Capítulo 2 — Dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções

Durante séculos, os matemáticos depararam-se com dificuldades que conduziram à evolução de conceitos para serem aceites pela comunidade. Caraça (1951) refere que uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a procura de regularidades dos fenómenos naturais. Afirma, ainda, que o conceito de função surge como o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas que dão significado à realidade. Na aprendizagem do conceito de função os alunos revelam também dificuldades. Foram realizados vários estudos ao longo dos últimos anos para as identificar e tentar compreender as suas causas. Concluiu-se que essas dificuldades prendem-se com a compreensão da própria definição de função; com a terminologia do conceito função e toda a simbologia envolvente; com as suas diferentes representações, nomeadamente, a algébrica; e com a passagem de uma representação para outra.

Neste capítulo é feita uma abordagem das dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções.

2.1 Conceito de função

O ensino do conceito função através de exemplos contextualizados pode conduzir os alunos a uma aprendizagem e memorização de toda a terminologia própria do tema funções. Akkoç e Tall (2002), nas suas investigações com estudantes, revelam que o estudo da função constante evidencia complicações na compreensão do conceito de função ao associá-la ao conceito de variação. Esse conflito pode dever-se ao facto de a expressão algébrica não envolver o x. Por exemplo, na expressão $y = 5$ o y não varia.

A própria definição de função pode suscitar dúvidas aos alunos. Neves, Leite, Silva e Silva (2010) apresentam duas definições de funções no manual escolar de alunos do 7º ano de escolaridade. A primeira como correspondência entre dois conjuntos: função é uma correspondência entre dois conjuntos onde cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um e um só elemento do segundo conjunto. A segunda como correspondência entre duas variáveis: uma função também é uma correspondência entre duas variáveis x e y, se a cada valor da variável independente corresponde um e um só valor da variável dependente. Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) estas abordagens, não sendo contraditórias, podem criar confusões e dificuldades de aprendizagem, pois os alunos deparam-se com vários termos (conjuntos, elementos, variáveis: variável independente e variável dependente) em torno de um só conceito — o de função.

Por sua vez, Gray e Tall (1994) consideram que as dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de função podem estar associadas ao modo como ele é simbolizado.

2.2 Diferentes tipos de terminologia

Ponte, Branco e Matos (2009) sublinham que os alunos sentem dificuldade em fixar a terminologia própria do tema funções (domínio, contradomínio, objecto, imagem), defendendo por isso, que o seu estudo deve ser realizado com situações da realidade. Para Tall e Bakar (1992), estes conceitos não parecem ficar registados nas memórias dos alunos.

Vários estudos apontam que os alunos fazem interpretações incorrectas quando trabalham com símbolos. Segundo Matos (2008), Booth (1984) identifica três áreas principais em que os alunos manifestam dificuldades: a interpretação das letras, a formalização dos métodos utilizados e a compreensão de notações e convenções. De acordo com Booth os alunos parecem ter tendência para interpretar os símbolos como representantes de números específicos, isto é, como incógnitas e considerarem, por vezes, que os valores assumidos por letras diferentes são necessariamente distintos. Matos (2007) sublinha que esta tendência para a interpretação das letras como incógnitas pode ser influenciada pelas experiências anteriores dos alunos no âmbito da Aritmética, onde um dos objectivos principais, em algumas tarefas, é a determinação de uma resposta numérica particular. A utilização da letra como representante do metro (unidade) e não do número de metros (dimensão) de um determinado comprimento pode, também, contribuir para a confusão do aluno. A mesma autora refere que neste caso, “a letra é entendida como um rótulo”. Nas aulas são utilizadas notações algébricas que podem conduzir a confusões. Quando se usa a letra *s* para representar um número de sapatos num armário, os alunos podem associar a expressão 5*s* como sendo cinco sapatos em vez de a interpretarem como cinco vezes o número de sapatos.

Ainda segundo Matos (2007), Booth (1984) refere as diferentes interpretações do significado de 4*y* identificadas nos desempenhos dos alunos participantes no seu estudo: 4*y* como quatro “*y*’s”, o que revela que a ligação da linguagem natural com a linguagem algébrica é um dos obstáculos cognitivos que os alunos enfrentam.

Ponte *et al.* (2009) afirmam que os alunos mostram dificuldade em lidar eficazmente com a simbologia x, y, $f(x)$. Por vezes, compreendem perfeitamente do que se está a falar quando se diz que “a imagem de 5 é 3”, mas não conseguem entender a expressão $f(5) = 3$. Os alunos têm igualmente dificuldade em determinar um objecto que corresponda a uma imagem dada em situações contextualizadas. Relacionado com este facto, Domingos (1994) refere que os alunos pensam que se a cada valor de x corresponde apenas um valor de y então o contrário também deve ser verdade. Esta situação vai de encontro à importância da compreensão de definição de função.

