algum vértice } v_k; \\ 1, & \text{se } e_j = v_i v_k, \text{ para algum vértice } v_k. \end{cases}$$

Exemplo 4.2.6.

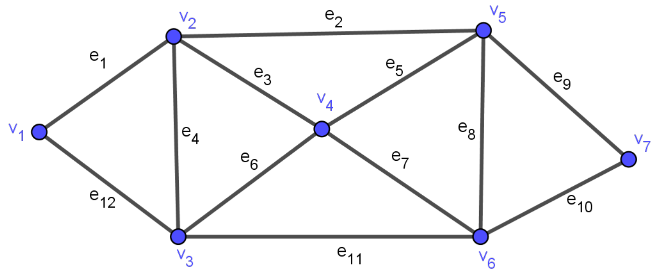


Figura 4.13: Grafo G da matriz de Incidência

Uma vez que o grafo representado na figura 4.13 é de ordem $\nu = 7$ *e dimensão* $\varepsilon = 12$*, temos*

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}.$$

As arestas são $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_5$, $e_3 = v_2v_4$, $e_4 = v_2v_3$, $e_5 = v_4v_5$, $e_6 = v_3v_4$, $e_7 = v_4v_6$, $e_8 = v_5v_7$, $e_9 = v_5v_7$, $e_{10} = v_6v_7$, $e_{11} = v_6v_3$, $e_{12} = v_1v_3$.

A matriz de incidência deste grafo é dada por

$M(G) =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
v_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
v_4	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
v_5	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

A figura 4.14 mostra um grafo orientado e sua matriz de incidência $M(\overrightarrow{G})$.

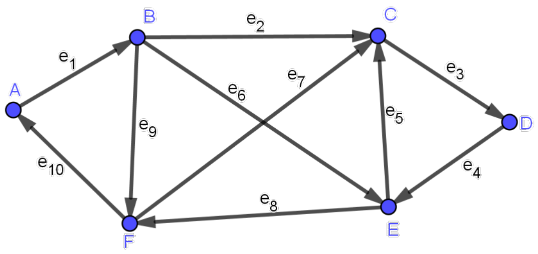


Figura 4.14: Grafo orientado e sua matriz de Incidência

$$M(\overrightarrow{G}) = \begin{array}{c|cccccccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\ \hline A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ B & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Dada uma matriz de incidência de um grafo sem lacetes, podemos fazer as seguintes observações:

1. Se uma aresta é incidente exatamente em dois vértices, cada coluna de $M(G)$ tem exatamente dois $1's$.

2. O número de $1's$ em cada linha é igual ao grau do vértice correspondente.

3. Uma linha com zeros representa um vértice isolado.

4. As arestas paralelas num grafo originam colunas iguais na matriz de incidência.

5. Se um grafo é desconexo e está dividido em duas componentes conexas G_1 e G_2, a matriz de incidência $M(G)$ do grafo G pode ser escrita em forma de bloco diagonal,como

$$M(G) = \begin{bmatrix} M(G_1) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & M(G_2) \end{bmatrix}$$

   onde $M(G_1)$ e $M(G_2)$ são as matrizes de incidência correspondentes a G_1 e G_2. Esta observação resulta no facto de que nenhuma aresta em G_1 é incidente nos vértices de G_2, e vice-versa. Obviamente que esta nota é válida para um grafo desconexo sem nenhum número de componentes conexas.

6. A permutação de quaisquer linhas ou colunas na matriz de incidência, simplesmente corresponde em remarcar os vértices e as arestas no mesmo grafo.

De seguida, vamos demonstrar o teorema 4.1.1, que é uma aplicação onde se usa a matriz de incidência:

Demonstração: Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$ e $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon\}$ e seja $M(G) = (m_{ij})$ a correspondente matriz de incidência. Logo, a soma da linha correspondente ao vértice v é igual $d_G(v)$ e, como consequência, $\sum_{v \in V} d_G(v)$ é igual à soma de todas as entradas da matriz $M(G)$. Por outro lado, uma vez que a soma das entradas de cada coluna de $M(G)$ é igual a 2, podemos concluir que a soma de todas as entradas de $M(G)$ é igual a 2ε

$\square$

Este teorema vem reforçar o teorema 4.1, que já foi demonstrado.

No caso de grafos orientados, podemos também concluir que:

$$\sum_{v \in V(G)} d_G^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d_G^-(v) = |E(G)| = \varepsilon\,.$$

4.2.3 Espaço vetorial do conjunto de vértices

Nesta abordagem, pretendemos mostrar que uma árvore abrangente de um grafo simples, corresponde a uma base do espaço coluna da matriz de incidência de G.