Para Sajka (2003), a notação de função cria dificuldades relativas ao conceito de função. Por exemplo, a função $f\ (x) = x + 3$ pode ser vista como um processo de cálculo, permitindo calcular o valor da função para determinados valores de x, ou como objecto, ou seja, todo o conceito de função. Mais geralmente, na notação $f\ (x) = y$, em que f designa o nome da função; $f\ (x)$ representa os valores que a função pode tomar dependendo de x, que, por sua vez, é igual a y. Sfard (1991), com o objectivo de minimizar estas dificuldades, sugere que se deve iniciar o estudo das funções introduzindo a ideia de dependência entre variáveis e só posteriormente a definição de função, de uma forma gradual.

As dificuldades que os alunos revelam no tema funções estão, assim, muito relacionadas com a ambiguidade intrínseca do simbolismo matemático, com o contexto restrito no qual os símbolos são ensinados, bem como com o tipo limitado de tarefas, e, ainda, com a própria interpretação que o aluno faz delas (Sajka, 2003).

2.3 Representações

As diferentes representações (por tabelas, por gráficos, algebricamente e verbalmente) são de extrema importância na compreensão do conceito função. Lopes (2003) afirma que os alunos apresentam dificuldades na interpretação da representação gráfica e na sua conversão desta para a linguagem algébrica. Por sua vez, Duval (2002) afirma que se tem acesso ao gráfico, à tabela ou à fórmula que representa a função mas não ao objecto matemático função, assim, não se tem acesso ao objecto matemático propriamente dito que é apresentado pelas suas representações. Cada uma delas transmite informações específicas do objecto sem, no entanto, conseguir descrever completamente o conceito de função.

A falta de competências para coordenar múltiplas representações de um mesmo conceito pode ocasionar inconsistências e atrasos na aprendizagem (Elia e Gagatsis, 2006). Para estes autores, na construção do conceito função estudam-se diversas representações a fim de escolher a mais adequada à situação do problema em questão e para alcançar a compreensão do conceito com a coordenação das várias representações.

Segundo Arcavi (1999), a visualização está presente na vida do ser humano, uma vez que a tecnologia desenvolve e possibilita comunicação essencialmente visual. A representação gráfica permite a visualização de diversos dados, assim como, a possibilidade de fazer interpretações e de concluir informações. Porém, a compreensão de gráficos não é um processo simples. Segundo Kramarski (2004), a construção de uma representação gráfica é muito diferente da sua interpretação. Afirma, ainda, que a interpretação se baseia na reacção do estudante, em que a construção de um gráfico requer o desenvolvimento de ideias que geralmente estão implícitas.

Neste sentido, Friel, Curcio e Bright (2001) consideram que a representação gráfica envolve leitura, descrição, interpretação e análise de dados. Descrevem, ainda, que um dos comportamentos ligados ao trabalho com gráficos é: ter consciência das relações entre as variáveis, na construção e interpretação dos gráficos, e do contexto no qual essas estão sendo utilizadas, com o objectivo de evitar a personalização dos dados representados. Também Kramarski (2004) afirma que através da representação gráfica constrói-se o significado sobre a relação entre as variáveis e sobre o seu padrão de co-variação.

Por sua vez, Ponte (1992) considera que a maioria dos alunos sente muitas dificuldades no pensamento abstracto, em particular no trabalho com gráficos cartesianos, recorrendo frequentemente a estratégias e processos de raciocínio numéricos. Porém, é nas expressões algébricas que os alunos têm um maior contacto com o simbolismo matemático. Por exemplo, nas duas funções $\boldsymbol{y = 4x}$ e $\boldsymbol{y = 3x + 200}$, onde cada uma representa a distância percorrida por um indivíduo ao longo do tempo, verifica-se que a primeira traduz uma função linear numa relação de proporcionalidade directa. Para determinar a distância percorrida pelo respectivo indivíduo ao fim de um certo tempo que os alunos podem usar diversas estratégias, porém, muitas das que os alunos estão habituados a utilizar para resolver problemas deixam de funcionar, como se verifica se for utilizada a proporcionalidade directa na segunda função (Ponte *et all.*, 2009).

Ainda sobre o uso das expressões algébricas, Rossini (2006) considera que elas podem auxiliar na visualização de funções definidas de diferentes formas, na identificação do coeficiente "a" em $y = ax + b$ como taxa de variação, bem como na construção do significado de $f(x)$ e das fórmulas para representação de funções. Neste sentido, dever-se-ia apresentar as expressões algébricas em diversos contextos trabalhando a sua interpretação, pois os alunos para ultrapassarem as dificuldades que apresentam na interpretação das diferentes representações precisam desenvolver as capacidades de identificar, interpretar, descrever e coordenar as situações apresentadas.

Para o auxílio na superação de dificuldades que os alunos enfrentam, é importante que o professor possua conhecimento dessas mesmas dificuldades a fim de criar estratégias que superem as barreiras que os alunos encontram na sua aprendizagem. O aluno tem de explorar novas situações que o conduzam à aquisição de propriedades funcionais, assim como à aquisição da competência para resolver problemas reconhecendo todo o meio envolvente que o conceito de função exige.