Da Álgebra Linear sabemos que o espaço coluna de uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto dos vetores coluna que são combinações lineares das colunas de A.

Seja G um grafo simples com n vértices e m arestas e seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ e $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ordenações fixas de $E(G)$ e $V(G)$, respetivamente.

Analogamente para o espaço de arestas $W_E(G)$, a coleção do subconjunto de vértices de $V(G)$ sob soma de anel, forma um espaço vetorial no campo infinito $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$(módulo 2).

Nesta configuração, $M(G)$ representa a transformação linear do espaço de arestas $W_E(G)$ para o espaço de vértices $W_V(G)$ mapeando os vetores caraterísticos do subconjunto de arestas para os vetores caraterísticos dos subconjuntos de vértices.

Exemplo 4.2.7. *Considere o grafo G e a sua correspondente matriz de incidência M(G).*

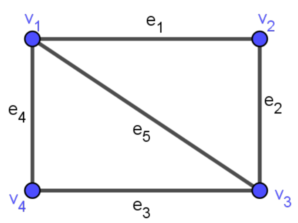


Figura 4.15: Grafo G e sua matriz de incidência

$$M(G) = \begin{array}{c|ccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

O vetor caraterístico da imagem do subspaço $E_1 = \{e_1, e_3, e_5\}$, é obtido multiplicando o vetor *caraterístico E_1 por $M(G)$ (módulo 2), como se segue:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (módulo 2).}$$

Portanto, E_1 é mapeado para o subconjunto de vértices $V_1 = \{v_2, v_4\}$. De notar que V_1 consiste nos pontos extremidades do caminho formado pelas arestas de E_1, que é uma árvore abrangente do grafo G.

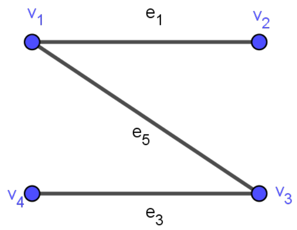


Figura 4.16: Árvore abrangente do grafo G

Todo o caminho aberto em G é mapeado para o subconjunto de vértices, que consiste nos caminhos com vértices iniciais e finais.

4.3 Matriz de circuito e matriz de caminho

Para terminar este capítulo vamos definir dois tipos de matrizes que decorrem da aplicação da matriz de incidência: a **matriz de circuito** e a **matriz de caminho**. Na prática, estas matrizes são usadas nas redes de telecomunicações e de transportes.

Definição 4.3.1. *Seja q o número de diferentes circuitos no grafo G e ε o número de arestas em G. Assim a matriz de circuito $B = [b_{ij}]$ de G é um $q \times \varepsilon$ matriz de zeros e uns (mod 2) definido como se segue*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{Se o i-ésimo circuito inclui a j-ésima aresta} \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases} .$$

Para salientar o facto de que B é uma matriz de circuito do grafo G, a matriz de circuito também pode ser escrita como $B(G)$. Vejamos um exemplo a partir do grafo da figura 4.17 e a sua respetiva matriz de incidência.

$$M(G) = \begin{array}{c|cccccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

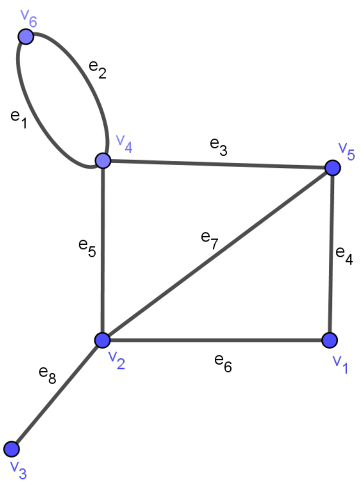


Figura 4.17: Grafo e sua matriz de incidência

O grafo tem quatro circuitos diferentes, que são: $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_5, e_7\}$, $\{e_4, e_6, e_7\}$ e $\{e_3, e_4, e_6, e_5\}$. Enumerando estes circuitos temos a sequência $1, 2, 3$ e 4. Portanto a sua matriz de circuito é do tipo 4×8 com zeros e uns.

$$B(G) = \begin{array}{c|cccccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

As observações seguintes podem ser feitas sobre a matriz $B(G)$ do grafo G:

1. Uma coluna com todas entradas iguais a zero corresponde a aresta que não pertence a nenhum circuito.

2. Cada linha de $B(G)$ é um vetor circuito.

3. Ao contrário da matriz de incidência, uma matriz de circuito é capaz de representar um lacete. A correspondente linha terá um único 1.

4. O número de $1's$ numa linha é igual ao número de arestas no circuito correspondente.

5. Se o grafo é desconexo e consiste em dois blocos (ou componentes) G_1 e G_2, a matriz de circuito $B(G)$ pode ser escrita em forma de bloco diagonal, como

$$B(G) = \begin{bmatrix} B(G_1) & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & B(G_2) \end{bmatrix}$$

onde, $B(G_1)$ e $B(G_2)$ são matrizes de circuito de G_1 e G_2. Esta observação resulta no facto de que os circuitos em G_1 não têm arestas pertencendo em G_2 ,e vice-versa.

6. A permutação de quaisquer linhas ou colunas na matriz de circuito simplesmente corresponde em reordenar o circuito e as arestas.

Um importante teorema que relaciona a matriz de incidência e a matriz de circuito de um grafo G sem lacetes é:

Teorema 4.3.1. *Seja $B(G)$ e $M(G)$, matriz de circuito e matriz de incidência respetivamente de um grafo G sem lacetes, cujas colunas estão dispostas usando a mesma ordem das arestas. Então toda linha de $B(G)$ é ortogonal para toda linha de $M(G)$.*

$$M(G).B^T(G) = B(G).M^T(G) = 0(mod\, 2)$$

Demonstração: Considere um vértice v e um circuito C no grafo G. Ou v está em C ou não está. Se v não está em C, não existe aresta no circuito C que é incidente em v. De outra maneira, se v está em C, o número de arestas no circuito C que são incidentes em v, são exatamente duas. Com esta observação em mente, considere a i-ésima linha em $M(G)$ e a j-ésima linha de $B(G)$. Desde que as arestas estejam dispostas na mesma ordem, as entradas diferentes de zero nas posições correspondentes ocorrem somente se a aresta particular é incidente no i-ésimo vértice e também está no j-ésimo circuito.
Se o i-ésimo vértice não está no circuito, não existe tal entrada diferente de zero e o produto interno de duas linhas é zero. Se o i-ésimo vértice está no i-ésimo circuito, há exatamente dois $1's$ na soma de produtos de entradas individuais.
Desde que $1+1=0$ (mod 2), o produto interno de duas linhas arbitrárias, uma de $M(G)$ e outra de B(G) é zero. Assim fica demonstrado o teorema. □

Exemplo 4.3.1. *Multipliquemos a matriz de incidência e a matriz transposta de circuito do grafo da figura 4.17.*

$$M(G).B^T(G) = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&1\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \textit{(mod 2)}.$$

A matriz de circuito de um grafo G, possui uma submatriz que está relacionada com a árvore abrangente do grafo. Esta árvore forma um circuito chamado de **circuito fundamental**. É fácil notar que se adicionarmos uma aresta em dois vértices deste circuito, criamos um novo circuito o que nos dá a confirmação de que além do circuito fundamental temos outros circuitos que são obtidos como combinação linear do circuito fundamental.
Numa matriz de circuito, se mantivermos apenas todas as linhas que correspondem ao conjunto do circuito fundamental e removermos as outras linhas, não perderemos nenhuma informação. As restantes linhas podem ser reconstituídas a partir das linhas que correspondem ao conjunto de circuito fundamental. Por exemplo na matriz de circuito do grafo da figura 4.17, a quarta linha é a soma da segunda linha com a terceira linha (mod 2).
A uma submatriz de uma matriz de circuito em que todas linhas correspondem a um conjunto de circuitos fundamentais é chamada de **matriz fundamental de circuito**.
Se n é o número de vértices e ε é o número de arestas num grafo conexo, a matriz fundamental de circuito é da forma $(\varepsilon - n + 1) \times \varepsilon$, porque o número de circuitos fundamentais é $\varepsilon - n + 1$.

A matriz fundamental de circuito denota-se por

$$B_f(G) = [I_u|B_t]\,,$$

onde I_u é a matriz identidade de ordem $u = \varepsilon - n + 1$ e B_t é a submatriz $u \times (n-1)$ restante, que corresponde aos ramos da árvore abrangente.

Na figura 4.18 temos um exemplo de uma árvore abrangente do grafo G (grafo da figura 4.17) e a respetiva matriz fundamental de circuito.

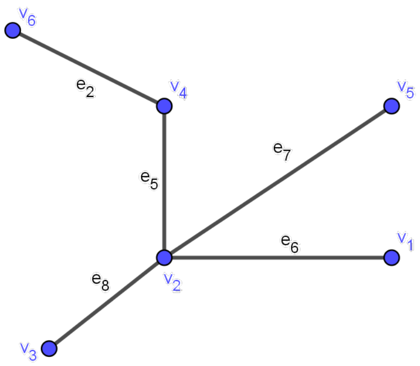


Figura 4.18: Árvore abrangente e a sua matriz fundamental de circuito.

$B_f(G) =$

	e_1	e_3	e_4	e_2	e_5	e_6	e_7	e_8
1	1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0

Observamos que durante o processo de escalonamento permutamos as colunas e_2, e_3 e e_4.

Definição 4.3.2. *A* ***matriz de caminho*** *é definida por um par específico de vértices* (x, y) *em um grafo e é denotada por* $P(x, y)$*. As linhas em* $P(x, y)$ *correspondem a diferentes caminhos entre os vértices* x *e* y*, e as colunas correspondem as arestas em* G*, isto é, a matriz de caminho para os vértices* (x, y) *é* $P(x, y) = [P_{ij}]$*, onde*

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{Se a j-ésima aresta encontra-se no i-ésimo caminho.} \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$$

Como ilustração, considere todos caminhos entre os vértices v_3 e v_4 do grafo da figura 4.17. Existem três caminhos diferentes: $\{e_8, e_5\}$, $\{e_8, e_7, e_3\}$ e $\{e_8, e_6, e_4, e_3\}$. Vamos enumerá-los como 1, 2 e 3, respetivamente. Então temos uma matriz de caminhos 3×8, $P(v_3, v_4)$:

$P(v_3, v_4) =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
1	0	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	1	0	1

Dada uma matriz de caminho de um grafo, podemos fazer as seguintes observações:

1. Uma coluna de $0's$ corresponde a uma aresta que não se encontra em qualquer caminho entre x e y.
2. Uma coluna de $1's$ corresponde a uma aresta que se encontra em todos caminhos entre x e y.
3. Não existe uma linha nula, isto é, com todas entradas iguais a zero.
4. A soma de quaisquer duas linhas em $P(x, y)$ corresponde a um circuito.
5. Se as arestas de um grafo conexo estão dispostas na mesma ordem para as colunas da matriz de incidência $M(G)$ e o caminho $P(x, y)$, então o produto (mod 2)

   $$M(G).P^T(x, y) = R$$

   onde a matriz R tem $1's$ em duas linhas x e y e as restantes $n - 2$ linhas são nulas.

Para consolidarmos a última observação, apresentamos a seguir um exemplo.

Exemplo 4.3.2. *Vamos multiplicar a matriz de incidência do grafo da figura 4.17 com a transposta de* $P(v_3, v_4)$.

$$M(G).P^T(v_3, v_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|ccc|} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \text{(mod 2)}.$$

Capítulo 5

Considerações Finais

O estudo sobre Matrizes e sobre Grafos é um campo vasto e não se encerra nesta abordagem. Na realidade o trabalho feito é uma gota no oceano. O uso das matrizes no estudo dos grafos tem sido e continua sendo objeto de intensa investigação, a literatura é cada vez mais vasta.

Neste trabalho procurámos, de forma sintética, apresentar os conceitos relacionados com a Álgebra Matricial em direção às Transformações Lineares. Partimos de definições elementares e sempre que possível providenciamos exemplos que reforcem as definições e as propriedades.

A teoria de matrizes foi necessária para dar suporte às aplicações e principalmente à Teoria de Grafos. A partir das matrizes de adjacência e incidência foi possível saber sobre a estrutura de um grafo e conseguimos investigar resultados.

Bibliografia

[1] D.M. Cardoso, J. Szymanski, M. Rostami, *Matemática Discreta*. Escolar Editora (2009) 41

[2] A. Rorres, *Algebra Linear com Aplicações*, John Wiley, 2012. 31, 35, 38

[3] I. Cabral, C. Perdigão,C. Saiago, *Álgebra Linear*, Escolar editora, 2009.

[4] A.P. Santana J.F. Queiró, *Introdução à Álgebra linear*, grádiva, 2013. 5

[5] D.C. Lay, S. Lay, J.J. McDonald, *Linear Algebra and its Applications*, Pearson, 2016. 5

[6] M.A.F. Neves, L. Faria, B. Ribeiro,*Mátemática Aplicada às Ciências Sociais, 11ºAno, 1ª edição*, Porto Editora. 3

[7] C.B. Boyer, *História da Matemática*, Edgard Blucher Ltda, 2003. 1

[8] M.F. Estada, C. C. de Sá, J.F. Queiró, M. Silva, M. J. Costa, *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000. 1

[9] J. Grosss, J. Yellen,*Graph Theory and its Applications*, Gross Yellen, 1998. 41

[10] C. Marques, V. Miranda, J. Mosca, J. Maças , R. P. dos Santos, *Cálculo Matricial, Vol III-Aplicações*, Instituto Piaget. 41

[11] H. Anton, R.C. Busby, *Álgebra Linear Contemporânea*, ARTMED Editora S.A, 2003. 33

[12] N. Deo, *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Dover Publications, 1974. 1, 41